Méthode d'éléments finis mixtes :application aux équations de la chaleur et de Stokes instationnaires

Réda Korikache

Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis **N° d'ordre: 07/30**
LAMAV

Méthode d'éléments finis mixtes : application aux équations de la chaleur et de Stokes instationnaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 15 Novembre 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

(spécialité mathématiques appliquées)

par

Réda KORIKACHE

Composition du jury

Rapporteurs :	Christine Bernardi	Université Pierre-et-Marie-Curie
	Jean-Claude Nédélec	Ecole Polytechnique, Palaiseau
Examinateurs :	Van Casteren	Université de Antwerp Bélgique
	Emmanuel Creusé	Université de Valenciennes
	Serge Nicaise	Université de Valenciennes
Directeur de Thèse :	Luc Paquet	Université de Valenciennes

Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications de Valenciennes – EA 4015

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Luc PAQUET qui a encadré ce travail de thèse. Par sa compétence et sa maturité scientifique, il a su me guider de façon pertinente dans mes recherches. Sa disponibilité, son écoute et ses qualités humaines m'ont permis d'avancer. Je lui suis infiniment reconnaissant d'avoir permis que cette période me soit agréable et d'avoir ainsi renforcé ma motivation à poursuivre dans la recherche.

Je remercie vivement Les professeurs Christine BERNARDI, Jean-Claude NÉDÉLEC, pour avoir bien voulu juger ce travail et apporter des suggestions.

Un grand merci aux professeurs Jan van CASTEREN, Serge NICAISE et Emmanuel CREUSÉ, d'avoir accepté non seulement de faire partie des membres du jury mais aussi d'avoir examiné attentivement le manuscrit.

Je tiens à remercier l'ensemble des doctorants ou anciens doctorants que j'ai pu côtoyer durant cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres du laboratoire LAMAV.

Je dédie cette thèse
à mes proches.

Table des matières

Introduction générale

La résolution des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. Chacune de ces disciplines apporte une contribution différente mais complémentaire à la compréhension et à la résolution de tels problèmes.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre numériquement les problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différences finies, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc. On peut sans aucun doute affirmer qu'aujourd'hui la plus largement répandue est la méthode des éléments finis. Cette popularité n'est pas sans fondement. La méthode des éléments finis est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qui est fort utile, même sur le plan très pratique. En effet, cette base mathématique permet de prévoir jusqu'à un certain point la précision de notre approximation et même d'améliorer cette précision par l'utilisation de maillages adaptés.

Parmi les problèmes les plus fréquents figurent ceux posé dans des domaines non réguliers. Des études théoriques montrent le comportement singulier de la solution d'un problème au limites posé sur un ouvert polygonal non convexe au voisinage des sommets non convexes ; citons par exemple les travaux de Kondratiev, Maz'ya-Plamennvski, Grisvard, Dauge, Stupelis, Kozlov-Maz'ya-Rossmann.... Ces singularités conduisent en général à un ordre non optimal de convergence des solutions approchées si par exemple une méthode d'éléments finis P^1 ou P^2 est utilisée lorsqu'il s'agit de l'opérateur de Laplace ou si l'on utilise la méthode d'éléments finis de Hood-Taylor lorsqu'il s'agit du système de Stokes. Pour remédier à cet inconvénient diverses méthodes ont été proposées pour restaurer l'ordre optimal de convergence : adjonction de fonctions singulières à l'espace approchant (Strang et Fix, 1973), la méthode du raffinement de maillage (Babuska 1970, Raugel 1978, Doborowolski 1982) et la méthode des fonctions singulières duales (Blum-Doborowolski 1982).

Dans ce travail on se propose d'établir des estimations d'erreurs a priori pour les solutions approchées d'équations d'évolution obtenues par la méthode d'éléments finis mixte duale en espace et ce pour trois types de problèmes : le premier concerne le problème de Cauchy pour l'équation de diffusion de la chaleur, le second est le problème de Stokes instationnaire, et le dernier concerne le problème de Cauchy pour l'équation de diffusion de la chaleur mais avec un coefficient de diffusion aléatoire. Pour ces trois types de problèmes, il y a un certain nombre de raisons de préférer la méthode mixte duale en espace à une méthode classique en espace ; parmi elles la propriété fondamentale qu' est la conservation locale, et par suite globale, de certaines quantités physiques (la quantité de mouvement, la masse, la quantité de chaleur,...). Une autre raison bien connue pour adopter la méthode mixte duale en espace est qu'elle nous permet d'introduire des nouvelles variables : $\vec{p}(t) := \overrightarrow{\nabla} u(t)$ le flux de chaleur à l'instant t pour l'équation de diffusion de la chaleur, $\sigma(t) := \nabla \vec{u}(t)$ le tenseur gradient du champ des vitesses à l'instant t pour le problème de Stokes instationnaire, ces inconnues supplémentaires ayant un sens physique et une importance particulière pour plus d'une application. Il est donc important de disposer d'une méthode numérique donnant aussi de bonnes approximations de ces quantités. Nous montrons que ces diverses quantités appartiennent à des espaces de Sobolev de fonctions dépendant du temps, à poids appropriés en espace prenant en compte les singularités de la solution apparaissant au voisinage des sommets non-convexes. Nous décrivons ensuite des conditions de raffinement de maillage près des sommets qui permettent d'obtenir une estimée d'erreur a priori optimale en espace entre une solution de l'équation d'évolution et son approximation semi-discrète ou complètement discrétisée.

Le premier chapitre de notre travail est consacré à l'étude de l'équation de diffusion de la chaleur dans un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$. En plus de l'inconnue traditionnelle $u(t)$, représentant la distribution de température dans le domaine à l'instant t, on introduit l'inconnue supplémentaire $\overrightarrow{\nabla} u(t)$ (représentant le flux de la chaleur à l'instant t). Pour chaque instant t dans l'intervalle de temps fixe $[0, T]$, nous recherchons une approximation de l'inconnue supplémentaire $\overrightarrow{\nabla} u(t)$ dans chaque triangle K de la triangulation $\mathcal{T}_h$ du do-

maine polygonal considéré, sous la forme d'un champ de Raviart-Thomas de degré 0 ayant sa composante normale continue aux interfaces et une approximation de l'inconnue $u(t)$ par une constante sur chaque triangle. Pour une famille régulière de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ satisfaisant à des conditions de raffinement appropriées, conditions auxquelles on peut satisfaire en utilisant la technique de raffinement de maillage de G. Raugel, nous démontrons des majorations d'erreurs optimales pour la solution du problème semi-discrétisé de l'ordre de h en espace (h représentant la finesse du maillage).
En seconde partie du premier chapitre, nous donnons des estimations a priori d'erreur et les preuves de stabilité pour la discrétisation complète de la méthode mixte duale pour l'équation de diffusion de la chaleur obtenue en utilisant pour la discrétisation en temps l'un des deux schémas : le schéma d'Euler implicite ou le schéma de Crank-Nicolson.

Dans le second chapitre, nous nous intéressons au système de Stokes instationnaire pour un fluide visqueux incompressible dans un domaine polygonal. Nous étudions la formulation mixte obtenue en introduisant en outre des inconnues traditionnelles : la vitesse $\overrightarrow{u}(t)$ et la pression $p(t)$, la nouvelle variable $\sigma(t) := \nabla\vec{u}(t)$ représentant le tenseur gradient du champ des vitesses à l'instant t. Nous approximons chacune des deux lignes de $\sigma(t)$ par un champ de vecteurs de Raviart-Thomas de degré 0 sur chaque triangle K de la triangulation, avec continuité de la composante normale aux interfaces. La pression $p(t)$ est approximée par une constante sur chaque triangle de la triangulation et la vitesse $\overrightarrow{u}(t)$ par un champ de vecteurs constant sur chaque triangle. En utilisant, un raffinement de maillage à la G. Raugel, nous obtenons une estimation de l'erreur de l'ordre de h en espace pour le problème semi-discrétisé, semblable à celle du cas des domaines à frontière lisse. Ensuite on complète la discrétisation du problème à l'aide du schéma d'Euler implicite. On démontre en premier lieu la stabilité du schéma implicite et nous démontrons ensuite des estimées d'erreur d'ordre 1 en temps et en espace.

Dans le troisième et dernier chapitre de notre travail, nous présentons la méthode mixte duale pour l'équation d'évolution de la chaleur dans un domaine polygonal D avec un coefficient de diffusion aléatoire $\mathcal{K}(x,\omega)$, $x \in D$, le flux de chaleur à l'instant t étant $\mathcal{K}\Diamond\vec{\nabla}u(t)$ où $\Diamond$ dénote le produit de Wick. Du point de vue numérique, ce produit de Wick a le grand avantage, contestable toutefois du point de vue physique, de n'introduire de couplages entre les coefficients du développement de la solution du problème semi-discrétisé $(\vec{p}_h(t), u_h(t))$ en polynômes de chaos qu'avec ceux de multi-indice strictement plus petit. Donc à chaque étape du calcul d'un coefficient du développement en polynômes de chaos, la taille du système linéaire à résoudre est la même que dans le cas déterministe. En particulier le calcul de la moyenne de $(\vec{p}_h(t), u_h(t))$ ne fait intervenir que les moyennes de $\vec{p}_h(t)$, de $u_h(t)$, du coefficient de diffusion $\mathcal{K}$ et du membre de droite, ce qui physiquement toutefois peut laisser perplexe sur la validité du modèle. Nous démontrons des estimations d'erreur a priori pour la solution du problème semi-discrétisé $(\vec{p}_h(t), u_h(t))$ ayant un développement en polynômes de chaos de dimension K et de degré N de la méthode mixte duale . En raison du coin réentrant du domaine polygonal D, un raffinement de maillage approprié doit être imposé à la famille de triangulations afin de restaurer l'ordre de convergence optimal 1 de la méthode en espace.

Chapitre 1

Équation de la chaleur instationnaire

1.1 Introduction

Le premier chapitre de notre travail est consacré à l'établissement d'estimées d'erreur à priori pour les solutions approchées de la méthode mixte duale en espace, appliquée à l'équation de diffusion de la chaleur (instationnaire) dans un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$ avec un coin réentrant. Dans la méthode mixte duale, en plus de l'inconnue u représentant la distribution de température à un instant, on introduit l'inconnue supplémentaire $\overrightarrow{\nabla} u$ représentant le flux de chaleur à un instant et l'on en recherche une approximation sous la forme d'un champ de Raviart-Thomas de degré 0 sur chaque triangle de la triangulation avec continuité de la composante normale du champ approchant aux interfaces de chaque triangle. Dans la formulation mixte duale, l'équation de balance de la chaleur est exactement satisfaite en moyenne par la solution approchée, sur chaque triangle de la triangulation du domaine polygonal dans lequel est posé le problème. Une différence essentielle avec les travaux de Claes Johnson et Vidar Thomée [10], [7], est que les estimations d'erreur a priori que nous obtenons pour la solution du problème semi-dicrétisé, ne supposent pas les régularités spatiales H^2 pour $u_t(s)$ pour presque tout s dans l'intervalle $[0, t]$ et H^3 pour $u(t)$ comme c'est le cas dans le théorème 2.1 p. 54 de [10] ou le théorème 17.2 p. 276 de [7], ces propriétés de régularité n'étant pas vraies en général pour l'équation de diffusion de la chaleur dans un domaine polygonal. Notons aussi que les espaces d'approximations que nous considérons sont différents de ceux employés dans [10] ou [7] p.268. Dans les estimations d'erreur a priori : le théorème 2.1 p. 54 de [10] ou le théorème 17.2 p. 276 de [7], le cas du plus bas ordre n'est pas considéré qui est cependant le cas le plus pertinent dans un domaine polygonal en raison des singularités induites par la géométrie du domaine sur la solution exacte. Dans notre contexte des domaines polygonaux, dû à la présence de ces singularités de la solution exacte, nous devons travailler plutôt qu'avec des espaces de Sobolev classiques avec des espaces de Sobolev à poids en espace comme $H^{2,\alpha}$ (voir le livre de P. Grisvard, section 8.4 [3]). En outre en raison de ces singularités spatiales de la température u et du flux de chaleur $\vec{p}$, nous devons raffiner de manière appropriée nos maillages [11] au voisinage du coin réentrant de notre domaine polygonal, pour récupérer l'ordre de convergence 1 en espace des solutions du problème semi-discrétisé. De ce fait, nous ne pouvons supposer comme dans [10], [7] la famille de triangulations quasi-uniforme. Dans une seconde étape, la formulation mixte duale semi-discrétisée de l'équation de diffusion de la chaleur, est discrétrisée en temps suivant l'un des deux schémas : le schéma d'Euler implicite ou le schéma de Crank-Nicolson. Notons que le problème complètement discrétisé n'est pas abordé dans [10], [7]. Nous commençons par démontrer pour chacun de ces deux problèmes complètement discrétisés, l'existence et l'unicité de la solution, puis nous démontrons la stabilité de ces deux schémas respectifs et finalement démontrons sous les conditions de raffinement de maillages évoquées ci-dessus, des estimations d'erreurs a priori d'ordre 1 en espace et en temps pour la solution du problème complètement discrétisé par le schéma d'Euler implicite et d'ordre 1 en espace et 2 en temps pour la solution du problème complètement discrétisé par le schéma de Crank-Nicolson. Nous terminons ce chapitre en donnant un exemple de traitement numérique de l'équation de diffusion de la chaleur par la méthode mixte duale en espace et le schéma d'Euler implicite en temps dans un domaine “en forme de L”, corroborant les estimées d'erreur théoriques obtenues dans ce cas.

1.2 Domaine ouvert borné lipschitzien

1.2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Pour $T > 0$ fixé, nous posons $Q := \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma := \Gamma \times]0, T[$. On considère le problème d'évolution de la chaleur sur Ω : étant donné $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $g \in \mathring{H}^1(\Omega)$, trouver $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathring{H}^1(\Omega))$ solution de :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \text{ dans } Q \\ \\ u(x,t) = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \\ u(x,0) = g(x) \quad , \text{ pour } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Du fait qu'on cherche une solution $u \in H^1(0, T, L^2(\Omega))$ et puisque $H^1(0, T, L^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0, T]; L^2(\Omega))$, alors la condition initiale $u(., 0) = g(.) \in \mathring{H}^1(\Omega)$ a bien un sens.
D'autre part en introduisant la variable $\vec{p} = \vec{\nabla} u$, on peut réécrire l'équation de la chaleur sous la forme :

$$\operatorname{div} \vec{p}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - f(x,t)$$

ce qui implique que $\vec{p} \in L^2(0, T; H(\operatorname{div}, \Omega))$ puisque $u \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, où

$$H(\operatorname{div}, \Omega) := \left\{ \vec{q} \in L^2(\Omega)^2;\ \operatorname{div} \vec{q} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

1.2.2 Régularité en temps de la solution

Théorème 1.2.1 *Le problème (1.1) admet une solution unique*

$$u \in H^1\left(0, T, L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0, T, \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Preuve: Pour la preuve complète, nous nous référons au livre de Grisvard [2]. Ici on explique seulement pourquoi $u \in H^1(0, T, L^2(\Omega))$.
Soit A l'opérateur $-\Delta$ dans $H = L^2(\Omega)$ defini par :

$$D(A) = \{v \in \mathring{H}^1(\Omega);\ \Delta v \in L^2(\Omega)\} \textit{ et } Av = -\Delta v \ \ \forall v \in D(A).$$

A est un opérateur auto adjoint avec un inverse compact et soit $(\lambda_m)_{m\geq 0}$ la suite croissante de ses valeurs propres, chaque valeur propre étant répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité. Soit $W_m \in D(A)$ la fonction propre correspondante à la valeur propre λ_m ; on a donc :

$$AW_m = \lambda_m W_m.$$

On suppose aussi que W_m est normalisé c.-à-d. que $\|W_m\|_{0,\Omega} = 1$, ($\|\cdot\|_{0,\Omega}$ est la norme dans $L^2(\Omega)$).

En termes des fonctions propres et des valeurs propres de l'opérateur A on peut écrire la solution $t \mapsto u(t)$ de l'équation de la chaleur avec $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ comme second membre et $g \in \mathring{H}^1(\Omega)$ comme condition initiale sous la forme :

$$u(t) = \sum_{m=1}^{m=+\infty} \{e^{-\lambda_m t}(g, W_m) + \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m}(f(s), W_m)ds\}W_m.$$

Si on dérive par rapport au temps on a :

$$u_t(t) = \sum_{m=1}^{m=+\infty} e^{-\lambda_m t}(-\lambda_m)(g, W_m)W_m + \sum_{m=1}^{m=+\infty} \{(f(t), W_m) - \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m}\lambda_m(f(s), W_m)ds\}W_m. \tag{1.2}$$

Mais

$$\left\| \sum_{m=1}^{m=+\infty} e^{-\lambda_m t}(-\lambda_m)(g, W_m)W_m \right\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{m=1}^{m=+\infty} e^{-2\lambda_m t}\lambda_m^2 \left|(g, W_m)\right|^2 \tag{1.3}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=1}^{m=+\infty} e^{-\lambda_m t}(-\lambda_m)(g, W_m)W_m \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 &= \int_0^T \sum_{m=1}^{m=+\infty} e^{-2\lambda_m t}\lambda_m^2 \left|(g, W_m)\right|^2 dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=1}^{m=+\infty} e^{-2\lambda_m t}\lambda_m^2 \left|(g, W_m)\right|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{m=+\infty} \lambda_m \left|(g, W_m)\right|^2 \simeq \|g\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

en utilisant le fait que $D(\sqrt{-\Delta}) = \mathring{H}^1(\Omega)$ ([2], p.152).
D'autre part :

$$\left\| \sum_{m=1}^{m=+\infty} (f(t), W_m) W_m \right\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{m=1}^{m=+\infty} |(f(t), W_m)|^2 = \|f(t)\|_{0,\Omega}^2 .$$

Donc :

$$\left\| \sum_{m=1}^{m=+\infty} (f(.), W_m) W_m \right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = \int_0^T \|f(t)\|_{0,\Omega}^2 \, dt \ . \tag{1.5}$$

Il reste à majorer :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m=1}^{m=+\infty} \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} \lambda_m (f(s), W_m) ds \; W_m \right\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_{m=1}^{m=+\infty} |\lambda_m|^2 \left| \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} (f(s), W_m) ds \right|^2 \\ &\leq \sum_{m=1}^{m=+\infty} |\lambda_m|^2 \left(\int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} ds \right) \\ &\quad \left(\int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} \left| f(s), W_m \right|^2 ds \right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à :

$$e^{-(t-s)\lambda_m} (f(s), W_m) = \left(e^{-\frac{1}{2}(t-s)\lambda_m} (f(s), W_m) \right) \left(e^{-\frac{1}{2}(t-s)\lambda_m} \right)$$

Mais

$$\int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} ds = \int_0^t e^{-\xi \lambda_m} d\xi \leq \int_0^{+\infty} e^{-\xi \lambda_m} d\xi = \frac{1}{\lambda_m}$$

Alors

$$\left\| \sum_{m=1}^{m=+\infty} \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} \lambda_m (f(s), W_m) ds \; W_m \right\|_{0,\Omega}^2 \leq \sum_{m=1}^{m=+\infty} \lambda_m \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} \left| f(s), W_m \right|^2 ds$$

ce qui implique en intégrant de 0 à T :

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} \lambda_m (f(s), W_m) ds \; W_m \right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} &\leq \int_0^T \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} \left| (f(s), W_m) \right|^2 ds\, dt \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \int_0^T \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_m} \left| (f(s), W_m) \right|^2 ds\, dt \\
&\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \int_0^T \left| (f(s), W_m) \right|^2 \int_s^{+\infty} e^{-(t-s)\lambda_m} dt\, ds \\
&\leq \int_{s=0}^{s=T} \sum_{m=1}^{m=+\infty} \left| (f(s), W_m) \right|^2 ds \\
&= \int_{s=0}^{s=T} \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds = \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} .
\end{aligned}$$

Alors d'aprés (1.4),(1.5),(1.6) on a :

$$\|u_t(.)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq c \|g\|^2_{\mathring{H}^1(\Omega)} + 2 \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

donc

$$\|u_t(.)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \lesssim \|g\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \tag{1.7}$$

■

Introduisons maintenant la formulation mixte du problème de la chaleur.

1.2.3 Formulation mixte duale

On pose dans la suite $X := H(\text{div}, \Omega)$; $M := L^2(\Omega)$ et on munit ces espaces de leurs normes naturelles (Cf. [8]), on note I l'intervalle de temps de $[0, T]$. Si on introduit la nouvelle variable $\vec{p} = \vec{\nabla} u$, *i.e.* $\vec{p} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^\top$, on peut réécrire le problème de la chaleur sous la forme :

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \operatorname{div} \vec{p}(x,t) = f(x,t) \quad \text{dans } Q\ , \\ \\ u(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Sigma \\ \\ \vec{p}(x,t) = \vec{\nabla} u(x,t) \\ \\ u(x,0) = g(x) \qquad \text{pour } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

Pour tout $\vec{q} \in X$, on a :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \vec{p}(t).\vec{q}\, dx + \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div} \vec{q}\, dx &= \int_\Omega (\vec{\nabla} u(t).\vec{q} + u(t)\ \operatorname{div} \vec{q}) dx. \\ &= \int_{\partial\Omega} u(t) \vec{q}.\vec{n}\ ds, \qquad \forall' t \in I, \end{aligned}$$

Comme $u \in L^2(0,T; \mathring{H}^1(\Omega))$, $u(t)_{|\partial\Omega} = 0$ pour presque tout t dans I, nous obtenons l'équation :

$$\int_\Omega \vec{p}(t).\vec{q}\, dx + \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div} \vec{q}\, dx = 0\ \forall \vec{q} \in X,\ \forall' t \in I.$$

D'autre part, puisque $u_t(t) - \operatorname{div} \vec{p}(t) = f(t)$, nous avons :

$$\int_\Omega v\,(u_t(t) - \operatorname{div} \vec{p}(t)) dx = \int_\Omega f(t)\, v\ dx, \qquad \forall v \in M,\ \forall' t \in I$$

D'où :

$$\int_\Omega v\ \operatorname{div} \vec{p}(t) dx = -\int_\Omega (f(t) - u_t(t))\, v\ dx, \qquad \forall v \in M,\ \forall' t \in I$$

Le système des deux équations (1.9) est appelé formulation mixte du problème (1.8). Si $u \in H^1(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; \mathring{H}(\Omega))$ est la solution du problème (1.1) alors $(\ \vec{p} := \vec{\nabla} u, u) \in L^2(0,T; H(\operatorname{div}, \Omega)) \times H^1(0,T; L^2(\Omega))$ et est solution de la formulation mixte :

$$\begin{cases} \int_\Omega \vec{p}(t).\vec{q}\,dx + \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div}\vec{q}\,dx = 0, \ \ \forall \vec{q} \in X, \ \forall' t \in I\ . \\ \\ \int_\Omega v\ \operatorname{div}\vec{p}(t)dx = -\int_\Omega (f(t) - u_t(t))\ v\ dx, \ \ \forall v \in M, \ \forall' t \in I, \\ \\ u(0) = g \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.9}$$

Nous montrons maintenant que c'est la seule solution de la formulation mixte.

Théorème 1.2.2 *Pour tout* $g \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *et tout* $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *la formulation mixte* (1.9) *admet une solution unique,*

$$(\vec{p}, u) \in L^2(0,T;H(\operatorname{div};\Omega)) \times H^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Preuve: D'après ce qui précède, nous savons que le problème (1.9) possède une solution. Il reste à montrer que cette solution est unique. Pour cela montrons que si $(\vec{p}(\cdot), u(\cdot)) \in L^2(0,T;H(\operatorname{div};\Omega)) \times H^1(0,T;L^2(\Omega))$ vérifie :

$$\begin{cases} \int_\Omega \vec{p}(t).\vec{q}\,dx + \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div}\vec{q}\,dx = 0, \ \ \forall \vec{q} \in X, \ \forall' t \in I\ , \\ \\ \int_\Omega v\ \operatorname{div}\vec{p}(t)dx = \int_\Omega u_t(t)\ v\ dx, \ \ \forall v \in M, \ \forall' t \in I, \end{cases} \tag{1.10}$$

et $u(0) = 0$, alors $\vec{p} = 0$, et $u = 0$.

Notons que $u \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ implique $u_t(t) \in L^2(\Omega)$ $\forall' t \in I$ et donc que $\int_\Omega u_t(t)\ v\ dx$ a bien un sens $\forall v \in M, \forall' t \in I$.

Prenant $\vec{q} = \vec{p}(t)$ dans $(1.10)_{(i)}$, et $v = u(t)$ dans $(1.10)_{(ii)}$, pour un t fixé dans I tel que $\vec{p}(t) \in H(\operatorname{div};\Omega)$ et $u_t(t) \in L^2(\Omega)$, (1.10) nous donne :

$$\begin{cases} \int_\Omega |\vec{p}(t)|^2\ dx + \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div}\vec{p}(t)dx = 0 \\ \\ \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div}\vec{p}(t)dx = \int_\Omega u_t(t)\ u(t)\ dx \end{cases}$$

D'où :

$$\int_\Omega |\vec{p}(t)|^2\ dx + \int_\Omega u_t(t)\ u(t)\ dx = 0 \tag{1.11}$$

ce qui entraîne

$$\int_{\Omega} |\vec{p}(t)|^2 \; dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(t)^2 dx = 0 \qquad \forall' t \in I.$$

D'où

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(t)^2 dx = -2\int_{\Omega} |\vec{p}(t)|^2 \; dx \leq 0 \;, \quad \forall' t \in I$$

ce qui permet de conclure que la fonction $t \rightsquigarrow \int_{\Omega} u(t)^2 dx$ est décroissante.
De $\int_{\Omega} u(0)^2 dx = 0$, suit alors :

$$\int_{\Omega} u(t)^2 dx = 0 \qquad \forall t \in I$$

(voir remarque qui suit).
De (1.11) on conclu alors que

$$\int_{\Omega} |\vec{p}(t)|^2 \; dx = 0 \quad \forall' t \in I \implies \vec{p}(t) = 0 \quad \forall' t \in I.$$

Donc $\vec{p} = 0$, comme élément de $L^2(0, T; H(\text{div}; \Omega))$. ■

Remarque 1.2.3 *La fonction $\Psi : t \rightsquigarrow \int_{\Omega} u(t)^2 dx$ est absolument continue. Démontrons-le.*

On a :

$$\Psi'(t) = \int_{\Omega} 2 \; u_t(t) \; u(t) \; dx$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\Psi'(t)| \, dt &\leq 2\int_0^T (\int_{\Omega} |u_t(t)| \, |u(t)| \, dx) \; dt. \\
&\leq \int_0^T (\int_{\Omega} |u_t(t)|^2 + |u(t)|^2 \, dx) \; dt \\
&= \int_0^T (\int_{\Omega} |u_t(t)|^2 \, dx) \; dt + \int_0^T (\int_{\Omega} |u(t)|^2 \, dx) \; dt \\
&= \int_0^T \|u_t(t)\|^2_{0,\Omega} \, dt + \int_0^T \|u(t)\|^2_{0,\Omega} \, dt = \|u\|^2_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} < +\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\Psi \in L^1([0,T])$ et $\Psi' \in L^1([0,T])$ *i.e.* Ψ est absolument continue. Ψ est alors l'intégrale de sa dérivée. Plus précisément, comme $\Psi(0) = 0$, nous avons :

$$\Psi(t) = \int_0^t \Psi'(s)\, ds$$

Comme nous avons $\Psi' \leq 0 \Rightarrow \Psi$ est décroissante et puisque $\Psi \geq 0$ et $\Psi(0) = 0$ on a bien $\Psi(t) = 0\ \forall t \in I$ *i.e.* $\int_\Omega u(t)^2 dx = 0,\ \forall t \in I$.

Nous avons donc démontré que le problème : étant donné $g \in \mathring{H}^1(\Omega)$, trouver $(\vec{p}, u)$ $\in L^2(0,T; H(\mathrm{div}, \Omega)) \times H^1(0,T; L^2(\Omega))$ tel que :

$$\begin{cases} \int_\Omega \vec{p}(t).\vec{q}\, dx + \int_\Omega u(t)\ \mathrm{div}\, \vec{q}\, dx = 0, & \forall \vec{q} \in X,\ \forall' t \in I\ . \\ \\ \int_\Omega v\ \mathrm{div}\ \vec{p}(t) dx = -\int_\Omega (f(t) - u_t(t))\, v\, dx, & \forall v \in M,\ \forall' t \in I, \\ \\ u(0) = g \in \mathring{H}^1(\Omega) \end{cases}$$

possède une et une seule solution, sous la seule condition sur Ω. Ω étant l'ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^2$.

1.3 Domaine polygonal

1.3.1 Régularité en espace de la solution

Dans la suite, on suppose que Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$ à bord polygonal : $\partial\Omega := \cup_{j=1}^N \overline{\Gamma}_j$, où Γ_j est un segment de droite ouvert $\forall\ j = 1, 2, ..., N$. Nous savons bien que les singularités géométrique du domaine (angle) induisent en général des singularités sur la solution du problème de Cauchy pour l'équation de diffusion de la chaleur. Pour plus de détails, voir [2] et [3]. Comme c'est expliqué dans [2] et [3] on peut supposer que Ω n'a qu'un seul angle non convexe à l'origine dont la mesure est notée ω. Rappelons que $H^{2,\alpha}(\Omega)$ est l'espace des fontions de $H^1(\Omega)$ dont les dérivées secondes multiplie par r^α sont carré intégrable, avec r dénotant la distance de l'origine de $\mathbb{R}^2$. On muni cet espace par sa norme naturelle. Pour une définition plus précise de cet espace, voir par exemple [3] définition 8.4.1.1 et lemme

8.4.1.2 p.388. Nous allons à présent démontrer un résultat de régularité de la solution de notre problème par rapport aux variables spatiales.

Théorème 1.3.1 *Soit u la solution du problème de Cauchy* (1.1). *Alors pour tout $\alpha > 1 - \frac{\pi}{\omega}$*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))} \leq c\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}\right).$$

Preuve: Introduisant encore une fois l'opérateur fermé A dans $L^2(\Omega)$, défini par :

$$D(A) := \{v \in H_0^1(\Omega);\ -\Delta v \in L^2(\Omega)\},\ \text{et}\ \ Av = -\Delta v, \forall v \in D(A).$$

Nous savons [3], [8] que $D(A) \hookrightarrow H^{2,\alpha}(\Omega)$ pour $\alpha > 1 - \frac{\pi}{\omega}$ et que

$$\|v\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c\,\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.12}$$

D'après le théorème 1.1.1 le problème de la température sur $\Omega \times [0,T]$: étant donné $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $g \in \mathring{H}^1(\Omega)$, trouver $u \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))$ solution de

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \text{ dans } \ \Omega\times]0,T[\\ \\ u(x,t) = 0, \text{ sur } \Sigma, \\ \\ u(x,0) = g(x) \ \ , \text{ pour } \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.13}$$

possède une et une seule solution.

De l'équation :

$$\Delta u(t) = -f(t) + u_t(t)\ , \quad \forall' t \in [0,T]\,,$$

suit

$$\Delta u(t) \in L^2(\Omega), \forall' t \in]0,T[\,.$$

Donc par (1.12), $\forall' t \in]0,T[\, : u(t) \in H^{2,\alpha}(\Omega)$ et

$$\|u(t)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \leq c\left(\|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

En élevant les deux membres de cette inégalité au carré, puis en intégrant les deux membres de 0 à T, on trouve que $u \in L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))$ et que

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))} \leq c\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right) \qquad (\alpha > 1 - \frac{\pi}{\omega}\ fix\acute{e})$$

À fortiori :

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))} \leq c\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}\right). \tag{1.14}$$

■

1.4 Problème semi-discret

Avant d'écrire le problème semi-discret de l'équation de la chaleur, *i.e.* la discrétisation en espace, nous allons d'abord préciser quelques notations. On se place en dimension deux et on désigne par $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de triangulations de $\overline{\Omega}$ formées de triangles K. En particulier :

$$\overline{\Omega} = \cup_{K\in\mathcal{T}_h} K.$$

On note par h_K le diamètre de K *i.e.*

$$h_K = diam(K) = \max_{x_1,x_2\in K} |x_1 - x_2|$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Par ρ_K, nous désignons la rondeur de K *i.e.*

$$\rho_K = \sup\left\{diam(B);\ B \text{ disque de } \mathbb{R}^2 \text{ et } B \subset K\right\}.$$

Le paramètre noté aussi h conformément à la tradition

$$h =: \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$$

caractérise la finesse du maillage, et $r(x)$ dénote la distance euclidienne entre le point x et l'origine de $\mathbb{R}^2$.

On note par P_k l'espace des polynômes en les variables x_1, x_2 à coefficients réels et de degré global inférieur ou égal à k.

Soit K un triangle arbitraire avec comme sommets successifs en tournant dans le sens

trigonométrique := $A(a_1, a_2),\ B(b_1 + a_1, b_2 + a_2),\ C(c_1 + a_1, c_2 + a_2)$.
Les couples entre parenthèse désignent leurs coordonées respectives.
Soit la transformation affine :

$$\begin{aligned} F_K \quad &: \quad \hat{K} \longrightarrow K \\ (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \quad &\longmapsto \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{x}_1 \\ \widehat{x}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

C'est une bijection de $\hat{K}$ sur K, $\hat{K}$ désignant le triangle de référence :

$$\hat{K} = \left\{ \hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq \hat{x}_1 \leq 1,\ 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1 - \hat{x}_1 \right\}.$$

On note :

$$\mathbf{B}_K = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

On a *dét* $\mathbf{B}_K > 0$.
D'autre part, pour transformer un champ de vecteurs sur $\hat{K}$ en un champ de vecteurs sur K ou l'inverse, on utilise la transformation de *Piola* : qui apparaît dans ([13] p.42) ou d'une façon plus générale dans ([14] p.23).
Si $\vec{\hat{v}}$ est un champ de vecteurs sur $\hat{K}$ son image par la transformation de Piola est le champ de vecteurs sur K défini par :

$$\vec{v}(x) = \frac{1}{det\ \mathbf{B}_K} \mathbf{B}_K \vec{\hat{v}}(F_K^{-1}(x)), \quad \forall x \in K\ .$$

Réciproquement : étant donné $\vec{v}$ un champ de vecteurs sur K son image par la transformation de Piola est le champ de vecteur sur $\hat{K}$ défini par :

$$\vec{\hat{v}}(\hat{x}) = det\ \mathbf{B}_K \cdot \mathbf{B}_K^{-1}\ \vec{v}(F_K(\hat{x})), \quad \forall \hat{x} \in \hat{K}\ .$$

Dans la suite, nous considérons sur $\overline{\Omega}$, une famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ régulière dans le sens suivant : (Cf. [4] 17.1 p.131)

Définition 1.4.1 *Une famille de triangulations* $(\mathcal{T}_h)_h > 0$ *est dite régulière s'il existe une constante* σ_0 *telle que*

$$\forall h > 0,\ \forall K \in T_h\ ,\ \ \sigma_K := \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma_0\ .$$

1.4.1 Formulation mixte semi-discrète

Écrivons maintenant le problème semi-discretisé de (1.9) : trouver $(\vec{p}_h, u_h) \in L^2(0,T;X_h) \times H^1(0,T;M_h)$ tels que

$$\begin{cases} \int_\Omega \vec{p}_h(t).\vec{q}_h\ dx + \int_\Omega u_h(t)\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx = 0\ , & \forall \vec{q}_h \in X_h,\ \forall' t \in I\ , \\ \int_\Omega v_h\ \operatorname{div}\vec{p}_h(t)\ dx = -\int_\Omega (f(t) - u_{h,t}(t))\ v_h\ dx\ , & \forall v_h \in M_h,\ \forall' t \in I, \\ \text{et la condition initiale : }\ u_h(0) = g_h \in M_h\ , \end{cases} \tag{1.15}$$

qui sera précisée plus tard où

$$X_h := \left\{\ \vec{q}_h \in H(\operatorname{div},\Omega); \forall K \in T_h\ :\ \vec{q}_{h/K} \in RT_0(K)\ \right\}$$

$$M_h := \left\{\ v_h \in L^2(\Omega);\ v_{h/K} \in P_0\ ,\ \forall K \in T_h\ \right\}$$

où $RT_0(K) = P_0(K)^2 \oplus P_0(K)\binom{x_1}{x_2}$ désigne l'espace vectoriel de dimension trois des champs de Raviart-Thomas de degré 0 sur K. ($RT_0(K)$ est noté $D_1\,(K)$ dans [5] p.550) et P_0 l'espace vectoriel des fonctions constantes sur K.

Proposition 1.4.2 *Le problème* (1.15) *possède une et une seule solution*

$$(\vec{p}_h, u_h) \in L^2(0,T;X_h) \times H^1(0,T;M_h).$$

De plus $\vec{p}_h \in H^1(0,T;X_h)$.

Preuve: Remarquons tout d'abord, qu'ici la condition initiale $g_h \in M_h \subset L^2(\Omega)$; donc g_h n'est pas en géneral dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $\vec{q}_h^{(1)}, \ldots, \vec{q}_h^{(J)}$ une base de X_h, et $v_h^{(1)}, \ldots, v_h^{(K)}$ une base de M_h. On écrit $\vec{p}_h(t)$ (resp. $u_h(t)$) dans la base $\left(\vec{q}_h^{(j)}\right)_{j=1,\ldots,J}$ de X_h (resp. $\left(v_h^{(k)}\right)_{k=1,\ldots,K}$ de M_h) :

$$\vec{p}_h(t) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j(t)\vec{q}_h^{(j)} \quad , \quad u_h(t) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k(t) v_h^{(k)}.$$

La formulation mixte discrète (1.15) est équivalente à :

$$\begin{cases} \int_\Omega \sum_{j=1}^J \alpha_j(t)\vec{q}_h^{(j)}.\vec{q}_h^{(j')}\, dx + \int_\Omega \sum_{k=1}^K \beta_k(t) v_h^{(k)} \;\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j')}\, dx = 0, \quad \forall j^{'} = 1, 2, ..., J \\ \\ \int_\Omega v_h^{(k')} \; (\sum_{j=1}^J \alpha_j(t) \operatorname{div} \vec{q}_h^{(j)}) \;\; dx = -\int_\Omega (f(t) - \sum_{k=1}^K \dot{\beta}_k(t) v_h^{(k)}) \; v_h^{(k')}\, dx, \quad \forall k^{'} = 1, 2, ..., K. \end{cases}$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^J (\int_\Omega \vec{q}_h^{(j)}.\vec{q}_h^{(j')}\, dx)\; \alpha_j(t) + \sum_{k=1}^K (\int_\Omega v_h^{(k)} \;\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j')}\, dx)\; \beta_k(t) = 0, \\ \\ \hspace{6cm} \forall j^{'} = 1, 2, ..., J, \\ \\ \sum_{j=1}^J (\int_\Omega v_h^{(k')} \;\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j)} dx)\; \alpha_j(t) = -\int_\Omega f(t) v_h^{(k')} dx + \sum_{k=1}^K (\int_\Omega v_h^{(k)} v_h^{(k')} dx) \dot{\beta}_k(t), \\ \\ \hspace{8cm} \forall k^{'} = 1, 2, ..., K. \end{cases}$$

Maintenant, posons

$$\begin{cases} a_{kk'} = \int_\Omega v_h^{(k)} v_h^{(k')} dx \;\; , \; b_{jj'} = \int_\Omega \vec{q}_h^{(j)} \vec{q}_h^{(j')}\, dx \; , \; c_{j'k'} = \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j')}) v_h^{(k')} dx \\ \\ \forall\, j, j^{'} = 1, 2, ..., J, \; ; \forall\, k, k^{'} = 1, 2, ..., K. \end{cases}$$

Avec ses notations, le système différentiel précédent peut-être réécrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{J}\ b_{j'j}\alpha_j(t)+\sum_{k=1}^{K}c_{j'k}\beta_k(t)=0, \qquad \forall j'=1,2,..,J, \\ \\ \sum_{j=1}^{J}(C^{\intercal})_{k'j}\alpha_j(t)=-\int_{\Omega}f(t)v_h^{(k')}dx+\sum_{k=1}^{K}a_{kk'}\dot{\beta}_k(t) \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \forall k^{'}=1,2,...,K. \end{array}\right. \tag{1.16}$$

En prenant aussi :

$A=(a_{kk'})_{1\leq k',k\leq K}$ matrice symétrique et définie positive , $A\in\mathbb{R}^{K\times K}$;

$B=(b_{j'j})_{1\leq j',j\leq J}$ matrice symétrique et définie positive, $B\in\mathbb{R}^{J\times J}$;

$C=(c_{j'k})_{1\leq j'\leq J,1\leq k\leq K}$, $C\in\mathbb{R}^{J\times K}$,

et :

$$\beta(t)=\begin{pmatrix}\beta_1(t)\\ .\\ .\\ .\\ .\\ \beta_K(t)\end{pmatrix}\in\ \mathbb{R}^K,\ \alpha(t)=\begin{pmatrix}\alpha_1(t)\\ .\\ .\\ .\\ .\\ \alpha_J(t)\end{pmatrix}\in\ \mathbb{R}^J,\ F(t)=\begin{pmatrix}\int_{\Omega}(f(t)v_h^{(1)}dx\\ .\\ .\\ .\\ .\\ \int_{\Omega}f(t)v_h^{(K)}dx\end{pmatrix}\in\ \mathbb{R}^K.$$

Les équations précédentes peuvent être réécrites :

$$\left\{\begin{array}{l} A\ \dot{\beta}(t)=C^{\intercal}\alpha(t)+F(t), \\ \\ B\ \alpha(t)+C\ \beta(t)=0. \end{array}\right.$$

D'où

$$\alpha(t)=-B^{-1}C\ \beta(t). \tag{1.17}$$

Injectant (1.17) dans la première équation, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} A\ \dot{\beta}(t)=-C^{\intercal}B^{-1}C\ \beta(t)+F(t), \\ \\ \alpha(t)=-B^{-1}C\ \beta(t). \end{array}\right.$$

Donc il suffit de résoudre le système différentiel ordinaire inhomogène

$$\begin{cases} A\,\dot{\beta}(t) + C^{\intercal}B^{-1}C\,\beta(t) = F(t) \quad , \quad F \in L^2(0,T;\mathbb{R}^K) \\ \\ \beta(0) = \beta_0 \quad (i.c.) \end{cases}$$

où $\beta_0 \in \mathbb{R}^K$ est le vecteur de $\mathbb{R}^K$ tel que

$$\sum_{k=1}^{K} (\beta_0)_k v_h^{(k)} = g_h \in M_h.$$

On peut encore écrire ce systéme différentiel $K \times K$ sous la forme :

$$\dot{\beta}(t) = -A^{-1}C^{\intercal}B^{-1}C\beta(t) + A^{-1}F(t).$$

Ceci implique :

$$\beta(t) = e^{-A^{-1}C^{\intercal}B^{-1}C\,t}\beta_0 + \int_0^t e^{-A^{-1}C^{\intercal}B^{-1}C\,(t-\tau)}A^{-1}F(\tau)\,d\tau.$$

Par vérification directe, il s'en suit que :

$$\beta \in C([0,T];\mathbb{R}^K)\ et\ \dot{\beta} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^K).$$

Puisque $\alpha(t) = -B^{-1}C\beta(t)$ donc $\alpha \in C([0,T];\mathbb{R}^J)$ et $\dot{\alpha} \in L^2(0,T;\mathbb{R}^J)$. D'où

$$u_h \in H^1(0,T;M_h) \text{ et } \vec{p}_h \in H^1(0,T;X_h).$$

■

1.4.2 Estimations d'erreurs

Notre objectif, dans cette section, est de démontrer certaines estimations d'erreurs sur la solution du porblème semi-discrétisé. Dans ce qui suit, $(\vec{p}\,, u)$ désigne la solution du problème continu (1.13) et $(\vec{p_h}\,, u_h)$ désigne la solution du problème semi-discret (1.15). Pour cela nous avons besoin d'introduire un problème intermédiaire appelé projection elliptique, et nous allons tout d'abord comparer la solution exacte $(\vec{p}\,(t)\,, u\,(t))$ à la solution de la projection elliptique à l'instant t. La définition de la projection elliptique est similaire à celle donnée par Vidar Thomée dans son livre ([7], (17.26) p.276).

Définition 1.4.3 *On appelle projection elliptique de* $(\vec{p}(t), u(t))$ $\forall' t \in I$*, la solution* $(\vec{\tilde{p}}_h(t), \tilde{u}_h(t))$ *de la formulation mixte discrétisée du problème elliptique stationnaire avec comme second membre :* $-\triangle u(t) = -\operatorname{div} \vec{p}(t) = f(t) - u_t(t) \in L^2(\Omega)$.

Autrement dit : $(\vec{\tilde{p}}_h(t), \tilde{u}_h(t)) \in X_h \times M_h$ est la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \int_\Omega \vec{\tilde{p}}_h(t).\vec{q}_h \, dx + \int_\Omega \tilde{u}_h(t) \ \operatorname{div} \vec{q}_h \, dx = 0, \ \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h \ \operatorname{div} \vec{\tilde{p}}_h(t))dx = -\int_\Omega -\triangle u(t) \ v_h \, dx, \ \ \forall v_h \in M_h. \end{cases} \tag{1.18}$$

Notons que $f(t) - u_t(t) = -\triangle u(t)$ et puisque $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, donc pour presque tout t dans I : $f(t) - u_t(t) = -\triangle u(t) \in L^2(\Omega)$. On peut alors pour presque tout t dans I, résoudre le problème elliptique discrétisé (1.18) :

Proposition 1.4.4 *Le problème* (1.18) *admet une solution unique ,* $\forall' t \in I$ $,(\vec{\tilde{p}}_h(t), \tilde{u}_h(t)) \in X_h \times M_h$*. De plus* $\vec{\tilde{p}}_h \in L^2(0, T; X_h)$ *et* $\tilde{u}_h \in L^2(0, T; M_h)$*.*

Preuve: Nous utilisons les même notations que la démonstration précédente, écrivons $(\vec{\tilde{p}}_h(t), \tilde{u}_h(t))$ dans les bases $\left(\vec{q}_h^{(j)}\right)_{j=1,\ldots,J}$ de X_h et $\left(v_h^{(k)}\right)_{k=1,\ldots,K}$ de M_h :

$$\vec{\tilde{p}}_h(t) = \sum_{j=1}^{J} \tilde{\alpha}_j(t) \vec{q}_h^{(j)} \quad , \quad \tilde{u}_h(t) = \sum_{k=1}^{K} \tilde{\beta}_k(t) v_h^{(k)}$$

Nous avons cette fois-ci le système d'équations ($\forall' t \in I$) :

$$\begin{cases} B \, \tilde{\alpha}(t) + C \, \tilde{\beta}(t) = 0 \\ \\ C^\top \, \tilde{\alpha}(t) + \tilde{F}(t) = 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

où

$$\tilde{F}(t) = \begin{pmatrix} \int_\Omega (f(t) - u_t(t))\, v_h^{(1)}\ dx \\ . \\ . \\ . \\ \int_\Omega (f(t) - u_t(t))\, v_h^{(K)}\ dx \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^K.$$

$$\tilde{F}(t) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^K).$$

(1.19) est équivalent à

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(t) = -B^{-1} C\, \tilde{\beta}(t), & \forall' t \in I, \\ \\ C^\top \tilde{\alpha}(t) + \tilde{F}(t) = 0. & \forall' t \in I. \end{cases}$$

Alors

$$(C^\top B^{-1} C)\ \tilde{\beta}(t) = \tilde{F}(t).$$

Regardons de plus près la matrice $C^\top B^{-1} C \in \mathbb{R}^{K \times K}$.
Soit $\xi \in \mathbb{R}^K \setminus \{0\}$:

$$(C^\top B^{-1} C\ \xi, \xi) = (B^{-1} C \xi, C\ \xi) \geq \frac{1}{\max \sigma(B)} \left\| C\ \xi \right\|^2 ,$$

où $\max \sigma(B)$ désigne le maximum des valeurs propres de B. Notons que $C^\top B^{-1} C\ \xi \in \mathbb{R}^K$ et que $B^{-1} C\ \xi \in \mathbb{R}^J$.
L'inégalité précédente implique que

$$(C^\top B^{-1} C \xi, \xi) \geq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^K \setminus \{0\}$$

Pour démontrer que $C^\top B^{-1} C$ est définie positive, il suffit en vertu de l'inégalité précédente de vérifier que le vecteur $(C\ \xi) \in \mathbb{R}^J$ est non nul, $\forall \xi \in \mathbb{R}^K \setminus \{0\}$.
Pour cela supposons que $C\ \xi = 0$.
Alors :

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j')})(\sum_{k=1}^K v_h^{(k)} \xi_k)\ dx = 0.$$

Or $\vec{q}_h^{(1)}, \vec{q}_h^{(2)}, \ldots\ldots, \vec{q}_h^{(J)}$ forment une base de X_h.
On a donc $\forall \vec{q}_h \in X_h$

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \vec{q}_h)(\sum_{k=1}^{K} v_h^{(k)} \xi_k)\ dx = 0.$$

Mais $\sum_{k=1}^{K} \xi_k v_h^{(k)} \in M_h$ et alors par le lemme (1.2) p.612 de [8], il s'en suit que

$$\sum_{k=1}^{K} \xi_k v_h^{(k)} = 0$$

ce qui implique

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots\ldots = \xi_K = 0 \ \text{ donc } \qquad \xi = 0.$$

Ceci démontre que la matrice $C^\top B^{-1} C$ est symétrique et définie positive.
D'où :

$$\tilde{\beta}(t) = (C^\top B^{-1} C)^{-1}\ \tilde{F}(t)$$

Comme $\tilde{F} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^K)$, $\tilde{\beta} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^K)$ et par conséquent $\tilde{\alpha} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^J)$ par (1.19).
D'où

$$\tilde{u}_h \in L^2(0, T; M_h) \ \ et \ \ \tilde{\vec{p}}_h \in L^2(0, T; X_h).$$

■

Dans la suite, on a besoin, dans l'estimation de l'erreur, de plus de régularité sur la solution du problème (1.13) ainsi que sur sa projection elliptique. Pour cela on suppose que :

$$f \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \ \text{ et que } \quad \Delta g + f(0) \in H_0^1(\Omega).$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.4.5 *Avec les hypothèses ci-dessus on a :*

$$u_t \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^{2,\alpha}(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)), \tag{1.20}$$

et

$$\tilde{u}_h \in H^1(0, T; M_h) \ \ et \ \ \tilde{\vec{p}}_h \in H^1(0, T; X_h). \tag{1.21}$$

Preuve:

Par hypothése $\frac{df}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Soit $v \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))$ la solution de l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(v(t)) = \Delta(v(t)) + \dfrac{df}{dt}(t) \qquad \text{dans } Q \\ \\ v(0) = \Delta g + f(0) \qquad \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Puisque

$$\triangle g + f(0) \in \mathring{H}^1(\Omega) \ et \ \frac{df}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

alors d'aprés le théorème 1.1.1, v existe et est unique. De plus d'après le résultat de régularité (1.14) appliqué au problème de Cauchy ci-dessus :

$$v \in L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)).$$

Posons

$$u(t) = \int_0^t v(s)ds + g.$$

On vérifie de suite que u ainsi définie est la solution de (1.1). De plus, $\frac{du}{dt} = v$. Des propriétés de régularité de v suit alors (1.20).
D'autre part nous avons vu dans la démonstration de l'existence et l'unicité de la projection elliptique que

$$\tilde{\beta}(t) = (C^\top B^{-1}C)^{-1} \ \tilde{F}(t),$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\beta}(t) &= (C^\top B^{-1}C)^{-1} \ \frac{d}{dt}\tilde{F}(t) \\ &= (C^\top B^{-1}C)^{-1} \begin{pmatrix} \int_\Omega (\frac{d}{dt}f(t) - \frac{d}{dt}u_t(t))\, v_h^{(1)} \ dx \\ . \\ . \\ . \\ \int_\Omega (\frac{d}{dt}f(t) - \frac{d}{dt}u_t(t))\, v_h^{(K)} \ dx \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'oú

$$\frac{d}{dt}\tilde{\beta}(t) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^K).$$

Il s'en suit que,

$$\frac{d}{dt}\tilde{\alpha}(t) \in L^2(0,T;\mathbb{R}^J),$$

puisque

$$\tilde{\alpha}(t) = -B^{-1}C\tilde{\beta}(t)$$

et par conséquent

$$\tilde{u}_h \in H^1(0,T;M_h) \ \text{ et } \ \tilde{\vec{p}}_h \in H^1(0,T;X_h).$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarquons que la projection elliptique $(\tilde{\vec{p}}_h(t), \tilde{u}_h(t))$ n'est que la solution de la formulation mixte discrète pour le Laplacian avec comme second membre

$$-\triangle u(t) = -\operatorname{div} \vec{p}(t) = f(t) - u_t(t) \in L^2(\Omega),$$

Il découle du théorème 1.13 p.619 et du théorème 1.17 p.623 de [8] :

Proposition 1.4.6 *Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille de triangulations régulière sur $\overline{\Omega}$ satisfaisant pour un $\alpha \in \left]1-\frac{\pi}{w}, 1\right[$ fixé :*
(i) $h_K \leq \sigma h^{\frac{1}{1-\alpha}}$ pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$ admettant l'origine comme sommet,
(ii) $h_K \leq \sigma \left(\inf_{x\in K} r^\alpha(x)\right) h$ pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$ sans sommet à l'origine .
Alors il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$\left\| \vec{p}(t) - \tilde{\vec{p}}_h(t) \right\|_{0,\Omega} \leq c\ h\ \left|u(t)\right|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\ , \tag{1.22}$$

et

$$\left\|u(t) - \tilde{u}_h(t)\right\|_{0,\Omega} \leq c\ h \left(\ |u(t)|_{H^1(\Omega)} + |u(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\right), \tag{1.23}$$

Proposition 1.4.7 *Soit $\alpha \in \left]1-\frac{\pi}{w}, 1\right[$ fixé et soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille de triangulations sur $\overline{\Omega}$ possédant les mêmes propriétés que dans la proposition 1.4.6. Il existe une constante positive β^* indépendante de h telle que $\forall' t \in I$:*

$$\|u_h(t) - P_h\, u(t)\|_{0,\Omega} \ \leq \ \frac{1}{\beta^*}\, \|\vec{p}(t) - \vec{p}_h(t)\|\,, \tag{1.24}$$

où P_h désigne l'opérateur de projection orthogonale de M sur M_h.

Preuve: Rappelons les deux problèmes $(1.9), (1.15)$:
la formulation mixte :

$$\left\{\begin{array}{ll} \int_\Omega \vec{p}(t).\vec{q}\,dx + \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div}\vec{q}\,dx = 0, & \forall \vec{q} \in X, \\ \\ \int_\Omega v\ \operatorname{div}\vec{p}(t)dx = -\int_\Omega (f(t) - u_t(t))\ v\ dx, & \forall v \in M, \end{array}\right. \tag{1.9}$$

le problème semi-discret :

$$\left\{\begin{array}{ll} \int_\Omega \vec{p}_h(t).\vec{q}_h\ dx + \int_\Omega u_h(t)\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx = 0\ , & \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h\ \operatorname{div}\vec{p}_h(t)dx = -\int_\Omega (f(t) - u_{h,t}(t))\ v_h\ dx, & \forall v_h \in M_h, \end{array}\right. \tag{1.15}$$

En prenant $\vec{q} = \vec{q}_h$ dans $(1.9)_{(i)}$ on obtient

$$\int_\Omega \vec{p}(t).\vec{q}_h dx + \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx = 0. \tag{1.25}$$

Puisque div $\vec{q}_h$ est constant sur chaque $K \in \mathcal{T}_h, \forall \vec{q}_h \in X_h$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(t)\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K u(t) \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx \\ &= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \operatorname{div}\vec{q}_{h|K} \int_K P_h\left(u(t)\right)\ dx \\ &= \int_\Omega P_h\left(u(t)\right) \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx \end{aligned}$$

D'où (1.25) devient

$$\int_\Omega \vec{p}(t).\vec{q}_h dx + \int_\Omega P_h\left(u(t)\right) \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx = 0 \quad \forall \vec{q}_h \in X_h, \forall' t \in I, \tag{1.26}$$

et en faisant la différence entre (1.26) et $(1.15)_{(i)}$, on obtient

$$\int_\Omega \left(\vec{p}(t) - \vec{p}_h(t)\right).\vec{q}_h dx + \int_\Omega (P_h u(t) - u_h(t))\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h, \forall' t \in I. \tag{1.27}$$

Maintenant du corollaire 1.15 de [8] *i.e.* de l'inégalité inf − sup uniforme et de (1.27) suit :

$$\|u_h(t) - P_h u(t)\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{\beta^*} \|\vec{p}(t) - \vec{p}_h(t)\| \quad \forall' t \in I,$$

avec β^* désignant la constante apparaissant dans l'inégalité inf − sup uniforme. D'où (1.24), ce qui complète la preuve.

■

Le résultat suivant concerne une majoration bien connue de l'erreur d'interpolation lorsque l'interpolation est la moyenne sur chaque triangle (voir par exemple inégalité (45) p.624 de [8]).

Proposition 1.4.8 *Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $t \in I$:*

$$\|u(t) - P_h u(t)\|_{0,\Omega} \leq c\, h\, |u(t)|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.28}$$

Proposition 1.4.9 *Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition 1.4.6. Pour $\alpha \in \left]1 - \frac{\pi}{w}, 1\right[$, $\exists\, c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $t \in I$:*

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} \leq c\, h\, |u(t)|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\beta^*}\left(ch|u(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \left\|\vec{\tilde{p}}_h(t) - \vec{p}_h(t)\right\|\right). \tag{1.29}$$

Preuve: En appliquant les estimations (1.28), (1.24) on a

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} &\leq \|u(t) - P_h u(t)\|_{0,\Omega} + \|P_h u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} \qquad \forall' t \in I, \\
&\leq ch|u(t)|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\beta^*}\left(\|\vec{p}(t) - \vec{p}_h(t)\|_{0,\Omega}\right) \\
&\leq ch|u(t)|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\beta^*}\left(\left\|\vec{p}(t) - \vec{\tilde{p}}_h(t)\right\|_{0,\Omega} + \left\|\vec{\tilde{p}}_h(t) - \vec{p}_h(t)\right\|_{0,\Omega}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui implique, en utilisant (1.22) pour presque tout t dans I :

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} \leq c\, h|u(t)|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\beta^*}\left(ch|u(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \left\|\vec{\tilde{p}}_h(t) - \vec{p}_h(t)\right\|_{0,\Omega}\right).$$

Mais comme $u \in H^1(0,T,L^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0,T];L^2(\Omega))$, il s'en suit que $u-u_h$ est continue. Donc l'inégalité précédente est vraie pour tout t dans I. Ce qui achève la démonstration. ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'estimée finale c-à-d de majorer $\|\vec{p}(t)-\vec{p}_h(t)\|_{0,\Omega}$ et $\|u(t)-u_h(t)\|_{0,\Omega}$, par $O(h)$. Nous avons les estimations à priori d'erreurs suivantes :

Théorème 1.4.10 *Supposons les hypothèses de la proposition 1.4.5 vérifiées i.e.* $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ *et* $\Delta g + f(0) \in \mathring{H}^1(\Omega)$. *Prenons* $u_h(0) = \tilde{u}_h(0)$ *comme condition initiale du problème semi-discret et soit* $\{\mathcal{T}_h\}$ *une famille de triangulations sur* $\overline{\Omega}$, *avec les mêmes propriétés que dans la proposition* 1.4.6 *pour* $\alpha \in \left]1-\frac{\pi}{w},1\right[$. *Alors il existe une constante* $c>0$ *indépendante de* h *telle que pour tout* $t \in I$:

$$\|\vec{p}(t)-\vec{p}_h(t)\| \leq c\, h(\ |u(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))}) \tag{1.30}$$

et

$$\|u(t)-u_h(t)\| \leq c\, h(\ |u(t)|_{H^1(\Omega)} + |u(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))}). \tag{1.31}$$

Preuve: Tout d'abord on a besoin de réécrire les deux problèmes (1.15) et (1.18)

le problème semi-discret :

$$\left\{\begin{array}{ll} \int_\Omega \vec{p}_h(t).\vec{q}_h\, dx + \int_\Omega u_h(t)\ \operatorname{div}\vec{q}_h\, dx = 0, & \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h\ \operatorname{div}\vec{p}_h(t) dx = -\int_\Omega (f(t)-u_{h,t}(t))\, v_h\, dx, & \forall v_h \in M_h. \end{array}\right. \tag{1.15}$$

et la projection elliptique :

$$\left\{\begin{array}{ll} \int_\Omega \tilde{\vec{p}}_h(t).\vec{q}_h\, dx + \int_\Omega \tilde{u}_h(t)\ \operatorname{div}\vec{q}_h\, dx = 0, & \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h\ \operatorname{div}\tilde{\vec{p}}_h(t) dx = -\int_\Omega (f(t)-u_t(t))\, v_h\, dx, & \forall v_h \in M_h. \end{array}\right. \tag{1.18}$$

Une soustraction de $(1.18)_{(i)}$ de $(1.15)_{(i)}$, nous donne :

$$\int_\Omega \left(\vec{p}_h(t)-\tilde{\vec{p}}_h(t)\right).\vec{q}_h\, dx + \int_\Omega (u_h(t)-\tilde{u}_h(t))\ \operatorname{div}\vec{q}_h\, dx = 0\ , \quad \forall' t \in I\ , \forall \vec{q}_h \in X_h.$$

On pose dans la suite

$$\vec{\varepsilon}_h(t) := \vec{p}_h(t) - \tilde{\vec{p}}_h(t) \quad \text{et} \quad \theta_h(t) := u_h(t) - \tilde{u}_h(t).$$

Alors l'équation précédente peut être réécrite :

$$\int_\Omega \vec{\varepsilon}_h(t).\vec{q}_h \, dx + \int_\Omega \theta_h(t) \ \operatorname{div} \vec{q}_h \, dx = 0 \ , \qquad \forall t \in I \ , \forall \vec{q}_h \in X_h. \tag{1.32}$$

Dans l'équation précédente, nous avons écrit $\forall t \in I$. En effet d'après la proposition 1.4.2 et la proposition 1.4.5, on a $\vec{\varepsilon}_h \in H^1(0,T;X_h)$, $\theta_h \in H^1(0,T;M_h)$ qui sont donc continues de $[0,T]$ dans X_h respectivement M_h.
Dérivant les deux membres par rapport à t nous obtenons :

$$\int_\Omega \frac{d}{dt}\vec{\varepsilon}_h(t).\vec{q}_h \, dx + \int_\Omega \frac{d}{dt}\theta_h(t) \ \operatorname{div} \vec{q}_h \, dx = 0, \qquad \forall' t \in I \ , \forall \vec{q}_h \in X_h.$$

En prenant $\vec{q}_h = 2\,\vec{\varepsilon}_h(t)$ on a :

$$2\int_\Omega \frac{d}{dt}\vec{\varepsilon}_h(t).\vec{\varepsilon}_h(t) \, dx + \int_\Omega 2\frac{d}{dt}\theta_h(t) \ \operatorname{div} \vec{\varepsilon}_h(t) \, dx = 0 \qquad \forall' t \in I \ ,$$

donc

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h(t)|^2 \, dx + \int_\Omega 2\frac{d}{dt}\theta_h(t) \ \operatorname{div} \vec{\varepsilon}_h(t) \, dx = 0 \qquad \forall' t \in I. \tag{1.33}$$

De façon similaire, en faisant la différence entre $(1.15)_{(ii)}$ et $(1.18)_{(ii)}$, nous aurons :

$$\int_\Omega v_h \ \operatorname{div} \vec{\varepsilon}_h(t) dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}(u_h - u)(t) \ v_h \, dx, \quad \forall v_h \in M_h, \forall' t \in I \tag{1.34}$$

Pour faire apparaître, à partir de (1.34), le deuxième terme de l'équation (1.33), choisissons $v_h = 2\dfrac{d\theta_h(t)}{dt}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 2\frac{d\theta_h}{dt}(t) \ \operatorname{div}(\vec{\varepsilon}_h(t)) dx &= 2\int_\Omega \frac{d}{dt}(u_h - u)(t) \ \frac{d\theta_h}{dt}(t) \, dx \quad \forall' t \in I \\
&= 2\int_\Omega \frac{d}{dt}(u_h - \tilde{u}_h)(t) \ \frac{d\theta_h}{dt}(t) \, dx + 2\int_\Omega \frac{d}{dt}(\tilde{u}_h - u)(t) \ \frac{d\theta_h}{dt}(t) \, dx \\
&= 2\int_\Omega \left(\frac{d\theta_h}{dt}(t)\right)^2 \, dx + 2\int_\Omega \frac{d}{dt}(\tilde{u}_h - u)(t) \ \frac{d\theta_h}{dt}(t) dx. \qquad (1.35)
\end{aligned}$$

(1.33) (1.35) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz impliquent que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h(t)|^2\,dx + 2\int_\Omega \left(\frac{d\theta_h}{dt}(t)\right)^2\,dx &= -2\int_\Omega \frac{d}{dt}(\tilde{u}_h - u)(t)\,\frac{d\theta_h}{dt}(t)\,dx \qquad \forall' t \in I \\
&\leq 2\left[\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(\tilde{u}_h - u)(t)\right)^2\right]^{1/2}\left[\int_\Omega \left(\frac{d\theta_h}{dt}(t)\right)^2\,dx\right]^{1/2} \\
&\leq \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(\tilde{u}_h - u)(t)\right)^2 + \int_\Omega \left(\frac{d\theta_h}{dt}(t)\right)^2\,dx.
\end{aligned}$$

En simplifiant les deux membres, on obtient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h(t)|^2\,dx \leq \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(\tilde{u}_h - u)(t)\right)^2\,dx \qquad \forall' t \in I.$$

Maintenant on intègre les deux membres de 0 à t, d'où :

$$\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h(t)|^2\,dx \leq \int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h(0)|^2\,dx + \int_0^t \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(\tilde{u}_h - u)(t)\right)^2\,dx\;dt. \tag{1.36}$$

D'autre part, en prenant $\tilde{u}_h(0) = u_h(0)$, on obtient $\theta_h(0) = u_h(0) - \tilde{u}_h(0) = 0$. (1.32) pour $t = 0$ nous donne alors :

$$\int_\Omega \vec{\varepsilon}_h(0).\vec{q}_h\;dx = 0\;, \qquad \forall \vec{q}_h \in X_h.$$

Prenant $\vec{q}_h = \vec{\varepsilon}_h(0)$ il s'en suit :

$$\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h(0)|^2\;dx = 0$$

donc $\vec{\varepsilon}_h(0) = 0$.

Alors (1.36) devient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h(t)|^2\,dx &\leq \int_0^t \left(\int_\Omega \left(\frac{d}{dt}(u - \tilde{u}_h)(t)\right)^2 dx\right)\,dt \\
&\equiv \int_0^t \left(\int_\Omega \left[\frac{du}{dt}(t) - \widetilde{\left(\frac{du}{dt}(t)\right)}_h\right]^2 dx\right)
\end{aligned}$$

puisque les opérateurs $\frac{d}{dt}$ et $(.)_h^{\sim}$ commutent, nous obtenons :

$$\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h(t)|^2\,dx \leq \int_0^t \left\| \frac{du}{dt}(t) - \left(\frac{du}{dt}(t)\right)_h^{\sim} \right\|_{0,\Omega}^2 dt$$

Donc il suffit de majorer $\left\|\frac{du}{dt}(t) - \left(\frac{du}{dt}(t)\right)_h^{\sim}\right\|_{0,\Omega}$. Comme nous avons supposé que :

$$f \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \text{ et } \Delta g + f(0) \in \mathring{H}^1(\Omega),$$

Il suit de la proposition 1.4.5 que

$$u_t \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)).$$

Et Comme la projection elliptique de $u_t\,(t)$ n'est rien d'autre que la solution du problème mixte discret stationnaire avec comme second membre $-\Delta u_t\,(t)$ (t fixé), d'aprés la proposition 1.4.6, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) - \left(\frac{du}{dt}(t)\right)_h^{\tilde{}} \right\|_{0,\Omega} \leq c\,h\,\left(\left|\frac{du(t)}{dt}\right|_{H^1(\Omega)} + \left|\frac{du(t)}{dt}\right|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \right).$$

De ceci et de l'inégalité ci-dessus suit :

$$\|\vec{\varepsilon}_h(t)\|_{0,\Omega} \leq c\,h \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))},\ \forall' t \in [0,T].$$

D'où, par la proposition 1.4.6 et l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned} \|\vec{p}(t) - \vec{p}_h(t)\|_{0,\Omega} &\leq \left\|\vec{p}(t) - \tilde{\vec{p}}_h(t)\right\| + \left\|\tilde{\vec{p}}_h(t) - \vec{p}_h(t)\right\| \\ &\leq ch \left(|u(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

De (1.29) et de la majoration ci-dessus sur $\|\vec{\varepsilon}_h(t)\|$ suit :

$$\|u(t) - u_h(t)\|_{0,\Omega} \leq c\,h \left(|u(t)|_{H^1(\Omega)} + |u(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega))} \right).$$

■

1.5 Problème complètement discrétisé

Maintenant, nous allons compléter la discrétisation du problème de la chaleur. Pour cela nous subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en N sous-intervalles $[t_{n-1}, t_n]$ (n étant un nombre entier positif ou nul), tels que :

$$0 = t_0 \leq \cdots \leq t_n < \cdots \leq t_N = T,$$

Avec $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ dénote le pas de temps fixe. nous désignons par u_h^n l'approximation de la température u au temps $t_n = n\Delta t$ dans M_h . Pour l'approximation de $\frac{\partial u}{\partial t}$ au temps t_n, nous utilisons la formule suivante :

$$\overline{\partial} u_h^n = \frac{(u_h^n - u_h^{n-1})}{\Delta t}$$

où u_h^{n-1} est l'approximation de la température u au temps t_{n-1}.

1.5.1 Schéma implicite

Nous commençons notre étude par le schéma implicite. Ainsi le problème complètement discrétisé de l'équation de la chaleur instationnaire s'écrit comme suit : trouver $(\vec{p}_h^{\,n}, u_h^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

$$\begin{cases} \int_\Omega \vec{p}_h^{\,n}.\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega u_h^n \; \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \; \forall n \geq 0 \\ \\ \int_\Omega v_h \; \operatorname{div} \vec{p}_h^{\,n} dx = -\int_\Omega (f(t_n) - \overline{\partial} u_h^n) \; v_h \; dx, \;\; \forall v_h \in M_h, \; \forall n \geq 1 \\ \\ u_h^0 \; (c.i.), \text{ donnée.} \end{cases} \tag{1.37}$$

On supposera que $u_h^0 = \tilde{u}_h(0)$, montrons que le problème (1.37) admet une solution unique $(\vec{p}_h^{\,n}, u_h^n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_h \times M_h$.

Proposition 1.5.1 *Le problème* (1.37) *possède une et une seule solution* $(\vec{p}_h^{\,n}, u_h^n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_h \times M_h$.

Preuve:

Posons

$$F(v_h) := -\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega (\Delta t\ f(t_n) + u_h^{n-1})\ v_h\ dx. \tag{1.38}$$

Le problème (1.37) est équivalent à trouver $(\vec{p}_h^{\,n}, u_h^n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_h \times M_h$ tel que :

$$\begin{cases} \int_\Omega \vec{p}_h^{\,n}.\vec{q}_h\ dx + \int_\Omega u_h^n\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx = 0,\ \ \forall \vec{q}_h \in X_h,\ \forall n \geq 0 \\ \\ \int_\Omega v_h\ \operatorname{div}\vec{p}_h^{\,n} dx - \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega u_h^n\ v_h\ dx = F(v_h)\ \ \forall v_h \in M_h,\ \forall n \geq 1 \\ \\ u_h^0\ (c.i.),\ (\text{donnée}). \end{cases} \tag{1.39}$$

Si l'on considère l'application Φ_h de $X_h \times M_h$ dans son dual : qui associe à chaque élément $(\vec{p}_h, u_h)$ l'élément de l'espace $X_h^{'} \times M_h^{'}$ qu'on notera $\Phi_h(\vec{p}_h, u_h)$ tel que :

$$\begin{array}{rcl} \Phi_h(\vec{p}_h, u_h)\ :=\ (\ \vec{q}_h & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega \vec{p}_h.\vec{q}_h\ dx + \int_\Omega u_h\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx, \\ \\ v_h & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega v_h\ \operatorname{div}\vec{p}_h dx - \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega u_h\ v_h\ dx). \end{array}$$

Pour montrer que l'application linéaire Φ_h est bijective il suffit de montrer l'injectivité. Soit alors $(\vec{p}_h, u_h) \in X_h \times M_h$ tel que :

$$\int_\Omega \vec{p}_h.\vec{q}_h\ dx + \int_\Omega u_h\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx\ \ =\ \ 0,\ \ \forall \vec{q}_h \in X_h, \tag{1.40}$$

$$\int_\Omega v_h\ \operatorname{div}\vec{p}_h\ dx - \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega u_h\ v_h\ dx\ \ =\ \ 0,\ \forall v_h \in M_h. \tag{1.41}$$

Prenons $\vec{q}_h = \vec{p}_h$ dans (1.40) , et $v_h = u_h$ dans (1.41) , il s'en suit que :

$$\int_\Omega |\vec{p}_h|^2\ dx + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega |u_h|\, dx = 0,$$

et donc $\vec{p}_h = 0$ et $u_h = 0$.

Donc Φ_h est bijective, ce qui nous permet de résoudre séquentiellement (1.39) pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. ■

Remarque 1.5.2 *Pour* $n = 0$, u_h^0 *étant donnée* $\vec{p}_h^{\,0}$ *est déterminé par la seule équation* $(1.39)_{(i)}$ *:*

$$\int_\Omega \vec{p}_h^{\,0}.\vec{q}_h \, dx + \int_\Omega u_h^0 \ \mathrm{div}\ \vec{q}_h \, dx = 0, \ \ \forall \vec{q}_h \in X_h.$$

C'est une forme linéaire continue sur X_h*, espace vectoriel de dimension finie, que nous munissons du produit scalaire* L^2*.* X_h *ainsi muni est un espace de Hilbert. Donc par le théorème de représentation de Riez, il existe un unique* $\vec{p}_h^{\,0} \in X_h$ *tel que :*

$$\int_\Omega \vec{p}_h^{\,0}.\vec{q}_h \, dx = -\int_\Omega u_h^0 \ \mathrm{div}\ \vec{q}_h \, dx, \ \ \forall \vec{q}_h \in X_h.$$

1.5.2 Stabilité du schéma implicite

Avant de procéder à l'étude de l'estimation de l'erreur, nous allons tout d'abord démontrer la stabilité du schéma complètement discrétisé de la formulation mixte duale pour l'équation de la chaleur. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.5.3 *Considérant le schéma implicite* (1.37)*, on a*

$$\sup_{0 \le m \le N} \|u_h^m\|_{0,\Omega} \le \sqrt{2}\exp(T) \left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2} \right) \tag{1.42}$$

pour $\Delta t \le \frac{1}{2}$.

Preuve: Prenons $v_h = u_h^n$ dans l'équation d'équilibre $(1.37)_{(ii)}$ *alors* :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_h^n \ \mathrm{div}\, \vec{p}_h^{\,n} \, dx &= -\int_\Omega (f(t_n) - \overline{\partial} u_h^n) u_h^n \, dx, \\
&= \int_\Omega \overline{\partial} u_h^n \, u_h^n \, dx - \int_\Omega f(t_n) \, u_h^n \, dx, \\
&= \frac{1}{\Delta t} \int_\Omega \left(u_h^n - u_h^{n-1}\right) u_h^n \, dx - \int_\Omega f(t_n) \, u_h^n \, dx,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

puisque $\overline{\partial} u_h^n = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}$.

Mais par l'équation $(1.37)_{(i)}$ avec $\vec{q}_h = \vec{p}_h^{\,n}$ suit :

$$\int_\Omega u_h^n \ \mathrm{div}\, \vec{p}_h^{\,n} \, dx = -\int_\Omega |\vec{p}_h^{\,n}|^2 \, dx. \tag{1.44}$$

Par (1.43) et (1.44) , on obtient :

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega}|u_h^n|^2\ dx-\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega}u_h^{n-1}u_h^n\,dx+\int_{\Omega}|\vec{p}_h^{\,n}|^2\ dx=\int_{\Omega}f(t_n)\,u_h^n\,dx.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega}|u_h^n|^2\ dx+\int_{\Omega}|\vec{p}_h^{\,n}|^2\ dx &= \int_{\Omega}f(t_n)\,u_h^n\,dx+\frac{1}{\Delta t}\int_{\Omega}u_h^{n-1}u_h^n\,dx,\\ &\leq \int_{\Omega}f(t_n)\,u_h^n\,dx+\frac{1}{2\Delta t}\int_{\Omega}|u_h^n|^{\,2}\,dx+\frac{1}{2\Delta t}\int_{\Omega}\left|u_h^{n-1}\right|^{\,2}dx.\end{aligned}$$

Et alors :

$$\frac{1}{2\Delta t}\int_{\Omega}|u_h^n|^2\ dx+\int_{\Omega}|\vec{p}_h^{\,n}|^2\ dx\leq\int_{\Omega}f(t_n)\,u_h^n\,dx+\frac{1}{2\Delta t}\int_{\Omega}\left|u_h^{n-1}\right|^{\,2}dx.$$

À fortiori :

$$\frac{1}{2\Delta t}\int_{\Omega}|u_h^n|^2\ dx\leq\int_{\Omega}f(t_n)\,u_h^n\,dx+\frac{1}{2\Delta t}\int_{\Omega}\left|u_h^{n-1}\right|^{\,2}dx,$$

d'où

$$\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2-\left\|u_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2\leq 2\Delta t\,\|f(t_n)\|_{0,\Omega}\,\|u_h^n\|_{0,\Omega}\,.$$

Sommant ces inégalités depuis $n=1$ jusqu'à m, on obtient

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2-\left\|u_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2\right)\leq 2\Delta t\sum_{n=1}^{m}\|f(t_n)\|_{0,\Omega}\,\|u_h^n\|_{0,\Omega}\,.$$

Donc

$$\|u_h^m\|_{0,\Omega}^2\leq\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2+2\Delta t\sum_{n=1}^{m}\|f(t_n)\|_{0,\Omega}\,\|u_h^n\|_{0,\Omega}\,.$$

Par l'inégalité de Young appliquée au membre de droite, nous obtenons alors :

$$\|u_h^m\|_{0,\Omega}^2\leq\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2+\Delta t\sum_{n=1}^{m}\|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2+\Delta t\sum_{n=1}^{m}\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2\,.$$

En vue d'appliquer l'inégalité de Gronwall discrète, faisons passer le terme en $\|u_h^m\|_{0,\Omega}^2$ du membre de droite dans le membre de gauche. Par conséquent

$$(1-\Delta t)\,\|u_h^m\|_{0,\Omega}^2\leq\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2+\Delta t\sum_{n=1}^{m}\|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2+\Delta t\sum_{n=1}^{m-1}\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 \tag{1.45}$$

Et si de plus on suppose que $\Delta t \leq \frac{1}{2}$ ce qui n'est pas très gênant, alors

$$\|u_h^m\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{m} \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2\right) + \sum_{n=1}^{m-1} 2\Delta t \|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 . \tag{1.46}$$

Appliquons à ce stade l'inégalité de Gronwall discrète ([19] p.VI-9) on obtient

$$\begin{aligned} \|u_h^m\|_{0,\Omega}^2 &\leq 2\left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{m} \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{m-1} 2\Delta t\right) \\ &\leq 2\exp(2T)\left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{0\leq m\leq N} \|u_h^m\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2}\exp(T)\left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \Delta t \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2}\right). \tag{1.47}$$

■

Remarque 1.5.4 *En passant de l'inégalité* (1.45) *à* (1.46) , *on peut majorer* $\Delta t \sum_{n=1}^{N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2$ *par* (T $\max_{n=1,\dots,N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2$). *Si on fait cela on obtient alors que*

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq m\leq N} \|u_h^m\|_{0,\Omega} &\leq \sqrt{2}\exp(T)\left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{T}\max_{n=1,\dots,N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega}\right), \qquad (1.48) \\ &\leq \sqrt{2}\exp(T)\left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{T}\, \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right). \end{aligned}$$

La majoration (1.47) *est l'analogue de la majoration* (20) *p.354 de [21] :* $\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \lesssim \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ *pour le problème de Cauchy de diffusion de la chaleur.* $\sqrt{\sum_{n=1}^{N} \Delta t \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2}$ *est l'analogue pour le problème discrétisé en temps de* $\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$, *et si* $[0,T] \to \mathbb{R} \ : \ t \longmapsto \|f\|^2$ *Riemann-intégrable alors* $\sum_{n=1}^{N} \Delta t \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2$ *tend vers* $\int_0^T \|f(t)\|^2 dt = \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2$ *lorsque* $N \to +\infty$.

Maintenant on passe à la majoration des $\vec{p}_h^{\,n}, \forall n \geq 1$ pour achever notre étude sur la stabilité du schéma implicite (1.37) .

Théorème 1.5.5 *Soit le schéma implicite* (1.37), *il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} \Delta t \|\vec{p}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2} \leq C\left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \Delta t \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2}\right) \tag{1.49}$$

Preuve: Prenons $\vec{q}_h = \vec{p}_h^{\,n}$ dans l'équation $(1.37)_{(i)}$ et $v_h = u_h^n$ dans l'équation $(1.37)_{(ii)}$. Nous obtenons

$$\int_\Omega |\vec{p}_h^{\,n}|^2 \, dx + \int_\Omega (\overline{\partial} u_h^n - f(t_n))\, u_h^n \, dx = 0. \tag{1.50}$$

Multiplions les deux membres par le pas de temps Δt, alors :

$$\Delta t \int_\Omega |\vec{p}_h^{\,n}|^2 \, dx + \Delta t \int_\Omega (\overline{\partial} u_h^n - f(t_n))\, u_h^n \, dx = 0.$$

Sommant ces équations membre à membre pour $n = 1, 2, 3, ..., N$, nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta t \int_\Omega |\vec{p}_h^{\,n}|^2 \, dx + \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega (u_h^n - u_h^{n-1})\, u_h^n \, dx - \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega \Delta t\, f(t_n)\, u_h^n \, dx = 0. \tag{1.51}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (u_h^n - u_h^{n-1})\, u_h^n \, dx &= \int_\Omega (u_h^n)^2 \, dx - \int_\Omega u_h^{n-1} u_h^n \, dx \\
&\geq \|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\left\|u_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 \\
&= \frac{1}{2}\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\left\|u_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 .
\end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{N} \int_\Omega (u_h^n - u_h^{n-1})\, u_h^n \, dx \geq \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2}\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\left\|u_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 \right) = \frac{1}{2}\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 .$$

Il suit donc de (1.51) qu'à fortiori :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \Delta t \int_\Omega |\vec{p}_h^{\,n}|^2 \, dx + \frac{1}{2}\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 &\leq \sum_{n=1}^{N} \Delta t \,\|f(t_n)\|_{0,\Omega} \|u_h^n\|_{0,\Omega} &\quad (1.52)\\
&\leq C \left[\left(\sum_{n=1}^{N} \Delta t \,\|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \,\|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right]. &\quad (1.53)
\end{aligned}$$

En effet, voici comment l'on passe de (1.52) à (1.53) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega} \, \|u_h^n\|_{0,\Omega} &= \sum_{n=1}^{N} (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega} \, (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \, \|u_h^n\|_{0,\Omega} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} Cste \left(\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 \right. \qquad (1.54) \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{par la majoration (1.42)} \\
&\leq Cste \left[\left(\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right].
\end{aligned}$$

D'où (1.53).

Reste à majorer le premier terme du membre de droite de l'inégalité (1.53). En utilisant l'inégalité $ab \leq a^2 + b^2$ nous obtenons :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega} \leq \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 . \qquad (1.55)$$

De (1.55) et (1.53) suit que

$$\sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|\vec{p}_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \leq Cste \left(\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \, \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 \right). \qquad (1.56)$$

D'où à fortiori on a (1.49) en laissant tomber le second terme du membre de gauche de l'inégalité (1.56). ■

La majoration 1.49 peut être vue comme une majoration de la norme L^2 de la fonction discrète du temps $\|\vec{p}_h^n\|$. nous démontrons maintenant une majoration en norme de supremum en temps.

Proposition 1.5.6 *Soit le schéma implicite* (1.37)*, nous avons alors :*

$$\left\|\vec{p}_h^N\right\|_{0,\Omega} \leq \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{n=1,\ldots,N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega} . \qquad (1.57)$$

Preuve: Appliquant l'opérateur de différence rétrograde $\overline{\partial}$ sur $(1.37)_{(i)}$, on trouve :

$$\int_{\Omega} \overline{\partial}\vec{p}_h^{\,n}.\vec{q}_h \, dx + \int_{\Omega} \overline{\partial}u_h^n \, \operatorname{div}\vec{q}_h \, dx = 0, \ \ \forall \vec{q}_h \in X_h, \ \forall n \geq 1. \tag{1.58}$$

Prenons $\vec{q}_h = \vec{p}_h^{\,n}$ dans (1.58), et $v_h = \overline{\partial}u_h^n$ dans l'équation $(1.37)_{(ii)}$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \overline{\partial}\vec{p}_h^{\,n}.\,\vec{p}_h^{\,n} dx + \int_{\Omega} \overline{\partial}u_h^n \operatorname{div}\,\vec{p}_h^{\,n} \, dx = 0, \\ \\ \int_{\Omega} \overline{\partial}u_h^n \operatorname{div}\vec{p}_h^{\,n} dx + \int_{\Omega} f(t_n)\,\overline{\partial}u_h^n \, dx - \int_{\Omega} \left|\overline{\partial}u_h^n\right|^2 \, dx = 0. \end{cases} \tag{1.59}$$

Soustrayant $(1.59)_{(ii)}$de $(1.59)_{(i)}$, il s'en suit que :

$$\int_{\Omega} \overline{\partial}\vec{p}_h^{\,n}.\,\vec{p}_h^{\,n} dx + \int_{\Omega} \left|\overline{\partial}u_h^n\right|^2 = \int_{\Omega} f(t_n)\,\overline{\partial}u_h^n \, dx.$$

Ceci implique :

$$\|\,\vec{p}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\vec{p}_h^{\,n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \left\|\overline{\partial}u_h^n\right\|^2 \leq 2\Delta t \int_{\Omega} f(t_n)\,\overline{\partial}u_h^n \, dx, \tag{1.60}$$

Sommant (1.60) membre à membre pour $n = 1, 2, 3, ..., N$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\,\vec{p}_h^{\,N}\|_{0,\Omega}^2 - \|\vec{p}_h^{\,0}\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} 2\Delta t \left\|\overline{\partial}u_h^n\right\|^2 \ &\leq \ \sum_{n=1}^{N} 2\Delta t \int_{\Omega} f(t_n)\,\overline{\partial}u_h^n \, dx \\ &\leq \ 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega} \left\|\overline{\partial}u_h^n\right\|_{0,\Omega} \\ &\leq \ \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^{N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\|\overline{\partial}u_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \ \frac{T}{2} \max_{n=1,\dots,N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\|\overline{\partial}u_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 . \end{aligned}$$

D'où :

$$\|\,\vec{p}_h^{\,N}\|_{0,\Omega} \leq \left\|\vec{p}_h^{\,0}\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{n=1,\dots,N} \|f(t_n)\|_{0,\Omega} .$$

■

1.5.3 Estimations d'erreurs

Maintenant nous entamons notre étude sur l'estimation à priori de l'erreur. Nous supposons que $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ et que $\Delta g + f(0) \in \mathring{H}^1(\Omega)$ de sorte que par la proposition 1.4.5 : $u_t \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$. En particulier, f et u_t sont des fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$. Par une démarche similaire à celle du cas semi-discret, et avant de donner le résultat sur l'erreur d'approximation de $u(t)$, solution du problème continu par u_h^n, nous commençons tout d'abord par majorer $\|u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)\|_{0,\Omega}$, où $(\vec{\tilde{p}}_h(t_n), \tilde{u}_h(t_n))$ $\in X_h \times M_h$ est la solution du problème de projection elliptique à l'instant t_n : trouver $(\vec{\tilde{p}}_h(t_n), \tilde{u}_h(t_n)) \in X_h \times M_h$ solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega \vec{\tilde{p}}_h(t_n).\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega \tilde{u}_h(t_n) \; \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h \; \operatorname{div} \; \vec{\tilde{p}}_h(t_n) dx = -\int_\Omega (f(t_n) - u_t(t_n)) \; v_h \; dx, \;\; \forall v_h \in M_h. \end{array}\right. \tag{1.61}$$

Par soustraction des équations correspondantes de (1.37), on obtient pour les écarts $\theta_h^n := u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)$ et $\vec{\varepsilon}_h^n := \vec{p}_h^n - \vec{\tilde{p}}_h(t_n)$, le système d'équations aux erreurs :

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega \vec{\varepsilon}_h^n.\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega \; \theta_h^n \; \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h \; \operatorname{div} \vec{\varepsilon}_h^n \; dx + \int_\Omega (u_t(t_n) - \overline{\partial} u_h^n) \; v_h \; dx = 0, \; \forall v_h \in M_h. \end{array}\right. \tag{1.62}$$

Théorème 1.5.7 *Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\|u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)\|_{0,\Omega} \leq c\, h \left(\int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\, ds \right) + \Delta t \int_0^{t_n} \|u_{tt}(s)\|\, ds \, . \tag{1.63}$$

Preuve: En remplaçant $\vec{q}_h$ par $\vec{\varepsilon}_h^n$ dans $(1.62)_{(i)}$ on obtient :

$$\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h^n|^2 + \int_\Omega \theta_h^n \; \operatorname{div} \; \vec{\varepsilon}_h^n = 0, \tag{1.64}$$

et aussi en remplaçant v_h par θ_h^n dans $(1.62)_{(ii)}$ on a :

$$\int_\Omega \theta_h^n \; \operatorname{div} \vec{\varepsilon}_h^n \; dx + \int_\Omega (u_t(t_n) - \overline{\partial} u_h^n) \; \theta_h^n \; dx = 0, \tag{1.65}$$

ce qui implique

$$\int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h^n|^2 + \int_\Omega (\overline{\partial} \tilde{u}_h(t_n) - u_t(t_n)) \; \theta_h^n \; dx = - \int_\Omega \left(\overline{\partial} \theta_h^n \right) \theta_h^n \; dx.$$

Lisant cette égalité de droite à gauche, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\theta_h^n)^2 \; dx - \int_\Omega \theta_h^{n-1}\theta_h^n \; dx &= -\Delta t \int_\Omega |\vec{\varepsilon}_h^n|^2 - \Delta t \int_\Omega \theta_h^n(\overline{\partial}\tilde{u}_h(t_n) - u_t(t_n)) \; dx \\
&\leq \Delta t \left| \int_\Omega \theta_h^n \; (\overline{\partial}\tilde{u}_h(t_n) - u_t(t_n)) \; dx \right| \\
&\leq \Delta t \, \|\theta_h^n\|_{0,\Omega} \, \left\|\overline{\partial}\tilde{u}_h(t_n) - u_t(t_n)\right\|_{0,\Omega} .
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|\theta_h^n\|_{0,\Omega}^2 &\leq \int_\Omega \theta_h^{n-1}\theta_h^n \; dx + \Delta t \, \|\theta_h^n\|_{0,\Omega} \left\|\overline{\partial}\tilde{u}_h(t_n) - u_t(t_n)\right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega} \|\theta_h^n\|_{0,\Omega} + \Delta t \, \|\theta_h^n\| \left\|\overline{\partial}\tilde{u}_h(t_n) - u_t(t_n)\right\|_{0,\Omega} .
\end{aligned}$$

Après simplification des deux membres par $\|\theta_h^n\|$, on obtient :

$$\|\theta_h^n\|_{0,\Omega} \leq \left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega} + \Delta t \left\|\overline{\partial}\tilde{u}_h(t_n) - u_t(t_n)\right\|_{0,\Omega} . \tag{1.66}$$

Posons pour la suite :

$$\omega^n = \left(\overline{\partial}u(t_n)\right)_h^{\sim} - u_t(t_n) \tag{1.67}$$

où $\left(\overline{\partial}u(t_n)\right)_h^{\sim} = \overline{\partial}\tilde{u}_h(t_n)$, désigne la projection elliptique de $\overline{\partial}u(t_n)$.
Pour démontrer que $\left(\overline{\partial}u(t_n)\right)_h^{\sim} = \overline{\partial}\tilde{u}_h(t_n)$.
En effet :
Considérons le problème elliptique à l'instant (t_j) quelconque :

$$\begin{cases}
\int_\Omega \vec{\tilde{p}}_h(t_j).\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega \tilde{u}_h(t_j) \; \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h, \\
\\
\int_\Omega v_h \; \operatorname{div} \vec{\tilde{p}}_h(t_j) dx = -\int_\Omega (f(t_j) - u_t(t_j)) \; v_h \; dx, \quad \forall v_h \in M_h.
\end{cases}$$

définissant la projection elliptique $(\vec{\tilde{p}}_h(t_n), \tilde{u}_h(t_n))$.
Ceci implique que pour $\left(\overline{\partial}\vec{\tilde{p}}_h(t_j), \overline{\partial}\tilde{u}_h(t_j)\right)$, on aura les équations :

$$\begin{cases}
\int_\Omega \overline{\partial}\vec{\tilde{p}}_h(t_j).\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega \overline{\partial}\tilde{u}_h(t_j) \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h, \\
\\
\int_\Omega v_h \; \operatorname{div}\left(\overline{\partial}\vec{\tilde{p}}_h(t_j)\right) dx = -\int_\Omega \left(\overline{\partial}f(t_j) - \overline{\partial}u_t(t_j)\right) \; v_h \; dx, \quad \forall v_h \in M_h.
\end{cases}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} f(t_j) - \overline{\partial} u_t(t_j) &= \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\Delta t} - \frac{u_t(t_j) - u_t(t_{j-1})}{\Delta t} \\
&= \frac{(-\Delta u(t_j)) - (-\Delta u(t_{j-1}))}{\Delta t} \\
&= -\bar{\partial} \Delta u(t_j) = -\Delta \bar{\partial} u(t_j).
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega \overline{\partial} \vec{\tilde{p}}_h(t_j).\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega \overline{\partial} \tilde{u}_h(t_j) \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0 \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h \;\operatorname{div} \left(\overline{\partial} \vec{\tilde{p}}_h(t_j) \right) dx = \int_\Omega \left(-\Delta \overline{\partial} u(t_j) \right) \; v_h \; dx \;\; \forall v_h \in M_h. \end{array} \right. \tag{1.68}$$

D'où

$$\left(\overline{\partial} u(t_j) \right)_h^{\sim} = \overline{\partial} \tilde{u}_h(t_j). \tag{1.69}$$

Revenons à (1.67) et posons :

$$\omega^n := \omega_1^n + \omega_2^n \quad \text{où} \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^n = \left(\overline{\partial} u(t_n) \right)_h^{\sim} - \overline{\partial} u(t_n), \\ \\ \omega_2^n = \overline{\partial} u(t_n) - u_t(t_n) \; . \end{array} \right. \tag{1.70}$$

Pour ω_1^n on a :

$$\begin{aligned}
\|\omega_1^n\|_{0,\Omega} &= \left\| \left(\overline{\partial} u(t_n) \right)_h^{\sim} - \overline{\partial} u(t_n) \right\|_{0,\Omega} \\
&= \left\| (R_h - I) \, \overline{\partial} u(t_n) \right\|_{0,\Omega} \\
&= \left\| (R_h - I) \, \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left\| (R_h - I) \int_{t_{n-1}}^{t_n} u_t(s) \; ds \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|(R_h - I) \, u_t(s)\|_{0,\Omega} \; ds \leq \frac{1}{\Delta t} \left(ch \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \, u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \; ds \right),
\end{aligned}$$

où, par analogie avec le livre de Vidar Thomée [7], "R_h *de*" dénote ici la composante dans M_h du couple de $X_h \times M_h$ "projection elliptique de".

Donc

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{j=1}^{n} \left\|\omega_1^j\right\|_{0,\Omega} &\leq ch \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \| u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \, ds \right) \\
&\leq ch \int_{t_0=0}^{t_n} \| u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \, ds \, .
\end{aligned}$$

Maintenant, il reste à majorer ω_2^n. On a :

$$\begin{aligned}
\|\omega_2^n\|_{0,\Omega} &= \left\|\overline{\partial} u(t_n) - u_t(t_n)\right\|_{0,\Omega} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \|u(t_n) - u(t_{n-1}) - \Delta t \; u_t(t_n)\|_{0,\Omega} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s) \; u_{tt}(s) \; ds \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega} \; ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta t \sum_{j=1}^{n} \left\|\omega_2^j\right\|_{0,\Omega} \leq \Delta t \int_{t_0=0}^{t_n} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega} \; ds \, . \tag{1.71}$$

Remplaçons dans (1.66), on obtient alors

$$\|\theta_h^n\|_{0,\Omega} \leq \left\|\theta_h^0\right\|_{0,\Omega} + ch \int_{t_0=0}^{t_n} \| u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \; ds + \Delta t \int_{t_0=0}^{t_n} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega} \; ds. \tag{1.72}$$

Mais puisque :

$$\theta_h^0 = u_h^0 - \tilde{u}_h(0) = 0,$$

grâce à l'estimation (40) p.623 de [8].

Alors

$$\|\theta_h^n\|_{0,\Omega} \leq c\, h \left(\int_{t_0=0}^{t_n} \| u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \; ds \right) + \Delta t \int_{t_0=0}^{t_n} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega} \; ds \, .$$

Ce qui achève la démonstration. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'estimation de l'erreur $\|u(t_n) - u_h^n\|_{0,\Omega}$.

Théorème 1.5.8 *Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6. *Pour $\alpha \in \left]1-\frac{\pi}{w}, 1\right[$, il existe une constante $c>0$ indépendante de h telle que pour tout $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned}\|u(t_n)-u_h^n\|_{0,\Omega} &\leq c\,h\left(|u(t_n)|_{H^1(\Omega)} + |u(t_n)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\,ds\right)\\ &\quad +\Delta t \int_0^{t_n} \|u_{tt}(s)\|\,ds\,. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Preuve: Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\|u(t_n)-u_h^n\|_{0,\Omega} \leq \|u(t)-\tilde{u}_h(t_n)\|_{0,\Omega} + \|\tilde{u}_h(t_n)-u_h^n\|_{0,\Omega}\,.$$

En utilisant l'inégalité (1.63) obtenue précédemment et l'inégalité (1.23) on obtient la majoration (1.73). ■

Maintenant nous passons à l'estimation de l'erreur concernant les $\vec{p}_h^{\,n}$. En suivant une démarche similaire, nous commençons par démontrer un résultat concernant l'approximation de $\tilde{\vec{p}}_h(t_n)$ par $\vec{p}_{h0,\Omega}^{\,n}$. Pour cela nous adaptons la technique exposée dans [7] p.13, relative à la formulation classique de l'équation de la chaleur à la méthode mixte duale pour l'équation de la chaleur.

Proposition 1.5.9

$$\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n}, \bar{\partial}\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\right). \tag{1.74}$$

Preuve:

On sait que

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - 2\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n}, \bar{\partial}\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\right) &= \frac{\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\|_{0,\Omega}^2}{\Delta t} - 2\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n}, \frac{\vec{\varepsilon}_h^{\,n}-\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}}{\Delta t}\right)\\ &= -\frac{\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2}{\Delta t} - \frac{\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\|_{0,\Omega}^2}{\Delta t} + 2\frac{\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n}, \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right)}{\Delta t}\\ &= \frac{1}{\Delta t}\left(2\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n}, \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right) - \|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\|_{0,\Omega}^2\right)\\ &= -\frac{1}{\Delta t}\left(\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\|_{0,\Omega}^2 - 2\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n}, \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right)\right). \end{aligned} \tag{1.75}$$

Mais

$$2\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n},\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right) \leq 2\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}\,\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\|_{0,\Omega} \leq \|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2_{0,\Omega} + \|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\|^2_{0,\Omega}.$$

Ce qui implique :

$$\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2_{0,\Omega} + \|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\|^2_{0,\Omega} - 2\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n},\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right) \geq 0\ . \tag{1.76}$$

De (1.75) et (1.76) suit :

$$\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2_{0,\Omega} \leq 2\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n},\bar{\partial}\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\right)\ .$$

■

Proposition 1.5.10

$$\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2_{0,\Omega} \leq \|\omega^n\|^2_{0,\Omega}. \tag{1.77}$$

Preuve:

Par la première équation du système aux erreurs (1.62), il suit :

$$\int_\Omega \bar{\partial}\vec{\varepsilon}_h^{\,n}.\vec{q}_h\ dx + \int_\Omega \bar{\partial}\theta_h^n\ \operatorname{div}\vec{q}_h\ dx = 0,\ \ \forall \vec{q}_h \in X_h\ .$$

Prenons $\vec{q}_h = \vec{\varepsilon}_h^{\,n}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \bar{\partial}\vec{\varepsilon}_h^{\,n}.\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\ dx &= -\int_\Omega \left(\operatorname{div}\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\right)\ \bar{\partial}\theta_h^n\ dx \\
&= \int_\Omega (-\omega^n -\ \bar{\partial}\theta_h^n)\ \bar{\partial}\theta_h^n\ dx \qquad \text{(d'après } (1.62)_{(ii)} \text{ et } (1.67)) \\
&= -\int_\Omega \omega^n \bar{\partial}\theta_h^n\ dx - \|\bar{\partial}\theta_h^n\|^2_{0,\Omega} \\
&\leq \|\omega^n\|_{0,\Omega}\ \|\bar{\partial}\theta_h^n\|_{0,\Omega} - \|\bar{\partial}\theta_h^n\|^2_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{2}\|\omega^n\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\|\bar{\partial}\theta_h^n\|^2_{0,\Omega} - \|\bar{\partial}\theta_h^n\|^2_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{2}\|\omega^n\|^2_{0,\Omega} - \frac{1}{2}\|\bar{\partial}\theta_h^n\|^2_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

En utilisant (1.74) il s'en suit :

$$\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 - \|\bar{\partial}\theta_h^n\|_{0,\Omega}^2 \,.$$

À fortiori

$$\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\omega^n\|_{0,\Omega}^2.$$

■

Pour pouvoir démarrer les itérations utilisant l'inégalité $\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2 \leq \|\omega^n\|^2$ que nous venons de démontrer, il nous faut majorer $\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\|$ c'est le but de la proposition suivante.

Proposition 1.5.11 *Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega} \leq c\; h\, \|u_t\|_{L^2(0,\Delta t;H^{2,\alpha}(\Omega))} + \Delta t\, \|u_{tt}\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega))} \;. \tag{1.78}$$

Preuve:

Puisque $u_h^0 = \tilde{u}_h(0) \Longleftrightarrow \theta_h^0 = 0$. Grâce à ce choix de u_h^0, on a

$$\bar{\partial}\theta_h^1 = \frac{\theta_h^1 - \theta_h^0}{\Delta t} = \frac{\theta_h^1}{\Delta t}.$$

Appliquant le système d'équations aux erreurs avec $n = 1$ nous donne :

$$\left\{\begin{array}{lll} \int_\Omega \vec{\varepsilon}_h^{\,1}.\vec{q}_h \;+ \int_\Omega\; \theta_h^1\;\operatorname{div}\vec{q}_h & = 0, & \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h\;\operatorname{div}\vec{\varepsilon}_h^{\,1} \;- \int_\Omega(\omega^1 + \overline{\partial}\theta_h^1)\; v_h & = 0, & \forall v_h \in M_h. \end{array}\right.$$

Prenant $\vec{q}_h = \vec{\varepsilon}_h^{\,1}$ et $v_h = \theta_h^1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega}^2 &= \int_\Omega \vec{\varepsilon}_h^{\,1}\vec{\varepsilon}_h^{\,1} \\
&= -\int_\Omega \theta_h^1 \;\operatorname{div}\vec{\varepsilon}_h^{\,1} \\
&= -\int_\Omega (\omega^1 + \overline{\partial}\theta_h^1)\;\theta_h^1 \\
&= -\int_\Omega \omega^1\;\theta_h^1 - \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \left|\theta_h^1\right|^2 \\
&\leq -\int_\Omega \omega^1\;\theta_h^1 \leq \left|\int_\Omega \omega^1\;\theta_h^1\right| \leq \left\|\omega^1\right\|_{0,\Omega} \left\|\;\theta_h^1\right\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \left\|\omega^1\right\|_{0,\Omega} \left\|\;\theta_h^1\right\|_{0,\Omega} \tag{1.79}$$

Mais si nous appliquons l'estimée (1.66) avec $n = 1$, nous obtenons :

$$\left\|\;\theta_h^1\right\|_{0,\Omega} \equiv \left\|u_h^1 - \tilde{u}_h(t_1)\right\|_{0,\Omega} \leq \left\|\theta_h^0\right\|_{0,\Omega} + \Delta t\left\|\bar{\partial}\tilde{u}_h(t_1) - u_t(t_1)\right\|_{0,\Omega},$$

avec $\theta_h^0 = 0$ et $\bar{\partial}\tilde{u}_h(t_1) - u_t(t_1) = \omega^1$.
Donc

$$\left\|\;\theta_h^1\right\|_{0,\Omega} \leq \Delta t\left\|\omega^1\right\|_{0,\Omega}\;. \tag{1.80}$$

Mais (1.79) et (1.80) impliquent

$$\left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \Delta t\left\|\omega^1\right\|_{0,\Omega}^2\;.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega} &\leq \sqrt{\Delta t}\left\|\omega^1\right\|_{0,\Omega} = \sqrt{\Delta t}\left\|\left(\bar{\partial}u(t_1)\right)_h^{\tilde{}} - u_t(t_1)\right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \sqrt{\Delta t}\left\|\left(\bar{\partial}u(t_1)\right)_h^{\tilde{}} - \bar{\partial}u(t_1)\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\Delta t}\left\|\bar{\partial}u(t_1) - u_t(t_1)\right\|_{0,\Omega}.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Et puisque :

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\bar{\partial} u(t_1)\right)^{\tilde{}}_h - \bar{\partial} u(t_1) \right\|_{0,\Omega} &= \left\| (R_h - I)\, \bar{\partial} u(t_1) \right\|_{0,\Omega} \\
&= \left\| (R_h - I)\, \frac{u(t_1) - u_0}{\Delta t} \right\|_{0,\Omega} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left\| (R_h - I) \int_0^{t_1 = \Delta t} u_t(s)\, ds \right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left\| (R_h - I)\, u_t(s) \right\|_{0,\Omega} ds \\
&\leq \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} ch \left\| u_t(s) \right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} ds = \frac{ch}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \left\| u_t(s) \right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} ds
\end{aligned}$$

par (40) p.623 de [8]

$$\leq \frac{ch}{\Delta t} \sqrt{\Delta t} \left(\int_0^{\Delta t} \left\| u_t(s) \right\|^2_{H^{2,\alpha}(\Omega)} ds \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ch}{\sqrt{\Delta t}} \left\| u_t(\cdot) \right\|_{L^2(0,\Delta t; H^{2,\alpha}(\Omega))}.$$

D'où

$$\sqrt{\Delta t} \left\| \left(\bar{\partial} u(t_1)\right)^{\tilde{}}_h - \bar{\partial} u(t_1) \right\|_{0,\Omega} \leq c\, h \left\| u_t(\cdot) \right\|_{L^2(0,\Delta t; H^{2,\alpha}(\Omega))}. \tag{1.82}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\left\| \bar{\partial} u(t_1) - u_t(t_1) \right\|_{0,\Omega} &= \left\| \frac{u(t_1) - u(t_0)}{\Delta t} - u_t(t_1) \right\|_{0,\Omega} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left\| u(t_1) - u(t_0) - \Delta t\, u_t(t_1) \right\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Mais par la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned}
u(t_0) &= u(t_1) - \Delta t u_t(t_1) + \int_{t_1 = \Delta t}^{t_0 = 0} u_{tt}(s)(t_0 - s) ds \\
&= u(t_1) - \Delta t u_t(t_1) + \int_0^{t_1} u_{tt}(s)\, s\, ds
\end{aligned}$$

$$u(t_1) - u(t_0) - \Delta t u_t(t_1) = -\int_0^{t_1} u_{tt}(s)\, s\, ds.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\|\bar{\partial} u(t_1) - u_t(t_1)\right\|_{0,\Omega} &\leq \frac{1}{\Delta t}\int_0^{t_1} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, s\, ds \\
&\leq \frac{1}{\Delta t}\left(\int_0^{t_1} \|u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_1} s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\Delta t^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|u_{tt}(\cdot)\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega))} \\
&\leq \sqrt{\Delta t}\, \|u_{tt}(s)\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega))}\,.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{\Delta t}\left\|\bar{\partial} u(t_1) - u_t(t_1)\right\|_{0,\Omega} \leq \Delta t\, \|u_{tt}(s)\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega))}\,. \tag{1.83}$$

De (1.81),(1.82) et (1.83) suit :

$$\left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega} \leq c\, h\, \|u_t\|_{L^2(0,\Delta t;H^{2,\alpha}(\Omega))} + \Delta t\, \|u_{tt}\|_{L^2(0,\Delta t;L^2(\Omega))}.$$

■

Nous pouvons maintenant démontrer l'estimée de $\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}$.

Théorème 1.5.12 *Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega} \leq c\left(h\, \|u_t\|_{L^2(0,t_n;H^{2,\alpha}(\Omega))} + \Delta t\, \|u_{tt}\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega))}\right) \tag{1.84}$$

Preuve:

Appliquons récursivement l'inégalité $\bar{\partial}\, \|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\omega^n\|_{0,\Omega}^2$. On a donc :

$$\begin{cases}
\|\vec{\varepsilon}_h^{\,2}\|^2 - \|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\|^2 \leq \Delta t\, \|\omega^2\|^2 \\
\|\vec{\varepsilon}_h^{\,3}\|^2 - \|\vec{\varepsilon}_h^{\,2}\|^2 \leq \Delta t\, \|\omega^3\|^2 \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad \vdots \\
\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2 - \left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right\|^2 \leq \Delta t\, \|\omega^n\|^2\,.
\end{cases}$$

Sommant ces inégalités membre à membre, nous obtenons :

$$\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \Delta t \left(\left\|\omega^2\right\|_{0,\Omega}^2 + \cdots + \|\omega^n\|_{0,\Omega}^2 \right).$$

Donc

$$\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 \leq \left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega^j\right\|_{0,\Omega}^2. \tag{1.85}$$

En utilisant le fait que $\omega^j = \omega_1^j + \omega_2^j$ où $\omega_1^j et\ \omega_2^j$ ont été définis en (1.70), on a

$$\Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega^j\right\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega_1^j\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega_2^j\right\|_{0,\Omega}^2 \ .$$

Comme

$$\begin{aligned} \omega_1^j &= (R_h - I)\ \bar{\partial} u(t_j) = \frac{1}{\Delta t}(R_h - I) \int_{t_{j-1}}^{t_j} u_t(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (R_h - I)\ u_t(s)\, ds, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left\|\omega_1^j\right\|_{0,\Omega} &\leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|(R_h - I)\ u_t(s)\|_{0,\Omega}\ ds \\ &\leq \frac{h}{\Delta t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\, u_t(s)\,\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\ ds. \end{aligned}$$

Ceci entraîne

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega_1^j\right\|_{0,\Omega}^2 &\leq \Delta t \frac{h^2}{\Delta t^2} \sum_{j=2}^{j=n} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\, u_t(s)\,\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\ ds \right)^2 \\ &\leq \Delta t \frac{h^2}{\Delta t} \sum_{j=2}^{j=n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\, u_t(s)\,\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2\ ds \\ &= h^2 \int_{t_1}^{t_n} \|\, u_t(s)\,\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2\ ds\ . \end{aligned}$$

Pour les ω_2^j on a

$$\begin{aligned}\Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega_2^j\right\|_{0,\Omega}^2 &= \Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\bar{\partial} u(t_j) - u_t(t_j)\right\|_{0,\Omega}^2 \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=2}^{j=n} \left\|u(t_j) - u(t_{j-1}) - \Delta t u_t(t_j)\right\|_{0,\Omega}^2 .\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor avec reste intégral, on obtient :

$$u(t_{j-1}) = u(t_j) + u_t(t_j)(t_{j-1} - t_j) + \int_{t_j}^{t_{j-1}} u_{tt}(s)(t_{j-1} - s)\, ds.$$

D'où

$$\begin{aligned}\left\|u(t_j) - u(t_{j-1}) - \Delta t u_t(t_j)\right\|_{0,\Omega}^2 &= \left\|\int_{t_j}^{t_{j-1}} u_{tt}(s)(t_{j-1} - s)\, ds\right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\|u_{tt}(s)\right\|_{0,\Omega} \left|(t_{j-1} - s)\right| ds\right)^2 \\ &\leq \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\|u_{tt}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds\right) \frac{\Delta t^3}{3}.\end{aligned}$$

Alors

$$\Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega_2^j\right\|^2 \leq \frac{\Delta t^2}{3} \int_{t_1}^{t_n} \left\|u_{tt}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega^j\right\|_{0,\Omega}^2 &\leq 2\Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega_1^j\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega_2^j\right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq 2h^2 \int_{t_1}^{t_n} \left\| u_t(s) \right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2 ds + \Delta t^2 \left(\int_{t_1}^{t_n} \left\|u_{tt}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds\right).\end{aligned}$$

De (1.85) suit alors

$$\begin{aligned}\left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\right\|_{0,\Omega}^2 &\leq \left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,1}\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \sum_{j=2}^{j=n} \left\|\omega^j\right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq ch^2 \int_{t_0=0}^{t_n} \left\| u_t(s) \right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2 ds + 2\Delta t^2 \int_{t_0=0}^{t_n} \left\|u_{tt}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds,\end{aligned}$$

par la proposition précédente.
Donc on a bien

$$\|\vec{\varepsilon}_h^n\|_{0,\Omega} \le c\left(h\,\|u_t\|_{L^2(0,t_n;H^{2,\alpha}(\Omega))} + \Delta t\,\|u_{tt}\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega))}\right) .$$

■

Et pour terminer on sait déjà par la proposition 1.4.6 que

$$\left\|\vec{p}(t) - \vec{\tilde{p}}_h(t)\right\|_{0,\Omega} \le c\ h\ |u(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\ , \forall' t \in I.$$

En vertu de l'inégalité 1.84 il suffit donc d'appliquer l'inégalité triangulaire pour majorer $\|\vec{p}(t_n) - \vec{p}_h^n\|_{0,\Omega}$, $\forall n \ge 1$. En conclusion, nous avons établi le théorème :

Théorème 1.5.13 *Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* (1.4.6)*. Pour $\alpha \in \left]1 - \frac{\pi}{w}, 1\right[$, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h et de Δt telle que pour tout $n \ge 1$:*

$$\|\vec{p}(t_n) - \vec{p}_h^n\|_{0,\Omega} \le c\ \left(h\ \left(|u(t_n)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \|u_t\|_{L^2(0,t_n;H^{2,\alpha}(\Omega))}\right) + \Delta t\,\|u_{tt}\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega))}\ \right). \tag{1.86}$$

Toujours dans notre étude du problème complètement discrétisé de l'équation de la chaleur, nous allons développer une autre méthode de schéma implicite. Il s'agit du schéma de Crank-Nicolson, adapté à la méthode mixte.

1.5.4 Schéma de Crank-Nicolson

Avant de donner la formulation mixte complètement discrétisée par le schéma de Crank-Nicolson, nous allons tout d'abord définir de nouvelles variables. On pose :

$$t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{t_n + t_{n-1}}{2},\ \ \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} = \frac{\vec{p}_h^n + \vec{p}_h^{n-1}}{2},\ \text{ et }\ u_h^{n-\frac{1}{2}} = \frac{u_h^n + u_h^{n-1}}{2}. \tag{1.87}$$

Considérons alors le problème suivant :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\int_\Omega \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}}.\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega u_h^{n-\frac{1}{2}} \; \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \; \forall n \geq 1 \\
\\
\int_\Omega v_h \; \operatorname{div} \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} dx = - \int_\Omega (f(t_{n-\frac{1}{2}}) - \overline{\partial} u_h^n) \; v_h \; dx, \;\; \forall v_h \in M_h, \; \forall n \geq 1 \\
\\
u_h^0 \; (c.i.), \text{ donnée.}
\end{array}
\right.
\tag{1.88}
$$

Remarquons que dans (1.88) apparaît $\vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}}, u_h^{n-\frac{1}{2}}, u_h^n$ et u_h^{n-1}. On peux donc choisir comme inconnues les $\vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}}$, u_h^n pour $n \geq 1$. Une autre alternative est de considérer que les inconnues sont les $\vec{p}_h^{\,n}$ pour $n \geq 0$ et u_h^n pour $n \geq 1$. u_h^0 étant la condition initiale est connu et $\vec{p}_h^{\,0}$ est défini exceptionnellement par l'équation

$$
\int_\Omega \vec{p}_h^{\,0}.\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega u_h^0 \; \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h. \tag{1.89}
$$

Ce dernier choix des inconnues présente les avantages suivants :

- inconnues traditionnelles.
- symétrie en "$\vec{p}$" et en "u" du problème.

Proposition 1.5.14 *Le problème* (1.88) *admet une et une seule solution* $(\vec{p}_h^{\,n}, u_h^n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_h \times M_h$.

Preuve: Commençons par démontrer l'unicité. Pour cela, montrons que si $(\vec{p}_h^{\,n}, u_h^n) \in X_h \times M_h$ vérifie

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\int_\Omega \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}}.\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega u_h^{n-\frac{1}{2}} \; \operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \; \forall n \geq 1 \\
\\
\int_\Omega v_h \; \operatorname{div} \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} dx = \int_\Omega \overline{\partial} u_h^n \, v_h \; dx, \;\; \forall v_h \in M_h, \; \forall n \geq 1 \\
\\
u_h^0 = 0,
\end{array}
\right.
\tag{1.90}
$$

alors $(\vec{p}_h^{\,n}, u_h^n) = 0$.
En prenant $\vec{q}_h = \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}}$ dans la première équation de (1.90) et $v_h = u_h^{n-\frac{1}{2}}$ dans la deuxième équation de (1.90) , on obtient

$$
\int_\Omega \left| \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} \right|^2 \; dx + \int_\Omega \overline{\partial} u_h^n \, u_h^{n-\frac{1}{2}} \; dx = 0. \tag{1.91}
$$

D'autre part, on a

$$\overline{\partial}u_h^n\, u_h^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_h^n - u_h^{n-1}\right)\left(u_h^n + u_h^{n-1}\right) = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_h^n\right)^2, \tag{1.92}$$

à condition d'avoir déjà démontré que $u_h^{n-1} = 0$. Prenons alors $n = 1$ dans (1.92) et puisque $u_h^0 = 0$ (condition initiale), par conséquent $u_h^1 = 0$, et ainsi pour $n = 2, 3, ...$ D'autre part, d'après (1.89) , $u_h^0 = 0$ implique $\vec{p}_h^{\,0} = 0$. Et comme on sait déjà que $\vec{p}_h^{\,\frac{1}{2}} = 0$, par (1.91) avec $n = 1$, il s'en suit que $\vec{p}_h^{\,1} = 0$. Donc $\vec{p}_h^{\,2} = 0$ par (1.91) avec $n = 2$ et ainsi de suite pour tout $n \geq 1$.

Pour l'existence, on sait par le théorème de représentation de Riez que $\vec{p}_h^{\,0}$ existe (Cf. remarque (1.5.2)).On considère ensuite le système (1.88) avec $n = 1$, avec comme but de construire $\vec{p}_h^{\,1}$ et u_h^1 sachant que u_h^0 et $\vec{p}_h^{\,0}$ sont connus. On a

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega \vec{p}_h^{\,1}.\vec{q}_h\, dx + \int_\Omega u_h^1\, \operatorname{div}\vec{q}_h\, dx = \int_\Omega \vec{p}_h^{\,0}.\vec{q}_h\, dx + \int_\Omega u_h^0\, \operatorname{div}\vec{q}_h\, dx, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h\, \operatorname{div}\vec{p}_h^{\,1} dx - \frac{2}{\Delta t}\int_\Omega u_h^1\, v_h\, dx = -\int_\Omega v_h\, \operatorname{div}\vec{p}_h^{\,0} dx - \frac{2}{\Delta t}\int_\Omega u_h^0\, v_h\, dx - 2\int_\Omega f\left(t_{1/2}\right) v_h\, dx, \\ \hfill \forall v_h \in M_h. \end{array}\right. \tag{1.93}$$

Considérons donc l'application Φ_h de $X_h \times M_h$ dans son dual $X_h' \times M_h'$, définie par :

$$\begin{array}{rcl} \left(\vec{p}_h^{\,1}, u_h^1\right) & \longmapsto & \left(\vec{q}_h \longmapsto \displaystyle\int_\Omega \vec{p}_h^{\,1}.\vec{q}_h\, dx + \int_\Omega u_h^1\, \operatorname{div}\vec{q}_h\, dx,\right. \\ & & \left. v_h \longmapsto \displaystyle\int_\Omega v_h\, \operatorname{div}\vec{p}_h^{\,1} dx - \frac{2}{\Delta t}\int_\Omega u_h^1\, v_h\, dx\right). \end{array}$$

Donc tout revient à démontrer que c'est un isomorphisme. Puisque Φ_h est linéaire de $X_h \times M_h$ dans son dual, et que les deux espaces $X_h \times M_h$ et $X_h' \times M_h'$ ont la même dimension, il suffit de montrer que Φ_h est injective pour démontrer sa bijectivité. Soit $(\vec{p}_h^{\,1}, u_h^1)$ tel que :

$$\int_\Omega \vec{p}_h^{\,1}.\vec{q}_h\, dx + \int_\Omega u_h^1\, \operatorname{div}\vec{q}_h\, dx = 0,\ \forall \vec{q}_h \in X_h \tag{1.94}$$

$$\int_\Omega v_h\, \operatorname{div}\vec{p}_h^{\,1} dx - \frac{2}{\Delta t}\int_\Omega u_h^1\, v_h\, dx = 0,\ \forall v_h \in M_h. \tag{1.95}$$

Dans (1.94) , prenons $\vec{q}_h = \vec{p}_h^{\,1}$ et $v_h = u_h^1$ dans (1.95) , il s'en suit que :

$$\int_\Omega \left|\vec{p}_h^{\,1}\right|^2\, dx + \frac{2}{\Delta t}\int_\Omega \left|u_h^1\right|^2\, dx = 0. \tag{1.96}$$

On obtient $\vec{p}_h^{\,1} = 0$ et $u_h^1 = 0$. D'où l'injectivité et donc la bijectivité de Φ_h.
Il suffit alors, d'appliquer Φ_h^{-1} au couple de formes linéaires définies par les deux membres de droite des deux équations du système (1.93) .
De manière similaire on construit ensuite $(\vec{p}_h^{\,2}, u_h^2)$ en considérant le système (1.88) , avec $n = 2$ et ainsi de suite. ■

1.5.5 Stabilité du schéma de Crank-Nicolson

Maintenant on va démontrer le résultat de stabilité du Schéma Crank-Nicolson.

Théorème 1.5.15 *Supposons $\Delta t \leq \frac{1}{2}$, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :*

$$\left\| u_h^N \right\|_{0,\Omega} \lesssim \left\| u_h^0 \right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\Delta t} \left\| \vec{p}_h^{\,0} \right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \Delta t \left\| f(t_{n-\frac{1}{2}}) \right\|_{0,\Omega}^2}$$

Preuve: Considérons alors le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\Omega \vec{p}_h^{\,n} . \vec{q}_h \, dx + \int_\Omega u_h^n \, \operatorname{div} \vec{q}_h \, dx = 0, \ \ \forall \vec{q}_h \in X_h, \ \forall n \geq 1 \\ \\ \int_\Omega v_h \, \operatorname{div} \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} dx = - \int_\Omega (f(t_{n-\frac{1}{2}}) - \overline{\partial} u_h^n) \, v_h \, dx, \ \ \forall v_h \in M_h, \ \forall n \geq 1 \end{array} \right. \tag{1.97}$$

Prenons $v_h = u_h^n$ dans la deuxième équation. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_h^n \, \operatorname{div} \left(\frac{\vec{p}_h^{\,n} + \vec{p}_h^{\,n-1}}{2} \right) dx &= - \int_\Omega (f(t_{n-\frac{1}{2}}) - \overline{\partial} u_h^n) \, u_h^n \, dx \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_\Omega \left(u_h^n - u_h^{n-1} \right) u_h^n \, dx - \int_\Omega f(t_{n-\frac{1}{2}}) \, u_h^n \, dx . \end{aligned} \tag{1.98}$$

Par la première équation de (1.97) , on a :

$$\int_\Omega u_h^n \, \operatorname{div} \vec{p}_h^{\,n} \, dx = - \int_\Omega \left| \vec{p}_h^{\,n} \right|^2 \, dx, \tag{1.99}$$

et :

$$\int_\Omega u_h^n \, \operatorname{div} \vec{p}_h^{\,n-1} \, dx = - \int_\Omega \vec{p}^{\,n} \cdot \vec{p}_h^{\,n-1} \, dx. \tag{1.100}$$

De (1.98), (1.99) et (1.100) , nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\vec{p}_h^{\,n}|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \vec{p}^{\,n}\cdot\vec{p}_h^{\,n-1}dx + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega |u_h^n|^2\,dx - \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega u_h^{n-1}u_h^n dx = \int_\Omega f(t_{n-\frac{1}{2}})u_h^n dx.$$

Donc

$$\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega |u_h^n|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\vec{p}_h^{\,n}|^2\,dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega \vec{p}_h^{\,n}\cdot\vec{p}_h^{\,n-1}dx + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega u_h^{n-1}u_h^n dx + \int_\Omega f(t_{n-\frac{1}{2}})u_h^n dx,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\Delta t}\int_\Omega |u_h^n|^2\,dx + \frac{1}{4\Delta t}\int_\Omega |\vec{p}_h^{\,n}|^2\,dx \quad &\leq \quad \frac{1}{4}\int_\Omega \left|\vec{p}_h^{\,n-1}\right|^2 dx + \frac{1}{2\Delta t}\int_\Omega \left|u_h^{n-1}\right|^2 dx \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_\Omega \left|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_h^n|^2\,dx.\end{aligned}$$

On obtient :

$$\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\vec{p}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{\Delta t}{2}\left\|\vec{p}_h^{\,n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|u_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t\,\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t\left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2.$$

Autrement, on a :

$$\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \left\|u_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left(\|\vec{p}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\vec{p}_h^{\,n-1}\right\|_{0,\Omega}^2\right) \leq \Delta t\,\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t\left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2.$$

Et alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \left\|u_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2\right) + \frac{\Delta t}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\|\vec{p}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\vec{p}_h^{\,n-1}\right\|_{0,\Omega}^2\right) \quad &\leq \quad \Delta t\sum_{n=1}^{N}\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 \\ &\quad +\Delta t\sum_{n=1}^{N}\left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2.\end{aligned}$$

Donc :

$$\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left\|\vec{p}_h^{\,N}\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left\|\vec{p}_h^{\,0}\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t\sum_{n=1}^{N}\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t\sum_{n=1}^{N}\left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2.$$

En vue d'appliquer l'inégalité de Gronwall discrète, faisons passer le terme $\Delta t\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2$ du membre de droite au membre de gauche. On obtient :

$$(1-\Delta t)\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left\|\vec{p}_h^{\,N}\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\Delta t}{2}\left\|\vec{p}_h^{\,0}\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t\sum_{n=1}^{N}\|u_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t\sum_{n=1}^{N}\left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2.$$

Supposons $\Delta t \leq \frac{1}{2}$, on a :

$$\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\|u_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2.$$

Par l'inégalité de Gronwall discrète ([19] p.VI-9), avec :

$$\begin{cases} \varphi_n = \left\|u_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \\ m_0 = 2 \\ m_1 = \cdots = m_{N-1} = 2\Delta t \\ C = 2\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \\ \leq \; & \left(2\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2\right) \exp\left(\sum_{\Delta t=0}^{N-1} m_{\Delta t}\right) \\ = \; & \left(2\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2\right) \exp\left(2 + 2\left(N-1\right)\Delta t\right). \end{aligned}$$

En particulier :

$$\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \exp(2)\left(2\left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2\right) \left(\exp(T)\right)^2.$$

Et alors :

$$\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \lesssim \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2,$$

Donc on a

$$\left\|u_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \lesssim \left\|u_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \left\|f(t_{n-\frac{1}{2}})\right\|_{0,\Omega}^2.$$

∎

Proposition 1.5.16 *Soit le schéma implicite* (1.37), *nous avons alors :*

$$\left\|\vec{p}_h^N\right\|_{0,\Omega} \leq \left\|\vec{p}_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{n=1,\ldots,N} \left\|f(t_n)\right\|_{0,\Omega}. \tag{1.101}$$

Preuve: Appliquant l'opérateur de différence rétrograde $\overline{\partial}$ sur $(1.97)_{(i)}$, on trouve :

$$\int_{\Omega} \overline{\partial}\vec{p}_h^{\,n}.\vec{q}_h \; dx + \int_{\Omega} \overline{\partial}u_h^n \; \mathrm{div}\, \vec{q}_h \; dx = 0, \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \; \forall n \geq 1. \tag{1.102}$$

Prenons $\vec{q}_h = \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}}$ dans (1.102), et $v_h = \overline{\partial}u_h^n$ dans l'équation $(1.97)_{(ii)}$, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \overline{\partial}\vec{p}_h^{\,n} . \, \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} dx + \int_{\Omega} \overline{\partial}u_h^n \, \mathrm{div} \; \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} \; dx = 0, \\ \\ \int_{\Omega} \overline{\partial}u_h^n \, \mathrm{div}\, \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} dx + \int_{\Omega} f(t_n) \, \overline{\partial}u_h^n \, dx - \int_{\Omega} \left|\overline{\partial}u_h^n\right|^2 \; dx = 0. \end{array} \right. \tag{1.103}$$

Soustrayant $(1.103)_{(ii)}$de $(1.103)_{(i)}$, il s'en suit que :

$$\int_{\Omega} \overline{\partial}\vec{p}_h^{\,n} . \, \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}} dx + \int_{\Omega} \left|\overline{\partial}u_h^n\right|^2 \; = \int_{\Omega} f(t_n) \, \overline{\partial}u_h^n \, dx.$$

Nous avons donc :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\vec{p}_h^{\,n} - \vec{p}_h^{\,n-1}}{\Delta t} \right) . \left(\frac{\vec{p}_h^{\,n} + \vec{p}_h^{\,n-1}}{2} \right) dx + \int_{\Omega} \left|\overline{\partial}u_h^n\right|^2 \; = \int_{\Omega} f(t_n) \, \overline{\partial}u_h^n \, dx,$$

et alors :

$$\| \vec{p}_h^{\,n} \|_{0,\Omega}^2 - \left\| \vec{p}_h^{\,n-1} \right\|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \left\| \overline{\partial}u_h^n \right\|^2 = 2\Delta t \int_{\Omega} f(t_n) \, \overline{\partial}u_h^n \, dx. \tag{1.104}$$

Sommant (1.104) membre à membre pour $n = 1, 2, 3, ..., N$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \| \vec{p}_h^{\,N} \|_{0,\Omega}^2 - \left\| \vec{p}_h^{\,0} \right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} 2\Delta t \left\| \overline{\partial}u_h^n \right\|^2 \;\; &= \;\; \sum_{n=1}^{N} 2\Delta t \int_{\Omega} f(t_n) \, \overline{\partial}u_h^n \, dx \\ &\leq \;\; 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \| f(t_n) \|_{0,\Omega} \left\| \overline{\partial}u_h^n \right\|_{0,\Omega} \\ &\leq \;\; \frac{\Delta t}{2} \sum_{n=1}^{N} \| f(t_n) \|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\| \overline{\partial}u_h^n \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \;\; \frac{T}{2} \max_{n=1,\ldots,N} \| f(t_n) \|_{0,\Omega}^2 + 2\Delta t \sum_{n=1}^{N} \left\| \overline{\partial}u_h^n \right\|_{0,\Omega}^2 . \end{aligned}$$

D'où :

$$\| \vec{p}_h^{\,N} \|_{0,\Omega} \leq \left\| \vec{p}_h^{\,0} \right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\frac{T}{2}} \max_{n=1,\ldots,N} \| f(t_n) \|_{0,\Omega} .$$

■

1.5.6 Estimations d'erreurs

Pour démontrer les résultats d'estimées d'erreurs, on utilisera une démarche analogue à celle employée pour le schéma précédent. Le problème elliptique (1.61) étant vrai pour n et $n-1$, en faisant la somme nous obtenons :

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\tilde{\vec{p}}_h(t_n)+\tilde{\vec{p}}_h(t_{n-1})}{2}.\vec{q}_h\,dx + \int_\Omega \frac{\tilde{u}_h(t_n)+\tilde{u}_h(t_{n-1})}{2}\operatorname{div}\vec{q}_h\,dx = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h \ \operatorname{div}\frac{\tilde{\vec{p}}_h(t_n)+\tilde{\vec{p}}_h(t_{n-1})}{2}dx = -\int_\Omega (\frac{f(t_n)+f(t_{n-1})}{2} - \frac{u_t(t_n)+u_t(t_{n-1})}{2})\, v_h\,dx, \quad \forall v_h \in M_h. \end{cases} \tag{1.105}$$

Réécrivant le schéma de Crank-Nicolson :

$$\begin{cases} \int_\Omega \vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}}.\vec{q}_h\,dx + \int_\Omega u_h^{n-\frac{1}{2}}\ \operatorname{div}\vec{q}_h\,dx = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h,\ \forall n \geq 1 \\ \\ \int_\Omega v_h \ \operatorname{div}\vec{p}_h^{\,n-\frac{1}{2}}dx = -\int_\Omega (f(t_{n-\frac{1}{2}}) - \overline{\partial} u_h^n)\, v_h\,dx, \quad \forall v_h \in M_h,\ \forall n \geq 1 \\ \\ u_h^0\ (c.i.),\ \text{donnée}. \end{cases} \tag{1.106}$$

Notons les écarts $\theta_h^n := u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)$ et $\vec{\varepsilon}_h^{\,n} := \vec{p}_h^{\,n} - \tilde{\vec{p}}_h(t_n)$. Par soustraction on obtient le système d'équations aux erreurs :

$$\begin{cases} \int_\Omega \frac{\vec{\varepsilon}_h^{\,n}+\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}}{2}.\vec{q}_h\,dx + \int_\Omega \frac{\theta_h^n+\theta_h^{n-1}}{2}\ \operatorname{div}\vec{q}_h\,dx = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h, \\ \\ \int_\Omega v_h \ \operatorname{div}\frac{\vec{\varepsilon}_h^{\,n}+\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}}{2}\,dx = -\int_\Omega (f(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{f(t_n)+f(t_{n-1})}{2} - \left(\overline{\partial} u_h^n - \frac{u_t(t_n)+u_t(t_{n-1})}{2}\right))\, v_h\,dx, \\ \forall v_h \in M_h. \end{cases} \tag{1.107}$$

Proposition 1.5.17 *Supposons que* $f, \frac{df}{dt} \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, $\Delta g + f(0) \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ *et aussi* $\Delta\left(\Delta g + f(0)\right) + \frac{df}{dt}(0) \in \overset{\circ}{H}{}^1\left(\Omega\right)$. *Alors*

$$u_{ttt} \ \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Preuve: Soit $w \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$ la solution de l'équation de diffusion de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt}(t) = \Delta w(t) + \frac{d^2 f}{dt^2}(t),\ \forall' t \in [0,T] \\ w(0) = \Delta\left(\Delta g + f(0)\right) + \frac{df}{dt}(0). \end{cases}$$

Posons $v(t) = \int_0^t w(s)\,ds + \Delta g + f(0)$, $\frac{dv}{dt}(t) = w(t)$ et $v(0) = \Delta g + f(0) \in \mathring{H}^1(\Omega)$.
Intégrant l'équation $\frac{dw}{dt}(s) = \Delta w(s) + \frac{d^2 f}{dt}(s)$, $\forall' s \in [0,T]$ de 0 à t, nous obtenons :

$$w(t) - w(0) = \Delta\left(v(t) - \Delta g - f(0)\right) + \frac{df}{dt}(t) - \frac{df}{dt}(0)$$

i.e.

$$\frac{dv}{dt}(t) - \Delta\left(\Delta g + f(0)\right) - \frac{df}{dt}(0) = \Delta v(t) - \Delta\left(\Delta g + f(0)\right) + \frac{df}{dt}(t) - \frac{df}{dt}(0).$$

Simplifiant les 2 membres nous obtenons que v est la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}(t) = \Delta v(t) + \frac{d^2 f}{dt^2}(t) \\ v(0) = \Delta g + f(0) \in \mathring{H}^1(\Omega). \end{cases}$$

Mais nous avons vu dans la preuve de la démonstration de la proposition 1.4.5 que $v = \frac{du}{dt}$.
Donc $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = w \in H^2(0,T;L^2(\Omega))$. D'où

$$u_{ttt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

■

Maintenant on va démontrer le résultat de majoration de $\|u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)\|_{0,\Omega}$.

Théorème 1.5.18 *Sous les hypothèses de la proposition précédente il existe une constante $c > 0$ indépendante de h et de k telle que :*

$$\begin{aligned} \|u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)\|_{0,\Omega} \quad &\leq \quad ch\left(\|u_0\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\,ds\right) + \\ & \qquad 2\Delta t^2 \left(\int_0^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\,ds + \int_0^{t_n} \|f_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\,ds\right). \end{aligned} \tag{1.108}$$

Preuve: La première étape de cette démonstration est de majorer $\|\theta_h^n\|$ en fonction de $\left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}$ et de $\|\omega^n\|_{0,\Omega}$. Pour cela prenons $v_h = \theta_h^n + \theta_h^{n-1}$ dans la deuxième équation du système (1.107) et $\vec{q}_h = \vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}$dans la première, on a donc :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \frac{\left|\vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right|^2}{2}\,dx \qquad\qquad (1.109) \\ = \quad & \int_\Omega \left(f(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{f(t_n) + f(t_{n-1})}{2} - \left(\overline{\partial} u_h^n - \frac{u_t(t_n) + u_t(t_{n-1})}{2}\right)\right)\left(\theta_h^n + \theta_h^{n-1}\right)\,dx. \end{aligned}$$

Regardons de plus près le terme $\overline{\partial} u_h^n - \frac{u_t(t_n)+u_t(t_{n-1})}{2}$; on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} u_h^n - \frac{u_t(t_n)+u_t(t_{n-1})}{2} &= \overline{\partial}\theta_h^n + \tilde{u}(t_n) - \tilde{u}(t_{n-1}) - \frac{u_t(t_n)+u_t(t_{n-1})}{2} \\
&= \overline{\partial}\theta_h^n + (R_h - I)\,\overline{\partial} u(t_n) + \overline{\partial} u(t_n) - \frac{u_t(t_n)+u_t(t_{n-1})}{2}.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial} u_h^n - \frac{u_t(t_n)+u_t(t_{n-1})}{2} + \frac{f(t_n)+f(t_{n-1})}{2} - f(t_{n-\frac{1}{2}}) \\
= \; & \overline{\partial}\theta_h^n + (R_h - I)\,\overline{\partial} u(t_n) + \left(\overline{\partial} u(t_n) - u_t(t_{n-\frac{1}{2}})\right) + u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{u_t(t_n)+u_t(t_{n-1})}{2} \\
& + \frac{f(t_n)+f(t_{n-1})}{2} - f(t_{n-\frac{1}{2}}) \qquad (1.110) \\
= \; & \overline{\partial}\theta_h^n + (R_h - I)\,\overline{\partial} u(t_n) + \left(\overline{\partial} u(t_n) - u_t(t_{n-\frac{1}{2}})\right) + \Delta\left[u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\left(u(t_n) + u(t_{n-1})\right)\right].
\end{aligned}$$

puisque $\Delta u(t) + f(t) = u_t(t)$, pour tout $t > 0$.

Posons pour la suite $\widetilde{\omega}^n := \widetilde{\omega}_1^n + \widetilde{\omega}_2^n + \widetilde{\omega}_3^n$, avec :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_1^n &: = (R_h - I)\,\overline{\partial} u(t_n), \\
\widetilde{\omega}_2^n &: = \left(\overline{\partial} u(t_n) - u_t(t_{n-\frac{1}{2}})\right), \\
\widetilde{\omega}_3^n &: = \Delta\left[u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\left(u(t_n) + u(t_{n-1})\right)\right].
\end{aligned}$$

De (1.110) et (1.109), suit que

$$\int_\Omega \frac{\left|\vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right|^2}{2}\, dx = -\int_\Omega \left(\overline{\partial}\theta_h^n + \widetilde{\omega}^n\right)\,\left(\theta_h^n + \theta_h^{n-1}\right)\, dx. \qquad (1.111)$$

On obtient donc

$$\int_\Omega \overline{\partial}\theta_h^n \left(\theta_h^n + \theta_h^{n-1}\right)\, dx \le -\frac{1}{2}\left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right\|^2 + \left\|\widetilde{\omega}^n\right\|\left\|\theta_h^n + \theta_h^{n-1}\right\|.$$

Mais

$$\int_\Omega \overline{\partial}\theta_h^n \left(\theta_h^n + \theta_h^{n-1}\right)\, dx = \frac{\left\|\theta_h^n\right\|^2 - \left\|\theta_h^{n-1}\right\|^2}{\Delta t}. \qquad (1.112)$$

Alors :

$$\|\theta_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \Delta t \left(-\frac{1}{2} \left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + \|\widetilde{\omega}^n\|_{0,\Omega} \left\|\theta_h^n + \theta_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega} \right). \quad (1.113)$$

D'où à fortiori (1.114), en laissant tomber le premier terme du membre de gauche de l'inégalité (1.113), nous obtenons

$$\|\theta_h^n\|^2 - \left\|\theta_h^{n-1}\right\|^2 \leq \Delta t \, \|\widetilde{\omega}^n\|_{0,\Omega} \left(\|\theta_h^n\|_{0,\Omega} + \left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega} \right). \quad (1.114)$$

Donc :

$$\|\theta_h^n\|_{0,\Omega} \leq \left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega} + \Delta t \, \|\widetilde{\omega}^n\|_{0,\Omega} , \quad (1.115)$$

il suffit alors de majorer $\widetilde{\omega}^n$. Commençons par $\widetilde{\omega}_2^n$. Par définition on a :

$$\begin{aligned}
\Delta t \, \|\widetilde{\omega}_2^n\|_{0,\Omega} &= \Delta t \left\| \overline{\partial} u(t_n) - u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) \right\|_{0,\Omega} \\
&= \Delta t \left\| \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t} - u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) \right\|_{0,\Omega} \\
&= \left\| u(t_n) - u(t_{n-1}) - \Delta t \, u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) \right\|_{0,\Omega} .
\end{aligned}$$

Par la formule de Taylor on a :

$$u(t_n) = u(t_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{2} \, u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t^2}{8} \, u_{tt}(t_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n} (t_n - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds,$$

et à l'instant t_{n-1} :

$$u(t_{n-1}) = u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{2} \, u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t^2}{8} \, u_{tt}(t_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n-1}} (t_{n-1} - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds. \quad (1.116)$$

Considérons la différence de ces deux égalités. Nous obtenons :

$$u(t_n) - u(t_{n-1}) - \Delta t \, u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n} (t_n - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds - \frac{1}{2} \int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n-1}} (t_{n-1} - s)^2 u_{ttt}(s) \, ds.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\left\| u(t_n) - u(t_{n-1}) - \Delta t \; u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) \right\|_{0,\Omega} \\
\leq\;& \frac{1}{2}\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n} (t_n - s)^2 \, \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds + \frac{1}{2}\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n-1}} (t_{n-1} - s)^2 \, \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds \\
\leq\;& \frac{\Delta t^2}{8}\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds + \frac{\Delta t^2}{8}\int_{t-1}^{t_{n-\frac{1}{2}}} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds \\
=\;& \frac{\Delta t^2}{8}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds.
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que

$$\Delta t \; \|\widetilde{\omega}_2^n\|_{0,\Omega} \leq \frac{\Delta t^2}{8}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds. \tag{1.117}$$

Maintenant cherchons à majorer $\|\widetilde{\omega}_3^n\|_{0,\Omega}$. La formule de Taylor nous donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u(t_n) &= \frac{1}{2}u(t_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t}{4}\; u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n} (t_n - s) u_{tt}(s) ds, \\
\frac{1}{2}u(t_{n-1}) &= \frac{1}{2}u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{\Delta t}{4}\; u_t(t_{n-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n-1} (t_n - s) u_{tt}(s) ds.
\end{aligned}$$

En faisant la somme de ces deux égalités nous obtenons :

$$u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\left(u(t_n) + u(t_{n-1})\right) = -\frac{1}{2}\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n} (t_n - s) u_{tt}(s) ds - \frac{1}{2}\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_{n-1}} (t_{n-1} - s) u_{tt}(s) ds.$$

Appliquant alors l'opérateur laplacien Δ, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\left\| \Delta \left[u(t_{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}\left(u(t_n) + u(t_{n-1})\right)\right] \right\|_{0,\Omega} \\
\leq\;& \frac{1}{2}\int_{t_{n-\frac{1}{2}}}^{t_n} (t_n - s) \, \|\Delta u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds + \frac{1}{2}\int_{t_{n-1}}^{t_{n-\frac{1}{2}}} |t_{n-1} - s| \, \|\Delta u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds \\
\leq\;& \frac{\Delta t}{4}\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\Delta u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta t \, \|\widetilde{\omega}_3^n\|_{0,\Omega} \leq \frac{\Delta t^2}{4} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\Delta u_{tt}(s)\|_{0,\Omega} \, ds. \tag{1.118}$$

Reste à majorer $\|\widetilde{\omega}_1^n\|_{0,\Omega}$ où rappelons-le :

$$\widetilde{\omega}_1^n := (R_h - I) \, \overline{\partial} u(t_n) = (R_h - I) \, \frac{u(t_n) - u(t_{n-1})}{\Delta t},$$

Rappelons aussi que R_h désigne l'opérateur de projection elliptique défini par (1.18) suivi de l'opérateur de projection de $X_h \times M_h$ sur M_h. Et donc, par la proposition 1.4.9 il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que :

$$\begin{aligned}
\Delta t \, \|\widetilde{\omega}_1^n\|_{0,\Omega} &\leq ch \, \|u(t_n) - u(t_{n-1})\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \\
&= ch \left\| \int_{t_{n}-1}^{t_n} u_t(s) \, ds \right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\Delta t \, \|\widetilde{\omega}_1^n\|_{0,\Omega} \leq ch \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \, ds. \tag{1.119}$$

Reste à mettre les inégalités bout à bout : par l'inégalité (1.115) on sait que

$$\begin{aligned}
\|\theta_h^n\|_{0,\Omega} &\leq \left\|\theta_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega} + \Delta t \, \|\widetilde{\omega}^n\|_{0,\Omega} \\
&\leq \left\|\theta_h^{n-2}\right\|_{0,\Omega} + \Delta t \left(\left\|\widetilde{\omega}^{n-1}\right\|_{0,\Omega} + \|\widetilde{\omega}^n\|_{0,\Omega} \right) \\
&\leq \left\|\theta_h^{n-3}\right\|_{0,\Omega} + \Delta t \left(\left\|\widetilde{\omega}^{n-2}\right\|_{0,\Omega} + \left\|\widetilde{\omega}^{n-1}\right\|_{0,\Omega} + \|\widetilde{\omega}^n\|_{0,\Omega} \right) \\
&\ \ \vdots \\
&\ \ \vdots \\
&\leq \left\|\theta_h^0\right\|_{0,\Omega} + \Delta t \sum_{i=1}^{n} \left\|\widetilde{\omega}^i\right\|_{0,\Omega},
\end{aligned}$$

où, pour rappel, $\theta_h^0 = u_h^0 - \tilde{u}_h(0) = 0$. Par les inégalités (1.117) , (1.118) et (1.119) , on sait que :

$$\Delta t \, \|\widetilde{\omega}_2^n\|_{0,\Omega} \leq \frac{\Delta t^2}{8} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega} \, ds, \tag{1.120}$$

$$\Delta t\ \|\widetilde{\omega}_3^n\|_{0,\Omega} \leq \frac{\Delta t^2}{4} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\Delta u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds, \tag{1.121}$$

$$\Delta t\ \|\widetilde{\omega}_1^n\|_{0,\Omega} \leq ch \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\, ds. \tag{1.122}$$

D'où, rappelant que $\widetilde{\omega}^i = \widetilde{\omega}_1^i + \widetilde{\omega}_2^i + \widetilde{\omega}_3^i$, l'on obtient :

$$\begin{aligned} \|\theta_h^n\|_{0,\Omega} &= \|u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)\|_{0,\Omega} \\ &\leq ch \int_{t_0}^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\, ds + \\ &\quad \Delta t^2 \left(\int_{t_0}^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds + \int_{t_0}^{t_n} \|\Delta u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds \right) \end{aligned}$$

Et puisque $\Delta u_{tt}(s) = \frac{d^2}{dt^2}\Delta u(s) = u_{ttt}(s) - f_{tt}(s)$, dans l'inégalité ci-dessus, on peut remplacer $\Delta u_{tt}(s)$ par $u_{ttt}(s) - f_{tt}(s)$.

Donc finalement nous avons trouvé que :

$$\begin{aligned} \|u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)\|_{0,\Omega} \quad &\leq \quad ch \left(\int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\, ds \right) + \\ &\quad 2\Delta t^2 \left(\int_0^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds + \int_0^{t_n} \|f_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds \right). \end{aligned}$$

■

Nous en déduisons l'estimation de l'erreur $\|u(t_n) - u_h^n\|_{0,\Omega}$:

Théorème 1.5.19 *Sous les hypothèses de la proposition 1.5.17, soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6. *Pour $\alpha \in \left]1 - \frac{\pi}{w}, 1\right[$, $\exists\ c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u_h^n\|_{0,\Omega} \ &\leq c\, h \left(|u(t_n)|_{H^1(\Omega)} + |u(t_n)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\, ds \right) \\ &\quad + 2\Delta t^2 \left(\int_0^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds + \int_0^{t_n} \|f_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds \right). \end{aligned} \tag{1.123}$$

Preuve: Il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire :

$$\|u(t_n) - u_h^n\|_{0,\Omega} \leq \|u(t) - \tilde{u}_h(t_n)\|_{0,\Omega} + \|\tilde{u}_h(t_n) - u_h^n\|_{0,\Omega}\,.$$

Par l'inégalité (1.108) et l'inégalité (1.23) on obtient le résultat (1.123) . ■

Afin de démontrer l'estimée d'erreur dans le cas des $\vec{p}_h^{\,n}$, on a besoin du résultat, analogue à la majoration de la proposition (1.5.10) dans le cas du schéma implicite. Mais ici $\widetilde{\omega}^n := \widetilde{\omega}_1^n + \widetilde{\omega}_2^n + \widetilde{\omega}_3^n$.

Proposition 1.5.20 *Supposons $f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$ et $\Delta g + f(0) \in H_0^1(\Omega)$.*

$$\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2 \leq \|\widetilde{\omega}^n\|^2, \tag{1.124}$$

avec $\vec{\varepsilon}_h^{\,n} := \vec{p}_h^{\,n} - \vec{\tilde{p}}_h(t_n)$.

Preuve: Considérons le schéma de Crank-Nicolson pour la méthode mixte, écrit de manière équivalente sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega \vec{p}_h^{\,n}.\vec{q}_h\;dx + \int_\Omega\; u_h^n\;\operatorname{div}\vec{q}_h\;dx = 0,\;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \;\;\forall n \geq 1 \\ \\ \int_\Omega v_h\;\operatorname{div}\frac{\vec{p}_h^{\,n}+\vec{p}_h^{\,n-1}}{2}\;dx = -\int_\Omega (f(t_{n-\frac{1}{2}}) - \overline{\partial}u_h^n)\;v_h\;dx,\;\forall v_h \in M_h, \forall n \geq 1. \end{array}\right. \tag{1.125}$$

Soustrayant membre à membre de $(1.125)_{(i)}$, la première équation définissant la projection elliptique

$$\int_\Omega \vec{\tilde{p}}_h(t_n).\vec{q}_h\;dx + \int_\Omega \tilde{u}_h(t_n)\;\operatorname{div}\vec{q}_h\;dx = 0,\;\;\forall \vec{q}_h \in X_h,$$

nous obtenons :

$$\int_\Omega \vec{\varepsilon}_h^{\,n}.\vec{q}_h\;dx + \int_\Omega\; \theta_h^n\;\operatorname{div}\vec{q}_h\;dx = 0,\;\;\forall \vec{q}_h \in X_h, \tag{1.126}$$

où, pour rappel, $\vec{\varepsilon}_h^{\,n} := \vec{p}_h^{\,n} - \vec{\tilde{p}}_h(t_n)$ et $\theta_h^n := u_h^n - \tilde{u}_h(t_n)$.
(1.126) étant vraie pour n et $n-1$, faisant la différence membre à membre et divisant par le pas de temps nous obtenons :

$$\int_\Omega \overline{\partial}\vec{\varepsilon}_h^{\,n}.\vec{q}_h\;dx + \int_\Omega\; \overline{\partial}\theta_h^n\;\operatorname{div}\vec{q}_h\;dx = 0,\;\;\forall \vec{q}_h \in X_h, \tag{1.127}$$

Prenons $\vec{q}_h = \vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}$ dans l'équation (1.127) . Nous avons :

$$\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 = -\Delta t \int_\Omega \operatorname{div}\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right)\overline{\partial}\theta_h^n\,dx. \tag{1.128}$$

Calculons div $\left(\vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right)$.

Par les égalités (1.107) et (1.110), on a :

$$\int_\Omega v_h \ \mathrm{div}\, \frac{\vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}}{2}\, dx = \int_\Omega \left(\overline{\partial}\theta_h^n + \widetilde{\omega}^n\right)\ v_h\, dx,$$

$\forall v_h \in M_h$, en particulier pour $v_h = 1_K$, $\forall K \in \mathcal{T}_h$, d'où l'on obtient :

$$\mathrm{div}\, \frac{\vec{\varepsilon}_h^{\,n} + \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}}{2} = P_h^0\left(\overline{\partial}\theta_h^n + \widetilde{\omega}^n\right) = \overline{\partial}\theta_h^n + P_h^0 \widetilde{\omega}^n, \tag{1.129}$$

puisque $\overline{\partial}\theta_h^n = \frac{\theta_h^n - \theta_h^{n-1}}{\Delta t} \in M_h$. Par (1.128) et (1.129) suit que

$$\begin{aligned}
\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 &= -2\,\Delta t\left\|\overline{\partial}\theta_h^n\right\|^2 - 2\,\Delta t\int_\Omega P_h^0\widetilde{\omega}^n\, \overline{\partial}\theta_h^n\, dx \\
&\leq \Delta t\left\|P_h^0\widetilde{\omega}^n\right\|_{0,\Omega}^2 + \Delta t\left\|\overline{\partial}\theta_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - 2\,\Delta t\left\|\overline{\partial}\theta_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \\
&\leq \Delta t\, \|\widetilde{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

On a démontré que

$$\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \Delta t\, \|\widetilde{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2, \tag{1.130}$$

et en divisant les deux membres de l'inégalité (1.130) par le pas de temps Δt on obtient donc :

$$\bar{\partial}\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2 \leq \|\widetilde{\omega}^n\|^2.$$

■

Corollaire 1.5.21 *Sous les hypothèses de la proposition 1.5.17, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h et de Δt telle que :*

$$\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2 \leq ch^2 \int_0^{t_n} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2\, ds + c\Delta t^4\left(\int_0^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|_{0,\Omega}^2\, ds + \int_0^{t_n} \|\Delta u_{tt}(s)\|_{0,\Omega}^2\, ds\right). \tag{1.131}$$

Preuve: Par l'inégalité (1.122), nous avons :

$$\Delta t\ \left\|\widetilde{\omega}_1^j\right\|_{0,\Omega} \leq ch\int_{t_j-1}^{t_j} \|u_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\, ds. \tag{1.132}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{j=1}^{j=n} \left\| \widetilde{\omega}_1^j \right\|^2 &\leq c \frac{h^2}{\Delta t} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \| u_t(s) \|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} \, ds \right)^2 \\
&\leq ch^2 \sum_{j=1}^{j=n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \| u_t(s) \|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2 \, ds \\
&= h^2 \int_{t_0}^{t_n} \| u_t(s) \|_{H^{2,\alpha}(\Omega)}^2 \, ds \, . \qquad (1.133)
\end{aligned}$$

Par (1.120) , on a :

$$\Delta t \, \left\| \widetilde{\omega}_2^j \right\|_{0,\Omega} \leq \frac{\Delta t^2}{8} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \| u_{ttt}(s) \|_{0,\Omega} \, ds,$$

d'où, par des calculs similaires utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\Delta t \sum_{j=1}^{j=n} \left\| \widetilde{\omega}_2^j \right\|^2 \leq c \Delta t^4 \int_{t_0}^{t_n} \| u_{ttt}(s) \|_{0,\Omega}^2 \, ds. \qquad (1.134)$$

Et aussi pour (1.121) , on obtient :

$$\Delta t \sum_{j=1}^{j=n} \left\| \widetilde{\omega}_3^j \right\|^2 \leq c \Delta t^4 \int_{t_0}^{t_n} \| \Delta u_{tt}(s) \|_{0,\Omega}^2 \, ds. \qquad (1.135)$$

Appliquons maintenant la proposition 1.5.20. On a donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
\| \vec{\varepsilon}_h^{\,1} \|^2 - \| \vec{\varepsilon}_h^{\,0} \|^2 & \leq & \Delta t \, \| \widetilde{\omega}^1 \|^2 \\
\| \vec{\varepsilon}_h^{\,2} \|^2 - \| \vec{\varepsilon}_h^{\,1} \|^2 & \leq & \Delta t \, \| \widetilde{\omega}^2 \|^2 \\
\vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots \\
\| \vec{\varepsilon}_h^{\,n} \|^2 - \left\| \vec{\varepsilon}_h^{\,n-1} \right\|^2 & \leq & \Delta t \, \| \widetilde{\omega}^n \|^2 \, .
\end{array} \right. \qquad (1.136)$$

D'où, en sommant ces inégalités et en tenant compte de ce que $\vec{\varepsilon}_h^{\,0}$ par (1.89) et $u_h^0 = \tilde{u}_h(0)$, on

$$\| \vec{\varepsilon}_h^{\,n} \|^2 \leq \Delta t \sum_{j=1}^{j=n} \left\| \widetilde{\omega}^j \right\|^2 . \qquad (1.137)$$

De $\widetilde{\omega}^n = \widetilde{\omega}_1^n + \widetilde{\omega}_2^n + \widetilde{\omega}_3^n$ suit alors

$$\|\vec{\varepsilon}_h^{\,n}\|^2 \leq 3\Delta t \sum_{j=1}^{j=n} \left\|\widetilde{\omega}_1^j\right\|^2 + 3\Delta t \sum_{j=1}^{j=n} \left\|\widetilde{\omega}_2^j\right\|^2 + 3\Delta t \sum_{j=1}^{j=n} \left\|\widetilde{\omega}_2^j\right\|^2 . \tag{1.138}$$

Des inégalités $(1.135), (1.134)$ et (1.133) suit l'assertion. ∎

En conclusion, nous avons établi le théorème :

Théorème 1.5.22 *Sous les hypothèse de la proposition 1.5.17, Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6. *Pour $\alpha \in \left]1 - \frac{\pi}{w}, 1\right[$, $\exists\ c > 0$ indépendante de h et de Δt telle que pour tout $n \geq 1$:*

$$\begin{aligned}
&\|\vec{p}(t_n) - \vec{p}_h^{\,n}\|_{0,\Omega} \\
\lesssim\ & h\ \left(|u(t_n)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + \|u_t\|_{L^2(0,t_n;H^{2,\alpha}(\Omega))} + \sqrt{\int_0^{t_n} \|u_t(s)\|^2_{H^{2,\alpha}(\Omega)}\, ds} \right) \\
&+\Delta t^2 \left(\sqrt{\int_0^{t_n} \|u_{ttt}(s)\|^2_{0,\Omega}\, ds} + \sqrt{\int_0^{t_n} \|\Delta u_{tt}(s)\|^2_{0,\Omega}\, ds} \right).
\end{aligned} \tag{1.139}$$

Preuve: Par la proposition 1.4.6 et l'inégalité triangulaire, nous obtenons (1.139). ∎

1.6 Exemple d'implémentation numérique

Dans la suite, on suppose que Ω est le domaine ‹‹L-shape standard››, voir figure 1.1.

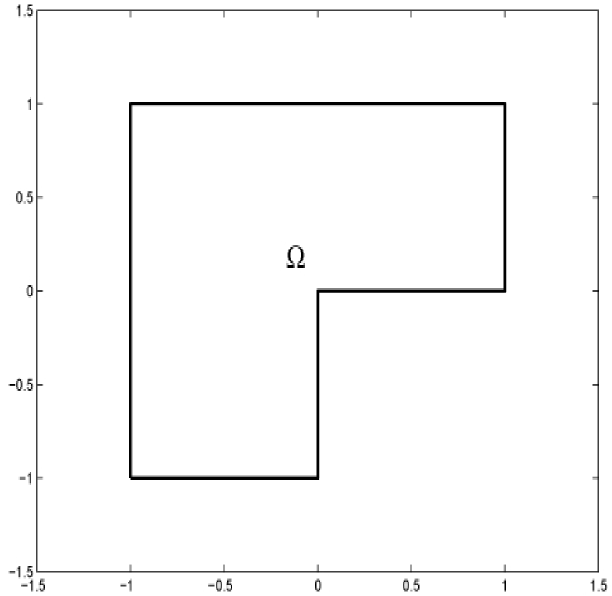

FIG. 1.1 – Domaine L-shape

Considérons alors le problème complètement discrétisé d'évolution de la chaleur sur Ω : trouver $(\vec{p}_h^{\,n}, u_h^n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_h \times M_h$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega \vec{p}_h^{\,n}.\vec{q}_h \; dx + \int_\Omega u_h^n \;\operatorname{div} \vec{q}_h \; dx = 0, \;\; \forall \vec{q}_h \in X_h, \; \forall n \geq 0 \\ \\ \int_\Omega v_h \;\operatorname{div} \vec{p}_h^{\,n} dx = - \int_\Omega (f(t_n) - \overline{\partial} u_h^n) \; v_h \; dx, \;\; \forall v_h \in M_h, \; \forall n \geq 1 \\ \\ u_h^0 \; (c.i.), \text{ donnée.} \end{array}\right. \tag{1.140}$$

avec :

$$\begin{aligned} X_h \; &: = \left\{ \; \vec{q}_h \in H(\operatorname{div}, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h \; : \; \vec{q}_{h/K} \in RT_0(K) \; \right\}, \\ M_h \; &: = \left\{ \; v_h \in L^2(\Omega); \; v_{h/K} \in P_0 \; , \; \forall K \in \mathcal{T}_h \; \right\}, \end{aligned}$$

Pour le choix des bases, on utilisera dans le sous-espace M_h la base $v_h^{(1)}, \ldots, v_h^{(L)}$ formée par les fonctions caractéristiques de chaque triangle K de $\mathcal{T}_h$ et donc L est égal au nombre total des triangles. Pour le sous-espace X_h, on choisira comme base les champs de vecteur $\vec{q}_h^{(1)}, \ldots, \vec{q}_h^{(J)}$ construite sur chaque arête E tels que

$$\vec{q}_h^{(E)} := \begin{cases} \pm \frac{|E|}{2|T_\pm|} (x - P_\pm) & \text{pour } x \in T_\pm, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Avec E est l'arête commune entre les deux triangles T_+ et T_-, telle que montrée dans la figure 1.2 ; $P_\pm$, les sommets opposés à l'arête E ; $|E|$, la longueur de l'arête E et $|T|$, l'aire du triangle T.

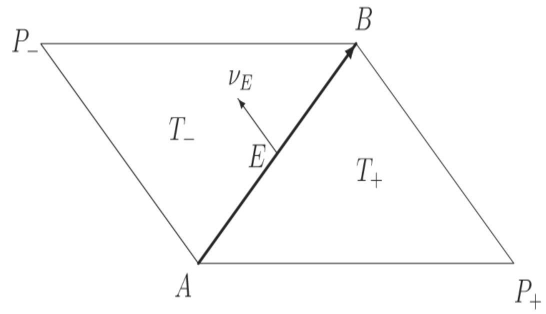

FIG. 1.2 – $\vec{\nu}_E$ est la normale associée à l'arête E. La direction de cette normale doit être fixée au début de la simulation, nous avons considéré ici la normale extérieure à l'élément T_+.

Lemme 1.6.1 *[51]*

1. $\vec{q}_h^{(E)} \cdot \vec{\nu}_E = \begin{cases} 0 & \textit{le long de } (\cup\mathcal{E}) \setminus E, \\ 1 & \textit{le long de } E; \end{cases}$

   avec $\mathcal{E}$ est l'ensemble de toutes les arêtes de la triangulation;

2. $\vec{q}_h^{(E)} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$;

3. $(\vec{q}_h^{(E)} : E \in \mathcal{E})$ *est une base de* $RT_0(\mathcal{T}_h)$,

4. $\mathrm{div}\, \vec{q}_h^{(E)} = \begin{cases} \pm \frac{|E|}{2|T_\pm|} & \textit{dans } T_\pm \\ 0 & \textit{ailleurs.} \end{cases}$

Problème

Écrivons maintenant la solution du problème (1.140) en fonction des éléments de base. On a :

$$\vec{p}_h^n = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j(t_n)\vec{q}_h^{(j)} \quad \text{et } u_h^n = \sum_{l=1}^{L} \beta_l(t_n) v_h^{(l)}.$$

avec $J = card(\mathcal{E})$, $L = card\,(\mathcal{T}_h)$. La formulation discrète (1.140) est équivalente à :

$$\begin{cases} \int_\Omega \sum_{j=1}^{J} \alpha_j(t_n)\vec{q}_h^{(j)}.\vec{q}_h^{(j')}\,dx + \int_\Omega \sum_{l=1}^{L} \beta_l(t_n) v_h^{(l)} \,\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j')}\,dx = 0, \quad \forall j' = 1,2,...,J \\ \\ \int_\Omega v_h^{(l')}\,(\sum_{j=1}^{J} \alpha_j(t_n) \operatorname{div} \vec{q}_h^{(j)})\ \ dx = -\int_\Omega (f(t_n) - \sum_{l=1}^{L} \frac{\beta_l(t_n)-\beta_l(t_{n-1})}{\Delta t} v_h^{(l)})\ v_h^{(l')}\,dx, \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall l' = 1,2,...,L. \end{cases}$$

Ce qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{J}(\int_\Omega \vec{q}_h^{(j)}.\vec{q}_h^{(j')}\,dx)\ \alpha_j(t_n) + \sum_{l=1}^{L}(\int_\Omega v_h^{(l)} \,\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j')}\,dx)\ \beta_k(t_n) = 0, \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall j' = 1,2,...,J, \\ \\ \Delta t \sum_{j=1}^{J}(\int_\Omega v_h^{(l')} \,\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j)} dx)\ \alpha_j(t_n) + \sum_{l=1}^{L}(\int_\Omega v_h^{(l)} v_h^{(l')} dx)\ \beta_l(t_n) = \\ \\ -\Delta t \int_\Omega f(t_n) v_h^{(l')} dx - \sum_{l=1}^{L}(\int_\Omega v_h^{(l)} v_h^{(l')} dx)\ \beta_l(t_{n-1}), \qquad \forall l' = 1,2,...,L. \end{cases}$$

Maintenant, posons

$$\begin{cases} a_{ll'} = \int_\Omega v_h^{(l)} v_h^{(l')} dx \ \ , \ b_{jj'} = \int_\Omega \vec{q}_h^{(j)} \vec{q}_h^{(j')}\,dx\ , \ c_{j'l'} = \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j')}) v_h^{(l')} dx \\ \\ \qquad\qquad \forall\ j, j' = 1,2,...,J,\ ;\forall\ l, l' = 1,2,...,L. \end{cases}$$

Avec ces notations, le système différentiel précédent peut être réécrit ainsi :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{J} \ b_{j'j}\alpha_j(t_n) + \sum_{l=1}^{L} c_{j'l}\beta_l(t_n) = 0, \qquad \forall j' = 1, 2, .., J, \\
\\
\Delta t \sum_{j=1}^{J} (C^{\intercal})_{l'j}\alpha_j(t_n) - \sum_{l=1}^{L} a_{ll'}\beta_l(t_n) = -\Delta t \int_\Omega f(t_n) v_h^{(l')} dx - \sum_{l=1}^{L} a_{ll'}\beta_l(t_{n-1}) \\
\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \forall l' = 1, 2, ..., L.
\end{array}
\right.
\tag{1.141}
$$

En prenant aussi : $A = (a_{ll'})_{1\leq l', l \leq L} \in \mathbb{R}^{L\times L}$; par construction A est donc une matrice diagonale définie positive de la forme :

$$
A = \begin{pmatrix}
|K_1| & & & 0 \\
& \ddots & & \\
& & \ddots & \\
0 & & & |K_L|
\end{pmatrix},
$$

$B = (b_{j'j})_{1\leq j', j \leq J} \ \in \mathbb{R}^{J\times J}$est une matrice symétrique et définie positive :

$$
B = \begin{pmatrix}
\int_\Omega \vec{q}_h^{(1)} \vec{q}_h^{(1)} dx & \cdots & \cdots & \cdots & \int_\Omega \vec{q}_h^{(1)} \vec{q}_h^{(J)} dx \\
\vdots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
\int_\Omega \vec{q}_h^{(J)} \vec{q}_h^{(1)} dx & \cdots & \cdots & \cdots & \int_\Omega \vec{q}_h^{(J)} \vec{q}_h^{(J)} dx
\end{pmatrix};
$$

enfin $C = (c_{j'k})_{1\leq j' \leq J, 1 \leq l \leq L}$ est une matrice $J \times L$, de la forme :

$$
C = \begin{pmatrix}
\int_{K_1} \operatorname{div} \vec{q}_h^{(1)} dx & \cdots & \cdots & \cdots & \int_{K_L} \operatorname{div} \vec{q}_h^{(1)} dx \\
\vdots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
\int_{K_1} \operatorname{div} \vec{q}_h^{(J)} dx & \cdots & \cdots & \cdots & \int_{K_L} \operatorname{div} \vec{q}_h^{(J)} dx
\end{pmatrix}.
$$

Les matrices B et C sont calculés à partir de matrices locales sur chaque triangle.

$$\beta(t_n) = \begin{pmatrix} \beta_1(t_n) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \beta_L(t_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L,\ \alpha(t_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t_n) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_J(t_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^J,\ F(t_n) = \begin{pmatrix} \int_{K_1}(f(t_n)dx \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \int_{K_L} f(t_n)dx \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^L.$$

Les équations (1.141) peuvent être réécrites :

$$\begin{cases} \Delta t C^{\intercal}\alpha(t) - A\ \beta(t_n) = -\Delta t F(t_n) - A\ \beta(t_{n-1}), \\ \\ B\ \alpha(t_n) + C\ \beta(t_n) = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\alpha(t_n) = -B^{-1}C\ \beta(t_n). \tag{1.142}$$

Injectant (1.142) dans la première équation, on obtient

$$\begin{cases} -\Delta t C^{\intercal}B^{-1}C\ \beta(t_n) - A\ \beta(t_n) = -\Delta t F(t_n) - A\ \beta(t_{n-1}), \\ \\ \alpha(t_n) = -B^{-1}C\ \beta(t_n). \end{cases}$$

Or, nous avons démontré dans la preuve de la proposition 1.4.4 que la matrice $G := C^{\intercal}B^{-1}C$ est symétrique et définie positive. Puisque A l'est aussi, alors $A + \Delta t G$ est ainsi une matrice symétrique et définie positive, il suffit alors de résoudre le système inversible suivant :

$$\begin{cases} (A + \Delta t G\ )\,\beta(t_n) = F^*(t_n)\ \ , \\ \\ \beta(0) = \beta_0\ \ (i.c.) \end{cases}$$

où $F^*(t_n) = \Delta t F(t_n) + A\ \beta(t_{n-1})$.

Essai numérique :

Pour les essais numériques on choisi la solution exacte :

$$u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R} : (x, t) \mapsto \exp(\frac{-t}{10}) * r^{\frac{2}{3}} * sin(\frac{2\theta}{3}),$$

où (r,θ) désigne les coordonnées polaires standards, avec $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ et $\theta\in\left]0,\dfrac{3\pi}{2}\right[$ telle que $\sin\theta=\dfrac{x_2}{r}$. l'analyse mathématique précédente a été faite pour l'équation de la chaleur avec des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord ; cependant avec des modifications mineures on obtient une forme équivalente dans le cas des conditions aux bord de type Dirichlet non homogènes. On a tracé la solution approchée de cette fonction (voir figure 1.5) pour $T=1$, les figures 1.3 et 1.4 représentent respectivement $\vec{p}_{h,x}^{\,n}$ et $\vec{p}_{h,y}^{\,n}$ à l'instant $T=1$:

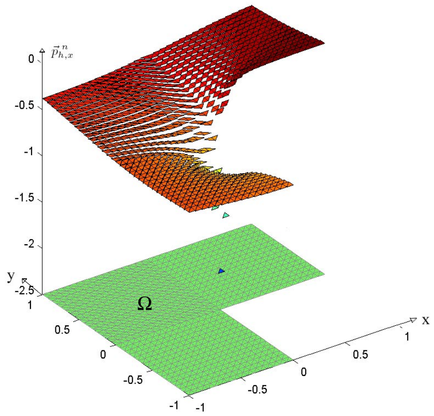

FIG. 1.3 – $\vec{p}_{h,x}^{\,n}$

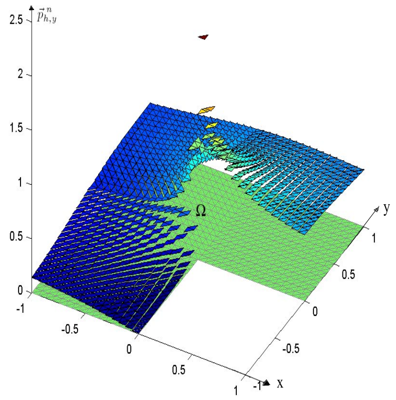

FIG. 1.4 – $\vec{p}_{h,y}^{\,n}$

On prend comme pas de temps fixe $\Delta t=0.1$:

Maillages utilisés : On a utilisé 2 séries de maillages, une série de maillages uniformes et une autre de maillages raffinés.
La série de maillages uniformes est tout simplement obtenue en subdivisant chaque côté du domaine Ω en n segments égaux et en coupant chaque carré obtenu en deux pour obtenir des triangles (voir figure 1.6 où $n=4$).

La série de maillages raffinés doit remplir les conditions de raffinement de maillage en vue de la restauration de l'ordre de convergence optimal de la méthode. Pour obtenir un maillage raffiné, nous utilisons la technique de raffinement de maillage de Raugel [11]. Or on sait que pour tout $t\in[0,T]$, $u(t)\in H^{2,\alpha}(\Omega)$ pour $\alpha>1-\frac{\pi}{\omega}=1-\frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{3}$. On peut

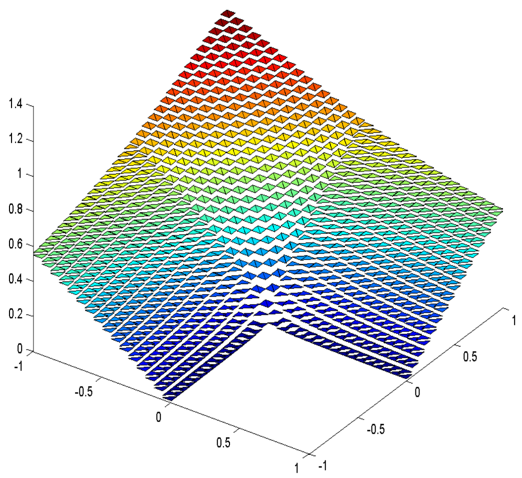

Fig. 1.5 – Solution approchée

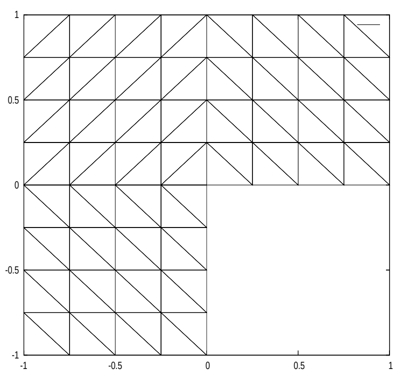

Fig. 1.6 – Maillage Uniforme

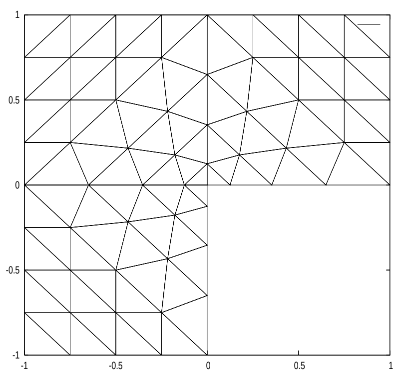

Fig. 1.7 – Maillage Raffiné

donc choisir $\alpha = 0.375$ ce qui implique :

$$\beta := \frac{1}{1-\alpha} = 1.6.$$

(voir figure 1.7 où où $n = 4$).

Résultats

Pour les erreurs $||u\,(t_n) - u_h^n||_{0,\Omega}$ et $||\vec{p}\,(t_n) - \vec{p}_n^n||_{0,\Omega}$, nous obtenons :

	Maillage raffiné		Maillage uniforme	
n	$\|\|u\,(t_n) - u_h^n\|\|_{0,\Omega}$	$\|\|\vec{p}\,(t_n) - \vec{p}_n^n\|\|_{0,\Omega}$	$\|\|u\,(t_n) - u_h^n\|\|_{0,\Omega}$	$\|\|\vec{p}\,(t_n) - \vec{p}_n^n\|\|_{0,\Omega}$
2	1.91e-01	$1.55e-01$	1,04e-01	$1,73e-01$
4	4.97e-02	$9,10e-02$	5,20e-02	$1,16e-01$
8	2.47e-02	$5,12e-02$	2,59e-02	$7,54e-02$
16	1.23e-02	$2,81e-02$	1,29e-02	$4,84e-02$
32	6,16e-03	$1,52e-02$	6,43e-03	$3,08e-02$
64	3,08e-03	$8,15e-03$	3,21e-03	$1,95e-02$

On peut démontrer que pour cette famille régulière de traingulaion, il existe deux constante strictement positives c_1, c_2 ($c_1 < c_2$) indépendantes de n tels que $\frac{c_1}{n} \leq h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} dian(K) \leq \frac{c_2}{n}$. Et pour montrer que : $Erreur = ch^P$, nous utilisons le logarithme, on a donc $\ln(Erreur) = -p\ln(n) + \ln(c')$. En traçant donc le logarithme des erreurs en fonction du logarithme de n, on obtiendra une droite dont le coefficient directeur sera le taux de convergence p. Ces droites sont tracées dans la figure 1.8 pour l'erreur $||u\,(t_n) - u_h^n||_{0,\Omega}$ et la figure 1.9 pour l'erreur $||\vec{p}\,(t_n) - \vec{p}_n^n||_{0,\Omega}$.

Pour la seconde erreur, on voit bien que les maillages uniformes ne présentent qu'un taux de convergence de $p = \frac{2}{3}$ alors que les maillages raffinés présentent un ordre optimal de $p = 1$.

Par contre, pour la première erreur, on a un taux de convergence de $p = 1$ pour les deux séries de maillages.

Précisions : Nous précisons que l'erreur calculée dépend de h mais aussi de Δt et même si nous sommes en schéma implicite où nous n'avons pas ce CFL. Nous avons donc pris un pas de temps suffisamment petit pour ne pas voir la dépendance des erreurs en fonction du temps. Nous avons aussi dû prendre une fonction pour laquelle l'erreur en temps sera négligeable par rapport à l'erreur en espace, au moins jusqu'au n le plus grand que nous ayons pris.

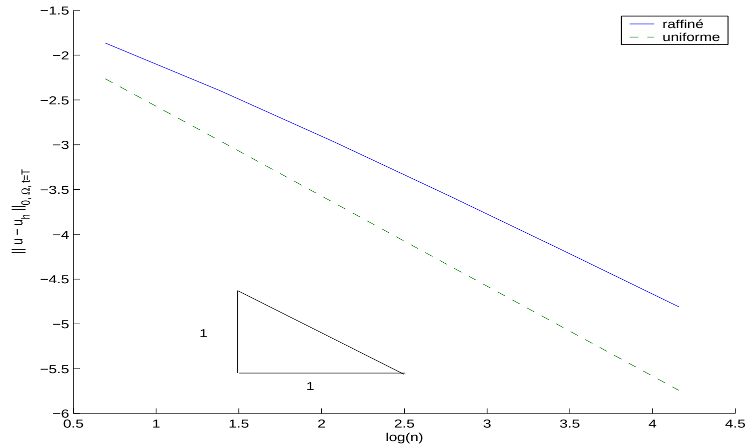

FIG. 1.8 – $||u\,(t_n) - u_h^n||_{0,\Omega}$

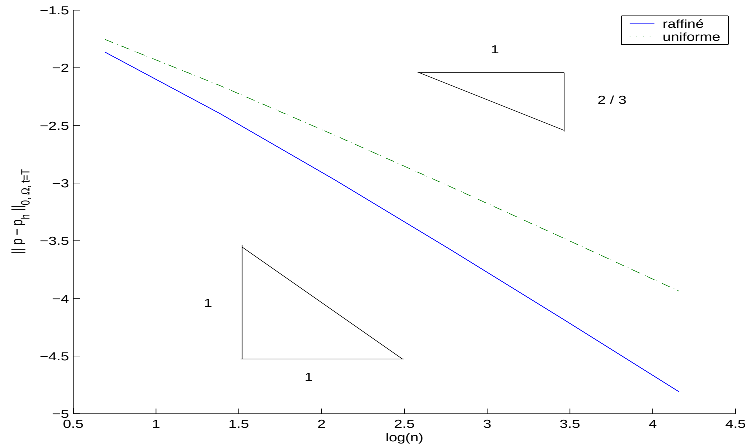

Fig. 1.9 – $||\vec{p}(t_n) - \vec{p}_n^n||_{0,\Omega}$

Chapitre 2

Équations de Stokes instationnaires

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose d'établir des estimations d'erreurs a priori pour le système de Stokes instationnaire pour un fluide visqueux incompressible dans un domaine polygonal en utilisant la méthode d'éléments finis mixte duale en espace et le schéma d'Euler implicite en temps : pour cela nous introduisant en outre des inconnues traditionnelles : la vitesse $\overrightarrow{u}(t)$ et la pression $p(t)$, la nouvelle variable $\sigma(t) := \nabla\vec{u}(t)$ représentant le tenseur gradient du champ des vitesses à l'instant t. Nous approximons chacune des deux lignes de $\sigma(t)$ par un champ de vecteurs de Raviart-Thomas de degré 0 sur chaque triangle K de la triangulation, avec continuité de la composante normale aux interfaces. La pression $p(t)$ est approximée par une constante sur chaque triangle de la triangulation et la vitesse $\overrightarrow{u}(t)$ par un champ de vecteurs constant sur chaque triangle. Notons que Claes Johnson et Vidar Thomée [10] traitent aussi le problème de stokes instationnaire mais en utilisant la méthode symétrique, d'autant plus que leurs majoration d'erreur théorème 4.1 p. 71-72 ne fait pas apparaître clairement l'estimation d'erreur sur la pression et elles supposent indirectement que $\nabla\vec{u}_t(s)$ est dans H^1 pour s dans $[0, T]$. Précisons aussi que les espaces d'approximations ne sont pas les mêmes puisqu'ils considèrent des éléments de base P^1, alors que le choix du plus pas degré serait plus adapter. Et en raison du coin réentrant du domaine polygonal D, nous imposons à la famille de triangulations un raffinement de maillage approprié afin de restaurer l'ordre de convergence optimal 1 de la méthode en espace. En seconde partie on étudie la stabilité du problème complètement discrétisé à l'aide du schéma de Euler implicite, nous démontrons enfin des estimées d'erreur d'ordre 1 en temps et en espace.

2.2 Domaine ouvert borné lipschitzien

2.2.1 Position du problème

Soit Ω un domaine borné lipschitzien dans $\mathbb{R}^2$, posons $Q := \Omega\times]0, T[$, avec $T > 0$. On considère le problème de Stokes instationnaire pour un fluide visqueux incompressible confiné dans Q : étant donné $\vec{f} = (f_1, f_2) \in L^2(0, T; (L^2(\Omega))^2)$ une densité massique de forces extérieures, trouver des fonctions $\vec{u} = (u_1, u_2) \in H^1(0, T; (H_0^1(\Omega))^2)$, le champ de vitesse du fluide, et $p \in L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$, sa pression, solution du problème de Stokes :

$$\begin{cases} \vec{u}_t(x,t) - \nu\Delta\vec{u}(x,t) + \overrightarrow{\text{grad}}\ p(x,t) = \vec{f}(x,t) \qquad \text{dans } Q, \\ \\ \operatorname{div}\vec{u}(x,t) = 0 \qquad \text{dans } Q, \\ \\ \vec{u}(x,t) = 0 \qquad \text{sur } \Sigma := \partial\Omega\times]0,T[, \\ \\ \vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x) \qquad \text{pour } x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

En introduisant la variable $\sigma = \text{grad}\ \vec{u}$, on peut réécrire les équations de Stokes sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{u}_t - \operatorname{div}(\nu\sigma - p\delta) = \vec{f} \ \text{ dans } Q, \\ \\ \operatorname{div}\ \vec{u} = 0 \ \text{ dans } Q, \\ \\ \vec{u} = 0 \ \text{ sur } \Sigma, \\ \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \ \text{ dans } \ \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

où δ désigne le tenseur identité donné par $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rappelons que τ étant un tenseur, $\operatorname{div}\tau$ désigne le champ de vecteurs de composante $(\operatorname{div}\tau)_i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2)$.

2.2.2 Existence, unicité et régularité de la solution

Avant de donner la preuve de l'existence de l'unicité ainsi que de la régularité de la solution faible de (2.1), soit

$$V := \left\{ v \in (\mathring{H}^1(\Omega))^2;\ \operatorname{div}\, \vec{v} = 0 \right\}.$$

Nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.2.1 ([46] *théorème III.1.1 p.254*)
Etant donné $\vec{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $\vec{u}_0 \in L^2(\Omega)^2$ à divergence nulle. Il existe une unique fonction $\vec{u} \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)^2)$ telle que $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$, $\vec{u}' \in L^2(0, T; V')$ telle que

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}, \vec{v}) + \nu \int_\Omega \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v}, \qquad \forall \vec{v} \in V. \tag{2.3}$$

Soit alors $(\vec{u}, p)$ la solution faible du problème de Stokes instationnaire (2.1), nous avons :

Théorème 2.2.2 *Sous les hypothèses : Ω étant l'ouvert borné lipschitzien, $\vec{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $\vec{u}_0 \in V$, on a :*

$$\vec{u} \in H^1(0, T; L^2(\Omega)^2). \tag{2.4}$$

De plus il existe une et une seule fonction $p \in L^2(0, T; L^2_0(\Omega))$ que l'on appelle pression telle que :

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}, \vec{v}) + \nu \int_\Omega \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} - \int_\Omega p\, div\, \vec{v} = \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v}, \ \ \forall \vec{v} \in H^1_0(\Omega)^2. \tag{2.5}$$

Preuve: V étant séparable, il existe donc une suite $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m, \ldots$ de vecteurs linéairement indépendants qui est totale dans V. Soit $\vec{u}_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\, \vec{w}_i$, la solution du problème de Cauchy pour le système d'équations différentielles

$$\int_\Omega \frac{d\vec{u}_m}{dt}(t)\cdot\vec{w}_j\,dx+\nu\int_\Omega \nabla\vec{u}_m(t):\nabla\vec{w}_j\,dx=\int_\Omega \vec{f}(t)\cdot\vec{w}_j\,dx,\ \ \forall j=1,...,m \tag{2.6}$$

de condition initiale $\vec{u}_m(0)=\vec{u}_{0m}$, que l'on précisera dans la suite.
$\vec{u'}_m(t)$, étant une combinaison linéaire de $\vec{w}_1,...,\vec{w}_m$ il suit de (2.6)

$$\left\|\vec{u'}_m(t)\right\|^2_{0,\Omega}+\nu\int_\Omega \nabla\vec{u}_m(t):\nabla\vec{u'}_m(t)\,dx=\int_\Omega \vec{f}(t)\cdot\vec{u'}_m(t)\,dx.$$

Mais

$$\frac{d}{dt}\ \|\vec{u}_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}=\ 2\int_\Omega \nabla\vec{u}_m(t):\nabla\vec{u'}_m(t)\,dx.$$

D'où

$$2\left\|\vec{u'}_m(t)\right\|^2_{0,\Omega}+\nu\frac{d}{dt}\ \|\vec{u}_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}\leq\left\|\vec{f}(t)\right\|^2_{0,\Omega}+\left\|\vec{u'}_m(t)\right\|^2_{0,\Omega},$$

ce qui entraîne

$$\left\|\vec{u'}_m(t)\right\|^2_{0,\Omega}+\nu\frac{d}{dt}\ \|\vec{u}_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}\leq\left\|\vec{f}(t)\right\|^2_{0,\Omega}.$$

Intégrons de 0 à T l'inégalité précédente :

$$\int_0^T\left\|\vec{u'}_m(t)\right\|^2_{0,\Omega}dt+\nu\ \|\vec{u}_m(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}\leq\nu\ \|\vec{u}_m(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}+\int_0^T\left\|\vec{f}(t)\right\|^2_{0,\Omega}dt.$$

Si $\vec{u}_m(0)$ converge vers $\vec{u}(0)$ dans la norme de $H^1_0(\Omega)^2$, alors on aura $\|\vec{u}_m(0)\|_{H^1_0(\Omega)^2}\lesssim\|\vec{u}(0)\|_{H^1_0(\Omega)^2}$. Et donc

$$\int_0^T\left\|\vec{u'}_m(t)\right\|^2_{0,\Omega}dt\lesssim\nu\ \|\vec{u}(0)\|^2_{H^1_0(\Omega)^2}+\int_0^T\left\|\vec{f}(t)\right\|^2_{0,\Omega}dt.$$

Donc la suite $\left(\vec{u'}_m(t)\right)_{m\geq1}$ est bornée dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$ ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe un certain $\vec{v}\in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$ et une sous-suite que nous notons encore $\vec{u'}_m$ par un abus de notation usuel telle que $\vec{u'}_m\xrightarrow{w}\vec{v}$ dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$ (au sens faible).
Soit alors $\varphi\in\mathcal{D}\left(]0,T[\right)$ et $J^*\in V'$. L'application de

$$\begin{array}{rcl} L^2(0,T;V) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{g} & \longmapsto & -\int_0^T\langle\vec{g}(t),J^*\rangle_{V,V'}\ \varphi'(t)\,dt, \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur $L^2(0,T;V)$. En effet :

$$\begin{aligned}
\left| -\int_0^T \langle \vec{g}(t), J^* \rangle_{V,V'} \ \varphi'(t)\,dt \right| &\leq \int_0^T \|\vec{g}(t)\|_V \ \|J^*\|_{V'} \, |\varphi'(t)\,| \ dt \\
&\leq \|J^*\|_{V'} \left(\int_0^T \|\vec{g}(t)\|_V^2 \ dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T |\varphi'(t)\,|^2 \,dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|J^*\|_{V'} \, \|\vec{g}\|_{L^2(0,T;V)} \ \|\varphi'\|_{L^2(0,T)} \\
&= C \ \|\vec{g}\|_{L^2(0,T;V)} \,.
\end{aligned}$$

Comme $\vec{u}_m \overset{w}{\rightharpoonup} \vec{u}$ dans $L^2(0,T;V)$ d'après le théorème d'existence 2.2.1, il s'en suit que

$$- \int_0^T \langle \vec{u}_m(t), J^* \rangle_{V,V'} \ \varphi'(t)\,dt \longrightarrow - \int_0^T \langle \vec{u}(t), J^* \rangle_{V,V'} \ \varphi'(t)\,dt. \tag{2.7}$$

D'autre part, si l'on prend $J^* \in (L^2(\Omega)^2)^*$, alors l'application de

$$\begin{aligned}
L^2(0,T;L^2(\Omega)^2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\vec{h} &\longmapsto - \int_0^T \left\langle \vec{h}(t), J^* \right\rangle_{L^2(\Omega)^2,(L^2(\Omega)^2)^*} \ \varphi(t)\,dt,
\end{aligned}$$

est une forme linéaire continue sur $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$. Comme $\vec{u'}_m \overset{w}{\rightharpoonup} \vec{v}$ dans $L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$, alors

$$\int_0^T \left\langle \vec{u'_m}\,(t)\,, J^* \right\rangle_{L^2(\Omega)^2,(L^2(\Omega)^2)^*} \ \varphi(t)\,dt \longrightarrow \int_0^T \langle \vec{v}(t), J^* \rangle_{L^2(\Omega)^2,(L^2(\Omega)^2)^*} \ \varphi(t)\,dt. \tag{2.8}$$

Or, si $J^* \in (L^2(\Omega)^2)^*$, cela implique que $J^*_{|V} \in V'$, donc on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left\langle \vec{u'}_m(t), J^* \right\rangle \varphi(t)\,dt &= \left\langle \int_0^T \vec{u'_m}\,(t)\,\varphi(t)\,dt, J^* \right\rangle \\
&= -\left\langle \int_0^T \vec{u_m}\,(t) \ \varphi'(t)\,dt, J^* \right\rangle \\
&= -\int_0^T \langle \vec{u}_m(t), J^* \rangle \ \varphi'(t)\,dt \to -\int_0^T \langle \vec{u}(t), J^* \rangle \ \varphi'(t)\,dt \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

par (2.7).

De (2.9) et (2.8) suit :

$$-\int_0^T \langle \vec{u}(t), J^*\rangle\ \varphi'(t)\,dt = \int_0^T \langle \vec{v}(t), J^*\rangle\ \varphi(t)\,dt, \quad \forall J^* \in \left(L^2(\Omega)^2\right)^*.$$

D'où

$$-\int_0^T \vec{u}(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_0^T \vec{v}(t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \forall \varphi \in D(]0,T[).$$

Ceci démontre $(\vec{u})' = \vec{v}$ au sens faible. Comme l'on sait que $\vec{v} \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$, on a $(\vec{u})' \in L^2(0,T;(L^2(\Omega))^2)$. Nous avons donc démontré que

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \in L^2(0,T;\left(L^2(\Omega)\right)^2). \tag{2.10}$$

Venons-en maintenant à l'existence de la fonction pression p. Posons :

$$\vec{q} = \vec{f} - \frac{d\vec{u}}{dt} + \upsilon\Delta\vec{u}. \tag{2.11}$$

Comme

$$\vec{u} \in H^1(0,T;\left(H_0^1(\Omega)\right)^2),$$

il s'en suit que :

$$\Delta\vec{u} \in L^2(0,T;\left(H^{-1}(\Omega)\right)^2).$$

De l'équation (2.11) et de (2.10) suit que $\vec{q} \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^2)$. Mais l'opérateur

$$\vec{\nabla} : L_0^2(\Omega) \longrightarrow \left(H^{-1}(\Omega)\right)^2$$

est un isomorphisme de $L_0^2(\Omega)$ sur $\mathring{V}$ (le polaire de V) ([15], lemme I.2.1 p.22). Or $\vec{q}(t) \in \mathring{V}$, $\forall' t \in]0,T[$ par (2.11) et (2.3). Donc il existe $p(t) \in L_0^2(\Omega)$ tel que $\vec{q}(t) = \vec{\nabla}p(t)$.

Notons $\left(\vec{\nabla}\right)^{-1} : \mathring{V} \longrightarrow L_0^2(\Omega)$ l'opérateur inverse de $\vec{\nabla} : L_0^2(\Omega) \rightarrowtail \mathring{V}$. Donc

$$p(t) = \left(\vec{\nabla}\right)^{-1} \vec{q}(t)\,.$$

Comme $\vec{q} \in L^2(0,T;(H^{-1}(\Omega))^2)$, il s'en suit que $p \in L^2(0,T;L_0^2(\Omega))$. De (2.11) et $\vec{q} = \vec{\nabla}p$ suit (2.5). ■

2.2.3 Formulation mixte duale du problème de Stokes instationnaire

Pour écrire la formulation mixte duale, on a besoin d'introduire les deux sous-espaces suivants :
$X := \Big\{(\tau, q) \in (L^2(\Omega))^{2\times 2} \times L^2_0(\Omega)\ ;\ \mathrm{div}(\nu\tau - q\delta) \in L^2(\Omega)^2\Big\}$, $Y := (L^2(\Omega))^2$.
Ainsi la formulation mixte duale de (2.2) s'écrit : trouver $(\sigma, p) \in L^2(0,T;X)$ et $\vec{u} \in H^1(0,T;Y)$, tels que :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \sigma(t) : \tau\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}(\nu\tau - q\delta)\cdot \vec{u}(t)\, dx = 0, \quad \forall (\tau, q) \in X,\ \forall' t \in I, \\ \\ \int_\Omega \mathrm{div}\,(\nu\sigma(t) - p(t)\delta)\cdot \vec{v}\, dx = -\int_\Omega (\vec{f}(t) - \vec{u}_t(t))\cdot \vec{v}\, dx, \quad \forall \vec{v} \in Y,\ \forall' t \in I, \\ \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Reste maintenant à vérifier les équations (2.12) de la formulation mixte, mais tout d'abord montrons que $(\sigma, p) \in L^2(0,T;X)$. Rappelons que $\sigma = \nabla_x \vec{u}$, et puisque $\vec{u} \in L^2(0,T;(H^1_0(\Omega))^2)$, alors

$$\sigma = \nabla_x \vec{u} \in L^2(0,T;\big(L^2(\Omega)\big)^{2\times 2}).$$

De plus, d'après l'équation $(2.2)_{(i)}$ on a

$$\mathrm{div}(\nu\sigma - p\delta) = \nu\Delta\vec{u} - \vec{\nabla}\, p = -\vec{f} + \frac{d\vec{u}}{dt} \in L^2(0,T;\big(L^2(\Omega)\big)^2),$$

donc on a bien $(\sigma, p) \in L^2(0,T;X)$. Examinons maintenant les équations (2.12).
Pour $(2.12)_{(ii)}$ c'est immédiat ; reste à vérifier $(2.12)_{(i)}$. Puisque

$$\vec{u} \in L^2(0,T;V) \quad \text{et donc} \quad \mathrm{div}\, \vec{u}(t) = 0\ ,\ \ \forall' t \in [0,T],$$

alors

$$\int_\Omega \nabla_x \vec{u} : q\delta\, dx = 0 \qquad \forall q \in L^2(\Omega), \forall' t \in [0,T].$$

D'où

$$\begin{aligned}
\nu \int_\Omega \sigma(t) : \tau \, dx &= \int_\Omega \nabla_x \vec{u}(t) : (\nu\tau - q\delta) \, dx \qquad\qquad \forall(\tau, q) \in X, \forall' t \in [0, T] \\
&= \left\{ \langle (\nu\tau - q\delta) \cdot \vec{n}, \vec{u}(t) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^2, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^2} - \int_\Omega \vec{u}(t) : \operatorname{div}(\nu\tau - q\delta) \, dx \right\}, \\
&= -\int_\Omega \vec{u}(t) \cdot \operatorname{div}(\nu\tau - q\delta) \, dx
\end{aligned}$$

puisque $\vec{u}(t) \in (H_0^1(\Omega))^2, \forall' t \in [0, T]$.
Donc

$$\nu \int_\Omega \sigma(t) : \tau \, dx + \int_\Omega \vec{u}(t) \cdot \operatorname{div}(\nu\tau - q\delta) \, \cdot \vec{u}(t) \, dx = 0, \;\; \forall(\tau, q) \in X, \;\; \forall' t \in [0, T].$$

Donc on a démontré que si $(\vec{u}, p)$ est une solution de (2.2) alors $((\sigma, p), \vec{u})$ est une solution de la formulation mixte (2.12) pourvu que $\vec{u}_0 \in V$ et que Ω soit un ouvert borné lipschitzien. Reste à montrer l'unicité de cette solution et par conséquent l'équivalence entre le problème (2.2) et la formulation mixte (2.12).

Soient alors $((\sigma_1, p_1), \vec{u}_1), ((\sigma_2, p_2), \vec{u}_2)$ deux solutions de la formulation mixte (2.12). Considérons la différence $((\sigma, p), \vec{u}) := ((\sigma_1 - \sigma_2, p_1 - p_2), \vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ de ces deux solutions. Elle vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases}
\nu \int_\Omega \sigma(t) : \tau \, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nu\tau - q\delta) \cdot \vec{u}(t) \, dx = 0 \;\; \forall(\tau, q) \in X, \;\; \forall' t \in I \;, \\[2ex]
\int_\Omega \operatorname{div}(\nu\sigma(t) - p(t)\delta) \cdot \vec{v} \, dx = \int_\Omega \vec{u}_t(t) \cdot \vec{v} \, dx \;\; \forall \vec{v} \in Y, \;\; \forall' t \in I, \\[2ex]
\vec{u}(0) = 0.
\end{cases} \tag{2.13}$$

Prenons $(\tau, q) = (\sigma(t), p(t))$ dans l'équation $(2.13)_{(i)}$. Puisque $(\sigma(t), p(t)) \in X \;\; \forall' t \in [0, T]$, alors

$$\nu \int_\Omega |\sigma(t)|^2 \, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nu\sigma(t) - p(t)\delta) \cdot \vec{u}(t) \, dx = 0, \;\; \forall' t \in I. \tag{2.14}$$

Prenons maintenant $\vec{v} = \vec{u}(t)$ dans $(2.13)_{(ii)}$, ce qui est permis puisque $\forall' t \in [0, T] : \vec{u}(t) \in$

$Y = L^2(\Omega)^2$; ceci nous donne : $\forall' t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \operatorname{div}(\nu\sigma(t) - p(t)\delta) \cdot \vec{u}(t)\, dx &= \int_\Omega \vec{u}_t(t) \cdot \vec{u}(t)\, dx, \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{d}{dt} |\vec{u}(t)|^2\, dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De (2.15) et (2.14) suit :

$$\nu \int_\Omega |\sigma(t)|^2\, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\vec{u}(t)|^2\, dx = 0 \tag{2.16}$$

et implique $\frac{d}{dt}\int_\Omega |\vec{u}(t)|^2\, dx \le 0$, donc $\int_\Omega |\vec{u}(\cdot)|^2\, dx$ est décroissante, et comme

$$\int_\Omega |\vec{u}(\cdot)|^2\, dx \in H^1([0,T]) \hookrightarrow C([0,T]),$$

avec $\vec{u}(0) = 0$, cela entraîne que $\vec{u}(t) = 0$ $\forall t \in [0,T]$. Par (2.16) on a également $\sigma = 0$. D'autre part, par l'équation $(2.13)_{(ii)}$, on a

$$\int_\Omega \vec{\nabla}_x p(t) \cdot \vec{v}\, dx = 0 \ \text{ pour tout } \vec{v} \in \left(L^2(\Omega)\right)^2.$$

Et puisque $(0, p(t)) \in X$, donc $p(t) \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$. Choisissant $\vec{v} = \vec{\nabla}_x p(t)$, il s'en suit $\vec{\nabla}_x p(t) = 0$ et donc $p(t) =$ constante $\forall' t \in [0,T]$, mais comme $p(t) \in L^2_0(\Omega)$, la seule possibilité est $p = 0$.

2.3 Dans un domaine polygonal

Dans la suite, on suppose que Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$ à bord polygonal : $\partial\Omega := \cup_{j=1}^N \overline{\Gamma}_j$, où Γ_j est un segment de droite ouvert $\forall\ j = 1, 2, ..., N$. On suppose aussi que Ω n'a qu'un seul angle non convexe dont la mesure est notée ω ; par translation éventuelle on peut supposer que le sommet de cet angle est situé à l'origine.

2.3.1 Régularité en espace de la solution

Supposant que $\vec{f} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)$ et $\vec{u}_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$ avec $\operatorname{div} \vec{u}_0 = 0$, il suit de la proposition 1.2 p.267 du livre de Temam [46] que $\vec{u}\,' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)$. D'où

$$\begin{cases} -\nu\Delta\vec{u} + \vec{\nabla}p = \vec{f} - \dfrac{d\vec{u}}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2), \\ \\ \operatorname{div}\vec{u}(t) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \\ \\ \vec{u}(t) = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

De la régularité de la solution du problème stationnaire, suit alors que $\vec{u} \in L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)$ et $p \in L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^2_0(\Omega))$ pour $\alpha \in]1-\eta_0(\omega), 1[$ où

$$\eta_0(\omega) = \inf\left\{\xi \in \mathbb{R}^+_*;\ z = \xi + i\eta \text{ vérifie } \sin^2\omega z = z^2\sin^2\omega,\ z \neq 1\right\}.$$

Supposons maintenant que $\vec{f} \in H^1(0,T;L^2(\Omega)^2)$, que $\vec{f}(0) + \nu\Delta\vec{u}_0 \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2$ et que $\operatorname{div}\vec{f}(0) = 0$.
Soit $(\vec{w},\zeta) \in L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;L^2_0(\Omega))$ la solution au sens faible ([46] p.253) de

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{w}}{dt}(t) - \nu\Delta\vec{w}(t) + \vec{\nabla}\zeta(t) = \vec{f}'(t),\ \forall' t \in]0,T[\\ \\ \operatorname{div}\vec{w}(t) = 0\ ,\ \forall' t \in]0,T[\\ \\ \vec{w}(0) = \vec{f}(0) + \nu\Delta\vec{u}_0 \quad . \end{cases}$$

Rappelons ([46] p.251) que $V = \left\{\vec{v} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)^2;\ \operatorname{div}\vec{v} = 0\right\}$. Par le raisonnement ci-dessus $\vec{w}' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^2)$ et $(\vec{w},\zeta) \in L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2) \times L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^2_0(\Omega))$.
Posons $\vec{v}(t) = \vec{u}_0 + \int_0^t \vec{w}(s)\ ds$ et $q(t) = \int_0^t \zeta(s)\ ds$.

On vérifie qu'au sens faible :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt}(t) - \nu\Delta\vec{v}(t) + \vec{\nabla}q(t) = \vec{f}(t),\ \forall' t \in]0,T[\\ \\ \operatorname{div}\vec{v}(t) = 0 \ \text{ dans } \Omega,\ \forall' t \in]0,T[\\ \\ \vec{v}(0) = \vec{u}_0\ . \end{cases}$$

Par unicité $\vec{u} = \vec{v}$ et donc $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{w} \in L^2\left(0,T; H^{2,\alpha}(\Omega)^2\right)$. De même $p = q$ et donc $\dfrac{dp}{dt} = \zeta \in L^2\left(0,T; H^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)\right)$.
Nous avons donc démontré le résultat de régularité suivant :

Proposition 2.3.1 *Supposons* $\vec{f} \in H^1(0,T; L^2(\Omega)^2)$, *que* $\operatorname{div}\vec{f}(0) = 0$, *et que la condition initiale* $\vec{u}_0 \in V$ *du problème de Stokes instationnaire satisfasse la condition* $\vec{f}(0) + \nu\Delta\vec{u}_0 \in \mathring{H}^1(\Omega)^2$.
Alors la solution $(\vec{u}, p) \in L^2(0,T;V) \times L^2(0,T; L^2_0(\Omega))$ *du problème de Stokes instationnaire appartient à l'espace de Sobolev*

$$H^1(0,T; \left(H^{2,\alpha}(\Omega)\right)^2) \times H^1(0,T; H^{1,\alpha}(\Omega)) \tag{2.18}$$

pour tout $\alpha \in]1 - \eta_0(\omega), 1[$ *où* $\eta_0(\omega) = \inf\{\xi \in \mathbb{R}^+_*;\ z = \xi + i\eta$ *vérifie* $\sin^2 \omega z = z^2 \sin^2 \omega$, $z \neq 1\}$.

2.4 Problème semi-discret

Pour introduire la formulation mixte semi-discrète du problème (2.12), considérons une famille régulière de triangulations $(\mathcal{T}_h)_h$ de $\overline{\Omega}$, et définissons des sous-espaces approximants X_h et Y_h des espaces X et Y :

$$\begin{aligned} X_h \ &: = \left\{(\tau_h, q_h) \in X\,;\ \tau_{h(i,\cdot)} \in RT_0(K) \ \ \forall i = 1,2 \text{ et } q_{h|K} \in P_0(K),\ \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}, \\ Y_h \ &: = \left\{\vec{v}_h \in Y;\ \vec{v}_{h|K} \in (P_0(K))^2,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}. \end{aligned}$$

P_0 dénote l'espace des fonctions constantes sur K et $RT_0(K)$ dénote l'espace vectoriel des champs de Raviart-Thomas du plus bas degré sur K défini par :

$$RT_0(K) = \{v : K \to \mathbb{R}; \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} : v(x) = (a, b) + c(x_1, x_2), \forall x = (x_1, x_2) \in K\}$$

Finalement, on a $\vec{u}_{0,h} = P_h \vec{u}_0$ où P_h est l'opérateur de projection de $\left(L^2(\Omega)\right)^2$ sur $\prod_{K \in \mathcal{T}_h} \left(P_0(K)\right)^2$.

On peut maintenant introduire le problème approché : trouver $(\sigma_h, p_h) \in L^2(0, T; X_h)$, $\vec{u}_h \in L^2(0, T; Y_h)$ tels que :

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \sigma_h(t) : \tau_h \, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nu \tau_h - q_h \delta) \cdot \vec{u}_h(t) \, dx = 0, \ \forall\, (\tau_h, q_h) \in X_h, \ \forall' t \in I, \\ \\ \int_\Omega \operatorname{div}\left(\nu \sigma_h(t) - p_h(t)\delta\right) \cdot \vec{v}_h \, dx = -\int_\Omega (\vec{f}(t) - \vec{u}_{h,t}(t)) \cdot \vec{v}_h \, dx, \ \forall \vec{v}_h \in Y_h, \ \forall' t \in I, \\ \\ \vec{u}_h(0) = \vec{u}_{0,h}. \end{array}\right. \tag{2.19}$$

Avant d'examiner le problème semi-discret (2.19) nous allons tout d'abord rappeler certains résultats relatifs aux équations de Stokes stationnaires (Cf. [9]).
Nous considérons les équations de Stokes stationnaires :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\nu \Delta \vec{u} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p = \vec{f} & \text{dans } \ \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \qquad \text{dans } \ \Omega, & \\ \vec{u} = \vec{0} \qquad \text{sur } \Gamma. & \end{array}\right. \tag{2.20}$$

La formulation mixte de ce dernier problème consiste à trouver $(\sigma, p) \in X$ et $\vec{u} \in Y$ tels que

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \sigma : \tau \, dx + \int_\Omega \, div(\nu \tau - q\delta) \cdot \vec{u}\, dx = 0 \ , \ \forall\, (\tau, q) \in X, \\ \\ \int_\Omega div\,(\nu \sigma - p\,\delta) \cdot \ \vec{v}\, dx = -\int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \ \ \forall \vec{v} \in Y. \end{array}\right. \tag{2.21}$$

Il est clair que la solution $(\vec{u}, p)$ de (2.20) vérifie $(\sigma, p) \in X$, où $\sigma = \nabla \vec{u}$ et donc que $((\sigma, p), \vec{u})$ est une solution de (2.21). De plus, d'après [9], la formulation mixte (2.21) admet une solution unique.
Le problème approché pendant de (2.21) consiste à trouver $((\sigma_h, p_h), \vec{u}_h) \in X_h \times Y_h$ tels

que

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \sigma_h : \tau_h \, dx + \int_\Omega \ div(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{u}_h \, dx = 0 \ , \ \forall \, (\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega div \, (\nu\sigma_h - p_h \, \delta) \cdot \ \vec{v}_h \, dx = - \int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{v}_h \ dx \ , \ \forall \vec{v}_h \in Y_h. \end{array}\right. \tag{2.22}$$

L'existence et l'unicité de la solution de ce dernier problème sont des conséquences de la proposition 4.1.2 de [9].
Étant donné $\vec{f} \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$, on peut définir l'opérateur T par

$$T : Y \longrightarrow X \times Y \ \ : \quad \vec{f} \mapsto T \, \vec{f} = \left(T_1 \, \vec{f}, T_2 \, \vec{f}\right) = \left((\sigma, p) \, , \vec{u}\right) \tag{2.23}$$

où $\left((\sigma, p) \, , \vec{u}\right)$ est la solution de (2.21).
Aussi, nous définissons l'opérateur T_h par

$$T_h : Y \longrightarrow X_h \times Y_h \ \ : \quad \vec{f} \mapsto T_h \, \vec{f} = \left(T_{h,1} \, \vec{f}, T_{h,2} \, \vec{f}\right) = \left((\sigma_h, p_h) \, , \vec{u}_h\right) \tag{2.24}$$

où $\left((\sigma_h, p_h) \, , \vec{u}_h\right)$ est la solution de (2.22). Finalement, on démontre dans [9], le résultat suivant sur les estimations d'erreurs à priori :

Théorème 2.4.1 *[12] Soit $\{\mathcal{T}_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6, *pour un $\alpha \in]1 - \eta_0(\omega), 1[$. Soient $T \vec{f} = \left((\sigma, p) \, , \vec{u}\right)$ et $T_h \, \vec{f} = \left((\sigma_h, p_h) \, , \vec{u}_h\right)$. Alors $(\sigma, p) \in \left(H^{1,\alpha}(\Omega)\right)^4 \times \left(H^{1,\alpha}(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)\right)$, et il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que*

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \left(|\vec{u}|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right), \tag{2.25}$$

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \left(|\vec{u}|_{H^{1,\alpha}(\Omega)^2} + |p|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right), \tag{2.26}$$

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{0,\Omega} \leq Ch \left(|\vec{u}|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} + |\vec{u}|_{H^1(\Omega)^2}\right). \tag{2.27}$$

Maintenant, on est en mesure de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème instationnaire semi-discret (2.19) ainsi que des estimations d'erreurs à priori.

Proposition 2.4.2 *Le problème (2.19) admet une et une seule solution $\left((\sigma_h, p_h) \, , \vec{u}_h\right)$ dans $L^2(0, T; X_h) \times L^2(0, T; Y_h)$.*

Preuve: Soit $\vec{g} \in Y$. Considérons les opérateurs $T_{h,1}$ et $T_{h,2}$ définis dans (2.22) :

$$\begin{array}{rl} T_{h,1}: & Y \longrightarrow X_h \\ & \vec{g} \longmapsto T_{h,1}\vec{g} = (\sigma_h, p_h) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} T_{h,2}: & Y \longrightarrow Y_h \\ & \vec{g} \longmapsto T_{h,2}\vec{g} = \vec{u}_h \end{array}$$

où $((\sigma_h, p_h), \vec{u}_h)$ désigne donc la solution du problème mixte stationnaire semi-discret suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \int_\Omega \sigma_h : \tau_h \, dx + \int_\Omega (\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{u}_h \, dx = 0, \quad \forall (\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega (\nu\sigma_h - p_h\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx = - \int_\Omega \vec{g} \cdot \vec{v}_h \, dx \ , \ \forall \vec{v}_h \in Y_h. \end{array} \right. \tag{2.28}$$

Ce problème possède une et une seule solution $\forall \vec{g} \in (L^2(\Omega))^2 := Y$. Revenons au problème d'évolution discret (2.19), si on applique la définition de T_h, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_h(t), p_h(t)) = T_{h,1}\left(\vec{f}(t) - \frac{d\vec{u}_h}{dt}(t)\right) \\ \\ \vec{u}_h(t) = T_{h,2}\left(\vec{f}(t) - \frac{d\vec{u}_h}{dt}(t)\right). \end{array} \right.$$

D'où

$$\vec{u}_h(t) + T_{h,2}\frac{d\vec{u}_h}{dt}(t) = T_{h,2}\,\vec{f}(t) \text{ et } \vec{u}_h(0) = \vec{u}_{0,h},$$

Montrer que ce problème possède une et une seule solution revient, en fait, comme nous le verrons plus loin, à montrer que $T_{h,2}$ est un opérateur défini positif sur Y_h. Prenons donc un élément $\vec{f}_h \in Y_h$, et considérons le problème mixte discret stationnaire de donnée $\vec{f}_h$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \int_\Omega \sigma_h : \tau_h \, dx + \int_\Omega (\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{u}_h \, dx = 0 \ , \ \forall (\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega (\nu\sigma_h - p_h\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx = - \int_\Omega \vec{f}_h \cdot \vec{v}_h \, dx \ , \ \forall \vec{v}_h \in Y_h. \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Alors $T_{h,2}\,\vec{f}_h = \vec{u}_h$ et $T_{h,1}\,\vec{f}_h = (\sigma_h, p_h)$, et on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(T_{h,2}\,\vec{f}_h\right) \cdot \vec{f}_h \, dx = \int_\Omega \vec{f}_h \cdot \vec{u}_h \, dx &= -\int_\Omega (\nu\sigma_h - p_h\delta) \cdot \vec{u}_h \, dx \\ &= \nu \int_\Omega \sigma_h : \sigma_h \, dx = \nu \int_\Omega |\sigma_h|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

En particulier $\int_\Omega (T_{h,2}\,\vec{f}_h) \cdot \vec{f}_h \, dx = 0$ implique $\sigma_h = 0$.
Mais si $\sigma_h = 0$, et comme $(\nu\sigma_h - p_h\delta) \in H(,\Omega)$, alors $p_h \in H^1(\Omega)$ implique $\vec{\nabla} p_h \in (L^2(\Omega))^2$.

Mais comme $p_{h|K} \in P_0(K)$, il s'en suit $\vec{\nabla} p_h = 0$ dans Ω et donc $p_h =$ constante dans $\mathring{\Omega}$. Mais puisque $p_h \in L^2_0(\Omega)$, alors $p_h = 0$. Donc si $\sigma_h = 0$, cela entraîne que $\vec{f_h} = 0$ par l'équation $(2.29)_{(ii)}$. En conclusion, si $\vec{f_h} \neq 0$ alors

$$\nu \int_\Omega |\sigma_h|^2 > 0$$

et $\int_\Omega \left(T_{h,2}\vec{f_h}\right) \cdot \vec{f_h}\, dx > 0$. À fortiori, l'application $T_{h,2|Y_h} : Y_h \longrightarrow Y_h$ est injective donc inversible.

On conclut que :

$$\begin{aligned} \vec{u}_h(t) &= \exp(t\,A_h)\vec{u}_{0,h} - \int_0^t \exp((t-s)A_h)A_h T_{h,2}\vec{f}(s)\,ds \\ \vec{u}_h(t) &= \vec{u}_{0,h}, \text{ avec } A_h = -\left(T_{h,2|Y_h}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

$\vec{u}_h$ étant ainsi déterminé, le système (2.19) peut être employé pour déterminer (σ_h, p_h). ∎

Nous avons donc démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème mixte discret.

2.4.1 Estimations d'erreurs

Notre objectif, dans cette section, est de démontrer certaines estimations d'erreurs. Dans ce qui suit, $((\sigma, p), \vec{u})$ désigne la solution du problème continu (2.12) et $((\sigma_h, p_h), \vec{u}_h)$ désigne la solution du problème semi-discret (2.19). $(\nu\sigma(t) - p(t)\delta) \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$, $\forall' t \in I$, car $(\sigma, p) \in L^2(0, T; X)$.

Dans la suite, on a besoin d'introduire l'opérateur d'interpolation de Raviart-Thomas et l'appliquer à $(\nu\sigma(t) - p(t)\delta)$. Pour cela il faut que $(\nu\sigma(t) - p(t)\delta) \in W^{1,q}(\Omega)^4$ pour un certain $q > 1$, $\forall' t \in I$. Ceci est vrai d'après les hypothèses (2.18).

Définissons :

$$\pi_h(\sigma(t), p(t)) := \left(\frac{1}{\nu}\left[\pi_h^1\left(\nu\sigma(t) - p(t)\delta\right) + \rho_h\left(p(t)\right)\delta\right],\ \rho_h\left(p(t)\right)\right), \quad \forall' t \in I,$$

où nous avons ([13] p.87) :

1°) $\forall K \in \mathcal{T}_h : \frac{1}{\nu}\left[\pi_h^1\left(\nu\sigma(t) - p(t)\delta\right) + \rho_h\left(p(t)\right)\delta\right]_{|K} = \frac{1}{\nu}\left[\pi_K^1\left(\nu\sigma(t) - p(t)\delta\right)_{|K} + \rho_h\, p(t)_{|K}\,\delta\right] \in RT_0(K)^2$;

π_h^1 dénote l'opérateur d'interpolation de Raviart-Thomas [9] et π_K^1 sa restriction au triangle K.

2°) ρ_h désigne l'opérateur de projection orthogonale de $L_0^2(\Omega)$ sur le sous-espace $\{q_h \in L_0^2(\Omega)\ \ q_{h|K} \in P_0(K),\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$ i.e. :

$$(\rho_h\, q)_{|K} := \rho_K\, q := \frac{1}{|K|}\int_K q\, dx, \ \ \forall K \in \mathcal{T}_h\ .$$

Pour notre étude sur l'estimation d'erreur on va travailler dans le cas où $\vec{u}_h(0) = P_h\vec{u}(0)$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.4.3 *Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6. *Alors :*

$$\|\sigma(0) - \sigma_h(0)\|_{0,\Omega} \le \|\sigma(0) - \sigma_h^*(0)\|_{0,\Omega}\,. \tag{2.30}$$

où $((\sigma(0), p(0))\,, \vec{u}(0))$ désigne la solution du problème mixte (2.12) *à l'instant $t = 0$, et $(\sigma_h^*(t), p_h^*(t)) := \pi_h(\sigma(t), p(t))$.*

Preuve: Appliquons l'équation $(2.19)_{(i)}$ à l'instant $t = 0$. On obtient

$$\begin{aligned}
\nu\int_\Omega \sigma_h(0) : \tau_h\, dx &= -\int_\Omega (\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot \vec{u}_h(0)\, dx \qquad \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h,\\
&= -\int_\Omega (\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot P_h\vec{u}(0)\, dx,\\
&= -\sum_{K\subset\Omega}(\nu\tau_h - q_h\delta)\int_K P_h\vec{u}(0)\, dx,\\
&= -\sum_{K\subset\Omega}(\nu\tau_h - q_h\delta)\int_K \vec{u}(0)\, dx = -\int_\Omega(\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot\vec{u}(0)\, dx.
\end{aligned}$$

Par l'équation $(2.12)_{(i)}$ à l'instant $t = 0$ on a :

$$-\int_\Omega(\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot\vec{u}(0)\, dx = \nu\int_\Omega \sigma(0) : \tau_h\, dx, \qquad \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h \subset X,$$

on a donc $\forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h$,

$$\nu\int_\Omega (\sigma(0) - \sigma_h(0)) : \tau_h\, dx = 0. \tag{2.31}$$

D'autre part on a

$$\|\sigma(0)-\sigma_h(0)\|_{0,\Omega}^2 = \int_\Omega (\sigma(0)-\sigma_h(0)) : (\sigma(0)-\sigma_h(0))\ dx,$$

$$= \int_\Omega (\sigma(0)-\sigma_h^*(t)) : (\sigma(0)-\sigma_h(0))\ dx + \int_\Omega (\sigma_h^*(t)-\sigma_h(0)) : (\sigma(0)-\sigma_h(0))\ dx$$

Si on applique (2.31) avec $\tau_h = \sigma_h^*(0)-\sigma_h(0) \in RT_0(K)^2$ au membre de droite, on obtient :

$$\begin{aligned} \|\sigma(0)-\sigma_h(0)\|_{0,\Omega}^2 &= \int_\Omega (\sigma(0)-\sigma_h^*(0)) : (\sigma(0)-\sigma_h(0))\ dx \\ &\leq \|\sigma(0)-\sigma_h(0)\|_{0,\Omega} \|\sigma(0)-\sigma_h^*(0)\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|\sigma(0)-\sigma_h(0)\|_{0,\Omega} \leq \|\sigma(0)-\sigma_h^*(0)\|_{0,\Omega}.$$

■

Remarque 2.4.4 $\sigma(0)$ *a bien un sens car des hypothèses* (2.18) *suit*

$$\vec{u} \in C\left([0,T]; \left(H^{2,\alpha}(\Omega)\right)^2\right)$$

et donc

$$\sigma \in C\left([0,T]; \left(H^{1,\alpha}(\Omega)\right)^{2\times 2}\right).$$

Soit $(\vec{u}(t), p(t))$ la solution de (2.1) , pour t fixé. Posons

$$\left((\tilde{\sigma}_h(t), \tilde{p}_h(t)); \vec{\tilde{u}}_h(t)\right) = T_h(-\nu\Delta\vec{u}(t) + \vec{\mathrm{grad}}\, p(t)),$$

c'est-à-dire que $\left((\tilde{\sigma}_h(t), \tilde{p}_h(t)); \vec{\tilde{u}}_h(t)\right)$ est la solution du problème semi-discret suivant :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \tilde{\sigma}_h(t) : \tau_h\ dx + \int_\Omega\ div(\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot \vec{\tilde{u}}_h(t)\ dx = 0, & ,\forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \int_\Omega\ div\,(\nu\tilde{\sigma}_h(t) - \tilde{p}_h(t)\delta)\cdot \vec{v}_h\, dx + \int_\Omega(-\nu\Delta\vec{u}(t) + \vec{\mathrm{grad}}\,p(t))\cdot\vec{v}_h\ dx = 0, & \forall' t \in I, \forall \vec{v}_h \in Y_h. \end{cases}$$

Retournons pour quelques instants au problème continu (2.1) et posons :

$$\left((\hat{\sigma}, \hat{p}); \vec{\hat{u}}\right) = T(-\nu\Delta\vec{u} + \vec{\mathrm{grad}}\,p),$$

c'est-à-dire $\left((\hat{\sigma},\hat{p})\,;\vec{\hat{u}}\right)$ est la solution du problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \hat{\sigma}(t) : \tau \; dx + \int_\Omega \; div(\nu\tau - q\delta)\cdot \vec{\hat{u}}(t)\; dx = 0 \qquad\quad \forall' t\in I, \forall\,(\tau,q)\in X, \\ \\ \int_\Omega \; div\,(\nu\hat{\sigma}(t) - \hat{p}(t)\delta)\cdot \vec{v}\,dx + \int_\Omega (-\nu\Delta\vec{u}(t) + \vec{\mathrm{grad}}\,p(t))\cdot\vec{v}\; dx = 0 \; \forall' t\in I, \forall \vec{v}\in Y. \end{array}\right.$$

Comme

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \nu\Delta\vec{u} + \vec{\mathrm{grad}}\; p = f$$

on a alors

$$-\nu\Delta\vec{u} + \vec{\mathrm{grad}}\; p = f - \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$$

il s'en suit que

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \hat{\sigma}(t) : \tau \; dx + \int_\Omega \; div(\nu\tau - q\delta)\cdot \vec{\hat{u}}(t)\; dx = 0 \;, \qquad\quad \forall' t\in I, \forall\,(\tau,q)\in X, \\ \\ \int_\Omega \; div\,(\nu\hat{\sigma}(t) - \hat{p}(t)\delta)\cdot \vec{v}\,dx + \int_\Omega (f(t) - \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}(t))\cdot\vec{v}\; dx = 0 \;, \forall' t\in I, \forall \vec{v}\in Y, \end{array}\right. \tag{2.32}$$

Et par conséquent, grâce à l'unicité de la solution, on a

$$\left((\hat{\sigma},\hat{p})\,;\vec{\hat{u}}\right) = ((\sigma,p)\,;\vec{u}) = T(-\nu\Delta\vec{u} + \vec{\mathrm{grad}}\,p). \tag{2.33}$$

Définition 2.4.5 *On appelle projection elliptique de* $((\sigma(t),p(t));\vec{u}(t))$ $\forall' t\in I$*, la solution* $((\tilde{\sigma}_h(t),\tilde{p}(t));\vec{\tilde{u}}_h(t))$ *du problème mixte semi-discret stationnaire (t fixé) suivant :*

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \tilde{\sigma}_h(t) : \tau_h \; dx + \int_\Omega \; \mathrm{div}(\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot \vec{\tilde{u}}_h(t)\; dx = 0 \;\; \forall\,(\tau_h,q_h)\in X_h, \\ \\ \int_\Omega \; \mathrm{div}\,(\nu\tilde{\sigma}_h(t) - \tilde{p}_h(t)\delta)\cdot \vec{v}_h\,dx = -\int_\Omega (\vec{f}(t) - \vec{u}_t(t))\cdot\vec{v}_h\; dx \;\; \forall \vec{v}_h\in Y_h. \end{array}\right. \tag{2.34}$$

Avant de démontrer le résultat d'approximation de $((\sigma,p);\vec{u})$ par $((\sigma_h,p_h);\vec{u}_h)$, on a besoin des estimations d'erreurs entre la solution du problème de Stokes et la projection elliptique. On a le résultat suivant :

Proposition 2.4.6 *Soit* $(\mathcal{T}_h)_h$ *une famille régulière de triangulations sur* $\overline{\Omega}$*, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6 *pour un* $\alpha\in\,]1-\eta_0(\omega),1[$*. Il existe une constante* $c>0$ *indépendante de h telle que pour tout* $t\in I$ *:*

$$\|\sigma(t)-\tilde{\sigma}_h(t)\|_{0,\Omega} \le c\; h\;\left(|\vec{u}(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right), \tag{2.35}$$

$$\|\vec{u}(t) - \vec{\tilde{u}}_h(t)\|_{0,\Omega} \leq c\,h\left(|\vec{u}(t)|_{H^1(\Omega)^2} + |\vec{u}(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right) \tag{2.36}$$

et pour la pression on a :

$$\|p(t) - \tilde{p}_h\,(t)\|_{0,\Omega} \leq c\,h(|\vec{u}(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}). \tag{2.37}$$

Preuve: Ceci résulte immédiatement de la définition 2.4.5, (2.33) et des estimations (2.25),(2.26) et (2.27) . ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'estimation de l'erreur $\|\sigma(t) - \sigma_h(t)\|_{0,\Omega}$, en comparant le problème semi-discret (2.19) avec le problème définissant la projection elliptique (2.34).

Théorème 2.4.7 *Soit* $(\mathcal{T}_h)_h$ *une famille régulière de triangulations sur* $\overline{\Omega}$, *jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6 *pour un* $\alpha \in\,]1-\eta_0(\omega), 1[$. *Il existe une constante* $c > 0$ *indépendante de* h *telle que pour tout* $t \in I$:

$$\begin{aligned} &\|\sigma(t) - \sigma_h(t)\|_{0,\Omega} \\ \leq\ & c\,h\left\{\sup_{t\leq T}\left(|\vec{u}(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right) + \left\|\frac{d\vec{u}}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\|\frac{dp}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))}\right\}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Preuve: Avant de commencer la démonstration, rappelons les deux problèmes (2.19) et (2.34) :

le problème semi-discret :

$$\left\{\begin{array}{l} \nu\int_\Omega \sigma_h(t) : \tau_h\,dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot\vec{u}_h(t)\,dx = 0\ \ \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h,\ \forall' t \in I, \\ \\ \int_\Omega \operatorname{div}\,(\nu\sigma_h(t) - p_h(t)\delta)\cdot\vec{v}_h\,dx = -\int_\Omega(\vec{f}(t) - \vec{u}_{h,t}(t))\cdot\vec{v}_h\,dx\ \ \forall\vec{v}_h \in Y_h,\ \forall' t \in I, \\ \\ \vec{u}_h(0) = P_h\vec{u}(0), \end{array}\right. \tag{2.39}$$

et la projection elliptique : $\forall' t \in I$

$$\left\{\begin{array}{l} \nu\int_\Omega \tilde{\sigma}_h(t) : \tau_h\,dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot\vec{\tilde{u}}_h(t)\,dx = 0\ \ \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega \operatorname{div}\,(\nu\tilde{\sigma}_h(t) - \tilde{p}_h(t)\delta)\cdot\vec{v}_h\,dx = -\int_\Omega(\vec{f}(t) - \vec{u}_t(t))\cdot\vec{v}_h\,dx\ \ \forall\vec{v}_h \in Y_h. \end{array}\right. \tag{2.40}$$

Une soustraction de (2.40) de (2.39), nous donne le système aux erreurs suivant :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \varepsilon_h(t) : \tau_h \, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{\theta}_h(t) \, dx = 0, \quad \forall t \in I, \forall \, (\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega \operatorname{div}\left(\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta\right) \cdot \vec{v}_h \, dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}\left(\vec{u}_h\,(t) - \vec{u}(t)\right) \cdot \vec{v}_h \, dx \; \forall t \in I, \forall \vec{v}_h \in Y_h, \end{cases} \tag{2.41}$$

avec

$$\varepsilon_h = \sigma_h - \tilde{\sigma}_h \, , \, \vec{\theta}_h = \vec{u}_h - \tilde{\vec{u}}_h \; , \, \vec{\rho}_h = \vec{u} - \tilde{\vec{u}}_h \, \text{et} \; r_h = p_h - \tilde{p}_h.$$

Ensuite dérivons par rapport à la variable temps la première équation du système (2.41) :

$$\nu \int_\Omega \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial t}(t) : \tau_h \, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t) \, dx = 0, \quad \forall \, (\tau_h, q_h) \in X_h, \; \forall' t \in I \tag{2.42}$$

En prenant $\vec{v}_h = 2 \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}$ dans $(2.41)_{(ii)}$ et $(\tau_h, q_h) = 2\,(\varepsilon_h, r_h)$ dans (2.42), on obtient

$$\begin{cases} 2\nu \int_\Omega \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial t}(t) : \varepsilon_h \, dx + 2\int_\Omega \operatorname{div}(\nu\varepsilon_h - r_h\delta) \cdot \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t) \;\; dx = 0 \\ \\ -2\int_\Omega \operatorname{div}\left(\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta\right) \cdot \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t) dx + 2\int_\Omega \left(\frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t)\right)^2 dx = 2\int_\Omega \frac{\partial \vec{\rho}_h}{\partial t}(t) \cdot \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t) \, dx. \end{cases} \tag{2.43}$$

Après addition membre à membre des équations du système (2.43), on aboutit à

$$2\nu \int_\Omega \frac{\partial \varepsilon_h}{\partial t}(t) : \varepsilon_h \, dx + 2\int_\Omega \left(\frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t)\right)^2 dx = 2\int_\Omega \frac{\partial \vec{\rho}_h}{\partial t}(t) \cdot \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t) \, dx,$$

Donc

$$\begin{aligned} \nu \frac{d}{dt} \int_\Omega \left|\varepsilon_h(t)\right|^2 \; dx + 2\int_\Omega \left(\frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t)\right)^2 dx &= 2\int_\Omega \frac{\partial \vec{\rho}_h}{\partial t}(t) \cdot \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t}(t) \, dx \\ &\leq 2 \left\| \frac{\partial \vec{\rho}_h}{\partial t} \right\|_{0,\Omega} \cdot \left\| \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t} \right\|_{0,\Omega} \\ &\leq \left\| \frac{\partial \vec{\rho}_h}{\partial t} \right\|_{0,\Omega}^2 + \left\| \frac{\partial \, \vec{\theta}_h}{\partial t} \right\|_{0,\Omega}^2 . \end{aligned}$$

Et alors

$$\nu \frac{d}{dt} \int_\Omega \left|\varepsilon_h(t)\right|^2 \; dx + \left\| \frac{d\vec{\theta}_h}{dt} \right\|_{0,\Omega}^2 \leq \left\| \frac{d\vec{\rho}_h}{dt} \right\|_{0,\Omega}^2 . \tag{2.44}$$

En conclusion on a :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |\varepsilon_h(t)|^2 \ dx \leq \frac{1}{\nu}\left\|\frac{d\vec{\rho}_h}{dt}\right\|_{0,\Omega}^2. \tag{2.45}$$

En intégrant (2.45) par rapport à t, nous obtenons

$$\int_\Omega |\varepsilon_h(t)|^2 \ dx - \int_\Omega |\varepsilon_h(0)|^2 \ dx \leq \frac{1}{\nu}\int_0^t \left\|\frac{d\vec{\rho}_h}{dt}\right\|_{0,\Omega}^2 (s)\ ds,$$

Donc

$$\int_\Omega |\varepsilon_h(t)|^2 \ dx \leq \int_\Omega |\varepsilon_h(0)|^2 \ dx + \frac{1}{\nu}\int_0^t \left\|\frac{d\vec{\rho}_h}{dt}\right\|_{0,\Omega}^2 (s)\ ds. \tag{2.46}$$

Or on a

$$\|\varepsilon_h(0)\| = \|\sigma_h(0) - \tilde{\sigma}_h(0)\|_{0,\Omega} \leq \|\sigma_h(0) - \sigma(0)\|_{0,\Omega} + \|\sigma(0) - \tilde{\sigma}_h(0)\|_{0,\Omega}. \tag{2.47}$$

D'après (2.30), et la définition de $\pi_h(\sigma(t), p(t))$, on a

$$\|\sigma_h(0) - \sigma(0)\|_{0,\Omega} \leq \|\sigma(0) - \sigma_h^*(0)\|_{0,\Omega}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\|\sigma(0) - \frac{1}{\nu}\left[\pi_h^1\left(\nu\sigma(0) - p(0)\delta\right) + \rho_h\left(p(0)\right)\delta\right]\right\|_{0,\Omega} \\
&= \left\|\frac{1}{\nu}\left[\left(\nu\sigma(0) - p(0)\right)\delta - \pi_h^1\left(\nu\sigma(0) - p(0)\delta\right)\right] + \frac{1}{\nu}(p(0) - \rho_h\left(p(0)\right)\delta\right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{\nu}\left\|\left(\nu\sigma(0) - p(0)\delta\right) - \pi_h^1\left(\nu\sigma(0) - p(0)\delta\right)\right\|_{0,\Omega} + \frac{\sqrt{2}}{\nu}\left\|p(0) - \rho_h\left(p(0)\right)\right\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Des estimations d'erreurs d'interpolation contenues dans la démonstration du Théorème 4.1.7 de [9], il s'en suit que

$$\|\sigma_h(0) - \sigma(0)\|_{0,\Omega} \leq c\,h\ \left(\left(|\vec{u}(0)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(0)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right). \tag{2.48}$$

De (2.47), (2.48) et (2.35) pour $t = 0$ on a alors :

$$\|\varepsilon_h(0)\|_{0,\Omega} \leq c\,h\ \left(|\vec{u}(0)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(0)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right). \tag{2.49}$$

Revenons maintenant à (2.46) et rappelons que

$$\left\|\frac{\partial\vec{\rho}_h}{\partial t}\right\|_{0,\Omega} = \left\|\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{d\vec{\tilde{u}}_h}{dt}\right\|_{0,\Omega}.$$

Et remplaçant dans (2.46), on aura

$$\|\varepsilon_h(t)\|_{0,\Omega}^2 \le \|\varepsilon_h(0)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \left\|\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{d\vec{\tilde{u}}_h}{dt}\right\|_{0,\Omega}^2 ds.$$

Cette dernière estimation et les estimations $(2.49), (2.36)$ pour le problème dérivé nous donnent :

$$\begin{aligned} &\|\varepsilon_h(t)\|_{0,\Omega}^2 \\ \le \;& c\,h^2 \left(\left(|\vec{u}(0)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + |p(0)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right)^2 + \left(\int_0^t (\left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \left|\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right|_{H^1(\Omega)^2}^2 + \left|\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2)\; ds \right) \right). \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} &\|\sigma_h(t) - \tilde{\sigma}_h(t)\|_{0,\Omega} \\ \le \;& c\,h \left(\left(|\vec{u}(0)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + |p(0)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right) + \left\|\frac{d\vec{u}}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\|\frac{dp}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité triangulaire et l'estimation (2.35) nous donnent

$$\|\sigma(t) - \sigma_h(t)\|_{0,\Omega} \le \|\sigma(t) - \tilde{\sigma}_h(t)\|_{0,\Omega} + \|\tilde{\sigma}_h(t) - \sigma_h(t)\|_{0,\Omega}$$

$$\le c\,h \left\{ \sup_{t\le T} \left(|\vec{u}(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + |p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right) + \left\|\frac{d\vec{u}}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\|\frac{dp}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))} \right\}.$$

■

Proposition 2.4.8 *Soit $\{T_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$. Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $t \in I$:*

$$\|\vec{u}(t) - \vec{u}_h(t)\|_{0,\Omega} \le c \left(\inf_{\vec{v}_h \in Y_h} \|\vec{u}(t) - \vec{v}_h\|_{0,\Omega} + \|\sigma(t) - \sigma_h(t)\|_{0,\Omega} \right). \tag{2.50}$$

Preuve: La même démonstration que celle employée pour démontrer la proposition 4.1.9 [9] ■

Théorème 2.4.9 *Soit $\{T_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition 1.4.6 pour un certain $\alpha \in \,]1-\eta_0(\omega), 1[$. Il existe une* *constante $c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $t \in I$:*

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}(t) - \vec{u}_h(t)\|_{0,\Omega} \\ \leq \;& c\,h \left\{ \sup_{t\leq T} \left(|\vec{u}(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)} + |p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} \right) + \left\| \frac{d\vec{u}}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\| \frac{dp}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))} \right\}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Preuve: On vient de voir que

$$\|\vec{u}(t) - \vec{u}_h(t)\|_{0,\Omega} \leq c \left(\inf_{\vec{v}_h \in Y_h} \|\vec{u}(t) - \vec{v}_h\|_{0,\Omega} + \|\sigma(t) - \sigma_h(t)\|_{0,\Omega} \right).$$

Prenons $\vec{v}_h = P_h\,\vec{u}(t) \in Y_h$, où $\forall t \in I$, $P_h\,\vec{u}(t)$ est la fonction dont la restriction sur chaque triangle K de la triangulation T_h est égale à la moyenne de $\vec{u}(t)$ sur K. À fortiori :

$$\|\vec{u}(t) - \vec{u}_h(t)\|_{0,\Omega} \leq c \left(\|\vec{u}(t) - P_h\,\vec{u}(t)\|_{0,\Omega} + \|\sigma(t) - \sigma_h(t)\|_{0,\Omega} \right). \tag{2.52}$$

Or on sait [9] qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $t \in I$:

$$\|\vec{u}(t) - P_h\,\vec{u}(t)\| \leq c\,h \left(|\vec{u}(t)|_{H^1(\Omega)^2} \right). \tag{2.53}$$

Par conséquent il suit de (2.52), en utilisant cette dernière estimation et l'estimation (2.38) , que :

$$\begin{aligned} & \|\vec{u}(t) - \vec{u}_h(t)\|_{0,\Omega} \\ \leq \;& c\,h \left\{ \sup_{t\leq T} \left(\|\vec{u}(t)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} \right) + \left\| \frac{d\vec{u}}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\| \frac{dp}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))} \right\}. \end{aligned}$$

■

Maintenant, estimons l'erreur sur la pression approchée.

Théorème 2.4.10 *Soit $\{T_h\}$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6 *pour un certain $\alpha \in \,]1 - \eta_0(\omega), 1[$. Il existe une constante $C > 0$ indépendante de h telle que pour tout $t \in I$:*

$$\begin{aligned} & \|p(\cdot) - p_h(\cdot)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\,h \left(\|\vec{u}(\cdot)\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \|p(\cdot)\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))} \right) \\ & + C\,h \left(\|\vec{u}(0)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \|p(0)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} + \left\| \frac{d\vec{u}}{dt}(\cdot) \right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\| \frac{dp}{dt}(\cdot) \right\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))} \right) \end{aligned}$$

Preuve: Avant de commencer la démonstration, rappelons le système aux erreurs (2.41) ,

$$\left\{\begin{array}{l} \nu \int_\Omega \varepsilon_h(t) : \tau_h \, dx + \int_\Omega \operatorname{div}(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{\theta}_h(t)\, dx = 0, \quad \forall t \in I, \forall\, (\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega \operatorname{div}\,(\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}\,(\vec{u}_h\,(t) - \vec{u}(t)) \cdot \vec{v}_h \, dx \;\forall t \in I, \forall \vec{v}_h \in Y_h, \end{array}\right. \tag{2.54}$$

avec

$$\varepsilon_h = \sigma_h - \tilde{\sigma}_h \, , \, \vec{\theta}_h = \vec{u}_h - \vec{\tilde{u}}_h \;\; , \, \vec{\rho}_h = \vec{u} - \vec{\tilde{u}}_h \text{ et } r_h = p_h - \tilde{p}_h.$$

Par la formule de Green, pour tout $\vec{v} \in H_0^1(\Omega)^2$, on a $\forall t \in I$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla r_h(t) \cdot \vec{v}\, dx &= \int_\Omega \operatorname{div}\, r_h(t)\,\delta \cdot \vec{v}\, dx \\ &= -\int_\Omega r_h(t)\,\delta : \nabla \vec{v}\, dx \\ &= \int_\Omega (\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta) : \nabla\vec{v}\, dx - \int_\Omega \nu\varepsilon_h(t) : \nabla \vec{v}\, dx. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Or, il existe $C > 0$ telle que :

$$\left| \int_\Omega \nu\varepsilon_h(t) : \nabla \vec{v}\, dx \right| \leq C\, \|\varepsilon_h(t)\|_{0,\Omega} \cdot \, \|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)^2} \, . \tag{2.56}$$

On a aussi $\forall \vec{v} \in H_0^1(\Omega)^2$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta) : \nabla \vec{v}\, dx &= -\int_\Omega \operatorname{div}\,(\nu\varepsilon_h(t) \;- r_h(t)\,\delta) \cdot \vec{v}\, dx \\ &= -\int_\Omega \operatorname{div}\,(\nu\varepsilon_h(t) \;- r_h(t)\,\delta) \cdot P_h\vec{v}\, dx \\ &= \int_\Omega (\vec{u}_t\,(t) - \vec{u}_{h,t}(t)) \cdot P_h \vec{v}\; dx \end{aligned} \tag{2.57}$$

par $(2.54)_{(ii)}$.

Par conséquent il existe $C > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta) : \nabla \vec{v}\, dx \right| &\leq \|\vec{u}_t\,(t) - \vec{u}_{h,t}(t)\|_{0,\Omega} \cdot \|P_h \vec{v}\|_{0,\Omega} \\ &\leq C\, \|\vec{u}_t\,(t) - \vec{u}_{h,t}(t)\|_{0,\Omega} \cdot \|\vec{v}\|_{H_0^1(\Omega)^2} \, . \end{aligned} \tag{2.58}$$

De (2.55) et des estimations (2.56) et (2.57) , suit :

$$\|\nabla r_h(t)\|_{H^{-1}(\Omega)^2} \leq C \ \left(\|\vec{u}_t\,(t) - \vec{u}_{h,t}(t)\|_{0,\Omega} + \|\varepsilon_h(t)\|_{0,\Omega}\right). \tag{2.59}$$

D'autre part [47], [15] p.20, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $w \in L_0^2(\Omega)$:

$$\|w\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C \ \|\nabla w\|_{H^{-1}(\Omega)^2} = \sup_{\vec{v} \in H_0^1(\Omega)^2} \frac{\int_\Omega \nabla w \cdot \vec{v}\, dx}{\|\vec{v}\|_{H^1(\Omega)^2}}. \tag{2.60}$$

Et donc, d'après (2.59) , on a

$$\|r_h(t)\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C \ \left(\|\vec{u}_t\,(t) - \vec{u}_{h,t}(t)\|_{0,\Omega} + \|\varepsilon_h(t)\|_{0,\Omega}\right), \tag{2.61}$$

Puisque $\vec{\theta}_h = \vec{u}_h - \vec{\tilde{u}}_h$ et $\vec{\rho}_h = \vec{u} - \vec{\tilde{u}}_h$, on peut aussi écrire :

$$\|r_h(t)\|_{L_0^2(\Omega)} \leq C \ \left(\left\|\vec{\theta}_{h,t}(t)\right\|_{0,\Omega} + \|\vec{\rho}_{h,t}(t)\|_{0,\Omega} + \|\varepsilon_h(t)\|_{0,\Omega}\right). \tag{2.62}$$

Or on sait d'après (2.44) que :

$$\nu \frac{d}{dt}\int_\Omega |\varepsilon_h(t)|^2 \ dx + \left\|\frac{d\vec{\theta}_h}{dt}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \left\|\frac{d\vec{\rho}_h}{dt}(t)\right\|_{0,\Omega}^2. \tag{2.63}$$

En intégrant (2.63) suivant la variable $t \in I$, on obtient

$$\nu \ \|\varepsilon_h(t)\|_{0,\Omega}^2 \ + \int_0^t \left\|\frac{d\vec{\theta}_h}{dt}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 \ dt \leq \int_0^t \left\|\frac{d\vec{\rho}_h}{dt}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 \ dt + \nu \, \|\varepsilon_h(0)\|_{0,\Omega}^2. \tag{2.64}$$

Réécrivons fois le système aux erreurs (2.54) en introduisant $\vec{\theta}_h$ et $\vec{\rho}_h$ dans la seconde équation:

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \varepsilon_h(t) : \tau_h \ dx + \int_\Omega \ \mathrm{div}(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{\theta}_h(t) \ dx = 0 \ \ \forall t \in I, \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega \ \mathrm{div}\,(\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx = \int_\Omega \vec{\theta}_{h,t}(t) \cdot \vec{v}_h \ dx - \int_\Omega \vec{\rho}_{h,t}(t) \cdot \vec{v}_h \ dx \ \forall t \in I, \forall \vec{v}_h \in Y_h. \end{cases}$$

Prenons $\vec{v}_h = \vec{\theta}_h(t)$, $\tau_h = \varepsilon_h(t)$ et $q_h = r_h(t)$. On obtient donc

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega |\varepsilon_h(t)\,|^2 \, dx + \int_\Omega \ \mathrm{div}\,(\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta) \cdot \vec{\theta}_h(t) \ dx = 0, \\ \\ \int_\Omega \ \mathrm{div}\,(\nu\varepsilon_h(t) - r_h(t)\delta) \cdot \vec{\theta}_h(t) \, dx = \int_\Omega \vec{\theta}_{h,t}(t) \cdot \vec{\theta}_h(t) \, dx - \int_\Omega \vec{\rho}_{h,t}(t) \cdot \vec{\theta}_h(t) \ dx. \end{cases}$$

Ce système d'équations entraîne :

$$\nu \int_\Omega |\varepsilon_h(t)\,|^2\,dx + \int_\Omega \vec{\theta}_{h,t}(t)\cdot\vec{\theta}_h(t)\,dx = \int_\Omega \vec{\rho}_{h,t}(t)\cdot\vec{\theta}_h(t)\;dx,$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\nu\;\|\varepsilon_h(t)\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\,\vec{\theta}_h(t)\right\|^2_{0,\Omega} &= \int_\Omega \vec{\rho}_{h,t}(t)\cdot\vec{\theta}_h(t)\;dx \\
&\leq \left\|\vec{\theta}_h(t)\right\|_{0,\Omega}\cdot\|\vec{\rho}_{h,t}(t)\|_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{\theta}_h(t)\right\|^2_{0,\Omega} + \|\vec{\rho}_{h,t}(t)\|^2_{0,\Omega}\right).
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Gronwall il s'en suit qu'il existe $C>0$:

$$\nu\int_0^T \|\varepsilon_h(t)\|^2_{0,\Omega}\;dt + \left\|\,\vec{\theta}_h(t)\right\|^2_{0,\Omega} \leq C\;\left(\int_0^T \|\vec{\rho}_{h,t}(t)\|^2_{0,\Omega}\;dt + \left\|\vec{\theta}_h(0)\right\|^2_{0,\Omega}\right). \tag{2.65}$$

Par (2.62) , on a

$$\int_0^T \|r_h(t)\|^2_{L^2_0(\Omega)}\;dt \leq C\int_0^T \left(\left\|\vec{\theta}_{h,t}(t)\right\|^2_{0,\Omega} + \|\vec{\rho}_{h,t}(t)\|^2_{0,\Omega} + \|\varepsilon_h(t)\|^2_{0,\Omega}\right)dt. \tag{2.66}$$

D'après (2.64) , (2.65), on obtient

$$\int_0^T \|r_h(t)\|^2_{L^2_0(\Omega)}\;dt \leq C\;\left(\int_0^T \|\vec{\rho}_{h,t}(t)\|^2_{0,\Omega}\;dt + \|\varepsilon_h(0)\|^2_{0,\Omega} + \left\|\vec{\theta}_h(0)\right\|^2_{0,\Omega}\right). \tag{2.67}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{\theta}_h(0)\right\|_{0,\Omega} &\leq \|\vec{u}_h(0)-\vec{u}(0)\|_{0,\Omega} + \left\|\vec{u}(0)-\tilde{\vec{u}}_h(0)\right\|_{0,\Omega} \\
&= \|P_h\vec{u}(0)-\vec{u}(0)\|_{0,\Omega} + \left\|\vec{u}(0)-\tilde{\vec{u}}_h(0)\right\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

De l'inégalité précédente, de (2.53) , et de l'estimée (2.36) , suit

$$\left\|\vec{\theta}_h(0)\right\|_{0,\Omega} = \left\|\vec{u}_h(0)-\tilde{\vec{u}}_h(0)\right\|_{0,\Omega} \leq C\,h\left(\|\vec{u}(0)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \|p(0)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right). \tag{2.68}$$

Par (2.49) :

$$\|\varepsilon_h(0)\| = \|\sigma_h(0)-\tilde{\sigma}_h(0)\|_{0,\Omega} \leq C\,h\;\left(\|\vec{u}(0)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \|p(0)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right). \tag{2.69}$$

De plus, par (2.36) , appliquée au problème dérivé

$$\|\vec{\rho}_{h,t}(t)\| = \left\|\vec{u}_t(t) - \tilde{\vec{u}}_{h,t}(t)\right\|_{0,\Omega} \leq C\,h\left(\left\|\frac{d\vec{u}}{dt}(t)\right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \left\|\frac{dp}{dt}(t)\right\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right). \qquad (2.70)$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\|p(t) - p_h(t)\|_{0,\Omega} \leq \|p(t) - \tilde{p}_h(t)\|_{0,\Omega} + \|\tilde{p}_h(t) - p_h(t)\|_{0,\Omega}\,,$$

Comme $r_h(t) = \tilde{p}_h(t) - p_h(t)$, en élevant les deux membres au carré, on a :

$$\|p(t) - p_h(t)\|^2_{0,\Omega} \leq 2\ \|p(t) - \tilde{p}_h(t)\|^2_{0,\Omega} + 2\ \|r_h(t)\|^2_{0,\Omega}\,.$$

Et alors

$$\int_0^T \|p(t) - p_h(t)\|^2_{0,\Omega}\ dt \leq 2\int_0^T \|p(t) - \tilde{p}_h(t)\|^2_{0,\Omega}\ dt + 2\int_0^T \|r_h(t)\|^2_{0,\Omega}\ dt. \qquad (2.71)$$

Ce qui implique d'après (2.37), (2.67) , (2.68) , (2.69) et (2.70)

$$\int_0^T \|p(t) - p_h(t)\|^2_{0,\Omega}\ dt \leq C\,h^2\left(\int_0^T \|\vec{u}(t)\|^2_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}\,dt + \int_0^T \|p(t)\|^2_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\ dt\right)$$
$$+C\,h^2\left(\|\vec{u}(0)\|^2_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \|p(0)\|^2_{H^{1,\alpha}(\Omega)} + \int_0^T \left\|\frac{d\vec{u}}{dt}(t)\right\|^2_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} dt + \int_0^T \left\|\frac{dp}{dt}(t)\right\|^2_{H^{1,\alpha}(\Omega)} dt\right).$$

Autrement dit, on a donc :

$$\|p(t) - p_h(t)\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\,h\left(\|\vec{u}(t)\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \|p(t)\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))}\right)$$
$$+C\,h\left(\|\vec{u}(0)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \|p(0)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} + \left\|\frac{d\vec{u}}{dt}(t)\right\|_{L^2(0,T;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\|\frac{dp}{dt}(t)\right\|_{L^2(0,T;H^{1,\alpha}(\Omega))}\right).$$

■

2.5 Problème complètement discrétisé

Pour le problème complètement discrétisé nous subdivisons l'intervalle de temps $[0,T]$ en N sous-intervalles $[t_{n-1}, t_n]$ (n étant un nombre entier positif ou nul), tels que :

$$0 = t_0 \leq \cdots \leq t_n < \cdots \leq t_N = T,$$

Avec $k = t_n - t_{n-1}$ dénotant le pas de temps fixe. Notons par $\vec{u}_h^n$ l'approximation de la vitesse à l'instant $t_n = nk$. Pour l'approximation de $\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t}$ à l'instant t_n, nous utilisons la formule suivante :

$$\bar{\partial}\vec{u}_h^n = \frac{(\vec{u}_h^n - \vec{u}_h^{n-1})}{k}.$$

2.5.1 Schéma de Euler implicite

Nous allons étudier le problème de Stokes complètement discrétisé en utilisant la méthode d'Euler implicite. Ainsi le problème discret des équations de Stokes instationnaires s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \sigma_h^n : \tau_h \, dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{u}_h^n \, dx = 0, & \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h, \forall n \geq 0 \\ \\ \int_\Omega div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx + \int_\Omega (\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n) \cdot \vec{v}_h \, dx = 0, & \forall \vec{v}_h \in Y_h, \forall n \geq 1 \\ \\ \vec{u}_h^0 = \vec{u}_{0,h}. \end{cases} \tag{2.72}$$

Proposition 2.5.1 *Le problème (2.72) possède une et une seule solution* $((\sigma_h^n, p_h^n), \vec{u}_h^n) \in X_h \times Y_h$.

Preuve: Réécrivons (2.72) en posant :

$$F(\vec{v}_h) := -\int_\Omega (\vec{f}(t_n) + \frac{1}{k}\vec{u}_h^{n-1}) \cdot \vec{v}_h \, dx = 0, \ \forall \vec{v}_h \in Y_h.$$

Donc

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \sigma_h^n : \tau_h \, dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{u}_h^n \, dx = 0, & \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx - \frac{1}{k}\int_\Omega \vec{u}_h^n \cdot \vec{v}_h \, dx = F(\vec{v}_h), & \forall \vec{v}_h \in Y_h. \end{cases} \tag{2.73}$$

Considérons l'application qui associe à chaque élément $((\sigma_h^n, p_h^n), \vec{u}_h^n) \in X_h \times Y_h$, l'élément de l'espace dual $X_h' \times Y_h'$:

$$\begin{pmatrix} (\tau_h, q_h) \longmapsto \nu \int_\Omega \sigma_h^n : \tau_h \, dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{u}_h^n \, dx \\ \\ \vec{v}_h \longmapsto \int_\Omega div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx - \frac{1}{k}\int_\Omega \vec{u}_h^n \cdot \vec{v}_h \, dx \end{pmatrix}.$$

Notons cet élément de $X_h' \times Y_h'$, $\Phi\,((\sigma_h^n, p_h^n), \vec{u}_h^n)$. Puisque Φ est linéaire de $X_h \times Y_h$ dans son dual, ces deux espaces étant de même dimension, le fait de montrer que Φ est injective est suffisant pour établir sa bijectivité. Soit alors $((\sigma_h^n, p_h^n), \vec{u}_h^n)$ tel que :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \sigma_h^n : \tau_h \, dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{u}_h^n \, dx = 0, \\ \\ \int_\Omega \, div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx - \frac{1}{k}\int_\Omega \vec{u}_h^n \cdot \vec{v}_h \, dx = 0, \end{cases} \tag{2.74}$$

$\forall\,((\tau_h, q_h), \vec{v}_h) \in X_h \times Y_h$. Prenons dans (2.74) :

$$\tau_h = \sigma_h^n,\ q_h = p_h^n \text{ et } \vec{v}_h = \vec{u}_h^n.$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega |\sigma_h^n|^2 \, dx + \int_\Omega div(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) \cdot \vec{u}_h^n \, dx = 0 \\ \\ \int_\Omega div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) \cdot \vec{u}_h^n \, dx = \frac{1}{k}\int_\Omega |\vec{u}_h^n|^2 \, dx, \end{cases} \tag{2.75}$$

et donc :

$$\nu \int_\Omega |\sigma_h^n|^2 \, dx + \frac{1}{k}\int_\Omega |\vec{u}_h^n|^2 \, dx = 0.$$

Ce qui implique $\vec{u}_h^n = 0$ et $\sigma_h^n = 0$. Maintenant, il nous reste à montrer que $p_h^n = 0$. On a $p_{h|K}^n = cte$, et du fait que $\sigma_h^n = 0$, il s'en suit que $p_h^n\delta \in H(div, \Omega)$ et donc $p_h^n = cte$ sur Ω, comme $p_h^n \in L_0^2(\Omega)$ cette constante ne peut être que nulle. ■

2.5.2 Stabilité du schéma implicite

Avant de passer à la partie concernant l'estimation de l'erreur, nous allons vérifier la stabilité du schéma (2.72), et nous commençons par la majoration des champs de vitesse :

Proposition 2.5.2 *Supposant $k \leq \frac{1}{2}$, on a :*

$$\left\|\vec{u}_h^N\right\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2}\exp(2)\left(\left\|\vec{u}_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} k\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2}\right) \tag{2.76}$$

Preuve: Réécrivant le problème (2.72), on a :

$$\left\{\begin{array}{ll} \nu\int_\Omega \sigma_h^n : \tau_h\, dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot\vec{u}_h^n\, dx = 0, & \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta)\cdot\vec{v}_h\, dx + \int_\Omega(\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n)\cdot\vec{v}_h\, dx = 0, & \forall\vec{v}_h \in Y_h. \end{array}\right. \tag{2.77}$$

Prenons alors $\vec{v}_h = \vec{u}_h^n$ dans $(2.77, ii)$, donc :

$$\begin{aligned} \int_\Omega div(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta)\cdot\vec{u}_h^n\, dx &= -\int_\Omega(\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n)\cdot\vec{u}_h^n\, dx \\ &= -\int_\Omega \vec{f}(t_n)\cdot\vec{u}_h^n\, dx + \int_\Omega \bar{\partial}\vec{u}_h^n\cdot\vec{u}_h^n\, dx \\ &= -\int_\Omega \vec{f}(t_n)\cdot\vec{u}_h^n\, dx + \int_\Omega \frac{\vec{u}_h^n - \vec{u}_h^{n-1}}{k}\cdot\vec{u}_h^n\, dx \\ &= -\int_\Omega \vec{f}(t_n)\cdot\vec{u}_h^n\, dx + \frac{1}{k}\int_\Omega |\vec{u}_h^n|^2\ dx - \frac{1}{k}\int_\Omega \vec{u}_h^n\cdot\vec{u}_h^{n-1}\, dx. \end{aligned}$$

Mais si on prend $\tau_h = \sigma_h^n$ et $q_h = p_h^n$ dans $(2.77, i)$, et en utilisant l'égalité précédente, on obtient :

$$\nu\int_\Omega |\sigma_h^n|^2 + \frac{1}{k}\int_\Omega |\vec{u}_h^n|^2\ dx - \frac{1}{k}\int_\Omega \vec{u}_h^n\cdot\vec{u}_h^{n-1}\, dx = \int_\Omega \vec{f}(t_n)\cdot\vec{u}_h^n\, dx,$$

et alors :

$$\begin{aligned} \nu\int_\Omega |\sigma_h^n|^2 + \frac{1}{k}\int_\Omega |\vec{u}_h^n|^2\ dx &= \frac{1}{k}\int_\Omega \vec{u}_h^n\cdot\vec{u}_h^{n-1}\, dx + \int_\Omega \vec{f}(t_n)\cdot\vec{u}_h^n\, dx \\ &\leq \int_\Omega \vec{f}(t_n)\cdot\vec{u}_h^n\, dx + \frac{1}{2k}\int_\Omega |\vec{u}_h^n|^2\ dx + \frac{1}{2k}\int_\Omega \left|\vec{u}_h^{n-1}\right|^2\ dx. \end{aligned}$$

À fortiori on a

$$\frac{1}{2k}\int_\Omega |\vec{u}_h^n|^2\ dx \leq \frac{1}{2k}\int_\Omega \left|\vec{u}_h^{n-1}\right|^2\ dx + \int_\Omega \vec{f}(t_n)\cdot\vec{u}_h^n\, dx,$$

d'où

$$\|\vec{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq \left\|\vec{u}_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + 2k\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega} \cdot \|\vec{u}_h^n\|_{0,\Omega}.$$

Sommant ces inégalités depuis $n = 1$ jusqu'à N, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{N} \|\vec{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \left(\left\|\vec{u}_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + 2k\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega} \cdot \|\vec{u}_h^n\|_{0,\Omega}\right).$$

Donc :

$$\left\|\vec{u}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k\sum_{n=1}^{N}\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 + k\sum_{n=1}^{N}\|\vec{u}_h^n\|^2.$$

Dans le but d'appliquer l'inégalité de Gronwall discrète, faisons passer le terme $\left\|\vec{u}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2$ dans le membre de gauche. Nous obtenons :

$$(1-k)\left\|\vec{u}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k\sum_{n=1}^{N}\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega} + k\sum_{n=1}^{N-1}\|\vec{u}_h^n\|.$$

Supposant dans la suite que $k \leq \frac{1}{2}$ ce qui n'est pas trop gênant, on a donc :

$$\left\|\vec{u}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\left(\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k\sum_{n=1}^{N}\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 + k\sum_{n=1}^{N-1}\|\vec{u}_h^n\|^2\right).$$

Arrivant à ce stade, on peut appliquer l'inégalité de Gronwall et il s'en suit :

$$\left\|\vec{u}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \exp\left(2k\sum_{n=1}^{N-1}1\right)\left(2\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + 2k\sum_{n=1}^{N}\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right).$$

Alors :

$$\left\|\vec{u}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\exp(2T)\left(\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k\sum_{n=1}^{N}\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right).$$

D'où le résultat 2.76. ■

Pour les σ_h^n, on a la majoration suivante :

Proposition 2.5.3 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} k\|\sigma_h^n\|_{0,\Omega}^2} \leq C\left(\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega} + \sqrt{k\sum_{n=1}^{N}\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2}\right) \tag{2.78}$$

Preuve: Prenons dans (2.72) :

$$\tau_h = \sigma_h^n,\ q_h = p_h^n \text{ et } \vec{v}_h = \vec{u}_h^n,$$

on a :

$$\nu \int_\Omega |\sigma_h^n|^2 \ dx - \int_\Omega (\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n) \cdot \vec{u}_h^n \ dx = 0.$$

Multiplions les deux membres par le pas de temps k :

$$k \int_\Omega \nu\, |\sigma_h^n|^2 \ dx - k \int_\Omega (\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n) \cdot \vec{u}_h^n \ dx = 0.$$

Sommant ces équations membre à membre pour $n = 1...N$, nous obtenons :

$$\nu \sum_{n=1}^{N} k \left\|\sigma_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega \left(\vec{u}_h^n - \vec{u}_h^{n-1}\right) \cdot \vec{u}_h^n \ dx = k \int_\Omega \vec{f}(t_n) \cdot \vec{u}_h^n \ dx. \tag{2.79}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\vec{u}_h^n - \vec{u}_h^{n-1}\right) \cdot \vec{u}_h^n \ dx &= \int_\Omega |\vec{u}_h^n|^2 \ dx - \int_\Omega \vec{u}_h^{n-1} \cdot \vec{u}_h^n \ dx \\
&\geq \left\|\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\|\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\|\vec{u}_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 \\
&= \frac{1}{2} \left\|\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\|\vec{u}_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 .
\end{aligned}$$

il suit alors de (2.79) , qu'à fortiori :

$$\nu \sum_{n=1}^{N} k \left\|\sigma_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \left\|\vec{u}_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2} \left\|\vec{u}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega} \cdot \left\|\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega} . \tag{2.80}$$

Majorons le membre de droite de (2.80) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega} \cdot \|\vec{u}_h^n\|_{0,\Omega} &= \sum_{n=1}^{N} k^{\frac{1}{2}} \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega} \cdot k^{\frac{1}{2}} \|\vec{u}_h^n\|_{0,\Omega} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} k \|\vec{u}_h^n\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} Cte \left(\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k \sum_{n=1}^{N} \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \text{par l'inégalité (2.76) ,} \\
&\leq Cte \left(\sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k \sum_{n=1}^{N} \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Cte \left(\sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 + \|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k \sum_{n=1}^{N} \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right).
\end{aligned}$$

Maintenant remplaçons dans (2.80) . On obtient :

$$\nu \sum_{n=1}^{N} k \|\sigma_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\vec{u}_h^N\|_{0,\Omega}^2 \leq Cte \left(\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k \sum_{n=1}^{N} \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right).$$

À fortiori :

$$\sum_{n=1}^{N} k \|\sigma_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq Cte \left(\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega}^2 + k \sum_{n=1}^{N} \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right).$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de majorer $\|p_h^n\|_{0,\Omega}$.

Proposition 2.5.4 *Il existe une constante $C > 0$, telle que :*

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} k \|p_h^n\|_{0,\Omega}^2} \leq C \left(\|\vec{u}_h^0\|_{0,\Omega} + \|\sigma_h^0\|_{0,\Omega} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2}\right)$$

Pour démontrer ce résultat on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.5.5 *[48] Il existe une constante $C > 0$, telle que $\forall \tau \in H(div;\Omega)^2$, satisfaisant :*

$$\int_\Omega tr(\tau)\, dx = 0 \tag{2.81}$$

on ait :

$$\|\tau\|_{0,\Omega} \leq C\left(\left\|\tau^D\right\|_{0,\Omega} + \|div(\tau)\|_{0,\Omega}\right) \tag{2.82}$$

Preuve: Pour utiliser ce résultat sur le tenseur $(\sigma_h^n - p_h^n\delta)$, il faut vérifier qu'on a bien la condition (2.81). Prenons dans $(2.72)_{(i)}$:

$$\tau_h = \delta \text{ et } q_h = 0 \text{ , où } \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent la première équation de (2.72) se réduit à

$$\upsilon \int_\Omega tr(\sigma_h^n)\ dx = 0$$

Et puisque $p_h^n \in L_0^2(\Omega)$, donc on a bien

$$\int_\Omega tr(\sigma_h^n - p_h^n\delta)\ dx = 0.$$

On peut alors appliquer le résultat (2.82), d'où :

$$\|\sigma_h^n - p_h^n\delta\|_{0,\Omega} \leq C\left(\left\|(\sigma_h^n - p_h^n\delta)^D\right\|_{0,\Omega} + \|div(\sigma_h^n - p_h^n\delta)\|_{0,\Omega}\right). \tag{2.83}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(\sigma_h^n - p_h^n\delta)^D &= (\sigma_h^n - p_h^n\delta) - \frac{1}{2}tr(\sigma_h^n - p_h^n\delta)\,\delta \\
&= \begin{pmatrix} \sigma_{h,11}^n - p_h^n & \sigma_{h,12}^n \\ \sigma_{h,21}^n & \sigma_{h,22}^n - p_h^n \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\sigma_{h,11}^n + \sigma_{h,22}^n - 2p_h^n)\,\delta \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_{h,11}^n - \frac{1}{2}\sigma_{h,22}^n & \sigma_{h,12}^n \\ \sigma_{h,21}^n & \frac{1}{2}\sigma_{h,22}^n - \frac{1}{2}\sigma_{h,11}^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Désignant par $\|.\|_F$ la norme de Frobénius, on a $\forall x \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
& \left\|(\sigma_h^n - p_h^n\delta)^D(x)\right\|_F^2 \\
= \ & \frac{1}{2}\left(\sigma_{h,11}^n(x)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_{h,22}^n(x)\right)^2 + \left(\sigma_{h,12}^n(x)\right)^2 + \left(\sigma_{h,21}^n(x)\right)^2 - \sigma_{h,11}^n(x)\,\sigma_{h,22}^n(x) \\
\leq \ & \left(\sigma_{h,11}^n(x)\right)^2 + \left(\sigma_{h,22}^n(x)\right)^2 + \left(\sigma_{h,12}^n(x)\right)^2 + \left(\sigma_{h,21}^n(x)\right)^2 = \|\sigma_h^n(x)\|_F^2\,.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Intégrant les deux membres sur Ω, il s'en suit :

$$\left\|(\sigma_h^n - p_h^n\delta)^D\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\sigma_h^n\|_{0,\Omega}^2 . \tag{2.85}$$

De (2.83) et (2.85) suit que

$$\|\sigma_h^n - p_h^n\delta\|_{0,\Omega} \leq C\left(\|\sigma_h^n\|_{0,\Omega} + \|div(\sigma_h^n - p_h^n\delta)\|_{0,\Omega}\right). \tag{2.86}$$

D'autre part :

$$\|\sigma_h^n - p_h^n\delta\|_{0,\Omega} \geq \|p_h^n\delta\|_{0,\Omega} - \|\sigma_h^n\|_{0,\Omega} \geq \|p_h^n\|_{0,\Omega} - \|\sigma_h^n\|_{0,\Omega} .$$

D'où :

$$\|p_h^n\|_{0,\Omega} \leq C\left(\|\sigma_h^n\|_{0,\Omega} + \|div(\sigma_h^n - p_h^n\delta)\|_{0,\Omega}\right). \tag{2.87}$$

Maintenant, il nous faut majorer $\|div(\sigma_h^n - p_h^n\delta)\|_{0,\Omega}$. On a d'après $(2.72)_{(ii)}$ que $\forall \vec{v}_h \in Y_h$:

$$\int_\Omega div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta)\cdot\vec{v}_h\,dx = -\int_\Omega(\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n)\cdot\vec{v}_h\,dx,$$

ce qui peut être réécrit :

$$div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) = P_h^0(\bar{\partial}\vec{u}_h^n - \vec{f}(t_n)),$$

où P_h^0 désigne l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)^2$ sur Y_h. D'où :

$$\|div(\sigma_h^n - p_h^n\delta)\|_{0,\Omega} \leq \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega} + \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}. \tag{2.88}$$

Les inégalités (2.88) et (2.87) entraînent que :

$$\|p_h^n\|_{0,\Omega} \leq C\left(\|\sigma_h^n\|_{0,\Omega} + \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega} + \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}\right),$$

d'où il suit que :

$$\sum_{n=1}^N k\,\|p_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq 3C\left(\sum_{n=1}^N k\,\|\sigma_h^n\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^N k\left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^N k\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2\right). \tag{2.89}$$

Or, on a démontré dans la proposition 2.5.3, que :

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N k\,\|\sigma_h^n\|_{0,\Omega}^2} \leq C\left(\left\|\vec{u}_h^0\right\|_{0,\Omega} + \sqrt{k\sum_{n=1}^N\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2}\right). \tag{2.90}$$

Pour majorer le membre droit de (2.89), il nous reste à majorer $\sum_{n=1}^{N} k \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2$. Appliquant $\bar{\partial}$ aux deux membres de la première équation du système (2.72), on obtient

$$\nu \int_\Omega \bar{\partial}\sigma_h^n : \tau_h \, dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \bar{\partial}\vec{u}_h^n \, dx = 0 \qquad \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h, \tag{2.91}$$

Dans l'équation (2.91), prenant $\tau_h = \sigma_h^n$ et $q_h = p_h^n$, il s'en suit que :

$$\nu \int_\Omega \bar{\partial}\sigma_h^n : \sigma_h^n \, dx + \int_\Omega div(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) \cdot \bar{\partial}\vec{u}_h^n \, dx = 0. \tag{2.92}$$

Prenons $\vec{v}_h = \bar{\partial}\vec{u}_h^n$ dans $(2.72)_{(ii)}$. On obtient :

$$\int_\Omega div\,(\nu\sigma_h^n - p_h^n\delta) \cdot \bar{\partial}\vec{u}_h^n \, dx + \int_\Omega (\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n) \cdot \bar{\partial}\vec{u}_h^n \, dx = 0. \tag{2.93}$$

Donc

$$\int_\Omega \bar{\partial}\sigma_h^n : \sigma_h^n \, dx = \int_\Omega \vec{f}(t_n) \cdot \bar{\partial}\vec{u}_h^n \, dx - \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2.$$

Autrement dit on a :

$$\nu \int_\Omega \bar{\partial}\sigma_h^n : \sigma_h^n \, dx + \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega} \cdot \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}. \tag{2.94}$$

Comme

$$\nu \int_\Omega \bar{\partial}\sigma_h^n : \sigma_h^n \, dx = \frac{\nu}{k} \left\|\sigma_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{\nu}{k} \int_\Omega \sigma_h^{n-1} : \sigma_h^n \, dx \geq \frac{\nu}{2k} \left\|\sigma_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - \frac{\nu}{2k} \left\|\sigma_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2.$$

Multiplions par $2k$ chacun des deux membres de ces deux dernières inégalités on obtient :

$$\begin{aligned} \left\|\sigma_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\sigma_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + 2k \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 &\leq 2k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega} \cdot \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega} \\ &\leq k \left(\left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 + \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \right). \end{aligned}$$

D'où

$$\nu \left\|\sigma_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - \nu \left\|\sigma_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + k \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2.$$

Faisant la somme de ces inégalités membre à membre pour $n = 1, .., N$, on obtient :

$$\nu \left\|\sigma_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 - \nu \left\|\sigma_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} k \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{N} k \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 + \nu \left\|\sigma_h^0\right\|_{0,\Omega}^2. \tag{2.95}$$

Les inégalités (2.95) , (2.90) et (2.89) entraînent alors :

$$\sum_{n=1}^{N} k \left\|p_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq C \left(\left\|\vec{u}_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \nu \left\|\sigma_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} k \left\|\vec{f}(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 \right). \tag{2.96}$$

■

2.5.3 Estimations d'erreurs

Afin de donner une majoration de l'erreur d'approximation de $\vec{u}$ par $\vec{u}_h^n$ en norme $(L^2)^2$, introduisons tout d'abord ‹‹le problème elliptique à l'instant t_n››: trouver $((\tilde{\sigma}_h(t_n), \tilde{p}_h(t_n)); \tilde{\vec{u}}_h(t_n) \in X_h \times Y_h$ tel que :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \tilde{\sigma}_h(t_n) : \tau_h \, dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \tilde{\vec{u}}_h(t_n) \, dx = 0, & \forall \, (\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega div \, (\nu\tilde{\sigma}_h(t_n) - \tilde{p}_h(t_n)\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx + \int_\Omega (\vec{f}(t_n) - \vec{u}_t(t_n)) \cdot \vec{v}_h \, dx = 0, & \forall \vec{v}_h \in Y_h. \end{cases} \tag{2.97}$$

Théorème 2.5.6 *Il existe $c > 0$ indépendante de h et de n telle que :*

$$\left\|\vec{u}_h^n - \tilde{\vec{u}}_h(t_n)\right\|_{0,\Omega} \leq ch \int_0^{t_n} \left(\left\|\vec{u}_t\,(s)\right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \left\|p_t\,(s)\right\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} \right) ds + k \int_0^{t_n} \left\|\vec{u}_{tt}\,(s)\right\|_{0,\Omega} ds. \tag{2.98}$$

Preuve: Pour alléger les notations, on va noter comme dans la partie précédente :

$$\varepsilon_h^n = \sigma_h^n - \tilde{\sigma}_h(t_n), \;\; r_h^n = p_h^n - \tilde{p}_h(t_n) \text{ et } \vec{\theta}_h^n = \vec{u}_h^n - \tilde{\vec{u}}_h(t_n).$$

Soustrayant membre à membre (2.72) de (2.97) , on obtient le système d'équations aux erreurs :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega \varepsilon_h^n : \tau_h \, dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta) \cdot \vec{\theta}_h^n dx = 0 & \forall \, (\tau_h, q_h) \in X_h, \\ \\ \int_\Omega div \, (\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta) \cdot \vec{v}_h \, dx = - \int_\Omega (\vec{u}_t(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n) \cdot \vec{v}_h \, dx, \; \forall \vec{v}_h \in Y_h. \end{cases} \tag{2.99}$$

Choisissons

$$\tau_h = \varepsilon_h^n,\ q_h = r_h^n \text{ et } \vec{v}_h = \vec{\theta}_h^n.$$

Alors (2.99) devient :

$$\begin{cases} \nu \int_\Omega |\varepsilon_h^n|^2 \ dx + \int_\Omega div(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta) \cdot \vec{\theta}_h^n dx = 0, \\ \\ \int_\Omega div\,(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta) \cdot \vec{\theta}_h^n\, dx = -\int_\Omega (\vec{u}_t(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n) \cdot \vec{\theta}_h^n \ dx. \end{cases}$$

Alors :

$$\nu \int_\Omega |\varepsilon_h^n|^2 \ dx + \int_\Omega (\bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h(t_n) - \vec{u}_t(t_n)) \cdot \vec{\theta}_h^n \ dx = -\int_\Omega \bar{\partial}\vec{\theta}_h^n \cdot \vec{\theta}_h^n \ dx.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\vec{\theta}_h^n\right|^2 \ dx - \int_\Omega \vec{\theta}_h^n \cdot \vec{\theta}_h^{n-1} \ dx &= -\nu k \int_\Omega |\varepsilon_h^n|^2 \ dx - k \int_\Omega (\bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h(t_n) - \vec{u}_t(t_n)) \cdot \vec{\theta}_h^n \ dx \\ &\leq k \int_\Omega \left|(\bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h - \vec{u}_t(t_n)) \cdot \vec{\theta}_h^n\right| \ dx \\ &\leq k \left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega} \left\|\bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h(t_n) - \vec{u}_t(t_n)\right\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \int_\Omega \vec{\theta}_h^n \cdot \vec{\theta}_h^{n-1} \ dx + k \left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega} \left\|\bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h(t_n) - \vec{u}_t(t_n)\right\|_{0,\Omega}.$$

Donc :

$$\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega} \leq \left\|\vec{\theta}_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega} + k \left\|\bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h(t_n) - \vec{u}_t(t_n)\right\|_{0,\Omega}. \tag{2.100}$$

Posons pour la suite :

$$\vec{\omega}^n := \left(\bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h(t_n) - \vec{u}_t(t_n)\right)$$

et $\vec{\omega}^n := \vec{\omega}_1^n + \vec{\omega}_2^n$ avec $\vec{\omega}_1^n = \left(\bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}(t_n)\right)$ et $\vec{\omega}_2^n = \left(\bar{\partial}\vec{u}(t_n) - \vec{u}_t(t_n)\right)$. Commençons par majorer $\|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega}$. Pour cela, on a besoin d'utiliser les opérateurs T et T_h définis par (2.23) et (2.24). Donc on a :

$$\vec{\omega}_1^n = \bar{\partial}\vec{\tilde{u}}_h(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}(t_n) = T_{h,2}\left(\bar{\partial}\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_t(t_n)\right) - T_2\left(\bar{\partial}\vec{f}(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_t(t_n)\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega} &= \left\|(T_{h,2}-T_2)\left(\bar{\partial}\vec{f}(t_n)-\bar{\partial}\vec{u}_t(t_n)\right)\right\|_{0,\Omega} \\
&= \left\|\frac{1}{k}\,(T_{h,2}-T_2)\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\vec{f}_t(s)\,ds-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\vec{u}_{tt}(s)\,ds\right)\right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{k}\left\|(T_{h,2}-T_2)\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\vec{f}_t(s)-\vec{u}_{tt}(s)\right)ds\right\|_{0,\Omega} \\
&\leq \frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|(T_{h,2}-T_2)\left(\vec{f}_t(s)-\vec{u}_{tt}(s)\right)\right\|_{0,\Omega} ds.
\end{aligned}$$

Autrement, on a :

$$\|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left\|\vec{\tilde{u}}_{t,h}(s)-\vec{u}_t(s)\right\|_{0,\Omega} ds.$$

Et d'après les résultats d'estimation d'erreur dans le cas stationnaire, il existe une constante $c>0$ indépendant de h telle que :

$$\|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega} \leq ch\frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}+\|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right) ds. \tag{2.101}$$

D'où

$$k\sum_{n=1}^{N}\|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega} \leq ch\frac{1}{k}\int_{t_0}^{t_n}\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}+\|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right) ds. \tag{2.102}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_2^n &= \bar{\partial}\vec{u}_h(t_n)-\vec{u}_t(t_n) \\
&= \frac{1}{k}(\vec{u}(t_n)-\vec{u}(t_{n-1})-k\vec{u}_t(t_n)) \\
&= \frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}(t_{n-1}-s)\;\vec{u}_{tt}(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Et alors :

$$\|\vec{\omega}_2^n\|_{0,\Omega} \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\vec{u}_{tt}(s)\,\|_{0,\Omega}\,ds.$$

D'où :

$$k\sum_{n=1}^{N}\|\vec{\omega}_2^n\|_{0,\Omega}\leq k\int_0^{t_n}\|\vec{u}_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\,ds. \tag{2.103}$$

Par (2.103) et (2.102) , on obtient :

$$\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}\leq\left\|\vec{\theta}_h^0\right\|_{0,\Omega}+ch\int_{t_0}^{t_n}\left(\|\vec{u}_t\,(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}+\|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right)ds+k\int_{t_0}^{t_n}\|\vec{u}_{tt}\,(s)\|_{0,\Omega}\,.$$

Si on prend $\vec{u}_h^0=\vec{\tilde{u}}_h(t_0)$, alors $\vec{\theta}_h^0=0$. Par conséquent :

$$\left\|\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}\leq ch\int_{t_0}^{t_n}\left(\|\vec{u}_t\,(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}+\|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right)ds+k\int_{t_0}^{t_n}\|\vec{u}_{tt}\,(s)\|_{0,\Omega}\,.$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'estimée finale c'est à dire de majorer
$\|\vec{u}_h^n-\vec{u}(t_n)\|_{0,\Omega}$ par $O(h)$.

Théorème 2.5.7 *Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6 *pour un $\alpha\in\,]1-\eta_0(\omega),1[$. Il existe une constante $c>0$ indépendante de h telle que pour tout $t\in I$:*

$$\|\vec{u}_h^n-\vec{u}(t_n)\|_{0,\Omega}\leq c\,h\left(|\vec{u}(t)|_{H^1(\Omega)^2}+|\vec{u}(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}+|p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right)$$

$$+ch\int_{t_0}^{t_n}\left(\|\vec{u}_t\,(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}+\|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right)ds+k\int_{t_0}^{t_n}\|\vec{u}_{tt}\,(s)\|_{0,\Omega}\,ds.$$

Preuve: Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire, le résultat d'estimation d'erreur (2.36) et la dernière estimation (2.98). ■

Maintenant on passe à la majoration de $\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}$. Pour cela on a besoin du résultat suivant :

Proposition 2.5.8

$$\bar{\partial}\,\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2\leq\frac{1}{\upsilon}\,\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2\,. \tag{2.104}$$

Preuve: Appliquant $\left(\bar{\partial}\right)$ à la première équation du système aux erreurs (2.99) , il s'en suit :

$$\nu\int_\Omega\bar{\partial}\varepsilon_h^n:\tau_h\,dx+\int_\Omega div(\nu\tau_h-q_h\delta)\cdot\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n dx=0,\qquad\forall\,(\tau_h,q_h)\in X_h,$$

Prenons $\tau_h = \varepsilon_h^n$ et $q_h = r_h^n$, d'où :

$$\begin{aligned}
\nu \int_\Omega \bar{\partial}\varepsilon_h^n : \varepsilon_h^n \, dx &= -\int_\Omega div(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta) \cdot \bar{\partial}\vec{\theta}_h^n dx \\
&= \int_\Omega \left(\vec{\omega}^n - \bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right) \cdot \bar{\partial}\vec{\theta}_h^n \, dx \\
& \text{ par } (2.99, ii) \\
&= \int_\Omega \vec{\omega}^n \cdot \bar{\partial}\vec{\theta}_h^n \, dx - \left\|\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \\
&\leq \|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega} \left\|\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega} - \left\|\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\left\|\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 .
\end{aligned}$$

Donc :

$$\upsilon \int_\Omega \bar{\partial}\varepsilon_h^n : \varepsilon_h^n \, dx \leq \frac{1}{2}\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2}\left\|\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 . \tag{2.105}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 - 2\int_\Omega \bar{\partial}\varepsilon_h^n : \varepsilon_h^n \, dx &= \frac{1}{k}\left(\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\varepsilon_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2\right) - \frac{2}{k}\int_\Omega \left(\varepsilon_h^n - \varepsilon_h^{n-1}\right) : \varepsilon_h^n \, dx \\
&= \frac{1}{k}\left(-\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\varepsilon_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2 + 2\int_\Omega \varepsilon_h^{n-1} : \varepsilon_h^n \, dx\right) \\
&\leq -\frac{1}{k}\left(\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 - \left\|\varepsilon_h^{n-1}\right\|_{0,\Omega}^2\right)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\bar{\partial}\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq 2\int_\Omega \bar{\partial}\varepsilon_h^n : \varepsilon_h^n \, dx.$$

Par (2.105) , on obtient :

$$\bar{\partial}\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu}\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{\nu}\left\|\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 . \tag{2.106}$$

À fortiori on a :

$$\bar{\partial}\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu}\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2$$

■

Nous sommes maintenant en mesure de majorer l'erreur $\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}$.

Théorème 2.5.9 *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\begin{aligned} & \|\sigma_h^n - \tilde{\sigma}_h(t_n)\|_{0,\Omega} \qquad (2.107)\\ \leq \;& C\left(h\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{L^2(0,t_n;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \|p_t(s)\|_{L^2(0,t_n;H^{1,\alpha}(\Omega))}\right) + k\,\|\vec{u}_{tt}(s)\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega)^2)}\right) \end{aligned}$$

Preuve: D'après l'inégalité (2.104) , on sait que :

$$\bar{\partial}\,\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{1}{\nu}\,\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2\,.$$

Sommant ces inégalités membre à membre pour $n = 1, ..., N$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left\|\varepsilon_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 &\leq \left\|\varepsilon_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{k}{\nu}\sum_{n=1}^{N}\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \left\|\varepsilon_h^0\right\|_{0,\Omega}^2 + \frac{2k}{\nu}\left(\sum_{n=1}^{N}\|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N}\|\vec{\omega}_2^n\|_{0,\Omega}^2\right). \qquad (2.108) \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité (2.101) , on a :

$$\|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega} \leq ch\frac{1}{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right)ds. \qquad (2.109)$$

Donc :

$$\begin{aligned} k\sum_{n=1}^{N}\|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega}^2 &\leq c\frac{h^2}{k}\sum_{n=1}^{N}\left(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\,ds\right)^2 \\ &\leq ch^2\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + \|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}\right)^2 ds \\ &\leq 2ch^2\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2\right) ds \\ &\leq 2ch^2\int_{t_0}^{t_N}\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2\right) ds. \qquad (2.110) \end{aligned}$$

Maintenant on passe à la majoration de $k\sum_{n=1}^{N}\|\vec{\omega}_2^n\|_{0,\Omega}^2$. On a :

$$\begin{aligned} k\sum_{n=1}^{N}\|\vec{\omega}_2^n\|_{0,\Omega}^2 &= k\sum_{n=1}^{N}\left\|\bar{\partial}\vec{u}(t_n) - \vec{u}_t(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 \\ &= \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{N}\|\vec{u}(t_n) - \vec{u}(t_{n-1}) - k\,\vec{u}_t(t_n)\|_{0,\Omega}^2\,. \end{aligned}$$

Par la formule de Taylor avec reste de Laplace, on a :

$$\vec{u}(t_n) - \vec{u}(t_{n-1}) - k\vec{u}_t(t_n) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\ \vec{u}_{tt}(s)\, ds.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}(t_n) - \vec{u}(t_n) - k\ \vec{u}_t(t_n)\|_{0,\Omega}^2 &= \left\| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\ \vec{u}_{tt}(s)\, ds \right\|^2 \\
&\leq \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} |(t_{n-1} - s)|\ \|\vec{u}_{tt}(s)\|_{0,\Omega}\, ds \right)^2 \\
&\leq \frac{k^3}{3} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\vec{u}_{tt}(s)\|_{0,\Omega}^2\, ds.
\end{aligned}$$

Alors :

$$k \sum_{n=1}^{N} \|\vec{\omega}_2^n\|_{0,\Omega}^2 \leq \frac{k^2}{3} \int_{t_0}^{t_N} \|\vec{u}_{tt}(s)\|_{0,\Omega}^2\, ds, \tag{2.111}$$

De ces deux majorations et de l'inégalité (2.108) suit :

$$\begin{aligned}
&\|\varepsilon_h^N\|_{0,\Omega}^2 \\
\leq\ & \|\varepsilon_h^0\|_{0,\Omega}^2 + 2k \left(\sum_{n=1}^{N} \|\vec{\omega}_1^n\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{n=1}^{N} \|\vec{\omega}_2^n\|_{0,\Omega}^2 \right). \\
\leq\ & \|\varepsilon_h^0\|_{0,\Omega}^2 + \frac{4ch^2}{\nu} \left(\int_{t_0}^{t_N} \|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \|p_t(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2\, ds \right) + 2\frac{k^2}{3\nu} \int_{t_0}^{t_N} \|\vec{u}_{tt}(s)\|_{0,\Omega}^2\, ds.
\end{aligned}$$

On a donc obtenu qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|\varepsilon_h^N\|_{0,\Omega} \leq C \left(h \left(\|\vec{u}_t(s)\|_{L^2(0,t_N;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \|p_t(s)\|_{L^2(0,t_N;H^{1,\alpha}(\Omega))} \right) + k\, \|\vec{u}_{tt}(s)\|_{L^2(0,t_N;L^2(\Omega)^2)} \right),$$

si l'on choisit $\vec{u}_h^0 = \tilde{\vec{u}}_h(t_0)$ cela implique $\sigma_h^0 = \tilde{\sigma}_h(t_0)$ par les équations $(2.74)_{(i)}$ et $(2.97)_{(i)}$ à l'instant t_0. ■

À présent nous donnons la majoration finale de l'erreur entre σ_h^n et $\sigma(t_n)$.

Théorème 2.5.10 *Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6 *pour un $\alpha \in\ ]1 - \eta_0(\omega), 1[$. Il existe une* *constante $c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $t \in I$:*

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_h^n - \sigma_h(t_n)\|_{0,\Omega} \\
\leq\ & C\left(h\left(|\vec{u}(t)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(t)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} + \|\vec{u}_t(s)\|_{L^2(0,t_n;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \|p_t(s)\|_{L^2(0,t_n;H^{1,\alpha}(\Omega))}\right)\right. \\
&\left. + k\,\|\vec{u}_{tt}(s)\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega)^2)}\right)
\end{aligned}$$

Preuve: Comme dans le cas du théorème 2.5.7, il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire, l'estimation découlant du cas stationnaire (2.35) et le résultat obtenu précédemment (2.107). ■

Et finalement l'estimation de l'erreur pour la pression.

Théorème 2.5.11 *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{n=1}^{N} k\,\|p_h^n - \tilde{p}_h(t_n)\|_{0,\Omega}^2} \ \leq\ & C\left(h\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{L^2(0,T_N;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \|p_t\,(s)\|_{L^2(0,T_N;H^{1,\alpha}(\Omega))}\,ds\right)\right. \\
&\left. + k\,\|\vec{u}_{tt}(s)\,\|_{L^2(0,T_N;L^2(\Omega)^2)}\,ds\right) \qquad (2.112)
\end{aligned}$$

Preuve: Rappelons le système d'équations aux erreurs (2.99) :

$$\left\{\begin{array}{ll}
\nu\int_\Omega \varepsilon_h^n : \tau_h\,dx + \int_\Omega div(\nu\tau_h - q_h\delta)\cdot\vec{\theta}_h^n dx = 0 & \forall\,(\tau_h, q_h) \in X_h, \\
\\
\int_\Omega div\,(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta)\cdot\vec{v}_h\,dx = -\int_\Omega(\vec{u}_t(t_n) - \bar{\partial}\vec{u}_h^n)\cdot\vec{v}_h\,dx, & \forall\vec{v}_h \in Y_h,
\end{array}\right. \qquad (2.113)$$

avec $\varepsilon_h^n = \sigma_h^n - \tilde{\sigma}_h(t_n)$, $r_h^n = p_h^n - \tilde{p}_h(t_n)$ et $\vec{\theta}_h^n = \vec{u}_h^n - \tilde{\vec{u}}_h(t_n)$. Prenons $\tau_h = \delta$ et $q_h = 0$ dans $(2.113)_{(i)}$. On obtient :

$$\upsilon\int_\Omega tr(\varepsilon_h^n)\,dx = 0$$

Et puisque $r_h^n \in L_0^2(\Omega)$, donc on a bien

$$\int_\Omega tr(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta)\,dx = 0.$$

On peut alors appliquer le résultat (2.82) , d'où :

$$\|\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta\|_{0,\Omega} \leq C\left(\left\|(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta)^D\right\|_{0,\Omega} + \|div(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta)\|_{0,\Omega}\right). \qquad (2.114)$$

Avec la même méthode de démonstration que celle de la proposition (2.5.4) on peut démontrer que :

$$\|r_h^n\|_{0,\Omega} \leq C\left(\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega} + \|div(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta)\|_{0,\Omega}\right). \tag{2.115}$$

Or d'après $(2.113)_{(iit)}$, on a :

$$div\left(\nu\varepsilon_h^n - r_h^n\delta\right) = P_h^0\left(\bar{\partial}\vec{u}_h^n - \vec{u}_t(t_n)\right). \tag{2.116}$$

Donc il nous faut majorer $\left\|P_h^0(\bar{\partial}\vec{u}_h^n - \vec{u}_t(t_n))\right\|_{0,\Omega}$.

$$\begin{aligned}\left\|P_h^0\left(\bar{\partial}\vec{u}_h^n - \vec{u}_t(t_n)\right)\right\|_{0,\Omega} &\leq \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n - \vec{u}_t(t_n)\right\|_{0,\Omega} \\ &\leq \left\|\bar{\partial}\vec{u}_h^n - \bar{\partial}\tilde{\vec{u}}_h(t_n)\right\|_{0,\Omega} + \left\|\bar{\partial}\tilde{\vec{u}}_h(t_n) - \vec{u}_t(t_n)\right\|_{0,\Omega} \\ &= \left\|\bar{\partial}\vec{\theta}_h^n\right\|_{0,\Omega} + \|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}.\end{aligned} \tag{2.117}$$

D'autre part, d'après (2.106) , on a :

$$\left\|\bar{\partial}\theta_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2 - \nu\bar{\partial}\,\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2. \tag{2.118}$$

Et donc de (2.115) , (2.116) , (2.117) et (2.118) , nous obtenons :

$$\|r_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq C\left(\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 + 2\,\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2 - \nu\bar{\partial}\,\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2\right)$$

Faisant la somme de ses inégalités membre à membre pour $n = 1, .., N$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N} k\,\|r_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq C\left(\sum_{n=1}^{N} k\,\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 + 2\sum_{n=1}^{N} k\,\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2 - \nu\left\|\varepsilon_h^N\right\|_{0,\Omega}^2 + \nu\left\|\varepsilon_h^0\right\|_{0,\Omega}^2\right);$$

Si l'on choisit $\vec{u}_h^0 = \tilde{\vec{u}}_h(t_0)$, ce qui implique $\sigma_h^0 = \tilde{\sigma}_h(t_0)$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{N} k\,\|r_h^n\|_{0,\Omega}^2 \leq C\left(\sum_{n=1}^{N} k\,\|\varepsilon_h^n\|_{0,\Omega}^2 + 2\sum_{n=1}^{N} k\,\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2\right). \tag{2.119}$$

D'après (2.110) et (2.111) , on a :

$$\sum_{n=1}^{N} k\,\|\vec{\omega}^n\|_{0,\Omega}^2 \leq ch^2\int_{t_0}^{t_N}\left(\|\vec{u}_t(s)\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \|p_t\,(s)\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2\right)ds + 2\frac{k^2}{3}\int_{t_0}^{t_N}\|\vec{u}_{tt}(s)\|_{0,\Omega}^2\,ds. \tag{2.120}$$

Il nous reste à majorer $\sum_{n=1}^{N} k \left\|\varepsilon_h^n\right\|_{0,\Omega}^2$. Or on a démontré que :

$$\left\|\varepsilon_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq ch^2 \left(\int_{t_0}^{t_N} \left\|\vec{u}_t(s)\right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \left\|p_t\left(s\right)\right\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2 \, ds \right) + k^2 \int_{t_0}^{t_N} \left\|\vec{u}_{tt}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds.$$

Et donc :

$$\sum_{n=1}^{N} k \left\|\varepsilon_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq ch^2 T \left(\int_{t_0}^{t_N} \left\|\vec{u}_t(s)\right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \left\|p_t\left(s\right)\right\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2 \, ds \right) + k^2 T \int_{t_0}^{t_N} \left\|\vec{u}_{tt}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds. \tag{2.121}$$

Grâce à cette dernière estimation et l'estimation (2.120) on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{N} k \left\|r_h^n\right\|_{0,\Omega}^2 \leq C \left(h^2 \left(\int_{t_0}^{t_N} \left\|\vec{u}_t(s)\right\|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2}^2 + \left\|p_t\left(s\right)\right\|_{H^{1,\alpha}(\Omega)}^2 \, ds \right) + k^2 \int_{t_0}^{t_N} \left\|\vec{u}_{tt}(s)\right\|_{0,\Omega}^2 ds \right).$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} k \left\|r_h^n\right\|_{0,\Omega}^2} \; &\leq \; C \Big(h \left(\left\|\vec{u}_t(s)\right\|_{L^2(0,T_N;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\|p_t\left(s\right)\right\|_{L^2(0,T_N;H^{1,\alpha}(\Omega))} \right) \\ &\quad + k \left\|\vec{u}_{tt}(s)\right\|_{L^2(0,T_N;L^2(\Omega)^2)} \Big) \end{aligned}$$

■

Théorème 2.5.12 *Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille régulière de triangulations sur $\overline{\Omega}$, jouissant des propriétés (i) et (ii) de la proposition* 1.4.6 *pour un $\alpha \in]1-\eta_0(\omega), 1[$. Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que pour tout $t \in I$:*

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} k \left\|p_h^n - p(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2} \; &\leq \; C \Big(h \Big(\max_{n=0,..,N} \left(|\vec{u}(t_n)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(t_n)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} \right) \\ &\quad + \left\|\vec{u}_t(s)\right\|_{L^2(0,T_N;H^{2,\alpha}(\Omega)^2)} + \left\|p_t\left(s\right)\right\|_{L^2(0,T_N;H^{1,\alpha}(\Omega))} \Big) + k \left\|\vec{u}_{tt}(s)\right\|_{L^2(0,t_n;L^2(\Omega)^2)} \Big) \end{aligned} \tag{2.122}$$

Preuve: Remarquons que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} k \left\|p_h^n - p(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 \; &\leq \; \sum_{n=1}^{N} k \left[\left\|p_h^n - \tilde{p}_h(t_n)\right\|_{0,\Omega} + \left\|\tilde{p}_h(t_n) - p(t_n)\right\|_{0,\Omega} \right]^2 \\ &\leq \; 2 \sum_{n=1}^{N} k \left\|p_h^n - \tilde{p}_h(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2 + 2 \sum_{n=1}^{N} k \left\|\tilde{p}_h(t_n) - p(t_n)\right\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

d'après l'estimation découlant du cas stationnaire (2.35) :

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} k \left\| p_h^n - p(t_n) \right\|_{0,\Omega}^2}$$

$$\leq \; C \left(\sqrt{\sum_{n=1}^{N} k \left\| p_h^n - \tilde{p}_h(t_n) \right\|_{0,\Omega}^2} + h \max_{n=0,\ldots,N} \left(|\vec{u}(t_n)|_{H^{2,\alpha}(\Omega)^2} + |p(t_n)|_{H^{1,\alpha}(\Omega)} \right) \right)$$

En utilisant la majoration (2.112), nous obtenons (2.122). ■

Chapitre 3

Mixed finite element method for the Heat diffusion equation in a random medium

3.1 Introduction

In this paper, we investigate the dual mixed method for the stochastic heat diffusion equation :

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\left(\mathcal{K} \Diamond \vec{\nabla} u\right) = f \quad \text{in} \quad Q :=]0,T[\times D \\ \\ u = 0 \quad \text{on} \quad]0,T[\times \partial D \\ \\ u_{|t=0} = g \qquad \text{on} \quad D. \end{cases} \tag{3.1}$$

Here D denotes a bounded polygonal domain in $\mathbb{R}^2$, f the random heat source, u the random temperature, g its random initial value and $\mathcal{K}$ the random diffusion coefficient. g and $\mathcal{K}$ belong to some stochastic vector distributions spaces [27] ; in particular it is assumed that the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$ does not depend on the time variable t. Both f and u are functions of the time with values in stochastic vector distributions spaces [27]. The question of a Wick product, here between the random heat diffusion coefficient $\mathcal{K}$ and

$\vec{\nabla}u$, the gradient of the temperature, is addressed in the papers of T. G. Theting and al. [24] and [50] ; see also the book of Holden and al. [27]. The classical variational formulation of the stochastic heat diffusion equation (3.1) and its numerical discretization have been studied in [23]. A stochastic version of the dual mixed formulation for the corresponding **stationary** problem to (3.1) has been studied in [24] and a priori error estimates have been derived but for "regular solutions in the space variable" only (i.e. belonging to the stochastic Sobolev space $\mathcal{S}^{-1,k,H^2(D)}$ (see (3.4) for its definition)).

Our contribution here consists in introducing a stochastic version of the dual mixed formulation (see [49] for the nonstochastic case) for the stochastic heat diffusion equation (3.1) in a polygonal domain with a reentrant corner and proving a-priori optimal error estimates for the semi-discretized problem. Thus additionally to the unknown random temperature u, in the mixed formulation, the random heat flux $\vec{p} = \mathcal{K} \lozenge \overrightarrow{\nabla} u$ is considered as an additional unknown. Denoting by $t \mapsto (\overrightarrow{p}_h(t), u_h(t))$ the solution of the semi-discretized problem, we establish rates of convergence for $u_h(.)$ and $\overrightarrow{p}_h(.)$ in terms of the mesh width h of the triangulation, the dimension K of the homogeneous polynomial chaoses and their maximum order N ([30], pp. 52-55). Using a regularity result on the solution u of (3.1) expressed by the fact that u belongs to some spatially weighted Sobolev space taking into account the singularities induced by the reentrant corner of the polygonal domain D, and imposing appropriate refinement rules on our regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ of the polygonal domain D linked to that regularity of the solution u (on the spur of ([3], section 8.4)), we derive $O(h)$ error estimates in the spatial directions.

We also discuss algorithmic aspects of this numerical method. In particular we show how the chaoses coefficients of each component of the semi-discretized solution $(\overrightarrow{p}_h(.), u_h(.))$ can be computed successively by solving a sequence of deterministic discrete evolution mixed problems.

3.2 Preliminaries on white noise analysis and stochastic Sobolev spaces

Let us recall some notations from [23], [24] and [27]. $\mathcal{I}$ denotes the set of all sequences $\alpha = (\alpha)_{j\geq 1} \in (\mathbb{N}_0)^{\mathbb{N}}$ with compact support (for the discrete topology on $\mathbb{N}_0$) i.e. such that $\exists\ j_\alpha \in \mathbb{N}_0 : \alpha_j = 0,\ \forall j \geq j_\alpha$ (! we use the notations of the "Norway-School" [27] : in particular $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ and $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$). For $\alpha \in \mathcal{I}$:

$$(2\mathbb{N})^\alpha := \prod_{j=1}^{+\infty} (2j)^{\alpha_j} \ ;$$

let us observe that this is in fact a finite product as α has compact support. For $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ i.e. a tempered distribution on $\mathbb{R}^2$ ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ denotes the Fréchet space of rapidly decreasing functions on $\mathbb{R}^2$ and $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ its dual [28] p.133), and $\alpha \in \mathcal{I}$, we set :

$$H_\alpha(\omega) = \prod_{i=1}^{+\infty} h_{\alpha_i}(\langle \omega, \eta_i \rangle), \tag{3.2}$$

where $h_{\alpha_i}(\cdot)$ denotes the α_i-th order Hermite polynomial on $\mathbb{R}$

$$h_{\alpha_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (-1)^{\alpha_i} e^{\frac{1}{2}x^2} \frac{d^{\alpha_i}}{dx^{\alpha_i}} (e^{-\frac{1}{2}x^2})$$

([27], p.18, 207, 208) monic and orthogonal with respect to the normalized Gauss measure

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} dx$$

and where $(\eta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ denotes the orthonormal basis in $L^2(\mathbb{R}^2; dx_1 \otimes dx_2)$ constructed by taking tensor products of the 1-D Hermite functions $\xi_n(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$\xi_n(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} ((n-1)!)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}x^2} h_{n-1}(\sqrt{2}x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n = 1, 2, 3, \ldots$ ([27] p.19, 208) (it is well known that the $1-D$ Hermite functions $(\xi_n(\cdot))_{n\geq 1}$ which are the eigenfunctions of the "Harmonic Oscillator" since

$$-\frac{d^2\xi_n}{dx^2} + x^2 \frac{d\xi_n}{dx} = (2n-1)\,\xi_n,\ \forall n \geqslant 1,$$

belong to $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ the space of rapidly decreasing functions on $\mathbb{R}$, and form an orthonormal basis of $L^2(\mathbb{R}; dx)$ ([28] p.142) ([27] pp.207-208)). Morever if $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, the expansion $\sum_{j=1}^{+\infty} (\phi \mid \eta_j)_{L^2(\mathbb{R}^2; dx_1 \otimes dx_2)} \eta_j$ converges in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ([28] p.143), (this is also true for

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ [28] p.143). By theorem 2.2.3 p.21 in [27], $(H_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{I}}$ is an orthogonal basis of our basic probalitiy space : " the 1-dimensional (2-parameter) Gaussian white noise probability space " $L^2\left(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)}, \mu\right)$ ([27] p.21) . $\mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)}$ denotes the Borel $\sigma-$algebra of $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ i.e. the $\sigma-$algebra of $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ generated by all subsets of $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ of the form $\{\omega\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)\,;\ \langle\omega,\phi_1\rangle\in B_1,\ldots,\langle\omega,\phi_n\rangle\in B_n\}$ for arbitrary numbers of functions $\phi_1,\ldots,\phi_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ and arbitrary Borel sets $B_1,...,B_n$ of $\mathbb{R}$. μ is the normalized Gaussian measure on $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ also often called the 1-dimensional (2-parameter) Gaussian white noise measure and may be defined by the property that for an arbitrary orthonormal set $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, orthonormal with respect to the $L^2(\mathbb{R}^2)$ scalar product, that its image by the mapping

$$\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right)\to\mathbb{R}^n:\omega\mapsto\left(\langle\omega,\phi_1\rangle,\ldots,\langle\omega,\phi_n\rangle\right)$$

is the normalized Gauss measure on $\mathbb{R}^n$: ([27] p.12)

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp^{-\frac{1}{2}\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)}dx_1\otimes\ldots\otimes dx_n.$$

Thus every $f\in L^2(\mu)$ possesses a unique expansion : ([27] p.23)

$$f=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\frac{(f|H_\alpha)_{L^2(\mu)}}{\alpha!}H_\alpha \quad\text{and}\quad \|f\|^2_{L^2(\mu)}=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\frac{\left|(f|H_\alpha)_{L^2(\mu)}\right|^2}{\alpha!},$$

as $\|H_\alpha\|^2_{L^2(\mu)}=\alpha!:=\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\ldots$. This expansion is called the Wiener-Itô chaos expansion of f ([27] p.23) , ([30] p.42), ([42] p.6), [41]. The vector subspace spanned by the $\{H_\alpha,|\alpha|=p\}$ is called the polynomial chaos of order p and its closure in $L^2(\mu)$ the Wiener homogeneous chaos of order p ([30] p.44), ([33], p.4), ([42] p.6), (see also [41]).

Remarque 3.2.1 *(i) The Wiener-Itô chaos expansion theorem remains valid for rather general L^2-spaces. Let us consider a general $(\Omega,\mathcal{A},\nu)$ probability space and let $(\eta_i)_{i\geqslant1}$ denote an i.i.d. (independant, identically distributed) sequence of normalized Gaussian random variables. Similarly, as previously, we define the poynomial chaos*

$$H_\alpha(\omega)=\prod_{i=1}^{+\infty}h_{\alpha_i}(\eta_i(\omega)),\ \forall\omega\in\Omega,\ \forall\alpha\in\mathcal{I}.$$

Let us denote by $\mathcal{G}\subset\mathcal{A}$, the $\sigma-$algebra generated by the family of standard Gaussian random variables $(\eta_i)_{i\geqslant1}$. Then for every $f\in L^2(\Omega,\mathcal{G},\nu)$, we have also [41] ([42], p. 6) :

$$f=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\frac{(f|H_\alpha)_{L^2(\nu)}}{\alpha!}H_\alpha \quad\textit{and}\quad \|f\|^2_{L^2(\nu)}=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\frac{\left|(f|H_\alpha)_{L^2(\nu)}\right|^2}{\alpha!}. \tag{3.3}$$

Consequently, all the results (except specific examples using explicitely the probability space $\left(\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right), \mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)}, \mu\right)$ *) which follow in this paper remain valid when replacing* $L^2\left(\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right), \mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)}, \mu\right)$ *by* $L^2\left(\Omega, \mathcal{G}, \nu\right)$*. This flexibility is usefull in theory ; for example the i.i.d. sequence of standard Gaussian random variables* $(\eta_i)_{i\geqslant 1}$ *may appear from the Karhunen-Loève expansion [30], ([1] pp. 37-43) ([16], theorem 5 p. 251) of the random diffusion coefficient* $\mathcal{K}$ *assumed to be a Gaussian random field on a bounded open set of* $\mathbb{R}^2$ *and in this case, may not be imposed a priori. However, from the numerical point of view, this is of no importance : the only important fact is that* $(\eta_i)_{i\geq 1}$ *is a i.i.d. (independent identically distributed) sequence of standard Gaussian random variables. When simulating, we generate a sequence of numbers that behaves as if each number where independently selected at random with the normal distribution* $N\left(0,1\right)$ *([17], pp. 117,...) to obtain a realization of the sequence* $(\eta)_{i\geq 1}$*. This last numerical procedure does not take into account the peculiarity of the i.i.d. sequence of standard Gaussian random variables* $(\eta)_{i\geq 1}$*.*
(ii) Let $(V, (.,.)_V)$ *denotes any real separable Hilbert space. It is easily seen that (3.3) remains true for every vector-valued function* $f \in L^2((\Omega, \mathcal{G}, \nu)\,; V)$*. The proof follows by considering an arbitrary* $v^* \in V^*$ *and applying* (3.3) *to the scalar-valued function* $v^* \circ f$*.*

Let us now recall the definition of the stochastic Sobolev spaces introduced by Y. Kondratiev [52],[27] that we will need to explain the classical variational formulation and the mixed variational formulation for the Cauchy problem (initial boundary value problem with homogeneous Dirichlet boundary condition) of the stochastic heat diffusion equation (3.1). Let $(V, (.,.)_V)$ denotes any real separable Hilbert space and $k \in \mathbb{R}$, $\rho \in [-1, 1]$ be given parameters. We define the space

$$\mathcal{S}^{\rho,k,V} := \left\{ f = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha;\ f_\alpha \in V \text{ for } \alpha \in \mathcal{I} \text{ and } \|f\|_{\rho,k,V} < +\infty \right\} \tag{3.4}$$

where

$$\|f\|^2_{\rho,k,V} := \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|^2_V\ (2\mathbb{N})^{k\alpha} (\alpha!)^{1+\rho}\,. \tag{3.5}$$

Clearly the norm defined by equality (3.5) is induced by the scalar product :

$$(f \mid g)_{\rho,k,V} := \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (f_\alpha \mid g_\alpha)_V\ (2\mathbb{N})^{k\alpha} (\alpha!)^{1+\rho}\,. \tag{3.6}$$

If $k \geq 0$ and $\rho \geq 0$, then it follows immediately from $\|f\|_{\rho,k,V} < +\infty$, that $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|_V^2\ \alpha! < +\infty$. Thus in this case, the series $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha$ is a Cauchy series and thus convergent in $L^2(\mu, V)$. But in other situations for the parameters k and ρ, the series $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha$ does not converge in $L^2(\mu; V)$ and consequently must be considered as a "formal series" satisfying the summability condition (3.5). In other words, we could define $\mathcal{S}^{\rho,k,V}$ in the following manner :

$$\mathcal{S}^{\rho,k,V} := \left\{ f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{I}}\, ;\ f_\alpha \in V,\ \forall \alpha \in \mathcal{I} \text{ and } \|f\|_{\rho,k,V} < +\infty \right\} \tag{3.7}$$

and thus $\mathcal{S}^{\rho,k,V}$ may be seen as an orthogonal countable direct sum of Hilbert spaces (copies of V) with the positive weights $(2\mathbb{N})^{k\alpha}(\alpha!)^{1+\rho}$, $\alpha \in \mathcal{I}$ (wich is countable) ([32], volume 4, p.114) ([28], p.40) ([38], p.114, last § of the introduction).
For $k \geq 0$ and $\rho \geq 0$: $\mathcal{S}^{\rho,k,V} \subset L^2(\mu; V)$. On the other hand $f \in L^2(\mu, V) \Longrightarrow \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|_V^2\ \alpha! < +\infty$, and if $\rho \leq 0$ and $k \leq 0$, then a fortiori :

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|_V^2\ (2\mathbb{N})^{k\alpha}(\alpha!)^{1+\rho} < +\infty. \tag{3.8}$$

Thus for $\rho \leq 0$ and $k \leq 0$, we have the inclusion in the reverse order : $L^2(\mu; V) \subset \mathcal{S}^{\rho,k,V}$. Let us also observe that, for $k \in \mathbb{R}$, $\rho \in [-1, 1]$, that

$$\mathcal{S}^{\rho,k,V} = \mathcal{S}^{\rho,k,\mathbb{R}}\ \widetilde{\otimes}\ V \tag{3.9}$$

where $\widetilde{\otimes}$ denotes the algebraic tensor product completed for the projective norm ([31], p.93-94).
Let $D \subset \mathbb{R}^2$ be an open bounded set in $\mathbb{R}^2$. If $V = L^2(D)$, then we will note more shortly the Hilbert space $\mathcal{S}^{\rho,k,L^2(D)}$ by $\mathcal{S}^{\rho,k,0}(D)$ or $\mathcal{S}^{\rho,k,0}$. If $V = H^1(D)$ (resp. $\mathring{H}^1(D)$), then we will note more shortly the Hilbert space $\mathcal{S}^{\rho,k,H^1(D)}$ (resp. $\mathcal{S}^{\rho,k,\mathring{H}^1(D)}$) by $\mathcal{S}^{\rho,k,1}(D)$ or $\mathcal{S}^{\rho,k,1}$ (resp. by $\mathcal{S}_0^{\rho,k,1}(D)$ or $\mathcal{S}_0^{\rho,k,1}$).
$\mathcal{S}^{0,0,0}(D) \equiv L^2(\mu; L^2(D))$ is not closed under the "Wick multiplication" $\lozenge$ defined by

$$\lozenge : (f, g) \mapsto f\lozenge g := \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \left(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathcal{I} \\ \alpha+\beta=\gamma}} f_\alpha g_\beta \right) H_\gamma$$

[38]. To provide conditions on f such that $g \mapsto f\diamondsuit g$ is a continuous linear operator in $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$, we introduce the Banach space $\mathcal{F}_l(D)$ [38]. Given $l \in \mathbb{R}$, we define the Banach space [38], [25]

$$\mathcal{F}_l(D) = \left\{ \begin{array}{c} f = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha; f_\alpha : D \to \mathbb{R} \text{ measurable } \forall\alpha\in\mathcal{I} \\ \text{and} \\ \|f\|_{l,*} := ess \sup_{x\in D}(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |f_\alpha(x)| (2\mathbb{N})^{l\alpha}) < +\infty \end{array} \right\}. \tag{3.10}$$

$\mathcal{F}_l(D)$ is a commutative Banach algebra for the Wick product ([38], prop.6, p.123) with 1 as unity. Moreover, if $f \in \mathcal{F}_l(D)$ and $g \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ with $k \le 2l$, then the Wick product is a well defined element of $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ and $\|f\diamondsuit g\|_{-1,k,0} \le \|f\|_{l,*}\|g\|_{-1,k,0}$ ([38], prop. 4, p. 120) [25].

For the mixed formulation, we will also need the space $\mathcal{S}^{\rho,k,V}$ with $V = H(\text{div}; D)$; more shortly we will denote it as in [24] p. 609, $\mathcal{H}(\text{div}; D)$.

Finally if $f = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha$ is in $L^2(\mu; V) \Longrightarrow \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|_V^2 \alpha! < +\infty$, then by using lemma 2.1.2 p.12 of [27], it follows that $E(f) = f_{(0,0,\cdots)}$ where $E(f)$ denotes the mathematical expectation of f with respect to the white noise Gaussian measure μ.

For that reason if $f = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha$ belongs to $\mathcal{S}^{\rho,k,V}$, we will call generalized expectation of f, the coefficient $f_{(0,0,\cdots)}$ and we will denote it $E[f]$ ([27] p.64).

Note also that $E[f\diamondsuit g] = E[f]E[g]$ ([27] p.64 and p.30).

Remarque 3.2.2 *The vector space E generated by the stochastic monomials of order p*

$$\left\{H_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_M,0,0\ldots)};\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_M) \in \mathbb{N}_0^M,\ \alpha_1+\cdots+\alpha_M = p\ \right\}$$

coincides with the vector space F generated by the

$$\left\{h_p\left(\sum_{i=1}^M t_i\langle\cdot,\eta_i\rangle\right);\ (t_1,\ldots,t_M)\in\mathbb{R}^M,\ \ t_1^2+\cdots+t_M^2 = 1\right\},$$

where $h_p(\cdot)$ denotes the $1-D$ Hermite polynomial of order p (it is in this manner that the polynomial chaos of order p in the random variables $\langle\cdot,\eta_1\rangle,\ldots,\langle\cdot,\eta_M\rangle$ is described in ([42] p. 6)).

That F is contained in E follows from proposition D.2 p. 210 of [27] which tells us that

$$h_p\left(\sum_{i=1}^M t_i\langle\cdot,\eta_i\rangle\right) = \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M),\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_M=p}} \frac{p!}{\alpha!} t^\alpha H_\alpha(\cdot)$$

for every $t=(t_1,\ldots,t_M)\in\mathbb{R}^M$ *such that* $t_1^2+\cdots+t_M^2=1$. *To show that in fact* $F=E$, *in view of that proposition it suffices to show that if* $y\in\mathbb{R}^d$ ($d=\dfrac{\prod_{r=0}^{p-1}(M+r)}{p!}$ *being the number of all multi-indices* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_M)\in\mathbb{N}_0^M$ *such that* $\alpha_1+\cdots+\alpha_M=p$) *is orthogonal to all the vectors of* $\mathbb{R}^d$ *of the form*

$$\left(\frac{t^\alpha}{\alpha!}\right)_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M),\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_M=p}}\quad \text{with } t_1^2+\cdots+t_M^2=1,$$

formed by the coefficients appearing in the right-hand side of the preceding equation, that $y=0$. *By homogeneity* y *is orthogonal to every vector* $\left(\frac{t^\alpha}{\alpha!}\right)_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M)\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_M=p}}$, *with* $(t_1,\ldots,t_M)\in\mathbb{R}^M$ *i.e.*

$$\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M),\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_M=p}} y_\alpha\frac{t^\alpha}{\alpha!}=0,\ \forall\,(t_1,\ldots,t_M)\in\mathbb{R}^M.$$

This implies that

$$D_t^\beta\left(\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_M),\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_M=p}} y_\alpha\frac{t^\alpha}{\alpha!}\right)\equiv y_\beta=0,$$

for every $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_M)\in\mathbb{N}_0^M$ *such that* $\beta_1+\ldots+\beta_M=p$. *Thus* $y=0$. *What was to be proved.*

Remarque 3.2.3 *If* $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, *then we can view it as the element* $\langle .,\varphi\rangle\in L^2(\mu)$ *defined by :*

$$\langle .,\varphi\rangle:\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right)\to\mathbb{R}:\omega\mapsto\langle\omega,\varphi\rangle\,.$$

It follows from lemma 2.1.2 of ([27] p. 12) that $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=\|\langle .,\varphi\rangle\|_{L^2(\mu)}$. *Thus if* $(\varphi_n)_{n\geq1}$ *is a sequence in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ *that converges to some function* $\psi\in L^2(\mathbb{R}^2)$, *the sequence* $(\langle .,\varphi_n\rangle)_{n\geq1}$ *is also a Cauchy sequence in the Hilbert space* $L^2(\mu)$ *and thus converges to some element in* $L^2(\mu)$ *that we still note* $\langle .,\psi\rangle$ *([27], p.13). The converse is also true. If* $(\varphi_n)_{n\geq1}$ *is a sequence in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ *such that the sequence* $(\langle .,\varphi_n\rangle)_{n\geq1}$ *converges to some element* $g\in L^2(\mu)$, *the sequence* $(\langle .,\varphi_n\rangle)_{n\geq1}$ *is a Cauchy sequence in* $L^2(\mu)$. *Thus by the equality*

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}=\|\langle .,\varphi_n-\varphi_m\rangle\|_{L^2(\mu)}=\|\langle .,\varphi_n\rangle-\langle .,\varphi_m\rangle\|_{L^2(\mu)}$$

the sequence $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ *is a Cauchy sequence in* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *, and hence it converges to some element* $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *which implies*

$$g = \langle ., \psi \rangle .$$

This proves that the Gaussian Hilbert space generated by the i.i.d. sequence of standard normal variables $(\langle ., \eta_j \rangle)_{j\geq 1}$ *is the space* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *isometrically imbedded in* $L^2(\mu)$ *by the mapping* $L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mu) : \psi \mapsto \langle ., \psi \rangle$ *. Denoting by* $H^{:1:}$ *the closed vector subspace of* $L^2(\mu)$ *generated by the random variables* $\langle ., \psi \rangle$*,* ψ *running among* $L^2(\mathbb{R}^2)$*, the so called homogeneous Wiener chaos of order 1 ([33], p.4) ([30], p. 44), we may write by identifying every* $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *with* $\langle ., \psi \rangle$ *that* $H^{:1:} = H := L^2(\mathbb{R}^2)$*. Let us observe that for every* $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \diagdown \{0\}$*, that the square integrable random variable defined on the probability space* $\left(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)}, \mu\right)$

$$\langle ., \psi \rangle : \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R} : \omega \mapsto \langle \omega, \psi \rangle$$

is a normal variable with mean 0 *and variance* $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$*. It is also interesting to remark that the mapping which sends every Borel set* B *of* $\mathbb{R}^2$ *of finite Borel measure onto the square integrable random variable defined on the probability space* $\left(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)}, \mu\right)$

$$\langle ., 1_B \rangle : \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R} : \omega \mapsto \langle \omega, 1_B \rangle$$

is a random orthogonal measure with the Borel measure on $\mathbb{R}^2$ *as reference measure ([16], p. 255), ([18], p. 40).*

Remarque 3.2.4 *It follows immediately from the above definition of the Wick product that for every* $\eta_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ *belonging to the orthonormal basis of* $L^2(\mathbb{R}^2)$ *constructed by taking tensor products of 1-D Hermite functions that*

$$\eta_j^{\diamondsuit n} = \eta_j \diamondsuit \eta_j \diamondsuit \cdots \diamondsuit \eta_j = h_n(\eta_j)$$

where h_n *denote the Hermite polynomial of order* n *(e.g.* $\eta_j^{\diamondsuit 2} = \eta_j^2 - 1$, $\eta_j^{\diamondsuit 3} = \eta_j^3 - 3\eta_j$, $\eta_j^{\diamondsuit 4} = \eta_j^4 - 6\eta_j^2 + 3$, $\eta_j^{\diamondsuit 5} = \eta_j^5 - 10\eta_j^3 + 15, \cdots$*). ([27] p.18). In particular* $\eta_j^{\diamondsuit n}$ *belongs to the polynomial chaos of order* n *([33] p.7). The so called homogeneous Wiener chaos of order two* $H^{:2:}$ *([33], p. 4) ([30], p. 44) is the closed vector space generated by the* $h_2(\eta_j) = \eta_j^{\diamondsuit 2}$

and the $h_1(\eta_i)\, h_1(\eta_j) = \eta_i \eta_j = \eta_i \diamondsuit \eta_j$ *for* $i \neq j$. η_j^2 *whose meaning is in fact* $< ., \eta_j >^2$ *being the square of a standard normal random variable is a chi-square random variable with one degree of freedom from which it is easy to derive that the probability density function of the random variable* $\eta_j^{\diamondsuit 2} = h_2(\eta_j) = {\eta_j}^2 - 1$ *is given by the function*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1+x}{2}}}{\sqrt{1+x}} \text{ for } x > -1, \\ \\ 0 \text{ for } x \leq -1. \end{cases}$$

On the other hand by using the advanced change of variables by area formula (theorem 1.12 page 5 of [43]) and the fact that that $(< ., \eta_i >)_{i \in \mathbb{N}}$ *is a i.i.d. sequence of standard Gaussian random variables, we find that the product random variables* $\eta_i \eta_j$ *(thus in fact* $< ., \eta_i >< ., \eta_j >$*) have for* $i \neq j$ *as probability density function :* $\frac{1}{\pi} K_0(|.|)$*, where* K_0 *denotes the modified Hankel function of order* 0 *([40] pp. 374-375) (*$K_0(x)$ *is for* $x > 0$ *the solution of the modified Bessel equation of order 0*

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0$$

which has a regular singular point at 0 ([44], p.71-75), such that $K_0(x) \sim -\ln(x)$ *as* $x \to 0^+$*). Thus, at first sight at least, unlike for* $H^{:1:}$*, the laws of probability of the random variables of the homogeneous Wiener chaos of order 2,* $H^{:2:}$*, do not seem to belong to some common stable family of probability laws like any more.*

We close this section by the following technical lemma, that we will need in section 3 :

Lemme 3.2.5 *The two-dimensional "Hermite functions"* $(\eta_j)_{j \geq 1}$ *on* $\mathbb{R}^2$ *are uniformly bounded in* j *. In particular* $\|\eta_j\|_{\infty, \mathbb{R}^2} \leq 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$*. A fortiori* $\|\eta^\alpha\|_{\infty, \mathbb{R}^2} \leq 1$, $\forall \alpha \in \mathcal{I}$.

Preuve: *Denoting temporarily by* H_n *the "physical form" of the Hermite polynomials orthogonal with respect to the weight* $\exp(-x^2)$ *and with leading coefficient* 2^n*, we have by inequality 22.14.17 p.787 of [40]:*

$$|H_n(x)| \leq \exp(\frac{x^2}{2})\, k\, 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!} \tag{3.11}$$

with $k \approx 1.086435$.

Now, we have the following formula wich links our Hermite polynomials h_n *monic and* *orthogonal with respect to the Gaussian weight* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-x^2}{2})dx$*, the so called "probabilistic form" of the Hermite polynomials, to the* H_n *:*

$$h_n(x) = 2^{\frac{-n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.12}$$

On the other hand, for every $n \in \mathbb{N}$*, the one-dimensional Hermite function* ξ_n *on* $\mathbb{R}$ *is linked to* h_{n-1} *by the formula ([27], (2.2.2), p.18) :*

$$\xi_n(x) = \pi^{\frac{-1}{4}}\left((n-1)!\right)^{-\frac{1}{2}} \exp(\frac{-1}{2}x^2) h_{n-1}\left(\sqrt{2}x\right),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

From formulas (3.11) *to* (3.13) *follows that :*

$$|\xi_n(x)| \le \frac{k}{\pi^{\frac{1}{4}}} \le 0.82,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thus $\|\xi_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \le 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$*. As the Hermite functions* η_j*,* $j \in \mathbb{N}$*, on* $\mathbb{R}^2$ *are simply tensor products of the Hermite functions* ξ_n *on* $\mathbb{R}$*, we have also* $\|\eta_j\|_{\infty,\mathbb{R}^2} \le 1$*,* $\forall j \in \mathbb{N}$*. This implies also that* $\|\eta^\alpha\|_{\infty,\mathbb{R}^2} \le 1$*,* $\forall \alpha \in \mathcal{I}$*.* ■

3.3 Existence, uniqueness and time regularity of the solution of the classical variational formulation of the heat diffusion equation in a random medium

We firstly recall the (classical) variational formulation of the heat diffusion equation in a random medium and T.G Theting's result on existence and uniqueness [23]. Then we will give a time regularity result for the solution. Let $D \subset \mathbb{R}^2$ be an open bounded set in $\mathbb{R}^2$ (we will restrict ourselves later to polygonal domains in $\mathbb{R}^2$). Let T be a positive real number, fixed. As already said in the previous section, for $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)$ (or $\mathcal{S}_0^{-1,k,1}$) denotes the space $\mathcal{S}^{-1,k,\mathring{H}^1(D)}$ and $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ (or $\mathcal{S}^{-1,k,0}$) the space $\mathcal{S}^{-1,k,L^2(D)}$. In the following, $\|\cdot\|_{-1,k,1}$ (resp. $\|\cdot\|_{-1,k,0}$) denotes the norm in $\mathcal{S}_0^{-1,k,1}$ (resp. $\mathcal{S}^{-1,k,0}$) and $(\cdot,\cdot)_{-1,k,1}$ (resp. $(\cdot,\cdot)_{-1,k,0}$) denotes the scalar product in $\mathcal{S}_0^{-1,k,1}$ (resp. $\mathcal{S}^{-1,k,0}$).
By (2.12) p.5 of [23] the dual space of $\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)$ may be identified to $\mathcal{S}^{1,-k,H^{-1}(D)}$ (we will

denote sometimes this space more simply $\mathcal{S}^{1,-k,-1}$) under the pairing :

$$\langle\langle F, f\rangle\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \langle F_\alpha, f_\alpha\rangle\, \alpha!.$$

It is immediately seen that this series is absolutely convergent as

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |\langle F_\alpha, f_\alpha\rangle|\, \alpha! &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|F_\alpha\|_{H^{-1}(D)}\, \alpha!\, (2\mathbb{N})^{-\alpha\frac{k}{2}}\, \|f_\alpha\|_{\mathring{H}^1(D)}\, (2\mathbb{N})^{\alpha\frac{k}{2}} \\ &\le \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|F_\alpha\|^2_{H^{-1}(D)}\, (\alpha!)^2\, (2\mathbb{N})^{-\alpha k}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|^2_{\mathring{H}^1(D)}\, (2\mathbb{N})^{\alpha k}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|F\|_{\mathcal{S}^{1,-k,-1}}\; \|f\|_{\mathcal{S}_0^{-1,k,1}}\,.\end{aligned}$$

From this last inequality follows immediately that the mapping $\mathcal{S}_0^{-1,k,1} \to \mathbb{R} :\ f \mapsto \langle\langle F, f\rangle\rangle$ is a continuous linear form on $\mathcal{S}_0^{-1,k,1}$. Consequently, the norm and the inner product on the dual space of $\mathcal{S}_0^{-1,k,1}$ will be denoted $\|\cdot\|_{1,-k,-1}$ and $(\cdot,\cdot)_{1,-k,-1}$.
To introduce the classical variational formulation [23] of the stochastic heat equation, we firstly need to recall the definition of Sobolev spaces comprising functions mapping time in Hilbert spaces ([21], p.285,...) ([35], vol.8 p.577-579).

Définition 3.3.1 *Let X be a real separable Hilbert space.*
By $W(0,T;X)$, we denote the space of all square-integrable function from $[0,T]$ into X having a weak time derivative square integrable from $[0,T]$ into X' i.e. $W(0,T;X) = \left\{\psi \in L^2(0,T;X)\,;\psi' \in L^2(0,T;X')\ \right\}$.

If H is another separable Hilbert space and if there is a continuous injection with dense image from X into H, then ([35], vol. 8 p. 579) $W(0,T;X)$ maps continuoustly into $C([0,T]\,;H)$, the space of continuous functions from $[0,T]$ into H endowed with the sup norm. In particular

$$W\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)\right) \hookrightarrow C\left([0,T]\,;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$$

Now let us suppose that $f \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{1,-k,-1}(D)\right)$ and that the initial condition $g \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$. Let us also suppose that the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K} \in \mathcal{F}_l(D)$

and that $k \leq 2l$. We have the following existence and uniqueness result, which results from theorem 4.10 p.12 of T.G. Theting's paper [23], for the "classical" variational formulation of the heat diffusion equation with stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$:

Théorème 3.3.2 *[23] Let us assume that the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K} \in \mathcal{F}_l(D)$ for some $l \in \mathbb{R}$ and that its generalized expectation $E[\mathcal{K}]$ is strictly positively lower bounded i.e. that $\inf_D E[\mathcal{K}] > 0$. Let us suppose that $k \in \mathbb{R}$ is choosen sufficiently small to satisfy to the condition*

$$k < 2l + \frac{2}{\ln 2} \ln \left(\frac{\inf_D E[\mathcal{K}]}{\|\mathcal{K}\|_{l,*}} \right). \tag{3.14}$$

Then $\forall f \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{1,-k,-1}(D)\right)$ and $\forall g \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$, there exists one and only one $u \in W\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)\right) \hookrightarrow C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$ solution of the classical variational formulation relative to the heat equation with random diffusion coefficient $\mathcal{K}$ (3.1) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(u(\cdot),v\right)_{-1,k,0} + \left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u(\cdot),\vec{\nabla}v\right)_{-1,k,0} = \left(f(\cdot),v\right)_{-1,k,0}, \ \forall v \in \mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D) \\ \\ u(0) = g. \end{cases} \tag{3.15}$$

Moreover we have the following energy inequality :

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{-1,k,0}^2 + \int_0^T \|u(t)\|_{-1,k,1}^2 \, dt \lesssim \left(\|g\|_{-1,k,0}^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{1,-k,-1}^2 \, dt \right). \tag{3.16}$$

Remarque 3.3.3 *In (3.15), concerning the second term in the left-hand side, $(\cdot,\cdot)_{-1,k,0}$ denotes in fact the scalar product in $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)^2$.*

Remarque 3.3.4 *Due to our hypothesis (3.14) which implies that $k \leq 2l$ and lemma 4.9 p.12 of [23], the bilinear form :*

$$\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D) \times \mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D) \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto \left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v\right)_{-1,k,0} \tag{3.17}$$

is well defined and coercive on $\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)$. Theorem 3.3.2 is then a consequence of theorems 1 and 2 chapter XVIII, p.619 and 620 of [35]. Let us also mention that some existence and *uniqueness result for the Cauchy problem (3.15) could also be obtained by applying Lumer-Phillips' theorem ([6], p. 14) in the Hilbert space* $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$. *Setting*

$$D(A) = \{u \in \mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D);\ \operatorname{div}(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u) \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\},$$
$$A : D(A) \to \mathcal{S}^{-1,k,0}(D) : u \mapsto \operatorname{div}(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u),$$

it follows by Lumer-Phillips' theorem ([6], p. 14) (Lax-Milgram's lemma and the coercivity of (3.17) , *implies that* $R(I-A) = \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$*), under the hypothesis of Theorem* 3.3.2*, that* A *generates a contraction semi-group in the Hilbert space* $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$.

If we suppose the stronger condition on k *that*

$$k < 2l + \frac{2}{\ln 2}\ln\left(\frac{\inf\limits_{D} E\left[\mathcal{K}\right]}{1.5\ \ \|\mathcal{K}\|_{l,*}}\right),$$

it can even be shown that A *generates a holomorphic semi-group ([22], theorem 1 p.237).*

Example 3.3.5 *Let us recall firstly the definition of the singular white noise field* $W = (W(x))_{x\in D}$ *(following ([16], p.80), we prefer to say "field" instead of "process" because the parameter* x *runs here over* D *a bounded subregion of the plane) :* $W(x) := \sum_{i=1}^{+\infty}\eta_i(x)\,H_{\varepsilon_i}$, $x \in D$ *([25], p.4) ([27], p.38) where* $\varepsilon_i \in \mathcal{I}$ *denotes the multi-indice whose ith component is* 1 *and whose other components are* 0.
As the two-dimensional "Hermite functions" $(\eta_i)_{i\geq 1}$ *on* $\mathbb{R}^2$ *are uniformly bounded in* i *by lemma 3.2.5, and as the series* $\sum_{i=1}^{+\infty}(2i)^l$ *converges iff* $l < -1$*, it results immediately from the definition of* $\mathcal{F}_l(D)$ (3.10) *that* $W \in \mathcal{F}_l(D)$ *for* $l < -1$. *But* $E[W(x)] = 0$, $\forall x \in D$. *Thus if we choose for the coefficient of diffusion* $\mathcal{K}$ *the white noise field, the hypotheses of T.G. Theting's theorem* 3.3.2 *could not be verified. Let us consider rather for* $\mathcal{K}$ *its Wick exponential : the so called singular positive noise field on* D

$$\mathcal{K} \;=\; \exp^{\diamondsuit}[W] := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}W^{\diamondsuit n}\ \ \text{([27], p.67, p.65, p.166)}. \tag{3.18}$$

It follows easily by using the basic algebraic properties of the Wick product ([27], lemma 2.4.5 p.42) that

$$\mathcal{K} \;=\; \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\frac{\eta^{\alpha}(\cdot)}{\alpha!}H_{\alpha}\ \ \text{([25], p.17)},$$

where η^{α} *means* $\prod_{i=1}^{\infty}\eta_i^{\alpha_i}$ *and* $\alpha!$ *means* $\prod_{i=1}^{\infty}\alpha_i!$. *Knowing by lemma 3.2.5 that* $\|\eta^{\alpha}\|_{\infty}\leq 1$, $\forall\alpha\in\mathcal{I}$, *and using proposition 2.3.3 p. 31 of [27] (or [36]) which tells us that the series* $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{-\alpha q}$ *converges iff* $q>1$, *it follows easily that the positive singular noise* $\exp^{\diamondsuit W(.)}\in\mathcal{F}_l(D)$ *for* $l<-1$. *Alternatively, this follows immediately from the fact that* $W\in\mathcal{F}_l(D)$ *for* $l<-1$ *and proposition 6, (ii) p.123 of [38] (an elementary operational calculus result).*
Also as $E[\mathcal{K}]=1$, *the hypothesis* $\inf_D E[\mathcal{K}]>0$ *of T.G. Theting's theorem* 3.3.2 *is trivially satisfied. Thus T.G. Theting's theorem* 3.3.2 *applies in this case, if we take k sufficiently negative for condition* (3.14) *to be satisfied.*

Now we want to give some time regularity result :

Théorème 3.3.6 *Additionaly to the hypotheses of theorem* 3.3.2, *we suppose that the right-hand side f and its time derivative* $\frac{df}{dt}$ *belong to* $L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$. *We also suppose that the initial condition* $g\in\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)$ *and satisfies* $\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}g\right)\in\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$, *this last condition being satisfied for example if* $\Delta g\in\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ *and* $\vec{\nabla}\mathcal{K}\in\mathcal{F}_l(D)^2$. *Then the time derivative* $\frac{du}{dt}$ *of the solution of the classical variational formulation* (3.15) *has the following regularity properties :*

$$\frac{du}{dt}\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)\right)\cap C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right).$$

Preuve: Let us consider the Cauchy problem : find $z\in W(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D))$ such that :

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\left(z(\cdot),v\right)_{-1,k,0}+\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}z(\cdot),\vec{\nabla}v\right)_{-1,k,0}=\left(\frac{df}{dt}(\cdot),v\right)_{-1,k,0},\ \forall v\in\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)\\ \\ z(0)=f(0)+\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}g\right)\end{cases}\tag{3.19}$$

As $\frac{df}{dt}\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}\right)\hookrightarrow L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{1,-k,-1}\right)$ and $z(0)\in\mathcal{S}^{-1,k,0}$ (because $f(0)\in\mathcal{S}^{-1,k,0}$ due to the hypotheses on f and $\frac{df}{dt}$), it follows by theorem 3.3.2 that $z\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}\right)\cap C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k,0}\right)$ and

$$\|z\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}\right)\cap C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k,0}\right)}\lesssim\left\|f(0)+\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}g\right)\right\|_{-1,k,0}+\left\|\frac{df}{dt}\right\|_{L^2(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0})}.\tag{3.20}$$

Let us set $u(t)=\int_0^t z(s)ds+g$. $\frac{du}{dt}(t)=z(t)$ a.e. and by integrating both sides of equation $(3.19)_{(i)}$ from 0 to t, taking into account the initial condition $(3.19)_{(ii)}$ and applying Green's formula ([24], (2.10) p.611), we obtain equation $(3.15)_{(i)}$. We have also $u(0)=g$ i.e. $(3.15)_{(ii)}$. By unicity, it is thus the solution of the Cauchy problem (3.15).
We have $\frac{du}{dt}=z$ from which the stated regularity on $\frac{du}{dt}$ follows. ■

To be able to establish error estimates for the semi-discrete solution of the dual mixed method relative to the heat equation in a stochastic medium (3.1),we will need also some spatial regularity of its solution u, in weighted Sobolev spaces.
Firstly, let us recall the definition of the weighted Sobolev spaces, $H^{2,\alpha_w}(D)$, $0<\alpha_w<1$.
Henceforth, we suppose that D is a plane domain, **simply connected, with a polygonal boundary Γ**, the union of a finite number N of linear segments $\bar{\Gamma}_j$ numbered according to the positive orientation. We denote by ω_i the aperture of the angle between Γ_i and Γ_{i+1} for $i=1,\ldots,N$ $(\Gamma_{N+1}:=\Gamma_1)$. We suppose that D possesses only one reentrant corner $\{S_N\}=\bar{\Gamma}_N\cap\bar{\Gamma}_1$. For simplicity we assume that S_N is situated at the origin of our cartesian frame. By $r(\cdot)$ we denote the distance function from an arbitrary point in the plane $\mathbb{R}^2$ to the origin and ω denotes the aperture of our reentrant corner.

Définition 3.3.7 *([3], p.388) For $\alpha_w\in\,]0,1[$, we denote by $H^{2,\alpha_w}(D)$ the space of all functions in $H^1(D)$ such that in addition $r^{\alpha_w}D^\beta u\in L^2(D)$ for every $\beta\in\mathbb{N}_0^2$ such that $|\beta|=2$.*

Théorème 3.3.8 *We suppose that the right-hand side f and its time-derivative $\frac{df}{dt}$ belong to $L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$, and that the initial condition g of the Cauchy problem* (3.15) *belongs to*

$$\left\{\ g\in\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D);\ \Delta g\in\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right\}.$$

On the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$, we suppose that its generalized expectation $E[\mathcal{K}]$ is strictly positively lower bounded i.e. that $\inf_D E[\mathcal{K}]>0$ and that $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{\diamond-1}$, $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_2}\in\mathcal{F}_l(D)$. Finally, we suppose that $k\in\mathbb{R}$ satifies inequality (3.14).
Then u solution of the Cauchy problem (3.15) *satisfies :*

$$u\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}\right)\quad \textit{for all } \alpha_w\in\left]1-\frac{\pi}{\omega},1\right[.$$

Preuve: From the heat diffusion equation in a stochastic medium

$$u_t - \operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u\right) = f,$$

follows that

$$\mathcal{K}\diamondsuit\Delta u = u_t - f - \vec{\nabla}\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u. \tag{3.21}$$

By theorem 3.3.6 : $u_t \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$ and by theorem 3.3.2 : $\vec{\nabla}u \in \left(L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)\right)^2$. Moreover $\vec{\nabla}\mathcal{K} \in \mathcal{F}_l\left(D\right)^2$ with $l \geqslant \frac{k}{2}$. Thus $\vec{\nabla}\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$.
Consequently the right-hand side of equation (3.21) belong to $L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$. Moreover, by hypothesis, $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}$ exists and also belongs to $\mathcal{F}_l\left(D\right)$. Thus :

$$\Delta u = \mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\left(u_t - f - \vec{\nabla}\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u\right) \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right).$$

Let us set $h := \mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\left(u_t - f - \vec{\nabla}\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u\right)$.

$$\|h\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}\right)} \lesssim \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}\right)} + \|u\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,1}\right)} + \|f\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}\right)}. \tag{3.22}$$

Setting $u(t) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha\left(t\right)H_\alpha$ and $h(t) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} h_\alpha\left(t\right)H_\alpha$ be the chaos expansions of $u(t)$ and $h(t)$ respectively, $\forall' t \in \left[0,T\right]$, we have :

$$\Delta u_\alpha\left(t\right) = h_\alpha\left(t\right),\ \forall\alpha\in\mathcal{I},\ \forall' t\in\left[0,T\right]. \tag{3.23}$$

As $u_\alpha\left(t\right) \in H_0^1\left(D\right)$ and $h_\alpha\left(t\right) \in L^2\left(D\right)$, $\forall' t \in \left[0,T\right]$, we have by (8,4,1,7) p. 388 of Grisvard's book [3], that $u_\alpha\left(t\right) \in H^{2,\alpha_w}\left(D\right)$ and by the closed graph theorem

$$\left\|u_\alpha\left(t\right)\right\|_{H^{2,\alpha_w}(D)} \lesssim \left\|h_\alpha\left(t\right)\right\|_{L^2(D)},\ \forall\alpha\in\mathcal{I},\ \forall' t\in\left[0,T\right], \tag{3.24}$$

with a constant (hidden in $\lesssim$) independant of α and t.
Taking the squares of each side of inequality (3.24), multiplying both sides by $\left(2\mathbb{N}\right)^{k\alpha} := \prod_{j=1}^{+\infty}\left(2j\right)^{k\alpha_j}$, summing over $\alpha\in\mathcal{I}$, and integrating on the time variable t from 0 to T, we obtain :

$$\int_0^T \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \left\|u_\alpha\left(t\right)\right\|^2_{H^{2,\alpha_w}(D)} \left(2\mathbb{N}\right)^{k\alpha} dt \lesssim \int_0^T \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \left\|h_\alpha\left(t\right)\right\|^2_{L^2(D)} \left(2\mathbb{N}\right)^{k\alpha} dt$$

i.e.

$$\|u\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}\right)} \lesssim \|h\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k}(D)\right)} . \tag{3.25}$$

Thus $u \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}\right)$ for all $\alpha_w \in \left]1-\frac{\pi}{\omega},1\right[$. ■

Example 3.3.9 *We give an example of a stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$ satisfying the hypotheses of theorem 3.3.8. Let $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ and let us set*

$$\mathcal{K}(x) = \exp^{\diamond}\left(W_\phi(x,.)\right),\ \forall x \in D$$

where $W_\phi(x,.) := \langle\cdot,\phi_x\rangle,\ \forall x \in D$ and

$$\phi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : y \mapsto \phi(x-y).$$

Let us recall that $W_\phi(x,.) := \langle .,\phi_x\rangle$ is the element of $L^2\left(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)},\mu\right)$ defined by continuity and density from $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ as explained in remark 3.2.3 ([27], (2.1.9) p.13). $(W_\phi(x,.))_{x\in D} := (\langle\cdot,\phi_x\rangle)_{x\in D}$ is called the smoothed white noise field ([27] p.13, 18, 66). $W_\phi(x,.) := \langle\cdot,\phi_x\rangle$ has the following chaos expansion

$$W_\phi(x,.) := \langle\cdot,\phi_x\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} (\phi_x|\eta_i)_{L^2(\mathbb{R}^2)} H_{\varepsilon_i}(\cdot) \ , \tag{3.26}$$

where ε_i denotes the multi-indice belonging to $\mathcal{I}$ with 1 on entry number i and 0 elsewhere. It is easy to see that this series is convergent in $L^2(\mu)$ and that its sum is a normal random variable $N\left(0,\|\phi\|^2\right)$ on the probability space $L^2\left(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{B}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)},\mu\right)$. From the definition of the space $\mathcal{F}_l(D)$, the boundedness of the coefficients in the series (3.26) *and as the series $\sum_{i=1}^{+\infty}(2i)^l$ converges if $l<-1$, it follows immediately that*

$$W_\phi \in \mathcal{F}_l(D), \forall l < -1.$$

From ([27] (2.6.48) p.66, (2.7.6) p.70) and (3.26)*, it follows that*

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &:= \exp^{\diamond}(W_\phi) := \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(W_\phi)^{\diamond n} \\ &= \textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \frac{1}{\alpha!}(\phi_\cdot|\eta)^\alpha H_\alpha\end{aligned} \tag{3.27}$$

where $\alpha! := \prod_{i=1}^{+\infty} \alpha_i!$ *and* $(\phi.|\eta)^\alpha := \prod_{i=1}^{+\infty} (\phi.|\eta_i)_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\alpha_i}$. *By formula ([27],* (2.6.49) *p.65), it follows that* $\mathcal{K}(x)^{\diamondsuit-1} = \exp^{\diamondsuit}(-\langle\cdot,\phi_x\rangle)$ *and thus replacing* ϕ *by* $-\phi$ *in formula* (3.27)*, we obtain*

$$\mathcal{K}(x)^{\diamondsuit-1} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \frac{1}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} (\phi_x|\eta)^\alpha H_\alpha \tag{3.28}$$

where $|\alpha| := \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i$. *We are going to show that* $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}$, $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_2}$ *all belong to* $\mathcal{F}_l(D)$ *for* $l < -1$. *That* $\mathcal{K}$ *and* $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}$ *belong to* $\mathcal{F}_l(D)$ *for* $l < -1$ *results from* $W_\phi \in \mathcal{F}_l(D)$ *for* $l < -1$ *and proposition 6, (ii) p.123 of [38] (an elementary operational calculus result). By the definiton of the derivatives in the spatial variables* x_1, x_2 *on elements of stochastic Sobolev spaces (definition 3.4 p.8 [25]), it follows from* (3.27) *and* (3.26) *that for* $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_i}(x) &= \exp^{\diamondsuit}(W_\phi(x,.))\diamondsuit W_{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}}(x,.)\\ &= \mathcal{K}(x)\diamondsuit W_{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}}(x,.).\end{aligned} \tag{3.29}$$

We know already that $\mathcal{K}$ *belongs to* $\mathcal{F}_l(D)$ *for* $l < -1$. *By* (3.26) :

$$W_{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}}(x,.) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x-\cdot)|\eta_j\right)_{L^2(\mathbb{R}^2)} H_{\varepsilon_j}(\cdot)$$

so that by the same reasoning as above follows that $W_{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}}$ *also belong to* $\mathcal{F}_l(D)$ *for* $l < -1$ *(i=1,2).* $\mathcal{F}_l(D)$ *being a commutative Banach algebra for the Wick product (prop. 6 p.123 [38])*

$$\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_i} = \mathcal{K}\diamondsuit W_{\frac{\partial\phi}{\partial x_i}},\ \mathcal{K}\in\mathcal{F}_l(D) \quad \textit{for} \quad l < -1.$$

From (3.27) *follows that* $E[\mathcal{K}(x)] = 1,\ \forall x \in D$, *so that the hypothesis* $\inf_D E[\mathcal{K}] > 0$ *of theorem 3.3.8 is trivially satisfied in this case. Thus in conclusion for* $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, *the stochastic diffusion coefficient* $\mathcal{K}$ *defined by*

$$\mathcal{K}(x) = \exp^{\diamondsuit}(W_\phi(x,.)),\ \forall x \in D$$

satisfies for $l < -1$ *all the hypotheses of theorem 3.3.8. Thus if* $k \in \mathbb{R}$ *is choosen sufficiently negative to satisfy condition* (3.14) *for some* $l < -1$, *if* $f, \frac{df}{dt} \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$, *and if the initial condition* $g \in \left\{\ g \in \mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D);\ \Delta g \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right\}$, *then the weak solution* *in the classical variational sense of*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\left(\exp^{\diamond} W_\phi \diamond \vec{\nabla} u\right) = f \quad in \quad Q :=]0,T[\times D \\ \\ u = 0 \quad on \quad]0,T[\times \partial D \\ \\ u_{|t=0} = g \qquad on \quad D. \end{cases}$$

$u \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}\right)$ *for all* $\alpha_w \in \left]1-\frac{\pi}{\omega},1\right[$*. Moreover by theorem 3.3.6, u and* $\frac{du}{dt} \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)\right) \cap C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$*.*

Example 3.3.10 *In the preceding example, whatever* $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ *is, due to the formula :*

$$\exp^{\diamond}[\langle\omega,\phi_x\rangle] = \exp\left(\langle\omega,\phi_x\rangle - \frac{1}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right)$$

which is proved to be true in [27] (lemma 2.6.16 p.66) for every function $\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$*, the stochastic diffusion coefficient*

$$\mathcal{K} = \exp^{\diamond}(W_\phi)$$

is always strictly positive. Thus, it seems to be worthwhile to give an example of a diffusion coefficient $\mathcal{K}$ *which can take negative values though satisfynig all the the hypotheses of theorem 3.3.8 for k sufficiently negative. Let us consider as diffusion coefficient*

$$\mathcal{K}(x) = 1 + W_\phi(x,.),\ \forall x \in D$$

ϕ *being some function belonging to* $H^1(\mathbb{R}^2)$*. We know already from the previous example that* $\mathcal{K}$*,* $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_i}$ *(i=1,2) belong to* $\mathcal{F}_l(D)$ *for* $l < -1$*. Let us find a condition on* $\mathcal{K}$ *who assures us that* $\mathcal{K}^{\diamond-1}$ *exists and belongs to* $\mathcal{F}_l(D)$ *for* $l < -1$*. By proposition 6, (ii) p.123 of [38] (an elementary operational calculus result) if* $\|W_\phi\|_{l,*} < 1$*, the series*

$$1 - W_\phi + W_\phi^{\diamond 2} - W_\phi^{\diamond 3} + \cdots$$

converges to some element of $\mathcal{F}_l(D)$*. Thus if* $\|W_\phi\|_{l,*} < 1$*, its Wick inverse* $W_\phi^{\diamond-1}$ *exists and belong to* $\mathcal{F}_l(D)$ $(l < -1)$*. But this condition is rather abstract; we would like a condition* *directly on* ϕ. *Thus, let us estimate* $\|W_\phi\|_{l,*}$:

$$W_\phi(x,\cdot) = \sum_{i=1}^{+\infty} (\phi_x \mid \eta_i)_{L^2(\mathbb{R}^2)} H_{\varepsilon_i},$$

where $\varepsilon_i = \left(0, \ldots, 1_{(i^{\text{è}}\ position)}, \ldots, 0, \ldots\right)$, *and*

$$H_{\varepsilon_i} : \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^2\right) \to \mathbb{R} \quad : \omega \longmapsto \langle \omega, \eta_i \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)} .$$

From the definition of the norm in $\mathcal{F}_l(D)$ *follows that*

$$\begin{aligned} \|W_\phi\|_{l,*} &= \sup_{x\in D}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} |(\phi_x \mid \eta_i)_{L^2(\mathbb{R}^2)}| (2\mathbb{N})^{l\varepsilon_i}\right) \\ &\leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \sum_{i=1}^{+\infty} (2i)^l = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} 2^l \sum_{i=1}^{+\infty} i^l, \end{aligned}$$

this late series being convergent if $l < -1$. *Thus if* l *is choosen sufficently negative so that*

$$2^l \sum_{i=1}^{+\infty} i^l < \frac{1}{\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}} , \tag{3.30}$$

the series $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n W_{\phi.}^{\Diamond n}$ *will be absolutely convergent in the Banach space* $\mathcal{F}_l(D)$ *to* $W_\phi^{\Diamond -1}$ $(l < -1)$. *In conclusion, if* $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ *and* $l < -1$, *then* $\mathcal{K}, \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x_2} \in \mathcal{F}_l(D)$ *and if* l *satisfies moreover condition (3.30), then also* $\mathcal{K}^{\Diamond -1} \in \mathcal{F}_l(D)$ *.Let us observe also in this example that the generalized expectation* $E[\mathcal{K}] = 1$. *If* $k \in \mathbb{R}$ *satisfies*

$$k < 2l - \frac{2}{\ln 2} \ln\left(1 + \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} 2^l \sum_{i=1}^{+\infty} i^l\right) \tag{3.31}$$

then condition (3.14) is satisfied for this example. Supposing that $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, *that* $l < -1$ *and that conditions* (3.30), (3.31) *are satisfied, it follows by theorem 3.3.8, that if* $f, \frac{df}{dt} \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$ *and if the initial condition* $g \in \left\{ g \in \mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D);\ \Delta g \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right\}$, *then the weak solution* u *in the classical variational sense of*

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\left((1+W_\phi) \Diamond \vec{\nabla} u\right) = f \quad in \quad Q :=]0,T[\times D \\ \\ u = 0 \quad on \quad]0,T[\times \partial D \\ \\ u_{|t=0} = g \qquad on \quad D. \end{cases}$$

belongs to $L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}\right)$ *for all* $\alpha_w \in \left]1 - \frac{\pi}{\omega}, 1\right[$. *Moreover by theorem 3.3.6,* u *and* $\frac{du}{dt} \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)\right) \cap C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$.

3.4 The dual mixed formulation for the heat diffusion equation in a stochastic medium

In the following, to alleviate the notations, we will denote by $\mathcal{H}(\mathrm{div};D)$ the space $\mathcal{S}^{-1,k,H(\mathrm{div};D)}$ where $H(\mathrm{div};D)=\left\{\vec{\psi}\in L^2(D)^2;\ \mathrm{div}\,\vec{\psi}\in L^2(D)\right\}$ this latter space being endowed with its natural norm and $\mathcal{H}(\mathrm{div};D):=\mathcal{S}^{-1,k,H(\mathrm{div};D)}$ with the corresponding norm. Let us introduce the new variable $\vec{p}:=\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}u$. Under the hypotheses of T.G. Theting's theorem 3.3.2, we have that $u\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D)\right)$, $\mathcal{K}\in\mathcal{F}_l(D)$ and $k\leq 2l$; consequently $\vec{p}:=\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}u\in L^2\left(0,T;\left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2\right)$.

Let us now assume that the stronger hypotheses of theorem 3.3.6 are verified. In particular $\frac{du}{dt}\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$. Applying equation $(3.15)_{(i)}$, it follows that :

$$\mathrm{div}\,\vec{p}=u_t-f\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right).$$

Thus $\vec{p}\in L^2\left(0,T;\left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2\right)$ and $\mathrm{div}\,\vec{p}\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$. Equivalently

$$\vec{p}\in L^2\left(0,T;\mathcal{H}(\mathrm{div};D)\right)\equiv L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,H(\mathrm{div};D)}\right).$$

Now, let us take some $\vec{q}\in\mathcal{H}(\mathrm{div};D)$. We also assume in addition to the hypotheses of theorem 3.3.6 that $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\in\mathcal{F}_l(D)$. For $\forall' t\in[0,T]$, ($\forall'$ means for almost every), we have the equation $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}(t)-\overrightarrow{\nabla}u(t)=0$. Taking the scalar product with $\vec{q}$ in $\mathcal{S}^{-1,k,L^2(\Omega)^2}$ and then applying Green's formula :

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}(t),\vec{q}\right)_{-1,k,0}&=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\left(\overrightarrow{\nabla}u_\alpha(t),\vec{q}_\alpha\right)_0(2\mathbb{N})^{k\alpha}\\&=-\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\left(u_\alpha(t),\mathrm{div}\,\vec{q}_\alpha\right)_0(2\mathbb{N})^{k\alpha}\\&=-\left(u(t),\mathrm{div}\,\vec{q}\right)_{-1,k,0},\end{aligned}$$

we obtain the equation

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}(t),\vec{q}\right)_{-1,k,0}+\left(u(t),\mathrm{div}\,\vec{q}\right)_{-1,k,0}=0,\quad\forall\vec{q}\in\mathcal{H}(\mathrm{div};D).\tag{3.32}$$

Taking the scalar product in $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ of both sides of the equation

$$\mathrm{div}\,\vec{p}(t)=-\left(f(t)-u_t(t)\right)$$

with any $v \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$, we obtain $\forall' t \in [0,T]$ the equilibrium equation :

$$(\operatorname{div} \vec{p}(t), v)_{-1,k,0} = -(f(t) - u_t(t), v)_{-1,k,0}, \quad \forall v \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D). \tag{3.33}$$

Equations (3.32) and (3.33) form the mixed formulation of the stochastic heat equation with random diffusion coefficient $\mathcal{K}$ (and random heat sources and initial temperature also) (3.1).

More precisely, the mixed formulation of the Cauchy problem in the polygonal domain D with random heat source f and random initial temperature g, is the following problem : find $\vec{p} \in L^2(O,T;\mathcal{H}(\operatorname{div};D))$, $u \in H^1\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$ such that $\forall' t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}(t), \vec{q}\right)_{-1,k,0} + (u(t), \operatorname{div}\vec{q})_{-1,k,0} = 0, \quad \forall \vec{q} \in \mathcal{H}(\operatorname{div};D), \\ \\ (\operatorname{div}\vec{p}(t), v)_{-1,k,0} = -(f(t) - u_t(t), v)_{-1,k,0}, \quad \forall v \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D), \\ \\ \text{and} \\ \\ u(0) = g. \end{cases} \tag{3.34}$$

We have already proved that, under the hypotheses of theorem 3.3.6 and $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1} \in \mathcal{F}_l(D)$, problem (3.34) possesses at least one solution. It remains to prove uniqueness :

Lemme 3.4.1 *Assuming that $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1} \in \mathcal{F}_l(D)$ and that k verifies condition* (3.14)*, the bilinear form*

$$a(\cdot,\cdot) : \left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2 \times \left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2 \to \mathbb{R} : \ (\vec{p},\vec{q}) \mapsto \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p},\vec{q}\right)_{-1,k,0}$$

is also coercive.

Preuve: It suffices of course to prove that the bilinear form

$$\mathcal{S}^{-1,k,0}(D) \times \mathcal{S}^{-1,k,0}(D) \to \mathbb{R} : \ (u,v) \mapsto \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit u, v\right)_{-1,k,0}$$

is coercive. Let us set $w = \mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit u \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$. Then :

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit u, u\right)_{-1,k,0} &= (w, \mathcal{K}\diamondsuit w)_{-1,k,0} = (\mathcal{K}\diamondsuit w, w)_{-1,k,0} \\ &\geq c\,\|w\|^2_{-1,k,0} \end{aligned}$$

where $c>0$ is the constant of coercivity of the bilinear form

$$\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\times\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\rightarrow\mathbb{R}:(h,d)\mapsto(\mathcal{K}\diamondsuit h,d)_{-1,k,0}$$

(see remark 3.3.4 or lemma 4.9 p. 12 of [23]).
But

$$\|u\|_{-1,k,0}=\left\|\mathcal{K}\diamondsuit\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit u\right)\right\|_{-1,k,0}\leq\|\mathcal{K}\|_{l,*}\|w\|_{-1,k,0}.$$

Thus

$$\|w\|_{-1,k,0}\geq\|\mathcal{K}\|_{l,*}^{-1}\|u\|_{-1,k,0}.$$

Putting together these inequalities, it follows that :

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit u,u\right)_{-1,k,0}\geq\frac{c}{\|\mathcal{K}\|_{l,*}^{2}}\|u\|_{-1,k,0}^{2},\quad\forall u\in\mathcal{S}^{-1,k,0}(D).$$

This proves the coercivity of the bilinear form $a(\cdot,\cdot)$. ■

Théorème 3.4.2 *Under the hypotheses of theorem 3.3.6 and assuming also that $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\in\mathcal{F}_l(D)$, the mixed formulation* (3.34) *possesses one and only one solution. Denoting by $u\in W(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D))$ the unique solution of the classical variational solution* (3.15)*, the unique solution of the mixed formulation of the stochastic Cauchy problem* (3.34) *is given by*

$$(\vec{p}(t),u(t))=\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}u(t),u(t)\right),\quad\forall' t\in[0,T].$$

Preuve: We have already proved that if $u\in W(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D))$ is the unique solution of the classical variational solution (3.15), then

$$(\vec{p}(t),u(t)):=\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}u(t),u(t)\right),\quad\forall' t\in[0,T]$$

is solution of the mixed formulation (3.34).
It remains to prove unicity. Thus we suppose that $f=0$ in $(3.34)_{(ii)}$ and that $g=0$ in $(3.34)_{(iii)}$. From (3.34) follows :

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}(t),\vec{p}(t)\right)_{-1,k,0}=-\left(u_t(t),u(t)\right)_{-1,k,0}.\tag{3.35}$$

Due to hypothesis (3.14) on k, the bilinear form in the left-hand side of (3.35) is coercive. This implies that

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{-1,k,0}^{2} \leq 0.$$

As $u \in H^1\left(0, T; \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)$ by theorem 3.3.6, u is absolutely continuous from $[0, T]$ with values in the separable Hilbert space $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ ([23], lemma 2.3, p.5) . It follows by integration then, that

$$\|u(t)\|_{-1,k,0}^{2} \leq \|u(0)\|_{-1,k,0}^{2} = 0.$$

Thus $u = 0$. By (3.35) and the coercivity of the bilinear form of its left-hand side, we now obtain $\vec{p} = 0$. ∎

3.5 Semi-Discrete solution of the dual mixed formulation for the heat diffusion equation in a stochastic medium

Let us consider a family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ on the polygonal domain $D \subset \mathbb{R}^2$ (let us recall that D possesses one and only one reentrant corner at the origin of $\mathbb{R}^2$). For K a triangle belonging to the triangulation $\mathcal{T}_h$, let us denote by h_K the diameter of K and by ρ_K the interior diameter of K i.e. the diameter of the biggest disc included in K. As in theorem 8.4.1.6 p. 392 of [3], we suppose that the family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ has the property that $\max_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K}$ is bounded by a positive constant independent of the parameter h ; in that case, one says usually that the family of triangulations is regular (see for example [4] (17.1) p.131). In accordance with the tradition (see [4] remark 17.1 p 131) the parameter h has also another significance : it may denotes instead of the parameter h itself, the $\max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$. The true significance of h is always clear from the context.

Let us now define the semi-discretized problem. Firstly, let us define the following finite dimensional vector subspaces X_h of $X := H(\mathrm{div}; D)$, respectively M_h of $M := L^2(D)$:

$$X_h \quad : \quad = \left\{ \vec{q}_h \in H(\mathrm{div}; D);\ \forall K \in \mathcal{T}_h : \vec{q}_{h|K} \in RT_0(K) \right\},$$

$$M_h \quad : \quad = \left\{ v_h \in L^2(D);\ \forall K \in \mathcal{T}_h : v_{h|K} \in P_0(K) \right\},$$

where $RT_0(K) := P_0(K)^2 \oplus P_0(K) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ denotes the 3-dimensional vectorial space on $\mathbb{R}$ of all Raviart-Thomas vectorfields of degree 0 on the triangle K i.e vectorfields of the form

$$K \to \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2) \mapsto (a + cx_1, b + cx_2)$$

where a, b, c are arbitrary real numbers. $P_0(K)$ denotes the 1-dimensional vectorial space on $\mathbb{R}$ of all constant functions on the triangle K (note that $RT_0(K)$ is denoted $D_1(K)$ in [5] p. 550).

Now for $N,\ K \in \mathbb{N}$, we define the "cutting" $\mathcal{I}_{N,K} \subset \mathcal{I}$ by

$$\mathcal{I}_{N,K} = \{(0, \ldots, 0, \ldots)\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{K} \left\{ \alpha \in \mathbb{N}_0^k;\ |\alpha| = n \text{ and } \alpha_k \neq 0 \right\} \right)$$

that is to say $\mathcal{I}_{N,K}$ is the set of all multi-indices α such that their index (index $\alpha := \max\{j; \alpha_j \neq 0\}$) is smaller than or equal to K and their modulus ($|\alpha| := \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j$) is smaller than or equal to N. This set can be shown to contain $\frac{(N+K)!}{N!K!}$ different multi-indices ([26] p. 9) ([30] p. 82). We are now in a position to define finite dimensional vector subspaces of $\mathcal{H}(\mathrm{div}; D)$, respectively of $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$:

$$X_h^{(N,K)} \quad : \quad = \left\{ \vec{q}_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} \vec{q}_{h,\alpha} H_\alpha;\ \vec{q}_{h,\alpha} \in X_h,\ \forall \alpha \in \mathcal{I}_{N,K} \right\},$$

$$M_h^{(N,K)} \quad : \quad = \left\{ v_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} v_{h,\alpha} H_\alpha;\ v_{h,\alpha} \in M_h,\ \forall \alpha \in \mathcal{I}_{N,K} \right\}.$$

Note that these spaces do not depend on k.

We can now define the semi-discretized problem corresponding to the mixed formulation of the stochastic heat equation (3.34) :

find $(\vec{p}_h, u_h) \in L^2\left(0,T;X_h^{(N,K)}\right) \times H^1\left(0,T;M_h^{(N,K)}\right)$ such that, $\forall' t \in [0,T]$:

$$\begin{cases} \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit -1}\diamondsuit \vec{p}_h\left(t\right), \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} + \left(u_h\left(t\right), \operatorname{div}\vec{q}_h\right)_{-1,k,0} = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}, \\ \\ \left(\operatorname{div}\vec{p}_h\left(t\right), v_h\right)_{-1,k,0} = -\left(f(t) - u_{h,t}\left(t\right), v_h\right)_{-1,k,0}, \quad \forall v_h \in M_h^{(N,K)}, \\ \\ \text{and} \\ \\ u_h\left(0\right) = g_h \in M_h^{(N,K)}. \end{cases} \tag{3.36}$$

The initial condition $g_h \in M_h^{(N,K)}$ will be made precise later. Let us first show that the above problem (3.36) possesses one and only one solution in $L^2\left(0,T;X_h^{(N,K)}\right) \times H^1\left(0,T;M_h^{(N,K)}\right)$:

Théorème 3.5.1 *Let the hypotheses of theorem 3.4.2 be satisfied. Then problem* (3.36) *possesses one and only one solution :*

$$(\vec{p}_h, u_h) \in L^2\left(0,T;X_h^{(N,K)}\right) \times H^1\left(0,T;M_h^{(N,K)}\right).$$

Moreover $\vec{p}_h \in H^1\left(0,T;X_h^{(N,K)}\right)$.

Preuve: Let $\vec{q}_h^{(1)},\ldots,\vec{q}_h^{(J)}$ be a basis of X_h and $v_h^{(1)},\ldots,v_h^{(L)}$ be the special basis of M_h formed by the characteristic functions of every triangle $K \in \mathcal{T}_h$. Then the random vector fields $\vec{q}_h^{(j)} H_\alpha \in X_h^{(N,K)},\ j=1,\ldots,J,\ \alpha \in \mathcal{I}_{N,K}$ form a basis of $X_h^{(N,K)}$ and the random fields $v_h^{(k)} H_\alpha,\ k = 1,\ldots,L,\ \alpha \in \mathcal{I}_{N,K}$ form a base of $M_h^{(N,K)}$. Expanding $\vec{p}_h\left(t\right)$, respectively $u_h\left(t\right)$ in these respective base, we obtain :

$$\vec{p}_h\left(t\right) = \sum_{j=1}^{J} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} \left(p_h\left(t\right)\right)_{j,\alpha} \vec{q}_h^{(j)} H_\alpha \tag{3.37}$$

and

$$u_h\left(t\right) = \sum_{k=1}^{L} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} \left(u_h\left(t\right)\right)_{k,\alpha} v_h^{(k)} H_\alpha, \tag{3.38}$$

where $\left(p_h\left(t\right)\right)_{j,\alpha}$, respectively $\left(u_h\left(t\right)\right)_{k,\alpha}$ are some real coefficients. Note that J is equal to the number of edges of the triangulation $\mathcal{T}_h$ on $\bar{D}$ and that L is equal to the number of triangles.

Equation $(3.36)_{(i)}$ is equivalent to the set of $J \times \frac{(N+K)!}{N!K!} = J \times C^K_{N+K}$ equations obtained by taking for $\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}$ an arbitrary element $\vec{q}_h^{(l)} H_\alpha$ of the basis $\{\vec{q}_h^{(j)} H_\alpha; \quad j = 1, \ldots, J,$ $\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}\}$ of $X_h^{(N,K)}$:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \left(\left(\mathcal{K}^{\diamond -1}\right)_\gamma \vec{q}_h^{(j)}, \vec{q}_h^{(l)} \right)_{0,D} (p_h(t))_{j,\beta} + \sum_{k=1}^{L} \left(v_h^{(k)}, \operatorname{div} \vec{q}_h^{(l)} \right)_{0,D} (u_h(t))_{k,\alpha} = 0 \qquad (3.39)$$

$\forall l = 1, \ldots, J, \ \forall \alpha \in \mathcal{I}_{N,K}.$

Each equation in (3.39) is a linear homogeneous equation in the unknowns $(p_h(t))_{j,\beta}$, $j = 1, \ldots, J, \ \beta \in \mathcal{I}$ with $\beta \leq \alpha$ i.e. $\beta_j \leq \alpha_j, \ \forall j \in \mathbb{N}$. For each α fixed in $\mathcal{I}_{N,K}$, we have J equations of the type (3.39). Let us rewrite these J equations in a matrix form. In this respect for each $\gamma \in \mathcal{I}$, $\gamma \leq \alpha$, let us introduce the square symmetric matrix of dimension J :

$$\boldsymbol{B}_\gamma = \left(b^\gamma_{j,l}\right)_{1 \leq j,l \leq J}$$

where

$$b^\gamma_{j,l} = \left(\left(\mathcal{K}^{\diamond -1}\right)_\gamma \vec{q}_h^{(j)}, \vec{q}_h^{(l)} \right)_{0,D} = \int_D \left(\mathcal{K}^{\diamond -1}\right)_\gamma \vec{q}_h^{(j)} . \ \vec{q}_h^{(l)} \ dx,$$

$\forall \ j, l = 1, \ldots, J$, and the rectangular matrix $\boldsymbol{C}$ with J rows and L columns :

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}_{l,k})_{\substack{1 \leq l \leq J \\ 1 \leq k \leq L}}$$

where

$$\boldsymbol{C}_{l,k} = \left(v_h^{(k)}, \operatorname{div} \vec{q}_h^{(l)} \right)_{0,D} = \int_D v_h^{(k)} . \operatorname{div} \vec{q}_h^{(l)} \ dx.$$

In a matrix form, the set of equations (3.39) for $j = 1, \ldots, J$ and every α fixed in $\mathcal{I}_{N,K}$ may be rewritten :

$$\sum_{(\gamma,\beta) \in \mathcal{I}^2_{N,K}: \ \gamma+\beta=\alpha} \boldsymbol{B}_\gamma \left[(p_h(t))_{j,\beta} \right]_{1 \leq j \leq J} + \boldsymbol{C} \left[(u_h(t))_{k,\alpha} \right]_{1 \leq k \leq L} = 0, \qquad (3.40)$$

as $\boldsymbol{B}_\gamma = \boldsymbol{B}_\gamma^\top$.

Let us now examine the heat balance equation $(3.36)_{(ii)}$.

Equation $(3.36)_{(ii)}$ is equivalent to the set of $L \times C^K_{N+K}$ equations obtained by taking for

$v_h \in M_h^{(N,K)}$ an arbitrary element $v_h^{(k)} H_\alpha$ of the basis $\{v_h^{(k)} H_\alpha;\ k = 1, \ldots, L,\ \alpha \in \mathcal{I}_{N,K}\}$ of $M_h^{(N,K)}$:

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j)}, v_h^{(k)}\right)_{0,D} (p_h(t))_{j,\alpha} - \frac{d}{dt}\left((u_h(t))_\alpha, v_h^{(k)}\right)_{0,D} = -\left(f_\alpha(t), v_h^{(k)}\right)_{0,D} \tag{3.41}$$

$\forall k = 1, \ldots, L,\ \forall \alpha \in \mathcal{I}_{N,K}$ where $f_\alpha(t)$ denotes the $\alpha^{\underline{th}}$ coefficient of the expansion of $f(t)$ in chaos polynomials.

Each equation in (3.41) is a linear inhomogeneous equation in the $J+1$ unknows $(p_h(t))_{j,\alpha}$, $j = 1, \ldots, J$ and $\frac{d}{dt}(u_h(t))_{k,\alpha}$, the right-hand side being in fact the opposite of the integral of $f_\alpha(t)$ on the triangle of $\mathcal{T}_h$ whose $v_h^{(k)}$ is the characteristic function. Denoting that triangle of $\mathcal{T}_h$, K_k, equation (3.41) can be rewritten

$$\sum_{j=1}^{J} \left(\operatorname{div} \vec{q}_h^{(j)}, v_h^{(k)}\right)_{0,K_k} (p_h(t))_{j,\alpha} - |K_k| \frac{d}{dt}(u_h(t))_{k,\alpha} = -\int_{K_k} f_\alpha(t)\ dx_1 \otimes dx_2, \tag{3.42}$$

$\forall k = 1, \ldots, L, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}_{N,K}$.

Introducing the diagonal matrix $\boldsymbol{D}$ of order L, whose diagonal elements are $|K_1|, \ldots, |K_L|$ and the vector $F_\alpha(t)$ of $\mathbb{R}^L$ whose components are $\int_{K_1} f_\alpha(t)\ dx_1 \otimes dx_2, \ldots, \int_{K_L} f_\alpha(t)\ dx_1 \otimes dx_2$, the system of L equations (3.42) for an arbitrary fixed $\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}$, can be rewritten :

$$\boldsymbol{C}^\top \left[\left(p_h(t)_{j,\alpha}\right)\right]_{1\le j\le J} - \boldsymbol{D}\frac{d}{dt}\left[(u_h(t))_{k,\alpha}\right]_{1\le k\le L} = -F_\alpha(t). \tag{3.43}$$

From $(3.36)_{(iii)}$ we have also the set of $J \times C_{N+K}^K$ initial conditions :

$$(u_h(0))_{k,\alpha} = (g_h)_{k,\alpha},\ \forall k = 1, \ldots, J,\ \forall \alpha \in \mathcal{I}_{N,K}. \tag{3.44}$$

Let us first consider the case $\alpha = 0$.

In this case the system of equations (3.40), (3.43), (3.44) become :

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_0[p_h(t)_{j,0}]_{1\le j\le J} + \boldsymbol{C}\left[(u_h(t))_{k,0}\right]_{1\le k\le L} = 0, \\ \\ \frac{d}{dt}\left[(u_h(t))_{k,0}\right]_{1\le k\le L} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}^\top\left[(p_h(t))_{j,0}\right]_{1\le j\le J} + \boldsymbol{D}^{-1}F_0(t), \\ \\ \left[(u_h(0))_{k,0}\right]_{1\le k\le L} = \left[(g_h)_{k,0}\right]_{1\le k\le L}. \end{cases} \tag{3.45}$$

From the definition of the matrix $\boldsymbol{B}_0$, it follows that $\boldsymbol{B}_0$ is a square matrix of order J whose elements are :

$$(\boldsymbol{B}_0)_{j,l} := \left(\frac{1}{E[\mathcal{K}]}\vec{q}_h^{(j)}, \vec{q}_h^{(l)}\right)_{0,D} = \int_D \frac{1}{E[\mathcal{K}]}\vec{q}_h^{(j)} \cdot \vec{q}_h^{(l)} dx, \quad \forall j, l = 1, \ldots, J.. \tag{3.46}$$

But by the hypothesis $\inf_D E[\mathcal{K}] > 0$, from which it follows that :

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{l=1}^{J}\left(\frac{1}{E[\mathcal{K}]}\vec{q}_h^{(j)}, \vec{q}_h^{(l)}\right)_{0,D} \xi_j \xi_l \geq \inf_D E[\mathcal{K}] \left\| \sum_{j=1}^{J} \vec{q}_h^{*(j)} \xi_j \right\|_{0,D}^2 > 0,$$

$\forall \xi = (\xi_j)_{j=1}^J \in \mathbb{R}^J \setminus \{0\}$, where

$$\vec{q}_h^{*(j)} := \frac{1}{E[\mathcal{K}]}\vec{q}_h^{(j)}, \ \forall j = 1, \ldots, J$$

($(\cdot,\cdot)_{0,D}$ (resp. $\|\cdot\|_{0,D}$) denotes the scalar product (resp. the norm) in $L^2(D)$). This shows that $\boldsymbol{B}_0$ is a symmetric positive definite matrix and thus invertible. It now follows from equations (3.45) that

$$\frac{d}{dt}\left[(u_h(t))_{k,0}\right]_{1\leq k\leq L} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}\left[(u_h(t))_{k,0}\right]_{1\leq k\leq L} + \boldsymbol{D}^{-1}F_0(t). \tag{3.47}$$

It is equivalent to rewrite (3.47) by multiplying both sides by $\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}$ to the left, in the "symmetric form" :

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\left[(u_h(t))_{k,0}\right]_{1\leq k\leq L} = -\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\left[(u_h(t))_{k,0}\right]_{1\leq k\leq L} + \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}F_0(t), \tag{3.48}$$

this time the linear operator $-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$ being symmetric. Using the fact that the divergence operator from X_h into M_h is in fact surjective ([8] p.612), it is easy to see that the linear operator $\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C} : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$ is still positive definite despite the fact that $L < J$. Thus the linear operator $-\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}$ in $\mathbb{R}^L$ is symmetric negative definite and thus generates a contraction semigroup $(P_t)_{t\geq 0}$ on $\mathbb{R}^L$ endowed with the euclidian norm. The solution of the inhomogeneous linear system of differential equations (3.48) with the initial conditions $(3.45)_{(iii)}$ is given in terms of this semigroup by :

$$\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\left[(u_h(t))_{k,0}\right]_{1\leq k\leq L} = P_t\boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}}\left[(g_h)_{k,0}\right]_{1\leq k\leq L} + \int_0^t P_{t-s}\boldsymbol{D}^{\frac{-1}{2}}F_0(s)\ ds. \tag{3.49}$$

i.e.

$$\left[(u_h(t))_{k,0}\right]_{1\le k\le L} = \boldsymbol{D}^{\frac{-1}{2}} P_t \boldsymbol{D}^{\frac{1}{2}} \left[(g_h)_{k,0}\right]_{1\le k\le L} + \int_0^t \boldsymbol{D}^{\frac{-1}{2}} P_{t-s} \boldsymbol{D}^{\frac{-1}{2}} F_0(s)\ ds. \tag{3.50}$$

By [29] p.256 and theorem 3.1 p.110 of [6], $\left[(u_h(\cdot))_{k,0}\right]_{1\le k\le L}$ is Hölder continuous of exponent $\frac{1}{2}$ on $[0,T]$. Moreover, its derivative being given by the right-hand side of (3.47) is in $L^2\left(0,T;\mathbb{R}^L\right)$. Thus $\left[(u_h(\cdot))_{k,0}\right]_{1\le k\le L} \in H^1\left(0,T;\mathbb{R}^L\right)$.

From equation $(3.45)_{(i)}$ and the fact that, as we have seen previously, $\boldsymbol{B}_0$ is symmetric positive definite and thus invertible, we have also that $\left[(p_h(\cdot))_{j,0}\right]_{1\le j\le J} \in H^1\left(0,T;\mathbb{R}^J\right)$.

Let us now consider the case $\alpha \neq 0$. Reasoning by recurrence, we may suppose that we have already computed all terms

$$\left[(u_h(\cdot))_{k,\beta}\right]_{1\le k\le L} \text{ and } \left[(p_h(\cdot))_{j,\beta}\right]_{1\le j\le J} \quad \text{for } \beta<\alpha.$$

Equations (3.40), (3.43) and the initial conditions (3.44), give us the following system :

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}_0[p_h(t)_{j,\alpha}]_{1\le j\le J} + \boldsymbol{C}\left[(u_h(t))_{k,\alpha}\right]_{1\le k\le L} = -\sum_{\beta<\alpha}\boldsymbol{B}_{\alpha-\beta}[p_h(t)_{j,\beta}]_{1\le j\le J}, \\ \\ \frac{d}{dt}\left[(u_h(t))_{k,\alpha}\right]_{1\le k\le L} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}^\top\left[(p_h(t))_{j,\alpha}\right]_{1\le j\le J} + \boldsymbol{D}^{-1}F_\alpha(t), \\ \\ \left[(u_h(0))_{k,\alpha}\right]_{1\le k\le L} = \left[(g_h)_{k,\alpha}\right]_{1\le k\le L}. \end{cases} \tag{3.51}$$

We can now proceed similary as in the case $\alpha=0$, using equation $(3.51)_{(i)}$ to eliminate $[p_h(t)_{j,\alpha}]_{1\le j\le J}$ in equation $(3.51)_{(ii)}$ obtaining

$$\frac{d}{dt}\left[(u_h(t))_{k,\alpha}\right]_{1\le k\le L} = -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{C}\left[(u_h(t))_{k,\alpha}\right]_{1\le k\le L} + \boldsymbol{D}^{-1}F^*_\alpha(t), \tag{3.52}$$

where

$$F^*_\alpha(t) = F_\alpha(t) - \sum_{\beta<\alpha}\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{B}_{\alpha-\beta}\left[p_h(t)_{j,\beta}\right]_{1\le j\le J}. \tag{3.53}$$

Note that equation (3.52) is completely analogous to (3.47) and $F^*_\alpha(t)$ is explicitly known. Reasoning like in the passage from (3.47) to (3.50), it follows from (3.52) and $(3.51)_{(iii)}$ that $\left[(u_h(\cdot))_{k,\alpha}\right]_{1\le k\le L} \in H^1\left(0,T;\mathbb{R}^L\right)$.

Using $(3.51)_{(i)}$ and the invertibility of $\boldsymbol{B}_0$, we obtain that $\left[(p_h(\cdot))_{j,\beta}\right]_{1\le j\le J} \in H^1\left(0,T;\mathbb{R}^J\right)$.

Having determined the $J \times C_{N+K}^{K}$ coefficients $p_h(\cdot)_{j,\beta},\ j = 1, \ldots, J,\ \beta \in \mathcal{I}_{N,K}$ and the $L \times C_{N+K}^{K}$ coefficients $(u_h(\cdot))_{k,\alpha},\ k = 1, \ldots, L,\ \alpha \in \mathcal{I}_{N,K}$, and plugging them in the formulas (3.37) and (3.38), we obtain $\vec{p}_h \in H^1\left(0, T; X_h^{(N,K)}\right)$ and $u_h \in H^1\left(0, T; M_h^{(N,K)}\right)$ satisfying the equations (3.36). ■

3.6 Error estimates for the dual mixed formulation in the stationary case

We will need these error estimates for the "elliptic projection" of the dual mixed formulation relative to the heat equation with a random diffusion coefficient in a polygonal domain with a reentrant corner. The dual mixed formulation for the stationary problem has been studied in [24] but a priori error estimates have been derived only for "regular solutions in the space variable" i.e. belonging at least to the stochastic Sobolev space $\mathcal{S}^{-1,k,H^2(D)}$ which is not the case here due to the reentrant corner of our polygonal domain D.

The following hypotheses are always tacitly assumed in this section : on the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$, we suppose that $\mathcal{K},\ \mathcal{K}^{\diamondsuit -1} \in \mathcal{F}_l\,(D)$ and that its generalized expectation $E\,[\mathcal{K}]$ is strictly positively lower bounded on D i.e. that $\inf_D E\,[\mathcal{K}] > 0$; finally, we suppose that $k \in \mathbb{R}$ satifies inequality (3.14). These hypotheses will be strengthened when necessary.

We present in this section two methods to derive the error estimates in the stationary case as the first method has the defect to require regularity on the spatial derivatives of the right-hand side f.

Thus, exceptionally in this section, we consider the system of equations : find $\vec{p} \in \mathcal{H}\,(\mathrm{div}; D)$, $u \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ such that :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(K^{\diamondsuit -1} \diamondsuit \vec{p}, \vec{q}\right)_{-1,k,0} + (u, \mathrm{div}\,\vec{q})_{-1,k,0} = 0, \quad \forall \vec{q} \in \mathcal{H}\,(\mathrm{div}; D)\,, \\ \\ (\mathrm{div}\,\vec{p}, v)_{-1,k,0} = -\,(f, v)_{-1,k,0}\,, \quad \forall v \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D), \end{array} \right. \tag{3.54}$$

and its discretization : find $\vec{p}_h \in X_h^{(N,K)}$, $u_h \in M_h^{(N,K)}$ such that :

$$\begin{cases} \left(K^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}_h, \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} + (u_h, \operatorname{div}\vec{q}_h)_{-1,k,0} = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}, \\ \\ (\operatorname{div}\vec{p}_h, v_h)_{-1,k,0} = -\left(f, v_h\right)_{-1,k,0}, \quad \forall v_h \in M_h^{(N,K)}. \end{cases} \tag{3.55}$$

Under the above hypotheses , we have seen in lemma 3.4.1 that the bilinear form

$$a\left(\cdot,\cdot\right) : \left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2 \times \left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2 \to \mathbb{R} : (\vec{p}, \vec{q}) \mapsto \left(K^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}, \vec{q}\right)_{-1,k,0}, \tag{3.56}$$

is coercive. For the bilinear form

$$b\left(\cdot,\cdot\right) : \mathcal{S}^{-1,k,0}(D) \times \mathcal{H}\left(\operatorname{div}; D\right) \to \mathbb{R} : (v, \vec{q}) \mapsto b\left(v, \vec{q}\right) := (v, \operatorname{div}\vec{q})_{-1,k,0}, \tag{3.57}$$

the inf-sup inequality :

$$\sup_{\vec{q}\in\mathcal{H}(\operatorname{div};D)} \frac{b\left(v, \vec{q}\right)}{\|\vec{q}\|_{-1,k,\operatorname{div}}} \gtrsim \|v\|_{-1,k,0}, \tag{3.58}$$

is proved in [24] (lemma 3.7 p. 615) and in fact follows easily by applying the construction used in the “deterministic case” to prove it for each coefficient $v_\alpha \in L^2(D)$ of the chaos expansion of v. Thus by corollary 4.1 p. 61 of [15], problem (3.54) is well-posed (the above coercivity of $a\left(\cdot,\cdot\right)$ on $\left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2$ implying of course the ellipticity in the sense of the norm of $\mathcal{H}\left(\operatorname{div}; D\right) = \mathcal{S}^{-1,k,H(\operatorname{div};D)}$ on this subspace of divergence free vectorfields).
To prove that the discrete problem (3.55) is well-posed, being a finite dimensional problem, it suffices to prove unicity. So let us suppose that $f = 0$ in $(3.55)_{(ii)}$. Taking $\vec{q}_h = \vec{p}_h$ in $(3.55)_{(i)}$, using $(3.55)_{(ii)}$ with $v_h = u_h$ and using the coercivity of $a\left(\cdot,\cdot\right)$, we obtain $\vec{p}_h = 0$. That $u_h = 0$ follows now from $(3.55)_{(i)}$, knowing that $\vec{p}_h = 0$ and the following proposition :

Proposition 3.6.1 *(uniform inf-sup inequality [24] p.620)*
Let $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ be a regular family of triangulations over D. Then, there exists a constant $c > 0$ independent of h, N and K such that :

$$\sup_{\vec{q}_h\in X_h^{(N,K)}} \frac{b\left(v_h, \vec{q}_h\right)}{\|\vec{q}_h\|_{-1,k,\operatorname{div}}} \geqslant c\,\|v_h\|_{-1,k,0}, \quad \forall v_h \in M_h^{(N,K)}. \tag{3.59}$$

Preuve: As the domain D presents geometric singularities (D is a polygonal domain in $\mathbb{R}^2$ with one reentrant corner at the origin), we indicate our proof, based on our work [8], wich seems to us somewhat more clear than the proof given in [24]. Let $v_h \in M_h^{(N,K)}$ and let us consider its expansion in chaos polynomials $v_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} (v_h)_\alpha H_\alpha$. By lemma 1.14 of [8], there exists for each $\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}$ some $(\vec{q}_h)_\alpha \in X_h$ such that $\operatorname{div}(\vec{q}_h)_\alpha = (v_h)_\alpha$ and

$$\|(\vec{q}_h)_\alpha\|_{L^2(D)^2} \leq c\,\|(v_h)_\alpha\|_{L^2(D)} \tag{3.60}$$

with a constant $c > 0$ independent of h.
Let us set $\vec{q}_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} (\vec{q}_h)_\alpha H_\alpha$; $\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}$ and :

$$\begin{aligned} b(v_h, \vec{q}_h) &= (v_h, \operatorname{div}\vec{q}_h)_{-1,k,0} \\ &= \left(\textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} (v_h)_\alpha H_\alpha, \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} \operatorname{div}(\vec{q}_h)_\alpha H_\alpha\right)_{-1,k,0} \\ &= \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} (2\mathbb{N})^{k\alpha} \left((v_h)_\alpha, \operatorname{div}(\vec{q}_h)_\alpha\right)_{L^2(D)} \\ &= \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} (2\mathbb{N})^{k\alpha} \|(v_h)_\alpha\|_0^2 = \|v_h\|_{-1,k,0}^2 \ , \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{q}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}}^2 &\leq \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} (2\mathbb{N})^{k\alpha} \|(\vec{q}_h)_\alpha\|_{H(\mathrm{div};D)}^2 \\ &\leq c^2 \textstyle\sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} (2\mathbb{N})^{k\alpha} \|(v_h)_\alpha\|_{L^2(D)}^2 = c^2\,\|v_h\|_{-1,k,0}^2 \end{aligned}$$

by inequality (3.60) and the fact that $\operatorname{div}(\vec{q}_h)_\alpha = (v_h)_\alpha$. Thus :

$$\|\vec{q}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}}^2 \leq c^2\,\|v_h\|_{-1,k,0}^2 \,. \tag{3.62}$$

By inequalities (3.61) and (3.62) :

$$\frac{b(v_h, \vec{q}_h)}{\|\vec{q}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}}} \geqslant \frac{1}{c}\,\|v_h\|_{-1,k,0} \,.$$

■

Let us observe that if for some element $\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}$, $b(v_h, \vec{q}_h) = (v_h, \operatorname{div}\vec{q}_h)_{-1,k,0} = 0$ for every $v_h \in M_h^{(N,K)}$, then as $\operatorname{div}\vec{q}_h$ itself belongs to $M_h^{(N,K)}$, it follows that $\operatorname{div}\vec{q}_h = 0$ and thus

$$\|\vec{q}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}}^2 = \|\vec{q}_h\|_{-1,k,0}^2 \lesssim a(\vec{q}_h, \vec{q}_h)\,,$$

$\forall \vec{q}_h \in \left\{\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}; b(v_h, \vec{q}_h) = 0,\ \forall v_h \in M_h^{(N,K)}\right\}$ with a constant (hidden in $\lesssim$) independent of h. Thus, the bilinear form $a(.,.)$ is uniformly coercive on the family of subspaces

$X_h^{(N,K)}$ of $\mathcal{H}(\text{div}; D)$.

By this observation and proposition 3.6.1 all the hypotheses of theorem II .1.1 p. 114 of [15] are verified. Thus :

$$\begin{aligned} \|\vec{p}-\vec{p}_h\|_{-1,k,\text{div}} + \|u-u_h\|_{-1,k,0} \lesssim \inf_{\vec{q}_h\in X_h^{(N,K)}} \|\vec{p}-\vec{q}_h\|_{-1,k,\text{div}} \\ + \inf_{v_h\in M_h^{(N,K)}} \|u-v_h\|_{-1,k,0}\,. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Thus we are reduced to bound the right-hand side of the previous inequality. To do that, we need some spatial regularity on $\vec{p}$; we have the following result (analogous to theorem 3.3.8, but in this section we are concerned with the stationary case) :

Théorème 3.6.2 *Let us suppose that the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$ satisfies : $\inf_D E[\mathcal{K}] > 0$, $\mathcal{K}, \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_1}, \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_2}, \mathcal{K}^{\Diamond-1} \in \mathcal{F}_l(D)$, and that $k\in\mathbb{R}$ satisfies inequality (3.14). We also suppose that $f\in\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$. Then the weak solution $u\in\mathcal{S}_0^{-1,k,1}(D) := \mathcal{S}^{-1,k,\mathring{H}^1(D)}$ of the stationary equation with Dirichlet boundary condition :*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\Diamond\vec{\nabla}u\right) = f & \text{in } D, \\ \\ u_{|\partial D} = 0 & \text{on } \partial D, \end{cases} \tag{3.64}$$

belongs to $\mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}$ for all $\alpha_w > 1-\frac{\pi}{\omega}$ (ω denoting the opening of the reentrant corner of the polygonal domain D at the origin). Consequently :

$$\vec{p} = \mathcal{K}\Diamond\vec{\nabla}u \in \left(\mathcal{S}^{-1,k,H^{1,\alpha_w}(D)}\right)^2.$$

Preuve: From (3.64) follows :

$$\mathcal{K}\Diamond\Delta u = -f - \vec{\vec{\nabla}}\mathcal{K}\Diamond\vec{\nabla}u. \tag{3.65}$$

Let us set $g = f + \vec{\vec{\nabla}}\mathcal{K}\Diamond\vec{\nabla}u$. Since by hypothesis :

$$\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_1},\ \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_2} \in \mathcal{F}_l(D),$$

$g\in\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ and

$$\|g\|_{-1,k,0} \lesssim \|f\|_{-1,k,0}$$

as $\|u\|_{-1,k,1} \lesssim \|f\|_{-1,k,0}$.
Because by hypothesis $\mathcal{K}^{\lozenge-1} \in \mathcal{F}_l(D)$ by prop. 4 p. 120 of [38] (or proposition 2.4 of [24]) : $\mathcal{K}^{\lozenge-1}\lozenge\, g \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ and

$$\left\|\mathcal{K}^{\lozenge-1}\lozenge\, g\right\|_{-1,k,0} \lesssim \|g\|_{-1,k,0}.$$

Expanding u and g in chaos polynomials, we have : $-\Delta u_\alpha = \left(\mathcal{K}^{\lozenge-1}\lozenge\, g\right)_\alpha$, $\forall\alpha\in\mathcal{I}$. By (8,4,1,7) p. 388 of Grisvard's book [3], $u_\alpha \in H^{2,\alpha_w}(D)$ and $\|u_\alpha\|_{H^{2,\alpha_w}(D)} \lesssim \left\|\left(\mathcal{K}^{\lozenge-1}\lozenge\, g\right)_\alpha\right\|_{L^2(D)}$, for every $\alpha\in\mathcal{I}$ with a constant (hidden in $\lesssim$) independent of α. Consequently :

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha\|^2_{H^{2,\alpha_w}(D)} (2\mathbb{N})^{k\alpha} \lesssim \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \left\|\left(\mathcal{K}^{\lozenge-1}\lozenge\, g\right)_\alpha\right\|^2_{L^2(D)} (2\mathbb{N})^{k\alpha},$$

i.e.

$$\|u\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)} \lesssim \left\|\mathcal{K}^{\lozenge-1}\lozenge\, g\right\|_{-1,k,0}.$$

But, we have seen above that $\left\|\mathcal{K}^{\lozenge-1}\lozenge\, g\right\|_{-1,k,0} \lesssim \|g\|_{-1,k,0} \lesssim \|f\|_{-1,k,0}$.Thus

$$\|u\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)} \lesssim \|f\|_{-1,k,0},$$

and by prop. 4 p. 120 of [38] (or proposition 2.4 of [24]) applied to $\vec{p} = \mathcal{K}\lozenge\overrightarrow{\nabla}u$:

$$\|\vec{p}\|_{-1,k,H^{1,\alpha_w}(D)^2} \lesssim \|f\|_{-1,k,0}.$$

■

Using (3.63), the preceding regularity result, and imposing appropriate refinement rules on our regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ linked to the regularity of the solution (3.6.2), we are going to derive $O(h)$ error estimates in the spatial directions; however to be able to proceed in this way we will have to suppose that $f\in\mathcal{S}^{-1,k,1}(D) := \mathcal{S}^{-1,k,H^1(D)}$.

Théorème 3.6.3 *Under the hypotheses of theorem 3.6.2, supposing that our regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ satisfies the following refinement rules :*
(R1) $h_K \le \sigma h^{\frac{1}{1-\alpha_w}}$ for every triangle $K\in\mathcal{T}_h$ which has one of its vertices at the origin;
(R1) $h_K \le \sigma\left(\inf_{x\in K} r^{\alpha_w}(x)\right)h$ for every triangle $K\in\mathcal{T}_h$ without any vertice at the origin, the constant $\sigma>0$ being independent of the triangle K and h, and finally supposing that the right-hand side

$$f\in\mathcal{S}^{-1,k,1}(D)\cap\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D),$$

for some $k < 0$ and $r > 1$ such that $k + r \in \mathbb{R}$ satisfies inequality (3.14), we have the following a priori error estimate (with a constant hidden in $\lesssim$ independent of h, N , the chaos dimension K and r) :

$$\|\vec{p} - \vec{p}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}} + \|u - u_h\|_{-1,k,0} \lesssim B_{N,K}\left(\|u\|_{-1,k+r,0} + \|\vec{p}\|_{-1,k+r,\mathrm{div}}\right) \\ +h\left(|u|_{-1,k,1} + |\vec{p}|_{-1,k,H^{1,\alpha_w}(D)^2} + |f|_{-1,k,1}\right), \tag{3.66}$$

where [45]

$$\begin{aligned} B_{N,K} &= \sqrt{A\left(r\right)\frac{1}{K^{r-1}} + B(r)\frac{1}{2^{rN}}}, \\ A(r) &= e^{\frac{2}{r-1}}\frac{r}{r-1},\ B(r) = e^{\frac{1}{2^{r-1}(r-1)}}\frac{1}{2^r\left(r-1\right)}\ , \end{aligned}$$

K denoting the dimension of the polynomial chaos and N its degree.

Preuve: We have to bound the right-hand side of (3.63).
Firstly :

$$\begin{aligned} &\inf_{\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}} \|\vec{p} - \vec{q}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}} \\ \leq\ & \left\|\vec{p} - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \vec{p}_\alpha H_\alpha\right\|_{-1,k,\mathrm{div}} + \inf_{\vec{q}_h\in X_h^{(N,K)}}\left\|\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}}\vec{p}_\alpha H_\alpha - \vec{q}_h\right\|_{-1,k,\mathrm{div}} \\ \leq\ & B_{N,K}\|\vec{p}\|_{-1,k+r,\mathrm{div}} + \left\|\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}}\left(\vec{p}_\alpha - \Pi_h\vec{p}_\alpha\right)H_\alpha\right\|_{-1,k,\mathrm{div}}, \end{aligned}$$

by [45] (a substantial improvement of [39]) and where Π_h denotes the Raviart-Thomas interpolation operator of degree 0 [8]). Thus using our hypothesis that $f \in \mathcal{S}^{-1,k,1}(D)$:

$$\begin{aligned} &\inf_{\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}} \|\vec{p} - \vec{q}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}} \\ \leq\ & B_{N,K}\|\vec{p}\|_{-1,k+r,\mathrm{div}} + \left[\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|\vec{p}_\alpha - \Pi_h\vec{p}_\alpha\|^2_{H(\mathrm{div};D)}(2\mathbb{N})^{k\alpha}\right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & B_{N,K}\|\vec{p}\|_{-1,k+r,\mathrm{div}} + ch\left[\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{k\alpha}\left(|\vec{p}_\alpha|^2_{H^{1,\alpha_w}(D)^2} + |f_\alpha|^2_{H^1(D)}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & B_{N,K}\|\vec{p}\|_{-1,k+r,\mathrm{div}} + ch(|\vec{p}|_{-1,k,H^{1,\alpha_w}(D)^2} + |f|_{-1,k,H^1(D)}) \end{aligned} \tag{3.67}$$

as by ((31) p.620 of [8])

$$\|\vec{p}_\alpha - \Pi_h \vec{p}_\alpha\|_{0,D} \leq ch\, |\vec{p}_\alpha|_{H^{1,\alpha_w}(D)^2}$$

and $\mathrm{div}\,(\vec{p}_\alpha - \Pi_h \vec{p}_\alpha) = -(f_\alpha - P_h f_\alpha)$, (where P_h denotes the orthogonal projection in $L^2(D)$ on M_h) which implies by inequality (45) of [8] that also : $\|\mathrm{div}(\vec{p}_\alpha - \Pi_h \vec{p}_\alpha)\|_{0,D} \leq ch\, |f_\alpha|_{H^1(D)}$.

Secondly :

$$\begin{aligned}
&\inf_{v_h \in M_h^{(N,K)}} \|u - v_h\|_{-1,k,0} \\
\leq\ & \left\| u - \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} u_\alpha H_\alpha \right\|_{-1,k,0} + \inf_{v_h \in M_h^{(N,K)}} \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} u_\alpha H_\alpha - v_h \right\|_{-1,k,0} \\
\leq\ & B_{N,K} \|u\|_{-1,k+r,0} + \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} u_\alpha H_\alpha - \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} P_h u_\alpha H_\alpha \right\|_{-1,k,0} \\
\leq\ & B_{N,K} \|u\|_{-1,k+r,0} + \left\| \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_{N,K}} (u_\alpha - P_h u_\alpha)\, H_\alpha \right\|_{-1,k,0} \\
\leq\ & B_{N,K} \|u\|_{-1,k+r,0} + \left[\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \|u_\alpha - P_h u_\alpha\|_{0,D}^2 \,(2\mathbb{N})^{k\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & B_{N,K} \|u\|_{-1,k+r,0} + ch \left[\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |u_\alpha|_{H^1(D)}^2 \,(2\mathbb{N})^{k\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & B_{N,K} \|u\|_{-1,k+r,0} + ch\, |u|_{-1,k,H^1(D)}
\end{aligned}$$

by (45) of [8]. Thus :

$$\inf_{v_h \in M_h^{(N,K)}} \|u - v_h\|_{-1,k,0} \leq B_{N,K} \|u\|_{-1,k+r,0} + ch\, |u|_{-1,k,1}\,. \tag{3.68}$$

(3.66) follows from inequalities (3.67), (3.68) and (3.63). ■

Remarque 3.6.4 *Let us observe that*

$$B_{N,K} = \sqrt{A\,(r)\,\frac{1}{K^{r-1}} + B(r)\frac{1}{2^{rN}}} \tag{3.69}$$

tends to 0 *exponentially with* N *: the order of the chaos and only polynomially with* K *: the dimension of the polynomial chaos.*

Now, we present another method to derive error estimates, wich does not require f to belong to $\mathcal{S}^{-1,k,1}(D)$.

Proposition 3.6.5

$$\left\|\vec{p}_h - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha \ H_\alpha\right\|_{-1,k,0} \lesssim \left\|\vec{p} - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha \ H_\alpha\right\|_{-1,k,0}.$$

Preuve: Let us set $\vec{q}_h = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha \ H_\alpha$. By the coercivity of the bilinear form

$$a(\cdot,\cdot) : \left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2 \times \left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2 \to \mathbb{R} : (\vec{p},\vec{q}) \mapsto \left(K^{\diamond -1} \diamond \vec{p}, \vec{q}\right)_{-1,k,0}, \tag{3.70}$$

on the Hilbert space $\left(S^{-1,k,0}(D)\right)^2$:

$$\|\vec{p}_h - \vec{q}_h\|^2_{-1,k,0} \lesssim a\left(\vec{p}_h - \vec{q}_h, \vec{p}_h - \vec{q}_h\right). \tag{3.71}$$

On the other hand from equations $(3.54)_{(i)}$ and $(3.55)_{(i)}$ it follows by subtraction that :

$$a\left(\vec{p} - \vec{p}_h, \vec{p}_h - \vec{q}_h\right) + \left(u - u_h, \operatorname{div}\left(\vec{p}_h - \vec{q}_h\right)\right)_{-1,k,0} = 0. \tag{3.72}$$

By equation $(3.55)_{(ii)}$:

$$\operatorname{div} \vec{p}_h = - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} P_h f_\alpha H_\alpha.$$

By equation $(3.54)_{(ii)}$:

$$\operatorname{div} \vec{q}_h = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} P_h \operatorname{div} \vec{p}_\alpha H_\alpha = - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} P_h f_\alpha H_\alpha,$$

Thus $\operatorname{div}\left(\vec{p}_h - \vec{q}_h\right) = 0$. Thus it follows from equation (3.72) that :

$$a\left(\vec{p} - \vec{p}_h, \vec{p}_h - \vec{q}_h\right) = 0. \tag{3.73}$$

Adding (3.73) to the right-hand side of (3.71), we obtain :

$$\|\vec{p}_h - \vec{q}_h\|^2_{-1,k,0} \lesssim a\left(\vec{p} - \vec{q}_h, \vec{p}_h - \vec{q}_h\right).$$

Using the continuity of the bilinear form $a(\cdot,\cdot)$, it now follows that :

$$\|\vec{p}_h - \vec{q}_h\|_{-1,k,0} \lesssim \|\vec{\boldsymbol{p}} - \vec{q}_h\|_{-1,k,0}.$$

■

Corollaire 3.6.6

$$\|\vec{p}-\vec{p}_h\|_{-1,k,0} \leq \left\| \vec{p} - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha \ H_\alpha \right\|_{-1,k,0}.$$

Preuve: By the triangular inequality :

$$\begin{aligned} \|\vec{p}-\vec{p}_h\|_{-1,k,0} &\leq \left\| \vec{p} - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha H_\alpha \right\|_{-1,k,0} + \left\| \vec{p}_h - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha H_\alpha \right\|_{-1,k,0} \\ &\lesssim \left\| \vec{p} - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha H_\alpha \right\|_{-1,k,0}, \end{aligned}$$

by proposition 3.6.5. ∎

Théorème 3.6.7 *We assume that $f \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)$ for some $k < 0$ and $r > 1$ such that $k+r \in \mathbb{R}$ satisfies inequality (3.14), and that the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$ satisfies the same hypotheses as in theorem 3.6.2. We suppose that our regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ satisfies the refinement rules $(R1)$ and $(R2)$ of theorem 3.6.3. Then*

$$\begin{aligned} \|\vec{p}-\vec{p}_h\|_{-1,k,0} &\lesssim B_{N,K} \|\vec{p}\|_{-1,k+r,0} + h \|\vec{p}\|_{-1,k,H^{1,\alpha_w}(D)^2} && (3.74) \\ &\lesssim B_{N,K} \|u\|_{-1,k+r,1} + h \|u\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}, && (3.75) \end{aligned}$$

where the constants hidden in the symbol $\lesssim$ are independent of h, N, K and r, and where $B_{N,K}$ has been defined in theorem 3.6.3..

Preuve: By corollary 3.6.6, we are reduced to bound $\left\|\vec{p}-\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha H_\alpha\right\|_{-1,k,0}$.
By the triangular inequality :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{p} - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha H_\alpha \right\|_{-1,k,0} &\leq \left\| \vec{p} - \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \vec{p}_\alpha H_\alpha \right\|_{-1,k,0} + \left\| \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} (\vec{p}_\alpha - \Pi_h \vec{p}_\alpha) H_\alpha \right\|_{-1,k,0} \\ &\leq B_{N,K} \|\vec{p}\|_{-1,k+r,0} + \left[\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} c^2 h^2 |\vec{p}_\alpha|^2_{H^{1,\alpha_w}(D)^2} (2\mathbb{N})^{k\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

by [45] (a substantial improvement of [39]) and by (31) p. 620 of [8], c denoting a strictly positive constant. Thus :

$$\begin{aligned} \left\|\vec{p}-\textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{N,K}} \Pi_h \vec{p}_\alpha H_\alpha\right\|_{-1,k,0} &\leq B_{N,K} \|\vec{p}\|_{-1,k+r,0} + ch |\vec{p}|_{-1,k,H^{1,\alpha_w}(D)^2} \\ &\lesssim B_{N,K} \|u\|_{-1,k+r,1} + h \|u\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)} \end{aligned} \quad (3.76)$$

as $\vec{p} = \mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}u$ and $\mathcal{K} \in \mathcal{F}_l(D)$ with $l \geq 2(k+r)$ because by hypothesis $k+r$ satisfies inequality (3.14). ∎

To obtain an error estimate on u_h, we need the uniform inf-sup inequality :

Proposition 3.6.8 $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ *being supposed to be a regular family of triangulations, one has :*

$$\sup_{\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}} \frac{(v_h, \operatorname{div}(\vec{q}_h))_{-1,k,0}}{\|\vec{q}_h\|_{-1,k,0}} \gtrsim \|v_h\|_{-1,k,0}\,, \quad \forall v_h \in M_h^{(N,K)}, \tag{3.77}$$

with a constant (hidden in $\gtrsim$) independent of h, N and K.

Preuve: In proposition 3.6.1, we have proved that

$$\sup_{\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}} \frac{b\,(v_h, \vec{q}_h)}{\|\vec{q}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}}} \geqslant c\,\|v_h\|_{-1,k,0}\,, \quad \forall v_h \in M_h^{(N,K)}.$$

As $\|\vec{q}_h\|_{-1,k,0} \leq \|\vec{q}_h\|_{-1,k,\mathrm{div}}$, this late inequality implies a fortiori inequality (3.77). ∎

Corollaire 3.6.9 *Let us denote by $P_h^{(N,K)}$ the orthogonal projection in the space $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ onto the subspace $M_h^{(N,K)}$. $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ being supposed to be a regular family of triangulations on D, we have :*

$$\left\| P_h^{(N,K)} u - u_h \right\|_{-1,k,0} \lesssim \|\vec{p} - \vec{p}_h\|_{-1,k,0}\,. \tag{3.78}$$

Preuve: From equation $(3.54)_{(i)}$ follows a fortiori for every $\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}$:

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}, \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} + (u, \operatorname{div}\vec{q}_h)_{-1,k,0} = 0.$$

As $\operatorname{div}\vec{q}_h \in M_h^{(N,K)}$: $\left(u - P_h^{(N,K)}u, \operatorname{div}\vec{q}_h\right)_{-1,k,0} = 0$, and thus we can replace $(u, \operatorname{div}\vec{q}_h)_{-1,k,0}$ in the preceding equation by $\left(P_h^{(N,K)}u, \operatorname{div}\vec{q}_h\right)_{-1,k,0}$ getting in this way :

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{p}, \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} + \left(P_h^{(N,K)}u, \operatorname{div}\vec{q}_h\right)_{-1,k,0} = 0.$$

Subtracting equation $(3.55)_{(i)}$ from the preceding equation we obtain :

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\left(\vec{p} - \vec{p}_h\right), \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} + \left(P_h^{(N,K)}u - u_h, \operatorname{div}\vec{q}_h\right)_{-1,k,0} = 0,$$

for every $\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}$. By the uniform inf-sup inequality : proposition 3.6.8, we now obtain :

$$\begin{aligned}\left\|P_h^{(N,K)}u - u_h\right\|_{-1,k,0} &\leq \left\|\mathcal{K}^{\diamond -1}\diamond(\vec{p}-\vec{p}_h)\right\|_{-1,k,0}\\ &\lesssim \|\vec{p}-\vec{p}_h\|_{-1,k,0}\end{aligned}$$

by the hypothesis stated at the beginning of this section on $\mathcal{K}^{\diamond -1}$. ∎

Théorème 3.6.10 *We assume that $f \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)$ for some $k < 0$ and $r > 1$ such that $k + r \in \mathbb{R}$ satisfies inequality (3.14) and that the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$ satisfies the same hypotheses as in theorem 3.6.2. We suppose that our regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ satisfies the refinement rules $(R1)$ and $(R2)$ of theorem 3.6.3. Then, the following error estimates hold on u_h :*

$$\left\|P_h^{(N,K)}u - u_h\right\|_{-1,k,0} \lesssim B_{N,K}\|u\|_{-1,k+r,1} + h\|u\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}, \tag{3.79}$$

$$\|u-u_h\|_{-1,k,0} \lesssim B_{N,K}\|u\|_{-1,k+r,1} + h\|u\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}, \tag{3.80}$$

where $B_{N,K}$ has been defined in theorem 3.6.3 and $P_h^{(N,K)}$ denotes the orthogonal projection in the space $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ onto the subspace $M_h^{(N,K)}$.

Preuve: (3.79) follows from (3.78) and (3.75). On the other hand :

$$\begin{aligned}\left\|u - P_h^{(N,K)}u\right\|_{-1,k,0} &= \left\|\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(u_\alpha - P_h u_\alpha)H_\alpha\right\|_{-1,k,0}\\ &= \left[\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|u_\alpha - P_h u_\alpha\|_{0,D}^2(2\mathbb{N})^{k\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\lesssim \left[\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}h^2|u_\alpha|_{1,D}^2(2\mathbb{N})^{k\alpha}\right]^{\frac{1}{2}} \lesssim h|u|_{-1,k,1}\end{aligned} \tag{3.81}$$

by (45) of [8].
From (3.79) and (3.81), we obtain (3.80). ∎

3.7 The elliptic projection in the context of the dual mixed formulation

We will always assume in the following of this section, at least that the coefficient of diffusion $\mathcal{K}(\cdot) \in \mathcal{F}_l(D)$ satisfies $\inf_D E[\mathcal{K}] > 0$, that $f \in L^2(0,T;\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D))$

for some $r > 1$ and $k < 0$ such that $k + r \in \mathbb{R}$ satisfies inequality (3.14), and that our regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ satisfies the refinement rules $(R1)$ and $(R2)$ of theorem 3.6.3. To get regularity on the time derivative of the solution $\frac{du}{dt}$, we also assume more regularity on the data f and g : we assume also, that $\frac{df}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D))$ and that the initial condition

$$g \in \left\{ g \in \mathcal{S}^{-1,k+r,1}(D);\ \operatorname{div}\left(\mathcal{K} \diamondsuit \overrightarrow{\nabla} g\right) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D) \right\}.$$

Under these hypotheses, we know by theorem 3.3.6 that :

$$\frac{du}{dt} \in L^2\left(0, T; \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)\right) \cap C\left([0,T]; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right).$$

We can now introduce the concept of elliptic projection in the setting of the dual mixed method :

Définition 3.7.1 *We call elliptic projection at the fixed time t of the exact solution $(\vec{p}(\cdot), u(\cdot))$ of the mixed formulation of the evolution problem* (3.34)*, the solution denoted $\left(\overrightarrow{\tilde{p}_h}(t), \tilde{u}_h(t)\right) \in X_h^{(N,K)} \times M_h^{(N,K)}$ of the discretized mixed formulation of the stationary problem* (3.55) *with right-hand side $f(t) - \frac{du}{dt}(t)$, i.e.*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit -1} \diamondsuit \overrightarrow{\tilde{p}_h}(t), \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} + (\tilde{u}_h(t), \operatorname{div} \vec{q}_h)_{-1,k,0} = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}, \\ \\ \left(\operatorname{div} \overrightarrow{\tilde{p}}_h(t), v_h\right)_{-1,k,0} = -\left(f(t) - \frac{du}{dt}(t), v_h\right)_{-1,k,0}, \quad \forall v_h \in M_h^{(N,K)}. \end{array} \right. \tag{3.82}$$

Note that due to our hypotheses, $\forall t \in [0,T] : f(t) - \frac{du}{dt}(t) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)$.

Comparing $\left(\overrightarrow{\tilde{p}_h}(t), \tilde{u}_h(t)\right)$ with $(\vec{p}(t), u(t))$, we have the following error estimate (to give a self-contained statement, we recall all the hypotheses done at the beginning of this section) :

Théorème 3.7.2 *We suppose that the generalized expectation $E[\mathcal{K}]$ of the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}$, is strictly positively lower bounded i.e. that $\inf_D E[\mathcal{K}] > 0$ and that $\mathcal{K} \in \mathcal{F}_l(D)$. We suppose that our regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ satisfies the refinement* *rules $(R1)$ and $(R2)$ of theorem 3.6.3. We assume that f, $\frac{df}{dt} \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$ and that the initial condition*

$$g \in \left\{ g \in \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}\left(D\right); \mathrm{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla} g\right) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}\left(D\right) \right\}$$

for some $r > 1$ and $k < 0$ such that $k+r \in \mathbb{R}$ satisfies inequality (3.14).
Then $\forall t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{\tilde{p}_h}\left(t\right) - \vec{p}\left(t\right) \right\|_{-1,k,0} &\lesssim B_{N,K}\left\|\vec{p}\left(t\right)\right\|_{-1,k+r,0} + h\left\|\vec{p}\left(t\right)\right\|_{-1,k,H^{1,\alpha_w}(D)^2} \\ &\lesssim B_{N,K}\left\|u\left(t\right)\right\|_{-1,k+r,1} + h\left\|u\left(t\right)\right\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\left\| P_h^{(N,K)} u\left(t\right) - \tilde{u}_h\left(t\right) \right\|_{-1,k,0} \lesssim B_{N,K}\left\|u\left(t\right)\right\|_{-1,k+r,1} + h\left\|u\left(t\right)\right\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}, \tag{3.84}$$

$$\left\| u\left(t\right) - \tilde{u}_h\left(t\right) \right\|_{-1,k,0} \lesssim B_{N,K}\left\|u\left(t\right)\right\|_{-1,k+r,1} + h\left\|u\left(t\right)\right\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}. \tag{3.85}$$

where $P_h^{(N,K)}$ denotes the orthogonal projection in the space $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ onto the subspace $M_h^{(N,K)}$.

Preuve: As $\left(\overrightarrow{\tilde{p}_h}\left(t\right), \tilde{u}_h\left(t\right)\right) \in X_h^{(N,K)} \times M_h^{(N,K)}$ is simply the solution of the discretized mixed formulation of the stationary problem (3.54) with right-hand side $f(t) - \frac{du}{dt}(t)$, the above estimates $(3.83) - (3.85)$ follow from the regularity theorem 3.3.6 which imply that the right-hand side $f\left(t\right) - \frac{du}{dt}\left(t\right) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}$, $\forall t \in [0,T]$, theorem 3.6.7 and theorem 3.6.10 respectively. ■

The purpose of the next result is to prove under some assumptions, some regularity on $\frac{d^2u}{dt^2}$, which will be needed to bound the norm in $\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)$ of $\frac{d\tilde{u}_h}{dt}(t) - \frac{du}{dt}$ in proposition 3.7.5.

Théorème 3.7.3 *Let us be given some $r > 1$ and $k < 0$ such that $k + r \in \mathbb{R}$ satisfies inequality (3.14). Let us assume that $f, \frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2} \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$ and for the initial condition g that*

$$\begin{gathered} g \in \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D), \mathrm{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla} g\right) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D), \\ f(0) + \mathrm{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla} g\right) \in \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D), \text{ and} \\ \mathrm{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}\left[f(0) + \mathrm{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla} g\right)\right]\right) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D). \end{gathered}$$

Then for $m = 0, 1, 2$:

$$\frac{d^m u}{dt^m} \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)\right) \cap C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right).$$

Preuve: We know already by theorem 3.3.6 that the thesis is true for $m = 0, 1$.
Let us consider the Cauchy problem : find $\zeta \in W\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)\right)$ such that :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\zeta(\cdot),v\right)_{-1,k+r,0} + \left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}\zeta(\cdot),\overrightarrow{\nabla}v\right)_{-1,k+r,0} = \left(\frac{d^2 f}{dt^2}(\cdot),v\right)_{-1,k+r,0}, \ \forall v \in \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D), \\ \zeta(0) = \frac{df}{dt}(0) + \operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}\left[f(0)+\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}g\right)\right]\right). \end{cases} \tag{3.86}$$

As by hypothesis $\frac{df}{dt}$ and $\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d^2f}{dt^2}$ belong to $L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$,
$\frac{df}{dt} \in C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$ and $\frac{df}{dt}(0) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)$. Thus $\zeta(0) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)$.
By theorem 3.3.2, $\zeta(\cdot) \in L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)\right) \cap C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$ and :

$$\begin{aligned} & \|\zeta\|_{C\left([0,T];\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)} + \|\zeta\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)\right)} \\ \lesssim & \left\|\frac{d^2 f}{dt^2}\right\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)} + \|\,\zeta(0)\|_{\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)}. \end{aligned}$$

Let us set

$$z(t) = \int_0^t \zeta(s)ds + f(0) + \operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}g\right).$$

Due to our hypothesis that $f(0) + \operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}g\right) \in \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)$,

$$z \in C\left([0,T];\mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)\right), \ z(0) = f(0) + \operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}g\right), \tag{3.87}$$

$$\frac{dz}{dt}(t) = \zeta(t).$$

Integrating both sides of equation $(3.86)_{(i)}$ from 0 to t, we obtain :

$$\begin{aligned} & (\zeta(t),v)_{-1,k+r,0} - (\zeta(0),v)_{-1,k+r,0} + \left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}z(t),\overrightarrow{\nabla}v\right)_{-1,k+r,0} \\ & -(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}\left[f(0)+\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}g\right)\right],\overrightarrow{\nabla}v)_{-1,k+r,0} \\ = & \left(\frac{df}{dt}(t),v\right)_{-1,k+r,0} - \left(\frac{df}{dt}(0),v\right)_{-1,k+r,0}, \end{aligned}$$

$\forall v \in \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D), \quad \forall t \in [0,T]$.

By Green's formula in the stochastic spaces $\mathcal{S}^{-1,k+r,H(\mathrm{div};D)}$, $\mathcal{S}^{-1,k+r,H^1(D)}$ ([24], (2.10) p. 611) and $(3.86)_{(ii)}$, the above equation simplifies to :

$$\left(\frac{dz}{dt}(t), v\right)_{-1,k+r,0} + \left(K\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}z(t), \overrightarrow{\nabla}v\right)_{-1,k+r,0} = \left(\frac{df}{dt}(t), v\right)_{-1,k+r,0}, \tag{3.88}$$

$\forall v \in \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D), \quad \forall t \in [0,T]$.

Comparing (3.88) and (3.87) with the Cauchy problem stated in the proof of theorem 3.3.6 shows us that $z = \frac{du}{dt}$.

Thus

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \zeta \in L^2\left(0,T; \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)\right) \cap C\left([0,T]; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right).$$

■

Corollaire 3.7.4 *Under the hypotheses of theorem 3.7.3, and supposing also that* $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_2}$, $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1} \in \mathcal{F}_l(D)$, *then :*

$$\frac{du}{dt} \in C\left([0,T]; \mathcal{S}^{-1,k+r,H^{2,\alpha_w}(D)}\right)$$

(*this is already known to be true for* $u(.)$ *by theorem 3.3.8*).

Preuve: By the proof of theorem 3.7.3, $z = \frac{du}{dt} \in C\left([0,T]; \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D)\right)$ and satisfies :

$$\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}z(t), \overrightarrow{\nabla}v\right)_{-1,k+r,0} = \left(\frac{df}{dt}(t) - \frac{dz}{dt}(t), v\right)_{-1,k+r,0}, \quad \forall v \in \mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D), \tag{3.89}$$

$\forall t \in [0,T]$.

By theorem 3.7.3, $\frac{dz}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} \in C\left([0,T]; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$ and as by hypothesis : $\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2} \in L^2\left(0,T; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$, we have also that $\frac{df}{dt} \in C\left([0,T]; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$. Thus the right-hand side in equation (3.89) belongs to $\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)$, $\forall t \in [0,T]$.

From equation (3.89) follows that in the weak sense

$$-\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}z(t)\right) = \frac{df}{dt}(t) - \frac{dz}{dt}(t) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D), \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.90}$$

From the above considerations follows that $\frac{df}{dt} - \frac{dz}{dt} \in C\left([0,T]; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$. This implies that the mapping $[0,T] \to \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D) : t \longmapsto -\operatorname{div}\left(K\diamondsuit\overrightarrow{\nabla}z(t)\right)$ is a continuous mapping. By theorem 3.6.2, and the "closed graph theorem" follows that the mapping $t \longmapsto z(t) = \frac{du}{dt}(t)$ is continuous from $[0,T]$ into $\mathcal{S}^{-1,k+r,H^{2,\alpha_w}(D)}$, for all $\alpha_w > 1 - \frac{\pi}{\omega}$. ■

Proposition 3.7.5 *Under the hypotheses of corollary 3.7.4 and supposing that our regular family of triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ satisfies the refinement rules $(R1)$ and $(R2)$ of theorem 3.6.3, we have :*

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) - \frac{d\tilde{u}_h}{dt}(t) \right\|_{-1,k,0} \lesssim B_{N,K} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{-1,k+r,1} + h \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)},$$

$\forall t \in [0,T]$, where the constant hidden in $\lesssim$ is independent of h, N, K, t.

Preuve: As a consequence of our hypotheses on f, $\frac{df}{dt}$, $\frac{d^2 f}{dt^2}$, it follows that $f \in C^1\left([0,T]; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$. By theorem 3.7.3, $\frac{du}{dt} \in C^1\left([0,T]; \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$.
If we consider the finite dimensional stationary problem : given a linear form F_h on $M_h^{(N,K)}$, find $\vec{p}_h \in X_h^{(N,K)}$, $u_h \in M_h^{(N,K)}$ such that :

$$\begin{cases} \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit \vec{p}_h, \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} + \left(u_h, \operatorname{div} \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} = 0, \quad \forall \vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}, \\ \\ \left(\operatorname{div} \vec{p}_h, v_h\right)_{-1,k,0} = -F_h(v_h), \quad \forall v_h \in M_h^{(N,K)}. \end{cases} \tag{3.91}$$

(it is clear from the proof of theorem 3.5.1, that this problem does not depend on the particular value of $k \in \mathbb{R}$), and introduce the linear operator

$$A_h : \left(M_h^{(N,K)}\right)' \to X_h^{(N,K)} \times M_h^{(N,K)} : F_h \mapsto (\vec{p}_h, u_h)$$

solving the preceding problem (A_h being a linear operator between finite dimensional spaces is automatically also continuous), we see that $\forall t \in [0,T]$:

$$\left(\overrightarrow{\tilde{p}_h}(t), \tilde{u}_h(t)\right) = A_h \circ P_h^{(N,K)}\left(f(t) - \frac{du}{dt}(t)\right).$$

Consequently,

$$\left(\overrightarrow{\tilde{p}_h}(\cdot), \tilde{u}_h(\cdot)\right) \in C^1\left([0,T]; X_h^{(N,K)} \times M_h^{(N,K)}\right),$$

and $\forall t \in [0,T]$:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\tilde{p}_h}}{dt}(t), \frac{d\tilde{u}_h}{dt}(t)\right) = A_h \circ P_h^{(N,K)}\left(\frac{df}{dt}(t) - \frac{d^2u}{dt^2}(t)\right).$$

By theorem 3.7.3 :

$$\frac{df}{dt}(\cdot) - \frac{d^2u}{dt^2}(\cdot) \in C\left([0,T]\,;\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$$

and thus a fortiori :

$$\frac{df}{dt}(t) - \frac{d^2u}{dt^2}(t) \in \mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D),$$

$\forall t \in [0,T]$.

Thus we are allowed to apply theorem 3.6.10, wich gives us :

$$\left\|\frac{du}{dt}\,(t) - \frac{d\tilde{u}_h}{dt}\,(t)\right\|_{-1,k,0} \lesssim B_{N,K}\left\|\frac{du}{dt}\,(t)\right\|_{-1,k+r,1} + h\left\|\frac{du}{dt}\,(t)\right\|_{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)},$$

as $\dfrac{du}{dt}(t)$ is the solution of the exact stationary problem at the fixed time t corresponding to (3.91) with datum

$$F\left(v\right) = \left(\frac{df}{dt}(t) - \frac{d^2u}{dt^2}(t), v\right)_{-1,k,0}, \quad \forall v \in \mathcal{S}^{-1,k,0}(D).$$

(as can be seen by a similar reasoning for the exact problem as we have done for the approximate problem). ■

3.8 A priori error estimates for the semi-discrete solution

In view to compare the solution at time t of the dual mixed semi-discretized problem with the solution of the elliptic projection at time t, let us introduce the following quantities :

$$\vec{\varepsilon}_h\left(t\right) := \vec{p}_h\left(t\right) - \overrightarrow{\tilde{p}}_h\left(t\right) \ \text{ and } \quad \theta_h\left(t\right) := u_h\left(t\right) - \tilde{u}_h\left(t\right).$$

Subtracting equation $(3.82)_{(i)}$ from equation $(3.36)_{(i)}$ and equation $(3.82)_{(ii)}$ from equation $(3.36)_{(ii)}$, we obtain the following system in the quantities $\vec{\varepsilon}_h\left(t\right)$ and $\theta_h\left(t\right)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\mathcal{K}^{\diamond-1}\diamond\vec{\varepsilon}_h\left(t\right), \vec{q}_h\right)_{-1,k,0} + \left(\theta_h\left(t\right), \operatorname{div}\vec{q}_h\right)_{-1,k,0} = 0, \quad \forall\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}, \\[2ex] \left(\operatorname{div}\vec{\varepsilon}_h\left(t\right), v_h\right)_{-1,k,0} + \left(\dfrac{d\left(u-u_h\right)}{dt}(t), v_h\right)_{-1,k,0} = 0, \quad \forall v_h \in M_h^{(N,K)}. \end{array}\right. \tag{3.92}$$

Morover, as we choose $u_h(0) = \tilde{u}_h(0)$ as initial condition for the semi-discretized problem, we have :

$$\theta_h(0) = 0. \tag{3.93}$$

Choosing $\vec{q}_h = \vec{\varepsilon}_h(t)$ in $(3.92)_{(i)}$ and $v_h = \theta_h(t)$ in $(3.92)_{(ii)}$, we obtain :

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(t), \vec{\varepsilon}_h(t)\right)_{-1,k,0} + \left(\theta_h(t), \operatorname{div}\vec{\varepsilon}_h(t)\right)_{-1,k,0} = 0 \tag{3.94}$$

$$\left(\operatorname{div}\vec{\varepsilon}_h(t), \theta_h(t)\right)_{-1,k,0} + \left(\frac{d(u-u_h)}{dt}(t), \theta_h(t)\right)_{-1,k,0} = 0. \tag{3.95}$$

From equation (3.95) and (3.94), we obtain :

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(t), \vec{\varepsilon}_h(t)\right)_{-1,k,0} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_h(t)\|^2_{-1,k,0} = \left(\frac{d}{dt}(u-\tilde{u}_h)(t), \theta_h(t)\right)_{-1,k,0}. \tag{3.96}$$

Integrating both sides of this equation from 0 to t, taking into account (3.93), we obtain :

$$\int_0^t \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(s), \vec{\varepsilon}_h(s)\right)_{-1,k,0} ds + \frac{1}{2}\|\theta_h(t)\|^2_{-1,k,0} = \int_0^t \left(\frac{d}{ds}(u-\tilde{u}_h)(s), \theta_h(s)\right)_{-1,k,0} ds. \tag{3.97}$$

By Cauchy-Schwarz and Young inequalities, we obtain for $\epsilon > 0$:

$$\int_0^t \left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(s), \vec{\varepsilon}_h(s)\right)_{-1,k,0} ds + \frac{1}{2}\|\theta_h(t)\|^2_{-1,k,0} \tag{3.98}$$

$$\leq \epsilon^2 \int_0^t \|\theta_h(s)\|^2_{-1,k,0}\, ds + \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^t \left\|\frac{d}{ds}(u-\tilde{u}_h)(s)\right\|^2_{-1,k,0} ds. \tag{3.99}$$

Due to hypothesis (3.14) and lemma 3.4.1, $\exists C_a > 0$ such that :

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(s), \vec{\varepsilon}_h(s)\right)_{-1,k,0} \geq C_a \|\vec{\varepsilon}_h(s)\|^2_{-1,k,0}. \tag{3.100}$$

To be able to absorb the term $\epsilon^2 \int_0^t \|\theta_h(s)\|^2_{-1,k,0} ds$ in the right-hand side of inequality (3.98) by $C_a \int_0^t \|\vec{\varepsilon}_h(s)\|^2_{-1,k,0} ds$, term implicitely contained in the left-hand side of inequality (3.98) due to (3.100), let us firstly prove that

$$\|\theta_h(s)\|_{-1,k,0} \lesssim \|\vec{\varepsilon}_h(s)\|_{-1,k,0}. \tag{3.101}$$

By (3.62) , there exists $\vec{q}_h(s) \in X_h^{(N,K)}$ such that $\operatorname{div}\vec{q}_h(s) = \theta_h(s)$ and

$$\|\vec{q}_h(s)\|_{-1,k,0} \lesssim \|\theta_h(s)\|_{-1,k,0}. \tag{3.102}$$

Equation $(3.92)_{(i)}$ (with t replaced by s) is valid for any $\vec{q}_h \in X_h^{(N,K)}$.
Thus we may choose $\vec{q}_h = \vec{q}_h(s)$, which gives us :

$$\left(\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(s), \vec{q}_h(s)\right)_{-1,k,0} + \|\theta_h(s)\|^2_{-1,k,0} = 0.$$

This last equation implies that :

$$\begin{aligned}\|\theta_h(s)\|^2_{-1,k,0} &\leq \left\|\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(s)\right\|_{-1,k,0}\|\vec{q}_h(s)\|_{-1,k,0} \\ &\lesssim \left\|\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(s)\right\|_{-1,k,0}\|\theta_h(s)\|_{-1,k,0} \quad \text{by (3.102).}\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}\|\theta_h(s)\|_{-1,k,0} &\lesssim \left\|\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}\diamondsuit\vec{\varepsilon}_h(s)\right\|_{-1,k,0} \\ &\lesssim \|\vec{\varepsilon}_h(s)\|_{-1,k,0}.\end{aligned}$$

This proves (3.101). From (3.98), (3.100) and (3.101) follows the following result :

Proposition 3.8.1 *Supposing that $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1} \in \mathcal{F}_l(D)$ and that $k \in \mathbb{R}$ satisfies to hypothesis (3.14), the following inequality holds :*

$$\int_0^t \|\vec{\varepsilon}_h(s)\|^2_{-1,k,0}\,ds + \|\theta_h(t)\|^2_{-1,k,0} \lesssim \int_0^t \left\|\frac{d}{ds}(u-\tilde{u}_h)(s)\right\|^2_{-1,k,0} ds,$$

where $\vec{\varepsilon}_h(s) = \vec{p}_h(s) - \overrightarrow{\tilde{p}}_h(s)$ and $\theta_h(s) = u(s) - \tilde{u}_h(s)$.

Corollaire 3.8.2 *Under the hypotheses of proposition 3.7.5*

$$\begin{aligned}&\left\|\vec{p}_h(\cdot) - \overrightarrow{\tilde{p}}_h(\cdot)\right\|_{L^2\left(0,T;\left(\mathcal{S}^{-1,k,0}\right)^2\right)} + \sup_{0\leq t\leq T}\|u_h(\cdot)-\tilde{u}_h(\cdot)\|_{-1,k,0} \\ \lesssim\ & B_{N,K}\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k+r,1}(D)\right)} + h\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)}\right)}.\end{aligned}$$

Preuve: This follows immediately from proposition 3.8.1 and proposition 3.7.5. ■

Applying corollary 3.8.2 in conjunction with theorem 3.7.2, we obtain the following a priori error estimates on $\vec{p}_h(\cdot)$ and $u_h(\cdot)$ (we recall all the hypotheses) :

Théorème 3.8.3 *We suppose :*
(i) that the stochastic diffusion coefficient $\mathcal{K}(\cdot)$, its Wick inverse $\mathcal{K}^{\diamondsuit-1}$, and its partial derivatives $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial x_2}$ all belong to $\mathcal{F}_l(D)$ and that its generalized mean $E[\mathcal{K}]$ is lower bounded by a strictly positive constant on D;
(ii) that $k<0$, $r>1$, and that

$$k+r<2l+\frac{2}{\ln 2}\ln\left(\frac{\inf_D E[\mathcal{K}]}{\|\mathcal{K}\|_{l,*}}\right);$$

(iii) that f, $\frac{df}{dt}$, $\frac{d^2f}{dt^2}\in L^2\left(0,T;\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D)\right)$ and that the initial condition g satisfies

$$g\in\mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D),\ \operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}g\right)\in\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D),$$
$$f(0)+\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}g\right)\in\mathcal{S}_0^{-1,k+r,1}(D),$$
$$\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}(f(0)+\operatorname{div}\left(\mathcal{K}\diamondsuit\vec{\nabla}g\right))\right)\in\mathcal{S}^{-1,k+r,0}(D);$$

(iv) that our regular family of triangulation $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ satisfies the refinement rules $(R1)$ and $(R2)$ stated in theorem 3.6.3 for some $\alpha_w\in\left]1-\frac{\pi}{\omega},1\right[$.
Then :

$$\begin{aligned}
&\|\vec{p}_h-\overrightarrow{p}\ \|_{L^2\left(0,T;\ \left(\mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)^2\right)}+\|u_h-u\|_{L^2\left(0,T;\ \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)}\\
\lesssim\ & B_{N,K}(\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2\left(0,T;\ \mathcal{S}^{-1,k+r,1}(D)\right)}+\|u\|_{L^2([0,T];\ \mathcal{S}^{-1,k+r,1}(D))}\\
&+h(\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2(0,T;\ \mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)})}+\|u\|_{L^2(0,T;\ \mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)})})\ ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|u_h-u\|_{C\left([0,T];\ \mathcal{S}^{-1,k,0}(D)\right)}\\
\lesssim\ & B_{N,K}(\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2\left(0,T;\ \mathcal{S}^{-1,k+r,1}(D)\right)}+\|u\|_{C([0,T];\ \mathcal{S}^{-1,k+r,1}(D))})\\
&+h(\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^2(0,T;\ \mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)})}+\|u\|_{C([0,T];\ \mathcal{S}^{-1,k,H^{2,\alpha_w}(D)})}).
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] R.B. Ash, M.F. Gardner,"*Topics in Stochastic Processes"*, Probability and Mathematical Statistics, Vol. 27, Academic Press (1975).

[2] P. Grisvard, *"Singularities in Boundary Value Problems"*, Research Notes in Applied Mathematics RMA 22, Masson Springer-Verlag (1992).

[3] P. Grisvard, *"Elliptic Problems in Nonsmooth Domains"*, Monographs and Studies in Mathematics 24 (1985)

[4] P.G. Ciarlet, "*Basic Error Estimates for Elliptic problems*" pp. 17-351 in : Handbook of Numerical Analysis, Vol.II Finite Element Methods (Part 1), Edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, Elsevier Science Publishers (North-Holland) (1991).

[5] J.E. Roberts, J.M. Thomas, "*Mixed and Hybrid Methods*" pp. 523-639 in : Handbook of Numerical Analysis, Vol.II Finite Element Methods (Part 1), Edited by P.G. Ciarlet and J.L. Lions, Elsevier Science Publishers (North-Holland) (1991).

[6] A. Pazy , "*Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations",* Applied Mathematical Sciences Volume 44, Springer-Verlag (1983).

[7] V. Thomée, *"Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems"*, Springer Series in Computational Mathematics 25, Springer-Verlag (1997).

[8] H. El Sossa, L.Paquet , *"Refined Mixed Finite Element Method for the Poisson Problem in a Polygonal Domain with a Reentrant corner",* Advances in Mathematical scienes and Applications, Gakkotosho, Tokyo, Vol. 12, No.2(2002), pp 607-643.

[9] H. El Sossa, *"Quelques méthodes d'éléments finis mixtes raffinées basées sur l'utilisation des champs de Raviart-Thomas"*, Thèse de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, (juin 2001).

[10] C. Johnson and V. Thomée, *"Error Estimates for some Mixed Finite Element Methods for Parabolic Type Problems"*, R.A.I.R.O. Analyse numérique / Numerical Analysis, vol.15, n°1, 1981, p. 41-78.

[11] G. Raugel, *"Résolution numérique par une méthode d'éléments finis du problème de Dirichlet pour le Laplcien dans un polygone"*, C.R.A.S., Paris, t.286(1978), p791-794.

[12] G. Raugel, C. Bernardi, *"Méthodes d'éléments finis mixtes pour les équations de Stokes et de NavierStokes dans un polygone non convexe "*, Calcolo 18 (1981), 255-291.

[13] M. Farhloul, *"Méthodes d'Elément Finis Mixtes et Volumes finis"*, Thèse de l'Université de Laval, Québec, Mars(1991).

[14] P-A. Raviart, *"Les Méthodes d'élément Finis en mécanique des fluides"*, Collection de la direction des Études et de Recherches d'Electricité de france, 40, éditions Eyrolles(1981).

[15] V.Girault, P.-A. Raviart , *"Finite Element Methods for Navier Stokes Equations Theory and Alghorithms"*, SCM 5, Springer-Verlag (1986).

[16] I. Guikhman, A.V. Skorokhod, "*Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires"*, Mir Publishers Moscow (1977), French translation (1980).

[17] D.E. Knuth , "*The Art of Computer Programming, Volume 2 / Seminumerical Algorithms"*, second edition, Addison-Wesley (1981).

[18] N.V. Krylov, "*Introduction to the Theory of Random Processes"*, Graduate Studies in Mathematics Volume 43, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2002).

[19] J-L. Lions, *Cours d'analyse numérique.*

[20] D. Nualart,"*The Malliavin Calculus and Related Topics"* , Probability and its Applications, Springer-Verlag (1995).

[21] L.C. Evans, "*Partial Differential Equations*", Graduate Studies in Mathematics Volume 19, American Mathematical Society Providence, Rhode Island (1999).

[22] G. Lumer, L. Paquet, "*Semi-groupes holomorphes et équations d'évolutions"*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284 (24 janvier 1977), pp. 237-240.

[23] T.G. Theting, *"Solving parabolic Wick-stochastic boundary value problems using a finite element method"*, Stochastics and Stochastics Rep. 75 (2003), no. 1-2, 49–77.

[24] H. Manouzi, T.G. Theting, *"Mixed finite element approximation for the stochastic pressure equation of Wick type"*, IMA Journal of Numerical Analysis, 24 (2004), no. 4, 605–634.

[25] T. G.Theting, *"Solving Wick-stochastic boundary value problems using a finite element method"*, Stochastics Stochastics Rep. 70 (2000), no. 3-4, 241–270.

[26] T.G. Theting, *"Numerical solution of Wick-stochastic partial differential equations"*, Proceedings of the International Conference on Stochastic Analysis and Applications, 303–349, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

[27] H. Holden, B.Øksendal ,J. Ubøe, and T.-S. Zhang, *"Stochastic Partial Differential Equations A Modeling White Noise Functional Approach"*, Probability and its Applications. Birkhäuser, Boston, 1996.

[28] M. Reed, B. Simon, *"Methods of Modern Mathematical Physics : Functional Analysis"*, Academic Press (1972).

[29] M.Reed, B.Simon , *"Methods of Modern Mathematical Physics II : Fourier Analysis, Self-Adjointness"*, Academic press (1975).

[30] R.G Ghanem, P.D. Spanos, "*Stochastic Finite Elements A Spectral Approch"*, Revised Edition, Dover (2002).

[31] H. H. Schaefer , "*Topological Vector Spaces"*, Third Printing Corrected, Graduate Texts in Mathematics 3, Springer-Verlag (1971).

[32] I.M Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, "*Generalized Functions : Volume 4 Applications of Harmonic Analysis"*, Academic Press (1964).

[33] L. Larsson-Cohn , *"Gaussian Structures and Orthogonal Polynomials"*, Uppsala University, (1971).

[34] N. Wiener, "*The homogeneous chaos"*, Amer. J. Math., Vol. 60, pp. 897-936, (1938).

[35] R. Dautray, J-L Lions , "*Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Volume 8 Evolution : semi-groupe, variationnel"*, Masson (1988).

[36] T. Zhang , *“Characterizations of withe noise test functions and Hida distributions”*, Stochastic 41, pp. 71-87 (1992).

[37] J. Dieudonné , *“éléments d’analyse tome1 : Fondements de l’analyse moderne, Cahiers scientifiques Fasicule XXVIII”*, Gauthier-Villars, Editeur (1968).

[38] G.Våge, *“Variational methods for PDEs applied to stochastic partial differential equation”,* Math. Scand, 82(1), pp 113-137(1988).

[39] F.E. Benth, J.Gjerde, *“Convergence rates for finite element approximations of stochastic partial differential equations”*, Stoch. Stoch. Rep, 63, pp, 313-326(1998).

[40] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *“Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables”, Dover (1972).*

[41] N. Wiener, *“The homogeneous chaos”*, Amer. J. Math., Vol.60, pp.897-936, 1938.

[42] D. Nualart, *“The Malliavin Calculus and Related Topics”*, Probability and its Applications, Springer-Verlag (1995).

[43] J. Malý, *“Lectures on change of variables in integral ”*, Preprint 305, November 2001, Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Finland.

[44] C.M. Bender, S.A. Orszag, *“Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers”*, McGraw-Hill International Editions, Mathematics Series, 3rd printing (1987).

[45] Y. Cao, *“On Convergence Rate of Wiener-Ito Expansion For Generalized Random Variables”*, Stochastics, 78 (3), pp. 179-187 (2006).

[46] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland Pub. Company, in English, 1977, 1979, 1984. Reedition in the AMS-Chelsea Series, AMS, Providence, 2001.

[47] J. NEČAS. *“Équations aux dérivées partielles”.* Presse de l’Université de Montréal., 1966.

[48] F. Brezzi and M. Fortin, “*Mixed and Hybrid Finite Element Methods”*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[49] M. Farhloul, R. Korikache, L. Paquet, *“The Dual Mixed Finite Element Method for the Heat Diffusion Equation in a Polygonal Domain I”*, In memory of Günter Lumer (to appear).

[50] F.E. Benth, T.G. Theting, *"Some Regularity Results for the Stochastic Pressure Equation of Wick-Type"*, Stoch. Anal. Appl. 20 pp. 1191-1223 (2002).

[51] C. Bahriawati, C. Carstensen, *"Three Matlab Implemtations of The Lowest-Order Raviart-Thomas MFEM With A Posteriori Error Control"*, COM. Method In Applied Mathematics, Vol.5(2005), No.4, pp.333-361.

[52] Y. Kondratiev, P. Leukert, L .Streil, *"Wick calculus in Gaussian analysis "*, Manuscrit, University of Bielefeld (1994).

Résumé

Dans ce travail on se propose d'établir des estimations d'erreurs a priori pour les solutions approchées d'équations d'évolution obtenues par la méthode d'éléments finis mixte duale en espace et ce pour trois types de problèmes : le premier concerne le problème de Cauchy pour l'équation de diffusion de la chaleur, le second est le problème de Stokes instationnaire, et le dernier concerne le problème de Cauchy pour l'équation de diffusion de la chaleur mais avec un coefficient de diffusion aléatoire. Pour ces trois types de problèmes, il y a un certain nombre de raisons de préférer la méthode mixte duale en espace à une méthode classique en espace ; parmi elles la propriété fondamentale qu'est la conservation locale, et par suite globale, de certaines quantités physiques (la quantité de mouvement, la masse, la quantité de chaleur,...). Une autre raison bien connue pour adopter la méthode mixte duale en espace est qu'elle nous permet d'introduire des nouvelles variables : $\vec{p}\,(t) = \vec{\nabla} u(t)$ le flux de chaleur à l'instant t pour l'équation de diffusion de la chaleur, $\vec{p}\,(t) = \mathcal{K}\Diamond\vec{\nabla} u(t)$ le flux de chaleur à l'instant t pour l'équation de diffusion de la chaleur avec un coefficient de diffusion aléatoire $\mathcal{K}$, $\Diamond$ dénotant le produit de Wick, $\sigma\,(t) = \nabla\vec{u}(t)$ le tenseur gradient du champ des vitesses à l'instant t pour le problème de Stokes instationnaire, ces inconnues supplémentaires ayant un sens physique et une importance particulière pour plus d'une application. Il est donc important de disposer d'une méthode numérique donnant aussi de bonnes approximations de ces quantités. Nous montrons que ces diverses quantités appartiennent à des espaces de Sobolev ou à des espaces de Sobolev stochastiques de fonctions dépendant du temps, à poids appropriés en espace prenant en compte les singularités de la solution apparaissant au voisinage des sommets non-convexes. Nous décrivons ensuite des conditions de raffinement de maillage près des sommets qui permettent d'obtenir une estimée d'erreur a priori optimale en espace entre une solution de l'équation d'évolution et son approximation semi-discrète ou complètement discrétisée.

Mots-clés: MEF duale mixte, Espaces de Sobolev, Estimations d'erreur à priori, Equation de diffusion de la chaleur, Coefficient de diffusion aléatoire, Problème de Stokes instationnaire, Espaces de Sobolev stochastiques, EDPS.

Abstract

This work intends to establish a priori error estimates for the approximate solutions of evolution equations obtained by the dual mixed method of finite elements in the spatial directions for three types of problems : the first one concerns the Cauchy problem for the heat diffusion equation ; the second is the non-stationary Stokes problem and the last one concerns the Cauchy problem for the heat diffusion equation with a random diffusion coefficient. For these three types of problems, there is a certain number of reasons for prefering the dual mixed method in the spatial directions to a classical method in the spatial directions. Among these reasons, the fundamental property is the local conservation, thus a global one, of certain physical quantities (the quantity of movement, the mass, the quantity of heat can be mentioned). Another well-known reason for adopting the dual mixed method in the spatial directions is the fact that this method allows us to introduce new variables : $\vec{p}\,(t) = \vec{\nabla} u(t)$ the heat flow at time t for the heat diffusion equation, $\vec{p}\,(t) = \mathcal{K}\Diamond\vec{\nabla} u(t)$ the heat flux at time t for the heat diffusion equation with random diffusion coefficient $\mathcal{K}$, or $\sigma\,(t) = \nabla\vec{u}(t)$ the gradient tensor of the velocity field at time t for the non-stationary Stokes problem, these additional unknowns having a physical sense of particular importance for more than one application. It is thus important to dispose of a numerical method which gives good approximations of these quantities. These physical quantities will be shown to belong to Sobolev or Stochastic Sobolev spaces of functions depending of the time variable, with appropriate weights in the spatial directions taking into account the singularities of the solutions appearing in the neighbourhood of the non-convex vertices of the physical domain. Appropriate refinement conditions near the reentrant corners which allow obtaining optimal a-priori error estimates in the spatial directions between a solution of the evolution equation and the corresponding solutions of the semi-discretized or completely dicretized problems will be described.

Keywords: Dual mixed FEM, Sobolev spaces, a priori error estimation, Heat diffusion equation, Non-Stationary Stokes problem, Random diffusion coefficient, Stochastic Sobolev spaces, EDPS.