



HAL
open science

Modélisation micromécanique du comportement de milieux poreux non linéaires : Applications aux argiles compactées

Salma Smaoui Barboura

► **To cite this version:**

Salma Smaoui Barboura. Modélisation micromécanique du comportement de milieux poreux non linéaires : Applications aux argiles compactées. Mécanique [physics.med-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : . tel-00193994

HAL Id: tel-00193994

<https://theses.hal.science/tel-00193994>

Submitted on 5 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT
de
L'UNIVERSITE DE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité
Mécanique

Présentée par

Salma SMAOUI BARBOURA

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

**Modélisation micromécanique du comportement de
milieux poreux non linéaires : Applications aux
argiles compactées**

soutenue le 23 mars 2007

Rapporteurs : MERAGHNI Fodil, Professeur à l'ENSAM de Metz
PILVIN Philippe, Professeur à l'Université Bretagne Sud

Examineur : BERTHAUD Yves, Professeur à l'Université Paris 6

Directeurs : BEN HAMIDA Abdelwahed, Maître de Conférences (HDR) à l'Université Paris 6
DJERAN MAIGRE Irini, Professeur à l'INSA de Lyon
DUMONTET Hélène, Professeur à l'Université Paris 6

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et ma gratitude à toutes celles et tous ceux qui m'ont aidée, tant au niveau scientifique, que personnel dans le bon déroulement de la thèse et l'achèvement de ce présent manuscrit. Une certaine émotion accompagne inévitablement la fin d'une telle expérience, que les éventuels oubliés me pardonnent.

J'adresse mes tous premiers remerciements à mes directeurs de thèse Hélène Dumontet, Irini Djéran-Maigre et Abdelwahed Benhamida. Merci Hélène, ce fut un plaisir de travailler avec toi. Tu as su m'insuffler ton énergie et ta détermination dans les moments difficiles et me guider vers les questions clefs de mes travaux. Merci Irini, pour m'avoir donnée l'occasion de cultiver mon goût pour les milieux poreux et partager ton savoir dans le domaine du génie civil. Et enfin, Merci Wahid pour m'avoir toujours bien accueillie, tant humainement que scientifiquement durant ces années de thèse. Les réunions de travail resteront longtemps dans ma mémoire.

Ma reconnaissance s'adresse ensuite au professeur Yves Berthaud de l'Université Pierre et Marie Curie pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury. J'en profite pour remercier les autres membres de mon jury de thèse. Les professeurs, Fodil Meraghni et Philippe Pilvin, ont accepté d'être rapporteurs de mes travaux. Cette rude tâche leur a été infligée pendant les vacances de fin d'année ; j'en suis désolée, et je les remercie pour leur lecture minutieuse. M.Pilvin avait par ailleurs proposé que nous discutions de certains points un mois avant ma soutenance. Il m'a beaucoup éclairée, et je lui en suis très reconnaissante. Ses remarques encourageantes sur mon travail m'ont remplies de fierté.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres du laboratoire LM2S, qui a intégré récemment l'équipe MISES de l'Institut Jean Le Rond d'Alembert (IJLRA) de l'Université Paris 6, pour leur accueil chaleureux et la très bonne ambiance de travail. Un clin d'oeil à tous mes amis et collègues, qui m'ont accompagnée pendant cette aventure, pour leur soutien mutuel : Sonia Lali, Rim Zouari, Raouf Satouri, Quoc Huy Vu, Une dédicace spéciale à Mirela Lazar avec qui j'ai passé des moments inoubliables de joie et de panique durant ces deux dernières années (bureau, congrès, soutenance, ...). Une pensée également pour tous ceux avec qui j'ai partagé les moments qui font la vie d'un thésard, les discussions dans le couloir, les pauses café/thé et déjeuners au bar du laboratoire en particulier les membres du laboratoire LEMFI qui a également intégré le IJLRA de Paris 6.

Que ces remerciements s'envolent également vers mes parents, Houria et Mohamed, pour leur soutien inconditionnel et leur présence, malgré la distance qui nous séparait durant ces années, dans les moments heureux et moins heureux. Une dédicace spéciale à la petite famille de ma soeur (Sabine, Hamadi, Khalil, Brahim), de mon frère (Nizar et Rim) et à ma belle famille (Saloua, Mohamed, Héla et Nehla) ainsi que tous mes proches et en particulier mon oncle Taher qui m'a aidé pour arriver au bout de mes ambitions.

Finalement, et non le moindre, je suis très reconnaissante envers Maher, mon époux, pour son amour et son support au cours de ces années. Il a su m'encourager dans les moments difficiles et être patient dans les moments d'intense travail et de stress.

Résumé

Ce travail est consacré à la modélisation du comportement hydro-mécanique de milieux poreux linéaires et non linéaires par approche micromécanique. Les modèles développés sont illustrés par une application en géomécanique avec la simulation du comportement d'argiles compactées.

La modélisation proposée s'appuie sur une approche itérative d'homogénéisation couplée aux schémas prédictifs linéaires des modules effectifs. Le comportement d'un milieu linéaire est tout d'abord obtenu par homogénéisations successives de milieux poreux intermédiaires formés par ajouts progressifs de faibles porosités. A convergence, le processus itératif conduit à un même comportement équivalent du milieu poreux quelque soit la méthode d'homogénéisation utilisée à chaque étape et quelque soit le taux de porosité du milieu. Ce résultat permet d'unifier les prédictions des schémas linéaires explicites de la littérature qui concordent habituellement seulement pour des faibles porosités.

Cette approche itérative d'homogénéisation est ensuite étendue à la prédiction du comportement non linéaire de milieux poreux en procédant à des linéarisations sécantes du comportement des squelettes. Les schémas prédictifs linéaires sont exploités pour homogénéiser le milieu poreux ainsi linéarisé par itérations successives. Le couplage du processus itératif conduit, comme en linéaire, à la construction d'une même réponse non linéaire homogénéisée quelque soit le taux de porosité et le schéma prédictif utilisé. Les performances du processus itératif d'homogénéisation sont illustrées à travers différents tests en élasticité linéaire, non linéaire et élastoplasticité. Des validations par confrontation à des modèles de la littérature sont menées. L'approche micromécanique itérative est également exploitée pour construire des surfaces d'écoulement plastique de milieux poreux.

Enfin, la modélisation est appliquée à la simulation de comportement de milieux argileux compactés qui avaient fait l'objet d'une étude expérimentale détaillée aux deux échelles. Sous chargement de compaction œdométrique, les argiles présentent un comportement élastoplastique et lors de la décharge, le comportement observé est élastique. Des identifications des propriétés élastiques et élastoplastiques des squelettes sont tout d'abord effectuées par homogénéisation inverse. Puis, le comportement macroscopique des argiles est simulé par les approches itératives d'homogénéisation. Un enrichissement des modèles par l'actualisation de la porosité au cours du chargement permet de reproduire de façon satisfaisante le comportement expérimental.

Mots-clés : Approche micromécanique, Matériaux poreux, Comportement hydro-mécanique non linéaire, Processus itératif d'homogénéisation, Linéarisations sécantes, Argiles compactées.

Abstract

This work is devoted to the modelling of the hydro-mechanical behaviour of linear and nonlinear porous media by micromechanical approach. The developed models are illustrated by an application in geomechanics with the simulation of compacted clay behaviours. The proposed modelling is based on an iterative approach of homogenization coupled with linear predictive schemes of the effective moduli. The linear behaviour of the medium is obtained firstly by successive homogenizations of intermediate porous media formed by progressive additions of low porosities. At convergence, the iterative process leads to the same equivalent behaviour of the porous media for any homogenization method used at each step and for any porosity too. This result allows to unify the predictions of the explicit linear schemes which coincide usually only for low porosities.

This iterative approach of homogenization is then extended to predict the nonlinear behaviour of porous media by a secant linearization of the skeleton's behaviour. The predictive linear methods are used to homogenize the linearized porous media by successive iterations. The coupling of the iterative process leads, as in the linear, to the same homogenized nonlinear response for any porosities and linear schemes used. The performances of the iterative process of homogenization are illustrated through various tests in linear, nonlinear elasticity and elastoplasticity. The iterative micromechanical approach is also used to estimate the effective yield surface of porous media.

Finally, this micromechanical model is applied for simulating the behaviour of experimentally compacted argillaceous porous media. Observations on this study were performed on two scales. Under oedometric compaction, clays present an elastoplastic behaviour during the loading and the behaviour observed is elastic during unloading. The elastic and elastoplastic identifications of skeleton's properties are carried out by inverse homogenization. Then, the macroscopic behaviour of clays is simulated by the iterative approaches of homogenization. An improvement of the models by porosity's actualization in loading leads to good agreements with the experimental behaviour.

Keywords : Micromechanical approach, Porous media, Nonlinear hydro-mechanical behaviour, Iterative process of homogenization, Secant linearizations, Compacted clays.

Table des figures

1.1	<i>Modélisation du milieu poreux à l'échelle macroscopique comme superposition de deux milieux continus</i>	11
1.2	<i>Différentes échelles d'observation</i>	18
1.3	<i>Milieu poreux et son volume élémentaire représentatif</i>	20
1.4	<i>Illustration unidimensionnelle des formulations linéarisées du comportement non linéaire des phases (Suquet, 1997 [97])</i>	43
1.5	<i>Principe général des extensions non linéaires (Bornert et al., 2001[18]).</i>	44
2.1	<i>Principe du schéma itératif d'homogénéisation</i>	50
2.2	<i>Algorithme d'implémentation du processus itératif d'homogénéisation . .</i>	60
2.3	<i>Maillage cubique centré de la cellule de base, (1/8 du réseau cubique). Homogénéisation Périodique, Modulef.</i>	61
2.4	<i>Maillage de volumes élémentaires (a) Maillage sphère creuse (b) maillage cube avec un pore sphérique (1/8 du modèle). Module effectif, Castem. .</i>	62
2.5	<i>Évolution du module de cisaillement normalisé par celui du squelette en fonction de la porosité par différentes méthodes d'homogénéisation. . . .</i>	63
2.6	<i>Évolution du module de compressibilité normalisé par celui du squelette en fonction de la porosité par différentes méthodes d'homogénéisation. .</i>	63
2.7	<i>Écart relatif entre les différentes méthodes d'homogénéisation et l'approche périodique en fonction de la porosité pour les modules de compressibilité (a) et de cisaillement (b).</i>	64
2.8	<i>Évolution du coefficient de Biot (a) et du module (b) de Biot en fonction de la porosité pour différents méthodes d'homogénéisation.</i>	64
2.9	<i>Évolution des modules de cisaillement (a) et de compressibilité (b) normalisés par ceux du squelette en fonction de la porosité par l'approche des distributions diluées itérée pour différents nombres d'itérations. . .</i>	65
2.10	<i>Modules de cisaillement (a) et de compressibilité (b) normalisés en approche diluée couplée ou non au processus itératif. Comparaison avec l'approche périodique.</i>	67

2.11	<i>Écart relatif à la convergence entre les modules de cisaillement (a) et de compressibilité (b) par l'approche des distributions diluées au cours des itérations.</i>	68
2.12	<i>Évolution des modules de compressibilité (a) et de cisaillement (b) en fonction de la porosité au cours des itérations par l'approche d'Hashin et le schéma autocohérent</i>	68
2.13	<i>Évolution des modules de compressibilité (a) et de cisaillement (b) normalisés par ceux du squelette en fonction de la porosité pour différentes approches d'homogénéisation couplées (it) et non au processus itératif</i> .	69
2.14	<i>Évolution des coefficient (a) et du module de Biot (b) en fonction de la porosité pour différentes approches d'homogénéisation couplées (it) ou non au processus itératif.</i>	70
2.15	<i>Évolution des modules de compressibilité (a) et de cisaillement (b) normalisés par ceux du squelette en fonction de la porosité par l'approche des distributions diluées directe ou à convergence du processus itératif (it) et l'approche différentielle de Zimmerman (Dif).</i>	71
2.16	<i>Évolution du module de compressibilité (a,c,e) et de cisaillement (b,d,f) normalisés par ceux du squelette en fonction du nombre d'itérations par différentes méthodes d'homogénéisation : Approximation diluées (DD) en approche déformation, (DC) en approche contrainte, (HS) borne supérieure de Hashin-Shtrikman, (AC) schéma autocohérent et (3PH) autocohérent généralisé. Porosité $\phi=0.3$ (a,b), $\phi=0.5$ (c,d) et $\phi=0.7$ (e,f).</i>	73
2.17	<i>Évolution du module de compressibilité (a) et de cisaillement (b) normalisés par ceux du squelette en fonction du nombre d'itérations par différentes méthodes d'homogénéisation : Approximation diluées (DD) en approche déformation, (DC) en approche contrainte, (HS) borne supérieure de Hashin-Shtrikman, (AC) schéma autocohérent et (3PH) autocohérent généralisé. Porosité $\phi=0.9$.</i>	74
2.18	<i>Écarts relatifs des approximations diluées en approche déformation et en approche contrainte du module de compressibilité (a) et de cisaillement (b) en fonction du nombre d'itérations pour différentes porosités.</i>	74
2.19	<i>2^{ème} Algorithme de mise en œuvre du processus itératif.</i>	75
2.20	<i>Influence de l'algorithme sur les évolutions des modules de compressibilité et de cisaillement normalisés en fonction du nombre d'itération par l'approche des approximation diluées en approche déformation (DD) et contrainte(DC) (a, b) pour $\phi=50\%$ et (c,d) pour $\phi= 70 \%$.</i>	76
2.21	<i>Écarts relatifs des ces estimations par l'approximation diluée du module de compressibilité (a) et de cisaillement (b) en fonction du nombre d'itérations pour ces différentes porosités.</i>	76

2.22	<i>(a) Évolution du module d'Young équivalent par les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) en fonction du nombre d'itérations pour différents modules d'Young du squelette. (b) Écart absolue entre les approximations du module d'Young équivalent en approche déformation et contrainte en fonction du nombre d'itérations pour des milieux poreux de différents squelettes. Porosité $\phi = 0.5$.</i>	77
2.23	<i>(a) Évolution du coefficient de Poisson équivalent par les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) en fonction du nombre d'itérations pour différents coefficients de Poisson du squelette. (b) Écart absolu entre les approximations du coefficient de Poisson équivalent en approche déformation et contrainte en fonction du nombre d'itérations pour des milieux poreux de différents squelettes. Porosité $\phi = 0.5$.</i>	78
2.24	<i>(a) Évolution du module de compressibilité équivalent par les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) en fonction du nombre d'itérations pour différents coefficients de Poisson du squelette. (b) Écart absolu entre les approximations du module de compressibilité équivalent en approche déformation et contrainte en fonction du nombre d'itérations pour des milieux poreux de différents squelettes. Porosité $\phi = 0.5$.</i>	78
3.1	<i>Comportement non linéaire du squelette en loi puissance. Chargement déviatorique.</i>	105
3.2	<i>Évolution des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations équivalentes par l'approche sécante classique pour différentes méthodes d'homogénéisation. Porosité initiale de 20, 40 et 60 % et coefficient d'écrouissage de 0.1 et 0.5. Chargement déviatorique.</i>	107
3.3	<i>Évolution des contraintes sphériques macroscopiques en fonction des déformations volumiques par l'approche sécante classique pour différentes méthodes d'homogénéisation. Porosité initiale de 10 % (a) et 40% (b). Chargement hydrostatique.</i>	108
3.4	<i>Évolution des contraintes déviatoriques macroscopiques en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour différentes méthodes d'homogénéisation en approche directe et duale. Porosité initiale de 30%(a) et 45% (b). Chargement déviatorique.</i>	109
3.5	<i>Évolution des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations équivalentes par l'approche sécante modifiée pour différentes méthodes d'homogénéisation. Porosité initiale de 20, 40 et 60 % et coefficient d'écrouissage de 0.1 et 0.5. Chargement purement déviatorique.</i>	110
3.6	<i>Évolution des contraintes sphériques macroscopiques en fonction des déformations volumiques par l'approche sécante modifiée pour différentes méthodes d'homogénéisation. Porosité initiale de 20, 40 et 60 % et coefficient d'écrouissage de 0.1 et 0.5. Chargement purement hydrostatique.</i>	111

3.7	<i>Évolution de la contrainte macroscopique en fonction de la déformation macroscopique par l'approche sécante modifiée sous chargement purement déviatorique (a) et sous chargement purement hydrostatique (b). Porosité initiale de 40% et paramètre d'écrouissage $m=0.1$.</i>	112
3.8	<i>Algorithme de mise en œuvre de l'extension non linéaire du processus itératif</i>	120
3.9	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées au processus itératif après 1, 2, 10 et 150 itérations. Porosité initiale de 30 % et $m = 0.1$ (a,b) et $m=0.5$ (c,d). Chargement purement déviatorique.</i>	122
3.10	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées au processus itératif après 1, 2, 10 et 150 itérations. Porosité initiale de 60 % (a,b), 80 % (c,d) et $m= 0.1$ et 0.5. Chargement purement déviatorique.</i>	123
3.11	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante modifiée pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées au processus itératif après 1, 2, 10 et 150 itérations. Porosité initiale de 30 % (a,b), 60 % (c,d), 80 % (e,f), 80 % et $m = 0.1$ et 0.5. Chargement purement déviatorique.</i>	124
3.12	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes normalisées en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique et modifiée pour la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) et du schéma autocohérent des 3 phases (3Ph) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 40% (a,c) et 70%(b,d) et $m = 0.3$. Chargement purement déviatorique.</i>	125
3.13	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes normalisées en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique et modifiée pour la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) et du schéma autocohérent des 3 phases (3Ph) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 40% (a) et 70%(b) et $m = 0.3$. Chargement purement déviatorique.</i>	126
3.14	<i>Évolutions des contraintes sphériques normalisées en fonction des déformations volumiques obtenues par l'approche sécante modifiée pour l'approche diluée déformation (DD), diluée contrainte (DC), couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 20% (a), 40% (b) 60% (c) et 80% (d) et paramètre d'écrouissage $m=0.2$. Chargement purement hydrostatique.</i>	127

3.15	<i>Évolutions des contraintes sphériques normalisées en fonction des déformations volumiques obtenues par l'approche sécante modifiée pour l'approche diluée déformation (DD), diluée contrainte (DC), la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) et le schéma autocohérent (AC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 20% (a) et 40% (b) et paramètre d'écrouissage $m=0.2$. Chargement purement hydrostatique.</i>	128
3.16	<i>Évolutions de la contrainte équivalente normalisée en fonction des déformations équivalentes (a,c) et de la contrainte sphérique en fonction des déformations volumiques (b,d) obtenues par les méthodes sécantes classique et modifiée appliquées à l'approche diluée en contrainte (DC) et l'approche de Hashin Shtrikman (HS) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale 40% (a,b) et 70% (c,d), paramètre d'écrouissage $m=0.3$. Chargement couplé avec $T_{\Sigma} = 1/3$.</i>	129
3.17	<i>Évolutions de la contrainte équivalente normalisées en fonction des déformations équivalentes (a,c) de la contrainte sphérique en fonction des déformations volumiques (b,d) obtenues par les méthodes sécantes classique et modifiée appliquées à l'approche diluée en contrainte (DC) et l'approche de Hashin Shtrikman (HS) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale 40% (a,b) et 70% (c,d), paramètre d'écrouissage $m=0.3$. Chargement couplé avec $T_{\Sigma} = 3$.</i>	130
3.18	<i>Comportement non linéaire du squelette suivant le modèle de Ramberg-Osgood.</i>	131
3.19	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 40 % (a), 80 % (b) et paramètre d'écrouissage $m=0.3$. Chargement purement déviatorique.</i>	132
3.20	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante modifiée pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 40 % (a), 80 % (b) et paramètre d'écrouissage $m=0.3$. Chargement purement déviatorique.</i>	132
3.21	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 20 % (a), 60 % (b) et paramètre d'écrouissage $m=0.3$. Chargement purement déviatorique.</i>	133

3.22	<i>Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante modifiée pour la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) et le schéma autocohérent (AC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 20 % (a), 60 % (b) et paramètre d'écrouissage $m=0.3$. Chargement purement déviatorique.</i>	133
3.23	(a) <i>Courbes de traction macroscopiques obtenues par les approches sécantes classique et modifiée appliquées au schéma d'Hashin Shtrikman (HS) et dilué contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif</i> (b) <i>Courbes de traction macroscopiques obtenues par l'approche sécante classique (SE), variationnelle (VE), éléments finis (FEM) appliquées au schéma autocohérent (Résultats de Suquet, 1996 [96])</i> (c) et (d) <i>zoom respectif.</i>	135
3.24	(a) <i>Courbes de traction macroscopiques obtenues par l'approche sécante classique et modifiée appliquées au schéma des distributions diluées en contrainte (DC), à la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman (HS) et au schéma des trois phases (3PH) couplées ou non au processus itératif</i> (b) <i>Courbes de traction macroscopiques obtenues par l'approche sécante classique (SE), variationnelle (VE), incrémentale (IE) et incrémentale avec écrouissage (IM) appliquée à la borne inférieure d'Hashin Shtrikman (Résultats de Suquet, 1997 [97]).</i>	136
3.25	(a) <i>Courbes de traction macroscopiques obtenues par l'approche sécante classique et modifiée pour différents modèles de microstructures couplées ou non au processus itératif</i> (b) <i>Zoom</i> (c) <i>Courbes de traction macroscopiques obtenues pour différentes procédures de linéarisations (Rekik et al., 2006 [89]).</i>	138
3.26	<i>Évolution des contraintes sphériques en fonction des déformations sphériques obtenues par l'approche sécante modifiée associée à l'approche d'Hashin (HS mod) couplée ou non au processus itératif et l'approximation analytique sécante d'un assemblage de sphères composite (HS analytique).</i>	139
3.27	<i>Évolution des contraintes déviatoriques en fonction des déformations équivalentes obtenues par les approches sécantes classique et modifiée par les différentes estimations linéaires couplées ou non au processus itératif confrontées à celles issues du schéma différentiel. Porosité initiale de 40 % (a,b) et 70% (c,d) et $m = 0.2$. Chargement déviatorique.</i>	140
3.28	<i>Évolution des contraintes déviatoriques en fonction des déformations équivalentes des approches sécantes classique et modifiée par les différentes estimations couplées ou non au processus itératif confrontées à celles issues du schéma différentiel. Porosité initiale de 40 % (a) et 70 % et $m = 0.2$. Chargement hydrostatique.</i>	141
3.29	<i>Surfaces d'écoulements obtenues par l'extension sécante modifiée associée aux approches diluées en déformation (DD), en contrainte (DC), l'approche d'Hashin Shtrikman (HS), autocohérente (AC) et des trois phases (3PH) avec et sans couplage au processus itératif. Porosité initiale 20% (a) et 40% (b).</i>	145

3.30	<i>Surfaces d'écoulements pour les approches diluée contrainte (DC) et de Hashin Shtrikman (HS) avec et sans couplage itératif. Porosité initiale (a) 20% (b) 40%.</i>	147
4.1	<i>Représentation schématique de quelques groupes de minéraux argileux (Grim, 1968 [49]).</i>	151
4.2	<i>Les particules d'argile : (a) kaolinite, (b) illite et (c) smectite présentées par Wakim (Wakim, 2005 [104]).</i>	152
4.3	<i>Études des argiles à différentes échelles (Thorez, 1989 [102])</i>	153
4.4	<i>Schéma du principe de l'essai œdométrique classique.</i>	154
4.5	<i>Dispositif expérimental de la cellule œdométrique originale (Grunberger, 1995 [51]).</i>	156
4.6	<i>Paliers de chargement en contrainte axiale appliquée en fonction du temps (a), indice des vides en fonction du logarithme de la contrainte axiale (b) et évolution de l'échantillon dans la cellule œdométrique (c).</i>	157
4.7	<i>Déplacement, contrainte axiale imposée, contrainte radiale et pression interstitielle en fonction du temps pour la compaction de l'argile le Marais Poitevin (Djéran-Maigre et al., 1998 [36]).</i>	158
4.8	<i>Variations de l'indice des vides et de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale pour les argiles : Bouzule (a,b), Marais Poitevin (c,d) et Salins 14 (e,f) (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]).</i>	159
4.9	<i>Kaolinite de Saint-Austell en compaction œdométrique (a) après compaction de 0.1 MPa (b) après compaction de 20 MPa (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]).</i>	160
4.10	<i>Modélisation de la microstructure des argiles.</i>	162
4.11	<i>Principe de l'identification des paramètres élastiques des argiles à partir des essais expérimentaux.</i>	164
4.12	<i>Évolution des modules de compressibilité et de cisaillement en fonction de la porosité. Confrontation des modèles micromécaniques et des essais. Argile le Marais Poitevin.</i>	167
4.13	<i>Évolution du coefficient et du module de Biot en fonction de la porosité. Confrontation des modèles micromécaniques et des essais. Argile le Marais Poitevin.</i>	168
4.14	<i>Évolution du module œdométrique en fonction de la porosité pour les argiles : Bouzule (a) Marais Poitevin (b) et Salins 14 (c).</i>	170
4.15	<i>(a) Évolution de la contrainte moyenne en fonction de la déformation imposée au cours de la décharge (b) Évolution de la contrainte axiale en fonction de la déformation imposée au cours de la décharge. Argile le Marais Poitevin.</i>	173
4.16	<i>Évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale pour les argiles : Bouzule (a,b), Marais Poitevin (c,d) et Salins 14 (e,f).</i>	175
4.17	<i>Évolution de la contrainte radiale en fonction de contrainte axiale pour les argiles : Bouzule (a), Marais Poitevin (b) et Salins 14 (c).</i>	176

4.18	<i>Évolutions de la réponse non linéaire sous chargement œdométrique obtenues par les approches sécantes classique (a,b) et modifiée (c,d) couplées ou non au processus itératif. Argile la Bouzule.</i>	179
4.19	<i>Évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale pour différents coefficients d'écrouissage sous chargement de compaction. Argile la Bouzule.</i>	179
4.20	<i>Évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte moyenne en échelle logarithmique (a) et échelle linéaire (b). Confrontation des approches sécantes et des essais. Argile la Bouzule.</i>	181
4.21	<i>Évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale appliquée. Confrontation des simulations par approche sécante et des essais. Argile la Bouzule.</i>	182
4.22	<i>Évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte moyenne pour différents coefficients d'écrouissage. Argile la Bouzule.</i>	183
4.23	<i>Évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale appliquée pour différents coefficients d'écrouissage. Argile la Bouzule.</i>	183
4.24	<i>Évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte moyenne en échelle logarithmique (a,c) et échelle linéaire (b,d). Confrontation des approches sécantes et des essais.</i>	184
4.25	<i>Évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale appliquée. Confrontation des simulations par approche sécante et des essais pour les argiles : Marais Poitevin (a) et Salins 14 (b).</i>	184

Liste des tableaux

4.1	<i>Coefficients de compressibilité et de rebond pour les trois argiles identifiés expérimentalement (Grunberger, 1995 [51])</i>	158
4.2	<i>Valeurs des paramètres identifiés à partir des résultats expérimentaux pour les différentes argiles. (Pouya et al., 1998 [87])</i>	165
4.3	<i>Paramètres élastiques des squelettes identifiés à partir du 2^{ème} point P_2 expérimental en début de décharge.</i>	166
4.4	<i>Écarts relatifs entre les valeurs expérimentales et les prédictions de l'homogénéisation linéaire itérative sur les premiers points $P_i(\phi^i, \Sigma_{33}^i)$ des courbes de décharge. Argile le Marais Poitevin.</i>	166
4.5	<i>Écarts relatifs pour le module œdométrique entre les valeurs expérimentales et les prédictions de l'homogénéisation linéaire itérative sur les 3 premiers points de la décharge élastique, $P_i(\phi^i, \Sigma_{33}^i)$.</i>	170
4.6	<i>Valeurs identifiées des paramètres du modèle élastoplastique de Ramberg-Osgood pour les squelettes des différentes argiles.</i>	178
4.7	<i>Porosité initiale des différentes argiles en début de chargement œdométrique.</i>	178

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
Table des figures	xiv
Liste des tableaux	xv
Introduction	1
Notations	5
1 Formulation du comportement thermo-hydro-mécanique des milieux poreux saturés	9
1.1 Introduction	9
1.2 Approche macroscopique	10
1.2.1 Equations d'état linéarisées des milieux thermo-poro-élastiques saturés	11
1.2.2 Caractérisation des paramètres en poro-élasticité linéaire isotrope	13
1.2.2.1 Paramètres poro-élastiques	13
1.2.2.2 Paramètres thermo-élastiques	15
1.2.2.3 Relations avec les caractéristiques des phases en conditions drainées	15
1.2.3 Equations des milieux poro-élasto-plastiques saturés	16
1.3 Approche micromécanique	17
1.3.1 Méthodologie d'homogénéisation en élasticité linéaire	18
1.3.2 Problème cellulaire thermo-hydro-poro-élastique	20

1.3.3	Décomposition par linéarité	22
1.3.3.1	Tenseur de rigidité - Approche déformation	23
1.3.3.2	Tenseur de souplesse - Approche contrainte	24
1.3.3.3	Tenseur de Biot - Approche déformation	25
1.3.3.4	Tenseur de Biot - Approche contrainte	26
1.3.3.5	Tenseur de couplage thermo-élastique	27
1.3.4	Méthodes classiques d'estimation du comportement de milieux poreux linéaires	28
1.3.4.1	Schéma des distributions diluées	29
1.3.4.2	Approximation de Mori-Tanaka	30
1.3.4.3	Schéma autocohérent	31
1.3.4.4	Schéma autocohérent généralisé	32
1.3.4.5	Estimations par approches énergétiques	34
1.3.4.6	Schéma différentiel	36
1.3.5	Méthodologies d'homogénéisation en élasticité non linéaire	38
1.3.5.1	Problème local d'homogénéisation non linéaire	39
1.3.5.2	Principe de linéarisation du comportement local	41
1.3.5.3	Exemples de modèles d'homogénéisation non linéaires	44
1.4	Conclusion	46
2	Homogénéisation par approche itérative du comportement poro-élastique linéaire	47
2.1	Introduction	47
2.2	Présentation du processus itératif d'homogénéisation	48
2.2.1	Principe itératif pour les milieux biphasés	48
2.2.2	Homogénéisation itérative de milieux poreux	51
2.2.3	Couplage du processus itératif aux méthodes d'homogénéisation simplifiées	53
2.2.3.1	Approche itérée des distributions diluées	53
2.2.3.2	Borne itérée d'Hashin-Shtrikman	54
2.2.3.3	Approche itérée du schéma autocohérent	55
2.2.3.4	Approche itérée du schéma autocohérent généralisé	56
2.2.3.5	Convergence asymptotique des prédictions à faibles porosités	57
2.3	Implémentation et validation du processus itératif	58
2.3.1	Algorithme itératif	59
2.3.2	Validations et applications à des milieux poreux élastiques	59
2.3.2.1	Prédictions par les approches classiques de la littérature	60

2.3.2.2	Prédiction par le processus itératif d'homogénéisation	65
2.3.2.3	Confrontation avec l'approche différentielle	68
2.3.2.4	Analyse de la convergence du comportement équivalent	72
2.4	Conclusions et commentaires	79
3	Homogénéisation des milieux poreux élastiques non linéaires	81
3.1	Introduction	81
3.2	Méthodologie d'homogénéisation de milieux poreux non linéaires	82
3.2.1	Formulations sécantes du problème local d'homogénéisation	82
3.2.1.1	Approche en déformation imposée	82
3.2.1.2	Approche en contrainte imposée	85
3.2.2	Linéarisation du comportement du squelette	86
3.2.2.1	Moyenne des champs locaux	86
3.2.2.2	Moyenne quadratique des champs locaux	90
3.2.3	Procédures d'extension en non linéaire des schémas prédictifs et mise en œuvre	94
3.2.3.1	Méthode sécante classique	94
3.2.3.2	Méthode sécante modifiée	100
3.2.4	Illustrations	104
3.2.4.1	Comportement du squelette en loi puissance	104
3.2.4.2	Comportement homogénéisé par l'approche sécante classique	106
3.2.4.3	Comportement homogénéisé par l'approche sécante modifiée	108
3.3	Extensions non linéaires du processus itératif d'homogénéisation	113
3.3.1	Principe du couplage du processus itératif	113
3.3.1.1	Couplage avec l'approche sécante classique	113
3.3.1.2	Couplage avec l'approche sécante modifiée	117
3.3.1.3	Convergence asymptotique des prédictions en non linéaire	118
3.3.2	Algorithme du couplage itératif	119
3.3.3	Applications à des milieux poreux non linéaires	119
3.3.3.1	Comportement effectif d'un milieu poreux avec une non linéarité du squelette en loi puissance	121
3.3.3.2	Comportement effectif d'un milieu poreux à squelette élastoplastique	128
3.3.4	Confrontations à d'autres approches de la littérature	133
3.3.4.1	Confrontation aux travaux de Suquet [96], [97]	134
3.3.4.2	Confrontation aux travaux de Rekik et al. [89]	137

3.3.4.3	Confrontation à une solution analytique sous charge- ment hydrostatique	137
3.3.4.4	Confrontation au schéma différentiel	139
3.4	Surface d'écoulement des milieux poreux	141
3.4.1	Principe de construction	141
3.4.2	Implémentation	143
3.4.3	Applications	145
3.5	Conclusions et commentaires	148
4	Application de l'homogénéisation au comportement des argiles com- pactées	149
4.1	Introduction	149
4.2	Approche macroscopique expérimentale des milieux argileux saturés . .	150
4.2.1	Un milieu poreux particulier : l'argile	150
4.2.2	Approche expérimentale de la compaction œdométrique	153
4.2.2.1	Principe de la compaction	153
4.2.2.2	Argiles testées	155
4.2.2.3	Dispositif expérimental	155
4.2.2.4	Résultats des essais œdométriques	157
4.2.2.5	Observations microstructurales	159
4.3	Application du processus itératif à l'étude du comportement élastique des argiles	161
4.3.1	Représentation de la microstructure	161
4.3.2	Identification des propriétés élastiques des argiles	163
4.3.3	Identification des propriétés élastiques des squelettes	166
4.3.4	Comportement sous chargement de compaction œdométrique . .	169
4.3.5	Influence de l'évolution de la porosité au cours du chargement .	171
4.3.5.1	Actualisation de la porosité dans la modélisation mi- cromécanique linéaire	171
4.3.5.2	Application au comportement des argiles	173
4.4	Application du processus itératif à l'étude du comportement élastoplastique des argiles	177
4.4.1	Identification du comportement non linéaire des squelettes . . .	177
4.4.2	Comportement sous chargement de compaction œdométrique . .	178
4.4.3	Influence de l'évolution de la porosité	180
4.5	Conclusions et commentaires	185
	Conclusions et Perspectives	187

Introduction

De nombreux matériaux, tant naturels qu'artificiels, sont des milieux poreux dont l'espace interstitiel est saturé ou non par un ou plusieurs fluides qui peuvent être des liquides ou des gaz. Ces matériaux, dont la porosité peut être significative comme c'est le cas par exemple de certaines argiles, présentent un comportement bien souvent non linéaire sous sollicitations complexes. La compréhension de ces spécificités de comportement s'avère naturellement importante dans des domaines variés d'applications, comme le génie civil ou encore la biomécanique.

L'étude du comportement mécanique des milieux poreux a été véritablement formalisée à partir des années 1930 par les travaux de Terzaghi. Des développements ont été ensuite apportés par Biot (Biot, 1941 [13]) avec une première formulation générale du comportement réversible des milieux poreux fondée sur des grandeurs définies à l'échelle de l'ingénieur. Cette théorie fait désormais référence en géomécanique en particulier. Plus récemment, Coussy (Coussy, 1991 [32]) a proposé, à partir des concepts développés en Mécanique des Milieux Continus, un cadre thermodynamique pour la formulation des équations de comportement des milieux poreux. Le matériau est défini par la superposition de plusieurs milieux continus en interaction, la particule squelette et la particule fluide situées au même point macroscopique. Cette approche, qui a largement fait la preuve de son efficacité dans l'analyse des géomatériaux et des géostructures, ne permet pas, par nature même, d'exploiter de façon précise des informations locales sur le comportement des constituants, la morphologie de l'espace poreux et plus généralement la physique de la microstructure. Les approches micromécaniques développées plus récemment permettent elles de décrire le comportement mécanique d'un matériau hétérogène à partir d'informations sur les mécanismes élémentaires de déformations des phases constitutives et sur la répartition spatiale de ces dernières. Bien maîtrisées dans le domaine élastique linéaire, ces approches donnent également accès à des comportements hydrique, thermique ou encore couplé thermo-hydro-mécanique. Dans le domaine des comportements non linéaires, la construction des réponses passe par l'idée sous-jacente d'assimiler le matériau réel à un milieu linéaire par différentes procédures de linéarisation.

Le travail exposé dans ce mémoire s'intéresse à la modélisation et la simulation du comportement hydro-mécanique non linéaire de milieux poreux présentant des porosités significatives. Nous avons choisi d'adopter une approche micromécanique. Les

matériaux considérés obéissent à une loi de comportement élastique non linéaire ce qui nous permettra d'envisager certaines réponses en plasticité. Le cadre de l'élasticité linéaire servira naturellement de base pour aborder ces non linéarités de comportements.

Les très nombreuses méthodes d'homogénéisation proposées dans la littérature et appliquées avec succès pour les matériaux hétérogènes linéaires diffèrent entre elles par le choix du volume élémentaire représentatif, qui peut être plus ou moins riche, par la façon d'imposer le chargement macroscopique et bien sûr par la finesse des modèles de comportement introduits pour les différentes phases. La résolution du problème local d'homogénéisation et en conséquence l'obtention du comportement équivalent devient alors, selon ces choix, explicite ou bien nécessite une mise en oeuvre numérique. On parle alors, selon le cas, par raccourci de langage, de méthodes d'homogénéisation explicites ou numériques. Ces méthodes explicites basées sur des schématisations du matériau différentes conduisent naturellement à des prédictions distinctes du comportement homogène équivalent. En bon accord pour des milieux faiblement poreux, elles diffèrent sensiblement pour des milieux fortement poreux. Pourtant ces modèles explicites restent attractifs par leur simplicité de mise en oeuvre et par les études de sensibilité qu'ils offrent en vue par exemple d'optimiser les propriétés de matériaux. Sur la base de ces différentes remarques, un des objectifs de ce travail est de proposer un processus d'homogénéisation qui, tout en conservant une simplicité de mise en oeuvre, permette de caractériser précisément le comportement effectif des milieux présentant des porosités importantes.

Le processus d'homogénéisation proposé dans ce manuscrit consiste à construire le comportement du matériau par introduction progressive de faibles quantités de pores au squelette. En ce sens, cette procédure se rapproche de la méthode d'homogénéisation du schéma différentiel (Zimmerman, 1991 [112]). Elle va en généraliser son principe et permettre de positionner clairement le schéma différentiel par rapport aux autres méthodes de type modules effectifs. Pour atteindre une porosité donnée, la procédure proposée passe par l'élaboration successive de plusieurs milieux poreux intermédiaires obtenus par ajouts d'un taux de porosité aux milieux issus de l'étape précédente. Le comportement de ces milieux intermédiaires est obtenu par une approche quelconque d'homogénéisation explicite. Le résultat de l'homogénéisation fournit le comportement du squelette de l'étape suivante, auquel on vient à nouveau ajouter une faible porosité du matériau. Le processus d'homogénéisation est ainsi réitéré jusqu'à atteindre la porosité du matériau étudié. De cette façon, les méthodes explicites sont utilisées à chaque étape pour des milieux faiblement poreux. Elles sont alors toutes pertinentes et conduisent à des prédictions voisines, de sorte que, lorsque la porosité du milieu est atteinte, les comportements équivalents obtenus par homogénéisations successives avec les différentes méthodes explicites sont très proches. Le processus itératif d'homogénéisation conduit donc à la convergence des différentes méthodes explicites vers un même comportement équivalent. Cette convergence s'observe quel que soit la porosité. Ce processus assure donc, d'une part, une mise en oeuvre aisée en conservant l'avantage d'une méthode explicite d'homogénéisation et permet, d'autre part, d'étendre le domaine de validité des méthodes simplifiées d'homogénéisation à des milieux fortement poreux. Cette procédure itérative a été introduite dans un travail antérieur par A. Brini (Brini, 2004 [22]) consacré à l'étude du comportement de composites biphasés élastiques linéaires. Dans ce travail, nous reprenons le principe de cette démarche itérative pour

homogénéiser le comportement de milieux poreux tout d’abord élastiques linéaires, ce qui nous permet ensuite d’en proposer une extension dans le domaine non linéaire et d’envisager des applications plus réalistes.

Les méthodes d’homogénéisation non linéaire s’appuient le plus souvent sur la linéarisation des lois constitutives locales. Le choix de la méthode de linéarisation n’est pas anodin et conduit à différentes formulations qui débouchent sur autant d’estimations. Parmi ces méthodes, les formulations sécantes non linéaires sont caractérisées par une mise en œuvre simple. Elles permettent de définir un “matériau linéaire de comparaison” auquel peuvent être appliqués les schémas d’homogénéisation linéaires et en particulier l’approche itérative. C’est ce couplage de l’approche itérative d’homogénéisation à une procédure sécante de linéarisation que nous proposons pour simuler le comportement de milieux fortement poreux non linéaires.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres. Après un premier chapitre essentiellement bibliographique, les chapitres 2 et 3 sont successivement dédiés à la présentation de l’approche itérative d’homogénéisation de matériaux poreux de comportement élastique linéaire et non linéaire. Au dernier chapitre, nous présentons une application des outils micromécaniques développés à travers une confrontation à des milieux poreux réels avec la simulation du comportement d’argiles sous chargement de compaction œdométrique. Enfin, le mémoire s’achève sur une conclusion qui ouvre sur des perspectives de développements.

Le **chapitre 1** rappelle tout d’abord en guise d’introduction les équations qui régissent le comportement des milieux poreux du point de vue macroscopique et microscopique. Le formalisme macroscopique du comportement thermo-poro-élastique linéaire et non linéaire d’un milieu poreux saturé dans le cadre des hypothèses de linéarisation et des transformations infinitésimales est précisé en s’appuyant sur les travaux de Coussy (Coussy, 1991 [32]). Puis, nous détaillons la seconde approche pour l’étude de ces milieux avec la démarche micromécanique et le processus d’homogénéisation du comportement hydro-mécanique en introduisant la large bibliographie consacrée à ce domaine. Quelques méthodes d’homogénéisation, auxquelles nous nous référerons dans la suite du travail, sont exposées et les expressions explicites du comportement homogénéisé qu’elles proposent sont données dans le cas de comportements linéaires. Enfin, une brève introduction des méthodes proposées dans la littérature pour l’homogénéisation de milieux poreux non linéaires est faite. Le problème d’homogénéisation non linéaire couplé posé sur le volume élémentaire représentatif est présenté. Le principe de sa résolution par linéarisation, permettant l’extension des approches classiques d’homogénéisation linéaire dans le domaine non linéaire, est décrit.

Le **chapitre 2** est consacré à la présentation de l’approche itérative d’homogénéisation de milieux poreux dont le squelette présente un comportement élastique linéaire. La mise en œuvre pratique de la méthode, ainsi que les algorithmes sont détaillés. En particulier, son couplage à différents schémas explicites est décrit en précisant les expressions des tenseurs de localisation associés. Les développements asymptotiques de ces tenseurs pour de faibles porosités sont donnés pour justifier de la convergence du processus. Une analyse de la convergence du processus itératif est présentée à travers différents tests et les paramètres influents sur la vitesse de convergence sont dégagés. La validité du modèle itératif est illustrée par des confrontations à

des approches d'homogénéisation numériques de type modules effectifs et périodique.

Au **chapitre 3**, nous présentons la méthodologie d'extension du processus itératif à des matériaux poreux élastiques non linéaires. Nous commençons par décrire les méthodes sécantes d'homogénéisation non linéaires et la procédure de leurs mises en œuvre par couplage aux méthodes des modules effectifs. Différentes simulations sont présentées en guise d'illustrations de façon à mettre également en évidence les limites de ces approches. Puis, le reste du chapitre est consacré à l'introduction de la procédure itérative d'homogénéisation développée au chapitre 2 dans cette méthodologie d'homogénéisation non linéaire. Les algorithmes d'implémentation de ce couplage sont détaillés et appliqués à des milieux poreux dont les comportements des squelettes sont gouvernés par une loi non linéaire de type loi puissance ou bien une loi élastoplastique. Différentes confrontations à des résultats de la littérature sur des milieux poreux et également biphasés sont proposées pour s'assurer de la validité de l'implémentation. Enfin, la démarche micromécanique est exploitée pour construire les surfaces limites d'écoulement plastique des milieux homogènes équivalents. Là encore, le processus itératif est introduit et illustré par des exemples et des confrontations à des modèles classiques.

Ces modèles d'homogénéisation sont illustrés au **chapitre 4** par une application à des milieux argileux. Une brève introduction sur les matériaux argileux et leur microstructure est tout d'abord présentée. Les travaux expérimentaux (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]) qui servent de référence à cette application sont détaillés avec une description de l'approche expérimentale de la compaction de quelques argiles représentatives et des résultats des analyses microstructurales. Sur la base des résultats de ces essais de compaction, les propriétés élastiques macroscopiques des différentes argiles sont identifiées. Ces données macroscopiques permettent l'identification des caractéristiques élastiques des squelettes des argiles par une démarche inverse d'homogénéisation. Un enrichissement du modèle micromécanique par une loi d'état complémentaire est ensuite proposé pour tenir compte de l'évolution de la porosité avec le chargement. Les résultats de la modélisation itérative dans le domaine linéaire sont confrontés aux courbes expérimentales dans la phase de décharge élastique. L'extension de l'approche d'homogénéisation itérative en non linéaire est ensuite mise en œuvre pour simuler la phase élastoplastique du comportement des argiles observé durant la charge et est confrontée aux résultats expérimentaux.

Notations

∇ : Opérateur nabla

$:$: Produit contracté entre tenseur d'ordre 4 et d'ordre 2

\otimes : Produit tensoriel

\mathbb{I} : Tenseur unitaire d'ordre 4

$\mathbf{1}$: Tenseur unitaire d'ordre 2

\mathbb{J} : Tenseur d'ordre 4 qui extrait la partie sphérique d'un tenseur d'ordre 2

\mathbb{K} : Tenseur d'ordre 4 qui extrait la partie déviatorique du tenseur d'ordre 2

Δ : Tenseur de déformation de Green Lagrange

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Tenseur des déformations linéarisées

$\varepsilon_v = \frac{1}{3}tr\boldsymbol{\varepsilon}$: Déformation volumique moyenne

$\boldsymbol{\varepsilon}^p$: Déformation permanente de la partie solide

$\boldsymbol{\pi}$: Tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff

$\boldsymbol{\pi}^0$: Tenseur des contraintes de Piola Kirchoff à l'état de référence

$\boldsymbol{\sigma}$: Tenseur des contraintes de Cauchy

$\boldsymbol{\sigma}^0$: Tenseur des contraintes de Cauchy à l'état de référence

$\Delta\sigma_v = tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0)$: Variation de la contrainte volumique

p : Pression du milieu poreux

p_0 : Pression du milieu poreux l'état de référence

g_m : Enthalpie libre massique

S : Entropie du milieu poreux

S^0 : Entropie du système squelette et fluide saturant à l'état de référence

s_m : Entropie massique du fluide

s_m^0 : Entropie massique du fluide à l'état de référence

m : Masse de fluide échangée dans le milieu poreux

ρ_{fl} : Masse volumique du fluide

ρ_{fl}^0 : Masse volumique du fluide à l'état de référence

- T : Température à un état donné
 T^0 : Température à l'état de référence
 ΔT : Variation de température
 \mathbb{C} : Tenseur de rigidité des modules d'élasticité isothermes non drainés
 \mathbb{C}_0 : Tenseur de rigidité des modules d'élasticité isothermes non drainés à l'état de référence
 k et k_0 : Module de compressibilité du milieu non drainé et drainé
 μ : Module de cisaillement du milieu poreux
 E et E_0 : Module d'Young du milieu poreux non drainé et drainé
 M : Module de Biot
 \mathbf{B} : Tenseur de Biot
 b : Coefficient de Biot du milieu poreux
 B_s : Coefficient de Skempton
 \mathbf{A} : Tenseur de couplage thermo-élastique
 \mathbf{A}_0 : Tenseur de couplage thermo-mécanique à l'état de référence
 α et α_0 : Coefficients de dilatation thermique respectivement en condition non drainé et drainé
 α_m : Coefficient d'apport de masse fluide thermique
 α_s : Coefficient de dilatation de la partie solide du milieu poreux
 $\mathbf{A} T^0$: Tenseur des chaleurs latentes des déformations non drainées
 $C_\Delta = \beta T$: Chaleur volumique par unité de volume initial à déformation constante
 T^{0l} : Chaleur latente d'apport de masse fluide à déformation constante
 ϕ_0 : Porosité initiale du milieu poreux
 ϕ^p : Porosité plastique irréversible
 VER : Volume Élémentaire Représentatif
 L : Longueur caractéristique de la taille de la structure hétérogène
 l : Longueur caractéristique du VER
 d : Longueur caractéristique de l'hétérogénéité
 Y : Volume du VER
 Y_S : Volume occupé par le squelette, partie solide du milieu poreux
 Y_T : Volume occupé par les pores
 ∂Y : Frontière extérieure de Y
 ∂Y_T : Bord des pores Y_T , interface pore-squelette
 y : Coordonnées d'un point du VER
 dY : Élément de volume
 \mathbf{n} : normale extérieure unitaire au bord considéré
 \mathbf{E} : Tenseur de déformation macroscopique
 $E_m = \frac{1}{3}tr\mathbf{E}$: Partie sphérique du tenseur de déformation macroscopique

$\mathbf{E}_d = \mathbf{E} - E_m \mathbf{1}$: Partie déviatorique du tenseur de déformation macroscopique

$E_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{E}_d : \mathbf{E}_d}$: Déformation macroscopique équivalente de Von Mises

$\mathbf{\Sigma}$: Tenseur de contrainte macroscopique

$\Sigma_m = \frac{1}{3} tr \mathbf{\Sigma}$: Partie sphérique du tenseur de contrainte macroscopique

$\mathbf{\Sigma}_d = \mathbf{\Sigma} - \Sigma_m \mathbf{1}$: Partie déviatorique du tenseur de contrainte macroscopique

$\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{\Sigma}_d : \mathbf{\Sigma}_d}$: Contrainte macroscopique équivalente de Von Mises

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Tenseur de déformation microscopique

$\varepsilon_m = \frac{1}{3} tr \boldsymbol{\varepsilon}$: Partie sphérique du tenseur de déformation microscopique

$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_m tr \mathbf{1}$: Partie déviatorique du tenseur de déformation microscopique

$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d}$: Déformation microscopique équivalente de Von Mises

\mathbf{u} : Déplacement microscopique

$\boldsymbol{\sigma}$: Tenseur de contrainte microscopique

$\sigma_m = \frac{1}{3} tr \boldsymbol{\sigma}$: Partie sphérique du tenseur de contrainte microscopique

$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m tr \mathbf{1}$: Partie déviatorique du tenseur de contrainte microscopique

$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d}$: Contrainte microscopique équivalente de Von Mises

\mathbb{C}_s : Tenseur de rigidité du squelette

\mathbb{S}_s : Tenseur de souplesse du squelette

k_s : Module de compressibilité du squelette

μ_s : Module de cisaillement du squelette

ν_s : Coefficient de Poisson du squelette

E_s : Module d'Young du squelette

\mathbb{C}_i : Tenseur de rigidité de la phase i

k_i : Module de compressibilité de la phase i

μ_i : Module de cisaillement de la phase i

c_i : Fraction volumique de la phase i

$v(\boldsymbol{\varepsilon}(y), y)$: Potentiel de déformation du squelette

$w(\boldsymbol{\sigma}(y), y)$: Potentiel de contrainte du squelette

$V(\mathbf{E})$: Énergie de déformation homogénéisée

$W(\mathbf{\Sigma})$: Énergie de contrainte homogénéisée

\mathbb{C}^* : Tenseur de rigidité homogénéisé

\mathbb{S}^* : Tenseur de souplesse homogénéisé

μ^* : Module de cisaillement du milieu homogénéisé

k^* : Module de compressibilité du milieu homogénéisé

\mathbf{B}_d^* : Tenseur de Biot en approche déformation

\mathbf{B}_c^* : Tenseur de Biot en approche contrainte

b_d^* : Coefficient de Biot en approche déformation

b_c^* : Coefficient de Biot en approche contrainte

- $\boldsymbol{\alpha}^*$: Tenseur de dilatation thermique homogénéisé
 α^* : Coefficient de dilatation thermique homogénéisé
 \mathbb{S}_E : Tenseur d'Eshelby
 a_E et b_E : Composantes isotropes du tenseur d'Eshelby
 \mathbb{P}_E : Tenseur de polarisation ou tenseur de Hill
 ϕ : Porosité du milieu poreux
 ϕ_s : Fraction volumique du squelette dans le milieu poreux
 e : Indice des vides $e = \frac{\phi}{1-\phi}$
 \mathbb{C}_s^{sct} : Tenseur de rigidité sécant du squelette
 \mathbb{S}_s^{sct} : Tenseur de souplesse sécant du squelette
 \mathbb{C}_s^{tgt} : Tenseur de rigidité tangent du squelette
 k_s^{sct} : Module de compressibilité sécant du squelette
 μ_s^{sct} : Module de cisaillement sécant du squelette
 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S}$: Moment d'ordre 1 de la déformation
 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^1$: Partie sphérique du moment d'ordre 1 de la déformation
 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^1$: Partie déviatorique du moment d'ordre 1 de la déformation
 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^1 = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^1 : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^1}$: Moment d'ordre 1 équivalent de la déformation
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S}$: Moment d'ordre 1 des contraintes du squelette
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^1$: Partie sphérique du moment d'ordre 1 des contraintes du squelette
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_d^1$: Partie déviatorique du moment d'ordre 1 des contraintes du squelette
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^1 = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_d^1 : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_d^1}$: Moment d'ordre 1 équivalent de la contrainte
 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S}}$: Moment du second ordre des déformations du squelette dit aussi moyenne quadratique
 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^2 = \sqrt{\langle (tr(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 \rangle_{Y_S}}$: 1^{er} invariant du moment du second ordre des déformations du squelette
 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^2 = \sqrt{\frac{2}{3} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{Y_S}}$: 2^{ème} invariant du moment du second ordre des déformations du squelette
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S}}$: Moment du second ordre des contraintes du squelette dit aussi moyenne quadratique
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^2 = \sqrt{\langle (tr(\boldsymbol{\sigma}))^2 \rangle_{Y_S}}$: 1^{er} invariant du moment du second ordre des contraintes du squelette
 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^2 = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d \rangle_{Y_S}}$: 2^{ème} invariant du moment du second ordre des contraintes du squelette
 \mathcal{E} : Énergie élastique homogénéisée
 T_E : Taux de triaxialité macroscopique en déformation
 T_Σ : Taux de triaxialité macroscopique en contrainte
 m : Paramètre d'écroutissage
 $n = \frac{1}{m}$: Paramètre d'écroutissage
 σ_y : Limite d'élasticité du matériau

Formulation du comportement thermo- hydro-mécanique des milieux poreux saturés

1.1 Introduction

L'étude des matériaux poreux peut être envisagée à deux échelles d'espace distinctes, l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique.

L'échelle, dite macroscopique, consiste à considérer un volume élémentaire de milieu poreux comme la superposition de deux particules matérielles indiscernables géométriquement et animées de cinématiques a priori distinctes. Le milieu poreux est donc considéré comme un milieu continu multiphasique, c'est-à-dire comme la superposition de plusieurs milieux continus : le premier, appelé squelette du milieu poreux, représente à l'échelle macroscopique le matériau solide qui constitue le réseau poreux connecté ou non, et l'autre représente le (ou les) fluide(s) qui occupe(nt) l'espace poreux. Le comportement du milieu poreux à cette échelle macroscopique peut être décrit en adaptant les outils classiques de la thermodynamique des milieux continus.

L'autre échelle, dite microscopique, est définie comme l'échelle à laquelle les deux phases solide et fluide constituent des domaines géométriques distincts dans un volume élémentaire de milieu poreux. Un point géométrique se trouve ainsi, à un instant donné, dans une phase bien identifiée. Cette échelle est pertinente pour l'étude des interactions mécaniques, physiques ou chimiques entre les phases. Elle permet entre autre de caractériser le comportement global du milieu en tenant compte des phénomènes microscopiques par des prises de moyenne des champs locaux. Cette approche microscopique couplée à une démarche d'homogénéisation sera celle adoptée dans la suite de cette étude.

Ce premier chapitre introductif présente brièvement ces deux approches. Dans une première partie, le formalisme macroscopique du comportement thermo-poro-élastique linéaire et non linéaire d'un milieu poreux saturé est tout d'abord rappelé. Pour cela, les équations d'état linéarisées qui régissent le comportement du milieu poreux, constitué de fluide saturant le squelette, sont d'abord décrites à partir des formulations thermo-

dynamiques. Puis, nous revenons plus spécifiquement sur le couplage poro-élastique et thermo-élastique et la caractérisation expérimentale des paramètres matériaux. Nous présentons, ensuite, les équations d'état macroscopiques de l'évolution poro-élastoplastique des milieux poreux dans le cadre des hypothèses de linéarisation et des transformations infinitésimales.

La seconde partie du chapitre est consacrée à la présentation de l'approche microscopique et du processus d'homogénéisation. Après un paragraphe de rappel sur la méthodologie du passage micro-macro, nous donnons les équations du problème local d'homogénéisation en poro-élasticité linéaire en distinguant les approches en déformations imposées et contraintes imposées. La linéarité permet de décomposer ces problèmes élémentaires et d'accéder à des relations entre grandeurs moyennes qui caractérisent le comportement homogénéisé. Puis, nous présentons brièvement quelques méthodes d'homogénéisation, auxquelles nous nous référerons dans la suite du travail, qui fournissent des expressions explicites de ce comportement homogénéisé dans le cas de comportements linéaires. Enfin, nous terminons ce chapitre en faisant une brève introduction des méthodes proposées dans la littérature pour l'homogénéisation de milieux poreux non linéaires ; ce dernier point sera détaillé au troisième chapitre de ce manuscrit. Le problème local d'homogénéisation non linéaire est posé. Le principe de sa résolution par linéarisation est décrit permettant l'extension des approches classiques d'homogénéisation linéaire dans le domaine non linéaire. Enfin, quelques références en homogénéisation non linéaire sont positionnées.

1.2 Approche macroscopique

Le point de vue macroscopique pour décrire les milieux poreux a été adopté par Biot (Biot, 1941 [13]) puis par Coussy (Coussy, 1991 [32]). La structure géométrique du réseau poreux n'est pas précisément décrite, mais c'est l'échelle de la structure étudiée par l'ingénieur qui est privilégiée. On admet qu'à cette échelle, le milieu poreux peut être décrit comme la superposition de deux milieux continus, le "réseau solide" et le "fluide saturant". A chaque instant, la matière contenue dans un volume élémentaire de l'espace géométrique dY est donc représentée par deux particules matérielles, l'une du réseau squelettique, qui représente la partie du réseau solide dans l'élément de volume dY , l'autre de fluide, qui représente le fluide saturant l'espace poreux contenu dans dY (*Figure 1.1*). Afin d'éviter toute confusion entre les échelles de description, on réserve dans la suite les termes "squelette" et "fluide" à la description microscopique, tandis que les termes "réseau solide" et le "fluide saturant" font référence à l'échelle macroscopique.

Bien que l'on ne décrive pas précisément la structure géométrique du réseau à l'échelle microscopique, on introduit dans la description du milieu à l'échelle macroscopique la fraction de volume ϕ du fluide saturant occupée dans le volume élémentaire total. On observe que le concept de porosité est de nature eulérienne, au sens où il est défini sur la configuration actuelle de l'élément de volume dY . On ne présentera pas dans cette brève description des milieux poreux à l'échelle macroscopique les formulations mathématiques des transformations géométriques à cette échelle. Le lecteur désireux de trouver une description complète de la théorie pourra se reporter par exemple aux ouvrages mentionnés en bibliographie (Biot, 1941 [13]), (Coussy,

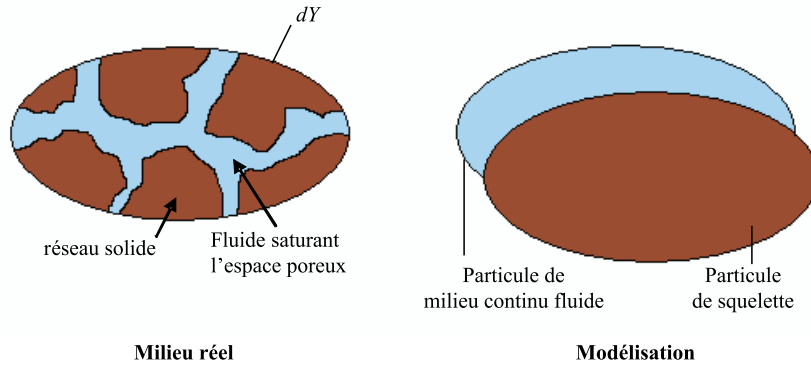


Figure 1.1 — Modélisation du milieu poreux à l'échelle macroscopique comme superposition de deux milieux continus

1991 [32]), (Charlez, 1991 [27]). Nous rappelons au paragraphe suivant les équations d'état qui régissent le comportement macroscopique d'un milieu thermo-poro-élastique linéaire saturé.

1.2.1 Equations d'état linéarisées des milieux thermo-poro-élastiques saturés

L'état thermodynamique ou énergétique d'un milieu poreux est défini par son énergie libre ψ . Dans le cas d'un comportement réversible à dissipation intrinsèque nulle, cette énergie ne dépend que des variables d'états : T la température, Δ le tenseur des déformations de Green Lagrange et m la masse de fluide échangée avec l'extérieur par unité de volume. Ainsi, la loi de comportement thermo-poro-élastique reliant ces variables d'état aux forces thermodynamiques qui leur sont respectivement associées, est entièrement définie par les équations d'état suivantes :

$$S = \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad , \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{\partial \psi}{\partial \Delta} \quad \text{et} \quad g_m = \frac{\partial \psi}{\partial m} \quad (1.1)$$

où S ($J.kg^{-1}$) désigne l'entropie du système fluide et du réseau solide, $\boldsymbol{\pi}$ le tenseur des contraintes totales de Piola-Kirchoff et g_m l'enthalpie libre massique.

Sous les hypothèses de déformations infinitésimales, de petites variations d'échange fluide et après développement de l'énergie libre par rapport à un état de référence indicé par 0, la loi de comportement thermo-poro-élastique linéaire s'obtient explicitement sous la forme :

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}^0 + \mathbb{C} : \Delta - M \mathbf{B} \frac{m}{\rho_{fl}^0} - \mathbf{A} (T - T^0) \quad (1.2)$$

$$p = p^0 + M \left(-\mathbf{B} : \Delta + \frac{m}{\rho_{fl}^0} \right) - \rho_{fl}^0 l (T - T^0) \quad (1.3)$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + \mathbf{A} : \Delta - l m + \beta (T - T^0) \quad (1.4)$$

- avec $\boldsymbol{\pi}^0$: le tenseur des contraintes totales de Piola Kirchoff à l'état de référence ;
 S^0 : l'entropie du système squelette et fluide saturant à l'état de référence ;
 ρ_{fl}^0 : la masse volumique du fluide à l'état de référence ;
 s_m^0 : l'entropie massique du fluide à l'état de référence ;
 \mathbb{C} : le tenseur de rigidité des modules d'élasticité isothermes non drainés ;
 M : le module de Biot ;
 \mathbf{B} : tenseur des coefficients de Biot ;
 \mathbf{A} : le tenseur de couplage thermo-élastique avec $\mathbf{A} T^0$ le tenseur des chaleurs latentes des déformations non drainées ;
 β : un paramètre matériau avec $C_\Delta = \beta T$ la chaleur volumique par unité de volume initial à déformation constante ;
 l : un paramètre matériau avec $T^0 l$ la chaleur latente d'apport de masse fluide à déformation constante.

Sous l'hypothèse des transformations infinitésimales ($\|\text{Grad}(\mathbf{u})\| \ll 1$) où \mathbf{u} est le vecteur déplacement d'un élément constitutif du système), le tenseur Δ peut être remplacé par sa forme linéarisée $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\pi}$ le tenseur de Piola Kirchoff par le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Le système d'équations (1.2 -1.4) se linéarise alors en deux systèmes d'équations selon que l'évolution est non drainée (sans échange de masse de fluide, $m = 0$) ou drainée (à pression constante, $p = p^0$). Ainsi, ces relations s'écrivent pour un milieu non drainé sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - M \mathbf{B} \frac{m}{\rho_{fl}^0} - \mathbf{A}(T - T^0) \quad (1.5a)$$

$$p = p^0 + M(-\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{m}{\rho_{fl}^0}) + 3 \alpha_m M (T - T^0) \quad (1.5b)$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon} - 3 \alpha_m M \frac{m}{\rho_{fl}^0} + \frac{C_\Delta(T - T^0)}{T^0} \quad (1.5c)$$

et pour un milieu drainé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B}(p - p^0) - \mathbf{A}_0(T - T^0) \quad (1.6a)$$

$$p = p^0 + M(-\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{m}{\rho_{fl}^0}) + 3 \alpha_m M (T - T^0) \quad (1.6b)$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + \mathbf{A}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} - 3 \alpha_m (p - p^0) + \frac{C_\Delta^0(T - T^0)}{T^0} \quad (1.6c)$$

où les tenseurs \mathbb{C} et \mathbb{C}_0 désignent les tenseurs de rigidité des modules d'élasticité isothermes, \mathbf{A} et \mathbf{A}_0 les tenseurs de couplage thermo-mécanique, C_Δ et C_Δ^0 les capacités de chaleur volumique par unité de volume initial et à déformation constante respectivement en conditions non drainée et drainée et α_m le coefficient d'apport de masse fluide thermique dans un essai à déformation totale nulle. Dans un état initial naturel, le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^0$ est nul.

Si le milieu poreux présente de plus un comportement isotrope, ces lois se simplifient

sous la forme suivante pour un milieu non drainé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \left(k - \frac{2\mu}{3}\right) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - b M \frac{m}{\rho_{fl}^0} \mathbf{1} - 3 \alpha k (T - T^0) \mathbf{1} \quad (1.7a)$$

$$p = p^0 + M \left(-b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{m}{\rho_{fl}^0}\right) + 3 \alpha_m M (T - T^0) \quad (1.7b)$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + 3 \alpha k \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3 \alpha_m M \frac{m}{\rho_{fl}^0} + \frac{C_\Delta (T - T^0)}{T^0} \quad (1.7c)$$

et sous la forme suivante pour un milieu drainé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \left(k_0 - \frac{2\mu}{3}\right) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} - b(p - p^0) \mathbf{1} - 3 \alpha_0 k_0 (T - T^0) \mathbf{1} \quad (1.8a)$$

$$p = p^0 + M \left(-b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{m}{\rho_{fl}^0}\right) + 3 \alpha_m M (T - T^0) \quad (1.8b)$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + 3 \alpha_0 k_0 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3 \alpha_m (p - p^0) + \frac{C_\Delta^0 (T - T^0)}{T^0} \quad (1.8c)$$

où k_0 et k sont les modules de compressibilité en conditions drainée ou non drainée, μ le module de cisaillement, b le coefficient de Biot tel que $\mathbf{B} = b \mathbf{1}$, α_0 et α les coefficients de dilatation thermique respectivement en conditions drainée ou non drainée.

Le comportement thermo-poro-élastique linéaire isotrope apparait donc caractérisé par 4 coefficients poro-élastiques isothermes (k ou k_0 , μ , b et M) et 3 coefficients thermo-élastiques (α ou α_0 , α_m , C_Δ ou C_Δ^0). Des relations entre les caractéristiques drainées et non drainées peuvent être par ailleurs établies à partir des expressions de la variation de la masse de fluide fonction de la déformation volumique et des variations de la pression interstitielle et de la température, (Coussy, 1991 [32]). Les caractéristiques poro-élastiques et thermo-élastiques peuvent être déterminées par différents essais. Leur caractérisation est parfois délicate, compte-tenu de leur évolution couplée. On donne dans ce qui suit quelques principes de détermination de ces paramètres élastiques.

1.2.2 Caractérisation des paramètres en poro-élasticité linéaire isotrope

Les équations d'état caractérisant le comportement poro-élastique linéaire en transformations infinitésimales d'un matériau poreux isotrope saturé ont été présentées précédemment. À partir des expressions (1.7) ou (1.8) et en prenant en compte les relations liant les différents paramètres poro-élastiques caractérisant le matériau, le comportement poro-élastique peut être entièrement défini par la connaissance de 4 paramètres poroélastiques (Boutéca et Sarda, 1995 [21], Coussy, 1991 [32]).

1.2.2.1 Paramètres poro-élastiques

Sous chargement hydrostatique et en condition isotherme, les équations (1.7) à (1.8) deviennent respectivement :

– en condition non drainée :

$$tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) = 3k tr(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3bM \left(\frac{m}{\rho_{fl}^0} \right) \quad (1.9a)$$

$$p = p^0 + M \left(-b tr(\boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{m}{\rho_{fl}^0} \right) \quad (1.9b)$$

– en condition drainée :

$$tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) = 3k_0 tr(\boldsymbol{\varepsilon}) - 3b(p - p^0) \quad (1.10a)$$

$$\frac{m}{\rho_{fl}^0} = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{b^2 M}{k_0} \right) (p - p^0) + \frac{b}{3k_0} tr(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) \quad (1.10b)$$

où k et k_0 désignent les modules de compressibilité, $tr \boldsymbol{\sigma}^0$ et $tr \boldsymbol{\sigma}$ les contraintes volumiques totales respectivement à l'état de référence et à l'instant t et $tr \boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation volumique.

En théorie, lors d'essais hydro-mécaniques, les quatre paramètres poro-élastiques (k , k_0 , b , M) entrant dans les équations d'état présentées ci-dessus peuvent être directement ou indirectement déterminés au cours de divers chemins de chargement.

L'essai de compression isotrope en condition drainée ($p - p^0 = 0$ MPa) consiste à appliquer un chargement/déchargement en contrainte isotrope totale à pression interstitielle constante généralement nulle. Il permet de déterminer directement le module de compressibilité drainé k_0 et le coefficient de Biot b à partir des mesures de la déformation volumique de fluide entrant, ou sortant, de l'éprouvette. On a, en effet, dans ce cas d'après (1.10) :

$$k_0 = \frac{\Delta \sigma_v}{9\varepsilon_v}, \quad b = \frac{m}{\rho_{fl}^0} \frac{1}{\varepsilon_v} \quad (1.11)$$

où $\Delta \sigma_v = tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0)$ désigne la variation de la contrainte volumique et $\varepsilon_v = \frac{1}{3} tr \boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation volumique moyenne.

Un essai de compression isotrope en condition non drainée, pour lequel au cours d'un chargement/déchargement en contrainte isotrope totale, tout échange de fluide, entre l'éprouvette et le milieu extérieur, est nul ($m = 0$), permet la détermination directe du module de compressibilité non drainé k , du coefficient de Skempton B_s et du produit bM , à partir des mesures de la déformation volumique et de la pression interstitielle. On a, en effet, dans ce cas d'après (1.9)

$$k = \frac{\Delta \sigma_v}{9\varepsilon_v}, \quad B_s = \frac{\Delta p}{\Delta \sigma_v} \quad \text{et} \quad bM = \frac{\Delta p}{\varepsilon_v} \quad (1.12)$$

où $\Delta p = p - p^0$ la variation de pression interstitielle au cours de l'essai.

Les modules d'Young drainé E_0 et non drainé E , les coefficients de Poisson drainé ν_0 et non drainé ν , et le module de cisaillement μ sont classiquement mesurés respectivement au cours d'essais de compression non drainé et drainé en compression simple ou compression triaxiale. La réalisation d'un essai de compression triaxiale non drainé permet également en théorie la détermination du coefficient poroélastique de Skempton B_s (Escoffier, 2002 [44]).

1.2.2.2 Paramètres thermo-élastiques

En suivant une démarche identique à celle adoptée pour la caractérisation du comportement poro-élastique, les coefficients de dilatation thermique linéique drainé α_0 et non drainé α peuvent être obtenus à la suite d'essais en température. Ainsi par exemple, un essai hydrostatique drainé ($p = p^0$) à déformation volumique totale nulle ($tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$) fournit le coefficient de dilatation thermique α_0 à partir de la mesure de la variation de la contrainte volumique et de celle de la température. On a en effet d'après (1.8) :

$$\Delta\sigma_v = tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0) = -9 \alpha_0 k_0 (T - T^0) \quad (1.13)$$

La détermination du coefficient d'apport de masse fluide α_m est aussi possible à partir d'un essai drainé ($p = p^0$), à déformation volumique nulle ($tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$). Ainsi d'après (1.8), la variation relative de teneur en fluide vaut dans ce cas :

$$\frac{m}{\rho_{fl}^0} = 3 \alpha_m (T - T^0) \quad (1.14)$$

Enfin, des mesures calorimétriques peuvent permettre d'évaluer les chaleurs volumiques, en particulier C_{Δ}^0 avec un essai drainé (Giraud, 1993 [48]).

1.2.2.3 Relations avec les caractéristiques des phases en conditions drainées

Sous des hypothèses d'isotropie et d'homogénéité de la partie solide constituant le milieu poreux, on peut relier les coefficients b , M , α_m , α^0 et C_{Δ}^0 caractérisant le comportement thermo-poro-élastique du milieu poreux aux caractéristiques des constituants du milieu poreux par :

$$b = 1 - \frac{k_0}{k_s} \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{M} = \frac{b - \phi^0}{k_s} \quad (1.16)$$

$$\alpha_0 = \alpha_s \quad (1.17)$$

$$\alpha_m = (b + \phi^0)\alpha_s \quad (1.18)$$

$$C_{\Delta}^0 = (1 - \phi^0)C_{\Delta}^s + 9T^0(b - \phi^0)\alpha_s \quad (1.19)$$

où k_s , α_s , C_{Δ}^s désignent respectivement le module de compressibilité, le coefficient de dilatation et la chaleur volumique à déformations constantes de la partie solide du milieu poreux et ϕ^0 désigne la porosité initiale du milieu.

Les relations (1.15)-(1.16), classiques en poro-élasticité isotrope, ont été établies par de nombreux auteurs, voir par exemple Biot et Willis (Biot et Willis, 1957 [14]), Coussy (Coussy, 1991 [32]). Les relations (1.17) et (1.18) et (1.19) ont été établies en particulier par Coussy (Coussy, 1991 [32]).

1.2.3 Equations des milieux poro-élasto-plastiques saturés

Le formalisme thermodynamique linéaire adopté au paragraphe précédent peut être étendu au domaine non linéaire de la poro-élasto-plasticité. Ainsi, l'état thermodynamique de ce comportement est caractérisé en fonction des variables d'états externes qui sont la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$, l'apport volumique de masse fluide m et la température T ainsi que des variables internes, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, ϕ^p et χ^p qui sont respectivement la déformation permanente du réseau solide, la porosité plastique ou irréversible et éventuellement des variables caractérisant l'état d'écrouissage. Ces variables internes permettent de décrire les évolutions irréversibles du milieu.

Cette généralisation au cas des comportements non linéaires et intrinsèquement irréversibles a été développée dans un cadre thermodynamique global par Coussy (Coussy, 1991 [32]).

Dans les hypothèses de transformations infinitésimales et de linéarisation physique¹, l'expression de l'énergie libre ψ peut être développée au second ordre en fonction des variables d'état T , $\boldsymbol{\varepsilon}$, m , $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et ϕ^p . Les équations d'état de la thermo-poro-plasticité sont alors données par les relations (1.7) et (1.8) dans lesquelles le tenseur des déformations totales $\boldsymbol{\varepsilon}$ et l'apport volumique de masse de fluide m sont remplacés par les nouvelles variables $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p$ et $m - m^p$ avec $m^p = \rho_{fl}^0 \phi^p$. Dans le cas isotrope, ces équations thermo-poro-élasto-plastiques s'écrivent explicitement sous la forme suivante pour un milieu non drainé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \left(k - \frac{2\mu}{3}\right) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{1} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - Mb \left(\frac{m}{\rho_{fl}^0} - \phi^p\right) \mathbf{1} - 3\alpha k (T - T^0) \mathbf{1} \quad (1.20a)$$

$$p = p^0 + M(-b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{m}{\rho_{fl}^0} - \phi^p) + 3\alpha_m M(T - T^0) \quad (1.20b)$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + 3\alpha k \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - 3\alpha_m M \left(\frac{m}{\rho_{fl}^0} - \phi^p\right) + \frac{C_\Delta(T - T^0)}{T^0} \quad (1.20c)$$

et pour un milieu drainé sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \left(k_0 - \frac{2\mu}{3}\right) \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{1} + 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - b(p - p^0) \mathbf{1} - 3\alpha_0 k_0 (T - T^0) \mathbf{1} \quad (1.21a)$$

$$p = p^0 + M(-b \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{m}{\rho_{fl}^0} - \phi^p) + 3\alpha_m M(T - T^0) \quad (1.21b)$$

$$S = S^0 + m s_m^0 + 3\alpha_0 k_0 \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - 3\alpha_m M \left(\frac{m}{\rho_{fl}^0} - \phi^p\right) + \frac{C_\Delta^0(T - T^0)}{T^0} \quad (1.21c)$$

Pour une évolution isotherme, on peut à partir de ces équations d'état définir la loi d'écoulement des variables plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et ϕ^p , par analogie au cas des solides plastiques

¹Les évolutions sont des évolutions infinitésimales purement poro-élastiques autour de l'état donné (σ, p, T) , c'est-à-dire $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ et $d\phi^p = 0$.

avec :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\phi}^p &= \dot{\lambda}^p \frac{\partial g}{\partial p} \end{aligned} \right\} \text{avec} \quad \begin{cases} \dot{\lambda}^p \geq 0 \text{ si } f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 \\ \dot{\lambda}^p = 0 \text{ si } f < 0 \text{ et } \dot{f} < 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

où $f(\boldsymbol{\sigma}, p)$ désigne la fonction de charge plastique et $g(\boldsymbol{\sigma}, p)$ le potentiel plastique thermodynamiquement admissible.

Plusieurs auteurs ont utilisé ce formalisme pour proposer un modèle de comportement non linéaire, pour les milieux poreux saturés, comme par exemple Giraud (Giraud, 1993 [48]), Pouya et al. (Pouya et al, 1998 [87]). Quant aux milieux non saturés, nous pouvons citer par exemple dans ce cadre le modèle de Lassabatère (Lassabatère, 1994 [71]). Ce formalisme thermodynamique a pu être aussi étendu au comportement poro-élasto-plastique en transformation finie (Bourgeois, 1997 [20]).

1.3 Approche micromécanique

Les comportements thermo-poro-élastiques et plastiques des milieux poreux ont été définis précédemment en s'appuyant sur des outils de la thermodynamique des milieux continus. Nous avons vu comment des essais expérimentaux adaptés permettent d'identifier ces comportements. Tout changement de milieu même s'il s'agit par exemple d'une légère modification de la porosité, nécessite une ré-identification du comportement mécanique. Il apparaît donc intéressant de pouvoir faire le lien entre le comportement macroscopique des matériaux et leurs caractéristiques microstructurales. Compte tenu du coût élevé des campagnes expérimentales d'identification des comportements, une approche micromécanique peut ainsi s'avérer pertinente. Cette approche consiste, par un changement d'échelle, à caractériser le comportement effectif macroscopique du milieu hétérogène réel à partir de l'exploitation des propriétés des constituants à l'échelle microscopique et d'une connaissance pouvant être complète ou partielle de la distribution spatiale de ces constituants. Le matériau hétérogène est ainsi remplacé à travers ce processus par un matériau homogène équivalent. On qualifie ce procédé de processus d'homogénéisation. Cette approche, largement développée dans le domaine des matériaux hétérogènes multiphasiques (Zaoui, 2002 [110]), apporte également une bonne connaissance du comportement mécanique des milieux poreux (Auriault et Sanchez-Palencia, 1977 [2], Schrefler et Lewis, 1998 [91]) et des phénomènes de transport dans ces milieux (Ene et Sanchez-Palencia, 1975 [43], Bear et Bachmat, 1991 [6], Lemarchand, 2001 [73] Dormieux et Bourgeois, 2002 [39]). Les approches micromécaniques permettent donc d'introduire une modélisation fine de phénomènes en particuliers couplés à l'échelle de la microstructure. Néanmoins, il faut bien noter que ces approches doivent être nécessairement appuyées par des essais expérimentaux qui permettent d'identifier les paramètres et les phénomènes physiques influants à l'échelle de la microstructure. Nous nous proposons de rappeler au paragraphe suivant le principe général de cette méthodologie.

1.3.1 Méthodologie d'homogénéisation en élasticité linéaire

La méthodologie d'homogénéisation passe par la définition d'un volume élémentaire représentatif "VER" du matériau hétérogène. Le choix du VER doit répondre à une claire séparation des échelles (*Figure 1.2*). Dans le cas d'un milieu aléatoire, privilégié dans cette étude, on différencie trois longueurs caractéristiques pour ce milieu désordonné : L une longueur caractéristique de la taille de la structure hétérogène, l une longueur caractéristique de la taille du VER et d une longueur caractéristique de la taille des hétérogénéités ou des pores. Pour que l'on puisse recourir aux méthodes d'homogénéisation, ces longueurs doivent vérifier les conditions suivantes :

- la taille du VER doit être petite devant celle de la structure ($l \ll L$) de façon à garantir que le matériau homogène équivalent défini à l'échelle macroscopique forme un milieu continu sur lequel les outils classiques de différentiation et d'intégration sont applicables et sur lequel on est en mesure de déterminer des champs de contraintes et de déformations.
- la taille des hétérogénéités ou des pores doit être petite devant celle du VER ($l \gg d$). Cette condition accorde au VER son caractère représentatif de la statistique des particules présentes à l'échelle microscopique et donne donc un sens aux propriétés issues du processus d'homogénéisation.

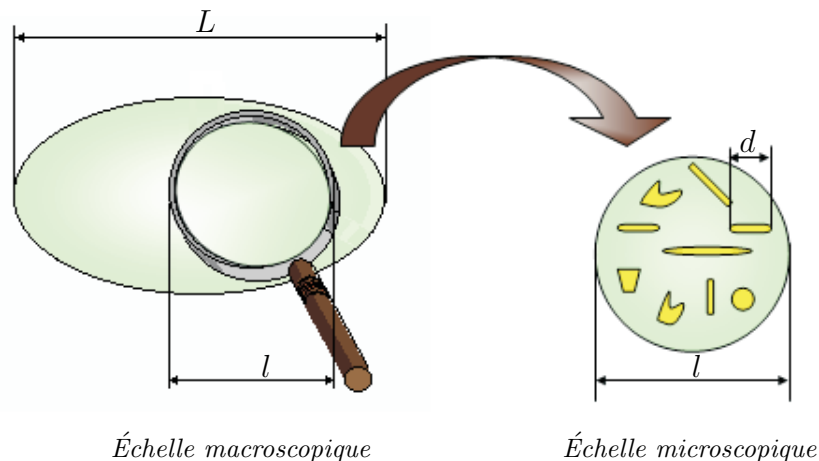


Figure 1.2 — Différentes échelles d'observation

Dans le cas d'un milieu périodique (Léné, 1984 [76], Benhamida, 1989 [7]), il suffit que la taille de la cellule de base soit petite devant celle de la structure et le problème à résoudre pourra être posé sur une cellule de base en respectant certaines règles de périodicité sur les conditions aux limites.

Le volume élémentaire représentatif Y du matériau est soumis à un chargement uniforme de déformation \mathbf{E} ou de contrainte $\mathbf{\Sigma}$, la moyenne des déformations sur le volume étant imposée à \mathbf{E} ou la moyenne des contraintes à $\mathbf{\Sigma}$. Ces chargements macroscopiques induisent des champs locaux de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ au sein du VER. Le comportement homogène équivalent est alors défini comme la relation entre la moyenne des contraintes et le chargement \mathbf{E} ou encore entre la moyenne des déformations et le chargement $\mathbf{\Sigma}$. De sorte que, dans une approche déformation, pour des phases élastiques linéaires, la loi de comportement homogène équivalente est définie

par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(y) dy = \mathbb{C}^* : \mathbf{E} = \mathbb{C}^* : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle \quad (1.23)$$

et dans une approche contrainte :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}(y) dy = \mathbb{S}^* : \boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{S}^* : \langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle \quad (1.24)$$

où \mathbb{C}^* et \mathbb{S}^* désignent respectivement le tenseur de rigidité et de souplesse homogène équivalent et où les “:” désignent le produit tensoriel doublement contracté entre des tenseurs du 4^{ème} ordre et du 2^{ème} ordre.

De par la linéarité du problème, les grandeurs microscopiques sont directement reliées aux grandeurs macroscopiques grâce aux tenseurs dits de localisation ou de concentration, selon :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y) = \mathbb{A}(y) : \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{B}(y) : \boldsymbol{\Sigma} \quad \forall y \in Y \quad (1.25)$$

où les tenseurs d’ordre 4, $\mathbb{A}(y)$ et $\mathbb{B}(y)$, désignent respectivement le tenseur de localisation des déformations et de concentration des contraintes. Ces tenseurs satisfont les égalités suivantes :

$$\langle \mathbb{A}(y) \rangle = \mathbb{I} \quad \text{et} \quad \langle \mathbb{B}(y) \rangle = \mathbb{I} \quad (1.26)$$

où \mathbb{I} désigne le tenseur d’ordre 4 unitaire.

En introduisant ces tenseurs dans les relations (1.23) et (1.24), le comportement homogénéisé s’écrit encore sous la forme :

$$\mathbb{C}^* = \langle \mathbb{C}(y) : \mathbb{A}(y) \rangle \quad (1.27)$$

$$\mathbb{S}^* = \langle \mathbb{S}(y) : \mathbb{B}(y) \rangle \quad (1.28)$$

où $\mathbb{C}(y)$ et $\mathbb{S}(y)$ désignent respectivement le tenseur de rigidité et de souplesse des phases constituant le matériau.

Notons que généralement les deux méthodes en approche déformation imposée ou en approche contrainte imposée conduisent à des comportements homogénéisés différents, de sorte que \mathbb{C}^* et \mathbb{S}^* ne sont pas les inverses l’un de l’autre.

Cette approche est dite directe, les coefficients élastiques homogénéisés relient les déformations moyennes et les contraintes moyennes sur le volume représentatif (Christensen 1979 [28], Aboudi 1991 [1]).

Une autre façon de caractériser le comportement équivalent consiste à travailler avec des grandeurs énergétiques. En se basant sur le principe des puissances virtuelles, cette approche énergétique consiste à évaluer l’énergie du matériau homogénéisé à la moyenne de l’énergie sur le VER, soit dans une approche déformation :

$$\mathbf{E} : \mathbb{C}^* : \mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) : \mathbb{C}(y) : \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle \quad (1.29)$$

ou dans une approche contrainte :

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}^* : \boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}(y) : \mathbb{S}(y) : \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle \quad (1.30)$$

En introduisant les tenseurs de localisation, on a encore :

$$\mathbb{C}^* = \langle \mathbb{A}(y) : \mathbb{C}(y) : \mathbb{A}(y) \rangle \quad (1.31)$$

ou encore :

$$\mathbb{S}^* = \langle \mathbb{B}(y) : \mathbb{S}(y) : \mathbb{B}(y) \rangle \quad (1.32)$$

Les deux approches directe et énergétique sont équivalentes. En pratique, le comportement homogénéisé s'obtient donc par les relations (1.24)-(1.23) ou (1.27)-(1.28) ou encore (1.31)-(1.32) qui nécessitent la résolution au préalable d'un problème d'équilibre posé sur le VER. Nous nous proposons maintenant d'explicitier ce problème dans le cas d'un matériau poreux présentant un comportement thermo-hydro-élastique.

1.3.2 Problème cellulaire thermo-hydro-poro-élastique

Considérons un milieu poreux, constitué d'une partie solide élastique linéaire et d'une partie fluide la saturant. La phase poreuse est modélisée par un ensemble de pores répartis dans la phase solide et le fluide par l'intermédiaire d'une pression porale (*Figure 1.3*). La partie visqueuse de l'interaction fluide-solide est négligée dans ce cas. On note Y le volume représentatif du milieu poreux constitué de Y_S la partie occupée par le squelette et Y_T la partie occupée par les vides. On désigne par ∂Y la frontière extérieure de Y et par ∂Y_T l'interface pore-squelette qui n'est autre que les bords des pores Y_T . On note enfin y les coordonnées d'un point du VER.

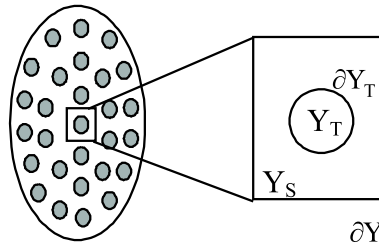


Figure 1.3 — Milieu poreux et son volume élémentaire représentatif

Ce volume élémentaire est soumis à un chargement thermo-hydro-mécanique couplé à travers une déformation moyenne imposée \mathbf{E} pour le chargement mécanique, une pression p pour le chargement hydrique uniforme appliqué dans les pores et une variation uniforme de température ΔT pour le chargement thermique.

Désignons par $\mathbf{u}(y)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(y)$ et $\boldsymbol{\sigma}(y)$ les champs de déplacement, de déformation et de contrainte locaux régnant en un point du VER induits par ce chargement macroscopique. Ces champs sont solutions du problème cellulaire suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(y) = 0 & y \in Y_S \\ \boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{C}_s : (\boldsymbol{\varepsilon}(y) - \boldsymbol{\alpha}_S \Delta T) & y \in Y_S \\ \boldsymbol{\varepsilon}(y) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}(y) + \nabla^t \mathbf{u}(y)) & y \in Y_S \\ \boldsymbol{\sigma}(y) \cdot \mathbf{n} = -p \mathbf{n} & y \in \partial Y_T \\ \langle \langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle \rangle = \mathbf{E} & \end{cases} \quad (1.33)$$

où \mathbb{C}_s désigne le tenseur d'élasticité d'ordre quatre du squelette, $\boldsymbol{\alpha}_s$ le tenseur de dilatation thermique du second ordre, \mathbf{n} la normale extérieure au squelette et où le symbole $\langle\langle - \rangle\rangle$ désigne la moyenne suivante :

$$\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle\rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n})_S ds = \mathbf{E}, \quad (1.34)$$

où $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{n})_S$ désigne le produit tensoriel symétrisé des deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{n} avec $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{n})_{ij} = \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i)$ et où le “.” désigne le produit entre un tenseur du 2^{ème} ordre et un vecteur. On notera cette définition spécifique de la moyenne des déformations introduite pour contourner la difficulté de définir les déformations dans les pores qui interviennent dans une moyenne volumique classique, (Léné, 1984 [76]).

La loi de comportement homogène équivalente est définie par la relation entre les moyennes suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(y) dy = \mathbb{C}^* : (\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle\rangle - \boldsymbol{\alpha}^* \Delta T) - p \mathbf{B}^* \\ &= \mathbb{C}^* : (\mathbf{E} - \boldsymbol{\alpha}^* \Delta T) - p \mathbf{B}^* \end{aligned} \quad (1.35)$$

où $\boldsymbol{\sigma}(y)$ est la solution du problème (1.33), \mathbb{C}^* désigne le tenseur d'élasticité homogénéisé, $\boldsymbol{\alpha}^*$ le tenseur de dilatation thermique homogénéisé et \mathbf{B}^* le tenseur de Biot homogénéisé.

On retrouve par cette approche micromécanique la loi de comportement homogène développée dans le cadre thermodynamique à l'échelle macroscopique (1.5) ou (1.6).

Dans le cas particulier d'un comportement isotrope homogène équivalent, les tenseurs macroscopiques équivalents prennent la forme classique suivante :

$$\mathbb{C}^* = 3k^* \mathbb{J} + 2\mu^* \mathbb{K} \quad (1.36)$$

$$\mathbf{B}^* = b^* \mathbf{1} \quad (1.37)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \alpha^* \mathbf{1} \quad (1.38)$$

où k^* est le module de compressibilité du milieu homogénéisé et μ^* le module de cisaillement de ce milieu homogénéisé, α^* et b^* sont des coefficients scalaires, $\mathbf{1}$ est le tenseur d'identité d'ordre deux et où les tenseurs du 4^{ème} ordre \mathbb{J} et \mathbb{K} sont les projecteurs orthogonaux définis par :

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (1.39)$$

Une approche en contrainte peut être également menée en imposant cette fois, à la place de $\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle\rangle = \mathbf{E}$, une contrainte moyenne homogène $\boldsymbol{\Sigma}$ sur le VER sous la forme :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(y) dy = \boldsymbol{\Sigma}. \quad (1.40)$$

La loi de comportement homogène équivalente est alors définie par :

$$\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle\rangle = \mathbb{S}^* : \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\alpha}^* \Delta T + p \mathbb{S}^* : \mathbf{B}^* \quad (1.41)$$

où \mathbb{S}^* est le tenseur de souplesse effectif du milieu poreux du 4^{ème} ordre et $\boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation locale solution du problème (1.33) avec la condition de contrainte homogène (1.40).

On peut montrer (Aboudi, 1991 [1], Bornert et al., 2001 [17]) qu'une façon d'imposer les chargements macroscopiques en déformation ou contrainte peut consister à imposer selon l'approche retenue les conditions aux limites suivantes sur le bords ∂Y du volume Y du VER :

$$\mathbf{u}(y) = \mathbf{E} \cdot y \quad \forall y \in \partial Y \quad (1.42)$$

$$\text{ou } \boldsymbol{\sigma}(y) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \forall y \in \partial Y \quad (1.43)$$

Cette approche d'homogénéisation est dite "Approche des modules effectifs". Le problème cellulaire est alors un problème classique de thermoélasticité. Il admet, sous des hypothèses de régularité suffisantes sur le domaine Y et les données, une unique solution en déplacement et contrainte pour le problème en approche déformation et une solution définie à un déplacement de corps rigide près, mais unique en déformation et contrainte pour le problème cellulaire de l'approche contrainte.

Généralement, les approches déformations et contraintes conduisent à des tenseurs de rigidité et de souplesse équivalents qui ne sont pas inverses l'un de l'autre, c'est-à-dire $\mathbb{C}^* \neq (\mathbb{S}^*)^{-1}$. On a par conséquent également deux tenseurs de Biot différents pour les deux approches. En pratique, l'obtention du comportement équivalent, c'est-à-dire des tenseurs \mathbb{C}^* , $\boldsymbol{\alpha}^*$ et \mathbf{B}^* se fait après résolution des problèmes cellulaires (1.33) en approche déformation et contrainte. Ces solutions peuvent être simplifiées en exploitant la linéarité des problèmes par rapport au chargement.

1.3.3 Décomposition par linéarité

L'exploitation de la linéarité du problème cellulaire par rapport aux chargements macroscopiques imposés $(\mathbf{E}, p, \Delta T)$ permet de décomposer le problème en trois problèmes élémentaires. Les champs de déplacement \mathbf{u} , de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ solutions du problème (1.33) peuvent être ainsi décomposés sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^1 - p \mathbf{u}^2 + \Delta T \mathbf{u}^3 \\ \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^1 - p \boldsymbol{\sigma}^2 + \Delta T \boldsymbol{\sigma}^3 \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^1 - p \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \Delta T \boldsymbol{\varepsilon}^3 \end{cases} \quad (1.44)$$

où

$(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ sont les solutions d'un problème (P_1) de type élastique correspondant à une sollicitation par un chargement macroscopique de déformation \mathbf{E} ($\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$), le pore n'étant pas en pression ($p = 0$) et la variation de température étant nulle ($\Delta T = 0$),

$(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\varepsilon}^2, \boldsymbol{\sigma}^2)$ sont les solutions d'un problème (P_2) de type élastique correspondant à une sollicitation par un chargement macroscopique de déformation nulle ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$), le pore étant sous pression unitaire $p = 1$ et la variation de température étant nulle ($\Delta T = 0$),

$(\mathbf{u}^3, \boldsymbol{\varepsilon}^3, \boldsymbol{\sigma}^3)$ sont les solutions d'un problème (P_3) de type thermoélastique correspon-

dant à une sollicitation par un chargement macroscopique de déformation nulle ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$) le pore n'étant pas en pression ($p = 0$), le chargement thermique étant unitaire $\Delta T = 1$.

Les quantités p et ΔT sont ici des grandeurs adimensionnées rapportées à une pression p_0 et une température de référence T_0 .

Une décomposition analogue peut être mise en œuvre pour le problème cellulaire en approche contrainte. Les tenseurs homogénéisés s'expriment alors simplement en fonction des solutions des problèmes élémentaires, comme nous le verrons au paragraphe suivant.

Rappelons au préalable le Lemme de Hill (Hill, 1963 [62]) :

Soit $\boldsymbol{\tau}$ un champ de contrainte statiquement admissible (Σ_{ad}) pour le problème cellulaire et \mathbf{v} un champ de déplacement cinématiquement admissible (U_{ad}).

Pour le problème cellulaire, ces champs vérifient la relation suivante :

$$\langle \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in U_{ad} \text{ et } \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}, \quad (1.45)$$

avec dans l'approche déformation des modules effectifs :

$$\begin{aligned} U_{ad} &= \{ \mathbf{v} / \text{régulier dans } Y / \mathbf{v} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{y} \forall \mathbf{y} \in \partial Y \} \\ \Sigma_{ad} &= \{ \boldsymbol{\tau} / \text{régulier et symétrique dans } Y / \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) = 0 \forall \mathbf{y} \in Y \} \end{aligned}$$

Un résultat analogue peut être établi avec l'approche contrainte des modules effectifs.

1.3.3.1 Tenseur de rigidité - Approche déformation

La détermination du tenseur de rigidité équivalent \mathbb{C}^* se fait par résolution du problème élastique élémentaire (P_1). Le VER est uniquement soumis à un champ de déformation \mathbf{E} . La relation entre grandeurs moyennes s'écrit alors :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \mathbb{C}^* : \mathbf{E} = \mathbb{C}^* : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{y}) \rangle \quad (1.46)$$

Or en prolongeant le tenseur $\boldsymbol{\sigma}^1$ par continuité dans les pores par le tenseur $\mathbf{0}$ identiquement nul, le calcul de la moyenne des contraintes microscopiques se réduit à l'intégrale sur la partie solide du VER, soit :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^1(\mathbf{y}) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_S} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_S} \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \mathbb{C}_s : \frac{1}{|Y|} \int_{Y_S} \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (1.47)$$

Par application de la formule de Green, on a par ailleurs :

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_S} \boldsymbol{\varepsilon}^1(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_S} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S \, ds = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S \, ds + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S \, ds \quad (1.48)$$

où ∂Y_S désigne la frontière de la partie solide.

D'autre part, par définition, on a :

$$\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}^1(y) \rangle\rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_s ds = \mathbf{E} \quad (1.49)$$

Si on introduit la porosité ϕ , c'est-à-dire la fraction volumique de l'espace poreux rapportée au volume total $\phi = |Y_T| / |Y|$, on a :

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_s ds = \phi \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_s ds \quad (1.50)$$

De sorte que la loi de comportement homogénéisée (1.46) s'écrit également sous la forme :

$$\mathbb{C}^* : \mathbf{E} = \mathbb{C}_s : \mathbf{E} + \phi \mathbb{C}_s : \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_s ds \quad (1.51)$$

où \mathbf{n} désigne la normale unitaire à la surface ∂Y_T , extérieure au squelette.

Soit encore :

$$\mathbb{C}^* : \mathbf{E} = \mathbb{C}_s : \mathbf{E} - \phi \mathbb{C}_s : \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_s ds \quad (1.52)$$

où \mathbf{n} est cette fois la normale unitaire extérieure aux pores.

On remarque que la loi de comportement homogénéisée d'un milieu poreux apparaît comme un cas particulier d'un milieu biphasique constitué d'une phase matricielle et d'une phase inclusionnaire considérée vide. En effet, pour un milieu à deux phases, la loi de comportement homogénéisée s'écrit classiquement :

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_m + f (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m) : \langle\langle \mathbb{A}(y) \rangle\rangle_{Y_i} \quad (1.53)$$

où \mathbb{C}_α est le tenseur de rigidité de la phase α avec $\alpha = i$ dans l'inclusion et $\alpha = m$ dans la matrice, f la concentration en inclusion et $\langle\langle \mathbb{A}(y) \rangle\rangle_{Y_i}$ désigne la moyenne du tenseur de localisation sur le renfort. Par analogie, la loi de comportement (1.52) prend la forme :

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_s - \phi \mathbb{C}_s : \langle\langle \mathbb{A}(y) \rangle\rangle_{Y_T} \quad (1.54)$$

où $\mathbb{A}(y)$ le tenseur de localisation est défini par :

$$\langle\langle \mathbb{A}(y) \rangle\rangle_{Y_T} : \mathbf{E} = \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_s ds \quad (1.55)$$

1.3.3.2 Tenseur de souplesse - Approche contrainte

De manière similaire, l'approche contrainte conduit à la détermination du tenseur de souplesse homogénéisé. Cette fois $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ désignent les champs de déplacements, de déformations et de contraintes solutions du problème cellulaire en approche contrainte avec $\Delta T = 0$ et $p = 0$.

Soit Σ le tenseur des contraintes macroscopique imposé défini par :

$$\langle \sigma^1(y) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma^1(y) dy = \Sigma. \quad (1.56)$$

Le tenseur de souplesse \mathbb{S}^* équivalent est alors défini par la relation suivante entre les moyennes :

$$\langle \langle \varepsilon^1(y) \rangle \rangle = \mathbb{S}^* : \Sigma = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S ds. \quad (1.57)$$

En appliquant la formule de Green et en tenant compte de la loi de comportement locale, on obtient l'expression suivante de la loi de comportement homogénéisée en approche contrainte :

$$\mathbb{S}^* : \Sigma = \mathbb{S}_s : \Sigma - \phi \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S ds, \quad (1.58)$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure unitaire au squelette.

Cette loi de comportement peut être écrite également sous la forme :

$$\mathbb{S}^* = \mathbb{S}_s - \phi \langle \langle \mathbb{B}(y) \rangle \rangle, \quad (1.59)$$

avec $\mathbb{B}(y)$ le tenseur de concentration défini par :

$$\langle \langle \mathbb{B}(y) \rangle \rangle : \Sigma = \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S ds, \quad (1.60)$$

où \mathbf{u}^1 est cette fois la solution du problème (P₁) en approche contrainte.

Comme dit précédemment, la solution du problème (P₁) en approche déformation est généralement différente de la solution du problème (P₁) trouvée en approche contrainte, de sorte que \mathbb{C}^* n'est généralement pas l'inverse de \mathbb{S}^* .

1.3.3.3 Tenseur de Biot - Approche déformation

Le tenseur de Biot équivalent est défini dans une approche déformation par :

$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma^2(y) dy = \mathbf{B}^*, \quad (1.61)$$

où σ^2 est la solution du problème (P₂).

En utilisant le lemme de Hill, précédemment rappelé, on peut établir le résultat suivant entre grandeurs moyennes :

$$\langle \sigma^2 \rangle : \langle \langle \varepsilon(\mathbf{u}^1) \rangle \rangle = \phi \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S ds : \mathbf{1}, \quad (1.62)$$

où $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ est la solution du problème (P_1) en approche déformation et \mathbf{n} la normale extérieure unitaire au pore. Or, par définition même $\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1) \rangle\rangle = \mathbf{E}$ et d'après l'expression du tenseur de rigidité homogénéisé établie au paragraphe précédent, on a :

$$\phi \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S ds = \mathbf{E} - \mathbb{S}_s : \mathbb{C}^* : \mathbf{E}. \quad (1.63)$$

D'après (1.61) et (1.62), on a :

$$\mathbf{B}^* : \mathbf{E} = (\mathbf{E} - \mathbb{S}_s : \mathbb{C}^* : \mathbf{E}) : \mathbf{1}, \quad (1.64)$$

soit encore,

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{1} - \mathbb{S}_s : \mathbb{C}^* : \mathbf{1}, \quad (1.65)$$

ou en écriture indicielle :

$$B_{ij}^* = \delta_{ij} - S_{ijlm}^s C_{lmpp}^*. \quad (1.66)$$

Si le squelette et le milieu poreux sont isotropes, on retrouve l'expression classique (1.15) du tenseur de Biot (Auriault et Sanchez-Palencia, 1977 [2], Coussy, 1991 [32]) :

$$\mathbf{B}^* = b^* \mathbf{1} \quad \text{avec} \quad b^* = 1 - \frac{k_D^*}{k_s} \quad (1.67)$$

où k_D^* est le module de compressibilité équivalent fourni par l'approche déformation et k_s celui du squelette.

1.3.3.4 Tenseur de Biot - Approche contrainte

Le tenseur de Biot équivalent dans une approche contrainte est défini par :

$$\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^2) \rangle\rangle = \mathbb{S}^* : \mathbf{B}^*, \quad (1.68)$$

où \mathbf{u}^2 est la solution du problème (P_2) en approche contrainte imposée.

On peut établir comme précédemment la relation suivante entre grandeurs moyennes :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^1(y) \rangle : \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^2) \rangle\rangle = \phi \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S ds : \mathbf{1} \quad (1.69)$$

où $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$ est la solution du problème (P_1) en approche contrainte et \mathbf{n} la normale extérieure unitaire au squelette.

Or, par définition $\langle \boldsymbol{\sigma}^1(y) \rangle = \boldsymbol{\Sigma}$ et d'après l'expression du tenseur de souplesse homogénéisé \mathbb{S}^* établie au paragraphe précédent, on a :

$$\phi \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S ds = -(\mathbb{S}_s - \mathbb{S}^*) : \boldsymbol{\Sigma}. \quad (1.70)$$

D'où d'après (1.68) et (1.69) :

$$\mathbb{S}^* : \mathbf{B}^* : \boldsymbol{\Sigma} = (\mathbb{S}_s - \mathbb{S}^*) : \boldsymbol{\Sigma}, \quad (1.71)$$

soit encore,

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{1} - (\mathbb{S}^*)^{-1} : \mathbb{S}_s : \mathbf{1}, \quad (1.72)$$

ou en écriture indicielle :

$$B_{ij}^* = \delta_{ij} - (S^*)_{ijkh}^{-1} S_{khpp}^s. \quad (1.73)$$

Si le squelette et le milieu poreux sont isotropes, on retrouve comme précédemment l'expression classique :

$$\mathbf{B}^* = b^* \mathbf{1} \quad \text{avec} \quad b^* = 1 - \frac{k_C^*}{k_s} \quad (1.74)$$

où k_C^* est le module de compressibilité équivalent fourni par l'approche contrainte.

Les deux approches conduisent donc à deux prédictions différentes du tenseur de Biot.

1.3.3.5 Tenseur de couplage thermo-élastique

Le tenseur de couplage thermo-élastique homogénéisé de l'approche déformation $\boldsymbol{\alpha}^*$ est défini par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^3(y) \rangle = - \mathbb{C}^* : \boldsymbol{\alpha}^*, \quad (1.75)$$

où $\boldsymbol{\sigma}^3$ est la solution du problème (P₃) en approche déformation imposée.

On peut établir en procédant de façon analogue à ce qui a été fait pour les tenseurs de Biot :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^3(y) \rangle : \langle \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1) \rangle \rangle = - \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\alpha}_s : [\langle \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1) \rangle \rangle + \phi \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_S ds], \quad (1.76)$$

où \mathbf{u}^1 est solution du problème (P₁) en approche déformation imposée et \mathbf{n} la normale unitaire extérieure au squelette.

Or, par définition $\langle \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^1) \rangle \rangle = \mathbf{E}$ et d'après l'expression du tenseur de rigidité homogénéisé, on en déduit avec (1.63) :

$$\mathbb{C}^* : \boldsymbol{\alpha}^* : \mathbf{E} = \mathbb{C}_s : \boldsymbol{\alpha}_s : [\mathbf{E} - \mathbf{E} + \mathbb{S}_s : \mathbb{C}^* : \mathbf{E}]. \quad (1.77)$$

D'où :

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}_s \quad (1.78)$$

Le tenseur de couplage homogénéisé dans l'approche déformation imposée est donc égal au tenseur de couplage du squelette.

Dans l'approche contrainte, on a par définition :

$$\langle \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^3) \rangle \rangle = \boldsymbol{\alpha}^* \quad (1.79)$$

où \mathbf{u}^3 est cette fois la solution du problème (P₃) en approche contrainte imposée.

Par ailleurs, on peut vérifier que :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^1(y) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^3) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}^1(y) \rangle : \langle \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^3) \rangle \rangle = \boldsymbol{\alpha}^* : \langle \boldsymbol{\sigma}^1(y) \rangle, \quad (1.80)$$

où $\boldsymbol{\sigma}^1$ est la solution du problème (P₁) en approche contrainte. On retrouve l'équation (1.78) :

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \boldsymbol{\alpha}_s. \quad (1.81)$$

L'approche contrainte et l'approche déformation conduisent donc au même tenseur de couplage équivalent pour le milieu poreux, qui est celui du squelette. Ce résultat est, en effet, en accord avec celui trouvé par Coussy (Coussy, 1991 [32]) au niveau de l'expression (1.17).

1.3.4 Méthodes classiques d'estimation du comportement de milieux poreux linéaires

Selon le choix retenu pour le volume élémentaire représentatif (VER) et la façon d'imposer le chargement, les solutions du problème cellulaire (1.33) diffèrent et conduisent à des estimations du comportement homogénéisées distinctes.

Sous certaines configurations géométriques particulièrement simplifiées, il est possible de résoudre explicitement le problème cellulaire et d'obtenir des expressions analytiques du comportement équivalent. Parmi les premiers travaux d'homogénéisation, on peut citer les résultats dus à Voigt, Reuss et Hill qui sont à classer parmi ces approches dites simplifiées. La méthode des distributions diluées, la méthode auto-cohérente ou encore l'approche des milieux à trois phases et les méthodes variationnelles ou énergétiques développées par Hashin et Shtrikman rentrent également dans ce type d'approche (Aboudi, 1991 [1]), (Hashin, 1962 [53]), (Hashin et Shtrikman, 1962 [55] [56], 1963 [57]).

D'autres approches d'homogénéisation reposent sur des résolutions numériques des problèmes posés sur des volumes élémentaires représentatifs enrichis. On peut ainsi citer l'approche de l'homogénéisation périodique pour des composites à microstructure périodique avec les travaux de Duvaut (Duvaut, 1976 [42]), Léné (Léné, 1984 [76]) ou encore Sanchez-Palencia (Sanchez-Palencia, 1986 [90]). Cette théorie d'homogénéisation des milieux périodiques donne un sens précis au processus d'homogénéisation sous la forme d'un problème de convergence avec un petit paramètre caractérisant la taille des hétérogénéités. Plus récemment, le développement de moyens de calcul numériques de plus en plus performants a permis de résoudre le problème local d'homogénéisation sur des volumes élémentaires représentatifs très riches. On peut citer à titre d'exemple les travaux de Grondin (Grondin, 2005 [50]) sur les bétons numériques ou encore les travaux de Zeghadi sur les matériaux métalliques (Zeghadi, 2005 [111]), les travaux de Claquin sur les interfaces des milieux granulaires (Claquin, 2003 [31]).

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement quelques méthodes quasi-explicites d'homogénéisation des milieux aléatoires pour des milieux poreux. Ces méthodes faisant un large usage de la solution du problème de l'inclusion isolée dans un milieu infini développée par Eshelby (Eshelby, 1957 [45]), nous en rappelons les principaux résultats pour des milieux biphasés et en particulier poreux.

On utilisera pour la description de ces méthodes les notations et hypothèses suivantes. Le milieu hétérogène est constitué d'une phase matricielle indiquée par 1 et inclusionnaire indiquée par 2 destinée à être un pore. En supposant que les phases sont élastiques et homogènes, le tenseur de rigidité homogénéisé (1.27) s'écrit encore sous la forme suivante :

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_1 + c_2(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : \mathbb{A}_2 \quad (1.82)$$

où \mathbb{C}_1 et \mathbb{C}_2 désignent les tenseurs de rigidité des phases 1 et 2, $\mathbb{A}_2 = \langle \mathbb{A}(y) \rangle_2$ désigne la moyenne du tenseur de localisation sur la phase inclusionnaire Y_2 et c_2 désigne la fraction volumique de la phase 2.

1.3.4.1 Schéma des distributions diluées

C'est à Eshelby en 1957 que l'on doit les premiers résultats dans la direction de la méthode des approximations diluées. Cette méthode est dédiée à des matériaux présentant un faible taux de renfort ou de porosité. Ainsi, si la fraction volumique des hétérogénéités est suffisamment faible et donc les hétérogénéités suffisamment distantes les unes des autres, ces dernières peuvent être considérées comme isolées et noyées dans une matrice infinie.

Pour une déformation imposée sur un volume infini de matrice contenant une seule inclusion, Eshelby a montré que le tenseur de localisation de la phase 2 s'écrit :

$$\mathbb{A}_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1}, \quad (1.83)$$

où \mathbb{P}_E^1 est le tenseur de polarisation, appelé également tenseur de Hill (Hill, 1965 [64]) associé au milieu 1, défini par :

$$\mathbb{P}_E^1 = \mathbb{S}_E^1 : (\mathbb{C}_1)^{-1} = \mathbb{S}_E^1 : (\mathbb{S}_1) \quad (1.84)$$

avec \mathbb{S}_E^1 le tenseur d'Eshelby. Dans le cas d'un matériau isotrope et des hétérogénéités sphériques, le tenseur d'Eshelby de la phase (i) s'écrit :

$$\mathbb{S}_E^{(i)} = a_E^{(i)} \mathbb{J} + b_E^{(i)} \mathbb{K} \quad (1.85)$$

où

$$a_E^{(i)} = \frac{3k^{(i)}}{3k^{(i)} + 4\mu^{(i)}} = \frac{1}{3} \frac{1 + \nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}} \quad b_E^{(i)} = \frac{6}{5} \frac{k^{(i)} + 2\mu^{(i)}}{3k^{(i)} + 4\mu^{(i)}} = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}$$

et le tenseur de Hill s'écrit par :

$$\mathbb{P}_E^{(i)} = \frac{1}{3k^{(i)} + 4\mu^{(i)}} \mathbb{J} + \frac{6}{5\mu^{(i)}} \frac{k^{(i)} + 2\mu^{(i)}}{3k^{(i)} + 4\mu^{(i)}} \mathbb{K} \quad (1.86)$$

et \mathbb{J} et \mathbb{K} sont définis par la formule (1.39).

Les propriétés élastiques équivalentes du matériau biphasé sont alors données à partir de (1.82) et (1.83) par :

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_1 + c_2 (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \quad (1.87)$$

Dans le cas particulier d'un matériau à deux phases homogènes et isotropes et à hétérogénéités sphériques, on obtient une estimation des coefficients élastiques (k_D^* , μ_D^*) donnés pour cette approche en déformation imposée par :

$$k_D^* = k_1 + c_2 (k_2 - k_1) \frac{1}{(1 - a_E^1) + a_E^1 \frac{k_2}{k_1}} \quad (1.88)$$

$$\mu_D^* = \mu_1 + c_2 (\mu_2 - \mu_1) \frac{1}{(1 - b_E^1) + b_E^1 \frac{\mu_2}{\mu_1}} \quad (1.89)$$

De la même façon, le tenseur de souplesse équivalent \mathbb{S}^* du matériau dans une approche en contrainte imposée est donné par :

$$\mathbb{S}^* = \mathbb{S}_1 + c_2 (\mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_1) : [\mathbb{I} - \mathbb{Q}_E^1 : (\mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_1)]^{-1}, \quad (1.90)$$

où le tenseur \mathbb{Q}_E^1 , introduit également par Hill (Hill, 1965 [64]), est défini par :

$$\mathbb{Q}_E^1 = (\mathbb{S}_1)^{-1} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^1) = \mathbb{C}_1 : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^1)$$

Ainsi, les coefficients homogénéisés du matériau isotrope élastique (k_C^* , μ_C^*) sont donnés dans l'approche contrainte par :

$$\frac{1}{k_C^*} = \frac{1}{k_1} + c_2 \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \frac{1}{(1 - a_E^1) \frac{k_1}{k_2} + a_E^1} \quad (1.91)$$

$$\frac{1}{\mu_C^*} = \frac{1}{\mu_1} + c_2 \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) \frac{1}{(1 - b_E^1) \frac{\mu_1}{\mu_2} + b_E^1} \quad (1.92)$$

Dans le cas d'un milieu poreux de porosité ϕ , les estimations des caractéristiques macroscopiques peuvent s'obtenir simplement en faisant tendre les coefficients k_2 et μ_2 vers zéro dans les relations (1.88)-(1.89) et (1.91)-(1.92). Elles s'écrivent sous la forme :

$$k_D^* = k_s - \phi k_s \frac{1}{(1 - a_E^s)} \quad \mu_D^* = \mu_s - \phi \mu_s \frac{1}{(1 - b_E^s)} \quad (1.93)$$

$$\frac{1}{k_C^*} = \frac{1}{k_s} + \phi \frac{1}{k_s} \frac{1}{(1 - a_E^s)} \quad \frac{1}{\mu_C^*} = \frac{1}{\mu_s} + \phi \frac{1}{\mu_s} \frac{1}{(1 - b_E^s)} \quad (1.94)$$

Compte tenu de la représentation adoptée du matériau, cette approche n'est pertinente que pour des concentrations c_2 faibles ou des porosités ϕ ne dépassant pas une dizaine de pourcents (Benhamida et al., 2005 [8]). Elle est à la base de la méthode du "Schéma différentiel" que l'on détaillera ultérieurement.

1.3.4.2 Approximation de Mori-Tanaka

Afin de rendre compte des interactions entre les hétérogénéités, Mori et Tanaka (Mori et Tanaka, 1973 [79], Benveniste, 1987 [10]) considèrent que la moyenne de la déformation dans les hétérogénéités peut être approchée par celle d'une hétérogénéité de même forme et de mêmes caractéristiques élastiques isolée dans un milieu infini constitué de matrice soumise à une déformation uniforme \mathbf{E} .

En utilisant (1.83), la déformation moyenne dans l'hétérogénéité s'écrit ainsi :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbf{E} \quad (1.95)$$

et la déformation moyenne dans la matrice s'écrit alors :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_1 = \mathbf{E} \quad (1.96)$$

En utilisant la relation $\mathbf{E} = c_1 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_1 + c_2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_2$, on peut alors déterminer \mathbf{E} , avec (1.95) et (1.96) de sorte que les moyennes des tenseurs de localisation des constituants s'écrivent respectivement pour la matrice et l'inclusion :

$$\mathbb{A}_1 = [c_1 \mathbb{I} + c_2 [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1}]^{-1} \quad (1.97)$$

$$\mathbb{A}_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \mathbb{A}_1 \quad (1.98)$$

Ainsi, le tenseur des modules élastiques homogénéisés de l'estimation de Mori-Tanaka s'exprime par :

$$\mathbb{C}_{MT}^* = \mathbb{C}_1 + c_2 (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + c_1 \mathbb{P}_E^1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \quad (1.99)$$

Dans le cas d'un milieu isotrope à constituants isotropes et à renforts sphériques, les coefficients homogénéisés s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} k_{MT}^* &= k_1 + c_2 (k_2 - k_1) \frac{1}{(1 - (1 - c_2) a_E^1) + (1 - c_2) a_E^1 \frac{k_2}{k_1}} \\ \mu_{MT}^* &= \mu_1 + c_2 (\mu_2 - \mu_1) \frac{1}{(1 - (1 - c_2) b_E^1) + (1 - c_2) b_E^1 \frac{\mu_2}{\mu_1}} \end{aligned} \quad (1.100)$$

Dans le cas d'un milieu poreux de porosité ϕ , les estimations des caractéristiques macroscopiques peuvent s'obtenir comme précédemment par un passage à limite des caractéristiques de l'inclusion vers zéro :

$$\begin{aligned} k_{MT}^* &= k_s - \phi k_s \frac{1}{(1 - (1 - \phi) a_E^s)} \\ \mu_{MT}^* &= \mu_s - \phi \mu_s \frac{1}{(1 - (1 - \phi) b_E^s)} \end{aligned} \quad (1.101)$$

1.3.4.3 Schéma autocohérent

Le schéma autocohérent (Hill, 1965 [64]) se différencie des deux approximations présentées précédemment par le choix du VER. Dans ce cas, on suppose que chaque particule (matrice ou inclusion) est entourée par les autres phases du milieu et donc par le milieu homogène équivalent. Ce milieu homogène est soumis à un champ de déformation \mathbf{E} . La déformation moyenne au sein d'une phase ($\alpha = 1$ ou 2) s'écrit alors :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_\alpha = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^* : (\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}^*)]^{-1} : \mathbf{E} \quad (1.102)$$

avec \mathbb{P}_E^* le tenseur de polarisation associé au milieu équivalent défini par $\mathbb{P}_E^* = \mathbb{S}_E^* : (\mathbb{C}^*)^{-1}$.

Comme pour le schéma de Mori-Tanaka, la déformation est déterminée par la relation $\mathbf{E} = c_1 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_1 + c_2 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_2$. Dans le cas particulier où toutes les hétérogénéités sont de même forme et de même orientation, l'estimation des tenseurs de localisation d'après (1.102), s'écrit :

$$\mathbb{A}_\alpha = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^* : (\mathbb{C}_\alpha - \mathbb{C}^*)]^{-1} \quad (1.103)$$

Ainsi, l'estimation du tenseur de rigidité par le schéma autocohérent dans ce cas s'obtient en résolvant l'équation implicite suivante :

$$\mathbb{C}_{AC}^* = c_1 \mathbb{C}_1 : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^* : (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_{AC}^*)]^{-1} + c_2 \mathbb{C}_2 : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E^* : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_{AC}^*)]^{-1} \quad (1.104)$$

Pour un matériau constitué de phases isotropes dont les hétérogénéités sont sphériques, l'équation tensorielle (1.104) se réduit à la résolution du système non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \frac{k_1 - k_{AC}^*}{1 + a_E^* \frac{k_1 - k_{AC}^*}{k_{AC}^*}} + c_2 \frac{k_2 - k_{AC}^*}{1 + a_E^* \frac{k_2 - k_{AC}^*}{k_{AC}^*}} = 0 \\ c_1 \frac{\mu_1 - \mu_{AC}^*}{1 + b_E^* \frac{\mu_1 - \mu_{AC}^*}{\mu_{AC}^*}} + c_2 \frac{\mu_2 - \mu_{AC}^*}{1 + b_E^* \frac{\mu_2 - \mu_{AC}^*}{\mu_{AC}^*}} = 0 \end{array} \right. \quad (1.105)$$

où

$$a_E^* = \frac{3k_{AC}^*}{3k_{AC}^* + 4\mu_{AC}^*} \quad b_E^* = \frac{6(k_{AC}^* + 2\mu_{AC}^*)}{5(3k_{AC}^* + 4\mu_{AC}^*)}$$

Pour un milieu poreux à pores sphériques et à squelette homogène isotrope, en faisant tendre k_2 et μ_2 vers zéro dans le système d'équations (1.105), on obtient pour le module de compressibilité macroscopique l'expression suivante :

$$k_{AC}^* = k_s - \phi k_s \frac{3k_s + 4\mu_{AC}^*}{3\phi k_s + 4\mu_{AC}^*} \quad (1.106)$$

où μ_{AC}^* est solution de l'équation du second degré suivante :

$$8(\mu_{AC}^*)^2 - ((8 - 20\phi)\mu_s - (9 - 3\phi)k_s) \mu_{AC}^* - (9 - 18\phi)k_s \mu_s = 0 \quad (1.107)$$

1.3.4.4 Schéma autocohérent généralisé

Le modèle des trois phases de Christensen et Lo (Christensen et Lo, 1979 [29]), encore appelé modèle autocohérent généralisé, fournit une estimation des modules d'élasticité de composites isotropes à inclusions sphériques. Il utilise la solution analytique du problème d'une sphère composite à phases isotropes, noyée dans un milieu infini homogène et isotrope soumis à un chargement homogène à l'infini.

À la différence du modèle autocohérent classique présenté à la section 1.3.4.3, le milieu infini a cette fois les propriétés du milieu homogène équivalent, la démarche suivie pour l'obtention du comportement équivalent reste identique.

Le module de compressibilité équivalent k_{3Ph}^* ainsi obtenu est celui trouvé par Ha-

shin dans le cas de l'assemblage des sphères composites (Hashin, 1983 [54]) soit :

$$k_{3Ph}^* = k_1 + c_2 (k_2 - k_1) \frac{1}{1 + (1 - c_2) \left(\frac{k_2 - k_1}{k_1 + \frac{4}{3} \mu_1} \right)} \quad (1.108)$$

et le module de cisaillement équivalent μ_{3Ph}^* est obtenu par résolution de l'équation implicite suivante :

$$\mu_{3Ph}^* = \mu_1 + c_2 \mu_1 F(c_2, \beta, \frac{\mu_{3Ph}^*}{\mu_1}) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad (1.109)$$

où la fonction F est donnée par :

$$F(c, \beta, \beta_0) = \left(A(1 - c) + \frac{1}{\beta - 1} - \frac{c(1 - c^{\frac{2}{3}})^2}{Bc^{\frac{7}{3}} + C + \frac{D}{\beta_0 - 1}} \right)^{-1} \quad (1.110)$$

où A , B , C et D sont des constantes qui s'expriment en fonction des coefficients de Poisson des phases par :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(4 - 5\nu_1)}{15(1 - \nu_1)} \\ B &= \frac{10(1 - \nu_1)}{21} \frac{(7 - 10\nu_2)(7 + 5\nu_1) - \beta(7 - 10\nu_1)(7 + 5\nu_2)}{4(7 - 10\nu_2) + \beta(7 + 5\nu_2)} \\ C &= \frac{10}{21}(7 - 10\nu_1)(1 - \nu_1) \\ D &= \frac{25}{6}(1 - \nu_1) \end{aligned}$$

Le comportement équivalent d'un milieu poreux se déduit en faisant tendre k_2 et μ_2 vers zéro. Ainsi, le module de compressibilité est confondu avec la borne supérieure de Hashin-Shtrikman, soit :

$$k_{3Ph}^* = k_s - \phi k_s \frac{3k_s + 4\mu_s}{3\phi k_s + 4\mu_s} = k_s - \phi k_s \frac{1}{(1 - (1 - \phi) a_E^s)}, \quad (1.111)$$

et le module de cisaillement est donné par l'équation suivante :

$$\mu_{3Ph}^* = \mu_s + \phi \mu_s F(\phi, 0, \frac{\mu_{3Ph}^*}{\mu_s}). \quad (1.112)$$

A partir du modèle des 3 phases présentés précédemment, Hervé et Zaoui (Hervé et Zaoui, 1993 [61]) ont proposé une généralisation pour un matériau à n phases entourant une inclusion. En s'inspirant de cette analyse du comportement du milieu à $(n + 1)$ phases, Hervé et Pellegrini (Hervé et Pellegrini, 1995 [58]) ont établi une analyse similaire pour un milieu à n phases sphériques entourant un pore.

1.3.4.5 Estimations par approches énergétiques

L'application du théorème de minimisation de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire fournit des encadrements du comportement équivalent. Considérons ainsi le problème local d'homogénéisation en approche déformation. Le champ de déplacement \mathbf{u} solution de ce problème local minimise l'énergie potentielle sur l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles. Soit donc :

$$I(\mathbf{u}) \leq I(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad} = \{\mathbf{v} \text{ régulier} / \mathbf{v} = \mathbf{E}y, \forall y \in \partial Y\},$$

$$\text{avec } I(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbb{C}(y) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dy.$$

Le champ $\boldsymbol{\sigma}$ solution de ce problème minimise l'énergie complémentaire soit :

$$J(\boldsymbol{\sigma}) \leq J(\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad} = \{\boldsymbol{\tau} \text{ régulier et symétrique} / \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \forall y \in Y\},$$

$$\text{avec } J(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \int_Y \boldsymbol{\tau}(y) : \mathbb{S}(y) : \boldsymbol{\tau}(y) dy - \int_{\partial Y} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \mathbf{E} y ds.$$

De plus, $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ solutions du problème local vérifient $I(\mathbf{u}) + J(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

Par définition même du tenseur de rigidité homogénéisé, on a donc :

$$- \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\tau} \rangle + 2\mathbf{E} : \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \leq \mathbf{E} : \mathbb{C}^* : \mathbf{E} \leq \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle \quad (1.113)$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ et } \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}$$

De la même manière, si l'on considère maintenant le problème cellulaire en approche contrainte, on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\tau} \rangle \leq \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}^* : \boldsymbol{\Sigma} \leq \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle - 2\boldsymbol{\Sigma} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle \quad (1.114)$$

$$\forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad} = \{\boldsymbol{\tau} \text{ régulier et symétrique} / \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \forall y \in Y, \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \forall y \in \partial Y\}$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad} = \{\mathbf{v} \text{ régulier}\}.$$

Des choix particuliers des champs admissibles fournissent alors différents encadrements du comportement équivalent.

Bornes de Voigt et Reuss

Ainsi, le champ de déplacement $\mathbf{v}(y) = \mathbf{E}y \forall y \in Y$ est admissible pour le problème en approche déformation et conduit à :

$$\mathbb{C}^* \leq \mathbb{C}_V = c_1 \mathbb{C}_1 + c_2 \mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_1 + c_2(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) \quad (1.115)$$

Le champ de contrainte uniforme $\boldsymbol{\tau}(y) = \boldsymbol{\Sigma} \forall y \in Y$ est admissible pour le problème en approche contrainte et conduit à :

$$\mathbb{S}^* \leq \mathbb{S}_R = c_1 \mathbb{S}_1 + c_2 \mathbb{S}_2 = \mathbb{S}_1 + c_2(\mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_1) \quad (1.116)$$

On obtient l'encadrement simple suivant pour le comportement équivalent appelé bornes de Voigt et Reuss, à partir de ces champs uniformes en déformation ou en

contrainte :

$$\mathbb{C}_R = \left(\sum_{i=1}^{i=2} c_i \mathbb{C}_i^{-1} \right)^{-1} \leq \mathbb{C}^* \leq \mathbb{C}_V = \sum_{i=1}^{i=2} c_i \mathbb{C}_i \quad (1.117)$$

Pour des matériaux fortement contrastés, cet encadrement est large.

Pour un milieu poreux isotrope constitué d'un squelette isotrope, les modules homogènes équivalents sont ainsi encadrés par :

$$0 \leq k^* \leq k_v^* = k_s(1 - \phi) \quad (1.118)$$

$$0 \leq \mu^* \leq \mu_v^* = \mu_s(1 - \phi) \quad (1.119)$$

La borne de Reuss se réduit à la valeur nulle. La géométrie des pores n'intervient pas dans la construction de cet encadrement. L'approche d'Hashin et Shtrikman améliore cet encadrement en tenant compte de la géométrie des inclusions ou des pores.

Bornes de Hashin-Shtrikman

Des bornes plus resserrées ont été proposées par Hashin et Shtrikman (Hashin et Shtrikman, 1963 [57]). La démarche générale suivie pour établir ces bornes améliorées repose sur une formulation du problème variationnel nouvelle en déformation homogène (1.113) nouvelle par l'introduction d'un milieu linéaire homogène, de module \mathbb{C}^0 , soumis sur ces bords aux mêmes conditions aux limites que le milieu hétérogène et à champ de polarisation \mathbf{p}^* supposé uniforme par phase. Le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\tau}$ de ce nouveau problème est ainsi relié au tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ par la relation $\boldsymbol{\tau} = \mathbb{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{p}^*$. La définition d'une fonctionnelle de polarisation dite de Hashin Shtrikman permet de majorer et de minorer l'énergie effective du matériau hétérogène et d'obtenir respectivement une borne supérieure et inférieure. Pour de plus amples détails sur la manière d'obtenir ces bornes, on se référera par exemple, à Bornert (Bornert, 1996 [16]), ou à Zaoui (Zaoui, 1997 [109]).

Pour un matériau à deux phases dont la phase 2 est plus rigide que la phase 1 et présente une symétrie ellipsoïdale (Willis, 1977 [107]), les bornes de Hashin-Shtrikman peuvent être écrites sous la forme :

$$\mathbb{C}^{HS-} \leq \mathbb{C}_{HS}^* \leq \mathbb{C}^{HS+} \quad (1.120)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{HS-} &= \mathbb{C}_1 + c_2 (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + c_1 \mathbb{P}_E^1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)]^{-1} \\ \mathbb{C}^{HS+} &= \mathbb{C}_2 + c_1 (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2) : [\mathbb{I} + c_2 \mathbb{P}_E^2 : (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2)]^{-1} \end{aligned}$$

où \mathbb{P}_E^α désigne le tenseur de polarisation associé au milieu α ($\alpha=1$ ou 2) défini précédemment par :

$$\mathbb{P}_E^1 = \mathbb{S}_E^1 : \mathbb{C}_1^{-1}, \quad \mathbb{P}_E^2 = \mathbb{S}_E^2 : \mathbb{C}_2^{-1}$$

Pour des constituants isotropes, Hashin et Shtrikman ont montré que les propriétés effectives sont encadrées par les expressions suivantes :

$$k^{HS-} \leq k_{HS}^* \leq k^{HS+} \quad (1.121)$$

$$\mu^{HS-} \leq \mu_{HS}^* \leq \mu^{HS+} \quad (1.122)$$

avec

$$k^{HS-} = k_1 + c_2(k_2 - k_1) \frac{1}{(1 - c_1 a_E^1) + c_1 a_E^1 \frac{k_2}{k_1}} \quad (1.123a)$$

$$k^{HS+} = k_2 + c_1(k_1 - k_2) \frac{1}{(1 - c_2 a_E^2) + c_2 a_E^2 \frac{k_1}{k_2}} \quad (1.123b)$$

$$\mu^{HS-} = \mu_1 + c_2(\mu_2 - \mu_1) \frac{1}{(1 - c_1 b_E^1) + c_1 b_E^1 \frac{\mu_2}{\mu_1}} \quad (1.124a)$$

$$\mu^{HS+} = \mu_2 + c_1(\mu_2 - \mu_1) \frac{1}{(1 - c_2 b_E^2) + c_2 b_E^2 \frac{\mu_1}{\mu_2}} \quad (1.124b)$$

Ainsi, dans le cas d'un milieu poreux isotrope constitué d'une partie solide de caractéristiques élastiques (k_s, μ_s) et de pores sphériques avec une porosité ϕ , les coefficients homogénéisés sont encadrés par :

$$0 \leq k^{HS} \leq k_s - \phi k_s \frac{1}{(1 - (1 - \phi) a_E^s)} \quad (1.125)$$

$$0 \leq \mu^{HS} \leq \mu_s - \phi \mu_s \frac{1}{(1 - (1 - \phi) b_E^s)} \quad (1.126)$$

Les bornes générales de Hashin et Shtrikman fournissent un encadrement d'autant plus serré que le rapport de raideur entre les deux phases est faible, situé en dessous de 10 par exemple. Pour des rapports supérieurs à 10, comme dans le cas limite des milieux poreux, les bornes s'écartent. Dans le cas d'un milieu poreux, la borne inférieure tend vers 0 et la borne supérieure est confondue avec celle fournie en (1.101) par Mori-Tanaka.

Borne de Hervé-Stolz-Zaoui

Hervé, Stolz et Zaoui (Hervé et al., 1991 [59]) ont proposé plus récemment une nouvelle borne supérieure pour le module de cisaillement en utilisant l'hypothèse additionnelle d'isotropie de l'assemblage des sphères composites. Cette borne s'écrit sous la forme :

$$\mu^{HSZ+} = \mu_1 + c_2 \mu_1 F(c_2, \beta, \beta_0) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{et} \quad \beta_0 = \beta \quad (1.127)$$

avec $F(c_2, \beta, \beta_0)$ donnée par (2.45)

Le module de compressibilité correspond à celui fourni par l'assemblage de sphère composite (Hashin, 1962 [53]).

1.3.4.6 Schéma différentiel

La méthode du schéma différentiel appliquée aux matériaux contenant une distribution aléatoire d'hétérogénéités a été proposée par Mc Laughlin (Mc Laughlin, 1977 [78]). Elle consiste à considérer un volume élémentaire composite unitaire caractérisé par un comportement équivalent $\mathbb{C}(c)$ et un taux d'hétérogénéité c . A ce volume est

ajouté une fraction volumique δc de renfort, le comportement du nouveau volume élémentaire vaut :

$$\mathbb{C}(c + \delta c) = \mathbb{C}(c) + \frac{\delta c}{1 + \delta c}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}(c)) : \mathbb{A}_2 \quad (1.128)$$

où \mathbb{A}_2 est la moyenne sur la phase inclusionnaire du tenseur de localisation associé aux hétérogénéités, soit :

$$\mathbb{A}_2 = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_E : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C})]^{-1} \quad (1.129)$$

où \mathbb{P}_E est le tenseur de polarisation défini par Hill associé à la matrice de module \mathbb{C} .

On remarque qu'il s'agit ici du tenseur de localisation de la méthode des distributions diluées en approche déformation donné en (1.83).

Ce processus d'homogénéisation est ensuite réitéré en ôtant au préalable une fraction δc du milieu homogène au volume élémentaire précédent de façon à considérer toujours un volume unitaire. En supposant δc petit, on a d'après (1.128) :

$$\frac{d\mathbb{C}}{dc} = \frac{1}{1 - c}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}) : \mathbb{A}_2 \quad (1.130)$$

Cette équation différentielle tensorielle est à compléter par des conditions initiales : $\mathbb{C}(c = 0) = \mathbb{C}_1$ où \mathbb{C}_1 le tenseur de rigidité de la matrice.

Dans le cas d'un matériau constitué d'inclusions sphériques distribuées dans une matrice isotrope, les équations (1.129) et (1.130) permettent d'obtenir le système d'équations différentielles scalaires suivant pour les modules équivalents de compressibilité k_{SD}^* et de cisaillement μ_{SD}^* (McLaughlin, 1977 [78], Norris, 1985 [82]) :

$$\frac{1}{k_{SD}^*} \frac{dk_{SD}^*}{dc} = \frac{1}{1 - c} (k_2 - k_{SD}^*) \frac{(3k_{SD}^* + 4\mu_{SD}^*)}{k_{SD}^*(3k_2 + 4\mu_{SD}^*)} \quad (1.131)$$

$$\frac{1}{\mu_{SD}^*} \frac{d\mu_{SD}^*}{dc} = \frac{1}{1 - c} (\mu_2 - \mu_{SD}^*) \frac{5(3k_{SD}^* + 4\mu_{SD}^*)}{6\mu_2(k_{SD}^* + 2\mu_{SD}^*) + \mu_{SD}^*(9k_{SD}^* + 8\mu_{SD}^*)} \quad (1.132)$$

McLaughlin a proposé d'introduire le paramètre Γ relié à la fraction volumique totale d'inclusion c par : $c = 1 - e^{(-\Gamma)}$. Les équations (1.131) et (1.132) deviennent alors :

$$\frac{1}{k_{SD}^*} \frac{dk_{SD}^*}{d\Gamma} = F_k = (k_2 - k_{SD}^*) \frac{(3k_{SD}^* + 4\mu_{SD}^*)}{k_{SD}^*(3k_2 + 4\mu_{SD}^*)} \quad (1.133)$$

$$\frac{1}{\mu_{SD}^*} \frac{d\mu_{SD}^*}{d\Gamma} = F_\mu = (\mu_2 - \mu_{SD}^*) \frac{5(3k_{SD}^* + 4\mu_{SD}^*)}{6\mu_2(k_{SD}^* + 2\mu_{SD}^*) + \mu_{SD}^*(9k_{SD}^* + 8\mu_{SD}^*)} \quad (1.134)$$

Des solutions explicites de ce système ont pu être établies dans les deux cas limites d'inclusions rigides et des pores (Zimmerman, 1991 [112]). Ainsi, les équations régies

par les modules effectifs d'un milieu poreux s'écrivent :

$$\frac{1}{k_{SD}^*} \frac{dk_{SD}^*}{d\Gamma} = F_k = -\frac{3k_{SD}^* + 4\mu_{SD}^*}{4\mu_{SD}^*} = \frac{-3(1 - \nu_{SD}^*)}{2(1 - 2\nu_{SD}^*)} \quad (1.135)$$

$$\frac{1}{\mu_{SD}^*} \frac{d\mu_{SD}^*}{d\Gamma} = F_\mu = -\frac{5(3k_{SD}^* + 4\mu_{SD}^*)}{9k_{SD}^* + 8\mu_{SD}^*} = \frac{-15(1 - \nu_{SD}^*)}{7 - 5\nu_{SD}^*} \quad (1.136)$$

En introduisant le rapport $\beta = \mu_{SD}^*/k_{SD}^*$ et en combinant les équations (1.135) et (1.136), on obtient :

$$\frac{dk_{SD}^*}{k_{SD}^*} = -\frac{(8\beta + 9)d\beta}{3\beta(4\beta - 3)} \quad (1.137)$$

La solution de cette équation s'obtient alors par intégration en tenant compte des conditions initiales $k_{SD}^* = k_s$ et $\mu_{SD}^* = \mu_s$ pour $\phi = \Gamma = 0$, soit :

$$\frac{k_{SD}^*}{k_s} = -\frac{\beta_s(4\beta - 3)}{\beta(4\beta_s - 3)} \quad \text{avec} \quad \beta_s = \frac{\mu_s}{k_s}. \quad (1.138)$$

Soit encore :

$$\frac{\mu_{SD}^*}{k_{SD}^*} = \frac{3}{4} + \frac{3(1 - 5\nu_s)}{4(1 + \nu_s)} \left(\frac{\mu_{SD}^*}{\mu_s} \right)^{\frac{3}{5}} \quad (1.139)$$

En substituant (1.139) dans (1.136), on obtient alors une équation découplée pour le module de cisaillement équivalent en fonction de Γ :

$$-\frac{d \ln \mu_{SD}^*}{d\Gamma} = \frac{10(1 + \nu_s) + 5(1 - 5\nu_s)(\mu_{SD}^*/\mu_s)^{3/5}}{5(1 + \nu_s) + 2(1 - 5\nu_s)(\mu_{SD}^*/\mu_s)^{3/5}} \quad (1.140)$$

On trouve finalement, après un changement de variable approprié et intégration, la relation suivante pour le module de cisaillement équivalent :

$$\frac{\mu_{SD}^*}{\mu_s} = (1 - \phi)^2 \left(\frac{2(1 + \nu_s) + (1 + 5\nu_s)(\mu_{SD}^*/\mu_s)^{3/5}}{3(1 - \nu_s)} \right)^{1/3} \quad (1.141)$$

Le module de compressibilité équivalent est alors fourni par la relation (1.138).

Ces différentes méthodes seront illustrées et confrontées au chapitre 2 dans le cas d'un milieu poreux.

1.3.5 Méthodologies d'homogénéisation en élasticité non linéaire

Les premiers travaux d'homogénéisation dans le domaine non linéaire ont été initiés dans le cadre de la plasticité des monocristaux. Ces approches formulées par Taylor et bien d'autres dans les années 30 sont alors plus proches de la métallurgie physique que de la mécanique des solides.

Ce n'est qu'en 1951 que le modèle de Taylor fut réintégré dans le cadre rigoureux de la théorie de la plasticité et généralisé pour des chargements quelconques par Bishop et Hill (Bishop et Hill, 1951 [15]). Puis au début des années 60, au moment où l'intérêt

grandit pour la micromécanique des composites motivé par la solution d'Eshelby du problème d'inclusion, une nouvelle approche du passage du monocristal au polycristal en élastoplasticité a été élaborée par Kröner et Budiansky et al. (Budiansky et al., 1960 [24]) en rapprochant la déformation plastique de la notion de déformation libre introduite par Eshelby. En utilisant les développements réalisés en élasticité sur le problème de l'inclusion, Kröner a ainsi pu élargir le champ d'application du modèle autocohérent en direction de l'élastoplasticité. Mais, cette extension n'aborde pas vraiment le problème de l'écoulement plastique.

En s'appuyant sur les travaux de Kröner, Hill (Hill, 1965 [63]) aborde alors l'homogénéisation en plasticité par un traitement incrémental linéarisé en se ramenant à chaque pas à un problème de type élastique. L'idée sous-jacente de cette approche consiste à assimiler le milieu non linéaire réel, dans un état donné, à un milieu linéaire fictif ayant localement des caractéristiques mécaniques déduites par linéarisation de celle du milieu réel. Cette notion de "milieu linéaire de comparaison" sera systématisée ultérieurement par Ponte Castañeda (Ponte Castañeda, 1991 [83]). Les schémas d'homogénéisation linéaire, peuvent être alors appliqués à ce matériau linéaire de comparaison.

Mais la définition du matériau linéaire de comparaison se heurte en pratique à une difficulté due à la non uniformité des champs mécaniques locaux non seulement d'une phase à l'autre mais aussi d'un point à l'autre d'une même phase. Le matériau linéaire de comparaison construit possède ainsi une infinité continue de phases à l'issue de la linéarisation. Cette difficulté peut être contournée en linéarisant par morceaux le comportement de chaque phase autour d'un état mécanique de référence. Différentes formulations ont été proposées ces dernières années pour réaliser cette linéarisation dans chaque phase.

Nous nous proposons dans cette section de présenter brièvement le problème non linéaire d'homogénéisation, puis de rappeler le principe général de la linéarisation avant d'introduire la bibliographie associée à quelques unes de ces extensions non linéaires.

1.3.5.1 Problème local d'homogénéisation non linéaire

Nous nous replaçons dans le cadre général de l'homogénéisation du comportement d'un milieu hétérogène introduit à la section 1.3.1. Cette fois, les phases du milieu présentent un comportement élastique non linéaire, l'hypothèse des petites perturbations reste conservée. Ce comportement non linéaire de chaque phase est caractérisé à travers un potentiel de déformation $v(\boldsymbol{\varepsilon}(y), y)$ qui dépend non linéairement de la déformation locale linéarisée $\boldsymbol{\varepsilon}(y)$ et, de part l'hétérogénéité du milieu, du point y considéré dans le VER.

La loi de comportement qui relie le tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}(y)$ à la déformation s'écrit alors dans chaque phase α :

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = \frac{\partial v^\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y), y) \quad (1.142)$$

Cette relation s'inverse en introduisant le potentiel de contrainte dual $w^\alpha(\boldsymbol{\sigma}(y), y)$ défini à partir du potentiel de déformation comme la transformée de Legendre :

$$w^\alpha(\boldsymbol{\sigma}(y), y) = \underset{\boldsymbol{\varepsilon}}{Sup} \{ \boldsymbol{\sigma}(y) : \boldsymbol{\varepsilon}(y) - v^\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(y), y) \}, \quad (1.143)$$

de sorte que :

$$v^\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(y), y) + w^\alpha(\boldsymbol{\sigma}(y), y) = \boldsymbol{\sigma}(y) : \boldsymbol{\varepsilon}(y). \quad (1.144)$$

D'où, la loi de comportement sous la forme duale :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y) = \frac{\partial w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(y), y). \quad (1.145)$$

Le problème local d'homogénéisation posé sur le VER est cette fois non linéaire. Il s'écrit alors conformément à la section 1.3.1 :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(y) &= 0 & y \in Y \\ \boldsymbol{\sigma}(y) &= \frac{\partial v^\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(y) = \frac{\partial w^\alpha}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}(y), y) & y \in Y \\ \boldsymbol{\varepsilon}(y) &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(y) + \nabla^t \mathbf{u}(y)) & y \in Y \end{aligned} \quad (1.146)$$

avec dans une approche déformation imposée :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle = \mathbf{E}$$

et dans une approche contrainte imposée :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle = \boldsymbol{\Sigma}$$

Dans l'approche des modules effectifs présentée au paragraphe précédent, nous avons vu que ces relations peuvent être vérifiées en imposant les conditions aux limites classiques suivantes :

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} y \quad \text{sur } \partial Y \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial Y \quad (1.147)$$

Sous des hypothèses de régularité, on peut montrer que la solution $\mathbf{u}(y)$ du problème local d'homogénéisation en approche déformation vérifie :

$$\langle v^\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(y)), y) \rangle = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}} \langle v^\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}(y)), y) \rangle = V(\mathbf{E}) \quad (1.148)$$

avec $\mathcal{U}_{ad} = \{\mathbf{v}(y) \text{ régulier} / \mathbf{v}(y) = \mathbf{E} y, \forall y \in \partial Y\}$ et $V(\mathbf{E})$ représente l'énergie de déformation homogénéisée.

De même $\boldsymbol{\sigma}(y)$ solution du problème local d'homogénéisation en approche contrainte imposée, vérifie :

$$\langle w^\alpha(\boldsymbol{\sigma}(y), y) \rangle = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{ad}} \langle w^\alpha(\boldsymbol{\tau}(y), y) \rangle = W(\boldsymbol{\Sigma}) \quad (1.149)$$

avec $\Sigma_{ad} = \{\boldsymbol{\tau}(y) \text{ régulier et symétrique} / \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}(y) = 0, \forall y \in Y, \boldsymbol{\tau}(y) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \forall y \in \partial Y\}$ et $W(\boldsymbol{\Sigma})$ représente l'énergie complémentaire homogénéisée.

Le comportement homogène équivalent est alors défini, dans l'approche déformation imposée, par la relation entre grandeurs moyennes suivantes (Willis, 1989 [108]) :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle = \boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} [\langle v^\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(y)), y) \rangle] \quad (1.150)$$

et dans l'approche contrainte :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle = \mathbf{E} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} [\langle w^\alpha(\boldsymbol{\sigma}(y), y) \rangle] \quad (1.151)$$

L'obtention du comportement homogénéisé passe donc, comme en élasticité linéaire par la résolution du problème local d'homogénéisation. Des estimations de ce comportement ont été proposées comme cela a été dit précédemment en procédant à une linéarisation de la loi de comportement locale. Nous nous proposons de décrire au paragraphe suivant le principe de cette linéarisation.

1.3.5.2 Principe de linéarisation du comportement local

Pour simplifier la présentation de cette phase de linéarisation, nous considérons, dans ce paragraphe, un matériau dont les constituants présentent un comportement homogène isotrope. Ce comportement est supposé, pour simplifier également, linéaire sous un chargement de compression isotrope. Dans ce cas, le potentiel de déformation $v^\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(y), y)$ de chaque phase introduit au paragraphe précédent s'écrit sous la forme suivante (Suquet, 1997 [97], Bornert et al., 2001 [18]) :

$$v^\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) = \frac{1}{2} k_\alpha [\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(y))]^2 + f^\alpha(\varepsilon_{eq}^2(y)), \quad (1.152)$$

où $\varepsilon_{eq}(y)$ désigne la déformation équivalente définie par :

$$\varepsilon_{eq}(y) = \left(\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_d(y) \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_d(y) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.153)$$

qui s'exprime en fonction de la partie déviatorique des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_d(y)$, soit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d(y) = \boldsymbol{\varepsilon}(y) - \frac{1}{3} (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(y))) \mathbf{1} \quad (1.154)$$

et où f^α désigne une fonction de la déformation équivalente définie par :

$$f^\alpha(t(y)) = \int_0^{t^{1/2}} 3\mu_\alpha^{sct}(e(y)) e(y) de \quad (1.155)$$

avec μ_α^{sct} le module de cisaillement sécant de la phase α qui dépend non linéairement de la déformation.

En pratique pour les illustrations présentées dans la suite de ce travail, nous retiendrons le plus souvent comme il est suggéré par Suquet (Suquet, 1997 [97]) et Bornert (Bornert et al., 2001 [18]) par exemple, une évolution du module de cisaillement sécant en fonction de la déformation équivalente sous forme d'une loi puissance :

$$\mu_\alpha^{sct}(\varepsilon_{eq}) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0^\alpha}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_0} \right)^{m-1} \quad (1.156)$$

où σ_0^α est une contrainte de référence qui dépend des phases, ε_0 une déformation de

référence et m un paramètre d'écroissage qui peut éventuellement dépendre de la phase α .

La loi de comportement des phases s'obtient alors à partir de ce potentiel par la relation (1.142) et s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = 3 k_\alpha \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) \mathbf{1} + 2 \mu_\alpha^{\text{sct}}(\varepsilon_{eq}(y)) \boldsymbol{\varepsilon}_d(y) \quad (1.157)$$

Cette loi non linéaire peut être écrite dans chaque phase sous une formulation équivalente, dite "formulation sécante" :

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{C}_\alpha^{\text{sct}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) : \boldsymbol{\varepsilon}(y) \quad (1.158)$$

avec $\mathbb{C}_\alpha^{\text{sct}}$ le tenseur de rigidité sécant des phases qui s'écrit dans le cas des phases isotropes :

$$\mathbb{C}_\alpha^{\text{sct}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) = 3 k_\alpha \mathbb{J} + 2 \mu_\alpha^{\text{sct}}(\varepsilon_{eq}(y)) \mathbb{K}. \quad (1.159)$$

Une autre formulation de la loi de comportement (1.158) est considérée dans l'approche incrémentale. Elle consiste à dériver la loi de comportement (1.158) par rapport au temps, soit :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(y) = \mathbb{C}_\alpha^{\text{tgt}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(y) \quad (1.160)$$

où le "." désigne la différenciation par rapport au temps et où le tenseur de rigidité tangent est par définition même donné par :

$$\mathbb{C}_\alpha^{\text{tgt}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) = \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)). \quad (1.161)$$

Dans le cas de phases isotropes, on a, (Bornert, 1996 [16]) :

$$\mathbb{C}_\alpha^{\text{tgt}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) = 3 k_\alpha \mathbb{J} + 2 \mu_\alpha^{\text{sct}}(\varepsilon_{eq}(y)) \mathbb{K} + 2 \frac{d\mu_\alpha^{\text{sct}}}{d\varepsilon_{eq}}(\varepsilon_{eq}(y)) \varepsilon_{eq}(y) \mathbb{L} \quad (1.162)$$

avec

$$\mathbb{L} = \frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon_{eq}^2} (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \otimes \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}), \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_d}{\varepsilon_{eq}}$$

Le principe de ces différentes formulations linéarisées au comportement des phases est schématisé à la *Figure 1.4* extraite de la présentation de Suquet (Suquet, 1997 [97]).

Le problème local d'homogénéisation (1.146) et (1.147) peut être ainsi linéarisé en introduisant les lois de comportement locales des phases (1.158) et (1.160). Une résolution numérique par un calcul par éléments finis peut être alors effectuée, comme le proposent Moulinec et Suquet (Moulinec et Suquet, 1994 [80]) et le comportement homogène équivalent s'obtient à chaque pas de chargement par la relation entre la moyenne des contraintes locales solution et le chargement en déformations uniformes imposées.

On peut également penser, dans la continuité de ce qui a été présenté précédemment, à exploiter les méthodes prédictives d'homogénéisation linéaire. Pour cela, il est nécessaire de procéder à une seconde linéarisation. Les tenseurs de rigidité sécant et tangent sont en effet variables au sein d'une même phase de par leur dépendance en

fonction de la déformation locale.

Cette seconde approximation consiste à remplacer les tenseurs de rigidité sécant ou tangent variables par des tenseurs homogènes par phase. On parle de “relations complémentaires” selon la terminologie employée par Suquet 1997 (Suquet, 1997 [97]) et Bornert (Bornert, 1996 [16]).

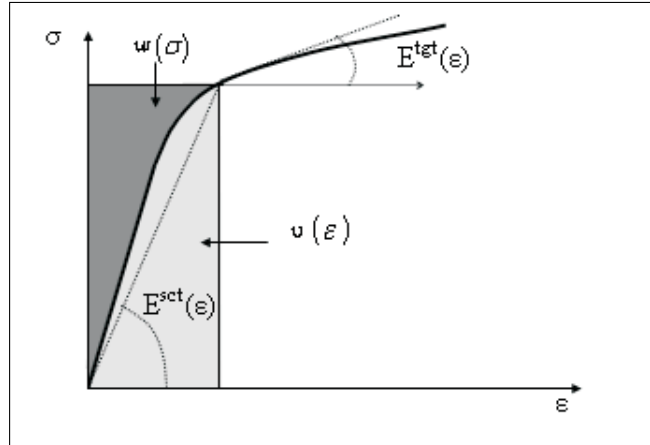


Figure 1.4 — Illustration unidimensionnelle des formulations linéarisées du comportement non linéaire des phases (Suquet, 1997 [97])

Différents choix ont été proposés pour ces relations complémentaires. Le choix le plus simple consiste à remplacer dans les expressions des tenseurs sécants (1.158) et tangents (1.160) de chaque phase la déformation locale par la moyenne de la déformation dans la phase soit donc :

$$\mathbb{C}_\alpha^{sct}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) \simeq \mathbb{C}_\alpha^{sct}(\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_\alpha), \quad (1.163)$$

ou

$$\mathbb{C}_\alpha^{tgt}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) \simeq \mathbb{C}_\alpha^{tgt}(\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_\alpha). \quad (1.164)$$

D’autres choix ont été proposés dans la littérature, en particulier, Suquet (Suquet, 1995 [95]) a proposé une dépendance du tenseur sécant non linéaire en fonction de la moyenne des déformations par phase avec l’approximation :

$$\mathbb{C}_\alpha^{sct}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) \simeq \mathbb{C}_\alpha^{sct} \left((\langle \varepsilon_{eq}^2(y) \rangle_\alpha)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (1.165)$$

L’approximation (1.163) est effectuée dans les modèles dits “extension sécante classique”, l’approximation (1.164) est effectuée dans la méthode incrémentale et l’approche (1.165) dans la méthode dite “extension sécante modifiée”.

Le problème local d’homogénéisation ainsi linéarisé s’identifie alors à un problème linéaire d’homogénéisation posé sur un composite linéaire appelé “composite linéaire de comparaison” (Ponte Castañeda, 1991 [83]).

Les méthodes analytiques décrites à la section précédente peuvent être alors exploitées et fournissent des estimations du comportement homogène équivalent du milieu hétérogène non linéaire.

La démarche de cette extension non linéaire des méthodes d’homogénéisation

linéaires est résumée à la *Figure 1.5* selon le schéma proposé par Bornert et al. (Bornert et al., 2001 [18]).

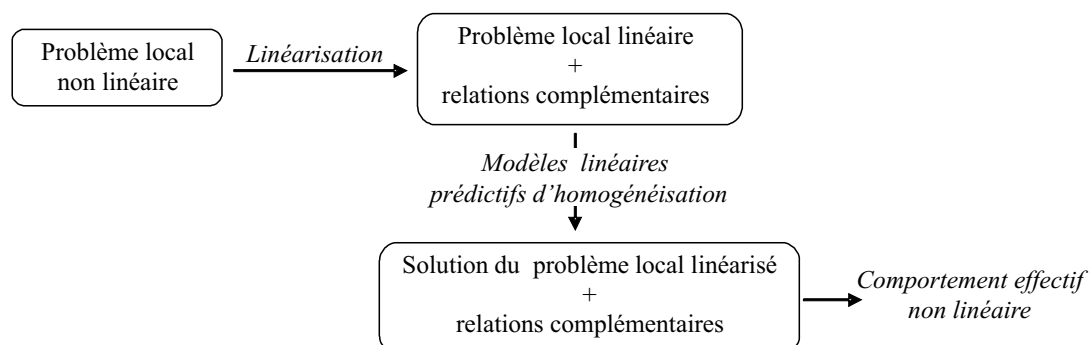


Figure 1.5 — Principe général des extensions non linéaires (Bornert et al., 2001[18]).

Nous reviendrons plus en détails au chapitre 3 sur la mise en œuvre pratique de la démarche plus spécifiquement dans le cas des modèles sécants classique et modifié.

Nous nous proposons à ce stade d'introduire quelques références bibliographiques sur les modèles d'homogénéisation non linéaires par extension des approches explicites linéaires proposées dans la littérature.

1.3.5.3 Exemples de modèles d'homogénéisation non linéaires

Sans prétendre être exhaustif, nous pouvons tout d'abord citer quelques modèles d'homogénéisation qui s'appuient sur une formulation incrémentale des lois de comportement, comme Hill (Hill, 1965 [63]) et Hutchinson (Hutchinson, 1970 [66], 1976 [67]).

Hill a proposé d'exploiter à chaque incrément de chargement la solution du problème d'Eshelby associé au modèle autocohérent pour construire le comportement élastoplastique de polycristaux. Le tenseur des modules tangents est pris uniforme dans le milieu infini effectif et le cristal suivant l'approximation (1.164). La mise en œuvre de ce modèle s'est heurtée aux expressions complexes des tenseurs de polarisation dues à l'anisotropie du tenseur tangent. La première mise en œuvre numérique de la méthode pour une loi de comportement plastique revient à Hutchinson (Hutchinson, 1976 [67]) dans une situation d'isotropie transverse où le tenseur de polarisation tangent admet une expression analytique.

Berveiller et Zaoui (Berveiller et Zaoui, 1979 [11]) ont adopté une démarche similaire mais cette fois par une approche sécante classique (1.163) dans le cadre de la plasticité polycristalline isotrope. Chu et Hashin (Chu et Hashin, 1971 [30]) ont étendu cette approche à un chargement hydrostatique et Tandon et Weng (Tandon et Weng, 1988 [100]) à différents composites. L'approche Mori-Tanaka a ainsi été utilisée pour décrire le comportement élastoplastique de composites à matrice élasto-plastique et inclusions élastiques sphériques (Tandon et Weng, 1988 [100]) ou ellipsoïdales et orientées de manière isotrope (Qiu et Weng, 1992 [88]). Le module sécant de la matrice est supposé

uniforme et est associé à la valeur moyenne de sa déformation, telle que donnée par le modèle de Mori-Tanaka, c'est à dire la valeur à l'infini dans les problèmes d'inclusions. La nature explicite des relations rend la construction de la courbe de traction macroscopique particulièrement simple. Lorsque deux constituants ont un comportement non linéaire (Weng, 1990 [105]), la résolution est légèrement plus délicate, car il faut déterminer la déformation moyenne de l'une des phases lorsque celle de l'autre phase est imposée.

L'extension du modèle autocohérent généralisé en non linéaire a été proposée par Hervé et Zaoui (Hervé et Zaoui, 1990 [60]) par une approche sécante pour des composites à phases non linéaires. Les modules sécants sont supposés uniformes dans le milieu infini, comme pour l'extension du modèle autocohérent classique, mais aussi dans les deux phases de l'inclusion composite, malgré l'hétérogénéité des champs mécaniques, et sont associés aux déformations moyennes des phases correspondantes.

Les limitations de la linéarisation sécante classique à fournir des réponses non linéaires sous des sollicitations spécifiques ont motivé plusieurs auteurs à remplacer la déformation effective dans chaque phase, non pas par la moyenne classique mais par la moyenne quadratique conformément à la relation (1.165). Une démarche a été ainsi proposée par Qiu et Weng (Qiu et Weng, 1992 [88]) dans le cadre des matériaux poreux non linéaires. Suquet (Suquet, 1995 [95]) a proposé également de telle procédure de linéarisation par des matériaux composites non linéaires indépendamment des travaux analogues développés par Hu (Hu, 1996 [65]).

Une approche variationnelle permet, comme en élasticité linéaire, de construire des bornes du comportement équivalent. Les plus simples sont construites par extension des bornes établies par Voigt et Reuss en élasticité linéaire et sont explicites. Elles ont été proposées par Taylor (Taylor, 1938 [101]) et Batdorf et Budiansky (Batdorf et Budiansky, 1949 [5]). Elles consistent à choisir des champs tests à déformations et contraintes uniformes dans toutes les phases. Ainsi pour un composite à N phases non linéaires, on a d'après les inégalités (1.148) et (1.149) :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{E}) &\leq \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} \langle v^{\alpha}(\mathbf{E}) \rangle \\ W(\boldsymbol{\Sigma}) &\leq \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} \langle w^{\alpha}(\boldsymbol{\Sigma}) \rangle \end{aligned} \quad (1.166)$$

où c^{α} désigne la fraction volumique de la phase α , \mathbf{E} et $\boldsymbol{\Sigma}$ les champs macroscopiques imposés. Si les phases présentent un comportement isotrope incompressible et suivent la loi (1.152)-(1.156), avec le même exposant m pour chaque phase, on a :

$$v^{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\sigma_0^{\alpha} \varepsilon_0}{m+1} \left(\frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_0} \right)^{m+1}, \quad (1.167)$$

l'encadrement (1.166) devient :

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{c_{\alpha}}{\langle \frac{1}{\sigma_0^{\alpha}} \rangle} \frac{\varepsilon_0}{m+1} \left(\frac{\mathbf{E}_{eq}}{\varepsilon_0} \right)^{m+1} \leq V(\mathbf{E}) \leq \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} \langle \sigma_0^{\alpha} \rangle \frac{\varepsilon_0}{m+1} \left(\frac{\mathbf{E}_{eq}}{\varepsilon_0} \right)^{m+1}, \quad (1.168)$$

Des bornes plus serrées peuvent être obtenues comme en élasticité linéaire en ex-

plissant par exemple les bornes d'Hashin-Shtrikman pour le milieu linéarisé par une approche sécante classique ou modifiée. Talbot et Willis (Talbot et Willis, 1985 [98]) et Ponte Castañeda (Ponte Castañeda, 1991 [83]), en introduisant une procédure variationnelle basée sur un matériau de référence non homogène, ont proposé de nouvelles bornes. Suquet (Suquet, 1995 [95]) a proposé également des bornes simples en utilisant également un matériau linéaire de comparaison non homogène dans le cas de matériaux dont les phases suivent une loi puissance.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cherché tout d'abord à présenter les équations macroscopiques qui régissent le comportement hydromécanique des milieux poreux. La démarche et les outils d'une approche micromécanique ont été ensuite introduits et appliqués à la prédiction du comportement poroélastique de ces matériaux. En particulier, les méthodes d'homogénéisation explicites ont été présentées sous un même formalisme et développées dans le cas des milieux poreux. Puis le principe de leur extension dans le domaine non linéaire a été décrit.

Ces différents outils étant introduits, nous allons nous attacher maintenant à les mettre en œuvre pour montrer leurs limites. Ils seront enrichis par couplage à un processus itératif tout d'abord au chapitre 2 dans le cadre des milieux poreux élastiques, puis au chapitre 3 pour des milieux poreux non linéaires.

Homogénéisation par approche itérative du comportement poro-élastique linéaire des milieux poreux

2.1 Introduction

Différentes méthodes multi-échelles ont été présentées au chapitre précédent. Elles proposent des estimations du comportement homogénéisé des milieux poreux. Ces méthodes se différencient principalement par la configuration géométrique du volume élémentaire représentatif choisi, ainsi que par la façon d'imposer le chargement macroscopique à ce volume. Elles conduisent à des prédictions du comportement voisines pour des milieux faiblement poreux, mais sont souvent confrontées à la difficulté d'appréhender de façon précise le comportement de matériaux fortement poreux.

Dans ce chapitre, nous proposons une démarche d'homogénéisation itérative permettant de pallier cette limitation. Ce processus itératif d'homogénéisation exploite le fait que, pour des matériaux à faibles fractions volumiques d'hétérogénéités ou peu poreux, les différentes méthodes simplifiées d'homogénéisation fournissent des prédictions du comportement équivalent très proches. En procédant à des homogénéisations successives de milieux faiblement renforcés ou peu poreux, il devient possible d'unifier les prédictions des méthodes simplifiées d'homogénéisation également pour des matériaux élastiques linéaires fortement renforcés ou très poreux. Ce procédé d'homogénéisation permet ainsi d'étendre de façon significative le domaine de validité de certaines approches simplifiées comme la méthode des distributions diluées. Il permet également une estimation précise des contraintes ou déformations locales indispensables à toute étude micromécanique.

Cette démarche itérative a été initialement introduite dans des travaux antérieurs consacrés à l'étude du comportement et de l'endommagement des mousses syntactiques (Benhamida et Dumontet, 2003 [9], Brini, 2004 [22] et Brini et al., 2003 [23]).

L'objet de ce chapitre est d'étendre cette méthodologie à l'homogénéisation de mi-

lieux poreux élastiques linéaires. La présence de pores en pression demande en particulier une définition spécifique des opérateurs de moyenne et du coefficient de couplage poro-élastique. Une contribution de ce travail a également consisté à formaliser cette méthode d'homogénéisation itérative et à en apporter des justifications. Dans ce sens, le couplage avec de nouvelles méthodes explicites a été effectué et des études de sensibilité ont été menées.

Après une première description de son principe dans le cadre de matériaux biphasés, nous présentons la démarche de l'homogénéisation itérative de milieux poreux élastiques linéaires et détaillons son couplage aux approches classiques de la littérature. Puis, nous présentons l'algorithme de mise en œuvre. Différentes validations et applications sont ensuite menées pour mettre en évidence l'apport du processus proposé et justifier les résultats obtenus.

2.2 Présentation du processus itératif d'homogénéisation

Nous nous proposons dans ce paragraphe de présenter tout d'abord le principe général de ce processus itératif d'homogénéisation dans le cas de matériaux biphasés à constituants élastiques linéaires. Après l'avoir adapté au calcul du comportement hydroélastique de milieux poreux, nous détaillerons ensuite son couplage avec quelques méthodes d'homogénéisation de milieux poreux aléatoires décrites au chapitre 1.

2.2.1 Principe itératif pour les milieux biphasés

Le processus itératif d'homogénéisation repose sur la construction du matériau hétérogène par ajouts successifs d'hétérogénéités. Cette idée s'inspire dans son principe de la méthode d'homogénéisation "schéma différentiel" décrite au chapitre précédent (cf. section 1.3.4.6) (Mc Laughlin, 1977 [78], Norris, 1985 [82], Zimmerman, 1991 [112]). Ainsi, l'obtention d'un volume Y de milieu hétérogène de fraction c d'hétérogénéités se fait par la construction successive de n milieux intermédiaires obtenus par ajouts d'une fraction d'hétérogénéités Δc_j au matériau homogène de l'étape précédente jusqu'à atteindre la fraction finale c suivant le schéma présenté à la *Figure 2.1*.

À un volume Y_m initial de matrice de caractéristiques élastiques \mathbb{C}_m , on ajoute tout d'abord une fraction Δc_1 d'hétérogénéités. Si l'on note Y le volume final de matériau construit, la fraction volumique d'hétérogénéités du composite constitué d'un volume Y_m de matrice auquel on ajoute la fraction Δc_1 d'hétérogénéités du volume Y vaut :

$$c^{(1)} = \frac{\Delta c_1 |Y|}{|Y_m| + \Delta c_1 |Y|} = \frac{\Delta c_1}{c_m + \Delta c_1} \quad (2.1)$$

où c_m représente le taux de matrice dans le volume Y et vaut $c_m = 1 - c$, c étant la fraction finale d'hétérogénéités du matériau

Puis, on homogénéise ce milieu intermédiaire avec une méthode simplifiée d'homogénéisation qui peut être par exemple la méthode de l'approximation diluée, les bornes de Hashin et Shtrikman ou encore l'approximation de Mori-Tanaka. Si l'on

adopte une approche en déformation imposée, le comportement homogène équivalent est donné à la première étape selon la relation (1.82) établie au chapitre 1 :

$$\mathbb{C}^{*(1)} = \mathbb{C}_m + c^{(1)}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_m) : \langle \mathbb{A}^{(1)}(y, c^{(1)}, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_m) \rangle_{Y_2^{(1)}} \quad (2.2)$$

où $c^{(1)}$ est la fraction volumique d'hétérogénéités du composite à cette étape donnée par (2.1), \mathbb{C}_m le tenseur de rigidité de la matrice, \mathbb{C}_2 le tenseur de rigidités des hétérogénéités supposées ici toutes identiques et où $\langle \mathbb{A}^{(1)} \rangle_{Y_2^{(1)}}$ représente la moyenne du tenseur de localisation sur le volume $Y_2^{(1)}$ occupé par les hétérogénéités à cette première étape définie par :

$$\langle \mathbb{A}^{(1)}(y, c^{(1)}, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_m) \rangle_{Y_2^{(1)}} : \mathbf{E} = \frac{1}{|Y_2^{(1)}|} \int_{Y_2^{(1)}} \boldsymbol{\varepsilon}(y) dy \quad (2.3)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}(y)$ est la déformation locale solution du problème d'homogénéisation associé à cette 1^{ère} étape et $Y_2^{(1)}$ le volume occupé par les hétérogénéités tel que $|Y_2^{(1)}| = c^{(1)}|Y|$.

Cette moyenne diffère selon l'approche d'homogénéisation adoptée. Le matériau homogène équivalent ainsi obtenu constitue la matrice d'un nouveau milieu auquel on ajoute à nouveau une fraction Δc_2 d'hétérogénéités. A cette seconde étape, on a de façon similaire :

$$\mathbb{C}^{*(2)} = \mathbb{C}^{*(1)} + c^{(2)}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}^{*(1)}) : \langle \mathbb{A}^{(2)}(y, c^{(2)}, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}^{*(1)}) \rangle_{Y_2^{(2)}} \quad (2.4)$$

avec $c^{(2)}$ la fraction d'hétérogénéités définie par :

$$c^{(2)} = \frac{\Delta c_2}{c_m + \sum_{i=1}^2 \Delta c_i}$$

et $\langle \mathbb{A}^{(2)} \rangle_{Y_2^{(2)}}$ la moyenne du tenseur de localisation sur le volume $Y_2^{(2)}$ occupé par les hétérogénéités à cette étape.

L'opération est ainsi répétée jusqu'à atteindre la fraction volumique d'hétérogénéités c voulue selon le schéma présenté à la *Figure 2.1*.

$$\sum_{j=1}^n \Delta c_j = c. \quad (2.5)$$

À une étape (i) quelconque du processus, on a donc :

$$\mathbb{C}^{*(i)} = \mathbb{C}^{*(i-1)} + c^{(i)}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}^{*(i-1)}) : \langle \mathbb{A}^{(i)}(y, c^{(i)}, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}^{*(i-1)}) \rangle_{Y_2^{(i)}} \quad (2.6)$$

avec $c^{(i)} = \frac{\Delta c_i}{c_m + \sum_{j=1}^i \Delta c_j}$ et $|Y_2^{(i)}| = \Delta c_i |Y|$.

A la dernière étape du processus, on obtient ainsi le comportement équivalent re-

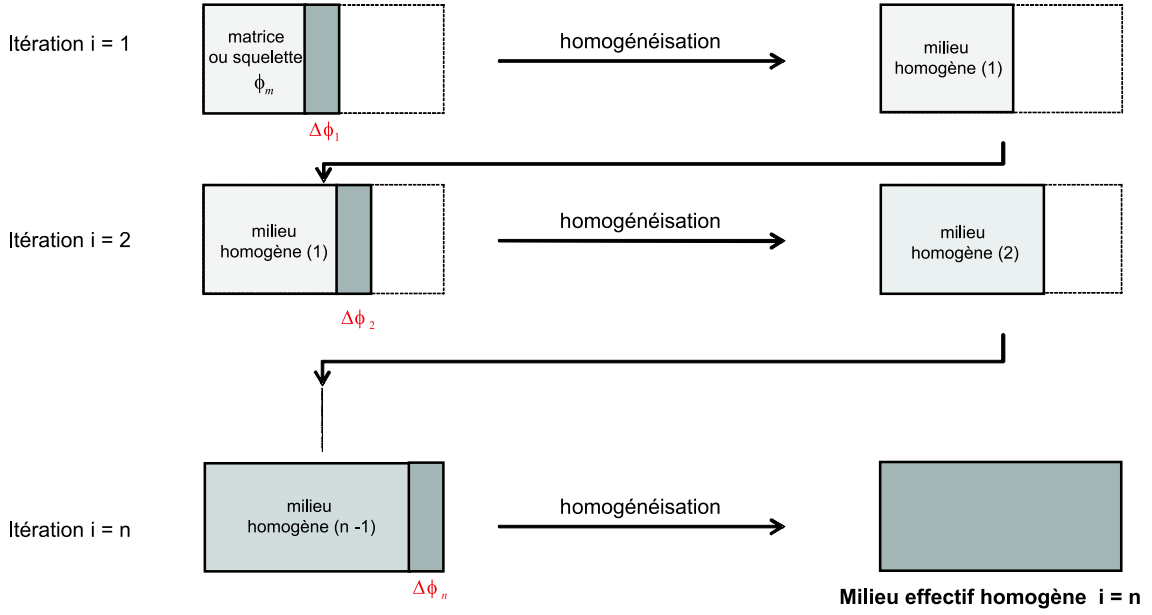


Figure 2.1 — Principe du schéma itératif d'homogénéisation

cherché du composite présentant un taux de renfort c avec :

$$\mathbb{C}^{*(n)} = \mathbb{C}^{*(n-1)} + c^{(n)} (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}^{*(n-1)}) : \langle \mathbb{A}^{(n)}(y, c^{(n)}, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}^{*(n-1)}) \rangle_{Y_2^{(n)}} \quad (2.7)$$

avec $c^{(n)}$ la fraction volumique d'hétérogénéités telle que :

$$c^{(n)} = \frac{\Delta c_n}{c_m + \sum_{j=1}^n \Delta c_j} \quad \text{et} \quad |Y_2^{(n)}| = \Delta c_n |Y|.$$

Les champs locaux de déformation et de contraintes peuvent être estimés alors à cette dernière étape du processus itératif avec :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y) = \mathbb{A}^{(n)}(y) : \mathbf{E} \quad (2.8)$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{C}_2 : \mathbb{A}^{(n)}(y) : \mathbf{E} & \text{dans le renfort} \\ \boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{C}^{*(n-1)} : \mathbb{A}^{(n)}(y) : \mathbf{E} & \text{dans la matrice} \end{cases} \quad (2.9)$$

On peut également procéder aux homogénéisations intermédiaires avec une approche en contraintes imposées. Le tenseur de souplesse équivalent $\mathbb{S}^{*(i)}$ du matériau biphasé à une itération (i) est alors donné par :

$$\mathbb{S}^{*(i)} = \mathbb{S}^{*(i-1)} + c^{(i)} (\mathbb{S}_2 - \mathbb{S}^{*(i-1)}) : \langle \mathbb{B}^{(i)}(y, c^{(i)}, \mathbb{S}_2, \mathbb{S}^{*(i-1)}) \rangle_{Y_2^{(i)}} \quad (2.10)$$

où $\mathbb{S}^{*(i-1)}$ est le tenseur de souplesse équivalent du matériau intermédiaire de l'étape ($i-1$) et $\langle \mathbb{B}^{(i)} \rangle_{Y_2^{(i)}}$ la moyenne du tenseur de concentration sur le volume $Y_2^{(i)}$ occupé

par les inclusions à cette étape et défini par :

$$\langle \mathbb{B}^{(i)}(y, c^{(i)}, \mathbb{S}_2, \mathbb{S}^{*(i-1)}) \rangle_{Y_2^{(i)}} : \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|Y_2^{(i)}|} \int_{Y_2^{(i)}} \boldsymbol{\sigma}(y) dy \quad (2.11)$$

où $\boldsymbol{\sigma}(y)$ est le tenseur de contraintes locales solution du problème d'homogénéisation en approche contrainte associé à l'étape (i) et $|Y_2^{(i)}| = c^{(i)}|Y|$.

Le comportement homogénéisé est obtenu à l'étape (n) avec :

$$\mathbb{S}^{*(n)} = \mathbb{S}^{*(n-1)} + c^{(n)} (\mathbb{S}_2 - \mathbb{S}^{*(n-1)}) : \langle \mathbb{B}^{(n)}(y, c^{(n)}, \mathbb{S}_2, \mathbb{S}^{*(n-1)}) \rangle_{Y_2^{(n)}} \quad (2.12)$$

Les champs locaux de déformations et contraintes peuvent être estimés dans cette approche avec :

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{B}^{(n)}(y) : \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.13)$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}(y) = \mathbb{S}_2 : \mathbb{B}^{(n)}(y) : \mathbf{E} & \text{dans le renfort} \\ \boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{S}^{*(n-1)} : \mathbb{B}^{(n)}(y) : \mathbf{E} & \text{dans la matrice} \end{cases} \quad (2.14)$$

Cette méthodologie itérative présentée pour des milieux biphasés s'adapte aux milieux poreux.

2.2.2 Homogénéisation itérative de milieux poreux

Considérons un milieu poreux de porosité ϕ , la fraction volumique du squelette ϕ_s vaut alors $\phi_s = 1 - \phi$.

Pour construire ce milieu, on introduit à un volume initial de squelette des faibles taux de porosité $\Delta\phi_j$ jusqu'à l'introduction de la porosité finale ϕ désirée et l'on procède à des homogénéisations successives des milieux poreux intermédiaires ainsi élaborés. La porosité du milieu intermédiaire à une itération i s'écrit :

$$\phi^{(i)} = \frac{\Delta\phi_i}{\phi_s + \sum_{j=1}^i \Delta\phi_j} \quad (2.15)$$

Le comportement homogène équivalent dans une approche d'homogénéisation à déformation imposée à cette $i^{\text{ème}}$ itération s'obtient avec :

$$\mathbb{C}^{*(i)} = \mathbb{C}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} \mathbb{C}^{*(i-1)} : \langle \langle \mathbb{A}^{(i)}(y, \phi^{(i)}, \mathbb{C}^{*(i-1)}) \rangle \rangle_{Y_T^{(i)}} \quad (2.16)$$

où $\mathbb{C}^{*(i-1)}$ est le tenseur de rigidité équivalent du milieu poreux intermédiaire de l'étape précédente ($i - 1$) et $\mathbb{A}^{(i)}$ le tenseur de localisation associé au problème d'homogénéisation posé sur un milieu poreux dont le squelette a le comportement effectif calculé à l'étape ($i - 1$) et de porosité $\phi^{(i)}$ de cette étape (i). Le symbole $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$

désigne la moyenne suivante :

$$\langle\langle \mathbb{A}^{(i)} \rangle\rangle_{Y_T^{(i)}} : \mathbf{E} = \frac{1}{|Y_T^{(i)}|} \int_{\partial Y_T^{(i)}} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_s ds \quad (2.17)$$

où $Y_T^{(i)}$ désigne le domaine occupé par les pores à l'étape (i) , $\partial Y_T^{(i)}$ le bord de ce domaine et où \mathbf{u}^1 est la solution du problème local d'homogénéisation de type élastique à cette étape dont les équations ont été formulées au chapitre 1 (section 1.3.3).

Le comportement équivalent du milieu intermédiaire (i) étant estimé, le tenseur de Biot est obtenu à cette étape (i) du processus itératif par la relation :

$$\mathbf{B}^{*(i)} = \mathbf{1} - (\mathbb{C}^{*(i-1)})^{-1} : \mathbb{C}^{*(i)} : \mathbf{1}. \quad (2.18)$$

L'initialisation du processus est faite avec $\mathbb{C}^{*(0)} = \mathbb{C}_s$.

Le comportement équivalent est obtenu à l'étape finale $i = n$ avec :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{*(n)} : \mathbf{E} - p\mathbf{B}^{(n)} \quad (2.19)$$

Dans une approche en contraintes imposées, le comportement homogène à une étape (i) intermédiaire établi au chapitre 1 selon l'équation (1.59) s'écrit :

$$\mathbb{S}^{*(i)} = \mathbb{S}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} \langle\langle \mathbb{B}^{(i)}(y, \phi^{(i)}, \mathbb{S}^{*(i-1)}) \rangle\rangle_{Y_T^{(i)}} \quad (2.20)$$

où $\mathbb{S}^{*(i-1)}$ est le tenseur de souplesse équivalent du milieu poreux intermédiaire de l'étape $(i-1)$ et $\mathbb{B}^{(i)}$ le tenseur de concentration associé au problème local d'homogénéisation posé sur le volume constitué du milieu poreux effectif de l'étape $(i-1)$ pour le squelette et de la porosité $\phi^{(i)}$ de cette étape (i) défini par :

$$\langle\langle \mathbb{B}^{(i)}(y, \phi^{(i)}, \mathbb{S}^{*(i-1)}) \rangle\rangle_{Y_T^{(i)}} : \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|Y_T^{(i)}|} \int_{\partial Y_T^{(i)}} (\mathbf{u}^1 \otimes \mathbf{n})_s ds \quad (2.21)$$

où \mathbf{u}^1 est cette fois la solution du problème local d'homogénéisation de type élastique en approche contrainte de cette étape.

Le tenseur de Biot est obtenu à cette étape (i) du processus itératif dans cette approche contrainte imposée par :

$$\mathbf{B}^{*(i)} = \mathbf{1} - (\mathbb{S}^{*(i)})^{-1} : \mathbb{S}_s^{(i-1)} : \mathbf{1}. \quad (2.22)$$

et ce processus prend fin dès que la totalité de porosité voulue est atteinte, c'est-à-dire à l'itération n où le comportement homogène global de porosité ϕ est ainsi évalué.

Comme cela a été dit, ce processus itératif peut être couplé aux différentes méthodes d'homogénéisation analytiques décrites au chapitre 1 fournissant des estimations explicites des tenseurs de localisation \mathbb{A} et de concentration \mathbb{B} à chaque étape du processus. Ce couplage est présenté au paragraphe suivant.

2.2.3 Couplage du processus itératif aux méthodes d'homogénéisation simplifiées

Dans cette section, on se propose à titre d'illustration d'expliciter le processus itératif d'homogénéisation de milieux poreux lorsqu'il est couplé à l'approche des distributions diluées, la borne supérieure de Hashin-Shtrikman, l'approche autocohérente et l'approche autocohérente généralisée.

2.2.3.1 Approche itérée des distributions diluées

Le processus itératif est ici couplé tout d'abord au schéma des distributions diluées pour un milieu poreux. Cette approche a été présentée à la section (1.3.4.1). On rappelle tout d'abord que cette méthode en approche déformation conduit à un comportement homogène équivalent défini par :

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_s - \phi \mathbb{C}_s : [\mathbb{I} - \mathbb{P}_E^s : \mathbb{C}_s]^{-1} \quad (2.23)$$

où \mathbb{C}_s désigne le tenseur de rigidité élastique du squelette, \mathbb{P}_E^s le tenseur de polarisation, appelé tenseur de Hill, défini par $\mathbb{P}_E^s = \mathbb{S}_E^s : (\mathbb{C}_s)^{-1}$ avec \mathbb{S}_E^s le tenseur d'Eshelby et ϕ la porosité du milieu.

L'utilisation de cette méthode pour les homogénéisations intermédiaires du schéma itératif fournit le comportement équivalent du comportement $\mathbb{C}^{*(i)}$ à l'étape (i) en fonction de celui issu de l'étape précédente $\mathbb{C}^{*(i-1)}$ qui constitue le squelette de cette étape. Ainsi, on a :

$$\mathbb{C}^{*(i)} = \mathbb{C}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} \mathbb{C}^{*(i-1)} : [\mathbb{I} - \mathbb{P}_E^{*(i-1)} : \mathbb{C}^{*(i-1)}]^{-1} \quad (2.24)$$

$\mathbb{C}^{*(i-1)}$ est le tenseur de rigidité équivalent du milieu poreux intermédiaire de l'étape ($i-1$) et $\mathbb{P}_E^{*(i-1)}$ est le tenseur de polarisation de Hill défini par :

$$\mathbb{P}_E^{*(i-1)} = \mathbb{S}_E^{*(i-1)} : (\mathbb{C}^{*(i-1)})^{-1} \quad (2.25)$$

De manière similaire, si l'on adopte cette fois l'approche contrainte du schéma des distributions diluées, le tenseur de souplesse homogène équivalent s'écrit à la $i^{\text{ème}}$ itération :

$$\mathbb{S}^{*(i)} = \mathbb{S}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} \mathbb{S}^{*(i-1)} : [\mathbb{I} - \mathbb{Q}_E^{*(i-1)} : \mathbb{S}^{*(i-1)}]^{-1}, \quad (2.26)$$

où $\mathbb{S}^{*(i-1)}$ est le tenseur de souplesse équivalent du milieu poreux intermédiaire de l'étape ($i-1$) et $\mathbb{Q}_E^{*(i-1)} = (\mathbb{S}^{*(i-1)})^{-1} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{*(i-1)})$ désigne le tenseur de Hill défini par les propriétés de l'étape ($i-1$).

Dans le cas d'un milieu poreux isotrope de porosité ϕ , les estimations des caractéristiques macroscopiques équivalentes conformément à celles données par les relations (1.93) et (1.94), s'écrivent à l'itération (i) pour les modules de compressibilité k_D^* en approche déformation, k_C^* en approche contrainte et pour le module de cisaillement

μ_D^* en approche déformation et μ_C^* en approche contrainte :

$$k_D^{*(i)} = k_D^{*(i-1)} - \phi^{(i)} k_D^{*(i-1)} \frac{1}{(1 - a_E^{D(i-1)})} \quad (2.27)$$

$$\mu_D^{*(i)} = \mu_D^{*(i-1)} - \phi^{(i)} \mu_D^{*(i-1)} \frac{1}{(1 - b_E^{D(i-1)})} \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{k_C^{*(i)}} = \frac{1}{k_C^{*(i-1)}} + \phi^{(i)} \frac{1}{k_C^{*(i-1)}} \frac{1}{(1 - a_E^{C(i-1)})} \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{\mu_C^{*(i)}} = \frac{1}{\mu_C^{*(i-1)}} + \phi^{(i)} \frac{1}{\mu_C^{*(i-1)}} \frac{1}{(1 - b_E^{C(i-1)})} \quad (2.30)$$

avec

$$a_E^{D(i-1)} = \frac{3k_D^{*(i-1)}}{3k_D^{*(i-1)} + 4\mu_D^{*(i-1)}} \quad b_E^{D(i-1)} = \frac{6k_D^{*(i-1)} + 2\mu_D^{*(i-1)}}{5k_D^{*(i-1)} + 4\mu_D^{*(i-1)}}$$

$$a_E^{C(i-1)} = \frac{3k_C^{*(i-1)}}{3k_C^{*(i-1)} + 4\mu_C^{*(i-1)}} \quad b_E^{C(i-1)} = \frac{6k_C^{*(i-1)} + 2\mu_C^{*(i-1)}}{5k_C^{*(i-1)} + 4\mu_C^{*(i-1)}}$$

Par ailleurs, le comportement hydro-élastique conformément à la relation (1.67) s'écrit à l'itération (i) en approche déformation :

$$\mathbf{B}_D^{*(i)} = \left(1 - \frac{k_D^{*(i)}}{k_D^{*(i-1)}}\right) \mathbf{1} = \left(\frac{\phi^{(i)}}{(1 - a_E^{D(i-1)})}\right) \mathbf{1}, \quad (2.31)$$

et en approche contrainte :

$$\mathbf{B}_C^{*(i)} = \left(1 - \frac{k_C^{*(i)}}{k_C^{*(i-1)}}\right) \mathbf{1} = \left(\frac{\phi^{(i)}}{(\phi^{(i)} + 1 - a_E^{C(i-1)})}\right) \mathbf{1}. \quad (2.32)$$

Le comportement homogène équivalent est obtenu à l'étape finale $i = n$.

2.2.3.2 Borne itérée d'Hashin-Shtrikman

On rappelle que l'encadrement proposé par Hashin-Shtrikman pour un milieu poreux de porosité ϕ s'écrit :

$$\mathbf{0} \leq \mathbb{C}_{HS}^* \leq \mathbb{C}_{HS+}^* \quad (2.33)$$

avec

$$\mathbb{C}_{HS+}^* = \mathbb{C}_s - \phi \mathbb{C}_s : [\mathbb{I} - (1 - \phi)\mathbb{P}_E^s : \mathbb{C}_s]^{-1}$$

où \mathbb{P}_E^s désigne le tenseur de polarisation du squelette du milieu poreux défini précédemment par :

$$\mathbb{P}_E^s = \mathbb{S}_E^s : \mathbb{C}_s^{-1}$$

Le couplage du processus itératif à la borne supérieure de Hashin-Shtrikman conduit alors aux relations suivantes :

$$\mathbb{C}_{HS+}^{*(i)} = \mathbb{C}_{HS+}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} \mathbb{C}_{HS+}^{*(i-1)} : [\mathbb{I} - (1 - \phi^{(i)}) \mathbb{P}_E^{(i-1)} : \mathbb{C}_{HS+}^{*(i-1)}]^{-1} \quad (2.34)$$

avec

$$\mathbb{P}_E^{(i-1)} = \mathbb{S}_E^{(i-1)} : \left(\mathbb{C}_{HS+}^{*(i-1)} \right)^{-1}$$

Quand le milieu poreux est isotrope, les bornes supérieures des modules de compressibilité et de cisaillement s'écrivent à la $i^{\text{ème}}$ itération :

$$k_{HS+}^{*(i)} = k_{HS+}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} k_{HS+}^{*(i-1)} \frac{1}{(1 - (1 - \phi^{(i)}) a_E^{HS+(i-1)})} \quad (2.35)$$

$$\mu_{HS+}^{*(i)} = \mu_{HS+}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} \mu_{HS+}^{*(i-1)} \frac{1}{(1 - (1 - \phi^{(i)}) b_E^{HS+(i-1)})} \quad (2.36)$$

avec

$$a_E^{HS+(i-1)} = \frac{3k_{HS+}^{*(i-1)}}{3k_{HS+}^{*(i-1)} + 4\mu_{HS+}^{*(i-1)}} \quad b_E^{HS+(i-1)} = \frac{6k_{HS+}^{*(i-1)} + 2\mu_{HS+}^{*(i-1)}}{5k_{HS+}^{*(i-1)} + 4\mu_{HS+}^{*(i-1)}}$$

Le tenseur de Biot associé à ce modèle à l'étape (i) s'écrit :

$$\mathbf{B}_{HS}^* = \left(1 - \frac{k_{HS+}^{*(i)}}{k_{HS+}^{*(i-1)}} \right) \mathbf{1} = \left(\frac{1}{(1 - (1 - \phi^{(i)}) a_E^{HS+(i-1)})} \right) \mathbf{1} \quad (2.37)$$

2.2.3.3 Approche itérée du schéma autocohérent

Le couplage du processus itératif avec le schéma autocohérent d'homogénéisation nécessite une résolution numérique à chaque étape d'injection de proportions de pores $\Delta\phi$. Suite aux relations établies au chapitre 1 (cf. section 1.3.4.3), l'estimation du tenseur de rigidité par le schéma autocohérent s'obtient en effet en résolvant l'équation non linéaire suivante :

$$\mathbb{C}_{AC}^* = \mathbb{C}_s - \phi \mathbb{C}_s : [\mathbb{I} - \mathbb{P}_E^* : \mathbb{C}_{AC}^*]^{-1} \quad (2.38)$$

avec $\mathbb{P}_E^* = \mathbb{S}_E^{AC} : (\mathbb{C}_{AC}^*)^{-1}$ le tenseur de polarisation du milieu homogène équivalent.

Ainsi couplé au processus itératif, ce modèle fournit le tenseur de rigidité équivalent de l'étape (i) par la résolution de l'équation :

$$\mathbb{C}_{AC}^{*(i)} = \mathbb{C}_{AC}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} \mathbb{C}_{AC}^{*(i-1)} : [\mathbb{I} - \mathbb{P}_E^{*(i)} : \mathbb{C}_{AC}^{*(i)}]^{-1} \quad (2.39)$$

avec $\mathbb{P}_E^{*(i)} = \mathbb{S}_E^{AC(i)} : \left(\mathbb{C}_{AC}^{*(i)} \right)^{-1}$

Pour un milieu poreux isotrope, le module de compressibilité de l'étape (i) est donné par :

$$k_{AC}^{*(i)} = k_{AC}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} k_{AC}^{*(i-1)} \frac{3k_{AC}^{*(i-1)} + 4\mu_{AC}^{*(i)}}{3\phi^{(i)} k_{AC}^{*(i-1)} + 4\mu_{AC}^{*(i)}} \quad (2.40)$$

où $\mu_{AC}^{*(i)}$ est solution de l'équation du second degré suivante :

$$8(\mu_{AC}^{*(i)})^2 - \left((8 - 20\phi^{(i)})\mu_{AC}^{*(i-1)} - (9 - 3\phi^{(i)})k_{AC}^{*(i-1)} \right) \mu_{AC}^{*(i)} - (9 - 18\phi^{(i)})k_{AC}^{*(i-1)} \mu_{AC}^{*(i-1)} = 0 \quad (2.41)$$

Le comportement hydro-élastique du milieu poreux se détermine à chaque étape (i) avec :

$$\mathbf{B}_{AC}^{*(i)} = \left(1 - \frac{k_{AC}^{*(i)}}{k_{AC}^{*(i-1)}} \right) \mathbf{1} = \left(\frac{3k_{AC}^{*(i-1)} + 4\mu_{AC}^{*(i)}}{3\phi^{(i)}k_{AC}^{*(i-1)} + 4\mu_{AC}^{*(i)}} \right) \mathbf{1}. \quad (2.42)$$

2.2.3.4 Approche itérée du schéma autocohérent généralisé

D'une manière analogue à la section précédente, le processus peut être couplé au schéma autocohérent généralisé. Cette méthode d'homogénéisation a été décrite brièvement au chapitre 1 (cf. section 1.3.4.4). On rappelle que dans le cas d'un milieu poreux isotrope constitué d'un squelette isotrope, le module de compressibilité coïncide avec celui fourni par la borne supérieure de Hashin-Shtrikman. Ainsi, à une étape (i) du processus, ce module s'écrit :

$$k_{3Ph}^{*(i)} = k_{3Ph}^{*(i-1)} - \phi^{(i)} k_{3Ph}^{*(i-1)} \frac{1}{(1 - (1 - \phi^{(i)})a_E^{3Ph(i-1)})} \quad (2.43)$$

L'estimation du module de cisaillement à une étape intermédiaire (i) nécessite la résolution de l'équation non linéaire en fonction des caractéristiques du milieu intermédiaire précédent ($i - 1$), telle que :

$$\mu_{3Ph}^{*(i)} = \mu_{3Ph}^{*(i-1)} + \phi^{(i)} \mu_{3Ph}^{*(i-1)} F(\phi^{(i)}, 0, \frac{\mu_{3Ph}^{*(i)}}{\mu_{3Ph}^{*(i-1)}}) \quad (2.44)$$

où la fonction F est donnée par :

$$F(\phi^{(i)}, 0, \beta_0) = \left(A^{(i-1)}(1 - \phi^{(i)}) - 1 - \frac{\phi^{(i)}(1 - (\phi^{(i)})^{\frac{2}{3}})^2}{B^{(i-1)}(\phi^{(i)})^{\frac{7}{3}} + C^{(i-1)} + \frac{D^{(i-1)}}{\beta_0 - 1}} \right)^{-1} \quad (2.45)$$

où $A^{(i-1)}$, $B^{(i-1)}$, $C^{(i-1)}$ et $D^{(i-1)}$ sont des constantes qui s'expriment en fonction du coefficient de Poisson du milieu homogène équivalent de l'étape ($i - 1$) par :

$$\begin{aligned} A^{(i-1)} &= \frac{2}{15}(4 - 5\nu_{3Ph}^{*(i-1)})(1 - \nu_{3Ph}^{*(i-1)})^{-1} \\ B^{(i-1)} &= \frac{5}{42}(1 - \nu_{3Ph}^{*(i-1)})(7 + 5\nu_{3Ph}^{*(i-1)}) \\ C^{(i-1)} &= \frac{10}{21}(7 - 10\nu_{3Ph}^{*(i-1)})(1 - \nu_{3Ph}^{*(i-1)}) \\ D^{(i-1)} &= \frac{25}{6}(1 - \nu_{3Ph}^{*(i-1)}) \end{aligned}$$

Pour le comportement hydro-élastique, l'estimation du tenseur de Biot par cette approche est identique à celle obtenue par la borne supérieure de Hashin et ou par l'estimation de Mori-Tanaka, compte-tenu de la relation (2.43).

2.2.3.5 Convergence asymptotique des prédictions à faibles porosités

Nous avons décrit dans les sections précédentes le principe du couplage du processus itératif aux différentes méthodes explicites d'homogénéisation. A chaque étape du processus itératif, une faible proportion $\Delta\phi$ de la porosité ϕ du milieu est injectée au milieu linéaire équivalent, ce qui implique que la porosité des milieux intermédiaires ($\phi^{(i)}$) est très faible.

Avec l'objectif de confronter entre elles les estimations fournies par les approches d'homogénéisation itérées, nous nous proposons de les comparer pour les milieux faiblement poreux. Pour cela, on procède à des développements limités des expressions des modules au voisinage d'une faible porosité. De tels développements ont été proposés par François et al. (François et al., 1991 [46]) dans le cas particulier d'un squelette incompressible.

En adoptant les approches des distributions diluées, les développements limités des modules de compressibilité en approche déformation et en approche contrainte au voisinage de ϕ petit donnent :

$$\frac{k_D^*}{k_s} = 1 - \phi \frac{1}{1 - a_E^s} \quad (2.46)$$

$$\frac{k_C^*}{k_s} = \left(1 + \phi \frac{1}{1 - a_E^s}\right)^{-1} = 1 - \phi \frac{1}{1 - a_E^s} + \mathcal{O}(\phi^2) = \frac{k_D^*}{k_s} + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (2.47)$$

avec $a_E^s = \frac{3k_s}{3k_s + 4\mu_s}$ correspondant au coefficient du tenseur d'Eshelby.

De manière analogue, les développements limités des modules de cisaillement s'écrivent :

$$\frac{\mu_D^*}{\mu_s} = 1 - \phi \frac{1}{(1 - b_E^s)} \quad (2.48)$$

$$\frac{\mu_C^*}{\mu_s} = \left(1 + \phi \frac{1}{(1 - b_E^s)}\right)^{-1} = 1 - \phi \frac{1}{(1 - b_E^s)} + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (2.49)$$

avec $b_E^s = \frac{6k_s + 2\mu_s}{5k_s + 4\mu_s}$ correspondant au coefficient du tenseur d'Eshelby.

Par ce calcul, on constate que les comportements par les approches déformations et contraintes des distributions diluées sont voisins pour de faibles porosités. De même, les développements limités des modules de rigidité des bornes supérieures de Hashin-Shtrikman s'écrivent :

$$\frac{k_{HS+}^*}{k_s} = 1 - \phi \frac{1}{(1 - a_E^s) - \phi a_E^s} = 1 - \phi \frac{1}{1 - a_E^s} + \phi^2 \frac{a_E^s}{(1 - a_E^s)^2} + \mathcal{O}(\phi^3) \quad (2.50)$$

$$\frac{\mu_{HS+}^*}{\mu_s} = 1 - \phi \frac{1}{(1 - b_E^s) - \phi b_E^s} = 1 - \phi \frac{1}{1 - b_E^s} + \phi^2 \frac{b_E^s}{(1 - b_E^s)^2} + \mathcal{O}(\phi^3) \quad (2.51)$$

et redonnent également au 1^{er} ordre les prédictions de la méthode des distributions diluées.

En adoptant l'approche d'homogénéisation autocohérente, le développement limité du module de cisaillement s'écrit :

$$\mu_{AC}^* = \frac{1}{16} \left(8\mu_s - 9k_s + \phi(3k_s - 20\mu_s) \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (2.52)$$

avec :

$$\sqrt{\Delta} = (8\mu_s - 9k_s) \left[1 + \phi \frac{-84k_s\mu_s - 160\mu_s^2 - 27k_s^2}{(8\mu_s - 9k_s)^2} \right] + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (2.53)$$

Tout calcul fait, on obtient le développement du module de cisaillement par le schéma autocohérent pour des faibles porosités de la forme :

$$\mu_{AC}^* = \mu_s + 5\phi\mu_s \left(\frac{4\mu_s + 3k_s}{8\mu_s + 9k_s} \right) + \mathcal{O}(\phi^2) \approx \mu_D^* \quad (2.54)$$

En utilisant ce résultat, le développement limité du module de compressibilité correspondant à cette approche, s'écrit alors :

$$k_{AC}^* = k_s - \phi k_s \frac{3k_s + 4\mu_s(1 - \phi A)}{3\phi k_s + 4\mu_s(1 - \phi A)} \quad (2.55)$$

avec $A = \frac{4\mu_s + 3k_s}{8\mu_s + 9k_s}$. D'où, l'approximation suivante :

$$k_{AC}^* \simeq k_s - \phi k_s \frac{3k_s + 4\mu_s}{4\mu_s} + \mathcal{O}(\phi^2) \approx k_D^* \quad (2.56)$$

Ainsi, les développements asymptotiques des modules de rigidité issus des différentes approches d'homogénéisation au voisinage des faibles porosités coïncident au premier ordre. Par conséquent, lors de la succession d'opérations d'homogénéisation dans le processus itératif qui s'effectuent à chaque étape avec une porosité faible, on obtiendra des comportements effectifs voisins quelque soit l'approche d'homogénéisation utilisée.

2.3 Implémentation et validation du processus itératif

Dans ce paragraphe, nous décrivons la mise en œuvre du processus itératif et présenterons quelques tests de validation. L'implémentation de ce schéma est quasi-explicite et donc particulièrement aisée. La mise en œuvre numérique de ce processus itératif a été faite en pratique sous le logiciel `Matlab`.

2.3.1 Algorithme itératif

L'algorithme de calcul du comportement effectif est présenté sur la *Figure 2.2*. Le processus est initialisé par les caractéristiques du squelette élastique isotrope (k_s, μ_s) . La porosité ϕ étant fixée, l'utilisateur choisit le nombre d'itérations n correspondant au nombre d'homogénéisations intermédiaires effectuées. La précision du résultat obtenu en terme de comportement effectif dépend de cette valeur. Nous verrons dans les applications qui suivent que la valeur $n = 200$ est généralement suffisante. On désigne par $\Delta\phi = \phi/n$ la portion de porosité à injecter à chaque étape d'itération.

A partir des expressions explicites d'homogénéisation présentées aux sections précédentes (cf. section 2.2.3.1) pour les distributions diluées, (cf. section 2.2.3.2) pour les bornes de Hashin-Shtrikman ou encore pour le schéma autocohérent (cf. section 2.2.3.3), on procède alors au calcul du comportement équivalent de l'étape (1) du processus, puis le processus est réitéré. La fin de l'opération est constatée dès que l'incrément " i " atteint la valeur n , nombre d'itérations fixé au départ.

Si l'on souhaite construire l'ensemble de la courbe de comportement du milieu poreux pour différentes porosités, on peut alors boucler sur la valeur de la porosité ϕ . En pratique, on pourra s'assurer que la valeur n du nombre d'itération choisie est suffisante en testant l'écart sur les modules homogénéisés entre deux itérations successives par rapport à une précision recherchée : la convergence sera alors considérée comme atteinte.

Différents enrichissements de l'algorithme peuvent être introduits. Ainsi, le nombre n d'itérations peut être adapté en fonction de la valeur de la porosité ϕ . Plus la porosité ϕ du milieu poreux est petite, plus le nombre d'itérations n peut être pris petit. Si l'on construit l'ensemble du comportement pour toute une gamme de porosité, il pourra être intéressant d'initialiser le processus à partir des résultats obtenus avec la porosité précédente (Zouari, 2006 [113]). On peut également envisager par une porosité donnée d'introduire un pas $\Delta\phi$ non constant au cours des itérations, en imaginant par exemple un pas plus grand au début du processus itératif et plus affiné vers la fin. On obtient bien évidemment les mêmes modules à convergence. C'est pourquoi, ces raffinements ne nous semblent pas nécessaires dans la mesure où le temps de calculs pour atteindre la convergence sont de toute façon très réduits. Nous discuterons plus en détail de ce point ultérieurement.

2.3.2 Validations et applications à des milieux poreux élastiques

Nous nous proposons maintenant de valider l'implémentation de ce processus et de mettre en évidence son apport dans le calcul du comportement équivalent de milieux poreux. Pour cela, nous commençons par donner les prédictions des approches classiques d'homogénéisation de la littérature avec l'objectif d'en faire apparaître les limites.

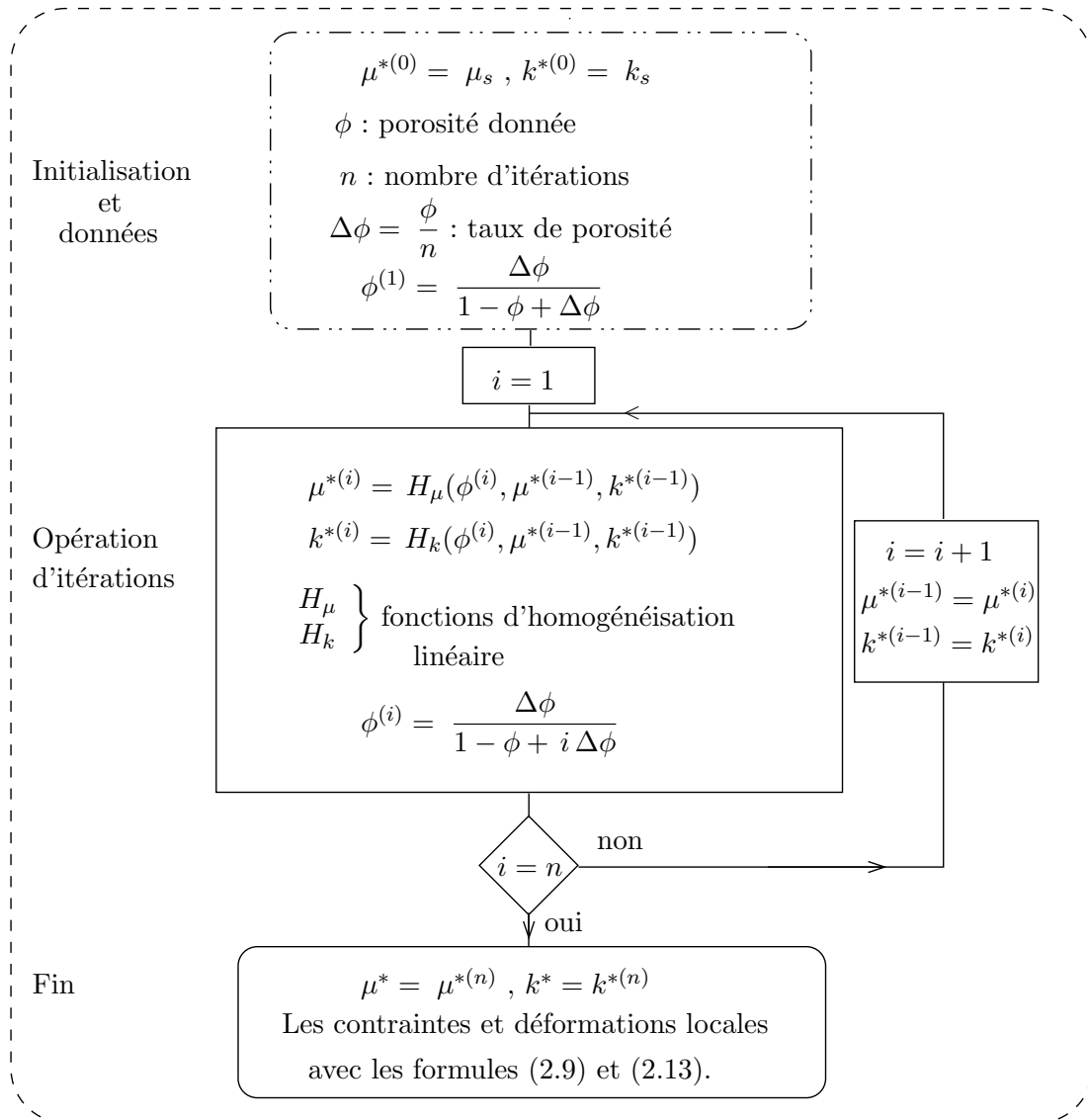


Figure 2.2 — Algorithme d'implémentation du processus itératif d'homogénéisation

2.3.2.1 Prédiction par les approches classiques de la littérature

Nous présentons dans ce qui suit l'évolution du comportement équivalent d'un milieu poreux élastique en fonction de sa porosité obtenue par les différentes méthodes d'homogénéisation présentées au chapitre 1 : approximation diluée en approche déformation (DD) et en contrainte (DC), borne supérieure de Hashin-Shtrikman (HS), schéma autocohérent (AC), schéma des 3 phases (3PH) et schéma différentiel (Dif). Outre ces modèles explicites d'homogénéisation, des méthodes numériques basées sur une résolution par éléments finis du problème cellulaire ont été également mises en œuvre. Il s'agit de la méthode d'homogénéisation périodique (EF-period) et l'homogénéisation des modules effectifs, le problème local étant résolu numériquement sur deux types de Volumes Élémentaires (EF-maillage 1) et (EF-maillage 2).

L'approche d'homogénéisation des milieux périodiques est basée sur l'hypothèse

d'une répartition périodique des hétérogénéités ou ici des pores dans le milieu hétérogène. Le problème local d'homogénéisation est alors posé sur une période de base et les champs de déformations et contraintes locales solutions sont des champs périodiques. Le problème cellulaire demande à être résolu numériquement. Pour plus de détails sur cette approche, on renvoie aux références suivantes : Léné (Léné, 1984 [76], Suquet (Suquet, 1987 [93]), Sanchez-Palencia (Sanchez-Palencia, 1986 [90]), Duvaut (Duvaut, 1976 [42] et pour la mise en œuvre numérique Devries et al. (Devries et al., 1989 [35]) et Benhamida (Benhamida, 1989 [7]).

Ainsi, pour modéliser le milieu poreux, on a choisi ici une cellule de base cubique constituée d'un pore sphérique disposé au centre de la cellule. Le maillage de cette cellule est présenté à la *Figure 2.3*. Les calculs d'homogénéisation ont été menés à l'aide du module HPERXX d'homogénéisation périodique développé par Benhamida au cours de ces travaux de recherche au sein du laboratoire LM2S (Benhamida, 1989 [7]). Ils sont basés sur le code de calculs par Eléments Finis Modulef de l'INRIA.

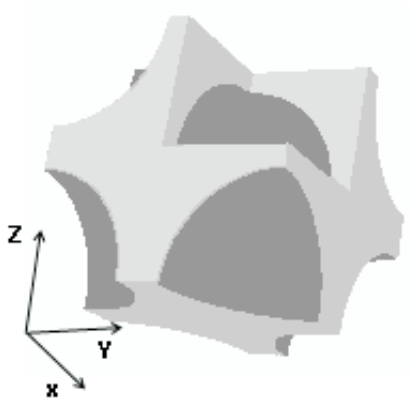


Figure 2.3 — Maillage cubique centré de la cellule de base, (1/8 du réseau cubique).
Homogénéisation Périodique, Modulef.

Les autres calculs numériques de type “Modules effectifs” ont été menés à l'aide du code par Eléments Finis *Castem* sur des maillages de volumes élémentaires constitués d'une partie solide du squelette contenant un pore sphérique. Le chargement macroscopique est imposé sur le bord de ces volumes. On a distingué deux types de maillage : le maillage d'une sphère creuse présenté à la *Figure 2.4(a)* correspondant au modèle des sphères composites de Hashin et le maillage d'un cube avec un pore sphérique présenté à la *Figure 2.4(b)*.

Tous ces calculs numériques ont été effectués en élasticité tridimensionnelle en exploitant éventuellement des plans de symétrie pour réduire la taille des maillages et des calculs.

Nous considérons pour ces applications un milieu poreux constitué d'un squelette solide, homogène, isotrope de caractéristiques mécaniques $E_s = 10^3 \text{MPa}$ et $\nu_s = 0.3$ et le pore est supposé de géométrie sphérique.

Sur les *Figures 2.5* et *2.6* sont représentées les évolutions des modules équivalents de compressibilité et cisaillement normalisés par ceux du squelette en fonction de la

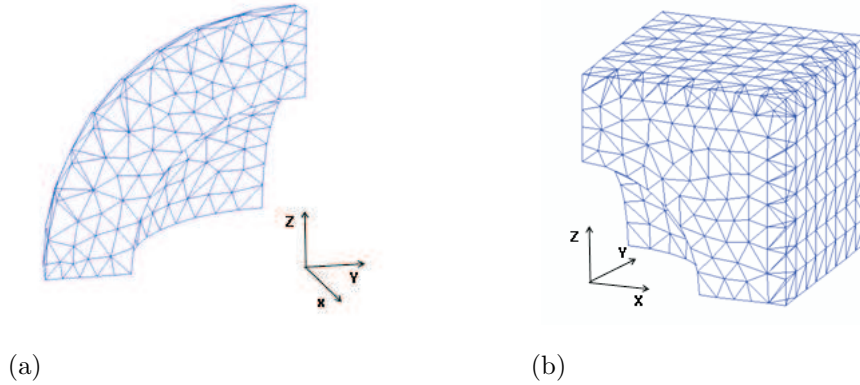


Figure 2.4 — Maillage de volumes élémentaires (a) Maillage sphère creuse (b) maillage cube avec un pore sphérique (1/8 du modèle). Module effectif, Castem.

porosité. Ces évolutions sont naturellement décroissantes, l'augmentation de la porosité au sein du matériau affaiblissant ses propriétés mécaniques.

Pour les faibles taux de porosité (jusqu'à 10%), les modules de cisaillement et de compressibilité prédits par les différentes approches d'homogénéisation sont proches. Comme attendu, compte-tenu des développements limités présentés à la section 2.2.3.5, au fur et à mesure que la porosité augmente, les différentes prédictions s'écartent les unes des autres. Ainsi, les deux estimations issues de la méthode des distributions diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) divergent rapidement et deviennent inexploitables, voire même non physiques avec des valeurs négatives des modules effectifs en approche déformation pour des porosités dépassant 50%. Les deux approches ne redonnent pas à 100% de porosité les caractéristiques du pore soit donc la valeur nulle pour les modules effectifs. Cette limitation est évidemment due au choix même de la représentation du milieu qui néglige les interactions entre hétérogénéités.

L'approche du schéma autocohérent conduit également à des résultats non physiques pour des milieux de porosité supérieure à 50%. Au delà de cette porosité, le milieu n'a plus de tenue mécanique en cisaillement. François et al (François et al, 1991 [46]) expliquent ce résultat par la situation de désordre parfait que suppose implicitement le modèle autocohérent. Pour une porosité importante, on peut trouver des chemins connexes de pores dans le milieu.

Les résultats de l'approche périodique apparaissent proches de ceux fournis par le schéma différentiel et ce sur l'ensemble de la gamme de porosité qui peut être atteinte par le périodique. Comme attendu, l'approche numérique des modules effectifs menée avec les maillages 1 et 2 présentés respectivement sur la *Figure 2.4(a)* et *2.4(b)* est voisine de celle fournie par l'approche d'Hashin et Shtrikman. On notera que le calcul numérique sur le maillage 1 *Figure 2.4(a)* redonne aux erreurs d'approximation numériques près le résultat explicite de la borne supérieure d'Hashin et Shtrikman.

La dispersion entre ces différents résultats peut être quantifiée sur la *Figure 2.7* qui présente l'écart relatif entre ces différentes approches et l'homogénéisation périodique prise comme référence. Cet écart relatif augmente avec la porosité et devient rapidement important pour la méthode des distributions diluées atteignant une porosité de 40%.

Les *Figures 2.8(a)* et *2.8(b)* représentent les évolutions en fonction de la porosité

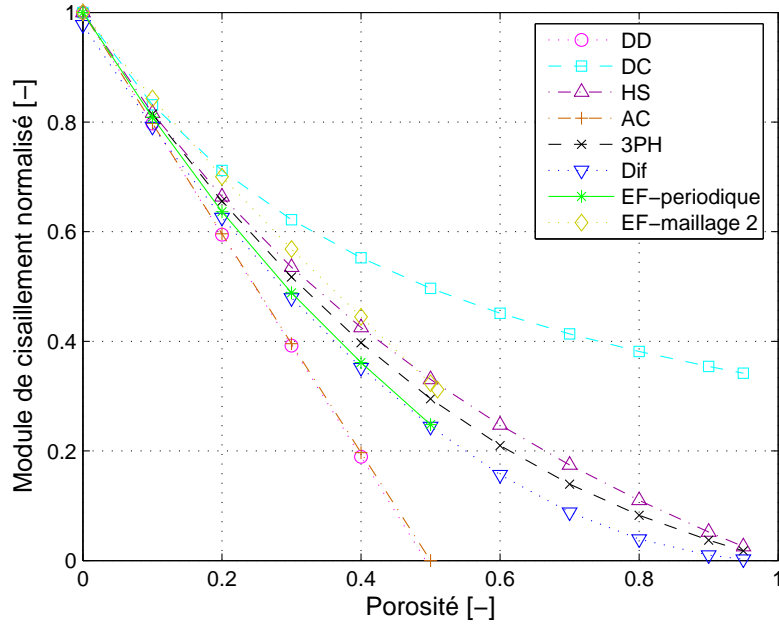


Figure 2.5 — Évolution du module de cisaillement normalisé par celui du squelette en fonction de la porosité par différentes méthodes d’homogénéisation.

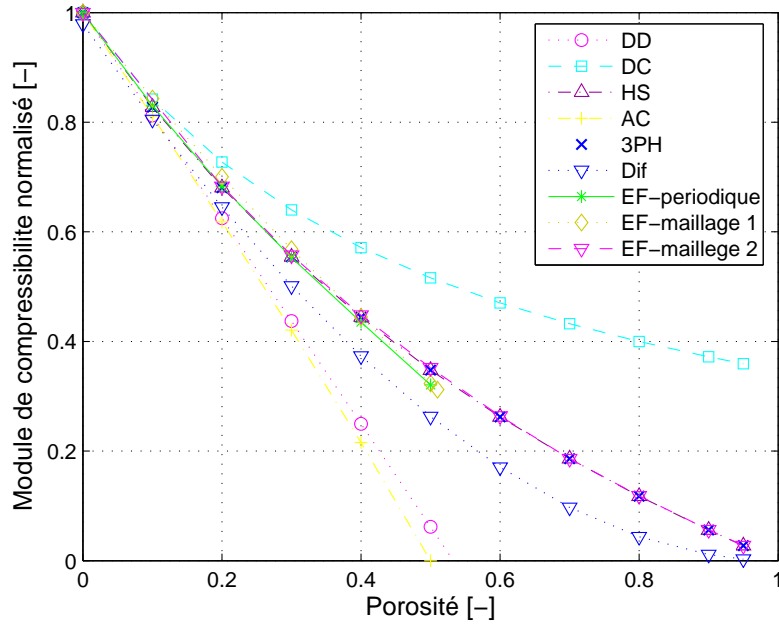


Figure 2.6 — Évolution du module de compressibilité normalisé par celui du squelette en fonction de la porosité par différentes méthodes d’homogénéisation.

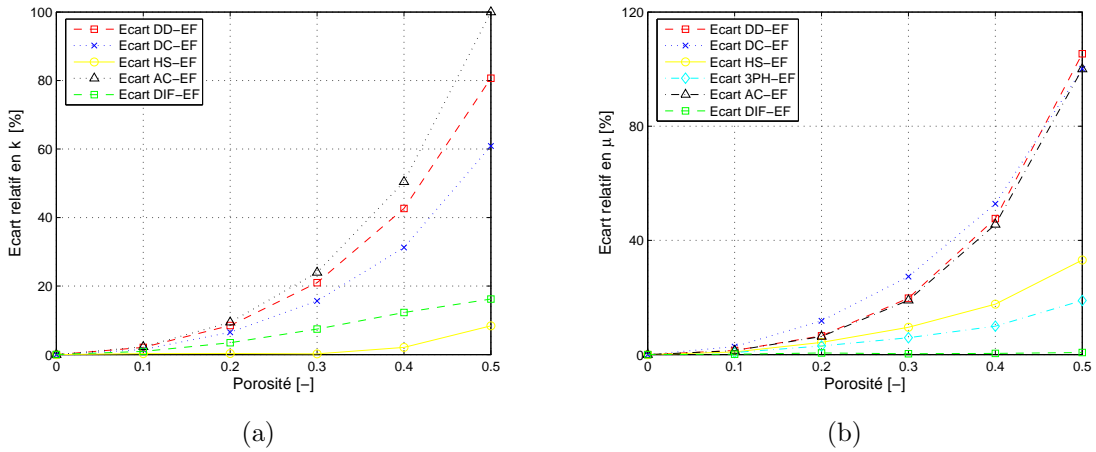


Figure 2.7 — Écart relatif entre les différentes méthodes d'homogénéisation et l'approche périodique en fonction de la porosité pour les modules de compressibilité (a) et de cisaillement (b).

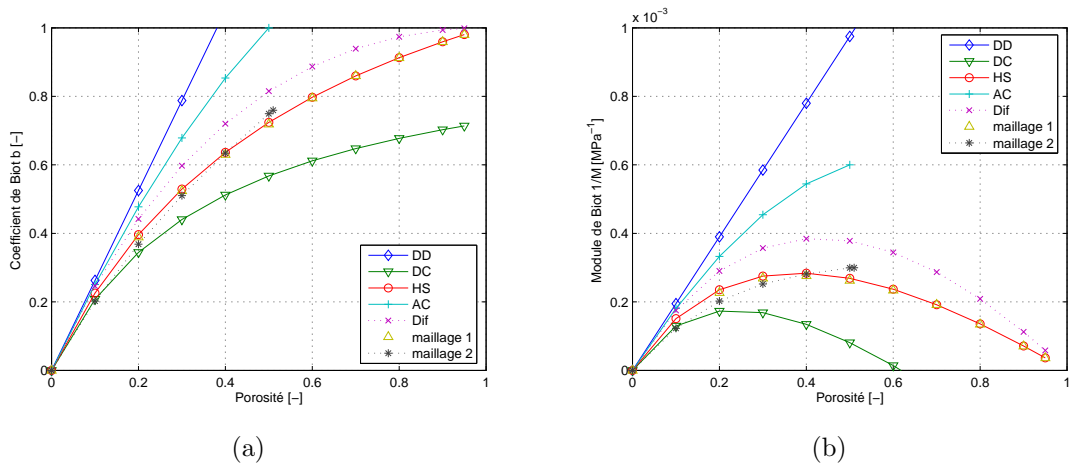


Figure 2.8 — Évolution du coefficient de Biot (a) et du module (b) de Biot en fonction de la porosité pour différentes méthodes d'homogénéisation.

des coefficients et modules de Biot obtenus par les différentes méthodes d'estimation simplifiées et les approches éléments finis. On rappelle que le coefficient de Biot b et le module de Biot M sont définis par les relations :

$$b = 1 - \frac{k^*}{k_s} \quad \frac{1}{M} = \frac{b - \phi}{k_s} \quad (2.57)$$

Comme précédemment, seules l'approche Différentielle, l'approche d'Hashin et l'approche numérique de type module effectif permettent de retrouver à 100% de pores un coefficient de Biot de 1 et un module de Biot de 0.

La dispersion des différentes prédictions étant constatée et quantifiée, nous nous proposons maintenant d'introduire le processus itératif décrit au paragraphe 2.2 et de le coupler à ces différentes méthodes explicites d'homogénéisation.

2.3.2.2 Prédiction par le processus itératif d'homogénéisation

Le processus itératif est tout d'abord mis en œuvre en procédant à chaque itération à l'homogénéisation des milieux poreux intermédiaires par la méthode des distributions diluées. Différentes étapes d'homogénéisation intermédiaires et donc d'itérations sont considérées : $n=1, 2, 5, 10, 200$ itérations.

Les valeurs du module de compressibilité et de cisaillement équivalent ainsi obtenues par les deux approches de la méthode des distributions diluées sont tracées en fonction de la porosité au cours du processus d'itération sur les *Figures 2.9(a)* et *2.9(b)*. On observe que les deux prédictions éloignées l'une de l'autre dans une démarche directe d'homogénéisation ($n=1$) se rapprochent lorsqu'on procède à l'homogénéisation par itérations successives. Les valeurs non physiques observées précédemment dans l'approche déformation pour des taux de porosités élevés deviennent progressivement physiques avec un nombre croissant d'itérations et tendent vers 0 pour un milieu fortement poreux, ce qui est cohérent, le matériau perdant sa rigidité. Avec un nombre d'itérations croissant, on constate par ailleurs que les deux prédictions en approche déformation et contrainte se rapprochent pour tendre vers une seule prédiction décrivant le comportement global du matériau. Les deux approches déformation et contrainte deviennent alors inverses l'une de l'autre.

Sur la *Figure 2.10*, les évolutions des modules de compressibilité et de cisaillement du milieu poreux en fonction de la porosité estimées par les approches des distributions diluées en approche déformation (DD) et contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif sont confrontées à celles fournies par l'homogénéisation périodique. Les résultats itérés sont considérés à 200 itérations ce qui correspond ici à la convergence du processus itératif.

Nous observons qu'avec la mise en œuvre du processus itératif, la méthode des distributions diluées à convergence voit ses résultats se rapprocher très significativement de ceux issus de l'approche périodique et ceci quelque soit la porosité. Par conséquent, l'approche itérative d'homogénéisation permet d'améliorer de façon signi-

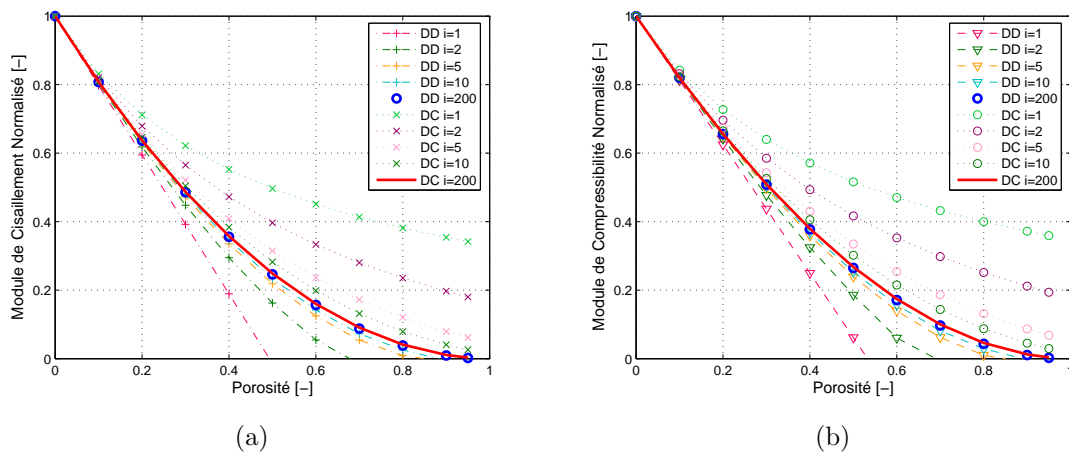


Figure 2.9 — Évolution des modules de cisaillement (a) et de compressibilité (b) normalisés par ceux du squelette en fonction de la porosité par l'approche des distributions diluées itérée pour différents nombres d'itérations.

ficative la prédiction de la méthode des distributions diluées qui n'était pertinente que pour une gamme de porosités faibles.

La convergence du processus vers un même comportement équivalent est également mise en évidence à la *Figure 2.11* qui présente l'évolution de l'écart relatif entre les modules de rigidité équivalents correspondant à un nombre d'itérations i donné et celui correspondant à la convergence n en fonction de la porosité. Soit pour le module de compressibilité :

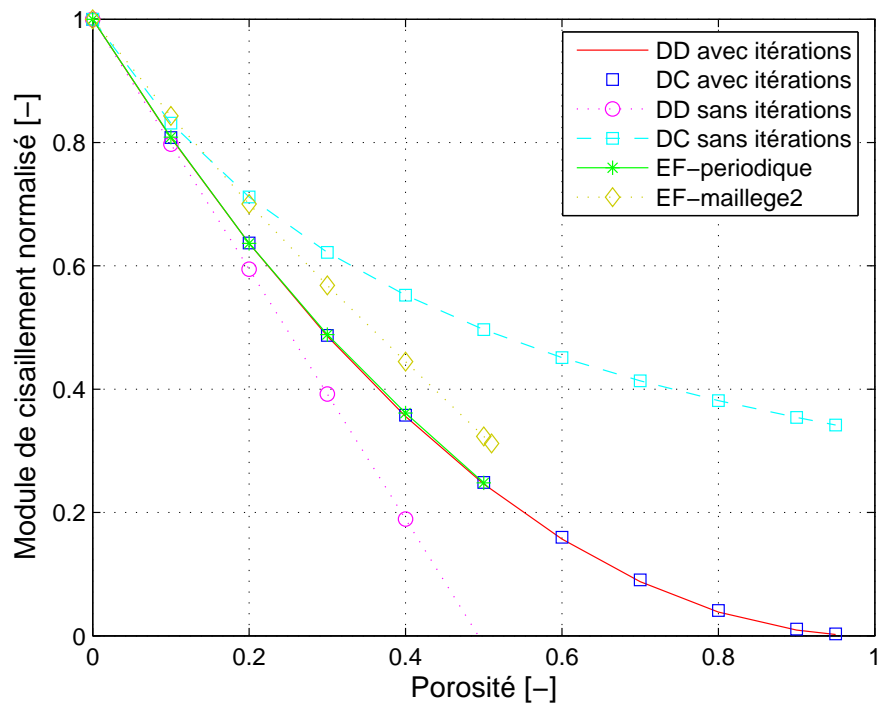
$$E_k = \frac{k^{*(n)} - k^{*(i)}}{k^{*(n)}}$$

Le processus itératif est maintenant introduit de la même façon dans les approches d'homogénéisation d'Hashin-Shtrikman borne supérieure (HS) et du modèle auto-cohérent (AC). Sur la *Figure 2.12* sont présentées les évolutions du module de rigidité à la compression équivalent et du module de cisaillement équivalent en fonction de la porosité par ces méthodes d'homogénéisation et ceci pour différents nombres d'itérations. On observe là encore la convergence au cours des itérations des deux prédictions et ceci pour toute la gamme de porosités.

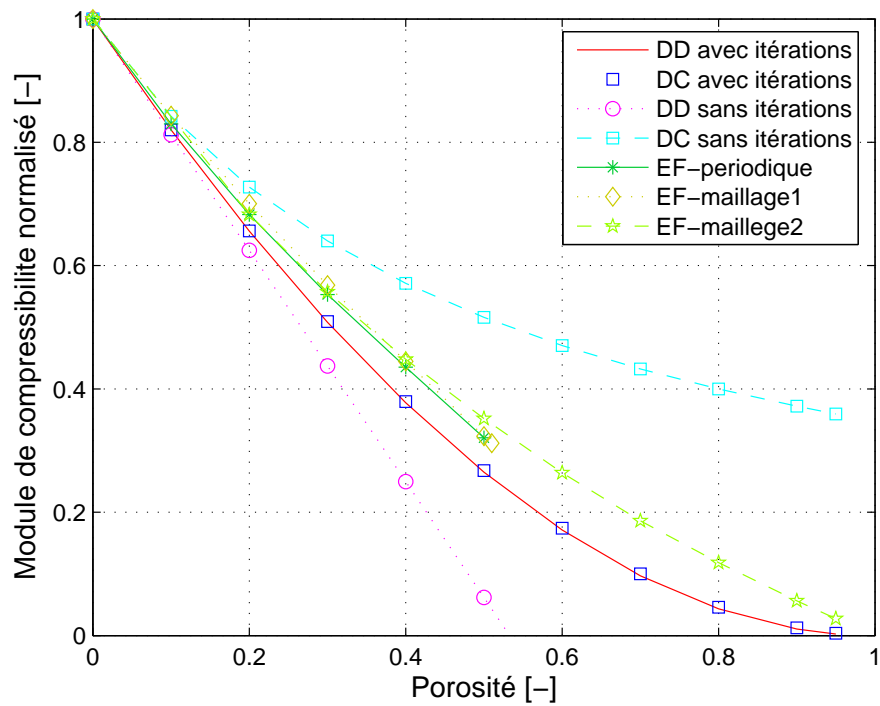
L'ensemble des approches est confronté sur la *Figure 2.13* avant couplage et après couplage au processus itératif (it) avec les approches des distributions diluées (DD) et (DC), la borne d'Hashin (HS), l'approche auto-cohérente (AC), l'approche des 3 phases (3PH), ainsi qu'à titre de référence le périodique.

L'introduction du processus itératif permet donc l'identification d'un même comportement mécanique macroscopique équivalent pour le matériau poreux considéré quelque soit la méthode d'homogénéisation utilisée et ce quelque soit le taux de renfort, même très élevé. Le processus d'itération permet ainsi d'étendre le domaine de validité des différentes méthodes d'homogénéisation jusqu'à 100% de porosité.

Comme observé sur les propriétés élastiques, le couplage du processus itératif pour le calcul du coefficient de Biot, *Figure 2.14(a)*, et du module de Biot, *Figure 2.14(b)*, avec les approches d'homogénéisation présentées précédemment conduit à une même prédiction quelque soit la méthode d'homogénéisation utilisée pour construire le comportement effectif des milieux poreux intermédiaires et ceci quelque soit la porosité du milieu.



(a)



(b)

Figure 2.10 — Modules de cisailment (a) et de compressibilité (b) normalisés en approche diluée couplée ou non au processus itératif. Comparaison avec l'approche périodique.

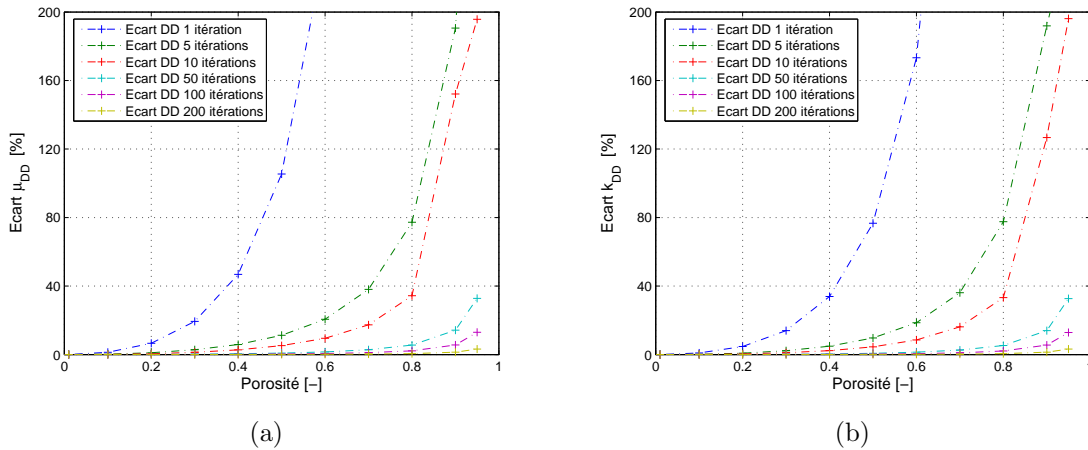


Figure 2.11 — Écart relatif à la convergence entre les modules de cisaillement (a) et de compressibilité (b) par l'approche des distributions diluées au cours des itérations.

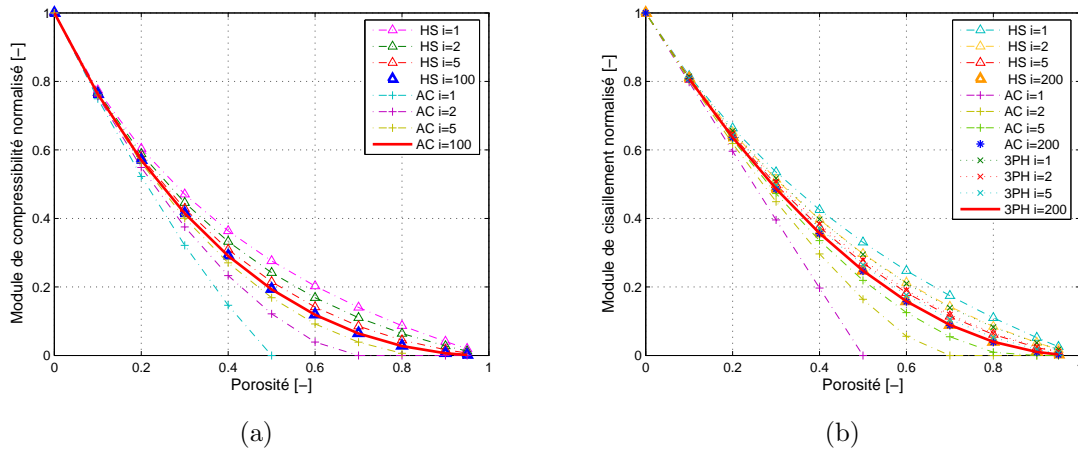


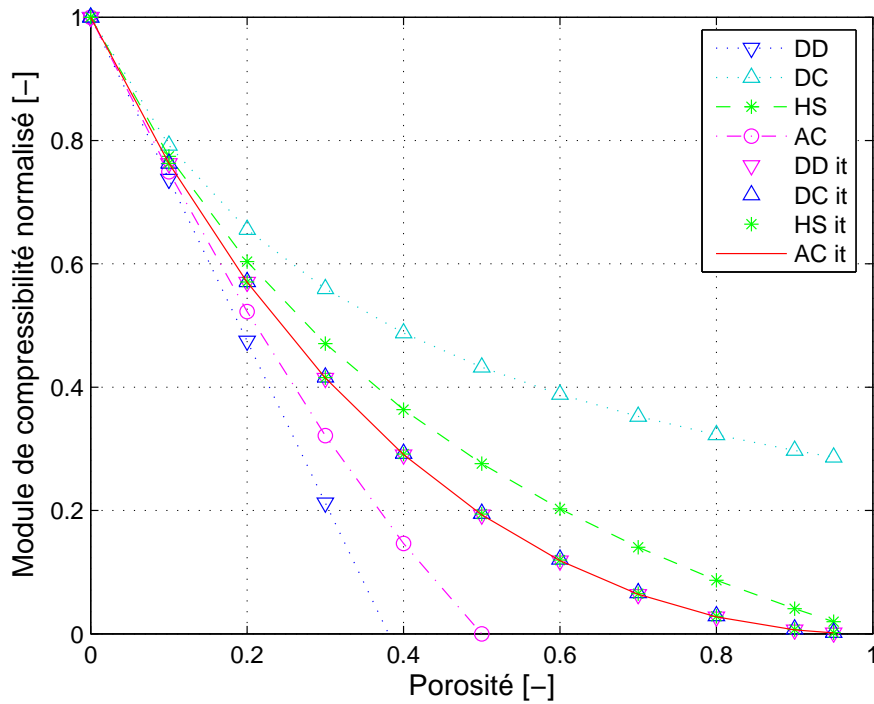
Figure 2.12 — Évolution des modules de compressibilité (a) et de cisaillement (b) en fonction de la porosité au cours des itérations par l'approche d'Hashin et le schéma autocohérent

2.3.2.3 Confrontation avec l'approche différentielle

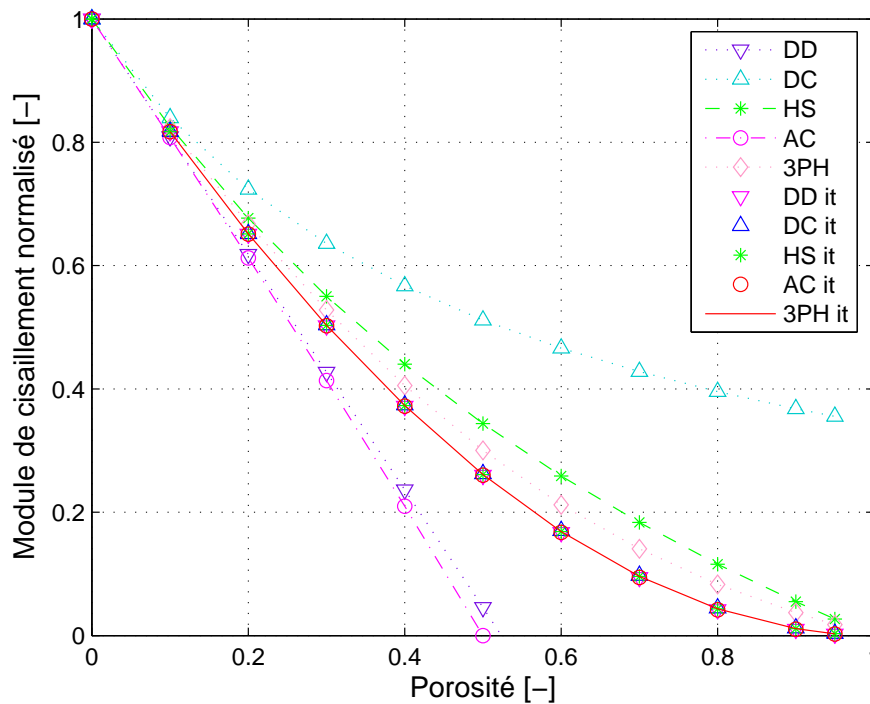
Dans ce paragraphe, nous confrontons l'approche itérative proposée dans ce travail avec la méthode d'homogénéisation proposée par Norris (Norris, 1985 [82]) et par Zimmerman (Zimmerman, 1991 [112]) sous le nom de schéma différentiel. Cette approche également différentielle a été présentée au chapitre 1. Le comportement équivalent est solution d'un système différentiel. Pour le cas particulier des milieux poreux, Zimmerman a établi que la résolution de ce système est explicite.

On présente sur les *Figures 2.15(a)* et *2.15(b)* les évolutions du module de compressibilité et de cisaillement en fonction de la porosité obtenues par les approches des distributions diluées couplées ou non au processus itératif et celles fournies par l'approche de Zimmerman (Dif).

L'écart relatif entre les méthodes à convergence du processus itératif est très faible de l'ordre de 0.1% et ce même pour des porosités importantes. La démarche

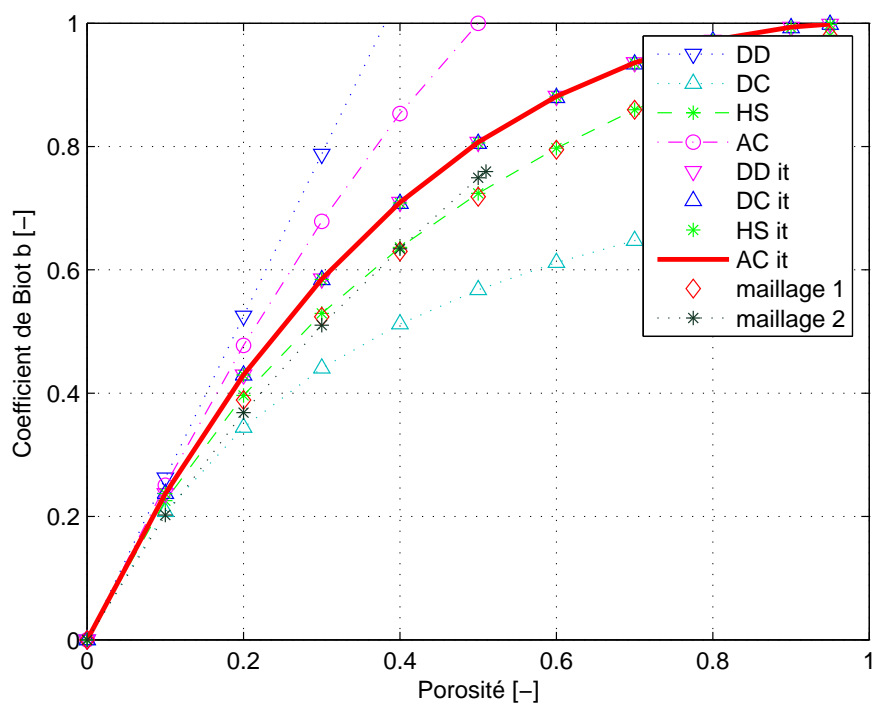


(a)

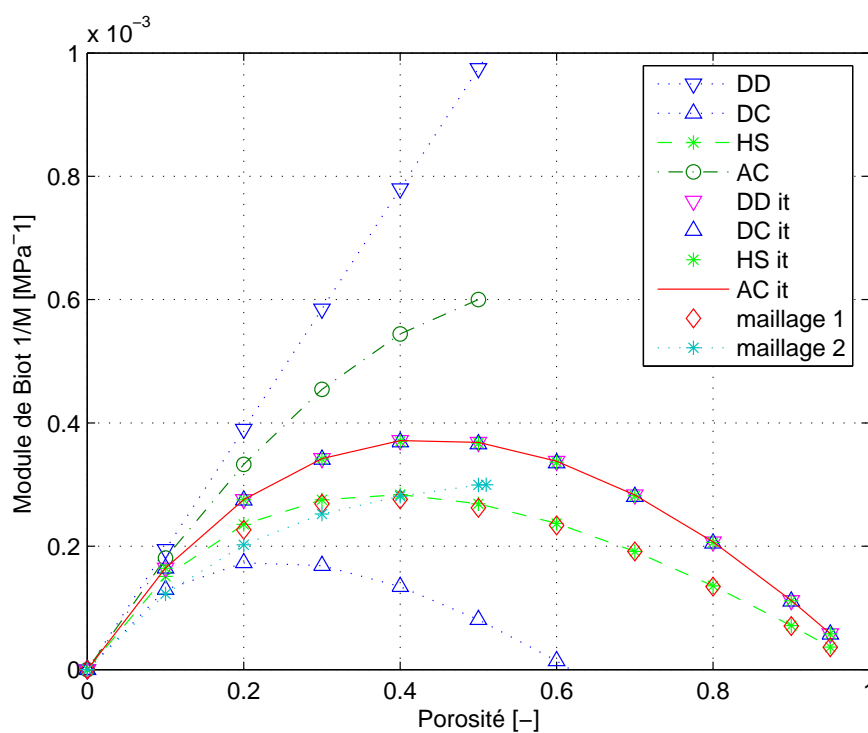


(b)

Figure 2.13 — Évolution des modules de compressibilité (a) et de cisaillement (b) normalisé par ceux du squelette en fonction de la porosité pour différentes approches d'homogénéisation couplées (it) et non au processus itératif

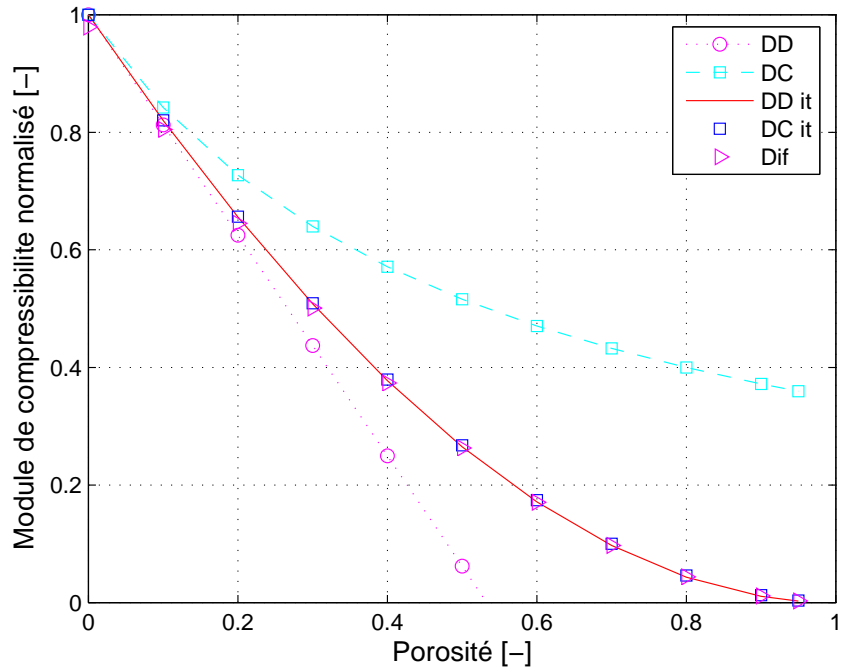


(a)

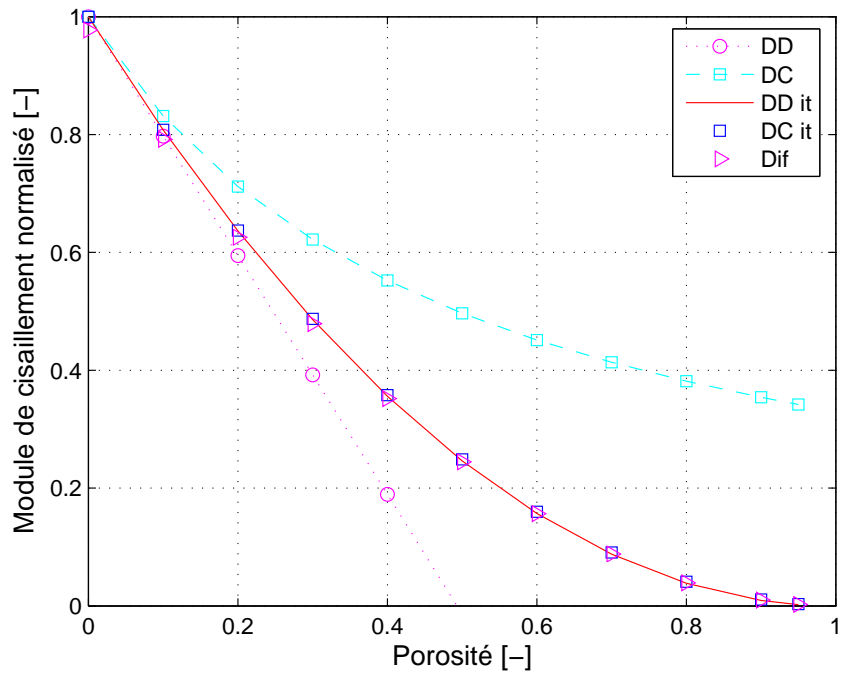


(b)

Figure 2.14 — Évolution des coefficient (a) et du module de Biot (b) en fonction de la porosité pour différentes approches d'homogénéisation couplées (it) ou non au processus itératif.



(a)



(b)

Figure 2.15 — Évolution des modules de compressibilité (a) et de cisaillement (b) normalisés par ceux du squelette en fonction de la porosité par l'approche des distributions diluées directe ou à convergence du processus itératif (it) et l'approche différentielle de Zimmerman (Dif).

différentielle ainsi adoptée par Zimmerman se base sur l'exploitation itérative de la solution d'Eshelby alors que l'approche itérative proposée dans ce manuscrit est couplée à différentes approches d'homogénéisation plus ou moins complexes dans leurs mises en oeuvre tel que le schéma autocohérent généralisé. Ce couplage met en évidence la convergence de l'ensemble des approches vers un même comportement équivalent.

Nous nous proposons au paragraphe suivant d'analyser plus en détails cette convergence à travers différentes études de sensibilité.

2.3.2.4 Analyse de la convergence du comportement équivalent

L'analyse de sensibilité porte successivement sur l'influence du schéma d'homogénéisation adopté à chaque itération, du taux de porosité et des caractéristiques du squelette.

Influence du schéma d'homogénéisation

On présente sur les *Figures 2.16 à 2.17* les évolutions des modules de compressibilité et de cisaillement en fonction du nombre d'itérations pour des porosités croissantes ($\phi = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$) par les différentes méthodes d'homogénéisation linéaires présentées précédemment couplées au processus itératif. On retrouve ainsi que plus la porosité est grande plus le nombre d'itérations n pour assurer la convergence est grand. Pour un milieu de porosité 0.3, on atteint la convergence au bout de 50 itérations par l'approche diluée par exemple, alors que pour une porosité de 0.7, on n'arrive à convergence qu'après 150 itérations. Les approches plus riches d'Hashin, de l'autocohérent ou des 3 phases convergent plus rapidement que les approches des distributions diluées.

Influence du taux de porosité

Pour mettre en exergue l'influence de la porosité sur la convergence du processus itératif, on trace à la *Figure 2.18* les écarts relatifs entre l'estimation des modules de compressibilité et de cisaillement obtenue par l'approximation diluée en approche contrainte et l'estimation en approche déformation en fonction du nombre d'itérations pour les valeurs croissantes de porosités. On remarque que ces écarts diminuent avec le nombre d'itérations d'autant plus rapidement que la porosité est faible.

Il est possible comme nous l'avons dit précédemment d'accélérer la convergence du processus, si l'on cherche à caractériser le comportement du milieu poreux sur toute une gamme de porosités. Pour cela, il suffit d'initialiser le processus pour une porosité donnée à partir des résultats obtenus avec la porosité précédente. L'implémentation numérique du processus itératif suit alors l'algorithme modifié schématisé sur la *Figure 2.19*.

Sur les *Figures 2.21* sont tracées les évolutions des modules de compressibilité et de cisaillement en fonction du nombre d'itérations pour des porosités respectivement de $\phi = 0.5$ et $\phi = 0.7$, obtenus par l'approximation des distributions diluées en approche déformation et en approche contrainte couplées au processus itératif suivant les deux algorithmes de mise en oeuvre décrits précédemment. On constate que la convergence est atteinte au bout de 50 itérations et ceci pour une porosité de 0.5 ou de 0.7 du milieu en procédant avec le deuxième algorithme, alors que par l'algorithme classique on n'atteint la convergence qu'au bout de 150 itérations pour une porosité de 0.5 et

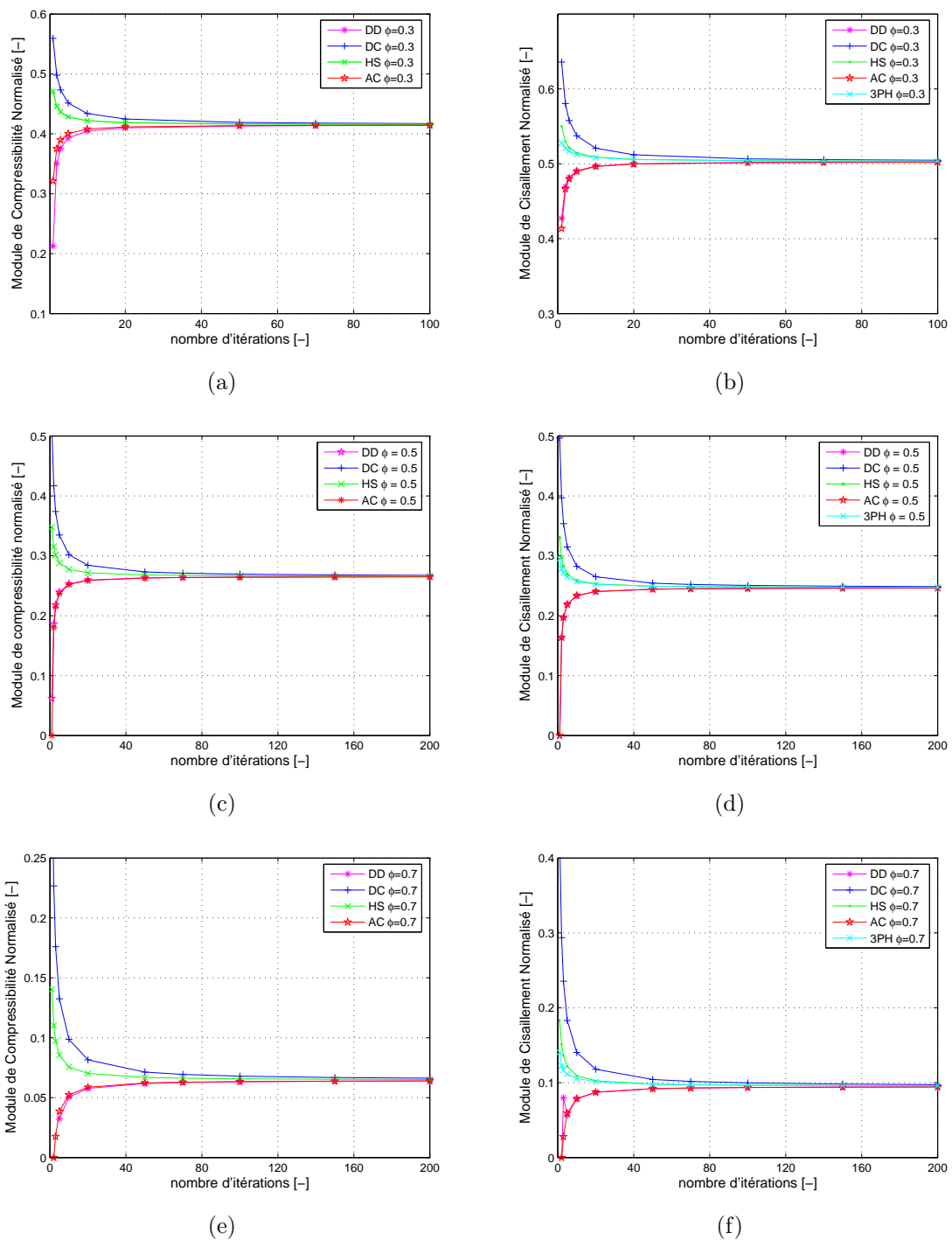


Figure 2.16 — Évolution du module de compressibilité (a,c,e) et de cisaillement (b,d,f) normalisés par ceux du squelette en fonction du nombre d'itérations par différentes méthodes d'homogénéisation : Approximation diluées (DD) en approche déformation, (DC) en approche contrainte, (HS) borne supérieure de Hashin-Shtrikman, (AC) schéma autocohérent et (3PH) autocohérent généralisé. Porosité $\phi=0.3$ (a,b), $\phi=0.5$ (c,d) et $\phi=0.7$ (e,f).

200 itérations pour une porosité de 0.7.

Les écarts relatifs entre les estimations du module de compressibilité et de cisaille-

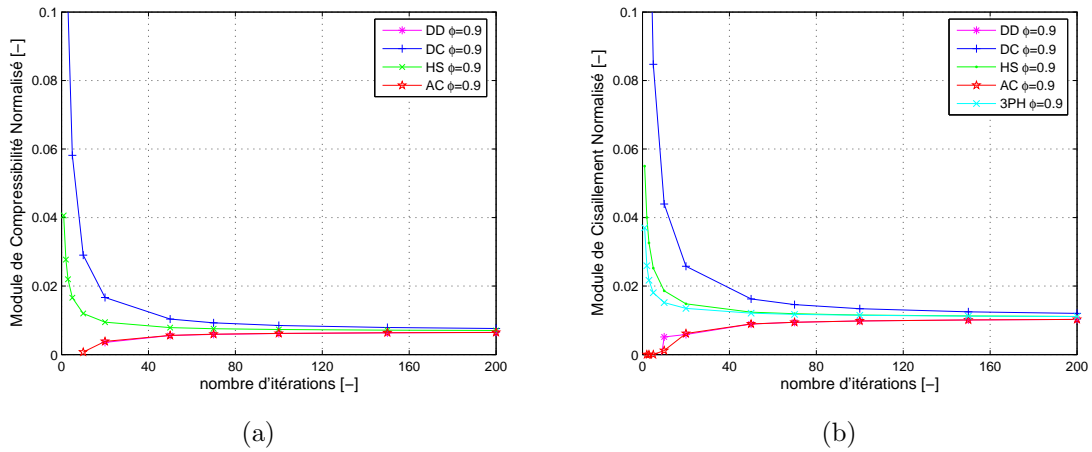


Figure 2.17 — Évolution du module de compressibilité (a) et de cisaillement (b) normalisés par ceux du squelette en fonction du nombre d'itérations par différentes méthodes d'homogénéisation : Approximation diluées (DD) en approche déformation, (DC) en approche contrainte, (HS) borne supérieure de Hashin-Shtrikman, (AC) schéma autocohérent et (3PH) autocohérent généralisé. Porosité $\phi=0.9$.

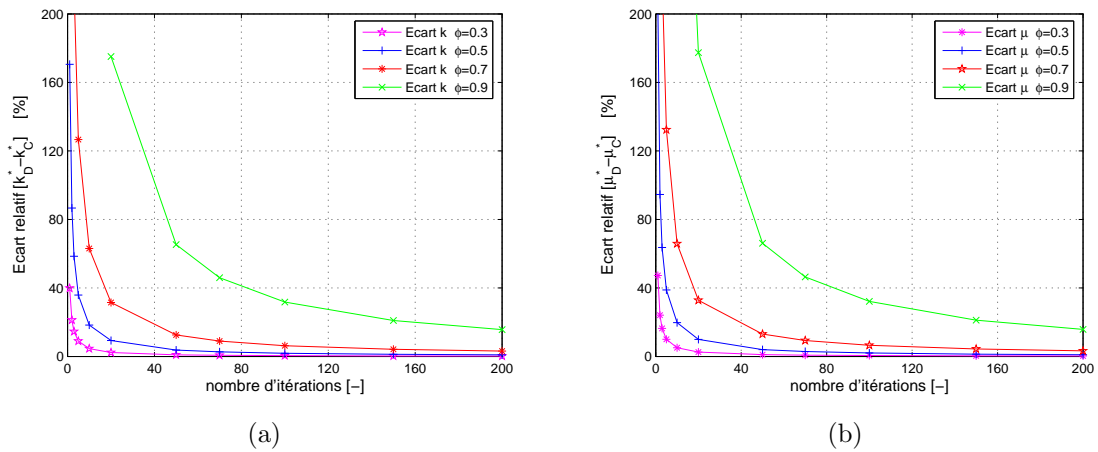


Figure 2.18 — Écarts relatifs des approximations diluées en approche déformation et en approche contrainte du module de compressibilité (a) et de cisaillement (b) en fonction du nombre d'itérations pour différentes porosités.

ment obtenues par l'approximation diluée en approche contrainte et les estimations en approche déformation en fonction du nombre d'itérations pour les mêmes porosités de 0.5 et 0.7 sont aussi présentés aux Figures 2.21. On remarque qu'avec la deuxième implémentation, un nombre d'itérations de 50 assure la convergence même pour des porosités élevées.

Influence des caractéristiques du squelette

Le nombre d'itérations n pour atteindre la convergence vers un même comportement équivalent ne dépend pas seulement de la porosité du matériau mais dépend également des caractéristiques du squelette.

Cette dépendance s'observe ainsi sur l'analyse de sensibilité suivante menée en fonc-

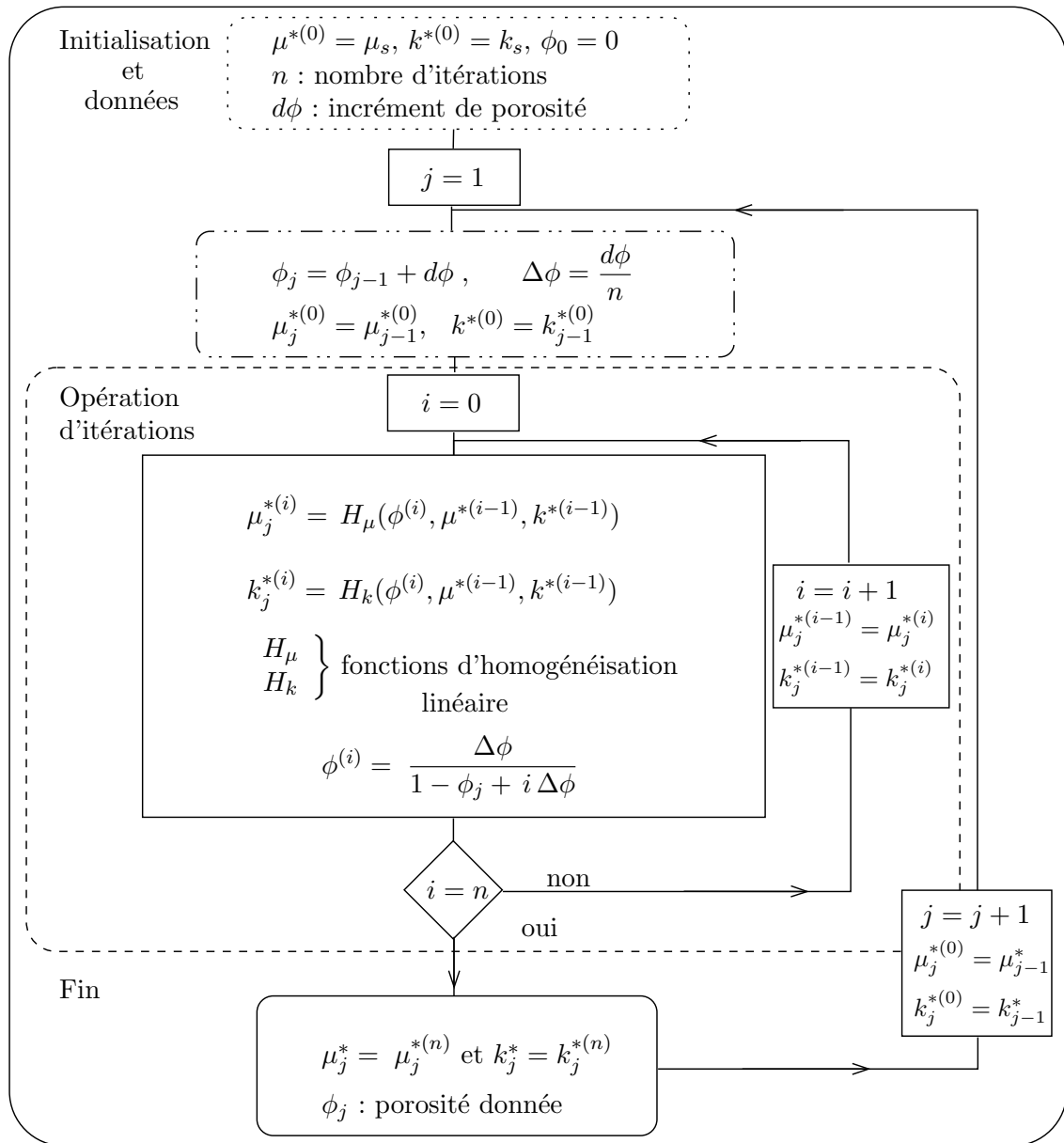


Figure 2.19 — 2^{ème} Algorithme de mise en œuvre du processus itératif.

tion des modules d'Young du squelette. Le coefficient de Poisson ν_s du squelette est fixé à $\nu_s = 0.2$, la porosité du milieu est fixée à 0.5 et nous considérons différentes valeurs pour le module d'Young du squelette $E_s = 0.5, 2$ et 4 GPa . Le comportement homogène équivalent de ces différents milieux poreux est obtenu par ce processus itératif couplé à l'approximation des distributions diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC). On présente sur la *Figure 2.22* l'évolution du module d'Young équivalent des différents milieux poreux en fonction du nombre d'itérations. On observe que l'obtention du comportement équivalent pour les milieux poreux dont le squelette présente un module d'Young élevé nécessite un nombre d'itérations plus important. Ainsi, le comportement équivalent du milieu poreux dont le squelette a un module d'Young E_s de 4 GPa est obtenu après 160 itérations alors que celui dont le

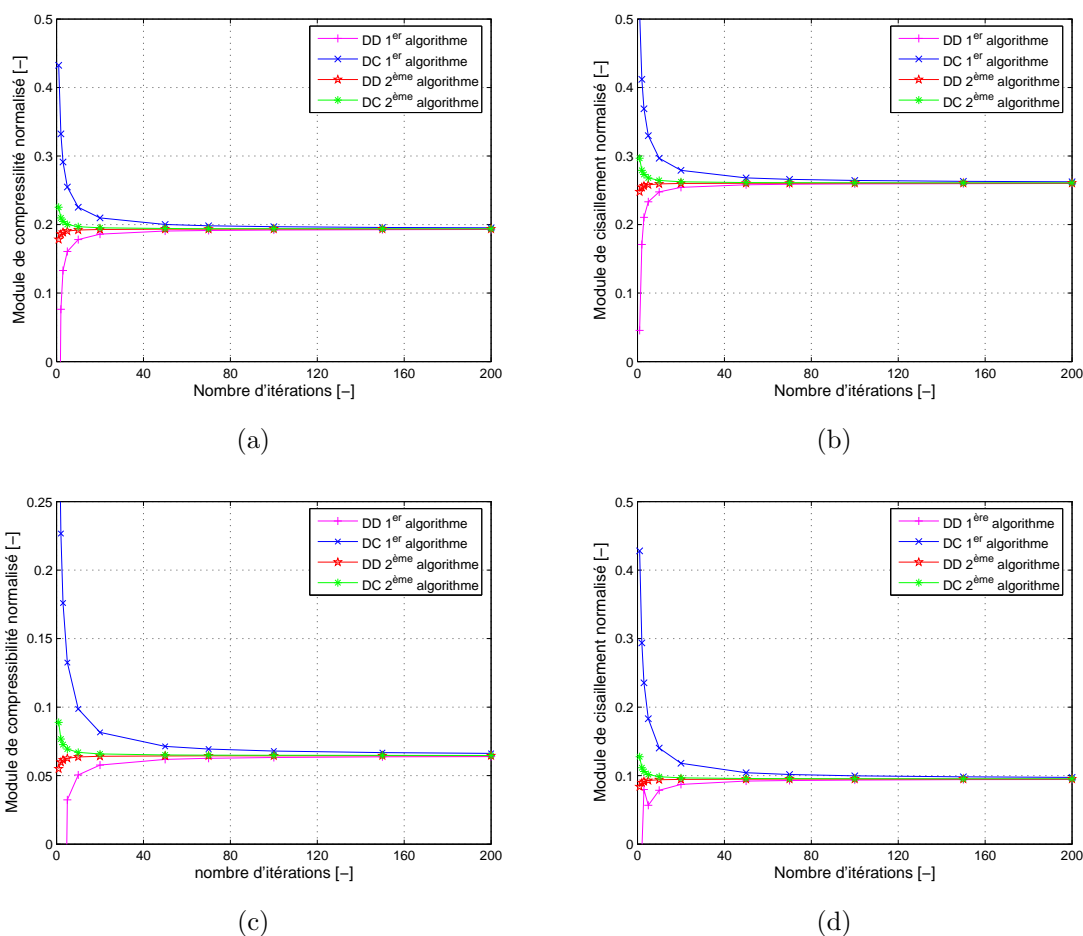


Figure 2.20 — Influence de l'algorithme sur les évolutions des modules de compressibilité et de cisaillement normalisés en fonction du nombre d'itération par l'approche des approximation diluées en approche déformation (DD) et contrainte (DC) (a, b) pour $\phi = 50\%$ et (c, d) pour $\phi = 70\%$.

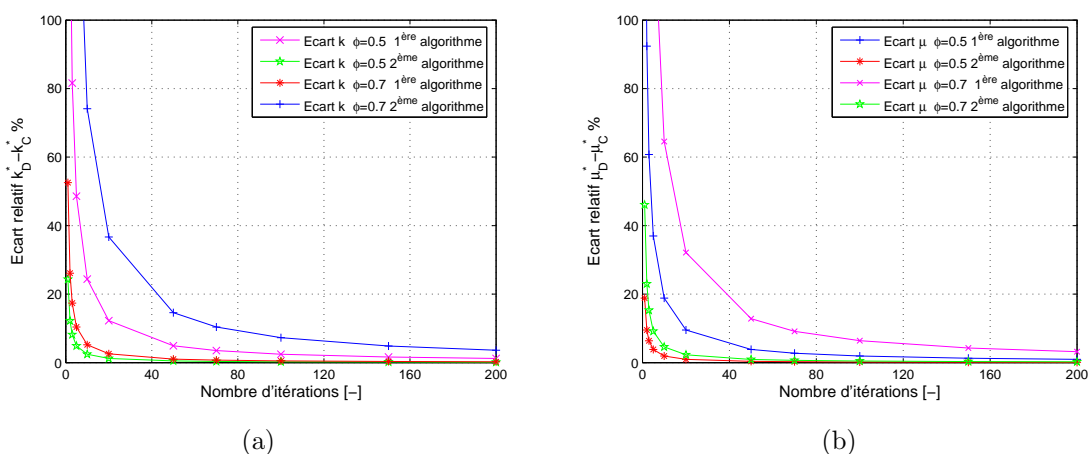


Figure 2.21 — Écarts relatifs des ces estimations par l'approximation diluée du module de compressibilité (a) et de cisaillement (b) en fonction du nombre d'itérations pour ces différentes porosités.

squelette a un module d'Young E_s de 0.5 GPa est obtenu avec seulement 50 itérations.

Ces constatations peuvent être faites également sur la *Figure 2.22(b)* qui présente pour chaque squelette l'écart entre les modules d'Young équivalents obtenus par les approches DD et DC en fonction du nombre d'itérations. On peut donc dire que plus le squelette est rigide, plus le nombre d'itérations pour atteindre la convergence des différents schémas prédictifs est important. Plus généralement, dans le cas de matériaux biphasés, on observe comme attendu que le rapport de rigidités des deux phases est important, ce qui revient à dire que plus le milieu est hétérogène, plus les schémas prédictifs diffèrent et donc plus il est nécessaire d'itérer pour obtenir la convergence des prédictions vers un même comportement effectif.

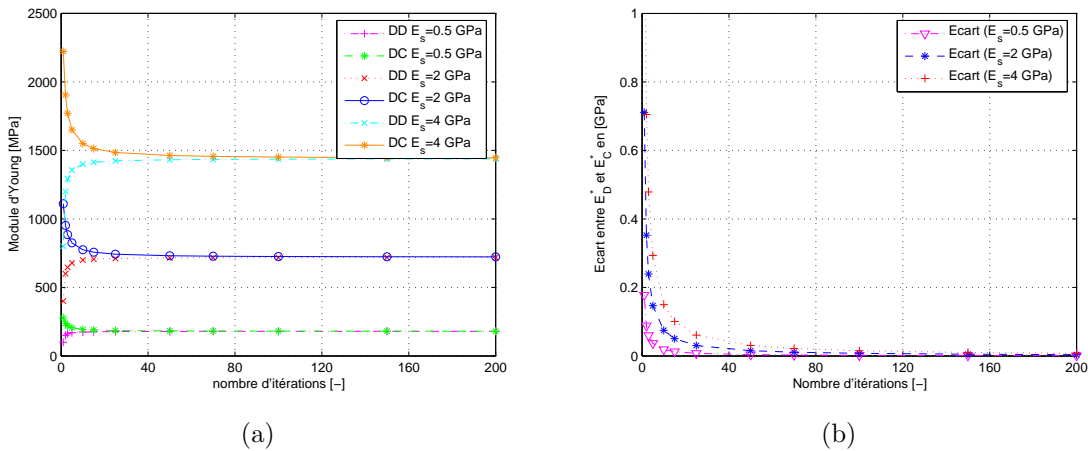


Figure 2.22 — (a) Évolution du module d'Young équivalent par les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) en fonction du nombre d'itérations pour différents modules d'Young du squelette. (b) Écart absolue entre les approximations du module d'Young équivalent en approche déformation et contrainte en fonction du nombre d'itérations pour des milieux poreux de différents squelettes. Porosité $\phi = 0.5$.

Discutons maintenant de l'influence du coefficient de Poisson du squelette. Cette fois le module d'Young du squelette est fixé à $E_s = 1 \text{ GPa}$. La porosité est toujours fixée à 0.5. On étudie alors la convergence du processus pour différentes valeurs du coefficient de Poisson du squelette $\nu_s = 0.1, 0.3$ et 0.48 . Les estimations du coefficient de Poisson homogénéisé par les approximations diluées en approche contrainte (DD) et en approche déformation (DC) en fonction du nombre d'itérations sont reportées sur la *Figure 2.23(a)*. On remarque que les deux estimations de l'approche des distributions diluées pour un coefficient de Poisson du squelette de 0.1 se rapprochent plus vite au cours des itérations que celles associées à un coefficient de Poisson du squelette de 0.3, et à fortiori de celle obtenues avec un coefficient de Poisson de 0.48. Ainsi, les milieux poreux compressibles nécessitent moins d'itérations pour parvenir à la convergence des approches à un même comportement équivalent que les matériaux incompressibles. Cette observation est également mise en évidence sur la *Figure 2.23(b)* qui présente l'écart des estimations des coefficients de Poisson en fonction du nombre d'itérations. Alors que la convergence est attendue en une vingtaine d'itérations dans le cas d'un coefficient de Poisson du squelette de 0.1 ou de 0.3, il faut environ 200 itérations pour que les deux prédictions se rejoignent dans le cas d'un milieu incompressible (0.48).

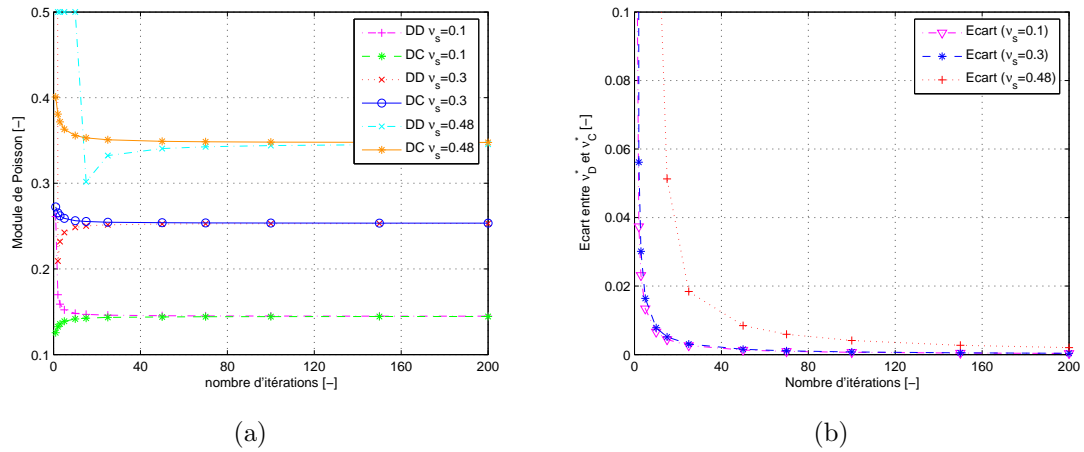


Figure 2.23 — (a) Évolution du coefficient de Poisson équivalent par les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) en fonction du nombre d'itérations pour différents coefficients de Poisson du squelette. (b) Écart absolu entre les approximations du coefficient de Poisson équivalent en approche déformation et contrainte en fonction du nombre d'itérations pour des milieux poreux de différents squelettes. Porosité $\phi = 0.5$.

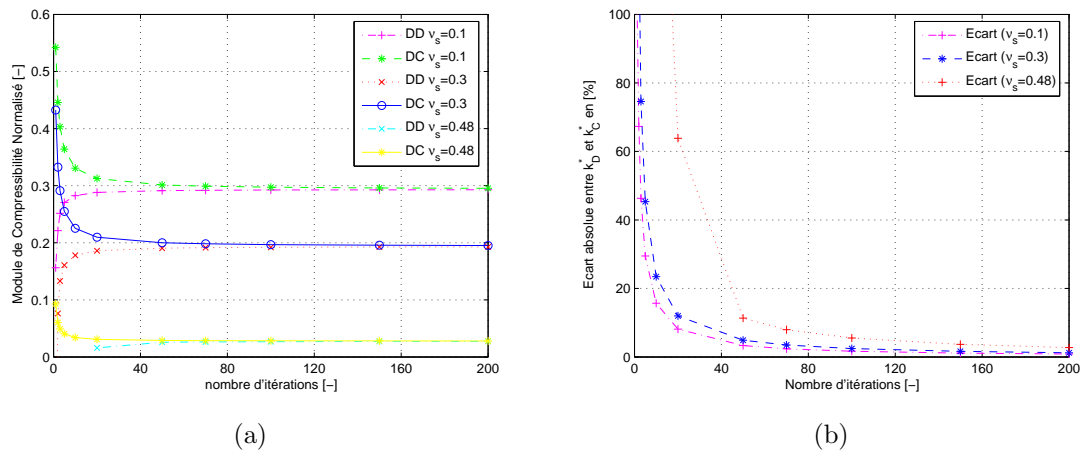


Figure 2.24 — (a) Évolution du module de compressibilité équivalent par les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) en fonction du nombre d'itérations pour différents coefficients de Poisson du squelette. (b) Écart absolu entre les approximations du module de compressibilité équivalent en approche déformation et contrainte en fonction du nombre d'itérations pour des milieux poreux de différents squelettes. Porosité $\phi = 0.5$.

Sur la *Figure 2.24(a)* sont également présentées les estimations du module de compressibilité homogénéisé normalisées par celui des squelettes issues des approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC). On remarque que l'obtention du comportement effectif d'un milieu dont le coefficient de Poisson est élevé nécessite plus d'itérations. Cette influence est également plus visible sur la *Figure 2.24(b)* qui présente les évolutions des écarts entre l'estimation du module de compressibilité en approche contrainte et l'estimation en approche déformation en fonction du nombre d'itérations.

2.4 Conclusions et commentaires

Les modèles micromécaniques basés sur des approches d'homogénéisation simplifiées prédisent le comportement élastique de matériaux poreux avec une précision fortement dépendante du degré d'idéalisme choisi pour la représentation du VER. Ils conduisent à des comportements élastiques et hydro-élastiques voisins uniquement pour de faibles porosités. Par contre, pour des porosités importantes de l'ordre de 60% comme celles des argiles pour lesquelles nous proposons une application au chapitre 4, les différentes prédictions divergent sensiblement. C'est avec l'objectif de disposer d'un outil de prédiction fiable tout en conservant la simplicité de mise en œuvre des approches explicites d'homogénéisation que nous avons proposé une méthode itérative d'homogénéisation. Elle consiste en l'introduction successive de faibles proportions de pores suivies d'homogénéisations intermédiaires jusqu'à atteindre la porosité souhaitée. De cette façon, les méthodes explicites utilisées à chaque étape sont employées dans leur domaine de validité.

Le calcul du comportement équivalent de milieux poreux élastiques linéaires à fortes porosités devient alors accessible avec une très bonne précision par cette approche d'homogénéisation itérative simple. Un même comportement effectif est obtenu quelque soit la méthode d'homogénéisation utilisée à chaque étape du processus itératif. La correction apportée par cette méthodologie peut être très significative en particulier dans le cas de l'approche des distributions diluées. Cette méthodologie a été validée et appliquée dans ce chapitre au calcul du comportement élastique et poro-élastique de milieux poreux.

Cette démarche itérative présentée ici dans le cadre de l'élasticité linéaire s'applique également à la prédiction du comportement thermique ou hygrométrique de milieux poreux. Elle peut être appliquée à des milieux biphasés dont les constituants ont des caractéristiques très contrastées. Cette approche a également été utilisée avec succès pour des matériaux présentant une dispersion granulométrique des renforts (Zouari, 2006 [113]). La correction apportée par le processus itératif touche également l'estimation des déformations et contraintes locales. Cet aspect a été plus spécifiquement développé dans les travaux de Brini (Brini, 2004 [22]) et appliqué à la modélisation du vieillissement de composites à renforts creux immergés. Dans ce travail, cette démarche itérative va être exploitée au chapitre suivant dans le domaine non linéaire pour simuler le comportement de milieu poreux dont le squelette présente un comportement non linéaire.

CHAPITRE 3

Homogénéisation des milieux poreux élastiques non linéaires

3.1 Introduction

Les méthodes d'homogénéisation développées et enrichies au chapitre 2 sont dédiées à des matériaux dont le squelette présente un comportement élastique linéaire. Un tel comportement n'est évidemment pas représentatif d'une large classe de matériaux. C'est en particulier le cas des milieux argileux auxquels nous souhaitons nous intéresser au dernier chapitre de ce travail et dont le comportement est de type élastoplastique.

Alors que les techniques d'homogénéisation dans le domaine linéaire sont maintenant bien connues et appliquées avec succès, dans le domaine non linéaire elles restent un sujet très actuel de recherches, comme l'atteste la bibliographie récente et abondante citée au chapitre 1. Nous avons présenté au chapitre 1 les grandes lignes des méthodes proposées dans la littérature. Parmi ces approches, les méthodes basées sur une linéarisation sécante du comportement des phases nous ont paru attractives car elles permettent l'exploitation des schémas prédictifs d'homogénéisation linéaire. En ce sens, on conçoit bien qu'elles vont nous permettre d'intégrer le processus itératif dans la démarche d'homogénéisation et d'apporter ainsi une contribution nouvelle à ces approches.

Ainsi, nous commencerons ce chapitre par une présentation détaillée de la méthodologie d'homogénéisation non linéaire par l'approche de linéarisation sécante. Cette méthode est ici naturellement décrite dans le cas de milieux poreux en intégrant les précautions nécessaires aux définitions des moyennes dans ce cas. La linéarisation repose en partie sur une prise de moyennes des champs locaux dans le squelette, le matériau poreux non linéaire étant ainsi approché par un milieu linéaire. Les méthodes classiques d'homogénéisation linéaire peuvent alors être exploitées sur ce dernier milieu. Les deux méthodes proposées dans la littérature pour cette prise de moyenne, l'approche sécante classique et l'approche sécante modifiée, seront détaillées dans une démarche en déformation et en contraintes imposées. L'accent sera mis sur l'implémentation pratique de ces extensions sécantes en non linéaire. Différentes simulations seront présentées en guise d'illustrations de façon à mettre également en

évidence les limites de ces approches.

La seconde partie du chapitre est consacrée à l'introduction de la procédure itérative d'homogénéisation développée au chapitre 2 dans cette méthodologie d'homogénéisation non linéaire. Les algorithmes d'implémentation de ce couplage seront détaillés et appliqués à des milieux poreux dont les comportements des squelettes sont gouvernés par une loi non linéaire de type loi puissance ou bien une loi élastoplastique. Différentes confrontations à des résultats de la littérature sur des milieux poreux et également biphasés seront proposées pour s'assurer de la validité de l'implémentation et mettre en évidence l'apport du processus itératif en particulier pour des milieux fortement poreux. Enfin, la démarche micromécanique est exploitée pour construire les surfaces limites d'écoulement plastique des milieux homogènes équivalents. Là encore, le processus itératif est introduit et illustré par des exemples et des confrontations à des modèles classiques.

3.2 Méthodologie d'homogénéisation de milieux poreux non linéaires

Nous nous proposons dans ce paragraphe de présenter une méthodologie pour l'homogénéisation de milieux poreux dont le squelette présente un comportement élastique non linéaire. Nous reprenons pour cela le principe introduit au chapitre 1 à la section 1.3.5 présenté dans le cadre de matériaux multiphasés et basé sur les travaux décrits dans Suquet (Suquet, 1997 [97]). Nous adaptons ici cette approche aux milieux poreux. Le choix est fait d'une linéarisation du problème d'homogénéisation non linéaire par approche sécante qui permet d'exploiter les schémas prédictifs linéaires introduits également au chapitre 1. Par la suite, la méthode pourra être couplée avec l'approche itérative d'homogénéisation comme nous le verrons à la section 3.3.

3.2.1 Formulations sécantes du problème local d'homogénéisation

Comme en élasticité linéaire, deux formulations du problème d'homogénéisation non linéaire peuvent être proposées selon que le chargement est imposé sous forme d'une déformation macroscopique ou d'une contrainte macroscopique. Nous décrivons successivement ces formulations.

3.2.1.1 Approche en déformation imposée

Considérons un volume élémentaire représentatif Y d'un milieu poreux. Le squelette occupe la partie Y_s de ce volume et les pores la partie complémentaire Y_T . On désigne par ∂Y_T l'interface pores/squelette et par ∂Y la frontière extérieure de Y .

Le volume est soumis à un chargement macroscopique uniforme couplé d'origine mécanique et hydrique à travers une déformation moyenne uniforme imposée \mathbf{E} et une pression porale p uniforme. Ce chargement induit des champs locaux de déplacement

$\mathbf{u}(y)$, de contraintes $\boldsymbol{\sigma}(y)$ et de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}(y)$. On suppose que l'hypothèse des petites perturbations reste vérifiée.

Le squelette présente un comportement élastique non linéaire caractérisé par un potentiel de déformation $v(\boldsymbol{\varepsilon}(y))$ qui est une fonction non linéaire de la déformation. La loi de comportement s'écrit alors conformément à (1.142) sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) \quad \forall y \in Y_S \quad (3.1)$$

$$\text{avec } \boldsymbol{\varepsilon}(y) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(y) + \nabla^T \mathbf{u}(y)) \quad \forall y \in Y_S \quad (3.2)$$

Le problème local d'homogénéisation posé sur le VER est alors un problème élastique non linéaire. Comme nous l'avons introduit au chapitre 1, une façon de résoudre ce problème consiste à procéder à une première linéarisation de la loi de comportement. Deux linéarisations, dites tangente et sécante, décrites à la section 1.3.5 du chapitre 1 sont possibles. Dans ce travail, nous avons retenu la linéarisation sécante. La loi de comportement (3.1) se linéarise alors sous la forme sécante suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{C}_s^{sct}(\boldsymbol{\varepsilon}(y)) : \boldsymbol{\varepsilon}(y) \quad \forall y \in Y_S \quad (3.3)$$

où \mathbb{C}_s^{sct} désigne le tenseur sécant de rigidité du squelette du 4^{ème} ordre qui dépend non linéairement de la déformation et où les “ : ” désignent, comme précédemment, le produit doublement contracté.

Le tenseur \mathbb{C}_s^{sct} n'est donc pas uniforme dans le squelette. Il dépend du point y à travers la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}(y)$ en ce point. Le milieu poreux s'apparente ainsi à un milieu linéaire comportant une infinité de phases en chaque point y de comportement \mathbb{C}_s^{sct} .

Nous avons vu au chapitre 1 qu'une seconde approximation peut être faite pour permettre d'exploiter les résultats d'homogénéisation linéaire. Le principe est de remplacer la déformation locale $\boldsymbol{\varepsilon}(y)$ variable en tout point du squelette par une déformation effective $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$ uniforme dans le squelette. De sorte que :

$$\mathbb{C}_s^{sct}(\boldsymbol{\varepsilon}(y))_{y \in Y_S} \simeq \mathbb{C}_s^{sct}(\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}) = \mathbb{C}_s^{sct} \quad (3.4)$$

Le tenseur de rigidité \mathbb{C}_s^{sct} devient alors uniforme dans le squelette. Pour un chargement macroscopique donné, le milieu poreux non linéaire s'apparente, à la suite de ces deux approximations, à un milieu poreux linéaire dont le squelette est homogène et caractérisé par le comportement \mathbb{C}_s^{sct} . Ponte Castañeda qualifie ce milieu de “composite linéaire de comparaison”, (Ponte Castañeda, 1991 [83]). Malgré tout, on notera que la dépendance du tenseur de rigidité en fonction de cette déformation effective $\mathbb{C}_s^{sct}(\boldsymbol{\varepsilon}^{eff})$ reste non linéaire.

Plusieurs définitions de cette déformation effective ont été proposées dans la littérature comme nous l'avons dit au chapitre 1. Elles conduisent à des procédures d'homogénéisation différentes et en conséquence à des prédictions distinctes du comportement équivalent. Nous reviendrons sur ces choix possibles ultérieurement.

Dans une approche en déformation imposée, le problème d'homogénéisation ainsi

doublement linéarisé s'écrit alors sur le Volume Élémentaire Représentatif :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(y) = 0 \quad \forall y \in Y \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = \mathbb{C}_s^{sct} : \boldsymbol{\varepsilon}(y) \quad \forall y \in Y_S \quad (3.6)$$

$$\mathbb{C}_s^{sct} = \mathbb{C}_s^{sct}(\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}) \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(y) + \nabla^T \mathbf{u}(y)) \quad \forall y \in Y_S \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(y) : \mathbf{n} = -p \mathbf{n} \quad \forall y \in \partial Y_T \quad (3.9)$$

$$\ll \boldsymbol{\varepsilon}(u) \gg_Y = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n})_S ds = \mathbf{E} \quad (3.10)$$

Le comportement homogénéisé est alors défini formellement, par analogie avec l'élasticité linéaire, par la relation entre grandeurs moyennes (Dormieux et al, 2003 [41]) :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(y) dy = \mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p) : \mathbf{E} - p \mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p) \quad (3.11)$$

où $\boldsymbol{\sigma}(y)$ est la solution du problème d'homogénéisation (3.5-3.10), \mathbb{C}^* désigne le tenseur de rigidité homogénéisé qui dépend non linéairement du chargement macroscopique et \mathbf{B}_d^* désigne le tenseur de Biot également fonction du chargement macroscopique.

Admettons pour l'instant que l'on sache estimer la déformation effective $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$ pour un chargement macroscopique donné, on peut alors calculer le tenseur de rigidité du squelette \mathbb{C}_s^{sct} par la relation (3.7). On peut ensuite exploiter les méthodes d'homogénéisation analytiques présentées au chapitre 1 en élasticité linéaire pour calculer les tenseurs de rigidité équivalents \mathbb{C}^* et de Biot \mathbf{B}_d^* du milieu poreux linéaire de comparaison et donc construire la réponse macroscopique (3.11).

Si le milieu est isotrope ainsi que le squelette, on pourra choisir par exemple les formules (1.93) issues de la méthode d'approximation diluée ou encore (1.125-1.126) de l'approche d'Hashin qui fournissent les modules effectifs k^* et μ^* . Le tenseur de Biot s'obtient ensuite avec la relation (1.65) soit :

$$\mathbf{B}_d^* = \mathbf{1} - (\mathbb{C}_s^{sct})^{-1} : \mathbb{C}^* : \mathbf{1}. \quad (3.12)$$

Avec le choix de l'approximation diluée que nous exploiterons dans les applications qui suivent, on a en approche déformation imposée :

$$k^* = k_s^{sct} - \phi k_s^{sct} \frac{1}{(1 - a_{Es}^{sct})} \quad (3.13)$$

$$\mu^* = \mu_s^{sct} - \phi \mu_s^{sct} \frac{1}{(1 - b_{Es}^{sct})} \quad (3.14)$$

et

$$\mathbf{B}_d^* = b_d^* \mathbf{1} = \left(1 - \frac{k^*}{k_s^{sct}} \right) \mathbf{1} \quad (3.15)$$

avec

$$a_{Es}^{sct} = \frac{3k_s^{sct}}{3k_s^{sct} + 4\mu_s^{sct}} \quad b_{Es}^{sct} = \frac{6k_s^{sct} + 2\mu_s^{sct}}{5(3k_s^{sct} + 4\mu_s^{sct})}$$

où k_s^{sct} et μ_s^{sct} désignent les modules de compressibilité et de cisaillement sécants du squelette et ϕ la porosité du milieu.

Le choix de la méthode d'Hashin conduirait à :

$$k^* = k_s^{sct} - \phi k_s^{sct} \frac{1}{(1 - (1 - \phi)a_{Es}^{sct})} \quad (3.16)$$

$$\mu^* = \mu_s^{sct} - \phi \mu_s^{sct} \frac{1}{(1 - (1 - \phi)b_{Es}^{sct})} \quad (3.17)$$

Reste donc à estimer le déformation effective ε_{eff} pour un chargement macroscopique donné pour nous permettre de calculer k_s^{sct} et μ_s^{sct} . Ce sera l'objet du paragraphe (3.2.2). Au préalable, nous décrivons la démarche de linéarisation suivie dans l'approche duale en contrainte imposée.

3.2.1.2 Approche en contrainte imposée

Une approche en contrainte imposée peut être également développée en suivant une démarche analogue. La loi de comportement non linéaire du squelette est écrite cette fois sous la forme :

$$\varepsilon(y) = \frac{\partial w}{\partial \sigma}(\sigma(y)) \quad \forall y \in Y_S, \quad (3.18)$$

où $w(\sigma(y))$ est l'énergie complémentaire, fonction non linéaire du tenseur des contraintes.

La linéarisation sécante s'écrit alors :

$$\varepsilon(y) = \mathbb{S}_s^{sct}(\sigma(y)) : \sigma(y) \quad (3.19)$$

où \mathbb{S}_s^{sct} est le tenseur de souplesse sécant du squelette du 4^{ème} ordre qui dépend non linéairement de $\sigma(y)$.

La seconde approximation consiste à remplacer la contrainte locale en tout point du squelette par une contrainte effective σ^{eff} uniforme sur le squelette, soit :

$$\mathbb{S}_s^{sct}(\sigma(y)) \simeq \mathbb{S}_s^{sct}(\sigma^{eff}) = \mathbb{S}_s^{sct} \quad (3.20)$$

Là encore plusieurs choix sont possibles pour cette seconde linéarisation et seront discutés par la suite.

Le volume élémentaire dans cette approche est soumis à un chargement couplé macroscopique à travers une contrainte mécanique macroscopique Σ et la pression porale p . Le problème local d'homogénéisation est alors donné par les équations (3.5), (3.8), (3.9), (3.19), (3.20) avec

$$\langle \sigma(y) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(y) dy = \Sigma. \quad (3.21)$$

Le comportement homogène équivalent est défini par analogie avec l'élasticité

linéaire par la relation suivante :

$$\mathbf{E} = \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle\rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n})_S dS = \mathbb{S}^*(\boldsymbol{\Sigma}, p) : [\boldsymbol{\Sigma} + p \mathbf{B}_c^*(\boldsymbol{\Sigma}, p)], \quad (3.22)$$

où $\mathbf{u}(y)$ est la solution du problème d'homogénéisation en approche contrainte introduit précédemment, \mathbb{S}^* le tenseur de souplesse homogénéisé qui dépend non linéairement du chargement macroscopique imposé et où \mathbf{B}_c^* est le tenseur de Biot qui dépend également non linéairement du chargement.

Là encore, si l'on admet que l'on sait calculer la contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$ pour un chargement macroscopique donné, on peut alors estimer le tenseur de souplesse du squelette \mathbb{S}_s^{sct} par la relation (3.20), puis exploiter les formules d'homogénéisation linéaire données au chapitre 1. Ainsi avec le choix de l'approximation diluée en approche contrainte, on a :

$$\frac{1}{k^*} = \frac{1}{k_s^{sct}} + \phi \frac{1}{k_s^{sct}} \frac{1}{(1 - a_{Es}^{sct})} \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\mu_s^{sct}} + \phi \frac{1}{\mu_s^{sct}} \frac{1}{(1 - b_{Es}^{sct})} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{B}_c^* = b_c^* \mathbf{1} = \left(1 - \frac{k^*}{k_s^{sct}}\right) \mathbf{1} \quad (3.25)$$

Dans ces deux approches, le résultat homogénéisé dépend évidemment du choix retenu pour moyenner les champs locaux sur le squelette, c'est-à-dire de la définition des déformations et des contraintes effectives $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff}$ et $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$, choix qui a permis de linéariser le comportement du squelette. En s'inspirant des travaux de Suquet (Suquet, 1997 [97]) dans le cadre de l'élasticité non linéaire et de Dormieux et al. (Dormieux et al., 2002 [41]) en poroélasticité non linéaire, nous présentons au paragraphe suivant deux types de moyenne qui ont été proposées pour définir ces champs effectifs, à savoir une moyenne simple et une moyenne quadratique.

3.2.2 Linéarisation du comportement du squelette

Nous détaillons tout d'abord l'approche qui consiste à remplacer les champs locaux sur le squelette par une simple moyenne sur cette phase. Nous examinerons successivement cette approche pour les déformations locales, puis les contraintes locales.

3.2.2.1 Moyenne des champs locaux

Déformations locales :

L'approximation la plus simple consiste dans l'approche en déformation imposée à remplacer la déformation locale en tout point du squelette par sa moyenne sur la partie

Y_S occupée par le squelette. Soit donc :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{eff} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S} = \frac{1}{|Y_S|} \int_{Y_S} \boldsymbol{\varepsilon}(y) dy, \quad (3.26)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}(y)$ est la déformation locale solution du problème d'homogénéisation (3.5-3.10). Cette déformation effective est aussi qualifiée de moment d'ordre 1 et est aussi notée $\boldsymbol{\varepsilon}^{eff} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1$.

Le comportement du squelette est alors linéarisé sous la forme :

$$\mathbb{C}_s^{sct} = \mathbb{C}_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S}) = \mathbb{C}_s^{sct}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1) \quad (3.27)$$

Nous avons vu qu'il nous faut estimer cette déformation moyenne pour pouvoir exploiter ensuite les modèles linéaires explicites d'homogénéisation. Nous nous proposons maintenant de présenter la démarche de calcul de cette déformation moyenne.

D'après la loi de comportement homogénéisé (3.11), on a :

$$\mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p) : \mathbf{E} - p \mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(y) dy \quad (3.28)$$

$\boldsymbol{\sigma}(y)$ étant solution du problème d'homogénéisation en approche déformation imposée. En moyennant la loi de comportement locale (3.6) et en prolongeant $\boldsymbol{\sigma}$ par continuité dans le pore, on a par ailleurs :

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma}(y) dy = \mathbb{C}_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S}) : \frac{1}{|Y|} \int_{Y_S} \boldsymbol{\varepsilon}(y) dy - p \frac{1}{|Y|} \int_{Y_T} \mathbf{1} dy \quad (3.29)$$

D'où,

$$\mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p) : \mathbf{E} - p \mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p) = (1 - \phi) \mathbb{C}_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S}) : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S} - p \phi \mathbf{1} \quad (3.30)$$

Soit encore :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S} = \frac{1}{(1 - \phi)} [\mathbb{C}_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S})]^{-1} : [\mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p) : \mathbf{E} + p(\phi \mathbf{1} - \mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p))] \quad (3.31)$$

Cette dernière relation fournit donc une équation non linéaire satisfaite par la déformation effective. Ainsi, si l'on dispose d'une estimation du comportement équivalent \mathbb{C}^* et \mathbf{B}_d^* , pour un chargement macroscopique donné, la résolution de cette équation non linéaire fournit la déformation effective associée.

Dans le cas d'un squelette présentant un comportement isotrope et d'un milieu homogénéisé isotrope, l'équation (3.31) peut être découpée en partie sphérique et déviatorique. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_d^1 + \frac{1}{3}(\text{tr}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S})) \mathbf{1} \quad (3.32)$$

$$\bar{\varepsilon}_m^1 = tr(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S}) \quad \bar{\varepsilon}_{eq}^1 = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\varepsilon}_d^1 : \bar{\varepsilon}_d^1} \quad (3.33)$$

On rappelle que dans le cas d'un milieu et d'un squelette isotropes, on a :

$$\mathbb{C}^* = 3k^* \mathbb{J} + 2\mu^* \mathbb{K} \quad (3.34)$$

et

$$(\mathbb{C}_s^{sct})^{-1} = \frac{1}{3k_s^{sct}} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_s^{sct}} \mathbb{K} \quad (3.35)$$

où les tenseurs du 4^{ème} ordre \mathbb{J} et \mathbb{K} sont donnés par la relation (1.39).

Avec ces notations, l'équation (3.31) s'écrit alors :

$$\bar{\varepsilon}_m^1 = tr[\langle \varepsilon \rangle_{Y_S}] = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{1}{k_s^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S})} [k^*(\mathbf{E}, p)E_m + p(\phi - b_d^*(\mathbf{E}, p))] \quad (3.36)$$

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^1 = \frac{1}{(1-\phi)} \left[\frac{\mu^*(\mathbf{E}, p)}{\mu_s^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S})} \right] E_{eq} \quad (3.37)$$

où l'on a noté de façon analogue à (3.32) et (3.33) :

$$E_m = tr(\mathbf{E}) ; \quad E_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{E}_d : \mathbf{E}_d} \quad \text{avec} \quad \mathbf{E}_d = \mathbf{E} - \frac{1}{3} E_m \mathbf{1} \quad (3.38)$$

Si l'on fait le choix d'homogénéiser par l'approche des distributions diluées, les équations non linéaires (3.36) et (3.37) qu'il nous faut résoudre deviennent alors :

$$\bar{\varepsilon}_m^1 = \frac{1}{1-\phi} \left[1 - \phi \frac{1}{1 - a_{Es}^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S})} \right] E_m + \frac{\phi}{1-\phi} \left[1 - \frac{1}{1 - a_{Es}^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S})} \right] \frac{p}{k_s^{sct}} \quad (3.39)$$

et

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^1 = \frac{1}{1-\phi} \left[1 - \phi \frac{1}{1 - b_{Es}^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S})} \right] E_{eq} \quad (3.40)$$

L'approche d'Hashin conduirait aux équations non linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_m^1 = \frac{1}{1-\phi} & \left[1 - \phi \frac{1}{(1 - (1-\phi)a_{Es}^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S}))} \right] E_m \\ & + \frac{\phi}{1-\phi} \left[1 - \frac{1}{(1 - (1-\phi)a_{Es}^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S}))} \right] \frac{p}{k_s^{sct}} \end{aligned} \quad (3.41)$$

et

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^1 = \frac{1}{1-\phi} \left[1 - \phi \frac{1}{(1 - (1-\phi)b_{Es}^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S}))} \right] E_{eq} \quad (3.42)$$

Dans le cas où la pression porale p est nulle, cas que nous envisagerons dans les illustrations numériques, les équations non linéaires (3.36) et (3.37) se réduisent à :

$$\bar{\varepsilon}_m^1 = tr(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S}) = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{k^*(\mathbf{E}, p)}{k_s^{sct}(\langle \varepsilon \rangle_{Y_S})} E_m \quad (3.43)$$

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^1 = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{\mu^*(\mathbf{E}, p)}{\mu_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S})} E_{eq} \quad (3.44)$$

Des développements analogues peuvent être menés pour calculer le champ de contraintes effectif moyen sur le squelette.

Contraintes locales :

Dans une approche d'homogénéisation en contrainte imposée, il nous faut définir la contrainte effective $\boldsymbol{\sigma}^{eff}$. On retient, par analogie avec l'approche déformation, pour la contrainte effective la moyenne des contraintes locales sur le squelette, soit donc :

$$\boldsymbol{\sigma}^{eff} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S} = \frac{1}{|Y_S|} \int_{Y_S} \boldsymbol{\sigma}(y) dy = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^1$$

où $\boldsymbol{\sigma}(y)$ est la contrainte locale solution du problème d'homogénéisation en contrainte imposée défini par les relations (3.5), (3.8), (3.9), (3.19), (3.20) et (3.21).

Le comportement du squelette est alors linéarisé sous la forme :

$$\mathbb{S}_s^{sct} = \mathbb{S}_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S}) = \mathbb{S}_s^{sct}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^1) \quad (3.45)$$

Dans le cas où la pression porale p est nulle, on peut montrer en exploitant la loi de comportement homogénéisée et en moyennant la loi locale que :

$$\mathbb{S}^*(\boldsymbol{\Sigma}, p) : \boldsymbol{\Sigma} = (1-\phi) \mathbb{S}_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S}) : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S} \quad (3.46)$$

Soit encore :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S} = \frac{1}{(1-\phi)} [\mathbb{S}_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S})]^{-1} : [\mathbb{S}^*(\boldsymbol{\Sigma}, p) : \boldsymbol{\Sigma}] \quad (3.47)$$

Comme en approche déformation, la résolution de cette dernière équation non linéaire fournit la contrainte effective qui permet ensuite de construire la réponse homogénéisée.

Dans le cas d'un comportement isotrope du squelette et du milieu poreux, cette équation se découple en :

$$\bar{\sigma}_m^1 = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{k_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S})}{k^*(\boldsymbol{\Sigma}, p)} \Sigma_m \quad (3.48)$$

et

$$\bar{\sigma}_{eq}^1 = \frac{1}{(1-\phi)} \left[\frac{\mu_s^{sct}(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S})}{\mu^*(\boldsymbol{\Sigma}, p)} \right] \Sigma_{eq} \quad (3.49)$$

avec les notations suivantes pour la décomposition de la contrainte effective $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^1$:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 = \bar{\sigma}_d^1 + \frac{1}{3} tr(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S}) \mathbf{1} \quad (3.50)$$

$$\bar{\sigma}_m^1 = \frac{1}{3} tr(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S}) \quad \bar{\sigma}_{eq}^1 = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}_d^1 : \bar{\sigma}_d^1} \quad (3.51)$$

et pour la contrainte macroscopique :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_d + \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \mathbf{1} \quad (3.52)$$

$$\Sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \quad \Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\Sigma}_d : \boldsymbol{\Sigma}_d} \quad (3.53)$$

Si l'on retient l'approche des distributions diluées en contrainte imposée pour estimer le comportement équivalent, les équations non linéaires (3.48) et (3.49) à résoudre deviennent alors :

$$\bar{\sigma}_m^1 = \frac{1}{1-\phi} \left[1 + \phi \frac{1}{1 - a_{E_s}^{sct}(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S})} \right] \Sigma_m \quad (3.54)$$

et

$$\bar{\sigma}_{eq}^1 = \frac{1}{1-\phi} \left[1 + \phi \frac{1}{1 - b_{E_s}^{sct}(\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S})} \right] \Sigma_{eq} \quad (3.55)$$

Une seconde méthode a été proposée par Suquet (Suquet, 1995 [95]) pour linéariser le comportement du squelette. Il s'agit cette fois de remplacer les champs locaux de déformation ou de contraintes dans le squelette par leur moyenne quadratique sur cette phase. Nous décrivons cette approche dans le paragraphe suivant en envisageant successivement comme précédemment les approches en déformation imposée, puis en contrainte imposée.

3.2.2.2 Moyenne quadratique des champs locaux

Déformations locales :

Dans une approche en déformation imposée, la moyenne quadratique du tenseur de déformations est définie par le tenseur du 4^{ème} ordre suivant, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2$, dit moment du second ordre :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S}} \quad (3.56)$$

Soit encore en écriture indicielle : $\bar{\varepsilon}_{ijkl}^2 = \sqrt{\langle \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \rangle_{Y_S}}$.

On introduit comme précédemment les invariants de ce moment d'ordre 2 avec :

$$\bar{\varepsilon}_m^2 = \sqrt{\langle (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))^2 \rangle_{Y_S}} \quad (3.57)$$

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^2 = \sqrt{\frac{2}{3} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{Y_S}} \quad (3.58)$$

Le comportement du squelette est alors approché par un comportement uniforme avec :

$$\mathbb{C}_s^{sct} = \mathbb{C}_s^{sct}(\sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S}}) = \mathbb{C}_s^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^2, \bar{\varepsilon}_m^2) \quad (3.59)$$

L'expression du moment quadratique peut être obtenue en fonction du tenseur de rigidité homogénéisé en s'appuyant sur les travaux de Kreher (Kreher, 1990 [69]) et Buryachenko (Buryachenko, 1993 [25]) mené en élasticité et Dormieux et al. (Dormieux

et al., 2002 [41]) en poroélasticité. Le calcul repose sur l'estimation de l'énergie élastique emmagasinée. Pour un milieu poreux saturé, cette énergie vaut :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^* : \mathbf{E} - p \mathbf{B}_d^* : \mathbf{E} \quad (3.60)$$

Par ailleurs, l'énergie élastique vaut :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{1}{|Y|} \int_{Y_S} \boldsymbol{\varepsilon}(y) : \mathbb{C}_s^{sct} : \boldsymbol{\varepsilon}(y) dy \quad (3.61)$$

soit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\varepsilon}(y) : \mathbb{C}_s^{sct} : \boldsymbol{\varepsilon}(y) \rangle_{Y_S} \quad (3.62)$$

de sorte qu'en dérivant l'énergie par rapport au tenseur de rigidité sécant de la phase solide on a :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbb{C}_s^{sct}} = \frac{1}{2} (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S} = \frac{1}{2} (1 - \phi) (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2)^2 \quad (3.63)$$

On a donc en rapprochant cette expression de (3.60), l'équation non linéaire suivante vérifiée par la moyenne quadratique :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{Y_S}} = \left(\frac{1}{(1 - \phi)} \left[\mathbf{E} : \frac{\partial \mathbb{C}^*}{\partial \mathbb{C}_s^{sct}} : \mathbf{E} - 2p \frac{\partial \mathbf{B}_d^*}{\partial \mathbb{C}_s^{sct}} : \mathbf{E} \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.64)$$

Comme pour le moment d'ordre 1, si le squelette et le milieu présentent un comportement isotrope, cette équation tensorielle se réduit à deux équations scalaires. L'énergie élastique s'écrit alors :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (1 - \phi) \left[k_s^{sct} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^2)^2 + 3\mu_s^{sct} (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^2)^2 \right] = \frac{1}{2} [k^* E_m^2 + 3\mu^* E_{eq}^2] - p b_d^* E_m \quad (3.65)$$

de sorte qu'en dérivant par rapport à k_s^{sct} et à μ_s^{sct} , on obtient :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^2 = \left[\frac{1}{(1 - \phi)} \left[\frac{\partial k^*}{\partial k_s^{sct}} E_m^2 + 3 \frac{\partial \mu^*}{\partial k_s^{sct}} E_{eq}^2 - 2p \frac{\partial b_d^*}{\partial k_s^{sct}} E_m \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.66)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^2 = \left[\frac{1}{(1 - \phi)} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial k^*}{\partial \mu_s^{sct}} E_m^2 + \frac{\partial \mu^*}{\partial \mu_s^{sct}} E_{eq}^2 - \frac{2}{3} p \frac{\partial b_d^*}{\partial \mu_s^{sct}} E_m \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.67)$$

L'évaluation du moment d'ordre 2 de la déformation locale du squelette passe donc par la résolution de ces équations non linéaires ce qui demande au préalable d'avoir estimé le tenseur de rigidité homogénéisé \mathbb{C}^* , le coefficient de Biot b^* ou tout au moins leurs dérivées par rapport aux caractéristiques sécantes du squelette. Si l'on adopte la méthode des distributions diluées en approche déformation pour estimer les modules

effectifs k^* , μ^* et b_d^* , ces dérivées valent :

$$\frac{\partial k^*}{\partial k_s^{sct}} = 1 - \phi \left(1 + \frac{3 k_s^{sct}}{2 \mu_s^{sct}}\right) \quad ; \quad \frac{\partial k^*}{\partial \mu_s^{sct}} = \frac{3}{4} \phi \left(\frac{k_s^{sct}}{\mu_s^{sct}}\right)^2 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \mu^*}{\partial k_s^{sct}} = \frac{60 \phi (\mu_s^{sct})^2}{(9 k_s^{sct} + 8 \mu_s^{sct})^2} \quad ; \quad \frac{\partial \mu^*}{\partial \mu_s^{sct}} = 1 - \frac{5}{2} \phi \left(1 - \frac{27 (k_s^{sct})^2}{(9 k_s^{sct} + 8 \mu_s^{sct})^2}\right) \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial b_d^*}{\partial k_s^{sct}} = \frac{3}{4} \frac{\phi}{\mu_s^{sct}} \quad ; \quad \frac{\partial b_d^*}{\partial \mu_s^{sct}} = -\frac{1}{k_s^{sct}} \frac{\partial k^*}{\partial \mu_s^{sct}} = -\frac{3}{4} \frac{\phi k_s^{sct}}{(\mu_s^{sct})^2} \quad (3.70)$$

Avec l'approche d'Hashin, elles valent :

$$\frac{\partial k^*}{\partial k_s^{sct}} = \frac{16 (1 - \phi) (\mu_s^{sct})^2}{(3 \phi k_s^{sct} + 4 \mu_s^{sct})^2} \quad ; \quad \frac{\partial k^*}{\partial \mu_s^{sct}} = \frac{12 \phi (1 - \phi) (k_s^{sct})^2}{(4 \mu_s^{sct} + 3 \phi k_s^{sct})^2} \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial \mu^*}{\partial k_s^{sct}} = \frac{60 \phi (1 - \phi) (\mu_s^{sct})^2}{(9 k_s^{sct} + 6 \phi (k_s^{sct} + 2 \mu_s^{sct}) + 8 \mu_s^{sct})^2} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial \mu^*}{\partial \mu_s^{sct}} = (1 - \phi) \frac{H(k_s^{sct}, \mu_s^{sct})}{(9 k_s^{sct} + 6 \phi (k_s^{sct} + 2 \mu_s^{sct}) + 8 \mu_s^{sct})^2} \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial b_d^*}{\partial k_s^{sct}} = \frac{12 (1 - \phi) \phi \mu_s^{sct}}{(3 \phi k_s^{sct} + 4 \mu_s^{sct})^2} \quad ; \quad \frac{\partial b_d^*}{\partial \mu_s^{sct}} = \frac{12 (1 - \phi) \phi k_s^{sct}}{(3 \phi k_s^{sct} + 4 \mu_s^{sct})^2} \quad (3.74)$$

avec $H(k_s^{sct}, \mu_s^{sct}) = 27(3 + 2\phi)(k_s^{sct})^2 + 48(3 + 2\phi)k_s^{sct}\mu_s^{sct} + 32(2 + 3\phi)(\mu_s^{sct})^2$.

Dans le cas d'une pression porale nulle simulée dans la suite, les équations (3.66)-(3.67) se simplifient en :

$$\bar{\varepsilon}_m^2 = \left[\frac{1}{(1 - \phi)} \left[\frac{\partial k^*}{\partial k_s^{sct}} E_m^2 + 3 \frac{\partial \mu^*}{\partial k_s^{sct}} E_{eq}^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.75)$$

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^2 = \left[\frac{1}{(1 - \phi)} \left[\frac{1}{3} \frac{\partial k^*}{\partial \mu_s^{sct}} E_m^2 + \frac{\partial \mu^*}{\partial \mu_s^{sct}} E_{eq}^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.76)$$

Contrairement à la première approximation de la déformation par simple moyenne sur le squelette, on observe ici un couplage des parties sphérique et déviatorique du chargement macroscopique.

Contraintes locales

Un raisonnement analogue en approche contrainte imposée conduit à définir la contrainte effective par le moment d'ordre 2 du champ de contraintes locales du squelette avec :

$$\bar{\sigma}^2 = \sqrt{\langle \sigma \otimes \sigma \rangle_{Y_S}} \quad (3.77)$$

On note ses invariants par :

$$\bar{\sigma}_m^2 = \sqrt{\langle (tr(\sigma))^2 \rangle_{Y_S}} \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{eq}^2 = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \sigma_d : \sigma_d \rangle_{Y_S}} \quad (3.78)$$

Comme pour la déformation effective, le calcul de la contrainte effective se fait en esti-

mant l'énergie élastique. On a d'une part en exploitant le comportement homogénéisé :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}^* : \boldsymbol{\Sigma} + p \boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{S}^* : \mathbf{B}_d^* \quad (3.79)$$

et d'autre part avec l'expression de l'énergie élastique :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{1}{|Y|} \int_{Y_S} \boldsymbol{\sigma}(y) : \mathbb{S}_s^{sct} : \boldsymbol{\sigma}(y) dy \quad (3.80)$$

D'où, en dérivant l'énergie par rapport au tenseur de souplesse du squelette :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^2 = \sqrt{\langle \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Y_S}} = \left[\frac{1}{(1-\phi)} \left[\boldsymbol{\Sigma} : \frac{\partial \mathbb{S}^*}{\partial \mathbb{S}_s^{sct}} : \boldsymbol{\Sigma} - 2p \frac{\partial}{\partial \mathbb{S}_s^{sct}} (\mathbb{S}^* : \mathbf{B}_c^*) : \boldsymbol{\Sigma} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.81)$$

Dans le cas isotrope, l'énergie élastique s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (1-\phi) \left[\frac{1}{k_s^{sct}} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^2)^2 + \frac{1}{3\mu_s^{sct}} (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^2)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^*} \Sigma_m^2 + \frac{1}{3\mu^*} \Sigma_{eq}^2 \right] - p \frac{b_c^*}{k^*} \Sigma_m \quad (3.82)$$

On en déduit :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^2 = \left[\frac{1}{(1-\phi)} \left[\boldsymbol{\Sigma} : \frac{\partial \mathbb{S}^*}{\partial (k_s^{sct})^{-1}} : \boldsymbol{\Sigma} - 2p \frac{\partial}{\partial (k_s^{sct})^{-1}} (\mathbb{S}^* : \mathbf{B}_c^*) : \boldsymbol{\Sigma} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.83)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^2 = \left[\frac{1}{(1-\phi)} \left[3\boldsymbol{\Sigma} : \frac{\partial \mathbb{S}^*}{\partial (\mu_s^{sct})^{-1}} : \boldsymbol{\Sigma} - 6p \frac{\partial}{\partial (\mu_s^{sct})^{-1}} (\mathbb{S}^* : \mathbf{B}_c^*) : \boldsymbol{\Sigma} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.84)$$

D'où encore :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^2 = \left[\frac{1}{(1-\phi)} \left[\frac{\partial(1/k^*)}{\partial (k_s^{sct})^{-1}} \Sigma_m^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial(1/\mu^*)}{\partial (\mu_s^{sct})^{-1}} \Sigma_{eq}^2 - p \left(\frac{\partial(1/k^*)}{\partial (k_s^{sct})^{-1}} - 1 \right) \Sigma_m \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.85)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{eq}^2 = \left[\frac{1}{(1-\phi)} \left[3 \frac{\partial(1/k^*)}{\partial (\mu_s^{sct})^{-1}} \Sigma_m^2 + \frac{\partial(1/\mu^*)}{\partial (\mu_s^{sct})^{-1}} \Sigma_{eq}^2 - 6p \frac{\partial(1/k^*)}{\partial (\mu_s^{sct})^{-1}} \Sigma_m \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.86)$$

Si l'on adopte la méthode des distributions diluées en approche contrainte pour estimer les modules effectifs $1/k^*$, $1/\mu^*$, ces dérivées valent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1/k^*)}{\partial (k_s^{sct})^{-1}} &= 1 + \phi & \frac{\partial(1/\mu^*)}{\partial (k_s^{sct})^{-1}} &= \frac{60\phi(k_s^{sct})^2}{(9k_s^{sct} + 8\mu_s^{sct})^2} \\ \frac{\partial(1/k^*)}{\partial (\mu_s^{sct})^{-1}} &= \frac{3}{4}\phi & \frac{\partial(1/\mu^*)}{\partial (\mu_s^{sct})^{-1}} &= 1 + 5\phi \frac{3k_s^{sct} + 4\mu_s^{sct}}{9k_s^{sct} + 8\mu_s^{sct}} - 5\phi \frac{12k_s^{sct}\mu_s^{sct}}{(9k_s^{sct} + 8\mu_s^{sct})^2} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Là encore, contrairement à la première approximation des champs locaux par moyenne simple, on observe sur ces relations un couplage des parties sphérique et

déviatorique du chargement macroscopique Σ .

En résumé, le problème d'homogénéisation non linéaire a donc été une première fois linéarisé à travers la formulation sécante avec les lois (3.3) et (3.19). Puis, une seconde approximation a été introduite en remplaçant la dépendance des tenseurs de rigidité ou de souplesse sécants en fonction des champs locaux sur le squelette par une dépendance uniforme. On a ainsi approché le milieu poreux non linéaire par un milieu poreux fictif linéaire, dit "milieu linéaire de comparaison". De cette façon, le problème d'homogénéisation s'apparente à celui rencontré en élasticité linéaire. La dernière approximation consiste à exploiter les prédictions des schémas explicites d'homogénéisation présentés au chapitre 1 sur ce milieu linéaire de comparaison.

Nous nous proposons maintenant de décrire la mise en œuvre pratique de l'ensemble de la procédure. Elle diffère selon la linéarisation adoptée en moment du 1^{er} ordre ou du 2^{ème} ordre. On parle respectivement d'approche sécante classique et d'approche sécante modifiée.

3.2.3 Procédures d'extension en non linéaire des schémas prédictifs et mise en œuvre

Afin de préciser et également de simplifier la description de la mise en œuvre de cette procédure d'extension en non linéaire des schémas prédictifs, nous faisons le choix de considérer un comportement sécant du squelette isotrope sous la forme :

$$\mathbb{C}_s^{sct}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 3k_s \mathbb{J} + 2\mu_s^{sct}(\varepsilon_{eq}) \mathbb{K} \quad (3.88)$$

où k_s désigne le module de compressibilité qui est supposé constant, indépendant de la déformation d'homogénéisation linéaire, et où μ_s^{sct} désigne le module de cisaillement qui est fonction de la déformation à travers la déformation équivalente avec :

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d} \quad (3.89)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_d$ étant la partie déviatorique de la déformation locale.

Le comportement du squelette est ainsi supposé linéaire sous chargement hydrostatique et non linéaire sous chargement de cisaillement. Un tel comportement a été également retenu par P. Suquet (Suquet, 1995 [95]) pour sa représentation d'une assez large classe de matériaux isotropes non linéaires. La dépendance du module de cisaillement en fonction de la déformation équivalente sera prise en pratique dans les applications sous la forme d'une loi puissance. Nous précisons cette loi et l'illustrons ultérieurement dans le cadre des applications.

3.2.3.1 Méthode sécante classique

La méthode, dite méthode classique sécante, est basée sur la linéarisation par moyenne de la déformation locale ou contrainte locale sur le squelette décrite à la section 3.2.2.1. Ainsi, le comportement du squelette est approché par le tenseur de

rigidité suivant :

$$\mathbb{C}_s^{sct} = \mathbb{C}_s^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^1) = 3k_s \mathbb{J} + 2\mu_s^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^1) \mathbb{K} \quad (3.90)$$

avec $\bar{\varepsilon}_{eq}^1$ défini en (3.33). Et le tenseur de souplesse s'écrit :

$$\mathbb{S}_s^{sct} = \mathbb{S}_s^{sct}(\bar{\sigma}_{eq}^1) = \frac{1}{3k_s} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_s^{sct}(\bar{\sigma}_{eq}^1)} \mathbb{K} \quad (3.91)$$

avec $\bar{\sigma}_{eq}^1$ défini par (3.49).

La mise en œuvre de cette méthode et la construction de la courbe de comportement macroscopique homogénéisé passent en général par 3 étapes successives qui consistent à :

1. Exprimer le tenseur de rigidité homogénéisé \mathbb{C}^* ou le tenseur de souplesse \mathbb{S}^* (selon l'approche retenue en déformations ou en contraintes imposées) ainsi que les tenseurs de Biot \mathbf{B}_d^* ou \mathbf{B}_c^* en fonction du comportement du squelette constant \mathbb{C}_s^{sct} ou \mathbb{S}_s^{sct} . On utilise pour cela une méthode d'homogénéisation linéaire explicite. Dans le cas de milieux isotropes, il s'agit d'exprimer k^* et μ^* les modules de compressibilité et de cisaillement équivalents en fonction de k_s et μ_s^{sct} .
2. Calculer les déformations ou contraintes effectives selon l'approche retenue pour un chargement macroscopique donné (\mathbf{E}, p) ou $(\boldsymbol{\Sigma}, p)$.

En approche déformation imposée, il nous faut résoudre l'équation non linéaire (3.31) qui se découple en isotrope en (3.39) et (3.40). On peut alors former le tenseur $\mathbb{C}_s^{sct} = \mathbb{C}_s^{sct}(\bar{\varepsilon}^1)$ et en isotrope calculer $\mu_s^{sct} = \mu_s^{sct}(\bar{\varepsilon}^1)$.

En approche contrainte imposée, il nous faut résoudre (3.47) qui se découple en isotrope en (3.54) et (3.55). On peut alors former le tenseur $\mathbb{S}_s^{sct} = \mathbb{S}_s^{sct}(\bar{\sigma}^1)$ et en isotrope calculer $\mu_s^{sct} = \mu_s^{sct}(\bar{\sigma}^1)$.

En fait, compte-tenu de la dépendance du comportement du squelette (3.90)-(3.91) en fonction de la déformation locale équivalente retenu ici, il s'agit d'estimer uniquement $\bar{\varepsilon}_{eq}^1$ ou $\bar{\sigma}_{eq}^1$, soit donc de résoudre seulement (3.40) ou (3.55).

3. Construire la loi de comportement homogénéisée à partir de (3.11) en approche déformation et de (3.22) en approche contrainte. On utilise pour cela les expressions du comportement équivalent de l'étape 1 avec le comportement sécant du squelette obtenu à l'issue de l'étape 2.

En isotrope et en approche déformation, la loi de comportement homogénéisée ainsi formée se découple en parties sphérique et déviatorique, avec :

$$\Sigma_m = k_d^*(\mathbf{E}, p) E_m - p b_d^*(\mathbf{E}, p) \quad , \quad \Sigma_{eq} = 3 \mu_d^*(\mathbf{E}, p) E_{eq} \quad (3.92)$$

$$\text{avec } b_d^*(\mathbf{E}, p) = 1 - \frac{k_d^*(\mathbf{E}, p)}{k_s}$$

En approche contrainte imposée, on a :

$$E_m = \frac{1}{k_c^*(\boldsymbol{\Sigma}, p)} [\Sigma_m + p b_c^*(\boldsymbol{\Sigma}, p)] \quad , \quad E_{eq} = \frac{1}{3 \mu_c^*(\boldsymbol{\Sigma}, p)} \Sigma_{eq} \quad (3.93)$$

$$\text{avec } b_c^*(\boldsymbol{\Sigma}, p) = 1 - \frac{k_c^*(\boldsymbol{\Sigma}, p)}{k_s}$$

En pratique, il est commode de ne pas chercher à résoudre explicitement l'étape 2. Bornert et Ponte Castañeda (Bornert et Ponte Castañeda, 2001 [19]) ont proposé une procédure de construction point par point de la courbe de comportement homogénéisée. Elle consiste à considérer la moyenne de la déformation locale ou de la contrainte locale comme un paramètre qui est progressivement incrémenté depuis la valeur nulle. Nous nous proposons de décrire cette procédure qui est celle que nous avons retenue pour la mise en œuvre des applications successivement pour les deux approches en déformations et en contraintes.

Construction point par point de la réponse par une approche déformation :

Ainsi dans une démarche en déformation imposée, compte-tenu de la forme de la loi de comportement (3.90) retenue pour le squelette, on choisit ici comme paramètre la déformation équivalente moyenne $\bar{\varepsilon}_{eq}^1$, soit :

$$t = \bar{\varepsilon}_{eq}^1 \quad (3.94)$$

Pour un t donné, on calcule tout d'abord le module de cisaillement sécant du squelette par la loi non linéaire caractéristique du comportement du squelette, par exemple une loi puissance, soit :

$$\mu_s^{sct} = \mu_s^{sct}(t) \quad (3.95)$$

On estime ensuite le comportement homogénéisé du milieu poreux linéarisé. En cohérence avec l'approche retenue dans ce travail, nous utilisons pour cela le modèle explicite d'homogénéisation linéaire des distributions diluées en déformation. Nous verrons que cette approche est suffisante vu l'enrichissement que l'on pourra lui apporter par le processus itératif. On a alors, d'après les expressions rappelées précédemment et la forme de la loi non linéaire du squelette :

$$k^* = k_D^*(t) = k_s \left(1 - \phi \frac{1}{(1 - a_{Es}^{sct}(t))} \right) \quad (3.96)$$

$$\mu^* = \mu_D^*(t) = \mu_s^{sct}(t) \left(1 - \phi \frac{1}{(1 - b_{Es}^{sct}(t))} \right) \quad (3.97)$$

et

$$\mathbf{B}_D^* = b_D^* \mathbf{1} = \left(1 - \frac{k_D^*(t)}{k_s} \right) \mathbf{1}. \quad (3.98)$$

avec

$$a_{Es}^{sct}(t) = \frac{3k_s}{3k_s + 4\mu_s^{sct}(t)} \quad b_{Es}^{sct}(t) = \frac{6k_s + 2\mu_s^{sct}(t)}{5k_s + 4\mu_s^{sct}(t)} \quad (3.99)$$

On peut également, utiliser d'autres approches explicites, comme la borne supérieure de Hashin-Shtrikman, le schéma autocohérent ou encore la méthode des trois phases. On renvoie au chapitre 1 pour les expressions des modules par ces méthodes.

Le comportement équivalent étant estimé, on peut alors former l'équation non linéaire (3.37) qui s'écrit :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^1 = t = \frac{1}{(1 - \phi)} \left[\frac{\mu^*(t)}{\mu_s^{sct}(t)} \right] E_{eq}, \quad (3.100)$$

soit encore avec le choix d'homogénéiser par la méthode des distributions diluées en approche déformation :

$$t = \frac{1}{1 - \phi} \left(1 - \phi \frac{1}{1 - b_{E_s}^{sct}(t)} \right) E_{eq} \quad (3.101)$$

Plutôt que de résoudre cette équation en t , on en déduit la déformation macroscopique équivalente associée :

$$E_{eq} = t (1 - \phi) \frac{\mu_s^{sct}(t)}{\mu^*(t)} \quad (3.102)$$

A cette déformation macroscopique équivalente E_{eq} , on associe la contrainte équivalente macroscopique définie par :

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu^*(t) E_{eq} = 3 \mu^*(E_{eq}) E_{eq} \quad (3.103)$$

On peut ainsi construire un point sur la courbe $\Sigma_{eq} = f(E_{eq})$ du comportement macroscopique homogénéisé.

Dans le cas où le chargement mécanique en déformation est purement déviatorique, on a alors $E_m=0$; de sorte que l'on peut compléter la partie déviatorique de réponse macroscopique (3.103) par la partie sphérique :

$$\Sigma_m = -b^*(t) p = - \left(1 - \frac{k^*(t)}{k_s} \right) p \quad (3.104)$$

Si la pression porale p est nulle, on a évidemment $\Sigma_m = 0$.

Dans le cas d'un chargement mécanique purement hydrostatique, on a $E_{eq} = 0$, de sorte que d'après (3.100) $t = 0$. Le module de cisaillement sécant du squelette reste alors constant, égal à $\mu_s^{sct}(0)$. La réponse homogénéisée devient alors :

$$\Sigma_{eq} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_m = k^*(0) E_m - \left(1 - \frac{k^*(0)}{k_s} \right) p \quad (3.105)$$

On peut alors construire un point sur la courbe $\Sigma_m = f(E_m)$ de réponse macroscopique. Dans cette procédure, la pression de pore p est maintenue uniforme, seul le chargement purement mécanique en déformation macroscopique ou contrainte macroscopique est incrémenté.

Plus généralement si le chargement mécanique en déformation est couplé, il est commode d'introduire le taux de triaxialité macroscopique T_E défini par :

$$T_E = \frac{E_m}{E_{eq}} \quad (3.106)$$

Un chargement purement hydrostatique est ainsi caractérisé par un taux de triaxialité nul ($T_E = 0$) et un chargement purement déviatorique par un taux tendant vers l'infini ($T_E \rightarrow \infty$). La réponse macroscopique est alors donnée par (3.103) pour la partie déviatorique et :

$$\Sigma_m = k^*(t) T_E E_{eq} - \left(1 - \frac{k^*(t)}{k_s} \right) p \quad (3.107)$$

pour la partie sphérique.

Pour une pression porale nulle, on a alors :

$$\Sigma_m = k^*(t) T_E E_{eq} \quad (3.108)$$

On peut ainsi construire point par point la courbe de réponse macroscopique.

Si l'on adopte l'approche des distributions diluées en déformation, la réponse macroscopique s'écrit pour un chargement couplé :

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu_s^{sct}(t) \left(1 - \phi \frac{1}{1 - b_{E_s}^{sct}(t)} \right) E_{eq} \quad (3.109)$$

$$\Sigma_m = k_s \left(1 - \phi \frac{1}{1 - a_{E_s}^{sct}(t)} \right) T_E E_{eq} - \phi \frac{1}{1 - a_{E_s}^{sct}(t)} p \quad (3.110)$$

L'ensemble de la courbe de réponse macroscopique peut être construite en incrémentant la valeur de t et en réitérant la procédure.

L'algorithme de cette procédure se résume donc en :

$$\text{Pour } t = \bar{\varepsilon}_{eq}^1 \rightarrow \begin{cases} \mu_s^{sct} = \mu_s^{sct}(t) \\ \mu^* = F_\mu(\phi, \mu_s^{sct}, k_s), \quad k^* = F_k(\phi, \mu_s^{sct}, k_s) \\ E_{eq} = t(1 - \phi) \frac{\mu_s^{sct}(t)}{\mu^*(t)} \\ \Sigma_{eq} = 3\mu^*(t) E_{eq} \text{ et } \Sigma_m = k^*(t) T_E E_{eq} - \left(1 - \frac{k^*(t)}{k_s}\right)p \end{cases} \quad (3.111)$$

où F est une fonction qui diffère selon la méthode d'homogénéisation linéaire prédictive utilisée.

On peut faire quelques commentaires généraux sur la réponse macroscopique du milieu poreux ainsi construite. Tout d'abord pour une pression porale fixée, sous un chargement macroscopique purement hydrostatique, on observe sur (3.105) que la réponse du milieu construite par une approche sécante classique est linéaire. Avec les hypothèses faites sur le comportement du squelette, le modèle sécant classique ne permet donc pas de décrire la réponse réelle, non linéaire, comme l'ont fait remarquer Qui et Weng (Qui et Weng, 1992 [88]). L'origine de cette faiblesse est liée aux hétérogénéités de déformation dans la phase solide qui ne sont pas prises en compte dans le moment d'ordre 1. En effet, la partie déviatorique du champ de déformations sous un chargement hydrostatique a bien une moyenne nulle, mais elle peut fluctuer fortement à l'échelle locale notamment au voisinage des pores, ce qui induit bien une réponse réelle non linéaire. Cela revient à dire que $E_{eq} = 0$, qui implique $\bar{\varepsilon}_{eq}^1 = 0$, n'implique pas $\varepsilon_{eq} = 0$.

Hu (Hu, 1996 [65]) a par ailleurs constaté que la loi homogénéisée (3.109-3.110) ne dérive pas d'un potentiel. En effet, même s'il existe un potentiel φ tel que :

$$\Sigma_m = \frac{\partial \varphi}{\partial E_m} \quad \text{et} \quad \Sigma_{eq} = \frac{\partial \varphi}{\partial E_{eq}}$$

On n'a pas

$$\frac{\partial \Sigma_{eq}}{\partial E_m} = \frac{\partial \Sigma_m}{\partial E_{eq}}$$

de sorte que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial E_m \partial E_{eq}} \neq \frac{\partial^2 \varphi}{\partial E_{eq} \partial E_m}$$

Cette remarque fait ressortir une nouvelle limitation de l'approche sécante classique après celle déjà notée pour le chargement purement hydrostatique.

On conçoit que le choix de prendre en compte les variations locales de la déformation dans la phase solide par le moment d'ordre deux, va permettre d'enrichir la réponse macroscopique et de corriger le défaut de l'extension classique pour un chargement hydrostatique. Nous développons maintenant la procédure de construction point par point de la réponse homogénéisée dans le cas de l'approche en contrainte imposée.

Construction point par point de la réponse par une approche contrainte :

En approche contrainte imposée, on procède de façon analogue en introduisant cette fois comme paramètre t la moyenne de la contrainte équivalente, $t = \bar{\sigma}_{eq}^1$.

Pour une valeur donnée de t , on calcule tout d'abord le module de cisaillement sécant du squelette par la loi de comportement du squelette. Puis, on estime à partir de cette valeur le comportement homogénéisé en utilisant par exemple l'approche des distributions diluées en contrainte.

On forme alors l'équation non linéaire (3.49), soit :

$$t = \frac{1}{(1 - \phi)} \frac{\mu_s^{sct}(t)}{\mu^*(t)} \Sigma_{eq} \quad (3.112)$$

qui fournit la contrainte macroscopique équivalente associée, soit :

$$\Sigma_{eq} = t (1 - \phi) \frac{\mu^*(t)}{\mu_s^{sct}(t)} \quad (3.113)$$

La déformation macroscopique équivalente associée au chargement imposé peut être alors calculée avec :

$$E_{eq} = \frac{1}{3 \mu^*(t)} \Sigma_{eq} = \frac{1}{3 \mu^*(\Sigma_{eq})} \Sigma_{eq} \quad (3.114)$$

On accède ainsi à un point sur la courbe de réponse déviatorique macroscopique $E_{eq} = f(\Sigma_{eq})$.

La partie hydrostatique de la courbe de réponse macroscopique diffère selon la nature du chargement mécanique. On introduit comme précédemment le taux de triaxialité que l'on définit cette fois dans cette approche en contrainte imposée par :

$$T_\Sigma = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}. \quad (3.115)$$

On a alors :

$$E_m = \frac{1}{k^*(t)} [T_\Sigma \Sigma_{eq} + b^*(t) p] \quad (3.116)$$

ce qui fournit, pour une pression porale fixée, un point sur la courbe macroscopique $E_m = f(\Sigma_m)$.

Dans le cas d'un chargement purement déviatorique ($T_\Sigma = 0$) et d'une pression porale nulle, cette relation se réduit à $E_m = 0$.

Dans le cas d'un chargement purement hydrostatique ($T_\Sigma = \infty$), la courbe de réponse macroscopique est donnée par :

$$\Sigma_{eq} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_m = \frac{1}{k^*(0)} [T_\Sigma \Sigma_{eq} - b^*(0) p] \quad (3.117)$$

Cette procédure en contrainte imposée peut être résumée par l'algorithme suivant :

$$\text{Pour } t = \bar{\sigma}_{eq}^1 \rightarrow \begin{cases} \mu_s^{sct} = \mu_s^{sct}(t) \\ \mu^* = F_\mu(\phi, \mu_s^{sct}, k_s), \quad k^* = F_k(\phi, \mu_s^{sct}, k_s) \\ \Sigma_{eq} = t(1 - \phi) \frac{\mu^*(t)}{\mu_s^{sct}(t)} \\ E_{eq} = \frac{1}{3\mu^*(t)} \Sigma_{eq} \quad \text{et} \quad E_m = \frac{1}{k^*(t)} \left(T_\Sigma \Sigma_{eq} + \left(1 - \frac{k^*(t)}{k_s}\right) p \right) \end{cases} \quad (3.118)$$

Nous présentons maintenant la mise en œuvre de la méthode sécante modifiée qui est basée elle sur la linéarisation du comportement du squelette par la moyenne quadratique de la déformation locale ou contrainte locale sur le squelette décrite à la section 3.2.2.2.

3.2.3.2 Méthode sécante modifiée

Dans cette approche, on rappelle que :

$$\mathbb{C}_s^{sct} = \mathbb{C}_s^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) = 3k_s \mathbb{J} + 2\mu_s^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) \mathbb{K} \quad (3.119)$$

avec

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^2 = \sqrt{\frac{2}{3} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d \rangle_{Y_S}} \quad (3.120)$$

ou encore :

$$\mathbb{S}_s^{sct} = \mathbb{S}_s^{sct}(\bar{\sigma}_{eq}^2) = \frac{1}{3k_s} \mathbb{J} + \frac{1}{2\mu_s^{sct}(\bar{\sigma}_{eq}^2)} \mathbb{K} \quad (3.121)$$

avec

$$\bar{\sigma}_{eq}^2 = \sqrt{\frac{3}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d \rangle_{Y_S}} \quad (3.122)$$

La mise en œuvre de cette méthode suit des étapes analogues à celles distinguées dans l'approche sécante classique à la section précédente.

Après l'estimation des tenseurs de rigidité \mathbb{C}^* ou de souplesse \mathbb{S}^* homogénéisés et des coefficients de Biot par une méthode d'homogénéisation linéaire, ainsi que leurs dérivées partielles par rapport au tenseur de rigidité ou de souplesse du squelette, la seconde

étape consiste à résoudre l'équation non linéaire (3.64) ou (3.81) pour déterminer les moments du second ordre $\bar{\varepsilon}_{eq}^2$ ou $\bar{\sigma}_{eq}^2$. En isotrope, il suffit de résoudre les équations (3.67) ou (3.86). On peut alors construire la réponse macroscopique non linéaire comme pour l'approche sécante classique.

Il est commode, comme pour l'approche classique, de ne pas chercher à résoudre l'équation non linéaire mais de construire point par point le comportement homogénéisé. Nous commençons par détailler cette procédure dans une approche déformation imposée.

Construction point par point de la réponse par une approche déformation :

On introduit le paramètre t qui vaut dans l'approche déformation imposée :

$$t = \bar{\varepsilon}_{eq}^2 \quad (3.123)$$

A t fixé, on calcule le comportement du squelette par (3.119), puis le comportement homogénéisé avec les relations (3.96) et (3.97) par exemple. On forme ensuite l'équation non linéaire (3.67) qui s'écrit encore :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^2 = [A(t)E_m^2 + B(t)E_{eq}^2 + pC(t)E_m]^{\frac{1}{2}} \quad (3.124)$$

avec

$$A(t) = \frac{1}{3(1-\phi)} \frac{\partial k^*(t)}{\partial \mu_s^{sct}(t)} \quad (3.125)$$

$$B(t) = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{\partial \mu^*(t)}{\partial \mu_s^{sct}(t)} \quad (3.126)$$

$$C(t) = \frac{-2}{3(1-\phi)} \frac{\partial b_d^*}{\partial \mu_s^{sct}(t)} = \frac{2}{3(1-\phi)} \frac{1}{k_s} \frac{\partial k^*(t)}{\partial \mu_s^{sct}(t)} = \frac{2}{k_s} A(t) \quad (3.127)$$

Si l'on fait le choix de l'approximation des distributions diluées, on a d'après (3.69) :

$$A(t) = \frac{\phi}{4(1-\phi)} \frac{k_s^2}{(\mu_s^{sct}(t))^2} \quad (3.128)$$

$$B(t) = \frac{1}{(1-\phi)} \left[1 - \frac{5}{2}\phi \left(1 - \frac{27k_s^2}{(9k_s + 8\mu_s^{sct}(t))^2} \right) \right] \quad (3.129)$$

Comme pour l'approche sécante classique, on peut déduire de (3.124) la déformation macroscopique sans chercher à résoudre l'équation en t . Mais, contrairement à l'approche classique, on observe un couplage de la partie déviatorique et sphérique de la déformation macroscopique, $\bar{\varepsilon}_{eq}^2$ dépendant à la fois de E_m et E_{eq} , ainsi que de p .

En introduisant comme précédemment le taux de triaxialité macroscopique en déformation T_E défini par (3.106), l'équation (3.124) s'écrit encore en fonction de la déformation macroscopique équivalente E_{eq} :

$$[A(t)T_E^2 + B(t)] E_{eq}^2 + pC(t)T_E E_{eq} - t^2 = 0 \quad (3.130)$$

ou encore en fonction de la partie sphérique de la déformation macroscopique E_m :

$$\left[A(t) + B(t) \frac{1}{T_E^2} \right] E_m^2 + p C(t) E_m - t^2 = 0 \quad (3.131)$$

En résolvant l'une ou l'autre de ces équations, on peut exprimer les déformations macroscopiques E_{eq} ou E_m en fonction du paramètre t , du taux de triaxialité T_E et de la pression p .

Pour un taux fixé et une pression porale p fixée, on construit la réponse macroscopique non linéaire point par point avec à chaque t :

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu^*(t) E_{eq} = 3 \mu^*(E_{eq}, T_E, p) E_{eq} \quad (3.132)$$

$$\Sigma_m = k^*(t) T_E E_{eq} - p b^*(t) = k^*(E_{eq}, T_E, p) T_E E_{eq} - p b^*(E_{eq}, T_E, p) \quad (3.133)$$

ou bien

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu^*(t) E_{eq} = 3 \mu^*(E_m, T_E, p) \frac{1}{T_E} E_m \quad (3.134)$$

$$\Sigma_m = k^*(E_m, T_E, p) E_m - p b^*(E_m, T_E, p) \quad (3.135)$$

Pour un chargement purement déviatorique et une pression porale nulle, cette réponse se réduit à :

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu^*(E_{eq}) E_{eq} \quad \text{et} \quad \Sigma_m = 0 \quad (3.136)$$

avec

$$E_{eq} = \sqrt{\frac{t^2}{B(t)}} \quad (3.137)$$

Pour un chargement purement hydrostatique et une pression porale nulle, elle s'écrit :

$$\Sigma_{eq} = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_m = k^*(E_m) E_m - p b^*(E_m) \quad (3.138)$$

avec

$$E_m = \sqrt{\frac{t^2}{A(t)}} \quad (3.139)$$

En résumé, l'algorithme de mise en œuvre de l'approche sécante modifiée pilotée en

déformation imposée se résume à :

$$\text{Pour } t = \bar{\varepsilon}_{eq}^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_s^{sct} = \mu_s^{sct}(t) \\ \mu^* = F_\mu(\phi, \mu_s^{sct}, k_s) \text{ , } k^* = F_k(\phi, \mu_s^{sct}, k_s) \\ A(t) = \frac{1}{3(1-\phi)} \frac{\partial k^*(t)}{\partial \mu_s^{sct}(t)} \text{ , } B(t) = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{\partial \mu^*(t)}{\partial \mu_s^{sct}(t)} \text{ , } C(t) = \frac{2}{k_s} A(t) \\ \text{Calcul de } E_{eq} \text{ à partir de la résolution de (3.130)} \\ \Sigma_{eq} = 3 \mu^*(t) E_{eq} \text{ , } \Sigma_m = k^*(t) T_E E_{eq} - p b^*(t) \\ \text{Calcul de } E_m \text{ à partir de la résolution de (3.131)} \\ \Sigma_{eq} = 3 \mu^*(t) \frac{1}{T_E} E_{eq} \text{ , } \Sigma_m = k^*(t) E_m - p b^*(t) \end{array} \right. \quad (3.140)$$

La mise en œuvre de l'approche sécante modifiée en contrainte imposée suit une procédure analogue.

Construction point par point de la réponse par une approche contrainte :

Le paramètre t vaut cette fois $t = \bar{\sigma}_{eq}^2$. A t fixé, on calcule le comportement homogénéisé avec par exemple les relations (3.23)-(3.25). On forme ensuite l'équation non linéaire (3.86) qui s'écrit encore :

$$t = \bar{\sigma}_{eq}^2 = [D(t) \Sigma_m^2 + E(t) \Sigma_{eq}^2 - 2p D(t) \Sigma_m]^{\frac{1}{2}} \quad (3.141)$$

avec

$$D(t) = \frac{3}{(1-\phi)} \frac{\partial (1/k^*)}{\partial ((\mu_s^{sct})^{-1})} \text{ , } E(t) = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{\partial (1/\mu^*)}{\partial ((\mu_s^{sct})^{-1})} \quad (3.142)$$

La construction de la courbe de réponse s'effectue alors point par point comme par l'approche déformation.

Ainsi en introduisant le taux de triaxialité macroscopique en contrainte T_Σ défini par (3.115), l'équation (3.141) s'écrit :

$$[D(t) T_\Sigma^2 + E(t)] \Sigma_{eq}^2 - 2p D(t) T_\Sigma \Sigma_{eq} - t^2 = 0 \quad (3.143)$$

ou encore :

$$\left[D(t) + E(t) \frac{1}{T_\Sigma^2} \right] \Sigma_m^2 - 2p D(t) \Sigma_m - t^2 = 0 \quad (3.144)$$

En résolvant ces équations, on peut exprimer les contraintes macroscopiques Σ_{eq} et Σ_m en fonction du paramètre t , du taux de triaxialité T_Σ et de la pression.

Pour un taux et une pression fixés, on construit alors point par point la réponse macroscopique non linéaire avec à chaque t :

$$E_{eq} = \frac{1}{3 \mu^*(\Sigma_{eq}, T_\Sigma, p)} \Sigma_{eq} \quad (3.145)$$

et

$$E_m = \frac{1}{k^*(\Sigma_{eq}, T_\Sigma, p)} [T_\Sigma \Sigma_{eq} + p b^*(\Sigma_{eq}, T_\Sigma, p)] \quad (3.146)$$

L'algorithme de mise en œuvre de l'approche modifiée pilotée en contrainte imposée se résume alors :

$$\text{Pour } t = \bar{\varepsilon}_{eq}^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_s^{sct} = \mu_s^{sct}(t) \\ \mu^* = F_\mu(\phi, \mu_s^{sct}, k_s) \text{ , } k^* = F_k(\phi, \mu_s^{sct}, k_s) \\ D(t) = \frac{3}{1-\phi} \frac{\partial((k^*)^{-1})}{\partial((\mu_s^{sct})^{-1})} \text{ , } E(t) = \frac{1}{1-\phi} \frac{\partial((\mu^*)^{-1})}{\partial((\mu_s^{sct})^{-1})} \\ \text{Calcul de } \Sigma_{eq} \text{ à partir de la résolution de (3.143)} \\ E_{eq} = \frac{1}{3 \mu^*(t)} \Sigma_{eq} \text{ , } E_m = \frac{1}{k^*(t)} [T_\Sigma \Sigma_{eq} - p b^*(t)] \\ \text{Calcul de } \Sigma_m \text{ à partir de la résolution de (3.144)} \\ E_{eq} = \frac{1}{3 \mu^*(t)} \frac{1}{T_\Sigma} \Sigma_m \text{ , } E_m = \frac{1}{k^*(t)} [\Sigma_m - p b^*(t)] \end{array} \right. \quad (3.147)$$

Nous nous proposons maintenant d'illustrer ces deux méthodes d'homogénéisation non linéaires à travers quelques applications en milieu poreux. L'objectif est également de montrer les limitations de ces approches. D'autres applications sur des milieux composites à renforts sphériques élastiques et matrice élastique non linéaire peuvent être trouvées dans les travaux de Suquet (Suquet, 1997 [97]), Suquet et Ponte Castañeda (Suquet et Ponte Castañeda, 1998 [86]).

3.2.4 Illustrations

Nous nous proposons tout d'abord d'illustrer cette méthodologie d'homogénéisation et sa mise en œuvre sur un milieu poreux dont le squelette présente un comportement non linéaire régi par une loi puissance. Nous commençons pour cela par décrire le comportement retenu pour le squelette.

3.2.4.1 Comportement du squelette en loi puissance

Le comportement du squelette est supposé caractérisé par le potentiel de déformation $v(\boldsymbol{\varepsilon}(y))$ donné par :

$$v(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} k_s (tr \boldsymbol{\varepsilon}(y))^2 + \frac{\sigma_0 \varepsilon_0}{m+1} \left(\frac{\varepsilon_{eq}(y)}{\varepsilon_0} \right)^{m+1} \quad (3.148)$$

où k_s désigne le module de compressibilité supposé constant, où ε_0 et σ_0 désignent respectivement une déformation et une contrainte de référence, où ε_{eq} correspond à la déformation équivalente au sens de Von Mises définie en (3.89) et où m un paramètre qui caractérise l'écrouissage du matériau variant entre 0 et 1.

La loi de comportement associée s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = k_s (tr \boldsymbol{\varepsilon}(y)) \mathbf{1} + \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_{eq}(y)}{\varepsilon_0} \right)^{m-1} \mathbf{e}(y) \quad (3.149)$$

où $\mathbf{e}(y)$ est la partie déviatorique du tenseur de déformation. Soit encore en introduisant

le module de cisaillement sécant :

$$\boldsymbol{\sigma}(y) = k_s (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(y)) \mathbf{1} + 2 \mu_s^{sct}(\varepsilon_{eq}(y)) \mathbf{e}(y) \quad (3.150)$$

avec

$$\mu_s^{sct}(\varepsilon_{eq}(y)) = \mu_s^0 \left(\frac{\varepsilon_{eq}(y)}{\varepsilon_0} \right)^{m-1} \quad \text{et} \quad \mu_s^0 = \frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \quad (3.151)$$

Comme remarqué précédemment le comportement du squelette apparaît linéaire sous un chargement hydrostatique, k_s étant constant, et non linéaire en cisaillement.

La loi inverse est définie à partir du potentiel en contrainte :

$$w(\boldsymbol{\sigma}(y)) = \frac{1}{2} \frac{1}{k_s} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}(y))^2 + \frac{\sigma_0 \varepsilon_0}{n+1} \left(\frac{\sigma_{eq}(y)}{\sigma_0} \right)^{n+1} \quad (3.152)$$

où le paramètre n est relié au paramètre m d'écroissage par $m = 1/n$. La loi de comportement du squelette s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y) = \frac{1}{k_s} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}(y)) \mathbf{1} + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_{eq}(y)}{\sigma_0} \right)^{n-1} \mathbf{s}(y) \quad (3.153)$$

où $\mathbf{s}(y)$ est la partie déviatorique du tenseur de contrainte. Soit encore :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y) = \frac{1}{k_s} (\text{tr} \boldsymbol{\sigma}(y)) \mathbf{1} + \frac{1}{2 \mu_s^{sct}(\sigma_{eq}(y))} \mathbf{s}(y) \quad (3.154)$$

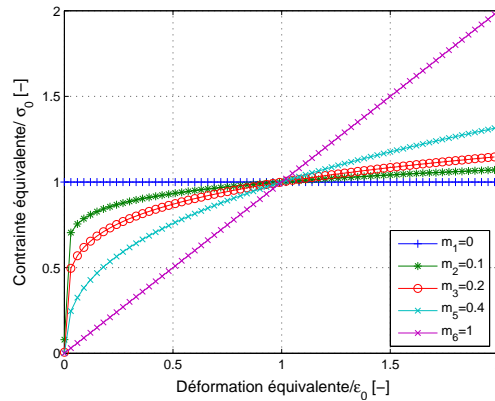


Figure 3.1 — Comportement non linéaire du squelette en loi puissance. Chargement déviatorique.

L'évolution du comportement du squelette est présentée à la *Figure 3.1* sous un chargement déviatorique pour différentes valeurs du coefficient m caractérisant l'écroissage du milieu poreux. Le cas extrême $m = n = 1$ correspond à un comportement linéaire avec un module de cisaillement μ_s^0 . Lorsque $m = 0$ et $n \rightarrow \infty$ le comportement est plastique rigide (sans écroissage).

Dans les applications qui sont menées ici, nous avons retenu les valeurs suivantes

pour les modules :

$$k_s = 834 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \mu_s^0 = 385 \text{ MPa} \quad (3.155)$$

qui correspondent à un module d'Young du squelette de $E_s = 1 \text{ GPa}$ et un coefficient de Poisson de $\nu_s = 0.3$. Le milieu poreux est constitué de pores sphériques. Différentes porosités seront examinées, ainsi que différentes valeurs du coefficient m .

Nous présentons maintenant quelques résultats concernant le comportement homogénéisé de ce milieu poreux obtenu successivement par les approches sécantes classique, puis modifiée.

3.2.4.2 Comportement homogénéisé par l'approche sécante classique

Le comportement homogénéisé est obtenu dans cette section à l'aide de la procédure sécante classique décrite au paragraphe 3.2.3.1. Différents schémas prédictifs sont utilisés pour estimer le comportement homogénéisé du matériau linéaire de comparaison : l'approximation des distributions diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC), la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS), le schéma autocohérent (AC) et le schéma des trois phases (3PH). L'approche déformation est tout d'abord mise en œuvre en suivant l'algorithme (3.111) pour ces différents schémas et les courbes de réponse macroscopique (3.103) et (3.107) sont tracées pour différents chargements.

On suppose en premier lieu le chargement mécanique macroscopique purement déviatorique. Sur les *Figures 3.2* sont présentées les évolutions des contraintes équivalentes Σ_{eq} normalisées par σ_0 en fonction des déformations équivalentes E_{eq} normalisées par ε_0 . Différentes porosités initiales ($\phi = 0.2, 0.4, 0.6$) et différentes valeurs du coefficient d'écrouissage du squelette ($m = 0.1, 0.5$) sont considérées. A titre de comparaison, le comportement du squelette est également présenté.

On observe tout d'abord que le comportement homogène du milieu poreux suit une allure analogue à celle du squelette avec une perte de rigidité due à la présence des pores, la perte est évidemment d'autant plus importante que la porosité est grande.

Pour une porosité faible de 20%, les comportements non linéaires prédits par l'approche sécante couplée aux différentes approches d'homogénéisation linéaires pour le milieu linéaire de comparaison sont voisins. Lorsque la porosité devient plus importante à 40%, les évolutions s'écartent les unes des autres. Pour une porosité dépassant 50%, les approches des distributions diluées en déformation et le schéma autocohérent ne sont plus présentées. Nous avons vu au chapitre 2 qu'elles conduisent en effet à des valeurs non physiques du comportement du milieu linéaire de comparaison et en conséquence il en est de même pour le comportement du milieu poreux non linéaire.

L'évolution des contraintes sphériques macroscopiques en fonction des déformations volumiques macroscopiques est présentée sur la *Figure 3.3* dans le cas d'un chargement macroscopique mécanique purement hydrostatique ($E_{eq} = 0$). Le comportement équivalent est bien linéaire comme constaté à la section 3.2.3.1. La pente des courbes correspond au module de compressibilité $k^*(0)$. Pour une porosité de 40%, le schéma des distributions diluées en approche déformation conduit à des valeurs non physiques pour le module de compressibilité ce qui explique là aussi la disparition de cette courbe sur la *Figure 3.3(b)*. Des remarques analogues à celles données pour la *Figure 3.2* peuvent

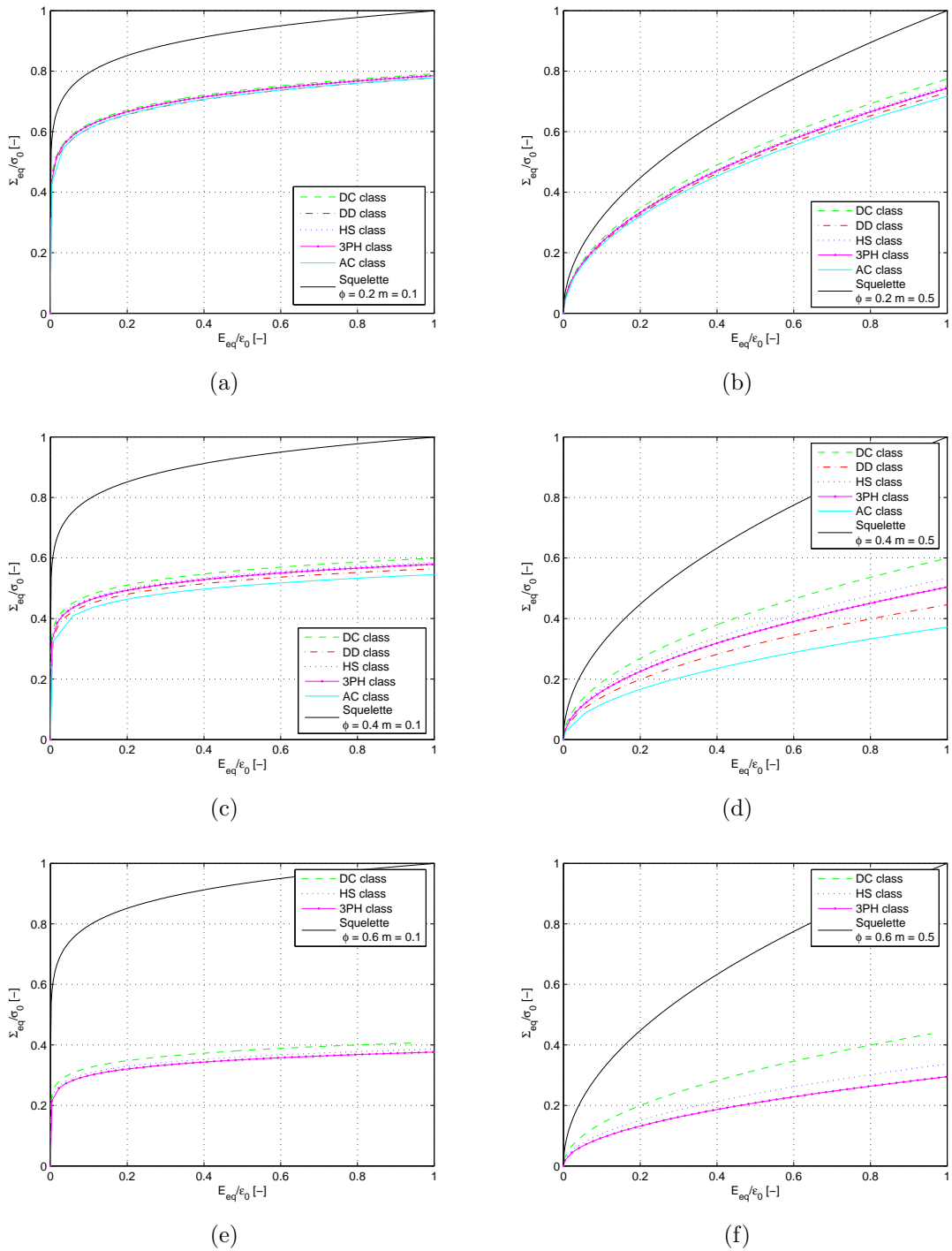


Figure 3.2 — Évolution des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations équivalentes par l'approche sécante classique pour différentes méthodes d'homogénéisation. Porosité initiale de 20, 40 et 60 % et coefficient d'écroutissage de 0.1 et 0.5. Chargement déviatorique.

être faites en ce qui concerne l'écart croissant des prédictions avec un taux croissant de porosité. Les différentes estimations du comportement sous chargement purement hydrostatique sont proches pour des porosités faibles et se dispersent au delà.

Ces résultats, obtenus avec l'approche en déformation imposée, sont maintenant

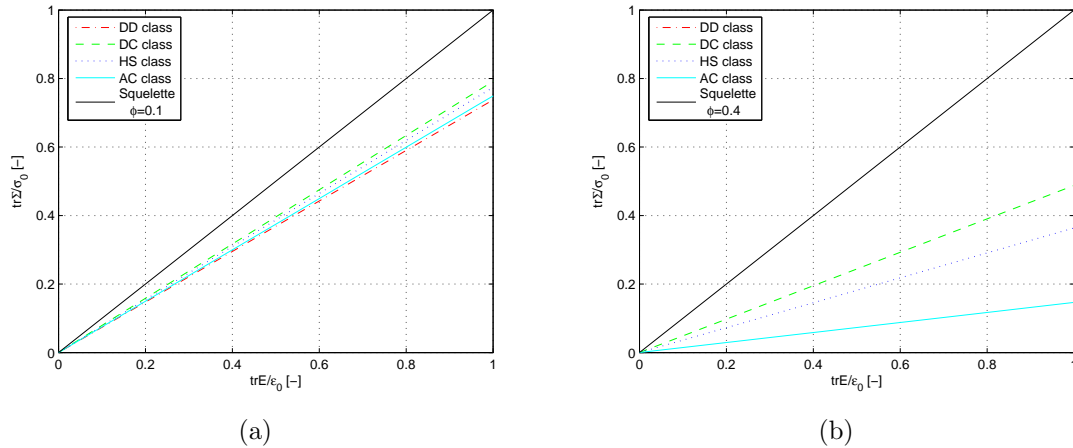


Figure 3.3 — Évolution des contraintes sphériques macroscopiques en fonction des déformations volumiques par l'approche sécante classique pour différentes méthodes d'homogénéisation. Porosité initiale de 10 % (a) et 40% (b). Chargement hydrostatique.

comparés à ceux fournis par l'approche duale en contrainte imposée. L'algorithme (3.118) est donc cette fois mis en œuvre pour les différents schémas prédictifs testés précédemment.

La *Figure 3.4* superpose les prédictions obtenues selon cette approche duale avec celle de l'approche primale en déformation imposée. Sur la *Figure 3.4(a)*, on peut ainsi comparer les prédictions du schéma des distributions diluées en approche contrainte (DC) et déformation (DD). On observe que les deux approches de l'extension sécante classique construites suivant une mise en œuvre pilotée en déformation imposée (DD def imp) et (DC def imp) et en contrainte imposée (DD cont imp) et (DC cont imp) conduisent à un même comportement. Ce résultat a déjà été constaté par Bornert et Suquet (Bornert et Suquet, 2001 [19]). Sur la *Figure 3.4(b)* sont comparées les réponses macroscopiques fournies par les schémas de Hashin Shtrikman (HS), autocohérent (AC) et les trois phases (3PH) obtenues par la mise en œuvre duale (cont imp) ou primale (def imp). Là encore, on retrouve une même prédiction en approche primale ou duale.

Des résultats analogues peuvent être obtenus sous chargement couplé. Mais pour ne pas alourdir la présentation, nous avons fait le choix de ne pas les présenter ici. Des applications sous chargement couplé seront présentées ultérieurement lors du couplage du processus itératif.

3.2.4.3 Comportement homogénéisé par l'approche sécante modifiée

Le comportement homogénéisé du milieu poreux est obtenu dans cette section par l'approche sécante modifiée décrite au paragraphe 3.2.3.2. Cette fois la description de l'état des déformations ou contraintes locales est représentée par la moyenne quadratique $\bar{\varepsilon}_{eq}^2$ ou $\bar{\sigma}_{eq}^2$.

L'approche sécante modifiée est tout d'abord mise en œuvre en suivant l'approche primale pilotée en déformation macroscopique imposée. On considère un chargement purement déviatorique avec $E_{eq} \neq 0$ et $E_m = 0$. La réponse macroscopique (3.132-

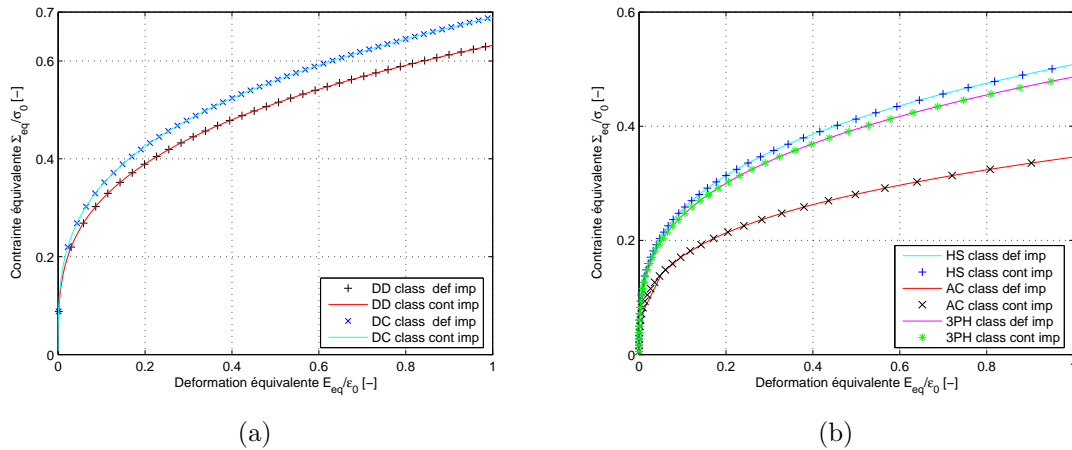


Figure 3.4 — Évolution des contraintes déviatoriques macroscopiques en fonction des déformations déviatoriques par l’approche sécante classique pour différentes méthodes d’homogénéisation en approche directe et duale. Porosité initiale de 30% (a) et 45% (b). Chargement déviatorique.

3.133) est construite point par point selon l’algorithme (3.147).

Les *Figures 3.5* donnent les évolutions des contraintes équivalentes en fonction de la déformation équivalente obtenue par cette extension sécante modifiée avec les schémas des distributions diluées en approche contrainte (DC) et déformation (DD), la borne supérieure de Hashin-Shtrikman (HS), le schéma autocohérent (AC) et le schéma autocohérent généralisé (3PH). Comme précédemment, différentes porosités initiales ($\phi = 0.2, 0.4, 0.6$) ainsi que différentes valeurs du paramètre d’écrouissage ($m = 0.1, 0.5$) sont testées.

En comparaison avec la *Figure 3.2*, on peut noter tout d’abord des réponses macroscopiques différentes avec les approches sécantes classique et modifiée. Les allures sont identiques mais les valeurs quantitatives sont différentes. Des commentaires analogues à ceux faits sur les courbes de la *Figure 3.2* peuvent être donnés. Pour des porosités initiales faibles au voisinage de 20%, les prédictions sont proches. Mais au delà, les réponses associées aux différents modèles prédictifs pour le matériau linéaire de comparaison se dispersent.

On constate que la borne supérieure de Hashin garde bien son statut de borne supérieure pour le milieu poreux non linéaire comme formulé par Ponte Castañeda et Suquet (Ponte Castañeda et Suquet, 1998 [86]), les prédictions fournies par les schémas autocohérents se situent sous la borne d’Hashin.

Considérons maintenant un chargement purement hydrostatique $E_{eq} = 0$ et $E_m \neq 0$ et une pression porale nulle. La réponse macroscopique est construite à partir de (3.135). Sur les *Figures 3.6* sont présentées les évolutions des contraintes sphériques ainsi obtenues en fonction des déformations volumiques macroscopiques pour le même jeu de paramètres. Les réponses présentées sont cette fois non linéaires contrairement à celles de l’extension sécante classique présentées à la *Figure 3.3(b)*. Cette non linéarité se manifeste après une première phase linéaire. Comme déjà précisé antérieurement, pour une porosité au delà de 50%, l’estimation linéaire du schéma autocohérent fournit des valeurs non physiques et les différentes prédictions s’écarternt.

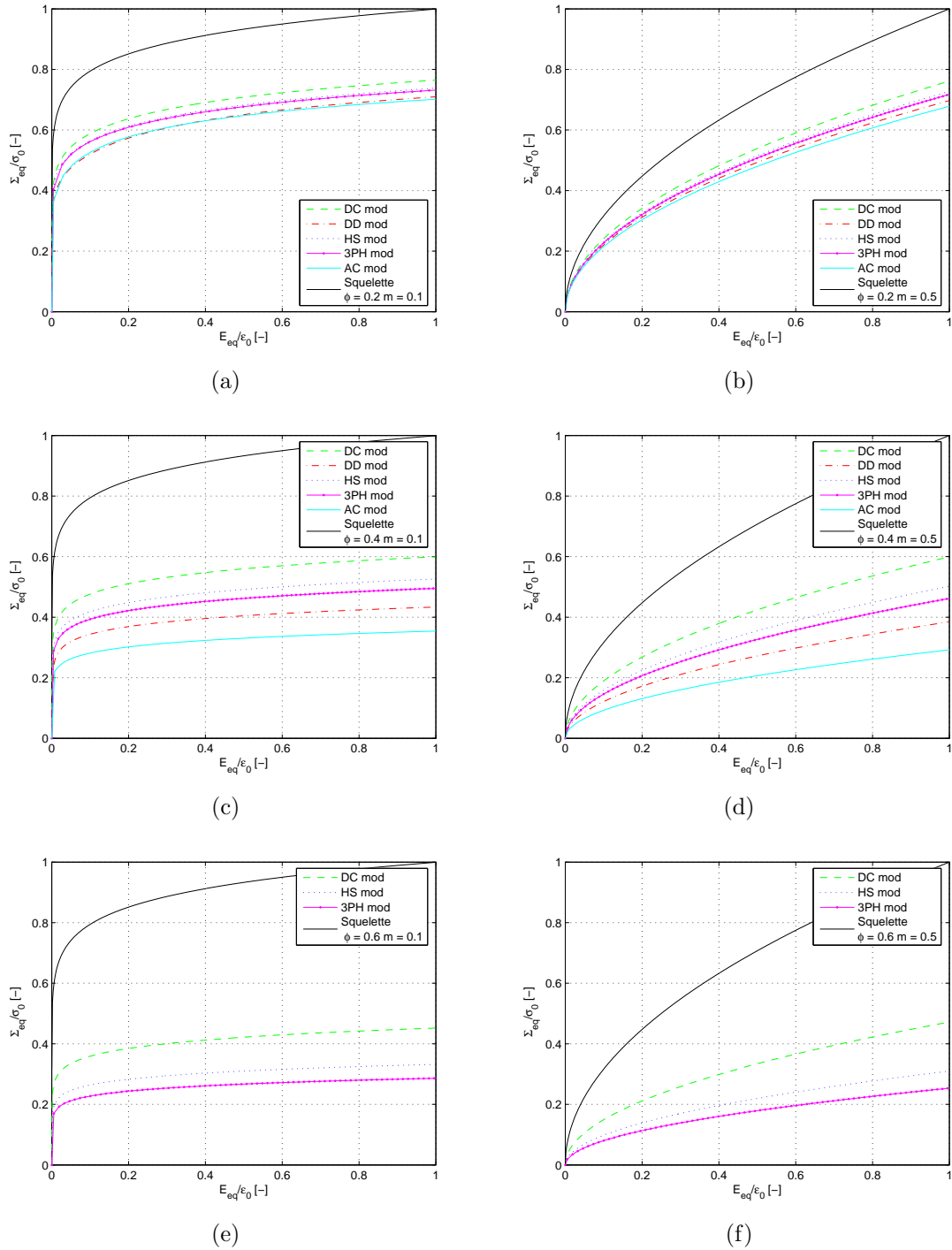


Figure 3.5 — Évolution des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations équivalentes par l'approche sécante modifiée pour différentes méthodes d'homogénéisation. Porosité initiale de 20, 40 et 60 % et coefficient d'écroutissage de 0.1 et 0.5. Chargement purement déviatorique.

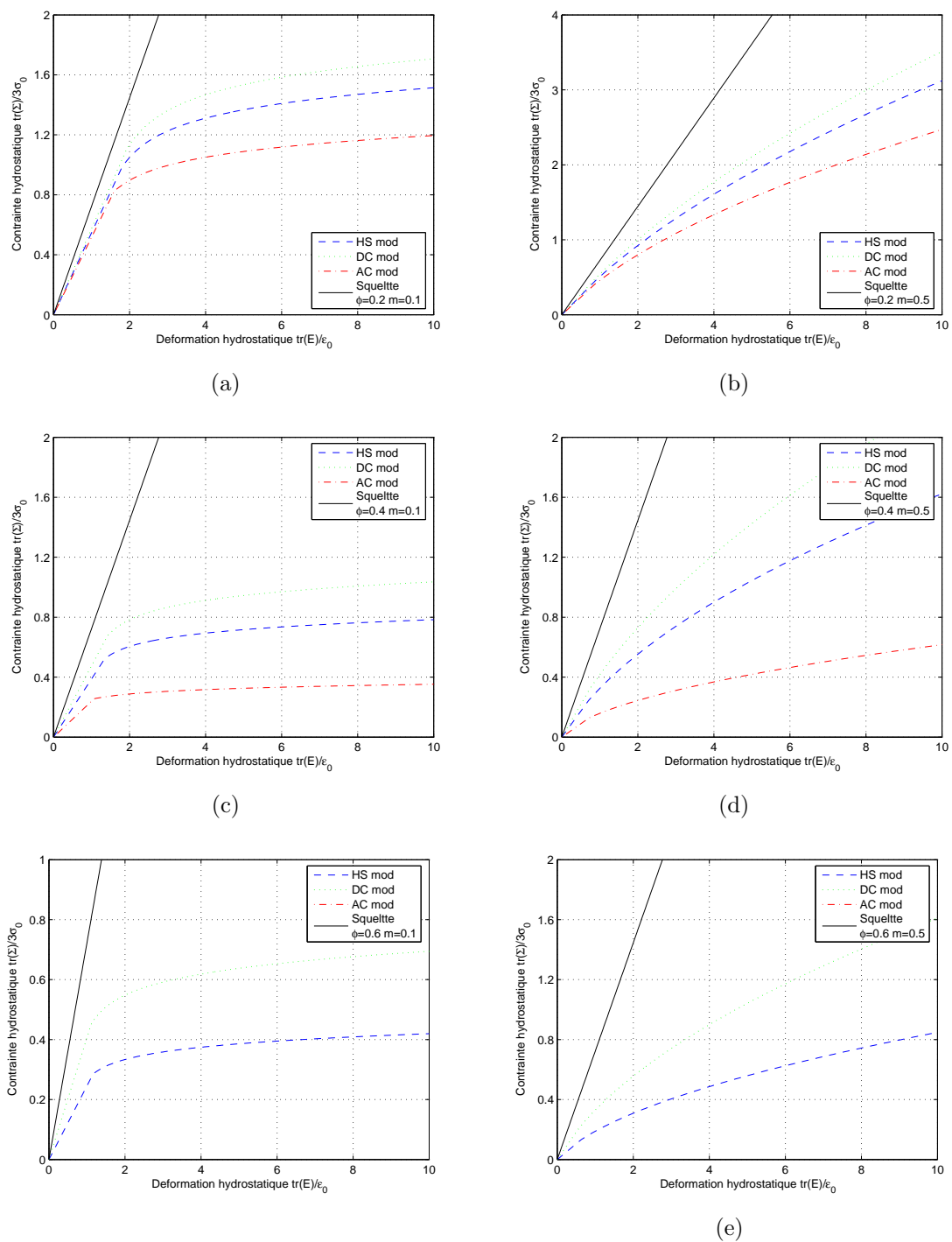


Figure 3.6 — Évolution des contraintes sphériques macroscopiques en fonction des déformations volumiques par l'approche sécante modifiée pour différentes méthodes d'homogénéisation. Porosité initiale de 20, 40 et 60 % et coefficient d'écroutissage de 0.1 et 0.5. Chargement purement hydrostatique.

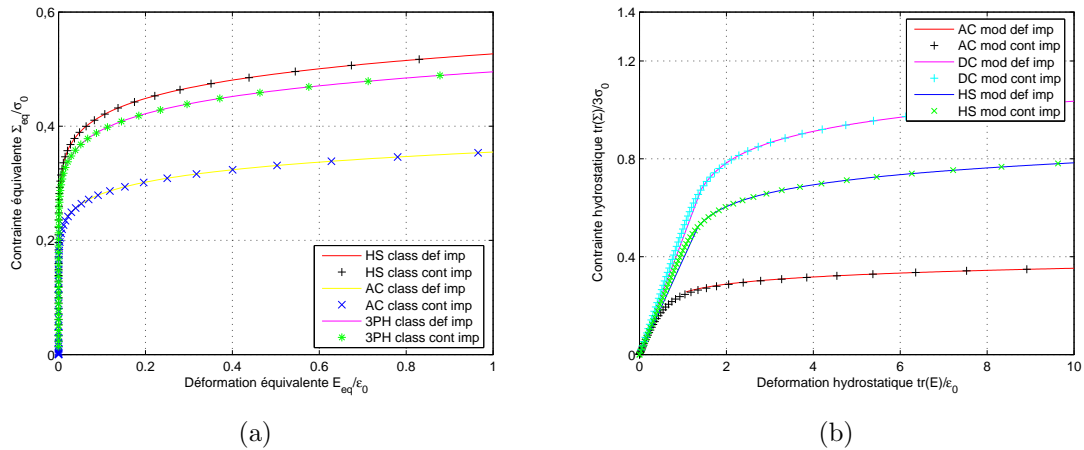


Figure 3.7 — Évolution de la contrainte macroscopique en fonction de la déformation macroscopique par l'approche sécante modifiée sous chargement purement déviatorique (a) et sous chargement purement hydrostatique (b). Porosité initiale de 40% et paramètre d'écrouissage $m=0.1$.

Ces résultats obtenus par une mise en œuvre pilotée en déformation sont maintenant comparés à ceux fournis par l'approche duale pilotée en contrainte imposée. Cette approche duale est mise en œuvre pour des chargements macroscopiques purement déviatoriques et purement hydrostatiques. Les *Figures 3.7* présentent les évolutions des contraintes macroscopiques en fonction des déformations macroscopiques pour ces deux chargements obtenues par l'approche primale (def imp) et duale (cont imp). Comme pour l'extension sécante classique, les deux approches primale et duale conduisent au même comportement quelque soit l'estimation non linéaire utilisée.

Ce paragraphe d'illustration, nous a permis tout d'abord de valider la mise en œuvre des approches sécantes classique et modifiée pour des milieux poreux sous leur forme duale et primale. D'autres tests non présentés ici pour ne pas alourdir la rédaction ont été également menés sur des milieux biphasés à renforts élastiques linéaires et matrice non linéaire. Les résultats ont été confrontés à différents travaux de la littérature (Suquet, 1995 [95] et 1997, [97], Rekik et al., 2006 [89]). Cette confrontation sera détaillée ultérieurement lors du couplage avec le processus itératif.

Les applications présentées ici sur les milieux poreux mettent en évidence que, pour un même schéma prédictif d'homogénéisation pour le milieu linéaire de comparaison, les approches sécantes classique et modifiée diffèrent. Pour une approche sécante donnée, les schémas prédictifs conduisent à des réponses macroscopiques qui diffèrent d'autant plus que la porosité du milieu est importante. Ce dernier résultat était évidemment attendu compte-tenu des illustrations des méthodes des modules effectifs présentées au chapitre 2 dans le domaine élastique. Il s'explique par les descriptions différentes de la microstructure sous-jacentes à ces méthodes.

Nous avons introduit au chapitre 2 un processus itératif d'homogénéisation linéaire qui a permis de conduire à une même prédiction du comportement équivalent pour tous les taux de porosités et les schémas utilisés. L'idée du paragraphe suivant est de chercher à étendre ce processus itératif dans le domaine non linéaire en le couplant aux approches sécantes classique et modifiée avec bien sûr l'objectif d'unifier, comme en

linéaire, les prédictions.

3.3 Extensions non linéaires du processus itératif d'homogénéisation

Dans cette section, nous cherchons à étendre le processus d'homogénéisation itératif introduit au chapitre précédent pour des milieux poreux linéaires à des milieux non linéaires. Les approches sécantes présentées à la section 3.2 sont enrichies par couplage avec ce processus itératif. Nous commençons par présenter tout d'abord le principe de ce couplage, puis l'algorithme de mise en œuvre. Ensuite, nous illustrons l'introduction de cette extension itérative non linéaire par différentes applications sous divers chargements macroscopiques et pour des comportements de squelette variés.

3.3.1 Principe du couplage du processus itératif

Nous avons vu dans la section précédente qu'une linéarisation sécante du problème d'homogénéisation non linéaire conduisait à un problème d'homogénéisation linéaire posé sur un matériau poreux linéaire de comparaison. Les approches explicites d'homogénéisation linéaire peuvent être alors exploitées pour estimer le comportement effectif de ce milieu. C'est à ce stade que le processus itératif va être introduit pour enrichir cette estimation. Nous présentons au paragraphe suivant la mise en œuvre de cette introduction du processus itératif tout d'abord dans l'approche sécante classique d'homogénéisation.

3.3.1.1 Couplage avec l'approche sécante classique

Afin de simplifier la présentation, nous conservons dans cette partie l'hypothèse que le comportement du squelette est isotrope linéaire sous chargement hydrostatique et non linéaire sous chargement de cisaillement.

On rappelle que dans l'approche sécante classique, le comportement du squelette dépend de la moyenne du champ de déformation locale et que le comportement du milieu poreux non linéaire est défini dans l'approche déformation par (3.11) :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle = \mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p) : \mathbf{E} - p \mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p) \quad (3.156)$$

avec, conformément aux résultats donnés en linéaire au chapitre 1 (1.54) et (1.65) :

$$\mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p) = \mathbb{C}_s^{sct}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^1) - \phi \mathbb{C}_s^{sct}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^1) : \langle \langle \mathbb{A}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^1) \rangle \rangle_{Y_T} \quad (3.157)$$

et

$$\mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p) = \mathbf{1} - [\mathbb{C}_s^{sct}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^1)]^{-1} : \mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p) : \mathbf{1}. \quad (3.158)$$

où \mathbb{A} désigne le tenseur de localisation introduit au chapitre 1. Ce tenseur de localisation diffère selon les approches. En distribution diluée, il vaut :

$$\langle \langle \mathbb{A}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^1) \rangle \rangle_{Y_T} = [\mathbb{I} - \mathbb{S}_{Es}^{sct}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}^1)]^{-1} \quad (3.159)$$

avec

$$\mathbb{S}_{E_s}^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^1) = a_{E_s}^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^1)\mathbb{J} + b_{E_s}^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^1)\mathbb{K} \quad (3.160)$$

où \mathbb{I} désigne le tenseur identité d'ordre 4 et où $a_{E_s}^{sct}$ et $b_{E_s}^{sct}$ ont été définis en (3.99).

Avec l'approche d'Hashin, le tenseur de localisation s'écrit :

$$\lll \mathbb{A}(\bar{\varepsilon}_{eq}^1) \ggg_{Y_T} = [\mathbb{I} - (1 - \phi) \mathbb{S}_{E_s}^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^1)]^{-1} \quad (3.161)$$

D'après la procédure décrite au paragraphe (3.2.3.1), la construction de la réponse macroscopique (3.156)-(3.158) est menée en pratique point par point en incrémentant successivement le chargement mécanique macroscopique, la pression porale p étant supposée fixée. Nous avons vu à la section précédente qu'il était alors pratique de considérer comme paramètre de chargement t la moyenne de la déformation $\bar{\varepsilon}_{eq}^1$. On note $t^{(j)}$ les valeurs prises par ce paramètre au cours de la montée en charge.

Nous nous proposons d'introduire le processus itératif à chaque pas de chargement $t^{(j)}$ en construisant le comportement effectif $\mathbb{C}^*(t^{(j)}, p)$ et $\mathbb{B}^*(t^{(j)}, p)$ par itérations successives sur la porosité ϕ .

Pour un pas de chargement fixé $t^{(j)}$, le processus itératif sur la porosité est initialisé avec le comportement du squelette sécant linéarisé :

$$\mathbb{C}^{*(0)}(t^{(j)}, p) = \mathbb{C}_s^{sct}(t^{(j)}) \quad (3.162)$$

On ajoute alors à ce squelette linéarisé une proportion de porosité $\Delta\phi_1$, puis on homogénéise par une méthode simplifiée d'homogénéisation linéaire pour obtenir un milieu intermédiaire homogène 1. Le comportement de ce milieu s'écrit conformément à (3.157) :

$$\mathbb{C}^{*(1)} = \mathbb{C}^{*(0)}(t^{(j)}) - \phi^{(1)} \mathbb{C}^{*(0)}(t^{(j)}) : \lll \mathbb{A}^{(1)}(t^{(j)}) \ggg_{Y_T} \quad (3.163)$$

où $\phi^{(1)}$ est la porosité du milieu intermédiaire de cette 1^{ère} étape soit :

$$\phi^{(1)} = \frac{\Delta\phi_1}{\phi_s + \Delta\phi_1} \quad (3.164)$$

avec ϕ_s le taux de squelette dans le milieu poreux égal à $\phi_s = 1 - \phi$.

Dans une approche en distribution diluée par exemple, on a :

$$\lll \mathbb{A}^{(1)}(t^{(j)}) \ggg_{Y_T} = [\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{*(0)}(t^{(j)})]^{-1} \quad (3.165)$$

avec

$$\mathbb{S}_E^{*(0)}(t^{(j)}) = a_E^{*(0)}(t^{(j)})\mathbb{J} + b_E^{*(0)}(t^{(j)})\mathbb{K} \quad (3.166)$$

et

$$a_E^{*(0)}(t^{(j)}) = \frac{3k^{*(0)}}{3k^{*(0)} + 4\mu^{*(0)}} = \frac{3k_s^{sct}}{3k_s^{sct} + 4\mu_s^{sct}} \quad (3.167)$$

$$b_E^{*(0)}(t^{(j)}) = \frac{6k^{*(0)} + 2\mu^{*(0)}}{5(3k^{*(0)} + 4\mu^{*(0)})} = \frac{6k_s^{sct} + 2\mu_s^{sct}}{5(3k_s^{sct} + 4\mu_s^{sct})} \quad (3.168)$$

Ainsi à chaque étape du processus itératif (i), on ajoute une nouvelle proportion de porosité $\Delta\phi_i$ au milieu intermédiaire de l'étape ($i-1$) constituant cette fois le squelette et on homogénéise à nouveau. Le comportement de ce nouveau milieu intermédiaire i est donné par :

$$\mathbb{C}^{*(i)} = \mathbb{C}^{*(i-1)}(t^{(j)}) - \phi^{(i)} \mathbb{C}^{*(i-1)}(t^{(j)}) : \ll \mathbb{A}^{(i)}(t^{(j)}) \gg_{Y_T} \quad (3.169)$$

où $\phi^{(i)}$ est la porosité du milieu intermédiaire de la $i^{\text{ème}}$ étape définie par :

$$\phi^{(i)} = \frac{\Delta\phi_i}{\phi_s + \sum_{j=1}^i \Delta\phi_j} \quad (3.170)$$

Dans l'approche des distributions diluées en déformation par exemple, on a :

$$\ll \mathbb{A}^{(i)}(t^{(j)}) \gg_{Y_T} = \left[\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{*(i-1)}(t^{(j)}) \right]^{-1} \quad (3.171)$$

avec

$$\mathbb{S}_E^{*(i-1)}(t^{(j)}) = a_E^{*(i-1)}(t^{(j)})\mathbb{J} + b_E^{*(i-1)}(t^{(j)})\mathbb{K}. \quad (3.172)$$

Les coefficients $a_E^{*(i-1)}$ et $b_E^{*(i-1)}$ s'expriment par analogie avec (3.167) et (3.168) en faisant intervenir les modules effectifs de l'étape précédente $k^{*(i-1)}(t^{(j)})$ et $\mu^{*(i-1)}(t^{(j)})$.

Dans l'approche d'Hashin-Shtrikman, on a :

$$\ll \mathbb{A}^{(i)}(t^{(j)}) \gg_{Y_T} = \left[\mathbb{I} - (1 - \phi^{(i)})\mathbb{S}_E^{*(i-1)}(t^{(j)}) \right]^{-1} \quad (3.173)$$

La procédure d'itérations sur les porosités est renouvelée jusqu'à l'injection de la totalité de la porosité voulue ϕ . Le comportement équivalent est obtenu à la dernière étape du processus ($i = n$) avec :

$$\mathbb{C}^{*(n)}(t^{(j)}) = \mathbb{C}^{*(n-1)}(t^{(j)}) - \phi^{(n)} \mathbb{C}^{*(n-1)}(t^{(j)}) : \ll \mathbb{A}^{(n)}(t^{(j)}) \gg_{Y_T} \quad (3.174)$$

avec

$$\phi^{(n)} = \frac{\Delta\phi_n}{\phi_s + \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j} \quad (3.175)$$

Le tenseur de Biot peut être alors estimé à la fin de ces itérations sur la porosité avec :

$$\mathbf{B}_d^{*(n)}(t^{(j)}) = \mathbf{1} - [\mathbb{C}_s^{sct}(t^{(j)})]^{-1} : \mathbb{C}^{*(n)}(t^{(j)}) : \mathbf{1}, \quad (3.176)$$

soit encore en isotrope :

$$\mathbf{B}_d^{*(n)}(t^{(j)}) = b_d^{*(n)}(t^{(j)}) \mathbf{1} = \left(1 - \frac{k^{*(n)}}{k_s^{sct}} \right) \mathbf{1}. \quad (3.177)$$

Le comportement effectif étant ainsi obtenu pour un pas de chargement $t^{(j)}$, on peut procéder à la seconde étape de la mise en œuvre de la méthode sécante classique conformément à l'algorithme (3.111) présenté à la section 3.2.3.1. L'équation non

linéaire satisfaite par la déformation effective équivalente donnée en (3.37) s'écrit alors :

$$t^{(j)} = \frac{1}{1 - \phi} \frac{\mu^{*(n)}(t^{(j)})}{\mu_s^{sct}(t^{(j)})} E_{eq} \quad (3.178)$$

D'où l'on déduit la déformation macroscopique équivalente associée à la déformation effective :

$$E_{eq} = t^{(j)}(1 - \phi) \frac{\mu_s^{sct}(t^{(j)})}{\mu^{*(n)}(t^{(j)})} \quad (3.179)$$

On peut alors construire un point sur la courbe de comportement macroscopique ($\Sigma = f(\mathbf{E})$) avec :

$$\Sigma_m = k^*(t^{(j)}) T_E E_{eq} - \left(1 - \frac{k^*(t^{(j)})}{k_s}\right) p \quad (3.180)$$

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu^*(t^{(j)}) E_{eq} \quad (3.181)$$

où T_E est le taux de triaxialité du chargement défini par (3.106).

La construction d'un nouveau point se fait en reprenant les mêmes étapes pour un nouvel incrément de charge $t^{(j+1)}$. Le processus itératif est initialisé à nouveau avec les caractéristiques du squelette :

$$\mathbb{C}^{*(0)}(t^{(j+1)}) = \mathbb{C}_s^{sct}(t^{(j+1)}). \quad (3.182)$$

L'opération d'itérations en porosité est répétée jusqu'à atteindre de nouveau la porosité ϕ . L'ensemble de la courbe contrainte-déformation macroscopique s'obtient en incrémentant le chargement $(t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(m)})$.

De façon similaire, le processus itératif peut être introduit dans l'approche duale pilotée en contrainte. Ainsi, en approche contrainte, le comportement du squelette est caractérisé par son tenseur de souplesse linéarisé par :

$$\mathbb{S}_s^{sct} = \mathbb{S}_s^{sct}(\bar{\sigma}_{eq}^1) \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma}_{eq}^1 = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}_d^1 : \bar{\sigma}_d^1} \quad (3.183)$$

A un pas de chargement mécanique $t^{(j)} = \bar{\sigma}_{eq}^1(j)$ donné, on initialise le processus itératif par :

$$\mathbb{S}^{*(0)} = \mathbb{S}_s^{sct}(t^{(j)}) \quad (3.184)$$

Par des ajouts successifs de faibles proportions de porosité $\Delta\phi_i$ aux divers milieux poreux intermédiaires et homogénéisation de ces milieux, on construit le comportement équivalent. Le comportement à une étape intermédiaire (i) s'écrit par :

$$\mathbb{S}^{*(i)}(t^{(j)}) = \mathbb{S}^{*(i-1)}(t^{(j)}) + \phi^{(i)} \mathbb{S}^{*(i-1)}(t^{(j)}) : \ll \mathbb{B}^{(i)}(t^{(j)}) \gg_{Y_T} \quad (3.185)$$

où \mathbb{B} désigne le tenseur de concentration introduit au chapitre 1.

Dans une approche en distribution diluée par exemple, le tenseur de concentration s'écrit :

$$\ll \mathbb{B}^{(i)}(t^{(j)}) \gg_{Y_T} = \left[\mathbb{Q}_E^{*(i-1)}(t^{(j)}) : \mathbb{S}^{*(i-1)}(t^{(j)}) \right]^{-1} \quad (3.186)$$

avec

$$\mathbb{Q}_E^{*(i)}(t^{(j)}) = \mathbb{C}^{*(i-1)}(t^{(j)}) : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_E^{*(i-1)}(t^{(j)}))$$

où $\mathbb{S}_E^{*(i-1)}(t^{(j)})$ est défini par la relation (3.172).

Le comportement équivalent pour un pas de chargement $t^{(j)}$ s'obtient à l'étape n à laquelle l'ensemble de la porosité a été introduit avec :

$$\mathbb{S}^{*(n)}(t^{(j)}) = \mathbb{S}^{*(n-1)}(t^{(j)}) + \phi^{(i)} \mathbb{S}^{*(n-1)}(t^{(j)}) : \ll \mathbb{B}^{(n)}(t^{(j)}) \gg_{Y_T} \quad (3.187)$$

et

$$\phi^{(n)} = \frac{\Delta\phi_n}{\phi_s + \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j}$$

De même, l'estimation du tenseur de Biot s'effectue à la fin des itérations qui s'exprime par :

$$\mathbf{B}_c^{*(n)}(t^{(j)}) = \mathbf{1} - [\mathbb{S}^{*(n)}(t^{(j)})]^{-1} : \mathbb{S}_s^{sct} : \mathbf{1}. \quad (3.188)$$

On peut alors calculer la contrainte macroscopique équivalente associée au chargement $t^{(j)}$ avec l'équation (3.49) :

$$t^{(j)} = \frac{1}{1 - \phi} \frac{\mu_s^{sct}(t^{(j)})}{\mu^{*(n)}(t^{(j)})} \Sigma_{eq} \quad (3.189)$$

D'où l'on déduit la contrainte macroscopique équivalente associée à la contrainte effective :

$$\Sigma_{eq} = (1 - \phi) t^{(j)} \frac{\mu^{*(n)}(t^{(j)})}{\mu_s^{sct}(t^{(j)})} \quad (3.190)$$

On positionne alors un point j sur la courbe de réponse macroscopique avec :

$$E_m = \frac{1}{k^*(t^{(j)})} [T_\Sigma \Sigma_{eq} + p \mathbf{B}_c^{*(n)}(t^{(j)})] \quad (3.191)$$

$$E_{eq} = \frac{1}{3 \mu^*(t^{(j)})} \Sigma_{eq} \quad (3.192)$$

où T_Σ est le taux de triaxialité du chargement en contrainte défini par (3.115). Le point suivant s'obtient par un incrément du chargement et réitération de l'ensemble de la procédure incluant le processus itératif sur la porosité.

De manière analogue, le processus itératif peut être aussi couplé à l'approche sécante modifiée, la boucle sur les porosités s'imbriquant dans celle sur le chargement.

3.3.1.2 Couplage avec l'approche sécante modifiée

Ainsi, pour un pas de chargement $t^{(j)} = \bar{\varepsilon}_{eq}^{2(j)}$, le processus itératif en porosité est utilisé pour construire le comportement homogène équivalent du milieu poreux.

La détermination du champ de déformation macroscopique associée au chargement $t^{(j)}$ passe par l'évaluation des diverses dérivées données par les relations (3.125), (3.126), (3.127). Comme précédemment ces dérivées sont estimées à convergence du processus

itératif avec :

$$A^{(n)}(t^{(j)}) = \frac{1}{3(1-\phi)} \frac{\partial k^{*(n)}(t^{(j)})}{\partial \mu_s^{sct}(t)} \quad (3.193)$$

$$B^{(n)}(t^{(j)}) = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{\partial \mu^{*(n)}(t^{(j)})}{\partial \mu_s^{sct}(t)} \quad (3.194)$$

$$C^{(n)}(t^{(j)}) = \frac{2}{k_s} A^{(n)}(t^{(j)}) \quad (3.195)$$

Nous reviendrons sur le calcul pratique de ces dérivées au paragraphe suivant.

Après l'évaluation de ces différents coefficients, on peut déterminer le champ de déformation par résolution de l'équation (3.124) :

$$t^{(j)} = [A^{(n)}(t^{(j)})E_m^2 + B^{(n)}(t^{(j)}) (E_{eq})^2 + p C^{(n)}(t^{(j)})E_m]^{\frac{1}{2}} \quad (3.196)$$

ou encore en introduisant le taux de triaxialité T_E :

$$[A(t^{(j)})T_E^2 + B(t^{(j)})] E_{eq}^2 + p C(t)T_E E_{eq} - (t^{(j)})^2 = 0 \quad (3.197)$$

Pour un taux de triaxialité fixé et une pression porale p fixée, on construit alors un point sur la courbe de réponse macroscopique avec :

$$\Sigma_m = k^*(t^{(j)}) T_E E_{eq} - \left(1 - \frac{k^*(t^{(j)})}{k_s}\right) p \quad (3.198)$$

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu^*(t^{(j)}) E_{eq} \quad (3.199)$$

Avant de nous intéresser à la mise en pratique de cette extension du processus itératif en non linéaire, nous nous proposons comme cela avait été fait au chapitre 2 en linéaire de discuter de la convergence du processus itératif en non linéaire.

3.3.1.3 Convergence asymptotique des prédictions en non linéaire

L'analyse de la convergence asymptotique des prédictions en élasticité linéaire à faible porosité a été menée au chapitre 2 en procédant à des développements limités selon la porosité au voisinage de 0 des modules équivalents explicites fournis par les méthodes d'homogénéisation linéaire telles que l'approximation des distributions diluées en approche déformation et en approche contrainte, la borne supérieure d'Hashin Shtrikman et le schéma autocohérent. Nous avons montré que les développements au premier ordre des différents modules de compression et de cisaillement équivalents au voisinage des faibles porosités sont identiques.

En non linéaire, une telle étude de convergence demande d'examiner les déformations ou contraintes effectives pour des porosités faibles obtenues par les différents schémas. On rappelle que les déformations effectives sont solutions des équations non linéaires (3.36)-(3.37) pour l'extension classique et (3.66)-(3.67) pour l'extension modifiée.

Puisqu'au voisinage des faibles porosités les modules de rigidité équivalents fournis par les différents schémas prédictifs linéaires sont identiques au 1^{er} ordre, on obtient donc immédiatement avec l'extension classique à partir de (3.36)-(3.37) des moyennes

des déformations sur le squelette par les différents modèles d'homogénéisation linéaire pour des milieux faiblement poreux asymptotiquement équivalentes.

Pour l'extension sécante modifiée, il convient d'examiner les développements asymptotiques des dérivées des modules effectifs. On vérifie aisément sur les formules (3.68-3.69) et (3.71-3.72) qui donnent les expressions de ces dérivées respectivement par l'approche des distributions diluées et par l'approche d'Hashin que l'on a par exemple :

$$\frac{\partial k^{*HS}}{\partial k_s^{sct}} = \frac{\partial k^{*DD}}{\partial k_s^{sct}} + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (3.200)$$

De sorte que les schémas linéaires d'homogénéisation conduisent à des estimations du moment d'ordre 2 des déformations pour des milieux de très faibles porosités asymptotiquement identiques.

On conçoit bien ainsi que le processus itératif qui procède à des homogénéisations de milieux à faible porosité, va permettre de réduire les écarts observés à la section 3.2 au paragraphe 3.2.4 sur les réponses macroscopiques non linéaires obtenues par les extensions sécantes des schémas linéaires.

3.3.2 Algorithme du couplage itératif

En pratique, la construction de la réponse homogénéisée non linéaire nécessite l'introduction de deux boucles imbriquées. La boucle externe porte sur le pas de chargement et la boucle interne nécessaire au processus itératif porte sur la porosité. L'organigramme du calcul est présenté à la *Figure 3.8* pour un chargement purement déviatorique par l'approche sécante classique (ASC) et par l'approche sécante modifiée (ASM).

Pour cette dernière méthode, le calcul des dérivées des modules équivalents par rapport au comportement du squelette est effectué à convergence du processus itératif de façon numérique. Pour un pas de chargement $t^{(j)}$ donné, on forme par exemple :

$$\frac{\partial \mu^{*(n)}(t^{(j)})}{\partial \mu_s^{sct}(t^{(j)})} = \frac{\mu^{*(n)}(t^{(j)}) - \mu^{*(n)}(t^{(j-1)})}{\mu_s^{sct}(t^{(j)}) - \mu_s^{sct}(t^{(j-1)})} \quad (3.201)$$

L'ensemble de ces procédures est implémenté sous "Matlab".

3.3.3 Applications à des milieux poreux non linéaires

Dans cette section, nous illustrons par quelques applications la méthodologie présentée précédemment qui couple les approches d'homogénéisation sécantes non linéaires et le processus itératif. La première application concerne le calcul du comportement effectif d'un milieu poreux dont le squelette présente une non-linéarité régie par la loi puissance décrite à la section 3.3.3.1.

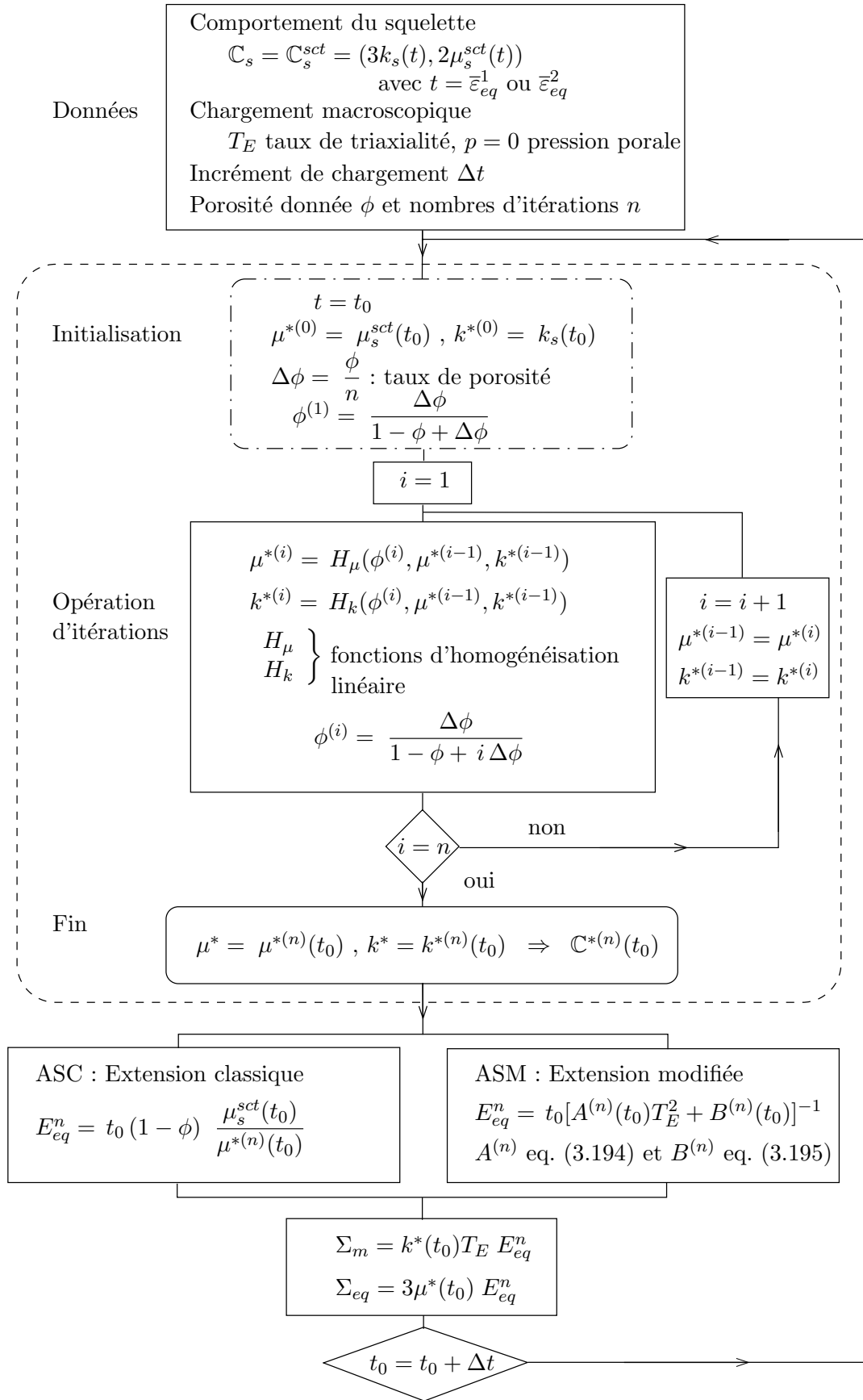


Figure 3.8 — Algorithme de mise en œuvre de l'extension non linéaire du processus itératif

3.3.3.1 Comportement effectif d'un milieu poreux avec une non linéarité du squelette en loi puissance

La loi de comportement du squelette retenue ici est la loi puissance donnée au paragraphe 3.2.3 par la relation (3.88). Elle est linéaire sous chargement hydrostatique et non linéaire avec une dépendance en loi puissance selon la déformation locale équivalente. On conserve les valeurs numériques adoptées à la section précédente pour les modules k_s et μ_s^0 . Différentes valeurs de porosité et du paramètre d'écroutissage seront testées. La pression porale est supposée nulle comme précédemment. Nous examinerons successivement la réponse du milieu sous différents cas de chargements, déviatorique, sphérique et couplé.

Chargement purement déviatorique ($T = 0$) :

Le comportement effectif est tout d'abord construit en couplant l'approche classique au processus itératif à chaque pas de chargement. On présente sur les *Figures 3.9-3.10* les évolutions de la contrainte équivalente macroscopique Σ_{eq} en fonction de la déformation équivalente macroscopique E_{eq} obtenues par l'approche sécante classique associée aux distributions diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) sans introduction du processus itératif ($i = 1$) et après introduction du processus itératif. Différents nombres d'itérations sont envisagés 1 (sans itération), 2, 10, 150 itérations, différentes porosités initiales sont considérées 30% (*Figure 3.9*, 60 et 80% (*Figures 3.10*), ainsi que différents coefficients d'écroutissage $m = 0.1, 0.5$. On observe sur la *Figure 3.9* que l'approximation des distributions diluées fournit comme déjà mentionnée deux prédictions différentes en approche déformations (DD) et en approche contrainte (DC) avant couplage du processus itératif ($i = 1$). Par des itérations successives les deux prédictions se rapprochent pour se superposer au bout de 150 itérations. Ainsi, on aboutit à convergence du processus à une même estimation de la loi macroscopique non linéaire contrainte-déformation par l'approche sécante classique couplée aux distributions diluées en déformation (DD) ou en contrainte (DC).

Pour des porosités importantes dépassant 60%, le processus itératif permet de corriger l'estimation de cette méthode d'homogénéisation en approche déformation qui fournit des prédictions du module de cisaillement non physiques. Sur la *Figure 3.10*, on constate en effet que pour les porosités de 60% et 80%, l'on ne retrouve plus après couplage du processus itératif les valeurs non physiques associées à l'approche déformation. Par itérations successives, on converge vers une estimation physiquement réaliste qui concorde avec celle de l'approche contrainte à convergence du processus itératif.

Nous nous intéressons maintenant aux prédictions fournies par l'extension sécante modifiée couplée au processus itératif, toujours sous chargement déviatorique.

La *Figure 3.11* représente les évolutions des contraintes équivalentes macroscopiques en fonction des déformations équivalentes obtenues pour le même jeu de paramètres par l'approche sécante modifiée associée aux approximations des distributions diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) sans couplage au processus itératif ($i=1$) et après couplage avec 2, 10 et 150 itérations. Ces deux estimations en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) éloignées avant itération ($i=1$) se rapprochent l'une de l'autre lorsque le nombre d'itérations augmente pour atteindre la convergence après 150 itérations. Les mêmes remarques que celle formulées pour l'extension classique peuvent être faites pour des porosités importantes.

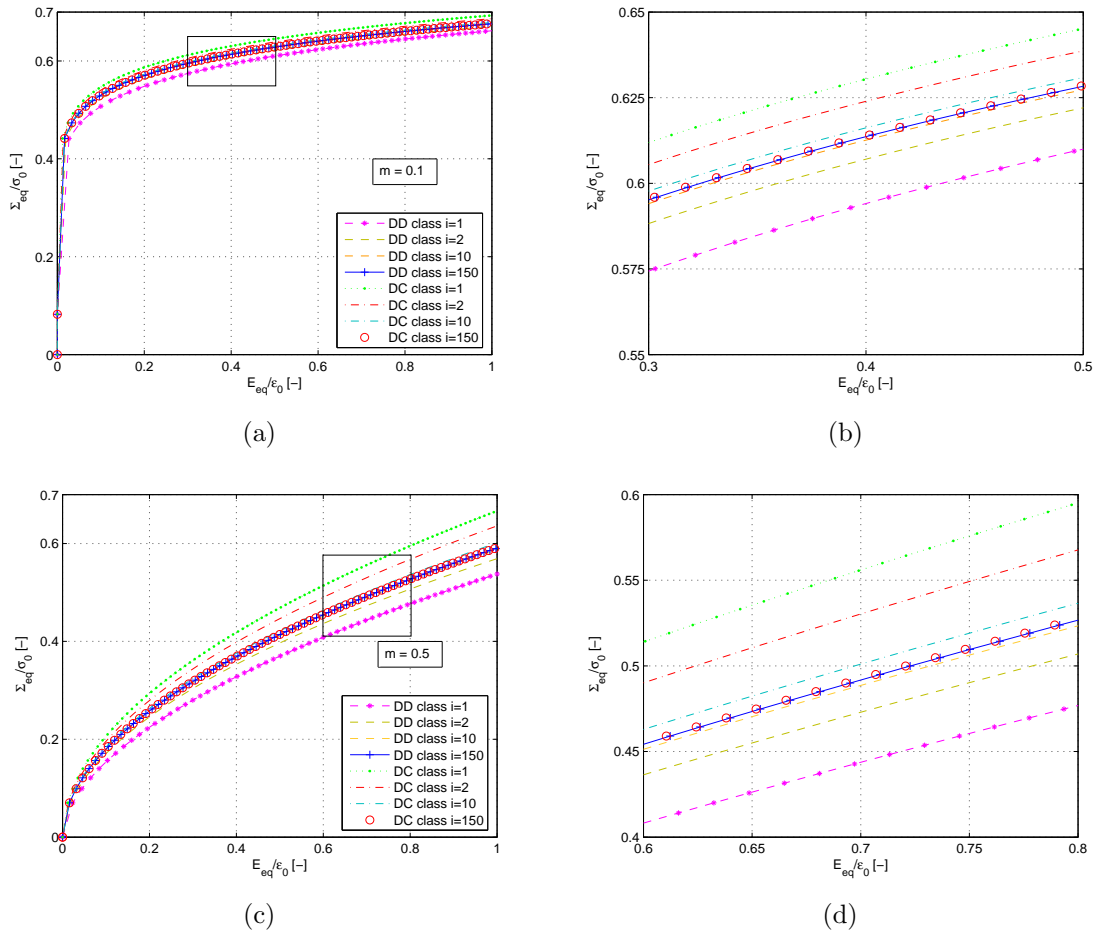


Figure 3.9 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées au processus itératif après 1, 2, 10 et 150 itérations. Porosité initiale de 30 % et $m = 0.1$ (a,b) et $m=0.5$ (c,d). Chargement purement déviatorique.

Le processus itératif permet donc également de corriger les estimations sécantes modifiées associées aux approximations diluées et conduit à convergence vers une même prédiction et ce même pour des taux de porosités importants.

Le couplage du processus itératif a donc été introduit avec succès pour corriger le comportement du milieu linéaire de comparaison par l'approche des distributions diluées. On procède maintenant au couplage du processus itératif à d'autres schémas prédictifs pour homogénéiser le milieu linéaire de comparaison. On itère ainsi sur la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS), le schéma autocohérent (AC) et le schéma autocohérent généralisé (3PH). On représente sur la *Figure 3.12* les évolutions non linéaires de la réponse à un chargement purement déviatorique par les extensions sécantes classique et modifiée non couplées et couplées au processus itératif (it) pour des porosités initiales de 40% et 70% et un paramètre d'écroutissage de 0.3. On observe que le processus itératif conduit à une prédiction non linéaire unifiée par les 3 schémas pour une approche sécante donnée, classique ou modifiée. Par contre les approches sécantes classique et modifiée itérées diffèrent. De plus, comme l'approche diluée en

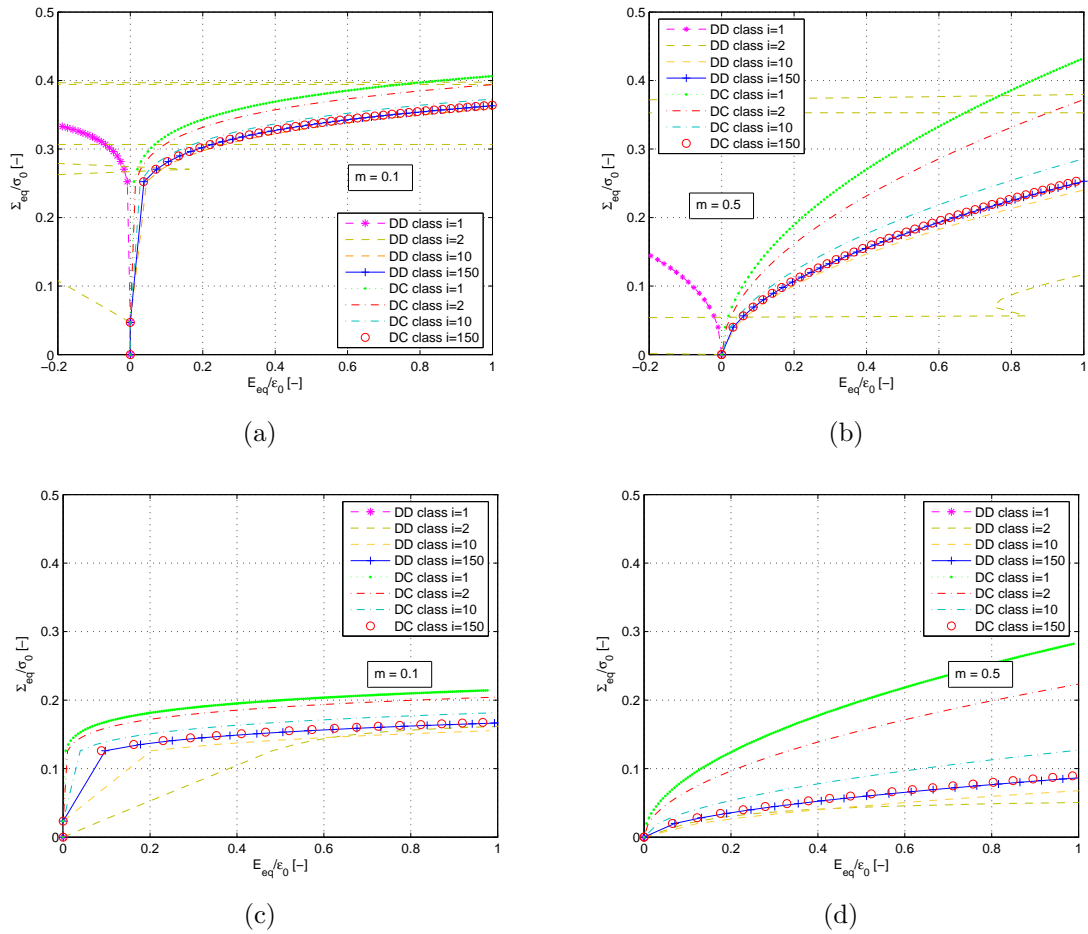


Figure 3.10 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées au processus itératif après 1, 2, 10 et 150 itérations. Porosité initiale de 60 % (a,b), 80 % (c,d) et $m = 0.1$ et 0.5 . Chargement purement déviatorique.

déformation (DD), le schéma autocohérent (AC) limité à des faibles taux peut fournir après itération des prédictions non linéaires pour des porosités dépassant 50%.

La Figure 3.13 résume toutes les évolutions non linéaires obtenues par les différentes estimations pour le matériau linéaire de comparaison pour une porosité initiale de 40% couplées ou non au processus itératif par les extensions sécantes classique (Figure 3.13(a)) et modifiée (Figure 3.13(b)). On conclut que, dans un chargement purement déviatorique, les approches classique et modifiée itérées conduisent à des prédictions unifiées quelque soit la méthode d'homogénéisation linéaire utilisée et la porosité du milieu. Par contre, les prédictions sont différentes à convergence suivant que la linéarisation a été effectuée par l'approche sécante classique ou modifiée. L'approche modifiée conduit pour cet exemple à un comportement effectif plus souple que l'approche classique.

Des applications avec d'autres valeurs du paramètre d'érouissage m sont présentées dans Smaoui et al. (Smaoui et al., 2007 [92]).

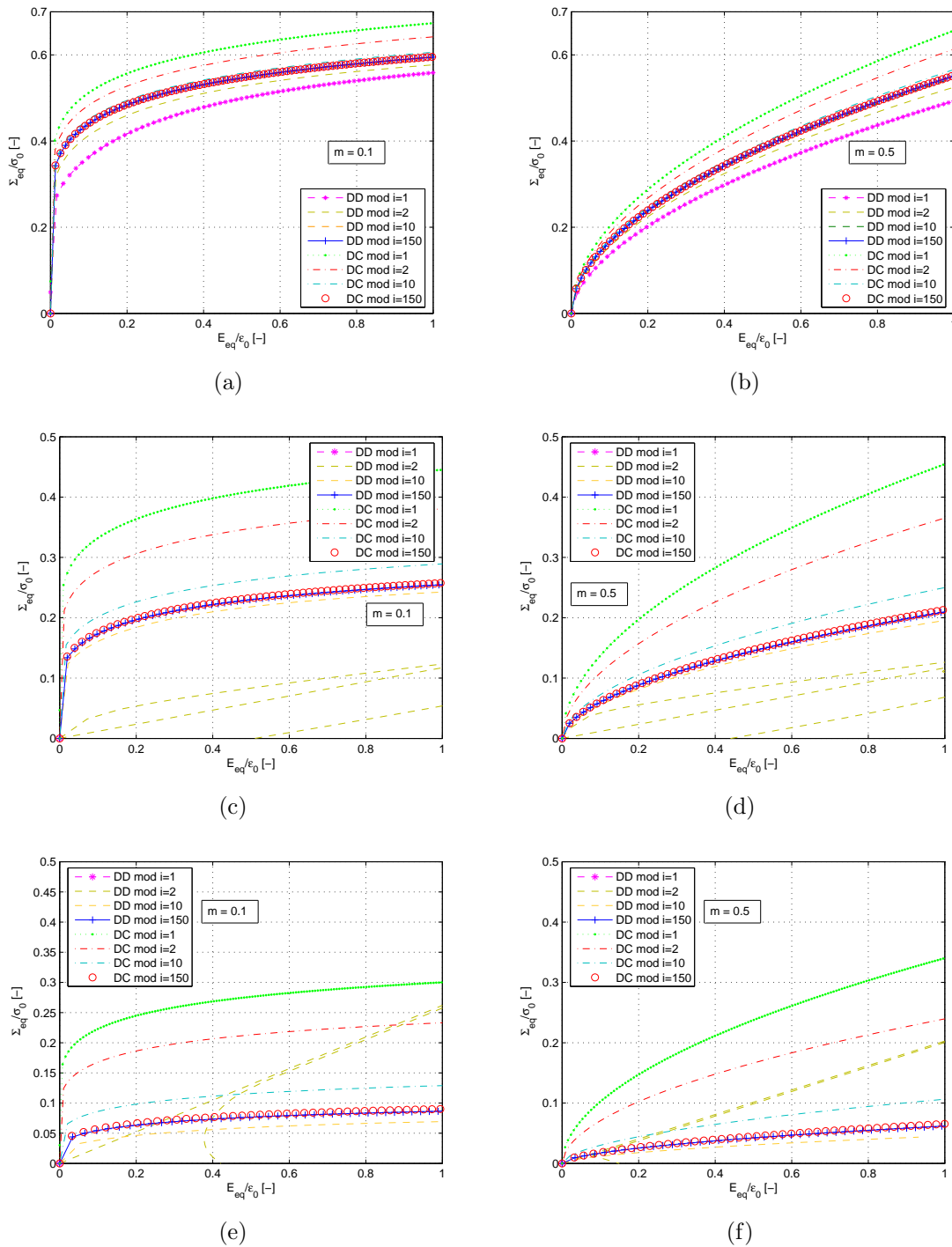


Figure 3.11 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante modifiée pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées au processus itératif après 1, 2, 10 et 150 itérations. Porosité initiale de 30 % (a,b), 60 % (c,d), 80 % (e,f), 80 % et $m = 0.1$ et 0.5. Chargement purement déviatorique.

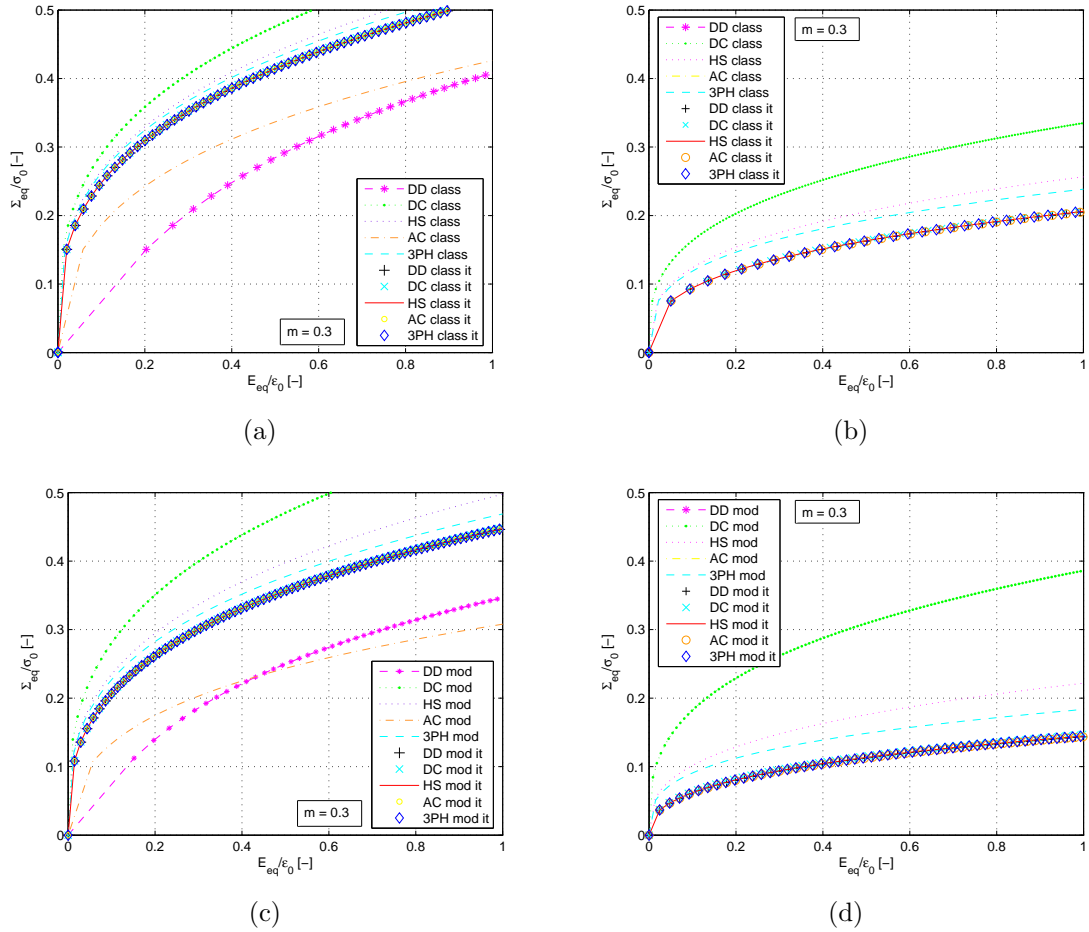


Figure 3.12 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes normalisées en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique et modifiée pour la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) et du schéma autocohérent des 3 phases (3Ph) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 40% (a,c) et 70% (b,d) et $m = 0.3$. Chargement purement déviatorique.

Chargement purement hydrostatique ($T \rightarrow \infty$) :

Considérons à présent le cas d'un chargement purement hydrostatique tel que $E_{eq}=0$ et toujours avec une pression de pore nulle. Nous avons signalé que dans le cas d'un squelette de comportement linéaire sous chargement hydrostatique et non linéaire en cisaillement, l'extension sécante classique ne peut fournir de réponse non linéaire. Seule l'extension sécante modifiée permet d'obtenir des prédictions non linéaires sous ce type de chargement ; c'est donc cette extension qui est couplée au processus itératif.

On présente sur la *Figure 3.14* les évolutions des contraintes hydrostatiques en fonction des déformations volumiques obtenues par l'extension sécante modifiée associée aux approches des distributions diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) pour des porosités initiales variées ($\phi = 0.2, 0.4, 0.6$ et 0.8) et un paramètre d'écroutissage de $m = 0.2$. Comme précédemment, différents nombres d'itérations sont considérés 1 (sans itération), 2, 10, 20, 200 itérations. On constate que les prédictions non linéaires associées à l'approche diluée déformation (DD) non couplée au processus itératif sont non physiques et restent non physiques pour des nombres

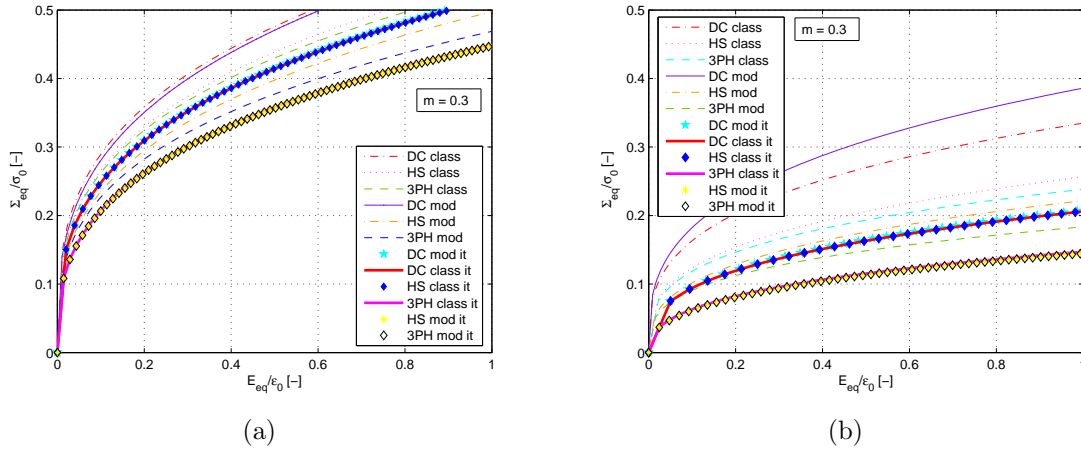


Figure 3.13 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes normalisées en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique et modifiée pour la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) et du schéma autocohérent des 3 phases (3Ph) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 40% (a) et 70% (b) et $m = 0.3$. Chargement purement déviatorique.

d'itérations faibles ($i = 2, 10, 20$). A convergence du processus, les deux prédictions (DD) et (DC) obtenues par l'extension sécante modifiée se superposent ici au bout de 200 itérations et ce même pour des porosités très importantes telles que 0.6 et 0.8.

Le processus itératif est aussi couplé aux prédictions obtenues par l'extension sécante modifiée associée à la borne supérieure d'Hashin et Shtrikman et au schéma autocohérent pour le milieu linéaire de comparaison. On trace ainsi sur la *Figure 3.15* les estimations des contraintes hydrostatiques en fonction des déformations volumiques obtenues par l'extension sécante modifiée associée aux distributions diluées en déformation (DD) ou en contrainte (DC), à la borne supérieure d'Hashin (HS) et Shtrikman et au schéma autocohérent (AC) pour les mêmes paramètres que précédemment. Par les opérations d'itérations successives, les prédictions non linéaires se rapprochent les unes des autres pour concorder au bout de 200 itérations. Comme déjà mentionné, les prédictions associées à l'approche autocohérente (AC) non couplée au processus itératif sont non physiques et ne sont pas présentées sur les figures pour des porosités dépassant 50%. Mais en revanche, on peut obtenir des prédictions non linéaires unifiées physiques sous des porosités importantes avec les modèles d'Hashin Shtrikman et autocohérent. On peut donc conclure que par le processus itératif nous sommes parvenus à unifier les prédictions non linéaires obtenues par l'extension sécante modifiée associée à différents milieux linéaires de comparaison pour un chargement purement hydrostatique et pour des porosités quelconques même élevées.

Chargement couplé ($T \neq 0$) :

On rappelle qu'un chargement quelconque a été caractérisé par le taux de triaxialité en contrainte macroscopique T_Σ qui relie la partie sphérique et déviatorique par la relation (3.115). Deux valeurs de ce taux de triaxialité $T_\Sigma = 1/3$ et $T_\Sigma = 3$ sont retenues pour ces applications. On présente tout d'abord sur la *Figure 3.16* les réponses macroscopiques obtenues par les approches sécante classique et sécante modifiée appliquées aux distributions diluées en contrainte (DC) et au modèle de Hashin Shtrikman (HS)

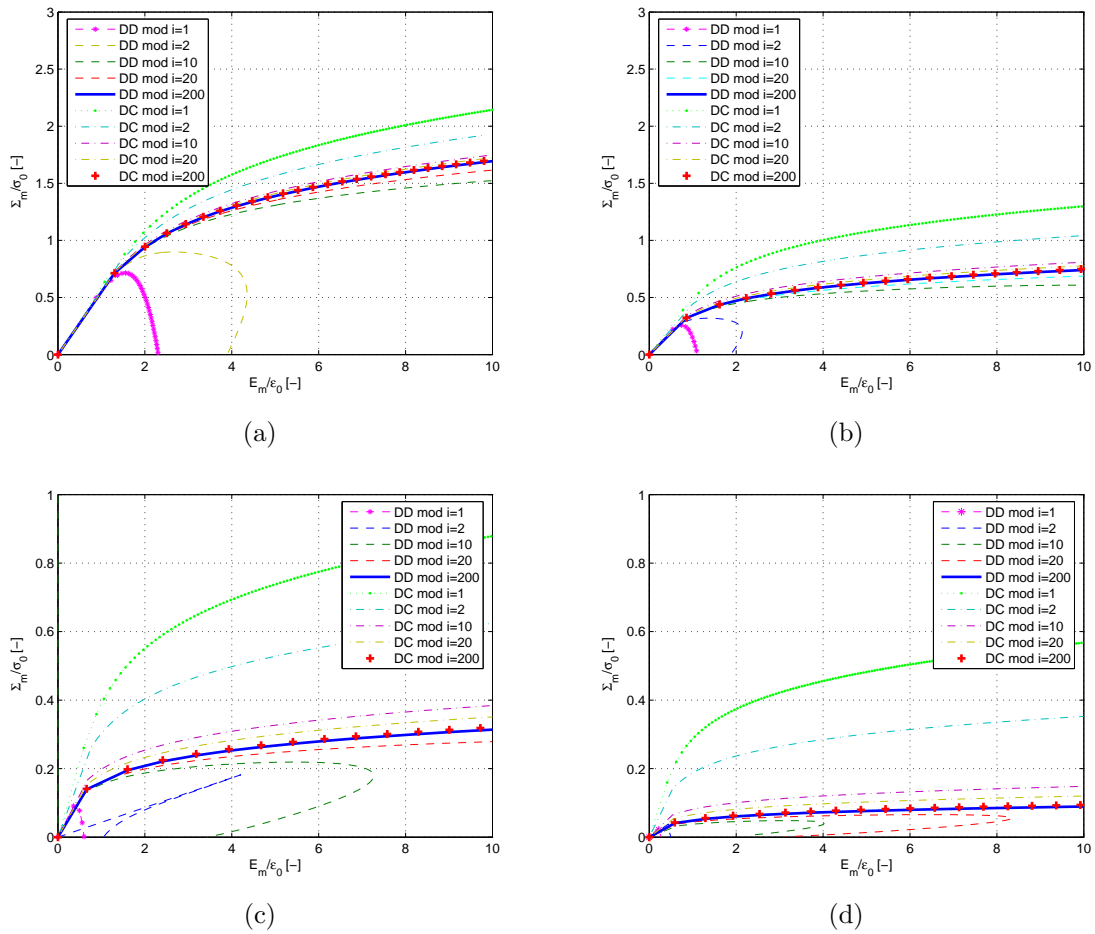


Figure 3.14 — Évolutions des contraintes sphériques normalisées en fonction des déformations volumiques obtenues par l'approche sécante modifiée pour l'approche diluée déformation (DD), diluée contrainte (DC), couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 20% (a), 40% (b) 60% (c) et 80% (d) et paramètre d'écroutissage $m=0.2$. Chargement purement hydrostatique.

couplé ou non au processus itératif pour un taux de triaxialité de $1/3$.

On constate que pour ce cas de chargement, l'extension sécante classique fournit une réponse sphérique non linéaire, la partie déviatorique du chargement macroscopique étant non nulle, cela permet de déterminer la déformation effective locale du squelette. Le processus itératif unifie les réponses sphérique et déviatorique comme précédemment pour les chargements découplés de cisaillement et de compression. On peut remarquer par ailleurs que les courbes contrainte-déformation équivalente par l'extension sécante classique sont les mêmes que celles trouvées en chargement purement déviatorique (Figure 3.13) conformément à ce que l'on peut voir sur l'algorithme (3.111), le taux de triaxialité intervenant uniquement sur la partie sphérique de la réponse. Ce n'est pas le cas avec l'extension sécante modifiée.

Des commentaires analogues peuvent être faits sur la Figure 3.17 qui présente les mêmes évolutions pour un taux de triaxialité $T_\Sigma = 3$. On retrouve bien une réponse sphérique macroscopique de l'ordre de trois fois la réponse déviatorique.

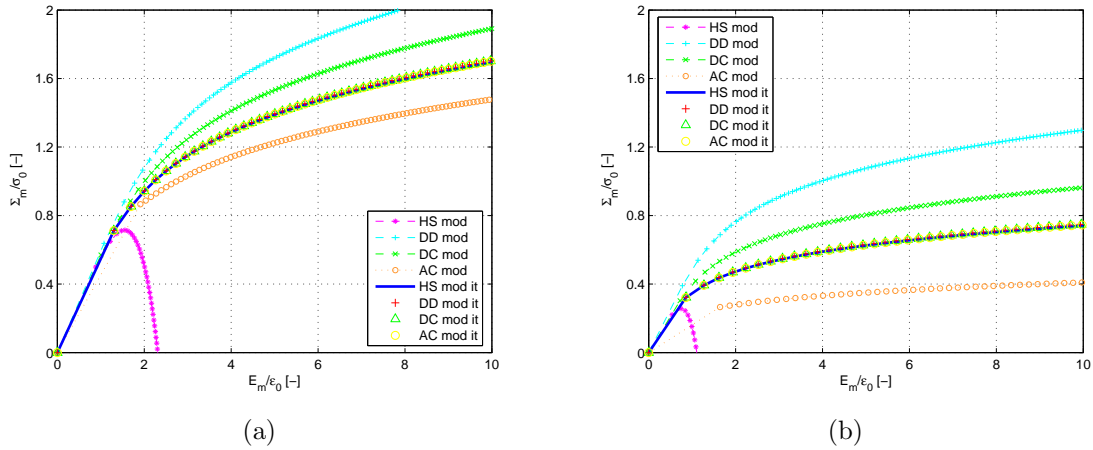


Figure 3.15 — Évolutions des contraintes sphériques normalisées en fonction des déformations volumiques obtenues par l'approche sécante modifiée pour l'approche diluée déformation (DD), diluée contrainte (DC), la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) et le schéma autocohérent (AC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 20% (a) et 40% (b) et paramètre d'écoulement $m=0.2$. Chargement purement hydrostatique.

3.3.3.2 Comportement effectif d'un milieu poreux à squelette élastoplastique

Dans cette application, nous considérons maintenant un squelette qui présente un comportement élastoplastique. Nous avons choisi un modèle de plasticité isotrope de type Hencky. On rappelle que la description classique d'un comportement élastoplastique repose sur la décomposition de la déformation en sa partie plastique et sa partie élastique et la définition d'un critère de plasticité, d'une loi d'écoulement et d'une loi d'écoulement. On note classiquement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y) = \boldsymbol{\varepsilon}^{el}(y) + \boldsymbol{\varepsilon}^p(y) \quad (3.202)$$

Pour un milieu isotrope, on a :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{el}(y) = \frac{1}{3k_s} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(y)) \mathbf{1} + \frac{1}{2\mu_s} \mathbf{e}^{el}(y) \quad (3.203)$$

Le modèle de Hencky, dit aussi "théorie de la déformation", consiste à négliger la nature incrémentale de la plasticité et à remplacer l'équation d'évolution de la déformation plastique par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p(y) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{eq}} h(\sigma_{eq}) \mathbf{s}(y) \quad (3.204)$$

où $\mathbf{s}(y)$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, σ_{eq} la contrainte équivalente de Von Mises et h est une fonction de σ_{eq} caractéristique de l'écoulement telle que :

$$\begin{cases} h(\sigma_{eq}) > 0 & \text{si } \sigma_{eq} > \sigma_y \\ h(\sigma_{eq}) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.205)$$

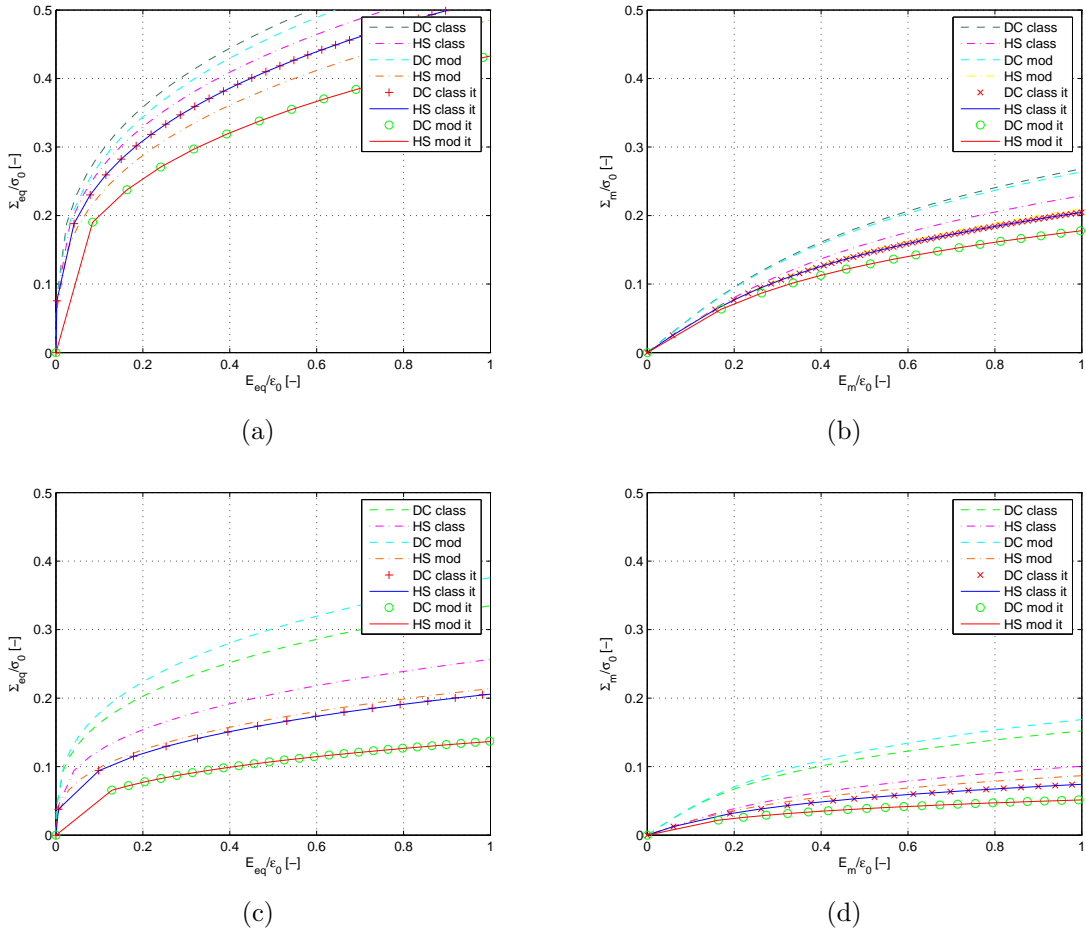


Figure 3.16 — Évolutions de la contrainte équivalente normalisée en fonction des déformations équivalentes (a,c) et de la contrainte sphérique en fonction des déformations volumiques (b,d) obtenues par les méthodes sécantes classique et modifiée appliquées à l'approche diluée en contrainte (DC) et l'approche de Hashin Shtrikman (HS) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale 40% (a,b) et 70% (c,d), paramètre d'écroissance $m=0.3$. Chargement couplé avec $T_{\Sigma} = 1/3$.

σ_y étant la limite d'élasticité du matériau.

De sorte que la loi de comportement du squelette s'écrit en combinant (3.202), (3.203) et (3.204) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(y) = \frac{1}{3k_s} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}(y)) \mathbf{1} + \left[\frac{1}{2\mu_s} + \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma_{eq}} h(\sigma_{eq}) \right] \mathbf{s}(y) \quad (3.206)$$

La loi d'écroissance retenue ici est une loi puissance suivant le modèle de Ramberg-Osgood (Suquet, 1997 [97]) soit :

$$h(\sigma_{eq}) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{\sigma_{eq}}{\varepsilon_0} \right)^n \quad (3.207)$$

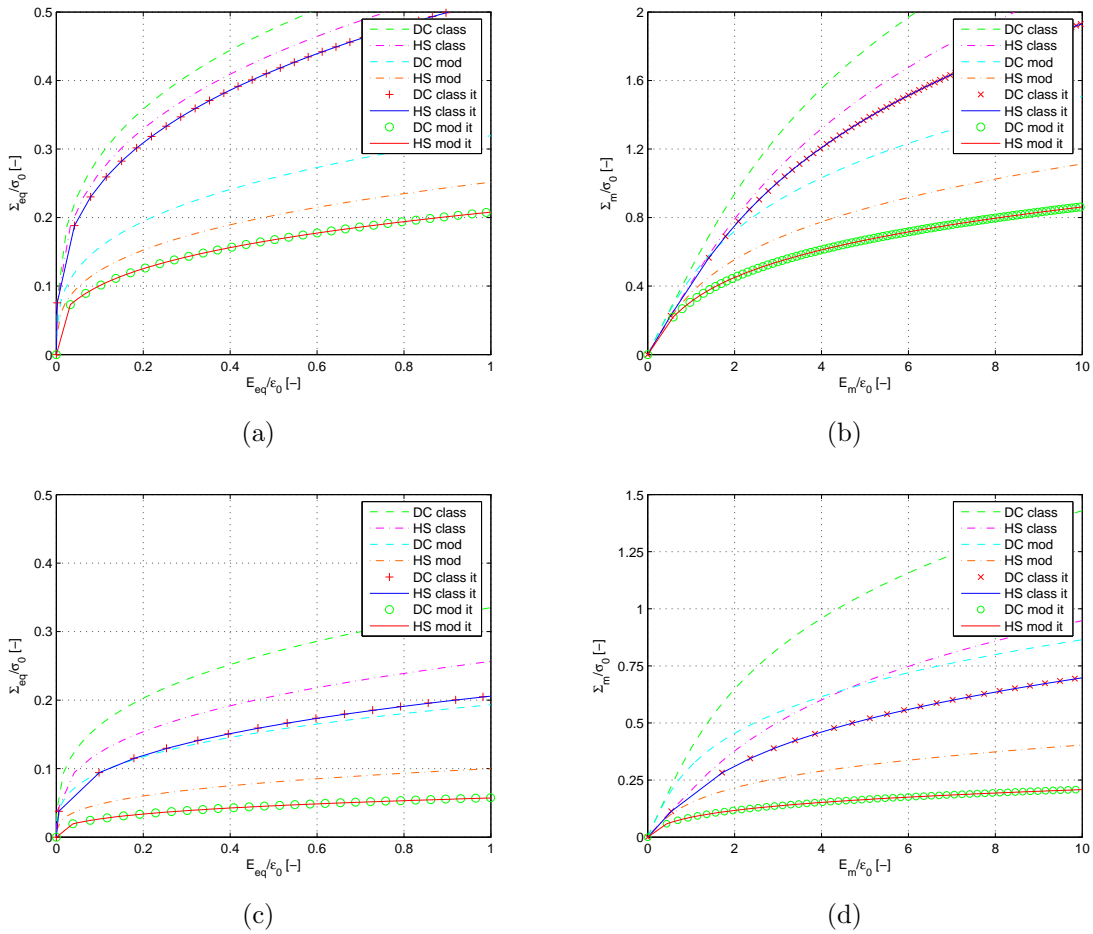


Figure 3.17 — Évolutions de la contrainte équivalente normalisées en fonction des déformations équivalentes (a,c) de la contrainte sphérique en fonction des déformations volumiques (b,d) obtenues par les méthodes sécantes classique et modifiée appliquées à l'approche diluée en contrainte (DC) et l'approche de Hashin Shtrikman (HS) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale 40% (a,b) et 70% (c,d), paramètre d'écroissance $m=0.3$. Chargement couplé avec $T_\Sigma = 3$.

De sorte que la décomposition en partie sphérique et déviatorique de (3.206) s'écrit :

$$\varepsilon_m = \frac{1}{k_s} \sigma_m \quad \text{et} \quad \varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{3\mu_s} + \varepsilon_0 \left(\frac{(\sigma_{eq} - \sigma_y)^+}{\sigma_0} \right)^n \quad (3.208)$$

où σ_0 une contrainte d'écoulement, ε_0 une déformation de référence, n un coefficient d'écroissance et où l'on a introduit la notation $(\cdot)^+$ pour la partie positive de la quantité entre parenthèse. On notera comme précédemment m le paramètre donné par $m = 1/n$ avec $(0 \leq m \leq 1)$. Ce comportement élastoplastique est représenté sur la *Figure 3.18* pour différents coefficients d'écroissance.

Pour les applications qui suivent, nous avons conservé les mêmes valeurs pour les propriétés élastiques k_s et μ_s du squelette données en (3.155). La contrainte seuil d'élasticité σ_y est prise égale à $3\mu_s$ et le rapport de la contrainte et de la déformation de référence σ_0/ε_0 égal à 0.1 MPa.

Nous présentons dans ce qui suit les réponses macroscopiques de milieux poreux

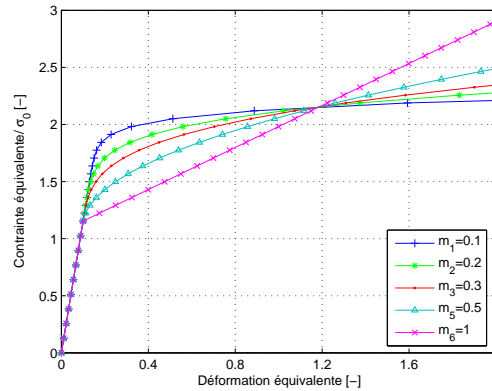


Figure 3.18 — Comportement non linéaire du squelette suivant le modèle de Ramberg-Osgood.

sous chargement purement déviatorique obtenues par les extensions sécantes couplées ou non au processus itératif.

Le processus itératif est tout d'abord couplé aux extensions sécantes classique et modifiée associées aux approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC). Sur la *Figure 3.19* sont ainsi présentées les prédictions des contraintes macroscopiques équivalentes en fonction des déformations équivalentes au sens de Von Mises par l'approche sécante classique associée à l'approximation diluée couplée au processus itératif, sans couplage du processus itératif ($i = 1$) et après 2, 10 jusqu'à 150 itérations. Comme observé avec un squelette présentant une loi de comportement de type puissance, le processus itératif conduit à convergence à une même prédiction du comportement équivalent par les deux approches diluées. Pour des porosités très élevées comme par exemple 80%, plus de 150 itérations sont nécessaires pour obtenir la convergence. Des résultats analogues s'observent et avec l'approche modifiée sur la *Figure 3.20*.

Les extensions sécantes classique et modifiée associées cette fois à d'autres schémas d'homogénéisation pour le milieu linéaire de comparaison, la borne supérieure d'Hashin Shtrikman (HS), le schéma autocohérent (AC) et le schéma de trois phases (3PH) sont également couplées au processus itératif sur les *Figures 3.21* et *3.22*. On parvient là encore à convergence du processus itératif à des estimations unifiées avec l'approche sécante classique et l'approche sécante modifiée quelque soit le schéma d'homogénéisation linéaire utilisé et quelque soit le taux de porosité du milieu.

Des résultats analogues s'observent sous chargement hydrostatique ou encore couplé et ne sont pas présentés pour alléger la présentation.

En conclusion, nous avons mis en œuvre, au travers de ces diverses applications menées sur des milieux poreux avec un squelette gouverné par un comportement en loi puissance ou en loi élastoplastique, une méthode d'homogénéisation non linéaire itérative. Cette méthode, basée sur le couplage des extensions sécantes classique et modifiée avec un processus d'homogénéisation itératif, a été testée sous des chargements macroscopiques découplés, purement déviatorique ou purement hydrostatique ou couplé

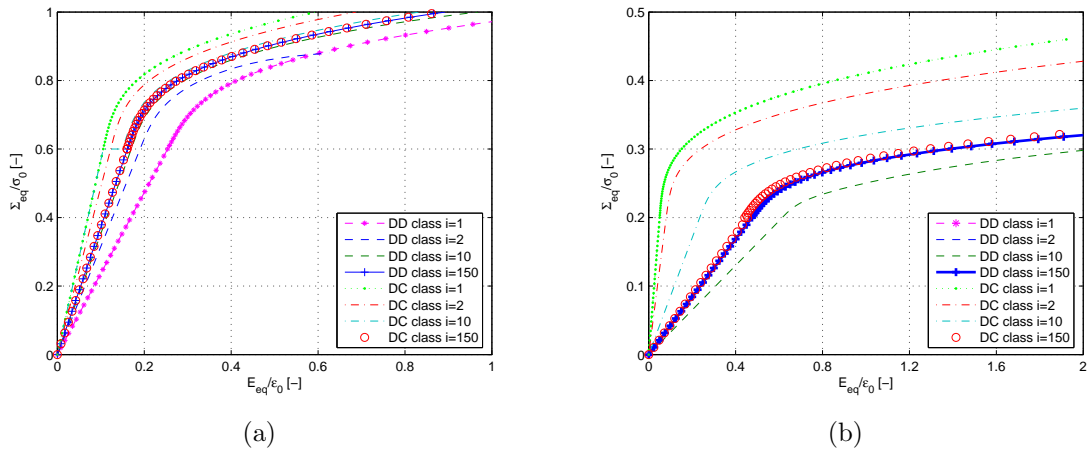


Figure 3.19 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 40 % (a), 80 % (b) et paramètre d'écroutissage $m=0.3$. Chargement purement déviatorique.

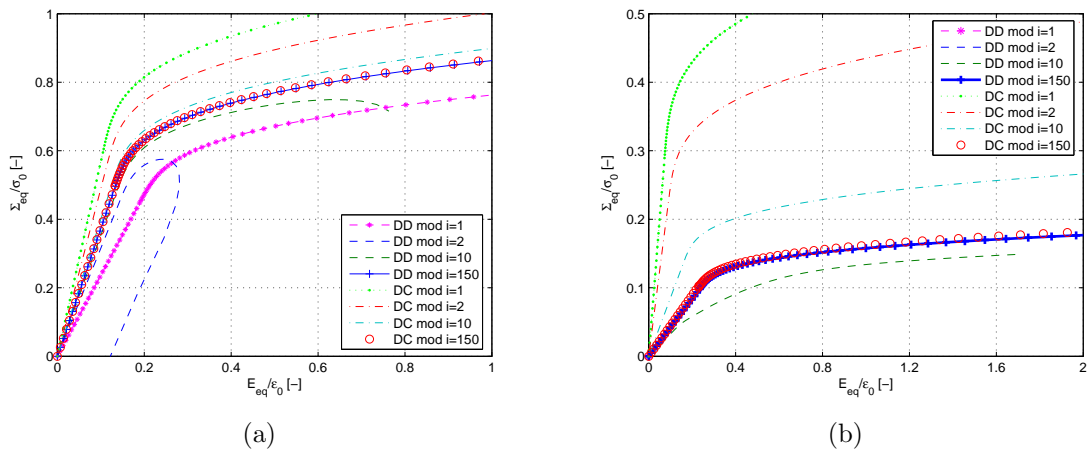


Figure 3.20 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante modifiée pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 40 % (a), 80 % (b) et paramètre d'écroutissage $m=0.3$. Chargement purement déviatorique.

avec succès. Elle a permis d'unifier les prédictions non linéaires obtenues par l'approche sécante classique et également d'unifier les estimations obtenues avec l'extension sécante classique modifiée quelque soit le schéma d'homogénéisation adapté pour le milieu linéaire de comparaison et ce même pour des porosités élevées.

Afin de s'assurer de la validité de la modélisation proposée dans ce chapitre et de sa mise en œuvre numérique, nous avons procédé à des confrontations avec différents résultats issus de la littérature. Ces confrontations sont menées sur des milieux composites biphasés et des milieux poreux.

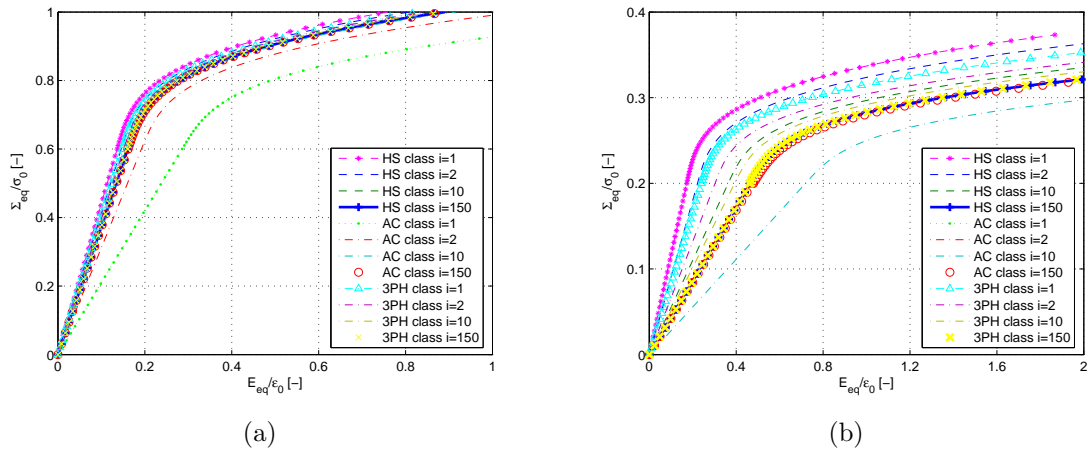


Figure 3.21 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante classique pour les approximations diluées en approche déformation (DD) et en approche contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 20 % (a), 60 % (b) et paramètre d'écroutissage $m=0.3$. Chargement purement déviatorique.

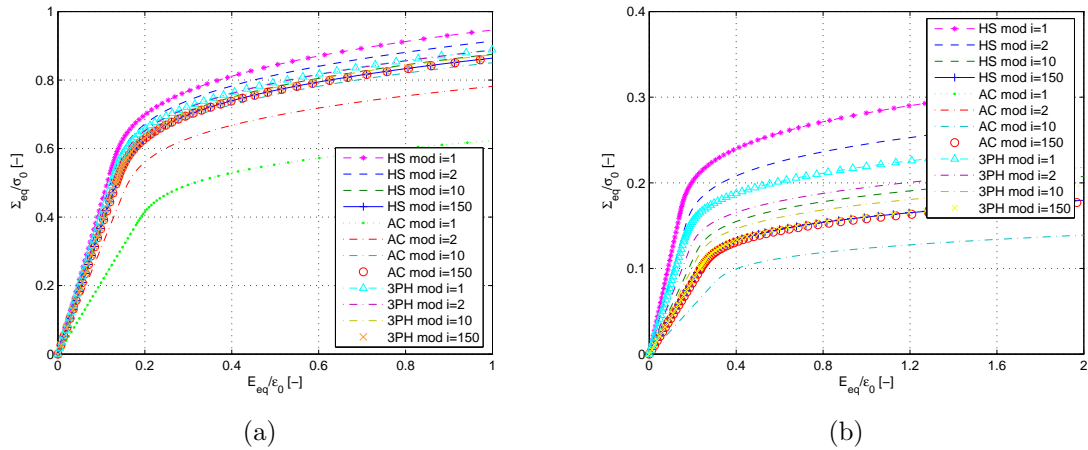


Figure 3.22 — Évolutions des contraintes déviatoriques équivalentes en fonction des déformations déviatoriques par l'approche sécante modifiée pour la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) et le schéma autocohérent (AC) couplées ou non au processus itératif. Porosité initiale de 20 % (a), 60 % (b) et paramètre d'écroutissage $m=0.3$. Chargement purement déviatorique.

3.3.4 Confrontations à d'autres approches de la littérature

On trouve dans la littérature récente différentes illustrations des méthodes d'homogénéisation non linéaires sur des composites à renforts élastiques. On peut citer les applications menées par Ponte Castañeda par l'approche variationnelle, qui apparaît équivalente à la méthode sécante modifiée, développée pour des matériaux laminés (Ponte Castañeda, 1991 [83], 1992 [84]) ou encore à renforts de fibres (deBotton et Ponte Castañeda, 1995 [33]), ainsi que les applications menées sur des composites à renforts sphériques par Li et Ponte Castañeda (Li et Ponte Castañeda, 1993 [74], 1994 [75]), Suquet (Suquet, 1993 [94], 1996 [96]) ou encore Rekik et al. (Rekik et al., 2006

[89]). Parmi ces résultats nous avons choisi de confronter tout d'abord notre approche itérative à certains tests réalisés par Suquet, puis par Rekik et al. sur des composites biphasés.

La procédure itérative non linéaire développée jusqu'à présent dans le cas de milieux poreux a donc été, pour ces confrontations, étendue pour permettre de prédire la réponse contrainte-déformation de matériaux composites constitués d'une matrice non linéaire et de renforts élastiques.

3.3.4.1 Confrontation aux travaux de Suquet [96], [97]

Le composite étudié dans cette application est constitué d'une matrice au comportement non linéaire régi par une loi puissance et de renforts élastiques linéaires de géométrie sphérique. La matrice et les renforts sont considérés incompressibles de sorte que les caractéristiques des deux phases sont données par les modules de cisaillement suivants :

$$\mu_i = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0^{(i)}}{\varepsilon_0^{(i)}}, \mu_m = \frac{\sigma_0^{(m)}}{3\varepsilon_0^{(m)}} \left(\frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_0^{(m)}} \right)^{m_m-1}$$

avec $\frac{\sigma_0^{(i)}}{\sigma_0^{(m)}} = 5$, $m_m = 0.1$, et $\varepsilon_0^{(i)} = \varepsilon_0^{(m)} = \varepsilon_0$

où l'indice i se rapporte à l'inclusion et l'indice m à la matrice. Le taux de renforts est fixé à 30%.

Suquet (Suquet, 1996 [96]) a comparé le comportement effectif de ce milieu sous chargement de traction uniaxiale obtenu pour l'approche sécante classique (SE) couplé au schéma des trois phases pour l'homogénéisation du composite linéaire de comparaison, l'approche variationnelle (VE) développée par Ponte Castañeda (Ponte Castañeda, 1991 [83]) et une approche numérique basée sur une résolution par éléments finis du problème d'homogénéisation non linéaire (FEM). Ces résultats sont présentés à la *Figure 3.23(d)* à travers l'évolution de la contrainte équivalente en fonction de la déformation équivalente. Les comportements de la matrice (M) et des renforts (P) sont également tracés. L'approche variationnelle, qui coïncide par ailleurs avec l'approche sécante modifiée d'après les travaux de Suquet (Suquet, 1995 [95]), apparaît en bon accord avec l'approche numérique.

Sur la *Figure 3.23(c)*, nous présentons en parallèle l'évolution obtenue par notre approche en couplant ou non le processus itératif aux méthodes sécantes classique et modifiée appliquées à l'approche des distributions diluées en contrainte (DC) et au schéma des trois phases (3PH). Cette confrontation permet de nous assurer tout d'abord de la bonne mise en œuvre de la procédure d'extension sécante en non linéaire que nous avons réalisée dans la mesure où nous retrouvons bien avant couplage du processus itératif le comportement obtenu par Suquet par les approches sécantes classique et modifiée. Par ailleurs, l'assouplissement du comportement obtenu par le couplage au processus itératif va bien dans le sens de la prédiction éléments finis qui peut servir de référence. Le processus itératif permet de cette manière d'apporter une correction aux méthodes sécantes non linéaires. Cette correction apportée par les itérations est plus importante sur l'approche sécante classique que sur l'approche sécante modifiée.

De plus, cette correction dépend de la représentation de la microstructure sous-jacente

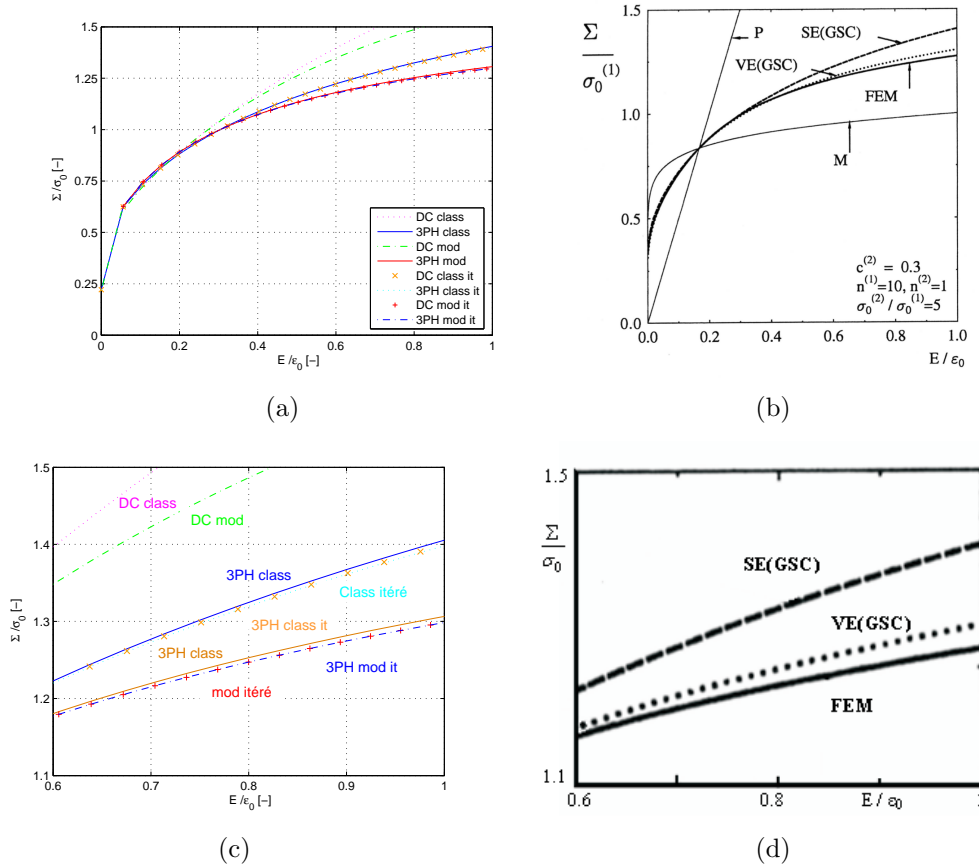


Figure 3.23 — (a) Courbes de traction macroscopiques obtenues par les approches sécantes classique et modifiée appliquées au schéma d'Hashin Shtrikman (HS) et dilué contrainte (DC) couplées ou non au processus itératif (b) Courbes de traction macroscopiques obtenues par l'approche sécante classique (SE), variationnelle (VE), éléments finis (FEM) appliquées au schéma autocohérent (Résultats de Suquet, 1996 [96]) (c) et (d) zoom respectif.

au schéma d'homogénéisation linéaire adopté. Ainsi la correction apportée par les itérations au comportement fourni par les méthodes des distributions diluées est plus importante que pour l'approche des trois phases retenue justement par Suquet pour ses performances. Enfin, bien que le résultat ne soit pas très prononcé ici, on peut dire que l'approche sécante modifiée avec le schéma des trois phases est plus proche du résultat éléments finis après itération que sans itération. Le taux de renforts de 30% retenu ici étant relativement faible, cela peut expliquer que la correction apportée par l'itératif semble peu significative.

Une seconde confrontation a été menée avec une autre application test de Suquet (Suquet, 1997 [97]). Il s'agit cette fois de composites à renforts sphériques avec une matrice élastoplastique régie par la loi de Ludwik modifiée. Ce comportement s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{3\mu_m} + \left(\frac{\sigma_{eq} - \sigma_y}{A} \right)^{\frac{1}{n}} \quad ; \quad \varepsilon_m = \frac{1}{k_m} \sigma_m \quad (3.209)$$

où k_m et μ_m sont les modules élastiques de la matrice et où n et A sont des paramètres caractéristiques de l'écroutissage.

Pour cette application, les valeurs retenues pour les paramètres matériaux sont :

$$E_i = 400 \text{ GPa}, \nu_i = 0.2,$$

$$E_m = 75 \text{ GPa}, \nu_m = 0.3, A = 416 \text{ MPa}, n = 0.3895 \text{ et } \sigma_y = 75 \text{ MPa}$$

Le taux de renfort est fixé à 30%.

On s'intéresse au comportement de ce milieu composite sous chargement de traction uniaxiale. Notre approche itérative couplée ou non aux extensions sécantes associées aux distributions diluées en approche contrainte (DC), à la borne inférieure d'Hashin et Shtrikman (HS) et au schéma des trois phases (3PH) est présentée sur la *Figure 3.24(a)*. Elle est confrontée aux calculs menés par Suquet avec les extensions sécantes classique (SE), l'approche variationnelle (VE) et l'approche incrémentale (IE) couplées à la borne inférieure de Hashin-Shtrikman, ainsi qu'avec un calcul par éléments finis (FEM) présentés sur la *Figure 3.24(b)*.

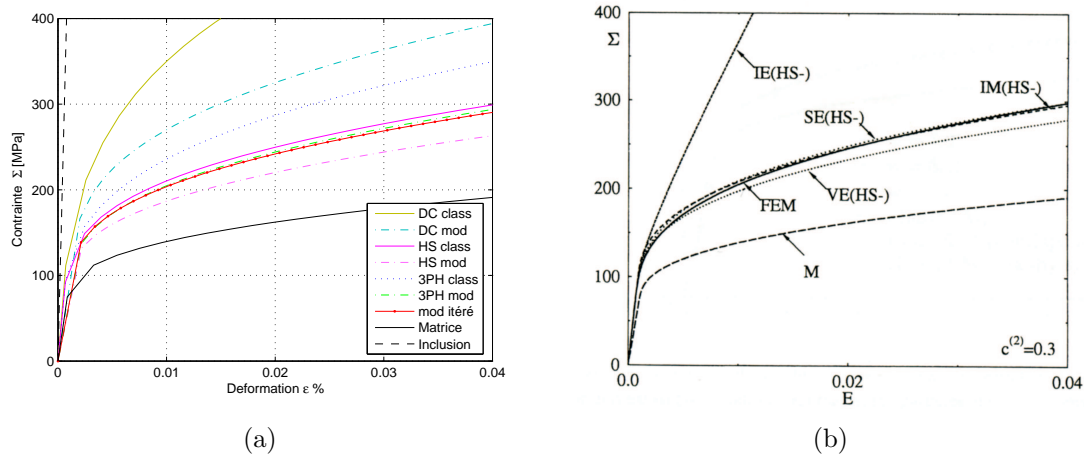


Figure 3.24 — (a) Courbes de traction macroscopiques obtenues par l'approche sécante classique et modifiée appliquées au schéma des distributions diluées en contrainte (DC), à la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman (HS) et au schéma des trois phases (3PH) couplées ou non au processus itératif (b) Courbes de traction macroscopiques obtenues par l'approche sécante classique (SE), variationnelle (VE), incrémentale (IE) et incrémentale avec écrouissage (IM) appliquée à la borne inférieure d'Hashin Shtrikman (Résultats de Suquet, 1997 [97]).

Suquet a constaté cette fois que l'approche modifiée (VE) associée à la borne inférieure de Hashin-Shtrikman a tendance à sous-estimer le comportement obtenu numériquement (FEM), alors que l'approche classique (SE) ou incrémentale (IM) reproduisent de façon précise ce comportement. On peut observer tout d'abord par confrontation avec la *Figure 3.24(a)* que l'utilisation du modèle des trois phases associé à l'extension sécante modifiée conduit à une meilleure prédiction toujours par référence à la solution numérique que la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman. Par ailleurs, le processus itératif couplé à l'approche sécante modifiée rigidifie ici le comportement fourni par l'extension modifiée du modèle d'Hashin et apporte ainsi une nouvelle correction à l'estimation fournie par l'approche sécante modifiée et le schéma d'Hashin non itéré. La réponse après itération apparaît en bonne concordance avec le calcul éléments finis.

3.3.4.2 Confrontation aux travaux de Rekik et al. [89]

Nous nous proposons maintenant de confronter notre approche aux travaux de Rekik et al. (Rekik et al, 2006 [89]). Ces auteurs ont proposé une méthodologie et un outil numérique permettant une évaluation précise des diverses méthodes de linéarisation pour l'homogénéisation en champs moyens de matériaux hétérogènes de comportement non linéaire. Cette démarche repose sur la confrontation de ces méthodes à une résolution numérique du problème d'homogénéisation non linéaire posé sur une cellule périodique. Cette solution numérique est considérée par les auteurs comme une solution de référence.

Des méthodes de linéarisation différentes ont été ainsi comparées à cette solution d'homogénéisation périodique désignée par (NL) pour un composite à renforts sphériques présentant un taux de renfort de 30% et un comportement de type Ramberg-Osgood pour la matrice et élastique pour les renforts. Les valeurs des paramètres adoptées sont :

$$E_i = 400\text{GPa} , \nu_i = 0.2 , \\ E_m = 75\text{GPa} , \nu_m = 0.3 , \sigma_0^m = 30\text{MPa} , m = 0.1 \text{ et } \sigma_y = 0\text{MPa}$$

Nous présentons sur la *Figure 3.25(a)-(b)* les évolutions du comportement non linéaire obtenues par les extensions sécantes classique et modifiée appliquées à la borne inférieure de Hashin-Shtrikman (HS) et à l'approximation diluée en approche contrainte (DC) et du modèle des 3 phases (3PH) couplées ou non au processus itératif. On observe que, le couplage du processus itératif a tendance là aussi à rigidifier la réponse non linéaire de l'extension sécante modifiée du schéma d'Hashin (borne inférieure).

Les résultats de Rekik et al. sont présentés à la *Figure 3.25(c)*. Il apparaît que l'extension sécante modifiée (SOE-2) d'une part et l'approche proposée par Lahellec et Suquet (Lahellec et Suquet, 2004 [70]) qui se superpose à l'estimation du second ordre proposée par Ponte Castañeda (Ponte Castañeda, 1996 [85]) d'autre part, encadrent la solution numérique de référence (NL).

Comme précédemment, on retrouve bien avec notre implémentation (HS mod) avant itération la réponse prédite par l'approche sécante modifiée associée au modèle d'Hashin (SOE-2). Le couplage du processus itératif permet de rapprocher l'ensemble des schémas y compris la distribution diluée très éloignée initialement des approches Lahellec-Suquet et Ponte Castañeda et de l'estimation numérique (NL). Là encore, compte-tenu du taux de renforts considéré par Rekik et al. de 30% relativement faible, la correction apportée par l'itératif au schéma des trois phases apparaît peu sensible.

3.3.4.3 Confrontation à une solution analytique sous chargement hydrostatique

Le problème d'une sphère creuse élastoplastique sous chargement de compression hydrostatique possède une solution analytique développée dans Christensen (Christensen, 1979 [28]). Cette solution peut donc être exploitée pour l'homogénéisation d'un milieu poreux à pores sphériques sous un chargement purement hydrostatique en choisissant comme volume élémentaire représentatif une sphère.

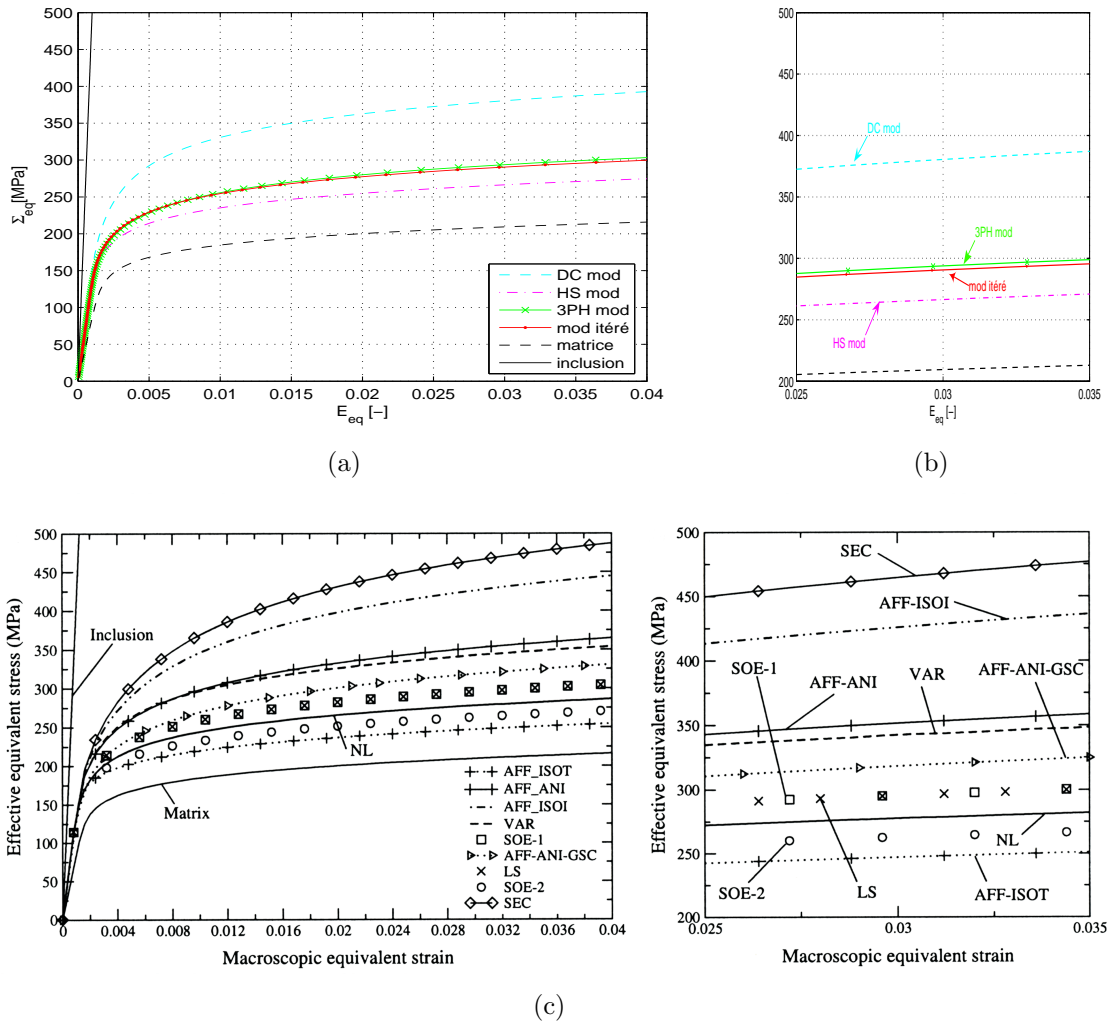


Figure 3.25 — (a) Courbes de traction macroscopiques obtenues par l'approche sécante classique et modifiée pour différents modèles de microstructures couplées ou non au processus itératif (b) Zoom (c) Courbes de traction macroscopiques obtenues pour différentes procédures de linéarisations (Rekik et al., 2006 [89]).

Ainsi, Chu et Hashin (Chu et Hashin, 1971 [30]) ont utilisé cette solution pour construire de façon explicite le comportement effectif d'un milieu poreux à matrice parfaitement plastique, ainsi qu'à comportement plastique avec écrouissage sous chargement purement hydrostatique. Qui et Weng (Qui et Weng, 1992 [88]) ont construit explicitement le comportement effectif d'un milieu poreux de matrice élastoplastique de comportement de type Ludwik modifiée avec un paramètre d'écrouissage de $n = 1$ et confronté cette solution explicite à l'approche variationnelle ou sécante modifiée.

Nous nous proposons ici de confronter notre approche itérative avec cette solution analytique pour un milieu dont le squelette suit une loi de Ramberg-Osgood donnée en (3.208) avec les caractéristiques suivantes :

$$E_s = 1 \text{ GPa} \text{ et } \nu_s = 0.3, \sigma_y = 3\mu_s, \sigma_0/\varepsilon_0 = 0.1 \text{ MPa}$$

Le taux de porosité du milieu est de 50%.

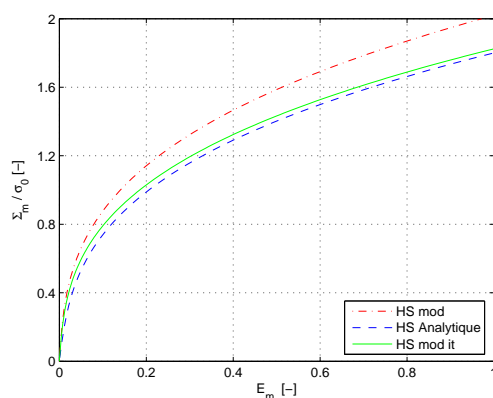


Figure 3.26 — Évolution des contraintes sphériques en fonction des déformations sphériques obtenues par l'approche sécante modifiée associée à l'approche d'Hashin (HS mod) couplée ou non au processus itératif et l'approximation analytique sécante d'un assemblage de sphères composite (HS analytique).

Sur la *Figure 3.26* sont présentées les évolutions des contraintes hydrostatiques en fonction des déformations volumiques obtenues par l'extension sécante modifiée appliquée à la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS) couplée (it) et non couplée au processus itératif. On superpose la solution analytique (HS analytique). On rappelle que l'extension classique ne restitue pas la non linéarité du comportement sous chargement purement hydrostatique. C'est pourquoi l'extension sécante utilisée ici est l'extension modifiée. On constate que l'extension sécante modifiée couplée au processus itératif conduit ici à une prédiction plus proche de la solution analytique que celle fournie par l'extension sécante non itérée.

3.3.4.4 Confrontation au schéma différentiel

Dans cette section, nous nous proposons de comparer nos résultats avec ceux obtenus par les extensions sécantes couplées à l'approche différentielle proposée par Zimmerman (Zimmerman, 1991 [112]) pour des milieux poreux linéaires. On rappelle que dans le cas de l'élasticité linéaire, nous avons constaté que le processus itératif conduisait à une prédiction très proche de celle du schéma différentiel pour les différentes porosités envisagées. L'objectif de cette application est de voir si cette remarque reste vraie en non linéaire.

On choisit pour cette confrontation un squelette de comportement non linéaire en loi puissance avec les caractéristiques données en (3.155). On procède à une extension du schéma différentiel en non-linéaire en couplant les méthodes sécantes.

Sur la *Figure 3.27* sont superposées l'estimation non linéaire sous chargement purement déviatorique obtenue par les extensions sécantes appliquées au schéma différentiel avec celles obtenues par les autres schémas prédictifs linéaires sans couplage du processus itératif et avec couplage du processus itératif (Couplage itératif) à convergence. On remarque ainsi, comme en élasticité linéaire, que l'estimation issue du schéma différentiel et celle obtenue après couplage du processus itératif à l'extension sécante classique ou à l'extension sécante modifiée coïncident pour les différentes porosités (40% ou 70%).

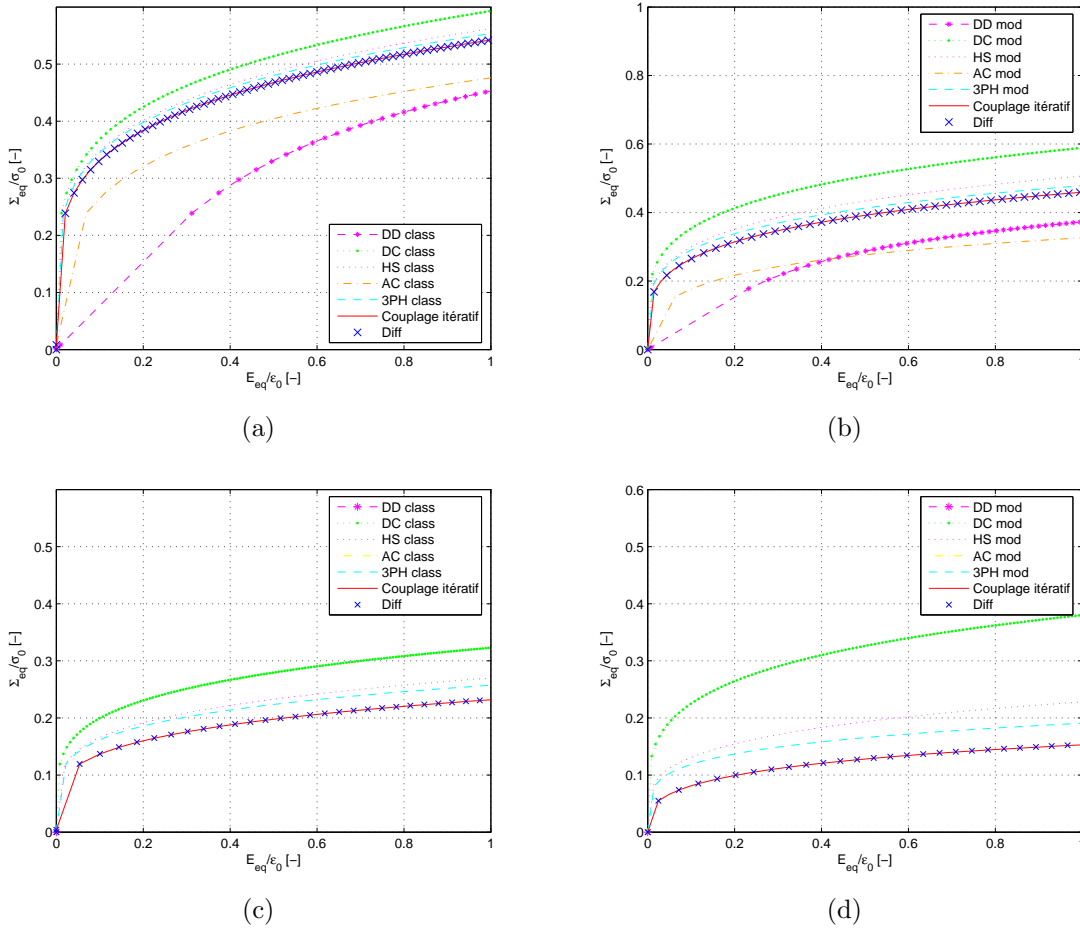


Figure 3.27 — Évolution des contraintes déviatoriques en fonction des déformations équivalentes obtenues par les approches sécantes classique et modifiée par les différentes estimations linéaires couplées ou non au processus itératif confrontées à celles issues du schéma différentiel. Porosité initiale de 40 % (a,b) et 70% (c,d) et $m = 0.2$. Chargement déviatorique.

Il en est de même sous un chargement purement hydrostatique ou encore couplé comme le montre la *Figure 3.28(a)* pour une porosité de 40% et la (*Figure 3.28(b)*) pour une porosité de 70%. On peut donc dire que le comportement effectif fourni par le schéma différentiel en linéaire mais aussi en non linéaire apparaît comme le comportement limite obtenu à convergence du processus itératif.

En conclusion, la confrontation à d'autres approches de la littérature, en particulier à des méthodes numériques d'homogénéisation, a permis de valider l'implémentation numérique de notre approche itérative en non linéaire. Elle a mis en évidence la bonne capacité de l'approche itérative à reproduire le comportement non linéaire de milieux poreux et composites en apportant une correction aux extensions sécantes non linéaires.

Nous nous proposons maintenant d'exploiter cette procédure itérative dans une nouvelle direction pour construire le domaine de plasticité macroscopique de milieux poreux par une approche de changement d'échelles.

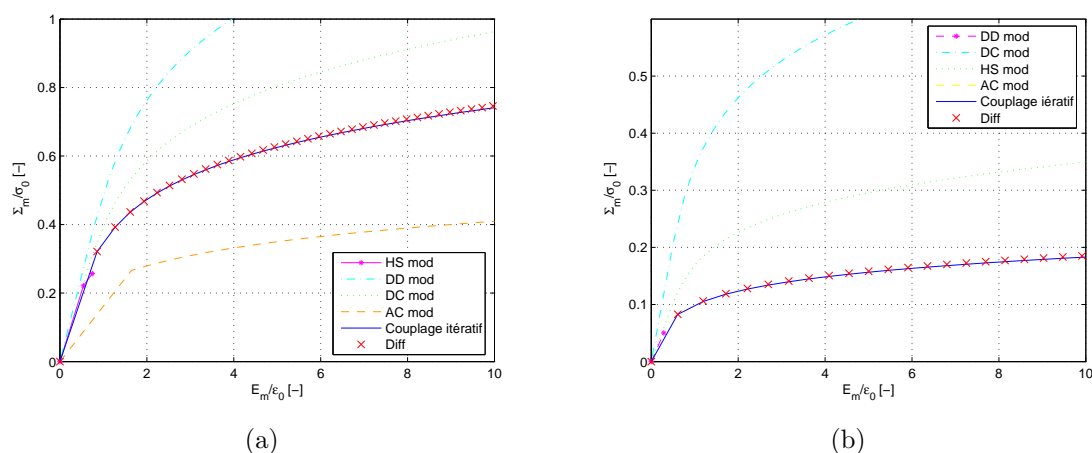


Figure 3.28 — Évolution des contraintes déviatoriques en fonction des déformations équivalentes des approches sécantes classique et modifiée par les différentes estimations couplées ou non au processus itératif confrontées à celles issues du schéma différentiel. Porosité initiale de 40 % (a) et 70 % et $m = 0.2$. Chargement hydrostatique.

3.4 Surface d'écoulement des milieux poreux

Considérons le cas d'un milieu hétérogène dans lequel les différents constituants ont un comportement élastique parfaitement plastique, sans écrouissage. Le domaine de résistance de chaque constituant est caractérisé en chaque point y du volume élémentaire représentatif du milieu par un domaine convexe $F(y)$ de l'espace des contraintes. Cet ensemble, encore appelé domaine d'élasticité, est défini par une fonction seuil f dans l'espace des contraintes par :

$$F(y) = \{\boldsymbol{\sigma}, f(\boldsymbol{\sigma}, y) \leq 0\} \quad (3.210)$$

Selon les travaux de Suquet (Suquet 1987, [93]), l'ensemble des contraintes macroscopiques plastiquement admissibles appartient au domaine macroscopique suivant :

$$F^* = \{\boldsymbol{\Sigma} \text{ tel qu'il existe } \boldsymbol{\sigma}(y) \text{ avec } \langle \boldsymbol{\sigma}(y) \rangle = \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\sigma}(y) \in F(y), \text{div} \boldsymbol{\sigma}(y) = 0, \forall y \in Y\} \quad (3.211)$$

La frontière de ce domaine F^* est la surface d'écoulement du milieu hétérogène. Elle dépend du domaine de plasticité des différentes phases, de leur arrangement dans le VER et de leur fraction volumique. Nous nous proposons de construire le domaine F^* en exploitant l'approche micromécanique itérative utilisée pour construire le comportement macroscopique.

3.4.1 Principe de construction

Nous suivons ici le principe proposé par Bilger (Bilger, 2003 [12]) pour construire par passage micro-macro le domaine de plasticité F^* . On utilise pour cela les développements présentés au paragraphe (3.2.3.2) concernant l'approche sécante modifiée seule apte à reproduire des non-linéarités de comportement sous chargement

hydrostatique.

On considère un milieu poreux avec un squelette parfaitement plastique, la pression porale est prise nulle. Le comportement du squelette est régi par la loi puissance (3.149) avec la valeur $m = 0$ du paramètre d'écrouissage. On note σ_y la limite d'écoulement plastique du squelette et ϕ la porosité.

On rappelle que la réponse du milieu poreux prédite par l'approche sécante modifiée est donnée par :

$$\Sigma_m = k^*(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) E_m = \frac{k^*}{\sqrt{A(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) + \frac{k^{*2}}{9\mu^{*2}T^2} B(\bar{\varepsilon}_{eq}^2)}} \bar{\varepsilon}_{eq}^2 \quad (3.212)$$

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu^*(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) E_{eq} = \frac{3 \mu^*}{\sqrt{A(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) \frac{9\mu^{*2}T^2}{k^{*2}} + B(\bar{\varepsilon}_{eq}^2)}} \bar{\varepsilon}_{eq}^2 \quad (3.213)$$

avec

$$A(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) = \frac{1}{3(1-\phi)} \frac{\partial k^*}{\partial \mu_s^{sct}} \quad \text{et} \quad B(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) = \frac{1}{(1-\phi)} \frac{\partial \mu^*}{\partial \mu_s^{sct}}$$

où $\bar{\varepsilon}_{eq}^2$ est la moyenne quadratique des déformations locales sur le squelette et où T est le taux de triaxialité en contrainte donné ici par :

$$T = \frac{k^* E_m}{3\mu^* E_{eq}} \quad (3.214)$$

La limite d'écoulement s'obtient alors avec les relations (3.212) et (3.213) en prenant :

$$\bar{\varepsilon}_{eq}^2 = \frac{1}{3\mu_s^{sct}(\bar{\varepsilon}_{eq}^2)} \sigma_y \quad (3.215)$$

En remplaçant T par son expression (3.214) dans les relations (3.212) et (3.213), on peut former une équation dans le plan (Σ_{eq}, Σ_m) qui représente la frontière du domaine F^* , c'est-à-dire la surface d'écoulement macroscopique du milieu poreux. Cette équation s'écrit :

$$B(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_y} \right)^2 + \frac{9\mu^{*2}}{k^{*2}} A(\bar{\varepsilon}_{eq}^2) \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_y} \right)^2 = \left(\frac{\mu^*}{\mu_s^{sct}} \right)^2 \quad (3.216)$$

On voit donc que cette surface dépend du schéma prédictif d'homogénéisation linéaire utilisé pour estimer les modules équivalents et leurs dérivées.

Plaçons nous dans le cas du schéma des distributions diluées en contrainte et d'un squelette incompressible ($k_s \rightarrow \infty$) pour simplifier les expressions, on peut montrer alors que l'on a :

$$A = \frac{\phi}{4(1-\phi)} \left(\frac{k^*}{\mu_s^{sct}} \right)^2 \quad (3.217)$$

et

$$B = \frac{1}{(1-\phi)} \left(1 + \frac{5}{3}\phi \right) \left(\frac{\mu^*}{\mu_s^{sct}} \right)^2 \quad (3.218)$$

Dans ce cas, la surface d'écoulement plastique macroscopique est donnée à partir de (3.212) et (3.212) par :

$$\Sigma_m = \frac{2\sqrt{1-\phi}}{3\sqrt{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{9} \frac{1}{T^2} \frac{(1+\frac{5\phi}{3})}{\phi}}} \sigma_y \quad (3.219)$$

$$\Sigma_{eq} = \frac{\sqrt{1-\phi}}{\sqrt{1 + \frac{5\phi}{3}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9\phi}{4} T^2 \frac{1}{(1+\frac{5\phi}{3})}}} \sigma_y \quad (3.220)$$

ou encore en éliminant le taux de triaxialité :

$$\left(1 + \frac{5\phi}{3}\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_y}\right)^2 + \frac{9\phi}{4} \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_y}\right)^2 = (1-\phi) \quad (3.221)$$

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas du schéma d'Hashin Shtrikman, on a :

$$A = \frac{\phi}{4(1-\phi)} \left(\frac{k^*}{\mu_s^{sct}}\right)^2 \quad (3.222)$$

et

$$B = \frac{1}{(1-\phi)^2} \left(1 + \frac{2}{3}\phi\right) \left(\frac{\mu^*}{\mu_s^{sct}}\right)^2 \quad (3.223)$$

La surface d'écoulement est donnée alors par :

$$\Sigma_m = \frac{2(1-\phi)}{3\sqrt{\phi}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4(3+2\phi)}{9T^2\phi}}} \sigma_y \quad (3.224)$$

$$\Sigma_{eq} = \frac{1-\phi}{\sqrt{1 + \frac{2\phi}{3}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9T^2\phi}{4(3+2\phi)}}} \sigma_y \quad (3.225)$$

ou encore :

$$\left(1 + \frac{2\phi}{3}\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_y}\right)^2 + \frac{9\phi}{4} \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_y}\right)^2 = (1-\phi)^2 \quad (3.226)$$

Ce résultat a été déjà explicité par plusieurs auteurs (Talbot et Willis, 1992 [99], Ponte Castañeda, 1991 [83]).

Nous nous proposons d'introduire le processus itératif dans la construction de cette surface. Le comportement effectif k^* , μ^* et les quantités A et B qui font intervenir le comportement sont donc estimés par itérations successives sur la porosité.

Le principe de mise en œuvre de ce couplage dans la construction de la surface d'écoulement plastique fait l'objet du paragraphe suivant.

3.4.2 Implémentation

La mise en œuvre de la construction de la surface d'écoulement suit une procédure analogue à celle mise en place pour la détermination des réponses non linéaires des

milieux poreux. La surface d'écoulement est construite point par point à partir de l'algorithme établi pour l'extension sécante modifiée itérée (Figure 3.8) en adoptant cette fois un comportement parfaitement plastique du squelette.

En pratique, on ajoute une boucle extérieure à cet algorithme pour balayer les taux de triaxialité des contraintes T depuis la valeur 0 qui correspond à un chargement hydrostatique jusqu'à une valeur T_∞ qui correspond à un chargement purement déviatorique. Pour un taux de triaxialité T_i fixé, le comportement macroscopique de la microstructure est construit en itérant sur les porosités comme décrit par (3.147). Une fois ce comportement macroscopique construit, il convient de déterminer Σ_{eq}^∞ qui correspond à la valeur de la contrainte équivalente d'écoulement macroscopique située sur le bord du domaine F^* . Cette valeur s'obtient en pratique en testant la contrainte équivalente $\Sigma_{eq} = 3\mu^* E_{eq}$. Lorsque, même si E_{eq} augmente, Σ_{eq} reste constant, le palier $\Sigma_{eq} = \Sigma_{eq}^\infty$ est considéré comme atteint.

Une fois ce point déterminé, il est aisé de calculer Σ_m^∞ la valeur de la contrainte sphérique macroscopique située sur le bord de F^* , en utilisant la définition du taux de triaxialité des contraintes :

$$\Sigma_m^\infty = T \Sigma_{eq}^\infty \quad (3.227)$$

Cette procédure est réitérée pour un nombre fini de valeurs du taux de triaxialité des contraintes. Elle est schématisée par l'algorithme suivant :

Pour $T = 0$ à $+\infty$

$$\text{Pour } t = \bar{\varepsilon}_{eq}^2 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_s^{sct} = \mu_s^s(t) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Initialisation et données :} \\ \mu^{*(0)} = \mu_s^{sct} \text{ et } k^{*(0)} = k_s \text{ et } \phi \text{ porosité} \\ n : \text{ nombre d'itérations et } \Delta\phi_i = \phi/n \\ \text{Itérations sur la porosité} \\ i = 1 : n \left\{ \begin{array}{l} \mu^* = F_\mu(\phi^{(i)}, \mu^{*(i-1)}, k^{*(i-1)}) \\ k^* = F_k(\phi^{(i)}, \mu^{*(i-1)}, k^{*(i-1)}) \end{array} \right. \\ \text{avec } \phi^{(i)} = \frac{\Delta\phi_i}{1 - \phi + \sum_{k=0}^i \Delta\phi_i} \end{array} \right. \\ \text{Comportement effectif :} \\ \mu^* = \mu^{*(n)} \text{ et } k^* = k^{*(n)} \end{array} \right. \quad (3.228)$$

Recherche de Σ_{eq}^∞ et calcul de $\Sigma_m^\infty = T \Sigma_{eq}^\infty$

On peut remarquer que la boucle en t sur la moyenne quadratique de la déformation locale est nécessaire ici du fait de l'introduction du processus itératif. Les itérations sur la porosité nécessitent, en effet, d'estimer numériquement les dérivées des modules effectifs à chaque pas et donc de connaître ce comportement à deux pas de chargement voisin comme on l'a vu au paragraphe (3.3.1.2). En absence d'itérations sur la porosité,

la boucle sur t devient inutile, il suffit de construire directement (3.212-3.213) en se plaçant sur la surface d'écoulement c'est-à-dire avec (3.215).

3.4.3 Applications

Nous considérons un squelette parfaitement plastique. On conserve les valeurs des paramètres données en (3.155) avec cette fois $m = 0$. Les surfaces d'écoulement de ce milieu obtenues par l'extension sécante modifiée associée à différents schémas prédictifs linéaires sont construites selon la procédure présentée au paragraphe précédent en introduisant ou non le couplage du processus itératif. Ces surfaces sont présentées sur la *Figure 3.29* en ayant retenu, pour homogénéiser le milieu linéaire de comparaison, les approximations diluées en approche contrainte (DC), la borne supérieure d'Hashin Shtrikman (HS), le schéma autocohérent (AC) et le schéma des trois phases (3PH). La porosité du milieu est fixée à 20% (a), 40% (b). Pour une porosité donnée, les différentes surfaces d'écoulement présentent des allures semblables. Elles se réduisent avec des porosités croissantes.

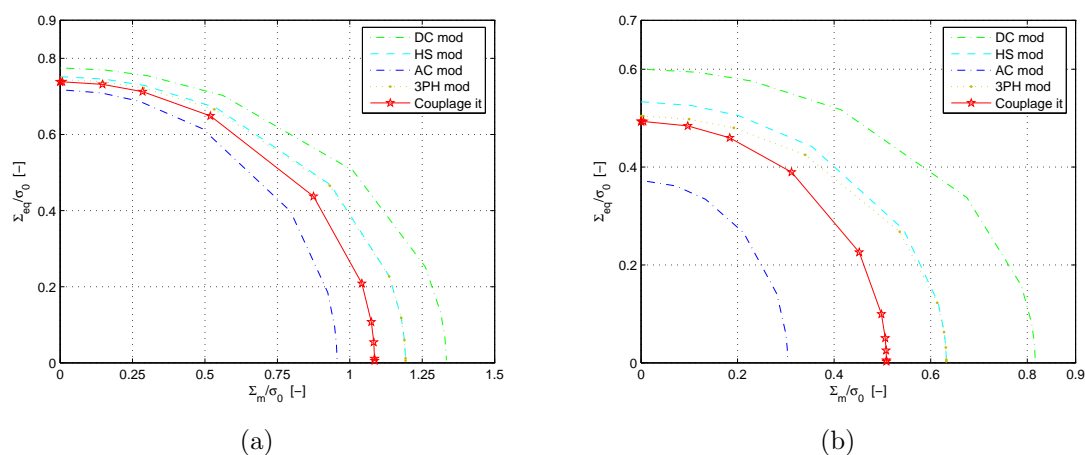


Figure 3.29 — Surfaces d'écoulements obtenues par l'extension sécante modifiée associée aux approches diluées en déformation (DD), en contrainte (DC), l'approche d'Hashin Shtrikman (HS), autocohérente (AC) et des trois phases (3PH) avec et sans couplage au processus itératif. Porosité initiale 20% (a) et 40% (b).

Comme attendu, on observe que le processus itératif permet d'unifier pour une porosité initiale donnée les surfaces prédites par les différents schémas d'homogénéisation en une même surface. Certains schémas ne peuvent pas être utilisés pour construire la surface d'écoulement, c'est le cas du schéma autocohérent, sans l'introduction du processus itératif. La surface d'écoulement obtenue après itération est globalement plus restreinte que celles prédites par les extensions non linéaires non itérées. Elle reste proche naturellement de celle fournie par le modèle des trois phases y compris à des fortes porosités pour lesquelles le modèle des trois phases est plus adapté.

Afin d'étudier la pertinence du couplage du processus itératif pour les prédictions des surfaces d'écoulements, nous nous proposons dans ce qui suit de confronter notre approche avec des modèles macroscopiques de surfaces d'écoulement de la littérature. Le calcul de la surface d'écoulement plastique des milieux poreux a fait l'objet de

nombreuses études, depuis les premiers travaux de Gurson (Gurson, 1977 [52]). On peut citer sans prétendre être exhaustif les critères proposés par Tvergaard (Tvergaard, 1981 [103]), Garajeu (Grajeu, 1995 [47]) et plus récemment les travaux de Bilger (Bilger 2003, [12]) et de Barthélemy (Barthélemy, 2005 [3]).

Ces travaux s'appuient sur le critère proposé par Gurson (Gurson, 1977 [52]) qui donne une expression analytique du critère de plasticité macroscopique de milieux poreux à matrice rigide-plastique régie par le critère de Von Mises, et dont les pores ont une forme sphérique sous la forme :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_y}\right)^2 + 2\phi \cosh\left(\frac{3\Sigma_m}{2\sigma_y}\right) = 1 + \phi^2 \quad (3.229)$$

Ce critère a été établi par une approche micromécanique en considérant le problème d'une sphère creuse soumise sur son bord à des conditions aux limites en déformations homogènes. Pour cette classe particulière de microstructure qui correspond au modèle des sphères composites de Hashin (Hashin, 1962 [53]), le critère (3.229) constitue une borne supérieure rigoureuse quel que soit le type de chargement considéré (Garajeu, 1995 [47]). Avec l'objectif de l'améliorer pour les taux de triaxialité très grands, Tvergaard (Tvergaard, 1981 [103]) a introduit, de manière purement heuristique, trois paramètres q_1 , q_2 et q_3 dans (3.229) et proposé un nouveau critère dit, critère de "Gurson-Tvergaard", sous la forme :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_y}\right)^2 + 2q_1\phi \cosh\left(\frac{3q_2\Sigma_m}{2\sigma_y}\right) = 1 + q_3\phi^2 \quad (3.230)$$

Par comparaison de ce modèle avec des simulations numériques sur des cellules périodiques, Tvergaard (Tvergaard, 1981 [103]) a identifié les valeurs des paramètres à $q_3 = q_1^2 = 1.5$ et $q_2 = 1$. L'introduction de ces paramètres a pour effet de rendre les contraintes d'écoulement en cisaillement pur et en pression hydrostatique pure plus faibles que celles obtenues par le critère de Gurson. Koplik et Needleman (Koplik et Needleman, 1988 [68]) ont proposé une identification différente avec les valeurs $q_1 = 1.25$, $q_2 = 1$ et $q_3 = q_1^2$.

Garajeu (Garajeu, 1995 [47]) a proposé également une amélioration du critère de Gurson en s'appuyant sur l'approche auto-cohérente et a obtenu le critère sous la forme :

$$\tau(\phi) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_y}\right)^2 + 2\phi \cosh\left(\frac{3\Sigma_m}{2\sigma_y}\right) = 1 + \phi^2 \quad (3.231)$$

avec

$$\tau(\phi) = \frac{1 - \phi}{1 - \frac{5\phi(16+19\phi^{\frac{7}{3}})}{(3+2\phi)(16+19\phi^{\frac{7}{3}}+168\phi(1-\phi^{\frac{2}{3}})^2)} \quad (3.232)$$

Lorsque $\tau(\phi) = 1$, (3.231) se réduit au critère de Gurson. Lorsque $\tau(\phi)$ est donné par (3.232), le critère de plasticité obtenu, appelé borne de "Garajeu", améliore en cisaillement pur la borne de Gurson initiale et converge vers celle-ci en pression hydrostatique pure.

On se propose maintenant de mettre en œuvre ces modèles et de les confronter à la surface d'écoulement obtenue par l'extension sécante modifiée après couplage du processus itératif. Nous présentons ainsi sur la *Figure 3.30* les surfaces d'écoulement obtenues par l'extension sécante modifiée appliquée à l'approche diluée contrainte (DC), à la borne supérieure de Hashin et Shtrikman (HS) et au schéma des trois phases (3PH) sans couplage et avec couplage du processus itératif (Couplage it), ainsi que les surfaces d'écoulements obtenues par les modèles de Gurson (3.229) (Gurson), de Tvergaard (3.230) (Gruson-Tvergaard), de Garajeu (3.231) (Garajeu). Des porosités de 20% et 40% ont été considérées.

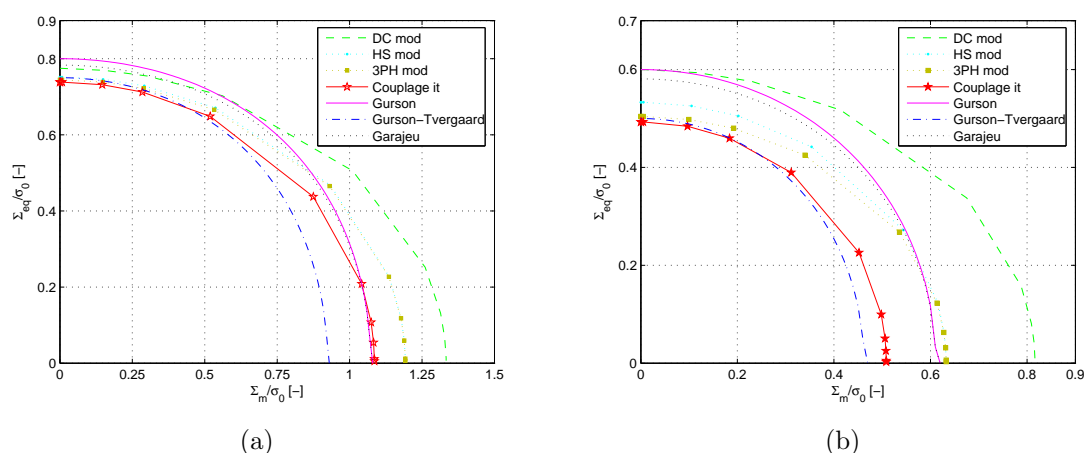


Figure 3.30 — Surfaces d'écoulements pour les approches diluée contrainte (DC) et de Hashin Shtrikman (HS) avec et sans couplage itératif. Porosité initiale (a) 20% (b) 40%.

Pour des porosités de 20% (*Figure 3.30(a)*), on observe que la surface d'écoulement itérée (Couplage it) est proche au voisinage des taux de triaxialité importants (sur l'axe des contraintes équivalentes) des modèles de Gurson-Tvergaard et de Garajeu. Pour des taux de triaxialité faibles (sur l'axe des contraintes hydrostatiques), elle est plus proche au contraire du modèle de Gurson. Le processus itératif apporte en ce sens une correction puisqu'il permet d'améliorer le critère de Gurson pour les forts taux de triaxialité pour lequel il est reconnu comme moins satisfaisant et va dans le sens des améliorations proposées par Tvergaard et Garajeu. Au contraire dans le cas des faibles taux de triaxialité, l'itératif est proche du critère de Gurson bien approprié à ce cas. Par ailleurs, le processus itératif permet d'unifier les enveloppes à l'intérieur de la surface de Gurson qui constitue une borne supérieure. A 40% de porosité (*Figure 3.29(b)*), la surface d'écoulement itérée se rapproche du modèle de Gurson-Tvergaard pour les taux de triaxialité faibles mais aussi forts.

En conclusion, nous avons pu construire par l'intermédiaire de l'approche d'homogénéisation non linéaire itérative des surfaces d'écoulement de milieux poreux parfaitement plastiques. Les extensions sécantes modifiées des schémas prédictifs d'homogénéisation linéaires, fournissant des surfaces d'écoulements plastiques, ont été couplées au processus itératif et comparées à divers modèles existants de la littérature. A convergence du processus, une même surface est obtenue par les différents schémas et ce même pour des milieux fortement poreux. La surface construite par itérations succes-

sives est globalement en bon accord avec les modèles macroscopiques de la littérature et plus spécifiquement avec le critère de Gurson-Tvergaard.

3.5 Conclusions et commentaires

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à décrire dans un premier temps la méthode d'homogénéisation non linéaire basée sur les extensions sécantes classique et modifiée des schémas linéaires dans le cadre des milieux poreux. Nous avons illustré ces approches par des applications à des milieux poreux dont les squelettes présentent des comportements non linéaires en loi puissance ou élastoplastique de type Ramberg-Osgood. Diverses prédictions peuvent être obtenues selon le schéma utilisé pour le milieu linéaire de comparaison. Ces prédictions diffèrent d'autant plus que le taux de porosité est élevé. La seconde partie de ce chapitre a été consacrée au couplage du processus itératif à ces extensions sécantes. Ce couplage a permis d'unifier, comme en linéaire, les prédictions obtenues d'une part par l'extension sécante classique et d'autre part par l'extension sécante modifiée et ce quelque soit le taux de porosité et sous des chargements quelconques. On a pu vérifier que la réponse non linéaire prédite par le processus itératif ne viole pas la prédiction fournie par l'extension sécante de la borne supérieure de Hashin et Shtrikman, ce qui apparaît bien en accord avec les travaux de Ponte Castañeda (Ponte Castañeda, 1991 [83]). Une estimation linéaire pertinente conduisant à une borne supérieure rigoureuse conserve bien son statut de borne supérieure pour le milieu non linéaire. On a également pu montrer à travers différentes confrontations à des travaux de la littérature la capacité de l'homogénéisation itérative à reproduire le comportement non linéaire obtenu par des simulations numériques sur le volume élémentaire représentatif.

Par ailleurs, ces développements par approche micromécanique du comportement non linéaire enrichis par le processus itératif ont permis de construire des surfaces d'écoulement plastique des milieux poreux. Les résultats fournis par l'extension sécante modifiée appliquée à divers modèles de microstructure enrichis par le processus itératif ont été confrontés à des critères d'écoulement existants dans la littérature obtenus ou non par une démarche micromécanique. Le processus itératif a conduit à une surface d'écoulement unifiée en bonne concordance avec celle décrite par le critère de "Gurson Tvergaard".

Ces différents outils étant mis en place, nous nous proposons d'appliquer au chapitre suivant cette méthodologie d'homogénéisation itérative en linéaire et en non linéaire à l'étude du comportement des milieux poreux particuliers que constituent les milieux argileux.

Application de l'homogénéisation au comportement des argiles compactées

4.1 Introduction

Ce dernier chapitre est consacré à une application des méthodologies d'homogénéisation mises en place précédemment dans le domaine des géomatériaux. Nous nous intéressons plus particulièrement au comportement de milieux poreux particuliers que sont les argiles.

Les matériaux argileux entrent dans la composition des matériaux sédimentaires présents dans la croûte terrestre. Ces minéraux trouvent des utilisations, depuis l'antiquité jusqu'à nos jours, dans des domaines aussi divers que la poterie, la recherche de ressources en eau et en pétrole, ou encore dans l'enfouissement des déchets toxiques et de vie longue. La structure et le comportement des matériaux argileux face aux diverses sollicitations subies au cours de leur durée de vie est un vaste domaine d'études pluridisciplinaires. Les géologues s'intéressent aux conditions de leur formation et expliquent les conditions environnementales de leur évolution. Les mécaniciens des sols et des roches étudient leurs caractéristiques et leurs évolutions sous des sollicitations couplées mécaniques, hydrauliques, thermiques et chimiques avec l'objectif d'analyser la connaissance de la stabilité des ouvrages.

L'estimation de l'évolution des propriétés des argiles passe par l'identification de ces propriétés, leur caractérisation et la modélisation de leur état. Dans cette démarche, un des paramètres caractéristiques de ces milieux est leur porosité. L'étude des phénomènes de transformation des argiles au cours de leur enfouissement permet de suivre l'évolution de la porosité en fonction des paramètres mécaniques, hydrauliques et thermiques. Ceci explique pourquoi l'étude de la compaction des argiles en particulier a reçu l'attention des chercheurs depuis plusieurs décennies. La compaction engendre un ensemble complexe de processus, tels que l'expulsion de l'eau du réseau poral, la variation de porosité, le réarrangement des particules d'argiles ou encore la déformation de ces particules. Parmi les techniques expérimentales les plus répandues en mécanique

des sols pour l'étude du comportement des argiles compactées, on trouve l'essai de compaction œdométrique qui permet d'évaluer l'évolution de la porosité en fonction de la charge axiale appliquée parallèlement à l'axe de révolution de l'échantillon.

Pour cette application de notre travail d'homogénéisation, nous nous sommes appuyés sur des essais de compaction de diverses argiles réalisés par Grunberger (Grunberger, 1995 [51]) et Djéran-Maigre et al. (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]). Ces auteurs ont mis au point une démarche expérimentale dans une cellule œdométrique particulière qui permet la connaissance de l'évolution de l'ensemble des paramètres hydro-mécaniques tridimensionnels. Ces essais les ont conduits à identifier le comportement macroscopique des argiles compactées qui apparaît comme élastique dans la phase de décharge et élastoplastique sous chargement de compaction. Cette étude a été également accompagnée d'observations microstructurales et de mesures au niveau microscopique, mettant en exergue des phénomènes microscopiques pour expliquer des différences de comportement observées au niveau macroscopique. Cette étude, menée aux deux échelles, nous a semblé intéressante à exploiter pour le travail d'application de l'approche micromécanique que nous souhaitons mener.

Ce chapitre débute par une brève introduction sur les matériaux argileux et leur microstructure. Il se poursuit par la présentation du phénomène de compaction et de l'approche expérimentale particulière de la compaction œdométrique en insistant sur les dispositifs expérimentaux, le principe de mesure et les résultats d'essais. La suite du chapitre est consacrée dans un premier temps à la simulation du comportement élastique des argiles observé dans la phase de décharge. A partir des résultats d'essais, le comportement macroscopique des argiles dans la phase élastique est tout d'abord identifié en suivant l'approche proposée par Pouya et al. (Pouya et al., 1998 [87]). Puis, le comportement des microstructures des argiles est identifié par homogénéisation inverse en appliquant le processus itératif d'homogénéisation à l'étude du comportement linéaire des argiles. Un enrichissement du modèle micromécanique est ensuite proposé pour tenir compte de l'évolution de la porosité avec le chargement. Les résultats de la modélisation sont alors confrontés aux courbes expérimentales dans la phase de décharge. L'approche itérative non linéaire est ensuite mise en œuvre pour simuler la phase élastoplastique du comportement des argiles observée durant la charge. Là encore le modèle est enrichi pour permettre de simuler l'évolution de l'indice des vides au cours de chargement. Enfin, des commentaires et discussions que soulève cette première confrontation de l'approche multi-échelles aux résultats expérimentaux sont donnés.

4.2 Approche macroscopique expérimentale des milieux argileux saturés

4.2.1 Un milieu poreux particulier : l'argile

Les argiles proviennent de l'altération et de la dégradation des roches ; altération physique d'une part sous l'effet des variations de température mais surtout altération chimique au contact de l'eau qui permet la dégradation des argiles en particules de moins de $2\mu\text{m}$ de diamètre. La taille de ces particules les range dans la catégorie des particules colloïdales (particules de très petit diamètre), ce qui explique la particularité

et la diversité du comportement des argiles.

Ces matériaux sont caractérisés par une unité structurale dite cristallite formée d'un feuillet et d'un interfeuillet, appelé espace interfoliaire. Chaque feuillet est lui-même formé de deux ou trois couches (couche tétraédrique ou octaédrique). L'interfeuillet est constitué de fluide (eau) assurant une liaison électrochimique entre les feuillets. Diverses possibilités d'empilement de feuillets sont à l'origine, entre autre, de la diversité des structures et des propriétés des argiles comme représenté à la *Figure 4.1*. Une particule d'argile résulte donc de l'empilement face-à-face de quelques cristallites élémentaires.

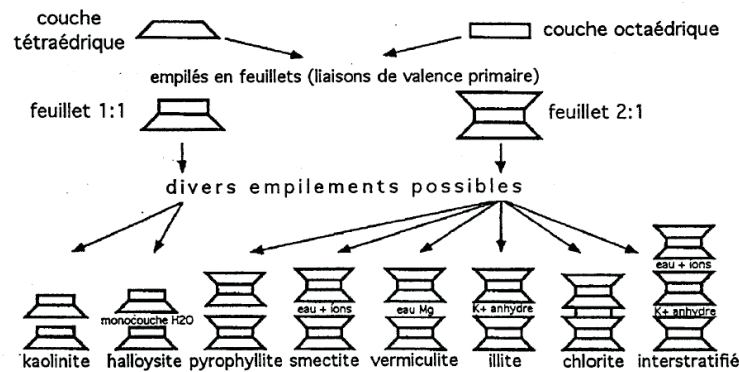


Figure 4.1 — Représentation schématique de quelques groupes de minéraux argileux (Grim, 1968 [49]).

Parmi ces divers empilements cristallographiques, les trois familles de minéraux argileux les plus fréquentes sont celles de la kaolinite, de l'illite et de la smectite. Leur structure est schématisée à la *Figure 4.2*. La kaolinite est formée de plusieurs empilements de feuillets d'alumine et de silice. Les feuillets sont soudés les uns aux autres par des liaisons très importantes rendant la kaolinite peu sensible au gonflement, *Figure 4.2(a)*. Les illites, dont les feuillets sont composés d'une couche d'alumine et de deux couches de silice, possèdent des liaisons entre feuillets moins fortes que celles des kaolinites, *Figure 4.2(b)*. Ces argiles sont donc potentiellement gonflantes. Enfin, les feuillets de smectites, comme les illites, sont constitués d'une couche d'alumine et de deux couches de silice, *Figure 4.2(c)*. Les smectites sont caractérisées par des liaisons interfeuillets moins fortes que celles des deux argiles précédentes. La faiblesse de ces liaisons leur confère de grandes surfaces spécifiques, c'est-à-dire des surfaces entre les particules et l'espace interfeuillet importantes. L'augmentation de ces surfaces spécifiques donne un potentiel de gonflement plus élevé aux smectites.

Du point de vue de leur comportement macroscopique, les roches argileuses se situent entre les sols et les roches. Certaines roches argileuses sont "tendres" et très déformables ; on parle alors d'argiles "plastiques". D'autres sont peu déformables, et présentent un comportement plus fragile que ductile au delà de la limite d'élasticité, ces argiles sont dites raides.

Les propriétés macroscopiques des argiles, notamment mécaniques et hydrauliques, sont gouvernées par la morphologie et la texture des particules élémentaires et la physico-chimie du milieu. Ainsi, la répartition des espaces poreux et donc du fluide va influencer le comportement mécanique de l'argile au même titre que le mode de

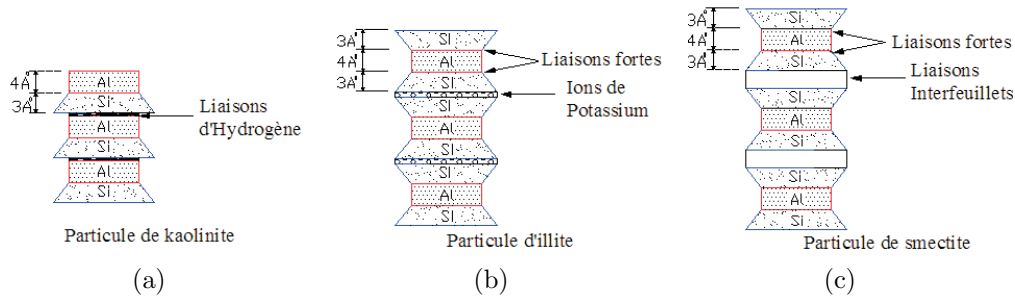


Figure 4.2 — Les particules d'argile : (a) kaolinite, (b) illite et (c) smectite présentées par Wakim (Wakim, 2005 [104]).

sédimentation et l'état de consolidation. L'augmentation de la température peut influencer la stabilité des argiles, les rendre instables et les modifier en d'autres minéraux argileux ou en d'autres structures. De plus, les processus de sédimentation et d'enfouissement sont des événements s'étalant sur de longues périodes (de une à quelques centaines de millions d'années) et sur des grandes dimensions (quelques kilomètres de profondeur et plusieurs kilomètres carrés de surface). Les dimensions temporelle et spatiale sont donc essentielles, au même titre que la température, dans la stabilité et l'évolution des propriétés argiles.

Ces matériaux argileux peuvent donc être étudiés à différentes échelles depuis la particule élémentaire, ensemble de feuillet, jusqu'au volume macroscopique selon le problème examiné, *Figure 4.3* (Thorez, 1989 [102]). Sur le plan expérimental, à l'échelle microscopique, l'observation au microscope électronique à balayage (MEB) permet d'étudier l'agencement des particules argileuses et de mener une approche micro-morphologique de la distribution des argiles dans la roche sédimentaire ou dans les sols. D'une manière fine, le microscope à transmission (MET) fournit en particulier un aperçu de la morphologie des particules d'argiles. Pour l'échelle macroscopique, des techniques expérimentales ont été utilisées permettant la compréhension du comportement de ces matériaux à l'échelle de l'échantillon. Les essais les plus classiques sont les essais de compaction œdométrique et les essais triaxiaux sur des chemins de chargement isotropes ou déviatoriques.

Sur le plan de la modélisation, on trouve également deux approches à des échelles différentes pour les argiles : soit le matériau est considéré comme un milieu biphasé ou multiphasé composé d'un squelette solide et de pores remplis ou non de fluide(s), soit le matériau est assimilé globalement à un solide. Dans la pratique le choix de l'une ou l'autre de ces approches dépend là aussi du type de problème étudié. Plusieurs phénomènes, tels que la consolidation et le tassement des sols et des roches, la dissipation de la pression interstitielle et l'effet thermique liés ou pas à la présence du fluide, demandent par exemple à être étudiés avec une approche multi-phasique.

Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresserons au comportement des argiles sous sollicitation œdométrique. Cet intérêt est motivé par une étude expérimentale antérieure effectuée par Grunberger (Grunberger, 1995 [51]) sur différentes argiles. Cette étude a été réalisée aux deux échelles. Tout d'abord, une étude macroscopique du comportement de quelques argiles sous des sollicitations œdométriques a été menée. Les résultats expérimentaux ont permis l'évaluation de la porosité en fonction de la contrainte imposée et ont conduit les auteurs à identifier pour ces matériaux un compor-

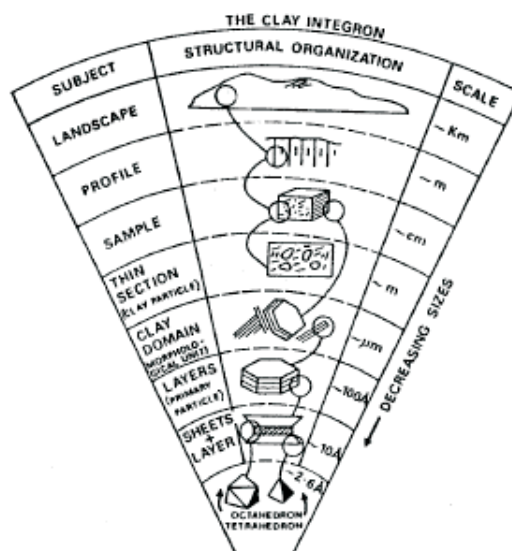


Figure 4.3 — Études des argiles à différentes échelles (Thorez, 1989 [102])

tement macroscopique élastoplastique. Parallèlement, une analyse microstructurale a été menée sur ces argiles au cours de leur chargement afin d'examiner l'évolution de l'organisation morphologique des particules d'argile formant la partie solide du matériau et des porosités à l'échelle microscopique. Ces analyses aux différentes échelles ont permis d'établir certaines corrélations entre les grandeurs macroscopiques et les observations microscopiques (Grunberger, 1995 [51]).

Nous présentons tout d'abord brièvement l'étude expérimentale menée par Grunberger (Grunberger, 1995 [51]).

4.2.2 Approche expérimentale de la compaction œdométrique

4.2.2.1 Principe de la compaction

La compaction est un phénomène très important dans l'évolution des bassins sédimentaires. Sous le poids des sédiments, les matériaux poreux saturés sont soumis à une contrainte verticale qui provoque une augmentation de la pression interstitielle. Lorsque le milieu est drainé, un gradient de pression interstitielle apparaît permettant l'évacuation du fluide et le tassement du matériau.

La première étude théorique de la consolidation des sédiments a été proposée par Terzaghi dans les années 1930. Cette théorie considère un milieu poreux saturé soumis à une contrainte verticale due au poids des sédiments par exemple et traite le problème de façon unidimensionnelle. Selon Terzaghi, le processus de la déformation d'un volume élémentaire d'un milieu poreux saturé est régi par la contrainte effective Σ' :

$$\Sigma' = \Sigma - p_f \mathbf{1} \quad (4.1)$$

où Σ est la contrainte mécanique associée au poids de la colonne de milieu solide et liquide et p_f la pression de fluide qui règne localement.

Cette notion de pression effective a été reprise par la suite par Biot (Biot, 1941 [13]) et l'effet de la déformation des particules solides est introduit au moyen d'un coefficient b , le coefficient de Biot. La relation (4.1) s'écrit alors :

$$\Sigma' = \Sigma - b p_f \mathbf{1} \quad (4.2)$$

Les résultats obtenus à partir de cette théorie sont utilisés en géotechnique pour estimer les durées et le niveau de tassements des sols.

Sur le plan expérimental, les essais œdométriques sont les plus utilisés pour simuler ce phénomène de compaction en laboratoire sur des matériaux compressibles et peu perméables, du fait de leurs conditions aux limites s'approchant de celles de la compaction du milieu naturel. L'essai de compaction consiste à soumettre un échantillon de forme cylindrique à une contrainte axiale correspondant à la contrainte verticale exercée par le sédiment. Le déplacement radial est bloqué de façon à traduire la présence de la colonne de milieu sous-jacent. Dans un essai classique, on mesure la déformation axiale. L'essai est mené en condition drainée, le fluide étant expulsé au cours de l'essai. On présente le schéma du principe de l'essai œdométrique classique sur la *Figure 4.4*.

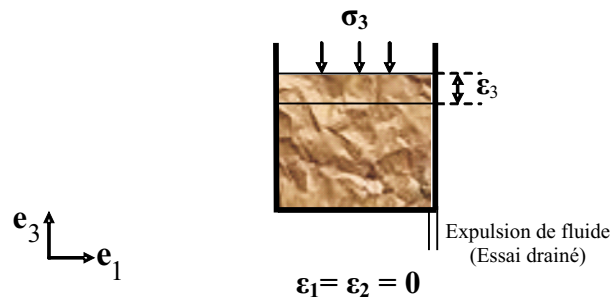


Figure 4.4 — Schéma du principe de l'essai œdométrique classique.

Les phénomènes de compaction de diverses argiles ont été étudiés au G3S-LMS de l'École Polytechnique dans le cadre d'un programme européen. Des expérimentations ont été conduites à l'aide d'une cellule œdométrique spécialement conçue, capable d'appliquer une large gamme de contraintes afin de représenter le chargement correspondant aux premiers kilomètres de profondeur. Cette cellule permet également de mesurer l'évolution des paramètres nécessaires à la détermination des paramètres mécaniques tridimensionnels et hydrodynamiques indispensables à une modélisation macroscopique (Grunberger, 1995 [51]), Djéran-Maigre et al., 1998 [38]).

Avant de présenter les résultats de cette étude, nous nous proposons de décrire brièvement les matériaux testés, ainsi que le dispositif utilisé dans le cadre de ces expériences.

4.2.2.2 Argiles testées

La représentativité des mesures naturelles, mais également la reproductibilité et l'homogénéité des échantillons fabriqués pour la campagne d'essais expérimentale, ainsi que le temps de stabilisation au cours de la consolidation, ont été pris en compte dans cette campagne expérimentale et ont guidé le choix des matériaux argileux étudiés (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]).

Comme précisé au paragraphe précédent, la kaolinite, l'illite et la smectite forment les trois grands groupes d'argiles. Quatre matériaux argileux ont été sélectionnés dans ces groupes et ont été soumis aux tests de compaction. Il s'agit de :

- Deux argiles pures, constituées de minéraux argileux, une kaolinite (St Austell) et une illite (Salins 14) provenant des gisements et disponibles sous forme de poudre. Ces deux argiles ont été étudiées à l'état remanié profitant de leur temps de compaction relativement court.
- Deux argiles naturelles : la boue du Marais Poitevin, sédiment très peu compacté et composé d'interstratifié illite-smectite et la Bouzule, argile fortement consolidée provenant d'un affleurement du bassin de Paris, ont été étudiées à l'état naturel et remanié.

Dans la présente étude, les résultats expérimentaux du Salins 14, de la Bouzule remaniée et du Marais Poitevin sont exploités. L'absence de mesure des contraintes radiales de la kaolinite St Austell ne nous a pas permis de l'inclure dans l'étude. Néanmoins, les données expérimentales exploitées sont représentatives des principales classes d'argiles, de leur nature et de leur état.

4.2.2.3 Dispositif expérimental

Les divers essais de compaction sur lesquels nous appuierons notre approche d'homogénéisation ont été menés dans une cellule œdométrique particulière présentée à la *Figure 4.5*. Cette cellule permet l'application de la contrainte de compaction aux deux faces parallèles de l'échantillon de façon à maintenir la section médiane de l'échantillon fixe. A cette section, on mesure la contrainte horizontale et la pression des pores rattachés au même élément de volume solide, à tout instant de la compaction, en charge ou en décharge. Pour ces mesures, deux capteurs de pressions interstitielles sont placés sur la périphérie de cette section.

La cellule œdométrique est composée d'un anneau de forte rigidité permettant d'accueillir un échantillon de 50 mm de diamètre, pouvant mesurer jusqu'à 80 mm de hauteur initiale. Une presse hydraulique transmet la contrainte aux deux vérins, qui se déplacent simultanément, pouvant atteindre une contrainte de 50 MPa. La pression interstitielle peut être imposée et son contrôle effectué jusqu'à 20 MPa.

Les chargements sont appliqués aux éprouvettes par paliers successifs en progression géométrique. Après chaque chargement ou décharge, la stabilisation du déplacement est attendue. On présente sur la *Figure 4.6(a)* une courbe type de l'enregistrement des contraintes axiales appliquées en fonction du temps. Les mesures de déplacements en parallèle de l'application de la contrainte axiale se traduisent en mesure d'indice des

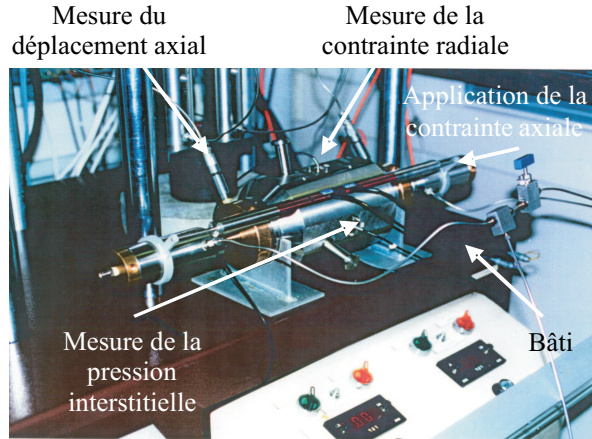


Figure 4.5 — Dispositif expérimental de la cellule œdométrique originale (Grunberger, 1995 [51]).

vides. Cette grandeur e est liée à la porosité ϕ du matériau par la relation :

$$e = \frac{\phi}{1 - \phi} \quad (4.3)$$

En pratique, l'évolution de l'indice des vides est déterminée en utilisant la hauteur solide h_s de l'échantillon qui reste constante au cours de l'essai. Ainsi pour un palier de chargement i , l'indice des vides e_i est déterminé par :

$$e_i = \frac{h_i - h_s}{h_s} \quad \text{avec} \quad h_s = \frac{h_f}{1 + e_f} \quad (4.4)$$

où h_i représente la hauteur de l'échantillon au palier i et où h_f et e_f correspondent respectivement à la hauteur et l'indice des vides finaux de l'échantillon après compaction.

L'évolution de l'indice des vides en fonction du logarithme de la contrainte appliquée fait apparaître, selon la théorie de Terzaghi, deux pentes comme le montre la *Figure 4.6(b)*. La première, notée c_r , dite pente de rebond, indique le domaine d'élasticité de l'argile. Ce domaine correspond pour la plupart des argiles à quelques kPa de chargement. On retrouve cette même pente lorsque qu'une décharge est effectuée. La deuxième pente, notée c_c , dite pente de compressibilité, indique la plastification de l'échantillon argileux et correspond cette fois à quelques dizaines de MPa de chargement.

L'évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale Σ suit donc une loi logarithmique de la forme :

$$\begin{aligned} e &= e_1 - c_c \log \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_1} \right) \quad \text{en charge} \\ e &= e_2 - c_r \log \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_2} \right) \quad \text{en décharge} \end{aligned} \quad (4.5)$$

où c_c désigne la pente de compressibilité et c_r la pente de rebond, où (e_1, Σ_1) et (e_2, Σ_2) correspondent respectivement à des états initiaux en charge et en décharge déterminés par des essais expérimentaux.

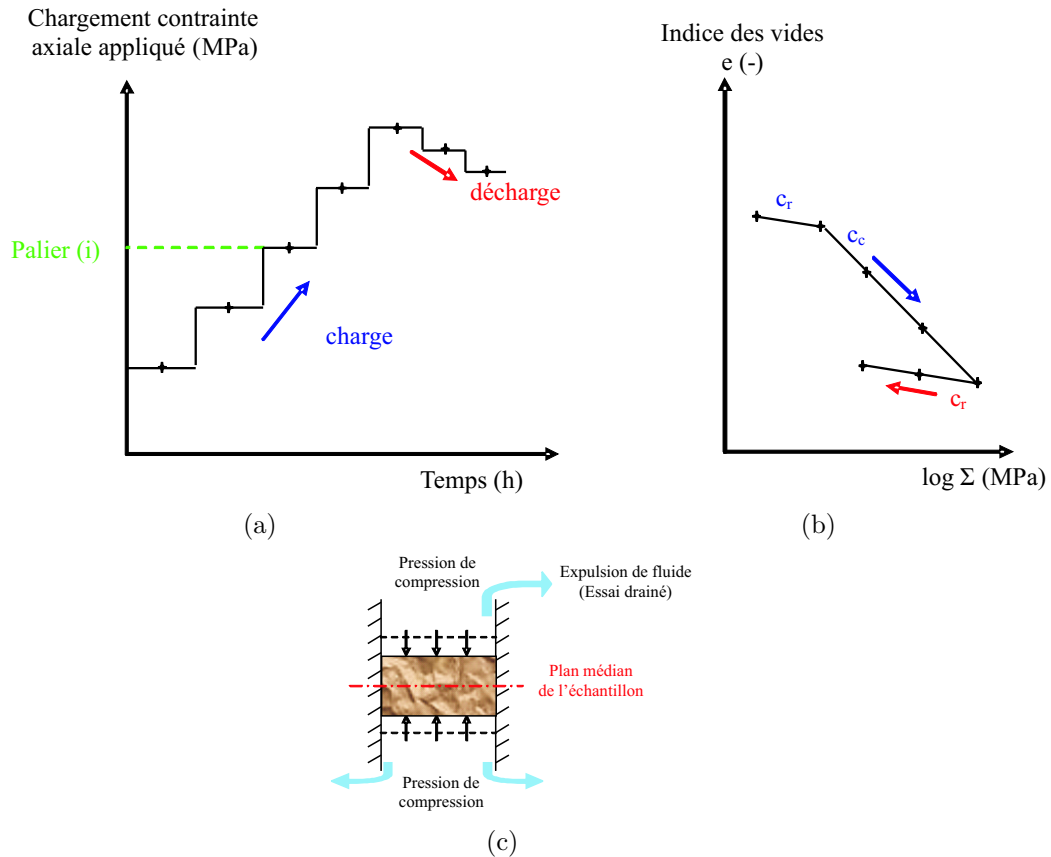


Figure 4.6 — Paliers de chargement en contrainte axiale appliquée en fonction du temps (a), indice des vides en fonction du logarithme de la contrainte axiale (b) et évolution de l'échantillon dans la cellule œdométrique (c).

4.2.2.4 Résultats des essais œdométriques

Les paliers de contraintes axiales appliquées sur les différents échantillons d'argiles sont généralement de 0.1, 0.3, 1, 3, 10, 20 et 50 MPa. Les évolutions au cours du temps de la contrainte axiale appliquée, du déplacement, de la contrainte radiale et également de la pression interstitielle enregistrées par différents capteurs sont présentées sur la Figure 4.7 pour l'argile du Marais Poitevin.

L'évolution de l'indice des vides en fonction du logarithme des contraintes axiales est présentée sur les Figures 4.8(a,c,e) pour les trois argiles étudiées. Ces figures confirment l'évolution linéaire de l'indice des vides en fonction du logarithme de la contrainte axiale appliquée pour les différentes argiles établie par Terzaghi. Durant le chargement, l'évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale appliquée est linéaire comme le montrent les Figures 4.8(b,d,f). Par contre, au cours de la décharge, les valeurs de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale suivent une trajectoire complexe. Seul le début de la décharge est élastique.

L'exploitation de ces courbes œdométriques permet d'accéder aux pentes de compressibilité c_c pour les trois argiles durant la phase de chargement. Ces pentes varient selon la composition, l'état initial et la microstructure des argiles. Les valeurs de ces pentes sont données au tableau 4.1. On observe que le Salins 14 présente une pente de compressibilité plus faible que les deux autres argiles et donc une variation de l'indice

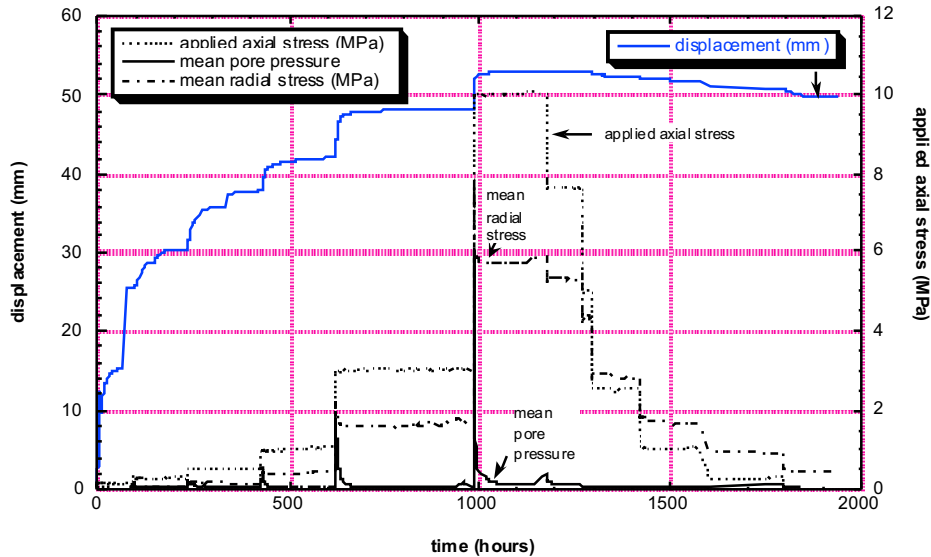


Figure 4.7 — Déplacement, contrainte axiale imposée, contrainte radiale et pression interstitielle en fonction du temps pour la compaction de l'argile le Marais Poitevin (Djéran-Maigre et al., 1998 [36]).

des vides moindre. L'argile le Marais Poitevin avec une pente de compressibilité plus importante est la plus compressible.

Argiles	Salins 14	Bouzule	Marais Poitevin
c_c	0.28	0.48	0.7
c_r	0.064	0.12	0.11

Tableau 4.1 — Coefficients de compressibilité et de rebond pour les trois argiles identifiés expérimentalement (Grunberger, 1995 [51])

La phase de décharge est caractérisée par un accroissement de l'indice des vides en fonction de la contrainte verticale effective décroissante. Cette évolution est réversible. L'indice de gonflement ou de rebond c_r apparaît sensiblement le même pour les différentes argiles et inférieur aux indices de compression, tableau 4.1.

Les mesures expérimentales de la pression interstitielle présentées sur la *Figure 4.8* permettent de s'assurer des conditions de drainage de l'essai, la pression porale devenant rapidement faible et s'annulant pendant la stabilisation de la déformation en charge. Cette observation nous permettra de supposer la pression de pore nulle dans notre approche micromécanique.

Les essais de compaction ont été complétés par différentes observations microstructurales dont nous présentons au paragraphe suivant les principales conclusions.

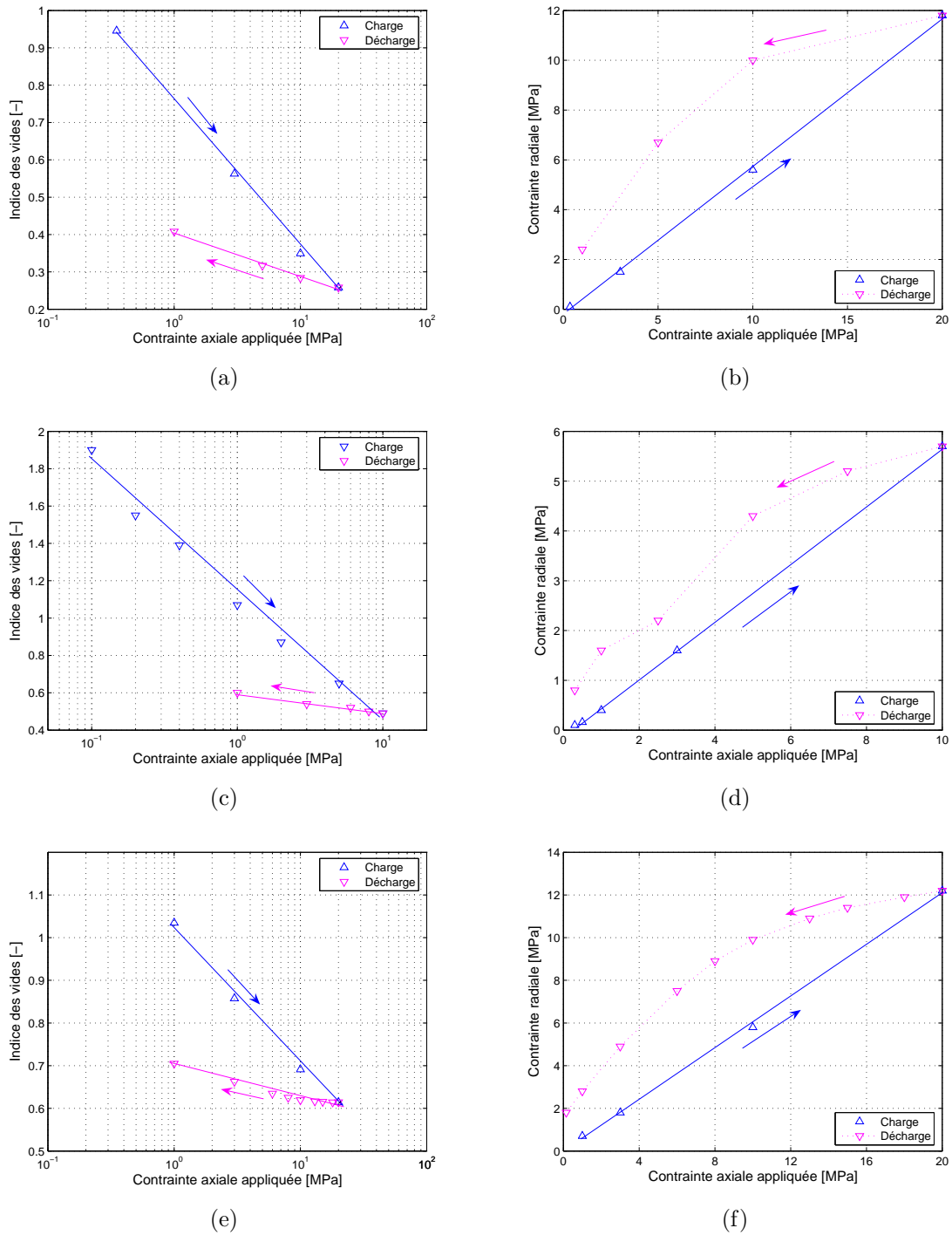
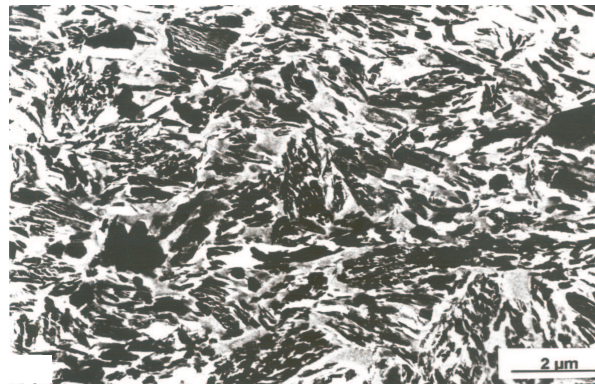


Figure 4.8 — Variations de l'indice des vides et de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale pour les argiles : Bouzule (a,b), Marais Poitevin (c,d) et Salins 14 (e,f) (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]).

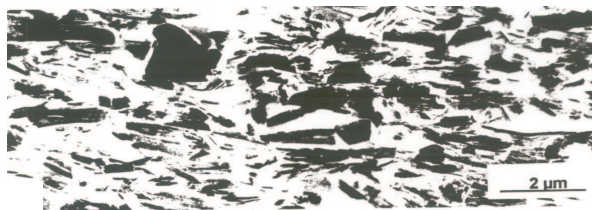
4.2.2.5 Observations microstructurales

Afin de mieux comprendre et prévoir les différents niveaux d'organisation de la phase solide et de l'espace poral des matériaux, une analyse microstructurale a été par ailleurs effectuée sur ces différentes argiles pour compléter les résultats d'essais

de compaction. Diverses méthodes d'analyse et d'observations ont été utilisées. On présente sur la *Figure 4.9*, la micrographie obtenue par microscope électronique à transmission (MET) pour l'argile kaolinite de St Austell au début de la compaction vers 0.1 MPa (a) et compactée à 20 MPa (b). Sur les tirages des micrographies, les zones sombres correspondent aux particules d'argile avec une orientation perpendiculaire aux faisceaux d'électrons, les zones moins sombres sont des particules avec des orientations différentes et les zones grises claires indiquent la porosité. La hauteur de ces deux



(a)



(b)

Figure 4.9 — Kaolinite de Saint-Austell en compaction œdométrique (a) après compaction de 0.1 MPa (b) après compaction de 20 MPa (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]).

photos est proportionnelle à la variation de la hauteur de l'échantillon au cours de la compaction. On observe une diminution notable des zones grises correspondantes aux pores alors que les zones sombres correspondantes aux particules d'argiles apparaissent plus nombreuses.

Des observations microstructurales analogues sur l'argile de Salins 14 montrent que celle-ci est formée de particules en forme de plaquette de $0.1 \mu\text{m}$ de longueur et de $0.01 \mu\text{m}$ d'épaisseur. Ces particules qui correspondent aux unités cristallines élémentaires sont formées d'empilement d'une dizaine de feuillets d'illite. Une réorientation progressive perpendiculairement à la contrainte appliquée est observée au cours de chargement. La mise en place des particules se fait dès les premiers paliers de compaction et leur réarrangement est très limité puisqu'il n'y a qu'un seul type de particule et donc pas d'arrangement de petites particules dans des pores formés par l'empilement de plus gros grains. Cette réorganisation traduit la faible compressibilité de ce milieu argileux. Les particules des autres argiles, la Bouzule et le Marais Poitevin, sont au contraire des agrégats formés de différentes unités cristallines. Les observations mettent en évidence des déformations des particules de ces deux argiles. Les particules du Marais Poitevin

apparaissent plus fines que celles de la Bouzule ce qui pourrait être en lien avec la compressibilité plus importante du Marais Poitevin.

D'autres variables ont été étudiées, telles que la surface spécifique qui est un paramètre qui conditionne une propriété macroscopique comme la perméabilité, ainsi que les orientations des particules d'argile par rapport à la direction de compaction qui ont été quantifiées ou encore la conductivité thermique qui a été analysée en fonction de l'anisotropie de l'argile. On renvoie le lecteur aux travaux de Grunberger (Grunberger, 1995 [51]) et de Djéran-Maigre et al. (Djéran-Maigre et al., 1998 [38], 1995 ref) pour plus de détails sur cette étude microstructurale de ces argiles et pour l'ensemble de cette étude expérimentale à Djéran-Maigre et al. (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]).

Nous nous proposons maintenant de mettre en œuvre notre approche d'homogénéisation itérative pour simuler le comportement des argiles au cours du chargement de compaction. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la phase élastique de ce comportement. L'approche multi-échelles nécessite comme on l'a vu au chapitre 2 la connaissance des différents paramètres des microstructures : les propriétés élastiques des squelettes, la porosité, ainsi que la géométrie des pores. Pour cette caractérisation, nous nous appuyerons dans la suite de ce travail sur ces résultats expérimentaux pour identifier le comportement des argiles à l'échelle de la microstructure.

4.3 Application du processus itératif à l'étude du comportement élastique des argiles

Pour identifier les paramètres élastiques des squelettes, nous suivons une démarche inverse d'homogénéisation en s'appuyant sur l'approche d'homogénéisation itérative et sur les mesures expérimentales macroscopiques. Avant de décrire cette identification, nous précisons tout d'abord la schématisation retenue pour la géométrie des microstructures des argiles.

4.3.1 Représentation de la microstructure

D'après les diverses micrographies réalisées par microscopie électronique à balayage et à transmission sur les échantillons d'argiles choisis, la structure des argiles apparaît constituée d'arrangements de particules elles-mêmes formées d'unités cristallines élémentaires. Ces arrangements de particules constituent le squelette de l'argile. Les espaces vides résultants de la disposition aléatoire des différents arrangements des particules constituent la porosité. Pour pouvoir mettre en œuvre des techniques simplifiées d'homogénéisation comme nous le souhaitons, il nous faut idéaliser cette géométrie. D'une part, nous considérons le squelette comme un milieu continu homogène. D'autre part, nous faisons une hypothèse simplificatrice importante sur la géométrie des pores en la supposant sphérique, *Figure 4.10*.

On trouve bien évidemment dans la littérature des modèles plus complexes et plus réalistes de microstructures pour l'étude micromécanique des argiles. Moyne et Murad (Moyne et Murad, 2006 [81]) et Lemaire et al. (Lemaire et al., 2005 [72]) ont

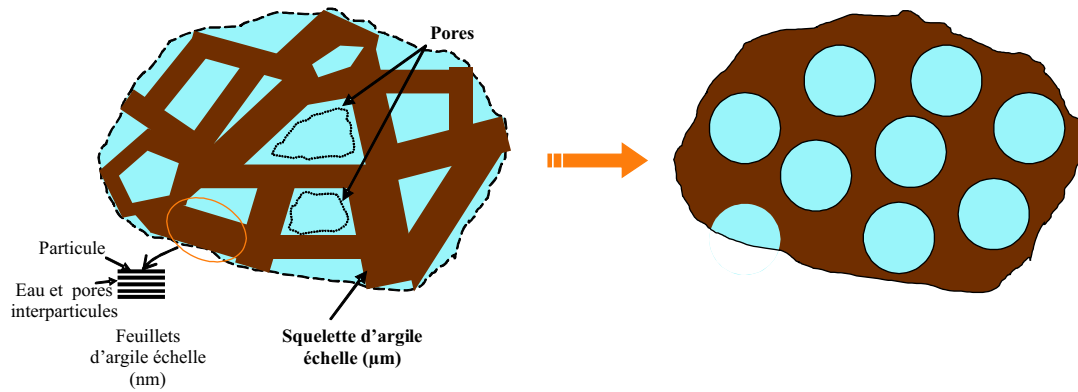


Figure 4.10 — Modélisation de la microstructure des argiles.

développé ainsi un modèle à deux et trois échelles pour l'étude des phénomènes électrohydro-chimio-mécaniques des argiles, essentiellement des argiles gonflantes. Ces auteurs considèrent à l'échelle microscopique le milieu comme un assemblage de feuillets d'argile séparés par une fine couche d'eau constituant un espace poreux interparticulaire. A l'échelle mésoscopique, le milieu est formé de particules d'argile homogénéisées formant une structure continue et de réseaux connectés de pores pour permettre l'étude de transfert dans ces milieux.

Cette notion de double porosité a été également introduite par Dormieux et al. (Dormieux et al., 2006 [40]) pour caractériser le mécanisme de déformation des particules par glissement des feuillets sur les feuillets et la variation de la distance interfoliaire en vue de déterminer le comportement homogénéisé de l'assemblage des particules et des pores. Cette description microstructurale semble bien appropriée pour les matériaux argileux de la classe des smectites, mais également pour les pâtes de ciment à boue de silicates de calcium hydratés.

La modélisation retenue ici est évidemment très idéalisée et peu réaliste. Elle va nous permettre de mettre en œuvre une approche micromécanique simple. Elle est à considérer comme une première étape dans la modélisation de ces matériaux. L'enrichissement de cette microstructure serait possible par la suite en considérant des pores de géométrie ellipsoïdale par exemple. L'approche d'homogénéisation itérative semi-explicite resterait dans ce cas possible en s'appuyant sur la solution d'Eshelby. Il pourrait être également possible de tenir compte d'une dispersion dans la taille des pores, le processus itératif étant aussi adapté à la prise en compte d'une dispersion granulométrique. On pourrait s'appuyer pour cela sur les travaux de Zouari (Zouari, 2006 [113]) menés au laboratoire sur des mousses syntactiques polydisperses, dans lesquels le processus itératif a été exploité pour introduire progressivement les hétérogénéités classées par familles selon leur caractéristique géométrique ou mécanique.

De part notre approche micromécanique, il nous faut également disposer des paramètres mécaniques élastiques des squelettes d'argiles, ainsi que de leur porosité. Ces paramètres vont être identifiés par approche inverse à partir du comportement macroscopique des argiles. Nous allons donc dans un premier temps identifier le comportement des argiles dans la phase élastique en s'appuyant sur les résultats d'essais.

4.3.2 Identification des propriétés élastiques des argiles

Pour identifier les propriétés élastiques macroscopiques des argiles à partir des résultats d'essais, nous suivons la méthodologie proposée par Pouya et al. (Pouya et al., 1998 [87]). Il nous faut tout d'abord expliciter la forme de la sollicitation dans un essai de compaction œdométrique.

Le chargement particulier de compaction œdométrique consiste, comme nous l'avons rappelé précédemment, à soumettre une éprouvette à un chargement axial à l'une de ces extrémités selon le schéma décrit à la *Figure 4.6(c)*. On note \vec{e}_3 l'axe de chargement. L'éprouvette est donc soumise à des conditions aux limites de déplacement imposé selon l'axe \vec{e}_3 , soit $\vec{u} = U\vec{e}_3$ sur la surface supérieure et de contact sans frottement sur les faces latérale et inférieure.

Le tenseur de déformation macroscopique imposé dans un essai de compaction œdométrique est donc de la forme :

$$\mathbf{E} = E \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (4.6)$$

Dans le cas d'un essai de compaction drainé que nous considérons ici, la pression porale reste constante et nous avons vu que l'on peut la supposer nulle.

Le tenseur de contraintes macroscopiques associé est donc, sous l'hypothèse d'un comportement élastique et isotrope du milieu équivalent, donné par :

$$\Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \lambda^* E = \left(k^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) E, \quad (4.7)$$

$$\Sigma_{33} = (\lambda^* + 2\mu^*) E = \left(k^* + \frac{4}{3} \mu^* \right) E, \quad (4.8)$$

les autres composantes étant nulles, où k^* et μ^* désignent les modules de compression et de cisaillement du milieu homogène équivalent. Dans les conditions de l'essai de compaction la contrainte moyenne $\Sigma_m = \text{tr } \Sigma / 3$ vaut $\Sigma_m = (2\Sigma_{11} + \Sigma_{33})/3$.

Dans le domaine élastique, la relation entre la contrainte horizontale Σ_{11} et la contrainte appliquée Σ_{33} s'exprime donc en fonction du coefficient de Poisson ν^* du milieu homogène équivalent à partir de (4.7) et (4.8) avec :

$$\Sigma_{11} = \frac{\nu^*}{1 - \nu^*} \Sigma_{33} \quad (4.9)$$

Ainsi, le coefficient de Poisson ν^* peut donc s'identifier à partir de la pente h_e de la courbe expérimentale de la contrainte radiale mesurée en fonction de la contrainte axiale dans le domaine élastique, *Figure 4.11(a)*, on a :

$$\nu^* = \frac{h_e}{1 + h_e} \quad \text{avec} \quad h_e = \left(\frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{33}} \right)_e \quad (4.10)$$

L'exploitation de cette courbe expérimentale dans le domaine plastique permet par

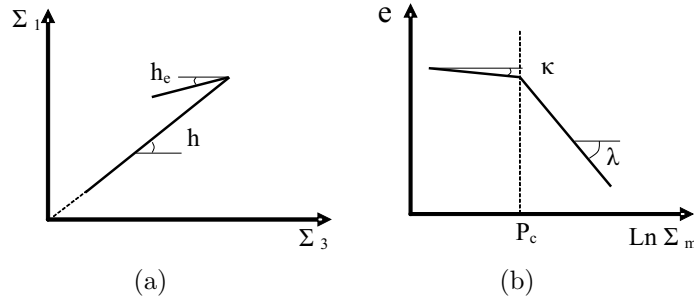


Figure 4.11 — Principe de l'identification des paramètres élastiques des argiles à partir des essais expérimentaux.

ailleurs d'identifier la pente de charge, notée h , définie par :

$$h = \left(\frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{33}} \right)_p \quad (4.11)$$

l'indice p faisant référence au domaine élastoplastique.

Pour identifier le module de compressibilité k^* , on va exploiter la relation suivante entre la variation de l'indice des vides et la variation de la déformation volumique :

$$\dot{e} = (1 + e) \operatorname{tr} \dot{\mathbf{E}} \quad (4.12)$$

Cette relation découle de la définition même de l'indice des vides (4.3) :

$$e = \phi / (1 - \phi) \quad (4.13)$$

où ϕ désigne la porosité du milieu définie par la relation :

$$\phi = 1 - \frac{|Y_s|}{|Y|} \quad (4.14)$$

avec $|Y_s|$ le volume de la partie solide du milieu et $|Y|$ le volume total du milieu. Si la phase solide est incompressible, sa masse volumique restant constante au cours du temps, on a :

$$\frac{|\dot{Y}|}{|Y|} = \frac{\dot{\phi}}{1 - \phi} \quad (4.15)$$

La variation du volume du milieu est par ailleurs reliée à la variation de la déformation volumique $\operatorname{tr} \mathbf{E}$ par :

$$\frac{|\dot{Y}|}{|Y|} = \operatorname{tr} \dot{\mathbf{E}} \quad (4.16)$$

De sorte que la combinaison des relations (4.13), (4.14), (4.15) et (4.16) conduit bien à la relation (4.12).

Par ailleurs, la courbe expérimentale de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale appliquée permet d'identifier le coefficient de rebond élastique κ qui est, par définition, la pente de la courbe dans la phase élastique de l'indice des vides en fonction

du Logarithme Népérien de la contrainte moyenne, *Figure 4.11(b)*. On a en effet :

$$\kappa = -\frac{de}{d \ln \Sigma_m} = -\Sigma_m \frac{\dot{e}}{\dot{\Sigma}_m} \quad (4.17)$$

Cette pente s'obtient en fonction des pentes h_e , h et de la pente c_r de compressibilité mesurées expérimentalement avec la relation :

$$\kappa = -\frac{2h + 1}{2h_e + 1} \frac{c_r}{\ln 10} \quad (4.18)$$

Le module de compressibilité s'obtient alors à partir de la loi de comportement dans le domaine élastique et des relations (4.12) et (4.18) :

$$k^* = \frac{\dot{\Sigma}_m}{\text{tr} \dot{\mathbf{E}}} = \frac{\dot{\Sigma}_m}{\dot{e}} (1 + e) = \frac{1 + e}{\kappa} \Sigma_m \quad (4.19)$$

On constate que le module de compressibilité k^* apparaît fonction de l'indice des vides et de la contrainte moyenne Σ_m et n'est pas constant. Dans un premier temps, nous le supposons constant et l'identifierons sur un des points (e, Σ_m) (indice des vides, contrainte appliquée) de la courbe expérimentale en début de phase de décharge. En pratique, nous utilisons le second point expérimental, noté P_2 , sur la courbe de décharge caractérisée par les valeurs (e^2, Σ_m^2) données au tableau 4.3.

Les modules élastiques macroscopiques des argiles peuvent donc être identifiés avec les relations (4.10) et (4.19) à partir des paramètres mesurés expérimentalement $(h, h_e, \kappa, e^2, \Sigma_m^2)$. Les valeurs ainsi obtenues pour les différentes argiles sont données au tableau 4.2 (Pouya et al., 1998 [87]). Cette identification macroscopique du comportement élastique réalisée sur les trois argiles fait apparaître des différences de comportement des trois argiles. Le Salins 14 possède le module de compressibilité le plus élevé, plus du double de celui des deux autres. C'est donc le matériau argileux le moins compressible.

Argiles	h	he	κ	e^2	Σ_m^2 (MPa)	k^* (MPa)	ν^*
Salins 14	0.61	0.16	0.045	0.61	14	452.3	0.14
Bouzule remanié	0.6	0.18	0.084	0.28	10	176	0.15
Marais Poitevin	0.58	0.21	0.073	0.55	6	126.7	0.17

Tableau 4.2 — Valeurs des paramètres identifiés à partir des résultats expérimentaux pour les différentes argiles. (Pouya et al., 1998 [87])

Pour plus de détails sur l'identification des paramètres de la modélisation macroscopique, on renvoie à Pouya et al. (Pouya et al., 1998 [87]) et Djéran-Maigre et Gasc-Barbier (Djéran-Maigre et Gasc-Barbier, 2000 [37]).

Le comportement élastique macroscopique étant identifié, nous nous proposons maintenant d'identifier par démarche inverse d'homogénéisation le comportement élastique des squelettes.

4.3.3 Identification des propriétés élastiques des squelettes

Cette identification est menée en utilisant l'approche itérative d'homogénéisation. On va chercher à adapter les paramètres élastiques des squelettes (k_s, μ_s) de manière à ce que le comportement macroscopique (k^*, ν^*) obtenu par l'approche micromécanique s'identifie au mieux avec les valeurs de ces modules déduites des mesures expérimentales et données au tableau 4.2. Le résultat de cette identification menée par ajustements successifs est présenté au tableau 4.3 pour les différentes argiles.

En pratique, on a utilisé le second point expérimental sur la courbe de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale (*Figure 4.8(b,d,f)*) dans la phase élastique de décharge. Le point P_2 correspond aussi au couple (porosité-contrainte axiale) (ϕ^2, Σ_{33}^2) . La porosité initiale ϕ^2 des argiles est obtenue à partir de la mesure de l'indice des vides en ce point avec la relation (4.13) entre l'indice des vides et la porosité.

On retrouve à l'échelle du squelette, un comportement plus incompressible pour l'argile Salins 14 avec un module de compressibilité k_s beaucoup plus élevé que celui des deux autres argiles. On peut constater que le rapport entre les modules est cette fois de presque 4 à l'échelle des squelettes alors qu'il n'était que 2 à l'échelle macroscopique.

Argile	e^2	ϕ^2	Σ_{33}^2 (MPa)	k_s (MPa)	μ_s (MPa)
Salins 14	0.61	0.38	18	1150	1267
Bouzule	0.28	0.22	10	238.5	231.6
Le Marais Poitevin	0.55	0.355	7.5	284	258

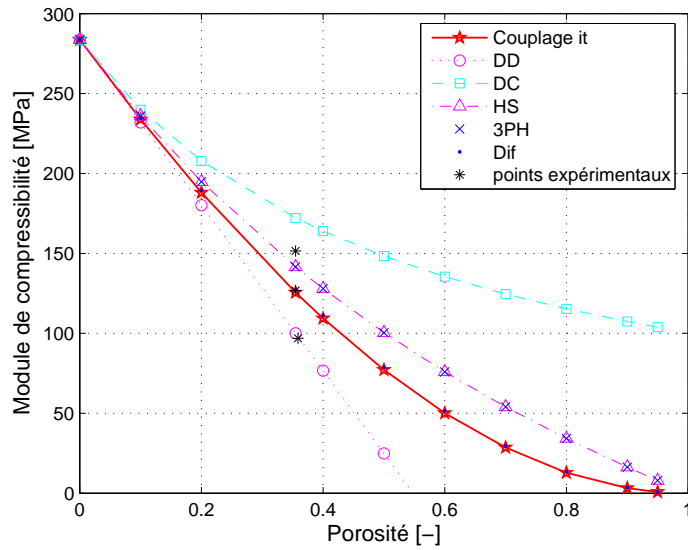
Tableau 4.3 — Paramètres élastiques des squelettes identifiés à partir du 2^{ème} point P_2 expérimental en début de décharge.

A partir de cette identification des propriétés élastiques des squelettes, nous illustrons le comportement global des argiles en mettant en œuvre les différentes approches d'homogénéisation linéaires comme nous l'avons fait au chapitre 2.

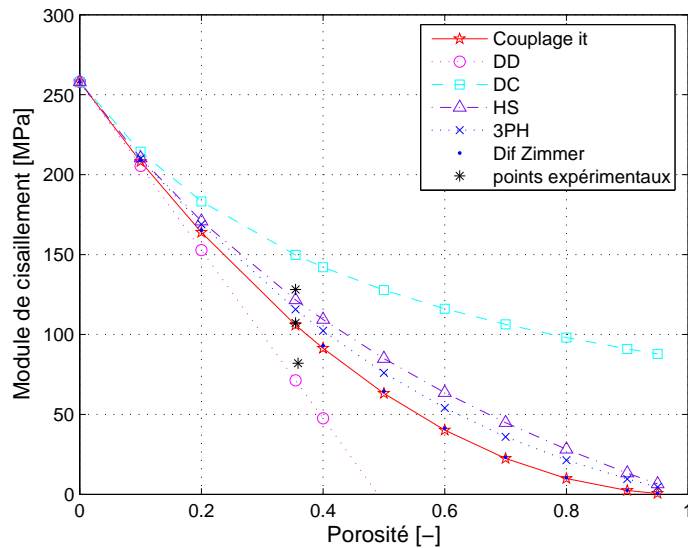
Les évolutions des modules de compressibilité et de cisaillement équivalent du Marais Poitevin en fonction de la porosité obtenues par les approches des distributions diluées en déformation (DD) et en contrainte (DC), la borne supérieure de Hashin Shtrikman (HS), le schéma des trois phases (3PH) et le schéma différentiel (Dif) couplées ou non au processus itératif (it) sont présentées aux *Figures 4.12*. Sur ces courbes, on a superposé les trois premiers points expérimentaux du début de la décharge. La concordance est évidemment assurée avec l'approche itérative pour le point utilisé pour l'identification, alors que les prédictions pour les deux autres points expérimentaux associés à des porosités différentes présentent un écart relatif de l'ordre de 20% comme l'indique le tableau 4.4. Malgré tout, les points expérimentaux se situent bien dans le faisceau des courbes d'homogénéisation.

Écarts [%]	$P_1(0.354, 10 \text{ MPa})$	$P_2(0.355, 7.5 \text{ MPa})$	$P_3(0.358, 5 \text{ MPa})$
k^*	20	0.9	21
μ^*	21	1	22

Tableau 4.4 — Écarts relatifs entre les valeurs expérimentales et les prédictions de l'homogénéisation linéaire itérative sur les premiers points $P_i(\phi^i, \Sigma_{33}^i)$ des courbes de décharge. Argile le Marais Poitevin.



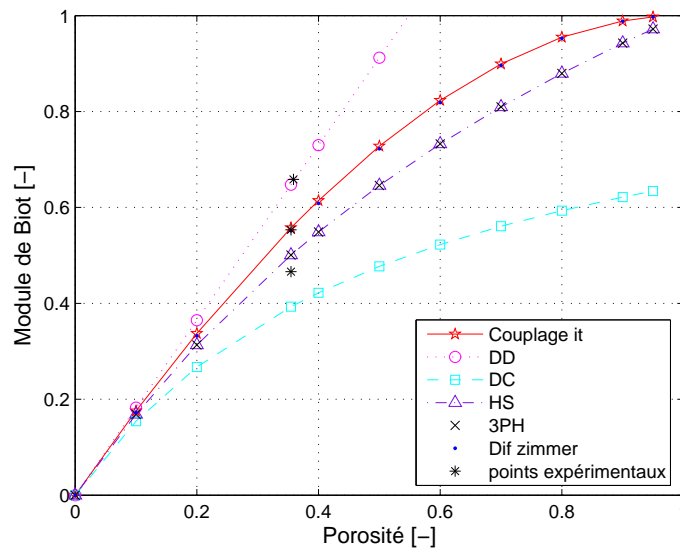
(a)



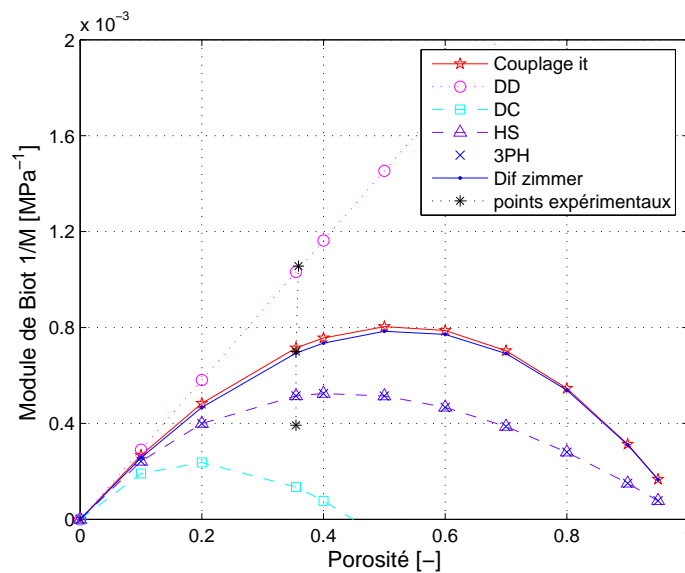
(b)

Figure 4.12 — Évolution des modules de compressibilité et de cisaillement en fonction de la porosité. Confrontation des modèles micromécaniques et des essais. Argile le Marais Poitevin.

Ces écarts s'expliquent par le fait que, dans notre identification par approche d'homogénéisation inverse, nous avons supposé de façon implicite que le comportement effectif était indépendant du chargement. Les méthodes d'homogénéisation ont été ici exploitées dans le domaine linéaire. Or, compte-tenu des résultats de l'identification obtenus à partir des travaux de Pouya et al. (Pouya et al., 1998 [87]), il apparaît une dépendance du module k^* en fonction du chargement et de la porosité à travers la relation (4.19). Notre hypothèse de considérer un module constant indépendant du chargement est évidemment contredite.



(a)



(b)

Figure 4.13 — Évolution du coefficient et du module de Biot en fonction de la porosité. Confrontation des modèles micromécaniques et des essais. Argile le Marais Poitevin.

Ces écarts entre la modélisation micromécanique linéaire et les essais se retrouvent naturellement sur la *Figure 4.13* où sont présentées les évolutions du coefficient et du module de Biot en fonction de la porosité obtenues pour les mêmes approches linéaires couplées ou non au processus itératif.

L'hypothèse de linéarité du comportement en phase élastique de décharge adoptée dans la modélisation micromécanique apparaît donc peu représentative du comportement des argiles. Avant d'examiner des pistes pour enrichir la modélisation, nous nous intéressons au comportement des argiles sous chargement de compaction avec cette

première approche linéaire.

Le comportement sous chargement de compaction œdométrique s'obtient par combinaison des deux chargements élémentaires hydrostatique et de cisaillement, comme nous allons le voir au paragraphe suivant.

4.3.4 Comportement sous chargement de compaction œdométrique

Le comportement sous chargement œdométrique est caractérisé par le module œdométrique macroscopique $E_{\text{œd}}^*$, ou module de déformation uniaxiale effective, noté P_w (Movko et al., 1998 [77]), qui relie la contrainte axiale à la déformation appliquée, soit :

$$\Sigma_{33} = E_{\text{œd}}^* E \quad (4.20)$$

Soit donc compte-tenu de (4.7) :

$$E_{\text{œd}}^* = \left(k^* + \frac{4}{3} \mu^* \right) \quad (4.21)$$

Le module œdométrique peut donc être obtenu explicitement par des approches d'homogénéisation en procédant à une combinaison des estimations des modules effectifs k^* et μ^* .

Ainsi, par exemple, avec l'approximation des distributions diluées en approche déformation, on a d'après les expressions données au chapitre 1 :

$$E_{\text{œd}}^{DD*} = \frac{3k_s + 4\mu_s}{3} - \phi \left[k_s \left(1 + \frac{3k_s}{4\mu_s} \right) + \frac{4}{3} \mu_s \left(\frac{\nu_s - 1}{5\nu_s - 7} \right) \right] \quad (4.22)$$

Dans les applications qui suivent, nous comparerons cette expression à celle proposée par Willis (Willis, 1964 [106]) qui découle du modèle d'homogénéisation de Mori-Tanaka (Mori et Tanaka, 1973 [79]) :

$$E_{\text{œd}}^* = E_s \frac{(1 - \nu_s)(2\phi^2 - \phi - 1)}{(1 + \nu_s) [\phi^2(4\nu_s - 3) - 2\phi [2(\nu_s - 1)^2 - \nu_s(1 - 2\nu_s)] - 1 - 2\nu_s]} \quad (4.23)$$

où E_s et ν_s désignent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du squelette.

La *Figure 4.14* présente l'évolution du module œdométrique pour les trois argiles en fonction de la porosité par l'approximation diluée en approche déformation (DD) et approche contrainte (DC), la borne supérieure de Hashin-Shtrikman (HS), le schéma autocohérent (AC), le schéma des trois phases (3PH), l'approche de Willis (Willis) et le schéma différentiel (Dif) avec et sans couplage du processus itératif. On a également placé les valeurs de ce module obtenues à partir des courbes expérimentales. On constate, comme pour les autres modules, que le processus itératif conduit à convergence à une même prédiction du module œdométrique par toutes les approches d'homogénéisation. Comme précédemment, seul le second point (P_2) utilisé pour l'identi-

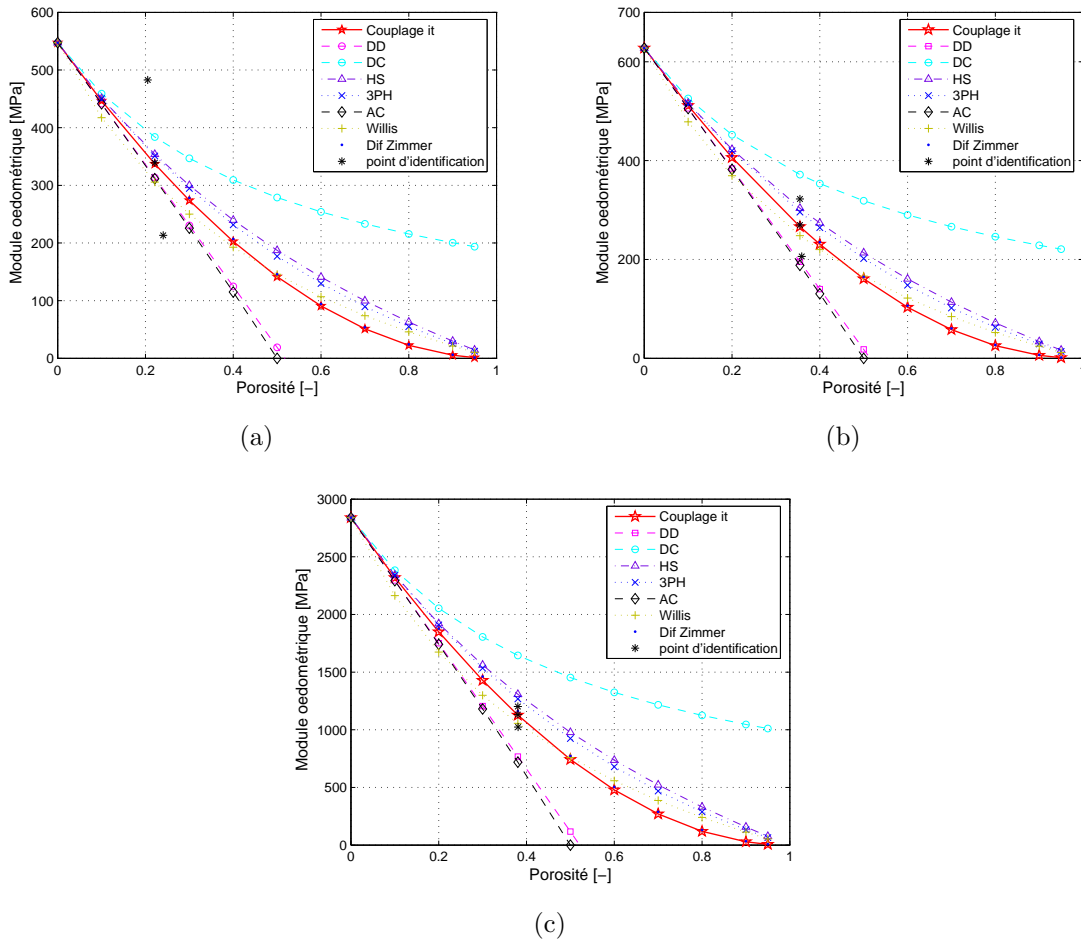


Figure 4.14 — Évolution du module œdométrique en fonction de la porosité pour les argiles : Bouzule (a) Marais Poitevin (b) et Salins 14 (c).

fication colle à l'estimation obtenue par l'approche d'homogénéisation itérative et des écarts non négligeables sont observés sur les deux autres points. Par ailleurs, ces écarts varient avec la nature des argiles comme on peut le constater sur le tableau 4.5, ce qui traduit là encore de façon implicite des non-linéarités de comportement plus ou moins importantes selon les argiles.

Écarts E_{oed}^* [%]	Salins 14	Marais Poitevin	Bouzule
$P_1(0.354, 10 MPa)$	10	21	37
$P_2(0.355, 7.5 MPa)$	0.1	0.6	0.4
$P_3(0.358, 5 MPa)$	7	22	33

Tableau 4.5 — Écarts relatifs pour le module œdométrique entre les valeurs expérimentales et les prédictions de l'homogénéisation linéaire itérative sur les 3 premiers points de la décharge élastique, $P_i(\phi^i, \Sigma_{33}^i)$.

En conclusion de cette toute première confrontation, les approches d'homogénéisation linéaire, tout comme l'approche itérative, utilisées par démarche inverse pour identifier le comportement élastique des différents squelettes, ne permettent pas de caractériser précisément le comportement élastique des argiles. La linéarité même

de ces approches conduit à des propriétés élastiques macroscopiques indépendantes du chargement. Par ailleurs, dans ces modèles, la porosité des milieux est supposée fixée, égale à la porosité initiale tout au cours du chargement. Il n'est donc pas possible de simuler une évolution de l'indice des vides avec la contrainte axiale appliquée comme observée expérimentalement sur les courbes de la *Figure 4.8*. L'indice des vides reste pour nous constant au cours du chargement.

Pour ces raisons, nous avons cherché à enrichir la modélisation en tenant compte de l'évolution de la porosité avec le chargement. Nous nous inspirons pour cela de la démarche proposée par Dormieux et al. (Dormieux et al., 2002 [41]) en introduisant une loi d'état macroscopique complémentaire.

4.3.5 Influence de l'évolution de la porosité au cours du chargement

Nous commençons par décrire le principe de la méthode utilisée pour intégrer, dans le processus d'homogénéisation linéaire, l'évolution de la porosité.

4.3.5.1 Actualisation de la porosité dans la modélisation micromécanique linéaire

Dans le cas particulier de pores sphériques, on peut évaluer la variation de porosité lorsque le milieu est soumis à un chargement hydrostatique en exploitant la solution de Christensen, 1979 [28]. Ainsi, si on note ϕ la porosité du matériau et $\Delta\phi$ la variation de porosité induite par le chargement, on a :

$$\Delta\phi = \phi \mathbf{1} : \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle_{Y_T} = \phi \mathbf{1} : (\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}^1 \rangle\rangle_{Y_T} + p \langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}^2 \rangle\rangle_{Y_T}) \quad (4.24)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^1$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ désignent les champs de déformations solutions respectivement des deux problèmes élémentaires introduits au chapitre 1, le problème P_1 étant associé à une pression porale nulle et une déformation imposée non nulle et le problème P_2 associé à une pression porale unitaire et une déformation imposée nulle et où la notation $\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle_{Y_T}$ est adoptée pour désigner la quantité suivante sur le bord du pore :

$$\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle_{Y_T} = \frac{1}{|Y_T|} \int_{\partial Y_T} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n})_S ds$$

On rappelle que la loi de comportement constitutive du milieu poreux en approche déformation s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^* : \mathbf{E} - p \mathbf{B}_d^* \quad (4.25)$$

avec

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_s - \phi \mathbb{C}_s : \langle\langle \mathbb{A}(y) \rangle\rangle_{Y_T} \quad (4.26)$$

et

$$\mathbf{B}_d^* = \mathbf{1} - \mathbb{S}_s : \mathbb{C}^* : \mathbf{1}, \quad (4.27)$$

où \mathbb{A} est le tenseur de localisation associé au problème P_1 .

Par les équations (4.26) et (4.27) données au chapitre 1, on obtient :

$$\phi \mathbf{1} : \langle \langle \boldsymbol{\varepsilon}^1 \rangle \rangle_{Y_T} = \phi \mathbf{1} : \langle \langle A \rangle \rangle_{Y_T} : \mathbf{E} = \phi \mathbf{1} : (\mathbb{I} - \mathbb{S}_s : \mathbb{C}^*) : \mathbf{E} = \mathbf{B}_d^* : \mathbf{E} \quad (4.28)$$

Par ailleurs, on a :

$$\phi \mathbf{1} : \langle \langle \boldsymbol{\varepsilon}^2 \rangle \rangle_{Y_T} = \phi \mathbf{1} : (1 - \phi) \langle \boldsymbol{\varepsilon}^2 \rangle_{Y_S} = \phi \mathbf{1} : (1 - \phi) \mathbb{C}_s^{-1} : \langle \boldsymbol{\sigma}^2 \rangle_{Y_S} \quad (4.29)$$

Or, d'après les équations mêmes du problème, P_2 , on a :

$$(1 - \phi) \langle \boldsymbol{\sigma}^2 \rangle_{Y_S} = \langle \boldsymbol{\sigma}^2 \rangle_Y - \phi \langle \boldsymbol{\sigma}^2 \rangle_{Y_T} = \mathbf{B}_d^* - \phi \mathbf{1} \quad (4.30)$$

De sorte que, en combinant (4.24), (4.28), (4.29) et (4.30), on obtient :

$$\Delta \phi = \mathbf{B}_d^* : \mathbf{E} + p \mathbf{1} : \mathbb{C}_s^{-1} : (\mathbf{B}_d^* - \phi \mathbf{1}) \quad (4.31)$$

ou encore en introduisant le module de Biot M défini par Dormieux et al. (Dormieux et al., 2002 [41]) :

$$\Delta \phi = \mathbf{B}_d^* : \mathbf{E} + \frac{p}{M} \quad (4.32)$$

$$\text{avec } \frac{1}{M} = \mathbf{1} : \mathbb{C}_s^{-1} : (\mathbf{B}_d^* - \phi \mathbf{1}) \quad (4.33)$$

La relation (4.32) constitue une équation d'état complémentaire qui permet de prendre en compte l'évolution de la porosité au cours du chargement. Cette relation peut également être obtenue par une démarche purement macroscopique (Coussy, 1991 [32]).

Si le comportement macroscopique du milieu poreux et celui du squelette sont tous les deux isotropes, les équations d'état macroscopiques, en utilisant les notations classiques, deviennent alors :

$$\Sigma_m = k^*(\phi) E_m - p \left(1 - \frac{k^*(\phi)}{k_s} \right) \quad (4.34)$$

$$\Sigma_{eq} = 3 \mu^*(\phi) E_{eq} \quad (4.35)$$

$$\Delta \phi = \left(1 - \frac{k^*(\phi)}{k_s} \right) E_m + \frac{p}{k_s} \left(1 - \frac{k^*(\phi)}{k_s} - \phi \right) \quad (4.36)$$

Ce système d'équations est un système non linéaire couplé que l'on peut résoudre en procédant par incréments de porosité et de chargement. Pour une valeur de la déformation imposée donnée E_m et une porosité ϕ donnée associée, on calcule les modules effectifs $k^*(\phi)$ et $\mu^*(\phi)$ par les formules d'homogénéisation linéaires parmi celles données au chapitre 1. On exploite alors l'équation supplémentaire sur la variation de porosité (4.36) pour actualiser la porosité, puis on réitère le processus.

C'est cette démarche que nous avons mise en œuvre pour simuler la variation de porosité avec le chargement observée sur les résultats des essais oedométriques.

4.3.5.2 Application au comportement des argiles

Du fait des conditions d'essais drainés et des résultats expérimentaux sur l'évolution de la pression interstitielle en fonction du temps présentés à la *Figure 4.7*, nous supposons la pression porale nulle. Nous estimons la porosité initiale $\phi = \phi_0$ à partir du point expérimental de début de décharge (P_2) relevé sur la courbe de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale appliquée (tableau 4.3). On calcule alors la déformation imposée dans l'essai œdométrique par les relations (4.20) et (4.21), soit :

$$E = \frac{1}{E_{oed}^*} \Sigma_{33} = \frac{1}{k^*(\phi) + \frac{4}{3}\mu^*(\phi)} \Sigma_{33} \quad (4.37)$$

On estime ensuite k^* et μ^* par les formules d'homogénéisation linéaire, puis on actualise la porosité avec la relation (4.36) qui se réduit ici à :

$$\Delta\phi = \left(1 - \frac{k^*(\phi)}{k_s}\right) E \quad (4.38)$$

A cette nouvelle porosité correspond un chargement axial Σ_{33} . On peut alors réitérer la boucle de calcul avec la porosité actualisée. Cette démarche peut être par ailleurs enrichie en utilisant le processus itératif d'homogénéisation pour calculer $k^*(\phi)$ et $\mu^*(\phi)$.

Nous avons mis en oeuvre cette procédure itérative avec actualisation de la porosité en cours du chargement pour simuler le comportement élastique des argiles.

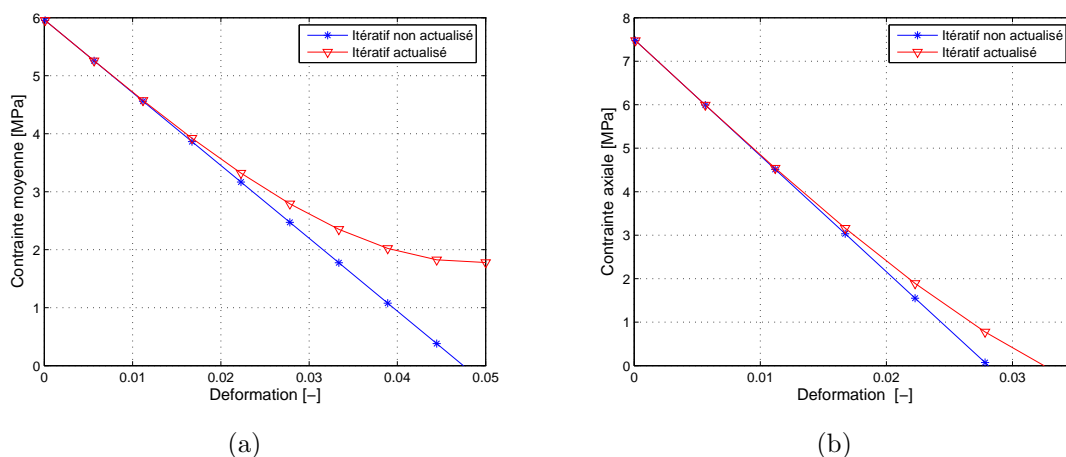


Figure 4.15 — (a) Évolution de la contrainte moyenne en fonction de la déformation imposée au cours de la décharge (b) Évolution de la contrainte axiale en fonction de la déformation imposée au cours de la décharge. Argile le Marais Poitevin.

Nous présentons tout d'abord sur la *Figure 4.15(a)*, l'évolution de la contrainte moyenne Σ_m en fonction de la déformation moyenne imposée au cours de la décharge pour l'argile du Marais Poitevin. L'actualisation de la porosité au cours du chargement conduit à une réponse non linéaire (itératif actualisé) contrairement à celle obtenue sans actualisation de la porosité (itératif non actualisé). On observe en effet qu'avec l'approche itérative actualisée, au cours de la décharge, la déformation augmentant, ainsi que la porosité, la pente de la courbe qui caractérise le module de compressibilité

diminue, alors qu'elle reste constante avec le schéma itératif initial. Une évolution non linéaire est également obtenue pour le module oedométrique au cours de la décharge comme le montre la *Figure 4.15(b)*.

Cette non linéarité permet d'observer maintenant une évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale appliquée comme le montre la *Figure 4.16*. On y présente les évolutions des trois argiles obtenues avec le modèle itératif linéaire sans actualisation de la porosité (itératif non actualisé) puis enrichi par l'actualisation de la porosité (itératif actualisé), le modèle des distributions diluées en approche contrainte sans couplage au processus itératif mais avec l'actualisation de la porosité (DC actualisé). On superpose sur ces mêmes courbes les résultats expérimentaux en charge et en décharge. Ces résultats sont présentés avec une échelle logarithmique pour la contrainte appliquée en abscisse en (a, c, e) et une échelle linéaire en (b, d, f) .

On observe tout d'abord comme cela a été déjà dit que le schéma itératif non enrichi par l'actualisation de la porosité ne permet pas de reproduire l'évolution observée expérimentalement de l'indice des vides avec le chargement. L'actualisation de la porosité introduite dans le schéma des distributions diluées apporte une première amélioration sur le début de la courbe de décharge. Cette amélioration est plus ou moins significative suivant les argiles. Le Salins 14 et le Marais Poitevin apparaissent ainsi relativement bien décrites sur les trois premiers points expérimentaux. Mais ce schéma dilué enrichi reste encore insuffisant pour décrire l'ensemble de la courbe. Le processus itératif avec actualisation de la porosité vient apporter à ce schéma une nouvelle correction qui permet de simuler de façon relativement satisfaisante l'évolution de l'indice des vides en début de la phase de décharge.

On peut apprécier également cet apport de l'itératif sur les mêmes courbes présentées cette fois sans l'échelle logarithmique pour les abscisses (*Figure 4.16(b, d, f)*) et avec un zoom sur les indices des vides. Sur ces courbes, on constate que le processus itératif actualisé restitue bien l'évolution non linéaire de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale appliquée en début de la décharge, compte tenu par ailleurs des incertitudes liées aux mesures et à l'identification et ce pour les trois argiles. Le comportement de la Bouzule apparaît le mieux simulé sur l'ensemble de la décharge. En revanche, la modélisation micromécanique linéaire enrichie par l'actualisation de la porosité au cours du chargement restitue moins bien le comportement du Salins 14 lorsque la décharge est déjà amorcée ; l'écart entre la simulation et l'expérience pouvant atteindre 30% lorsque la contrainte appliquée est ramenée à 6 MPa.

Enfin, on présente à la *Figure 4.17* l'évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale obtenue par les schémas dilués et itératif actualisés, ainsi que l'itératif non actualisé. L'évolution observée expérimentalement de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale est complexe au cours de la décharge. La modélisation élastique simule seulement le début de cette phase. L'apport de l'actualisation de la porosité apparaît ici nettement moins significatif. Ce résultat traduit la faible non linéarité dans la dépendance du rapport

$$\frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{33}} = \frac{3k^* - 2\mu^*}{3k^* + 4\mu^*}$$

en fonction de la porosité au cours de la décharge. Malgré tout, le modèle itératif actualisé restitue le mieux la pente expérimentale h_e .

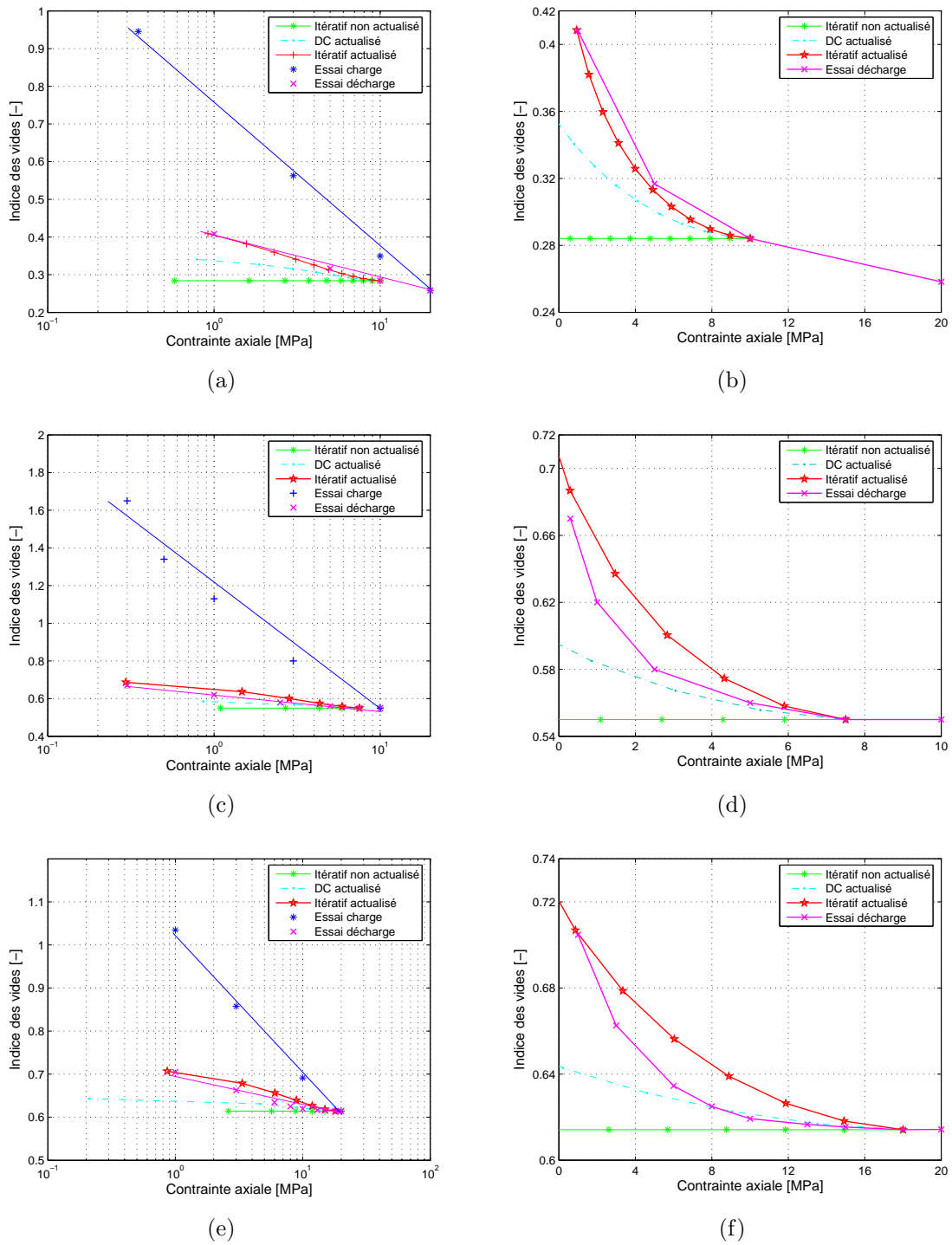


Figure 4.16 — Évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale pour les argiles : Bouzule (a,b), Marais Poitevin (c,d) et Salins 14 (e,f).

En conclusion, la prise en compte de l'évolution de la porosité au cours du chargement a apporté une première correction par rapport à une homogénéisation purement linéaire. Elle a permis de proposer une simulation relativement satisfaisante de l'évolution de l'indice des vides au cours du chargement mesurée expérimentalement pour les trois argiles. Le début de la courbe contrainte radiale-contrainte axiale a pu

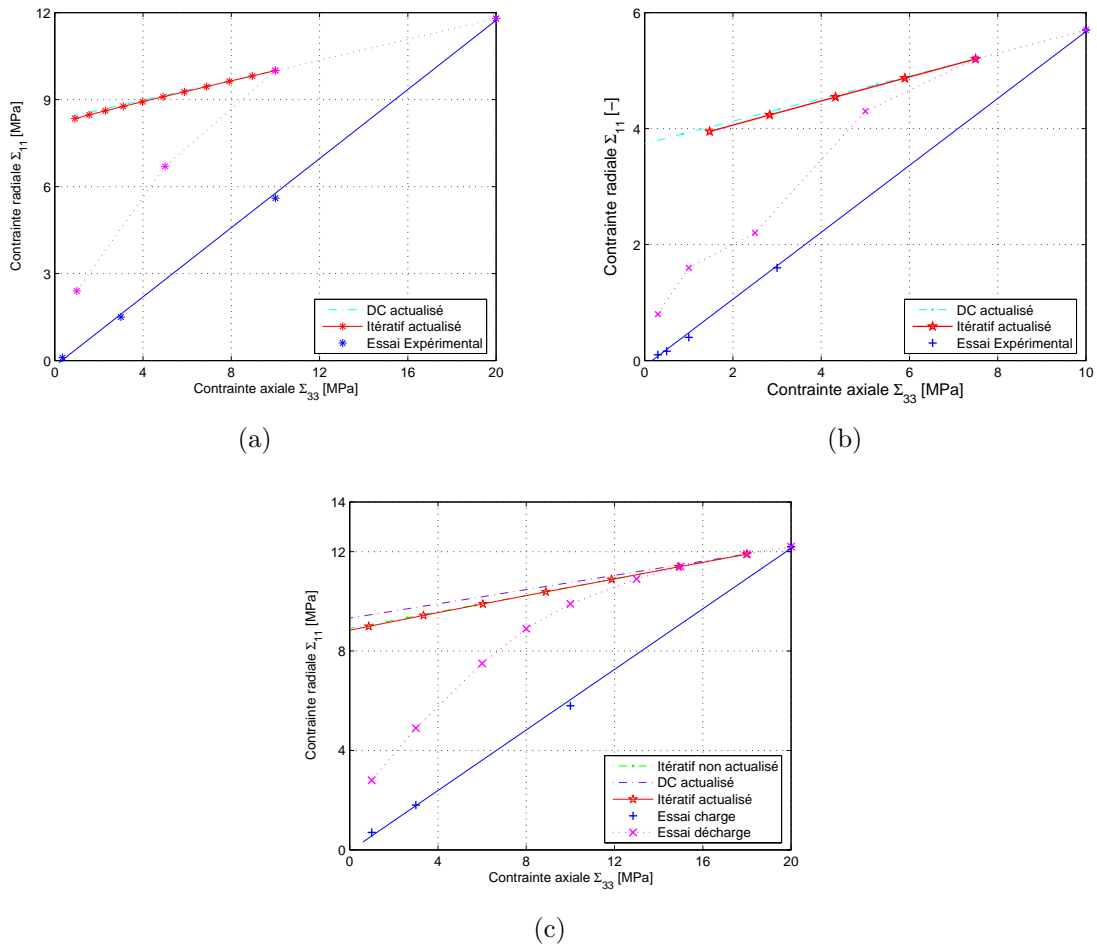


Figure 4.17 — Évolution de la contrainte radiale en fonction de contrainte axiale pour les argiles : Bouzule (a), Marais Poitevin (b) et Salins 14 (c).

également être reproduite. Néanmoins, la simulation du comportement élastique des argiles par cette approche micromécanique reste encore imprécise. Les hypothèses simplificatrices sur la représentation de la microstructure sont bien évidemment à remettre en cause en premier lieu. En particulier, dans le processus d'actualisation de la porosité au cours du chargement, les pores supposés sphériques initialement restent sphériques au cours de la compaction. Or, l'opération de compaction induit des réarrangements complexes des particules d'argiles et une modification de la microstructure qui a été totalement négligée dans le modèle. Par ailleurs, l'identification des paramètres retenus pour cette étude de la compaction, que se soit à l'échelle microscopique du squelette ou macroscopique, est délicate. Elle a été faite par simple calage ici et demanderait à être affinée.

Nous nous intéresserons maintenant au comportement de ces argiles dans la phase de chargement.

4.4 Application du processus itératif à l'étude du comportement élastoplastique des argiles

La modélisation du comportement élastoplastique des argiles observé pendant la phase de compaction consiste à appliquer cette fois la démarche d'homogénéisation itérative non linéaire développée au chapitre 3. Nous présentons tout d'abord dans cette partie la méthodologie suivie pour l'identification des paramètres plastiques des squelettes. Puis, une première caractérisation du comportement des argiles sous chargement œdométrique est faite par l'approche micromécanique et illustrée par une étude de sensibilité sur le paramètre d'écrouissage. La confrontation aux résultats des essais nous amène à enrichir le modèle par la prise en compte de l'évolution de la porosité au cours du chargement œdométrique.

4.4.1 Identification du comportement non linéaire des squelettes

D'après les identifications réalisées par Pouya et al. (Pouya et al., 1998 [87]), le comportement macroscopique des argiles apparaît suivre une loi élastoplastique sous chargement de compaction. A l'échelle microscopique, nous supposons pour le squelette un comportement également élastoplastique. Nous retenons le modèle de Ramberg-Osgood introduit au chapitre 3 par la relation (3.208). Nous supposons de plus le comportement du squelette élastique linéaire en chargement hydrostatique. Ce modèle pour le squelette est régi par les équations :

$$\varepsilon_m = \frac{1}{k_s} \sigma_m \quad (4.39)$$

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{3\mu_s} + \varepsilon_0 \left(\frac{(\sigma_{eq} - \sigma_y)^+}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (4.40)$$

où σ_y est la contrainte d'écoulement seuil, m un paramètre d'écrouissage, ε_0 et σ_0 des déformations et contraintes de référence.

Pour appliquer notre démarche micromécanique avec un tel modèle élastoplastique pour le squelette, il nous faut avoir identifié les modules élastiques de compressibilité k_s et de cisaillement μ_s du squelette, ainsi que les paramètres élastoplastiques ε_0 , σ_0 , m et σ_y . Pour les modules élastiques, nous conservons les valeurs identifiées précédemment et données au tableau 4.3.

Les argiles présentant un comportement non linéaire dès le début du chargement, une valeur faible, ne dépassant pas 1 MPa, est retenue pour la contrainte d'écoulement seuil σ_y . La contrainte de référence σ_0 est calculée à partir de la déformation ε_0 de référence par la relation élastique :

$$\sigma_0 = 3\mu_s \varepsilon_0 \quad (4.41)$$

La déformation de référence ε_0 est identifiée par approche inverse d'homogénéisation. Sa valeur est ajustée par simple calage de façon à s'approcher au mieux de la réponse macroscopique non linéaire expérimentale. Cette réponse macroscopique est obtenue

par l'approche d'homogénéisation sécante modifiée enrichie par le processus itératif présentée au chapitre 3. Les valeurs ainsi obtenues pour les déformation et contrainte de référence des différentes argiles étudiées sont données dans le tableau 4.6. En ce qui concerne le paramètre d'écroutissage m , nous procéderons à une étude de sensibilité des résultats vis-à-vis de ce paramètre.

Argile	σ_y (MPa)	ε_0	σ_0 (MPa)
Salins 14	1	0.001	3.81
Bouzule	0.5	0.005	3.81
Marais Poitevin	0.5	0.01	7.7

Tableau 4.6 — Valeurs identifiées des paramètres du modèle élastoplastique de Ramberg-Osgood pour les squelettes des différentes argiles.

Les porosités des argiles retenues pour les simulations sont cette fois celles enregistrées au début de l'essai de compaction. Les différentes argiles présentent des porosités initiales importantes comme le montre le tableau 4.7.

Argile	Salins 14	Marais Poitevin	Bouzule
ϕ_0	0.51	0.62	0.49

Tableau 4.7 — Porosité initiale des différentes argiles en début de chargement œdométrique.

Le comportement non linéaire du squelette étant identifié, l'approche d'homogénéisation non linéaire développée au chapitre 3 est mise en œuvre pour simuler le comportement des argiles sous chargement de compaction.

4.4.2 Comportement sous chargement de compaction œdométrique

Le chargement de compaction œdométrique est caractérisé d'après les relations (4.7) et (4.8) par un taux de triaxialité en déformation $T_E = 3/2$. On trace sur la *Figure 4.18* les évolutions des parties sphérique et déviatorique des contraintes en fonction respectivement des parties sphérique et déviatorique des déformations obtenues par les extensions sécantes classique et modifiée associées à la borne supérieure de Hashin (HS class et HS mod) et par ces mêmes extensions sécantes couplées au processus itératif (mod it et class it). L'argile considérée ici est celle de la Bouzule. Différents coefficients d'écroutissage sont examinés.

Comme attendu, un coefficient d'écroutissage important ($m = 0.7$) pour le squelette conduit à un comportement plus raide du milieu homogène équivalent que celui associé à un squelette avec un écroutissage moindre ($m = 0.3$). Les approches d'homogénéisation sécantes classique et modifiée diffèrent d'autant plus que le paramètre m est important. On observe également que les réponses non linéaires obtenues par la méthode sécante classique sont plus raides que celles données par l'extension sécante modifiée (*Figure 4.18*) comme déjà observé au chapitre 3. Par ailleurs, le couplage du processus itératif aux méthodes d'homogénéisation sécantes assouplit la réponse qu'elle soit obtenue par l'extension sécante classique ou par l'extension sécante modifiée.

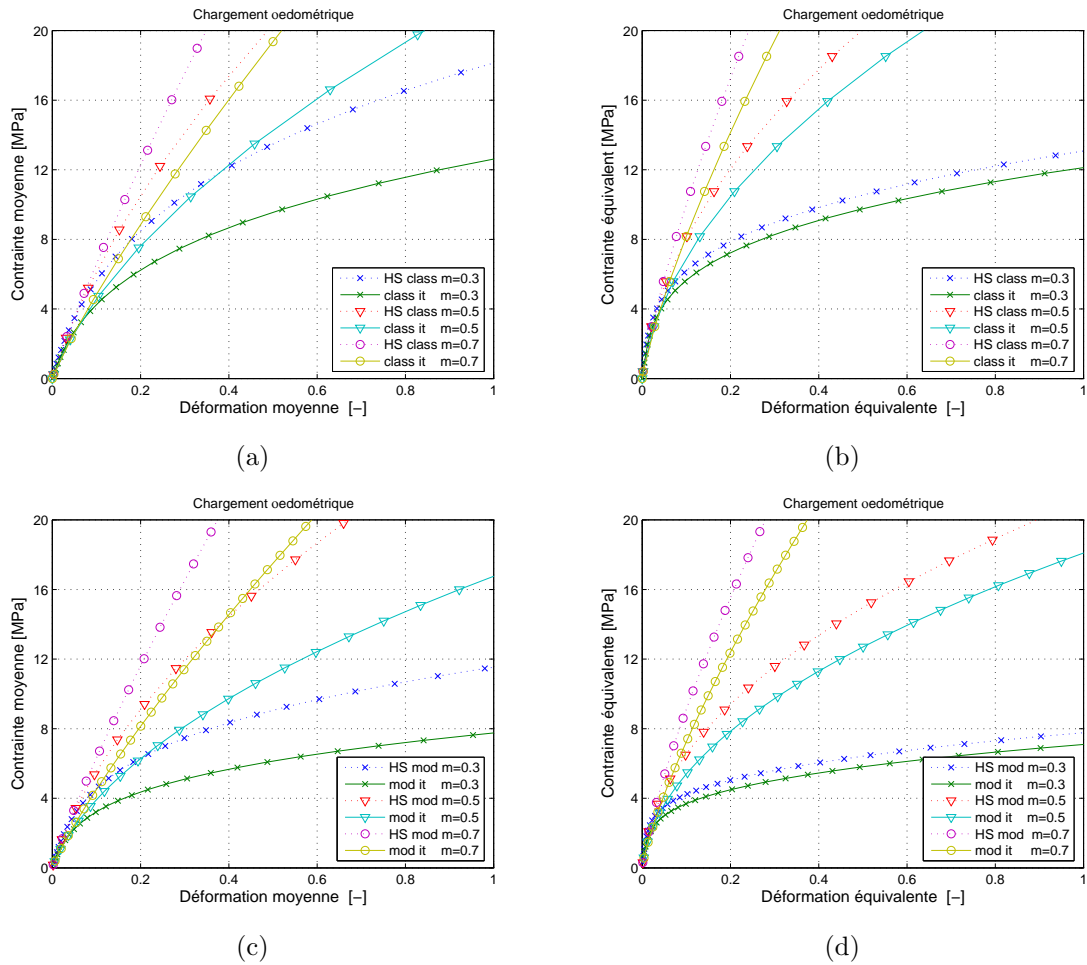


Figure 4.18 — Évolutions de la réponse non linéaire sous chargement œdométrique obtenues par les approches sécantes classique (a,b) et modifiée (c,d) couplées ou non au processus itératif. Argile la Bouzule.

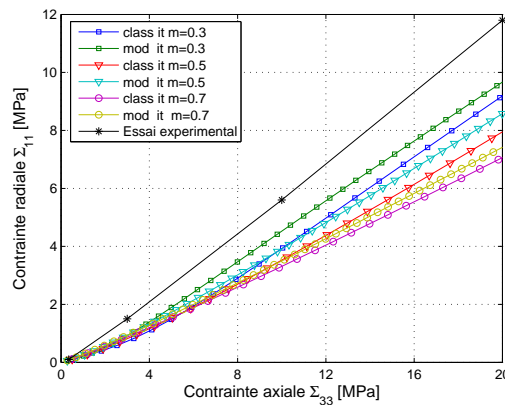


Figure 4.19 — Évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale pour différents coefficients d'écroutissage sous chargement de compaction. Argile la Bouzule.

Par la relation (4.7), on peut tracer à la Figure 4.19 l'évolution des contraintes radiale Σ_{11} en fonction de la contrainte axiale Σ_{33} obtenue par les approches sécantes clas-

sique et modifiée couplées au processus itératif pour différents coefficients d'écroûissage. Ces différentes courbes sont confrontées aux résultats d'essai de compaction. On remarque tout d'abord que les évolutions obtenues par les approches sécantes ne sont pas véritablement linéaires contrairement aux essais mais restent faiblement non linéaire dès que le chargement axial dépasse 4 MPa. Les simulations s'éloignent des résultats expérimentaux pour des coefficients d'écroûissage élevés comme $m = 0.7$. On observe par ailleurs que les évolutions obtenues par l'extension sécante modifiée itérée sont plus proches des résultats de l'essai que celles issues de l'extension sécante classique itérée. Des évolutions similaires, qui conduisent à des commentaires analogues, sont observées pour les deux autres argiles, le Salins 14 et le Marais Poitevin.

Par ailleurs, la modélisation non linéaire ne permet pas là encore de simuler une évolution de l'indice des vides en fonction du chargement et donc de la contrainte axiale. En effet, comme en élasticité linéaire, le modèle itératif non linéaire suppose la porosité fixée au cours du chargement. L'indice des vides reste donc constant au cours du chargement avec cette modélisation.

Par analogie avec les développements menés au paragraphe 4.3.5 dans le domaine linéaire, nous nous proposons d'enrichir le modèle en intégrant une équation d'état complémentaire de manière à simuler l'évolution de la porosité au cours du chargement observée expérimentalement.

4.4.3 Influence de l'évolution de la porosité

Nous suivons la démarche présentée au paragraphe 4.3.5 en travaillant cette fois avec les lois de comportement linéarisées par les approches sécantes.

D'après les développements du chapitre 3, on rappelle que la loi de comportement homogénéisée non linéaire s'écrit pour un milieu poreux de porosité ϕ :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p, \phi) : \mathbf{E} - p \mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p, \phi) \quad (4.42)$$

avec

$$\mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p, \phi) = \mathbf{1} - (\mathbb{C}_s^{sct})^{-1} : \mathbb{C}^*(\mathbf{E}, p, \phi) : \mathbf{1}, \quad (4.43)$$

La variation de la porosité s'obtient, par analogie avec (4.31), en terme de modules sécants sous la forme :

$$\Delta\phi = \mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p, \phi) : \mathbf{E} + p \phi \mathbf{1} : \mathbb{C}_s^{-1} : (\mathbf{B}_d^*(\mathbf{E}, p, \phi) - \phi \mathbf{1}) \quad (4.44)$$

Dans le cas d'un comportement isotrope du squelette et du milieu poreux équivalent, ces équations se réduisent à :

$$\Sigma_m = k^*(\mathbf{E}, p, \phi) E_m - p \left(1 - \frac{k^*(\mathbf{E}, p, \phi)}{k_s} \right) \quad (4.45)$$

$$\Sigma_{eq} = 3\mu^*(\mathbf{E}, p, \phi) E_{eq} \quad (4.46)$$

$$\Delta\phi = \left(1 - \frac{k^*(\mathbf{E}, p, \phi)}{k_s} \right) E_m + \frac{p}{k_s} \left(1 - \frac{k^*(\mathbf{E}, p, \phi)}{k_s} - \phi \right) \quad (4.47)$$

où k^* le module de compressibilité homogène équivalent et μ^* le module de cisaille-

ment dépendent de la porosité ϕ et sont des fonctions non linéaires du chargement macroscopique.

Nous avons vu au chapitre 3 que la construction de la réponse non linéaire (4.45), (4.46) s'effectue en pratique point par point en incrémentant la déformation effective moyenne sur le squelette, c'est-à-dire le moment du 1^{er} ordre $\bar{\varepsilon}_{eq}^1$ dans l'approche classique et le moment du 2^{ème} ordre $\bar{\varepsilon}_{eq}^2$ dans l'approche modifiée. On rappelle que la procédure consiste à chaque incrément de ces moments à calculer le comportement effectif associé pour une porosité ϕ donnée, puis la déformation macroscopique E_{eq} associée. On peut alors à ce stade calculer la variation de porosité en exploitant (4.47) avec :

$$\Delta\phi = \left(1 - \frac{k^*(E, \phi)}{k_s}\right) T_E E_{eq} \quad (4.48)$$

la pression de pore étant supposée ici nulle compte tenu des conditions de l'essai drainé.

La nouvelle porosité peut être alors utilisée au pas de chargement suivant pour estimer les modules effectifs avec le processus itératif d'homogénéisation. Cette actualisation de la porosité au cours du chargement permet de simuler cette fois une évolution de l'indice des vides des argiles.

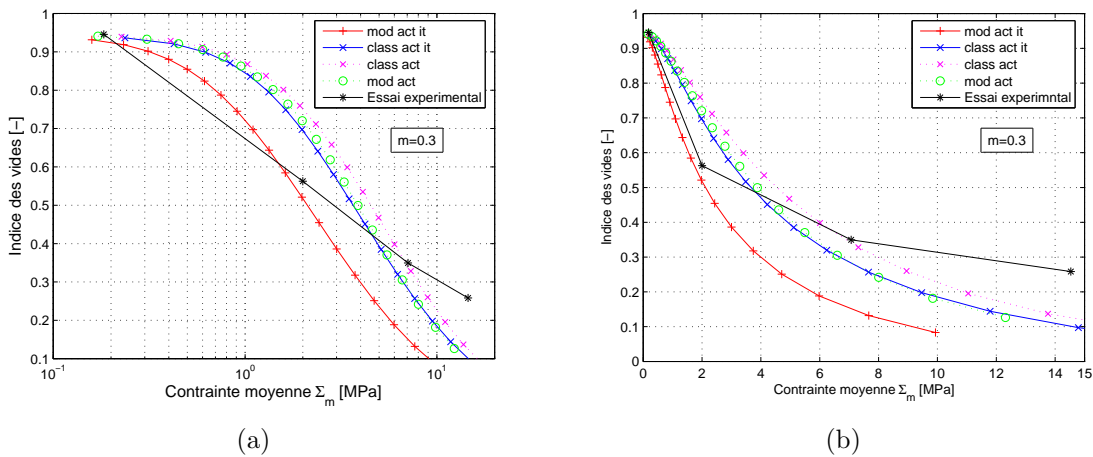


Figure 4.20 — Évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte moyenne en échelle logarithmique (a) et échelle linéaire (b). Confrontation des approches sécantes et des essais. Argile la Bouzule.

On présente sur la *Figure 4.20* cette évolution en fonction de la contrainte moyenne en échelle logarithmique (a) et en échelle linéaire (b) obtenues par les approches sécantes classique et modifiée avec actualisation de la porosité (class act), (mod act) et également enrichies par le processus itératif (class act it), (mod act it). Ces résultats sont présentés pour l'argile la Bouzule avec une valeur du coefficient d'écroutissement de $m = 0.3$ et sont confrontés à la courbe expérimentale.

On constate tout d'abord que la simulation avec actualisation de la porosité couplée ou non au processus itératif ne permet pas de simuler une évolution linéaire de l'indice des vides en fonction du logarithme de la contrainte appliquée comme observée expérimentalement en accord avec la théorie de Terzaghi. On obtient par la modélisation une évolution non linéaire. Cependant, l'ajout du processus itératif permet de rapprocher les simulations des résultats expérimentaux. Plus particulièrement,

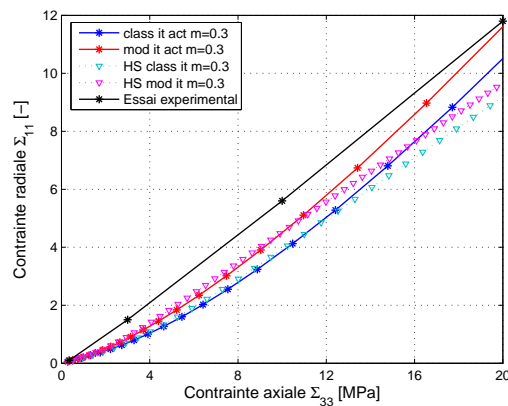


Figure 4.21 — Évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale appliquée. Confrontation des simulations par approche sécante et des essais. Argile la Bouzule.

l'approche sécante modifiée itérée et actualisée fournit la réponse la plus proche en améliorant significativement l'approche non itérée et l'approche classique en début de chargement et ce jusqu'à un effort appliqué de l'ordre de 3 MPa. Sur la courbe en échelle linéaire, on peut constater que cette amélioration s'observe surtout sur les deux premiers points expérimentaux. Au delà, l'approche modifiée itérée et actualisée de la courbe expérimentale s'éloigne de la courbe expérimentale et l'écart à l'expérimental peut dépasser 50% en fin de compaction. Seul le début de la compaction, lorsque les déformations imposées à l'argile restent modérées est donc bien reproduit par l'approche micromécanique. On rappelle que cette approche a été développée dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations ce qui peut expliquer la limitation observée.

On présente maintenant les évolutions de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale obtenues par les approches sécantes classique et modifiée itérées tenant compte de l'évolution de la porosité en fonction du chargement (*Figure 4.21*). Afin de mettre en évidence l'apport de l'actualisation de la porosité sur ces évolutions, on superpose ce sur cette même figure les évolutions obtenues par les mêmes approches mais sans actualisation de la porosité pour le même coefficient d'écoulement ($m = 0.3$). Il apparaît que la prise en compte de l'évolution de la porosité au cours du chargement permet de mieux approcher les résultats d'essais pour l'argile la Bouzule. L'approche sécante modifiée itérée et actualisée est là encore la plus précise et permet de décrire l'ensemble de la réponse. Le maximum de l'écart enregistré avec l'expérimental est ici de l'ordre de 15% pour des chargements appliqués de 10 MPa.

La sensibilité de ces résultats aux paramètres d'écoulement a été étudiée en reproduisant ces tests avec un coefficient d'écoulement de 0.7. On trace sur la *Figure 4.22* et *4.23* les évolutions de l'indice des vides en fonction de la contrainte moyenne et de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale obtenues par l'extension sécante modifiée actualisée couplée au processus itératif (mod it act) pour les deux coefficients d'écoulement. On constate que l'influence de ce paramètre n'est pas sensible sur l'évolution de l'indice des vides au cours du chargement, *Figure 4.22(a,b)*. Elle l'est par contre sur l'évolution de la contrainte radiale au cours du chargement, *Figure 4.23*. Ainsi, le paramètre d'écoulement doit être identifié à partir de cette courbe expérimentale.

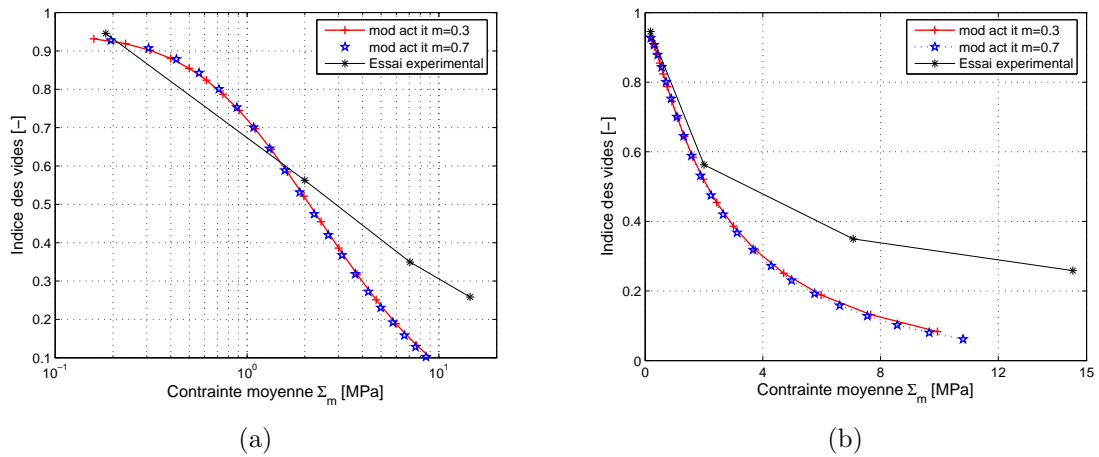


Figure 4.22 — Évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte moyenne pour différents coefficients d'écroissage. Argile la Bouzule.

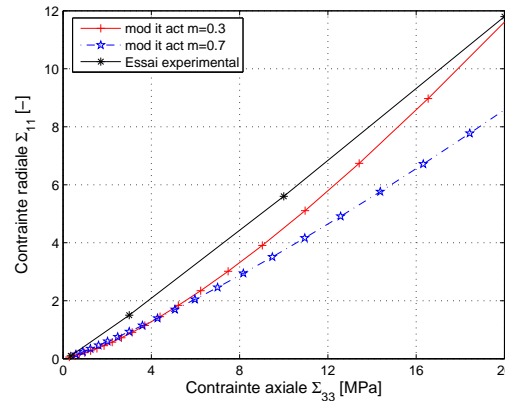
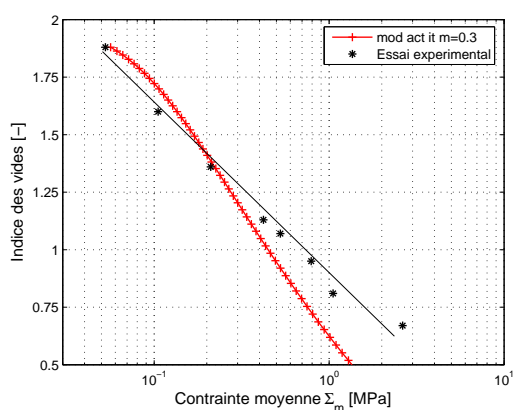


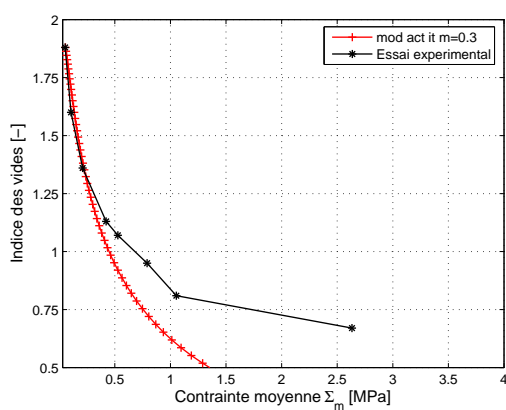
Figure 4.23 — Évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale appliquée pour différents coefficients d'écroissage. Argile la Bouzule.

Les simulations du comportement des deux autres argiles, le Salins 14 et le Marais Poitevin sont présentées aux *Figures 4.24* et *4.25*. Compte tenu des constatations faites précédemment sur l'argile la Bouzule, l'approche sécante modifiée itérée et actualisée (mod it act) est retenue pour ces simulations.

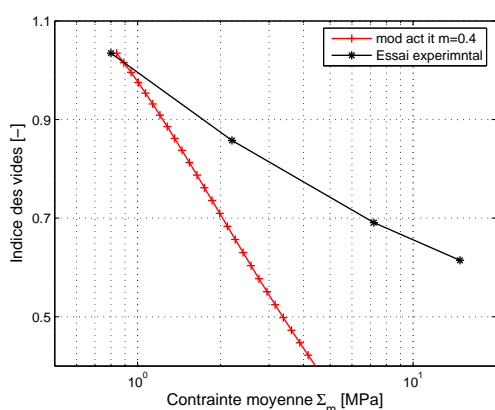
Les simulations du comportement du Marais Poitevin conduisent à une prédiction satisfaisante de l'évolution de l'indice des vides en début de chargement de compaction, jusqu'à une contrainte d'environ de 0.5MPa. Par contre, pour des chargements plus importants, malgré l'enrichissement du modèle avec l'actualisation de la porosité, la simulation sous estime l'indice des vides mesuré expérimentalement, l'écart à l'expérimental pouvant atteindre 30%. En ce qui concerne le Salins 14, nous avons déjà noté une différence de comportement de cette argile avec en particulier un module de compressibilité plus élevé que celui des deux autres argiles, ainsi qu'une organisation microstructurale différente au cours du chargement. Ce comportement différent ne nous a pas permis de simuler correctement l'évolution de l'indice des vides pour cette argile même en début de compaction, comme le montre la *Figure 4.24(c,d)* (voir section 4.2.2.5). La faible capacité de cette argile à se compacter s'observe avec un indice des



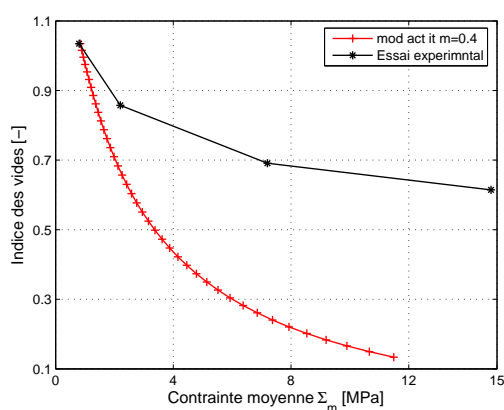
(a) Marais Poitevin



(b) Marais Poitevin

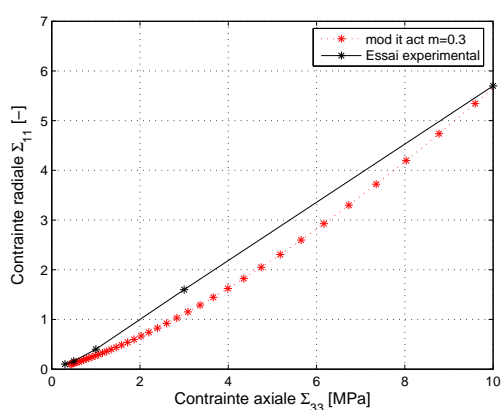


(c) Salins 14

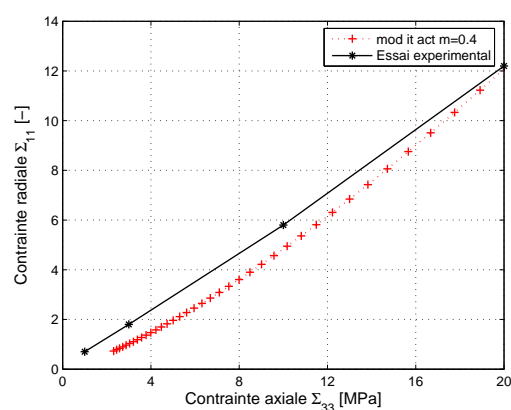


(d) Salins 14

Figure 4.24 — Évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte moyenne en échelle logarithmique (a,c) et échelle linéaire (b,d). Confrontation des approches sécantes et des essais.



(a) Marais Poitevin



(b) Salins 14

Figure 4.25 — Évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale appliquée. Confrontation des simulations par approche sécante et des essais pour les argiles : Marais Poitevin (a) et Salins 14 (b).

vides variant seulement de 1 à 0.6, alors que les deux autres argiles ont des variations de 1.92 à 0.55 pour le Marais Poitevin et de 1 à 0.25 pour la Bouzule.

Ainsi, l'amélioration des approches sécantes apportées par le couplage du processus itératif d'une part et la prise en compte de l'évolution de la porosité au cours du chargement d'autre part a permis de reproduire de façon satisfaisante l'évolution de la microstructure en début de compaction pour les deux argiles les plus compressibles mais reste insuffisante pour le Salins 14.

En revanche si l'on observe les confrontations des simulations avec les résultats expérimentaux sur l'évolution de la contrainte radiale en fonction de la contrainte axiale présentées à la *Figure 4.25*, on peut constater une bonne reproduction des essais.

Sur ces grandeurs qui sont macroscopiques, la modélisation donne une prédiction satisfaisante sur l'ensemble de la décharge, l'écart ne dépassant pas 15%. Le comportement de l'argile le Salins 14 a pu être simulé avec une relative bonne précision alors que l'aspect plus microscopique relatif à l'indice des vides n'avait pas pu l'être.

La spécificité de la microstructure de cette argile remarquée au paragraphe 4.2.2.5 et qui lui confère une faible compressibilité peut être avancée pour tenter d'expliquer la différence des résultats par rapport aux autres argiles

4.5 Conclusions et commentaires

Dans ce dernier chapitre, nous avons cherché à présenter une application des méthodes d'homogénéisation proposées dans ce travail à des milieux poreux réels. Nous avons pour cela retenu les matériaux argileux pour lesquels nous disposions d'une gamme complète de résultats expérimentaux. Ces résultats, obtenus par Grunberger (Grunberger, 1995 [51]) et Djéran-Maigre et al. (Djéran-Maigre et al., 1998 [38]). Pouya et al. (Pouya et al., 1998 [87]) ont permis à ces auteurs d'identifier le comportement de trois argiles représentatives de ces matériaux sous un chargement oedométrique qui apparaît élastoplastique en charge et élastique en décharge.

A partir de ces essais, en considérant tout d'abord le début de la phase de décharge élastique, nous avons mis au point une procédure d'identification du comportement élastique des argiles, puis du comportement des squelettes par approche inverse en exploitant la méthode d'homogénéisation itérative en élasticité linéaire présentée au chapitre 2. La confrontation des résultats de simulations numériques aux courbes expérimentales a fait apparaître les limitations de cette démarche micromécanique linéaire. En particulier, le modèle linéaire ne permet pas de simuler l'évolution de la porosité au cours du chargement observée expérimentalement. Nous avons alors enrichi le modèle par une loi d'état complémentaire permettant d'actualiser la porosité et le comportement au cours du chargement. La confrontation aux résultats expérimentaux sur cette phase de décharge apparaît alors plus satisfaisante. Des allures quasi-linéaires de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale appliquée sont obtenues par les approches linéaires d'homogénéisation enrichies par le processus itératif et l'actualisation de la porosité. Elles s'approchent de celles obtenues par les expériences sur les différentes argiles en début de décharge.

En dernière partie de ce chapitre, nous avons effectué une première tentative de si-

mulation de la réponse des matériaux argileux lors de la phase de chargement. Le comportement des squelettes a été pris élastoplastique régi par la loi de Ramberg-Osgood. Une identification des paramètres du modèle a été faite par calage aux essais sur le comportement macroscopique. L'approche d'homogénéisation non linéaire itérative développée au chapitre 3 apparaît là encore insuffisante pour simuler l'évolution de la porosité au cours du chargement de compaction. La démarche mise au point dans le domaine linéaire pour tenir compte de cette évolution a été alors étendue dans le domaine non linéaire en travaillant avec les modules sécants. La simulation des évolutions des indices et de la contrainte radiale en fonction de la contrainte appliquée a pu être alors effectuée pour les différentes argiles. Le modèle sécant modifié couplé au processus itératif et actualisé conduit aux prédictions les plus proches des résultats expérimentaux. Ces prédictions apparaissent globalement satisfaisantes pour simuler l'évolution de la porosité des argiles le Marais Poitevin et la Bouzule en début de compaction œdométrique. En revanche, elles ne permettent pas de refléter le comportement de la microstructure du Salins 14. La particularité microstructurale de cette argile peu compressible semble donc mal simulée. Cela met en évidence la nécessité d'enrichir la description microstructurale, peu réaliste, adoptée dans ces modèles. Par contre, la réponse globale en terme de modules effectifs à travers l'évolution de la contrainte radiale en fonction du chargement est relativement bien décrite sur l'ensemble de la décharge pour les trois argiles.

Conclusions et Perspectives

L'objectif premier de ce travail de thèse a été de proposer une approche micromécanique du comportement couplé hydro-mécanique de milieux poreux non linéaires. La démarche adoptée vise à exploiter dans leur domaine de validité les méthodes d'homogénéisation linéaires qui reposent sur la résolution par voie analytique du problème d'homogénéisation posé sur des volumes élémentaires représentatives simplifiés. Ces approches explicites fournissent des prédictions du comportement de milieux élastiques linéaires qui diffèrent notablement pour des matériaux fortement poreux ou renforcés avec des rigidités de phases contrastées. Certaines, comme la méthode des distributions diluées, conduisent même à des prédictions non physiques. En s'appuyant sur des travaux antérieurs initiés au laboratoire, nous avons proposé une méthodologie d'homogénéisation itérative pour enrichir ces modèles et caractériser simplement et précisément le comportement de matériaux poreux. Cette démarche d'homogénéisation repose sur l'élaboration du milieu poreux par introduction progressive de faible taux de porosité dans le squelette. A chaque étape du processus, le comportement équivalent du milieu fictif intermédiaire est obtenu par homogénéisation et constitue le comportement du squelette du milieu de l'étape suivante. Cette méthode avait été proposée et appliquée, dans le cadre de la thèse de Anouar Brini (Brini, 2004 [22]), à l'étude du comportement mécanique de matériaux composites renforcés par des microbilles.

Notre première contribution a consisté tout d'abord à étendre cette démarche itérative aux milieux poreux élastiques. Cette extension demande de se placer dans le cadre de la thermodynamique des milieux poreux proposé par Coussy (Coussy, 1991 [32]) et de considérer un problème d'homogénéisation couplé hydro-mécanique. Des précautions doivent être prises dans la définition des grandeurs moyennes. Ce cadre et le formalisme d'obtention du comportement des milieux poreux ont été introduits au chapitre 1. Les principales méthodes d'homogénéisation y sont passées en revue et présentées sous une formulation unifiée dans le domaine linéaire où elles sont maintenant bien connues. Le principe de leur extension dans le domaine non linéaire par linéarisation du comportement du squelette, plus récemment abordé dans la littérature, est également introduit.

Le principe de la démarche itérative et son application aux milieux poreux élastiques linéaires sont ensuite développés sur cette base au chapitre 2. Ce processus itératif se rapproche dans son principe du schéma d'homogénéisation différentiel proposé par

Norris (Norris, 1985 [82]) et Zimmerman (Zimmerman, 1991 [112]) pour les milieux poreux. L'originalité de notre contribution, à ce stade, a été de généraliser son couplage aux différentes approches simplifiées de type modules effectifs, en procédant aux homogénéisations intermédiaires avec différentes méthodes, le schéma des distributions diluées en approche déformation imposée, en approche contrainte imposée, le schéma de Mori-Tanaka, l'approche autocohérente, son extension en modèle des trois phases ou encore la borne supérieure d'Hashin-Shtrikman. Ce couplage met en évidence un résultat intéressant sur la convergence, avec un nombre croissant d'itérations et d'homogénéisation intermédiaires, vers un même comportement effectif pour le milieu homogène équivalent quelque soit le schéma d'homogénéisation utilisé à chaque étape. Cette convergence s'obtient quelque soit le taux de porosité du milieu et en particulier, ce qui présente un apport significatif, pour des fortes porosités. La correction apportée par la méthodologie itérative peut devenir alors très significative dans ce cas pour certains schémas classiquement limités comme le schéma des distributions diluées. Le processus itératif permet ainsi d'unifier les prédictions du comportement effectif de milieux poreux linéaires. Des justifications théoriques de la convergence sont proposées par des développements asymptotiques des modèles pour des faibles porosités. Les développements des rigidités élastiques équivalentes des différents schémas effectifs d'homogénéisation coïncident au premier ordre. Au cours du processus itératif, les homogénéisations étant effectuées avec des faibles porosités, les schémas vont en effet conduire à des prédictions convergentes.

Ayant fait la preuve de l'efficacité de notre approche itérative, tant en termes de simplicité de mise en œuvre, que de précision, nous avons proposé au chapitre 3 une extension de cette méthode dans le domaine non linéaire. Cette extension avec son implémentation, sa validation et son application à des milieux poreux dont les squelettes sont régis par des lois élastiques non linéaires et élastoplastiques constitue une contribution importante de notre travail. Le principe de cette extension s'appuie sur des linéarisations successives du problème d'homogénéisation avec une première linéarisation sécante du comportement du squelette, puis une homogénéisation des déformations locales sur le squelette par prise de moyennes selon deux procédés proposés dans la littérature, les approches sécantes classique (Berveiller et Zaoui, 1979 [11]) et modifiée (Suquet, 1995 [95]). Le milieu poreux non linéaire étant ainsi remplacé par un matériau linéaire, dit de comparaison, selon la terminologie de Ponte Castañeda (Ponte Castañeda, 1991 [83]), le processus itératif d'homogénéisation peut être couplé aux différents schémas prédictifs linéaires de la théorie des modules effectifs. Ce couplage a permis d'unifier, comme en linéaire, les prédictions obtenues d'une part par l'extension sécante classique des schémas linéaires et d'autre part par l'extension sécante modifiée. La convergence est observée pour tous les taux de porosité et sous chargements quelconques. La mise en œuvre de cette extension en non linéaire procède par l'imbrication de deux boucles, l'une externe sur des incréments successifs de chargement et l'autre sur des incréments de porosité. Le modèle a été en pratique développé sur l'outil de calcul `Matlab`. A travers différentes confrontations à des travaux récents de la littérature, nous avons cherché à valider notre méthode et son implémentation. La qualité du modèle semi-analytique a été en particulier mise en évidence par sa capacité à reproduire la réponse non linéaire obtenue par des simulations numériques sur un volume élémentaire représentatif. On s'est assuré que le processus itératif ne viole pas la prédiction fournie par l'extension sécante de la borne supérieure d'Hashin et

Shtrikman, conformément aux travaux de Ponte Castañeda (Ponte Castañeda, 1991 [83]).

Ces développements micromécaniques ont été par ailleurs exploités pour construire les surfaces d'écoulement plastiques de milieux poreux. Les résultats fournis par l'extension sécante modifiée appliquée à divers modèles de microstructure enrichis par le processus itératif ont été confrontés à des critères d'écoulement existants dans la littérature obtenus ou non par une démarche micromécanique. Le processus itératif a conduit à une surface d'écoulement unifiée en bonne concordance avec celle décrite par le critère de Tvergaard (Tvergaard, 1981 [103]).

Les méthodes itératives d'homogénéisation en élasticité linéaire et non linéaire sont ensuite valorisées au chapitre 4 par une application dans le domaine des géomatériaux. Les milieux poreux considérés sont des argiles pour lesquelles nous disposons d'une gamme complète de résultats expérimentaux (Grunberger, 1995 [51] et Djéran-Maigre et al., 1998 [38]). Cette application s'insère dans le cadre d'une collaboration avec Irini Djéran-Maigre de l'INSA de Lyon qui a participé à cette campagne d'essais réalisée au G3S-LMS de l'École Polytechnique. Les tests de compaction ont mis en évidence un comportement élastoplastique des argiles lors d'un chargement de compaction et un comportement élastique lors de la décharge. En s'appuyant sur les résultats expérimentaux macroscopiques, nous avons tout d'abord identifié le comportement des squelettes par approche inverse. La confrontation des résultats de simulations numériques aux courbes expérimentales fait apparaître les limitations de l'approche itérative aussi bien dans le domaine linéaire que non linéaire qui ne peut reproduire l'évolution de la porosité avec le chargement observée expérimentalement. L'enrichissement du modèle itératif par une loi d'état complémentaire a alors permis d'actualiser la porosité, ainsi que le comportement au cours du chargement. La simulation du comportement de deux argiles, le Marais Poitevin et la Bouzule, lors d'essais oedométriques en début de charge et de décharge apparaît alors globalement satisfaisante. En revanche, la modélisation ne permet pas de refléter l'évolution de la porosité de l'argile du Salins 14 au cours de la compaction. La particularité microstructurale de cette argile peu compressible peut expliquer les difficultés rencontrées.

Cette application des approches itératives d'homogénéisation aux milieux argileux, même si elle peut sembler par certains aspects pas totalement convaincante, met en évidence la capacité du modèle à décrire des réponses linéaires et non linéaires de matériaux réels. L'amélioration apportée par les itérations dans le processus d'homogénéisation trouve une illustration sur ces matériaux fortement poreux.

Pour des milieux aux comportements complexes, tels que les argiles, les modèles demandent à être enrichis. Les hypothèses faites sur la microstructure qu'il s'agisse de sa géométrie très idéalisée avec des pores sphériques ou encore du comportement retenu pour les squelettes supposé linéaire sous chargement hydrostatique peuvent être mises en cause pour expliquer la qualité relative de certains résultats. Le processus d'actualisation de la porosité au cours du chargement a apporté un premier enrichissement aux modèles mais est basé sur l'hypothèse que les pores restent sphériques au cours du chargement, ce qui n'est pas le cas sous le chargement de compaction oedométrique ni même avant la compaction. Des premières perspectives d'enrichissement de la modélisation peuvent être proposées, avec la prise en compte de géométries des pores plus réalistes. La solution analytique d'Eshelby (Eshelby, 1957 [45]) du problème d'équilibre d'un pore

de géométrie ellipsoïdale noyé dans une matrice infinie pourrait être exploitée et permettre en jouant sur les rapports des longueurs de traduire un aplatissement des pores ou des feuilletts d'argiles. Cette solution explicite introduite dans le processus itératif d'homogénéisation pourrait être ainsi étendue à des porosités importantes. Elle permettrait également d'introduire une anisotropie dans le comportement ce qui apporterait un caractère plus réaliste dans la simulation des milieux argileux. Cette adaptation demande d'exploiter les expressions générales du tenseur de Green et semble accessible à moyen terme.

Des développements des modèles en transformations finies pourrait également apporter un enrichissement dans l'application aux argiles compactées. Nous avons en effet constaté que seul le début des courbes de chargement était reproduit de façon satisfaisant par la simulation, au delà, les microstructures des argiles subissent des grandes transformations. Une approche micromécanique semble évidemment attractive pour traduire cette évolution irréversible de la microstructure, qui est susceptible de modifier les propriétés macroscopiques du milieu poreux. Dans ce sens, l'approche proposée dans les travaux de Deudé (Deudé, 2002 [34]) et de Barthélémy et al. (Barthélémy et al., 2003 [4]) pourrait servir de base à l'intégration dans le processus itératif des variations irréversibles de volume en travaillant sur une géométrie actualisée du volume élémentaire représentatif.

On pourrait par ailleurs penser à exploiter la méthode itérative d'homogénéisation pour l'étude du comportement non linéaire d'autres types de géomatériaux, tels que les bétons, et simuler des microstructures comme celles considérées par Barthélémy (Barthélémy, 2005 [3]) constituées d'une partie solide contenant des inclusions poreuses, d'inclusions rigides adhérentes et d'inclusions rigides à interface lisse. Cette application nécessiterait d'intégrer progressivement outre les pores, des renforts, dans le processus itératif de construction du milieu homogène équivalent. Dans le domaine linéaire, ce travail a fait l'objet d'une partie de la thèse de Zouari (Zouari, 2006 [113]) qui a montré la capacité de l'approche itérative à tenir compte d'une dispersion granulométrique des renforts dans la réponse macroscopique du matériau. L'extension dans le domaine non linéaire de ces travaux pourrait constituer un développement intéressant en terme applicatif.

Par ailleurs toujours dans le domaine linéaire, Brini (Brini, 2004 [22]) et Zouari (Zouari, 2006 [113]) ont montré que le processus itératif permet d'apporter une correction significative aux champs locaux de contraintes et déformations issues des schémas prédictifs d'homogénéisation les rendant exploitables dans des critères locaux de rupture par exemple. Cette localisation précise au cours du chargement pourrait permettre de suivre l'endommagement dans la microstructure. Il nous faut là aussi étendre la méthode proposée par ces auteurs pour estimer les contraintes locales au cours du chargement macroscopique.

Enfin, des développements à caractère plus académique sur l'approche itérative d'homogénéisation seraient intéressants à mener pour apporter des justifications mathématiques à la convergence observée. L'extension en non linéaire de l'approche itérative d'homogénéisation a été menée ici en s'appuyant sur une linéarisation sécante du comportement. Le couplage de l'itératif aux méthodes tangentes incrémentales et affines semble également possible et pourrait compléter les confrontations proposées très récemment dans la littérature des modèles d'homogénéisation non linéaire (Rekik

et al., 2006 [89], Chaboche et al., 2005 [26]).

Bibliographie

- [1] ABOUDI, J. *Mechanics of composite materials : a unified micromechanical approach*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991.
- [2] AURIAULT, J. L., AND SANCHEZ-PALENCIA, J. Etude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *Journal de Mécanique* 16, 4 (1977), 575–603.
- [3] BARTHÉLEMY, J. F. *Approche micromécanique de la rupture et de la fissuration dans les géomatériaux*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [4] BARTHÉLEMY, J. F., DORMIEUX, L., AND MAGHOUS, S. Micromechanical approach to the modelling of compaction at large strains. *Computers and Geotechnics* 30 (2003), 321–338.
- [5] BATDORF, S. B., AND BUDIANSKY, B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip. *Technical Note N° 1871, National Advisory Committee for Aeronautics* (1949).
- [6] BEAR, J., AND BACHMAT, Y. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media. In *Bear J. (Ed.), Theory and applications of transport in porous media*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [7] BENHAMIDA, A. *Etude micromécanique des mousses syntactiques*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1989.
- [8] BENHAMIDA, A., DJÉRAN-MAIGRE, I., DUMONTET, H., AND SMAOUI, S. Clay compaction modelling by homogenization theory. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 42 (2005), 996–1005.
- [9] BENHAMIDA, A., AND DUMONTET, H. Etude micromécanique du comportement de matériaux hétérogènes par approche itérative. *Acte du sixième Colloque National en Calcul des Structures, Hermès* (2003), 523–530.
- [10] BENVENISTE, Y. A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of Materials* 6, 2 (1987), 147–157.
- [11] BERVEILLER, M., AND ZAOUI, A. An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 26 (1979), 325–344.
- [12] BILGER, N. *Etude micromécanique de l'effet de la présence d'amas d'inclusions sur la transition fragile-ductile d'aciers nucléaires*. Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 2003.

- [13] BIOT, M. A. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics* 12 (1941), 155–164.
- [14] BIOT, M. A., AND WILLIS, D. G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics* 28 (1957), 594–601.
- [15] BISHOP, J. F., AND HILL, R. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. *Philosophical Magazine* 42 (1951), 414–427.
- [16] BORNERT, M. *Morphologie microstructurale et comportement mécanique : caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1996.
- [17] BORNERT, M., BRETHERAU, T., AND GILORMINI, P. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1*. Hermès Science Publications, 2001.
- [18] BORNERT, M., BRETHERAU, T., AND GILORMINI, P. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2*. Hermès Science Publications, 2001.
- [19] BORNERT, M., AND PONTE-CASTANEDA, P. Propriétés non linéaires des composites. In Bornert M., Bretheau, T., Gilormini, P. (Eds.), *Homogénéisation en mécanique des matériaux 2* (1997), Hermès Science Publications, 45–90.
- [20] BOURGEOIS, E. *Mécanique des milieux poreux en transformation finie : Formulation des problèmes et méthodes de résolution*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [21] BOUTÉCA, M., AND SARDA, J. P. Experimental measurements of thermoporoelastic coefficients. In Charlez P. (Ed.), *Mechanics of Porous Media, Balkema* (1995), 31–41.
- [22] BRINI, A. *Modélisation multi-échelles du comportement et du vieillissement des mousses syntactiques immergées*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2004.
- [23] BRINI, A., PRADEL, F., BENHAMIDA, A., AND DUMONTET, H. Ageing damage of immersed syntactic foams under coupled effects of pressure and aqueous corrosion. *Society of Manufacturing Engineers, San Diego, USA, SME Identification Product ID : TP03PUB303. 10 Pages, Published* (Nov 19, 2003).
- [24] BUDIANSKY, B., HASHIN, Z., AND SANDERS, J. L. The stress field of a slipped crystal and early plastic behavior of polycrystalline materials. In *Plasticity, Proceeding of the second Symposium Naval Structural Mechanics* (1960).
- [25] BURYACHENKO, V. A. Effective strength properties of elastic physically nonlinear composites. In *Mecamat 93, International Seminar on Micromechanics of Materials* (1993), Eyrolles, 567–578.
- [26] CHABOCHE, J. L., KANOUTÉ, P., AND ROOS, A. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *International Journal of Plasticity* 21 (2005), 1409–1434.
- [27] CHARLEZ, P. A. *Rock mechanics, Theoretical fundamentals*, vol. 1. Technip, 1991.
- [28] CHRISTENSEN, R. *Mechanics of composite materials*. John Wiley & Sons, New-York, 1979.

- [29] CHRISTENSEN, R. M., AND LO, K. H. Solutions for effective shear properties in three sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 27, 4 (1979), 315–330.
- [30] CHU, T., AND HASHIN, Z. Plastic behavior of composites and porous media under isotropic stress. *International Journal of Engineering Sciences* 9 (1971), 971–994.
- [31] CLAQUIN, C. *Etude du comportement de l'interface milieu granulaire et inclusion par une approche multi-échelle*. Thèse de Doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2003.
- [32] COUSSY, O. *Mécanique des milieux poreux*. Technip, 1991.
- [33] DEBOTTON, G., AND PONTE-CASTANEDA, P. Variational estimates for the creep behavior of polycrystal. *Proceedings of the Royal Society of London* 448, A (1995), 121–142.
- [34] DEUDÉ, V. *Non linéarités géométriques et physiques dans les milieux poreux : Apport des méthodes de changement d'échelle*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [35] DEVRIES, F., DUMONTET, H., DUVAUT, G., AND LÉNÉ, F. Homogenization and damage for composites materials. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* 27 (1989), 285–298.
- [36] DJÉRAN-MAIGRE, I., BARBIER, M., AND GRUNBERGER, D. Experimental compaction of clays and associated hydromechanical modelling. *Poromechanics : tribute to M. A. Biot, (Eds) J. F. Thimus, Y. Abousleiman, A. H. D. Cheng, O. Coussy, E. Detournay* (1998), 565–573.
- [37] DJÉRAN-MAIGRE, I., AND GASC-BARBIER, M. Hydromechanical modelling of experimentally compacted saturated argillaceous porous media. *Transport in Porous Media* 41 (2000), 81–103.
- [38] DJÉRAN-MAIGRE, I., TESSIER, D., GRUNBERGER, D., VELDE, B., AND VASSEUR, G. Evolution of microstructures and macroscopic properties of some clays during experimental compaction. *Marine and Petroleum Geology* 15 (1998), 109–128.
- [39] DORMIEUX, L., AND BOURGEOIS, E. *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées , 2002.
- [40] DORMIEUX, L., LEMARCHAND, E., AND SANAHUJA, J. Comportement macroscopique des matériaux poreux à microstructure en feuillets. *Comptes Rendus de Mécanique* 334 (2006), 304–310.
- [41] DORMIEUX, L., MOLINARI, A., AND KONDO, D. Micromechanical approach to the behaviour of poroelastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002), 2203–2231.
- [42] DUVAUT, G. *Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus, application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique*. North Holland Publishing Company, 1976.
- [43] ENE, H., AND SANCHEZ-PALENCIA, E. Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux. *Journal de Mécanique* 14(1) (1975), 73–108.

- [44] ESCOFFIER, S. *Caractérisation expérimentale du comportement hydromécanique des argilites de Meuse/Haute-Marne*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2002.
- [45] ESHELBY, J. D. *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*, vol. 241. Proceedings of the Royal Society of London, 1957.
- [46] FRANÇOIS, D., PINEAU, A., AND ZAOUI, A. *Comportement mécanique des matériaux*. volume 1, Hermès Science Publications, 1991.
- [47] GARAJEU, M. *Contribution à l'étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renforts*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille 2, 1995.
- [48] GIRAUD, A. *Couplages thermo-hydro-mécaniques dans les milieux poreux peu perméables : Application aux argiles profondes*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1993.
- [49] GRIM, R. E. *Clay mineralogy*. McGraw-Hill, New-York, 1968.
- [50] GRONDIN, F. A. *Modélisation multi-échelles du comportement thermo-hydro-mécanique des matériaux hétérogènes : Applications aux matériaux cimentaires sous sollicitations sévères*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2005.
- [51] GRUNBERGER, D. *Etude expérimentale de l'évolution des microstructures et des propriétés physiques et mécaniques des argiles au cours de la compaction*. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier II Science et Techniques du Languedoc, 1995.
- [52] GURSON, A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth - Part I : Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology* 99 (1977), 1–15.
- [53] HASHIN, Z. The elastic moduli of heterogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics* 29 (1962), 143–150.
- [54] HASHIN, Z. Analysis of composite materials : a survey. *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983), 481–505.
- [55] HASHIN, Z., AND SHTRIKMAN, S. On some variational principles in anisotropic nonhomogeneous elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (1962), 335–342.
- [56] HASHIN, Z., AND SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (1962), 343–352.
- [57] HASHIN, Z., AND SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), 127–140.
- [58] HERVÉ, E., AND PELLEGRINI, O. The elastic constants of a material containing spherical coated holes. *Archives of Mechanics* 47, 2 (1995), 223–246.
- [59] HERVÉ, E., STOLZ, C., AND ZAOUI, A. A propos de l'assemblage des sphères composites de Hashin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 313, II (1991), 857–862.

- [60] HERVÉ, E., AND ZAOUÏ, A. Modelling the effective behaviour of nonlinear matrix inclusion composites. *European Journal of Mechanics. A/Solids* 6 (1990), 505–515.
- [61] HERVÉ, E., AND ZAOUÏ, A. N-layered inclusion-based micromechanical modelling. *International Journal of Engineering Sciences* 31 (1993), 1–10.
- [62] HILL, R. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), 357–372.
- [63] HILL, R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965), 89–101.
- [64] HILL, R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965), 213–222.
- [65] HU, G. A method of plasticity for general aligned spheroidal void or fiber-reinforced composites. *International Journal of Plasticity* 12, 4 (1996), 439–449.
- [66] HUTCHINSON, J. Elastic-plastic behavior of polycrystalline metals and composite. *Proceedings of the Royal Society of London* 319, A (1970), 247–272.
- [67] HUTCHINSON, J. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proceedings of the Royal Society of London* 348, A (1976), 101–127.
- [68] KOPLIK, J., AND NEEDLEMAN, A. Void growth and coalescence in porous plastic solids. *International Journal of Solids and Structures* 24 (1988), 835–853.
- [69] KREHER, W. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38 (1990), 115–128.
- [70] LAHELLEC, N., AND SUQUET, P. Nonlinear composites : a linearization procedure, exact to second-order in contrast and for which the strain-energy and affine formulations coincide. *Comptes Rendus de Mécanique* 332 (2004), 693–700.
- [71] LASSABATÈRE, T. *Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase : Application au retrait de dessiccation*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.
- [72] LEMAIRE, T., MOYNE, C., STEMMELLEN, D., AND MURAD, M. A. Modèles à deux et trois échelles pour l'étude des phénomènes électro-hydro-chimio-mécaniques dans les milieux poreux gonflants. *Colloque de l'École Nationale des Ponts et Chaussées* (Mars 2005), 195–202.
- [73] LEMARCHAND, E. *Contribution de la micromécanique à l'étude des phénomènes de transport et de couplage poromécanique dans les milieux poreux : Application aux phénomènes de gonflement des géomatériaux*. Thèse de Doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2001.
- [74] LI, G., AND PONTE-CASTANEDA, P. The effect of particle shape and stiffness on the constitutive behavior of the metal-matrix composites. *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), 3189–3209.
- [75] LI, G., AND PONTE-CASTANEDA, P. Variational estimates for the elastoplastic response of particle-reinforced metal-matrix composites. *Applied Mechanics Reviews* 47, S (1994), 77–94.
- [76] LÉNÉ, F. *Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, 1984.

- [77] MAVKO, G., MUKERJI, T., AND DVORKIN, J. *The rock physics handbook. Tools for seismic analysis in porous media*. Cambridge University Press, 1998.
- [78] MCLAUGHLIN, R. A study of the differential scheme for composite materials. *International Journal of Engineering Sciences* 15 (1977), 237–244.
- [79] MORI, T., AND TANAKA, K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *ACTA Metallurgica* 21 (1973), 571–574.
- [80] MOULINEC, H., AND SUQUET, P. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* 318, II (1994), 1417–1423.
- [81] MOYNE, C., AND MURAD, M. A. A two-scale model for coupled electro-chemo-mechanical phenomena and Onsager's reciprocity relations in expansive clays : I homogenization analysis. *Transport in Porous Media* 62, 3 (2006), 333–380.
- [82] NORRIS, A. N. A differential schema for the effective moduli of composites. *Mechanics of Materials* 4 (1985), 1–16.
- [83] PONTE-CASTANEDA, P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39, 1 (1991), 45–71.
- [84] PONTE-CASTANEDA, P. New variational principles in plasticity and their application to composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40, 8 (1992), 1757–1788.
- [85] PONTE-CASTANEDA, P. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44, 6 (1996), 827–862.
- [86] PONTE-CASTANEDA, P., AND SUQUET, P. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics* 34 (1998), 171–302.
- [87] POUYA, A., DJÉRAN-MAIGRE, I., LAMOUREUX-VAR, V., AND GRUNBERGER, D. Mechanical behaviour of fine grained sediment : experimental compaction and three-dimensional constitutive model. *Marine and Petroleum Geology* 15 (1998), 129–143.
- [88] QIU, Y. P., AND WENG, G. J. A theory of plasticity for porous materials and Particle-Reinforced composites. *Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), 261–268.
- [89] REKIK, A., AUSLENDER, F., BORNERT, M., AND ZAOU, A. Objective evaluation of linearization procedures in nonlinear homogenization : a methodology and some implications on the accuracy of micromechanical schemes. *International Journal of Solids and Structures* (2006), accepted manuscript.
- [90] SANCHEZ-PALENCIA, E. Boundary layer and edge effect in composite, homogenization techniques for composite media. *Lecture Note in Physics, Springer-Verlag, Heidelberg* 272 (1986).
- [91] SCHREFLER, B., AND LEWIS, R. *The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*. John Wiley & Sons, New-York, 1998.

- [92] SMAOUI, S., BENHAMIDA, A., DJÉRAN-MAIGRE, I., AND DUMONTET, H. Micro-macro approaches coupled to an iterative process for nonlinear porous media. *Computers, Materials and Continua, Tech Science, ISSN 146-2218* (2007), accepté, sous presse.
- [93] SUQUET, P. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In *Sanchez-Palencia E. and Zaoui A. (Eds), Homogenization Techniques for Composite Media* (1987), Springer, Berlin, 193–278.
- [94] SUQUET, P. Overall potentials and external surfaces of power law or ideally plastic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 41, 6 (1993), 981–1002.
- [95] SUQUET, P. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda’s nonlinear variational procedure. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences* 320, IIb (1995), 563–571.
- [96] SUQUET, P. Overall properties of nonlinear composites : Remarks on secant and incremental formulations. In *Pineau A. and Zaoui A. (Eds), IUTAM of Symposium on Micromechanics on Plasticity and damage of multiphase materials* (1996), Kluwer Academic Publishers, 149–156.
- [97] SUQUET, P. Effective properties of nonlinear composites. In *Suquet P. (Ed.), Continuum Micromechanics* (1997), CIMS Courses and Lecture Notes N°377, Springer-Verlag, Wien, 197–264.
- [98] TALBOT, D. R. S., AND WILLIS, J. R. Variational principles for inhomogeneous non linear media. *IMA Journal of Applied Mathematics* 35 (1985), 39–54.
- [99] TALBOT, D. R. S., AND WILLIS, J. R. Some simple explicit bounds for the overall behavior of nonlinear composites. *International Journal of Solids and Structures* 29 (1992), 1981–1987.
- [100] TANDON, G. P., AND WENG, G. J. A theory of particle-reinforced plasticity. *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988), 126–135.
- [101] TAYLOR, G. I. Plastic strain in materials. *Journal of the Institute of Metals* 62 (1938), 307–324.
- [102] THOREZ, J. Argilloscopy of weathering and sedimentation. *Bulletin de la Société Belge de Géologie* 89, 2 (1989), 245–267.
- [103] TVERGAARD, V. Influence of void on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture* 17 (1981), 389–407.
- [104] WAKIM, J. *Influence des solutions aqueuses sur le comportement mécanique des roches argileuses*. Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005.
- [105] WENG, G. J. The overall elastoplastic stress-strain relations of dual-phase metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38 (1990), 419–441.
- [106] WILLIS, J. R. Anisotropic elastic inclusion problems. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* XVII (1964), 157–174.
- [107] WILLIS, J. R. Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 25 (1977), 185–202.

-
- [108] WILLIS, J. R. The structure of overall constitutive relations for a class of non linear composites. *IMA Journal of Applied Mathematics* 43 (1989), 231–242.
- [109] ZAOUI, A. *Matériaux hétérogènes et composites*. Cours de l'École Polytechnique, 1997.
- [110] ZAOUI, A. Continuum micromechanics : Survey. *Journal of Engineering Mechanics* 128, 8 (2002), 594–601.
- [111] ZEGHADI, A. *Calculs d'agrégats polycristallins : effet de surface et effet de taille de grain*. Thèse de Doctorat, École des Mines de Paris, 2005.
- [112] ZIMMERMAN, R. Elastic moduli of a solid containing spherical inclusions. *Mechanics of Materials* 12 (1991), 17–24.
- [113] ZOUARI, R. *Approche itérative d'homogénéisation pour le comportement des composites polydispersés : Application à l'endommagement des mousses syntactiques immergées*. Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2006.