Application de la décomposition de Littlewood-Paley à la régularité pour des équations cinétiques de type Boltzmann

Mouhamad El Safadi

THÈSE

PRÉSENTÉE À L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ORLÉANS

par

EL SAFADI Mouhamad

Discipline : **Mathématiques**

Application de la décomposition de Littlewood-Paley à la régularité pour des équations cinétiques de type Boltzmann

Soutenue le : **30/03/2007**

MEMBRES DU JURY:

- Radjesvarane ALEXANDRE — Directeur de thèse, *Université d'Evry Val d'Essonne*
- Stéphane CORDIER — Professeur, *MAPMO, Université d'Orléans*
- Laurent DESVILLETTES — Président, *Ecole normale supérieure de Cachan*
- Pierre-Gilles LEMARIE-RIEUSSET — Professeur, *Université d'Evry Val d'Essonne*
- Clément MOUHOT — Chargé de recherche, *Université de Paris IX-Dauphine*

RAPPORTEURS:

- Pierre-Emmanuel JABIN — Professeur, *Université de Nice-Sophia Antipolis*
- Seiji UKAI — Professeur, *City University of Hong Kong*

Résumé

Nous étudions la régularité des équations cinétiques de type Boltzmann. Nous nous basons essentiellement sur une méthode d'analyse harmonique de type "décomposition de Littlewood-Paley", consistant principalement à travailler avec des couronnes dyadiques. Nous nous intéressons de plus, au cadre homogène où la solution $f(t,x,v)$ dépend uniquement du temps t et de la vitesse v, tout en travaillant avec des sections efficaces réalistes et singulières (non cutoff).

Dans une première partie, nous étudions le cas particulier des molécules Maxwelliennes. Sous cette hypothèse, la structure de l'opérateur de Boltzmann et de sa tranformée de Fourier s'expriment de manière simple. Nous montrons ainsi une régularité globale C^∞.

Ensuite, nous traitons le cas des sections efficaces générales avec "potentiel dur". Nous nous intéressons d'abord à l'équation de Landau. C'est une équation limite de l'équation de Boltzmann prenant en compte les collisions rasantes. Nous prouvons que toute solution faible appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$. Nous démontrons ensuite une régularité identique pour le cas de l'équation de Boltzmann. Notons que notre méthode s'applique directement pour toutes les dimensions, en signalant que les preuves sont souvent plus simples comparées à d'autres preuves plus anciennes.

Enfin, nous terminons avec l'équation de Boltzmann-Dirac. En particulier, nous adaptons le résultat de régularité obtenu dans le travail de Alexandre, Desvillettes, Wennberg et Villani en utilisant le taux de dissipation d'entropie relatif à l'équation de Boltzmann-Dirac.

Mots-clés : Collisions rasantes, décomposition de Littlewood-Paley, espace de Sobolev, entropie, équation de Boltzmann, équation de Landau, théorie cinétique, noyaux singuliers.

Abstract

We study the regularity of kinetic equations of Boltzmann type. We use essentielly Littlewood-Paley method from harmonic analysis, consisting mainly in working with dyadic annulus. We shall mainly concern with the homogeneous case, where the solution $f(t,x,v)$ depends only on the time t and on the velocities v, while working with realistic and singular cross-sections (non cutoff).

In the first part, we study the particular case of Maxwellian molecules. Under this hypothesis, the structure of the Boltzmann operator and his Fourier transform write in a simple form. We show a global C^∞ regularity.

Then, we deal with the case of general cross-sections with "hard potential". We are interested in the Landau equation which is limit equation to the Boltzmann equation, taking in account grazing collisions. We prove that any weak solution belongs to Schwartz space $\mathcal{S}$. We demonstrate also a similar regularity for the case of Boltzmann equation. Let us note that our method applies directly for all dimensions, and proofs are often simpler compared to other previous ones.

Finally, we finish with Boltzmann-Dirac equation. In particular, we adapt the result of regularity obtained in Alexandre, Desvillettes, Wennberg and Villani work, using the dissipation rate connected with Boltzmann-Dirac equation.

Key-words : Boltzmann equation, entropy, grazing collisions, kinetic theory, Littlewood-Paley decomposition, Landau equation, Sobolev space, singulars kernels.

Remerciements

Je tiens tout particulièrement à remercier Radjesvarane (Radja) Alexandre pour le sujet de thèse qu'il m'a proposé. Son soutien sans faille, son enthousiasme et sa bienveillance ont été les moteurs de l'aboutissement de mon travail. Malgré son emploi du temps chargé, il a toujours su se rendre disponible pour me guider avec son amabilité et sa nature joyeuse. Je le remercie aussi pour tous ses conseils, ses remarques fructueuses qui m'ont permis de progresser sereinement tout au long de ce travail.

Je tiens aussi à remercier S. Ukai et P-E. Jabin pour avoir accepté d'être rapporteurs de mes travaux, de leurs lectures attentives et de leurs précieuses remarques.

Je remercie également L. Desvillettes, P-G Lemarié, S. Cordier et C. Mouhot pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres de mon jury de thèse.

Je ne pourrais jamais assez remercier les membres du laboratoire $\mathcal{MAPMO}$ qui ont contribué d'une façon directe ou indirecte au bon déroulement de ces trois années, dans une ambiance très propice au travail. Je tiens à remercier le directeur du laboratoire, Jean-Philippe Anker, pour son soutien, son encouragement à assister aux colloques (écoles d'été, séminaires, ...) en croisant des collègues de recherche tout en échangeant nos différents points de vue. Je remercie aussi Maitine Bergounioux pour le bon choix et le bon déroulement de mes enseignements au sein du labo. Sans oublier tous mes collègues enseignants avec qui j'ai eu le plaisir d'enseigner les mathématiques, les secrétaires qui ont fait un travail formidable pour simplifier la partie administrative durant toute la période de ma thèse. Impossible d'oublier mes compagnons thésards, passés et présents, Kacim, Olivier, Bruno, Hermine, Erba, Mehdi, Vothi et Dominique. Ainsi que Faires, Jradeh, Hajj Hasan, Laurent, Laurence, Lina, Guillaume, Bassirou, Pierre, Radwan, Tirani et Chérif. Avec eux, j'ai vécu de bons moments avec des agréables discussions mathématiques autour de groupe de travail des thésards, que j'ai le plaisir de co-organiser aujourd'hui. A tous, je souhaite une bonne continuation avec plein de succès.

Je remercie également tous mes professeurs de DEA, du $\mathcal{MAPMO}$ et du laboratoire $\mathcal{LMPT}$ à Tours qui m'ont beaucoup apporté en se permettant de faire mes premiers pas dans la recherche. En particulier, je tiens à remercier El Soufi et Ilias pour leur soutien et leur encouragement durant la période de mon stage effectué au sein de laboratoire $\mathcal{LMPT}$.

Je ne veux surtout pas oublier tous mes professeurs qui sont succédé depuis mes premiers pas à la maternelle jusqu'à mes différents diplômes scolaires et universitaires. C'est grâce à eux que j'ai appris la science et les bonnes manières afin de réussir dans ma vie académique.

Pour finir, je remercie les membres de ma famille, en particulier, mes parents à qui je dois énormément pour leur soutien, leurs encouragements et leur amour durant toute les étapes de ma vie, à mes deux frères le dentiste et le petit grand médecin, ainsi qu'à mes quatres petites adorables soeurs. Sans oublier mes oncles, mes cousins, mes cousines, mes amis, mes proches et tous ceux qui m'ont aimé, aidé, soutenu et cru en moi.

MOUHAMAD

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 L'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann est un modèle de base de la théorie cinétique des gaz raréfiés. Elle modélise en particulier les collisions entre particules dans ce type de gaz.

Elle a été décrite par tout d'abord par *Maxwell*, ensuite par *Ludwig Boltzmann* qui ont introduit la fonction de distribution $f(t,x,v)$, décrivant de façon probabiliste l'état d'un système de particules dans l'espace des positions et des vitesses.
A partir des lois des chocs élastiques, ils décrivent une équation d'évolution non linéaire pour la fonction de distribution, nommée depuis, équation cinétique de Boltzmann.
Les divers moments statistiques des solutions de cette équation peuvent alors être directement interprétés comme étant les grandeurs macroscopiques mesurables: la masse volumique, la quantité de mouvement, la pression, la température, l'énergie interne.
Via le passage à la limite hydrodynamique dans cette équation, on retrouve des équations de la mécanique des fluides, tout au moins pour des régimes particuliers.

Pour écrire cette équation, on considère que les molécules ont un mouvement de translation rectiligne et uniforme jusqu'au moment où elles sont brutalement déviées du fait d'une collision avec une autre molécule du gaz. Dans le cas d'interations centrales qui donnent lieu à des chocs élastiques [20, 28, 31, 29], elle s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_x f = Q(f,f) \tag{1.1}$$

où $f(t,x,v)$ est la densité de particules ayant la vitesse $v \in \mathbb{R}^n$, la position $x \in \mathbb{R}^n$, à l'instant $t \in \mathbb{R}^+$.
Q est un opérateur quadratique de la forme

$$Q(f,f)(t,x,v) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} [f'f'_* - ff_*]B(v-v_*,\sigma)dv_*d\sigma.$$

Nous avons adopté les notations classiques:

$$f' = f(t,x,v'),\ f'_* = f(t,x,v'_*),\ f = f(t,x,v),\ f_* = f(t,x,v_*),$$

avec une paramétrisation sphérique (σ-représentation) de la forme

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|\sigma}{2},\ \ v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|\sigma}{2}$$

telle que (v',v'_*) et (v,v_*) représentent respectivement les vitesses pré et post-collisionnelles. L'élasticité du choc se traduit par la conservation du nombre de particules, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique, soit

$$\begin{cases} v' + v'_* = v + v_* \\ \\ |v'|^2 + |v'_*|^2 = |v|^2 + |v_*|^2. \end{cases}$$

La fonction $B \geq 0$ est liée à la section efficace, décrivant le type d'interactions entre les particules. Elle dépend uniquement du module de la vitesse relative $|v - v_*|$ et de l'angle de deviation $\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma$. Pour des raisons de symétrisation de l'opérateur Q, on se ramène à l'hypothèse $(v - v_*,\sigma) > 0$.
Les changements de variables unitaires

$$(v,v_*,\sigma) \to (v,v_*,-\sigma) \text{ et } (v,v_*,\sigma) \to (v',v'_*,k)\ ;\ k = \frac{v-v_*}{|v-v_*|},$$

laissent invariante la section efficace. Ils permettent d'obtenir, à partir d'une fonction test quelconque $\varphi = \varphi(v)$, l'égalité suivante

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,f)\varphi(v)dv = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|,\sigma)ff_*[\varphi' + \varphi'_* - \varphi - \varphi_*]dvdv_*d\sigma.$$

Par définition, les invariants collisionnels sont les fonctions test qui annulent la quantité précédente.
Cela revient à résoudre l'équation fonctionnelle suivante

$$\forall\ v,v_*,\sigma \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^{n-1} : \varphi(v') + \varphi(v'_*) - \varphi(v) - \varphi(v_*) = 0.$$

On vérifie immédiatement que les fonctions $\varphi = 1,v_1,\ldots,v_n,|v|^2$ sont des invariants collisionnels. On en déduit les propriétés de conservation suivantes:
- Conversation de la masse

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)dv\ ;$$

- Conservation du moment

$$\int_{\mathbb{R}^n} vf(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} vf_0(v)dv\ ;$$

- Conservation de l'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 f(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 f_0(v)dv.$$

En prenant $\varphi(v) = \log f(v)$, on obtient aussi l'égalité dite d'entropie suivante

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} f \log f dv + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma)\{f'f'_* - ff_*\} \log\{\frac{f'f'_*}{ff_*}\} dv dv_* d\sigma = 0.$$

L'étude mathématique de l'équation de Boltzmann, pour des noyaux singuliers, et dans le cas de données initiales générales, reste limitée.
En particulier, la plupart des travaux concernent le cas homogène, où les solutions $f(t,x,v)$ ne dépendent plus de la variable x.
Cette hypothèse est couramment utilisée en physique pour les problèmes centrés sur l'opérateur de collision ; elle paraît alors assez naturelle puisque cet opérateur n'agit que sur la variable de vitesse.

Nous consacrerons donc cette thèse au cadre homogène de cette équation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Q(f,f) \tag{1.2}$$

où l'inconnue est une fonction $f(t,v)$ définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.
Q est l'opérateur quadratique donné sous la forme

$$Q(f,f)(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} [f(t,v')f(t,v'_*) - f(t,v)f(t,v_*)] B(v-v_*,\sigma) dv_* d\sigma.$$

La simplification apportée par cette équation par rapport au cas général (inhomogène) est due au fait que le terme de transport disparait, ce qui simplifie considérablement l'étude de cette équation.
L'opérateur de Boltzmann agit essentiellement sur la variable v, ainsi ses propriétés formelles, évoquées ci-dessus pour le cas général, restent valables aussi dans le cas homogène.
Signalons que la théorie homogène, avec l'hypothèse de cutoff de Grad (cf. paragraphe suivant), est maintenant très avancée, et comporte de nombreux résultats mathématiques satisfaisants, dont des théorèmes d'existence, d'unicité, de propagation de régularité et de retour vers l'équilibre. Toutefois, dans cette thèse, nous travaillerons plutôt avec des noyaux de collision singuliers (non cuttof).

1.1.1 Sections efficaces.

Dans le cas du modèle des sphères dures, où les particules rebondissent les uns sur les autres comme des boules des billards, la section efficace s'écrit dans la dimension 3 de manière simple, $B(z,\sigma) = |(z,\sigma)|$. Par contre, dans le cas $n = 3$, pour les particules qui se repoussent via des forces proportionnelles à $\frac{1}{r^s}$ (r désignant la distance entre les particules et $s > 2$), elle s'écrit, approximativement, comme produit de deux fonctions de la forme suivante

$$B(v - v_*,\sigma) = |v - v_*|^\gamma b(k.\sigma) \text{ avec } k = \frac{v - v_*}{|v - v_*|} \text{ et } \gamma = \frac{(s-5)}{(s-1)}. \tag{1.3}$$

La fonction b est définie implicitement. Elle est positive, localement régulière avec une forte singularité (non intégrable) près de 0 de la forme

$$\begin{cases} \sin^{n-2}\theta b(cos\theta) \sim K\theta^{-1-\nu} \text{ pour } \theta \to 0, \\ \\ \text{avec } \nu = \frac{2}{s-1} > 0, \quad \cos\theta = k.\sigma, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } K > 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Dans cette thèse, nous travaillons dans le cadre des sections efficaces (1.3) et (1.4), en admettant cette forme pour $n \geq 3$.
Selon les valeurs de l'exposant γ, on a la classification suivante, quelle que soit la forme de la fonction b:

- si $\gamma > 0$, on parle de potentiels durs ;
- si $\gamma = 0$, il s'agit d'un gaz de Maxwell ;
- si $\gamma < 0$, on parle de potentiels mous ;
- si $\gamma = -3$, il s'agit d'un gaz de Coulomb.

L'étude mathématique de l'équation de Boltzmann se divise essentiellement suivant que l'on fasse l'une des deux hypothèses suivantes

$$\sigma \to B(v - v_*,\sigma) \in L^1(S^{n-1}), \tag{1.5}$$

ou

$$\sigma \to B(v - v_*,\sigma) \notin L^1(S^{n-1}). \tag{1.6}$$

En particulier, le cas des potentiels répulsifs vérifie (1.6).
Dans le cas (1.5) dit de cutoff ou encore non singulier, cette hypothèse simplificatrice implique une troncature angulaire qui permet d'éviter le problème d'intégralité en zéro.
Par conséquent, dans ce cas, il est possible de séparer l'opérateur de collision en deux parties, positive et négative respectivement, $Q = Q^+ - Q^-$ d'une façon évidente. C'est-à-dire, en posant

$$A(z) = \int d\sigma B(z,\sigma), \quad L(f) = A * f,$$

on aura la décomposition suivante

$$Q(f,f) = Q^+(f,f) - fLf, \tag{1.7}$$

sur laquelle reposent la plupart des travaux concernant l'équation de Boltzmann.
Du point de vue physique, le cadre naturel de travail pour l'équation de Boltzmann ne comporte pas de troncature angulaire. Dans ce cas, la décomposition (1.7) facilite relativement l'étude mathématique d'une telle équation.

1.1.2 Notations

Nous travaillerons dans cette thèse avec des espaces fonctionnels à poids qui apparaissent traditionnellement dans le cadre des équations cinétiques. Dans le cas général, les différentes estimations concernant de telles équations sont obtenues à partir des lois de conservation physique et des propriétés de propagation/gain des moments. On pose, pour s, p et α réels convenables

$$\begin{cases} \|f\|_{L^1_\alpha} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(v)|(1+|v|^2)^{\frac{\alpha}{2}} dv, \text{ moment d'ordre } \alpha, \\ \\ \|f\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s dv, \text{ norme Sobolev d'ordre } s, \\ \\ \|f\|^2_{H^s_\alpha} = \|f(.)(1+|.|^2)^{\frac{\alpha}{2}}\|^2_{H^s}, \text{ norme Sobolev d'ordre } s, \text{ avec poids d'ordre } \alpha. \end{cases}$$

Introduisons l'espace "d'entropie"

$$L\log L = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^n); \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f(v)|\,|\log(|f(v)|)| dv < +\infty \right\}.$$

Pour une donnée initiale f_0, on note respectivement par

$$M_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v) dv, \;\; E_0 = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 f_0(v) dv,$$

$$H_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f_0 \log f_0(v) dv$$

la masse, l'énergie et l'entropie initiales.
Nous utiliserons aussi la notion de commutateur entre deux opérateurs par exemple A et B, défini par $[A,B] = AB - BA$.

1.1.3 Existence, Unicité

Les travaux mathématiques concernant l'équation (1.2), et sous l'hypothèse de troncature (1.5), sont nombreux. Carleman [26], Povzner [60] et Arkeryd [14] ont donné des résultats

d'existence, d'unicité et de convergence vers l'équilibre sous la condition de moments initiaux finis (masse, énergie et entropie initiales finies).
Ces résultats ont été améliorés progressivement par différents auteurs [45, 51, 36, 80, 70, 52].

Par contre, les résultats sous l'hypothèse (1.6) sont relativement limités.
Le premier travail est du à Arkeryd [15] qui a prouvé l'existence d'une solution faible pour des potentiels mous, avec $\gamma \geq -1$ en dimension 3. Ensuite, Arkeryd [16] et Elmroth [45] ont étudié le cas des potentiels durs. Des noyaux plus généraux ont été traité par Goudon [50]. Récemment, Villani [74] a démontré l'existence d'une solution faible, pour une large classe de sections efficaces, définie comme suit

Définition 1.1.1 *Soit f_0 une fonction initiale définie sur $\mathbb{R}^n$ de masse, énergie et entropie finies. On dit que $(t,v) \mapsto f(t,v)$ est une solution faible ($-2 \leq \gamma < 1$) et une H-solution faible ($-3 \leq \gamma \leq -2$) pour le problème de Cauchy asscié à l'équation (1.2) si elle vérifie les conditions suivantes:*

a) $f \geq 0$; $\quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+ ; \mathcal{D}')$; $\quad \forall t > 0, \; f \in L \log L \cap L^1_2(\mathbb{R}^n)$;

$$f \in L^1([0,T], \, L^1_{2+\gamma}).$$

b) $f(0) = f_0$.

c) $\forall t \geq 0, \quad \int f(t)\psi = \int f_0 \psi$ *for* $\psi = 1, \, v_i, \, |v|^2$.

$$\int f \log f(t) \leq \int f_0 \log f_0.$$

d) $\forall \; \phi(t,v) \in C^1(\mathbb{R}^+ ; \; C^\infty_0(\mathbb{R}^n)), \;\; \forall t \geq 0,$

$$\int f(t)\phi(t) - \int f_0\phi_0 - \int_0^t f(\tau)\partial_t\phi(\tau) = \int_0^t d\tau Q_B(f,f)(\tau)\phi(\tau).$$

Dans la formule ci-dessus, la dernière intégrale est définie par la formule suivante, pour ϕ régulière

$$\int Q_B(f,f)\phi = \frac{1}{2}\int dv dv_* d\sigma B(v-v_*,\sigma) f(v) f(v_*)[\phi(v) + \phi(v_*) - \phi(v') - \phi(v'_*)].$$

Connaissant le résultat d'unicité dans le cas des molécules Maxwelliennes, voir [67]. Des travaux récents, traitant les différents cas de sections efficaces, duent à Fournier, Desvillettes et Mouhot, Fournier et Mouhot, voir [47, 49, 39].

1.2 Equation de Landau

Dans le cas des interactions coulombiennes (s=2), l'équation de Boltzmann n'a pas de sens. Cependant, par une dérivation physique directe, Lev Davidovitch Landau introduit en 1936 un opérateur de Landau, donné par

$$Q_L(f,f) = \nabla_v \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(v - v_*)[f_* \nabla_v f - f \nabla_{v_*} f] dv_* \right), \tag{1.8}$$

où Λ est une constante, $a(z) = \Lambda \Pi(z)|z|^2 \chi(|z|)$, $\Pi(z)$ est le projecteur orthogonal sur le plan perpendiculaire à z, i.e.

$$\Pi_{i,j}(z) = \delta_{i,j} - \frac{z_i z_j}{|z|^2}.$$

Ici, et par la suite, nous utilisons la convention d'Einstein pour la sommation sur les deux indices i et j.
L'équation de Landau, correspondant à l'opérateur (1.8), s'écrit sous la forme suivante

$$\partial_t f + v \nabla_x f = Q_L(f,f) \tag{1.9}$$

où $f(t,x,v)$ est la densité de particules prises à la position $x \in \mathbb{R}^n$ pour une vitesse $v \in \mathbb{R}^n$ à un temps $t \in \mathbb{R}^+$.

Le phénomène qui explique cette asymptotique formelle est la limite dite de collisions rasantes pour lesquelles l'angle de deviation θ est proche de 0. Celle-ci est maintenant bien comprise suite à de récents travaux mathématiques. Grosso modo, on considère des sections efficaces B_ε telle que la partie angulaire b_ε dépend d'un paramètre de collision ε de manière à priviliéger les collisions rasantes.
La fonction χ est positive, et dépend du type d'interactions entre les particules. Ainsi, dans le cas où les particules réagissent suivant une force proportionnelle à $\frac{1}{r^s}$ (r est la distance entre les particules et $s > 2$), cette fonction est de la forme $\chi(|v|) = |v|^\gamma$.
Pour l'équation de Landau, on introduit la même classification que pour l'équation de Boltzmann (suivant les valeurs de γ):

- si $\gamma > 0$, potentiels durs;
- si $\gamma = 0$, gaz de Maxwell;
- si $\gamma < 0$, potentiels mous;
- si $\gamma = -3$, gaz de Coulomb.

L'équation de Landau vérifie des propriétés formelles semblables à celles de l'équation de Boltzmann: pour une fonction test $\varphi = \varphi(v)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q_L(f,f)\varphi(v) dv = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(v - v_*) f_* \partial_j f [\partial_i \varphi - \partial_i \varphi_*] dv dv_*.$$

Si on choisit $\varphi(v) = 1, v_i, |v|^2$, qui représente des invariants de collision, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,f)\varphi(v) dv = 0$$

qui donne les conservations de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.
En choisissant aussi $\varphi(v) = \log f(v)$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q_L(f,f) \log f dv$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} a_{i,j}(v - v_*) \left(\frac{\partial_i f}{f} - \frac{(\partial_i f)_*}{f_*} \right) \left(\frac{\partial_j f}{f} - \frac{(\partial_j f)_*}{f_*} \right) dv dv_*.$$

Cette quantité est négative et ne s'annule que si f est une Maxwellienne locale.
Comme pour l'équation de Boltzmann, l'étude mathématique de l'équation (1.9) dans le cas général (inhomogène) reste limitée. On note à ce niveau le résultat de Yan Guo [81].
Par contre, le travail sur le cas homogène a connu beaucoup d'avancées, concernant par exemple des théorèmes d'existence, d'unicité ainsi que d'autres propriétés qualitatives des solutions.
Dans le cas homogène, l'équation de Landau s'écrit sous la forme

$$\partial_t f = Q_L(f,f) \tag{1.10}$$

où la densité f dépend uniquement du temps t et de la vitesse v.
Arsen'ev et Buryak [18], ont montré la convergence de l'équation de Boltzmann vers l'équation de Landau sous des hypothèses très restrictives sur la section efficace et sur la condition initiale. Degond et Lucquin [33], ont étudié la convergence des opérateurs dans le cas physique des potentiels de Colomb ($\gamma = -3$) en utilisant l'approximation suivante

$$b_\varepsilon = \frac{1}{|\log \varepsilon|} \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin^3(\frac{\theta}{2})} I_{\theta \geq \varepsilon}.$$

Desvillettes [34], a fait un travail similaire en utilisant l'approximation suivante

$$b_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{\varepsilon^3} b(\frac{\theta}{\varepsilon}),$$

mais pour des potentiels excluant le cas coulombien. La normalisation introduite par Villani [74], qui inclut celle de Degond et Lucquin et celle de Desvillettes, sera utilisée dans ce paragraphe. On considère donc des sections efficaces $b_\varepsilon : [0,\pi] \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$\begin{cases} \forall \theta_0 > 0,\ b_\varepsilon(\cos\theta) \to_{\varepsilon\to 0} 0 \text{ uniformément sur } \theta \in [\theta_0,\pi] \\ \\ \Lambda_\varepsilon = \pi \int_0^\pi \sin^2(\frac{\theta}{2}) b_\varepsilon(\theta) d\theta \to_{\varepsilon \to 0} \Lambda > 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

La constante Λ qui apparait dans la dernière égalité est la même que celle qui apparait dans la définition de la matrice de collision a de l'équation de Landau.
On peut alors montrer que l'opérateur de Boltzmann associé à (1.11) tend asymptotiquement

vers l'opérateur de Landau dont la section efficace, en particulier la fonction χ, est obtenue directement comme limite de celle de Boltzmann. De ce lien avec l'opérateur de Boltzmann, nous pouvons donc parler d'opérateur de Landau à potentiel dur, mous ou molécules Maxwelliennes, selon le comportement de χ.
Enonçons le théorème donné par Villani [74], qui résume l'existence dans les différents cas de sections efficaces :
Théorème 1.2.1 *Soit b_ε une suite de sections efficaces angulaires se concentrant sur les collisions rasantes au sens (1.11).*
On note Q_ε l'opérateur de Boltzmann associé à la section efficace $|z|^\gamma b_\varepsilon(\theta)$, et Q_L l'opérateur de Landau associé à la fonction $\chi(|z|) = |z|^\gamma$. On se donne $f_0 \in L\log L \cap L^1_2(\mathbb{R}^3)$ une donnée initiale.

i) *Si $\gamma > 0$ et $f_0 \in L^1_{2+\delta}$, pour $\delta > 0$ ou si $-2 \leq \gamma \leq 0$, alors pour tout ε il existe une solution faible f_ε au problème de Cauchy associé à Q_ε ; à extraction près, (f_ε) converge faiblement vers une solution faible f de l'équation de Landau associée à Q_L. De plus, si $f_0 \in L^1_{2+\gamma}(\mathbb{R}^3)$, alors pour toute fonction-test $\phi(v)$, les applications $t \mapsto \int f_\varepsilon(t,v)\phi(v)dv$, et $t \mapsto \int f(t,v)\phi(v)dv$ sont lipschitziennes.*

ii) *Si $-3 \leq \gamma \leq -2$, alors la même conclusion est vraie si l'on remplace "solution faible"; par "H-solution". De plus, pour toute fonction test $\phi(v)$, les applications $t \mapsto \int f_\varepsilon(t,v)\phi(v)dv$, et $t \mapsto \int f(t,v)\phi(v)dv$ appartiennent à $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^+)$.*

La définition d'une solution faible et H-solution faible pour l'équation de Landau est similaire à celle (définition 1.1.1) pour l'équation de Boltzmann, avec la formule suivante

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q_L(f,f)\phi = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} ff_* a_{i,j}(v-v_*)(\partial_{i,j}\phi - (\partial_{i,j}\phi)_*)dvdv_*$$
$$+\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} ff_* b_i(v-v_*)(\partial_i\phi - (\partial_i\phi)_*)dvdv_* \text{ avec} b_i = \partial_j a_{i,j}.$$

La question de l'unicité pour l'équation de Landau homogène, a déjà étudié par Arsen'ev et Buryak [18] pour des sections efficaces, physiquement peu réalistes, et avec des données initiales très régulières. Ensuite, Desvillettes et Villani [41] l'ont obtenu dans un cadre très général, en utilisant un lemme de type Gronwall et en tenant compte du gain des moments.

1.3 Propagation des moments

La plupart des travaux concernant les estimations des moments pour l'équation de Boltzmann sont basés sur la formulation faible

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,f)\phi(v)dv = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} dvdv_* ff_* \int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|,\cos\theta)(\phi' + \phi'_* - \phi - \phi_*)d\sigma. \tag{1.12}$$

Dans le cas où on cherche l'estimation d'énergie pour $\phi(|v|) = |v|^2$, en prenant par exemple la section efficace correspond au potentiel dur (sous la forme (1.3) pour $\gamma > 0$), l'intégrale

(1.12) sera formellement nulle.
Pour lui donner un sens, il suffit de prendre $f \in L^1([0,T],\ L^1_{2+\gamma}(\mathbb{R}^n))$ d'où l'interêt de chercher des estimations pour les moments d'ordre $2+\gamma$ pour $\gamma > 2$ (i.e $\phi(|v|) = |v|^s,\ s > 2$).
Elmroth [45] et Gustaffson [51] ont donné une estimation uniforme en temps sur les moments d'ordre plus grand que 2. Ensuite, Desvillettes [36] a prouvé qu'on gagne directement tous les ordres de moments de f, en supposant seulement que la donnée initiale $f_0 \in L^1_s$ pour $s > 2$. Ce résultat a été également amélioré, par Mischler et Wennberg [70] qui l'ont obtenu avec l'hypothèse $f_0 \in L^1_2$.
Dans le cas d'une sections efficace Maxwellienne, Ikenberry and Truesdell [59] ont démontré la propagation des moments pour tous les ordres. Pour les potentiels mous, on a pour l'instant seulement qu'un contrôle local en temps (Cf [36]).
Pour résumer ce qu'on a évoqué, concernant les estimations des moments, on donne le théorème suivant qui rassemble les différents cas, y compris singulier et non singulier

Théorème 1.3.1 (Villani: review mathématique)
Soit $B(|v-v_*|, \cos\theta) = |v-v_*|^\gamma b(\cos\theta)$ *un noyau de collision,* $-3 \le \gamma \le 1$, $\int_0^\pi b(\cos\theta)(1-\cos\theta) sin^{n-2}\theta d\theta < +\infty$. *Soit* $f_0 \in L^1_2(\mathbb{R}^n)$ *une donnée initiale dont la masse et l'énergie initiales sont finies. Si* $f(t,v)$ *est une solution faible de l'équation de Boltzmann,* $f(0,.) = f_0$*, alors l'énergie cinétique* $\int f(t,v)|v|^2 dv$ *est décroissante. De plus, si*

$$M_s(t) = \int f(t,v)|v|^s dv,$$

on a,

i) *Si* $\gamma = 0$*, alors pour tout* $s > 2$,

$$\forall t > 0,\ M_s(t) < +\infty \Longleftrightarrow M_s(0) < +\infty,$$

$$M_s(0) < +\infty \Longrightarrow \sup_{t\ge 0} M_s(t) < +\infty.$$

ii) *Si* $\gamma > 0$*, alors pour tout* $s > 2$,

$$\forall t_0 > 0, \quad \sup_{t \ge t_0} M_s(t) < +\infty.$$

iii) *Si* $\gamma < 0$*, alors pour tout* $s > 2$,

$$\forall t > 0,\ M_s(t) < +\infty \Longleftrightarrow M_s(0) < +\infty.$$

De plus,

a) *Si* $\gamma > -2$*, on a*

$$M_s(0) < +\infty \Longleftrightarrow \exists C > 0, \quad M_s(t) \le C(1+t).$$

b) *Si* $\gamma < -2$, *on a*

$$M_s(0) < +\infty \Longleftrightarrow \exists C > 0,\, \exists \lambda > 0, \quad M_s(t) \leq C(1+t)^{\lambda}.$$

La constante C *est explicite.*

Pour l'équation de Landau, on a le même théorème avec une légère différence concernant la partie ii) qui restera vraie à partir d'une constante $s_0 > 2$, voir [41].

1.4 Le problème de la régularité

Commençons par quelques rappels dans le cas non singulier. Dans ce cadre, l'étude de la régularité de l'équation homogène de Boltzmann a connu des avancées importantes ces deux dernières décennies. Elle se base principalement sur l'action de l'opérateur de collision sur la variable v. D'une part, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il y a une propagation uniforme ou une apparition de tous les moments, selon les sections efficaces choisies, obtenues avec des constantes explicites. D'autre part, on a aussi l'existence de bornes uniformes pour les normes L^p $(p > 1)$ et la propagation de régularité.
Pour les études au niveau des estimations des normes L^p $(1 < p < \infty)$, toujours dans le cas non singulier (voir 1.5), nous renvoyons aux travaux de Carleman [26, 27], Arkeryd [17] puis Gustaffon [51, 52], ce dernier a utilisé principalement une interpolation non linéaire entre les théories L^1 et L^∞.
Dans le même cadre, une étude récente sur de telles estimations de normes L^p est due à Mouhot et Villani [71]. Ils ont prouvé la propagation d'intégrabilité pour la norme L^p $(1 < p < +\infty)$ de la solution f, ainsi que la propagation d'une borne uniforme dans l'espace de Sobolev H^k pour $k \in \mathbb{N}$. Leur travail est basé essentiellement sur les propriétés de régularité de l'opérateur de gain Q^+, qui joue un rôle important pour avoir les effets régularisants associé à f.

Par rapport au cas étudié dans cette thèse, à savoir pour des noyaux de collision singuliers, Desvillettes et Mouhot [38] ont donné des nouvelles estimées à priori sur l'opérateur de collision. Ils ont principalement utilisé l'inégalité de Young avec un paramètre libre (à adjuster en fonction de l'angle de collision θ da la collision), en utilisant le changement de variables pré-post collisionnel unitaire et le découpage de l'opérateur de collision en deux parties: avec troncature angulaire et sans troncature.

En ce qui concerne la régularité, les travaux concernant l'équation de Boltzmann (sans troncature angulaire) et l'équation de Landau ainsi que les résultats obtenus dans cette thèse seront résumés dans les 3 paragraphes suivants:

1.4.1 Le cas des molécules Maxwelliennes

Le chapitre 3 est consacré à étudier les effets régularisants de l'équation homogène de Boltzmann dans le cas particulier correspondant au potentiel Maxwellien.

Dans ce cas, le noyau de collision prend une forme plus simple, dépendant uniquement de l'angle de deviation entre les particules avant et après la collision.
Ainsi, dans le cas traité dans cette thèse (i.e des interactions proportionnelles à $\frac{1}{r^s}$), il prendra la forme (1.3) et (1.4) correspondant au $\gamma = 0$.
La question de la régularité, pour ce type de noyau, a été étudiée pour la première fois par Laurent Desvillettes [37], qui a prouvé de la régularité globale pour tout temps $t > 0$, tout en l'obtenant partiellement par rapport à l'espace des vitesses. Ce résultat, qui a été obtenu uniquement pour $n = 2$, se résume dans le théorème suivant
Théorème 1.4.1 *Soit f_0 une donnée initiale satisfaisant*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_0(v)\{1 + |v|^2 + |\log f_0(v)|\}dv < +\infty.$$

Soit B un noyau de collision de type Maxwellien $B(v - v_*,\sigma) = b(\cos\theta)$ telle que b satisfait (1.4). Alors il existe une solution faible f de l'équation homogène de Boltzmann telle que pour tout $t_0 > 0$, $\epsilon > 0$

$$f \in L^1_{loc}([t_0, +\infty[\ ;\quad H^{1-\epsilon}(\mathbb{R}^2_v)) \cap L^\infty_{loc}([t_0, +\infty[\ ;\quad H^{\frac{3-\nu}{2}-\epsilon}(\mathbb{R}^2_v)).$$

Le fait de travailler en dimension 2 permet l'utilisation d'une paramétrisation polaire des variables, facilitant considérablement les calculs.
D'autres résultats sont ensuite apparus, avec parfois une approche probabiliste. Nous renvoyons au chapitre 3 pour plus de références.

Nous étudierons cette régularité dans le chapitre 3, en utilisant la méthode de décomposition de Littlewood-Paley. Ce travail est la première tentative d'utilisation sysématique d'une telle décomposition pour étudier la régularité pour les équations de type cinétique.
Ainsi, en se basant sur cette décomposition, nous avons prouvé en collaboration avec Radjesvarane Alexandre[1] une régularité globale pour tout $t > 0$, à savoir ici $C^\infty_v(\mathbb{R}^n)$. Notre résultat est résumé par le théorème
Théorème 1.4.2 *Soit f_0 une donnée initiale de masse, énergie et entropie initiales finies. Soit B un noyau de collision satisfaisant (1.4). Alors toute solution faible f de l'équation homogène de Boltzmann vérifie: pour tout $s \in \mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$, $f(t) \in H^s(\mathbb{R}^n)$.*
De plus, notre méthode s'applique directement pour toutes les dimensions n ; nous obtenons ainsi une régularité globale en temps ($\forall\ t > 0$) et en espace ($H^s\ \forall\ s \in \mathbb{R}^+$), donc C^∞ en variable v.

La stratégie consiste à utiliser une norme équivalente à la norme de Sobolev classique H^s en utilisant la décomposition dyadique.
Elle sera de la forme suivante $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ks}\|p_k f\|_{L^2}$, où $(p_k f)_k$ sont les composantes dyadiques de

1. radja.alexandre@univ-evry.fr

f. On applique alors l'égalité de Plancherel dans L^2 afin d'utiliser la transformation de Fourier. Ainsi, connaissant la transformée de Fourier de l'opérateur de Boltzmann, donnée dans [8], qui a une forme simple dans le cas des noyaux de type Maxwellien, on utilise essentiellement le lemme de Bochner et des résultats de minoration donnés dans [8], pour obtenir une inégalité différentielle dont l'inconnue est $\|p_k f\|^2_{L^2}$.
Nous en déduisons une estimation sur $\|p_k f\|^2_{L^2}$. Une itération permet alors d'améliorer à chaque pas cette estimation.

Le cas de sections non Maxwelliennes est nettement plus difficile. Il sera abordé dans le chapitre 5, après avoir consacré le chapitre 4 suivant à l'équation de Landau, qui permet en outre de bien cerner les difficultés pour ce type de noyaux.

1.4.2 L'équation homogène de Landau dans le cas des potentiels durs

L'étude du problème de Cauchy pour l'équation homogène de Landau a été initiée par Arsen'v et Buryak [18] dans le cas où la section efficace χ est à la fois régulière et bornée, et ce pour des données initiales assez régulières. Ils obtiennent ainsi une solution assez régulière C^∞ à décroissance rapide.
Ensuite, Desvillettes et Villani, [41], ont introduit deux types de problèmes approchés pour obtenir des solutions régulières pour l'équation de Landau.
Le premier est une approche linéaire parabolique dans des classes convenables de fonctions à décroissance rapide, qui donne que toute solution faible de l'équation de Landau est régulière dans l'espace H^1, dès que la donnée initiale est dans L^2. Ceci revient à considérer la solution f du problème non linéaire $\partial_t f = Q_L(f,f)$ comme une solution d'un problème linéaire parabolique de la forme $\partial_t g = Q_L(f,g)$. On remplace ensuite ce problème linéaire par un problème linéaire approché $\partial_t g^\varepsilon = Q^\varepsilon_L(f^\varepsilon,g^\varepsilon)$ et on effectue des estimations de régularité sur g^ε, uniformes en ε. Tout point d'accumulation g de (g^ε) est une solution de $\partial_t g = Q_L(f,g)$, en prouvant qu'on a bien sûr un résultat d'unicité.
La seconde approche est non linéaire et se présente sous la forme suivante
Définition 1.4.1 *Soit $r \mapsto \lambda(r)$ une fonction positive et croissante sur $\mathbb{R}^+$, égale à zéro pour $r \leq \frac{1}{4}$ et à 1 pour $r \geq \frac{1}{2}$. Une famille de solutions approchées de l'équation de Landau sera une suite de solutions régulières (dans $C^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_v))$) des équations approchées suivantes*

$$(1.13) \qquad \begin{cases} \partial_t f^\varepsilon = Q_\varepsilon(f^\varepsilon,f^\varepsilon) + (\varepsilon + \lambda(\varepsilon.))\nabla_v f^\varepsilon - \varepsilon^2 \nabla\nabla\lambda(\varepsilon.) f^\varepsilon, \\ \\ f^\varepsilon(0) = f^\varepsilon_{in} \end{cases}$$

où on prend une famille approchée de sections efficaces pour l'opérateur de Landau et une famille approchée de données initiales f_{in} de la forme $(f^\varepsilon_{in})_{\varepsilon>0}$ (dans $L^1_{2+\delta} \cap L\log L(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\delta > 0$.

On a tout d'abord le théorème

Théorème 1.4.3 *Soit $f_{in} \in L^1_{2+\delta} \cap L\log L(\mathbb{R}^n)$ pour un certain $\delta > 0$. On a*

i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution approchée f^ε pour l'équation de Landau avec f_{in} comme donnée initiale, au sens de la définition (1.13).*

ii) *On peut extraire une sous suite $(f^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge faiblement dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}^+ \ ; \ L^1(\mathbb{R}^n))$ pour tout $p \in (1, +\infty)$ vers une solution faible f de l'équation de Landau, satisfaisant les propriétés de conservation de la masse, la décroissance de l'énergie et d'entropie.*

La stratégie suivie pour avoir de la régularité est la suivante: on se fixe une suite de données initiales $f_{in,\zeta}$ telle que $f_{in,\zeta} \mapsto f_{in}$ dans $L^1_2(\mathbb{R}^n)$ pour $\zeta \mapsto 0$. On considère le problème approché (1.13) avec la solution f^ε_ζ, correspondant à la donnée initiale $f_{in,\zeta}$.
L'équation (1.13) admet une unique solution régulière dans $C^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_v))$ (voir [18]). On utilise la propagation des moments pour avoir des estimations sur f^ε_ζ, indépendement de ε. Et donc, le passage à la limite quand $\varepsilon \mapsto 0$ donne une solution f_ζ dans $C^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_v))$ qui sera en même temps une solution approchée de l'équation de Landau (définition 1.4.1).
En utilisant des arguments de convexité et en passant à la limite quand $\varepsilon \mapsto 0$ (voir théorème (1.4.3)), on obtient f solution faible de l'équation homogène de Landau, et en particulier elle sera dans $C^\infty(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_v))$.
Ainsi, leur preuve de la régularité se fait en 3 étapes: la première consiste à multiplier l'équation de Landau par une fonction $\beta(f)$, où β est une fonction C^1 telle que $\beta(0) = 0$. Ce qui permet d'avoir une estimation directe dans L^2, avec le choix $\beta(t) = (1 + t)log(1 + t)$.
Ensuite, la deuxième étape est d'assurer le passage de L^2 à H^1, en utilisant essentiellement la propagation des moments et en se basant sur l'application directe de l'inégalité de Holder et l'injection de Sobolev.
Et, finalement, la troisième étape est de passer de H^1 à $\mathcal{S}$ en obtenant une inégalité différentielle, non linéaire, dont la résolution donne une estimation de f dans l'espace de Sobolev avec poids (H^s_p pour s et p des réels) et donc dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dans le chapitre 4, nous nous intéressons à prouver cette régularité pour toute solution faible, mais pas nécessairement celles obtenues par l'un des procédés ci-dessus (à moins d'avoir un résultat d'unicité).
Notre résultat est donné par le

Théorème 1.4.4 *Soit f_0 une donnée initiale de masse, énergie et entropie initiales finies. Alors toute solution faible f de l'équation homogène de Landau appartient $C^\infty([t_0,+\infty] \ ; \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ pour tout $t_0 > 0$.*

Nous utiliserons encore une décomposition dyadique qui forme notre outil de base dans cette thèse. D'abord, nous utiliserons une norme équivalente pour l'espace de Sobolev (avec poids) vis-à-vis la décomposition dyadique fixée. Elle sera d'une forme simple
$\|f\|^2_{\tilde{H}^s_\alpha} \sim \sum_k \sum_j 2^{ks} 2^{j\alpha} \|p_k(\psi_j f)\|^2_{L^2}$, basée essentiellement sur la normalisation dans L^2 des composantes dyadiques de f de la forme $p_k(\psi_j f)$ où p_k est un opérateur de convolution et ψ_j est un opérateur de multiplication (localisation).

Notre but sera de chercher une estimation de f dans cet espace. Pour cela, nous multiplions l'équation (1.10) par la fonction ψ_j en essayant de faire apparaitre le terme $\psi_j f$ comme solution d'une équation linéaire de la forme $\partial_t \psi_j f = Q_L(g,\psi_j f)$.
Ensuite, nous appliquons l'opérateur de convolution p_k en faisant intervenir des commutateurs assez importants par la suite qui vont nous permettre de gagner de la régularité.
Ainsi, l'estimation de ce commutateur dans L^p (pour $1 < p \leq +\infty$) fait apparaitre des exposants négatifs de la forme 2^{-k}, qui vont intervenir plus tard pour assurer la convergence des séries dans la définition de la norme de Sobolev.
Nous utilisons aussi, à plusieurs reprises (r itérations), la propriété du produit $p_k = p_k \tilde{p}_k$. Elle va apparaitre, cette fois ci, via des opérateurs de la forme $[\tilde{p}_k, \ \ldots, [\tilde{p}_k, \varphi]]$ pour des fonctions φ bornées dont leurs estimations dans L^p donnent des puissances négatives régularisantes d'ordre r de la forme 2^{-rk} .
Ainsi, en se basant sur le résultat d'ellipticité pour la matrice $\overline{a}$ donnée par [41], nous obtenons une inégalité différentielle avec l'inconnue $\|p_k(\psi_j f)\|^2_{L^2}$. L'application directe d'une variante du lemme de Gronwall donne une estimation directe pour $\|p_k(\psi_j f)\|^2_{L^2}$.
En multipliant par $2^{ks}2^{j\alpha}$ et en sommant sur les deux variables k et j, nous tenons compte des propagations de moments des solutions pour obtenir la convergence de la double série et donc une estimation de f dans l'espace $\tilde{H}^s_\alpha(\mathbb{R}^n)$ pour tout s, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et ainsi dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
L'utilisation des commutateurs nécessite de travailler avec des sections efficaces assez régulières C^∞ $(\Phi(|v|) \sim C(1+|v|^2)^{\frac{\gamma}{2}})$, ce qui est le cas dans la première partie de la preuve.
Nous avons ensuite traité des sections efficaces de type "potentiel dur" de la forme $\Phi(|v|) = |v|^\gamma$ non régulière en zéro ($C^\infty(\mathbb{R}^n - \{0\})$).
Nous utilisons dans ce cas la méthode de troncature en divisant la section efficace en deux fonctions: régulière (loin de zéro) pour laquelle on peut appliquer exactement la même méthode donnée dans la première partie de preuve, et non régulière (en zéro) ce qui revient essentiellement à traiter un seul terme dont on peut se débarasser en optimisant le module de la troncature.
Pour finir, notons que l'interêt de cette méthode (dyadique), outre la simplicité des estimations à priori en utilisant des inégalités simples du type Cauchy Schwarz et Young, est que la preuve de la régularité s'applique directement pour n'importe quelle solution faible.

1.4.3 Le cas des potentiels durs

Nous abordons dans le chapitre 5 la régularité de l'équation homogène de Boltzmann avec des sections efficaces plus générales de la forme $B = \Phi.b$, où Φ représente la partie cinétique, non nécessairement constante, tandis que b représente la partie angulaire.
Nous nous intéressons de plus, au cas où les collisions entre les particules se font suivant une force proportionnelle à $\frac{1}{r^s}$ pour $s > 2$, avec des sections efficaces de type "potentiel dur". Plus précisement, la partie cinétique Φ sera de la forme $\Phi(z) = <z>^\gamma$ avec $0 < \gamma < 1$, où $<z> = (1+|z|^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour mémoire, le vrai cas est donné par $|z|^\gamma$.

Une étude concernant cette régularité, pour des molécules non Maxwelliennes, est du récemment à Desvillettes et Wennberg [42] qui supposent Φ régulière, et obtiennent alors une régularité globale dans l'espace de Schwartz. C'est-à-dire, ils démontrent l'existence d'une solution dans cet espace.
La partie principale de leur preuve se déroule en dimension $n = 2$, avec une hypothèse de singularité moderée.
En dimension 2, ils ont exprimé les différentes vitesses pré- et post- collisionnelles via un opérateur linéaire simple (de rotation), ce qui facilite grandement les calculs. Puis, en utilisant des résultats d'interpolation sur les espaces de Sobolev avec poids, ils obtiennent une inégalité différentielle et la régularité dans l'espace de Schwartz.
Ils adaptent les calculs de la dimension $n = 2$ au cas général ($n \geq 3$) en travaillant avec des sections efficaces singulière fortes (partie angulaire b) de la forme $b(\theta) \sim |\theta|^{-\nu+\varepsilon}$ pour $1 < \nu < 3$ et pour $\varepsilon > 0$. Via une paramètrisation convenable des variables collisionnelles, ils obtiennent le même type de régularité que dans le cas de dimension 2, dans l'espace de Schwartz.

Dans le chapitre 5, nous nous proposons de traiter de la régularité de toute solution faible. Il est clair qu'il faut alors justifier les opérations utilisées dans la démarche ci-dessus, ce qui ne semble pas évident, au vu de la définition d'une solution faible.
La stratégie, pour prouver ce type de résultat de régularité, serait de combiner les techniques utilisées dans les deux chapitres précédents.
Malheureusement, il y a au moins deux problèmes sérieux.
D'une part, l'utilisation directe de la transformée de Fourier (cf. chapitre 3), bien que donnant une forme simple de l'opérateur de Boltzmann, ne semble pas aussi opérante et ne donne pas de controle simple des différents termes. D'autre part, l'utilisation des commutateurs, cf. chapitre 4 pour le cas de l'équation de Landau, semble extrêment difficile dans le cas d'un opérateur de Boltzmann général.
Nous utiliserons donc les résultats récents de Alexandre [6] donnant des estimations (quasi-optimales) sur les espaces fonctionnels liés à cet opérateur. Cela permet, dès qu'on a montré un peu de régularité, d'itérer cette information sur l'équation. La stratégie initiale consiste toujours, avec les notations du chapitre 4, à obtenir une inégalité différentielle sur le carré de la norme L^2 de $\psi_j p_k f$. Toutefois, un problème fondamental se pose, à savoir le fait que l'opérateur de Boltzmann n'est pas un opérateur différentiel, étant typiquement similaire à $(-\Delta)^{\frac{\nu}{2}}$, et que de plus, la valeur de ν peut être proche de 0. Pour de telles valeurs de ν, la recherche d'une meilleure (mais petite) régularité, via l'équation semble difficile, si on démarre avec seulement une information de type L^1.
C'est pour cela que nous serons amenés à imposer une appartenance de notre solution dans L^2_α, pour tout poids α, au moins à partir d'un certain temps t_0.
Cette hypothèse restreint donc la notion de solution, mais un résultat récent de Desvillettes et Mouhot [38] montre l'existence de telles solutions.

Notre résultat en collaboration avec Radjesvarane Alexandre[2] est donné par le théorème suivant

Théorème 1.4.5 *Soit f_0 une donnée initiale de masse, énergie et entropie initiales finies. Soit une partie angulaire b satisfaisant (1.4). Soit Φ, partie cinétique, donné par $< v >^\gamma$, $0 < \gamma < 1$. Alors toute solution faible f de l'équation homogène de Boltzmann satisfaisant de plus, pour un certain $t_0 \geq 0$*

$$f \in L^\infty([t_0, +\infty) \ ; \ L^2_\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

vérifie : pour tout $s \in \mathbb{R}^+$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $t > t_0$, $f(t) \in H^s_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

1.5 Dissipation d'entropie pour l'équation de Boltzmann-Dirac

Les deux modèles étudiés précédemment, à savoir celui de Boltzmann et de Landau, dans la cas complet non homogène, sont très difficiles à étudier, car les seules estimations à priori valables pour tout régime, font intervenir l'espace très faible L^1. Nous envisageons donc l'étude d'un modèle similaire, mais avec de meilleurs bornes accessibles.

Partant de ce point de vue, nous étudierons dans le chapitre 6, la régularité pour une version modifiée de l'équation de Boltzmann appelée "Boltzmann-Dirac". Au niveau de la Physique, cette équation apparait en modélisant un gaz dont ces particules suivent la condition de dégénèrescence de Sommerfeld. Ce sont donc des particules du type Fermi-Dirac, prenant en compte essentiellement des effets quantiques. Pour plus de détails, on peut consulter Chapman et Cowling ([29], Chap.17), Nordheim [72], et Uehling et Uhlenbeck [78].
Cette équation s'écrit sous la forme suivante

$$\partial_t f + v\nabla_x f = Q^{BD}(f,f)$$

avec

$$Q^{BD}(g,f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(v-v^*,\sigma)[g'_*f'(1-g_*)(1-f) - g_*f(1-g'_*)(1-f')]dv_*d\sigma.$$

B représente la section efficace du collision, admettant la même classification que pour l'équation de Boltzmann, et avec les mêmes notations ($f' = f(v')$, $f'_* = f(v'_*)$, ...).
L'interêt mathématique de cette équation tient au fait qu'elle constitue une bonne approximation de l'équation de Boltzmann, et surtout que les solutions admettent une borne L^∞, ce qui n'est pas naturellement le cas pour l'équation de Boltzmann.
Concernant l'étude mathématique, Dolbeault [43], a étudié le problème de Cauchy dans le

2. radja.alexandre@univ-evry.fr

cas non singulier (cutoff), en démontrant l'existence et l'unicité d'une solution dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ avec les conservations de la masse, la quantité de mouvement, l'énergie cinétique ainsi que la décroissance d'entropie. Il a aussi démontré la convergence limite vers une solution renormalizée de l'équation de Boltzmann donnée par R.DiPerna et P-L.Lions.
Toujours dans le cas non singulier, et dans le cas homogène, quelques résultats sur les états d'équilibres et le comportement à temps grand des solutions ont été obtenu dans [56], [58].

Le cas singulier non homogène a été initié par Alexandre [4] dans le cas $n = 3$, avec des hypothèses fortes sur la section efficace. On cite aussi le travail récent de Lu, [57], qui a obtenu des résultats de compacité dans le cas non homogène en se limitant à une faible singularité au niveau des noyaux de collision de la forme $\int_0^\pi b(\cos\theta)\sin^3\theta d\theta < +\infty$.

Dans ce travail, on considère une dimension arbitraire $n \geq 2$ et une section efficace satisfaite

$$B(v - v_*,\sigma) \geq \Phi(|v - v_*|).b(k.\sigma), \quad k = \frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma$$

où $\Phi(|z|) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et strictement positive pour tout $z \neq 0$ et

$$\sin^{n-2}\theta b(\cos\theta) \sim \frac{K}{\theta^{1+\nu}} \quad \text{quand} \quad \theta \longrightarrow 0,\ \nu > 0,\ K > 0.$$

Pour énoncer notre résultat, on définit

$$\Lambda(|v - v_*|) = \int_{S^{n-1}} B(v - v_*,\sigma)(1 - k.\sigma)d\sigma.$$

On définit également pour $|z| \neq 0$

$$B'(z,\sigma) = sup_{1\leq\lambda\leq\sqrt{2}} \frac{|B(\lambda z,\sigma) - B(z,\sigma)|}{(\lambda - 1)|z|}.$$

De la même façon, on prend

$$\Lambda'(|v - v_*|) = \int_{S^{n-1}} B'(v - v_*,\sigma)(1 - k.\sigma)d\sigma.$$

Notre théorème sera le suivant
Théorème 1.5.1 *Soit $R > 0$. Supposons que*

$$B(v - v_*,\ \sigma) \geq \Phi(|v - v_*|)b(k.\sigma)$$

où Φ est une fonction continue bornée sur toute intervalles $0 < r \leq |z| \leq 2\sqrt{2}R$. Supposons que b satisfait (1.4) avec le fait que

$$\Lambda(|z|) + |z|\Lambda'(|z|) \leq C(1 + |z|)^2.$$

Alors il existe une constante C_g, dependant uniquement de b, $\|g\|_{L^1_1}$, $\|g\|_{L\log L}$ et de Φ, telle que

$$\|f\|^2_{H^{\frac{\gamma}{2}}(|v|<R)} \leq C_g[\ D^{BD}(g,f) + \|g\|_{L^1_2}\|f\|_{L^1_2}],$$

où

$$D^{BD}(g,f) = -\int_{\mathbb{R}^n} Q^{BD}(g,f)\log\frac{f}{1-f}dv.$$

Par application directe de ce théorème, en utilisant les mêmes manipulations que dans le travail de Alexandre et Villani [13], nous pouvons obtenir l'existence de solutions au sens faible, pour l'équation non homogène de Boltzmann-Dirac. Ceci généralise le travail de Alexandre [4] .

1.6 Quelques perspectives

1. **L'équation homogène de Landau :**
   L'étude de l'équation homogène de Landau a connu de nombreuses avancées, et comporte de nombreux résultats, notamment les résultats d'existence dus à Villani [74] (presque toute type des sections efficaces) et le problème de Cauchy du à Villani pour le cas Maxwellien [73] et à Desvillettes et Villani [41] pour le cas hard potentiel. Notre résultat (chapitre 4) couvre le même type de régularité avec la méthode de la décomposition de Littlewood-Paley, pour toute solution faible, en obtenant des estimations à priori pratiquement très simples.
   Parmi les questions importantes et difficiles, l'étude du problème de Cauchy (régularité, unicité, ...) pour les noyaux des collisions à potentiel mous.

2. **L'équation homogène de Boltzmann :**
   L'étude de la régularité pour l'équation de Boltzmann dans le cas homogène est très avancée.
   Dans le cas de molécules Maxwelliennes, nous avons démontré une régularité optimale $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour toute dimension n en nous basant essentiellement sur la transformée de Fourier et quelques résultats (cancellation) concernant l'opérateur de Boltzmann.
   La tache devient plus difficile pour des sections efficaces plus générales (collisions avec une force proportionnelle à $\frac{1}{r^s}$, $s > 2$) de la forme

   $$B(v-v_*,\sigma) = \Phi(|v-v_*|).b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma).$$

   Dans ce cas, nous avons essayé de suivre les méthodes utilisées pour le cas Maxwellien (chapitre 3) et des différents manipulations dans le chapitre 4 pour l'équation de Landau. Malheureusement, il y a deux problèmes sérieux: d'une part l'utilisation directe de la transformée de Fourier ne semble pas aussi opérante et ne donne pas un contrôle simple de différents termes. D'autre part, l'utilisation des commutateurs (comme pour le cas de

Landau), semble extrêmement difficile pour l'opérateur de Boltzmann. Nous avons utilisé quelques résultats récents concernant des estimations fonctionnelles pour l'opérateur de Boltzmann démontrés par Alexandre [6].
Ces résultats ont été montrés pour des singularités faibles $0 < \nu \leq 1$, mais avec des calculs plus poussés, deuxième étape en cours, cela reste vrai pour $0 < \nu \leq 2$.
Par contre, nous avons eu besoin pour ce travail d'intégrabilité sur la solution f de type L^2_α (avec poids) pour $\alpha > 0$.
Cette hypothèse ne correspond pas au cas physique où $f \in L^1$ (un peu mieux en fait).
Notre résultat devrait être sûrement amélioré, en évitant cette hypothèse ; en particulier, signalons le travail récent de Desvillettes et Wennberg [42], où ils travaillent avec l'hypothèse naturelle dans L^1. Ceci avec des sections efficaces hard potentiel réguliers de la forme $\Phi(|v|) = (1 + |v|^2)^{\frac{\gamma}{2}}$, le cas singulier $\Phi(|v|) = |v|^\gamma$ restant toujours à étudier.
La question de la régularité dans le cas de potentiel mous reste la plus difficile. Le seul résultat à ce niveau est du à Desvillettes et Mouhot[39] qui ont obtenu une estimation H^k pour $k > 0$, mais dans le cas (cuttof) où la partie angulaire intégrable.

3. **L'équation de Boltzmann-Dirac :**
On a déduit dans le chapitre 5 de la régularité partielle de la solution $f \in L^1 \cap L^\infty$ à partir de l'opérateur de Boltzmann-Dirac en utilisant la taux de dissipation d'entropie. L'application directe de ce résultat au cas homogène (en espace), connaissant l'existence de solutions faibles du à Lu [57] (pour de potentiels assez mous), donne une régularité partielle en vitesse v de la forme

$$f \in L^2([0,T] \ ; \ H^{\frac{\nu}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^n_v)), \quad \text{pour } T > 0.$$

Actuellement, nous essayons d'avoir une régularité meilleure, comme dans le cas Boltzmann (chapitre 3 et 5), en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley. Ainsi, en suivant la même stratégie que pour le cas Maxwellien, nous avons réussi à faire apparaitre le terme essentiel de minoration qui donne la régularité. D'autres termes paraissent plus difficile à traiter, nécessitant l'étude des opérateurs de la forme

$$T(\phi) = \int_{S^{n-1}} f'[\phi' - \phi] b d\sigma.$$

Alors que pour le cas Boltzmann, on a des opérateurs du type

$$T(\phi) = \int_{S^{n-1}} [\phi' - \phi] b d\sigma.$$

Il reste à étudier le cas de noyaux de collisions (sections efficaces) plus généraux, de la forme $B = \Phi.b$ où Φ est la partie cinétique et b est la partie angulaire, en essayant d'avoir une régularité meilleure (équivalente au résultat de la régularité dans l'espace de

Schwartz $\mathbb{S}$ pour l'équation de Boltzmann). Ce dernier cas néccesite évidemment de la propagation des moments pour f, ce qui reste une question à prouver.
De même, le cas d'autres noyaux (potentiel dur, Maxwellien, potentiel modéré mou) est une question largement ouverte.

Chapitre 2

Littlewood-Paley decomposition

Historically, this decomposition has been introduced in the 30's by J.E. Littlewood and R. Paley to estimate the norm L^p of trigonometric Fourier series, for $1 < p < \infty$. If we omit the trivial case p = 2, it is not possible to ensure the belonging of a generic Fourier series to the space Lp by simply using its Fourier coefficients, but this becomes true if we consider instead its dyadic blocks. Generally, it is part of the very vast domain of Harmonic analysis.
Let us mention here the works of Coifman and Meyer [32], Bony [21] and Meyer [68] giving estimations and different applications of different functional spaces such as Sobolev, Holder, classes of Zygmund, ... In fact, their results proved to be very useful in the mathematical study of non linear partial equations : propagation of singularity, regularity, ...
From this point of view, in this thesis, we shall apply these tools on kinetic equations of Boltzmann type. This type of equations contains a non linear operator having a complicated structure, and thus ask for a certain subtlety to treat them.
The goal of the remaining chapters in this Thesis, is to study regularity questions for such equations, using essentially Littlewood-Paley decomposition and by giving proofs for different types of collision kernels. We note that these proofs are often simpler than some older ones.

2.1 Dyadic annulus

Let's start with the definition of Littlewood-Paley decomposition directly in R^n. To this end, we fix a family $\{\psi_k = \psi_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ of C^∞, positive, radial functions and satisfying the following properties

$$\text{supp } \psi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ \|\xi\| \ \leq 2\},$$

$$\text{supp } \psi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ 2^{k-1} \leq |\ \xi\ | \leq 2^{k+1}\} \text{ for all } k \geq 1,$$

for every multi-index α, there is a positive number c_α such that

$$2^{k|\alpha|} \mid D^\alpha \psi_k(\xi) \mid \leq c_\alpha \text{ for all } k = 0,1,2,\ldots \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

and

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\xi) = 1 \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

This family exists: we fix for example any function ψ_0 of class C^∞ with compact support on $\mathbb{R}^n$, positive, radial such that

$$\begin{cases} \psi_0(\xi) = 1 \text{ if } |\xi| \leq 1 \\ \\ \psi_0(\xi) = 0 \text{ if } |\xi| \geq 2, \end{cases}$$

and, we definy the other functions, for $k \geq 1$, by $\psi_k(\xi) = \psi_{k-1}(\xi) - \psi_{k-1}(2\xi)$. To simplify computations, we suppose that all these functions ψ_k are constructed from a single function $\psi \geq 0$ such that

$$\begin{cases} \text{supp } \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \, \frac{1}{2} \leq \mid \xi \mid \leq 2\}, \\ \\ \psi > 0 \text{ si } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mid \xi \mid \leq \sqrt{2} \\ \\ \text{avec } \psi_k(\xi) \equiv \psi(\frac{\xi}{2^k}), \text{ for all } k \geq 1 \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

The idea is that one *cuts* the frequency space into a ball centered at 0 and into $\mathcal{C}_k$, annulus where the frequencies are, in norm, of the order 2^k. It allows us to decompose elements of $\mathcal{S}'$ as sum of distributions with compact spectrum (the spectrum of a tempered distribution being defined as the support of its Fourier transform).
We now define the *Littlewood-Paley operators* p_k, for $k \geq 0$, by

$$\widehat{p_k f}(\xi) = \psi_k(\xi)\hat{f}(\xi).$$

By telescoping the series, we thus have the *Littlewood-Paley decomposition*

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k f \text{ for all } f \in \mathcal{S}'.$$

From the basic facts about the Fourier tranform we have the representation

$$p_k f = \phi_k * f \text{ où } \phi_k(.) = 2^{nk}\hat{\psi}(2^k.) \text{ avec } \phi_k \in \mathcal{S}.$$

By construction, we can find a new collection $\{\tilde{\psi}_k = \tilde{\psi}_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ of smooth functions such that supp $\tilde{\psi}_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ \mid \xi \mid \leq 4\}$, supp $\tilde{\psi}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \, 2^{k-2} \leq \mid \xi \mid \leq 2^{k+2}\}$ for all $k \geq 1$, and such that $\psi_k \tilde{\psi}_k = \psi_k$, for all integer k. This is possible once we take $\tilde{\psi}_0$ a function equals 1 on the support of ψ_0.
As before, corresponding operator $\tilde{p}_k$, for $k \geq 0$, are defined as

$$\widehat{\tilde{p}_k f}(\xi) = \tilde{\psi}_k(\xi)\hat{f}(\xi).$$

All these functions $\tilde{\psi}_k$, for $k \geq 1$, are constructed from a single one $\tilde{\psi} \geq 0$, i.e. we take $\tilde{\psi}$ such that supp $\tilde{\psi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{2^2} \leq |\xi| \leq 2^2\}$, $\tilde{\psi} > 0$ if $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$, such that $\tilde{\psi}_k(\xi) \equiv \tilde{\psi}(\frac{\xi}{2^k})$, for all $k \geq 1$ and $\xi \in \mathbb{R}^n$.

As above, the operators $\tilde{p}_k$ have a following representation

$$\tilde{p}_k f = \tilde{\phi}_k * f \text{ telle que } \tilde{\phi}_k(.) = 2^{nk}\hat{\tilde{\psi}}(2^k.) \text{ avec } \tilde{\phi}_k \in \mathcal{S},$$

and thus, we have the important relation, for $k \geq 0$

$$p_k \tilde{p}_k = p_k.$$

Finally, let us mention that, by the same way, we can also construct a new other famillies corresponding to the previous one and having the same propreties. For example, we can find a familly $(\tilde{\tilde{\psi}}_k)_k$ corresponding to $(\tilde{\psi}_k)_k$ such that for all $k \geq 0$, we have the relations $\tilde{\psi}_k \tilde{\tilde{\psi}}_k = \tilde{\psi}_k$ and $\tilde{p}_k \tilde{\tilde{p}}_k = \tilde{p}_k$.

2.2 Properties

Littlewood-Paley decomposition has two very important properties and useful in the applications.

a) (Almost) Orthogonality : This expresses the fact that

$$p_k p_q f = 0 \text{ if } |k - q| \geq 4.$$

The value 4, appearing in the last equality, depends only on the thickness of the annulus in the definition of the function ψ but in practice, it does not have any importance .

b) Self-adjointness : by a simple application of Plancherel lemma, we get that

$$\int_v f(v) p_k \text{ (resp. } \tilde{p}_k \text{)} g(v) dv = \int_v p_k \text{ (resp. } \tilde{p}_k \text{)} f(v) g(v) dv, \text{ for all } f, g \in \mathcal{S}'.$$

2.3 Berstein Lemma

First of all, one obtains an easy inequality which shows the relation between the norm L^p of the distribution function f and the one of their components $p_k f$, for $1 \leq p \leq \infty$. It writes

$$sup_k \|p_k f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p} \leq C \sum_k \|p_k f\|_{L^p}.$$

Recall that if u is a distribution with a compact spectrum, then u is a function of class C^∞, even polynomial, see [22]. If $u \in \mathcal{S}'$, the dyadic blocks $p_k f$ are C^∞ *functions*, but one cannot say anything a priori on their integrability.
The interest in decomposing a tempered distribution into a sum of dyadic blocks $p_k f$, whose support in Fourier space is localized in an annulus, comes from the nice behavior of these blocks with respect to differential operations. This fact is illustrated by the following celebrated Bernstein's lemma, whose proof can be found in [69], proposition 3.2 p.24 of [54].

Lemma 2.3.1 *Let $1 \leq p \leq q \leq \infty$ and $k \in \mathbb{N}$, then one has*

$$\|f\|_{L^q} \leq C R^{n(\frac{1}{P}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p},$$

whenever f is a tempered distribution in $\mathcal{S}'$ whose Fourier tranform $\hat{f}(\xi)$ has a support in an annulus $|\xi| \sim R$.
Here, C is a constant depending only on the function $\tilde{\psi}$.

2.4 Sobolev and Besov spaces

Littlewood-Paley decomposition has numerous applications : it allows to characterize some functional spaces, particularly Sobolev and Besov type space.
In the case of a function f, the estimation of the norm L^p is given by the following equivalence

$$\text{If} \quad 1 < p < \infty \text{ then} \quad \|f\|_{L^p} \simeq \left\| \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

In the case $p = 2$, a norm equivalence is given by

$$\|f\|_{L^2} \simeq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \|p_k f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

It is even easy to see that the classical Sobolev space H^s, $s \in \mathbb{R}$ is characterized by the following norm equivalence

$$\|f\|_{H^s} \simeq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{2ks} \|p_k f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Similarly, but now working on usual space, the norm of weighted space of ordre α consist to work with functions $\psi_j f$ having a compact support of amplitude 2^j, multiplying by the quantity $2^{j\alpha}$ and summing w.r.t. variable j. For instance, for the space L^1 with weight α (i.e L^1_α, $\alpha \in \mathbb{R}$), the equivalent norm writes

$$\|f\|_{L^1_\alpha} \simeq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \|\psi_j f\|_{L^1}.$$

Similarly, Sobolev space with weight of ordre α is defined by

$$\|f\|_{H^s_\alpha} \simeq \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{j\alpha} 2^{ks} \|\psi_j p_k f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finally, Littlewood-Paley decomposition is very useful to define Besov spaces, whose norms are defined by, for $1 \leq p,q \leq \infty$ (with some restrictions), $s \in \mathbb{R}$,

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \simeq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (2^{ks} \|p_k f\|_{L^p})^q \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

More details on Sobolev and Besov spaces are available in the books of Runst, Sickel, Stein and Triebel [64, 66, 62] or in the notes of Tao [65].

Chapitre 3

Littlewood-Paley Theory and regularity issues in Boltzmann homogeneous equations I. Non cutoff case and Maxwellian molecules

Published in *"Mathematical Methods and Model in Applied Science, vol.15 (6): 907-920, 2005"*

Abstract

We use Littlewood-Paley theory for the analysis of regularization properties of solutions of the homogeneous Boltzmann equation. For non cutoff Maxwellian molecules, we show that such solutions are smoother than the initial data. Although the recent and up to date results of Desvillettes and Wennberg [42] assume much more general assumptions on the collision cross sections, our method seems to be simpler than those used earlier to show such properties and also applies to any weak solution.

3.1 Introduction

Let us consider Boltzmann homogeneous equation, see for instance the classical books of Cercignani [28] Chapman and Cowling [29] or the review by Villani [76]

$$\partial_t f(t,v) = Q(f,f)(t,v) \quad t \geq 0,\, v \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

where f is a positive function depending only (homogeneous framework) upon the two variables $t \geq 0$ (time) and $v \in \mathbb{R}^n$ (velocity) with $f(0,v) = f_0(v)$, where $n \geq 2$.

The initial datum $f_0 \neq 0$ is supposed to satisfy the usual "entropic" hypothesis, that is

$$f_0 \geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)\{1+ |v|^2 + \log(1 + f_0(v)\}dv < +\infty. \tag{3.2}$$

Boltzmann quadratic operator Q depends on v as follows

$$Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(v - v_*,\sigma)(f'f'_* - ff_*)d\sigma dv_*,$$

where $v_* \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S^{n-1}$ (unit sphere of $\mathbb{R}^n$), $f = f(v)$, $f_* = f(v_*)$, $f' = f(v')$ and $f'_* = f(v'_*)$. Above,

$$v' \equiv \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|\sigma}{2},\ \ v'_* \equiv \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|\sigma}{2}$$

are the so called post (or pre) collisional velocities.

We shall assume that the collision cross section $B(v - v_*,\sigma) > 0$ depends only on the deviation angle θ (Maxwellian molecules):

$$B(v - v_*,\sigma) = b(\cos\theta),\ \ \cos\theta =< \frac{v - v_*}{|v - v_*|},\sigma> ,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.3}$$

The above range of values of θ means more precisely that we assume that $b(\cos\theta)$ is supported on the set $\theta \in (0,\frac{\pi}{2})$.
We are also interested in the case of a collision cross section B associated to an intermolecular potential of the form $\frac{1}{r^s}$, $s > 2$, in which case Grad's non cutoff assumption fails to hold, that is

$$\sigma \longrightarrow B(v - v_*,\, \sigma) \notin L^1(S^{n-1}).$$

In fact, it can be shown, see for instance [28] that $\sin^{n-2}\theta\, b(\cos\theta)$ has a non integrable singularity around $\theta \sim 0$, at least for $n = 3$.
In view of [28, 8, 76], we will therefore assume that $b(\cos\theta)$ satisfies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, b(\cos\theta)d\theta < +\infty \text{ and } \sin^{n-2}\theta\, b(\cos\theta) \sim \frac{\kappa}{\theta^{1+\nu}} \text{ when } \theta \longrightarrow 0, \tag{3.4}$$

where $\kappa > 0$ and $0 < \nu < 2$ are fixed.
The above framework is by now standard, and for more details, the reader may consult the works of Alexandre, Desvillettes, Villani and Wennberg [8] and the review by Villani [76].
We assume that a weak solution to Boltzmann (5.1) has already been constructed and that it satisfies the usual entropic estimate, for a fixed $T > 0$ (eventually $T = +\infty$)

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)(1 + |v|^2 + \log(1 + f(t,v))dv < \infty. \tag{3.5}$$

This estimate follows from the well known formal conservation laws:
- mass conversation

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)dv;$$

- momentum conservation

$$\int_{\mathbb{R}^n} vf(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} vf_0(v)dv;$$

- energy conservation

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 f(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^2 f_0(v)dv;$$

- entropy estimate

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} f \log f dv + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} b(\frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma)\{f'f'_* - ff_*\} \log\{\frac{f'f'_*}{ff_*}\}dvdv_*d\sigma = 0.$$

We refer for instance to the papers of Arkeryd, Goudon and Villani [15, 50, 74] for more details.
We shall also assume that this weak solution satisfies the mass conservation.
Such weak solutions also satisfy the entropy dissipation rate estimate, that is

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} b(\frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma)\{f'f'_* - ff_*\} \log\{\frac{f'f'_*}{ff_*}\}d\sigma dv_* dvdt < +\infty, \tag{3.6}$$

but this last estimate will not be used here.
Such weak solutions have been constructed within the general non cutoff case, see for instance the works of Arkeryd, Desvillettes, Goudon and Villani [15, 35, 37, 50, 74].
We also mention a probabilistic framework, see for instance the papers of Fournier, Graham, Méléard and the references therein [46, 48, 53].

In this chapter, we are interested in regularization properties of such solutions. That is, is this weak solution more regular than the initial datum satisfying assumption (3.2), and if so, can we have estimates on this regularity?

Such regularization properties, for the non cutoff case, were first shown by Desvillettes [35, 37] and Proutière [61] who treated the cases $n = 1$ and $n = 2$, showing regularity in C^∞ or in some suitable Sobolev spaces. Then C^∞ regularity in the same cases was obtained using probabilistic methods by Fournier, Graham and Méléard [46, 48, 53].

The up to date recent results about this regularization property question are due to Desvillettes and Wennberg [42], showing $\mathcal{S}$ (in fact through weighted Sobolev spaces) regularity in the non cutoff and non Maxwellian case, and for all velocity space dimensions. Note that their assumptions do not include Maxwell case, but it seems that their method works also in that case. Of course, their conclusion is stronger than our, since they show $\mathcal{S}$ regularity, while we only infer C^∞ regularity. However, by known results on moments propagation, this C^∞ regularity cannot be improved in the Maxwellian case. We note also that in [42], Desvillettes and Wennberg show that actually, under suitable assumptions on the cross section, a solution in $\mathcal{S}$ do exist, with f_0 satisfying (3.2). Here, for Maxwell cross sections, we show that *any weak solution* satisfying (4.6) is in C^∞. Thus these two results are not strictly comparable.

Let us also mention the regularity estimate in a suitable Sobolev space shown in [8], but using only the entropy dissipation estimate (3.6) and the entropic estimate (4.6), but not the full Boltzmann equation (5.1). This result seems not to be sufficient for our purpose, because of the bad control in time of the final estimate in [8]. Anyway, we do not use assumption (3.6) here.

That some regularization properties should appear in the non cutoff case is now well understood, due to the singular operators hidden in Boltzmann quadratic operator, see for instance [8, 2, 3, 76], showing that, roughly speaking, Boltzmann operator behaves then as the operator $(-\Delta)^{\frac{\nu}{2}}$.

In this chapter, we concentrate on the non cutoff Maxwellian case and show a C^∞ regularization property, for any velocity space dimension. Comparing to the above papers, including the recent work of Desvillettes and Wennberg [42] even though their assumptions are different, we believe that our method of proof is much more simpler, at least for Maxwellian molecules. The general case of non Maxwellian molecules as in [42] is the subject of another chapter (chapter 5), with the same method as used here. There will be of course some major modifications, the main one being the use of cutoff functions in velocity space. This point is already apparent in [8] and also explains why weighted Sobolev spaces are used in [42].

Our arguments use Littlewood-Paley theory. Basic results about this theory can be found in the books of Runst, Sickel, Stein or Triebel [62, 64, 66], see also the Lecture Notes of Tao [65] or the book of Lemarié [54]. In fact the main point is to work on small annuli instead of the full frequency space and otherwise we will only use elementary analytical arguments. In particular, we do not use any functional interpolation inequalities. But, we do use some results from [8] and more precisely the method used there.
The exact result we want to prove here is given by

Theorem 3.1.1 *Let be given an initial datum f_0 satisfying (3.2) and a Maxwellian collision cross section B as in (3.3), with b satisfying (3.4). Let f be any weak non negative solution of Boltzmann homogeneous equation (5.1), satisfying (4.6) and the mass conservation. Then, for any $t > 0$, for all $s \in \mathbb{R}^+$, $f(t,.)$ belongs to the Sobolev space $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

□

The chapter is organized as follows. Section 2 is devoted to the proof of this result, divided in a few steps. We recall therein the basic tools needed for applying Littlewood-Paley theory. A final Section contains two small Appendices related to basic facts used during the proof. We have also added a last section containing a shorter proof of some computations done before.

3.2 Background on Littlewood-Paley theory and Sobolev spaces

This Section is devoted to the Littlewood-Paley decomposition and some links with Sobolev spaces. Readers already familiar with this theory can skip safely this sub-section. More details may be found in the books of Runst, Sickel, Stein and Triebel [62, 64, 66], see also the very beautiful lecture notes by Tao [65] and the recent book by Lemarié [54]. An usual notation will be $\| \, . \, \|_p$ for the L^p norm. We restrict ourself on the L^2 framework, which is sufficient for our purpose.

We fix once for all in this paper a collection $\{\psi_k = \psi_k(\xi)\}_{k \in \mathbb{N}}$ of smooth functions such that

$$\text{supp } \psi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ | \, \xi \, | \leq 2\},$$

$$\text{supp } \psi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, 2^{k-1} \leq | \, \xi \, | \leq 2^{k+1}\} \text{ for all } k \geq 1,$$

for every multi-index α, there exists a positive number c_α such that

$$2^{k|\alpha|} \, | \, D^\alpha \psi_k(\xi) \, | \leq c_\alpha \text{ for all } k = 0,1,2,... \text{ and all } \xi \in \mathbb{R}^n$$

and

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\xi) = 1 \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

To simplify some computations, all functions ψ_k, for $k \geq 1$, are constructed from a single one $\psi \geq 0$, i.e. we are given ψ such that

$$\text{supp } \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ \frac{1}{2} \leq | \, \xi \, | \leq 2\} \text{ and } \psi > 0 \text{ if } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq | \, \xi \, | \leq \sqrt{2}$$

and

$$\psi_k(\xi) \equiv \psi(\frac{\xi}{2^k}), \text{ for all } k \geq 1 \text{ and } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Without loss of generality, all these functions will be radial ones, and we put a $\tilde{.}$ over the above if we need to refer to these radial functions.
Then, we define the Littlewood-Paley projection operators p_k, for $k \geq 0$, by

$$\widehat{p_k f}(\xi) = \psi_k(\xi) \hat{f}(\xi).$$

For $k \geq 1$, p_k is a kind of frequency projection on the annulus $\{|\xi| \sim 2^k\}$ because it has (frequency) support on the annulus $\{\xi \in \mathbb{R}^n; 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$.

Then it follows that one has the Littlewood-Paley decomposition

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k f \text{ for all } f \in \mathcal{S}'.$$

This decomposition takes a single function and writes it as a superposition of a countably infinite family of functions $p_k f$, each one having a frequency of magnitude $\sim 2^k$, for $k \geq 1$. One can show the following facts. Let k be an integer, $k \geq 1$, and let f be a function with Fourier support in the annulus $\{2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$. Then we have

$$||\nabla f||_{L^2} \sim 2^k ||f||_{L^2}$$

for all $k \geq 1$. Inequalities of this type are known as Berstein, Polya, Nikoolsky inequalities and turn out to be very useful, see [62, 64, 66, 54]. In particular, we have

$$||\nabla p_k f||_{L^2} \sim 2^k ||p_k f||_{L^2}$$

for arbitrary f. On the other hand, we have one Littlewood-Paley type inequality

$$sup_k ||p_k f||_{L^2} \leq C ||f||_{L^2} \leq C \sum_k ||p_k f||_{L^2}.$$

Usual Sobolev spaces can be described by the following important result, see for instance the results quoted in the books by Runst, Sickel, Stein, Triebel or Lemarié [62, 64, 66, 54].

Lemma 3.2.1 *For all $s \geq 0$,*

$$||f||_{H^s}^2 \sim \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{ks} ||p_k f||_{L^2}^2.$$

□

3.3 Proof of the main result

It will be divided into two parts. First part is devoted to the obtention of a simple differential inequality involving Fourier quantities related to f, at say fixed frequency. And in the second part, we conclude the proof and get in particular estimates on the Sobolev norm of our solution.

Hereafter, letter C denotes any positive constant not depending on the integer k that will appear in the proof of our result below. If we need to mention its dependence with respect to any parameter β, then we shall use the notation $C(\beta)$ or C_β.

3.3.1 Obtaining a differential inequality

This section is divided into five steps. In the first one, we apply Fourier transform on Boltzmann equation (5.1), in the form used in [8], and we use a few simple arguments to obtain a simple equality.
Then, in the next three steps, we estimate each term appearing in this equality, getting an useful inequality for the Fourier transform of our solution f.
In the last fifth step, we deduce an estimation of the H^s norm of our solution, for any $t > 0$ and for all $s \in \mathbb{R}^+$, ending the proof of our result.

Step 1: Application of Fourier transform

Applying Fourier transform on Boltzmann equation (5.1) in a standard way, see for instance [8], relying on previous work by Bobylev [19], we obtain the equation

$$\partial_t \hat{f} = \widehat{Q(f,f)} = \int_{S^{n-1}} [\hat{f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-) - \hat{f}(\xi)\hat{f}(0)]\ b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)\ d\sigma, \tag{3.7}$$

where

$$\xi^+ = \frac{\xi}{2} + \frac{|\xi|\sigma}{2} \text{ and } \xi^- = \frac{\xi}{2} - \frac{|\xi|\sigma}{2}.$$

Note that this equality holds true in view of our assumptions (4.6) on f, see [8].
Next, let k be an integer such that $k \geq 3$. The reason for choosing this minimal value of k will become clear below.
Multiplying (3.7) by $\psi(\frac{\xi}{2^k})$, we get

$$\partial_t \widehat{p_k f} = \int_{S^{n-1}} [\hat{f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)\psi(\frac{\xi}{2^k}) - \hat{f}(\xi)\hat{f}(0)\psi(\frac{\xi}{2^k})]\ b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)\ d\sigma,$$

where $\widehat{p_k f}(\xi) = \psi(\frac{\xi}{2^k})\hat{f}(\xi)$ is the component of order k of f in the Littlewood-Paley decomposition, see the previous section.
The above equation may be written as

$$\begin{aligned}\partial_t \widehat{p_k f} &= \int_{S^{n-1}} [\widehat{p_k f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-) - \widehat{p_k f}(\xi)\hat{f}(0)]\ b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma \\ &+ \int_{S^{n-1}} \hat{f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)[\psi(\frac{\xi}{2^k}) - \psi(\frac{\xi^+}{2^k})]\ b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma\ .\end{aligned}$$

Multiplying by $\overline{\widehat{p_k f}}$, we obtain

$$(\partial_t \widehat{p_k f})\overline{\widehat{p_k f}} = \int_{S^{n-1}} [\widehat{p_k f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)\overline{\widehat{p_k f}}(\xi) - \widehat{p_k f}(\xi)\hat{f}(0)\overline{\widehat{p_k f}}(\xi)]\ b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma$$

$$+ \int_{S^{n-1}} \hat{f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)\overline{\widehat{p_k f}}(\xi)[\psi(\frac{\xi}{2^k}) - \psi(\frac{\xi^+}{2^k})]\ b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma.$$

In the same way, taking the conjugate of (3.7), multiplying by $\psi_k(\xi)\widehat{p_k f}$ and adding the result to the above equation, yields finally

$$(3.8) \quad \begin{cases} \partial_t|\widehat{p_k f}(\xi)|^2 = \\ \int_{S^{n-1}}[\widehat{p_k f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)\overline{\widehat{p_k f}}(\xi) + \overline{\widehat{p_k f}}(\xi^+)\overline{\hat{f}}(\xi^-)\widehat{p_k f}(\xi) - 2\widehat{p_k f}(\xi)\overline{\widehat{p_k f}}(\xi)\hat{f}(0)]\ b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma \\ + \int_{S^{n-1}}[\hat{f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)\overline{\widehat{p_k f}}(\xi) + \overline{\hat{f}}(\xi^+)\overline{\hat{f}}(\xi^-)\widehat{p_k f}(\xi)][\psi(\frac{\xi}{2^k}) - \psi(\frac{\xi^+}{2^k})]b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma. \end{cases}$$

Then, we use the following classical result (Bochner's type inequality) about the link between Fourier transform and positive definite functions, see [63] for instance. In fact, it is possible to avoid this result, using instead Plancherel formula as in [8] (we will proceed this way in chapter 5), but see also the last section.

Lemma 3.3.1 *For any positive function g in $L^1(\mathbb{R}^n)$, one has*

$$\sum_{1\leq i,j\leq d} \lambda_i\overline{\lambda}_j\hat{g}(x_i - x_j) \geq 0,$$

for all $d \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{1\leq i\leq d}$ (resp. $(\lambda_j)_{1\leq j\leq d}$) in $\mathbb{R}^n$ (resp. in $\mathbb{C}$).

□

Applying this lemma, with $d = 2$, $x_1 = \xi$, $x_2 = \xi^+$, $\lambda_1 = -\overline{\widehat{p_k f}}(\xi)$, $\lambda_2 = \overline{\widehat{p_k f}}(\xi^+)$ and our solution f, we get

$$(3.9) \qquad |\widehat{p_k f}(\xi)|^2\hat{f}(0) - \overline{\widehat{p_k f}}(\xi)\widehat{p_k f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-) - \overline{\widehat{p_k f}}(\xi^+)\widehat{p_k f}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi^-) + |\widehat{p_k f}(\xi^+)|^2\hat{f}(0) \geq 0.$$

Taking into account (3.9), it follows from (3.8) that one has

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{p_k f}|^2 d\xi +$$

$$(3.10) \quad \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}}[|\widehat{p_k f}(\xi)|^2\hat{f}(0) - \overline{\widehat{p_k f}}(\xi)\widehat{p_k f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-) - \overline{\widehat{p_k f}}(\xi^+)\widehat{p_k f}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi^-) + |\widehat{p_k f}(\xi^+)|^2\hat{f}(0)]b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi$$

$$(3.11) \qquad = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}}[\overline{\widehat{p_k f}}(\xi)\hat{f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-) + \widehat{p_k f}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi^+)\overline{\hat{f}}(\xi^-)][\psi(\frac{\xi}{2^k}) - \psi(\frac{\xi^+}{2^k})]b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi$$

$$(3.12) \qquad + \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}}[|\widehat{p_k f}(\xi^+)|^2 - |\widehat{p_k f}(\xi)|^2]\hat{f}(0)b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi.$$

Our next task will be to analyse each term appearing in the above three lines.

Step 2: Lower bound on the term (3.10).
For the integral (3.10), one has, see [8] (Proposition 1 and its proof)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}}[|\widehat{p_kf}(\xi)|^2\hat{f}(0)-\overline{\widehat{p_kf}}(\xi)\widehat{p_kf}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)-\overline{\widehat{p_kf}}(\xi^+)\widehat{p_kf}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi^-)+|\widehat{p_kf}(\xi^+)|^2\hat{f}(0)]b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} f_*(p_kf'-p_kf)^2 b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma)dvdv_*d\sigma$$

$$\geq C\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{p_kf}(\xi)|^2\{\int_{S^{n-1}}[\hat{f}(0)-|\hat{f}(\xi^-)|]b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma\}d\xi.$$

Note that we have

$$\int_{S^{n-1}}[\hat{f}(0)-|\hat{f}(\xi^-)|]b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma \geq C(f_0)|\xi|^\nu,$$

where $C(f_0)$ is a positive constant, depending on n, $||f_0||_{L^1}$, $|||v|^2f_0||_{L^1}$, $||f_0||_{LLogL}$ and b. This result is exactly Proposition 2 of [8], and it uses the assumptions made in the statement of our result in Section I.
Consequently, we obtain the following inequality

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}}[|\widehat{p_kf}(\xi)|^2\hat{f}(0)-\overline{\widehat{p_kf}}(\xi)\widehat{p_kf}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)-\overline{\widehat{p_kf}}(\xi^+)\widehat{p_kf}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi^-)+|\widehat{p_kf}(\xi^+)|^2\hat{f}(0)]b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi$$

$$\geq C(f_0)\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{p_kf}|^2|\xi|^\nu d\xi. \tag{3.13}$$

Above, different values of the constant $C(f_0)$ are still denoted by the same letter.
Step 3: Another expression for the term (3.12).
Since we have assumed that $b(\cos\theta)$ vanish outside $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, by the change of variables $\xi^+\mapsto\xi$ used in [8], see Lemma 1 and its proof therein, the term (3.12) may be written as

$$\hat{f}_0(0)\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{p_kf}(\xi)|^2d\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\ [\ \frac{1}{\cos^n(\theta/2)}-1\ ]\ b(\cos\theta)\ d\theta.$$

The spherical integral in the above expression is well defined since

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\ [\ \frac{1}{\cos^n(\theta/2)}-1\ ]\ b(\cos\theta)\ d\theta$$

$$\leq 2^{n/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\ (1-\cos^n(\theta/2))\ b(\cos\theta)\ d\theta<\infty,$$

by our assumption on b.

It follows that the integral (3.12) becomes (using Plancherel formulae)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} [\ |\widehat{p_k f}(\xi^+)|^2 - |\widehat{p_k f}(\xi)|^2]\hat{f}(0)b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi = C\hat{f}_0(0)||p_k f||^2_{L^2}. \tag{3.14}$$

Step 4: Upper bound for the term (3.11).

This integral is nothing else than

$$2Re\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} \overline{\widehat{p_k f}}(\xi)\hat{f}(\xi^+)\hat{f}(\xi^-)A^k_\xi b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi,$$

where

$$A^k_\xi = \psi(\frac{\xi}{2^k}) - \psi(\frac{\xi^+}{2^k}).$$

Thus (3.11) is bounded from above by

$$2\widehat{f_0}(0)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} |\widehat{p_k f}(\xi)|\ |\hat{f}(\xi^+)|\ |A^k_\xi|\ b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi. \tag{3.15}$$

Let us notice that for the values of the variable ξ, i.e. $2^{k-1} \le |\ \xi\ | \le 2^{k+1}$, appearing in this integral, it follows that $2^{k-2} \le |\ \xi^+\ | \le 2^{k+1}$, see Appendix A if necessary. Thus

$$\hat{f}(\xi^+) = \widehat{p_{k-2}f}(\xi^+) + \widehat{p_{k-1}f}(\xi^+) + \widehat{p_k f}(\xi^+) + \widehat{p_{k+1}f}(\xi^+).$$

Plugging this "expression" of $\hat{f}(\xi^+)$ into equation (3.15), the term (3.11) is bounded from above by

$$2\widehat{f_0}(0)\int_{2^{k-1}\le|\xi|\le 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} |\widehat{p_k f}(\xi)||\widehat{p_k f}(\xi^+)||A^k_\xi|b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi \tag{3.16}$$

$$+2\widehat{f_0}(0)\int_{2^{k-1}\le|\xi|\le 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} |\widehat{p_k f}(\xi)||\widehat{p_{k-2} f}(\xi^+)||A^k_\xi|b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi \tag{3.17}$$

$$+2\widehat{f_0}(0)\int_{2^{k-1}\le|\xi|\le 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} |\widehat{p_k f}(\xi)||\widehat{p_{k-1} f}(\xi^+)||A^k_\xi|b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi \tag{3.18}$$

$$+2\widehat{f_0}(0)\int_{2^{k-1}\le|\xi|\le 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} |\widehat{p_k f}(\xi)||\widehat{p_{k+1} f}(\xi^+)||A^k_\xi|b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)d\sigma d\xi. \tag{3.19}$$

We can also easily estimate $|A^k_\xi|$ as follows

$$\begin{aligned} |A^k_\xi| &\le |\psi(\tfrac{\xi}{2^k}) - \psi(\tfrac{\xi^+}{2^k})| = |\tilde{\psi}(|\tfrac{\xi}{2^k}|) - \tilde{\psi}(|\tfrac{\xi^+}{2^k}|)| \\ &\le \tfrac{C}{2^k}|\ |\xi| - |\xi^+|\ | = \tfrac{C}{2^k}|\ \tfrac{|\xi|^2-|\xi^+|^2}{|\xi|+|\xi^+|}| \\ &\le \tfrac{C}{2^k}\tfrac{|\xi^-|^2}{|\xi|}. \end{aligned}$$

Since $|\xi^-| = |\xi| \sin \frac{\theta}{2}$, we have

$$|A_\xi^k| \le C \sin^2 \frac{\theta}{2}. \tag{3.20}$$

In particular, in view of our assumptions on b and since $\nu \in (0,2)$, these four integrals are well defined, and it remains only to get a suitable upper bound.
These integrals are all of the form, for $j = k-2$, $k-1$, k and $k+1$

$$H_{k,j} \equiv 2\widehat{f}_0(0) \int_{2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{k+1}} \int_{S^{n-1}} |\widehat{p_k f}(\xi)||\widehat{p_j f}(\xi^+)||A_\xi^k| b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) d\sigma d\xi, \tag{3.21}$$

that we bound as

$$H_{k,j} \le M_k + N_{k,j},$$

where

$$M_k \equiv \widehat{f}_0(0) \int_{2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{k+1}} \int_{S^{n-1}} |\widehat{p_k f}(\xi)|^2 |A_\xi^k| b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) d\sigma d\xi \tag{3.22}$$

and

$$N_{k,j} \equiv \widehat{f}_0(0) \int_{2^{k-1} \le |\xi| \le 2^{k+1}} \int_{S^{n-1}} |\widehat{p_j f}(\xi^+)|^2 |A_\xi^k| b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) d\sigma d\xi. \tag{3.23}$$

Clearly, in view of estimate (3.20), one has

$$M_k \le C\widehat{f}_0(0)||p_k(f)||^2_{L^2}.$$

As for (3.23), using (3.20) and the change of variable $\xi^+ \mapsto \xi$, see again [8, 76], we get

$$N_{k,j} \le C\widehat{f}_0(0)||p_j(f)||^2_{L^2}.$$

All in all, we have obtained

$$H_{k,j} \le C\widehat{f}_0(0)\{||p_k(f)||^2_{L^2} + ||p_j(f)||^2_{L^2}\}.$$

Finally, we have found that the integral (3.11) is bounded from above by

$$C\widehat{f}_0(0)\{||p_k(f)||^2_{L^2} + ||p_{k-2}(f)||^2_{L^2} + ||p_{k-1}(f)||^2_{L^2} + ||p_{k+1}(f)||^2_{L^2}\}.$$

Step 5: The differential inequality.
Gluing all the above estimates, we find that

$$\begin{cases} \partial_t ||p_k f||^2_{L^2} + C(f_0) \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{p_k f}|^2 |\xi|^\nu d\xi \le \\ \\ C\hat{f}_0(0)\{||p_k f||^2_{L^2} + ||p_{k-2}(f)||^2_{L^2} + ||p_{k-1}(f)||^2_{L^2} + ||p_{k+1}(f)||^2_{L^2}\} \end{cases}$$

and using the fact that $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$ in the integral of the second term in the left hand side, we obtain (for another constant still denoted by $C(f_0)$)

$$\text{(3.24)} \qquad \begin{cases} \partial_t ||p_k f||^2_{L^2} + C(f_0)\ 2^{k\nu}\ ||p_k f||^2 \leq \\ \\ C\hat{f}_0(0)\{||p_k f||^2_{L^2} + ||p_{k-2}(f)||^2_{L^2} + ||p_{k-1}(f)||^2_{L^2} + ||p_{k+1}(f)||^2_{L^2}\}. \end{cases}$$

Finally, dividing by 2^{kn}, we get

$$\begin{cases} \partial_t \frac{||p_k f||^2_{L^2}}{2^{kn}} + \ [\ C(f_0)\ 2^{k\nu} - C\hat{f}_0(0)] \frac{||p_k f||^2_{L^2}}{2^{kn}} \\ \\ \leq C\hat{f}_0(0)\{\frac{||p_{k-2} f||^2_{L^2}}{2^{(k-2)n}} + \frac{||p_{k-1} f||^2_{L^2}}{2^{(k-1)n}} + \frac{||p_{k+1} f||^2_{L^2}}{2^{(k+1)n}}\}. \end{cases}$$

Therefore, we have obtained a chain of inequalities of the form, for all integer $k \geq 3$

$$\text{(3.25)} \qquad \partial_t U_k(t) + C_k\ U_k(t) \leq \beta\{U_{k-2}(t) + U_{k-1}(t) + U_{k+1}(t)\}$$

where

$$\text{(3.26)} \qquad U_k(t) = \frac{||p_k f(t,.)||^2_{L^2}}{2^{kn}},\ C_k = \ C(f_0)\ 2^{k\nu} - \beta \text{ and } \beta = C\hat{f}_0(0).$$

3.3.2 Conclusion and regularity

From Bernstein's inequality (also called Polya Plancherel Nikoolski inequality), see [62, 64, 66, 54] and more precisely Proposition 3.2 on page 24 of [54], we first note that one has $||p_k f||^2_{L^2} \leq C(\tilde{\psi}) 2^{nk} ||p_k f||^2_{L^1}$. Since $||p_k f||^2_{L^1} \ \leq C(\tilde{\psi})||f||^2_{L^1} = C(\tilde{\psi})||f_0||^2_{L^1}$, we have obtained

$$\text{(3.27)} \qquad U_k \leq M \text{ with } M = C(\tilde{\psi})||f_0||^2_{L^1}.$$

This holds true for all integers $k \geq 0$.
Now, let $k_0 \geq 3$ be the smallest integer such that $C_k > 0$, for all $k \geq k_0$.
Then, the sequence $U_k \geq 0$ satisfies (3.25), (3.26) and (3.27), for all $k \geq k_0$, and in particular for all $k \geq k_0 + 2$.
It follows that one can apply the iteration result stated in Appendix B, yielding the following estimate on U_k : for all integer $p \geq 1$, there exist constants ν_p and α_p such that

$$\text{(3.28)} \qquad U_k(t) \leq M\nu_p e^{-C_{k-2(p-1)}t} + M\alpha_p \frac{1}{(C_{k-2(p-1)})^p}$$

for all $k \geq 2(p-1) + k_0 + 2$ and for all $t \geq 0$.

Now, fix $s \geq 0$, $t > 0$ and an integer $p \geq 1$ that we shall choose just below. Since $||p_k f(t,.)||^2_{L^2} = 2^{kn} U_k(t)$, for $k \geq k_0 + 2$, one has, in view of Lemma 3.2.1

$$\| f(t,.) \|^2_{H^s} \sim \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{ks} \| p_k(f) \|^2_{L^2} = \sum_{k=0}^{2(p-1)+k_0+1} \| p_k(f) \|^2_{L^2} + \sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{+\infty} \| p_k(f) \|^2_{L^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{2(p-1)+k_0+1} \| p_k(f) \|^2_{L^2} + \sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{+\infty} 2^{k(n+s)} U_k(t).$$

Thus, in order to get an estimation of $f(t,.)$ in H^s, it remains to show that the last series appearing above is a convergent one. For this purpose, using (3.28), one has

$$\sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{+\infty} 2^{k(n+s)} U_k(t) \leq$$

$$\sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{+\infty} 2^{k(n+s)} M \nu_p e^{-C_{k-2(p-1)} t} + \sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{+\infty} 2^{k(n+s)} M \alpha_p \frac{1}{(C_{k-2(p-1)})^p}.$$

In view of (3.26), it follows that $(C_{k-2(p-1)})^p \sim_{k \to +\infty} C(f_0,p) 2^{kp\nu}$. Choosing p such that $p\nu \geq (n+s)+1$ for instance, yields that the second series on the right hand side of the last inequality is indeed convergent. The same choice of p works also for the first series. Thus, all in all, the series defining the H^s norm of $f(t,.)$ are convergent, ending the proof.

3.4 Appendix 1: Some basic facts from Littlewood-Paley theory

With the notations of Littlewood-Paley theory, we have

i) *If $\xi \in$ supp ψ_k then $\psi_{k-1}(\xi) + \psi_k(\xi) + \psi_{k+1}(\xi) = 1$ for all $k \geq 1$, and also for $k = 0$ if we agree that $\psi_{-1} \equiv 0$.*

ii) *If $\xi \in$ supp ψ_k then $2^{k-2} \leq \mid \xi^+ \mid \leq 2^{k+1}$.*

Proof:

i) This point is well known, see for instance Triebel [66], and follows easily by noticing that if $\xi \in$ supp ψ_k, then $\xi \notin$ supp ψ_j, for either $j \leq k-2$ or $j \geq k+2$.

ii) Let us assume that $\xi \in$ supp ψ_k i.e $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$.

Notice that the modulus of ξ^+ writes $\mid \xi^+ \mid = \frac{|\xi|}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+\cos\theta})$ with

$$\cos\theta = < \frac{\xi}{|\xi|}, \sigma > , \quad 0 \leq \cos\theta \leq 1.$$

Since $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}} \leq 1$, it follows that $\frac{2^{k-1}}{\sqrt{2}} \leq \mid \xi^+ \mid \leq 2^{k+1}$, which ends the proof.

□

3.5 Appendix 2: An iteration result

Let β,M two positive numbers, and k_0 a positive integer.
Let be given a sequence of positive numbers $\{C_k\}_{k\geq k_0}$, non decreasing in k and for which there exists a positive number α such that $C_{k+1} - C_k \geq \alpha$, for all $k \geq k_0$.
Let be given a sequence $\{U_k\}_{k\geq k_0} = \{U_k(t)\}_{k\geq k_0}$, $t \in \mathbb{R}^+$, satisfying

$$\partial_t U_k + C_k\ U_k \leq \beta\{U_{k-2} + U_{k-1} + U_{k+1}\},\ 0 \leq U_k \leq M \quad \forall k \geq k_0 + 2,\ \ \forall t \geq 0.$$

Then, for any integer $p \geq 1$, there exist constants ν_p, α_p such that, for all $k \geq 2(p-1)+k_0+2$, one has

$$U_k(t) \leq M\nu_p e^{-C_{k-2(p-1)}t} + M\alpha_p \frac{1}{(C_{k-2(p-1)})^p} \text{ for all } t \geq 0.$$

Proof: First start from the fact that $U_k \leq M$, and using this in the right hand side of the differential inequality, leads to the above conclusion, for $p = 1$. Then use an iteration process. □

3.6 Remark

During the proof, we have used the Berger's lemma to find the lower bound for our estimations, appearing a two terms (3.10) and (3.11). Concerning the first one, we have directly applied a estimations in [8], that is prop 2 and prop 3, obtaining a essentiel Sobolev term of exponent ν. For the second one, we used the change of variable $\xi^+ \mapsto \xi$ to find a upper bound. In fact, we can avoid this lemma by applying Plancherel formula, so (3.8) will be replaced by

$$\text{(3.29)} \qquad \begin{cases} \partial_t ||p_k f||^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} Q(f,p_k f) p_k f dv \\ \\ +2Re \int_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} \widehat{p_k f}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi^+)\overline{\hat{f}}(\xi^-)[\psi(\frac{\xi}{2^k}) - \psi(\frac{\xi^+}{2^k})] b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) d\sigma d\xi. \end{cases}$$

Using the standard Boltzmann transformation of the prime $(v,v_*,\sigma) \mapsto (v',v'_*,-\sigma)$, the first term of the right hand side of (3.29) becomes

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,p_k f) p_k f dv = \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} f_* p_k f[(p_k f)' - p_k f] b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma) dv_* dv d\sigma.$$

Using the following inequality

$$p_k f[(p_k f)' - p_k f] = \frac{1}{2}[(p_k f)'^2 - p_k f^2] - \frac{1}{2}[(p_k f)' - p_k f]^2,$$

equality (3.29) becomes

$$
(3.30) \qquad \begin{cases} \partial_t ||p_k f||^2_{L^2} + \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} f_*[(p_k f)' - p_k f]^2 b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma) dv_* dv d\sigma \\ \\ = 2Re \int_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} \widehat{p_k f}(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi^+)\overline{\hat{f}}(\xi^-)][\psi(\frac{\xi}{2^k}) - \psi(\frac{\xi^+}{2^k})]b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) d\sigma d\xi \\ \\ + \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} f_*[(p_k f)'^2 - p_k f^2] b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma) dv_* dv d\sigma. \end{cases}
$$

For the term minoration of (3.30), we use the same estimation in step 2, we obtain

$$
\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} f_*[(p_k f)' - p_k f]^2 b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma) dv_* dv d\sigma \geq C \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{p_k f}|^2 |\xi|^\nu d\xi \geq C 2^{k\nu} ||p_k f||^2_{L^2}.
$$

Concerning the last term of (3.30), we use the change of variable $v \mapsto v'$ and the same manipulation in the step 3 via the variable θ, we get

$$
\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} f_*[(p_k f)'^2 - p_k f^2] b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma) dv_* dv d\sigma \leq C_\theta ||p_k f||^2_{L^2}.
$$

Finally, for the estimation of the remaining term of (3.30), it will be done in the step 4.

Chapitre 4

Smoothness of weak solutions of the spatially homogeneous Landau equation

Published in *"Analysis and Applications, vol.5 (1): 29-49, 2007"*

Abstract

We prove that any weak solution (in the sense of Desvillettes and Villani [41]) to Landau homogeneous equation is smooth, and in particular that it lies in Schwartz space $\mathcal{S}$. Our result has to be compared to [41], where Desvillettes and Villani have shown existence of smooth weak solutions along with an uniqueness result, under further assumptions on initial data. Our method of proof uses Littlewood Paley decomposition of velocity space, and elementary Cauchy-Schwarz or Young's inequalities, thus avoiding any use of complex Sobolev interpolation inequalities.

4.1 Introduction

Landau equation is an important kinetic collisional model describing time evolution of a system of particles in plasma physics (see [76] for instance). Particles are described through a distribution function $f(t,x,v)$ depending on time t, particle position $x \in \mathbb{R}^n$, and velocity $v \in \mathbb{R}^n (n \geq 2)$. In this paper, we shall be exclusively concerned with the homogeneous case: $f(t,x,v)$ does not depend on x. In this case, Landau equation writes as

$$\frac{\partial f}{\partial t}(v,t) = Q(f,f)(v,t), \tag{4.1}$$

with a given non negative initial data $f(0,v) = f_0(v)$.
Landau quadratic operator Q, entering r.h.s. of (4.1), depends on v as follows

$$Q(f,f)(v,t) = \frac{1}{2} \sum_{\omega,\omega'=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v_\omega} \{ \int_{\mathbb{R}^n} dv_\star a_{\omega\omega'}(v - v_\star) [\, f(v_\star,t) \frac{\partial f}{\partial v_{\omega'}}(v,t) - f(v,t) \frac{\partial f}{\partial v_{\star\omega'}}(v_\star,t) \,] \}, \tag{4.2}$$

with

$$(a_{\omega\omega'}(z))_{1 \leq \omega,\omega' \leq n} = \Lambda \mid z \mid^2 \chi(\mid z \mid) \Pi_{\omega\omega'}(z). \tag{4.3}$$

We have used implicit summation convention over repeated indices (ω,ω').
Above, Λ is some positive constant that we normalize to be 1, χ is a non negative function, and $\Pi(z)$ is the following non negative symmetric matrix, corresponding to the orthogonal projection onto $z^\perp$

$$\Pi_{\omega\omega'}(z) = \delta_{\omega\omega'} - \frac{z_\omega z_{\omega'}}{|z|^2}.$$

Landau collision operator (4.2) has the fundamental properties of preserving mass, momentum and energy, that is

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,f)\phi(v) dv = 0, \text{ for } \ \phi(v) = 1, v, \mid v \mid^2 .$$

Moreover, it satisfies the well known Boltzmann's H theorem

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,f) \log(f) dv \leq 0.$$

We assume that function χ, entering Landau operator, is smooth and satisfies

$$(4.4) \qquad \begin{cases} c(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \leq \chi(|z|) \leq C_0(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}}, \\ \\ |\nabla^\beta(\chi(|z|))| \leq C_\beta(1+|z|^2)^{\frac{\gamma}{2}-\beta} \text{ for all multi-index } \beta, \end{cases}$$

where c and C_β are positive constants, latter one depending on β.
Furthermore, we restrict herein to so-called hard potentials, i.e. $0 < \gamma \leq 1$. However, note that this assumption could be relaxed to $\gamma \leq 2$, and even to any $\gamma > 0$, if we make some minor changes on initial data.
We shall also consider so-called very hard potentials, that is

$$(4.5) \qquad \chi(| z |) =| z |^\gamma \text{ for } 0 < \gamma \leq 1,$$

corresponding to interaction laws with inverse s-power forces for $s > 2n - 1$. It differs slightly from (4.4), due to the singularity around zero.

Relevant existence results in the homogeneous case for weak solutions of (4.1) were obtained in [18, 34, 41, 50, 74].

From now on, we assume that a weak solution to Landau equation (4.1) has been constructed, see the results from [41], satisfying usual entropic estimate, for a fixed $T > 0$ (eventually $T = +\infty$)

$$(4.6) \qquad \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)(1 + |v|^2 + \log(1 + f(t,v))dv < \infty.$$

Having in mind regularity questions for (4.1), let us mention some references.
In [18], Arsen'ev and Buryak constructed smooth solutions for smooth and strongly decreasing initial data. Then, Villani showed in [73], in Maxwellian molecules case, that any weak solution is smooth, for initial data in usual weighted L^1 spaces. Recent up to date results about this regularization question are due to Desvillettes and Villani [41]. They have constructed smooth solutions and also given an uniqueness result. Their proof use in an important way propagation of moments. Actually, they have shown that this property holds true, and more importantly, immediate appearance of higher moments.

Thus according to their propagation of moments result, in order to simplify the exposition, we shall assume these moments estimates on initial data, and thus on solutions themselves:

Propagation of moments:

$$\text{For all } \alpha > 0, \; || f_0 ||_{L^1_\alpha} < +\infty, \text{ and } \sup_{t \geq 0} || f(t) ||_{L^1_\alpha} < +\infty. \tag{4.7}$$

It is in fact possible to avoid this assumption on initial data and use instead immediate propagation of moments result shown in [41], at the expense of an adaptation of our proofs below.

Our goal in this chapter is to show this $\mathcal{S}$ regularity for *any weak solution*. Thus, we do not need uniqueness result to conclude: *any weak solution is smooth*. Furthermore, our method of proof uses only elementary arguments. In particular, we avoid Sobolev interpolation inequalities, using instead Littlewood-Paley harmonic decomposition.

In chapitre 3, we have already used this method to prove in a simple way immediate regularity of weak solutions of the homogeneous Boltzmann equation for Maxwellian molecules [9], showing an optimal C^∞ regularity for all time $t > 0$, general case being the subject of chapitre 5. Similar harmonic ideas are also used in [6], in order to get precise functional properties of a linear operator linked with Boltzmann quadratic operator.

Basic results about related harmonic analysis ideas can be found in the books of Runst, Sickel, Stein or Triebel [64, 66, 62]. We refer also to Appendix 1 for further details.

Before stating our main result, let us firstly point out basic notations used herein.

Formulation: We define, for $z \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} b_\omega(z) = \partial_{\omega'} a_{\omega\omega'}(z) \quad \text{i.e.} \quad b(z) = \nabla a(z) \\ c(z) = \partial_{\omega\omega'} a_{\omega\omega'}(z) \quad \text{i.e.} \quad c(z) = \nabla^2 a(z), \end{cases} \tag{4.8}$$

and adopt the following notations

$$\overline{a} = a * f, \; \overline{b} = b * f \text{ and } \overline{c} = c * f.$$

We can then write (4.1) alternatively under the form

$$\partial_t f = \overline{a}_{\omega\omega'} \partial_{\omega\omega'} f - \overline{c} f \quad \text{i.e.} \quad \partial_t f = \overline{a} \nabla^2 f - \overline{c} f. \tag{4.9}$$

Notations: For all $\alpha \geq 0$, we use weighted spaces L^1_α and their standard norms

$$|| f ||_{L^1_\alpha} \equiv \int_{\mathbb{R}^n} | f(v) | (1+ | v |^2)^{\frac{\alpha}{2}} dv.$$

Moreover, we set

$$M_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v) dv, \quad E_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v) | v |^2 \, dv,$$
$$H_0 = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v) \log f_0(v) dv,$$

for initial mass, energy and entropy of initial data.
The usual entropic space is defined by

$$L \log L(\mathbb{R}^n) = \{ \, f \in L^1(\mathbb{R}^n); \; \int_{\mathbb{R}^n} | f(v) || \log(| f(v) |) dv < +\infty \}.$$

Commutator of two operators A and B is defined as $[A,B] = AB - BA$.
Hereafter, C denotes any positive constant not depending on integers k or j. If we need to mention its dependence with respect to any parameter β, then we use notation C_β.
Our main result is then given by

Theorem 4.1.1 *Let $f_0 \in L^1_{2+\delta} \cap LlogL(\mathbb{R}^n)$, for some $\delta > 0$. Let f be any weak non negative solution of Landau homogeneous equation (4.1), (4.2) satisfying assumptions (4.4) or (4.5) and (4.7).*
Then, f lies in $C^\infty([t_0, +\infty]; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ for all $t_0 > 0$.

$\square$

The paper is organized as follows. Section 2 is devoted to the proof of Theorem 4.1.1, divided into a few steps, in case of smooth kernels, that is under assumption (4.4). In section 3, we modify slightly our method of proof and consider non smooth cases, that is under assumption (4.5), thus concluding the paper. Finally, a first Appendix is devoted to basic elements from Littlewood-Paley theory, while a second Appendix includes estimates of commutators appearing during the proof.

4.2 Proof of Theorem 4.1.1, under assumption (4.4)

We divide it into six parts. Firstly, we perform some manipulations to simplify our task and obtain a simple equality. Then, in the next three parts, we estimate each term appearing in this equality, and glue all these estimates in the fifth part, obtaining a differential inequality.

Finally, we deduce an estimation of our solution in Schwartz's space w.r.t. variable v and C^∞ w.r.t. time t.

4.2.1 Simplification step

Let us first recall Landau equation given by (4.9)

$$\partial_t f = \overline{a}\nabla^2 f - \overline{c} f. \tag{4.10}$$

Let k and j be any positive integers. We agree all functions ψ_j appearing with negative indices, are null functions (in fact we need only ψ_{-2}, ψ_{-1}).
Multiplying (4.10) by ψ_j, since $\tilde{\psi}_j \psi_j = \psi_j$, we get

$$\partial_t \psi_j f = (\overline{a}\tilde{\psi}_j)\psi_j \nabla^2 f - (\overline{c}\tilde{\psi}_j)\psi_j f. \tag{4.11}$$

As supp $\nabla\psi_j \subset$ supp ψ_j, we get

$$\begin{cases} \psi_j \nabla^2 f = \nabla^2(\psi_j f) - \sum_{m=j-2}^{j+2} (\nabla^2 \psi_j)\psi_m f - 2\sum_{m=j-2}^{j+2} (\nabla\psi_j)\nabla(\psi_m f) \\ + \sum_{m=j-2}^{j+2} \sum_{m'=j-2}^{j+2} (\nabla\psi_j)(\nabla\psi_m)\psi_{m'} f. \end{cases} \tag{4.12}$$

Taking into account (4.12) and $(\nabla\psi_j)\tilde{\psi}_j = \nabla\psi_j$, equality (4.11) becomes

$$\begin{cases} \partial_t \psi_j f = (\overline{a}\tilde{\psi}_j)\nabla^2(\psi_j f) - (\overline{c}\tilde{\psi}_j)\psi_j f - \sum_{m=j-2}^{j+2} \overline{a}(\nabla^2\psi_j)\psi_m f \\ -2\sum_{m=j-2}^{j+2} \overline{a}(\nabla\psi_j)\nabla(\psi_m f) + \sum_{m=j-2}^{j+2} \sum_{m'=j-2}^{j+2} \overline{a}(\nabla\psi_j)(\nabla\psi_m)\psi_{m'} f. \end{cases} \tag{4.13}$$

Hereafter, for simplicity, variables m,m' will notify a finite summation on m and m'. More precisely, variable m (resp. m') denotes summation on m (resp. m') from $j-2$ to $j+2$.

Applying Littlewood Paley operator p_k to (4.13), we get

$$\begin{cases} \partial_t p_k(\psi_j f) = [\, p_k, \overline{a}\tilde{\psi}_j]\nabla^2(\psi_j f) + (\overline{a}\tilde{\psi}_j)\nabla^2 p_k(\psi_j f) - [\, p_k, \overline{c}\tilde{\psi}_j]\psi_j f - (\overline{c}\tilde{\psi}_j) p_k(\psi_j f) \\ -[\, p_k, \overline{a}\nabla^2(\psi_j)]\psi_m f - \overline{a}\nabla^2(\psi_j) p_k(\psi_m f) - 2[\, p_k, \overline{a}(\nabla\psi_j)]\nabla(\psi_m f) - 2\overline{a}(\nabla\psi_j)\nabla p_k(\psi_m f) \\ +[\, p_k, \overline{a}(\nabla\psi_j)(\nabla\psi_m)]\psi_{m'} f + \overline{a}(\nabla\psi_j)(\nabla\psi_m) p_k(\psi_{m'} f). \end{cases} \tag{4.14}$$

Integrating by parts, we first note that

$$(4.15)\quad \begin{cases} [\, p_k, \overline{a}\tilde{\psi_j}]\nabla^2(\psi_j f) = [\, \nabla^2 p_k, \overline{a}\tilde{\psi_j}]\psi_j f - 2[\, \nabla p_k, \nabla(\overline{a}\tilde{\psi_j})]\psi_j f - 2\nabla(\overline{a}\tilde{\psi_j})\nabla p_k(\psi_j f) \\ +[\, p_k, \overline{a}\nabla^2(\tilde{\psi_j})]\psi_j f + 2[\, p_k, \overline{b}\nabla(\tilde{\psi_j})]\psi_j f + [\, p_k, \overline{c}\tilde{\psi_j}]\psi_j f + \overline{a}\nabla^2(\tilde{\psi_j})p_k(\psi_j f) \\ +2\overline{b}\nabla(\tilde{\psi_j})p_k(\psi_j f) + \overline{c}\tilde{\psi_j}p_k(\psi_j f), \end{cases}$$

and

$$(4.16)\quad \begin{cases} [\, p_k, \overline{a}(\nabla\psi_j)]\nabla(\psi_m f) = [\, \nabla p_k, \overline{a}\nabla\psi_j]\psi_m f - [\, p_k, \overline{b}\nabla(\psi_j)]\psi_m f - [\, p_k, \overline{a}\nabla^2(\psi_j)]\psi_m f \\ -\overline{b}\nabla(\psi_j)p_k(\psi_m f) - \overline{a}\nabla^2(\psi_j)p_k(\psi_m f). \end{cases}$$

Plugging (4.15) and (4.16) into (6.3), multiplying the result by $p_k(\psi_j f)$ and integrating w.r.t. variable v, we find (recall that m and m' denote in fact a double summation $\sum_m \sum_{m'}$)

$$(4.17)\quad \begin{cases} \partial_t \,||\, p_k(\psi_j f)\,||_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{a}\tilde{\psi_j}\nabla^2 p_k(\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv \\ = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}[\, \nabla^2 p_k, \overline{a}\tilde{\psi_j}](\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv \\ - \int_{\mathbb{R}^n}[\, \nabla p_k,\, \nabla(\overline{a}\tilde{\psi_j})](\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv - \int_{\mathbb{R}^n}\nabla(\overline{a}\tilde{\psi_j})\nabla p_k(\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv \\ +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}[\, p_k,\, \overline{a}\nabla^2\tilde{\psi_j} + 2\overline{b}\nabla\tilde{\psi_j}](\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\nabla^2\tilde{\psi_j} + 2\overline{b}\nabla\tilde{\psi_j})p_k(\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv \\ - \int_{\mathbb{R}^n}[\, \nabla p_k, \overline{a}\nabla\psi_j](\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv - \int_{\mathbb{R}^n}\overline{a}\nabla\psi_j\nabla p_k(\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv \\ +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}[\, p_k,\, \overline{a}\nabla^2\psi_j + 2\overline{b}\nabla\psi_j](\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\nabla^2\psi_j + 2\overline{b}\nabla\psi_j)p_k(\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv \\ +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}[\, p_k, \overline{a}\nabla\psi_j\nabla\psi_m](\psi_{m'} f)p_k(\psi_j f)dv + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{a}\nabla\psi_j\nabla\psi_m p_k(\psi_{m'} f)p_k(\psi_j f)dv. \end{cases}$$

Again, let us recall that variables m and m' are a shorthand notation to signify summation on these variables between $j-2$ and $j+2$.

4.2.2 Lower bounds

Firstly, integrating by parts , the second term on first line of (2.8) becomes

$$(4.18)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\tilde{\psi_j})\nabla^2 p_k(\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv = \\ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla(\overline{a}\tilde{\psi_j})\nabla p_k(\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\tilde{\psi_j})\nabla p_k(\psi_j f)\nabla p_k(\psi_j f)dv. \end{cases}$$

We are going to give a lower bound on the second term on the right-hand side of (4.18). For that purpose, ellipticity of $\overline{a}_{\omega\omega'}$ is used; see [41] (proposition 4). Note that the degeneracy of $\Pi_{\omega\omega'}$ entails a loss of order 2 in the exponent w.r.t. $\mid v \mid$, but the proof, which is given for $\mathcal{X}(\mid v \mid) =\mid v \mid^\gamma$, holds also true for $\mathcal{X}(\mid v \mid) = (1+ \mid v \mid^2)^{\frac{\gamma}{2}}$.
In particular, it follows that

$$\overline{a}_{\omega\omega'}(v)\xi_\omega\xi_{\omega'} \geq K(1+ \mid v \mid^2)^{\frac{\gamma}{2}} \mid \xi \mid^2 , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

where K is a non negative constant depending only on the initial moment M_0, energy E_0, entropy H_0 and γ. Taking into account support of our basic functions, we obtain

$$\overline{a}\tilde{\psi}_j \nabla p_k(\psi_j f)\nabla p_k(\psi_j f) \geq K\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}} \tilde{\psi}_j \nabla p_k(\psi_j f)\nabla p_k(\psi_j f), \text{ where } \mathcal{C}_j = (1 + 2^{2j}).$$

Since

$$\tilde{\psi}_j \nabla p_k \psi_j f = \nabla(p_k \psi_j f) - [\nabla p_k, \tilde{\psi}_j]\psi_j f,$$

it follows that, integrating by parts

$$(4.19) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{a}\tilde{\psi}_j \nabla p_k(\psi_j f)\nabla p_k(\psi_j f)dv \geq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}||\nabla p_k(\psi_j f)||_{L^2}^2 \\ \\ +C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} [\ \nabla^2 p_k, \tilde{\psi}_j]\psi_j f p_k(\psi_j f)dv - C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\tilde{\psi}_j)\nabla p_k(\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv. \end{cases}$$

4.2.3 Upper bounds

According to Appendix 1, $\widehat{\tilde{p}_k g}$ is supported in $2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+2}$, for any function $g \in L^1$. It follows that

$$\widehat{\tilde{p}_k g} = \widehat{p_{k-3}(\tilde{p}_k g)} + \widehat{p_{k-2}(\tilde{p}_k g)} + \widehat{p_{k-1}(\tilde{p}_k g)} + \widehat{p_k(\tilde{p}_k g)} + \widehat{p_{k+1}(\tilde{p}_k g)} + \widehat{p_{k+2}(\tilde{p}_k g)} + \widehat{p_{k+3}(\tilde{p}_k g)}.$$

Again, all operators indexed by negative indices are set to zero (that is here p_{-3}, p_{-2}, p_{-1}). Thanks to the commutativity property of operator p_k, we have

$$\widehat{\tilde{p}_k g} = \tilde{p}_k\widehat{(p_{k-3} g)} + \tilde{p}_k\widehat{(p_{k-2} g)} + \tilde{p}_k\widehat{(p_{k-1} g)} + \tilde{p}_k\widehat{(p_k g)} + \tilde{p}_k\widehat{(p_{k+1} g)} + \tilde{p}_k\widehat{(p_{k+2} g)} + \tilde{p}_k\widehat{(p_{k+3} g)}.$$

Hence, by Parseval's inequality, we get

$$(4.20) \qquad ||\tilde{p}_k g||_{L^2} \leq \sum_{l=k-3}^{k+3} ||\tilde{p}_k(p_l g)||_{L^2} \leq C \sum_{l=k-3}^{k+3} ||p_l g||_{L^2}.$$

Estimates on $\overline{a}$ and $\overline{b}$: Firstly, let us note that under assumption (4.4), since χ is taken very smooth, it follows that a belongs to $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Taking into account notations (4.8), one has, for all $v \in \mathbb{R}^n$

$$b(v) = (1-n)v\chi(|\, v\,|),$$
$$\nabla^\beta a(v) = (1-n)[\,(n+\beta-2)\nabla^{\beta-2}(\chi(|\, v\,|)) + v\nabla^{\beta-1}(\chi(|\, v\,|))], \text{ for all integer } \beta \geq 2.$$

In view of the convolution structure, using the following (Peetre) inequality

$$\forall v, v_\star \in \mathbb{R}^n \quad (1+ |\, v - v_\star \,|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \leq (1+ |\, v\,|^2)^{\frac{\gamma}{2}}(1+ |\, v_\star\,|^2)^{\frac{\gamma}{2}},$$

we get

$$|\, \overline{a}(v)\,| \leq C(1+ |\, v\,|^2)^{\frac{\gamma+2}{2}}, \qquad |\, \overline{b}(v)\,| \leq C(1+ |\, v\,|^2)^{\frac{\gamma+1}{2}},$$
$$|\, \nabla^\beta(\overline{a}(v))\,| \leq CC_\beta(1+ |\, v\,|^2)^{\frac{\gamma}{2}} \quad \forall \beta \geq 2,$$

for a constant C depending only on $||\, f\,||_{L^1_{\gamma+2}}$.
Therefore, using the precise support sets of ψ_j, we obtain, for all $j \in \mathbb{N}$

$$(4.21) \qquad \begin{cases} |\, \overline{a}\psi_j\,| \leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+2}{2}}, \, |\, \overline{a}\nabla\psi_j\,| \leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+1}{2}}, \, |\, \overline{a}\nabla^2\psi_j\,| \leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}, \\ \\ |\, \overline{b}\psi_j\,| \leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+1}{2}}, \, |\, \overline{b}\nabla\psi_j\,| \leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}} \\ \\ \text{and } \; |\, \nabla^\beta(\overline{a}\psi_j)\,| \leq CC_\beta\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}, \;\; \forall\beta \geq 2. \end{cases}$$

Inequalities (4.21) hold also true if we change ψ_j by $\tilde{\psi}_j$.
Integral operators estimates: In this subsection, we analyze integrands in (5.7) and (4.19), of the form $[\,\nabla^q p_k, \phi]$, for order $q = 0,1,2$, where ϕ is any smooth function, and we shall obtain an upper bound for each one.
Let us fix an integer $r > 0$. Its exact value will be choosen later.

i) Integral operators estimates of order 2

For the term on the second line of (5.7), we apply Lemma 4.5.1 (Appendix 2) and taking into account (4.21), we obtain

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}[\,\nabla^2 p_k, \overline{a}\tilde{\psi}_j](\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv\right| \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{k(r-1)}}\,||\,\psi_j f\,||_{L^1}\, 2^{\frac{nk}{2}}\,||\,p_k(\psi_j f)\,||_{L^2} \\ \\ +C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+1}{2}}\sum_{l=k-3}^{k+3}||\,p_l(\psi_j f)\,||_{L^2}||\,\nabla p_k(\psi_j f)\,||_{L^2}\,. \end{cases}$$

For any $\eta > 0$, using Young's inequality, each term of the summation term just above can be bounded as

$$\frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+1}{2}}}{\eta} \mid\mid p_l(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \eta \mid\mid \nabla p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\gamma+1}}{2\eta^2} \mid\mid p_l(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 + \frac{\eta^2}{2} \mid\mid \nabla p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 ,$$

for $k-3 \leq l \leq k+3$.
Similary, for the first term on the second line of (4.19), we have

$$\begin{cases} C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}} \left|\int_{\mathbb{R}^n} [\ \nabla^2 p_k, \tilde{\psi}_j]\psi_j f p_k(\psi_j f) dv\right| \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{k(r-1)}} \mid\mid \psi_j f \mid\mid_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \\ \\ +C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}} \sum_{l=k-3}^{k+3} \mid\mid p_l(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \mid\mid \nabla p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} . \end{cases}$$

Again, for any $\varepsilon > 0$, by Young's inequality, each term of the summation term above can be bounded as

$$\frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{\varepsilon} \mid\mid p_l(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \varepsilon \mid\mid \nabla p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\gamma}}{2\varepsilon^2} \mid\mid p_l(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mid\mid \nabla p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 ,$$

for $k-3 \leq l \leq k+3$.

ii) Integral operators estimates of order 1

For the first term on the third line of (5.7), using Lemma 4.5.2 (Appendix 2) with $h = 1$ and (4.21), we get

$$\begin{cases} \left|\int_{\mathbb{R}^n} [\ \nabla p_k, \nabla(\overline{a}\tilde{\psi}_j)](\psi_j f) p_k(\psi_j f) dv\right| \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{kr}} \mid\mid \psi_j f \mid\mid_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \\ \\ +C_r C_j^{\frac{\gamma}{2}} [\ \sum_{l=k-3}^{k+3} \mid\mid p_l(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 + \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2\ ] \end{cases}$$

and for the first term on the fifth line of (5.7),

$$\begin{cases} \left|\int_{\mathbb{R}^n} [\ \nabla p_k, \overline{a}\nabla\psi_j](\psi_m f) p_k(\psi_j f) dv\right| \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{kr}} \mid\mid \psi_m f \mid\mid_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \\ \\ +C_r C_j^{\frac{\gamma}{2}} [\ \sum_{l=k-3}^{k+3} \mid\mid p_l(\psi_m f) \mid\mid_{L^2}^2 + \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2\ ]. \end{cases}$$

iii) Integral operators estimates of order 0

Applying Lemma 4.5.2 (Appendix 2) with $h=0$, for the first term on the fourth line, first term on the sixth line, and first term on the last line of (5.7), we have

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}[\, p_k,\, \overline{a}\nabla^2\tilde{\psi}_j + 2\overline{b}\nabla\tilde{\psi}_j](\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv\right| \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{kr}} \mid\mid \psi_j f \mid\mid_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \\ +C_rC_j^{\frac{\gamma}{2}}[\, \sum_{l=k-3}^{k+3} \mid\mid p_l(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 + \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2\,], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}[\, p_k,\, \overline{a}\nabla^2\psi_j + 2\overline{b}\nabla\psi_j](\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv\right| \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{k(r+1)}} \mid\mid \psi_m f \mid\mid_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \\ +C_rC_j^{\frac{\gamma}{2}}[\, \sum_{l=k-3}^{k+3} \mid\mid p_l(\psi_m f) \mid\mid_{L^2}^2 + \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2\,] \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}[\, p_k, \overline{a}(\nabla\psi_j)(\nabla\psi_m)](\psi_{m'} f)p_k(\psi_j f)dv\right| \leq \frac{C_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{k(r+1)}} \mid\mid \psi_{m'} f \mid\mid_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2} \\ +C_rC_j^{\frac{\gamma}{2}}[\, \sum_{l=k-3}^{k+3} \mid\mid p_l(\psi_{m'} f) \mid\mid_{L^2}^2 + \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2\,], \end{cases}$$

using the following inequalities

$$|\overline{a}(\nabla\psi_j)(\nabla\psi_m)| \leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}, \quad |\nabla^r(\overline{a}(\nabla\psi_j)(\nabla\psi_m))| \leq CC_r\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Remaining estimates Firstly, for the second term on the fifth line of (5.7), by integration by parts, we have

$$\begin{cases} -\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\nabla\psi_j)\nabla p_k(\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv = \\ \int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\nabla\psi_j)p_k(\psi_m f)\nabla p_k(\psi_j f)dv + \int_{\mathbb{R}^n}\nabla(\overline{a}\nabla\psi_j)p_k(\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv. \end{cases} \tag{4.22}$$

For the first term on the r.h.s. of (4.22), using Cauchy-Schwarz's and Young inequalities for any $\zeta > 0$, we get

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\nabla\psi_j)p_k(\psi_m f)\nabla p_k(\psi_j f)dv\right| \leq \frac{C\mathcal{C}_j^{\gamma+1}}{2\zeta^2} \mid\mid p_k(\psi_m f) \mid\mid_{L^2}^2 + \frac{\zeta^2}{2} \mid\mid \nabla p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 .$$

The three integrals, with integrands involving term as $\nabla p_k(\psi_j f)$, of (5.7), (4.18) and (4.19), have upper bounds similar to

$$\frac{C\mathcal{C}_j^{\gamma+1}}{2\mu^2} \mid\mid p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 + \frac{\mu^2}{2} \mid\mid \nabla p_k(\psi_j f) \mid\mid_{L^2}^2 ,$$

for all $\mu > 0$.

Finally, for the remaining terms in (5.7) and (4.22), we get

$$\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\nabla^2\tilde{\psi}_j+2\overline{b}\nabla\tilde{\psi}_j)p_k(\psi_j f)p_k(\psi_j f)dv\right|\leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}\ \ ||\ p_k(\psi_j f)\ ||^2_{L^2}\ ,$$

$$\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}(\overline{a}\nabla^2\psi_j+2\overline{b}\nabla\psi_j)p_k(\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv\right|\leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}[\ ||\ p_k(\psi_m f)\ ||^2_{L^2}+||\ p_k(\psi_j f)\ ||^2_{L^2}],$$

$$\frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\overline{a}\nabla\psi_j\nabla\psi_m p_k(\psi_{m'} f)p_k(\psi_j f)dv\right|\leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}[\ ||\ p_k(\psi_{m'} f)\ ||^2_{L^2}+||\ p_k(\psi_j f)\ ||^2_{L^2}\ ]$$

and

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\nabla(\overline{a}\nabla\psi_j)p_k(\psi_m f)p_k(\psi_j f)dv\right|\leq C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}[\ ||\ p_k(\psi_m f)\ ||^2_{L^2}+||\ p_k(\psi_j f)\ ||^2_{L^2}\ ].$$

4.2.4 Obtaining a differential inequality

We recall that Bernstein's inequality (5.38) implies that

$$||p_k(\psi_j f)||_{L^2}\leq C2^{\frac{nk}{2}}||p_k(\psi_j f)||_{L^1}. \tag{4.23}$$

We choose $\varepsilon=\eta=\zeta=\mu=\frac{\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{4}}}{2}$ in the estimates of previous subsections 4.2.2, 4.2.3, sum w.r.t. exponent of $\mathcal{C}_j$, and get

$$\begin{cases} \partial_t||p_k(\psi_j f)||^2_{L^2}+\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}||\nabla p_k(\psi_j f)||^2_{L^2}\leq C\frac{\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{(r-1)k}}2^{\frac{nk}{2}}||p_k(\psi_j f)||_{L^2} \\ +C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+2}{2}}\ \{\ ||p_k(\psi_j f)||^2_{L^2}+\sum_{l=k-3}^{k+3}\sum_{h=j-2,h\neq j \text{ or } l\neq k}^{j+2}||p_l(\psi_h f)||^2_{L^2}\}. \end{cases} \tag{4.24}$$

Dividing (4.24) by $2^{k(n+1)}$, using (5.38), we get, for all integers $k\geq 0$, $j\geq 0$

$$\partial_t U_{kj}(t)+C_{kj}U_{kj}(t)\leq\mathcal{K}^r_{kj}(t)+C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+2}{2}}\{\ U_{kj}(t)+\sum_{l=k-3}^{k+3}\ \sum_{h=j-2,h\neq j \text{ or } l\neq k}^{j+2}U_{lh}(t)\ \}, \tag{4.25}$$

where

$$\begin{cases} U_{kj}=\frac{||p_k(\psi_j f)||^2_{L^2}}{2^{k(n+1)}},\ C_{kj}=C\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}2^{2k},\ \mathcal{C}_j=(1+2^{2j}) \\ \text{and } \mathcal{K}^r_{kj}(t)=C\frac{\mathcal{C}_j^{\frac{\gamma}{2}}}{2^{rk}}\ ||\ p_k(\psi_j f)(t)\ ||_{L^1}\ . \end{cases}$$

4.2.5 Conclusion and regularity

a) Smoothness with respect to the variable v

Integrating (4.25) from t_0 to t, $0 < t_0 < t$, we get

$$(4.26)\qquad \begin{cases} U_{kj}(t) \leq U_{kj}(t_0)e^{-C_{kj}t} \\ + \int_{t_0}^{t} e^{C_{kj}(s-t)}[\ \mathcal{K}_{kj}^{r}(s) + \mathcal{C}_j^{\frac{\gamma+2}{2}}\{U_{kj}(s) + \sum_{l=k-3}^{k+3}\sum_{h=j-2,h\neq j \text{ or } l\neq k}^{j+2} U_{lh}(s)\}]. \end{cases}$$

Noticing that for any non negative constant $\beta < 1$, one has $e^{C_{kj}(s-t)} < \frac{1}{C_{kj}^{\beta}(s-t)^{\beta}}$, we multiply (4.26) by C_{kj}^{β} and sum on variables k,j. Thanks to (4.23) and assumption (4.7), we have, for any integer $r > 0$, for all $t > t_0 > 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{kj}^{\beta}U_{kj}(t) < C_{t_0},$$

where C_{t_0} is a constant depending only on $\| f \|_{L^1_\gamma}$ and $\| f \|^2_{L^1_{\frac{\gamma+2}{2}}}$.

Now, we shall show that the series $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{kj}^{q\beta}U_{kj}(t)$ is finite, for all integer q, as soon as $t > t_0$. We proceed by iteration over variable q. Obviously, it is true for $q = 1$ by the previous estimation.
Assuming it is true up to q, using inequality (4.23) and conservation of moments on f, we find that

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{kj}^{(q+1)\beta}U_{kj}(t) < C_{t_0},$$

for $r \geq 2q\beta$ where C_{t_0} is a constant depending only on $\| f \|_{L^1_{\gamma+q\beta\gamma}}$ and $\| f \|^2_{L^1_{\frac{\gamma+2+\gamma q\beta}{2}}}$.

Hence, we conclude that $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} C_{kj}^{q\beta}U_{kj}(t)$ is convergent.

In view of Appendix 1, $f(t)$ lies in $\tilde{H}_{q\gamma}^{2q\beta-n-1}$ as soon as $t > 0$ and for any integers q. In other words, $f \in \tilde{H}_{\alpha}^{s}$ for all $s > 0$, $\alpha \geq \frac{\gamma}{2\beta}(s+n+1)$.
All in all, we see that (still when $t > 0$) f lies $\tilde{H}_{\alpha}^{s}$ for all s,$\alpha > 0$ and therefore lies in $\mathcal{S}$.

b) Smoothness with respect to the time t

It remains to show that the previous regularity of solution f holds true for all derivatives w.r.t. variable t i.e. $\partial_t^p f(t) \in \mathcal{S}$ for all integer p as soon as $t > 0$. Again, proceeding by iteration over variable p, this is clearly true for $p = 0$, in view of the previous step. Next, assuming it is true on p, then for step $p+1$

$$\partial_t^{p+1} f = \sum_{k=0}^{p} C_p^k (\partial_t^k \overline{a}) \nabla^2 (\partial_t^{p-k} f) - \sum_{k=0}^{p} C_p^k (\partial_t^k \overline{c}) \partial_t^{p-k} f. \tag{4.27}$$

Thanks to the convolution structure, derivatives of $\overline{a}$ and $\overline{c}$ can be performed on f. Since derivatives of f of order less than p are in Schwartz space, if we derive (4.27) w.r.t. variable v at any order, and multiply the result by any polynomial, it is still bounded.
Therefore, this implies that l.h.s. of (4.27) lies in Schwartz space and concludes the proof of Theorem 4.1.1, under assumption (4.4).

4.3 Proof of Theorem 4.1.1, under assumption (4.5)

We consider herein the hard potentiel case $\chi(\mid v \mid) = \mid v \mid^\gamma$, which has a singularity around zero.
The method of proof used above still applies for this case, up to some modifications that we explain now.
Firstly, looking at subsection 4.2.2, lower bound therein holds true for hard potentiel kernels, as proven in the work of Desvillettes and Villani [41] (Proposition 4).
Modifications will then appear starting from subsection 4.2.3, where we need to estimate from above different terms using commutators iteration method (that is, Lemmas 4.5.1 and 4.5.2 of Appendix 2), and this is really here that smoothness of the kernel is needed.
In order to get ride of the singularity near 0, we split the kernel into two parts. First one will be smooth, thus avoiding the singularity and therefore we can apply on it the manipulations of the iteration's method. For the second one, we shall show that it is possible to make it as small as one wishes, in a suitable sense.
In the sequel, as a convention, we use subscripts S for "smooth" and R for "remainder". This type of decomposition, though standard, is used for instance several times in [71].
Having in mind subsection 4.2.3, we proceed as follows.
Firstly, we take $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ an even C^∞ function such that supp $\Phi \subset (-1,1)$, being 1 near 0. Then, we write, for any strictly non negative constant α_k depending on k,

$$\chi = \chi^{S,k} + \chi^{R,k}, \quad \chi^{S,k} = \mid v \mid^\gamma \overline{\Phi}_{\alpha_k}, \;\; \chi^{R,k} = \mid v \mid^\gamma \Phi_{\alpha_k}$$

where $\overline{\Phi}_{\alpha_k} = 1 - \Phi_{\alpha_k}$ such that $\Phi_{\alpha_k}(\mid v \mid) = \Phi(\frac{|v|}{\alpha_k})$ for all $v \in \mathbb{R}^n$.
By standard computations, we note that, for any integer β

$$\mid \nabla^\beta \chi^{S,k}(\mid v \mid) \mid \leq C_\beta \mid v \mid^{\gamma-\beta} \overline{\Phi}_{\alpha_k}, \tag{4.28}$$

for a non negative constant C_β depending only on β.
We write, with clear notations

$$a = a^{S,k} + a^{R,k},\ b = b^{S,k} + b^{R,k},\ c = c^{S,k} + c^{R,k}. \tag{4.29}$$

In view of the convolution structure, taking (4.28) into account, one has, for all $v \in \mathbb{R}^n$

$$| \overline{a}^{S,k}(v) | \leq C \mid v \mid^{\gamma+2} \overline{\Phi}_{\alpha_k}, \qquad | \overline{b}^{S,k}(v) | \leq C \mid v \mid^{\gamma+1} \overline{\Phi}_{\alpha_k},$$
$$| \nabla^\beta \overline{a}^{S,k}(v) | \leq CC_\beta \mid v \mid^{\gamma+2-\beta} \overline{\Phi}_{\alpha_k} \quad \forall \beta \geq 2,$$

for a constant C depending here only on $|| f ||_{L^1_{\gamma+2}}$.
Therefore, we obtain, using the precise support sets of ψ_j, for all $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} | \overline{a}^{S,k}\psi_j | \leq C2^{j(\gamma+2)},\ | \overline{a}^{S,k}\nabla\psi_j | \leq C2^{j(\gamma+1)},\ | \overline{a}^{S,k}\nabla^2\psi_j | \leq C2^{j\gamma}, \\ \\ | \overline{b}^{S,k}\psi_j | \leq C2^{j(\gamma+1)},\ | \overline{b}^{S,k}\nabla\psi_j | \leq C2^{j\gamma} \\ \\ \text{and } \ | \nabla^\beta(\overline{a}^{S,k}\psi_j) | \leq CC_\beta 2^{j\gamma},\ \ \forall\beta \geq 2, \end{cases} \tag{4.30}$$

for a constant C depending on $|| f ||_{L^1_{\gamma+2}}$ and the L^∞ bound of ψ and its derivatives. Of course, these inequalities also hold true if we change ψ_j by $\tilde{\psi}_j$.
For the non smooth part, taking into account the support of Φ_{α_k}, we obtain

$$| \overline{a}^{R,k}(v) | \leq C\alpha_k^{\gamma+2},\quad | \overline{b}^{R,k}(v) | \leq C\alpha_k^{\gamma+1},\ \ | \overline{c}^{R,k}(v) | \leq C\alpha_k^{\gamma}, \tag{4.31}$$

for a constant C depending on $|| f ||_{L^1}$.
Next, after decomposition of the kernel, as regards to estimates of various integrals in subsection 4.2.3, we are reduced to deal with two types of integrals, corresponding respectively to the smooth and non smooth parts.
For the smooth ones, taking into account estimates (4.30), same estimations clearly hold true again.
Concerning non smooth integrals, we use estimates (4.31), to obtain different upper bounds. For instance, using Taylor's expansion at order 1, we obtain

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} [\ \nabla^2 p_k, \overline{a}^{R,k}\tilde{\psi}_j] f p_k f dv\right| \ \leq \ ||\ [\ \nabla^2 p_k, \overline{a}^{R,k}\tilde{\psi}_j] f||_{L^1} ||p_k f||_{L^\infty} \ \text{(Holder inequality)}$$

$$\leq \ C 2^k \alpha_k^{\gamma+1} ||f||_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} ||p_k f||_{L^2}. \ \text{(Bernstein inequality)}$$

Similarly, one has

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} [\ \nabla p_k, \overline{b}^{R,k}\tilde{\psi}_j] f p_k f dv\right| \leq ||\ [\ \nabla p_k, \overline{b}^{R,k}\tilde{\psi}_j] f||_{L^1} ||p_k f||_{L^\infty} \leq C\alpha_k^{\gamma} ||f||_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} ||p_k f||_{L^2},$$

and

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} [\ p_k, \overline{b}^{R,k}\nabla\tilde{\psi}_j] f p_k f dv\right| \leq ||\ [\ p_k, \overline{b}^{R,k}\nabla\tilde{\psi}_j] f||_{L^1} ||p_k f||_{L^\infty} \leq C\alpha_k^{\gamma} ||f||_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} ||p_k f||_{L^2}.$$

Concerning subsection 4.2.3, the above splitting is not needed, and thus bounds therein remain true, replacing $\mathcal{C}_j^{\frac{1}{2}}$ by 2^j.
All in all, we get the following slightly different inequality, for $\alpha_k < 1$,

$$\begin{cases} \partial_t ||p_k(\psi_j f)||^2_{L^2} + 2^{j\gamma} ||\nabla p_k(\psi_j f)||^2_{L^2} \leq C\frac{2^{j\gamma}}{2^{(r-1)k}} 2^{\frac{nk}{2}} ||p_k(\psi_j f)||_{L^2} + C 2^k \alpha_k^{\gamma} 2^{\frac{nk}{2}} ||p_k(\psi_j f)||_{L^2} \\ + C 2^{j(\gamma+2)}\ \{\ ||p_k(\psi_j f)||^2_{L^2} + \sum_{l=k-3}^{k+3} \sum_{h=j-2, h\neq j \text{ or } l\neq k}^{j+2} ||p_l(\psi_h f)||^2_{L^2}\}. \end{cases}$$

Dividing by $2^{k(n+1)}$ and using (5.38), we get, for any integers k,j

$$\partial_t U_{kj}(t) + C_{kj} U_{kj}(t) \leq \mathcal{K}^r_{kj}(t) + \mathcal{H}_{kj}(t) + C 2^{j(\gamma+2)} \{\ U_{kj}(t) + \sum_{l=k-3}^{k+3} \ \sum_{h=j-2, h\neq j \text{ or } l\neq k}^{j+2} U_{lh}(t)\ \},$$

where

$$\begin{cases} U_{kj} = \frac{||p_k(\psi_j f)||^2_{L^2}}{2^{k(n+1)}},\ C_{kj} = C 2^{j\gamma} 2^{2k},\ \mathcal{K}^r_{kj}(t) = C\frac{2^{j\gamma}}{2^{rk}}\ ||\ p_k(\psi_j f)(t)\ ||_{L^1} \\ \text{and } \mathcal{H}_{kj}(t) = C\alpha_k^{\gamma}\ ||\ p_k(\psi_j f)(t)\ ||_{L^1}\ . \end{cases}$$

To conclude, we proceed as in subsection 4.2.5, taking into account the new term above, depending on α_k.
To get convergence of the series, it is enough to take $\alpha_k = \frac{1}{2^{k\kappa}}$ for a suitable $\kappa > 0$. In particular, for our case, it suffices to choose κ large enough w.r.t. $\frac{2q\beta+1}{\gamma}$ for any fixed integer q (see subsection 4.2.5).

4.4 Appendix 1: Littlewood Paley decomposition

This Appendix is devoted to Littlewood-Paley decomposition and some links with Sobolev type spaces. More details are available in the books of Runst, Sickel, Stein and Triebel [64, 66, 62] and also in lecture notes of Tao [65].

We fix once for all a collection $\{\psi_k = \psi_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ of smooth functions such that

$$\text{supp } \psi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n,\ \mid \xi \mid \leq 2\},$$

$$\text{supp } \psi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n,\, 2^{k-1} \leq \mid \xi \mid \leq 2^{k+1}\} \text{ for all } k \geq 1,$$

and

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\xi) = 1 \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

To simplify some computations, all functions ψ_k, for $k \geq 1$, are constructed from a single one $\psi \geq 0$, i.e. we are given ψ such that supp $\psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{2} \leq \mid \xi \mid \leq 2\}$, $\psi > 0$ if $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mid \xi \mid \leq \sqrt{2}$ such that $\psi_k(\xi) \equiv \psi(\frac{\xi}{2^k})$, for all $k \geq 1$ and $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Then, Littlewood-Paley projection operators p_k, for $k \geq 0$, are defined by

$$\widehat{p_k f}(\xi) = \psi_k(\xi)\hat{f}(\xi),$$

yielding

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k f \text{ for all } f \in \mathcal{S}'.$$

By construction, we can find a new collection $\{\tilde{\psi}_k = \tilde{\psi}_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ of smooth functions such that supp $\tilde{\psi}_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n,\ \mid \xi \mid \leq 4\}$, supp $\tilde{\psi}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, 2^{k-2} \leq \mid \xi \mid \leq 2^{k+2}\}$ for all $k \geq 1$, and such that $\psi_k\tilde{\psi}_k = \psi_k$, for all integer k.

As before, corresponding operator $\tilde{p}_k$, for $k \geq 0$, are defined as

$$\widehat{\tilde{p}_k f}(\xi) = \tilde{\psi}_k(\xi)\hat{f}(\xi).$$

All these functions $\tilde{\psi}_k$, for $k \geq 1$, are constructed from a single one $\tilde{\psi} \geq 0$, i.e. we take $\tilde{\psi}$ such that supp $\tilde{\psi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{2^2} \leq \mid \xi \mid \leq 2^2\}$, $\tilde{\psi} > 0$ if $\frac{1}{2} \leq \mid \xi \mid \leq 2$, such that $\tilde{\psi}_k(\xi) \equiv \tilde{\psi}(\frac{\xi}{2^k})$, for all $k \geq 1$ and $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Note that, for any integer k

$$p_k\tilde{p}_k = p_k. \tag{4.32}$$

Moreover, using Plancherel formula, it follows that

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(v)p_k \text{ (resp. } \tilde{p}_k \text{)} g(v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} p_k \text{ (resp. } \tilde{p}_k \text{)} f(v)g(v)dv, \text{ for all } f,g \in \mathcal{S}'. \tag{4.33}$$

For all $f \in L^1$, one has Bernstein's inequality:

$$|| p_k f ||_{L^2} \leq C \; 2^{\frac{nk}{2}} \; || p_k f ||_{L^1} \;, \tag{4.34}$$

where C is a constant depending on the function $\tilde{\psi}$ (for more details, see proposition 3.2 on p.24 of [54]).
Thanks to this decomposition, weighted space L^1_α satisfies

$$\forall \alpha > 0, \quad || f ||_{L^1_\alpha} \sim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \; || \psi_j f ||_{L^1} \;.$$

Finally, usual weighted Sobolev spaces can be described by the following important result, see for instance the results quoted in the books [64, 66, 62], for all $s,j \geq 0$,

$$||f||^2_{\tilde{H}^s_\alpha} \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{ks} 2^{j\alpha} ||p_k(\psi_j f)||^2_{L^2}.$$

4.5 Appendix 2: Some commutators estimates

Let $k \in \mathbb{N}$. Recall Littlewood-Paley operators p_k and $\tilde{p}_k$ defined in Appendix 1. Clearly, these are a convolution operators, for $f \in L^1$

- $p_k f = \phi_k * f$ with $\phi_k(.) = 2^{nk} \hat{\psi}(2^k .)$ with $\phi_k \in \mathcal{S}$
- $\tilde{p}_k f = \tilde{\phi}_k * f$ with $\tilde{\phi}_k(.) = 2^{nk} \hat{\tilde{\psi}}(2^k .)$ with $\tilde{\phi}_k \in \mathcal{S}$,

where ψ and $\tilde{\psi}$ have been introduced in Appendix 1.

Proposition 4.5.1 *Let $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}^*$ and h=0,1,2. Let φ be any smooth bounded function together with its derivatives. Define the linear commutator operator*

$$\tilde{T}^{r,h}_k = \overbrace{[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k, \cdots}^{r},[\nabla^h p_k,\varphi] \;] \;] \;].$$

Then, there exists a constant number $C > 0$ such that, for all $1 \leq p \leq \infty$,

$$||\tilde{T}^{r,h}_k||_{L^p \to L^p} \leq \frac{CC_r}{2^{(r+1-h)k}} \text{ where } C_r = || \nabla^{r+1} \varphi ||_{L^\infty} \;.$$

Proof: Firstly, computing the commutator $[\nabla^h p_k,\phi]$, we have that

$$[\nabla^h p_k,\varphi](u) = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^h \phi_k(. - v_\star)[\varphi(v_\star) - \varphi(.)]u(v_\star)dv_\star.$$

We begin the computations for $r = 1$.
Using Taylor's formula at order 2, we get, for all $v,v_\star \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(v_\star) = \varphi(v) + \frac{(v_\star - v)}{1!}\nabla\varphi(v) + \frac{(v_\star - v)^2}{2!}\nabla^2\varphi(c) \text{ where } c \in [v_\star,v].$$

Notting $\rho_k^{m,h} = (-1)^m v^m \nabla^h \phi_k(.)$, for all integer m, we have

$$[\nabla^h p_k,\varphi](u)(v) = \nabla\varphi(v)\rho_k^{1,h} * u(v) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k^{2,h}(v - v_\star)\nabla^2\varphi(c)u(v_\star)dv_\star.$$

Applying operator $\tilde{p}_k$, we obtain

$$\begin{aligned}\tilde{T}_k^{1,h} = [\tilde{p}_k,[\nabla^h p_k,\varphi]] &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}_k(v - y)\rho_k^{1,h}(y - v_\star)[\nabla\varphi(y) - \nabla\varphi(v)]u(v_\star)dydv_\star \\ &+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\phi}_k(v - y)\rho_k^{2,h}(y - v_\star)[\nabla^2\varphi(c) - \nabla^2\varphi(c')]u(v_\star)dydv_\star\end{aligned}$$

where $c \in [v - y + v_\star,v_\star]$, $c' \in [v,y]$ and $\tilde{\rho}_k^{m,h} = (-1)^m v^m \nabla^h \tilde{\phi}_k(.)$ for all integer m.

Once again, using Taylor's formula, $\nabla\varphi(y) = \nabla\varphi(v) + (y - v)\nabla^2\varphi(c")$ where $c" \in [v,y]$, it follows that

$$|\tilde{T}_k^{1,h}(u)| \leq C|\tilde{\rho}_k| * |\rho_k^{1,h}| * |u| + C \mid \tilde{\phi}_k \mid *|\rho_k^{2,h}| * |u|.$$

Here C is a positive constant not depending on the variable k.
In the same way, let us proceed with computations after r iterations with operator $\tilde{p}_k$.
Using Taylor's expansion of φ at order $r + 1$, we get, for all $v,v_\star \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(v_\star) = \varphi(v)+\frac{(v_\star - v)}{1!}\nabla\varphi(v)+\frac{(v_\star - v)^2}{2!}\nabla^2\varphi(v)+\cdots\cdots+\frac{(v_\star - v)^{r+1}}{(r + 1)!}\nabla^{r+1}\varphi(c) \text{ with } c \in [v_\star,v].$$

Thus, for $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}[\nabla^h p_k,\varphi](u) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \nabla^h \phi_k(. - v_\star)[\varphi(v_\star) - \varphi(.)]u(v_\star)dv_\star \\ &= \textstyle\sum_{m=1}^r \Theta_k^{m,h}(u) + \Gamma_k^{r+1,h}(u),\end{aligned}$$

where

$$\begin{cases} \Theta_k^{m,h}(u) = \frac{1}{m!}\nabla^m\varphi[\rho_k^{m,h} * u] \\ \\ \Gamma_k^{r+1,h}(u)(v) = \frac{1}{(r+1)!}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_k^{r+1}(v-v_\star)\nabla^{r+1}\varphi(c)u(v_\star)dv_\star. \end{cases}$$

We simplify notations by writing $\tilde{T}_k^{r,h}$ under the form

$$\begin{array}{rcl} \tilde{T}_k^{r,h}(u) & = & \sum_{m=1}^{r}\overbrace{[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,\cdots}^{r},\Theta_k^{m,h}]\ ]\ ]\ ](u) \\ & + & \overbrace{[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,\cdots}^{r},\Gamma_k^{r+1,h}]\ ]\ ]\ ](u). \end{array}$$

Thanks to Taylor's expansion applied several times, we obtain

$$\tilde{T}_k^{r,h}(u)(v) = \sum_{m=1}^{r}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{r-m+1}=r-m+1}\int_{x_1}\cdots\int_{x_m}\cdots\int_{x_r}\int_{v_\star}dx_1\cdots dx_r dv_\star\frac{1}{i_1!i_2!\cdots i_{r-m+1}!}$$
$$\tilde{\phi}_k(v-x_1)\cdots\tilde{\phi}_k(x_{m-2}-x_{m-1})\tilde{\rho}_k^{i_1}(x_{m-1}-x_m)\cdots\tilde{\rho}_k^{i_{r-m+1}}(x_{r-1}-x_r)\rho_k^{m,h}(x_r-v_\star)\nabla^{r+1}\varphi(c)u(v_\star)$$
$$+\frac{1}{(r+1)!}\int_{x_1}\cdots\int_{x_r}\int_{v_\star}dx_1\cdots dx_r dv_\star\tilde{\phi}_k(v-x_1)\cdots\tilde{\phi}_k(x_{r-1}-x_r)\rho_k^{r+1,h}(x_r-v_\star)\nabla^{r+1}\varphi(c')u(v_\star)$$

where $c,c' \in [v,x_1\cdots x_r]$, $(i_1,i_2,\cdots,i_r) \in \mathbb{N}^r$.
Thus

$$(4.35)\qquad \begin{cases} |\tilde{T}_k^{r,h}(u)| \leq \\ \\ C_r\sum_{m=1}^{r}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_{r-m+1}=r-m+1}\overbrace{|\tilde{\phi}_k| * \cdots * |\tilde{\phi}_k|}^{m-1} * |\tilde{\rho}_k^{i_1}| * \cdots * |\tilde{\rho}_k^{i_{r-m+1}}| * |\rho_k^{m,h}| * |u| \\ \\ \qquad +C_r\overbrace{|\tilde{\phi}_k| * \cdots * |\tilde{\phi}_k|}^{r} * |\rho_k^{r+1,h}| * |u|, \end{cases}$$

where $C_r = C||\nabla^{r+1}\varphi||_{L^\infty}$.
Since $\hat{\psi}$, $\hat{\tilde{\psi}} \in \mathcal{S}$, we get, for all integer m

$$(4.36)\qquad \begin{cases} ||\rho_k^{m,h}||_{L^1} \leq \frac{c_{m,h}}{2^{k(m-h)}} \text{ where } c_{m,h} = ||\ |v|^m\nabla^h\hat{\psi}||_{L^1} \\ \\ ||\tilde{\phi}_k||_{L^1} \leq \tilde{c}_0,\ \ ||\tilde{\rho}_k^m||_{L^1} \leq \frac{\tilde{c}_m}{2^{km}} \text{ where } \tilde{c}_m = ||\ |v|^m\hat{\tilde{\psi}}||_{L^1}. \end{cases}$$

Thanks to estimates (4.35) and (4.36), there exists a strictly non negative constant C, depending on $c_{m,h}$,$\tilde{c}_m(1 \leq m \leq r)$, such that, for all $1 \leq p \leq \infty$

$$||\tilde{T}_k^{r,h}||_{L^p \to L^p} \leq \frac{CC_r}{2^{(r+1-h)k}}.$$

$\square$

Lemma 4.5.1 *Let $r \in \mathbb{N}^*$ and $k \in \mathbb{N}$. Let ϕ be a bounded continuous function together with its derivatives. Then, for any function $f \in L^1$, we have the following estimate,*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} [\ \nabla^2 p_k,\phi] f p_k f dv \right| \leq \frac{C \ || \ \nabla^{r+1}\phi \ ||_{L^\infty}}{2^{k(r-1)}} \ || \ f \ ||_{L^1} \ 2^{\frac{nk}{2}} \ || \ p_k f \ ||_{L^2} + \beta_r \sum_{l=k-3}^{k+3} || \ p_l f \ ||_{L^2} || \ \nabla p_k f \ ||_{L^2}$$

where

$$\beta_r = \ C\{|| \ \nabla^1 \phi \ ||_{L^\infty} + || \ \nabla^2 \phi \ ||_{L^\infty} + \cdots + || \ \nabla^r \phi \ ||_{L^\infty}\},$$

and C is a constant not depending on variable k.

Proof: We use iterations method on $\tilde{p}_k$, using $p_k\tilde{p}_k = p_k$ and adjoint property (5.37). This method allows us to get negative exponents of k playing an essential role to obtain our regularity. After r iterations, this term writes

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\nabla^2 p_k,\phi] f p_k f dv = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{T}_k^{r,2}(f) p_k f dv + \sum_{m=0}^{r-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{T}_k^{m,2}(\tilde{p}_k f) p_k f dv. \tag{4.37}$$

where

$$\tilde{T}_k^{\tau,2} = \overbrace{[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,\cdots}^{\tau},[\nabla^2 p_k,\phi]\ ]\ ]\ ] \quad \text{for all } \tau \in \mathbb{N}.$$

Using previous proposition, this linear operator has an L^p estimate, for $1 \leq p \leq \infty$, as follows

$$||\tilde{T}_k^{\tau,2}||_{L^p \to L^p} \leq \frac{C'_\tau}{2^{k(\tau-1)}}, \text{ with } C'_\tau = C||\nabla^{\tau+1}\varphi||_{L^\infty}. \tag{4.38}$$

As regards to first term of r.h.s. of (4.37), using Holder and Bernstein inequalities, we obtain

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{T}_k^{r,2}(f) p_k f dv \right| \leq ||\tilde{T}_k^{r,2}(f)||_{L^1} ||p_k f||_{L^\infty} \leq \frac{C'_r}{2^{(r-1)k}} ||f||_{L^1} 2^{\frac{nk}{2}} \ ||p_k f||_{L^2}. \tag{4.39}$$

For the estimation of the second term of (4.37), using the Cauchy Schwarz inegality and (4.38), one has

$$\left|\sum_{m=1}^{r-1}\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{T}_k^{m,2}(\tilde{p}_k f)p_k f dv\right| \leq \sum_{m=1}^{r-1}||\tilde{T}_k^{m,2}(\tilde{p}_k f)||_{L^2}||p_k f||_{L^2} \leq \beta_r' 2^k||\tilde{p}_k f||_{L^2}||p_k f||_{L^2}, \tag{4.40}$$

where $\beta_r' = C\sum_{m=0}^{r-1} || \nabla^{m+1}\phi ||_{L^\infty}$.

Taking into account the inequality $|| \nabla p_k f ||_{L^2}\geq C2^k || p_k f ||_{L^2}$ obtained by Plancherel formula, using (4.20), last term (4.40) can be bounded as

$$\beta_r' \sum_{l=k-3}^{k+3} ||p_l f||_{L^2}||\nabla p_k f||_{L^2}, \tag{4.41}$$

and thanks to (4.39) and (4.41), proof is ended.

□

Following Lemma is the counterpart of the previous one, but for lower order derivatives.
Lemma 4.5.2 *Let $r\in\mathbb{N}^*$, $k\in\mathbb{N}$ and $h=0{,}1$. Let ϕ a bounded continuous function together with its derivatives. Then, for any function $f\in L^1$, we have*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}[\ \nabla^h p_k,\phi]f p_k f dv\right| \leq \frac{C\ ||\ \nabla^{r+1}\phi\ ||_{L^\infty}}{2^{k(r+1-h)}}\ ||\ f\ ||_{L^1}\ 2^{\frac{nk}{2}}\ ||\ p_k f\ ||_{L^2} + \beta_r[\ \sum_{l=k-3}^{k+3}||\ p_l f\ ||_{L^2}^2 + ||\ p_k f\ ||_{L^2}^2],$$

where

$$\beta_r = C\{||\ \nabla^1\phi\ ||_{L^\infty} + ||\ \nabla^2\phi\ ||_{L^\infty} + \cdots + ||\ \nabla^r\phi\ ||_{L^\infty}\},$$

and C is a constant not depending on variable k.
Proof: Using (5.37), we can write, after r iterations

$$\int_{\mathbb{R}^n}[\ \nabla^h p_k,\phi]f p_k f dv = \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{T}_k^{r,h}(f)p_k f dv + \sum_{m=0}^{r-1}\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{T}_k^{m,h}(\tilde{p}_k f)p_k f dv, \tag{4.42}$$

where

$$\tilde{T}_k^{\tau,h} = \overbrace{[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,[\tilde{p}_k,\cdots}^{\tau},[\nabla^h p_k,\phi]\ ]\ ]\ ] \quad \text{for all } \tau\in\mathbb{N}.$$

which has the following norm estimation, for $1\leq p\leq\infty$ (proposition 4.5.1)

$$||\tilde{T}_k^{\tau,h}||_{L^p\to L^p} \leq \frac{C'_\tau}{2^{(\tau+1-h)k}} \text{ with } C'_\tau = C||\nabla^{\tau+1}\phi||_{L^\infty}. \tag{4.43}$$

Concerning the first term on the left hand side of (4.42), using Holder and Bernstein inequalities, we have

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{T}_k^{r,h}(f)p_k f dv\right| \leq ||\tilde{T}_k^{r,h}(f)||_{L^1}||p_k f||_{L^\infty} \leq \frac{C'_r}{2^{(r+1-h)k}}||f||_{L^1} \;\; 2^{\frac{nk}{2}} \; ||p_k f||_{L^2}. \tag{4.44}$$

For the second one, using Cauchy Schwarz inequality and (see 4.43), we get

$$\left|\sum_{m=0}^{r-1}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{T}_k^{m,h}(\tilde{p}_k f)p_k f dv\right| \leq \sum_{m=0}^{r-1} ||\tilde{T}_k^{m,h}(\tilde{p}_k f)||_{L^2}||p_k f||_{L^2} \leq \beta_r||\tilde{p}_k f||_{L^2}||p_k f||_{L^2},$$

where $\beta_r = C\sum_{m=0}^{r-1} || \nabla^{m+1}\phi ||_{L^\infty}$.
Using (4.20) and applying Young's inequality ends the proof.

□

Chapitre 5

Littlewood-Paley Theory and regularity issues in Boltzmann homogeneous equations II. Non cutoff case and Non Maxwellian molecules

Abstract

We use Littlewood-Paley theory for the analysis of regularization properties of weak solutions of the homogeneous Boltzmann equation. For non cutoff and non Maxwellian molecules, we show that such solutions are smoother than the initial data. In particular, our method applies to any weak solution, though we assume that it belongs to a weighted L^2 space.

5.1 Introduction

This is the second and final part of a work devoted to regularization properties of weak solutions to Boltzmann homogeneous equation, by using technics from harmonic analysis.

We refer the reader to our work [9], chapitre 3, where we considered a very special case of collision cross sections, namely non cutoff Maxwellian molecules. In this chapter, we wish to consider a larger class of collision sections, namely those corresponding to so called hard potentials. More precisely, we shall consider smoothed versions of this case, see assumptions below for precise definitions

Since we have already given precise references on the framework considered herein in the first part [9], chapter 3, we shall be rather concise in this Introduction, but we refer to [28, 35, 37, 38]. We also mention the review [76] and the recent one [5].

Let us just recall that Boltzmann homogeneous equation reads as

$$\partial_t f(t,v) = Q(f,f)(t,v) \quad t \geq 0,\, v \in \mathbb{R}^n, \tag{5.1}$$

where f is a positive function depending only (homogeneous framework) upon the two variables $t \geq 0$ (time) and $v \in \mathbb{R}^n$ (velocity) with $f(0,v) = f_0(v)$, where $n \geq 2$.
The initial datum $f_0 \neq 0$ is supposed to satisfy the usual "entropic" hypothesis, that is

$$f_0 \geq 0, \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)\{1+ |v|^2 + \log(1 + f_0(v)\}dv < +\infty. \tag{5.2}$$

Boltzmann quadratic operator Q appearing on the r.h.s. of (5.1) depends on v as follows

$$Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} dv_* d\sigma B(v-v_*,\sigma)(f'f'_* - ff_*)d\sigma dv_*,$$

where $v_* \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S^{n-1}$ (unit sphere of $\mathbb{R}^n$), $f = f(v)$, $f_* = f(v_*)$, $f' = f(v')$ and $f'_* = f(v'_*)$, and

$$v' \equiv \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|\sigma}{2}, \quad v'_* \equiv \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|\sigma}{2}$$

are the so called post (or pre) collisional velocities.
As in [9], chapter 3, we assume that the collision cross section $B(v-v_*,\sigma) > 0$ is given under the following multiplicative form

$$B(v-v_*,\sigma) = \Phi(|\, v-v_* \,|)b(\cos\theta), \ \cos\theta = <\frac{v-v_*}{|v-v_*|},\sigma> \,,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{5.3}$$

and that it satisfies the following non cutoff assumption

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\, b(\cos\theta)d\theta < +\infty \text{ and } \sin^{n-2}\theta\, b(\cos\theta) \sim \frac{\kappa}{\theta^{1+\nu}} \text{ when } \theta \longrightarrow 0, \tag{5.4}$$

where $\kappa > 0$ and $0 < \nu < 1$ are fixed.
First part [9], chapter 3, was concerned with the so called Maxwellian case, corresponding to $\Phi \equiv 1$ (or constant) with the above notations.
Herein, the velocity part of the kernel, that is function Φ, shall be assumed to correspond to a smoothed version of the so called hard potentials, that is

$$\Phi(|v|) = (1 + |v|^2)^{\frac{\gamma}{2}}, \tag{5.5}$$

with the range of parameters $0 < \gamma \leq 1$; the real hard potentials case corresponds to the case $\Phi(|v|) = |v|^\gamma$.

We assume that a weak solution to Boltzmann (5.1) has already been constructed and that it satisfies the usual entropic estimate, for a fixed $T > 0$ (eventually $T = +\infty$), together with mass conservation, and decrease of energy. It is then known that such a weak solution has then all moments w.r.t. velocity, for strictly positive time. Again, we refer for precise references to [9] and to bibliography.

In this second part of our work, we are still interested in regularization properties of such solutions.
In [9], chapter 3, we have provided a very simple proof of C^∞ regularization property of weak solutions, for Maxwellian molecules, that is when Φ is taken to be constant, so a case which is now excluded by our assumption (5.5).
It should be mentioned that the proof performed in [9], though extremely simple, does not (at least for us) adapt for non Maxwellian molecules, and this is so from the first computations.

In this non Maxwellian and non cutoff case, the up to date recent results about this regularization property question are due to Desvillettes and Wennberg [42], showing $\mathcal{S}$ (in fact through weighted Sobolev spaces) regularity. However, the point is that, actually, Desvillettes and Wennberg show that, under suitable assumptions on the cross section, a solution in $\mathcal{S}$ does exist, with f_0 satisfying (5.2).

Here, exactly as in [9], we wish to show the stronger result that *any weak solution is smooth*. Up to an assumption of weighted L^2 bounds, we shall show that this is indeed the case. Thus, our result is strictly not comparable to [42]. A similar result was established in the context of Landau homogeneous equation in chapter 4 (see [44]).

As in [9], our arguments are based on Littlewood-Paley theory. However, we need here commutators estimates, to take into account the fact that Φ is now really a non constant function. In particular, we shall need some results extracted from the paper by Alexandre [6].

The bad point is that we need further integrability assumption with respect to variable v. This point is in fact easy to understand, see the remarks at the end of the paper.

Thus, according to [38], we shall furthermore assume that for some $t_0 > 0$,

$$f \in L^\infty([t_0, +\infty); L^2_q(\mathbb{R}^n)), \text{ for all } q > 2. \tag{5.6}$$

It is an open problem to show that any weak solution satisfying only the usual entropic bounds enjoy this L^2 integrability (5.6), even if we do take $t_0 = 0$ and an initial datum in the same class. This is in particuliar due to the lack of a good uniqueness result, and also to the fact that power of f, for an exponent less that 1 belongs to a worse Besov type space, see [62] for instance, and in view of the (quite optimal w.r.t. index of regularity) functional properties of Boltzmann operator [6].

The exact result we want to prove here is given by

Theorem 5.1.1 *Let be given an initial datum f_0 and a collision cross section B such that (5.2), (5.3), (5.4) and (5.5) hold true. Let f be any weak non negative solution of Boltzmann homogeneous equation (5.1). Furthermore, we assume that (5.6) holds true for some $t_0 > 0$. Then, for any $t > t_0$, for all $s,\alpha \in \mathbb{R}^+$, $f(t,.)$ belongs to the weighted Besov-Sobolev space $B^s_{2,2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.*

□

In particular, it follows that for $t > t_0$, $f(t)$ belongs immediately to Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Plan of the chapter: Section 2 is devoted to the proof of our main result. Then we make some final comments in Section 3. For convenience of the reader, we have again devoted a small Appendix to basic facts from Harmonic Analysis, and notations used herein, in particular weighted spaces.

5.2 Proof of the theorem

For any $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, one has, using notations from [6] and the Appendix, $< .;. >$ denoting the usual duality bracket,

$$< \psi_j p_k Q(g,f); \psi_j p_k f >= \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv f \tau_{-v_*} \circ T^\Phi \circ \tau_{v_*}\{p_k \psi_j^2 p_k f\}. \tag{5.7}$$

Above, we have introduced $g = f$ in order to show clearly on which functions we are going to perform fractional differentiation.

Furthermore, for any suitable test function, see [6] for more precisions,

$$T^\Phi \phi(v) = \int_{S^{n-1}} [\phi(v^+) - \phi(v)] b(\frac{v}{|v|}.\sigma) d\sigma \ \Phi(v),$$

τ_{v_*} denoting the usual translation.

In particuliar, when $\Phi \equiv 1$, corresponding to the Maxwellian case, let us recall that, see [8] for instance, that

$$v \mapsto T^1\phi(v)$$

is adjoint to

$$f \mapsto Q_{Max}(\delta_{v_*=0}, f).$$

We can then write

$$< \psi_j p_k Q(g,f); \psi_j p_k f >= \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C},$$

where

$$\mathcal{A} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv f \tau_{-v_*} \circ T_\Delta^\Phi \circ \tau_{v_*} \{p_k \psi_j^2 p_k f\}, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{B} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv f \tau_{-v_*} \circ T^1 \circ \{[\Phi, p_k] \tau_{v_*} \psi_j^2 p_k f\}, \tag{5.9}$$

and

$$\mathcal{C} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv f \tau_{-v_*} \circ T^1 (p_k \Phi \tau_{v_*} \psi_j^2 p_k f). \tag{5.10}$$

Above, T_Δ^Φ is defined as in [6] by

$$T_\Delta^\Phi \phi(v) = \int_{S^{n-1}} \phi(v^+)[\Phi(v^+) - \Phi(v)] b(\frac{v}{|v|}.\sigma) d\sigma.$$

Using the fact that

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv f \tau_{-v_*} \circ T^1 \circ (p_k \Phi \tau_{v_*} \psi_j^2 p_k f) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv (\tau_{v_*} f) T^1 (p_k \Phi \tau_{v_*} \psi_j^2 p_k f) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv Q_{Max}(\delta_{w=0}, \tau_{v_*} f) p_k \Phi \tau_{v_*} \psi_j^2 p_k f \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \{Q_{Max} \widehat{(\delta_{w=0}, \tau_{v_*} f)}\} \psi_k(\xi) \{\Phi \widehat{\tau_{v_*} \psi_j^2} p_k f\} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) \Big\{ e^{-iv_*.\xi^+} \hat{g}(\xi^+) - e^{-iv_*.\xi} \hat{f}(\xi) \Big\} \psi_k(\xi) \Big\{ \Phi \widehat{\tau_{v_*} \psi_j^2 p_k} f \Big\},
\end{aligned}$$

it follows that

$$\mathcal{C} = \mathcal{D} + \mathcal{E}, \tag{5.11}$$

where

$$\mathcal{D} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) \Big\{ \psi_k(\xi) - \psi_k(\xi^+) \Big\} e^{-iv_*.\xi^+} \hat{f}(\xi^+) \Big\{ \Phi \widehat{\tau_{v_*} \psi_j^2 p_k} f \Big\}, \tag{5.12}$$

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \; p_k f \tau_{-v_*} \circ T^1 \circ (\Phi \tau_{v_*} \psi_j^2 p_k f), \tag{5.13}$$

by performing back the above computations.

We then write

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} + \mathcal{G}, \tag{5.14}$$

where

$$\mathcal{F} = -\int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv p_k f \tau_{-v_*} \circ T^{\Phi}_{\Delta} \circ \tau_{v_*} \psi_j^2 p_k f, \tag{5.15}$$

and

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv p_k f \tau_{-v_*} \circ T^{\Phi} \circ \tau_{v_*} \psi_j^2 p_k f,$$

that is also

$$\mathcal{G} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma g_* p_k f \Phi(v - v_*) b(\frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma)[(\psi_j^2 p_k f)' - (\psi_j^2 p_k f)]. \tag{5.16}$$

For this last term, one has

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} + \mathcal{I}, \tag{5.17}$$

where

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma) p_k f \Phi(v - v_*)(\psi_j' - \psi_j)(\psi_j p_k f)', \tag{5.18}$$

and

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma) \psi_j p_k f \Phi(v - v_*)[(\psi_j p_k f)' - (\psi_j p_k f)]. \tag{5.19}$$

By using the simple identity $a(b-a) = -\frac{1}{2}(b-a)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, it follows that

$$\mathcal{I} = \mathcal{J} - \mathcal{K}, \tag{5.20}$$

where

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma) \Phi(v - v_*)[((\psi_j p_k f)')^2 - (\psi_j p_k f)^2], \tag{5.21}$$

and

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma) \Phi(v - v_*)[(\psi_j p_k f)' - (\psi_j p_k f)]^2. \tag{5.22}$$

All in all, we have obtained, by applying operator $\psi_j p_k$ on Boltzmann equation and integrating against $\psi_j p_k f$, operations which are perfectly allowed even for entropic weak solutions, that is not even without assumption (5.6), the following differential equality

$$\frac{d}{dt} \|\psi_j p_k f\|^2_{L^2} + \mathcal{K} = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{D} + \mathcal{F} + \mathcal{H} + \mathcal{J}. \tag{5.23}$$

In the following, our task will be to found upper bounds on each term on the right hand side, while we shall look for a lower bound on $\mathcal{K}$.

• **Upper bound on $\mathcal{J}$**

Since

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma)(\psi_j p_k f)^2 \Phi(v-v_*)\Big\{g'_* - g_*\Big\},$$

it follows that, using the results from [8], one may write, for a suitable kernel S

$$\mathcal{J} = C\int_{\mathbb{R}^n} dv(\psi_j p_k f)^2 S * g(v).$$

Since we have assumed all moments on f (and thus on g) bounded, we find

$$|\mathcal{J}| \lesssim 2^{j\gamma}\|\psi_j p_k f\|^2_{L^2}. \tag{5.24}$$

• **Upper bound on $\mathcal{H}$**

Firstly, we note immediately that

$$|\mathcal{H}| \lesssim \frac{1}{2^j}\int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma g_* |p_k f| \Phi(v-v_*)|v-v_*|\tilde{b}|\psi_j p_k f|'$$

and thus similarly to [71] (see also [6]), we find

$$|\mathcal{H}| \lesssim \frac{1}{2^j}\|g\|_{L^1_{\gamma+1}}\|p_k f\|_{L^2}\|\psi_j p_k f\|_{L^2_{-\gamma-1}}.$$

It follows that

$$|\mathcal{H}| \lesssim \frac{1}{2^{j(\gamma+2)}}\|g\|_{L^1_{\gamma+1}}\|p_k f\|_{L^2}\|\psi_j p_k f\|_{L^2}. \tag{5.25}$$

• **Upper bound on $\mathcal{F}$**

Using notations from [6], one has

$$\mathcal{F} = - < Q_\Delta(g,p_k f); \psi_j^2 p_k f > ,$$

so that

$$|\mathcal{F}| \lesssim \|Q_\Delta(g,p_k f)\|_{L^2}\|\psi_j^2 p_k f\|_{L^2}.$$

Thus

$$|\mathcal{F}| \lesssim \|g\|_{L^1_\gamma}\|p_k f\|_{L^2_\gamma}\|\psi_j p_k f\|_{L^2}. \tag{5.26}$$

• **Upper bound on $\mathcal{A}$**

In the same way,

$$|\mathcal{A}| = | < Q_\Delta(g,f); p_k\psi_j^2 p_k f > | \lesssim \|Q_\Delta(g,f)\|_{L^2}\|p_k\psi_j^2 p_k f\|_{L^2},$$

and thus

$$|\mathcal{A}| \lesssim \|g\|_{L^1_\gamma}\|f\|_{L^2_\gamma}\|\psi_j p_k f\|_{L^2}. \tag{5.27}$$

• **Upper bound on $\mathcal{B}$**

Similarly, again with notations from [6]

$$|\mathcal{B}| = | < B_k; \psi_j^2 p_k f > |,$$

and thus

$$|\mathcal{B}| \lesssim \|g\|_{L^1}\|f\|_{L^2}\|\psi_j p_k f\|_{L^2}. \tag{5.28}$$

• **Estimate on $\mathcal{D}$**

Taking into account the fact that $|\xi^+|$ is bounded above and below by a constant times $|\xi|$ on the support of ψ_k, we can introduce another Littlewood-Paley partition $\tilde{p}_k$ to get

$$\mathcal{D} = \int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) g_* \{\widehat{\tau_{v_*}\tilde{p}_k f}\}(\xi^+) A_k^\xi \{\widehat{\Phi\tau_{v_*}\psi_j^2 p_k f}\}$$

where $A_k^\xi \equiv \psi_k(\xi^+) - \psi_k(\xi)$. Since $|A_k^\xi| \lesssim \sin\frac{\theta}{2}$, it follows that

$$|\mathcal{D}| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{S^{n-1}} d\sigma \tilde{b}(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma) g_* |\{\widehat{\tau_{v_*}\tilde{p}_k f}\}(\xi^+)||\{\widehat{\Phi\tau_{v_*}\psi_j^2 p_k f}\}|$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} dv_* g_* \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{S^{n-1}} d\sigma |\{\widehat{\tau_{v_*}\tilde{p}_k f}\}(\xi^+)|^2 \tilde{b}(.)|\Big\}^{\frac{1}{2}} . \Big\{ \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{S^{n-1}} d\sigma |\{\widehat{\Phi\tau_{v_*}\psi_j^2 p_k f}\}|^2 \tilde{b}(.)\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

where $\tilde{b}(.) = \sin\frac{\theta}{2}.b(.)$.
Thus making the change of variables $\xi^+ \mapsto \xi$, we get

$$|\mathcal{D}| \lesssim \|g\|_{L^1_\gamma}\|\tilde{p}_k f\|_{L^2} 2^{j\gamma}\|\psi_j p_k f\|_{L^2}. \tag{5.29}$$

• **Lower bound on $\mathcal{K}$**

From Peetre's inequality, it follows that

$$\mathcal{K} \gtrsim \int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{v - v_*}{|v - v_*|}.\sigma) g_* < v_* >^{-\gamma} < v >^{\gamma} \Big\{ (\psi_j p_k f)' - (\psi_j p_k f) \Big\}^2$$

$$\gtrsim \int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma) g_* < v_* >^{-\gamma} 2^{j\gamma} \tilde{\psi}_j^2(v) \Big\{ (\psi_j p_k f)' - (\psi_j p_k f) \Big\}^2$$

$$\gtrsim \int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(.) g_* < v_* >^{-\gamma} 2^{j\gamma} \Big\{ (\psi_j p_k f)' - (\psi_j p_k f) + [\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_j'](\psi_j p_k f)' \Big\}^2$$

$$\gtrsim \int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(.) g_* < v_* >^{-\gamma} \Big\{ (\psi_j p_k f)' - (\psi_j p_k f) \Big\}^2 - c 2^{j\gamma} < v_* >^{-\gamma} |\tilde{\psi}_j - \tilde{\psi}_j'|^2 [(\psi_j p_k f)']^2$$

$$\gtrsim 2^{j\gamma} \|\psi_j p_k f\|^2_{H^{\frac{\nu}{2}}} - C 2^{j(\gamma-2)} \int_{\mathbb{R}^n} dv_* \int_{\mathbb{R}^n} dv \int_{S^{n-1}} d\sigma b(.) g_* < v_* >^{-\gamma} |v - v_*|^2 \sin^2(\frac{\theta}{2}) |(\psi_j p_k f)'|^2.$$

Using similar computations as those from [8]. Therefore, using one commutator, we find

$$\mathcal{K} \gtrsim 2^{j\gamma} 2^{k\nu} \|\psi_j p_k f\|^2_{L^2} - C 2^{j(\gamma-2)} 2^{k(\nu-2)} \|p_k f\|^2_{L^2_\alpha}, \tag{5.30}$$

for all $\alpha \geq 0$.

• Differential inequality

Collecting all the above estimates, we have found that, setting $U_{j,k} = \|\psi_j p_k f\|^2_{L^2}$, that one has

$$\begin{cases} \partial U_{j,k} + C 2^{j\gamma} 2^{k\nu} U_{j,k} \lesssim \\ \\ 2^{j\gamma} U_{j,k} + 2^{-j(\gamma+2)} \|g|_{L^1_{\gamma+1}} \|p_k f\|_{L^2} U_{j,k}^{\frac{1}{2}} + \|g\|_{L^1_\gamma} \|p_k f\|_{L^2_\gamma} U_{j,k}^{\frac{1}{2}} \\ \\ + \|g\|_{L^1_\gamma} \|f\|_{L^2_\gamma} U_{j,k}^{\frac{1}{2}} + \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^2} U_{j,k}^{\frac{1}{2}} \\ + \|g\|_{L^1_\gamma} \|\tilde{p}_k f\|_{L^2} 2^{j\gamma} U_{j,k}^{\frac{1}{2}} + 2^{j(\gamma-2)} 2^{k(\nu-2)} \|p_k f\|^2_{L^2_\alpha}. \end{cases} \tag{5.31}$$

• Iteration- First step

By assumption, for all $t \geq t_0$, $U_{j,k} \lesssim \frac{1}{2^{j\beta}}$, for all $\beta \geq 0$, $\|p_k f\|_{L^2_\alpha} \lesssim C$ and $\|g\|_{L^1_\alpha} \lesssim C$. It follows that we found

$$\partial_t U_{j,k} + 2^{j\gamma} 2^{k\nu} U_{j,k} \lesssim 2^{j(\gamma-2)}.$$

Thus, it follows from (5.31) that for $t \geq t_1 > t_0$,

$$U_{j,k} \lesssim 2^{j(\gamma-3)} 2^{-k\nu}.$$

Since we have also

$$U_{j,k} \lesssim 2^{-j\alpha},$$

it follows that, for any $\varepsilon > 0$ small, any $\alpha \geq 0$

$$U_{j,k} \lesssim 2^{-j\alpha} 2^{-k(\nu-\varepsilon)}.$$

Thus, we have obtained that for any $\varepsilon > 0$, small, $f \in B^{\frac{\nu}{2}-\varepsilon}_{2,\infty,\alpha}$ (α refering to the weight). These bounds were obtained by using punctual (in j and k) estimates. But, if we take into account that we have also summability, then we can relax the parameter ε, and we get in fact that $f \in B^{\frac{\nu}{2}}_{2,2,\alpha}$, for all $t \geq t_1 > t_0$.

• Iteration- Second step

We now want to improve the index of regularity. For this purpose, we need to work back on the terms $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$, from which we deduce the two estimates appearing on the third line of (5.31). In order to improve these two estimates, the simplest way is to use the results from [6]. Then, in view of the regularity obtained in the first step, we obtain immediately that

$$|\mathcal{A}| \lesssim \|g\|_{W^{1,\frac{\nu}{2}}_{\alpha}} \|f\|_{B^{\frac{\nu}{2}}_{2,2,\alpha}} 2^{-k\frac{\nu}{2}} 2^{-j\alpha} \|\psi_j p_k f\|_{L^2} \lesssim 2^{-k\frac{\nu}{2}} 2^{-j\alpha} \|\psi_j p_k f\|_{L^2} \tag{5.32}$$

(for all big α). Similarly, taking into account the results on T^1 from [6] and the fact that there is a commutator appearing in $\mathcal{B}$, we get

$$|\mathcal{B}| \lesssim 2^{-j\alpha} 2^{-k(1-\nu)} \|\psi_j p_k f\|_{L^2}. \tag{5.33}$$

Replacing the two estimates on the third line of (5.31) by the estimates obtained in (5.32) and (5.33), we get this time from (5.31)

$$\partial_t U_{j,k} + 2^{j\gamma} 2^{k\nu} U_{j,k} \lesssim 2^{j(\gamma-2)} 2^{-k\nu}$$

and by iterating, we get

$$U_{j,k} \lesssim 2^{-j\alpha} 2^{-k(2\nu-\varepsilon)}$$

and finally $f \in B^{\nu}_{2,2,\alpha}$ for all $\alpha \geq 0$, by the same type of arguments.
In conclusion, we have passed from the regularity index $\frac{\nu}{2}$ to the regularity index ν.
We can now bootstrap this new index of regularity, by using it to again get improved estimates on $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$. That is, we get estimates similar to (5.32) and (5.33) but with ν replaced by 2ν. This concludes the proof.

5.3 Final comments

We wish to finish on some remarks connected in particular with assumption (5.6).

1) First of all, we assumed that $\nu \in (0,1)$. This is only for convenience, since we have used results from [6]. The range $\nu \in [1,2)$ is in fact avalaible, see [7]. Thus, our main result can be also extended to this case.

2) Next, what about relaxing assumption (5.6)? Then, note that adding the assumption of boundedness on entropy dissipation rate (which is in fact part of the definition of a good entropic weak solution), we can assume that

$$\int_0^T \| < v >^{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{f}(s)\|^2_{H^{\frac{\nu}{2}}} ds < +\infty. \tag{5.34}$$

From the books quoted in the bibliography, in particular [62], we get

$$\int_0^T \| < v >^\gamma f(s) \|_{H^s_{p_1}} ds < +\infty, \tag{5.35}$$

where $p_1 = \dfrac{n}{n - \frac{\nu}{2}} > 1$, but $p_1 < 2$.
To simplify the exposition, let's forget about integrability w.r.t. time t. Then it follows from Sobolev embedding that $< v >^\gamma f \in L^{p_2}$, where $p_2 = \frac{n}{n-\nu}$. Of course $p_2 > 1$, but we note that $p_2 \geq 2$ iff $\nu \geq \frac{n}{2}$. In particular, in dimension $n = 2$, this is the case iff $\nu \geq 1$, while in dimension 3, this is the case iff $\nu \geq \frac{3}{2}$. In conclusion when ν is really very close to 2, then this L^2 bound is available.
In conclusion, in dimension $n = 2$ or $n = 3$, it should be certainly possible (with some extra work) to relax assumption (5.6) and get our result.
We also note, that having in mind [38], small power of f should have good regularity.
These small remarks explain also the fact that Landau equation, corresponding to a version of Boltzmann equation with $\nu = 2$ is much more easiest to deal with, see for instance [44].

3) Finally, as regards the non homogeneous version of Boltzmann equation, let us note our work in progress [11], where we show regularization properties, for solutions satisfying very weak assumptions. This is has to be compared to [30], where initial assumptions are quite strong.

5.4 Appendix: Littlewood Paley decomposition.

This Appendix is devoted to Littlewood-Paley decomposition and some links with Sobolev type spaces, see the books of Runst, Sickel and Triebel [66, 62].
We fix once for all a collection $\{\psi_k = \psi_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ of smooth functions such that

$$\text{supp } \psi_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ \mid \xi \mid \leq 2\},$$

$$\text{supp } \psi_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \, 2^{k-1} \leq \mid \xi \mid \leq 2^{k+1}\} \text{ for all } k \geq 1,$$

and

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(\xi) = 1 \text{ for all } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

To simplify some computations, all functions ψ_k, for $k \geq 1$, are constructed from a single one $\psi \geq 0$, i.e. we are given ψ such that supp $\psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \, \frac{1}{2} \leq \mid \xi \mid \leq 2\}$, $\psi > 0$ if
$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mid \xi \mid \leq \sqrt{2}$ such that $\psi_k(\xi) \equiv \psi(\frac{\xi}{2^k})$, for all $k \geq 1$ and $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Then, Littlewood-Paley projection operators p_k, for $k \geq 0$, are defined by

$$\widehat{p_k f}(\xi) = \psi_k(\xi)\hat{f}(\xi),$$

yielding

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k f \text{ for all } f \in \mathcal{S}'.$$

By construction, we can find a new collection $\{\tilde{\psi}_k = \tilde{\psi}_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ of smooth functions such that supp $\tilde{\psi}_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ |\ \xi \ | \le 4\}$, supp $\tilde{\psi}_k \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ 2^{k-2} \le |\ \xi \ | \le 2^{k+2}\}$ for all $k \ge 1$, and such that $\psi_k \tilde{\psi}_k = \psi_k$, for all integer k.
As before, corresponding operator $\tilde{p}_k$, for $k \ge 0$, are defined as

$$\widehat{\tilde{p}_k f}(\xi) = \tilde{\psi}_k(\xi)\hat{f}(\xi).$$

All these functions $\tilde{\psi}_k$, for $k \ge 1$, are constructed from a single one $\tilde{\psi} \ge 0$, i.e. we take $\tilde{\psi}$ such that supp $\tilde{\psi} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n, \ \frac{1}{2^2} \le |\ \xi \ | \le 2^2\}$, $\tilde{\psi} > 0$ if $\frac{1}{2} \le |\ \xi \ | \le 2$, such that $\tilde{\psi}_k(\xi) \equiv \tilde{\psi}(\frac{\xi}{2^k})$, for all $k \ge 1$ and $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Note that, for any integer k

$$p_k \tilde{p}_k = p_k. \tag{5.36}$$

Moreover, using Plancherel formula, it follows that

$$\int_v f(v) p_k \text{ (resp. } \tilde{p}_k \text{)} g(v) dv = \int_v p_k \text{ (resp. } \tilde{p}_k \text{)} f(v) g(v) dv, \text{ for all } f,g \in \mathcal{S}'. \tag{5.37}$$

For all $f \in L^1$, one has Bernstein's inequality:

$$\|p_k f\|_{L^2} \le C \ 2^{\frac{nk}{2}} \|p_k f\|_{L^1}, \tag{5.38}$$

where C is a constant depending on the function $\tilde{\psi}$.
We set for any $v \in \mathbb{R}^n$, $< v >= (1+|v|^2)^{\frac{1}{2}}$. Lebesgue weighted spaces L^p_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, are defined as the spaces of those functions $f = f(v)$ such that $< v > f \in L^p$. We denote the corresponding norm by $\|.\|_{L^p_\alpha}$.
Thanks to this decomposition, weighted space L^1_α satisfies

$$\forall \alpha > 0, \quad ||\ f \ ||_{L^1_\alpha} \sim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \ ||\ \psi_j f \ ||_{L^1} \ .$$

More generally, usual weighted Sobolev-Besov spaces can be described by the following important result, see for instance the results quoted in the books [66, 62], last index α referring to the weight

$$\|f\|^q_{B^s_{p,q,\alpha}} \simeq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{kqs} \|p_k f\|^q_{L^p_\alpha} \simeq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{kqs} 2^{jq\alpha} \|\psi_j p_k f\|^q_{L^p}.$$

Chapitre 6

Entropy dissipation and regularity for Boltzmann-Dirac equation

Abstract

The paper considers Boltzmann-Dirac equation, which is a modified Boltzmann equation for Fermi-Dirac particules, and in the case of long-range interactions i.e. without Grad's angular cut-off assumption. Following the work of Alexandre, Desvillettes, Wennberg and Villani [8], who proved partial regularity of the distribution function of the Boltzmann equation, from the entropy dissipation rate, we show a similar result in the context of Boltzmann-Dirac operator.

6.1 Introduction

The classical Boltzmann equation describes the evolution of a phase-space density of classical particles under the assumption that they only interact by pairwise (elastic) collisions. Under suitable hypotheses, it is possible to derive Boltzmann equation

$$\frac{\partial}{\partial t}f + v.\nabla_x f = Q^B(f,f) \tag{6.1}$$

where

$$Q^B(g,f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(v-v_*,\sigma)[f'g'_* - fg_*]dv_*d\sigma.$$

Here $f = f(t,x,v)$ (i.e $g = g(t,x,v)$) ≥ 0 is a density in phase space; $x,v \in \mathbb{R}^n$. In the collision term on the right-hand side, f' denotes $f(t,x,v')$, f_* denotes $f(t,x,v_*)$,etc., where (v,v_*) and (v',v'_*) denote the velocities of two particules before and after collision. They are given, using a spherical parameterisation

$$v' \equiv \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|\sigma}{2}, \quad v'_* \equiv \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|\sigma}{2}.$$

Now, if we want to describe a gas of Fermi-Dirac particules satisfying Sommerfeld's degeneracy condition (see [29]), one has to modify the collision integral in order to take into account quantum effects.
Then equation 6.1 has to be replaced by

$$\partial_t f + v.\nabla_x f = Q^{BD}(f,f), \tag{6.2}$$

with

$$Q^{BD}(g,f)(v) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(v-v^*,\sigma)[g'_*f'(1-g_*)(1-f) - g_*f(1-g'_*)(1-f')]dv_*d\sigma. \tag{6.3}$$

Herein, we asssume that the scattering cross section $B(v-v_*,\,\sigma) > 0$ writes

$$B(v-v_*,\,\sigma) = \Phi(|v-v_*|)b(cos\theta),\ \cos\theta = <\frac{v-v_*}{|v-v_*|},\sigma>, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \tag{6.4}$$

the above range of values of θ meaning more precisely that we assume that it is supported on this set (this is really unimportant, as can be checked from the rest of the paper).

We are interested in taking a collision section B associated to an intermolecular potential $\frac{1}{r^s}$, under the non cutoff assumption, that is

$$\sigma \longrightarrow B(v-v_*,\,\sigma) \notin L^1(S^{n-1}).$$

More precisely, we assume $b(cos\theta)$ has a singularity around $\theta \sim 0$ of the form

$$sin^{n-2}\theta b(cos\theta) \sim \frac{k}{\theta^{1+\nu}}, \quad \theta \longrightarrow 0, \quad \nu = \frac{2}{s-1}. \tag{6.5}$$

Physical background and derivation of such quantum Boltzmann models can be found in Chapman and Cowling ([29], chap.17) , Nordheim [72] and Uehling and Uhlenbeck [78].
Indeed, Equation (6.2) provides a good approximation to the Boltzmann equation (6.1). The interest of this approximation is due to the fact that every solution of (6.2) has a natural L^∞-estimate (due to Pauli's exclusion principle):

$$0 \leq f(t,x,v) \leq 1,\ 0 \leq g(t,x,v) \leq 1 \quad (t,x,v) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{6.6}$$

Under integrability assumptions on B, global existence of solutions to (6.2) in the distributional sense have been proven by Dolbeault [43].
The non cutoff case was initiated by Alexandre [1] and one can find Lu [57] a compactness result under rather general assumptions on the cross section.

For the spatially homogeneous solutions, some basic results on equilibrium stats and long-time behavior of solutions have been also obtained in [56], [58].

Our aim is to prove some smoothing effects on solutions by using the control of the entropy dissipation (H-theorem).
This type of regularity was obtained for the Boltzmann case by Alexandre, Desvillettes, Villani and Wennberg [8]. In particular, they used the entropy dissipation rate, which is one of the main physically meaningful quantity:

$$D^B(g,f) = -\int_{\mathbb{R}^n} Q^B(g,f)\log f dv,$$

to control smoothness of the distribution function in the case of singular cross section and by the a priori estimate $D^B(f,f) \in L^1([0,T] \times \mathbb{R}^n_x)$. Their result states that under suitable conditions, for $R > 0$

$$||\sqrt{f}||^2_{H^{\frac{\nu}{2}}(|v|<R)} \leq C_{g,R}[D^B(g,f) + ||g||_{L^1_2}||f||_{L^1_2}].$$

where $C_{g,R}$ a constant depends only on the function g and R.

Here, we shall use the same method of proof of [8] with some different manipulations related to the structure of the collision Boltzmann-Dirac operator, to get the following estimation

$$||f||^2_{H^{\frac{\nu}{2}}(|v|<R)} \leq C_g[D^{BD}(g,f) + ||g||_{L^1_2}||f||_{L^1_2}],$$

where

$$D^{BD}(g,f) = -\int_{\mathbb{R}^n} Q^{BD}(g,f) \log \frac{f}{1-f} dv,$$

is the entropy dissipation for the Boltzmann-Dirac equation.
By application direct of this theorem, using the same manipulations in the work of Alexandre and Villani [13], we can obtain the existence of weak solutions for the non homogeneous Boltzmann-Dirac equation. It generalizes the work of [4].

6.2 Statement of the result

Following [8], we introduce the cross-section for momentum transfer:

$$\begin{aligned} \Lambda(|v-v_*|) &= \int_{S^{n-1}} B(v-v_*,\sigma)(1-k.\sigma)d\sigma \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin^{N-2}\theta B(|v-v_*|,\cos\theta)(1-\cos\theta). \end{aligned} \tag{6.7}$$

We also define for $|z| \neq 0$

$$B'(z,\sigma) = sup_{1\leq\lambda\leq\sqrt{2}} \frac{|B(\lambda z,\sigma) - B(z,\sigma)|}{(\lambda-1)|z|},$$

and, in the same way as (6.7)

$$\Lambda'(|v-v_*|) = \int_{S^{n-1}} B'(v-v_*,\sigma)(1-k.\sigma)d\sigma. \tag{6.8}$$

We introduce the stantard notations

$$||f||_{L^1_\alpha} = \int_{\mathbb{R}^n} f(v)(1+|v|)^\alpha dv, \qquad ||f||_{L\log L} = \int_{\mathbb{R}^n} f(v)\log(1+f)dv.$$

Theorem 6.2.1 *Assume that*

$$B(v-v_*,\, \sigma) \geq \Phi(|v-v_*|)b(k.\sigma), \tag{6.9}$$

where Φ is continuous and bounded below by a strictly positive in every interval $0 < r \leq |z| \leq R$. Assume also that b satisfies the singularity assumption (6.5), and that

$$\Lambda(|z|) + |z|\Lambda'(|z|) \leq C(1+|z|)^2. \tag{6.10}$$

Then there exists a constant C_g, depending only on b, $||g||_{L^1_1}$, $||g||_{L\log L}$ and on Φ, such that

$$||f||^2_{H^{\frac{\nu}{2}}(|v|<R)} \leq C_g[\ D^{BD}(g,f) + ||g||_{L^1_2}||f||_{L^1_2}], \tag{6.11}$$

where

$$D^{BD}(g,f) = -\int_{\mathbb{R}^n} Q^{BD}(g,f) \log \frac{f}{1-f} dv$$

Proof: First, from the generalized entropy dissipation functional defined just above, using the change of the variable $(v,v_*,\sigma) \to (v',v'_*,\sigma)$, one has

$$D^{BD}(g,f) = -\int_{\mathbb{R}^n} Q^{BD}(g,f) \log \frac{f}{1-f} dv$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg'_*(1-g_*)f'(1-f)\left[\log \frac{f}{1-f}\frac{1-f'}{f'}\right] dvdv_*d\sigma$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg'_*(1-g_*)f'(1-f)\log \frac{f'(1-f)}{f(1-f')} dvdv_*d\sigma.$$

Splitting the last integral into two terms of the form

$$D^{BD}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg'_*(1-g_*)\left(f'(1-f)\log \frac{f'(1-f)}{f(1-f')} - f'(1-f) + f(1-f')\right) dvdv_*d\sigma$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg'_*(1-g_*)[f'(1-f) - f(1-f')]dvdv_*d\sigma = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2.$$

$\mathcal{A}_2$ can be written as

$$\mathcal{A}_2 = \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg'_*(1-g_*)[f'-f]dvdv_*d\sigma.$$

Applying the change of variables in prime, we obtain

$$\mathcal{A}_2 = -\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bf(g'_* - g_*)dvdv_*d\sigma.$$

Using the cancellation lemma [8]), we obtain that

$$\int_{\mathbb{R}^{n}\times S^{n-1}} B(g'_* - g_*)dv_*d\sigma = g * S(v),$$

where

$$|S(z)| \le C(\Lambda(|z|) + |z|\Lambda'(|z|)). \tag{6.12}$$

Taking into account of (6.12), one has

$$\mathcal{A}_2 \le C||g||_{L^1_2}||f||_{L^1_2}. \tag{6.13}$$

Returning to the estimation $\mathcal{A}_1$, using an inequality of the form

$$\forall\ X \le 1,\, Y \le 1, \text{ on a } X\log\frac{X}{Y} - X + Y \ge (X-Y)^2,$$

we choose $X = f'(1-f)$, $Y = f(1-f')$, and obtain

$$\mathcal{A}_1 \geq \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg'_*(1-g_*)[f'(1-f) - f(1-f')]^2 dvdv_*d\sigma,$$

which gives also

$$\mathcal{A}_1 \geq \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg'_*(1-g_*)(f'-f)^2 dvdv_*d\sigma. \tag{6.14}$$

Once again, we use the change of variable in prime for the last integral, and get

$$\mathcal{A}_1 \geq \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg_*(1-g'_*)(f'-f)^2 dvdv_*d\sigma. \tag{6.15}$$

Now, adding (6.14) and (6.15), we obtain

$$\mathcal{A}_1 \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} B[g_*(1-g'_*) - g'_*(1-g_*)](f'-f)^2 dvdv_*d\sigma.$$

Taking into account the inequality

$$g_*(1-g'_*) - g'_*(1-g_*) \geq g'_*(1-g'_*)$$

We obtain

$$\mathcal{A}_1 \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} Bg'_*(1-g'_*)(f'-f)^2 dvdv_*d\sigma.$$

Applying again the change of variables in prime, we have

$$\mathcal{A}_1 \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} BG_*(f'-f)^2 dvdv_*d\sigma.$$

such that $G_* = g_*(1-g_*)$, we know that $||G_*||_{L^1} \leq ||g_*||_{L^1}$ and $||G_*||_{L\log L} \leq \infty$.
We can then use the same manipulation in the proof of the regularity result obtained in the work of Alexandre, Villani, Desvillettes and Wennberg [8]. By definition, the functions f and g are already bounded. The minoration of $\mathcal{A}_1$ gives then

$$\mathcal{A}_1 \geq \min_{|z|\leq 2\sqrt{2}R}(1,\Phi(|z|)) \int_{\mathbb{R}^{2N}\times S^{N-1}} G_*(f'-f)^2 b(k.\sigma) dvdv_*d\sigma.$$

Finally, the following two inequalities

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^{2N}\times S^{N-1}} G_*(f'-f)^2 b(k.\sigma)dvdv_*d\sigma \\ \geq \frac{1}{2(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2\{\int_\sigma b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)(\hat{G}(0) - |\hat{G}(\xi^-)|d\sigma\}d\xi \\ \text{ and } \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2\{\int_\sigma b(\frac{\xi}{|\xi|}.\sigma)(\hat{G}(0) - |\hat{G}(\xi^-)|d\sigma\}d\xi \geq C_g|\xi|^\nu. \end{cases}$$

suffice to deduce, in the case when B does vanish near $v = v_*$, that

$$\mathcal{A}_1 \geq C_g ||f||^2_{H^{\frac{\nu}{2}}}. \tag{6.16}$$

Here, C_g depends only on b, $||g||_{L^1_1}$, $||g||_{L\log L}$ and on Φ.
To prove that the same holds also in the general case (in which $\Phi(|z|)$ is allowed to vanish for $|z| = 0$), we need to truncate small relative velocities (see [8]).
Estimates (6.13) and (6.16) together ensure the theorem holds.

6.3 Appendix: Fourier transformation of the Boltzman-Dirac operator

In the spirit of the calculation in [8], we are interested here in computing the Fourier transformation of Q^{BD} in the case of Maxwelliens molecules. In this case, the collision kernel B of (6.4) reduces to function b (i.e $\Phi = 1$), that we assume integrable.
For simplicity, we decompose this operator into two terms,

$$Q^{BD} = Q^{BD^+} - Q^{BD^-},$$

where

$$Q^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} g(v'_*)\overline{g}(v)f(v')\overline{f}(v)b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma)dv_*d\sigma$$

and

$$Q^{BD^-}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \overline{g}(v'_*)g(v_*)\overline{f}(v')f(v)b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma)dv_*d\sigma,$$

where the notations $\overline{g} = 1-g$ and $\overline{f} = 1-f$ are used.
These operators have the same structure by changing the prime, so it suffices to calculate the Fourier tranform of the first one and conclude directly for the second one .

By definition, the Fourier tranform of the first operator writes

$$\hat{Q}^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{2n} \times S^{n-1}} g(v'_*)\overline{g}(v)f(v')\overline{f}(v)e^{-iv\xi}b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma)dvdv_*d\sigma.$$

Using the classical change of variables in prime, we get

$$\hat{Q}^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{2n} \times S^{n-1}} g(v_*)\overline{g}(v'_*)f(v)\overline{f}(v')e^{-iv'\xi}b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma)dvdv_*d\sigma.$$

Introducing the inverse Fourier tranform, we obtain

$$\hat{Q}^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{4n} \times S^{n-1}} g(v_*)\widehat{\overline{g}}(\xi_1)f(v)\widehat{\overline{f}}(\xi_2)e^{+iv'_*\xi_1}e^{+iv'(\xi_2-\xi)}b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma)d\xi_1 d\xi_2 dvdv_*d\sigma.$$

Writing the definition of v' and v'_*, it becomes

$$\hat{Q}^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{4n}\times S^{n-1}} d\xi_1 d\xi_2 dv dv_* d\sigma$$

$$g(v_*)\widehat{\overline{g}}(\xi_1) f(v)\widehat{\overline{f}}(\xi_2) e^{-i\frac{v+v_*}{2}(\xi-\xi_2+\xi_1)} e^{-i\frac{|v-v_*|}{2}.\sigma(\xi-\xi_2-\xi_1)} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma).$$

By the isometry on S^{n-1}, we can exchange the unity vectors in the sense

$$\int_{S^{n-1}} F(k.\sigma,l.\sigma)d\sigma = \int_{S^{n-1}} F(l.\sigma,k.\sigma)d\sigma, \quad |k| = |l| = 1. \tag{6.17}$$

We introduce the following definitions, for any vector $w \in \mathbb{R}^n$

$$w^+ = \frac{w}{2} + \frac{|w|.\sigma}{2} \quad \text{and} \quad w^- = \frac{w}{2} - \frac{|w|.\sigma}{2}. \tag{6.18}$$

Taking account (6.18) and applying (6.17) to the vectors $l = \frac{\xi-\xi_2+\xi_1}{|\xi-\xi_2+\xi_1|}$ and $k = \frac{v-v_*}{|v-v_*|}$, we get

$$\hat{Q}^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{4n}\times S^{n-1}} d\xi_1 d\xi_2 dv dv_* d\sigma$$

$$g(v_*)\widehat{\overline{g}}(\xi_1) f(v)\widehat{\overline{f}}(\xi_2) e^{-iv\left[(\xi-\xi_2+\xi_1)^+-\xi_1\right]} e^{-iv_*\left[(\xi-\xi_2+\xi_1)^--\xi_1\right]} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}.\sigma).$$

Thus,

$$\hat{Q}^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} d\xi_1 d\xi_2 d\sigma$$

$$\hat{g}\left[(\xi-\xi_2+\xi_1)^- - \xi_1\right]\widehat{\overline{g}}(\xi_1)\hat{f}\left[(\xi-\xi_2+\xi_1)^+ - \xi_1\right]\widehat{\overline{f}}(\xi_2) b(\frac{\xi-\xi_2+\xi_1}{|\xi-\xi_2+\xi_1|}.\sigma).$$

Making the following change of variable $\xi - \xi_2 + \xi_1 = \xi_*$, we get

$$\hat{Q}^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} \hat{g}\left(\xi_*^- - \xi_1\right)\widehat{\overline{g}}(\xi_1)\hat{f}\left(\xi_*^+ - \xi_1\right)\widehat{\overline{f}}(\xi+\xi_1-\xi_*) b(\frac{\xi_*}{|\xi_*|}.\sigma) d\xi_1 d\xi_* d\sigma.$$

By definition of $\overline{f}$ and $\overline{g}$, we get

$$\hat{Q}^{BD^+}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} d\xi_1 d\xi_* d\sigma$$

$$\hat{g}\left(\xi_*^- - \xi_1\right)\left[\delta_{[\xi_1=0]} - \hat{g}(\xi_1)\right]\hat{f}\left(\xi_*^+ - \xi_1\right)\left[\delta_{[\xi+\xi_1-\xi_*=0]} - \hat{f}(\xi+\xi_1-\xi_*)\right] b(\frac{\xi_*}{|\xi_*|}.\sigma).$$

Taking into account the change of variables in prime, we obtain the Fourier transform of Q^{BD^-}:

$$\hat{Q}^{BD^-}(g,f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} d\xi_1 d\xi_* d\sigma$$

$$\left[\delta_{[\xi_*^- -\xi_1=0]} - \hat{g}(\xi_*^- - \xi_1)\right]\hat{g}(\xi_1)\left[\delta_{[\xi_*^+ -\xi_1=0]} - \hat{f}(\xi_*^+ - \xi_1)\right]\hat{f}\left(\xi+\xi_1-\xi_*\right) b(\frac{\xi_*}{|\xi_*|}.\sigma).$$

Bibliographie

[1] R.Alexandre Some Remarks on 3D Boltzmann linear operator without cutoff. *Transp. Th. and Stat. Phys.* **28** (5): 433-473, 1999.

[2] R.Alexandre Around 3D Boltzmann non linear operator without cutoff. A new formulation. *M2AN* **34** (3): 575-590, 2000.

[3] R.Alexandre Solutions of Boltzmann equation without cutoff and for small initial data. *J. Stat. Physics* **104**: 327-358, 2002.

[4] R.Alexandre On some related non homogeneous 3D Boltzmann models in the non cuttof case. *J. Math. Kyoto Univ.* **40** (3): 493-524, 2000.

[5] R.Alexandre Boltzmann equation and singular kernels. *Lecture Notes. Given during C.H.K.E, Shanghai, Dec. 2006.* In preparation.

[6] R.Alexandre Integral kernel estimates for a linear singular operator linked with Boltzmann equation. Part I: Small singularities $0 < \nu < 1$. *Indiana Univ. J. Maths*, 2007.

[7] R.Alexandre, L.He Integral kernel estimates for a linear singular operator linked with Boltzmann equation. Part II: High singularities $1 \leq \nu < 2$. *Work in preparation.*

[8] R.Alexandre, L.Desvillettes, C.Villani, B.Wennberg Entropy dissipation and long range interactions. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **152** (4): 327-355, 2000.

[9] R.Alexandre, M.ElSafadi Littlewood-Paley decomposition and regularity issues in Boltzmann homogeneous equations.I. Non cutoff and Maxwell cases. *M3AS* **15** (6), 2005.

[10] R.Alexandre, M.ElSafadi Littlewood-Paley decomposition and regularity issues in Boltzmann homogeneous equations.II. Non cutoff and non Maxwell cases. *Preprint.*

[11] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, .C.-Y.Xu, T.Yang Regularization properties of non homogeneous Boltzmann equation. *Work in progress.*

[12] R.Alexandre, C.Villani On the Landau approximation in plasma physics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **21** (1): 61-95, 2004.

[13] R.Alexandre, C.Villani On the Boltzmann equation for long range interactions. *Comm. Pure. Appl. Math.* **55** (1): 30-70, 2002.

[14] L.Arkeryd On the Boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **45**: 1-34, 1972.

[15] L.Arkeryd Intermolecular forces of infinite range and the Boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **77**: 11-21, 1981.

[16] L.Arkeryd Asymptotic behaviour of the Boltzmann equation with infinite range forces. *Comm. Math. Phys.* **86**: 475-484, 1982.

[17] L.Arkeryd L^∞ estimates for the space-homogeneous Boltzmann equation. *J. Stat. Phys* **31** (2): 347-361, 1983.

[18] A.A.Arsen'ev, O.E.Buryak On the connection between a solution of the Boltzmann equation and a solution of the Landau-Fokker-Plank equation. *Math.USSR Sbornik,* **69** (2): 465-478, 1991.

[19] A.V.Bobylev The theory of the non linear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwellian molecules. *Math. Phys. Rev.* **7**: 111-233, 1988.

[20] L.Boltzmann Lectures on Gas Theory. *Ré-imprimé par Dover Publications*, 1995.

[21] G.Bony Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaire. *Ann. Sci. Ecole normale supérieure(4)* **14** (2): 209-246, 1981.

[22] G.Bony Cours d'analyse, théorie de distribution et analyse de Fourier. *Edition de l'école polytechnique, palaiseau,* 2001.

[23] F.Bouchut Hypoelliptic regularity in kinetic equations. *J. Math. Pures Appl,* **81** (11): 1135-1159, 2002.

[24] F.Bouchut, L.Desvillettes A proof of the smoothing propreties of the positive part of Boltzmann's kernel. *Revista Matematica Iberoamericana,* **14** (1): 23-34, 1998.

[25] F.Bouchut, L.Desvillettes Averaging lemmas without time Fourier transform and application to discretized kinetic equations. *Proc. of the royal Soc. of Edinburgh,* **129 A** (1): 19-36, 1999.

[26] T.Carleman Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. *Almqvist Wiksell,* 1957.

[27] T.Carleman Sur la théorie de l'équation integrodifférentielle des Gaz *Acta Math* **60**: 369-424, 1932.

[28] C.Cercignani The Boltzmann equation and its applications. *Springer, NewYork,* 1988.

[29] S.Chapman, T.Cowling *The mathematical theory of non uniform gases.* Cambridge University Press, 1952.

[30] Y.Chen, L.Desvillettes, L.He Smoothing effects for classical solutions of the full Landau equation. *Preprint* 2006.

[31] C.Cercignani, R.Illner, M.Pulvirenti The mathematical theory of dilute gases. *Springer-Verlag, New York,* 1994.

[32] R.Coifman, Y.Meyer *Au delà des opérateurs pseudo différentiels.* Astérique **57** Paris, 1978.

[33] P.Degond, B.Lucquin-Desreux The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case. *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* **2** (2): 167-182, 1992.

[34] L.Desvillettes On Asymptotics of the Boltzmann Equation when the Collisions Become Grazing. *Transport Theory and Statistical Physics* **21** (3): 259-276, 1992.

[35] L.Desvillettes About the regularization properties of the non cut-off Kac equation. *Com. Math. Phys.* **168**: 417-440, 1995.

[36] L.Desvillettes Some applications of the method of moments for the homogeneous Boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **123** (4): 387-395, 1993.

[37] L.Desvillettes Regularization properties of the 2-dimensional non radially symmetric non cutoff spatially homogeneous Boltzmann equation for Maxwellian molecules. *Transport Theory Stat Phys.* **26** (3): 341-357, 1997.

[38] L.Desvillettes, C.Mouhot About L^p Estimates for the Spatially Homogeneous Boltzmann Equation. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non-linéaire* **22**: 127-142, 2005.

[39] L.Desvillettes, C.Mouhot Large time behavior of the priori bound for the solutions to the spatially homogeneous Boltzman equations with soft potentiel. *Preprint* 2005.

[40] L.Desvillettes, C.Mouhot Stability and uniqueness for the spatially homogeneous Boltzmann equation with long-range interactions. *To appear in Arch. Rational Mech. Anal.* 2007.

[41] L.Desvillettes, C.Villani On the spatially homogeneous Landau equation for hards potentials. PartI: Existence, uniqueness and smoothness. *Comm. P.D.E* **25** (1/2): 179-259, 2000.

[42] L.Desvillettes, B.Wennberg Smoothness of the solution of the spatially homogeneous Boltzmann equation without cutoff. *Comm. P.D.E* **29**: 133-155, 2004.

[43] J.Dolbeault Kinetic models and quantum effects: a modified Boltzmann equation for Fermi-Dirac particules. *Arch. Rat. Mec. Anal* **127**: 110-131, 1994.

[44] M.El Safadi Smoothness of weak solutions of the spatially homogeneous Landau equation. *Analysis and Applications.* **5-1** (2007) 29-49.

[45] T.Elmroth Global boundedness of moments of solutions of the Boltzmann equation for forces of ininite range. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **82**: 1-12, 1983.

[46] N.Fournier Existence and regularity study for two-dimensional Kac equation without cutoff by a probabilistic approach. *Ann. Appl. Probab.* **10**: 434-462, 2000.

[47] N.Fournier Uniqueness for a class of spatially homogeneous Boltzmann equations withtout angular cutoff. *Journal of Statistical Physics* **125** (4): 927-946, 2006.

[48] N.Fournier, S.Méléard Existence results for 2D homogeneous Boltzmann equation without cutoff and for non Maxwell molecules by use of Malliavin calculus. *Preprint* **622** Université Paris VI, 2000.

[49] N.Fournier, C.Mouhot On the well-posedness of the spatially homogeneous Boltzmann equation with a moderate angular singularity. *Preprint 2007.*

[50] T.Goudon On Boltzmann equation and Fokker-Planck asymptotics: influence of grazing collisions. *J. Stat. Phys.* **89**: 751-776, 1997.

[51] T.Gustafsson Global L^p -properties for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **103**: 1-38, 1988.

[52] T.Gustafsson L^p -estimates for the non linear spatially homogeneous Boltzmann equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **92** (1): 23-57, 1986.

[53] C.Graham and S.Méléard Existence and regularity of a solution of a Kac equation without cutoff using the stochastic calculus of variations. *Comm. Math. Phys.* **205**: 551-569, 1999.

[54] P.G.Lemarié Recent developments in the Navier-Stokes problem. *Research Notes in Mathematics* **431** Chapman and Hall/CRC, New-York, 2002.

[55] E.M.Lifchitz, L.P.Petaevski *Kinetic theory.* MIR, Moscow, 1979.

[56] X.G.Lu On spatially homogeneous solutions of a modified Boltzmann equation for Fermi-Dirac particules *J. Statist. Phys.* **105**: 353-388, 2001.

[57] X.G.Lu On the Boltzmann Equation for Fermi-Dirac particles with Very Soft Potentials: Averaging compactness of the Weak Solutions *Preprint.*

[58] X.G.Lu, B.Wennberg On stability and strong convergence for the spatially homogeneous Boltzmann equation for Fermi-Dirac particles *Arch. Rat. Mech. Anal.* **168**:1-34, 2003.

[59] E.Ikenberry, Truesdell On the pressures and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory. *I. J. Rational Mech. Anal.* **5**: 1-54, 1956.

[60] A.Povzner The Boltzmann equation in the kinetic theory of gases. *Amer. Math. Soc. Trans.* **47** (2): 193-214, 1965.

[61] A.Proutière New results of regularization for weak solutions of Boltzmann equation. *Preprint Unpublished,* 1996.

[62] T.Runst, W.Sickel Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and Non linear PdE. *De Gruyter, New York,* 1996.

[63] L.Schwartz *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[64] E.M.Stein *Harmonic Analysis. Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.

[65] T.Tao *Littlewood Paley decomposition.* Lecture Notes 254A. See web page http: www. math. ucla. edu/˜ tao/.

[66] H.Triebel *Theory of function spaces.* Birkhauser Verlag, Basel and al., 1983.

[67] G.Toscani, C.Villani Probability metrics and uniqueness of the solution to the Boltzmann equation for a Maxwell gas. *Journal of Statistical Physics,* **94** (3-4): 619-637, 1999.

[68] Y.Meyer Remarques sur un théorème de J. M. Bony. *Supplemonto ai Rendiconti del c mathematico di palermo, series* II.1: 1-20, 1981.

[69] Y.Meyer Wavelets and Operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. *Cambridge University Press,* **37** Cambridge, 1993.

[70] S.Mischler, B.Wennberg On the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Annales de l'institut Henri Poincaré. Analyse Non Linéaire* **16** (4): 497-501, 1999.

[71] C.Mouhot, C.Villani Regularity theory for the spatially homogeneous Boltzmann equation with cut-off. *Arch. Rational Mech. Anal,* **173** (2): 169-212, 2004.

[72] L.W.Nordheim On the kinetic methods in the new statistics and its applications in the electron of conductivity. *Proc. Roy. Soc. London Ser.A:* 119-689, 1928.

[73] C.Villani On the spatially homogeneous Landau equation for Maxwellian molecules. *Math. Meth. Mod. Appl. Sci.* **8** (6): 957-983, 1998.

[74] C.Villani On a new class of solutions for the spatially homogeneous, Boltzmann and Landau equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **143**: 273-307, 1998.

[75] C.Villani Regularity estimates via the entropy dissipation forthe spatially homogeneous Boltzmann equation without cutoff. *Rev. Mat. Iberoamericana.* **15** (2): 335-352, 1999.

[76] C.Villani A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of Fluid Mechanics Ed. S. Friedlander, D.Serre, 2002.*

[77] C.Villani Contribution à l'étude mathématique des collisions en théorie cinétique. *Masters's thesis, Univ. Paris Dauphine, France, 2000.*

[78] E.A.Uehling, G.E.Uhlenbeck Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases. *I, Phys. Rev.* **43**: 552-561, 1993.

[79] S. Ukai Les solutions globales de l'équation de Boltzmann dans l'espace tout entier et dans le demi-espace. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B.* **282** (6), Ai, A317-A320, 1976.

[80] B.Wennberg On moments and uniqueness for solutions to the space homogeneous Boltzmann equation. *Transp. Theory. Stat. Phys.* **24** (4): 533-539, 1994.

[81] Y. Guo The Landau equation in a periodic box. *Communications in mathematical physics.* **231** (3): 391-434, 2002.

. . .

Titre: Application de la décomposition de Littlewood-Paley à la régularité pour des équations cinétiques de type Boltzmann.

Nous étudions la régularité des équations cinétiques de type Boltzmann. Nous nous basons essentiellement sur une méthode d'analyse harmonique de type "décomposition de Littlewood-Paley", consistant principalement à travailler avec des couronnes dyadiques. Nous nous intéressons de plus, au cadre homogène où la solution $f(t,x,v)$ dépend uniquement du temps t et de la vitesse v, tout en travaillant avec des sections efficaces réalistes et singulières. Dans une première partie, nous étudions le cas particulier des molécules Maxwelliennes. Nous prouvons que toute solution faible est C^∞. Ensuite, nous traitons le cas des sections efficaces générales avec "potentiel dur". Nous nous intéressons d'abord à l'équation de Landau. C'est une équation limite de l'équation de Boltzmann prenant en compte les collisions rasantes. Nous prouvons que toute solution faible appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$. Nous démontrons ensuite une régularité identique pour le cas de l'équation de Boltzmann. Nous terminons sur l'équation de Boltzmann-Dirac.
Mots clés: Collisions rasantes, décomposition de Littlewood-Paley, espace de Sobolev, entropie, équation de Boltzmann, équation de Landau, théorie cinétique, noyaux singuliers.

Title: Application of Littlewood-Paley decomposition to the regularity of Boltzmann type kinetic equations.

We study the regularity of kinetic equations of Boltzmann type.We use essentielly Littlewood-Paley method from harmonic analysis, consisting mainly in working with dyadic annulus. We shall mainly concern with the homogeneous case, where the solution $f(t,x,v)$ depends only on the time t and on the velocities v, while working with realistic and singular cross-sections (non cutoff). In the first part, we study the particular case of Maxwellian molecules. We show a global C^∞ regularity. Then, we deal with the case of general cross-sections with "hard potential". We are interested in Landau equation which is limit equation to the Boltzmann equation, taking in account grazing collisions. We prove that any weak solutions belongs to Schwartz space $\mathcal{S}$. We demonstrate also a similar regularity for the case of Boltzmann equation. We end on Boltzmann-Dirac equation.
Key-words: Boltzmann equation, entropy, grazing collisions, kinetic theory, Littlewood-Paley decomposition, Landau equation, Sobolev space, singulars kernels.

Discipline: Mathématique.
Laboratoire: Mathématiques et Applications, Physique Mathématique d'Orléans.
MAPMO Université d'Orléans (B.P.6759)
45067 Orléans Cedex 2 France.
Email: mouhamad.el_safadi@univ-orleans.fr