



HAL
open science

Espaces de Berkovich sur Z

Jérôme Poineau

► **To cite this version:**

Jérôme Poineau. Espaces de Berkovich sur Z . Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2007. Français. NNT: . tel-00193626

HAL Id: tel-00193626

<https://theses.hal.science/tel-00193626>

Submitted on 4 Dec 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention Mathématiques et Applications

par

Jérôme POINEAU

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

ESPACES DE BERKOVICH SUR \mathbf{Z}

Soutenue le vendredi 30 novembre 2007 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. Y. ANDRÉ	Rapporteur
M. V. BERKOVICH	Rapporteur
M. J.-B. BOST	Examineur
M. A. CHAMBERT-LOIR	Directeur de Travaux
M. A. DUCROS	Directeur de Travaux
M. L. MORET-BAILLY	Examineur

Espaces de Berkovich sur \mathbb{Z}

JÉRÔME POINEAU

Jérôme Poineau
NWF I-Mathematik
Universität Regensburg
93040 Regensburg
Deutschland

courriel : *jerome.poineau@m4x.org*

REMERCIEMENTS

Mes premiers mots vont à mes deux directeurs, Antoine Chambert-Loir et Antoine Ducros. Ils ont su, chacun à leur manière, me guider tout au long de ce parcours initiatique à travers le monde des mathématiques et je leur en suis profondément reconnaissant.

Ma rencontre avec Antoine Chambert-Loir date de mes années d'étude à l'École polytechnique. Il était alors responsable du séminaire des élèves et je pense pouvoir, aujourd'hui, assurer que c'est lors de ces rencontres hebdomadaires que j'ai pu entrevoir, pour la première fois, en quoi consistait la recherche mathématique et laisser s'affirmer, peu à peu, la certitude que je souhaitais m'y consacrer. Dès lors, j'ai pu bénéficier généreusement de ses conseils et de sa vaste culture mathématique, qu'il partage toujours avec plaisir et passion. Je le remercie particulièrement de m'avoir incité, tout au long de ma thèse, à m'ouvrir à d'autres domaines que ceux qui m'étaient directement utiles, que ce soit par le biais d'indications explicites ou simplement de remarques qui savaient maintenir ma curiosité en éveil. J'ai également grandement tiré profit de nos discussions au cours des séances où nous relisions ensemble les textes que je lui soumettais. Elles m'ont permis, à de nombreuses reprises, d'affiner mes idées et d'en rendre l'exposition plus claire, grâce à une exigence de rigueur jamais démentie et de nombreux conseils de rédaction fort précieux. Il n'y aura guère qu'en ce qui concerne l'utilisation des virgules que je ne me serai pas rangé à son avis.

Il m'est difficile de mesurer tout ce que je dois à Antoine Ducros. C'est auprès de lui que j'ai appris la théorie de Berkovich sur laquelle s'appuie cette thèse. Il n'a ménagé ni son temps ni ses efforts pour m'en expliquer les ressorts, partageant de grand cœur ses connaissances encyclopédiques sur le sujet, m'indiquant les idées maîtresses, reprenant avec moi les points techniques délicats ou comblant les manques de références. Si je suis encore loin d'être parvenu à « rompre l'os et sucer la substantifique moëlle », je lui dois de l'avoir entamé. Je tiens également à le remercier ici de son amitié et de ses encouragements constants, sans lesquels je ne sais si je serais parvenu à mener ce travail à terme. Dans les moments de doute que j'ai traversés, il a su me convaincre de persévérer, inconditionnel dans son soutien, pour fantasques que dussent lui paraître certaines de mes décisions. Son insatiable curiosité et son vif enthousiasme pour mes résultats m'ont porté pendant ces trois années.

Je souhaite également exprimer ma gratitude aux deux rapporteurs de cette thèse, Yves André et Vladimir Berkovich. Ils ont accepté de s'acquitter d'un pénible travail de relecture et leurs commentaires m'ont grandement éclairé sur mon propre travail. Je suis particulièrement sensible à l'honneur que m'accorde Vladimir Berkovich en acceptant d'assister à la soutenance, et ce malgré la distance qui le sépare habituellement de Rennes. J'ose à peine souligner l'évidence : je suis très flatté de l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail.

Jean-Benoît Bost et Laurent Moret-Bailly ont également accepté de prendre part au jury et je les en remercie vivement. Parmi les cours de mathématiques que j'ai suivis, je compte celui d'introduction à la théorie des surfaces de Riemann dispensé par Jean-Benoît Bost au nombre de ceux qui ont contribué à façonner ma vision des mathématiques. J'y ai compris les rudiments de la cohomologie des faisceaux et découvert ses applications aux problèmes de Cousin. J'aime à croire que la présence de ces mêmes éléments au sein de ma thèse ne relève pas du seul hasard.

Au cours des trois années que j'y ai passées, j'ai beaucoup apprécié l'ambiance qui régnait à l'IRMAR et l'amabilité avec laquelle chacun, chercheur, bibliothécaire ou secrétaire m'a toujours reçu. Les membres de l'équipe de géométrie algébrique m'ont accueilli parmi eux avec bienveillance et je leur en sais gré. Je souhaite adresser des remerciements particuliers à Pierre Berthelot. C'est pour travailler sous sa direction que je suis arrivé à Rennes à la fin de ma troisième année à l'École polytechnique. Il m'a proposé d'étudier la preuve de la rationalité de la fonction ζ des variétés algébriques sur les corps finis imaginée par B. Dwork et m'a guidé dans ce passionnant travail avec beaucoup de gentillesse, de patience et de compréhension. Nul ne s'étonnera qu'après m'être initié aux géométries algébrique et p -adique auprès d'un tel maître, j'ai choisi de poursuivre dans cette voie.

J'ai rencontré de nombreux doctorants de l'IRMAR avec qui j'ai pu passer de bons moments. En commençant par les plus anciens du sixième étage, je voudrais citer Fred, dont les encouragements m'ont beaucoup touché, et Amaury, illustre prédécesseur dont je m'efforce de suivre les traces. J'ai également eu l'occasion de discuter avec Valéry, Gweltaz, Sylvain, toujours présent pour réfléchir avec moi à des questions de géométrie algébrique, Christian, compagnon d'armes dans la conquête de la théorie de Berkovich, sans oublier Ali, avec qui j'ai

partagé bureau et cappucinos. Dans la plus jeune génération, j'ai eu le plaisir de rencontrer Colas, Rodolphe et Viviana qui, tous trois, débordent d'un enthousiasme communicatif, bien qu'ils l'expriment de manière on ne peut plus différente. Je n'oublie pas les doctorants des autres équipes : Nico, pianiste favori et inévitable compagnon du bout de la nuit, Ferrán, ami fidèle avec qui je me découvre sans cesse de nouveaux points communs, Corentin, expert en xfig et dernier des géomètres, Viktoria, rayonnante de gentillesse et de bonne humeur, Jean-Romain, grand maître de la controverse, et Mikaël, aux idées et à l'humour si particuliers.

J'ai passé les trois mois qui ont précédé ma soutenance à l'université de Regensburg, en Allemagne, et je remercie Klaus Künnemann de m'avoir offert cette possibilité. Je ne voudrais pas oublier les membres de « Vorsicht Bissig » et leurs acolytes qui, en dépit d'un manque de goût caractérisé, m'ont offert les plus belles soirées de cette période.

On ne saurait trop insister sur l'importance des facteurs psychologiques qui permettent de mener une thèse à son terme. Je tiens à remercier tous mes amis d'avoir été là pendant ces trois années. En premier lieu, je voudrais citer mes colocataires parisiens, Nico, Matthieu, et l'indispensable Julien. Nous avons appris ensemble à aimer les mathématiques et leur faisons la part belle au cours des nombreuses longues soirées que nous avons passées à deviser. Bien qu'il ait, à présent, choisi de s'orienter dans une autre voie, je garde le souvenir de l'émulation qui existait entre nous, de ces merveilles et de ces rêves que nous avons partagés. Cette thèse lui doit beaucoup.

Mes amis musiciens n'ont jamais manqué de me rappeler que la vie ne se limitait pas aux mathématiques et que l'on pouvait aussi s'amuser sans dessiner de brocolis sur le moindre morceau de papier. Merci donc à Léo, Raph et Johann. J'ai beaucoup apprécié de passer quelques temps dans la même ville que Caroline et Damien. Je leur suis reconnaissant pour tous ces plaisirs simples que nous avons partagés : aller boire une bière, écouter une chanson d'Annie Cordy ou dissenter sur la dernière loi de finances publiques à la mode.

Je souhaite également remercier ma famille : mes parents, dont je suis heureux qu'ils assistent à ma soutenance, Lucie et Jacques, mes grands-parents, cousins, oncles et tantes. Je suis fier d'appartenir à une famille comme la nôtre.

Pour finir, je souhaite remercier Gaëlle du fond du cœur pour tout ce qu'elle m'apporte depuis des années. Il ne me paraît pas exagéré d'affirmer que, sans sa présence à mes côtés, cette thèse n'aurait jamais vu le jour. Chacune des pages qui suit porte son empreinte et je sais que cette œuvre est aussi la sienne. J'espère qu'au-delà des mathématiques, nous en créerons ensemble encore beaucoup d'autres.

INTRODUCTION

À la fin des années quatre-vingts, Vladimir G. Berkovich a proposé une nouvelle approche de la géométrie analytique p -adique. Ses idées, qu'il a développées, tout d'abord, dans l'ouvrage [4], puis approfondies dans l'article [5] se sont révélées très fructueuses. Elles ont permis de démontrer plusieurs conjectures de géométrie arithmétique et trouvent maintenant des applications dans des domaines variés : systèmes dynamiques, théorie d'Arakelov, dessins d'enfants p -adiques, variation de structure de Hodge, *etc.* Pour une introduction au sujet et une présentation des différentes applications, nous renvoyons le lecteur intéressé aux textes de vulgarisation [23] et [24].

Bien que la théorie n'ait été véritablement développée que sur les corps ultramétriques complets, V. Berkovich propose, dans [4], une définition d'espace analytique au-dessus de n'importe quel anneau de Banach. Elle s'applique donc lorsque l'on considère comme anneau de base l'anneau \mathbf{Z} des nombres entiers, muni de la valeur absolue usuelle $|\cdot|_\infty$. Nous nous proposons ici d'entreprendre l'étude des espaces analytiques dans ce cas particulier.

Différentes valeurs absolues joueront un rôle dans notre étude. Si p désigne un nombre premier, nous définissons la valeur absolue p -adique $|\cdot|_p$ sur \mathbf{Z} de la façon suivante : nous posons $|0|_p = 0$ et, pour tout nombre entier $n = p^r m \in \mathbf{Z}^*$, avec m premier à p ,

$$|n|_p = |p^r m|_p = p^{-r}.$$

Elle se prolonge de façon unique à \mathbf{Q} . Nous notons \mathbf{Q}_p le complété de \mathbf{Q} pour cette valeur absolue et $\overline{\mathbf{Q}}_p$ l'une de ses clôtures algébriques. La valeur absolue $|\cdot|_p$ se prolonge encore de façon unique en une valeur absolue sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Nous noterons \mathbf{C}_p son complété. Ce corps, qui est algébriquement clos et complet,

est parfois appelé corps des nombres complexes p -adiques. Nous noterons $|\cdot|_p$ l'unique valeur absolue de \mathbf{C}_p qui prolonge la valeur absolue $|\cdot|_p$ de \mathbf{Q} .

Pour $f \in \mathbf{Q}[[T]]$, notons $R_\infty(f)$ le rayon de convergence de la série f vue comme série de $\mathbf{C}[[T]]$ et, pour tout nombre premier p , notons $R_p(f)$ le rayon de convergence de la série f vue comme série de $\mathbf{C}_p[[T]]$. Appelons série arithmétique toute série de la forme

$$f \in \mathbf{Z} \left[\frac{1}{p_1 \cdots p_t} \right] [[T]]$$

vérifiant des conditions du type

$$R_\infty(f) > r_\infty \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, t \rrbracket, R_{p_i}(f) > r_i,$$

où t est un nombre entier, p_1, \dots, p_t des nombres premiers et $r_1, \dots, r_t, r_\infty$ des nombres réels strictement positifs. De telles fonctions apparaissent naturellement lorsque l'on étudie les anneaux locaux de la droite analytique sur \mathbf{Z} ou certains anneaux de sections globales. L'étude géométrique que nous allons mener nous permettra d'obtenir des informations sur des anneaux de séries de ce type.

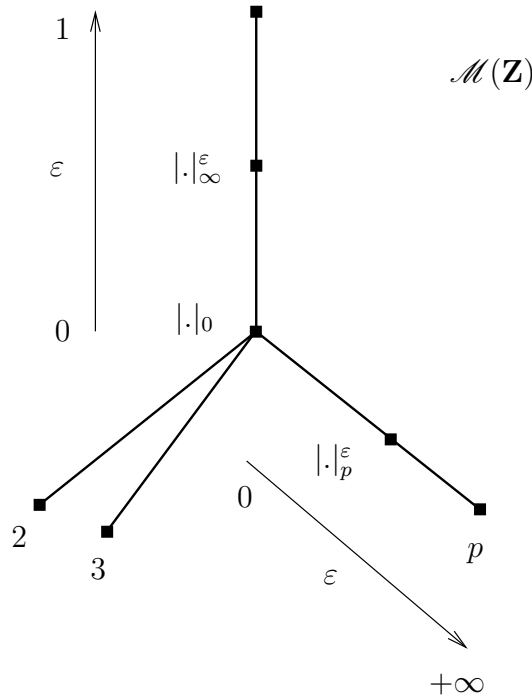


FIG. 1. L'espace topologique $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

Description des espaces en jeu

Par définition, l'espace $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur \mathbf{Z} , c'est-à-dire des applications de \mathbf{Z} dans \mathbf{R}_+ qui sont sous-additives, multiplicatives, envoient 0 sur 0 et 1 sur 1. Topologiquement, il est constitué, pour chaque nombre premier p , d'une branche, homéomorphe à un segment, et d'une branche supplémentaire, associée à la valeur absolue archimédienne usuelle. Ces branches se rejoignent en un point a_0 (cf. figure 1). Signalons que la topologie au voisinage du point a_0 diffère de la topologie d'arbre.

Soit $n \in \mathbf{N}$. L'espace affine analytique de dimension n au-dessus de \mathbf{Z} , que nous noterons $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}}$, est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur l'anneau de polynômes $\mathbf{Z}[T_1, \dots, T_n]$. Il est muni d'une projection continue vers la base $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$. Au-dessus des points de la branche archimédienne, les fibres de cette projection sont isomorphes à l'espace \mathbf{C}^n quotienté par l'action de la conjugaison complexe et, au-dessus des points de la branche p -adique, ce sont des espaces de Berkovich p -adiques de dimension n . Il apparaît donc clairement que, pour étudier cet espace, il nous faudra mettre en œuvre des techniques pouvant s'appliquer tant dans un cadre archimédien qu'ultramétrique.

Géométrie analytique complexe

Dans le cas archimédien, la géométrie analytique complexe met à notre disposition de nombreux outils. Les fondations de cette théorie reposent sur une étude locale des variétés et des fonctions. La compréhension des anneaux locaux des espaces affines y joue donc un rôle prépondérant. Fixons $n \in \mathbf{N}$. L'anneau local \mathcal{O}_0 de l'espace affine \mathbf{C}^n en 0 est constitué des séries de la forme

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n} a_{k_1, \dots, k_n} T_1^{k_1} \dots T_n^{k_n}$$

dont le rayon de convergence est strictement positif. Le théorème de division de Weierstraß nous permet, sous certaines conditions, de diviser une série de la forme précédente par une autre et d'obtenir un reste polynomial en la dernière variable. Une fois ce résultat connu, on démontre sans peine que l'anneau \mathcal{O}_0 est un anneau local noethérien, régulier et de dimension n . Signalons que la démonstration classique du théorème de division de Weierstraß repose sur le théorème de Rouché et la formule de Cauchy.

Géométrie analytique p -adique

Bien que le corps des nombres complexes p -adiques \mathbf{C}_p présente des analogies avec le corps des nombres complexes \mathbf{C} , il en diffère par la topologie. Indiquons, par exemple, que le corps \mathbf{C}_p est totalement discontinu (ses composantes connexes sont réduites à des points) et n'est pas localement compact. Dans cette situation, il n'est guère aisé de mettre en place une géométrie analytique jouissant de propriétés raisonnables : il existe bien trop de fonctions localement analytiques. On vérifie, par exemple, que la fonction qui vaut 0 sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de \mathbf{C}_p et 1 sur son complémentaire est localement développable en série entière !

Au début des années soixante, John Tate a apporté une solution à ce problème (cf. [46]). Les espaces qu'il construit, appelés espaces analytiques rigides, ne sont pas des espaces topologiques, mais des *sites* : on distingue certains ouverts et on n'autorise que certains recouvrements. Par exemple, le recouvrement de \mathbf{C}_p que nous avons décrit précédemment est interdit. Ce formalisme permet de mettre en place, dans le cas p -adique, une géométrie analytique fort semblable à celle que nous connaissons dans le cas complexe.

Entrons un peu dans les détails. Les objets de base sur lesquels est construite la géométrie analytique rigide sont les algèbres que l'on appelle, aujourd'hui, algèbres de Tate. Contrairement à ceux de la théorie complexe, ce ne sont pas des anneaux locaux, mais globaux. Soit $n \in \mathbf{N}$. L'algèbre de Tate $\mathbf{C}_p\{T_1, \dots, T_n\}$ est constituée des éléments de la forme

$$\sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n} a_{k_1, \dots, k_n} T_1^{k_1} \dots T_n^{k_n} \in \mathbf{C}_p[[T_1, \dots, T_n]]$$

vérifiant la condition

$$\lim_{(k_1, \dots, k_n) \rightarrow +\infty} |a_{k_1, \dots, k_n}|_p = 0.$$

Cet anneau est précisément l'anneau des séries convergentes sur le disque fermé de centre 0 et de polyrayon $(1, \dots, 1)$ de \mathbf{C}_p^n . C'est le caractère ultramétrique de la valeur absolue p -adique qui nous permet de donner un sens à cette notion de convergence sur un disque fermé. Aucun analogue complexe ne s'est imposé à ce jour.

Dans ce cadre, il existe également un théorème de division de Weierstraß qui rend les mêmes services que dans la théorie complexe. En l'utilisant, on démontre sans peine que l'algèbre de Tate $\mathbf{C}_p\{T_1, \dots, T_n\}$ est un anneau noethérien et

régulier de dimension n . Signalons que, cette fois-ci, la démonstration du théorème de division de Weierstraß repose sur des arguments de réduction modulo p .

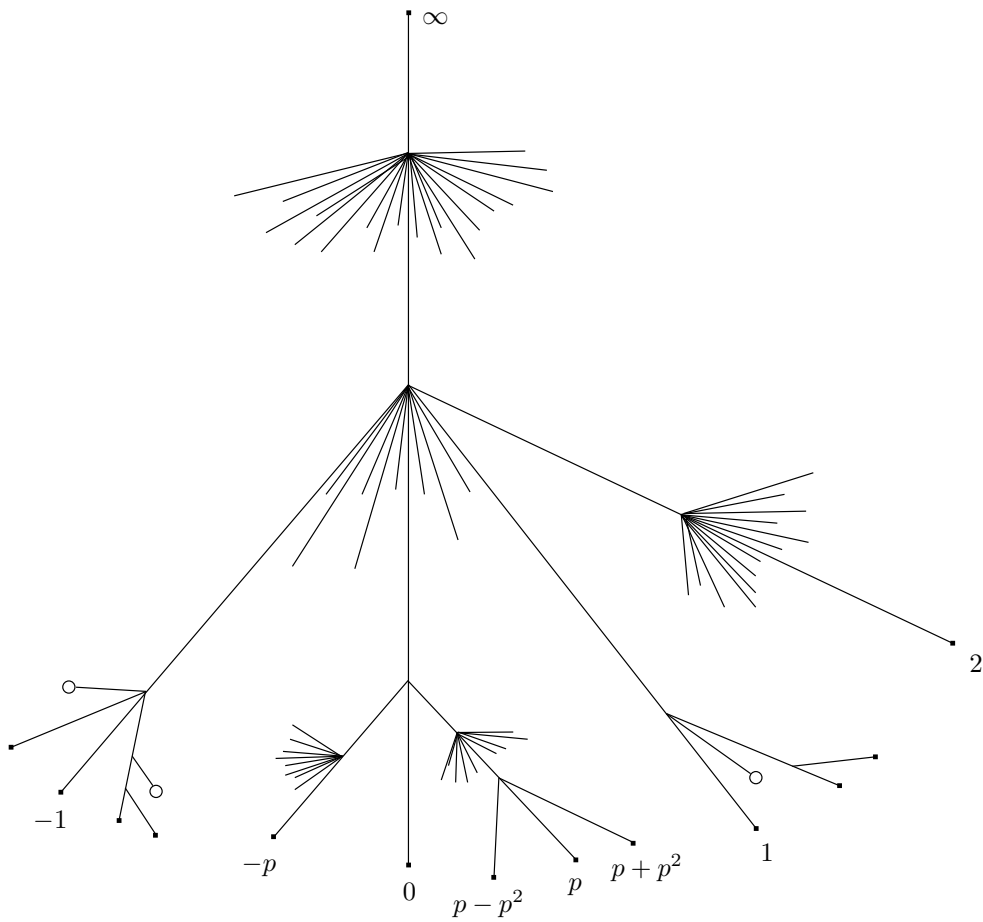


FIG. 2. La droite projective $\mathbf{P}_{\mathbb{C}_p}^{1,\text{an}}$.

L'approche de Vladimir G. Berkovich

Les descriptions précédentes laissent entrevoir les difficultés qui se présentent lorsque l'on cherche à réunir les espaces analytiques archimédiens et ultramétriques dans un formalisme commun. L'approche que propose V. Berkovich des espaces analytiques p -adiques va permettre d'apporter une solution à ce problème.

Choisissant un point de vue différent de celui de J. Tate, V. Berkovich ajoute de très nombreux points aux espaces. À titre d'exemple, la droite affine analytique $\mathbf{A}_{\mathbf{C}_p}^{1,\text{an}}$ sur \mathbf{C}_p qu'il définit possède une structure d'arbre et les points de \mathbf{C}_p correspondent aux extrémités de certaines branches. Nous avons esquissé une représentation de la droite projective analytique $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_p}^{1,\text{an}}$ à la figure 2. On obtient la droite affine $\mathbf{A}_{\mathbf{C}_p}^{1,\text{an}}$ en enlevant le point noté ∞ .

Le procédé de construction qu'utilise V. Berkovich rend la description explicite de ses espaces délicate, mais ils bénéficient d'autres avantages. Ce sont, par exemple, de véritables espaces topologiques localement compacts et localement connexes par arcs. Ces propriétés ouvrent la voie à une définition locale du faisceau structural. Dans le cas de l'espace affine, V. Berkovich propose de le définir comme le faisceau des fonctions qui sont localement limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles. Indiquons que l'on retrouve bien ainsi le faisceau construit à partir des algèbres de Tate. C'est d'ailleurs véritablement sur la théorie des espaces analytiques rigides que V. Berkovich bâtit la sienne et il n'utilise guère la définition locale du faisceau.

Il est important de noter que, fait remarquable, l'espace de Berkovich affine de dimension n sur \mathbf{C} coïncide avec \mathbf{C}^n et que le faisceau dont il est muni est bien celui des fonctions analytiques.

Nous venons d'expliquer que les espaces analytiques de Berkovich permettent d'envisager une étude locale des espaces analytiques sur \mathbf{Z} . Le présent travail constitue un premier pas dans cette direction. Soulignons que, bien que les idées et définitions introduites par V. Berkovich invitent à adopter ce point de vue, une telle étude n'a, à notre connaissance, jamais encore été entreprise. Indiquons, à présent, le plan que nous allons adopter.

Espaces analytiques sur un anneau de Banach

Le premier chapitre de notre thèse est consacré aux espaces analytiques sur un anneau de Banach quelconque. Nous commençons par rappeler les définitions des espaces analytiques au sens de V. Berkovich ainsi que la construction du faisceau structural qu'il propose.

Nous consacrons ensuite quelques pages à l'étude d'anneaux de séries à coefficients dans un anneau de Banach. En prenant des limites inductives de tels anneaux, nous obtenons un anneau local sur lequel nous parvenons à démontrer un théorème de division de Weierstraß (théorème 1.2.7). Bien entendu, notre preuve ne peut faire appel ni à la formule de Cauchy, ni à la réduction modulo p , faute d'analogie de la première dans le cas ultramétrique et de la seconde dans le cas archimédien. Nous utilisons donc une méthode, inspirée des travaux de H. Grauert et R. Remmert, faisant simplement appel à des techniques d'algèbres de Banach. À l'aide de ce théorème, nous obtenons des résultats de noethérianité (théorèmes 1.2.12 et 1.2.14) et de régularité (théorème 1.2.17) pour les anneaux locaux considérés. Soit $n \in \mathbf{N}$. À titre d'exemple, indiquons que le sous-anneau L_n de $\mathbf{Q}[[T_1, \dots, T_n]]$ constitué des séries f vérifiant les conditions

i) il existe un nombre entier t et des nombres premiers p_1, \dots, p_t tels que

$$f \in \mathbf{Z} \left[\frac{1}{p_1 \cdots p_t} \right] [[T_1, \dots, T_n]] ;$$

ii) $R_\infty(f) > 0$;

iii) $\forall i \in \llbracket 1, t \rrbracket, R_{p_i}(f) > 0$

entre dans le cadre de notre étude.

Nous terminons le premier chapitre en étudiant les anneaux locaux des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach quelconque. Nous montrons, en toute généralité, qu'ils sont henséliens (corollaire 1.3.2). Ce résultat généralise le résultat classique lorsque la base est le spectre d'un corps valué (*cf.* [42], chapitre VII, §4, 3^{ème} exemple et [5], théorème 2.1.5). Nous montrons ensuite que les anneaux locaux en certains points peuvent être décrits en termes d'anneaux de séries convergentes. En combinant ce résultat au caractère hensélien d'un certain anneau local, nous parvenons à une nouvelle démonstration du théorème classique d'Eisenstein : tout élément de $\mathbf{Q}[[T]]$ entier sur $\mathbf{Q}[T]$ appartient à L_1 .

Espace analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres

Dans le deuxième chapitre, nous fixons un anneau d'entiers de corps de nombres A et restreignons notre propos aux espaces analytiques dont la base est le spectre analytique $\mathcal{M}(A)$ de cet anneau. Nous commençons par décrire cette base elle-même, aussi bien l'espace topologique sous-jacent, à l'aide du théorème d'Ostrowski, que les sections du faisceau structural.

Dans un second temps, nous présentons les résultats que nous avons obtenus sur un espace affine de dimension quelconque au-dessus de A . Les résultats

du premier chapitre nous permettent de démontrer la noethérianité de certains anneaux locaux, mais, malheureusement, d'autres restent hors de notre portée. Le cas général nous semblait hors d'atteinte dans le temps qui nous était imparti, nous avons choisi de consacrer notre thèse à l'étude de la droite analytique sur A . Cependant, nous restons convaincu que les méthodes que nous présentons ici peuvent être généralisées en dimension supérieure.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à une étude spécifique de la droite affine analytique sur A . Dans ce cadre, nous sommes parvenu à démontrer les propriétés nécessaires à son utilisation en géométrie analytique. Ainsi avons-nous obtenu les résultats suivants (théorèmes 2.3.23 et 2.3.30).

Théorème 1. — *i) La droite analytique $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ est un espace topologique localement compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs, de dimension topologique 3.*

ii) Le morphisme de projection $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(A)$ est ouvert.

iii) En tout point x de $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$, l'anneau local \mathcal{O}_x est hensélien, noethérien et régulier.

iv) Le faisceau structural \mathcal{O} sur $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ est cohérent.

Espaces de Stein

Dans le troisième chapitre, nous nous restreignons toujours à la droite affine au-dessus de $\mathcal{M}(A)$. Nous cherchons à jeter les bases d'une théorie des espaces de Stein sur $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$. Les définitions que nous prenons sont les définitions cohomologiques habituelles : une partie P de la droite $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ est dite de Stein si elle vérifie le théorème A :

pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur P et tout point x de P , la fibre \mathcal{F}_x est engendrée par les sections globales $\mathcal{F}(P)$

et le théorème B :

pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur P et tout entier $q \in \mathbf{N}^*$, nous avons $H^q(P, \mathcal{F}) = 0$.

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant (corollaire 3.3.28).

Théorème 2. — *Les disques ou couronnes de $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$, ouverts ou fermés, au-dessus des parties semi-analytiques de $\mathcal{M}(A)$ sont parties de Stein.*

Comme d'habitude, on appelle partie semi-analytique de $\mathcal{M}(A)$ toute partie qui est localement définie par une combinaison booléenne d'inégalités, larges ou strictes, entre fonctions. Ce théorème vaut en fait pour les couronnes au-dessus

des éléments d'une classe de parties de $\mathcal{M}(A)$ un peu plus générale qui contient, par exemple, les branches fermées de $\mathcal{M}(A)$.

Nous commençons par traiter le cas des couronnes fermées. La démonstration que nous proposons reprend la structure de la preuve classique, en géométrie analytique complexe, du fait que les blocs compacts, c'est-à-dire les produits de segments réels dans \mathbf{C}^n , sont des espaces de Stein (*cf.* [27], chapitre III et [18]). Les ingrédients essentiels en sont le lemme d'attachement de Cousin, qui permet, sous certaines hypothèses, d'écrire une fonction analytique f définie sur une intersection de compacts $K^- \cap K^+$ comme différence d'une fonction analytique f^- sur K^- et f^+ sur K^+ et le lemme d'attachement de Cartan, qui en est la version multiplicative.

La démonstration de ces lemmes met en jeu des outils à la fois analytiques et arithmétiques. Si les compacts K^- et K^+ sont définis, respectivement, par les inégalités $|T| \leq r$ et $r \leq |T| \leq s$, il s'agit essentiellement d'écrire une série de la forme

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$$

comme différence $f^- - f^+$, avec

$$f^- = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k T^k \text{ et } f^+ = \sum_{k < 0} a_k T^k.$$

Supposons, à présent, que $A = \mathbf{Z}$ et que K^- et K^+ sont les compacts de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$ définis, respectivement, par les inégalités $|p| \leq \frac{1}{2}$ et $|p| \geq \frac{1}{2}$, où p est un nombre premier. Il s'agit alors d'écrire un élément de \mathbf{Q}_p comme somme, ou produit, d'un élément de \mathbf{Z}_p et d'un élément de $\mathbf{Z}_{(p)}$. Bien entendu, dans un corps de nombres, ce problème peut se révéler plus délicat et nous ferons appel au théorème d'approximation forte et à la finitude du groupe de Picard.

En ce qui concerne les couronnes ouvertes, le principe consiste à construire une exhaustion par des couronnes fermées. Le fait que les couronnes ouvertes soient de Stein ne découle cependant pas formellement de l'existence d'une telle exhaustion. Comme dans le cadre de la géométrie analytique complexe, des propriétés supplémentaires sont nécessaires et nous sommes amenés à introduire une notion d'exhaustion de Stein (définition 3.3.3). Signalons que la démonstration des propriétés requises passe, notamment, par un résultat de fermeture pour les sous-modules d'un module libre (théorème 3.3.23).

Applications

De même que la géométrie analytique complexe permet de démontrer des résultats sur les fonctions holomorphes, nous obtenons, à l'aide des théorèmes que nous avons établis concernant la droite affine $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$, des propriétés des séries arithmétiques convergentes (au sens du début de l'introduction). C'est l'objet du quatrième chapitre de notre thèse. Donnons un exemple de telle propriété. Notons D le disque unité ouvert de \mathbf{C} .

Théorème 3. — *Soient E et F deux parties disjointes, fermées et discrètes de D ne contenant pas le point 0. Soient $(n_a)_{a \in E}$ une famille d'entiers positifs et $(P_b)_{b \in F}$ une famille de polynômes sans terme constant. Nous supposons que*

1. *quel que soit $a \in E$, $\bar{a} \in E$ et $n_{\bar{a}} = n_a$;*
2. *quel que soit $b \in F$, $\bar{b} \in F$ et $P_{\bar{b}} = \overline{P_b}$.*

Alors il existe $g, h \in \mathbf{Z}[[T]] \cap \mathcal{O}(D)$, avec $h \neq 0$, qui vérifient les propriétés suivantes :

- i) la fonction $f = g/h$ est holomorphe sur $D \setminus F$;*
- ii) quel que soit $a \in E$, la fonction f s'annule en a à un ordre supérieur à n_a ;*
- iii) quel que soit $b \in F$, on a $f(z) - P_b\left(\frac{1}{z-b}\right) \in \mathcal{O}_b$;*
- iv) on a $f \in \mathbf{Z}[[T]] \cap \mathcal{O}_0$.*

Ce résultat se démontre par des méthodes cohomologiques. Lorsque la partie E est vide, nous utilisons la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O} \rightarrow 0$ et le fait que le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1,\text{an}}$ est une partie de Stein. Lorsqu'elle ne l'est pas, nous utilisons le même argument en remplaçant le faisceau \mathcal{O} par un diviseur de Cartier adéquat.

Soit \mathcal{P} un ensemble fini de nombres premiers. Notons $N \in \mathbf{N}^*$ leur produit. Il est possible d'imposer également, pour tout nombre premier $p \in \mathcal{P}$, les parties principales de la série f comme fonction méromorphe sur le disque de centre 0 et de rayon 1 dans \mathbf{C}_p . Il nous faudra alors autoriser les coefficients de g , de h et du développement de f en 0 à appartenir à $\mathbf{Z}[1/N]$. Bien entendu, nous disposons du résultat analogue pour tout corps de nombres (corollaire 4.1.10).

Nous proposons, ensuite, une application de nos méthodes à la noethérianité d'anneaux de séries arithmétiques convergentes. Pour l'obtenir, nous nous sommes inspiré du théorème suivant de J. Frisch (cf. [26]).

Théorème (Frisch). — *Soit X une variété analytique réelle ou complexe. Soit K une partie compacte de X , semi-analytique et de Stein. Alors l'anneau des fonctions analytiques au voisinage de K est noethérien.*

Comme l'ont montré des résultats ultérieurs (cf. [45], théorème 1), l'hypothèse de semi-analyticité peut être affaiblie. C'est pourquoi nous introduisons ici une notion de partie morcelable (définition 4.2.6). Nous obtenons alors le résultat suivant (théorème 4.2.9).

Théorème 4. — *Soit L une partie de $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ compacte, morcelable et de Stein. Alors l'anneau $\mathcal{O}(L)$ des fonctions analytiques au voisinage de L est noethérien.*

En appliquant ce théorème aux disques fermés au-dessus des parties semi-analytiques de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, nous obtenons le résultat suivant (corollaire 4.2.13).

Corollaire 5. — *Soient t un entier, p_1, \dots, p_t des nombres premiers, $r_1, \dots, r_t, r_\infty$ des éléments de l'intervalle $]0, 1[$. Alors, l'anneau formé des séries*

$$f \in \mathbf{Z} \left[\frac{1}{p_1 \cdots p_t} \right] \llbracket T \rrbracket$$

vérifiant les conditions

$$R_\infty(f) > r_\infty \text{ et } \forall i \in [1, t], R_{p_i}(f) > r_i$$

est un anneau noethérien.

Si l'on considère uniquement des séries à coefficients entiers et que l'on n'impose donc des conditions que sur le rayon de convergence complexe, nous retrouvons un résultat de D. Harbater (cf. [34], théorème 1.8). La preuve qu'il en propose est très algébrique : elle consiste à décrire tous les idéaux premiers de l'anneau à l'aide de manipulations fort astucieuses sur les séries. Insistons sur le fait que notre démonstration repose sur des arguments géométriques et suit de près les méthodes de la géométrie analytique complexe. En ce sens, elle nous semble porter des promesses de généralisation. Signalons, enfin, que notre résultat s'étend à tout anneau d'entiers de corps de nombres.

Un résultat de connexité pour les variétés analytiques p -adiques. Privilège et noethérianité.

La seconde partie de notre thèse est totalement indépendante de la première et constitue la version actuelle d'un article à paraître dans la revue *Compositio Mathematica*. Elle se distingue du reste du texte dans le sens où elle est consacrée à l'étude de certaines propriétés des espaces de Berkovich classiques, c'est-à-dire

sur un corps ultramétrique complet. Indiquons également que cette partie est antérieure à la précédente.

La preuve du théorème de J. Frisch mentionné plus haut repose sur des arguments géométriques : elle fait appel à la noethérianité des anneaux locaux, à un dévissage local des faisceaux cohérents, à la notion de voisinage privilégié et aux stratifications de parties semi-analytiques. Nous avons cherché à adapter cette démonstration au cadre des espaces de Berkovich et nous sommes donc intéressés à la notion de voisinage privilégié. Cette condition technique ne nous intéressait pas pour elle-même, mais seulement parce qu'elle nous permettait de suivre la preuve de J. Frisch. Nous nous sommes rapidement rendu compte que nous pouvions démontrer l'existence de voisinages privilégiés pourvu que nous disposions du résultat suivant (théorème 1).

Théorème 6. — *Soient k un corps ultramétrique complet, X un espace k -affinoïde irréductible et f une fonction analytique sur X . Alors, le domaine affinoïde défini par*

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

est irréductible, dès que ε est assez petit.

Cet énoncé peut être compris comme une généralisation, dans le cadre des espaces affinoïdes, du théorème d'extension de Riemann. Bien que la structure de la preuve que nous proposons soit assez simple, il nous a fallu recourir à des outils sophistiqués tels que le théorème de la fibre réduite de S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud, assurant l'existence de bons modèles entiers des espaces, ou le théorème de déramification d'Epp. Signalons que, dans le prolongement du théorème précédent, nous avons également établi le résultat suivant, que l'on peut comprendre comme une propriété de modération topologique (théorème 2).

Théorème 7. — *Soient k un corps ultramétrique complet, X un espace k -affinoïde et f une fonction analytique sur X . Alors il existe une partition finie \mathcal{P} de \mathbf{R}^+ de la forme*

$$\mathcal{P} = \{[0, a_0],]a_0, a_1], \dots,]a_{r-1}, a_r],]a_r, +\infty[\},$$

où $r \in \mathbf{N}$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq r}$ est une suite croissante d'éléments de $R_X \cup \{0\}$, satisfaisant la condition suivante : quel que soit $I \in \mathcal{P}$, quels que soient $\varepsilon', \varepsilon \in I$, avec $\varepsilon' \leq \varepsilon$, l'inclusion

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon'\}$$

induit une bijection entre les ensembles de composantes connexes

$$\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow \pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon'\}).$$

Le même résultat vaut pour le foncteur qui associe à un espace k -analytique l'ensemble de ses composantes irréductibles.

Dans ce théorème, l'ensemble R_X désigne le sous- \mathbf{Q} -espace vectoriel de \mathbf{R}_+^* engendré par les valeurs non nulles de la norme spectrale sur l'algèbre de X . Par exemple, si l'espace X est strictement affinoïde sur le corps \mathbf{Q}_p , on a

$$R_X = \sqrt{|\mathbf{Q}_p^*|} = p^{\mathbf{Q}}.$$

Nous retrouvons et étendons ainsi un résultat qui figure dans l'article [1] d'A. Abbes et T. Saito. Leur texte est consacré à la théorie de la ramification sur un corps local à corps résiduel imparfait et, dans ce cadre, les nombres réels a_1, \dots, a_r sont liés aux sauts de la filtration de ramification.

La preuve originale du théorème de J. Frisch utilise de façon essentielle l'existence de stratifications pour les parties semi-analytiques. Cependant, au cours de nos lectures, nous en avons découvert, dans l'ouvrage [2] de C. Bănică et O. Stănăşilă, une démonstration plus simple. Signalons que les auteurs attribuent cette preuve à A. Grothendieck, mais nous n'avons pu en trouver trace. Elle repose sur des techniques classiques de géométrie analytique complexe, essentiellement le dévissage local de faisceaux cohérents et la normalisation, dont les analogues existent dans la théorie de V. Berkovich. Il nous a été aisé d'adapter cette démonstration au cadre des espaces de Berkovich.

PREMIÈRE PARTIE

ESPACES DE BERKOVICH SUR Z

CHAPITRE 1

ESPACES ANALYTIQUES SUR UN ANNEAU DE BANACH

Le premier chapitre de notre thèse est consacré aux espaces analytiques sur un anneau de Banach quelconque, au sens de Vladimir G. Berkovich. Nous commençons par rappeler les constructions qu'il propose dans l'ouvrage [4], à la fois pour l'espace topologique et le faisceau structural. Nous donnons, en particulier, une description explicite de la droite affine analytique au-dessus d'un corps valué complet quelconque.

Dans un deuxième temps, nous définissons et étudions des anneaux de séries convergentes à coefficients dans un anneau de Banach. Une limite inductive de tels anneaux se comporte, en un certain sens, comme l'anneau local d'un espace analytique et nous montrons, par exemple, qu'ils satisfont les théorèmes de division et de préparation de Weierstraß. Une fois ces outils à notre disposition, plusieurs propriétés, telles la noethérianité ou la régularité, suivent.

Pour finir, nous entreprenons une brève étude de la topologie de l'espace analytique au voisinage de certains points. Nous en déduisons une description explicite de certains anneaux locaux en termes d'algèbres de séries convergentes. Nous concluons par un exemple dans lequel nous regroupons les résultats démontrés jusqu'alors. À titre de divertissement, nous proposons une démonstration du théorème classique d'Eisenstein concernant les séries à coefficients dans \mathbf{Q} entières sur $\mathbf{Q}[T]$ en termes d'espaces analytiques.

1.1. Définitions

1.1.1. Spectre d'un anneau de Banach

Soit A un anneau commutatif unitaire. Par définition, l'ensemble sous-jacent au spectre $\text{Spec}(A)$ de l'anneau A est l'ensemble des idéaux premiers de A . D'après [32], Introduction, 13, il est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes unitaires

$$A \rightarrow k,$$

où k est un corps. Deux morphismes de A vers des corps k_1 et k_2 sont dits équivalents s'ils prennent place dans un diagramme commutatif de la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} & & k_1 \\ & \nearrow & \\ A & \longrightarrow & k_0 \\ & \searrow & \\ & & k_2 \end{array}$$

La bijection précédente peut être décrite explicitement. Tout d'abord, si $A \rightarrow k$ est un morphisme unitaire vers un corps, son noyau est un idéal premier de A et donc un élément de $\text{Spec}(A)$. Réciproquement, si x est un point de $\text{Spec}(A)$, il correspond à un idéal premier \mathfrak{p}_x de A . On construit alors un morphisme de A vers un corps de la façon suivante :

$$A \rightarrow A/\mathfrak{p}_x \rightarrow \text{Frac}(A/\mathfrak{p}_x).$$

Le corps $k(x) = \text{Frac}(A/\mathfrak{p}_x)$ est appelé corps résiduel du point x . Par ailleurs, on vérifie que tous les morphismes représentant x se factorisent par le morphisme $A \rightarrow k(x)$.

Si nous désirons faire de la géométrie analytique, nous aurons besoin de disposer de notions de normes et de convergence. Nous allons donc considérer non plus un simple anneau, mais un anneau *de Banach*. De même, nous allons remplacer les morphismes vers des corps par des morphismes *bornés*, et donc continus, vers des corps *valués*.

Précisons un peu. Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. Rappelons que, par définition, cela impose à la norme $\|\cdot\|$ d'être sous-multiplicative :

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, \|fg\| \leq \|f\| \|g\|.$$

Définition 1.1.1. — *Un caractère de $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est un morphisme borné*

$$\chi : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (K, |\cdot|),$$

où $(K, |\cdot|)$ désigne un corps valué complet.

Remarque 1.1.2. — Dire que le morphisme $\chi : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (K, |\cdot|)$ est borné signifie qu'il existe $C > 0$ tel que, quel que soit $f \in \mathcal{A}$, nous ayons

$$|\chi(f)| \leq C \|f\|.$$

Soient $f \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Nous avons alors

$$|\chi(f)| = |\chi(f^n)|^{1/n} \leq C^{1/n} \|f^n\|^{1/n} \leq C^{1/n} \|f\|.$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, nous obtenons

$$|\chi(f)| \leq \|f\|.$$

Nous pourrions donc toujours supposer que $C = 1$.

Nous dirons que deux caractères

$$\chi_1 : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (K_1, |\cdot|_1) \text{ et } \chi_2 : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (K_2, |\cdot|_2)$$

sont équivalents s'il existe un troisième caractère

$$\chi_0 : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (K_0, |\cdot|_0)$$

et deux morphismes isométriques

$$j_1 : (K_0, |\cdot|_0) \rightarrow (K_1, |\cdot|_1) \text{ et } j_2 : (K_0, |\cdot|_0) \rightarrow (K_2, |\cdot|_2)$$

qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & & (K_1, |\cdot|_1) \\
 & \nearrow^{\chi_1} & \\
 (\mathcal{A}, \|\cdot\|) & \xrightarrow{\chi_0} & (K_0, |\cdot|_0) \\
 & \searrow_{\chi_2} & \\
 & & (K_2, |\cdot|_2)
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \nearrow^{j_1} \\
 \\
 \searrow_{j_2} \\
 \\
 \end{array}$$

Comme dans le cas des schémas, nous pouvons décrire les classes d'équivalence de caractères d'une façon explicite. À cet effet, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1.1.3. — Une **semi-norme multiplicative bornée** sur $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est une application $|\cdot| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $|0| = 0$;
- ii) $|1| = 1$;
- iii) $\forall f, g \in \mathcal{A}, |f + g| \leq |f| + |g|$;
- iv) $\forall f, g \in \mathcal{A}, |fg| = |f||g|$;
- v) $\exists C > 0, \forall f \in \mathcal{A}, |f| \leq C\|f\|$.

Remarque 1.1.4. — Le même raisonnement que pour les caractères nous montre que l'on peut supposer que $C = 1$.

L'ensemble des classes d'équivalence de caractères sur $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est en bijection avec l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$. Nous pouvons décrire cette bijection explicitement. À tout caractère

$$\chi : (\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (K, |\cdot|),$$

on associe la semi-norme multiplicative

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\chi} K \xrightarrow{|\cdot|} \mathbf{R}_+.$$

Elle est bornée car le morphisme χ est borné. On vérifie immédiatement que la semi-norme obtenue ne dépend que de la classe d'équivalence du caractère χ .

Réciproquement, soit $|\cdot|_x$ une semi-norme multiplicative bornée sur $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$. L'ensemble

$$\mathfrak{p}_x = \{f \in \mathcal{A}, |f|_x = 0\}$$

est un idéal premier de \mathcal{A} . Le quotient $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$ est un anneau intègre sur lequel la semi-norme $|\cdot|_x$ induit une valeur absolue. Nous noterons $\mathcal{H}(|\cdot|_x)$ le complété du corps des fractions de cet anneau pour cette valeur absolue. La construction nous fournit un morphisme

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(|\cdot|_x).$$

On vérifie sans peine qu'il est borné et donc que c'est un caractère. Comme dans le cas des schémas, tout caractère représentant la semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ se factorise par le caractère $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(|\cdot|_x)$.

Ces considérations motivent la définition suivante.

Définition 1.1.5 (Berkovich). — On appelle **spectre analytique** de l'anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ et l'on note $\mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, ou plus simplement $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ si aucune ambiguïté n'en résulte, l'ensemble des semi-normes multiplicatives bornées sur \mathcal{A} .

Soient f un élément de \mathcal{A} et x un point de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Notons $|\cdot|_x$ la semi-norme multiplicative bornée sur \mathcal{A} associée au point x . Nous appellerons **corps résiduel complété** du point x et noterons $\mathcal{H}(x)$ le corps $\mathcal{H}(|\cdot|_x)$ défini précédemment. Nous noterons $f(x) \in \mathcal{H}(x)$ l'image de l'élément f de A par le caractère $A \rightarrow \mathcal{H}(x)$. Le corps $\mathcal{H}(x)$ est muni d'une valeur absolue, que nous noterons toujours $|\cdot|$. Cela n'entraînera aucune confusion. Avec ces notations, nous avons donc

$$|f(x)| = |f|_x.$$

Comme les notations l'indiquent, nous considérons désormais les éléments de A comme des fonctions sur l'espace $\mathcal{M}(A)$.

Munissons, à présent, le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ d'une topologie : la topologie la plus grossière rendant continues les applications d'évaluation, c'est-à-dire les applications de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\mathcal{A}) & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array},$$

avec $f \in \mathcal{A}$. Il vérifie alors des propriétés remarquables (cf. [4], théorème 1.2.1).

Théorème 1.1.6 (Berkovich). — *Le spectre analytique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un espace topologique compact. Si l'anneau \mathcal{A} n'est pas nul, cet espace n'est pas vide.*

1.1.2. Espace affine analytique

Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach. Maintenant que nous avons défini le spectre analytique de cet anneau, nous pouvons définir ce qu'est l'espace affine au-dessus de celui-ci. Soit $n \in \mathbf{N}$.

Définition 1.1.7 (Berkovich). — *L'espace affine analytique de dimension n sur $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ dont la restriction à $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est bornée. Nous le noterons $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$.*

En reprenant le raisonnement du paragraphe précédent, on montre que l'ensemble $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes

$$\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow K,$$

où K est un corps valué complet, dont la restriction à \mathcal{A} est bornée. Comme précédemment, nous associons à chaque point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ un corps résiduel complété $\mathcal{H}(x)$ et, pour tout élément f de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, désignons par $f(x)$ l'image de f par le morphisme $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x)$.

Nous munissons également l'espace $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ de la topologie la plus grossière pour laquelle les applications d'évaluation sont continues. Il vérifie alors encore certaines propriétés topologiques (*cf.* [4], remarque 1.5.2.(i)).

Théorème 1.1.8 (Berkovich). — *L'espace analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est un espace topologique séparé et localement compact.*

Il nous paraît, à présent, utile de décrire explicitement l'espace et sa topologie dans quelques cas simples. Nous nous restreindrons donc au cas où l'anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est un corps valué complet $(k, |\cdot|)$. Son spectre analytique $\mathcal{M}(k)$ est alors constitué d'un seul point. Si le corps k est archimédien, nous ferons le lien entre l'espace $\mathbf{A}_k^{n,\text{an}}$ et les espaces analytiques réels et complexes usuels. Si le corps k est ultramétrique, nous nous contenterons de décrire la droite $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$.

1.1.2.1. Espace affine sur un corps archimédien

Commençons par supposer que le corps $(k, |\cdot|)$ est un corps muni d'une valeur absolue archimédienne pour laquelle il est complet. D'après [16], VI, §6, n° 4, théorème 2, il existe $s \in]0, 1]$ tel que le corps valué $(k, |\cdot|)$ soit isométriquement isomorphe au corps $(\mathbf{R}, |\cdot|_{\infty}^s)$ ou au corps $(\mathbf{C}, |\cdot|_{\infty}^s)$, où $|\cdot|_{\infty}$ désigne la valeur absolue usuelle.

Supposons que $(k, |\cdot|) = (\mathbf{C}, |\cdot|_{\infty})$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Les points de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\text{an}}$ sont en bijection avec les classes d'équivalences de caractères de $\mathbf{C}[T_1, \dots, T_n]$. Soit

$$\chi : \mathbf{C}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow L$$

un tel caractère. D'après le théorème de Gelfand-Mazur (*cf.* [16], VI, §6, n° 4, théorème 1), le corps L est isomorphe à \mathbf{C} . Posons

$$\alpha = (\chi(T_1), \dots, \chi(T_n)) \in \mathbf{C}^n.$$

Alors le caractère χ n'est autre que le morphisme évaluation au point α de \mathbf{C}^n . On en déduit que les ensembles $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\text{an}}$ et \mathbf{C}^n sont en bijection. D'autre part, il est clair que les topologies coïncident. Les espaces $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{n,\text{an}}$ et \mathbf{C}^n sont donc homéomorphes.

Supposons, à présent, que $(k, |\cdot|) = (\mathbf{R}, |\cdot|_{\infty})$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Le même raisonnement que précédemment montre que l'espace $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}^{n,\text{an}}$ est homéomorphe au quotient de l'espace \mathbf{C}^n par la conjugaison complexe.

1.1.2.2. Droite sur un corps trivialement valué

Dans cette partie, nous supposerons que le corps k est muni de la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$. Nous nous contenterons de décrire la droite affine analytique

$\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$. Soit x un point de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$. Il lui correspond une semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ bornée sur k . Notons

$$\mathfrak{p}_x = \{f \in k[T] \mid |f|_x = 0\}.$$

C'est un idéal premier de $k[T]$. Supposons que ce ne soit pas l'idéal nul. Il existe alors un polynôme irréductible $P(T)$ de $k[T]$ qui engendre l'idéal \mathfrak{p}_x . La semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ induit une valeur absolue sur le quotient

$$k[T]/\mathfrak{p}_x = k[T]/(P(T))$$

qui est une extension finie du corps k . Cette valeur absolue ne peut être que la valeur absolue triviale. Par conséquent, nous avons

$$|\cdot|_x : \begin{array}{ccc} k[T] & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ Q(T) & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } P \mid Q \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

Nous noterons $\eta_{P,0}$ le point de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ correspondant. Nous avons

$$\mathcal{H}(\eta_{P,0}) = k[T]/(P(T)).$$

Supposons, à présent, que l'idéal premier \mathfrak{p}_x soit nul. La semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ est alors en fait une valeur absolue sur $k[T]$. Par hypothèse, la restriction de cette valeur absolue à k est bornée par la valeur absolue triviale. En particulier, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons $|n.1|_x \leq 1$. On en déduit que la valeur absolue $|\cdot|_x$ est ultramétrique en utilisant le lemme classique suivant.

Lemme 1.1.9. — *Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué. La valeur absolue $|\cdot|$ est ultramétrique si, et seulement si, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons $|n.1| \leq 1$.*

Démonstration. — L'implication directe découle directement de l'inégalité ultramétrique et du fait que $|1| = 1$.

Supposons que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons $|n.1| \leq 1$. Soient $a, b \in k$. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Nous avons

$$\begin{aligned} |a + b|^p &= |(a + b)^p| \\ &= \left| \sum_{i=0}^p C_p^i a^i b^{p-i} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^p |C_p^i| |a|^i |b|^{p-i} \\ &\leq p \max(|a|, |b|)^p. \end{aligned}$$

En élevant l'inégalité obtenue à la puissance $1/p$ et en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$|a + b| \leq \max(|a|, |b|).$$

□

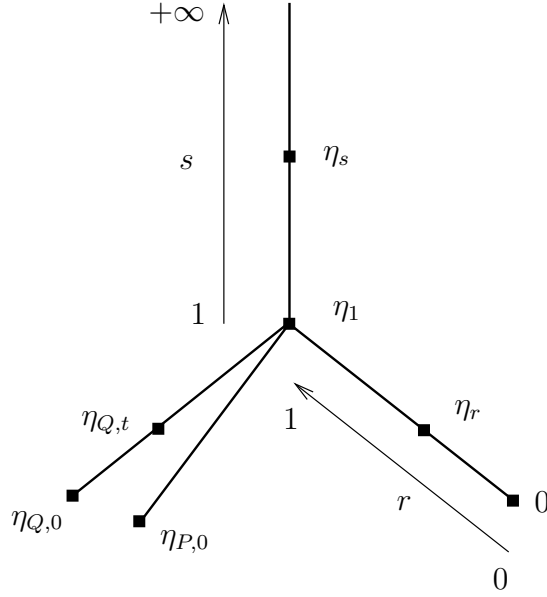


FIG. 1. Droite analytique sur un corps trivialement valué.

Nous allons distinguer deux cas. Supposons, tout d'abord, que $|T|_x \leq 1$. On en déduit facilement que, quel que soit $f \in k[T]$, nous avons

$$|f|_x \leq 1.$$

L'inégalité ultramétrique nous montre que la partie

$$\mathfrak{p}'_x = \{f \in k[T] \mid |f|_x < 1\}$$

est un idéal premier de $k[T]$. Si cet idéal est nul, alors nous avons $|\cdot|_x = |\cdot|_0$. Dans les autres cas, l'idéal \mathfrak{p}'_x est engendré par un polynôme irréductible P de $k(T)$. Notons v_P la valuation P -adique sur $k[T]$. Il existe $r \in]0, 1[$ tel que $|P|_x = r$. Quel que soit $Q(T) \in k[T]$, nous avons alors

$$|Q|_x = r^{v_P(Q)}.$$

Nous noterons $\eta_{P,r}$ le point de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ correspondant. Le corps résiduel complété $\mathcal{H}(\eta_{P,r})$ en ce point est le complété du corps $k(T)$ pour la topologie P -adique. Si

$P(T) = T$, nous noterons η_r le point correspondant. Le corps résiduel complété $\mathcal{H}(\eta_r)$ est alors isomorphe au corps des séries de Laurent $k((T))$.

Supposons, à présent, que $|T|_x > 1$. Il existe $r > 1$ tel que $|T|_x = r$. L'inégalité ultramétrique montre alors que, quel que soit $Q(T) \in k[T]$, nous avons

$$|Q|_x = r^{\deg(Q)}.$$

Nous noterons η_r le point de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ correspondant. Le corps résiduel complété $\mathcal{H}(\eta_r)$ en ce point est isomorphe au corps $k((T^{-1}))$.

Introduisons encore quelques notations. Pour $\alpha \in k$ et $r \in [0, 1]$, nous noterons

$$\eta_{\alpha,r} = \eta_{T^{-\alpha},r}.$$

Si $r = 0$, nous noterons parfois simplement α le point $\eta_{\alpha,0}$.

1.1.2.3. Droite sur un corps ultramétrique quelconque

Il est également possible de décrire la droite analytique au-dessus de tout corps ultramétrique complet. Nous allons en fait nous limiter au cas des corps qui sont également algébriquement clos. Cette restriction ne nuit pas à la généralité de notre propos. En effet, d'après [4], corollaire 1.3.6, si k désigne un corps valué complet, \bar{k} l'une de ses clôtures algébriques et $\hat{\bar{k}}$ le complété de cette dernière, alors le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ agit sur $\hat{\bar{k}}$ et le morphisme naturel

$$\mathbf{A}_{\hat{\bar{k}}}^{1,\text{an}}/\text{Gal}(\bar{k}/k) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$$

est un isomorphisme.

Nous supposons donc, désormais, que k est un corps ultramétrique complet algébriquement clos. Nous reprenons la description donnée par V. Berkovich dans [4], §1.4.4. Il distingue quatre types de points. Soit $a \in k$. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned} k[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ P(T) &\mapsto |P(a)| \end{aligned}$$

définit une semi-norme multiplicative sur $k[T]$ bornée sur k et donc un point de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$. Nous noterons a ce point. Un tel point est dit **de type 1**. En ce point le corps résiduel complété est simplement

$$\mathcal{H}(a) = k.$$

Soient $a \in k$ et $r > 0$. L'application

$$\begin{aligned} k[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n (T - a)^n &\mapsto \max_{n \in \mathbf{N}} (|c_n| r^n) \end{aligned}$$

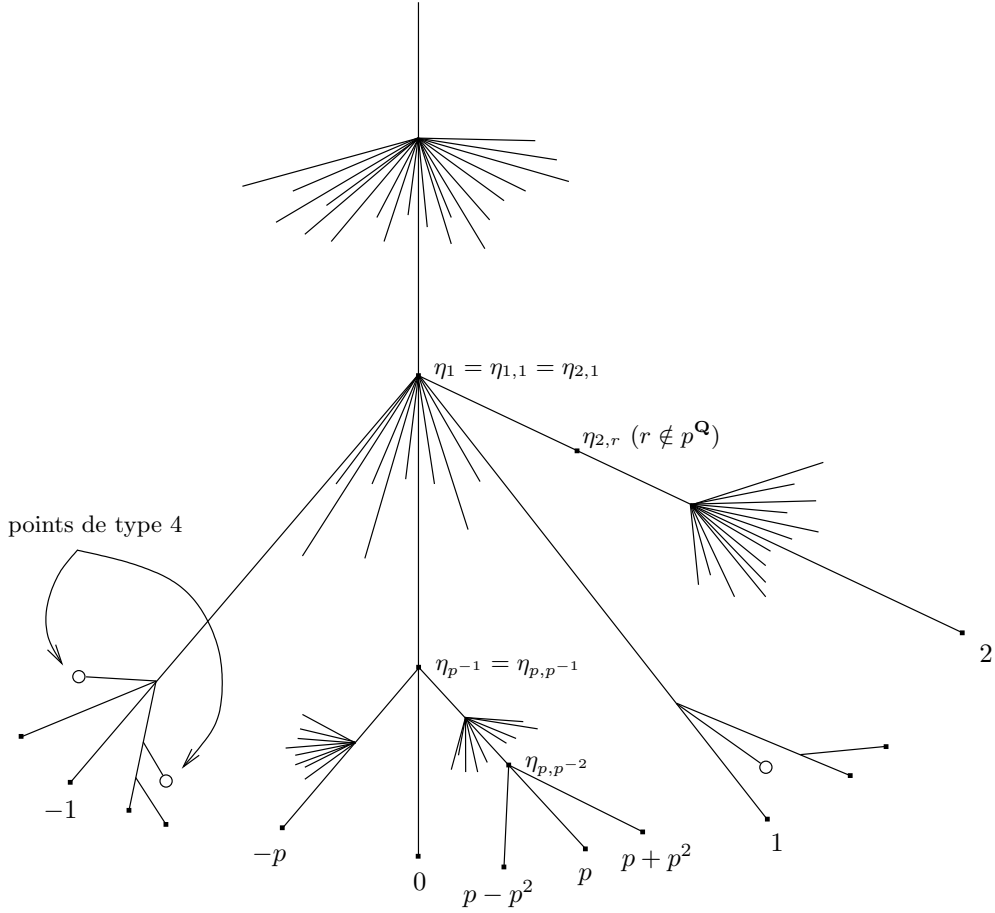


FIG. 2. Droite analytique sur le corps \mathbf{C}_p muni de la valeur absolue $|\cdot|_p$.

définit encore une semi-norme multiplicative sur $k[T]$ bornée sur k . Seul le caractère multiplicatif n'est pas immédiat. Il provient en fait de l'inégalité ultramétrique. Nous noterons $\eta_{a,r}$ le point de la droite $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ correspondant. Il est remarquable que, contrairement à ce que notre notation peut laisser croire, le point $\eta_{a,r}$ ne dépend que du disque de centre a et de rayon r . En particulier, pour $b \in k$, nous avons

$$\eta_{a,r} = \eta_{b,r} \text{ dès que } |a - b| \leq r.$$

Les différents points $\eta_{a,r}$ se comportent différemment selon que le nombre réel r appartient ou non au groupe $|k^*|$. Lorsque $r \in |k^*|$, le point $\eta_{a,r}$ est dit **de type 2**. Nous avons alors

$$\widetilde{\mathcal{H}}(\eta_{a,r}) \simeq \tilde{k}(T) \text{ et } |\mathcal{H}(\eta_{a,r})^*| = |k^*|.$$

Lorsque $r \notin |k^*|$, le point $\eta_{a,r}$ est dit **de type 3**. Nous avons alors

$$\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{a,r})} = \tilde{k} \text{ et le groupe } |\mathcal{H}(\eta_{a,r})^*| \text{ est engendré par } |k^*| \text{ et } r.$$

Signalons que lorsque $a = 0$, nous noterons simplement $\eta_r = \eta_{a,r}$.

Il nous reste un type de points à décrire. Soient I un ensemble ordonn e, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ une famille de k et $\mathbf{r} = (r_i)_{i \in I}$ une famille de nombre réels strictement positifs qui vérifient les propriétés suivantes :

$$i) \forall i \leq j, \overline{D}(a_i, r_i) \subset \overline{D}(a_j, r_j);$$

$$ii) \bigcap_{i \in I} \overline{D}(a_i, r_i) = \emptyset.$$

De telles familles existent lorsque le corps k n'est pas maximale­ment complet (cf. [36], définition 5.2). Ce sera, par exemple, le cas pour le corps \mathbf{C}_p , pour tout nombre premier p . Remarquons que nous devons avoir

$$\inf_{i \in I} (r_i) > 0$$

sinon le caractère complet du corps k imposerait à l'intersection des disques de contenir un point. L'application

$$\begin{aligned} k[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ P(T) &\mapsto \inf_{i \in I} (|P(\eta_{a_i, r_i})|) \end{aligned}$$

définit une semi-norme multiplicative sur $k[T]$ bornée sur k . Nous noterons $\eta_{\mathbf{a}, \mathbf{r}}$ le point de la droite $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ correspondant. Un tel point est dit **de type 4**. Le corps résiduel complété en ce point est une extension immédiate du corps k : il vérifie

$$\widetilde{\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{a}, \mathbf{r}})} = \tilde{k} \text{ et } |\mathcal{H}(\eta_{\mathbf{a}, \mathbf{r}})^*| = |k^*|.$$

Pour terminer, introduisons un peu de terminologie. Revenons au cas d'un corps k ultramétrique complet quelconque et donc plus nécessaire­ment algébriquement clos. Considérons le morphisme de changement de base

$$\varphi : \mathbf{A}_{\tilde{k}}^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{1, \text{an}}.$$

C'est un morphisme surjectif. Nous dirons qu'un point x de la droite analytique $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ est de type i , pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, si l'un des ses ant ecedents par le morphisme φ est de type i (c'est alors le cas pour tous).

Soit $P(T)$ un polynôme irréductible de $k[T]$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, avec $d \in \mathbf{N}^*$, ses racines dans \tilde{k} . L'application

$$\begin{aligned} k[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ Q(T) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } P \mid Q \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est une semi-norme multiplicative sur $k[T]$, bornée sur k . Nous noterons $\eta_{P,0}$ le point de la droite $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ correspondant. Un tel point est dit **rigide**. Nous avons alors

$$\mathcal{H}(\eta_{P,0}) = k[T]/(P(T)).$$

Nous avons alors

$$\varphi^{-1}(\eta_{P,0}) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}.$$

Si $P(T)$ est un polynôme de la forme $T - a$, avec $a \in k$, la semi-norme n'est autre que l'application d'évaluation

$$\begin{array}{ccc} k[T] & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ Q(T) & \mapsto & |Q(a)| \end{array} .$$

Un tel point est dit **rationnel**.

1.1.3. Faisceau structural

Pour parvenir à faire de la géométrie sur les espaces analytiques au sens précédent, nous devons en faire des espaces localement annelés. Nous suivons, ici encore, la construction de [4], §1.5. Soit $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach et soit $n \in \mathbf{N}$. Nous nous restreindrons cependant à certains types de normes particuliers.

Définition 1.1.10. — On appelle **semi-norme spectrale** sur $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ la semi-norme définie par

$$\forall f \in \mathcal{A}, \|f\|_{sp} = \max_{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} (|f(x)|) = \inf_{k \in \mathbf{N}^*} \left(\|f^k\|^{\frac{1}{k}} \right).$$

L'égalité provient de [4], théorème 1.3.1.

Définition 1.1.11. — On dit que la norme $\|\cdot\|$ est **uniforme** si elle est équivalente à la semi-norme spectrale, c'est-à-dire s'il existe deux constantes $C_-, C_+ > 0$ telles que

$$\forall f \in \mathcal{A}, C_- \|f\|_{sp} \leq \|f\| \leq C_+ \|f\|_{sp}.$$

Dans la suite, nous supposons toujours que la norme $\|\cdot\|$ est **uniforme**. Cela impose en particulier à la semi-norme spectrale d'être une norme et donc à l'anneau \mathcal{A} d'être réduit. Nous disposons également d'un homéomorphisme

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{A}, |\cdot|_{sp})$$

induit par l'application identité.

Définissons, à présent, le préfaisceau \mathcal{H} des fractions rationnelles sans pôles sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ de la façon suivante : pour tout ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, l'anneau $\mathcal{H}(U)$

est le localisé de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ par l'ensemble de ses éléments qui ne s'annulent en aucun point de U . Exprimons cette définition à l'aide de notations mathématiques. Soit un ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Posons

$$S_U = \{P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \mid \forall x \in U, P(x) \neq 0\}.$$

Nous avons alors

$$\mathcal{H}(U) = S_U^{-1} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n].$$

Nous allons maintenant définir les fonctions analytiques comme les fonctions qui sont localement limites uniformes de fractions rationnelles sans pôles. Plus précisément, pour tout ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$, on définit $\mathcal{O}(U)$ comme l'ensemble des applications

$$f : U \rightarrow \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{H}(x),$$

où $f(x) \in \mathcal{H}(x)$ pour tout $x \in U$, vérifiant la condition suivante : quel que soit $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V de x dans U et une suite $(R_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}(V)$ telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $j \in \mathbf{N}$ pour lequel on ait

$$\forall i \geq j, \forall y \in V, |f(y) - R_i(y)| \leq \varepsilon.$$

On vérifie immédiatement que \mathcal{O} est bien un faisceau d'anneaux sur $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. En outre, quel que soit $x \in \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$, la fibre \mathcal{O}_x au point x est un anneau local dont l'idéal maximal est l'ensemble des germes de fonctions qui s'annulent au point x .

Remarque 1.1.12. — L'application naturelle

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$$

est injective. C'est, en grande partie, pour disposer de ce résultat que nous supposons que la norme $\|\cdot\|$ sur l'anneau de Banach \mathcal{A} est uniforme.

Remarque 1.1.13. — L'application identité de $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ vers $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{sp})$ induit un isomorphisme d'espaces annelés

$$\mathbf{A}_{\mathcal{A}, \|\cdot\|}^{n, \text{an}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_{\mathcal{A}, \|\cdot\|_{sp}}^{n, \text{an}}.$$

Pour de nombreuses questions, nous pourrions donc supposer que la norme $\|\cdot\|$ est la norme spectrale.

Remarque 1.1.14. — Si l'anneau de Banach considéré est l'anneau \mathbf{C} muni de la valeur absolue usuelle, nous retrouvons la notion habituelle de fonction holomorphe. En effet, toutes les fractions rationnelles sans pôles sur un ouvert de \mathbf{C}^n sont holomorphes sur cet ouvert et il est bien connu qu'une limite uniforme de fonctions holomorphes reste holomorphe.

Réciproquement, toute fonction holomorphe sur un ouvert U de \mathbf{C}^n est localement limite uniforme de polynômes. Il suffit, par exemple, de recouvrir l'ouvert U par des polydisques ouverts dont l'adhérence est contenue dans U .

Nous disposons, à présent, d'une notion de fonction analytique sur les ouverts de l'espace $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Nous pouvons en déduire une définition générale d'espace analytique. Nous la donnons ci-dessous dans un souci d'exhaustivité, mais ne l'utiliserons pas. Dans le cas complexe, un espace est dit analytique s'il est localement isomorphe à un fermé analytique d'un ouvert d'un espace affine. La définition suivante s'impose donc naturellement.

Définition 1.1.15 (Berkovich). — *On dit qu'un espace localement annelé (V, \mathcal{O}_V) est un **modèle local d'un espace analytique** sur \mathcal{A} s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$, un ouvert U de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et un faisceau \mathcal{I} d'idéaux de type fini de \mathcal{O}_U tels que (V, \mathcal{O}_V) soit isomorphe au support du faisceau $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$, muni du faisceau $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$.*

*On appelle **espace analytique** sur \mathcal{A} tout espace localement annelé qui est localement isomorphe à un modèle local d'un espace analytique sur \mathcal{A} .*

1.1.4. Parties compactes rationnelles

Soient $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ un anneau de Banach muni d'une norme uniforme et $n \in \mathbf{N}$ un entier. Soit V une partie compacte de l'espace analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Définissons l'anneau $\mathcal{K}(V)$ comme le localisé de l'anneau $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ par l'ensemble des éléments qui ne s'annulent pas au voisinage de V . Notons $\mathcal{B}(V)$ le complété de cet anneau pour la norme uniforme $\|\cdot\|_V$ sur V . C'est un anneau de Banach muni d'une norme uniforme. En effet, quel que soient $P \in \mathcal{K}(V)$ et $k \in \mathbf{N}^*$, nous avons $\|P^k\|_V = \|P\|_V^k$ et cette propriété s'étend à $\mathcal{B}(V)$. Remarquons encore que le morphisme naturel

$$f : \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}(V)$$

est borné sur \mathcal{A} . Il induit donc un morphisme entre espaces localement annelés

$$\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}.$$

Il est naturel de chercher à décrire l'image de ce morphisme et, plus généralement, à comprendre ses propriétés.

Commençons par une propriété topologique simple.

Lemme 1.1.16. — *Le morphisme φ réalise un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. — Puisque l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$ est compact, il nous suffit de montrer que le morphisme φ est injectif. Soient x et y deux points distincts de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$. Notons $|\cdot|_x$ et $|\cdot|_y$ les semi-normes multiplicatives bornées sur $\mathcal{B}(V)$ associées. Par hypothèse, il existe un élément P de $\mathcal{B}(V)$ tel que

$$|P|_x \neq |P|_y.$$

La densité de $\mathcal{K}(V)$ dans $\mathcal{B}(V)$ nous permet d'en déduire qu'il existe $Q \in \mathcal{K}(V)$ tel que

$$|Q|_x \neq |Q|_y.$$

En écrivant Q comme élément du localisé de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, on montre alors qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ tel que

$$|j(P)|_x \neq |j(P)|_y.$$

Par conséquent, les points $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$ de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ sont distincts. \square

En fait, nous disposons même d'un isomorphisme d'espaces annelés si l'on s'autorise à restreindre le morphisme à la source et au but.

Lemme 1.1.17. — *Notons U l'intérieur de l'image de φ dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Le morphisme*

$$\psi : \varphi^{-1}(U) \rightarrow U$$

induit par φ est un isomorphisme d'espaces annelés.

Démonstration. — Soit $x \in \varphi^{-1}(U)$. Notons $y = \psi(x) = \varphi(x)$. Il nous suffit de montrer que le morphisme induit

$$\psi_x^* : \mathcal{O}_{U, y} \rightarrow \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(U), x}$$

est un isomorphisme. L'injectivité provient directement du fait que φ est un homéomorphisme.

Montrons que ce morphisme est surjectif. Soit $g \in \mathcal{O}_{\varphi^{-1}(U), x}$. Notons \mathcal{K}' le préfaisceau des fractions rationnelles sur $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$. Il existe un voisinage compact W de x dans $\varphi^{-1}(U)$ et une suite $(R_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{K}'(W)$ qui converge uniformément vers g sur W . Soit $k \in \mathbf{N}$. Par définition de $\mathcal{K}'(W)$, il existe un élément S_k de $\mathcal{K}(\psi(W))$ tel que

$$\|\psi|_W^*(S_k) - R_k\|_W \leq \frac{1}{2^k}.$$

La suite $(S_k)_{k \in \mathbf{N}}$ étant de Cauchy uniforme sur $\psi(W)$, elle converge vers un élément de $\mathcal{B}(\psi(W))$. Son image dans l'anneau local $\mathcal{O}_{U, y}$ est envoyée sur g par ψ_x^* . \square

Signalons qu'il est essentiel de restreindre le morphisme. En effet, si le compact V est réduit à un point x , nous avons, par définition, $\mathcal{B}(V) = \mathcal{H}(x)$. L'homéomorphisme induit par φ est donc

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \xrightarrow{\sim} \{x\}.$$

Le morphisme induit entre les anneaux locaux est

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{H}(x).$$

Ce n'est pas, en général, un isomorphisme.

Démontrons, à présent, un premier résultat sur l'image de φ .

Lemme 1.1.18. — *L'image du morphisme φ contient le compact V .*

Démonstration. — Soit x un point de V . Il lui correspond un caractère

$$\chi_x : \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{H}(x).$$

Puisque $x \in V$, un élément P de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ qui ne s'annule pas au voisinage de V ne s'annule pas en x . Son image est donc inversible dans $\mathcal{H}(x)$. Par conséquent, le morphisme χ_x induit, par localisation, un morphisme

$$\mathcal{K}(V) \rightarrow \mathcal{H}(x).$$

Puisque x appartient à V , ce morphisme est borné. Il induit donc un morphisme entre les complétés

$$\mathcal{B}(V) \rightarrow \mathcal{H}(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

La réciproque de ce résultat n'est pas vraie en général. Montrons-le sur un exemple. Choisissons pour algèbre de Banach \mathcal{A} un corps algébriquement clos k que nous munissons de la valeur absolue triviale $|\cdot|_0$. Notons D le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 de $X = \mathbf{A}_k^{n, \text{an}}$:

$$D = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \{x \in X \mid |T_i(x)| \leq 1\}.$$

Considérons la partie compacte V de X définie par

$$V = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{x \in D \mid |T_i(x)| = 1\}.$$

Supposons que $n \geq 2$. Tout polynôme non constant P de $k[T_1, \dots, T_n]$ s'annule alors sur V , puisqu'il s'annule en un point non nul de k^n . Par conséquent, nous avons

$$\mathcal{K}(V) = k[T_1, \dots, T_n].$$

La norme uniforme sur la partie V n'est autre que la norme triviale. On en déduit que $\mathcal{B}(V)$ est l'algèbre $k[T_1, \dots, T_n]$ munie de la norme triviale, autrement dit l'algèbre $k\{T_1, \dots, T_n\}$ munie de la norme de Gauß. Par conséquent, l'image de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$ dans X est le disque D tout entier.

Dans certains cas, nous pouvons cependant affirmer que l'image du morphisme φ coïncide bien avec le compact V .

Définition 1.1.19. — Une partie compacte V de l'espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est dite **rationnelle** s'il existe un entier $p \in \mathbf{N}$, des polynômes P_1, \dots, P_p, Q de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ ne s'annulant pas simultanément sur V et des nombres réels $r_1, \dots, r_p > 0$ tels que

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \{x \in X \mid |P_i(x)| \leq r_i |Q(x)|\}.$$

Une partie compacte V de l'espace affine $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est dite **pro-rationnelle** si elle est intersection de parties compactes rationnelles.

Remarque 1.1.20. — Soit un entier $p \in \mathbf{N}$, des polynômes P_1, \dots, P_p de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ et des nombres réels $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p \in \mathbf{R}_+$. Alors la partie de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ définie par

$$\bigcap_{1 \leq i \leq p} \{x \in X \mid s_i \leq |P_i(x)| \leq t_i\}$$

est une partie compacte rationnelle de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$, dès qu'elle est compacte. En particulier, tout point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ possède un système fondamental de voisinages constitué de parties compactes rationnelles.

Lemme 1.1.21. — Si le compact V est pro-rationnel, alors l'image du morphisme φ est égale à V .

Démonstration. — Supposons qu'il existe un ensemble J et une famille $(V_j)_{j \in J}$ de parties compactes rationnelles telles que

$$V = \bigcap_{j \in J} V_j.$$

Soit $j \in J$. Il existe un entier $p \in \mathbf{N}$, des polynômes P_1, \dots, P_p, Q de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ ne s'annulant pas simultanément sur V et des nombres réels $r_1, \dots, r_p > 0$ tels que

$$V_j = \bigcap_{1 \leq i \leq p} \{x \in X \mid |P_i(x)| \leq r_i |Q(x)|\}.$$

Soit x un point de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$. Il est associé à une semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ bornée sur $\mathcal{B}(V)$. Rappelons que nous notons f le morphisme naturel

de $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ dans $\mathcal{B}(V)$. Le point $y = \varphi(x)$ est alors associé à la semi-norme multiplicative bornée sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ définie par $|f(\cdot)|_x$. Par hypothèse, le polynôme Q ne s'annule pas sur V_j et donc sur V . On en déduit que l'élément $f(Q)$ est inversible dans $\mathcal{B}(V)$. Par conséquent, nous avons $|f(Q)|_x \neq 0$. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Nous avons

$$\frac{|f(P_i)|_x}{|f(Q)|_x} = \left| \frac{f(P_i)}{f(Q)} \right|_x \leq \left\| \frac{f(P_i)}{f(Q)} \right\|_V.$$

Or, par définition de V_j , quel que soit $z \in V$, nous avons $|P_i(z)| \leq r_i |Q(z)|$. On en déduit que

$$\left\| \frac{f(P_i)}{f(Q)} \right\|_V = \sup_{z \in V} \left(\frac{|P_i(z)|}{|Q(z)|} \right) \leq \sup_{z \in V_j} \left(\frac{|P_i(z)|}{|Q(z)|} \right) \leq r_i.$$

Par conséquent, nous avons

$$|f(P_i)|_x \leq r_i |f(Q)|_x.$$

Cette inégalité étant vérifiée quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la semi-norme multiplicative $|f(\cdot)|_x$ correspond bien à un élément de V_j .

Finalement, nous avons montré que

$$y \in \bigcap_{j \in J} V_j = V.$$

L'image du morphisme φ est donc contenue dans V . L'inclusion réciproque à été démontrée dans le lemme précédent. \square

Regroupons dans un même énoncé les résultats que nous avons démontrés dans le cas des parties compactes pro-rationnelles.

Théorème 1.1.22. — *Soit V une partie compacte pro-rationnelle de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$. Alors le morphisme*

$$\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$$

induit par le morphisme naturel

$$\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] \rightarrow \mathcal{B}(V)$$

réalise un homéomorphisme de $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V))$ sur son image, qui est égale à V . En outre, le morphisme

$$\varphi^{-1}(\overset{\circ}{V}) \rightarrow \overset{\circ}{V}$$

induit par φ est un isomorphisme d'espace annelés.

1.1.5. Flot

Nous consacrons cette partie à la démonstration de quelques propriétés des semi-normes multiplicatives. Nous nous intéresserons notamment à l'application qui consiste à élever une semi-norme multiplicative à une certaine puissance.

Commençons par rappeler un résultat classique permettant de démontrer qu'une application est une valeur absolue (cf. [16], VI, §6, n° 1, proposition 2).

Proposition 1.1.23. — *Soit k un corps. Soit f une application de k dans \mathbf{R}_+ vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) $f(x) = 0 \iff x = 0$;
- ii) $\forall x, y \in K, f(xy) = f(x)f(y)$;
- iii) $\exists A > 0, \forall x, y \in K, f(x + y) \leq A \max(f(x), f(y))$;
- iv) $\exists C > 0, \forall n \in \mathbf{N}^*, f(n.1) \leq Cn$.

Alors l'application f est une valeur absolue sur k .

Lemme 1.1.24. — *Soit k un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$. Supposons qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on ait*

$$|n.1| \leq n^\lambda.$$

Alors, quels que soient les éléments x et y de k , on a

$$|x + y| \leq 2^\lambda \max\{|x|, |y|\}.$$

Démonstration. — Soient $x, y \in k$. Soit $r \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} |x + y|^r &= |(x + y)^r| \\ &\leq \sum_{i=0}^r |C_r^i| |x|^i |y|^{r-i} \\ &\leq (r + 1) \max_{0 \leq i \leq r} ((C_r^i)^\lambda |x|^i |y|^{r-i}) \\ &\leq (r + 1) \left(\max_{0 \leq i \leq r} (C_r^i |x|^{i/\lambda} |y|^{(r-i)/\lambda}) \right)^\lambda \\ &\leq (r + 1) \left(\sum_{i=0}^r C_r^i |x|^{i/\lambda} |y|^{(r-i)/\lambda} \right)^\lambda \\ &\leq (r + 1) \left(|x|^{1/\lambda} + |y|^{1/\lambda} \right)^{r\lambda} \\ &\leq (r + 1) \left(2 \max(|x|, |y|)^{1/\lambda} \right)^{r\lambda} \\ &\leq (r + 1) 2^{r\lambda} \max(|x|, |y|)^r. \end{aligned}$$

En élevant cette inégalité à la puissance $1/r$ et en faisant tendre r vers l'infini, on obtient le résultat annoncé. \square

Soient x un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ et $b = \pi(x)$ son projeté sur $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Le point b est associé à une semi-norme multiplicative $|\cdot|_b$ sur \mathcal{A} . Un calcul élémentaire montre que l'ensemble

$$\{\varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \mid \forall f \in \mathcal{A}, |f|_b^\varepsilon \leq \|f\|\}$$

est un intervalle. Nous le noterons indifféremment I_x ou I_b .

Soit $\varepsilon \in I_b$. Notons $|\cdot|_x$ la semi-norme multiplicative sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ associée au point x de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. L'application

$$|\cdot|_x^\varepsilon : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \mapsto & |P|_x^\varepsilon \end{array}$$

est multiplicative, envoie 0 sur 0 et 1 sur 1.

Montrons, à présent, que c'est une semi-norme. Considérons le corps résiduel complété $(\mathcal{H}(x), |\cdot|)$ du point x . Quel que soient $f, g \in \mathcal{H}(x)$, nous avons

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq 2 \max(|f|, |g|)$$

et donc

$$|f + g|^\varepsilon \leq 2^\varepsilon \max(|f|^\varepsilon, |g|^\varepsilon).$$

En outre, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$|n|^\varepsilon = |n|_x^\varepsilon = |n|_b^\varepsilon \leq \|n\| \leq n.$$

D'après la proposition 1.1.23, l'application $|\cdot|^\varepsilon$ est donc une valeur absolue sur $\mathcal{H}(x)$. On en déduit que l'application $|\cdot|_x^\varepsilon$ est une semi-norme multiplicative sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$. Elle est bornée sur \mathcal{A} , par définition de I_b , et définit donc un point de $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Nous le noterons x^ε . Remarquons que les corps $\mathcal{H}(x)$ et $\mathcal{H}(x^\varepsilon)$ sont canoniquement isomorphes. Seule la valeur absolue change.

Nous avons volontairement exclu la valeur 0 de notre définition de I_b . Il est cependant possible de définir également le point x^0 , comme nous le montrons ici. Pour cela, il nous faut supposer que l'intervalle I_b a pour borne inférieure 0. L'application

$$|\cdot|_x^0 : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n] & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ P & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } |P(x)| = 0 \\ 1 & \text{si } |P(x)| \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

est multiplicative, envoie 0 sur 0 et 1 sur 1. Le même raisonnement que précédemment montre que c'est une semi-norme multiplicative sur $\mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$ qui est bornée sur \mathcal{A} . Nous noterons x^0 le point de l'espace $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ qui lui est associé. Contrairement au cas précédent, les corps $\mathcal{H}(x)$ et $\mathcal{H}(x^0)$ ne sont, en général,

pas isomorphes.

Dans la suite de cette partie, nous noterons $X = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$. Définissons une partie D de $X \times \mathbf{R}_+^*$ par

$$D = \{(x, \varepsilon), x \in X, \varepsilon \in I_x\}.$$

Nous appellerons **flot** l'application

$$\begin{aligned} D &\rightarrow X \\ (x, \varepsilon) &\mapsto x^\varepsilon. \end{aligned}$$

Proposition 1.1.25. — *Le flot est une application continue.*

Démonstration. — Rappelons que la topologie de $X = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$ est, par définition, la topologie la plus grossière qui rend continues les applications de la forme

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ x &\mapsto |P(x)|, \end{aligned}$$

avec $P \in A[T_1, \dots, T_n]$. Pour montrer que le flot est continu, il suffit donc de montrer que, quel que soit $P \in A[T_1, \dots, T_n]$, l'application composée

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ (x, \varepsilon) &\mapsto |P(x^\varepsilon)| = |P(x)|^\varepsilon \end{aligned}$$

est continue. Cette propriété est bien vérifiée car l'application précédente est obtenue en composant deux applications continues : l'application d'évaluation de P et l'élévation à la puissance ε . \square

Le flot peut parfois se prolonger à une partie de $X \times \mathbf{R}_+$, mais il n'est alors, en général, plus continu. Nous disposons cependant du résultat, plus faible, suivant.

Lemme 1.1.26. — *Soit x un point de X tel que l'intervalle I_x ait pour borne inférieure 0. Alors l'application*

$$\begin{aligned} I_x \cup \{0\} &\rightarrow X \\ \varepsilon &\mapsto x^\varepsilon \end{aligned}$$

est continue.

Démonstration. — Par définition de la topologie de X , il suffit de montrer que, quel que soit $P \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, l'application

$$\begin{aligned} I_x \cup \{0\} &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ \varepsilon &\mapsto |P(x^\varepsilon)| = |P(x)|^\varepsilon \end{aligned}$$

est continue. Ce résultat est immédiat. \square

En pratique, il est plus facile d'utiliser le flot en se restreignant à certaines parties de l'espace X . Introduisons des notations adaptées. Soit Y une partie ouverte de X . Posons

$$D_Y = \{(z, \lambda) \in D \mid z \in Y, z^\lambda \in Y\}.$$

Soit x un point de Y . Nous notons

$$I_Y(x) = \{\varepsilon \in I_x \mid x^\varepsilon \in Y\},$$

$$T_Y(x) = \{x^\varepsilon, \varepsilon \in I_Y(x)\}$$

et

$$D_Y(x) = \{(z, \lambda), z \in T_Y(x), \lambda \in I_Y(z)\}.$$

Définition 1.1.27. — Nous dirons que le point x de Y a des **voisins flottants** dans Y si le flot est une application ouverte en chaque point de $D_Y(x)$.

Remarque 1.1.28. — a) Cette définition ne dépend que de la partie $T_Y(x)$ et pas du point x lui-même.

b) Pour tout point p de D_Y , il est équivalent de demander que le flot soit ouvert au point p ou que sa restriction à D_Y soit ouverte au point p .

Lorsque le flot est défini sur une partie suffisamment grande, par exemple lorsque la partie D_Y est un voisinage de $D_Y(x)$ dans $Y \times \mathbf{R}_+^*$, tous les points ont des voisins flottants. Le lemme qui suit précise cet énoncé. Nous n'avons donc introduit cette notion que pour prendre en compte les effets de bord qui peuvent apparaître.

Lemme 1.1.29. — Supposons que, quel que soit $(z, \lambda) \in D_Y(x)$, il existe un voisinage U de z dans Y tel que

$$U \times \{\lambda\} \subset D_Y.$$

Alors, le point x a des voisins flottants dans Y .

Démonstration. — Soit $(z, \lambda) \in D_Y(x)$. Puisque $D_Y(z) = D_Y(x)$, nous pouvons supposer que $z = x$. Soit U un voisinage du point x dans Y . Quitte à restreindre U , nous pouvons supposer qu'il est de la forme

$$U = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \{z \in Y \mid \alpha_i < |f_i(z)| < \beta_i\},$$

avec $r \in \mathbf{N}$, $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{A}[T_1, \dots, T_n]$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbf{R}_+$.

L'élément $(x^\lambda, 1/\lambda)$ appartient à $D_Y(x)$. Par conséquent, il existe un voisinage V de x^λ dans Y tel que

$$V \times \{\varepsilon\} \subset D_Y.$$

Considérons la partie W de Y définie par

$$U = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \{z \in Y \mid \alpha_i^\varepsilon < |f_i(z)| < \beta_i^\varepsilon\}.$$

C'est une partie ouverte de Y qui contient le point x^λ . Par conséquent, la partie $V \cap W$ de Y est un voisinage du point x^λ dans Y . Or, quel que soit $y \in V \cap W$, il existe $z \in U$ tel que $y = z^\lambda$. On en déduit que le flot est une application ouverte au point (x, λ) . \square

Lemme 1.1.30. — *Supposons que le point x de Y a des voisinages flottants dans Y . Soit U un voisinage ouvert de x dans Y . Soit $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{H}(U)$ qui converge uniformément sur U . Notons $f \in \mathcal{O}(U)$ sa limite. Supposons que la fonction f soit nulle au voisinage du point x . Alors la fonction f est nulle au voisinage de $T_Y(x) \cap U$.*

Démonstration. — Il existe un voisinage U' de x dans U tel que, quel que soit $z \in U'$, nous ayons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(z) = 0 \text{ dans } \mathcal{H}(z),$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(z)| = 0.$$

Soit $y \in T_Y(x) \cap U$. Il existe $\varepsilon \in I_Y(x)$ tel que $y = x^\varepsilon$. Soit J un voisinage de ε dans \mathbf{R}_+^* . Alors la partie $V = D_Y \cap (U' \times J)$ est un voisinage de (x, ε) dans D_Y . Puisque le flot est ouvert au voisinage de (x, ε) , la partie

$$\{z^\lambda, (z, \lambda) \in V\}$$

est un voisinage de y dans Y . Soit $(z, \lambda) \in V$. Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(z^\lambda)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(z)|^\lambda = 0.$$

Par conséquent, $f(z^\lambda) = 0$ et la fonction f est nulle au voisinage de y dans Y . \square

Proposition 1.1.31. — *Supposons que le point x de Y a des voisinages flottants dans Y et que l'ensemble $I_Y(x)$ est un intervalle. Alors le morphisme de restriction*

$$\mathcal{O}_Y(T_Y(x)) \rightarrow \mathcal{O}_{Y,x}$$

est un isomorphisme.

Soit f une fonction définie sur un voisinage de y dans Y . Alors la fonction f possède un et un seul prolongement au voisinage de $T_Y(x)$, que nous noterons encore f . Nous avons alors

$$\forall \varepsilon \in I_Y(x), |f(x^\varepsilon)| = |f(x)|^\varepsilon.$$

En outre, si l'intervalle $I_Y(x)$ a pour borne inférieure 0, si le point x^0 appartient à Y et si la fonction f est également définie au point x^0 , alors nous avons

$$|f(x^0)| = |f(x)|^0.$$

Démonstration. — Commençons par montrer l'injectivité du morphisme. Soit $f \in \mathcal{O}_Y(T_Y(x))$ telle que f soit nulle au voisinage de x . Notons V l'ensemble des points de $T_Y(x)$ au voisinage desquels la fonction f est nulle. Il est clair que V est une partie ouverte de $T_Y(x)$. Par hypothèse, elle n'est pas vide. Montrons, à présent, que V est une partie fermée de $T_Y(x)$. Soit y un point de $T_Y(x)$ adhérent à V . Il existe un voisinage U de y dans Y et une suite $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}(U)$ qui converge uniformément vers f sur U . Puisque y est adhérent à V , il existe un point z appartenant à $V \cap U$, c'est-à-dire un point de $T_Y(x) \cap U$ au voisinage duquel la fonction f est nulle. D'après le lemme 1.1.30, la fonction f est nulle au voisinage de $T_Y(z) \cap U$ et, en particulier, au voisinage de y . On en déduit que la partie V est fermée. Puisque $I_Y(x)$ est un intervalle, l'image $T_Y(x)$ de $\{x\} \times I_Y(x)$ par le flot est connexe. On en déduit que $V = T_Y(x)$ et donc que la fonction f est nulle au voisinage de $T_Y(x)$.

Montrons, à présent, que le morphisme est surjectif. Soit $f \in \mathcal{O}_{Y,x}$. Il existe un voisinage U de x dans Y et une suite $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}(U)$ qui converge uniformément vers f sur U . Soit $\varepsilon \in I_Y(x)$. Nous allons construire une fonction g_y au voisinage de $y = x^\varepsilon$. Soit J un voisinage compact de ε dans \mathbf{R}_+^* . Alors la partie $V = D_Y \cap (U \times J)$ est un voisinage de (x, ε) dans D_Y . Puisque le flot est ouvert au voisinage du point (x, ε) , la partie

$$\left\{ z^\lambda, (z, \lambda) \in V \right\}$$

est un voisinage V_y de y dans Y . Soit $(z, \lambda) \in V$. Posons

$$g_y(z^\lambda) = f(z) \text{ dans } \mathcal{H}(z^\lambda).$$

Quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons encore $R_n \in \mathcal{H}(V_y)$. Montrons que la suite $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers g_y sur V_y . Soit $\eta \in]0, 1]$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, quels que soient $n \geq N$ et $z \in U$, on ait

$$|R_n(z) - f(z)| \leq \eta.$$

Soient $z \in U'$, $\lambda \in J$ et $n \geq N$. Nous avons alors

$$|R_n(z^\lambda) - g_y(z^\lambda)| = |R_n(z) - f(z)|^\lambda \leq \eta^\lambda \leq \eta^\alpha,$$

où $\alpha > 0$ désigne la borne inférieure de J . Par conséquent, la suite $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{H}(V_y)$ converge uniformément vers g_y sur V_y .

Quel que soient $y_1, y_2 \in T_Y(x)$ et $z \in V_{y_1} \cap V_{y_2}$, nous avons

$$g_{y_1}(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(z) = g_{y_2}(z) \text{ dans } \mathcal{H}(z).$$

De même, quel que soient $y \in T_Y(x)$ et $z \in U \cap V_y$, nous avons

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(z) = g_y(z) \text{ dans } \mathcal{H}(z).$$

Toutes les fonctions que nous avons construites coïncident donc sur les domaines de définition communs. Par conséquent, la fonction f se prolonge bien au voisinage de $T_Y(x)$.

Les résultats sur la valeur absolue des fonctions proviennent directement de la construction du prolongement de f à $T_Y(x)$. Le résultat pour x^0 s'obtient, quant à lui, en utilisant le lemme 1.1.26 et la continuité de f .

□

Nous aurons parfois besoin de montrer qu'une fonction définie au voisinage du point x se prolonge sur un voisinage connexe de sa trajectoire $T_Y(x)$. Sous certaines hypothèses, le lemme suivant nous permet d'établir un tel résultat.

Lemme 1.1.32. — *Supposons que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes (respectivement connexes par arcs) dans Y . Supposons également que la partie D_Y est un voisinage de $D_Y(x)$ dans $Y \times \mathbf{R}_+^*$. Alors, tout point de $T_Y(x)$ possède un système fondamental de voisinages connexes (respectivement connexes par arcs) dans Y .*

Démonstration. — Commençons par remarquer que la seconde hypothèse impose au point x d'avoir des voisinages flottants dans Y , en vertu du lemme 1.1.29.

Soient y un point de $T_Y(x)$ et V un voisinage de y dans Y . Il existe $\varepsilon \in I_Y(x)$ tel que $x^\varepsilon = y$. Notons W l'image réciproque de V par le flot. C'est un voisinage du point (x, ε) de $D_Y(x)$ dans D_Y . Il existe donc un voisinage U de x dans Y et un intervalle ouvert J contenant ε tels que la partie $U \times J$ soit contenue dans W . Les hypothèses nous permettent de supposer que la partie U est connexe (respectivement connexe par arcs). Dans ce cas, la partie $U \times J$ est encore connexe (respectivement connexe par arcs) et il en est de même pour son image par le flot. Puisque le point x possède des voisinages flottants dans Y , cette image est un voisinage du point Y dans V .

□

1.2. Algèbres de séries convergentes

Nous allons consacrer cette partie à l'étude de certains anneaux de séries convergentes. Nous considérerons, tout d'abord, des algèbres globales, dans la lignée des algèbres de Tate. Nous nous intéresserons ensuite à des limites inductives de telles algèbres qui sont des anneaux locaux. Nous retrouverons alors des algèbres similaires aux anneaux locaux des espaces analytiques complexes et nous entreprendrons leur étude à l'aide d'analogues des théorèmes de Weierstraß.

Dans toute cette partie, nous fixons un anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ muni d'une norme uniforme et un entier $n \in \mathbf{N}$. Notons $B = \mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, $X = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et $\pi : X \rightarrow B$ le morphisme de projection.

1.2.1. Algèbres globales de polydisques et polycouronnes

Pour $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, posons

$$\mathbf{s}^{\mathbf{k}} = \prod_{i=1}^n s_i^{k_i}.$$

Définissons encore

$$\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$$

et, quel que soit $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$,

$$\mathbf{T}^{\mathbf{k}} = \prod_{i=1}^n T_i^{k_i}.$$

Soit $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Nous noterons

$$\mathcal{A} \langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$$

l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}},$$

où $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n}$ désigne une famille de \mathcal{A} vérifiant la condition suivante :

la famille $(\|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{t}^{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n}$ est sommable.

Cette algèbre est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \right\|_{\mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} \|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{t}^{\mathbf{k}}.$$

Comme nous l'expliquerons plus loin, elle est liée à l'algèbre des fonctions sur le polydisque de polyrayon \mathbf{t} :

$$\overline{\mathcal{D}}(\mathbf{t}) = \{x \in X \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |T_i(x)| \leq t_i\}.$$

Définissons, à présent, deux relations, \leq et $<$, sur \mathbf{R}^n de la façon suivante : pour deux éléments $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ et $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ de \mathbf{R}^n ,

$$\mathbf{s} \leq \mathbf{t} \text{ si } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i \leq t_i$$

et

$$\mathbf{s} < \mathbf{t} \text{ si } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i < t_i.$$

Soient \mathbf{s} et \mathbf{t} dans $(\mathbf{R}_+^*)^n$ vérifiant $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$. Nous allons définir, sur le modèle précédent, une algèbre associée à la polycouronne de polyrayon intérieur \mathbf{s} et de polyrayon extérieur \mathbf{t} :

$$\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \{x \in X \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i \leq |T_i(x)| \leq t_i\}.$$

Pour $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$, nous posons

$$\mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) = \prod_{i=1}^n \max(s_i^{k_i}, t_i^{k_i}) \in]0, +\infty[.$$

Cette notation a été choisie pour son caractère naturel. Elle peut malheureusement prêter à confusion : attention à ne pas confondre la quantité précédente avec

$$\max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) = \max\left(\prod_{i=1}^n s_i^{k_i}, \prod_{i=1}^n t_i^{k_i}\right) \in]0, +\infty[.$$

Nous définissons l'algèbre

$$\mathcal{A}(\mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t})$$

comme l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}},$$

où $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n}$ désigne une famille de \mathcal{A} vérifiant la condition suivante :

$$\text{la famille } \left(\|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \right)_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \text{ est sommable.}$$

Cette algèbre est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \right\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}).$$

Afin de pouvoir traiter simultanément les deux types d'algèbres présentés ci-dessus, ainsi que celui associé aux produits de polydisques et de polycouronnes, nous introduisons de nouvelles notations. Pour $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ vérifiant la condition

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, k_i < 0 \implies s_i > 0,$$

nous posons

$$\mathbf{s}^{\mathbf{k}} = \prod_{i=1}^n s_i^{k_i}.$$

Pour $k \in \mathbf{Z}$ vérifiant $k < 0$, nous posons $0^k = +\infty$. Pour $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ et $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, nous posons

$$\mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) = \prod_{i=1}^n \max(s_i^{k_i}, t_i^{k_i}) \in]0, +\infty].$$

Si \mathbf{s} appartient à $(\mathbf{R}_+^*)^n$, nous posons

$$\mathbf{min}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) = \prod_{i=1}^n \min(s_i^{k_i}, t_i^{k_i}) \in]0, +\infty[.$$

Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ et $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$. Dans la suite de ce paragraphe, nous nous intéresserons à l'algèbre

$$\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$$

constituée des séries de la forme

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}},$$

où $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n}$ désigne une famille de \mathcal{A} vérifiant la condition suivante :

$$\text{la famille } \left(\|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \right)_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \text{ est sommable.}$$

Remarquons, que s'il existe un indice $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $s_i = 0$, alors, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$ avec $k_i < 0$, nous avons $\mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) = +\infty$. La condition de sommabilité impose alors que $a_{\mathbf{k}} = 0$.

L'algèbre $\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$ est complète pour la norme définie par

$$\left\| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \right\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}).$$

L'algèbre $\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$ est liée à l'anneau des fonctions sur la polycouronne de polyrayon intérieur \mathbf{s} et de polyrayon extérieur \mathbf{t} :

$$\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \{x \in X \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i \leq |T_i(x)| \leq t_i\}.$$

Précisons ce résultat.

Lemme 1.2.1. — *Le morphisme*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$$

induit par

$$\mathcal{A}[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$$

réalise un homéomorphisme sur son image $\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. En particulier, quel que soit $f \in \mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$, nous avons

$$\|f\|_{\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})} = \inf_{j \geq 1} \left((\|f^j\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}})^{1/j} \right).$$

Démonstration. — Posons

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{\mathbf{k} \in I} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}, I \subset J_{\mathbf{s}} \right\},$$

où $J_{\mathbf{s}}$ désigne l'ensemble des parties finies de l'ensemble

$$\{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n \mid k_i \geq 0 \text{ si } s_i = 0\}.$$

Par exemple, si $\mathbf{s} = 0$, nous avons $\mathcal{B} = \mathcal{A}[\mathbf{T}]$. L'anneau \mathcal{B} est dense dans $\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}}$. On en déduit que le morphisme

$$\varphi : \mathcal{M}(\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n,\text{an}}$$

est injectif. Puisque l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle)$ est compact, le morphisme φ réalise un homéomorphisme sur son image.

Il nous reste à montrer que l'image du morphisme φ est égale à $\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. Soit $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle)$. Quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous avons

$$|T_i(x)| \leq \|T_i\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} = t_i.$$

Quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $s_i > 0$, nous avons

$$|T_i^{-1}(x)| \leq \|T_i^{-1}\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} = s_i^{-1}$$

et donc

$$|T_i(x)| \geq s_i.$$

On en déduit que

$$\varphi(\mathcal{M}(\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle)) \subset \overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}).$$

Réciproquement, soit $x \in \overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. Pour montrer que $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle)$, nous devons montrer que la semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ sur $\mathcal{A}[\mathbf{T}]$, bornée sur \mathcal{A} , associée à x se prolonge en une semi-norme multiplicative bornée sur $(\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle, \|\cdot\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}})$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $s_i > 0$. Dans ce cas, T_i est

inversible dans l'anneau $\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$. On en déduit que la semi-norme multiplicative $|\cdot|_x$ se prolonge à \mathcal{B} . Expliquons-en la raison. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $r_i = 0$ si $s_i = 0$ et $r_i = 1$ si $s_i > 0$. Posons $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$. Tout élément Q de \mathcal{B} possède une écriture sous la forme $(\mathbf{T}^{-\mathbf{r}})^l P$, avec $l \in \mathbf{N}$ et $P \in \mathcal{A}[\mathbf{T}]$, et nous pouvons alors poser

$$|Q|_x = |\mathbf{T}^{\mathbf{r}}|_x^{-l} |P|_x.$$

Cette quantité ne dépend pas de l'écriture de Q choisie. On vérifie que l'application prolongée, que nous notons encore $|\cdot|_x$, définit bien une valeur absolue sur \mathcal{B} .

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Nous avons

$$|T_i(x)| \leq \max_{y \in \overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})} (|T_i(y)|) = t_i.$$

Si $s_i > 0$, nous avons également

$$|T_i^{-1}(x)| = |T_i(x)|^{-1} \leq \min_{y \in \overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})} (|T_i(y)|^{-1}) = s_i^{-1}.$$

Soit $Q(\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \in \mathcal{B}$. Notons $b = \pi(x)$. Nous avons alors

$$|Q(\mathbf{T})|_x \leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} |a_{\mathbf{k}}(b)| \mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{max}(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) = \|P\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}}.$$

Le résultat de densité mentionné plus haut montre finalement que la semi-norme mutiplicative $|\cdot|_x$ se prolonge à $\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$.

□

Lemme 1.2.2. — *Considérons l'anneau $\mathcal{A}_{\mathbf{s}, \mathbf{t}}$ obtenu en localisant l'anneau $\mathcal{A}[\mathbf{T}]$ par l'ensemble de ses éléments qui ne s'annulent pas sur $\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. Le morphisme naturel $\mathcal{A}[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$ se prolonge en une injection*

$$\mathcal{A}_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} \hookrightarrow \mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$$

dont l'image est dense.

Démonstration. — Le morphisme naturel

$$\mathcal{A}[\mathbf{T}] \hookrightarrow \mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$$

est injectif. Soit P un élément de $\mathcal{A}[\mathbf{T}]$ ne s'annulant pas sur la couronne $\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle)$. D'après [4], corollaire 1.2.4, cet élément est inversible dans $\mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$. On en déduit un morphisme injectif

$$\mathcal{A}_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} \hookrightarrow \mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle.$$

La densité est immédiate, puisque l'anneau $\mathcal{A}_{\mathbf{s}, \mathbf{t}}$ contient l'anneau dense \mathcal{B} considéré dans la preuve du lemme précédent. \square

Dans les lemmes qui suivent, nous allons comparer la norme $\|\cdot\|_{\mathbf{s}, \mathbf{t}}$ et la norme uniforme $\|\cdot\|_{\overline{C}(\mathbf{s}, \mathbf{t})}$ sur la couronne $\overline{C}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$. Rappelons que nous avons supposé que la norme $\|\cdot\|$ définie sur l'anneau \mathcal{A} est équivalente à la norme spectrale : il existe deux constantes $C_-, C_+ > 0$ telles que

$$\forall f \in \mathcal{A}, C_- \|f\|_{sp} \leq \|f\| \leq C_+ \|f\|_{sp}.$$

Lemme 1.2.3. — Soit $R = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \in \mathcal{A}[\mathbf{T}, \mathbf{T}^{-1}]$. Quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, nous avons

$$\|a_{\mathbf{k}}\| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \leq C_+ \|R\|_{\overline{C}(\mathbf{s}, \mathbf{t})}.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que ce résultat est bien connu lorsque l'anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est un corps valué. En effet, lorsque le corps est ultramétrique, cela découle immédiatement de la description de la norme $\|R\|_{\overline{C}(\mathbf{s}, \mathbf{t})}$ que l'on sait justement être égale à

$$\max_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} \left(\|a_{\mathbf{k}}\| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \right).$$

Lorsque le corps est archimédien, l'inégalité provient de la formule de Cauchy.

Revenons au cas général. Soit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$. Considérons un point z de B en lequel l'égalité $|a_{\mathbf{k}}(z)| = \|a_{\mathbf{k}}\|_{sp}$ a lieu. Il en existe car la partie B est compacte. Le raisonnement précédent assure que

$$\|a_{\mathbf{k}}\| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \leq C_+ |a_{\mathbf{k}}(z)| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \leq C_+ \|R\|_{\pi^{-1}(z) \cap \overline{C}(\mathbf{s}, \mathbf{t})}.$$

On en déduit immédiatement l'inégalité demandée. \square

Lemme 1.2.4. — Supposons que $\mathbf{s} = 0$. Soit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tel que $\mathbf{v} < \mathbf{t}$. Alors, quel que soit $P \in \mathcal{A}(|\mathbf{T}| \leq \mathbf{t})$, on a l'inégalité

$$\|P\|_{0, \mathbf{v}} \leq C_+ \left(\prod_{i=1}^n \frac{t_i}{t_i - v_i} \right) \|P\|_{\overline{C}(0, \mathbf{t})}.$$

Démonstration. — Notons $P = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}$, où $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n}$ désigne une suite presque nulle d'éléments de \mathcal{A} . D'après le lemme précédent, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n$, nous avons

$$\|a_{\mathbf{k}}\| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) = \|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{t}^{\mathbf{k}} \leq C_+ \|P\|_{\overline{C}(\mathbf{s}, \mathbf{t})}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|P\|_{0,\mathbf{v}} &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} \|a_{\mathbf{k}}\| \mathbf{v}^{\mathbf{k}} \\ &\leq C_+ \|P\|_{\overline{\mathcal{C}}(0,\mathbf{t})} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{t_i} \right)^{k_i} \right) \\ &\leq C_+ \left(\prod_{i=1}^n \frac{t_i}{t_i - v_i} \right) \|P\|_{\overline{\mathcal{C}}(0,\mathbf{t})}. \end{aligned}$$

On conclut ensuite par densité de $\mathcal{A}[\mathbf{T}]$ dans $\mathcal{A}\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$ pour $\|\cdot\|_{0,\mathbf{t}}$ et donc pour $\|\cdot\|_{0,\mathbf{v}}$ et $\|\cdot\|_{\overline{\mathcal{C}}(0,\mathbf{t})}$. \square

Lemme 1.2.5. — Soient $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ dans $(\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que $\mathbf{s} < \mathbf{u} \leq \mathbf{v} < \mathbf{t}$. Alors, quel que soit $R \in \mathcal{A}\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$, on a l'inégalité

$$\|R\|_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \leq C_+ \left(\prod_{i=1}^n 1 + \frac{s_i}{u_i - s_i} + \frac{v_i}{t_i - v_i} \right) \|R\|_{\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{s},\mathbf{t})}.$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve du lemme précédent en remplaçant l'anneau $\mathcal{A}[\mathbf{T}]$ par l'anneau \mathcal{B} introduit dans la démonstration du lemme 1.2.1. \square

1.2.2. Limites d'algèbres de disques

Soit V une partie compacte de B . Rappelons que $\mathcal{H}(V)$ désigne le localisé de l'anneau \mathcal{A} par l'ensemble des éléments qui ne s'annulent pas au voisinage de V et $\mathcal{B}(V)$ le complété de l'anneau $\mathcal{H}(V)$ pour la norme uniforme $\|\cdot\|_V$ sur V . Pour $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, nous noterons $\|\cdot\|_{V,\mathbf{t}}$ la norme sur l'anneau $\mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$ définie au paragraphe précédent.

Soit b un point de B . Rappelons que nous notons \mathfrak{m}_b l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ et $\kappa(b)$ son corps résiduel. Nous noterons

$$L_b = \varinjlim_{V,\mathbf{t}} \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle,$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts du point b dans B et \mathbf{t} parcourt $(\mathbf{R}_+^*)^n$.

Lemme 1.2.6. — L'anneau L_b est un anneau local dont l'idéal maximal est $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_b, T_1, \dots, T_n)$.

Démonstration. — On se convainc aisément que l'on a

$$\kappa(b) = \mathcal{O}_{B,b}/\mathfrak{m}_b \xrightarrow{\sim} L_b/\mathfrak{m}.$$

Par conséquent, l'idéal \mathfrak{m} est maximal.

Pour montrer que l'anneau L_b est un anneau local d'idéal \mathfrak{m} , il nous suffit de montrer que tout élément de L_b qui n'appartient pas à \mathfrak{m} est inversible. Soit $F \in L_b \setminus \mathfrak{m}$. Il existe V un voisinage compact du point b dans B et $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que $F \in \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$. Nous pouvons écrire F sous la forme

$$F = a_0 + \sum_{i=1}^n T_i G_i(\mathbf{T}),$$

avec $a_0 \in \mathcal{B}(V)$ et, quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $G_i \in \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$. Puisque F n'appartient pas à \mathfrak{m} , son premier coefficient a_0 n'appartient pas à \mathfrak{m}_b . On en déduit que a_0 est inversible au voisinage de b dans B . Quitte à restreindre V et à multiplier F par a_0^{-1} , nous pouvons supposer que $a_0 = 1$. Notons

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} (\|G_i\|_{V, \mathbf{t}}).$$

Soit $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^n s_i M < 1.$$

Nous avons alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n T_i G_i(\mathbf{T}) \right\|_{V, \mathbf{s}} < 1.$$

On en déduit que la fonction

$$F = 1 + \sum_{i=1}^n T_i G_i(\mathbf{T})$$

est inversible dans l'anneau de Banach $\mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{s} \rangle$ et donc dans L_b . \square

1.2.2.1. Théorèmes de Weierstraß

Dans ce paragraphe, nous montrerons que l'anneau L_b satisfait les conclusions des théorèmes de division et de préparation de Weierstraß. Notre preuve est calquée sur celle que mettent en œuvre H. Grauert et R. Remmert dans le cadre de la géométrie analytique complexe.

Nous noterons $\mathbf{T}' = (T_1, \dots, T_{n-1})$ et

$$L'_b = \varinjlim_{V, \mathbf{t}'} \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}'| \leq \mathbf{t}' \rangle,$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts du point b dans B et \mathbf{t}' parcourt l'ensemble $(\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$.

Théorème 1.2.7 (Théorème de division de Weierstraß)

Soit $G \in L_b$ une série telle que $G(0, T_n)(b) \neq 0$ dans $\mathcal{H}(b)[[T_n]]$. Notons p la valuation en T_n de la série $G(0, T_n)(b)$. Soit $F \in L_b$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in (L_b)^2$ tel que

- i) $R \in L'_b[T_n]$ est un polynôme de degré strictement inférieur à p ;
- ii) $F = QG + R$.

Démonstration. — Notons $G = \sum_{k \in \mathbf{N}} g_k(\mathbf{T}') T_n^k$ où, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, $g_k \in L'_b$, $g_0(0)(b) = \dots = g_{p-1}(0)(b) = 0$ et $g_p(0)(b) \neq 0$. Quitte à choisir un voisinage compact assez petit V du point b et un réel strictement positif r assez petit également, nous pouvons supposer que $G \in \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{r} \rangle$, où $\mathbf{r} = (r, \dots, r) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, et que $g_p(\mathbf{T}')$ est inversible dans $\mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}'| \leq \mathbf{r}' \rangle$, où $\mathbf{r}' = (r, \dots, r) \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$. Quitte à multiplier alors G par g_p^{-1} , nous pouvons supposer que $g_p = 1$.

Soient $\mathbf{s}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$, avec $\mathbf{s}' \leq \mathbf{r}'$, et $s \in]0, r]$. Posons $\mathbf{s} = (\mathbf{s}', s) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Tout élément φ de $\mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{s} \rangle$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\varphi = \alpha(\varphi) T_n^p + \beta(\varphi),$$

où $\alpha(\varphi)$ désigne un élément de $\mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{s} \rangle$ et $\beta(\varphi)$ un élément de $\mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}'| \leq \mathbf{s}' \rangle[T_n]$ de degré strictement inférieur à p . Remarquons, dès à présent, que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{s} \rangle$, on a

$$\|\varphi\|_{V, \mathbf{s}} = \|\alpha(\varphi)\|_{V, \mathbf{s}} s^p + \|\beta(\varphi)\|_{V, \mathbf{s}}.$$

Considérons, à présent, l'endomorphisme

$$A_{\mathbf{s}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{s} \rangle & \rightarrow & \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{s} \rangle \\ \varphi & \mapsto & \alpha(\varphi) G + \beta(\varphi) \end{array}.$$

Il nous suffit de trouver un n -uplet \mathbf{s} assez petit pour lequel l'endomorphisme $A_{\mathbf{s}}$ soit bijectif. Remarquons que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{s} \rangle$, on a

$$\begin{aligned} \|A_{\mathbf{s}}(\varphi) - \varphi\|_{V, \mathbf{s}} &= \|\alpha(\varphi) (G - T_n^p)\|_{V, \mathbf{s}} \\ &\leq \|\alpha(\varphi)\|_{V, \mathbf{s}} \|G - T_n^p\|_{V, \mathbf{s}} \\ &\leq s^{-p} \|\varphi\|_{V, \mathbf{s}} \|G - T_n^p\|_{V, \mathbf{s}}. \end{aligned}$$

Soient $u, v \in]0, \min(r, 1)[$. Nous noterons (\mathbf{u}, v) le n -uplet (u, \dots, u, v) . Soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Il existe une constante $M_k \in \mathbf{R}$, indépendante de u et de v , telle que l'on ait

$$\|g_k\|_{V, \mathbf{u}} \leq \|g_k(0)\|_V + M_k u.$$

Il existe également une constante $N \in \mathbf{R}$, encore indépendante de u et de v , telle que l'on ait

$$\left\| \sum_{k \geq p+1} g_k(\mathbf{T}') T_n^k \right\|_{V,(\mathbf{u},v)} \leq N v^{p+1}.$$

Par conséquent, il existe une constante $M \in \mathbf{R}$, indépendante de u et de v , telle que

$$\|G - T_n^p\|_{V,(\mathbf{u},v)} \leq \sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_V + M(u + v^{p+1}).$$

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Quitte à choisir judicieusement v puis u , nous pouvons supposer que $M(u + v^{p+1}) \leq \varepsilon v^p / 2$. Quel que soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, nous avons $g_k(0)(b) = 0$, par hypothèse. Par conséquent, quitte à restreindre le voisinage V de b , nous pouvons supposer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_V \leq \varepsilon v^p / 2.$$

On dispose alors de l'inégalité

$$\|A_{(\mathbf{u},v)} - I\|_{V,(\mathbf{u},v)} \leq \varepsilon < 1$$

et on en déduit que l'endomorphisme $A_{(\mathbf{u},v)} = I + (A_{(\mathbf{u},v)} - I)$ est inversible. \square

Nous pouvons obtenir une version plus précise du théorème de Weierstraß lorsque l'on divise par des séries d'un type particulier.

Définition 1.2.8. — Soit $p \in \mathbf{N}$. Nous dirons qu'un polynôme $h \in L'_b[T_n]$ est *distingué* de degré p s'il est unitaire, de degré p et vérifie

$$h(0, T_n)(b) = T_n^p \text{ dans } \mathcal{H}(b)[T_n].$$

Théorème 1.2.9 (Théorème de division de Weierstraß global)

Soient $p \in \mathbf{N}$ et $G \in L'_b[T_n]$ un polynôme distingué de degré p . Soient V un voisinage compact de b dans B et $\mathbf{r}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$ tel que $G \in \mathcal{B}(V)\langle |\mathbf{T}'| \leq \mathbf{r}' \rangle [T_n]$. Soient v_- et v_+ deux nombres réels vérifiant $0 < v_- \leq v_+$. Alors il existe un voisinage compact W de b dans V et un $(n-1)$ -uplet $\mathbf{s}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$, avec $\mathbf{s}' \leq \mathbf{r}'$, vérifiant la propriété suivante : pour tout voisinage compact U de b dans W , tout $(n-1)$ -uplet $\mathbf{t}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$ vérifiant $\mathbf{t}' \leq \mathbf{s}'$, tout nombre réel $w \in [v_-, v_+]$ et tout élément F de $\mathcal{B}(U)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{t}', w) \rangle$, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathcal{B}(U)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{t}', w) \rangle)^2$ tel que

- i) R soit un polynôme de degré strictement inférieur à p ;
- ii) $F = QG + R$.

En outre, il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+^*$, indépendante de U , \mathbf{t}' , w et F , telle que l'on ait les inégalités

$$\begin{cases} \|Q\|_{U,(\mathbf{t}',w)} \leq C \|F\|_{U,(\mathbf{t}',w)} ; \\ \|R\|_{U,(\mathbf{t}',w)} \leq C \|F\|_{U,(\mathbf{t}',w)}. \end{cases}$$

Démonstration. — Notons

$$G = T_n^p + \sum_{k=0}^{p-1} g_k(\mathbf{T}') T_n^k$$

où, quel que soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $g_k \in \mathcal{B}(V)$ et $g_k(0)(b) = 0$. Soient $\mathbf{s}' \in (\mathbf{R}_+^*)^{n-1}$, avec $\mathbf{s}' \leq \mathbf{r}'$, $u \in]0, v_+]$ et W un voisinage compact de b dans V . Tout élément φ de $\mathcal{B}(W)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{s}', u) \rangle$ peut s'écrire de façon unique sous la forme

$$\varphi = \alpha(\varphi) T_n^p + \beta(\varphi),$$

où $\alpha(\varphi)$ désigne un élément de $\mathcal{B}(W)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{s}', u) \rangle$ et $\beta(\varphi)$ un élément de $\mathcal{B}(W)\langle |\mathbf{T}'| \leq \mathbf{s}' \rangle [T_n]$ de degré strictement inférieur à p . Remarquons, dès à présent, que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{B}(W)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{s}', u) \rangle$, nous avons

$$\|\varphi\|_{W,(\mathbf{s}',u)} = \|\alpha(\varphi)\|_{W,(\mathbf{s}',u)} u^p + \|\beta(\varphi)\|_{W,(\mathbf{s}',u)}.$$

Considérons, à présent, l'endomorphisme

$$A_{W,(\mathbf{s}',u)} : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(W)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{s}', u) \rangle & \rightarrow & \mathcal{B}(W)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{s}', u) \rangle \\ \varphi & \mapsto & \alpha(\varphi) G + \beta(\varphi) \end{array}.$$

Remarquons que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{B}(W)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{s}', u) \rangle$, nous avons

$$\begin{aligned} \|A_{W,(\mathbf{s}',u)}(\varphi) - \varphi\|_{W,(\mathbf{s}',u)} &= \|\alpha(\varphi) (G - T_n^p)\|_{W,(\mathbf{s}',u)} \\ &\leq \|\alpha(\varphi)\|_{W,(\mathbf{s}',u)} \|G - T_n^p\|_{W,(\mathbf{s}',u)} \\ &\leq u^{-p} \|\varphi\|_{W,(\mathbf{s}',u)} \|G - T_n^p\|_{W,(\mathbf{s}',u)}. \end{aligned}$$

Si $\mathbf{s}' = (s_1, \dots, s_{n-1})$, nous noterons $\max(\mathbf{s}') = \max(s_1, \dots, s_{n-1})$. Soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Il existe une constante $M_k \in \mathbf{R}$, indépendante de \mathbf{s}' , telle que l'on ait

$$\|g_k\|_{W,\mathbf{s}'} \leq \|g_k(0)\|_W + M_k \max(\mathbf{s}').$$

Par conséquent, il existe une constante $M \in \mathbf{R}$, indépendante de \mathbf{s}' , telle que l'on ait

$$\begin{aligned} \|G - T_n^p\|_{W,(\mathbf{s}',u)} &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_W u^k + M \max(\mathbf{s}') \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_W v_+^k + M \max(\mathbf{s}'). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Quel que soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, nous avons $g_k(0)(b) = 0$, par hypothèse. Par conséquent, il existe un voisinage W de b dans V tel que l'on ait

$$\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_W v_+^k \leq \varepsilon \frac{v_-^p}{2}.$$

Il existe également $\mathbf{s}' \leq \mathbf{r}'$ tel que

$$M \max(\mathbf{s}') \leq \varepsilon \frac{v_-^p}{2}.$$

Soient U un voisinage compact de b dans W , $\mathbf{t}' \leq \mathbf{s}'$ et $w \in [v_-, v_+]$. On dispose alors de l'inégalité

$$\begin{aligned} \|G - T_n^p\|_{U,(\mathbf{t}',w)} w^{-p} &\leq \|G - T_n^p\|_{W,(\mathbf{s}',w)} v_-^{-p} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{p-1} \|g_k(0)\|_W v_+^k + M \max(\mathbf{s}') \right) v_-^{-p} \\ &\leq \varepsilon v_-^p v_-^{-p} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\|A_{U,(\mathbf{t}',w)} - I\|_{U,(\mathbf{t}',w)} \leq \varepsilon < 1.$$

Par conséquent, l'endomorphisme $A_{U,(\mathbf{t}',w)} = I + (A_{U,(\mathbf{t}',w)} - I)$ est inversible.

Soit $F \in \mathcal{B}(U)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{t}', w) \rangle$. Il existe un unique couple (Q, R) , avec $Q \in \mathcal{B}(U)\langle |\mathbf{T}| \leq (\mathbf{t}', w) \rangle$ et $R \in \mathcal{B}(U)\langle |\mathbf{T}'| \leq \mathbf{t}' \rangle[T_n]$ de degré strictement inférieur à p , tel que

$$F = QG + R.$$

Avec les notations précédentes, nous avons $Q = \alpha(A_{U,(\mathbf{t}',w)}^{-1}(F))$ et $R = \beta(A_{U,(\mathbf{t}',w)}^{-1}(F))$.

Puisque $\|A_{U,(\mathbf{t}',w)} - I\|_{U,|\mathbf{T}| \leq (\mathbf{t}',w)} \leq \varepsilon$, nous avons

$$\|A_{U,(\mathbf{t}',w)}^{-1}\|_{U,(\mathbf{t}',w)} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i = \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

On en déduit que

$$\|Q\|_{U,(\mathbf{t}',w)} \leq \frac{v_-^{-p}}{1-\varepsilon} \|F\|_{U,(\mathbf{t}',w)}$$

et que

$$\|R\|_{U,(\mathbf{t}',w)} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \|F\|_{U,(\mathbf{t}',w)}.$$

□

Théorème 1.2.10 (Théorème de préparation de Weierstraß)

Soit $G \in L_b$ une série telle que $G(0, T_n)(b) \neq 0$ dans $\mathcal{H}(b)\llbracket T_n \rrbracket$. Notons p la valuation en T_n de la série $G(0, T_n)(b)$. Alors il existe un unique couple $(\Omega, E) \in (L_b)^2$ vérifiant les conditions suivantes :

i) $\Omega \in L_b[T_n]$ est un polynôme distingué de degré p ;

ii) E est inversible dans L_b ;

iii) $G = E \Omega$.

Démonstration. — Supposons que des séries Ω et E vérifiant les conditions requises existent. Alors Ω s'écrit sous la forme $T_n^p + S$, où $S \in L'_b[T_n]$ désigne un polynôme de degré strictement inférieur à p . Les séries S et E sont alors reliées par l'égalité $T_n^p = E^{-1}G - S$. Le théorème de division de Weierstraß 1.2.7 nous assure l'unicité des séries E^{-1} et S . On en déduit l'unicité des séries Ω et E .

Démontrons, à présent, l'existence de ces séries. Le théorème 1.2.7 appliqué avec T_n^p et G nous assure qu'il existe $Q \in L_b$ et $R \in L'_b[T_n]$ de degré strictement inférieur à p tels que

$$T_n^p = QG + R.$$

Montrons, tout d'abord, que $R(0, T_n)(b) = 0$. Si H désigne un élément de L_b , nous noterons $v_b(H)$ la valuation en T_n de la série $H(0, T_n)(b)$ dans $\mathcal{H}(b)[[T_n]]$.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} v_b(R) &= v_b(T_n^p - QG) \\ &\geq \min(v_b(T_n^p), v_b(Q) + v_b(G)) \\ &\geq p. \end{aligned}$$

Puisque $R(0, T_n)$ est supposé de degré strictement inférieur à p , nous avons donc $R(0, T_n)(b) = 0$. On en déduit que $v_b(T_n^p - R) = p$ et donc que

$$v_b(Q) = v_b(QG) - v_b(G) = p - p = 0.$$

Par conséquent, Q est inversible dans L_b . Les séries $E = Q^{-1}$ et $\Omega = T_n^p - R$ conviennent. \square

Par la suite, nous aurons également besoin du lemme suivant, fort utile pour nous ramener à une situation dans laquelle on peut utiliser les théorèmes de Weierstraß.

Lemme 1.2.11. — *Soit $G \in L_b$ tel que $G(b) \neq 0$ dans $\mathcal{H}(b)[[T]]$. Il existe un automorphisme σ de L_b tel que l'on ait $\sigma(G)(0, T_n)(b) \neq 0$ dans $\mathcal{H}(b)[[T_n]]$.*

Démonstration. — D'après [17], §3, n° 7, lemme 3, il existe $u(1), \dots, u(n-1) \in \mathbf{N}^*$ tels que l'automorphisme τ de $\mathcal{H}(b)[[T]]$ défini par

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \tau(T_i) = T_i + T_n^{u(i)}; \\ \tau(T_n) = T_n, \end{cases}$$

envoie G sur un élément $\tau(G)$ qui vérifie $\tau(G)(0, T_n)(b) \neq 0$.

Montrons que l'application τ peut être définie sur L_b . Soient U un voisinage compact de b dans B et $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Quel que soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe $s_i, s_{n,i} \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $s_i + s_{n,i}^{u(i)} \leq r_i$. Posons $s_n = \min(s_{n,1}, \dots, s_{n,n-1}, r_n)$ et $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$. Définissons alors un endomorphisme τ_U de $\mathcal{B}(U)[\mathbf{T}]$ par les mêmes formules que τ . On vérifie alors que, quel que soit $F \in \mathcal{B}(U)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{r} \rangle$, on a

$$\tau_U(F) \in \mathcal{A}(U)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{s} \rangle.$$

On en déduit un morphisme $\sigma_U : \mathcal{B}(U)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{r} \rangle \rightarrow L_b$. On vérifie sans peine que tous ces morphismes sont compatibles et définissent donc un endomorphisme σ de L_b . En outre, l'endomorphisme σ induit l'endomorphisme τ sur $\mathcal{O}_{B,b}[\mathbf{T}]$. On en déduit, en particulier, que $\sigma(G)(0, T_n)(b) \neq 0$.

En appliquant le même procédé à partir de τ^{-1} , on construit un endomorphisme σ^{-1} de L_b qui est l'inverse de σ . Par conséquent, σ est un automorphisme de L_b . \square

1.2.2.2. Propriétés

Nous consacrerons cette partie à démontrer quelques propriétés de l'anneau local L_b .

Théorème 1.2.12. — *Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps. Alors l'anneau local L_b est noethérien.*

Démonstration. — Nous allons procéder par récurrence. Si $n = 0$, l'isomorphisme $L_b \simeq \mathcal{O}_{B,b}$ nous montre que le résultat est vrai.

Supposons, à présent, que le résultat soit vrai pour L'_b . Soit I un idéal de L_b . L'idéal nul étant évidemment de type fini, nous pouvons supposer que $I \neq (0)$. Choisissons un élément non nul G de I . Puisque $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps, il s'injecte dans $\mathcal{H}(b)$ et nous avons donc $G(b) \neq 0$. D'après le lemme 1.2.11, quitte à appliquer un automorphisme de L_b , nous pouvons donc supposer que $G(0, T_n)(b) \neq 0$. D'après le théorème de division de Weierstraß 1.2.7, l'idéal I est engendré par G et par la partie $I \cap L'_b[T_n]$. Or l'anneau $L'_b[T_n]$ est noethérien, puisque L'_b l'est, donc l'idéal $I \cap L'_b[T_n]$ est engendré par un nombre fini d'éléments, ce qui suffit pour conclure. \square

Nous souhaitons, maintenant, traiter le cas où l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète. Nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire. Soit π une uniformisante de l'anneau $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit V un voisinage de b dans B sur lequel π est définie. Nous dirons que l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{B,b}$ vérifie la **condition (U)** s'il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages compacts

de b dans V tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, il existe une constante $C_W > 0$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(W)$ vérifiant $f(b) = 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{B}(W)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $f = \pi g$ dans $\mathcal{B}(W)$;
- ii) $\|g\|_W \leq C_W \|f\|_W$.

Il est clair que cette condition ne dépend pas de l'ouvert de définition de π , V , que nous avons choisi. En outre, si π' désigne une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$, il existe une fonction α inversible dans $\mathcal{O}_{B,b}$ telle que $\pi = \alpha \pi'$ dans $\mathcal{O}_{B,b}$. Si les propriétés précédentes sont vérifiées pour l'uniformisante π , elles le sont donc encore pour l'uniformisante π' . Par conséquent, la condition (U) porte bien sur l'anneau local lui-même et ne dépend pas des choix de π et de V effectués.

Nous utiliserons cette condition sous la forme du lemme suivant.

Lemme 1.2.13. — *Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$ et notons v_π la valuation π -adique sur cet anneau. Soit $G \in L_b \setminus \{0\}$. Notons $\sum_{\mathbf{k} \geq 0} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}$ son image dans $\mathcal{O}_{B,b}[\mathbf{T}]$. Posons*

$$v(G) = \min\{v_\pi(a_{\mathbf{k}}), \mathbf{k} \geq 0\} \in \mathbf{N}.$$

Alors, il existe une fonction H de L_b vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $H(b) \neq 0$ dans $\mathcal{H}(b)[\mathbf{T}]$;
- ii) $G = \pi^{v(G)} H$ dans L_b .

Démonstration. — Soit V un voisinage de b dans B sur lequel π est définie. Par hypothèse, il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages de b dans V tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, il existe une constante $C_W > 0$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(W)$ vérifiant $f(b) = 0$, il existe une fonction $g \in \mathcal{B}(W)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $f = \pi g$ dans $\mathcal{B}(W)$;
- ii) $\|g\|_W \leq C_W \|f\|_W$.

Il existe un voisinage compact U de b dans B et $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que la série G soit un élément de $\mathcal{B}(U)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$. Par conséquent, il existe une famille $(a_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{B}(U)$ telle que

$$G = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}$$

et

$$\sum_{\mathbf{k} \geq 0} \|a_{\mathbf{k}}\|_U \mathbf{t}^{\mathbf{k}} < +\infty.$$

Soit W un élément de \mathscr{W} contenu dans U . Soit $\mathbf{k} \geq 0$. Par hypothèse, $\pi^{v(G)}$ divise $a_{\mathbf{k}}$ dans $\mathcal{O}_{B,b}$. La condition (U) nous assure qu'il existe $b_{\mathbf{k}} \in \mathcal{B}(W)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $a_{\mathbf{k}} = \pi^{v(G)} b_{\mathbf{k}}$ dans $\mathcal{B}(W)$;
- ii) $\|b_{\mathbf{k}}\|_W \leq C_W^{v(G)} \|a_{\mathbf{k}}\|_W$.

Nous avons

$$\sum_{\mathbf{k} \geq 0} \|b_{\mathbf{k}}\|_W \mathbf{t}^{\mathbf{k}} \leq C_W^{v(G)} \sum_{\mathbf{k} \geq 0} \|a_{\mathbf{k}}\|_U \mathbf{t}^{\mathbf{k}} < +\infty.$$

Par conséquent, la série $\sum_{\mathbf{k} \geq 0} b_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}$ définit un élément H de $\mathcal{B}(W)\langle |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$. Il vérifie bien $G = \pi^{v(G)} H$ et $H(b) \neq 0$. \square

Théorème 1.2.14. — *Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Alors, l'anneau local L_b est noethérien.*

Démonstration. — Nous allons procéder par récurrence sur n . Si $n = 0$, nous avons $L_b \simeq \mathcal{O}_{B,b}$ et le résultat est vrai.

Supposons, à présent, que le résultat soit vrai pour L'_b . Soit I un idéal de L_b . L'idéal nul étant de type fini, nous pouvons supposer que $I \neq (0)$. Notons

$$v(I) = \min\{v(G), G \in I\}.$$

D'après le lemme 1.2.13, il existe un idéal J de L_b vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $I = \pi^{v(I)} J$;
- ii) l'idéal J contient un élément G vérifiant $G(b) \neq 0$ dans $\mathcal{H}(b)[\mathbf{T}]$.

Nous pouvons alors utiliser le même raisonnement que dans la preuve du théorème 1.2.12 pour montrer que l'idéal J est de type fini. Il en est donc de même pour l'idéal I . \square

Théorème 1.2.15. — *Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Alors, l'anneau local L_b est factoriel.*

Démonstration. — Il nous suffit de reprendre la structure des raisonnements précédents en utilisant, cette fois-ci, le théorème de préparation de Weierstraß 1.2.10, joint au lemme 1.2.11, et le théorème de Gauß. \square

Nous pouvons, en fait, obtenir un résultat plus fort et démontrer, sous les mêmes hypothèses, que l'anneau local L_b est régulier. À cet effet, nous utiliserons le lemme suivant qui assure que certaines décompositions formelles, comme somme ou produit, des éléments de L_b existent dans L_b .

Lemme 1.2.16. — *Soit*

$$G = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \in L_b.$$

Soit E un partie de \mathbf{N}^n . Alors les séries

$$G_1 = \sum_{\mathbf{k} \in E} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \text{ et } G_2 = \sum_{\mathbf{k} \notin E} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}$$

appartiennent à L_b et vérifient

$$G = G_1 + G_2.$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons qu'il existe $H \in \mathcal{O}_{B,b}[\mathbf{T}]$ telle que $G = T_i H$. Alors H appartient à L_b et l'égalité $G = T_i H$ vaut dans L_b .

Démonstration. — Il suffit de revenir à la définition des éléments de L_b et de prendre garde à ce que les conditions de convergence restent vérifiées. \square

Théorème 1.2.17. — *Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Alors, l'anneau L_b est un anneau local régulier de dimension égale à $\dim(\mathcal{O}_{B,b}) + n$.*

Démonstration. — Rappelons que nous notons $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}_b, T_1, \dots, T_n)$ l'idéal maximal de L_b et que nous avons

$$\kappa(b) = \mathcal{O}_{B,b}/\mathfrak{m}_b \simeq L_b/\mathfrak{m}.$$

Supposons, tout d'abord, que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps. Nous avons $\mathfrak{m} = (T_1, \dots, T_n)$, $\mathcal{O}_{B,b} = \kappa(b)$ et $\dim(\mathcal{O}_{B,b}) = 0$. La suite

$$(0) \subset (T_1) \subset \dots \subset (T_1, \dots, T_n)$$

est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de L_b . On en déduit que

$$\dim(L_b) \geq n.$$

Montrons, à présent, que la famille (T_1, \dots, T_n) engendre le $\kappa(b)$ -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Soit $G \in \mathfrak{m}$. Par définition de \mathfrak{m} , il existe $G_1, \dots, G_n \in L_b$ tels que

$$G = \sum_{i=1}^n T_i G_i \text{ dans } L_b.$$

Quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $h_i \in \mathcal{O}_{B,b}$, $H_{i,1}, \dots, H_{i,n} \in \mathcal{O}_{B,b}[\mathbf{T}]$ tels que

$$G_i = h_i + \sum_{j=1}^n T_j H_{i,j} \text{ dans } \mathcal{O}_{B,b}[\mathbf{T}].$$

D'après le lemme 1.2.16, cette décomposition vaut encore dans L_b . Par conséquent, nous avons

$$G = \sum_{i=1}^n h_i T_i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} T_i T_j H_{i,j} \text{ dans } L_b.$$

Or, quels que soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous avons $T_i T_j \in \mathfrak{m}^2$. On en déduit que

$$G = \sum_{i=1}^n h_i T_i \text{ dans } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Nous avons bien montré que la famille (T_1, \dots, T_n) engendre le $\kappa(b)$ -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Comme tout anneau local noethérien, l'anneau L_b vérifie

$$\dim(L_b) \leq \dim_{\kappa(b)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq n.$$

Finalement, nous avons donc

$$\dim(L_b) = \dim_{\kappa(b)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n.$$

On en déduit que l'anneau L_b est un anneau local régulier de dimension n .

Supposons, à présent, que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition U. Nous avons alors $\dim(\mathcal{O}_{B,b}) = 1$. Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$. La suite

$$(0) \subset (\pi) \subset (\pi, T_1) \subset \dots \subset (\pi, T_1, \dots, T_n)$$

est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de L_b . Observons que pour montrer que ce sont des idéaux premiers, il faut faire appel à la condition U et, plus précisément, au lemme 1.2.13. Nous avons montré que

$$\dim(L_b) \geq n + 1.$$

Montrons, à présent, que la famille (π, T_1, \dots, T_n) engendre le $\kappa(b)$ -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Soit $G \in \mathfrak{m}$. Par définition de \mathfrak{m} , il existe $G_0, \dots, G_n \in L_b$ tels que

$$G = \pi G_0 + \sum_{i=1}^n T_i G_i \text{ dans } L_b.$$

Par le même raisonnement que dans le cas des corps, on montre qu'il existe $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n T_i G_i = \sum_{i=1}^n h_i T_i \text{ dans } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

En utilisant de nouveau le lemme 1.2.16, on montre qu'il existe $h_0 \in \mathcal{O}_{B,b}$, $H_{0,1}, \dots, H_{0,n} \in L_b$ tels que

$$G_0 = h_0 + \sum_{j=1}^n T_j H_{0,j} \text{ dans } L_b.$$

Par conséquent, nous avons

$$\pi G_0 = \pi h_0 + \sum_{j=1}^n \pi T_j H_{0,j} \text{ dans } L_b.$$

Or, quel que soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous avons $\pi T_j \in \mathfrak{m}^2$. On en déduit que

$$G = h_0 \pi + \sum_{i=1}^n h_i T_i \text{ dans } \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Nous avons bien montré que la famille (π, T_1, \dots, T_n) engendre le $\kappa(b)$ -espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

L'anneau local noethérien L_b vérifie donc

$$\dim(L_b) \leq \dim_{\kappa(b)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq n + 1.$$

On en déduit que

$$\dim(L_b) = \dim_{\kappa(b)}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n + 1.$$

Finalement, l'anneau L_b est un anneau local régulier de dimension $n + 1$. \square

1.2.3. Limites d'algèbres de couronnes

Soit V une partie compacte de B . Pour $\mathbf{s} \in \mathbf{R}_+^n$ et $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, nous noterons $\|\cdot\|_{V,\mathbf{s},\mathbf{t}}$ la norme sur l'anneau $\mathcal{B}(V)\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle$ définie au paragraphe 1.2.1.

Soit b un point de B . Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tel que la famille (r_1, \dots, r_n) soit libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^*/|\mathcal{H}(b)^*|)$. Nous noterons

$$L_{b,\mathbf{r}} = \varinjlim_{V,\mathbf{s},\mathbf{t}} \mathcal{B}(V)\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle,$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts du point b dans B , \mathbf{s} parcourt $\prod_{i=1}^n]0, r_i[$ et \mathbf{t} parcourt $\prod_{i=1}^n]r_i, +\infty[$.

Comme précédemment, lorsque l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète soumis à la condition (U), nous pouvons mener une étude précise de l'anneau $L_{b,\mathbf{r}}$. Signalons que les résultats s'obtiennent bien plus facilement que précédemment. En particulier, nous n'aurons pas besoin de faire appel aux théorèmes de division et de préparation de Weierstraß. Nous commençons par énoncer un lemme qui généralise, en un certain sens, l'inégalité ultramétrique.

Lemme 1.2.18. — Soit k un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ vérifiant l'inégalité suivante : quels que soient les éléments x et y de k , on a

$$|x + y| \leq 2^\lambda \max(|x|, |y|).$$

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x_0, \dots, x_n \in k$. Alors on a

$$\left| \sum_{i=0}^n x_i \right| \leq 2^{n\lambda} \max_{0 \leq i \leq n} (|x_i|).$$

Si l'on suppose que, quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|x_i| < 2^{-n\lambda} |x_0|$, alors on a

$$\left| \sum_{i=0}^n x_i \right| \geq 2^{-n\lambda} |x_0|.$$

Démonstration. — La première inégalité s'obtient facilement par récurrence. Démontrons la seconde. Supposons donc que, quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|x_i| < 2^{-n\lambda} |x_0|$. Alors

$$\begin{aligned} |x_0| &= \left| \sum_{i=0}^n x_i - x_n - \dots - x_1 \right| \\ &\leq 2^{n\lambda} \max \left(\left| \sum_{i=0}^n x_i \right|, |x_n|, \dots, |x_1| \right), \end{aligned}$$

d'après la première inégalité. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\max \left(\left| \sum_{i=0}^n x_i \right|, |x_n|, \dots, |x_1| \right) = |x_i|.$$

Nous obtenons alors

$$|x_0| \leq 2^{n\lambda} |x_i| < |x_0|,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, nous avons

$$\max \left(\left| \sum_{i=0}^n x_i \right|, |x_n|, \dots, |x_1| \right) = \left| \sum_{i=0}^n x_i \right|.$$

On en déduit la seconde inégalité. \square

Théorème 1.2.19. — Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps. Alors l'anneau $L_{b,r}$ est un corps.

Démonstration. — Soit f un élément non nul de l'anneau $L_{b,r}$. Il nous suffit de montrer que cet élément est inversible. Il existe un voisinage compact V de b dans B , des éléments \mathbf{s} et \mathbf{t} de \mathbf{R}_+^n vérifiant $\mathbf{s} < \mathbf{r}$ et $\mathbf{t} > \mathbf{r}$ tels que

$$f \in \mathcal{B}(V) \langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle.$$

Dans ce dernier anneau, la fonction f possède une écriture sous la forme

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}},$$

où, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, nous avons $a_{\mathbf{k}} \in \mathcal{B}(V)$ et la famille $(\|a_{\mathbf{k}}\|_V \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}))_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable.

Les conditions imposées au n -uplet \mathbf{r} nous assurent qu'il existe un élément \mathbf{k}_0 de \mathbf{Z}^n tel que, quel que soit $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$, on ait

$$|a_{\mathbf{k}_0}(b)| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}_0}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}_0}) > |a_{\mathbf{k}}(b)| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}).$$

En utilisant le fait que la famille $(\|a_{\mathbf{k}}\|_V \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}))_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable, on en déduit qu'il existe $u, v \in \mathbf{R}$ tels que, quel que soit $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$, on ait même

$$|a_{\mathbf{k}_0}(b)| \min(\mathbf{s}^{\mathbf{k}_0}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}_0}) > v > u > |a_{\mathbf{k}}(b)| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}).$$

Il existe un voisinage E de $-\infty$ dans $\mathbf{Z}^n \setminus \{\mathbf{k}_0\}$ tel que

$$\sum_{\mathbf{k} \in E} \|a_{\mathbf{k}}\|_V \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \leq u.$$

De même, il existe un voisinage F de $+\infty$ dans $\mathbf{Z}^n \setminus (E \cup \{\mathbf{k}_0\})$ tel que

$$\sum_{\mathbf{k} \in F} \|a_{\mathbf{k}}\|_V \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}) \leq u.$$

La partie $G = \mathbf{Z}^n \setminus (E \cup F \cup \{\mathbf{k}_0\})$ ne contient qu'un nombre fini de termes. On en déduit qu'il existe deux éléments \mathbf{s}_0 et \mathbf{t}_0 de $(\mathbf{R}_+^*)^n$ vérifiant $\mathbf{s} \leq \mathbf{s}_0 < \mathbf{r}$ et $\mathbf{r} < \mathbf{t}_0 \leq \mathbf{t}$ tels que l'on ait

$$|a_{\mathbf{k}_0}(b)| \min(\mathbf{s}_0^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}_0^{\mathbf{k}}) > v$$

et, quel que soit $\mathbf{k} \in G$,

$$|a_{\mathbf{k}}(b)| \max(\mathbf{s}_0^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}_0^{\mathbf{k}}) < u.$$

Définissons deux voisinages compacts du point b dans V par

$$W_0 = \left\{ c \in V \mid \forall \mathbf{k} \in G, |a_{\mathbf{k}}(c)| \max(\mathbf{s}_0^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}_0^{\mathbf{k}}) \leq u \right\}$$

et

$$W_1 = \left\{ c \in V \mid |a_{\mathbf{k}_0}(c)| \min(\mathbf{s}_0^{\mathbf{k}_0}, \mathbf{t}_0^{\mathbf{k}_0}) \geq v \right\}.$$

Il existe un élément λ de l'intervalle $]0, 1[$ vérifiant

$$2^{(c+2)\lambda} u < v.$$

Les conditions que nous avons imposées sur \mathbf{r} imposent au corps valué $\mathcal{H}(b)$ d'être ultramétrique. En particulier, nous avons $|2(b)| \leq 1$. Par conséquent, la partie

$$W_2 = \left\{ c \in V \mid |2(c)| \leq 2^\lambda \right\}$$

est un voisinage compact de b dans V . Choisissons un voisinage compact rationnel W de b contenu dans $W_0 \cap W_1 \cap W_2$. Nous allons montrer que la fonction f est inversible dans l'anneau $\mathcal{B}(W)\langle \mathbf{s}_0 \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t}_0 \rangle$. Notons

$$D = \pi^{-1}(W) \cap \overline{C}(\mathbf{s}_0, \mathbf{t}_0).$$

En utilisant le fait que $\mathcal{B}(W) = W$ et le lemme 1.2.1, on montre que

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}(W)\langle \mathbf{s}_0 \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t}_0 \rangle) = D.$$

D'après [4], corollaire 1.2.4, pour montrer que la fonction f est inversible dans l'anneau $\mathcal{B}(W)\langle \mathbf{s}_0 \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t}_0 \rangle$, il suffit de montrer qu'elle ne s'annule par sur son spectre analytique D . Soit y un point de D . Notons c son projeté sur B . C'est un élément de W . Nous avons

$$\begin{aligned} |f(y)| &= \left| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}}(c) \mathbf{T}(y)^{\mathbf{k}} \right| \\ &= \left| a_{\mathbf{k}_0}(c) \mathbf{T}(y)^{\mathbf{k}_0} + \sum_{\mathbf{k} \in E} a_{\mathbf{k}}(c) \mathbf{T}(y)^{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k} \in F} a_{\mathbf{k}}(c) \mathbf{T}(y)^{\mathbf{k}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k} \in G} a_{\mathbf{k}}(c) \mathbf{T}(y)^{\mathbf{k}} \right|. \end{aligned}$$

Écrivons l'expression à l'intérieur de la valeur absolue comme une somme de $3 + \#G$ termes. À l'exception du premier, chacun de ces termes g vérifie

$$|g| \leq u < 2^{-(\#G+2)\lambda} v \leq |a_{\mathbf{k}_0}(c)| |\mathbf{T}(c)^{\mathbf{k}_0}|.$$

D'après le lemme 1.2.18, nous avons donc

$$|f(y)| \geq 2^{-(\#G+2)\lambda} |a_{\mathbf{k}_0}(c)| |\mathbf{T}(c)^{\mathbf{k}_0}| > 0.$$

On en déduit le résultat. \square

Venons-en, à présent, au cas où l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$ et v_π la valuation associée. Nous disposons d'un résultat analogue à celui du lemme 1.2.13. Avant de l'énoncer, définissons une application v de $L_{b,\mathbf{r}}$ dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$. Soit f un élément de $L_{b,\mathbf{r}}$. Il existe un voisinage compact V de b dans B , des éléments \mathbf{s} et \mathbf{t} de \mathbf{R}_+^n vérifiant $\mathbf{s} < \mathbf{r}$ et $\mathbf{t} > \mathbf{r}$ tels que

$$f \in \mathcal{B}(V)\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle.$$

Dans ce dernier anneau, la fonction f possède une écriture sous la forme

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}},$$

où, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, nous avons $a_{\mathbf{k}} \in \mathcal{B}(V)$ et la famille $(\|a_{\mathbf{k}}\|_V \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}))_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable. Posons

$$v(f) = \min\{v_{\pi}(a_{\mathbf{k}}), \mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n\} \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}.$$

Cette quantité ne dépend pas du représentant de f choisi.

Lemme 1.2.20. — *Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Soit π une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$ et notons v_{π} la valuation associée. Soit f un élément non nul de $L_{b,r} \setminus \{0\}$. Alors, il existe une fonction g de $L_{b,r}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) $v(g) = 0$;
- ii) $f = \pi^{v(f)} g$ dans $L_{b,r}$.

Nous en déduisons le théorème suivant.

Théorème 1.2.21. — *Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète vérifiant la condition (U). Alors l'anneau $L_{b,r}$ est un anneau de valuation discrète, de valuation v et d'idéal maximal $\mathfrak{m}_b L_{b,r}$.*

Démonstration. — On vérifie directement sur la définition de l'application v que les deux propriétés suivantes sont vérifiées : quels que soient f et g dans $L_{b,r}$, nous avons

- i) $v(f + g) \geq \min(v(f), v(g))$;
- ii) $v(fg) = v(f) + v(g)$.

En outre, la condition (U) nous assure que nous avons $v(f) = +\infty$ si, et seulement si, la fonction f est nulle. De cette propriété, jointe à la propriété ii), on déduit que l'anneau $L_{b,r}$ est intègre. Notons F son corps des fractions. L'application v se prolonge en un morphisme surjectif de F^* dans \mathbf{Z} qui vérifie encore la propriété i). C'est donc une valuation discrète.

Pour conclure, il nous reste à montrer que nous avons les deux égalités suivantes :

- a) $L_{b,r} = \{f \in F \mid v(f) \geq 0\}$;
- b) $\mathfrak{m}_b L_{b,r} = \{f \in F \mid v(f) > 0\}$.

L'égalité b) se déduit de l'égalité a) en utilisant la condition (U). En outre, en utilisant le lemme 1.2.20, on se ramène à montrer que tout élément de $L_{b,r}$ de valuation nulle est inversible dans $L_{b,r}$. Soit f un élément de $L_{b,r}$ tel que $v(f) = 0$.

Il existe un voisinage compact V de b dans B , des éléments \mathbf{s} et \mathbf{t} de \mathbf{R}_+^n vérifiant $\mathbf{s} < \mathbf{r}$ et $\mathbf{t} > \mathbf{r}$ tels que

$$f \in \mathcal{B}(V) \langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle.$$

Dans ce dernier anneau, la fonction f possède une écriture sous la forme

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}},$$

où, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, nous avons $a_{\mathbf{k}} \in \mathcal{B}(V)$ et la famille $(\|a_{\mathbf{k}}\|_V \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}))_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n}$ est sommable. Puisque $v(f) = 0$, la famille $(|a_{\mathbf{k}}(b)|)_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n}$ n'est pas nulle. Les conditions imposées au n -uplet \mathbf{r} nous assurent alors qu'il existe un élément \mathbf{k}_0 de \mathbf{Z}^n tel que, quel que soit $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$, on ait

$$|a_{\mathbf{k}_0}(b)| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}_0}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}_0}) > |a_{\mathbf{k}}(b)| \max(\mathbf{s}^{\mathbf{k}}, \mathbf{t}^{\mathbf{k}}).$$

On en utilisant le même raisonnement que dans la preuve du théorème 1.2.19, on montre que la fonction f est inversible dans l'anneau $L_{b,r}$. \square

1.3. Anneaux locaux

Dans toute cette partie, nous fixons un anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ muni d'une norme uniforme et un entier $n \in \mathbf{N}$. Notons $B = \mathcal{M}(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, $X = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}}$ et $\pi : X \rightarrow B$ le morphisme de projection.

1.3.1. Existence locale de racines

Nous commençons par montrer que les anneaux locaux de l'espace affine analytique X au-dessus de B sont henséliens.

Proposition 1.3.1. — *Soit x un point de X . L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien.*

Démonstration. — Rappelons que nous notons $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. Soit $P(T)$ un polynôme unitaire de $\mathcal{O}_{X,x}[T]$ dont l'image dans $\kappa(x)[T]$ possède une racine simple α . D'après [42], chapitre VII, proposition 3, il nous suffit de montrer que α se relève en une racine de $P(T)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Choisissons un élément f de $\mathcal{O}_{X,x}$ relevant α . Nous pouvons alors retraduire les hypothèses sous la forme $P(f)(x) = 0$ et $P'(f)(x) \neq 0$.

Soit U un voisinage compact de x dans X tel que les coefficients du polynôme P et l'élément f appartiennent à $\mathcal{B}(U)$. Quitte à restreindre U , nous pouvons supposer que la fonction $P'(f)$ y est inversible. Il existe un polynôme $Q(T_1, T_2) \in \mathcal{B}(U)[T_1, T_2]$, indépendant de f , tel que, quel que soit $g \in \mathcal{B}(U)$, on ait

$$\begin{aligned} P(f + P(f)g) &= P(f) + P'(f)P(f)g + P(f)^2 g^2 Q(f, g) \\ &= P'(f)P(f) \left(\frac{1}{P'(f)} + g + \frac{P(f)}{P'(f)} g^2 Q(f, g) \right). \end{aligned}$$

Notons $d \in \mathbf{N}$ le degré du polynôme $Q(f, T)$. Soit $t \in]0, 1[$. Quitte à restreindre encore le voisinage U de x , nous pouvons supposer que $t/(d+1)$ majore la norme uniforme sur U de tous les coefficients du polynôme

$$R(T) = -\frac{P(f)}{P'(f)} T^2 Q(f, T).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{B}(U), \|R(g)\|_U &\leq \sum_{i=2}^{d+2} \frac{t}{d+1} \|g\|_U^i \\ &\leq t \max \left(\|g\|_U^2, \|g\|_U^{d+2} \right). \end{aligned}$$

En particulier, si $g \in \mathcal{B}(U)$ vérifie $\|g\|_U \leq 1$, alors nous avons encore $\|R(g)\|_U \leq 1$.

Quitte à diminuer t , nous pouvons supposer que

$$t \max \left(\left\| \frac{-1}{P'(f)} \right\|_U^2, \left\| \frac{-1}{P'(f)} \right\|_U^{d+2} \right) \leq 1.$$

Nous avons alors

$$\left\| R \left(\frac{-1}{P'(f)} \right) \right\|_U \leq 1.$$

On en déduit que, quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\left\| R^{on} \left(\frac{-1}{P'(f)} \right) \right\|_U \leq 1,$$

où R^{on} désigne l'application R élevée à la puissance n pour la loi de composition.

En utilisant le fait que, si un élément b de $\mathcal{B}(U)$ vérifie $\|b\|_U \leq 1$, alors

$$\|R(b)\| \leq t \|b\|_U^2,$$

on montre, à l'aide d'une récurrence, que, quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\left\| R^{on} \left(\frac{-1}{P'(f)} \right) \right\|_U \leq t^{2^n - 1}.$$

En particulier, la série

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} R^{on} \left(\frac{-1}{P'(f)} \right)$$

converge dans $\mathcal{B}(U)$. Notons s sa somme. Elle vérifie l'équation

$$s - R(s) = -\frac{1}{P'(f)}.$$

On en déduit que $P(f + P(f)s) = 0$. Puisque $P(f)$ est nul dans $\kappa(x)$, l'élément $f + P(f)s$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ relève bien α . \square

Corollaire 1.3.2. — *Soit Z un espace analytique sur \mathcal{A} (au sens de la définition 1.1.15). Pour tout point z de Z , l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,z}$ est hensélien.*

Démonstration. — Par définition, l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,z}$ est le quotient de l'anneau local en un point d'un espace affine analytique sur \mathcal{A} . Ce dernier anneau est hensélien, d'après la proposition précédente. Cela suffit pour conclure car tout quotient d'un anneau hensélien est hensélien. \square

Comme toujours, le caractère hensélien d'un anneau local peut être interprété comme une sorte de théorème des fonctions implicites. Par la suite, nous utiliserons effectivement cette propriété pour démontrer des résultats d'isomorphie. La proposition qui suit donne un exemple d'application.

Soit $P(S)$ un polynôme unitaire à coefficients dans \mathcal{A} . Notons $d \in \mathbf{N}$ son degré. Notons

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A}[S]/(P(S)).$$

Puisque le polynôme est unitaire, le morphisme

$$n : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}^d & \rightarrow & \mathcal{A}' \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) & \mapsto & \sum_{i=0}^{d-1} a_i S^i \end{array}$$

est un isomorphisme. Munissons l'algèbre \mathcal{A}^d de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par le maximum des normes des coefficients. On définit alors une norme, notée encore $\|\cdot\|_\infty$, sur \mathcal{A}' de la façon suivante :

$$\forall f \in \mathcal{A}', \|f\|_\infty = \|n^{-1}(f)\|_\infty.$$

Cette norme n'est pas, *a priori*, une norme d'algèbre. Nous supposons donc que l'algèbre \mathcal{A}' est munie d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|'$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$: il existe deux constantes $D_-, D_+ > 0$ telles que

$$\forall f \in \mathcal{A}', D_- \|f\|_\infty \leq \|f\|' \leq D_+ \|f\|_\infty.$$

Munie de la norme $\|\cdot\|'$, l'algèbre \mathcal{A}' est une algèbre de Banach. En outre, le morphisme $(\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{A}', \|\cdot\|')$ est borné. Nous noterons

$$\varphi : Y = \mathbf{A}_{\mathcal{A}'}^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n, \text{an}} = X$$

le morphisme induit entre les espaces analytiques.

Soit U une partie ouverte de X et supposons qu'il existe une fonction R définie sur U vérifiant $P(R) = 0$. Nous pouvons alors définir une application σ de $U \subset X$ vers Y . Soit x un point de U . Soit $p(\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} p_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}$, où la famille $(p_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \geq 0}$ est une famille presque nulle d'éléments de \mathcal{A}' . Quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n$, relevons l'élément $p_{\mathbf{k}}$ de \mathcal{A}' en un élément $q_{\mathbf{k}}(S)$ de $\mathcal{A}[S]$. Considérons l'application

$$\chi_{\sigma(x)} : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}'[\mathbf{T}] & \rightarrow & \mathcal{H}(x) \\ p(\mathbf{T}) & \mapsto & \sum_{\mathbf{k} \geq 0} q_{\mathbf{k}}(R(x)) \mathbf{T}^{\mathbf{k}}(x) \end{array}$$

Puisque $P(R(x)) = 0$, cette application ne dépend pas du choix des différents relevés. On en déduit aussitôt que $\chi_{\sigma(x)}$ est un morphisme de \mathcal{A} -algèbres. Montrons que ce morphisme est borné sur \mathcal{A}' . Soit $f \in \mathcal{A}'$. Il existe $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathcal{A}$ tels que

$$f = \sum_{i=0}^{d-1} a_i S^i \text{ dans } \mathcal{A}'.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
|\chi_{\sigma(x)}(f)| &= \left| \sum_{i=0}^{d-1} a_i(x) R(x)^i \right| \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} |R(x)^i| \right) \max_{0 \leq i \leq d-1} (|a_i(x)|) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} |R(x)^i| \right) \max_{0 \leq i \leq d-1} (\|a_i\|) \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} |R(x)^i| \right) D_-^{-1} \|f\|'.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le morphisme $\chi_{\sigma(x)}$ est borné sur \mathcal{A}' . C'est donc un caractère de $\mathcal{A}'[T]$. Nous noterons $\sigma(x)$ le point de Y associé. L'application σ ainsi construite est une section continue de φ au-dessus de U . Sous certaines hypothèses assez faibles, nous pouvons obtenir un résultat bien plus fort. Nous noterons α l'image de S dans \mathcal{A}' .

Proposition 1.3.3. — *Supposons que*

- i) la norme $\|\cdot\|'$ sur \mathcal{A}' est uniforme ;
- ii) l'ouvert U est connexe ;
- iii) la fonction $P'(\alpha)$ est inversible sur $\varphi^{-1}(U)$;
- iv) il existe un point $x_0 \in U$ tel que $R(\sigma(x_0)) = \alpha$ dans $\mathcal{H}(\sigma(x_0))$.

Alors la partie $\sigma(U)$ est un ouvert de Y et la section σ induit un isomorphisme entre les espaces U et $\sigma(U)$, munis des structures d'espaces localement annelés induites.

Démonstration. — Le polynôme $P(T)$ possède une unique factorisation dans $\mathcal{A}'[T]$ sous la forme $P(T) = (T - \alpha)Q(T)$, avec $Q(T) \in \mathcal{A}'[T]$. Quel que soit le point y de $\varphi^{-1}(U)$, on a $P(R(y)) = 0$, d'où l'on tire soit $R(y) = \alpha$, soit $Q(R(y)) = 0$. Ces deux conditions ne peuvent valoir simultanément, puisque, par hypothèse, nous avons $P'(\alpha)(y) \neq 0$. Par conséquent, la partie de Y définie par

$$V = \{y \in \varphi^{-1}(U) \mid R(y) = \alpha\}$$

est ouverte.

Montrons, à présent, que $\sigma(U) = V$. Par hypothèse, on a $R(\sigma(x_0)) = \alpha$, autrement dit, $\sigma(x_0) \in V$. Puisque l'ouvert U est connexe, la partie $\sigma(U)$ l'est encore. On en déduit que, quel que soit $y \in \sigma(U)$, on a $R(y) = \alpha$. Par conséquent, nous avons l'inclusion $\sigma(U) \subset V$.

Réciproquement, soit y un point de V . Par définition de V , on a $R(y) = \alpha$. Notons $x = \varphi(y) \in U$. Le point $\sigma(x)$ de Y est associé au caractère qui envoie tout polynôme $p(\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} p_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}$ de $\mathcal{A}'[\mathbf{T}]$ sur l'élément

$$\sum_{\mathbf{k} \geq 0} q_{\mathbf{k}}(R(x)) \mathbf{T}^{\mathbf{k}}(x) \text{ de } \mathcal{H}(x).$$

L'image de cet élément par l'isomorphisme $\mathcal{H}(x) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(y)$ n'est autre que

$$\sum_{\mathbf{k} \geq 0} q_{\mathbf{k}}(R(y)) \mathbf{T}^{\mathbf{k}}(y) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} q_{\mathbf{k}}(\alpha) \mathbf{T}^{\mathbf{k}}(x) = p(\mathbf{T}(y)) \text{ dans } \mathcal{H}(y).$$

On en déduit que $\sigma(x) = y$.

Nous venons de démontrer que le morphisme φ réalise un homéomorphisme de l'ouvert V de Y sur l'ouvert U de X . Il induit même un isomorphisme entre les espaces annelés. Soit $y \in V$. Notons $x = \varphi(y)$ son image. Il suffit de montrer que le morphisme

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$$

est un isomorphisme. Il est clair que ce morphisme est injectif car une fonction est nulle si, et seulement si, elle l'est en chaque point et que, quel que soit $z \in V$, nous avons

$$\mathcal{H}(\varphi(z)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(z).$$

Montrons qu'il est surjectif. Soit $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$. Il existe un voisinage V' de y dans V et $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $\mathcal{H}(V')$ qui converge uniformément vers f sur V' . Par définition, l'algèbre \mathcal{A}' est engendrée par 1 et par α . Soit $p(\mathbf{T}) \in \mathcal{A}'[\mathbf{T}]$. Il existe $(p_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \geq 0}$ une famille presque nulle d'éléments de \mathcal{A}' telle que

$$p(\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} p_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}.$$

Quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n$, relevons l'élément $p_{\mathbf{k}}$ de \mathcal{A}' en un élément $q_{\mathbf{k}}(S)$ de $\mathcal{A}[S]$. Puisque $U' = \varphi(V')$ est contenu dans U , la fonction R y est définie. Il en est donc de même pour la fonction

$$q(\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} q_{\mathbf{k}}(R) \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \text{ de } \mathcal{O}(U').$$

Par définition de V , au-dessus de V , nous avons $R = \alpha$. On en déduit que

$$\varphi^*(q) = p \text{ dans } \mathcal{O}(V').$$

Par conséquent, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe $S_n \in \mathcal{O}(U')$ telle que

$$\varphi^*(S_n) = R_n \text{ dans } \mathcal{O}(V').$$

Rappelons que, quel que soit $z \in V'$, nous avons

$$\mathcal{H}(\varphi(z)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(z).$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy uniforme dans $\mathcal{O}(U')$. Elle converge donc vers une fonction $g \in \mathcal{O}(U')$ qui vérifie

$$\varphi^*(g) = f \text{ dans } \mathcal{O}(V').$$

C'est ce que nous voulions démontrer. \square

1.3.2. Description

1.3.2.1. Systèmes fondamentaux de voisinages sur la droite affine

Nous sommes capable d'exhiber des bases de voisinages explicites de certains points sur la droite affine. Nous en donnons ici deux exemples. Ces résultats nous seront, par la suite, très utiles pour étudier les anneaux locaux en ces points.

Nous supposons donc, ici, que $n = 1$ et, par conséquent, que $X = \mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$. Rappelons que nous notons $B = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $\pi : X \rightarrow B$ le morphisme naturel. Commençons par nous intéresser aux voisinages des points rationnels des fibres.

Proposition 1.3.4. — *Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit x le point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $(T - \alpha)(x) = 0$. Soient B_0 un voisinage de b dans B sur lequel la fonction α est définie, \mathcal{V} un système fondamental de voisinages de b dans B_0 et \mathcal{T} une partie de \mathbf{R}_+^* dont la borne inférieure est nulle. L'ensemble des parties de X de la forme*

$$\{y \in X \mid \pi(y) \in V, |(T - \alpha)(y)| < t\},$$

où V et t parcourent respectivement \mathcal{V} et \mathcal{T} , est un système fondamental de voisinages du point x dans X .

Démonstration. — Remarquons, tout d'abord, que, quitte à remplacer l'anneau \mathcal{A} par $\mathcal{B}(U)$, où U est un voisinage compact rationnel assez petit de b , nous pouvons supposer que $\alpha \in \mathcal{A}$. Cette opération est licite d'après le théorème 1.1.22. La translation par α définit alors un automorphisme de l'espace X . Nous pouvons donc supposer que $\alpha = 0$.

Soit U un voisinage du point x dans X . Par définition de la topologie de X , il existe un ensemble fini de fonctions $F \subset \mathcal{A}[T]$ et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que

$$U \supset \bigcap_{f \in F} \{y \in X \mid |f(x)| - \varepsilon < |f(y)| < |f(x)| + \varepsilon\}.$$

Il nous suffit de montrer que, quel que soit $f \in F$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V_{f,\varepsilon}$ de b dans B et un nombre réel $t_{f,\varepsilon} > 0$ tels que l'ensemble

$$\{y \in X \mid \pi(y) \in V_{f,\varepsilon}, |T(y)| < t_{f,\varepsilon}\}$$

soit contenu dans l'ensemble

$$\{y \in X \mid |f(x)| - \varepsilon < |f(y)| < |f(x)| + \varepsilon\}.$$

En effet, la partie U contiendra alors le voisinage de x défini par

$$\bigcap_{f \in F} \{y \in X \mid \pi(y) \in V_{f,\varepsilon}, |(T - \alpha)(y)| < t_{f,\varepsilon}\}$$

et donc celui défini par

$$\{y \in X \mid \pi(y) \in V, |T(y)| < t\},$$

où $V = \bigcap_{f \in F} V_{f,\varepsilon}$ et $t = \min\{t_{f,\varepsilon}, f \in F\}$. Finalement, pour tout élément V' de \mathcal{V} contenu dans V et tout élément t' de \mathcal{T} strictement inférieur à t , nous aurons encore

$$\{y \in X \mid \pi(y) \in V', |T(y)| < t'\} \subset U.$$

Soient $f \in \mathcal{A}[T]$ et $\varepsilon > 0$. Écrivons le polynôme f sous la forme

$$f = \sum_{i=0}^d f_i T^i,$$

où $d \in \mathbf{N}$ et, quel que soit $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{A}$. Posons $g = f - f_0$. Soit V un voisinage compact de b dans B . Notons

$$M = \max_{1 \leq i \leq d} \left(\sup_{c \in V} (f_i(c)) \right).$$

Soit $t \in]0, 1[$. Soit y un point de $\pi^{-1}(V)$ vérifiant $|T(y)| < t$. On a alors

$$|g(y)| \leq \sum_{i=1}^d M t^i \leq M \frac{t}{1-t}.$$

Quitte à choisir t assez petit, nous pouvons supposer que la quantité précédente est inférieure à ε .

Définissons un voisinage de b dans B par

$$W = \{c \in V \mid |f_0(b)| - \varepsilon < |f_0(c)| < |f_0(b)| + \varepsilon\}.$$

Quel que soit $y \in \pi^{-1}(W)$ vérifiant $|T(y)| < t$, nous avons alors

$$||f(y)| - |f(x)|| \leq 2\varepsilon.$$

On obtient le résultat annoncé.

□

Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit V un voisinage de b dans B sur lequel α est définie. Notons σ_α l'application qui à tout point c de V associe le point y de la fibre $\pi^{-1}(c)$ défini par l'équation $(T - \alpha)(y) = 0$. En d'autres termes, l'application σ_α envoie le point c de V sur le point de X associé à la semi-norme multiplicative bornée

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ P(T) &\mapsto |P(\alpha)(b)| \end{aligned} .$$

Avec cette écriture, il est clair que l'application σ_α est une section continue de π au-dessus de V .

Corollaire 1.3.5. — Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit V un voisinage de b dans B sur lequel α est définie. Soit x le point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $(T - \alpha)(x) = 0$. Soit U un voisinage de x dans $\pi^{-1}(V)$. Alors il existe un voisinage W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :

- i) la projection $\pi(W)$ est un voisinage de $\pi(x) = b$ dans B ;
- ii) la section σ_α restreinte à $\pi(W)$ prend ses valeurs dans W ;
- iii) pour tout point c de $\pi(W)$, la trace de la fibre $\pi^{-1}(c)$ sur W est connexe par arcs.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la proposition précédente en remarquant que, quel que soient $c \in V$ et $t > 0$, l'ensemble défini par

$$\{y \in \pi^{-1}(c) \mid |(T - \alpha)(y)| < t\}$$

est connexe par arcs. □

Corollaire 1.3.6. — Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit x le point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $(T - \alpha)(x) = 0$. Le morphisme π est ouvert en x .

Corollaire 1.3.7. — Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit x le point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $(T - \alpha)(x) = 0$. Si le point b de B possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs, alors il en est de même pour le point x de X .

Nous pouvons également décrire un système fondamental de voisinages pour les points de type 3 déployés.

Proposition 1.3.8. — Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit r un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \sqrt{|\mathcal{H}(b)^*|}$. Soit x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre $\pi^{-1}(b)$, c'est-à-dire le point

associé à la valeur absolue

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(b)[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k (T - \alpha)^k &\mapsto \max_{k \in \mathbf{N}} (|a_k(b)| r^k) . \end{aligned}$$

C'est l'unique point de la fibre qui satisfait l'équation $|(T - \alpha)(x)| = r$. Soient B_0 un voisinage de b dans B sur lequel la fonction α est définie, \mathcal{V} un système fondamental de voisinages de b dans B_0 , \mathcal{S} une partie de $]0, r[$ de borne supérieure r et \mathcal{T} une partie de $]r, +\infty[$ de borne inférieure r . L'ensemble des parties de X de la forme

$$\{y \in X \mid \pi(y) \in V, s < |(T - \alpha)(y)| < t\},$$

où V , s et t parcourent respectivement \mathcal{V} , \mathcal{S} et \mathcal{T} , est un système fondamental de voisinages du point x dans X .

Démonstration. — En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 1.3.4, on montre que l'on peut supposer que $\alpha = 0$. Soient $f \in \mathcal{A}[T]$ et $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer que la partie définie par

$$U = \{y \in X \mid |f(x)| - \varepsilon < |f(y)| < |f(x)| + \varepsilon\}$$

contient un voisinage de la forme voulue. Écrivons le polynôme f sous la forme

$$f = \sum_{i=0}^d f_i T^i,$$

où $d \in \mathbf{N}$ et, quel que soit $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{A}$.

Supposons, tout d'abord, que, quel que soit $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, nous avons $f_i(b) = 0$. Dans ce cas, nous avons $f(x) = 0$. Soit $\eta > 0$. Considérons le voisinage de b dans B défini par

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq d} \{c \in B \mid |f_i(c)| < \eta\}.$$

Soit $(s, t) \in [0, r[\times]r, +\infty[$. Posons

$$W = \{y \in X \mid \pi(y) \in V, s < |T(y)| < t\}.$$

Quel que soit $y \in W$, nous avons

$$\begin{aligned} |f(y)| &= \left| \left(\sum_{i=0}^d f_i T^i \right) (y) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^d |f_i(\pi(y))| t^i \\ &\leq \eta \max(1, t^d). \end{aligned}$$

Nous pouvons choisir η et t de façon que $\eta \max(1, t^d) < \varepsilon$. Nous avons alors

$$W \subset U.$$

Supposons, à présent, que l'image du polynôme f dans $\mathcal{H}(b)[T]$ n'est pas nulle. Puisque $r \notin \sqrt{|\mathcal{H}(b)^*|}$, il existe un unique entier $j \in \llbracket 0, d \rrbracket$ tel que

$$\forall i \neq j, |f_i T^i(x)| = |f_i(b)| r^i < |f_j(b)| r^j = |f_j T^j(x)|.$$

La fonction f_j ne s'annule pas au point b . Quitte à remplacer l'anneau \mathcal{A} par $\mathcal{B}(U)$, où U est un voisinage compact rationnel assez petit de b , nous pouvons supposer que la fonction f_j ne s'annule pas sur B . Cette opération est licite d'après le théorème 1.1.22. La fonction f_j est alors un élément inversible de \mathcal{A} , d'après [4], corollaire 1.2.4. Écrivons, maintenant, le polynôme f sous la forme

$$f = f_j T^j \left(1 + \sum_{i \neq j} \frac{f_i}{f_j} T^{i-j} \right).$$

Remarquons que le corps $\mathcal{H}(b)$ est nécessairement ultramétrique. En effet, dans le cas contraire, nous aurions $|\mathcal{H}(b)| = \mathbf{R}_+$. Par conséquent, nous avons $|2(x)| = |2(b)| \leq 1$. Soit $\lambda \in]0, 1]$. La partie V_λ de B définie par

$$V_\lambda = \left\{ c \in B \mid |2(c)| \leq 2^\lambda \right\}$$

est un voisinage de b dans B . Remarquons que, quel que soit $y \in \pi^{-1}(V_\lambda)$, nous avons $|2(y)| \leq 2^\lambda$ et donc, d'après le théorème d'Ostrowski, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, $|n.1(y)| \leq n^\lambda$. D'après le lemme 1.1.24, quels que soient $u, v \in \mathcal{H}(y)$, nous avons donc

$$|u + v| \leq 2^\lambda \max(|u|, |v|).$$

Quitte à choisir λ assez petit, nous pouvons supposer que

$$\forall i \neq j, \left| \frac{f_i}{f_j}(b) \right| r^{i-j} < 2^{-d\lambda}.$$

Soient $s \in]0, r[$ et $t \in]r, +\infty[$ tels qu'on ait

$$\forall i \neq j, \left| \frac{f_i}{f_j}(b) \right| \max(s^{i-j}, t^{i-j}) < 2^{-d\lambda}.$$

Définissons un voisinage de b dans B par

$$V = \left\{ c \in V_\lambda \mid \forall i \neq j, \left| \frac{f_i}{f_j}(c) \right| \max(s^{i-j}, t^{i-j}) < 2^{-d\lambda} \right\}.$$

Soit $y \in \pi^{-1}(V)$ vérifiant $s < |T(y)| < t$. Les inégalités démontrées dans le lemme 1.2.18 nous assurent alors que

$$2^{-d\lambda} < \left| \left(1 + \sum_{i \neq j} \frac{f_i}{f_j} T^{i-j} \right) (y) \right| < 2^{d\lambda}.$$

Soit $\eta \in]0, 1[$. Quitte à restreindre V , nous pouvons supposer que, quel que soit $c \in V$, on a

$$\eta |f_j(b)| < |f_j(c)| < \eta^{-1} |f_j(b)|.$$

On en déduit que

$$2^{-d\lambda} \eta |f_j(b)| s^j < |f(y)| < 2^{d\lambda} \eta^{-1} |f_j(b)| t^j,$$

d'où

$$2^{-d\lambda} \eta \left(\frac{s}{r} \right)^j |f(x)| < |f(y)| < 2^{d\lambda} \eta^{-1} \left(\frac{t}{r} \right)^j |f(x)|.$$

En effet, puisque le corps $\mathcal{H}(x)$ est ultramétrique, nous avons

$$|f(x)| = |f_j(b)| r^j.$$

Quitte à choisir λ assez petit, s et t assez proches de r et η assez proche de 1, le point y appartiendra nécessairement à U . \square

Comme précédemment, ce résultat va nous permet de démontrer que l'espace X possède de bonnes propriétés topologiques au voisinage d'un point de type 3 déployé d'une fibre. Il nous faut pour cela construire une section. Ce sera un peu plus délicat que dans le cas des points rationnels.

Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit V un voisinage de b dans B sur lequel α est définie. Soit r un élément de $\mathbf{R}_+ \setminus \{0, 1\}$. Définissons une application $\sigma_{\alpha,r}$ de la façon suivante. Soit c un point de V . Si le point c est associé à une valeur absolue ultramétrique, nous définissons $\sigma_{\alpha,r}(c)$ comme le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre $\pi^{-1}(c)$. Si le point c est associé à une valeur absolue archimédienne, alors le corps résiduel complété $\mathcal{H}(c)$ est \mathbf{R} ou \mathbf{C} muni de la valeur absolue $|\cdot|_{\infty}^{\varepsilon}$, avec $\varepsilon \in]0, 1[$. Nous définissons $\sigma_{\alpha,r}(c)$ comme le point $\alpha + r^{1/\varepsilon}$ de la fibre $\pi^{-1}(c)$. Nous avons ainsi construit une section $\sigma_{\alpha,r}$ de π au-dessus de V à valeurs dans $\{y \in X \mid |(T - \alpha)(y)| = r\}$.

Lemme 1.3.9. — *L'application $\sigma_{\alpha,r}$ est continue sur V .*

Démonstration. — Soit c un point de V . Supposons tout d'abord que la valeur absolue associée à c est ultramétrique, mais pas triviale. Il existe alors un entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $|n(c)| < 1$. Notons

$$W = V \cap \{d \in B \mid |n(d)| < 1\}.$$

C'est un voisinage du point c dans V . Quel que soit $d \in W$, le point $\sigma_{\alpha,r}(d)$ est le point de X associé à la valeur absolue

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k (T - \alpha)^k &\mapsto \max_{k \in \mathbf{N}} (|a_k(d)| r^k) . \end{aligned}$$

Sous cette forme, il apparaît clairement que la section $\sigma_{\alpha,r}$ est continue au-dessus de W .

Supposons, à présent, que la valeur absolue associée à c est archimédienne. La partie

$$W = V \cap \{d \in B \mid |2(d)| > 1\}$$

est alors un voisinage du point c dans B . Quel que soit $d \in W$, le point $\sigma_{\alpha,r}(d)$ est le point de X associé à la valeur absolue

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ P(T) &\mapsto P(r^{1/\log_2(|2(d)|)}) . \end{aligned}$$

La section $\sigma_{\alpha,r}$ est donc continue au-dessus de W .

Pour finir, supposons que la valeur absolue associée à c est triviale. Soit U un voisinage du point $\sigma_{\alpha,r}(c)$ dans $\pi^{-1}(V)$. Puisque $r \notin \sqrt{|\mathcal{H}(c)|} = \{0, 1\}$, la proposition 1.3.8 nous assure que U contient un voisinage du point $\sigma_{\alpha,r}(c)$ de la forme

$$U' = \{y \in X \mid \pi(y) \in W, s < |(T - \alpha)(x)| < t\},$$

où W désigne un voisinage de $\pi(c)$ dans V , s un élément de $[0, r[$ et t un élément de $]r, +\infty[$. Puisque $\sigma_{\alpha,r}^{-1}(U') = W$, la partie $\sigma_{\alpha,r}^{-1}(U)$ est un voisinage de $\pi(c)$ dans V .

Nous avons, à présent, traité le cas de tous les points de V . Nous avons donc bien montré que la section $\sigma_{\alpha,r}$ est continue. \square

Une fois cette section continue construite, nous obtenons les mêmes corollaires que dans le cas des points rationnels.

Corollaire 1.3.10. — *Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit V un voisinage de b dans B sur lequel α est définie. Soit x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Soit U un voisinage de x dans $\pi^{-1}(V)$. Alors il existe un voisinage W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) la projection $\pi(W)$ est un voisinage de $\pi(x) = b$ dans B ;
- ii) la section $\sigma_{\alpha,r}$ restreinte à $\pi(W)$ prend ses valeurs dans W ;
- iii) pour tout point c de $\pi(W)$, la trace de la fibre $\pi^{-1}(c)$ sur W est connexe par arcs.

Corollaire 1.3.11. — Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Le morphisme π est ouvert en x .

Corollaire 1.3.12. — Soient $b \in B$ et α un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Soit x le point $\eta_{\alpha,r}$ de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Si le point b de B possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs, alors il en est de même pour le point x de X .

1.3.2.2. Points déployés

Revenons, à présent, au cas d'un espace affine de dimension quelconque. Nous ne supposons donc plus que $n = 1$. Les résultats du paragraphe précédent vont nous permettre de décrire explicitement les anneaux locaux en certains points. Soient b un point de B et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathcal{O}_{B,b})^n$. Soit B_0 un voisinage de b dans B sur lequel les fonctions $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont définies.

Soient $m \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $r_m, \dots, r_n \in \mathbf{R}_+^*$ tels que la famille (r_m, \dots, r_n) soit libre dans l'espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^* / |\mathcal{H}(b)^*|)$. Posons $r_1 = \dots = r_{m-1} = 0$. Nous considérerons l'unique point x de $\pi^{-1}(b)$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |(T_i - \alpha_i)(x)| = r_i.$$

Proposition 1.3.13. — Soit \mathcal{V} un système fondamental de voisinages de b dans B_0 . Pour $i \in \llbracket m, n \rrbracket$, soit \mathcal{S}_i une partie de $]0, r_i[$ de borne supérieure r_i . Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, soit \mathcal{T}_i une partie de $]r_i, +\infty[$ de borne inférieure r_i . L'ensemble des parties de X de la forme

$$\{y \in X \mid \pi(y) \in V, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i \leq |(T_i - \alpha_i)(y)| \leq t_i\},$$

où V parcourt \mathcal{V} , quel que soit $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $s_i = 0$ et t_i parcourt \mathcal{T}_i , quel que soit $i \in \llbracket m, n \rrbracket$, s_i et t_i parcourent respectivement \mathcal{S}_i et \mathcal{T}_i , est un système fondamental de voisinages de x dans X .

Démonstration. — Il suffit de mettre en œuvre une récurrence portant sur la dimension n et d'utiliser les propositions 1.3.4 et 1.3.8. Signalons qu'au cours de la récurrence, nous aurons à traiter le cas de morphismes à valeurs dans un voisinage d'un point c d'un espace affine qui n'est pas nécessairement de la forme $\mathcal{M}(\mathcal{C})$. Ce problème peut être facilement contourné en considérant un voisinage compact rationnel V du point c contenu dans U et en restreignant le morphisme à la source et au but (cf. théorème 1.1.22). \square

De nouveau, nous en déduisons plusieurs corollaires.

Corollaire 1.3.14. — Soit U un voisinage du point x dans X . Alors il existe un voisinage W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :

- i)* la projection $\pi(W)$ est un voisinage de $\pi(x) = b$ dans B ;

- ii) il existe une section continue de π au-dessus de $\pi(W)$ à valeurs dans W ;
 iii) pour tout point c de $\pi(W)$, la trace de la fibre $\pi^{-1}(c)$ sur W est connexe par arcs.

Corollaire 1.3.15. — *Le morphisme π est ouvert en x .*

Corollaire 1.3.16. — *Si le point b de B possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs, alors il en est de même pour le point x de X .*

Nous pouvons, à présent, décrire explicitement l'anneau local au point x .

Théorème 1.3.17. — *Le morphisme $\mathcal{A}[T] \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme*

$$\varinjlim_{V, \mathbf{s}, \mathbf{t}} \mathcal{B}(V) \langle \mathbf{s} \leq |T - \boldsymbol{\alpha}| \leq \mathbf{t} \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x},$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages de b dans B_0 , quel que soit $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $s_i = 0$ et r_i parcourt \mathbf{R}_+^* , quel que soit $i \in \llbracket m, n \rrbracket$, s_i et t_i parcourent respectivement $]0, r_i[$ et $]r_i, +\infty[$.

Démonstration. — Quitte à remplacer l'anneau \mathcal{A} par $\mathcal{B}(U)$, où U désigne un voisinage compact rationnel de b assez petit, nous pouvons supposer que $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}^n$. Cette opération est licite d'après le théorème 1.1.22. Quitte à appliquer la translation par le vecteur $-\boldsymbol{\alpha}$, qui est un automorphisme, nous pouvons supposer que $\boldsymbol{\alpha} = 0$.

Nous allons démontrer le résultat par récurrence sur n . Si $n = 0$, le résultat est tautologique. Supposons que le résultat soit vrai en dimension $n - 1$. Nous devons le démontrer en dimension n . Quitte à remplacer \mathcal{A} par $\mathcal{B}(W)$, où W est un voisinage compact rationnel de b dans $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{n-1, \text{an}}$, nous pouvons supposer que $n = 1$. Par conséquent, nous supprimerons les n en indice dans les notations.

Nous devons distinguer deux cas selon que le nombre réel r est nul ou non. Dans la suite, nous supposons que $r = 0$. L'autre cas se traite de même en remplaçant, dans le raisonnement qui suit, le résultat de la proposition 1.3.4 par celui de la proposition 1.3.8 et le résultat du lemme 1.2.4 par celui du lemme 1.2.5.

Soit V un voisinage compact de b dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ et t un élément de \mathbf{R}_+^* . Posons

$$\overline{D}_V(t) = \{y \in X \mid \pi(y) \in V, |T(y)| \leq t\}.$$

Le morphisme naturel $\mathcal{A}[T] \rightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_V(t))$ se prolonge en un morphisme

$$\mathcal{B}(V) \langle |T| \leq t \rangle \rightarrow \mathcal{B}(\overline{D}_V(t)),$$

car $\|\cdot\|_{\overline{D}_V(t)} \leq \|\cdot\|_{V,t}$. En outre, ce morphisme est injectif, d'après le lemme 1.2.4. En utilisant la proposition 1.3.4, on en déduit qu'il existe un morphisme injectif

$$\varphi : \varinjlim_{V,t} \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,x},$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages compacts du point b de B et t l'ensemble \mathbf{R}_+^* .

Il nous reste à montrer que ce morphisme est surjectif. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$. Par définition du faisceau structural, il existe un voisinage U du point x dans X sur lequel la fonction f s'obtient comme limite uniforme d'une suite de fractions rationnelles $(R_j)_{j \geq 0}$ à coefficients dans \mathcal{A} sans pôles sur U . D'après la proposition 1.3.4, nous pouvons supposer que le voisinage U est de la forme

$$U = \overline{D}_V(t),$$

où V désigne un voisinage compact rationnel du point b dans B et t un élément de \mathbf{R}_+^* . Le morphisme naturel

$$\mathcal{A}[T] \rightarrow \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle$$

est injectif. En utilisant le fait que $\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)) = V$ (cf. théorème 1.1.22) et le lemme 1.2.1, on montre que ce morphisme induit un homéomorphisme

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle) \simeq U.$$

Soit P un élément de $\mathcal{A}[T]$ qui ne s'annule en aucun point de U . D'après [4], corollaire 1.2.4, l'image de P est inversible dans l'anneau $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle$. On en déduit que $\mathcal{K}(U)$ s'injecte dans $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle$.

Soit $u \in]0, t[$. L'anneau $\mathcal{K}(U)$ s'injecte encore dans $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq u \rangle$. L'inégalité sur les normes démontrée dans le lemme 1.2.4 nous montre que la suite $(R_j)_{j \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq u \rangle$. Puisque ce dernier anneau est complet, la suite $(R_j)_{j \geq 0}$ y converge et sa limite est envoyée sur la fonction f par le morphisme φ . \square

1.3.3. Un exemple

Nous consacrons cette partie à un exemple d'anneau local. Nous choisissons comme anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ l'anneau \mathbf{Z} muni de la valeur absolue usuelle. Nous mènerons une étude précise de cet espace au début du prochain chapitre. Sa connaissance est nécessaire pour comprendre l'exemple que nous donnons ici.

Notons $B = \mathcal{M}(\mathbf{Z})$ et a_0 le point de B associé à la valeur absolue triviale. Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons $X = \mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{n,\text{an}}$. Soit x le point 0 de la fibre $\pi^{-1}(a_0)$. Le

théorème 1.3.17 nous permet de décrire explicitement l'anneau local en ce point : le morphisme $\mathcal{A}[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit un isomorphisme

$$\varinjlim_{V,t} \mathcal{B}(V)(|\mathbf{T}| \leq t) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x},$$

où V parcourt l'ensemble des voisinages de a_0 dans B et, quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, t_i parcourt \mathbf{R}_+^* . En utilisant la description des parties compactes de B que nous donnons en 2.1.2.1, nous pouvons rendre l'anneau local plus explicite encore : c'est l'ensemble des séries de la forme

$$f = \sum_{\mathbf{k} \geq 0} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \in \mathbf{Q}[[\mathbf{T}]]$$

vérifiant les conditions suivantes :

i) il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$f \in \mathbf{Z} \left[\frac{1}{N} \right] [[\mathbf{T}]] ;$$

ii) il existe $r_\infty > 0$ tel que

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} |a_{\mathbf{k}}|_\infty r_\infty^{|\mathbf{k}|} = 0 ;$$

iii) pour tout nombre premier p divisant N , il existe $r_p > 0$ tel que

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} |a_{\mathbf{k}}|_p r_p^{|\mathbf{k}|} = 0.$$

L'anneau local \mathcal{O}_{B,a_0} est isomorphe à \mathbf{Q} . Par conséquent, nous pouvons appliquer les théorèmes 1.2.12 et 1.2.17. On en déduit que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local noethérien et régulier de dimension n .

Restreignons-nous, à présent, au cas de la droite affine. Nous supposons donc que $n = 1$. Nous noterons simplement T l'unique variable. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un anneau de valuation discrète d'idéal maximal (T) et de corps résiduel \mathbf{Q} . D'après la proposition 1.3.1, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien. On en déduit que son corps des fractions K est, lui aussi, hensélien. Observons que cette propriété permet de retrouver le théorème d'Eisenstein.

Théorème 1.3.18 (Eisenstein). — *Tout élément de $\mathbf{Q}[[T]]$ entier sur $\mathbf{Q}[T]$ appartient à $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Démonstration. — Soit f un élément de $\mathbf{Q}[[T]]$ entier sur $\mathbf{Q}[T]$. Il est encore entier sur l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Par conséquent, il existe un polynôme $P \in \mathcal{O}_{X,x}[U]$ unitaire qui annule f . Puisque l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}[U]$ l'est également. Il existe donc un entier r , des polynômes P_1, \dots, P_r à coefficients

dans $\mathcal{O}_{X,x}$, irréductibles et unitaires et des entiers n_1, \dots, n_r tels que l'on ait l'égalité

$$P = \prod_{i=1}^r P_i^{n_i} \text{ dans } \mathcal{O}_{X,x}[U].$$

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Puisque le corps K est de caractéristique nulle, le polynôme P_i est séparable. Puisque le corps K est hensélien, d'après [5], proposition 2.4.1⁽¹⁾, la catégorie des extensions séparables finies du corps K est équivalente à celle des extensions séparables finies de son complété \hat{K} . On en déduit que le polynôme P_i est encore irréductible dans $\hat{K}[U]$.

Remarquons, à présent, que le corps \hat{K} n'est autre que le corps des séries de Laurent $\mathbf{Q}((T))$. Par conséquent, l'écriture

$$P = \prod_{i=1}^r P_i^{n_i}$$

est encore la décomposition du polynôme P en produits de facteurs irréductibles et unitaires dans $\mathbf{Q}[[T]][U]$. Par hypothèse, il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $P_i = U - f$. On en déduit que $f \in \mathcal{O}_{X,x}$.

□

Remarque 1.3.19. — Pour ne pas alourdir les notations, nous avons décrit l'anneau local et énoncé le théorème d'Eisenstein en prenant comme anneau de base l'anneau \mathbf{Z} . Les mêmes résultats valent *mutatis mutandis* pour tout anneau d'entiers de corps de nombres.

⁽¹⁾V. Berkovich énonce, en fait, cette proposition pour des corps supposés « quasi-complets ». La définition 2.3.1 nous montre que cette notion coïncide avec celle de corps hensélien.

CHAPITRE 2

ESPACE ANALYTIQUE SUR UN ANNEAU D'ENTRIERS DE CORPS DE NOMBRES

Ce chapitre est consacré à l'étude des espaces analytiques lorsque la base est le spectre analytique d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Nous fixons, dès à présent, un corps de nombres K et considérons l'anneau de ses entiers A . Dans ce cadre, nous allons pouvoir préciser et généraliser les résultats obtenus dans le chapitre précédent.

Dans la première partie, nous nous intéressons à l'espace de base $\mathcal{M}(A)$. Nous commençons par le décrire ensemblistement et poursuivons en établissant ses propriétés topologiques. Pour finir, nous décrivons les sections du faisceau structural au-dessus des ouverts de $\mathcal{M}(A)$ et en déduisons notamment l'expression des anneaux locaux.

La seconde partie est consacrée à l'étude de l'espace affine analytique au-dessus de $\mathcal{M}(A)$. Nous parvenons à décrire et étudier les anneaux locaux en de nombreux points, au nombre desquels les points rigides des fibres. Les résultats que nous obtenons ne sont cependant pas complets : certains problèmes ont, jusqu'ici, résisté à nos tentatives et requièrent vraisemblablement une approche nouvelle.

Cependant, dans le cadre de la droite affine, qui fait l'objet de notre troisième partie, nous parvenons à mener l'étude à son terme et démontrons les résultats attendus : connexité par arcs locale, ouverture du morphisme de projection sur la base, principe du prolongement analytique, etc. Nous établissons également certaines propriétés des anneaux locaux, comme la noethérianité et la régularité, et finissons en démontrant la cohérence du faisceau structural.

2.1. Spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres

Dans cette partie, nous allons étudier le spectre de l'anneau d'entiers de corps de nombres A . Pour ce faire, nous devons le munir d'une norme qui en fasse un anneau de Banach. Plusieurs choix d'offrent à nous : norme triviale, restriction de la valeur absolue complexe, etc. Nous choisirons la norme $\|\cdot\|$ définie de la façon suivante :

$$\forall f \in A, \|f\| = \max_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbf{C}} (|\sigma(f)|_{\infty}),$$

où le maximum est pris sur l'ensemble des plongements σ du corps K dans \mathbf{C} . Par exemple, lorsque $K = \mathbf{Q}$, cette norme est simplement la valeur absolue usuelle $|\cdot|_{\infty}$. Notre choix est guidé par le fait que cette norme est plus grande que toutes les semi-normes multiplicatives que l'on peut définir sur l'anneau A . Le spectre $\mathcal{M}(A, \|\cdot\|)$ contiendra donc tous les points possibles.

Remarquons que l'anneau A muni de la norme $\|\cdot\|$ est bien un anneau de Banach. En effet, quel que soit $f \in A \setminus \{0\}$, nous avons $\|f\| \geq 1$. Cette inégalité découle simplement de la formule du produit. Par conséquent, la topologie induite sur A par la norme $\|\cdot\|$ est discrète.

Dans la suite de ce texte, nous supposons toujours que l'anneau A est muni de la norme $\|\cdot\|$. Nous écrirons donc $\mathcal{M}(A)$, sans plus de précisions.

2.1.1. Description ensembliste

Le théorème d'Ostrowski nous permet de décrire explicitement toutes les semi-normes multiplicatives sur A , autrement dit l'ensemble $\mathcal{M}(A)$.

Nous avons, tout d'abord, la valeur absolue triviale

$$|\cdot|_0 : \begin{array}{ccc} K & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } f = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

Nous noterons a_0 le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Le corps résiduel en ce point est

$$(\mathcal{H}(a_0), |\cdot|) = (K, |\cdot|_0).$$

Soit p un nombre premier. Nous noterons v_p la valuation p -adique sur \mathbf{Q} normalisée par la condition $v_p(p) = 1$ et $|\cdot|_p$ la valeur absolue p -adique définie

par

$$|\cdot|_p : \begin{array}{ccc} \mathbf{Q} & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \mapsto & p^{-v_p(f)} \end{array} .$$

Soit \mathfrak{m} un idéal maximal de A . L'anneau local $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau de valuation discrète. Notons p l'idéal premier de \mathbf{Z} tel que $\mathfrak{m} \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}$. Nous noterons $v_{\mathfrak{m}}$ l'unique valuation \mathfrak{m} -adique sur K qui prolonge v_p et $|\cdot|_{\mathfrak{m}}$ l'unique valeur absolue sur K qui prolonge la valeur absolue $|\cdot|_p$ sur \mathbf{Q} . Nous noterons $a_{\mathfrak{m}}$ le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant à $|\cdot|_{\mathfrak{m}}$.

Nous noterons $k_{\mathfrak{m}} = A/\mathfrak{m}$ le corps résiduel de $A_{\mathfrak{m}}$. Choisissons également une uniformisante $\pi_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$. Nous noterons $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ le complété de $A_{\mathfrak{m}}$ pour la topologie \mathfrak{m} -adique et $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$ son corps des fractions.

À chaque nombre réel strictement positif ε , on associe alors la valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}$ sur K . Nous noterons $a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}$ le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Le corps résiduel en ce point est

$$(\mathcal{H}(a_{\mathfrak{m}}^{\varepsilon}), |\cdot|) = (\hat{K}_{\mathfrak{m}}, |\cdot|_{\mathfrak{m}, \varepsilon}).$$

Lorsque nous faisons tendre ε vers 0 dans la formule précédente, nous retrouvons la valeur absolue triviale. Nous noterons donc

$$a_{\mathfrak{m}}^0 = a_0.$$

Lorsque nous faisons tendre ε vers $+\infty$, nous obtenons la semi-norme multiplicative induite par la valeur absolue triviale sur le corps fini $k_{\mathfrak{m}}$:

$$|\cdot|_{\mathfrak{m}, +\infty} : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } f \in \mathfrak{m} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} .$$

Nous noterons $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$, ou encore $a_{\mathfrak{m}}^{+\infty}$, le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Le corps résiduel en ce point est

$$(\mathcal{H}(\tilde{a}_{\mathfrak{m}}), |\cdot|) = (k_{\mathfrak{m}}, |\cdot|_0).$$

Soit σ un plongement du corps K dans \mathbf{C} . Nous poserons $\hat{K}_{\sigma} = \mathbf{R}$ si le plongement est réel, c'est-à-dire si son image est contenue dans \mathbf{R} , et $\hat{K}_{\sigma} = \mathbf{C}$ dans les autres cas. Nous noterons $|\cdot|_{\sigma}$ la valeur absolue sur K définie par

$$|\cdot|_{\sigma} : \begin{array}{ccc} K & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ f & \mapsto & |\sigma(f)|_{\infty} \end{array} ,$$

où $|\cdot|_{\infty}$ désigne la valeur absolue usuelle sur \mathbf{C} . Nous noterons a_{σ} le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Remarquons que deux plongements complexes conjugués définissent la même valeur absolue et donc le même point de $\mathcal{M}(A)$.

À chaque nombre réel $\varepsilon \in [0, 1]$, on associe la valeur absolue $|\cdot|_\sigma^\varepsilon$ sur K . Nous noterons a_σ^ε le point de $\mathcal{M}(A)$ correspondant. Le corps résiduel en ce point est

$$(\mathcal{H}(a_\sigma^\varepsilon), |\cdot|) = (\hat{K}_\sigma, |\cdot|_{\sigma, \varepsilon}).$$

Remarque 2.1.1. — Pour $\varepsilon > 1$, l'application $|\cdot|_\sigma^\varepsilon$ ne définit plus une norme, car elle ne satisfait plus l'inégalité triangulaire.

Comme précédemment, lorsque nous faisons tendre ε vers 0, nous retrouvons la valeur absolue triviale. Nous noterons donc

$$a_\sigma^0 = a_0.$$

Théorème 2.1.2 (Ostrowski). — *L'ensemble $\mathcal{M}(A)$ est constitué exactement des points décrits précédemment.*

Adoptons quelques notations supplémentaires. Nous noterons $\Sigma_f = \text{Max}(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A et Σ_∞ l'ensemble des plongements de K dans \mathbf{C} , à conjugaison près. Désignons par $r_1 \in \mathbf{N}$ le nombre de plongements réels de K et par $2r_2 \in \mathbf{N}$ son nombre de plongements complexes non réels. Nous avons alors

$$\sharp(\Sigma_\infty) = r_1 + r_2.$$

Rappelons que l'on a toujours $r_1 + 2r_2 = [K : \mathbf{Q}]$.

Pour finir, nous notons $\Sigma = \Sigma_f \cup \Sigma_\infty$ et posons

$$l(\sigma) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \sigma \in \Sigma_f ; \\ 1 & \text{si } \sigma \in \Sigma_\infty. \end{cases}$$

La description explicite des points nous permet de décrire, de façon tout aussi explicite, la topologie de l'espace $\mathcal{M}(A)$.

Lemme 2.1.3. — *Soit $\sigma \in \Sigma$. L'application*

$$a_\sigma : \begin{array}{ccc} [0, l(\sigma)] & \rightarrow & \mathcal{M}(A) \\ \varepsilon & \mapsto & a_\sigma^\varepsilon \end{array}$$

induit un homéomorphisme sur son image.

Démonstration. — Par définition de la topologie de $\mathcal{M}(A)$, pour montrer que l'application a_σ est continue, il suffit de montrer que, quel que soit $f \in A$, l'application composée

$$\begin{array}{ccccc} [0, l(\sigma)] & \rightarrow & \mathcal{M}(A) & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ \varepsilon & \mapsto & a_\sigma^\varepsilon & \mapsto & |f(a_\sigma^\varepsilon)| = |f|_\sigma^\varepsilon \end{array}$$

est continue. Ce résultat est immédiat. Puisque l'espace $[0, l(\sigma)]$ est compact et que l'espace $\mathcal{M}(A)$ est séparé, l'application a_σ induit un homéomorphisme sur son image. \square

Soit $\sigma \in \Sigma$. Nous appellerons **branche σ -adique** l'image de l'application précédente et la noterons $\mathcal{M}(A)_\sigma$. Nous appellerons **branche σ -adique ouverte**, et noterons $\mathcal{M}(A)'_\sigma$, la branche σ -adique privée des points associés à une valeur absolue triviale. Nous ôterons donc deux points si $\sigma \in \Sigma_f$, mais un seul point si $\sigma \in \Sigma_\infty$. Signalons que ces branches ouvertes sont les trajectoires du flot, au sens de la partie 1.1.5. Précisément, quel que soit $\varepsilon \in]0, l(\sigma)]$ tel que $a_\sigma^\varepsilon \in \mathcal{M}(A)'_\sigma$, nous avons

$$T_{\mathcal{M}(A)}(a_\sigma^\varepsilon) \simeq \mathcal{M}(A)'_\sigma.$$

Nous appellerons **point central** de $\mathcal{M}(A)$ le point a_0 . Nous appellerons **point extrême** de $\mathcal{M}(A)$ un point de la forme \tilde{a}_σ , avec $\sigma \in \Sigma_f$. Enfin, nous appellerons **point interne** de $\mathcal{M}(A)$ tout autre point. En particulier, quel que soit $\sigma \in \Sigma_\infty$, le point $a_\sigma = a_{\sigma,1}$ est un point interne.

Il nous reste à décrire les voisinages du point central a_0 : ce sont les parties de $\mathcal{M}(A)$ qui contiennent entièrement toutes les branches, à l'exception d'un nombre fini, et qui contiennent un voisinage de a_0 dans chacune des branches restantes (*cf.* fig. 1).

Remarquons qu'à partir de la description de la topologie que nous venons de donner, on redémontre facilement la compacité de l'espace $\mathcal{M}(A)$. D'autres propriétés sont vérifiées. Nous les résumons dans le théorème suivant.

Théorème 2.1.4. — *L'espace $\mathcal{M}(A)$ est compact, connexe par arcs et localement connexe par arcs.*

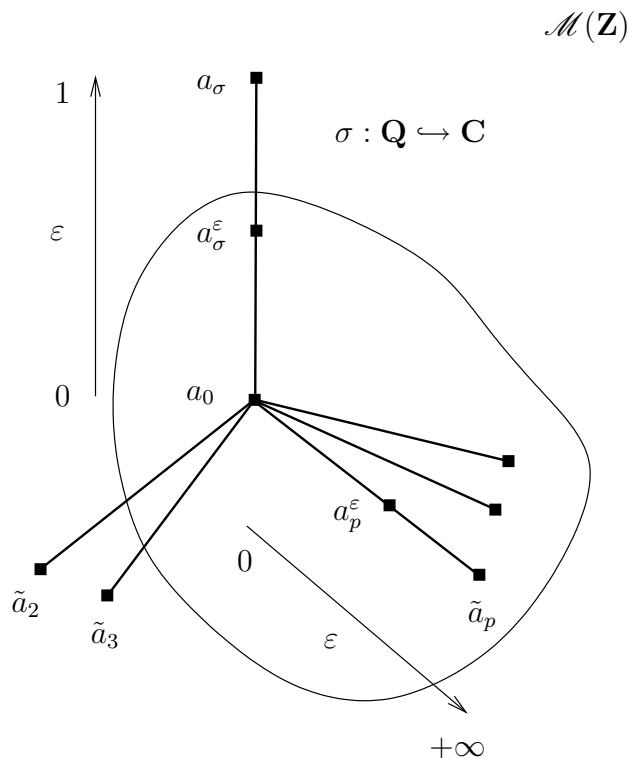
La description explicite que nous avons obtenue permet également d'étudier les morphismes de changement de base.

Théorème 2.1.5. — *Soit K' une extension finie de K . Notons A' l'anneau des entiers de K' . Alors le morphisme*

$$\mathcal{M}(A') \rightarrow \mathcal{M}(A)$$

induit par l'injection $A \rightarrow A'$ est continu, ouvert, propre, surjectif et à fibres finies.

Pour finir, remarquons que nous pouvons décrire facilement les parties connexes de l'espace $\mathcal{M}(A)$. Il suffit pour cela d'utiliser le fait que ses branches sont homéomorphes à des segments non triviaux et que l'espace $\mathcal{M}(A) \setminus \{a_0\}$ est homéomorphe à une réunion disjointes d'intervalles semi-ouverts (les branches privées du point central). Précisons le résultat. Soit P une partie connexe de $\mathcal{M}(A)$. Deux cas se présentent. Si P ne contient pas le point central a_0 , alors la partie P est contenue dans l'une des branches et est donc homéomorphe

FIG. 1. Un voisinage du point central a_0 .

à un intervalle. Si P contient le point central a_0 , alors sa trace sur toute branche est une partie connexe (et donc homéomorphe à un intervalle) contenant le point a_0 . On en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.1.6. — *Une intersection de parties connexes de $\mathcal{M}(A)$ est connexe.*

2.1.2. Faisceau structural

Nous allons décrire les sections du faisceau structural sur plusieurs types d'ouverts connexes de $\mathcal{M}(A)$. Auparavant, il est utile de calculer explicitement la norme uniforme sur certains compacts et le complété pour cette norme de l'anneau des fractions rationnelles sans pôles au voisinage du compact.

2.1.2.1. Parties compactes

Nous allons décrire ici toutes les parties compactes, connexes et non vides de $\mathcal{M}(A)$. Soit L une telle partie. Nous allons distinguer plusieurs cas.

1. Il existe $\sigma \in \Sigma_\infty$ tel que L soit contenue dans la branche σ -adique de $\mathcal{M}(A)$.

- (a) La partie L évite le point central a_0 .

Dans ce cas, il existe $u, v \in]0, 1]$, avec $u \leq v$, tels que

$$L = [a_\sigma^u, a_\sigma^v] = \{a_\sigma^\varepsilon, u \leq \varepsilon \leq v\}.$$

Les fonctions rationnelles définies au voisinage de ce compact sont $\mathcal{K}(L) = K$ et la norme uniforme est $\|\cdot\|_L = \max(|\cdot|_\sigma^u, |\cdot|_\sigma^v)$. On en déduit que $\mathcal{B}(L) \simeq \hat{K}_\sigma$. Attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'isomorphisme précédent est un isomorphisme de corps topologiques mais pas de corps normés (sauf dans le cas où $u = v$) !

- (b) La partie L contient le point central a_0 .

Il existe alors $v \in [0, 1]$ tel que

$$L = [a_0, a_\sigma^v].$$

Les fonctions rationnelles définies au voisinage de ce compact sont $\mathcal{K}(L) = K$ et la norme uniforme est $\|\cdot\|_L = \max(|\cdot|_0, |\cdot|_\sigma^v)$. On en déduit que $\mathcal{B}(L) \simeq K$.

2. Il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que L soit contenue dans la branche \mathfrak{m} -adique de $\mathcal{M}(A)$.

- (a) La partie L évite le point central a_0 et le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.

Il existe alors $u, v \in]0, +\infty[$, avec $u \leq v$, tels que

$$L = [a_\mathfrak{m}^u, a_\mathfrak{m}^v].$$

Nous avons $\mathcal{K}(L) = K$, $\|\cdot\|_L = \max(|\cdot|_\mathfrak{m}^u, |\cdot|_\mathfrak{m}^v)$ et $\mathcal{B}(L) \simeq \hat{K}_\mathfrak{m}$.

- (b) La partie L évite le point central a_0 et contient le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.

Il existe alors $u \in]0, +\infty]$ tel que

$$L = [a_\mathfrak{m}^u, \tilde{a}_\mathfrak{m}].$$

Dans ce cas, les éléments de K peuvent avoir un pôle au point $\tilde{a}_\mathfrak{m}$ et nous avons donc $\mathcal{K}(L) = A_\mathfrak{m}$, $\|\cdot\|_L = |\cdot|_\mathfrak{m}^u$ et $\mathcal{B}(L) \simeq \hat{A}_\mathfrak{m}$.

- (c) La partie L contient le point central a_0 et évite le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.

Il existe alors $v \in [0, +\infty[$ tel que

$$L = [a_0, a_\mathfrak{m}^v].$$

Nous avons $\mathcal{K}(L) = K$, $\|\cdot\|_L = \max(|\cdot|_0, |\cdot|_\mathfrak{m}^v)$ et $\mathcal{B}(L) \simeq K$.

- (d) La partie L contient le point central a_0 et le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.

Dans ce cas, la partie L est la branche \mathfrak{m} -adique tout entière :

$$L = \mathcal{M}(A)_\mathfrak{m}.$$

Nous avons $\mathcal{K}(L) = A_\mathfrak{m}$, $\|\cdot\|_L = |\cdot|_0$ et $\mathcal{B}(L) \simeq A_\mathfrak{m}$.

3. La partie L n'est contenue dans aucune branche de $\mathcal{M}(A)$.

D'après le raisonnement précédant la proposition 2.1.6, quel que soit $\sigma \in \Sigma$, il existe $v_\sigma \in [0, l(\sigma)]$ tel que

$$L = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} [a_0, a_\sigma^{v_\sigma}].$$

Notons $\Sigma' = \{\mathfrak{m} \in \Sigma_f \mid v_\sigma = l(\sigma)\}$. Nous avons alors

$$\mathcal{K}(L) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{K}(L_\sigma) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Sigma'} A_{\mathfrak{m}}.$$

La norme uniforme sur cet anneau est

$$\|\cdot\|_L = \max_{\sigma \in \Sigma} (\|\cdot\|_{L_\sigma}) = \max \left(\max_{\sigma \in \Sigma} (|\cdot|_\sigma^{v_\sigma}), |\cdot|_0 \right)$$

et nous avons donc

$$\mathcal{B}(L) = \mathcal{K}(L) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Sigma'} A_{\mathfrak{m}}.$$

Nous venons de décrire toutes les parties compactes et connexes de l'espace $\mathcal{M}(A)$. Nous allons montrer qu'elles sont pro-rationnelles, au sens de la définition 1.1.19. À cet effet, nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.1.7. — *Supposons que le corps K ne soit ni \mathbf{Q} , ni un corps quadratique imaginaire. Alors, quel que soit $\sigma \in \Sigma$, il existe un élément f de A qui vérifie les conditions suivantes :*

- i) $|f|_\sigma < 1$;
- ii) $\forall \sigma' \neq \sigma, |f|_{\sigma'} \geq 1$.

Démonstration. — Notons $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$, avec $r_1 \in \mathbf{N}$, les plongements réels du corps K et $\sigma_{r_1+1}, \dots, \sigma_{r_1+r_2}$, avec $r_2 \in \mathbf{N}$, ses plongements complexes non réels à conjugaison près. Par hypothèse, nous avons $r_1 + r_2 \geq 2$. Rappelons que, d'après le théorème des unités de Dirichlet, le morphisme de groupes L qui à toute unité $f \in A^\times$ associe l'élément

$$(\log(|\sigma_1(g)|), \dots, \log(|\sigma_{r_1}(g)|), 2\log(|\sigma_{r_1+1}(g)|), \dots, 2\log(|\sigma_{r_1+r_2}(g)|))$$

de $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ a pour image un réseau de l'hyperplan H de $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ défini par l'équation

$$H : x_1 + \dots + x_{r_1+r_2} = 0.$$

Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_\infty$. Il existe alors $i \in \llbracket 1, r_1 + r_2 \rrbracket$ tel que $\sigma = \sigma_i$. Considérons le quadrant de $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ défini par

$$Q = \{(x_1, \dots, x_{r_1+r_2}) \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \mid x_i < 0, \forall j \neq i, x_j > 0\}.$$

Le résultat rappelé ci-dessus nous assure qu'il existe une unité $f \in A^\times$ telle que

$$L(f) \in Q.$$

Nous avons alors $|f|_{\sigma_i} < 1$, quel que soit $j \neq i$, $|f|_{\sigma_j} > 1$ et, quel que soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$, $|f|_{\mathfrak{m}} = 1$.

Supposons, à présent, que σ soit un idéal maximal \mathfrak{m} de A . Puisque le groupe des classes d'idéaux de K est fini, il existe un entier $n \in \mathbf{N}^*$ tel que l'idéal \mathfrak{m}^n soit principal, engendré par un élément f de A . Nous avons alors $|f|_{\mathfrak{m}} < 1$ et, quel que soit $\mathfrak{m}' \in \Sigma_f \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $|f|_{\mathfrak{m}'} = 1$. La formule du produit nous assure alors que

$$\prod_{i=1}^{r_1} |f|_{\sigma_i} \prod_{i=r_1+1}^{r_1+r_2} |f|_{\sigma_i}^2 > 1.$$

Notons $L(f) = (y_1, \dots, y_{r_1+r_2}) \in R^{r_1+r_2}$. Nous avons alors

$$S = \sum_{i=1}^{r_1+r_2} y_i > 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $S > (r_1 + r_2 - 1)\varepsilon$. Posons

$$z_0 = (-y_1 + \varepsilon, \dots, -y_{r_1+r_2-1} + \varepsilon, -y_{r_1+r_2} + S - (r_1 + r_2 - 1)\varepsilon) \in H.$$

Nous avons $L(f) + z_0 \in (\mathbf{R}_+^*)^{r_1+r_2}$. Par conséquent, il existe un voisinage ouvert U de z_0 dans H de volume v strictement positif tel que

$$L(f) + U \subset (\mathbf{R}_+^*)^{r_1+r_2}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel nv soit strictement plus grand que le volume d'une maille du réseau $L(A^\times)$. La partie

$$nL(f) + nU \subset (\mathbf{R}_+^*)^{r_1+r_2}$$

contient alors un élément z du réseau $L(A^\times)$. Il existe $g \in A^\times$ tel que $L(g) = z$. Posons $h = f^n g$. Nous avons toujours $|h|_{\mathfrak{m}} < 1$ et, quel que soit $\mathfrak{m}' \in \Sigma_f \setminus \{\mathfrak{m}\}$, $|h|_{\mathfrak{m}'} = 1$. En outre, nous avons

$$L(h) \in (\mathbf{R}_+^*)^{r_1+r_2},$$

autrement dit, quel que soit $i \in \llbracket 1, r_1 + r_2 \rrbracket$, $|h|_{\sigma_i} > 1$. □

Lemme 2.1.8. — *Supposons que le corps K soit \mathbf{Q} ou un corps quadratique imaginaire. Dans ce cas, Σ_∞ est réduit à un élément que nous noterons σ_∞ . Alors, quel que soit $\sigma \in \Sigma_f$, il existe un élément f de A qui vérifie les conditions suivantes :*

- i) $|f|_\sigma < 1$;*

- ii) $|f|_{\sigma_\infty} > 1$;
- iii) $\forall \sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}, |f|_{\sigma'} = 1$.

Démonstration. — Comme précédemment, le fait que l'élément σ soit de torsion dans le groupe des classes nous assure qu'il existe un élément f de A vérifiant $|f|_\sigma < 1$ et, quel que soit $\sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}, |f|_{\sigma'} = 1$. La formule du produit nous montre alors que $|f|_{\sigma_\infty} > 1$. \square

Proposition 2.1.9. — *Toute partie compacte et connexe L de l'espace $\mathcal{M}(A)$ est pro-rationnelle. En particulier, nous avons*

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}(L)) \xrightarrow{\sim} L.$$

Démonstration. — Commençons par démontrer le résultat pour certaines parties compactes simples. Soient $\sigma \in \Sigma$ et $\varepsilon \in]0, l(\sigma)[$. Considérons le compact

$$L = \mathcal{M}(A) \setminus]a_\sigma^\varepsilon, a_\sigma^{l(\sigma)}].$$

Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_f$ ou que $\sigma \in \Sigma_\infty$ et que le corps K n'est ni \mathbf{Q} , ni un corps quadratique imaginaire. D'après les lemmes précédents, il existe alors un élément f de A qui vérifie les conditions suivantes :

- i) $|f|_\sigma < 1$;
- ii) $\forall \sigma' \neq \sigma, |f|_{\sigma'} \geq 1$.

Nous avons alors

$$\{b \in \mathcal{M}(A) \mid |f(b)| \geq |f|_\sigma^\varepsilon\} = L.$$

Le compact L est donc rationnel.

Supposons, à présent, que le corps K est soit \mathbf{Q} , soit un corps quadratique imaginaire et que $\sigma = \sigma_\infty$. D'après le lemme 2.1.8, il existe alors un élément f de A qui vérifie les conditions suivantes :

- i) $|f|_{\sigma_\infty} > 1$;
- ii) $\forall \sigma' \neq \sigma, |f|_{\sigma'} \leq 1$.

Nous avons alors

$$\{b \in \mathcal{M}(A) \mid |f(b)| \leq |f|_{\sigma_\infty}^\varepsilon\} = L.$$

De nouveau, le compact L est donc rationnel.

Considérons, à présent, le compact

$$M = [a_\sigma^\varepsilon, a_\sigma^{l(\sigma)}].$$

En utilisant la même fonction f que précédemment, nous pouvons écrire, dans le premier cas,

$$\{b \in \mathcal{M}(A) \mid |f(b)| \leq |f|_\sigma^\varepsilon\} = M,$$

et, dans le second,

$$\{b \in \mathcal{M}(A) \mid |f(b)| \geq |f|_{\sigma_\infty}^\varepsilon\} = M.$$

Le compact M est donc rationnel.

Puisque toutes les parties compactes et connexes de $\mathcal{M}(A)$ s'obtiennent comme intersection de compacts de l'un des deux types précédents, la première partie du résultat est démontrée. Nous déduisons la seconde partie du théorème 1.1.22. \square

2.1.2.2. Parties ouvertes

Pour déterminer les sections globales sur les ouverts de la base, il nous suffit à présent de recoller les complétés précédents. Soit U un ouvert connexe et non vide de $\mathcal{M}(A)$. Comme précédemment, nous allons distinguer plusieurs cas.

1. Il existe $\sigma \in \Sigma_\infty$ tel que U soit contenu dans la branche σ -adique de $\mathcal{M}(A)$.

Alors, il existe $u, v \in [0, 1]$, avec $u < v$, tels que

$$U =]a_\sigma^u, a_\sigma^v[\text{ ou }]a_\sigma^u, a_\sigma].$$

Dans les deux cas, nous avons $\mathcal{O}(U) = \hat{K}_\sigma$.

2. Il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que U soit contenu dans la branche \mathfrak{m} -adique de $\mathcal{M}(A)$.

- (a) L'ouvert U évite le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.

Alors, il existe $u, v \in [0, +\infty]$, avec $u < v$, tels que

$$U =]a_\mathfrak{m}^u, a_\mathfrak{m}^v[.$$

Comme précédemment, nous avons $\mathcal{O}(U) = \hat{K}_\mathfrak{m}$.

- (b) L'ouvert U contient le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.

Alors, il existe $u \in [0, +\infty[$ tel que

$$U =]a_\mathfrak{m}^u, \tilde{a}_\mathfrak{m}].$$

Dans ce cas, nous avons $\mathcal{O}(U) = \hat{A}_\mathfrak{m}$.

3. L'ouvert U n'est contenu dans aucune branche de $\mathcal{M}(A)$.

Dans ce cas, c'est un voisinage du point central a_0 et il possède une écriture de la forme

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{M}(A) \setminus \left(\bigcup_{1 \leq i \leq p+q} [a_{\sigma_i}^{u_i}, a_{\sigma_i}^{l(\sigma_i)}] \right) \\ &= \left(\bigcup_{1 \leq i \leq p+q} [a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}[\right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \neq \sigma_1, \dots, \sigma_{p+q}} \mathcal{M}(A)_\sigma \right), \end{aligned}$$

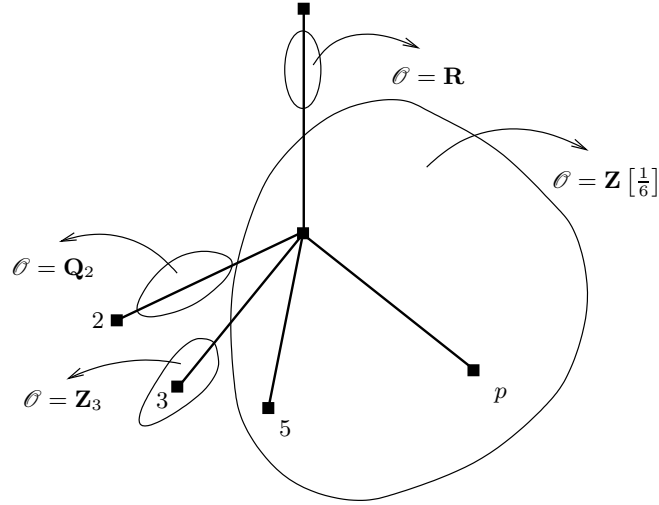


FIG. 2. Anneaux de sections globales.

avec $p, q \in \mathbf{N}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \Sigma_f$, $\sigma_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q} \in \Sigma_\infty$, $u_1, \dots, u_p \in]0, +\infty]$ et $u_{p+1}, \dots, u_{p+q} \in]0, 1]$. Considérons le diviseur $\sum_{i=1}^p (\sigma_i)$ sur $\text{Spec}(A)$. Puisque le groupe de Picard de $\text{Spec}(A)$ est fini, ce diviseur est de torsion. Il existe donc $n \in \mathbf{N}^*$ et $f \in A$ tels que

$$\sum_{i=1}^p n \cdot (\sigma_i) = (f).$$

Nous avons alors

$$\mathcal{O}(U) = \bigcap_{1 \leq i \leq p} A_{\sigma_i} = A \left[\frac{1}{f} \right].$$

Une fois terminée cette description des ouverts, nous pouvons décrire les anneaux locaux en les points de la base. Soit b un point de $\mathcal{M}(A)$. Nous allons, de nouveau, distinguer plusieurs cas.

1. Il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que le point b est un point interne de la branche σ -adique.

Dans ce cas, nous avons

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}(A), b} \simeq \hat{K}_\sigma.$$

2. Il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que le point b est le point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$.

Dans ce cas, nous avons

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}(A), \tilde{a}_\mathfrak{m}} \simeq \hat{A}_\mathfrak{m}.$$

3. Le point b est le point central a_0 de $\mathcal{M}(A)$.

Nous avons alors

$$\mathcal{O}_{\mathcal{M}(A), a_0} \simeq K.$$

2.2. Espace affine

Dans cette partie, nous allons démontrer quelques propriétés générales de l'espace affine analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres. Soit $n \in \mathbf{N}$. Nous noterons $B = \mathcal{M}(A)$, $X = \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ et $\pi : X \rightarrow B$ le morphisme de projection.

Pour $\sigma \in \Sigma$, nous appellerons **partie σ -adique** de X (respectivement **partie σ -adique ouverte** de X), et noterons X_σ (respectivement X'_σ), l'image réciproque par la projection π de la branche σ -adique (respectivement branche σ -adique ouverte) de $\mathcal{M}(A)$.

Nous appellerons **fibre centrale** de X , et noterons X_0 , la fibre de π au-dessus du point central de B . Nous appellerons **fibre extrême** de X une fibre de π au-dessus d'un point extrême de B . Pour $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$, nous noterons $\tilde{X}_\mathfrak{m} = \pi^{-1}(\tilde{a}_\mathfrak{m})$. Finalement, nous appellerons **fibre interne** de X une fibre de π au-dessus d'un point interne de B .

2.2.1. Fibres internes

Nous reprenons, ici, les notations du paragraphe 1.1.5, consacré au flot. Soient $\sigma \in \Sigma_f$ et $x \in \pi^{-1}(a_\sigma)$. L'intervalle de définition de la trajectoire du point x est alors $I_x =]0, +\infty[$. Rappelons que la fibre $\pi^{-1}(a_\sigma)$ est l'espace affine de dimension n au-dessus du corps \hat{K}_σ , au sens de V. Berkovich.

Proposition 2.2.1. — *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(a_\sigma) \times]0, +\infty[& \rightarrow & X'_\sigma \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & x^\varepsilon \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. — Notons φ cette application. Pour $x \in X'_\sigma$, notons

$$\lambda(x) = \log_{|\pi_\sigma|_\sigma}(|\pi(x)|).$$

L'application λ est continue et, quel que soit $x \in X'_\sigma$, nous avons

$$\pi(x) = a_\sigma^{\lambda(x)}.$$

Il est clair que l'application φ est bijective d'inverse

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} X'_\sigma & \rightarrow & \pi^{-1}(a_\sigma) \times]0, +\infty[\\ x & \mapsto & (x^{1/\lambda(x)}, \pi(x)) \end{array} .$$

Montrons que l'application φ est un homéomorphisme. Rappelons que la topologie de X'_σ est, par définition, la topologie la plus grossière qui rend continues les applications de la forme

$$|P| : \begin{array}{ccc} X'_\sigma & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & |P(x)| \end{array} ,$$

avec $P \in A[\mathbf{T}]$. Pour montrer que l'application φ est continue, il suffit donc de montrer que, quel que soit $P \in A[\mathbf{T}]$, l'application

$$|P| \circ \varphi : \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(a_\sigma) \times]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & |P(x^\varepsilon)| = |P(x)|^\varepsilon \end{array}$$

est continue. Cette propriété est bien vérifiée.

De même, la topologie sur $\pi^{-1}(a_\sigma) \times]0, +\infty[$ est, par définition, la topologie la plus grossière qui rend continues la projection p_1 vers $\pi^{-1}(a_\sigma)$ et la projection p_2 vers $]0, +\infty[$. Il nous suffit donc de montrer la composée de φ^{-1} avec chacune de ces deux applications est continue. L'application

$$p_2 \circ \varphi^{-1} : X'_\sigma \rightarrow]0, +\infty[$$

est simplement la projection sur la base. Elle donc continue.

Nous avons

$$p_1 \circ \varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} X'_\sigma & \rightarrow & \pi^{-1}(a_\sigma) \\ x & \mapsto & x^{1/\lambda(x)} \end{array} .$$

Pour montrer que cette application est continue, il suffit de montrer que, quel que soit $P \in \hat{K}_\sigma[\mathbf{T}]$, l'application

$$|P| \circ p_1 \circ \varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} X'_\sigma & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & |P(x^{1/\lambda(x)})| = |P(x)|^{1/\lambda(x)} \end{array}$$

est continue. Puisqu'une fonction qui est limite uniforme, sur tout compact, d'applications continues est encore continue, il suffit de montrer que les applications de la forme $|P| \circ p_1 \circ \varphi^{-1}$, avec $P \in A[\mathbf{T}]$ sont continues. Cela découle alors directement de la définition de la topologie de X'_σ et de la continuité de la projection. \square

Un résultat similaire est valable pour la partie archimédienne de l'espace X . La preuve en est complètement analogue et nous ne la détaillerons pas. Soient $\sigma \in \Sigma_\infty$ et $x \in \pi^{-1}(a_\sigma)$. L'intervalle de définition de la trajectoire du point x est alors $I_x =]0, 1]$. Rappelons que la fibre $\pi^{-1}(a_\sigma)$ est isomorphe à l'espace \mathbf{C}^n si $\hat{K}_\sigma = \mathbf{C}$ et à son quotient par la conjugaison complexe si $\hat{K}_\sigma = \mathbf{R}$.

Proposition 2.2.2. — *L'application*

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(a_\sigma) \times]0, 1] &\rightarrow X'_\sigma \\ (x, \varepsilon) &\mapsto x^\varepsilon \end{aligned}$$

est un homéomorphisme.

Nous déduisons de ces résultats deux corollaires topologiques.

Corollaire 2.2.3. — *Le morphisme π est ouvert en tout point d'une fibre interne de X .*

Corollaire 2.2.4. — *Tout point d'une fibre interne de l'espace X possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Corollaire 2.2.5. — *Tout point interne de X possède des voisinages flottants, au sens de la définition 1.1.27.*

Démonstration. — Soient $\sigma \in \Sigma$ et x un point de X'_σ . Reprenons les notations du paragraphe 1.1.5. Nous avons $D = X'_\sigma$ et la structure de produit dont les propositions précédentes démontrent l'existence assurent que le flot est une application ouverte. \square

Proposition 2.2.6. — *Soit b un point interne de B . Alors l'inclusion*

$$j_b : \pi^{-1}(b) \hookrightarrow X$$

de la fibre dans l'espace total induit un isomorphisme entre les espaces annelés

$$(\pi^{-1}(b), j_b^{-1} \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (\pi^{-1}(b), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(b)}).$$

Démonstration. — Signalons tout d'abord qu'en dépit de ce que les notations utilisées peuvent laisser penser les espaces topologiques sous-jacents sont, *a priori*, différents. En effet, sur l'un ce sont les valeurs absolues de polynômes à coefficients dans A qui doivent être continues, et, sur l'autre, ce sont celles des polynômes à coefficients dans \hat{K}_σ . Cependant, la continuité étant une propriété stable par limite uniforme sur tout compact, les topologies sont bien identiques. L'application identité définit donc bien un homéomorphisme.

Intéressons-nous, à présent, aux faisceaux structuraux. Soit $x \in \pi^{-1}(b)$. Il nous suffit de montrer que le morphisme naturel

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\pi^{-1}(b),x}$$

est un isomorphisme. Commençons par montrer qu'il est injectif. Soit f un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ nul dans $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(b),x}$. Il existe un voisinage V de x dans $\pi^{-1}(b)$

sur lequel la fonction f est nulle. D'après les propositions 2.2.1 et 2.2.2, la fonction f est définie sur un voisinage U de x dans X de la forme

$$U = \{y^\varepsilon, y \in W, \alpha < \varepsilon < \beta\},$$

où W est un voisinage de x dans V , α un élément de $]0, 1[$ et β un élément de $]1, +\infty[$. Soit $z \in U$. Il existe un élément y de W et un nombre réel $\varepsilon \in]\alpha, \beta[$ tels que $z = y^\varepsilon$. D'après le corollaire 2.2.5, le point y possède des voisinages flottants. D'après la proposition 1.1.31, nous avons donc

$$|f(z)| = |f(y)|^\varepsilon = 0.$$

On en déduit que la fonction f est nulle sur U et donc dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$.

Montrons, à présent, que le morphisme entre les anneaux locaux est surjectif. Soit $f \in \mathcal{O}_{\pi^{-1}(b),s}$. Il existe un voisinage compact V de x dans $\pi^{-1}(b)$ et une suite $(R_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\hat{K}_\sigma(\mathbf{T})$, sans pôles sur V , qui converge vers la fonction f sur V . Soit $k \in \mathbf{N}$. Il existe un élément S_k de $\text{Frac}(A[\mathbf{T}])$ sans pôles sur V qui vérifie

$$\|S_k - R_k\|_V \leq 2^{-k}.$$

Considérons le voisinage U du point x de X défini par

$$U = \left\{ y^\varepsilon, y \in V, \frac{1}{2} \leq \varepsilon \leq \frac{3}{2} \right\}.$$

Quel que soit $k \in \mathbf{N}$, la fonction S_k n'a pas de pôles sur la partie compacte U .

Soit $\eta > 0$. Il existe un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que, quels que soient $k, l \geq p$, nous ayons

$$\|R_k - R_l\|_V \leq \eta.$$

Quitte à augmenter p , nous pouvons supposer que $2^{-p} \leq \eta$. Soit $z \in U$. Il existe un élément y de V et un nombre réel $\varepsilon \in [1/2, 3/2]$ tels que $z = y^\varepsilon$. Quel que soient $k, l \geq p$, nous avons alors

$$\begin{aligned} |(S_k - S_l)(y)| &= |(S_k - S_l)|^\varepsilon \\ &\leq (\|R_k - R_l\|_V + 2^{-k} + 2^{-l})^\varepsilon \\ &\leq (3\eta)^\varepsilon \\ &\leq \max((3\eta)^{1/2}, (3\eta)^{3/2}). \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(S_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur U vers un élément g de $\mathcal{B}(U)$ et donc de $\mathcal{O}_{X,x}$. L'image de cet élément dans l'anneau local $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(b),x}$ n'est autre que l'élément f . \square

Théorème 2.2.7. — *Soit x un point interne de X . Alors, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est hensélien, noethérien, régulier, excellent et de dimension inférieure à n .*

Démonstration. — La proposition qui précède nous permet de nous ramener au cas où l'espace de base est le spectre d'un corps. \square

Proposition 2.2.8. — *Soit $\sigma \in \Sigma$. Le principe du prolongement analytique vaut sur tout ouvert connexe de X'_σ . Précisément, soit f une fonction analytique définie sur un ouvert connexe U de X'_σ . Si f est nulle sur un ouvert non vide contenu dans U , alors f est identiquement nulle sur U .*

Démonstration. — Soit U une partie ouverte et connexe de X'_σ . Soit f une fonction analytique sur U . L'ensemble E des points de U au voisinage desquels la fonction f est nulle est un ouvert de U . On montre qu'il est également fermé en utilisant le fait que le principe du prolongement analytique vaut sur les fibres (cf. [4], théorème 3.3.21, dans le cas ultramétrique) et la proposition 1.1.31. Si cet ensemble n'est pas vide, il ne peut donc qu'être égal à l'ouvert connexe U tout entier. \square

2.2.2. Dimension topologique

Nous consacrons cette partie à l'étude de la dimension topologique de l'espace affine analytique $X = \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ défini au-dessus de l'anneau d'entiers de corps de nombres A . La notion de dimension topologique n'est agréable que lorsque l'espace considéré est métrisable. Dans ce cas, la dimension de recouvrement (cf. [39], définition I.4) et la dimension inductive forte (cf. [39], définition I.5) coïncident (cf. [39], théorème II.7). Commençons par vérifier que nous nous trouvons bien dans cette situation.

Lemme 2.2.9. — *L'espace analytique $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ est métrisable.*

Démonstration. — Soient x un point de X et U un voisinage du point x dans X . Par définition de la topologie, il existe $r \in \mathbf{N}$, $P_1, \dots, P_r \in A[T_1, \dots, T_n]$ et $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r \in \mathbf{R}$ tels que la partie

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \{y \in X \mid u_i < |P_i(y)| < v_i\}$$

soit un voisinage du point x contenu dans U . Nous pouvons supposer que les nombres $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_r$ sont rationnels. Puisque l'ensemble A est dénombrable, l'ensemble des voisinages de la forme précédente est alors dénombrable. On en déduit que l'espace X est séparable.

L'espace X étant localement compact, il est régulier. Le théorème d'Urysohn (cf. [39], corollaire du théorème I.3) nous assure alors qu'il est métrisable. \square

Nous pouvons, à présent, calculer la dimension topologique de l'espace $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$. Commençons par l'espace de base $B = \mathcal{M}(A)$.

Proposition 2.2.10. — *La dimension topologique de l'espace B est égale à 1.*

Démonstration. — Soit $\sigma \in \Sigma$. La branche σ -adique B_σ est homéomorphe au segment $[0, 1]$. Elle est donc de dimension 1. D'après [39], théorème II.3, nous avons donc

$$\dim(B) \geq 1.$$

En outre, nous avons

$$B = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} B_\sigma$$

et ce recouvrement est dénombrable. D'après [39], théorème II.1, nous avons donc

$$\dim(B) \leq 1.$$

On en déduit le résultat voulu. \square

Traisons, maintenant, le cas général.

Proposition 2.2.11. — *La dimension topologique de l'espace $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$ est égale à $2n + 1$.*

Démonstration. — Commençons par minorer la dimension. Soit $\sigma \in \Sigma_\infty$. D'après la proposition 2.2.2, la partie X'_σ de X est homéomorphe à $\pi^{-1}(a_\sigma) \times]0, 1]$. Si σ est un plongement réel, la fibre $\pi^{-1}(a_\sigma)$ est homéomorphe au quotient de l'espace \mathbf{C}^n par l'action de la conjugaison complexe. Elle est donc de dimension égale à $2n$. Si σ est un plongement complexe non réel, la fibre $\pi^{-1}(a_\sigma)$ est homéomorphe à l'espace \mathbf{C}^n lui-même et est donc encore de dimension égale à $2n$. Dans tous les cas, la dimension de X'_σ est égale à $2n + 1$. D'après [39], théorème II.3, nous avons donc

$$\dim(X) \geq 2n + 1.$$

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Considérons le disque de centre 0 et de rayon k de X :

$$D(k) = \{x \in X \mid |T(x)| \leq k\}.$$

C'est une partie compacte de X . L'application de projection

$$\pi_k : D(k) \rightarrow B$$

est continue et fermée. Soit b un point de B . Si la valeur absolue sur le corps résiduel complété $\mathcal{H}(b)$ est archimédienne, la dimension de la fibre $\pi_k^{-1}(b)$ est égale à $2n$. Si elle est ultramétrique, la fibre $\pi_k^{-1}(b)$ est le disque de centre 0 et de rayon k de l'espace affine de Berkovich de dimension n au-dessus du corps $\mathcal{H}(b)$.

D'après [5], proposition 1.2.18, sa dimension est inférieure à n . D'après [39], théorème III.6, nous avons

$$\dim(D(k)) \leq \dim(B) + 2n \leq 2n + 1.$$

Bien entendu, nous avons

$$X = \bigcup_{k \in \mathbf{N}^*} D(k).$$

D'après [39], théorème II.1, nous avons donc

$$\dim(X) \leq 2n + 1.$$

On en déduit le résultat annoncé. \square

2.2.3. Points rigides des fibres

Soit $b \in B$. La proposition 1.3.13 nous permet de décrire un système fondamental de voisinages explicite d'un point x de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par des équations du type

$$(T_1 - \alpha_1)(x) = \cdots = (T_n - \alpha_n)(x) = 0,$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{O}_{B,b}$. Remarquons que, lorsque l'espace de base est le spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres, tous les points rationnels de la fibre $\pi^{-1}(b)$ sont de ce type. En effet, on dispose d'une surjection $\mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{H}(b)$ (et même d'un isomorphisme $\mathcal{O}_{B,b}/\mathfrak{m}_b = \kappa(b) \simeq \mathcal{H}(b)$).

Nous allons chercher à ramener l'étude des points rigides à celle des points rationnels par le biais d'un isomorphisme local, en utilisant la proposition 1.3.3. Remarquons qu'il est pour cela nécessaire de disposer d'un résultat de connexité par arcs locale. Nous commencerons donc par étudier la topologie au voisinage des points rigides.

2.2.3.1. Voisinages sur la droite

Commençons par décrire les voisinages des points rigides des fibres de la droite affine. Dans les propositions qui suivent, nous supposons donc que $n = 1$ et que $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$.

Proposition 2.2.12. — *Soit b un point de B . Soit $P(T) \in \mathcal{O}_{B,b}[T]$ un polynôme unitaire dont l'image dans $\mathcal{H}(b)[T]$ est irréductible. Soit x l'unique point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation*

$$P(T)(x) = 0.$$

Soit B_0 un voisinage de b dans B sur lequel les coefficients du polynôme $P(T)$ sont définis. Soient \mathcal{V} un système fondamental de voisinages de b dans B_0 et \mathcal{T} une partie de \mathbf{R}_+^* de borne inférieure nulle. Alors l'ensemble des parties de X de la forme

$$\{y \in X \mid \pi(y) \in V, |P(T)(y)| < t\},$$

où V et t parcourent respectivement \mathcal{V} et \mathcal{T} est un système fondamental de voisinages de x dans X .

Démonstration. — Soit K' une extension finie de K sur laquelle le polynôme $P(T)$ est scindé. Notons A' l'anneau des entiers de K' et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in A'$, avec $p \in \mathbf{N}^*$, les racines de $P(T)$. Notons

$$\varphi : B' = \mathcal{M}(A') \rightarrow \mathcal{M}(A) = B$$

et

$$\psi : X' = \mathbf{A}_{A'}^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{1, \text{an}} = X$$

les morphismes de changement de base. Ces morphismes sont surjectifs et à fibres finies. Notons b'_1, \dots, b'_q , avec $q \in \mathbf{N}^*$, les images réciproques du point b par le morphisme φ . Nous noterons $\pi' : X' \rightarrow B'$ le morphisme de projection.

Soit U un voisinage du point x dans X . Soient $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Nous noterons $y_{i,j}$ le point de la fibre $\pi'^{-1}(b'_j)$ défini par l'équation

$$(T - \alpha_i)(y_{i,j}) = 0.$$

La partie $\psi^{-1}(U)$ de X' est un voisinage du point $y_{i,j} \in \psi^{-1}(x)$. D'après la proposition 1.3.4, il existe un voisinage $V_{i,j}$ de b'_j dans B' et un nombre réel $t_{i,j} > 0$ tel que

$$\psi^{-1}(U) \supset \{z \in X' \mid \pi'(z) \in V_{i,j}, |(T - \alpha_j)(z)| < t_{i,j}\} = W_{i,j}.$$

Quitte à restreindre les voisinages $W_{i,j}$, nous pouvons supposer que $t_{i,j} = t$ ne dépend pas de (i, j) et que $V_{i,j} = V_j$ ne dépend pas de i .

Puisque le morphisme φ est propre (*cf.* théorème 2.1.5) et que

$$\varphi^{-1}(b) = \{b'_j, 1 \leq j \leq q\},$$

il existe un voisinage V de b dans B tel que

$$\varphi^{-1}(V) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq q} V_j.$$

Quitte à restreindre V , nous pouvons supposer que c'est un élément de \mathcal{V} .

Soit u un élément de \mathcal{T} appartenant à l'intervalle $]0, t^p]$. Posons

$$W = \{y \in X \mid \pi(y) \in V, |P(T)(y)| < u\}.$$

Il est clair que nous avons

$$\psi^{-1}(W) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q} W_{i,j} \subset \psi^{-1}(U).$$

Puisque le morphisme ψ est surjectif, on en déduit que

$$W \subset U.$$

On en déduit le résultat voulu sur la forme des voisinages. \square

Corollaire 2.2.13. — *Soient b un point de B et x un point rigide de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Alors, le morphisme π est ouvert au point x .*

Nous souhaitons montrer, à présent, que les voisinages que nous avons obtenus sont connexes par arcs lorsque leur projection sur la base l'est. À cet effet, nous commencerons par démontrer quelques résultats sur la topologie des fibres.

Lemme 2.2.14. — *Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué, ultramétrique, maximale-ment complet et algébriquement clos. Soient $d \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in k$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$. Posons*

$$P(T) = \prod_{i=1}^d (T - \alpha_i)$$

et

$$U = \left\{ x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \mid |P(T)(x)| < t \right\}.$$

Alors, pour tout point y de U , il existe un chemin tracé sur U qui joint le point y à l'un des points α_i , avec $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

Démonstration. — Soit y un point de U . Puisque le corps k est maximale-ment complet, il existe $\beta \in k$ et $r \in \mathbf{R}_+$ tels que $y = \eta_{\beta,r}$ dans $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$. Supposons, tout d'abord, qu'il existe $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $\beta = \alpha_i$. Considérons alors le chemin

$$l : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \\ u & \mapsto & \eta_{\alpha_i, (1-u)r} \end{array}.$$

Il joint le point y au point α_i et tout polynôme décroît le long de ce chemin. En particulier, il est à valeurs dans U .

Revenons, à présent, au cas général. Nous distinguerons deux cas. Dans un premier temps, supposons, qu'il existe $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ tel que $|\beta - \alpha_i| \leq r$. Alors le point $y = \eta_{\beta,r}$ n'est autre que le point $\eta_{\alpha_i,r}$ et nous sommes ramenés au cas précédent. Il nous reste à traiter le cas où, quel que soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, nous avons $|\beta - \alpha_i| > r$. Dans ce cas, nous avons

$$|P(T)(\eta_{\beta,r})| = \prod_{i=1}^d |(T - \alpha_i)(\eta_{\beta,r})| = \prod_{i=1}^d |\beta - \alpha_i|.$$

Notons $s = \min_{1 \leq i \leq d} (|\beta - \alpha_i|)$. Considérons le chemin

$$l' : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbf{A}_s^{1, \text{an}} \\ u & \mapsto & \eta_{\beta, (1-u)r+us} \end{array} .$$

Il joint le point y au point $\eta_{\beta, s}$, qui est du type considéré précédemment. En outre, la fonction P est constante le long du chemin l' . Il est donc bien à valeurs dans U . On en déduit le résultat annoncé. \square

Lemme 2.2.15. — Soient $d \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbf{C}$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$. Posons

$$P(T) = \prod_{i=1}^d (T - \alpha_i)$$

et

$$U = \{z \in \mathbf{C} \mid |P(z)|_\infty < t\} .$$

Alors, pour tout point y de U , il existe un chemin tracé sur U qui joint le point y à l'un des points α_i , avec $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

Démonstration. — Considérons l'application continue

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & P(z) \end{array} .$$

C'est un revêtement ramifié. Considérons le chemin tracé sur la base

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbf{C} \\ u & \mapsto & (1-u)P(y) \end{array} .$$

En relevant ce chemin à partir du point y , on obtient un chemin tracé sur U qui aboutit à l'un des racines du polynôme P . \square

Corollaire 2.2.16. — Soit $(k, |\cdot|)$ un corps valué complet. Soient d un entier, $Q_1(T), \dots, Q_d(T) \in k[T]$ des polynômes irréductibles et $t \in \mathbf{R}_+^*$ un nombre réel strictement positif. Pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, notons x_i le point de la droite $\mathbf{A}_k^{1, \text{an}}$ défini par l'équation $Q_i(T)(x_i) = 0$. Posons

$$P(T) = \prod_{i=1}^d Q_i$$

et

$$U = \left\{ x \in \mathbf{A}_k^{1, \text{an}} \mid |P(T)(x)| < t \right\} .$$

Alors, pour tout point y de U , il existe un chemin tracé sur U qui joint le point y à l'un des points x_i , avec $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

En particulier, si le polynôme $P(T)$ est une puissance d'un polynôme irréductible, alors la partie U est connexe par arcs.

Démonstration. — Soit $(L, |\cdot|)$ une extension du corps valué $(k, |\cdot|)$. Le morphisme induit

$$\mathbf{A}_L^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$$

est continu et surjectif. On en déduit qu'il suffit de démontrer le résultat pour une extension de k . Nous pouvons donc utiliser nous ramener à la situation du lemme 2.2.14, si la valeur absolue $|\cdot|$ est ultramétrique, ou du lemme 2.2.15, si elle est archimédienne. \square

Revenons, à présent, aux voisinages des points rigides dans l'espace total.

Proposition 2.2.17. — *Soient b un point de B et V un voisinage connexe par arcs de b dans B . Soit $P(T) \in \mathcal{O}(V)[T]$ un polynôme unitaire dont l'image dans $\mathcal{H}(b)[T]$ est irréductible. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$ un nombre réel strictement positif. Alors, la partie U de $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ définie par*

$$U = \{y \in X \mid \pi(y) \in V \mid P(T)(y) < t\}$$

est connexe par arcs.

Démonstration. — Nous noterons x l'unique point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ qui vérifie

$$P(T)(x) = 0.$$

Nous allons montrer que tout point de U peut être joint au point x par un chemin tracé sur U . Nous allons distinguer plusieurs cas selon le type du point b .

Supposons, tout d'abord, que le point b est le point central a_0 de B . Soit y un point de U . Posons $c = \pi(y)$. Décomposons le polynôme $P(T)$ en produit de facteurs irréductibles et unitaires dans $\mathcal{H}(c)[T]$: il existe $d \in \mathbf{N}^*$, $Q_1(T), \dots, Q_d(T)$ des polynômes irréductibles distincts et $n_1, \dots, n_d \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$P(T) = \prod_{i=1}^d Q_i(T)^{n_i} \text{ dans } \mathcal{H}(c)[T].$$

Quel que soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, notons y_i le point de la fibre $\pi^{-1}(c)$ défini par l'équation $Q_i(T)(y_i) = 0$. D'après le lemme 2.2.16, il existe un indice $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et un chemin tracé sur $\pi^{-1}(c) \cap U$ qui joint le point y au point y_i . Il nous reste à montrer que l'on peut joindre le point y_i au point x par un chemin tracé sur U . Si le point c est le point a_0 , c'est évident.

Supposons, que le point c est un point interne de B . Il existe alors $\sigma \in \Sigma$ et $\varepsilon > 0$ tels que $c = a_\sigma^\varepsilon$. Puisque la partie V est supposée connexe par arcs, elle contient le segment $W = [a_0, a_\sigma^\varepsilon]$. Remarquons que, quel que soit $\lambda \in]0, \varepsilon]$, le polynôme $Q_i(T)$ est encore irréductible dans $\mathcal{H}(a_\sigma^\lambda)[T]$. Définissons une section φ

de π au-dessus de W de la façon suivante : au point a_σ^λ , avec $\lambda \in]0, \varepsilon]$, nous associons le point $\varphi(a_\sigma^\lambda)$ de la fibre $\pi^{-1}(a_\sigma^\lambda)$ défini par l'équation $Q_i(T)(\varphi(a_\sigma^\lambda)) = 0$ et au point a_0 , nous associons le point $\varphi(a_0) = x$. L'application φ est une section continue de π au-dessus de W à valeurs dans U et son image est un chemin joignant le point y_i au point x .

Pour finir, supposons que point c est un point extrême de B . Il existe alors $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que $c = \tilde{a}_\mathfrak{m}$. La décomposition $P(T) = \prod_{i=1}^d Q_i(T)^{n_i}$ vaut donc dans l'anneau de polynômes $k_\mathfrak{m}[T]$. Le lemme de Hensel nous assure qu'il existe des polynômes $R_1(T), \dots, R_d(T) \in \hat{A}_\mathfrak{m}$ unitaires tels que l'on ait la décomposition

$$P(T) = \prod_{i=1}^d R_i(T) \text{ dans } \hat{A}_\mathfrak{m}[T]$$

et, quel que soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$,

$$R_i(T) = Q_i(T)^{n_i} \pmod{\mathfrak{m}}.$$

Choisissons un facteur irréductible $S_i(T)$ du polynôme $R_i(T)$ dans $\hat{A}_\mathfrak{m}[T]$. Puisque la partie V est supposée connexe par arcs, elle contient le segment $W = [a_0, \tilde{a}_\mathfrak{m}]$. Nous définissons alors une section φ de π au-dessus de W de la façon suivante : au point $a_\mathfrak{m}^\lambda$, avec $\lambda \in]0, \infty[$, nous associons le point $\varphi(a_\mathfrak{m}^\lambda)$ de la fibre $\pi^{-1}(a_\mathfrak{m}^\lambda)$ défini par l'équation $S_i(T)(\varphi(a_\mathfrak{m}^\lambda)) = 0$, au point a_0 nous associons le point $\varphi(a_0) = x$ et au point $\tilde{a}_\mathfrak{m}$, nous associons le point y_i . Comme précédemment, l'application φ est une section continue de π au-dessus de W à valeurs dans U et son image est un chemin joignant le point y_i au point x .

Supposons, à présent, que le point b est un point extrême de B . Il existe alors $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que $b = \tilde{a}_\mathfrak{m}$. Supposons, dans un premier temps que $a_0 \in V$. Alors le polynôme $P(T)$ est à coefficients dans $A_\mathfrak{m}$ et il est irréductible dans $A_\mathfrak{m}[T]$ puisqu'il est unitaire et que sa réduction modulo \mathfrak{m} est irréductible. Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

Supposons, à présent, que le point central a_0 n'appartient pas à V . Si la partie V est réduite au point extrême $\tilde{a}_\mathfrak{m}$, le résultat provient directement du lemme 2.2.16. Dans les autres cas, la partie V est un intervalle contenu dans $]a_0, \tilde{a}_\mathfrak{m}]$. Le polynôme $P(T)$ est alors à coefficients dans $\hat{A}_\mathfrak{m}$. Puisqu'il est unitaire et que son image modulo \mathfrak{m} est irréductible, il est irréductible dans $\hat{A}_\mathfrak{m}[T]$ et donc dans $\hat{K}_\mathfrak{m}[T]$. Soit y un point de U . Il existe alors $\varepsilon \in]0, +\infty[$ tel que $\pi(y) = a_\mathfrak{m}^\varepsilon$. D'après le lemme 2.2.16, il existe un chemin tracé sur $\pi^{-1}(a_\mathfrak{m}^\varepsilon) \cap U$ joignant le point y au point z défini par l'équation $P(T)(z) = 0$. Il nous suffit, à présent, de montrer que l'on peut joindre le point z au point x

par un chemin tracé sur U . Puisque la partie V est supposée connexe par arcs, elle contient le segment $W = [a_m^\varepsilon, \tilde{a}_m]$. Définissons une section φ de π au-dessus de W de la façon suivante : à tout point c de W nous associons le point $\varphi(c)$ de la fibre $\pi^{-1}(c)$ défini par l'équation $P(T)(\varphi(c)) = 0$. L'application φ est une section continue de π au-dessus de W à valeurs dans U et son image est un chemin joignant le point z au point x .

Il nous reste à traiter le cas où le point b est un point interne de B : il existe $\sigma \in \Sigma$ et $\varepsilon > 0$ tel que $b = a_\sigma^\varepsilon$. Si la partie V contient un point extrême ou le point central de B , nous sommes ramenés à l'un des cas précédents. Nous supposons donc que la partie V est contenue dans B'_σ . Dans ce cas, pour tout point c de V , le corps $\mathcal{H}(c)$ est isomorphe au corps \hat{K}_σ et le polynôme $P(T)$ est irréductible dans $\mathcal{H}(c)[T]$. Soit y un point de U . D'après le lemme 2.2.16, il existe un chemin tracé sur $\pi^{-1}(\pi(y)) \cap U$ joignant le point y au point z défini par l'équation $P(T)(z) = 0$. Il nous suffit, à présent, de montrer que l'on peut joindre le point z au point x par un chemin tracé sur U . Définissons une section φ de π au-dessus de V de la façon suivante : à tout point c de V nous associons le point $\varphi(c)$ de la fibre $\pi^{-1}(c)$ défini par l'équation $P(T)(\varphi(c)) = 0$. L'application φ est une section continue de π au-dessus de V à valeurs dans U et son image est un chemin passant par les points z et x .

□

Corollaire 2.2.18. — *Soient b un point de B et x un point rigide de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Alors, le point x possède un système fondamental de voisinages connexe par arcs.*

Démonstration. — Puisque nous disposons d'une surjection $\mathcal{O}_{B,b} \rightarrow \mathcal{H}(b)$, nous pouvons supposer que le polynôme $P(T)$ définissant le point x est à coefficients dans $\mathcal{O}_{B,b}$. Il nous suffit alors d'appliquer les propositions 2.2.12 et 2.2.17. □

2.2.3.2. Étude de la topologie

Revenons, à présent, au cas d'un espace affine de dimension quelconque : $X = \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$, avec $n \in \mathbf{N}$. Nous avons déjà étudié les points rigides des fibres internes (cf. corollaires 2.2.3 et 2.2.4 pour la topologie, ou théorème 2.2.7 pour les anneaux locaux). Nous allons donc nous intéresser ici aux points rigides des fibres extrêmes et centrale. Commençons par énoncer et démontrer des résultats d'isomorphie locale qui nous permettront de nous ramener au cas des points rationnels. Il nous faudra, pour cela, disposer d'hypothèses de connexité locale.

Proposition 2.2.19. — Soient $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ et x un point rigide de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Supposons que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes. Alors, il existe une extension finie K' de K , un point x' de $\mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K' , rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel

$$\mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x .

Démonstration. — L'extension de corps $k_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mathcal{H}(x)$ est une extension finie et séparable, puisque le corps $k_{\mathfrak{m}}$ est fini. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe un élément $\tilde{\alpha}$ de $\mathcal{H}(x)$ tel que $k_{\mathfrak{m}}[\tilde{\alpha}] = \mathcal{H}(x)$. Notons $\tilde{P}(S) \in k_{\mathfrak{m}}[S]$ le polynôme minimal unitaire de $\tilde{\alpha}$ sur $k_{\mathfrak{m}} = A/\mathfrak{m}$. Il existe alors un unique isomorphisme

$$k_{\mathfrak{m}}[S]/(\tilde{P}(S)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(x)$$

envoyant S sur $\tilde{\alpha}$. Choisissons un relevé unitaire $P(S)$ de $\tilde{P}(S)$ dans $A[S]$. Nous noterons α l'image de S dans $A[S]/(P(S))$.

Posons $V = [a_{\mathfrak{m}}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. L'anneau de Banach $(\mathcal{B}(V), \|\cdot\|_V)$ n'est autre que l'anneau $(\hat{A}_{\mathfrak{m}}, |\cdot|_{\mathfrak{m}})$. On en déduit en particulier que la norme $|\cdot|_{\mathfrak{m}}$ sur $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ est uniforme. Nous aboutir au résultat annoncé, nous allons appliquer la proposition 1.3.3 avec l'anneau $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ et le polynôme $P(S)$. Commençons par vérifier que les hypothèses en sont satisfaites. Dans un premier temps, nous devons montrer que la norme produit $\|\cdot\|_{\infty}$ sur l'anneau $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[S]/(P(S))$ est uniforme, c'est-à-dire équivalente à la norme spectrale. Remarquons que la norme produit se prolonge au corps des fractions $L = \hat{K}_{\mathfrak{m}}[S]/(P(S))$ de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[S]/(P(S))$. Cela provient simplement du fait que l'isomorphisme n défini avant la proposition 1.3.3 se prolonge en un isomorphisme

$$\begin{aligned} \hat{K}_{\mathfrak{m}}^d &\rightarrow L \\ (a_0, \dots, a_{d-1}) &\mapsto \sum_{i=0}^{d-1} a_i S^i \end{aligned}$$

En outre, la valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{m}}$ définie sur $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ se prolonge à $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$ puis à L . Puisque L est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps valué et complet $\hat{K}_{\mathfrak{m}}$, les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et $|\cdot|_{\mathfrak{m}}$ sont équivalentes sur L . On en déduit qu'elles sont équivalentes sur $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[S]/(P(S))$. Puisque la norme $|\cdot|_{\mathfrak{m}}$ est multiplicative, elle est uniforme. La norme $\|\cdot\|_{\infty}$ l'est donc également.

Notons

$$Y = \mathbf{A}_{\hat{A}_{\mathfrak{m}}}^{n,\text{an}} = \pi^{-1}(V), \quad Z = \mathbf{A}_{\hat{A}_{\mathfrak{m}}[S]/(P(S))}^{n,\text{an}}$$

et

$$\varphi : Z \rightarrow Y$$

le morphisme naturel. D'après la proposition 1.3.1, il existe une fonction R définie sur un voisinage U de x dans Y telle que $P(R) = 0$ et $R(x) = \tilde{\alpha} \in \mathcal{H}(x)$. Construisons alors une section σ du morphisme φ au-dessus de U , par le procédé décrit juste avant la proposition 1.3.3. Par sa définition même, nous avons

$$R(\sigma(x)) = \tilde{\alpha} = \alpha(\sigma(x)) \in \mathcal{H}(\sigma(x)).$$

Soit b un point de $\mathcal{M}(\hat{A}_m) = V$. L'image du polynôme $P(T)$ est irréductible dans $\mathcal{H}(b)[T]$. Puisque le corps $\mathcal{H}(b)$ est soit fini, soit de caractéristique nulle, elle est également séparable. Soit c un point de $\mathcal{M}(\hat{A}_m[S]/(P(S)))$ au-dessus du point b . L'élément α de $\hat{A}_m[S]/(P(S))$ s'envoie sur une racine de $P(T)$ dans $\mathcal{H}(c)$. Puisque le polynôme $P(T)$ est séparable, nous avons $P'(\alpha) = 0$.

Pour finir, le point x possède, par hypothèse, un système fondamental de voisinages connexes. Nous pouvons donc appliquer la proposition 1.3.3. Nous obtenons, au voisinage de x , une section du morphisme φ qui est un isomorphisme local. Puisque $\mathcal{H}(\sigma(x)) = \mathcal{H}(x) = k_m[\tilde{\alpha}]$ et que $\tilde{\alpha}$ est l'image de l'élément α de $\hat{A}_m[S]/(P(S))$, le point $x' = \sigma(x)$ est rationnel.

Montrons, à présent, que le morphisme φ est bien la restriction d'un morphisme de la forme annoncée. Considérons l'extension finie $K' = K[T]/(P(T))$ de K . Notons A' l'anneau de ses entiers. D'après [44], I, §6, proposition 15, l'anneau $\hat{A}_m[S]/(P(S))$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel $k_m[S]/(P(S)) \simeq \mathcal{H}(x)$ et de corps des fractions $\hat{K}_m[S]/(P(S)) \simeq \hat{K}'_{m'}$. On en déduit que

$$\hat{A}_m[S]/(P(S)) \simeq \hat{A}'_{m'}.$$

On en déduit que le morphisme φ est la restriction, à la source et au but, du morphisme naturel

$$\mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}.$$

□

Démontrons un résultat analogue pour les points rigides de la fibre centrale.

Proposition 2.2.20. — *Soit x un point rigide de la fibre centrale X_0 . Supposons que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Alors, il existe une extension finie K' de K , un point x' de $\mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K' , rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel*

$$\mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$$

envoie le point x' sur le point x et induit un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x .

Démonstration. — L'extension de corps $\mathcal{H}(a_0) \simeq K \rightarrow \mathcal{H}(x)$ est une extension finie et séparable, puisque le corps K est de caractéristique nulle. En particulier, le corps $\mathcal{H}(x)$ est encore un corps de nombres. D'après le théorème de l'élément primitif, il existe un élément α de $\mathcal{H}(x)$ tel que $K[\alpha] = \mathcal{H}(x)$. Notons $P(S) \in K[S]$ le polynôme minimal unitaire de α sur K . Il existe un unique isomorphisme $K[S]/(P(S)) \rightarrow \mathcal{H}(x)$ envoyant S sur α .

Le caractère séparable de l'extension $\mathcal{H}(x)/K$ assure également que l'anneau des entiers A' de $\mathcal{H}(x)$ est un anneau de Dedekind de type fini sur A . Par conséquent, il existe un élément u de K tel que

$$A[u, \alpha] = A'[u].$$

Notons U l'ouvert de B constitué des points en lesquels la fonction u est définie et inversible. C'est un voisinage du point a_0 dans B . Quitte à restreindre ce voisinage (il suffira en fait de lui ôter un nombre fini de points extrêmes), nous pouvons supposer que les coefficients du polynôme $P(S)$ sont définis en tout point de U et que, quel que soit $b \in U$, l'image du polynôme $P(S)$ est séparable sur $\mathcal{H}(b)$.

Considérons un compact M contenu dans U de la forme

$$M = \mathcal{M}(A) \setminus \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0}]a_\sigma^{1/2}, a_\sigma^{l(\sigma)}],$$

où Σ_0 désigne une partie de Σ contenant Σ_∞ . Considérons l'algèbre de Banach, munie d'une norme uniforme, $(\mathcal{A}, \|\cdot\|) = (\mathcal{B}(M), \|\cdot\|_M)$. Nous avons

$$\mathcal{A} = A \left[\frac{1}{\Sigma_0} \right] = \left\{ \frac{a}{b} \in K, a, b \in A, \forall \mathfrak{m} \in \Sigma_f \cap \Sigma_0, b \notin \mathfrak{m} \right\}$$

et

$$\|\cdot\| = \max_{\sigma \in \Sigma_0} (|\cdot|_\sigma^{1/2}).$$

Cette fois-ci, nous allons appliquer la proposition 1.3.3 avec l'anneau de Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ et le polynôme $P(S)$. Dans un premier temps, nous devons montrer que la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ sur l'anneau $\mathcal{A}' = \mathcal{A}[S]/(P(S))$ est uniforme. Comme dans la proposition précédente, ce résultat découle du résultat d'équivalence des normes qui est vérifié sur toute extension finie des corps valués \hat{K}_σ , avec $\sigma \in \Sigma_0$.

Notons

$$Y = \mathbf{A}_{\mathcal{A}'}^{n, \text{an}} = \pi^{-1}(M), \quad Z = \mathbf{A}_{\mathcal{A}'}^{n, \text{an}}$$

et

$$\varphi : Z \rightarrow Y$$

le morphisme naturel. D'après la proposition 1.3.1, il existe une fonction R définie sur un voisinage V de x dans Y telle que $P(R) = 0$ et $R(x) = \tilde{\alpha} \in \mathcal{H}(x)$. Comme précédemment, nous construisons une section σ du morphisme φ au-dessus de V par le procédé décrit juste avant la proposition 1.3.3. Nous avons alors

$$R(\sigma(x)) = \tilde{\alpha} = \alpha(\sigma(x)) \in \mathcal{H}(\sigma(x)).$$

Les conditions de séparabilité que nous avons pris soin d'imposer nous assurent que, quel que soit $z \in \varphi^{-1}(U)$, nous avons $P'(\alpha)(z) \neq 0$. Puisque, par hypothèse, le point x possède un système fondamental de voisinages connexes, nous pouvons finalement appliquer la proposition 1.3.3. Nous en déduisons qu'il existe, au voisinage de x , une section du morphisme φ qui est un isomorphisme local et envoie le point x sur un point qui est rationnel dans sa fibre.

Il nous reste à montrer que le morphisme φ est obtenu par restriction du morphisme naturel

$$\psi : \mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}.$$

Le compact M étant contenu dans U , l'anneau \mathcal{A} est un localisé de l'anneau $A[u]$. On en déduit que

$$A \left[\frac{1}{\Sigma_0} \right] [\alpha] = A' \left[\frac{1}{\Sigma'_0} \right],$$

où Σ'_0 comprend les plongements complexes de K' et les idéaux maximaux de A' contenant ceux de Σ_0 . En d'autres termes,

$$\mathcal{B}(M)[S]/(P(S)) = \mathcal{B}(\psi^{-1}(M)).$$

Par conséquent, le morphisme φ est obtenu en restreignant, à la source et au but, le morphisme ψ . \square

Fort de ces résultats, nous pouvons, à présent, obtenir des précisions sur la topologie au voisinage des points rigides des fibres extrêmes ou centrale.

Proposition 2.2.21. — *Soit b un point extrême ou central de B . Soit x un point rigide de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Alors, le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Démonstration. — Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}$. Le cas $n = 0$ est immédiat.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que le résultat soit vrai pour $n - 1$. Notons

$$\varphi_1 : \mathbf{A}_A^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$$

le morphisme induit par l'injection $i_1 : A[T_1] \rightarrow A[T_1, \dots, T_n]$ et

$$\varphi_0 : \mathbf{A}_A^{1,\text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(A)$$

celui induit par l'injection $i_0 : A \rightarrow A[T_1]$. Posons $y = \varphi_1(x)$.

D'après la proposition 2.2.18, le point y de $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Nous pouvons donc appliquer l'une des propositions 2.2.19 ou 2.2.20, selon le type du point b . Dans les deux cas, on en déduit qu'il existe une extension finie K' de K , un point y' de $\mathbf{A}_{A'}^{1,\text{an}}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K' , rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel

$$\alpha : \mathbf{A}_{A'}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$$

envoie le point y' sur le point y et induit un isomorphisme

$$\beta : U' \rightarrow U$$

d'un voisinage U' de y' dans $\mathbf{A}_{A'}^{1,\text{an}}$ sur un voisinage U de y dans $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}} & \xrightarrow{\alpha_n} & \mathbf{A}_A^{n,\text{an}} \\ \downarrow \varphi'_1 & & \downarrow \varphi_1 \\ \mathbf{A}_{A'}^{1,\text{an}} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{A}_A^{1,\text{an}} \\ \downarrow \varphi'_0 & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathcal{M}(A') & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{M}(A) \end{array} .$$

Quitte à restreindre le voisinage U de y , nous pouvons supposer qu'il est compact et rationnel. Le voisinage U' l'est alors également. On en déduit un isomorphisme

$$\gamma : \mathcal{M}(\mathcal{B}(U')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{B}(U))$$

qui coïncide avec β en tant qu'application et même en tant que morphisme d'espace annelés si l'on se restreint à l'intérieur des espaces considérés. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_{\mathcal{B}(U')}^{n-1,\text{an}} & \xrightarrow[\sim]{\delta} & \mathbf{A}_{\mathcal{B}(U)}^{n-1,\text{an}} \\ \downarrow \psi' & & \downarrow \psi \\ \mathcal{M}(\mathcal{B}(U')) & \xrightarrow[\sim]{\gamma} & \mathcal{M}(\mathcal{B}(U)) \end{array} .$$

En tant que morphisme d'espaces topologiques, le morphisme ψ n'est autre que le morphisme φ_1 restreint à $\varphi_1^{-1}(U)$ à la source et U au but. De même, le morphisme ψ' coïncide avec le morphisme φ'_1 restreint à $\varphi'_1^{-1}(U')$ à la source et U' au but. Par conséquent, il suffit de montrer que le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs dans $\mathbf{A}_{\mathcal{B}(U)}^{n-1, \text{an}}$. Puisque δ est un homéomorphisme, il suffit de montrer que le point $\delta^{-1}(x)$ possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs dans $\mathbf{A}_{\mathcal{B}(U')}^{n-1, \text{an}}$. Or le point $\delta^{-1}(x)$ est envoyé sur le point $\gamma^{-1}(y) = y'$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{B}(U'))$. Ce dernier point est rationnel dans sa fibre $\varphi_0'^{-1}(\varphi_0'(y'))$. Par conséquent, quitte à changer x en $\delta^{-1}(x)$, nous pouvons supposer que le point y est rationnel dans sa fibre, autrement dit que le morphisme

$$\mathcal{H}(b) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(y)$$

est un isomorphisme.

Notons

$$\lambda_{n-1} : \mathbf{A}_A^{n, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{n-1, \text{an}}$$

le morphisme induit par l'injection $j_{n-1} : A[T_2, \dots, T_n] \rightarrow A[T_1, \dots, T_n]$ et

$$\lambda_0 : \mathbf{A}_A^{n-1, \text{an}} \rightarrow \mathcal{M}(A)$$

celui induit par l'injection $j_0 : A \rightarrow A[T_2, \dots, T_{n-1}]$. Posons $z = \lambda_{n-1}(x)$. De l'isomorphisme $\mathcal{H}(b) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(y)$, on déduit un isomorphisme

$$\mathcal{H}(z) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(x).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le point z de $\mathbf{A}_A^{n-1, \text{an}}$ possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Nous pouvons donc appliquer l'une des propositions 2.2.19 ou 2.2.20, selon le type du point b . Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que nous pouvons supposer que le point z est rationnel dans la fibre $\lambda_0^{-1}(b)$. Autrement dit, le morphisme

$$\mathcal{H}(b) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(z)$$

est un isomorphisme. Nous nous sommes finalement ramenés au cas d'un point x rationnel dans sa fibre $\pi^{-1}(b)$, puisque le morphisme $\mathcal{H}(b) \rightarrow \mathcal{H}(x)$ est un isomorphisme. Or sur la base B , nous disposons d'un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{B,b} \simeq \mathcal{H}(b).$$

Nous pouvons donc appliquer le corollaire 1.3.7. On en déduit le résultat attendu. \square

Corollaire 2.2.22. — *Soit b un point extrême ou central de B . Soit x un point rigide de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Alors, le morphisme π est ouvert au point x .*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, le point x de X possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Par conséquent, nous pouvons appliquer l'une des propositions 2.2.19 ou 2.2.20, selon le type du point b . On en déduit qu'il existe une extension finie K' de K , un point x' de $\mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K' , rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel

$$\alpha : \mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$$

envoie le point x' sur le point x et induit un isomorphisme

$$\beta : U' \rightarrow U$$

d'un voisinage U' de x' dans $\mathbf{A}_{A'}^{n,\text{an}}$ sur un voisinage U de x dans $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow[\sim]{\beta} & U \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ \mathcal{M}(A') & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{M}(A) \end{array} .$$

Soit V un voisinage du point x dans X . Nous pouvons supposer qu'il est contenu dans U . Nous avons alors

$$\pi(V) = \gamma(\pi'(\beta^{-1}(V))).$$

Le morphisme β^{-1} étant un homéomorphisme, il envoie le voisinage V du point x sur un voisinage $\beta^{-1}(V)$ du point x' . Puisque le point x' est rationnel dans sa fibre, le corollaire 1.3.6 nous assure que la partie $\pi'(\beta^{-1}(V))$ est un voisinage du point $\pi'(x')$ dans $\mathcal{M}(A')$. D'après le théorème 2.1.5, le morphisme γ est ouvert. On en déduit que la partie $\pi(V) = \gamma(\pi'(\beta^{-1}(V)))$ est un voisinage du point $b = \gamma(\pi'(\beta^{-1}(x)))$ dans $\mathcal{M}(A)$. \square

2.2.3.3. Étude des anneaux locaux

Les résultats d'isomorphie locale que nous venons de démontrer vont également nous permettre d'étudier les anneaux locaux en les points rigides des fibres extrêmes et centrale, en montrant qu'ils sont isomorphes à des anneaux locaux en des points rationnels.

Commençons par étudier les points rigides des fibres extrêmes.

Théorème 2.2.23. — *Soient \mathfrak{m} un élément de Σ_f et x un point rigide de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Alors, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local noethérien, régulier, de dimension $n + 1$.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.2.21, le point x possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Nous pouvons donc utiliser la proposition 2.2.19 et nous ramener au cas d'un point x rationnel. Il existe alors des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $k_{\mathfrak{m}}$ tels que le point x soit l'unique point de la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ vérifiant

$$(T_1 - \alpha_1)(x) = \dots = (T_n - \alpha_n)(x) = 0.$$

Bien entendu, quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'élément α_i de $k_{\mathfrak{m}}$ se relève en un élément de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ et donc en un élément de $\mathcal{O}_{B,b}$. Nous pouvons donc appliquer le théorème 1.3.17. Il nous assure qu'il existe un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{X,x} \simeq \varinjlim_{V, \mathfrak{t}} \mathcal{B}(V) \langle |\mathbf{T}| \leq \mathfrak{t} \rangle,$$

où V décrit l'ensemble des voisinages compacts du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ de B et \mathfrak{t} l'ensemble $(\mathbf{R}_+^*)^n$. Il ne nous reste plus, à présent, qu'à appliquer les théorèmes 1.2.14 et 1.2.17 pour conclure.

Mentionnons tout de même que, dans ce cas précis, nous pouvons prouver ces résultats directement. En effet, nous connaissons un système fondamental de voisinages compacts explicite du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ de B : il s'agit de l'ensemble des intervalles $[a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$, avec $\varepsilon \in]0, +\infty[$. Quel que soit $\varepsilon \in]0, +\infty[$, l'algèbre $\mathcal{B}([a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}])$ n'est autre que l'algèbre $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$. Elle est munie de la norme $\|\cdot\|_{[a_{\mathfrak{m}}^\varepsilon, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]} = |\cdot|_{\mathfrak{m}}^\varepsilon$. On en déduit immédiatement un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{X,x} \simeq \hat{A}_{\mathfrak{m}} \llbracket \mathbf{T} \rrbracket.$$

□

Le cas des points rigides de la fibre centrale se traite de manière identique. Il suffit de remplacer, dans la démonstration ci-dessus, la proposition 2.2.19 par la proposition 2.2.20 et le théorème 1.2.14 par le théorème 1.2.12. Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.2.24. — *Soit x un point rigide de la fibre centrale X_0 . Alors, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local noethérien, régulier, de dimension n .*

2.2.4. Anneaux de sections globales

Dans cette partie, nous voulons décrire les anneaux de sections globales de certaines parties de l'espace affine $\mathbf{A}_A^{n,\text{an}}$. Plus précisément, nous allons nous intéresser aux disques et couronnes compacts au-dessus de parties compactes et connexes de $\mathcal{M}(A)$.

Introduisons quelques notations. Pour une partie V de B et des n -uplets $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ et $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ dans \mathbf{R}^n , nous posons

$$\overset{\circ}{D}_V(\mathbf{t}) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |T_i(x)| < t_i\},$$

$$\overline{D}_V(\mathbf{t}) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |T_i(x)| \leq t_i\},$$

$$\overset{\circ}{C}_V(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i < |T_i(x)| < t_i\}$$

et

$$\overline{C}_V(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \{x \in X \mid \pi(x) \in V, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_i \leq |T_i(x)| \leq t_i\}.$$

Rappelons que, si K est une partie de $\mathbf{A}_A^{n, \text{an}}$, on note $\mathcal{O}(K)$ l'anneau des fonctions qui sont définies au voisinage de K . En particulier, si $(k, |\cdot|)$ désigne un corps ultramétrique complet et \overline{D} le disque unité de $\mathbf{A}_k^{n, \text{an}}$, l'anneau $\mathcal{O}(\overline{D})$ n'est pas l'algèbre affinoïde $k\{\mathbf{T}\}$, mais l'anneau des séries surconvergentes, constitué de l'ensemble des séries de $k[[\mathbf{T}]]$ dont le rayon de convergence est strictement supérieur à 1.

Commençons par montrer que les fonctions admettent un développement en série.

Proposition 2.2.25. — *Soit V une partie compacte de B . Soit $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Alors le morphisme naturel*

$$\mathcal{O}(V)[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]]$$

se prolonge en un morphisme injectif

$$\varphi_{V, \mathbf{t}} : \mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{t})) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]].$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{t}))$. Puisque la fonction f est surconvergente, il existe un polyrayon $\mathbf{r} > \mathbf{t}$ telle que la fonction f soit définie sur $\overset{\circ}{D}_V(\mathbf{r})$.

Soit b un point de V . La fonction f est définie au voisinage du point 0 de la fibre $\pi^{-1}(b)$. D'après le théorème anneaulocal, il existe un voisinage compact V_b du point b dans B et un nombre réel $r_b > 0$ tels qu'au voisinage de la partie compacte $\overline{D}_{V_b}(r_b)$ de $\mathbf{A}_A^{n, \text{an}}$, la fonction f possède une expression de la forme

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}},$$

où, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n$, $a_{\mathbf{k}} \in \mathcal{B}(V_b)$.

En identifiant localement les différents développements en série, on montre que, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n$, l'élément $a_{\mathbf{k}}$ appartient à $\mathcal{O}(V)$. Nous avons donc construit un morphisme

$$\varphi_{V, \mathbf{t}} : \mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{t})) \rightarrow \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]]$$

qui coïncide avec le morphisme naturel $\mathcal{O}(V)[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]]$ sur $\mathcal{O}(V)[\mathbf{T}]$.

Montrons que le morphisme $\varphi_{V,\mathbf{t}}$ est injectif. Supposons que deux fonctions f et g de $\mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{t}))$ aient la même image. Soit $b \in V$. Notons x le point 0 de la fibre $\pi^{-1}(b)$. Les fonctions f et g ont même développement dans $L_b \simeq \mathcal{O}_{X,x}$. On en déduit que les fonctions f et g coïncident sur un voisinage de x dans la fibre $\pi^{-1}(b)$. Puisque cette fibre est un espace irréductible, les fonctions f et g coïncident nécessairement sur toute la fibre. On en déduit finalement que $f = g$. \square

Proposition 2.2.26. — *Soit V une partie compacte de B . Soit $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. L'image du morphisme $\varphi_{V,\mathbf{t}}$ est contenue dans l'ensemble des séries de la forme*

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \in \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]]$$

vérifiant la condition

$$\exists \mathbf{r} > \mathbf{t}, \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \|a_{\mathbf{k}}\|_V \mathbf{r}^{\mathbf{k}} = 0.$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{t}))$. Puisque la fonction f est surconvergente, il existe un polyrayon $\mathbf{v} > \mathbf{t}$ telle que la fonction f soit définie sur $\overset{\circ}{D}_V(\mathbf{v})$. La proposition précédente nous montre que la fonction f possède un développement en série de la forme

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \in \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]].$$

Soit $b \in V$. Puisque le groupe $|\mathcal{H}(b)^*|$ est discret dans \mathbf{R}_+^* , il existe une famille $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ de \mathbf{R}_+^* qui vérifie $\mathbf{t} < \mathbf{u} < \mathbf{v}$ et dont l'image est libre dans le \mathbf{Q} -espace vectoriel $\mathbf{Q} \times_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^*/|\mathcal{H}(b)^*|)$. Notons x l'unique point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ qui vérifie

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |T_i(x)| = u_i.$$

La description de l'anneau local au point x obtenue au théorème 1.3.17 nous assure qu'il existe un voisinage V_b de b dans B et $\mathbf{r}_b > \mathbf{v} > \mathbf{t}$ tels que

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \|a_{\mathbf{k}}\|_{V_b} \mathbf{r}_b^{\mathbf{k}} = 0.$$

Par compacité, nous pouvons recouvrir la partie V par un nombre fini de compacts V_{b_1}, \dots, V_{b_p} , avec $p \in \mathbf{N}$ et $b_1, \dots, b_p \in V$. On en déduit qu'il existe $\mathbf{r} > \mathbf{t}$ tel que

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \|a_{\mathbf{k}}\|_V \mathbf{r}^{\mathbf{k}} = 0.$$

\square

Intéressons-nous, à présent, à la réciproque de ce résultat. Nous n'allons considérer que certaines parties compactes de la base.

Théorème 2.2.27. — *Soit V une partie compacte et connexe de B . Supposons que le point central de B n'appartienne pas au bord du compact V . Soit $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. Alors le morphisme*

$$\varphi_{V,\mathbf{t}} : \mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{t})) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]]$$

réalise un isomorphisme sur le sous-anneau de $\mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]]$ constitué des séries de la forme

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}} \in \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]]$$

vérifiant la condition

$$\exists \mathbf{r} > \mathbf{t}, \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \|a_{\mathbf{k}}\|_V \mathbf{r}^{\mathbf{k}} = 0.$$

Démonstration. — D'après les propositions qui précèdent, il nous suffit de montrer que toute série de la forme donnée appartient à l'image de $\varphi_{V,\mathbf{t}}$. Nous allons distinguer plusieurs cas, en fonction du compact V .

Commençons par considérer un compact de la forme

$$V = [a_{\sigma,\alpha}, a_{\sigma,l(\sigma)}],$$

avec $\sigma \in \Sigma$ et $\alpha \in]0, l(\sigma)[$.

Soit $\mathbf{r}' \in \mathbf{R}_+^n$ tel que $\mathbf{t} < \mathbf{r}' < \mathbf{r}$. Soit $\mu > 1$ tel que $\mathbf{t} < (\mathbf{r}')^\mu < \mathbf{r}$. Soit $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n$. Nous avons

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} |a_{\mathbf{k}}|_{\sigma}^{\alpha} (\mathbf{r}')^{\mathbf{k}} = 0$$

et l'on en déduit que

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} |a_{\mathbf{k}}|_{\sigma}^{\alpha\mu} ((\mathbf{r}')^\mu)^{\mathbf{k}} = 0.$$

Remarquons, à présent, que, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{N}^n$, l'élément $a_{\mathbf{k}}$ de $\mathcal{O}(V) = \hat{A}_{\sigma}$ se prolonge à l'ouvert $U =]a_{\sigma,\alpha\mu}, a_{\sigma,l(\sigma)}]$ et vérifie

$$\|a_{\mathbf{k}}\|_U = |a_{\mathbf{k}}|_{\sigma}^{\alpha\mu}.$$

On en déduit que la série f définit un élément de $\mathcal{O}(\overset{\circ}{D}_U(\mathbf{r}'))$ et donc de $\mathcal{O}(\overline{D}_V(\mathbf{t}))$.

Sur cet exemple, il est clair que toute la difficulté du problème est d'étudier le comportement au bord du compact V . Remarquons que ce bord ne peut contenir qu'un nombre fini de points. En effet, si le compact V ne contient pas le point central de B , sa connexité lui impose d'être contenu dans une branche de B . Il est donc de la forme

$$V = [a_{\sigma}^u, a_{\sigma}^v],$$

avec $\sigma \in \Sigma$, $u, v \in]0, l(\sigma)]$ et $u \leq v$. Son bord contient alors au plus deux points. Si le compact V contient le point central a_0 de B , alors, par hypothèse, il contient un voisinage de ce point et il n'existe donc qu'un nombre fini de branches de B que V ne contient pas entièrement. On en déduit que le bord du compact V n'est constitué que d'un nombre fini de points. En reprenant le raisonnement précédent en chaque point du bord du compact V , on obtient le résultat annoncé. \square

Remarque 2.2.28. — Énoncée de la même façon, la proposition précédente est fautive si le point central de B se situe sur le bord du compact V . Fixons un nombre premier p et considérons, par exemple, le compact

$$V = [\tilde{a}_{(p)}, a_0]$$

de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$, autrement dit la branche (p) -adique. L'anneau $\mathcal{O}(V)$ est alors l'anneau $\mathbf{Z}_{(p)}$ et la norme $\|\cdot\|_V$ est la norme triviale.

Plaçons-nous sur la droite $\mathbf{A}_{\mathbf{Z}}^{1, \text{an}}$. Soit $t \in]0, 1[$. L'anneau des séries de la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} a_k T^k \in \mathcal{O}(V)[[T]]$$

vérifiant la condition

$$\exists r > t, \lim_{k \rightarrow +\infty} \|a_k\|_V r^k = 0$$

est alors simplement l'anneau

$$\mathbf{Z}_{(p)}[[T]].$$

Considérons la série

$$f = \sum_{k \in \mathbf{N}} k! T^k.$$

Elle appartient bien à l'anneau précédent, mais ne peut se prolonger à aucun disque de centre 0 et de rayon strictement positif de la branche archimédienne de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

De même, pour tout nombre premier q différent de p , la série

$$f = \sum_{k \in \mathbf{N}} q^{-k^2} T^k \in \mathbf{Z}_{(p)}[[T]]$$

ne peut se prolonger à aucun disque de centre 0 et de rayon strictement positif de la branche (q) -adique de $\mathcal{M}(\mathbf{Z})$.

Le cas des couronnes se traite comme celui des disques.

Proposition 2.2.29. — Soit V une partie compacte de B . Soient deux n -uplets $\mathbf{s} \in \mathbf{R}_+^n$ et $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, avec $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$. Notons $\mathcal{O}(V)\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle^\dagger$ l'anneau des séries de la forme

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}},$$

où, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, $a_{\mathbf{k}} \in \mathcal{O}(V)$, vérifiant les conditions suivantes :

$$\exists \mathbf{r} > \mathbf{t}, \lim_{\mathbf{k} \rightarrow +\infty} \|a_{\mathbf{k}}\|_V \mathbf{r}^{\mathbf{k}} = 0$$

et

$$\exists \mathbf{r} < \mathbf{s}, \lim_{\mathbf{k} \rightarrow -\infty} \|a_{\mathbf{k}}\|_V \mathbf{r}^{\mathbf{k}} = 0.$$

Alors le morphisme naturel

$$\mathcal{O}(V)[\mathbf{T}] \rightarrow \mathcal{O}(V)[[\mathbf{T}]]$$

se prolonge en un morphisme injectif

$$\varphi_{V,\mathbf{s},\mathbf{t}} : \mathcal{O}(\overline{C}_V(\mathbf{s}, \mathbf{t})) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)\langle \mathbf{s}^{-1} \leq \mathbf{T} \leq \mathbf{t} \rangle^\dagger.$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve des propositions 2.2.25 et 2.2.26. Il faut cependant prendre garde au fait que nous ne pouvons plus considérer un voisinage du point 0 d'une fibre. Il est cependant possible de remplacer ce point par un point de type 3 déployé, c'est-à-dire un point x défini par des équations du type

$$\forall i \in [1, n], |T_i(x)| = r_i,$$

où r_1, \dots, r_n sont des éléments de \mathbf{R}_+^* tels que l'image de la famille (r_1, \dots, r_n) dans le \mathbf{Q} -espace vectoriel $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{R}_+^* / |\mathcal{H}(b)^*|)$ est libre. Un tel choix est possible car le groupe $|\mathcal{H}(b)^*|$ est discret dans \mathbf{R}_+^* . Dans ce cas, nous disposons encore d'une description de l'anneau local en termes de séries, par le théorème 1.3.17. \square

Comme dans le cas des disques, nous pouvons raffiner cette proposition pour obtenir, dans certains cas, un résultat d'isomorphie similaire à celui de la proposition 2.2.27. La démonstration en étant complètement analogue, nous ne la rédigerons pas.

Théorème 2.2.30. — Soit V une partie compacte et connexe de B . Supposons que le point central de B n'appartienne pas au bord du compact V . Soient deux n -uplets $\mathbf{s} \in \mathbf{R}_+^n$ et $\mathbf{t} \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, avec $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$. Alors, le morphisme

$$\varphi_{V,\mathbf{s},\mathbf{t}} : \mathcal{O}(\overline{C}_V(\mathbf{s}, \mathbf{t})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(V)\langle \mathbf{s} \leq |\mathbf{T}| \leq \mathbf{t} \rangle^\dagger$$

est un isomorphisme.

Pour finir, calculons explicitement ces anneaux dans quelques cas particuliers. Soit Σ' une partie finie de Σ contenant Σ_∞ . Pour $\sigma \in \Sigma'$, choisissons un élément $\varepsilon_\sigma \in]0, 1]$. Définissons une partie compacte L de B par

$$V = \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma'} [a_0, a_\sigma^{\varepsilon_\sigma}] \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \notin \Sigma'} B_\sigma \right).$$

C'est un voisinage du point central a_0 de B . Nous avons

$$\mathcal{O}(V) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma' \cap \Sigma_f} A_\sigma \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_V = \max_{\sigma \in \Sigma'} (|\cdot|_\sigma^{\varepsilon_\sigma}).$$

Soit $t > 0$. L'anneau $\mathcal{O}(\overline{D}_V(t))$ est alors le sous-anneau de $K[[T]]$ constitué des séries de la forme

$$\sum_{k \geq 0} a_k T^k$$

vérifiant les conditions suivantes :

- i) $\forall k \geq 0, a_k \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma' \cap \Sigma_f} A_\sigma$;
- ii) $\forall \sigma \in \Sigma', \exists r > t^{\varepsilon_\sigma}, \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|_\sigma r^k = 0$.

D'après la formule du produit, quel que soit $a \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma' \cap \Sigma_f} A_\sigma$, nous avons

$$\prod_{\sigma \in \Sigma'} |a|_\sigma \geq 1.$$

Si $t \geq 1$, l'anneau précédent n'est donc constitué que de polynômes.

Soit $s \in]0, t]$. La même remarque utilisant la formule du produit nous permet de montrer que les fonctions définies au voisinage de la couronne $\overline{C}_V(s, t)$ ont un développement en série fini à gauche. Précisément, l'anneau $\overline{C}_V(s, t)$ est le sous-anneau de $K((T))$ constitué des séries de la forme

$$\sum_{k \geq k_0} a_k T^k$$

vérifiant les conditions suivantes :

- i) $k_0 \in \mathbf{Z}$;
- ii) $\forall k \geq k_0, a_k \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma' \cap \Sigma_f} A_\sigma$;
- iii) $\forall \sigma \in \Sigma', \exists r > t^{\varepsilon_\sigma}, \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|_\sigma r^k = 0$.

2.3. Droite affine

Dans la partie précédente, nous sommes parvenu à exhiber des systèmes fondamentaux de voisinages pour certains points de l'espace affine et à établir certaines propriétés des anneaux locaux en ces points. Cependant, l'étude n'est pas encore complète. Nous allons la mener à terme dans le cadre de la droite affine analytique. Nous supposons donc, dorénavant, que $n = 1$ et, par conséquent, que $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$.

Les points pour lesquels nous ne disposons pas encore de résultats sont les points de type 3 des fibres centrale et extrêmes non déployés, ainsi que les points de type 2 de ces mêmes fibres. Nous commencerons par nous intéresser aux points de type 3 et ramènerons leur étude à celle des points déployés, pour lesquels nous disposons déjà de résultats (*cf.* corollaires 1.3.10, 1.3.12 et 1.3.11, pour la topologie, et propositions 1.2.19 et 1.2.21, pour les anneaux locaux). Nous devons, en revanche, mettre en œuvre des méthodes originales pour traiter le cas des points de type 2.

À la fin du chapitre figure un résumé dans lequel nous regroupons les résultats démontrés auparavant. Nous en profitons pour établir de nouvelles propriétés, comme la validité du principe du prolongement analytique sur les parties ouvertes et connexes de la droite analytique X . Nous consacrons le dernier paragraphe à la cohérence du faisceau structural. Cette propriété sera capitale dans le chapitre suivant que nous consacrerons aux espaces de Stein.

2.3.1. Points de type 3

Commençons par nous étudier les points de type 3 des fibres extrêmes et centrale. Un changement de base va nous permettre de nous ramener au cas de points de type 3 déployés.

2.3.1.1. Fibres extrêmes

Traisons, tout d'abord, le cas des fibres extrêmes. Nous commencerons par montrer que l'on peut préciser le résultat de changement de base obtenu à la proposition 2.2.19. Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Soit $P(T)$ un polynôme irréductible de $k_{\mathfrak{m}}[T]$. Rappelons que, quel que soit $r \in [0, 1]$, nous notons $\eta_{P,r}$ le point de la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ associé à la valeur absolue

$$\begin{array}{lcl} A[T] & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ F(T) & \mapsto & r^{v_{P(T)}(F(T))} \end{array} ,$$

où $v_{P(T)}$ désigne la valuation $P(T)$ -adique de $k_{\mathfrak{m}}[T]$. Nous noterons $x = \eta_{P,0}$ le point rigide de la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ défini par l'équation

$$P(T)(x) = 0.$$

D'après la proposition 2.2.19, il existe une extension finie K' de K , un point x' de $X' = \mathbf{A}_{A'}^{1,\text{an}}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K' , rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme naturel

$$\varphi : \mathbf{A}_{A'}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x . Notons \mathfrak{m}' l'idéal maximal de A' correspondant au point $\pi(x')$ et α l'élément de $k_{\mathfrak{m}'}$ qui correspond au point x' . Un calcul direct utilisant la séparabilité du polynôme $P(T)$ montre que, quel que soit $r \in]0, 1[$, nous avons

$$\varphi(\eta_{T-\alpha,r}) = \eta_{P,r}.$$

Nous devons reprendre et préciser ici les arguments de la proposition 2.2.19. Nous aurons besoin d'utiliser certaines propriétés du flot et commençons donc par montrer l'existence de voisinages flottants. Posons

$$Y_{\mathfrak{m}} = X_{\mathfrak{m}} \setminus X_0 = \pi^{-1}(]a_0, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]).$$

Lemme 2.3.1. — *Soient $x \in Y_{\mathfrak{m}}$ et $\varepsilon \in I_{Y_{\mathfrak{m}}}(x)$. Alors, la partie $D_{Y_{\mathfrak{m}}}$ est un voisinage de (x, ε) dans $Y_{\mathfrak{m}} \times \mathbf{R}_+^*$.*

En particulier, tous les points de $Y_{\mathfrak{m}}$ ont des voisinages flottants dans $Y_{\mathfrak{m}}$.

Démonstration. — Ce résultat découle directement de l'égalité

$$D_{Y_{\mathfrak{m}}} = Y_{\mathfrak{m}} \times \mathbf{R}_+.$$

La conséquence suit, par le lemme 1.1.29. □

Proposition 2.3.2. — *Le morphisme φ induit un isomorphisme d'espaces annelés d'un voisinage de*

$$\{\eta_{T-\alpha,r}, r \in]0, 1[\} \text{ dans } X'$$

sur un voisinage de

$$\{\eta_{P,r}, r \in]0, 1[\} \text{ dans } X.$$

Démonstration. — Considérons le voisinage U de x dans X , la fonction R définie sur U vérifiant $P(R) = 0$ et la section σ du morphisme φ au-dessus de U considérés dans la preuve de la proposition 2.2.19. Soit V un voisinage du point x dans X vérifiant les propriétés suivantes :

- i) V est connexe ;
- ii) la fonction R se prolonge à V et la fonction $P(R)$ est nulle sur V ;
- iii) la fonction $P'(\alpha)$ est inversible sur $\varphi^{-1}(V)$.

D'après la proposition 1.3.3, la section σ se prolonge alors à V et induit un isomorphisme d'espaces annelés sur son image. Il nous suffit donc de montrer qu'il existe un voisinage V de la partie $\{\eta_{P,r}, r \in]0, 1[\}$ dans X qui vérifie les propriétés demandées.

Commençons par la dernière propriété. Quel que soit $b \in B_{\mathfrak{m}} \setminus X_0$, le polynôme $P(T)$ est irréductible et séparable sur le corps $\mathcal{H}(b)$. Par conséquent, tout voisinage V contenu dans $B_{\mathfrak{m}} \setminus X_0$ satisfait cette propriété.

Passons aux deux propriétés suivantes. Il existe $r_0 \in]0, 1[$ tel que le point η_{P,r_0} appartienne à U . En utilisant l'isomorphisme σ et le corollaire 1.3.12, on montre que le point $\eta_{P,r_0} = \sigma^{-1}(\eta_{T-\alpha,r_0})$ de X possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs. Le lemme 2.3.1 nous assure que nous sommes dans les conditions d'utilisation de la proposition 1.1.31 et du lemme 1.1.32. On en déduit que la fonction R se prolonge sur un voisinage connexe V de l'ensemble

$$T_{Y_{\mathfrak{m}}}(\eta_{P,r_0}) = \{\eta_{P,r_0}^{\varepsilon}, \varepsilon \in]0, +\infty[\} = \{\eta_{P,r}, r \in]0, 1[\}.$$

En outre, nous avons encore $P(R) = 0$ sur V , toujours d'après la proposition 1.1.31. On en déduit le résultat annoncé. \square

Cet énoncé nous permet de ramener l'étude des points de type 3 de la fibre extrême à celle des points de type 3 déployés. Nous en tirons plusieurs conséquences.

Corollaire 2.3.3. — *Tout point de type 3 d'une fibre extrême possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Démonstration. — Soient $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$, P un polynôme irréductible à coefficients dans $k_{\mathfrak{m}}$ et r un élément de $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$. Considérons le point $\eta_{P,r}$ de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Quitte à changer T en T^{-1} , nous pouvons supposer que $r < 1$. Dans ce cas, la proposition 2.3.2 nous montre que, quitte à remplacer l'anneau A par l'anneau des entiers d'une extension du corps K , nous pouvons supposer que le polynôme P est de degré 1. Le résultat découle alors du corollaire 1.3.16. \square

De même, en utilisant le corollaire 1.3.15, on démontre le résultat suivant.

Corollaire 2.3.4. — *Le morphisme π est ouvert en tout point de type 3 d'une fibre extrême.*

Corollaire 2.3.5. — *Soient $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ et x un point de type 3 de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{m} \mathcal{O}_{X,x}$.*

Démonstration. — Il existe un polynôme irréductible P à coefficients dans $k_{\mathfrak{m}}$ et un élément r de $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ tels que le point x soit le point $\eta_{P,r}$ de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Quitte à changer T en T^{-1} , nous pouvons supposer que $r < 1$. Dans ce cas, la proposition 2.3.2 nous montre que, quitte à remplacer l'anneau A par l'anneau des entiers d'une extension du corps K , nous pouvons supposer que le polynôme P est de degré 1. Il existe alors $\tilde{\alpha} \in k_{\mathfrak{m}}$ tel que $P(T) = T - \tilde{\alpha}$. Soit α un élément de $\mathcal{O}_{B, \tilde{\alpha}_{\mathfrak{m}}} \simeq \hat{A}_{\mathfrak{m}}$ dont l'image dans $k_{\mathfrak{m}}$ soit $\tilde{\alpha}$. La translation par α réalise un isomorphisme au voisinage du point x et envoie ce point sur le point $\eta_{T,r}$ de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Le théorème 1.2.21 nous permet alors de conclure. \square

2.3.1.2. Fibre centrale

Étudions, maintenant, les points de type 3 de la fibre centrale. Nous mènerons le raisonnement en suivant les mêmes étapes que dans le cas des fibres extrêmes. Nous commencerons donc par préciser le résultat de changement de bases obtenu à la proposition 2.2.20. Soit $Q(T)$ un polynôme irréductible de $K[T]$. Quel que soit $r \in [0, 1]$, notons $\eta_{Q,r}$ le point de la fibre X_0 associé à la valeur absolue

$$\begin{array}{ccc} A[T] & \rightarrow & \mathbf{R}_+ \\ F(T) & \mapsto & r^{v_{Q(T)}(F(T))} \end{array} ,$$

où $v_{Q(T)}$ désigne la valuation $Q(T)$ -adique de K . Nous noterons $x = \eta_{Q,0}$ le point rigide de la fibre X_0 défini par l'équation

$$Q(T)(x) = 0.$$

D'après la proposition 2.2.20, il existe une extension finie K' de K , un point x' de $X' = \mathbf{A}_{A'}^{1, \text{an}}$, où A' désigne l'anneau des entiers de K' , rationnel dans sa fibre, tel que le morphisme

$$\psi : \mathbf{A}_{A'}^{1, \text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_A^{1, \text{an}}$$

envoie le point x' sur le point x et induise un isomorphisme d'un voisinage de x' sur un voisinage de x . Notons β l'élément de K' qui correspond au point x' . Remarquons que, quel que soit $r \in]0, 1[$, nous avons

$$\psi(\eta_{T-\beta,r}) = \eta_{Q,r}.$$

Comme précédemment, énonçons un résultat assurant l'existence de voisinages flottants. Considérons la partie ouverte Y de X obtenue en enlevant les extrémités des branches archimédiennes :

$$Y = X \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_{\infty}} \pi^{-1}(a_{\sigma}) \right).$$

Lemme 2.3.6. — Soient $x \in Y$ et $\varepsilon \in I_Y(x)$. Alors, la partie D_Y est un voisinage de (x, ε) dans $Y \times \mathbf{R}_+^*$.

En particulier, tous les points de Y ont des voisinages flottants dans Y .

Démonstration. — Puisque $\varepsilon \in I_Y(x)$, le point x^ε est un élément de Y . Nous avons donc $|2(x)|^\varepsilon < 2$. Il existe $\lambda > \varepsilon$ tel que l'on ait $|2(x)|^\varepsilon < |2(x)|^\lambda < 2$. La partie

$$\{y \in Y \mid |2(y)| < 2^{1/\lambda}\} \times]0, \lambda[$$

est alors un voisinage de (x, ε) dans $Y \times \mathbf{R}_+^*$. \square

Nous tirons de ce résultat les mêmes conséquences que dans le cas des fibres extrêmes. Les preuves étant similaires, nous ne les détaillerons pas.

Proposition 2.3.7. — Le morphisme ψ induit un isomorphisme d'un voisinage de

$$\{\eta_{T-\beta, r}, r \in]0, 1[\} \text{ dans } X'$$

sur un voisinage de

$$\{\eta_{Q, r}, r \in]0, 1[\} \text{ dans } X.$$

Corollaire 2.3.8. — Tout point de type 3 de la fibre centrale possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

Corollaire 2.3.9. — Le morphisme π est ouvert en tout point de type 3 de la fibre centrale.

Corollaire 2.3.10. — Soit x un point de type 3 de la fibre centrale. En ce point, l'anneau local $\mathcal{O}_{X, x}$ est un corps.

2.3.2. Points de type 2

Pour compléter notre étude de la droite analytique sur un corps de nombres, il nous reste à étudier les points de type 2 des fibres centrale et extrêmes. Sur ces fibres, et, de façon générale, sur la droite analytique au-dessus de tout corps trivialement valué, il n'existe qu'un point de type 2 : le point de Gauß.

2.3.2.1. Fibres extrêmes

Commençons notre étude par les fibres extrêmes. Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Notons x le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Nous nous intéressons, tout d'abord, aux voisinages du point x . Nous notons $\hat{A}_{\mathfrak{m}}^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$.

Lemme 2.3.11. — Soit U un voisinage de x dans X . Alors, il existe un entier $d \in \mathbf{N}$, des polynômes $P_1, \dots, P_d \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$ et deux nombres réels $\alpha, \varepsilon > 0$ tels que l'on ait

$$U \supset \bigcap_{1 \leq i \leq d} \{y \in \pi^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}) \mid 1 - \varepsilon < |P_i(y)| < 1 + \varepsilon\}.$$

Démonstration. — Remarquons que si le résultat vaut pour un nombre fini de voisinages, il vaut encore pour leur intersection. Par conséquent, nous pouvons supposer que le voisinage U est de la forme

$$U = \{y \in X \mid s < |P(y)| < t\},$$

avec $P \in A[T]$ et $s, t \in \mathbf{R}$. En effet, par définition de la topologie, tout voisinage du point x contient une intersection finie de voisinages de cette forme.

Supposons, tout d'abord, que $P \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. Il existe alors $Q \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}^{\times}[T]$, $R \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}[T]$, avec $R \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, et $p \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$P = Q + \pi_{\mathfrak{m}}^p R.$$

Puisque le point x appartient à U et que $P(x) = 1$, nous avons $s < 1 < t$. Par conséquent, il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que $s < 1 - \varepsilon$ et $t > 1 + \varepsilon$. Soit $\alpha > 0$ tel que

$$2|\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{p\alpha} \leq 1 - \varepsilon.$$

Nous avons alors

$$U \supset \{y \in X \mid 1 - \varepsilon < |Q(y)| < 1 + \varepsilon\} \cap \{y \in \pi^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}) \mid 0 < |R(y)| < 2\}.$$

Supposons, à présent, que $P \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. Il existe alors un polynôme Q de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[T]$, avec $Q \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, et $p \in \mathbf{N}^*$ tels que

$$P = \pi_{\mathfrak{m}}^p Q.$$

Puisque le point x appartient à U et que $P(x) = 0$, nous avons $s < 0 < t$ et donc

$$U = \{y \in X \mid |P(y)| < t\}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $2|\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{p\alpha} \leq t$. Nous avons alors

$$U \supset \{y \in \pi^{-1}(\mathcal{J}_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}) \mid 0 < |Q(y)| < 2\}.$$

On démontre finalement le résultat à l'aide d'une récurrence sur le nombre de coefficients non nuls du polynôme P et en utilisant, à chaque étape, l'un ou l'autre des résultats précédents. \square

Lemme 2.3.12. — Soit U un voisinage de x dans X . Alors, il existe deux entiers $d, e \in \mathbf{N}$, des polynômes P_1, \dots, P_d de $\hat{A}_m^\times[T]$, deux à deux distincts, irréductibles et unitaires, des polynômes Q_1, \dots, Q_e de $\hat{A}_m^\times[T]$, deux à deux distincts, irréductibles et unitaires et deux nombres réels $\alpha, \varepsilon > 0$ tels que l'on ait

$$U \supset \bigcap_{1 \leq i \leq d} \{y \in \pi^{-1}(]a_m^\alpha, \tilde{a}_m]) \mid |P_i(y)| < 1 + \varepsilon\} \\ \cap \bigcap_{1 \leq j \leq e} \{y \in \pi^{-1}(]a_m^\alpha, \tilde{a}_m]) \mid |Q_j(y)| > 1 - \varepsilon\}.$$

Démonstration. — Comme précédemment, si le résultat vaut pour un nombre fini de voisinages, il vaut encore pour leur intersection. D'après le lemme précédent, nous pouvons donc supposer que le voisinage U est de la forme

$$U = \{y \in \pi^{-1}(]a_m^\alpha, \tilde{a}_m]) \mid |P(y)| < 1 + \varepsilon\}$$

ou

$$U = \{y \in \pi^{-1}(]a_m^\alpha, \tilde{a}_m]) \mid |P(y)| > 1 - \varepsilon\},$$

où P est un polynôme unitaire à coefficients dans \hat{A}_m et α et ε deux nombres réels strictement positifs. Nous supposons que nous nous trouvons dans le premier cas. Le second se traite de même. Écrivons le polynôme P sous la forme

$$P = P_1 \cdots P_d,$$

où $d \in \mathbf{N}$ et P_1, \dots, P_d sont des polynômes à coefficients dans \hat{A}_m irréductibles et unitaires. Soit $i \in [1, d]$. Puisque le polynôme P_i est unitaire, il vérifie $|P_i(x)| = 1$. Par conséquent, la partie

$$U_i = \left\{ y \in \pi^{-1}(]a_m^\alpha, \tilde{a}_m]) \mid |P_i(y)| < (1 + \varepsilon)^{1/d} \right\}$$

est un voisinage du point x dans X . L'intersection

$$\bigcap_{1 \leq i \leq d} U_i$$

est alors un voisinage de x dans U de la forme voulue. \square

Proposition 2.3.13. — Soit U un voisinage du point x dans X . Alors il existe un voisinage W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :

- i) la projection $\pi(W)$ est un voisinage connexe par arcs de $\pi(x) = \tilde{a}_m$ dans B ;
- ii) la section de Gauß σ_G restreinte à $\pi(W)$ prend ses valeurs dans W ;
- iii) pour tout point b de $\pi(W)$, la trace de la fibre $\pi^{-1}(b)$ sur W est connexe par arcs.

Démonstration. — Appliquons le lemme précédent. Le voisinage W que l'on obtient vérifie les propriétés demandées. Les deux premières sont immédiates. Intéressons-nous à la troisième. Nous conservons les notations du lemme précédent. Soit β un élément de $] \alpha, +\infty]$. Nous voulons montrer que la trace de la fibre $\pi^{-1}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta})$ sur W est connexe par arcs. Soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Le polynôme P_i est irréductible dans $\mathcal{H}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta})[T]$. Cela provient de la définition de P_i si $\beta < +\infty$ et du lemme de Hensel si $\beta = +\infty$. Dans tous les cas, la partie

$$\left\{ y \in \pi^{-1}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta}) \mid |P_i(y)| < 1 + \varepsilon \right\}$$

est connexe par arcs. On l'obtient en effet à partir de la droite $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta})}^{1, \text{an}}$ en coupant l'une des branches partant du point de Gauß. De même, quel que soit $j \in \llbracket 1, e \rrbracket$, la partie

$$\left\{ y \in \pi^{-1}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta}) \mid |P_j(y)| > 1 - \varepsilon \right\}$$

est connexe par arcs. Puisque la droite analytique $\mathbf{A}_{\mathcal{H}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta})}^{1, \text{an}}$ a une structure d'arbre, une intersection de parties connexes par arcs l'est encore. On en déduit que la partie $W \cap \pi^{-1}(a_{\mathfrak{m}}^{\beta})$ est connexe par arcs. \square

Deux corollaires suivent.

Corollaire 2.3.14. — *Le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Corollaire 2.3.15. — *Le morphisme π est ouvert au voisinage du point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$.*

Intéressons-nous, à présent, à l'anneau local.

Proposition 2.3.16. — *Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Notons x le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal \mathfrak{m} $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Démonstration. — Nous allons définir une valuation discrète v sur l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Soit f un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$. Il existe un voisinage U de x dans X sur lequel la fonction f est définie. Pour $r \in [0, 1]$, nous noterons simplement η_r le point η_r de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. La trace de la partie U sur la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ est un voisinage du point $x = \eta_1$ dans cette fibre. Par conséquent, il existe $R \in]0, 1[$ tel que, quel que soit $r \in [R, 1]$, on ait $\eta_r \in U$. D'après la proposition 2.3.5, l'anneau local \mathcal{O}_{X, η_R} est un anneau de valuation discrète. Notons v_R la valuation sur cet anneau. Nous posons alors

$$v(f) = v_R(f) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}.$$

La proposition 1.1.31 nous assure que cette quantité ne dépend pas du nombre réel R choisi.

Les deux propriétés suivantes sont immédiates : quels que soient f et g dans $\mathcal{O}_{X,x}$, nous avons

1. $v(f + g) \geq \min(v(f), v(g))$;
2. $v(fg) = v(f) + v(g)$.

Nous avons également $v(0) = +\infty$. Montrons que seule la fonction nulle satisfait cette égalité. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ telle que $v(f) = +\infty$. Soit U un voisinage ouvert de x dans X sur lequel la fonction f est définie. D'après la proposition 2.3.13, quitte à restreindre U , nous pouvons supposer qu'il vérifie les propriétés suivantes :

- i)* la projection $\pi(U)$ est un voisinage connexe par arcs de $\pi(x) = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans B ;
- ii)* la section de Gauß σ_G restreinte à $\pi(U)$ prend ses valeurs dans U ;
- iii)* pour tout point b de $\pi(U)$, la trace de la fibre $\pi^{-1}(b)$ sur U est connexe par arcs.

Soit $R \in]0, 1[$ tel que, quel que soit $r \in [R, 1]$, on ait $\eta_r \in U$. Par définition de v , nous avons $v_R(f) = +\infty$. Par conséquent, l'image de la fonction f dans l'anneau local \mathcal{O}_{X,η_R} est nulle. Il existe donc un voisinage ouvert V du point η_R dans U tel que la fonction f soit nulle sur V . D'après le corollaire 2.3.4, la partie $V_0 = \pi(V)$ est un voisinage du point extrême $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans B . Soit $c \in V_0$. La fonction f est nulle sur un l'ouvert $\pi^{-1}(c) \cap V$ de $\pi^{-1}(c) \cap U$. Comme ce dernier espace est normal et connexe, la fonction f y est identiquement nulle. Finalement, la fonction f est nulle sur $U \cap \pi^{-1}(V_0)$ et donc dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$.

La propriété que nous venons de démontrer jointe à la propriété 2 impose à l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ d'être intègre. Considérons son corps des fractions L . L'application v se prolonge alors en une valuation discrète sur le corps L . Pour parvenir à nos fins, il nous reste à montrer les deux égalités

$$\mathcal{O}_{X,x} = \{f \in L \mid v(f) \geq 0\}$$

et

$$\mathfrak{m} \mathcal{O}_{X,x} = \{f \in L \mid v(f) > 0\}.$$

Remarquons que la seconde égalité découle de la première et du fait que le générateur $\pi_{\mathfrak{m}}$ de l'idéal maximal \mathfrak{m} de A a pour valuation $v(\pi_{\mathfrak{m}}) = 1$. D'autre part, pour démontrer la première égalité, il nous suffit de montrer que tout élément f de $\mathcal{O}_{X,x}$ vérifiant $v(f) = 0$ est inversible dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$. Ce

résultat se démontre facilement en utilisant les propriétés du flot (*cf.* proposition 1.1.31). En effet, soit f un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$ vérifiant $v(f) = 0$. Il existe un nombre réel $R \in]0, 1[$ vérifiant les propriétés habituelles tel que l'on ait $v_R(f) = 0$. On en déduit que la fonction f est inversible dans l'anneau local \mathcal{O}_{X,η_R} et donc que $|f(\eta_R)| \neq 0$. La proposition 1.1.31 nous assure alors que l'on a

$$|f(x)| = |f(\eta_R)|^0 = 1.$$

On en déduit que la fonction f est inversible dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. \square

2.3.2.2. Fibre centrale

Intéressons-nous, à présent, au point de Gauß de la fibre centrale. Comme précédemment, nous commençons par étudier ses voisinages. C'est un problème bien plus délicat que pour les fibres extrêmes.

Lemme 2.3.17. — *Soit $(k, |\cdot|)$ un corps ultramétrique complet. Soit un polynôme $P(T) = \sum_{i=0}^d a_i T^i \in k[T]$, avec $d \in \mathbf{N}^*$, quel que soit $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $a_i \in k$ et $a_d \in k^*$. Posons*

$$\rho = \max_{0 \leq i \leq d-1} \left(\left| \frac{a_i}{a_d} \right|^{\frac{1}{d-i}} \right).$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ vérifiant la condition $\mu > |a_d| \rho^d$. Alors la partie de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ définie par

$$U = \left\{ x \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \mid \lambda < |P(x)| < \mu \right\}$$

est connexe par arcs.

Démonstration. — Soit k' un corps algébriquement clos et maximale-ment complet contenant k . Puisque le morphisme de changement de bases $\mathbf{A}_{k'}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ est continu et surjectif, quitte à remplacer k par k' , nous pouvons supposer que le corps k est algébriquement clos et maximale-ment complet. Il existe alors $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in k$ tels que

$$P(T) = a_d \prod_{i=1}^d (T - \alpha_i).$$

D'après [11], proposition 3.1.2.1, quel que soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, nous avons

$$|\alpha_i| \leq \rho.$$

Soit $r \geq \rho$ vérifiant la condition $\lambda < |a_d| r^d < \mu$. Alors, nous avons

$$|P(\eta_r)| = |a_d| \prod_{i=1}^d |(T - \alpha_i)(\eta_r)| = |a_d| r^d.$$

Par conséquent, le point η_r appartient à U .

Soit x un point de U . Puisque k est maximalelement complet, il existe $\beta \in k$ et $s \in \mathbf{R}_+$ tels que $x = \eta_{\beta,s}$. Soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Nous avons $T - \alpha_i = (T - \beta) + (\beta - \alpha_i)$ et donc

$$|(T - \alpha_i)(\eta_{\beta,s})| = \max(s, |\beta - \alpha_i|).$$

Supposons que $|\beta| \leq r$. Considérons le chemin injectif l tracé sur $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ défini par

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \\ t &\mapsto \eta_{\beta, tr + (1-t)s} \end{aligned}.$$

Il joint le point $\eta_{\beta,s}$ au point $\eta_{\beta,r} = \eta_r$. Si s est inférieur à r , alors, lorsque l'on parcourt l , la fonction $|P|$ croît de $|P(\eta_{\beta,s})|$ à $|P(\eta_r)|$. En particulier, le chemin reste dans U . Il en est de même si $s > r$.

Supposons, à présent, que $|\beta| > r$. Si $s \geq |\beta|$, alors $\eta_{\beta,s} = \eta_{0,s}$ et nous sommes ramenés au cas précédent. Supposons donc que $s < |\beta|$. Quel que soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, nous avons

$$|(T - \alpha_i)(\eta_{\beta,s})| = \max(s, |\beta - \alpha_i|) = \max(s, |\beta|) = |\beta|.$$

Le long du chemin l' , joignant le point $\eta_{\beta,s}$ au point $\eta_{\beta,|\beta|}$, défini par

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \\ t &\mapsto \eta_{\beta, t|\beta| + (1-t)s} \end{aligned},$$

la fonction $|P|$ est constante. Le chemin l' est donc tracé sur U . Nous sommes donc ramenés au cas du point $\eta_{\beta,|\beta|} = \eta_{0,|\beta|}$ que nous avons traité précédemment. Nous pouvons donc joindre le point $\eta_{\beta,s}$ au point η_r par un chemin tracé sur U . \square

Lemme 2.3.18. — *Soit $(k, |\cdot|)$ un corps archimédien complet. Soient $d \in \mathbf{N}$ et P_1, \dots, P_d des polynômes à coefficients dans k . Alors, il existe $S, T \in \mathbf{R}$ tels que, quels que soient $s_1, \dots, s_d \in [0, S[$ et $t_1, \dots, t_d \in]T, +\infty[$, la partie de $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ définie par*

$$\bigcap_{1 \leq j \leq d} \left\{ z \in \mathbf{A}_k^{1,\text{an}} \mid s_j < |P_j(z)| < t_j \right\}$$

est connexe par arcs.

Démonstration. — Considérons un plongement du corps k dans le corps \mathbf{C} . Nous munissons \mathbf{C} de l'unique valeur absolue qui étend celle de k . Le morphisme $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^{1,\text{an}} \rightarrow \mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$ induit par le plongement précédent étant continu et surjectif, nous pouvons supposer que $k = \mathbf{C}$.

Nous pouvons supposer qu'aucun des polynômes P_i , avec $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, n'est nul. Notons E l'ensemble des éléments $(x, y, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_d)$ de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+^{2d}$ qui

vérifient la condition suivante :

$$\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, s_j < |P_j(x + iy)|^2 < t_j.$$

C'est un ensemble semi-algébrique réel. Considérons également l'application

$$p : E \rightarrow [0, 1]^{2d}$$

qui à tout élément $u = (x, y, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_d)$ de E associe

$$p(u) = \left(s_1, \dots, s_d, \frac{t_1}{1 + t_1}, \dots, \frac{t_d}{1 + t_d} \right).$$

Cette application est semi-algébrique réelle et continue. D'après le théorème de Hardt (cf. [10], théorème 9.3.1), il existe une partition (T_1, \dots, T_r) , avec $r \in \mathbf{N}$, de $[0, 1]^{2d}$ en parties semi-algébrique telle que, quel que soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe un ensemble semi-algébrique F_k et un homéomorphisme semi-algébrique

$$\theta_k : T_k \times F_k \xrightarrow{\sim} p^{-1}(T_k)$$

tel que l'application $p \circ \theta_j$ soit la projection $T_k \times F_k \rightarrow T_k$. Notons v le point $(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ de $[0, 1]^{2d}$. Pour parvenir au résultat souhaité, il suffit de montrer que le point v possède un voisinage dans $[0, 1]^{2d}$ au-dessus duquel les fibres de l'application p sont connexes. Autrement dit, il suffit de montrer que pour tout indice $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que le point v soit adhérent à la partie T_k , la partie F_k est connexe.

Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que le point v soit adhérent à la partie T_k . D'après le lemme de sélection des courbes (cf. [10], théorème 2.5.5), il existe une fonction semi-algébrique continue

$$f : [0, 1] \rightarrow T_k$$

telle que $f([0, 1[) \subset T_k$ et $f(1) = v$. Puisque la fonction f est semi-algébrique, quitte à restreindre son intervalle de définition puis effectuer un changement d'échelle pour se ramener à $[0, 1]$, nous pouvons supposer que les d premières fonctions coordonnées de f sont décroissantes et que les d dernières sont croissantes. Soit (x, y) un point de \mathbf{R}^2 tel que $(x, y, f(0)) \in E$. Quel que soit $u \in [0, 1[$, nous avons alors encore $(x, y, f(u)) \in E$.

Soient z_1, z_2 des éléments de \mathbf{R}^2 tels que $(z_1, f(0))$ et $(z_2, f(0))$ appartiennent à E . Quand les nombres s_1, \dots, s_d sont assez petits et les nombres t_1, \dots, t_d assez grands, les points z_1 et z_2 appartiennent à la même composante connexe de

$$\bigcap_{1 \leq j \leq d} \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid s_j < |P_j(x + iy)|^2 < t_j\}.$$

On en déduit qu'il existe $u \in [0, 1[$ tels que les points $(z_1, f(u))$ et $(z_2, f(u))$ appartiennent à la même composante connexe de $p^{-1}(f(u))$. Le morphisme p étant

semi-algébriquement trivial au-dessus de T_k , les points $(z_1, f(0))$ et $(z_2, f(0))$ doivent également appartenir à la même composante connexe de $p^{-1}(f(0))$. On en déduit que la partie F_k est connexe, ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 2.3.19. — *Notons x le point de Gauß de la fibre centrale. Soit U un voisinage de x dans X . Alors il existe un voisinage ouvert W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) la projection $\pi(W)$ est un voisinage ouvert et connexe par arcs de $\pi(x) = a_0$ dans B ;*
- ii) il existe une section topologique de π au-dessus de $\pi(W)$ à valeurs dans W ;*
- iii) pour tout point b de $\pi(W)$, la trace de la fibre $\pi^{-1}(b)$ sur W est connexe par arcs ;*
- iv) quels que soient $x \in W$ et $\varepsilon \in [0, 1]$, le point x^ε appartient à W .*

Démonstration. — Par définition de la topologie de X , il existe un entier $r \in \mathbf{N}^*$, des polynômes $f_1, \dots, f_r \in A[T]$ et un nombre réel $\lambda > 0$ tels que U contienne une partie de la forme

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \{y \in X \mid |f_i(x)| - \lambda < |f_i(y)| < |f_i(x)| + \lambda\}.$$

Nous pouvons supposer que, quel que soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, nous avons $f_i \neq 0$. Alors

$$V = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \{y \in X \mid 1 - \lambda < |f_i(y)| < 1 + \lambda\}.$$

Nous allons montrer qu'il existe un voisinage E de a_0 dans B tel que le voisinage $W = V \cap \pi^{-1}(E)$ de x dans X vérifie les propriétés requises. Nous allons procéder en plusieurs étapes en prouvant tout d'abord le résultat au-dessus de la partie ultramétrique de B , puis au-dessus de chacune des branches archimédiennes. Le résultat global en découlera pourvu que les sections que nous aurons alors construites se recollent sur la fibre centrale. De façon à en être certain, nous imposerons à toutes les sections d'envoyer le point central a_0 sur le point de Gauß η_1 de la fibre centrale.

Notons

$$B_{um} = \bigcup_{m \in \Sigma_f} B_m$$

la partie ultramétrique de B . On définit une section topologique σ_G de la projection π au-dessus de B_{um} en associant à tout point b de B_{um} le point de Gauß de la fibre $\pi^{-1}(b)$.

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Notons

$$V_i = \{y \in X \mid 1 - \lambda < |f_i(y)| < 1 + \lambda\}.$$

Remarquons que, quels que soient $x \in V_i$ et $\varepsilon \in [0, 1]$, nous avons $x^\varepsilon \in V_i$.

Il existe $d_i \in \mathbf{N}^*$ et $f_{i,0}, \dots, f_{i,d_i} \in A$, avec $f_{i,d_i} \neq 0$, tels que

$$f_i(T) = \sum_{j=0}^{d_i} f_{i,j} T^j.$$

Posons

$$C_i = \bigcap_{0 \leq j \leq d_i} \{b \in B_{um} \mid |f_{i,j}(a_0)| - \lambda < |f_{i,j}(b)| < |f_{i,j}(a_0)| + \lambda\}.$$

C'est un voisinage du point central a_0 de B_{um} . La section topologique σ_G de π restreinte à C_i prend ses valeurs dans V_i .

Notons D_i l'ensemble des points de B_{um} où la fonction f_{i,d_i} est inversible. Définissons alors une fonction continue ρ_i de D_i dans \mathbf{R}_+ en associant à tout point b de D_i le nombre réel

$$\rho_i(b) = \max_{0 \leq j \leq d_i - 1} \left(\left| \frac{f_{i,j}(b)}{f_{i,d_i}(b)} \right|^{\frac{1}{d_i - j}} \right).$$

Notons D'_i le voisinage ouvert de a_0 dans D_i défini par

$$D'_i = \{b \in D_i \mid |\rho_i(b)| < 1 + \lambda\}.$$

Finalement, choisissons E_i un voisinage ouvert et connexe par arcs de a_0 dans $C_i \cap D'_i$. Quels que soient $x \in E_i$ et $\varepsilon \in [0, 1]$, nous avons alors $x^\varepsilon \in E_i$.

Posons

$$E = \bigcap_{1 \leq i \leq r} E_i$$

et

$$W = V \cap \pi^{-1}(E).$$

Les première, troisième et quatrième propriétés de l'énoncé sont alors clairement vérifiées. Soit $b \in E = \pi(W)$. Quel que soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, d'après le lemme 2.3.17 et puisque $b \in D'_i$, la partie $V_i \cap \pi^{-1}(b)$ est connexe par arcs. Puisque la fibre $\pi^{-1}(b)$ est un arbre, l'intersection $V \cap \pi^{-1}(b)$ de toutes ces parties est donc connexe par arcs.

Passons maintenant aux branches archimédiennes de B . Soit $\sigma \in \Sigma_\infty$. Nous avons

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ >}} (1 - \lambda)^{1/\varepsilon} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ >}} (1 + \lambda)^{1/\varepsilon} = +\infty.$$

Par conséquent, d'après le lemme 2.3.18, il existe $\eta > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon \in]0, \eta[$, la partie

$$\bigcap_{1 \leq i \leq r} \left\{ y \in \mathbf{A}_{\hat{K}_\sigma}^{1, \text{an}} \mid (1 - \lambda)^{1/\varepsilon} < |f_i(y)|_\sigma < (1 + \lambda)^{1/\varepsilon} \right\}$$

est connexe par arcs. En d'autres termes, quel que soit $\varepsilon \in]0, \eta[$, la trace de la fibre $\pi^{-1}(a_\sigma^\varepsilon)$ sur V est connexe par arcs. Le lemme 2.3.17 nous montre que la trace de la fibre centrale $X_0 = \pi^{-1}(a_\sigma^0)$ sur V est également connexe par arcs.

Soit α un nombre réel transcendant. Considérons l'application σ_G qui au point a_σ^ε de B'_σ , avec $\varepsilon \in]0, 1]$, associe le point de X associé à la semi-norme multiplicative sur $A[T]$, bornée sur A , définie par

$$\begin{aligned} A[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ P(T) &\mapsto |P(\alpha)|_\infty^\varepsilon \end{aligned}$$

et au point a_0 associe le point de Gauß η_1 de la fibre centrale X_0 . Cette application σ_G définit une section topologique continue de la projection π au-dessus de B_σ .

Soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$. Puisque α est transcendant, nous avons $f_i(\alpha) \neq 0$ dans \hat{K}_σ . Par conséquent, il existe $\eta_i > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon \in]0, \eta_i[$, on ait

$$(1 - \lambda)^{1/\varepsilon} < |f_i(\alpha)|_\sigma < (1 + \lambda)^{1/\varepsilon}.$$

Posons $\zeta = \min_{1 \leq i \leq d} (\eta_i)$. Au-dessus du voisinage $[a_0, a_\sigma^\zeta[$ de a_0 dans B_σ , la restriction de la section σ_G est à valeurs dans V . On en déduit le résultat annoncé. \square

Nous obtenons immédiatement les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.3.20. — *Le point de Gauß de la fibre centrale possède un système fondamental de voisinages connexes par arcs.*

Corollaire 2.3.21. — *Le morphisme π est ouvert au voisinage du point de Gauß de la fibre centrale.*

Intéressons-nous, à présent, à l'anneau local.

Proposition 2.3.22. — *Notons x le point de Gauß de la fibre centrale. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps, canoniquement isomorphe au corps $K(T)$.*

Démonstration. — Commençons par prouver que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps. Il suffit de montrer que son idéal maximal est réduit à (0) . Soit f une fonction définie sur un voisinage U de x dans X et s'annulant en x . Nous voulons montrer que f s'annule encore au voisinage de x dans X .

D'après la proposition 2.3.19, il existe un voisinage ouvert W de x dans U vérifiant les propriétés suivantes :

- i)* la projection $\pi(W)$ est un voisinage ouvert connexe par arcs de $\pi(x) = a_0$ dans B ;
- ii)* il existe une section topologique de π au-dessus de $\pi(W)$ à valeurs dans W ;
- iii)* pour tout point b de $\pi(W)$, la trace de la fibre $\pi^{-1}(b)$ sur W est connexe par arcs ;
- iv)* quel que soient $x \in W$ et $\varepsilon \in [0, 1]$, le point x^ε appartient à W .

Soit $\sigma \in \Sigma$. Notons $W'_\sigma = W \cap X'_\sigma$. C'est la trace de W sur la branche σ -adique ouverte. Soit $b \in \pi(W'_\sigma)$. Soit u un point rigide de $W \cap \pi^{-1}(b)$ tel que l'extension $\hat{K}_\sigma = \mathcal{H}(b) \rightarrow \mathcal{H}(u)$ soit transcendante. Considérons l'application suivante, induite par le flot :

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & X \\ \theta & \mapsto & u^{1-\theta} \end{array} .$$

Son image définit un chemin continu tracé sur W et joignant le point u au point u^0 de la fibre centrale. Puisque l'extension $\hat{K}_\sigma = \mathcal{H}(b) \rightarrow \mathcal{H}(u)$ est transcendante, le point u^0 n'est autre que le point x , le point de Gauß de la fibre centrale. D'après le lemme 2.3.6 et la proposition 1.1.31, quel que soit $\theta \in [0, 1]$, nous avons

$$|f(\eta_1)| = |f(u^0)| = |f(u^\theta)|^0.$$

On en déduit que $|f(u)| = 0$. La fonction f s'annule donc sur tous les points transcendants de $W \cap \pi^{-1}(b)$. Puisque $W \cap \pi^{-1}(b)$ est normal et connexe, la fonction f y est identiquement nulle. Nous avons donc montré que la fonction f est identiquement nulle sur W'_σ . La continuité de f nous permet de montrer qu'elle est encore nulle sur $W \cap X_\sigma$. On en déduit finalement que la fonction f est nulle sur W .

Démontrons, à présent, la dernière partie de la proposition. Puisque l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps, le morphisme $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{H}(x)$ est injectif. L'égalité $\mathcal{H}(x) = K(T)$ nous montre qu'il est également surjectif. \square

2.3.3. Résumé

Dans cette partie, nous regroupons les résultats que nous avons obtenu concernant la droite affine analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres. Rappelons que A désigne un anneau d'entiers de corps de nombres, $B = \mathcal{M}(A)$ son spectre analytique, $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ la droite affine analytique au-dessus de A et $\pi : X \rightarrow B$ le morphisme de projection.

Théorème 2.3.23. — *i) L'espace X est de dimension topologique 3.*

ii) L'espace X est localement connexe par arcs.

iii) Le morphisme de projection $\pi : X \rightarrow B$ est ouvert.

iv) Les anneaux locaux aux points de l'espace X sont henséliens, noethériens, réguliers et de dimension inférieure à 2.

Démonstration. — Le point *i)* provient du théorème 2.2.11. Le point *ii)* est obtenu en regroupant les résultats des corollaires 2.2.4, 2.3.3, 2.3.8, 2.3.14 et 2.3.20 et de la proposition 2.2.21. Le point *iii)* est obtenu en regroupant les résultats des corollaires 2.2.3, 2.2.22, 2.3.4, 2.3.9, 2.3.15 et 2.3.21. Le point *iv)* est obtenu en regroupant les résultats de la proposition 1.3.1, des théorèmes 2.2.7, 2.2.23, 2.2.24, des corollaires 2.3.5 et 2.3.10 et des propositions 2.3.22 et 2.3.16. \square

Théorème 2.3.24. — *Les ouverts connexes de l'espace X satisfont au principe du prolongement analytique.*

Démonstration. — Soit U une partie ouverte et connexe de X . Soit f une fonction analytique définie sur U . Notons E l'ensemble des points de U au voisinage desquels la fonction f est nulle. C'est une partie ouverte de U . Montrons qu'elle est également fermée dans U . Notons $F = U \setminus E$. Soit x un point de F . Nous allons montrer que la partie F est un voisinage du point x .

Supposons, tout d'abord, que le point $\pi(x)$ est un point interne de B . Alors, la proposition 2.2.8 nous assure que F est un voisinage du point x .

Supposons, à présent, que $\pi(x)$ est le point central a_0 de B . Si le point x est de type 2 ou 3 dans la fibre centrale, alors l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps et le résultat est immédiat. Supposons donc que le point x est un point rigide de la fibre centrale. D'après la proposition 2.2.20, nous pouvons supposer que le point x est rationnel, puis, quitte à effectuer une translation, que c'est le point 0. D'après la proposition 1.3.4, il existe un voisinage compact V du point a_0 dans B et un nombre réel $r > 0$ tel que la fonction f soit définie sur la partie

$$W = \{y \in X \mid \pi(y) \in V \mid T(y) \mid \leq r\}.$$

Quitte à restreindre V , nous pouvons supposer qu'il est rationnel et connexe par arcs. D'après le théorème 2.2.27, la fonction f possède un développement en série au voisinage du disque relatif W . On lit directement sur ce développement que la fonction f n'est identiquement nulle sur aucune fibre de π au-dessus des points de V . Puisque les ouverts connexes des fibres satisfont le principe du prolongement analytique, on en déduit que $W \subset F$.

Supposons, pour finir, que $\pi(x)$ est un point extrême de B . Si x est un point rigide de sa fibre, les mêmes arguments que précédemment nous montrent que f est localement développable en série au voisinage du point x et nous permettent de conclure. Supposons donc que x soit un point de type 2 ou 3 de sa fibre. Dans ce cas, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète et π_m en est une uniformisante. Par hypothèse, la fonction f n'est pas nulle au voisinage du point x . Il existe donc un voisinage W de x dans U , un entier $p \in \mathbf{N}$ et une fonction $g \in \mathcal{O}(W)$ inversible tels que l'on ait $g(x) \neq 0$ et $f = \pi_m^p g$ dans $\mathcal{O}(W)$. Nous pouvons donc supposer que la fonction f n'est autre que la fonction π_m . Le résultat est alors immédiat. \square

Corollaire 2.3.25. — *Soit U une partie ouverte et connexe de l'espace X contenant le point de Gauß de la fibre centrale. Alors l'anneau des fonctions méromorphes sur U est l'anneau des fractions rationnelles $K(T)$.*

Démonstration. — Notons x le point de Gauß de la fibre centrale. Rappelons (cf. 2.3.22) que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est canoniquement isomorphe au corps $K(T)$. Notons $\mathcal{M}(U)$ l'anneau des fonctions méromorphes sur U . D'après le principe du prolongement analytique, l'application canonique

$$\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} = K(T)$$

est injective. Il est clair qu'elle est aussi surjective. \square

2.3.4. Cohérence

Dans cette partie, nous montrons que le faisceau structural \mathcal{O}_X de la droite analytique X est cohérent. Rappelons, auparavant, quelques définitions et notations. Fixons un espace localement annelé (Y, \mathcal{O}_Y) .

Définition 2.3.26. — *Un faisceau de \mathcal{O}_Y -modules \mathcal{F} est dit **localement de type fini** si, pour tout point y de Y , il existe un voisinage V de y dans Y , un entier $q \in \mathbf{N}$ et des sections $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{F}(V)$ tels que, quel que soit $z \in V$, le $\mathcal{O}_{Y,z}$ -module \mathcal{F}_z soit engendré par les germes $(F_1)_z, \dots, (F_p)_z$.*

Définition 2.3.27. — Soient V une partie ouverte de Y , \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_Y -modules, $q \in \mathbf{N}$ et $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{F}(V)$. On appelle **faisceau des relations** entre F_1, \dots, F_q , et on note $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$, le noyau du morphisme de faisceau suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_V^q &\rightarrow \mathcal{F}_V \\ (a_1, \dots, a_q) &\mapsto \sum_{i=1}^q a_i F_i \end{aligned}$$

Définition 2.3.28. — Un faisceau de \mathcal{O}_Y -modules \mathcal{F} est dit **cohérent** s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- i) le faisceau \mathcal{F} est localement de type fini ;
- ii) quels que soient l'ouvert V de Y , l'entier $q \in \mathbf{N}$ et les sections $F_1, \dots, F_q \in \mathcal{F}(V)$, le faisceau $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_q)$ des relations entre F_1, \dots, F_q est localement de type fini.

Venons-en, à présent, à la preuve de la cohérence du faisceau \mathcal{O}_X . Il est évidemment localement de type fini. Il nous reste à étudier les faisceaux de relations. Commençons par un lemme.

Lemme 2.3.29. — Soit x un point de X . Soient U un voisinage ouvert de x dans X , $p \in \mathbf{N}^*$ et $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(U)$. Notons (e_1, \dots, e_p) la base canonique de \mathcal{O}_X^p . Supposons qu'il existe $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $f_l \neq 0$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète ou un corps, alors il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que, quel que soit $y \in V$, la famille

$$(f_j e_i - f_i e_j)_{1 \leq i < j \leq p}$$

de $\mathcal{O}_{X,y}^p$ engendre le germe $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_y$.

Démonstration. — Supposons que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète. Choisissons-en une uniformisante τ . Quitte à restreindre U , nous pouvons supposer que τ est définie sur U . Notons m le minimum des valuations des éléments f_1, \dots, f_p de $\mathcal{O}_{X,x}$. Puisque l'un de ces éléments n'est pas nul, nous avons $m \in \mathbf{N}$. Remarquons que, quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous avons $\tau^{-m} f_i \in \mathcal{O}_{X,x}$. Par choix de m , il existe $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que la fonction $\tau^{-m} f_j$ soit inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Il existe donc un voisinage ouvert V de x dans U sur lequel les fonctions $\tau^{-m} f_1, \dots, \tau^{-m} f_p$ sont définies et la fonction $\tau^{-m} f_j$ inversible. D'après le théorème 2.3.23, nous pouvons supposer que la partie V est connexe.

Nous disposons de l'inclusion suivante entre faisceaux de \mathcal{O}_V -modules :

$$\mathcal{R}(\tau^{-m} f_1, \dots, \tau^{-m} f_p) \subset \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p).$$

Montrons que c'est une égalité. Il suffit pour cela de montrer que l'inclusion induit une égalité entre les germes. Soit y un point de V . Remarquons tout d'abord que l'image de τ dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,y}$ n'est pas nulle. Dans le cas contraire, le principe du prolongement analytique (cf. théorème 2.3.24) imposerait en effet à la fonction τ d'être nulle sur l'ouvert connexe V tout entier, mais nous savons qu'elle n'est pas nulle au voisinage du point x . Soit $(a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_y$. Nous avons alors

$$\sum_{i=1}^p a_i f_i = \tau^m \left(\sum_{i=1}^p a_i \tau^{-m} f_i \right) = 0 \text{ dans } \mathcal{O}_{X,y}.$$

D'après le théorème 2.3.23, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,y}$ est intègre. On en déduit que

$$(a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{R}(\tau^{-m} f_1, \dots, \tau^{-m} f_p)_y.$$

Par conséquent, nous pouvons supposer qu'il existe $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que la fonction f_j est inversible sur V . Soient $y \in V$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_y$. Nous avons alors

$$\sum_{i=1}^p a_i f_i = 0 \text{ dans } \mathcal{O}_{X,y}.$$

Pour conclure, il nous suffit de remarquer que, dans $\mathcal{O}_{X,y}^p$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} a_i f_j^{-1} (f_j e_i - f_i e_j) &= \sum_{i \neq j} a_i e_i - \left(\sum_{i \neq j} a_i f_i \right) f_j^{-1} e_j \\ &= \sum_{i \neq j} a_i e_i - (-a_j f_j) f_j^{-1} e_j \\ &= \sum_{i=1}^p a_i e_i. \end{aligned}$$

On démontre le résultat par la même méthode lorsque l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps. Dans ce cas, les réductions préliminaires sont inutiles et l'on passe directement à la dernière étape. \square

Démontrons, finalement, le résultat attendu.

Théorème 2.3.30. — *Le faisceau structural \mathcal{O}_X est cohérent.*

Démonstration. — Soit x un point de X . Soient U un voisinage ouvert de x dans X , $p \in \mathbf{N}^*$ et $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(U)$. Il nous suffit de montrer que le faisceau des relations $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ est de type fini au voisinage du point x .

Si les fonctions f_1, \dots, f_p sont nulles dans $\mathcal{O}_{X,x}$, alors, par le principe du prolongement analytique, elles sont nulles au voisinage du point x et le résultat

est immédiat. Par conséquent, nous pouvons supposer qu'il existe $l \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $f_l \neq 0$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète ou un corps, alors le lemme précédent nous permet de conclure.

Il nous reste, à présent, à traiter le cas où l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est ni un anneau de valuation discrète, ni un corps. Cela impose au point x d'être un point rigide d'une fibre extrême.

D'après le théorème 2.2.23, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est noethérien. Par conséquent, le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_x$ est de type fini. Il existe donc un entier $q \in \mathbf{N}^*$, un voisinage ouvert V de x et des fonctions $g_1, \dots, g_q \in \mathcal{O}(V)^p$ tels que le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_x$ soit engendré par $((g_1)_x, \dots, (g_q)_x)$.

Puisque les fibres extrêmes sont des droites analytiques sur des corps trivialement valués, l'ensemble de leurs points rigides est discret. Par conséquent, l'ensemble des points de X en lequel l'anneau local est de dimension 2 forme une partie discrète de l'espace X . Quitte à restreindre V , nous pouvons donc supposer que x est le seul point de V en lequel l'anneau local n'est ni un anneau de valuation discrète, ni un corps. Alors, d'après le lemme précédent, quel que soit $y \in V \setminus \{x\}$, le $\mathcal{O}_{X,y}$ -module $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_y$ est engendré par la famille $(f_j e_i - f_i e_j)_{1 \leq i < j \leq p}$ de $\mathcal{O}_{X,y}^p$. Par conséquent, le faisceau $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ est de type fini au voisinage du point x . \square

CHAPITRE 3

ESPACES DE STEIN

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques sous-espaces de Stein de la droite analytique $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ au-dessus de $B = \mathcal{M}(A)$. Précisément, nous démontrons que certaines parties assez simples, à savoir les disques et les couronnes au-dessus de certaines parties de $\mathcal{M}(A)$, sont des sous-espaces de Stein de X .

Afin de parvenir au résultat, nous suivons ici la même stratégie qu'en géométrie analytique complexe. Dans la première partie, nous démontrons le résultat en petite dimension, c'est-à-dire pour les disques et couronnes des fibres. Dans la deuxième partie, nous en déduisons, à l'aide de propriétés de recollement, que les disques et couronnes compacts de l'espace X tout entier sont des sous-espaces de Stein. Dans la troisième partie, enfin, nous expliquons comment obtenir le résultat pour les disques et couronnes ouverts, par le biais d'exhaustions adéquates.

Avant d'en venir aux démonstrations annoncées, rappelons quelques définitions. Soit C une partie de X et $j : C \hookrightarrow X$ l'inclusion d'espaces topologiques correspondante. Nous faisons de C un espace localement annelé en le munissant du faisceau $\mathcal{O}_C = j^{-1}\mathcal{O}_X$. Si la partie C est ouverte, nous la munissons simplement du faisceau \mathcal{O} restreint à C . Dans le cas général, nous munissons la partie C du faisceau des fonctions surconvergentes. En particulier, si C est un disque compact d'une fibre au-dessus d'un corps ultramétrique, l'anneau des sections globales $\mathcal{O}_C(C)$ n'est pas une algèbre de Tate, mais une algèbre de séries surconvergentes.

Expliquons, maintenant, ce que nous entendons par sous-espace de Stein de la droite analytique X . Nous utiliserons la définition cohomologique classique.

Définition 3.0.1. — Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_C -modules. Nous dirons que le faisceau \mathcal{F} vérifie le **théorème A** si, quel que soit $x \in C$, le $\mathcal{O}_{C,x}$ -module \mathcal{F}_x est engendré par l'ensemble de ses sections globales $\mathcal{F}(C)$.

Soient U une partie de X contenant C , $i : C \hookrightarrow U$ le morphisme d'inclusion et \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_U -modules. Nous dirons que le faisceau \mathcal{F} vérifie le théorème A sur C si le faisceau de \mathcal{O}_C -modules $i^{-1}\mathcal{F}$ vérifie le théorème A.

Définition 3.0.2. — Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_C -modules. Nous dirons que le faisceau \mathcal{F} vérifie le **théorème B** si, quel que soit $q \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$H^q(C, \mathcal{F}) = 0.$$

Soient U une partie de X contenant C , $i : C \hookrightarrow U$ le morphisme d'inclusion et \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_U -modules. Nous dirons que le faisceau \mathcal{F} vérifie le théorème B sur C si le faisceau de \mathcal{O}_C -modules $i^{-1}\mathcal{F}$ vérifie le théorème B.

Définition 3.0.3. — Nous dirons que l'espace C est un **sous-espace de Stein de X** si tout faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent vérifie les théorèmes A et B.

Signalons que les propriétés de finitude des faisceaux cohérents imposent, lorsque la partie C est compacte, des liens entre les faisceaux cohérents sur C et les faisceaux cohérents définis sur un voisinage de C .

Proposition 3.0.4. — Soient U un voisinage ouvert de C et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur U . Alors le faisceau $j^{-1}\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur C .

Réciproquement, soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur C . Supposons que la partie C est compacte. Alors, il existe un voisinage ouvert U de C et un faisceau cohérent \mathcal{G} sur U tels que $\mathcal{F} = j^{-1}\mathcal{G}$.

Démonstration. — La première partie de la proposition est immédiate. La seconde est démontrée dans [18], proposition 1. La preuve proposée est écrite dans le langage de la géométrie analytique complexe, mais elle s'adapte à notre cadre, sans la moindre modification. \square

Ce résultat nous permettra, dans la suite de ce chapitre, de ne plus distinguer entre faisceaux cohérents sur une partie compacte et faisceaux cohérents au voisinage de cette partie.

3.1. Théorèmes A et B pour les couronnes fermées des fibres

Soient $b \in B$ et $r, s \in \mathbf{R}_+$ vérifiant $r \leq s$. Nous nous intéresserons ici à la couronne fermée C de la fibre $\pi^{-1}(b)$ définie de la façon suivante

$$C = \{y \in \pi^{-1}(b) \mid r \leq |T(y)| \leq s\}.$$

Précisément, nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème 3.1.1. — *La couronne C est un sous-espace de Stein de X .*

Pour démontrer ce résultat, nous allons distinguer plusieurs cas, selon le type du point b .

3.1.1. Fibres internes

Intéressons-nous tout d'abord au cas des fibres internes. La proposition 2.2.6 nous permet alors de nous ramener au cas des espaces sur un corps.

Proposition 3.1.2. — *La couronne C est un sous-espace de Stein de X .*

Démonstration. — Notons

$$j_b : \pi^{-1}(b) \hookrightarrow X$$

le morphisme d'inclusion. Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur C . Le faisceau de $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(b)}$ -modules $j_b^{-1}\mathcal{F}$ est encore un faisceau cohérent sur C . D'après la proposition 2.2.6, il nous suffit de montrer que le faisceau $j_b^{-1}\mathcal{F}$ vérifie les théorèmes A et B.

Distinguons, à présent, deux cas. Si le point b appartient à une branche ultramétrique, son corps résiduel $\mathcal{H}(b)$ est muni d'une valeur absolue ultramétrique non triviale. Si $s > 0$, le sous-ensemble C de la fibre $\pi^{-1}(b)$ est un domaine affinoïde $\pi^{-1}(b)$. D'après [28], proposition 3.1, le faisceau cohérent $j_b^{-1}\mathcal{F}$ vérifie les théorèmes A et B. Si $s = 0$, l'ensemble C est réduit à un point et la conclusion précédente reste valable.

Si le point b appartient à une branche archimédienne, le faisceau cohérent $j_b^{-1}\mathcal{F}$ vérifie encore les théorèmes A et B. En effet, les couronnes fermées de \mathbf{C} sont holomorphiquement convexes et sont donc des espaces de Stein.

□

3.1.2. Fibre centrale

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux couronnes de la fibre centrale. Nous supposerons donc que $b = a_0 \in B$. Rappelons que, pour $r \in \mathbf{R}_+$, nous notons η_r le point de la fibre centrale X_0 associée à la semi-norme multiplicative

$$\begin{aligned} K[T] &\rightarrow \mathbf{R}_+ \\ P(T) = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k T^k &\mapsto \max_{k \in \mathbf{N}} (|a_k|_0 r^k) = r^{v_T(P)}. \end{aligned}$$

Lemme 3.1.3. — Soient $s \in]0, 1[$ et $f \in \mathcal{O}_{X, \eta_s}$. Supposons que la fonction f n'est pas nulle. Alors il existe une fonction g définie et inversible au voisinage de $[0, \eta_1[$ et une fonction h définie et inversible au voisinage de $]0, \infty[$ telles que l'on ait l'égalité

$$f = \frac{g}{h},$$

au voisinage de η_s .

Démonstration. — Il existe un sous-ensemble fini Σ' de Σ_∞ , des nombres réels $t \in]s, +\infty[$ et $u \in]0, 1[$, un entier relatif k_0 et une suite $(a_k)_{k \geq k_0}$ de $\bigcap_{\sigma \notin \Sigma'} A_\sigma$ vérifiant les conditions suivantes :

$$i) \quad \forall \sigma \in \Sigma', \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|_\sigma^u t^k = 0;$$

$$ii) \quad f = \sum_{k \geq k_0} a_k T^k.$$

Nous pouvons supposer que $a_{k_0} \neq 0$. Considérons la fonction

$$h = T^{-k_0} f = \sum_{k \geq 0} a_{k+k_0} T^k.$$

Cette fonction est définie au voisinage de $[0, \eta_s]$, et donc de $[0, \eta_1[$, par les propriétés du flot (cf. 1.1.31). En outre, cette fonction est inversible au voisinage de $[0, \eta_1[$, car elle est inversible au voisinage de tout point de ce segment. Il suffit à présent de remarquer que la fonction $h^{-1}f = T^{k_0}$ est définie et inversible au voisinage de $]0, \infty[$. \square

Lemme 3.1.4. — Soient $s^-, s, s^+ \in \mathbf{R}_+^*$ vérifiant

$$s^- \leq s \leq s^+ \text{ et } s \neq 1.$$

Posons

$$K^- = \{x \in X_0 \mid s^- \leq |T(x)| \leq s\} = [\eta_{s^-}, \eta_s],$$

$$K^+ = \{x \in X_0 \mid s \leq |T(x)| \leq s^+\} = [\eta_s, \eta_{s^+}]$$

et

$$M = K^- \cup K^+.$$

Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur M . Si le faisceau \mathcal{F} vérifie le théorème A sur les compacts K^- et K^+ , alors il en est de même sur le compact M .

Démonstration. — Nous supposons que $s \in]0, 1[$. Le cas où $s \in]1, +\infty[$ s'en déduit en changeant T en T^{-1} . Par hypothèse, il existe $p \in \mathbf{N}$ et $t_1^-, \dots, t_p^- \in \mathcal{F}(K^-)$ tels que, quel que soit $x \in K^-$, les images de t_1^-, \dots, t_p^- dans \mathcal{F}_x engendrent \mathcal{F}_x en tant que $\mathcal{O}_{X,x}$ -module. De même, il existe $q \in \mathbf{N}$ et $t_1^+, \dots, t_q^+ \in \mathcal{F}(K^+)$ tels que, quel que soit $x \in K^+$, les images de t_1^+, \dots, t_q^+ dans \mathcal{F}_x engendrent \mathcal{F}_x en tant que $\mathcal{O}_{X,x}$ -module.

Notons

$$T^- = \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \text{ et } T^+ = \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix}.$$

Puisque $\eta_s \in K^- \cap K^+$, il existe des matrices

$$U = (u_{\alpha,i}) \in M_{p,q}(\mathcal{O}_{\eta_s}) \text{ et } V = (v_{\beta,j}) \in M_{q,p}(\mathcal{O}_{\eta_s})$$

vérifiant dans \mathcal{F}_{η_s} les égalités suivantes

$$\begin{cases} T^- &= U T^+; \\ T^+ &= V T^-. \end{cases}$$

D'après le lemme 3.1.3, il existe une fonction h définie et inversible au voisinage de K^+ telle que, quel que soit $(\beta, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction $h v_{\beta,j}$ se prolonge au voisinage de K^- . Quitte à remplacer $v_{\beta,j}$ par $h v_{\beta,j}$, pour $(\beta, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, t_j^+ par $h t_j^+$, pour $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $u_{\alpha,i}$ par $h^{-1} u_{\alpha,i}$, pour $(\alpha, i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, nous pouvons supposer que, quel que soit $(\beta, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction $v_{\beta,j}$ s'étend à K^- . Cette manipulation est licite car, quel que soit $x \in K^+$, la fonction h est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

D'après le lemme 3.1.3, il existe une fonction g définie et inversible sur K^- telle que, quel que soit $(\alpha, i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, la fonction $g^{-1} u_{\alpha,i}$ se prolonge au voisinage de K^+ . Quitte à remplacer $u_{\alpha,i}$ par $g^{-1} u_{\alpha,i}$, pour $(\alpha, i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, t_i^- par $g^{-1} t_i^-$, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $v_{\beta,j}$ par $g v_{\beta,j}$, pour $(\beta, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, nous pouvons supposer que, quel que soit $(\alpha, i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, la fonction $u_{\alpha,i}$ s'étend à K^+ . Cette manipulation est licite car, quel que soit $x \in K^-$, la fonction g est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Des propriétés de prolongement et des égalités

$$\begin{cases} T^- &= U T^+ \\ T^+ &= V T^- \end{cases},$$

nous déduisons finalement que les sections $t_1^-, \dots, t_p^-, t_1^+, \dots, t_q^+$ peuvent s'étendre à M . Par conséquent, le faisceau \mathcal{F} vérifie le théorème A sur le compact M . \square

Proposition 3.1.5. — *Tout faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent vérifie le théorème A.*

Démonstration. — Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent. Soit $x \in C$. Le faisceau \mathcal{F} vérifie le théorème A sur le compact $\{x\}$ car il est de type fini, par définition. Par conséquent, il le vérifie également au voisinage du point x . Puisque C est compact, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et $s_0, \dots, s_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$r = s_0 < s_1 < \dots < s_n = s$$

et, quel que soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le faisceau \mathcal{F} vérifie le théorème A sur l'intervalle $[\eta_{s_i}, \eta_{s_{i+1}}]$. Nous pouvons supposer qu'aucun des s_i , avec $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, n'est égal à 1. Le lemme précédent nous permet alors de conclure. \square

Venons-en, maintenant, à la démonstration du théorème B. De nouveau, nous procéderons en deux étapes.

Lemme 3.1.6. — *Soient $s \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $\lambda \in \mathcal{O}_{X, \eta_s}$. Il existe une fonction λ^- définie au voisinage de $[0, \eta_s]$ et une fonction λ^+ définie au voisinage de $[\eta_s, \infty[$ telles que*

$$\lambda = \lambda^- - \lambda^+ \text{ dans } \mathcal{O}_{X, \eta_s}.$$

Démonstration. — Nous supposons que $s \in]0, 1[$. Le cas $s \in]1, +\infty[$ s'en déduit en changeant T en T^{-1} . Il existe un sous-ensemble fini Σ' de Σ_∞ , des nombres réels $t \in]s, +\infty[$ et $u \in]0, 1[$, un entier relatif k_0 et une suite $(a_k)_{k \geq k_0}$ de $\bigcap_{\sigma \notin \Sigma'} A_\sigma$ vérifiant les conditions suivantes :

$$i) \forall \sigma \in \Sigma', \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|_\sigma^u t^k = 0;$$

$$ii) f = \sum_{k \geq k_0} a_k T^k.$$

Posons

$$\lambda^- = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \text{ et } \lambda^+ = - \sum_{k=k_0}^{-1} a_k T^k.$$

Alors la fonction λ^- se prolonge au voisinage de $[0, \eta_s]$, la fonction λ^+ se prolonge au voisinage de $[\eta_s, \infty[$ et elles vérifient $\lambda = \lambda^- - \lambda^+$ dans \mathcal{O}_{X, η_s} . \square

Proposition 3.1.7. — *Tout faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent vérifie le théorème B.*

Démonstration. — Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur C . Puisque l'espace C est de dimension topologique 1, quel que soit $q \geq 2$, on a $H^q(C, \mathcal{F}) = 0$. Il nous reste à calculer $H^1(C, \mathcal{F})$. Soit

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{I}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{d} \dots$$

une résolution injective de \mathcal{F} . Soit γ un cocycle de degré 1 sur C . Quel que soit $x \in C$, il existe $\beta_x \in (\mathcal{I}_0)_x$ tel que

$$d(\beta_x) = \gamma_x \text{ dans } (\mathcal{I}_1)_x.$$

La section β_x est définie sur un voisinage de x et l'égalité précédente reste vraie au voisinage de x . Par compacité de C , il existe $n \in \mathbf{N}^*$ et $s_0, \dots, s_n \in \mathbf{R}$ tels que

$$r = s_0 < s_1 < \dots < s_n = s$$

et, quel que soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, γ soit un cobord sur $[\eta_{s_i}, \eta_{s_{i+1}}]$. Nous pouvons supposer que, quel que soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $s_i \neq 1$.

Il nous reste à résoudre le problème suivant. Soient $s^-, s, s^+ \in \mathbf{R}_+$ vérifiant $s^- < s < s^+$ et $s \neq 1$. Posons

$$K^- = [\eta_{s^-}, \eta_s], K^+ = [\eta_s, \eta_{s^+}] \text{ et } M = K^- \cup K^+.$$

Supposons qu'il existe $\beta^- \in \mathcal{I}_0(K^-)$ et $\beta^+ \in \mathcal{I}_0(K^+)$ tels que

$$d(\beta^-) = \gamma \text{ sur } K^- \text{ et } d(\beta^+) = \gamma \text{ sur } K^+.$$

Nous devons montrer qu'il existe $\beta \in \mathcal{I}_0(M)$ tels que

$$d(\beta) = \gamma \text{ sur } M.$$

Observons que l'on a $d(\beta^- - \beta^+) = 0$ dans $(\mathcal{I}_1)_{\eta_s}$. On en déduit que $\beta^- - \beta^+ \in \mathcal{F}_{\eta_s}$. D'après le théorème A, il existe $m \in \mathbf{N}$ et $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{F}(M)$ dont les images engendrent \mathcal{F}_{η_s} comme \mathcal{O}_{Y, η_s} -module. Par conséquent, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathcal{O}_{Y, \eta_s}$ tels que

$$\beta^- - \beta^+ = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \text{ dans } \mathcal{F}_{\eta_s}.$$

D'après le lemme précédent, quel que soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe $\lambda_i^- \in \mathcal{O}(K^-)$ et $\lambda_i^+ \in \mathcal{O}(K^+)$ tels que

$$\lambda_i = \lambda_i^- - \lambda_i^+ \text{ dans } \mathcal{O}_{X, \eta_s}.$$

On a alors l'égalité

$$\beta^- - \sum_{i=1}^m \lambda_i^- u_i = \beta^+ - \sum_{i=1}^m \lambda_i^+ u_i \text{ dans } (\mathcal{I}_0)_{\eta_s}.$$

Par conséquent, nous pouvons définir un élément β de $\mathcal{S}_0(M)$ en posant

$$\begin{cases} \beta|_{K^-} &= \beta^- - \sum_{i=1}^m \lambda_i^- u_i ; \\ \beta|_{K^+} &= \beta^+ - \sum_{i=1}^m \lambda_i^+ u_i . \end{cases}$$

Nous avons alors

$$d(\beta) = \gamma \text{ dans } \mathcal{S}_1(M).$$

□

3.1.3. Fibres extrêmes

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux couronnes des fibres extrêmes. Nous supposons que $b = \tilde{a}_\sigma$, où $\sigma \in \Sigma_f$. Le raisonnement est le même que dans le paragraphe précédent. Il suffit d'adapter les lemmes 3.1.6 et 3.1.3 comme indiqué ci-dessous. Remarquons que ce sont des cas particuliers des lemmes de Cousin et Cartan.

Lemme 3.1.8. — *Soit $s \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. Posons*

$$K^- = \{x \in \tilde{X}_\sigma \mid |T(x)| \leq s\} = [0, \eta_s]$$

et

$$K^+ = \{x \in \tilde{X}_\sigma \mid |T(x)| \geq s\} = [\eta_s, \infty[.$$

Quel que soit $\lambda \in \mathcal{O}_{X, \eta_s}$, il existe $\lambda^- \in \mathcal{O}(K^-)$ et $\lambda^+ \in \mathcal{O}(K^+)$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) $\lambda = \lambda^- - \lambda^+$ dans \mathcal{O}_{X, η_s} ;
- ii) $\|\lambda^-\|_{K^-} \leq |\lambda(\eta_s)|$;
- iii) $\|\lambda^+\|_{K^+} \leq |\lambda(\eta_s)|$.

Démonstration. — Nous supposons que $s < 1$. L'autre cas s'en déduit en changeant T en T^{-1} . Soit $\lambda \in \mathcal{O}_{X, \eta_s}$. Il existe $u \in [0, +\infty[$ et une famille $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de \hat{A}_σ vérifiant les conditions suivantes :

- a) $\lim_{k \rightarrow -\infty} |a_k|_\sigma^u s^k = 0$;
- b) $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$.

Posons

$$\lambda^- = \sum_{k \geq 0} a_k T^k \text{ et } \lambda^+ = - \sum_{k \leq -1} a_k T^k.$$

Alors la fonction λ^- se prolonge au voisinage de K^- , la fonction λ^+ se prolonge au voisinage de K^+ et elles vérifient les conditions requises. \square

Lemme 3.1.9. — Soient $s \in]0, 1[$ et $f \in \mathcal{O}_{X, \eta_s}$. Il existe $N \in \mathbf{N}$, une fonction g définie et inversible au voisinage de $[0, \eta_1[$ et une fonction h définie et inversible au voisinage de $]0, \infty[$ telles que l'on ait l'égalité

$$f = \pi_\sigma^N \frac{g}{h},$$

au voisinage de η_s .

Démonstration. — L'anneau local \mathcal{O}_{X, η_s} est un anneau de valuation discrète d'uniformisante π_σ . Notons $N \in \mathbf{N}$ la valuation de f dans cet anneau. Quitte à diviser f par π_σ^N , nous pouvons supposer que $f(\eta_s) \neq 0$.

Il existe alors $u \in]0, +\infty[$ et une famille $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de \hat{A}_σ vérifiant les conditions suivantes :

- i) $\lim_{k \rightarrow -\infty} |a_k|_\sigma^u s^k = 0$;
- ii) $\max_{k \in \mathbf{Z}} (|a_k|_\sigma) = 1$;
- iii) $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$.

Quitte à multiplier f par un monôme de la forme αT^n , avec $\alpha \in \hat{A}_\sigma^\times$ et $n \in \mathbf{Z}$, nous pouvons supposer que $\max_{k < 0} (|a_k|_\sigma) < 1$ et que $a_0 = 1$. Les propriétés du flot (cf. 1.1.31) nous montrent qu'il est équivalent de démontrer le résultat pour n'importe quel anneau local du type \mathcal{O}_{X, η_t} , avec $t \in]0, 1[$. Par conséquent, nous pouvons supposer que

$$\sum_{k \geq 1} s^k \leq 1/2.$$

Nous avons alors

$$|f(\eta_s) - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Posons

$$K^- = \{x \in \tilde{X}_\sigma \mid |T(x)| \leq s\} = [0, \eta_s]$$

et

$$K^+ = \{x \in \tilde{X}_\sigma \mid |T(x)| \geq s\} = [\eta_s, \infty[.$$

Construisons par récurrence une suite $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de \mathcal{O}_{X, η_s} , une suite $(f_k^-)_{k \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{O}(K^-)$ et une suite $(f_k^+)_{k \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{O}(K^+)$ vérifiant les conditions suivantes : quel que soit $k \in \mathbf{N}$, on a

- i)* $f_k = f_k^- + f_k^+$ dans \mathcal{O}_{X, η_s} ;
- ii)* $\|f_k^-\|_{K^-} \leq 2^{-2^k}$;
- iii)* $\|f_k^+\|_{K^+} \leq 2^{-2^k}$;
- iv)* $|f_k(\eta_s)| \leq 2^{-2^k}$;
- v)* $1 + f_{k+1} = (1 - f_k^-)(1 + f_k)(1 - f_k^+)$ dans \mathcal{O}_{X, η_s} .

Initialisons la récurrence en posant $f_0 = f - 1$. Nous avons alors $|f_0(\eta_s)| \leq 1/2$. D'après le lemme précédent, il existe $f_0^- \in \mathcal{O}(K^-)$ et $f_0^+ \in \mathcal{O}(K^+)$ vérifiant

- i)* $f_0 = f_0^- + f_0^+$ dans \mathcal{O}_{X, η_s} ;
- ii)* $\|f_0^-\|_{K^-} \leq |f_0(\eta_s)| \leq \frac{1}{2}$;
- iii)* $\|f_0^+\|_{K^+} \leq |f_0(\eta_s)| \leq \frac{1}{2}$.

Soit $k \in \mathbf{N}$ et supposons avoir construit les $k + 1$ premiers termes de chaque suite. Posons

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= (1 - f_k^-)(1 + f_k)(1 - f_k^+) - 1 \\ &= f_k - f_k^- - f_k^+ - f_k^- f_k + f_k^- f_k^+ - f_k f_k^+ + f_k^- f_k f_k^+ \\ &= -f_k^- f_k + f_k^- f_k^+ - f_k f_k^+ + f_k^- f_k f_k^+. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité ultramétrique, nous avons alors

$$|f_{k+1}(\eta_s)| \leq \left(2^{-2^k}\right)^2 = 2^{-2^{k+1}}.$$

D'après le lemme précédent, il existe $f_{k+1}^- \in \mathcal{O}(K^-)$ et $f_{k+1}^+ \in \mathcal{O}(K^+)$ vérifiant

- i)* $f_{k+1} = f_{k+1}^- + f_{k+1}^+$ dans \mathcal{O}_{X, η_s} ;
- ii)* $\|f_{k+1}^-\|_{K^-} \leq |f_{k+1}(\eta_s)| \leq 2^{-2^{k+1}}$;
- iii)* $\|f_{k+1}^+\|_{K^+} \leq |f_{k+1}(\eta_s)| \leq 2^{-2^{k+1}}$.

Les conditions que nous avons imposées sur les normes imposent que les produits infinis $\prod_{k \geq 0} (1 - f_k^-)$ et $\prod_{k \geq 0} (1 - f_k^+)$ convergent vers des fonctions f^- et f^+ inversibles dans $\mathcal{O}(K^-)$ et $\mathcal{O}(K^+)$. En outre, nous avons $f^- f f^+ = 1$ et donc $f = (f^-)^{-1} (f^+)^{-1}$. \square

Par le même raisonnement que dans le paragraphe précédent, nous déduisons des lemmes précédents les théorèmes A et B sur les couronnes des fibres extrêmes. Ceci conclut la démonstration du théorème 3.1.1.

3.2. Théorèmes A et B pour les couronnes fermées

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux couronnes fermées de l'espace projectif définies au-dessus de certaines parties compactes de B . Nous suivrons la stratégie mise en œuvre dans le séminaire H. Cartan et commencerons donc par démontrer des lemmes d'attachement. Le principe en est le suivant : étant donné deux compacts K^- et K^+ d'intersection L , une donnée sur L provient de deux données du même type, l'une étant définie sur K^- et l'autre sur K^+ . Nous démontrerons un tel résultat pour les fonctions analytiques (lemme de Cousin, 3.2.3), les matrices inversibles (lemme de Cartan, 3.2.8) et les sections d'un faisceau (3.2.12). Une fois ces résultats connus, les théorèmes A et B se démontrent sans peine.

3.2.1. Lemmes de Cousin et Cartan

Dans ce paragraphe, nous démontrons les lemmes de Cartan et Cousin pour des compacts d'un type particulier, que nous décrivons, à présent (*cf.* figure 1).

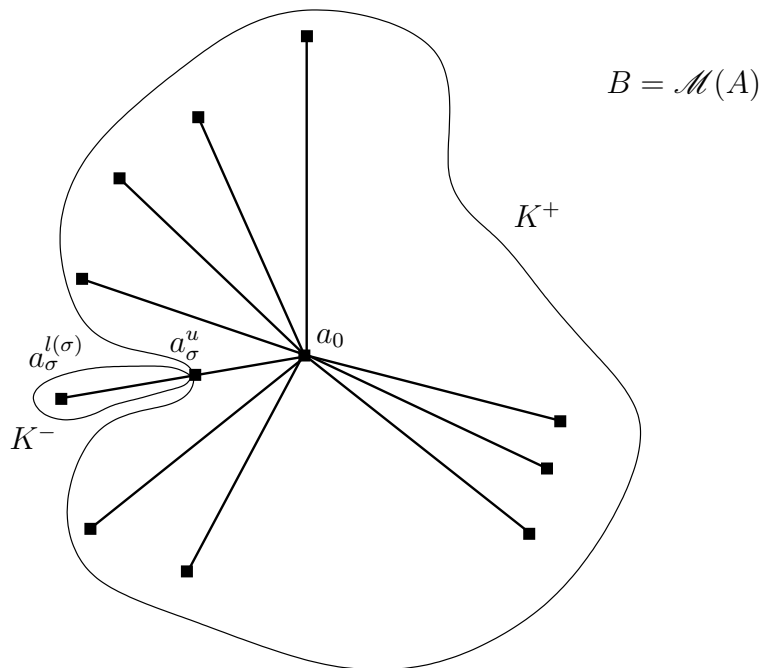


FIG. 1. Les compacts K^- et K^+ .

Soit $\sigma \in \Sigma$. Soit $u \in]0, l(\sigma)[$. Définissons des compacts de B par

$$K^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}], \quad K^+ = X \setminus]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}] \quad \text{et} \quad L = K^- \cap K^+ = \{a_\sigma^u\}.$$

Quels que soient $s, t \in [0, +\infty[$, on définit des compacts de $X = \mathbf{A}_A^{1, \text{an}}$ par

- i) $K_{s,t}^- = \overline{C}(s, t) \cap \pi^{-1}(K^-)$;
- ii) $K_{s,t}^+ = \overline{C}(s, t) \cap \pi^{-1}(K^+)$;
- iii) $L_{s,t} = \overline{C}(s, t) \cap \pi^{-1}(L) = K_{s,t}^- \cap K_{s,t}^+$.

Soient M une partie compacte de B et s et t des nombres réels positifs. Rappelons que nous avons défini, en 1.2.1, l'algèbre $\mathcal{B}(M)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$ comme l'algèbre constituée des séries de la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k,$$

où $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ désigne une famille de $\mathcal{B}(M)$ telle que les deux séries

$$\sum_{k \geq 0} a_k t^k \quad \text{et} \quad \sum_{k \leq 0} a_k s^k$$

convergent (dans le cas où $s = 0$, la seconde condition signifie simplement que, quel que soit $k < 0$, nous avons $a_k = 0$). Cette algèbre est munie de la norme $\|\cdot\|_{M,s,t}$ définie par la formule suivante :

$$\left\| \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k \right\|_{M,s,t} = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \|a_k\|_M \max(s^k, t^k).$$

Munie de cette norme, c'est une algèbre de Banach.

Supposons que M soit l'une des trois parties compactes K^- , K^+ ou L . Dans ce cas, les anneaux $\mathcal{O}(M)$ et $\mathcal{B}(M)$ sont isomorphes. D'après les propositions 2.2.26 et 2.2.29, le morphisme naturel $A[T] \rightarrow A[[T]]$ se prolonge en un morphisme injectif

$$\mathcal{O}(\overline{C}(r, s) \cap \pi^{-1}(M)) \hookrightarrow \mathcal{B}(M)\langle r \leq |T| \leq s \rangle.$$

Nous pouvons donc également considérer la norme $\|\cdot\|_{M,s,t}$ sur l'anneau $\mathcal{O}(\overline{C}(s, t) \cap \pi^{-1}(M))$. Plutôt que de démontrer directement les lemmes d'attachement sur les anneaux de fonctions surconvergentes, nous allons les démontrer sur les anneaux de séries. Le fait que ce soient des anneaux de Banach et que leurs éléments possèdent des descriptions très explicites nous facilitera grandement la tâche.

Commençons par un résultat de théorie des nombres.

Lemme 3.2.1. — *Il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que, quel que soit*

$$(x_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_\infty} \in \prod_{\sigma \in \Sigma_\infty} \hat{K}_\sigma,$$

il existe $y \in A$ vérifiant

$$\forall \sigma \in \Sigma_\infty, |y - x_\sigma|_\sigma \leq C.$$

Démonstration. — Notons r_1 le nombre de places réelles de K et $2r_2$ le nombre de places complexes de K . Le résultat découle directement du fait que l'image de l'anneau des entiers A par l'application

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathbf{R}^{r_1} \times \mathbf{C}^{r_2} \simeq \mathbf{R}^{r_1+2r_2} \\ x &\mapsto (\sigma(x))_{\sigma \in \Sigma_\infty} \end{aligned}$$

est un réseau. □

Venons-en, maintenant, au lemme d'attachement de Cousin. Nous commencerons par le démontrer sur l'espace B .

Lemme 3.2.2. — *Il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que, quel que soit $a \in \mathcal{B}(L)$, il existe $a^- \in \mathcal{B}(K^-)$ et $a^+ \in \mathcal{B}(K^+)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- i) $a = a^- - a^+$ dans $\mathcal{B}(L)$;
- ii) $\|a^-\|_{K^-} \leq D \|a\|_L$;
- iii) $\|a^+\|_{K^+} \leq D \|a\|_L$.

Démonstration. — Le lemme 3.2.1 nous assure l'existence d'une constante $C \in \mathbf{R}$ ne dépendant que du corps de nombres K vérifiant certaines propriétés. Nous pouvons, sans perdre de généralité, supposer que $C \geq 1$. Soit $a \in \mathcal{B}(L)$. Remarquons que l'anneau $\mathcal{B}(L)$ est isomorphe au corps \hat{K}_σ muni de la valeur absolue $|\cdot|_\sigma^u$. Dans le raisonnement qui suit, nous aurons besoin de connaître le type de σ .

Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_\infty$. Dans ce cas, nous avons

$$\mathcal{B}(K^-) = \hat{K}_\sigma \text{ et } \|\cdot\|_{K^-} = \max(|\cdot|_\sigma^u, |\cdot|_\sigma)$$

et

$$\mathcal{B}(K^+) = A \text{ et } \|\cdot\|_{K^+} = \max_{\sigma' \in \Sigma_\infty \setminus \{\sigma\}} (|\cdot|_{\sigma'}).$$

Distinguons plusieurs cas. Supposons, tout d'abord, que $|a|_\sigma \geq 1$. Puisque $\sigma \in \Sigma_\infty$, le nombre réel $|a|_\sigma^u$ est un élément de \hat{K}_σ . Par définition de C , il existe $b \in A$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $|b + |a|_\sigma^u|_\sigma \leq C$;
2. $\forall \sigma' \in \Sigma_\infty \setminus \{\sigma\}, |b|_{\sigma'} \leq C$.

Quel que soit $\sigma' \in \Sigma_\infty \setminus \{\sigma\}$, nous avons donc

$$|b|_{\sigma'} \leq C \leq C |a|_\sigma^u.$$

De nouveau, nous allons distinguer deux cas. Supposons, tout d'abord, que $|b|_\sigma \geq 1$.

De la première inégalité, nous tirons

$$\begin{aligned} |b|_\sigma &\leq |a|_\sigma^u + C \\ &\leq (C+1) |a|_\sigma^u. \end{aligned}$$

Puisque $|b|_\sigma \geq 1$, nous avons également $|b|_\sigma^u \leq (C+1) |a|_\sigma^u$. Si $|b|_\sigma \leq 1$, nous avons encore $|b|_\sigma \leq (C+1) |a|_\sigma^u$.

Supposons, à présent, que $|a|_\sigma \leq 1$. Nous avons alors l'égalité $\|a\|_{K^-} = |a|_\sigma^u$. Nous posons $b = 0$.

Dans tous les cas, il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que $\|a+b\|_{K^-} \leq D |a|_\sigma^u$ et $\|b\|_{K^+} \leq D |a|_\sigma^u$. Nous pouvons, par exemple, choisir $D = C + 2$. Les éléments $a^- = a + b$ de $\mathcal{B}(K^-)$ et $a^+ = b$ de $\mathcal{B}(K^+)$ vérifient les propriétés demandées.

Supposons, à présent, que $\sigma \in \Sigma_f$. Nous avons alors

$$\mathcal{B}(K^-) = \hat{A}_\sigma \text{ et } \|\cdot\|_{K^-} = |\cdot|_\sigma^u$$

et

$$\mathcal{B}(K^+) = \bigcap_{\sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}} A_{\sigma'} \text{ et } \|\cdot\|_{K^+} = \max \left(|\cdot|_\sigma^u, \max_{\sigma' \in \Sigma_\infty} (|\cdot|_{\sigma'}) \right).$$

Comme précédemment, nous allons distinguer plusieurs cas. Pour commencer, supposons que $|a|_\sigma \geq 1$. D'après le théorème d'approximation fort, il existe un élément b de $\bigcap_{\sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}} A_{\sigma'}$ vérifiant

$$|b+a|_\sigma \leq 1.$$

En particulier, $b+a$ appartient à $\mathcal{B}(K^-)$. Par définition de la constante C , il existe $c \in A$ vérifiant la propriété suivante : quel que soit $\sigma' \in \Sigma_\infty$, nous avons $|b+c|_{\sigma'} \leq C$. On en déduit que, quel que soit $\sigma' \in \Sigma_\infty$, nous avons

$$|b+c|_{\sigma'} \leq C \leq C |a|_\sigma^u.$$

En outre, nous avons

$$|b+c|_\sigma^u \leq \max(|a|_\sigma^u, |a+b|_\sigma^u, |c|_\sigma^u) \leq |a|_\sigma^u.$$

Supposons, à présent, que $|a|_\sigma \leq 1$. Dans ce cas, a appartient à $\mathcal{B}(K^-)$. Nous posons $b = c = 0$.

Dans tous les cas, il existe $D \in \mathbf{R}$ tel que $\|a+b+c\|_{K^-} \leq D |a|_\sigma^u$ et $\|b+c\|_{K^+} \leq D |a|_\sigma^u$. Nous pouvons, par exemple, choisir $D = C + 1$. Les éléments $a^- = a+b+c$ de $\mathcal{B}(K^-)$ et $a^+ = b+c$ de $\mathcal{B}(K^+)$ vérifient les propriétés demandées. \square

Traisons, à présent, au cas de la droite affine X .

Lemme 3.2.3 (Lemme d'attachement de Cousin)

Soit $D \in \mathbf{R}$ la constante dont le lemme précédent assure l'existence. Quels que soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$, et quel que soit $f \in \mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$, il existe $f^- \in \mathcal{B}(K^-)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$ et $f^+ \in \mathcal{B}(K^+)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $f = f^- - f^+$ dans $\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$;
- ii) $\|f^-\|_{K^-,s,t} \leq D \|f\|_{L,s,t}$;
- iii) $\|f^+\|_{K^+,s,t} \leq D \|f\|_{L,s,t}$.

Démonstration. — Soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$, et $f \in \mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$. Par définition, il existe une famille $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de $\mathcal{B}(L) = \hat{K}_\sigma$ telle que l'on ait

$$f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$$

et que les séries

$$\sum_{k \geq 0} a_k t^k \text{ et } \sum_{k \leq 0} a_k s^k$$

convergent. Soit $k \in \mathbf{Z}$. D'après le lemme 3.2.2, il existe des éléments a_k^- de $\mathcal{B}(K^-)$ et a_k^+ de $\mathcal{B}(K^+)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $a_k = a_k^- - a_k^+$ dans $\mathcal{B}(L)$;
- ii) $\|a_k^-\|_{K^-} \leq D \|a_k\|_L$;
- iii) $\|a_k^+\|_{K^+} \leq D \|a_k\|_L$.

Posons

$$f^- = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^- T^k$$

et

$$f^+ = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k^+ T^k.$$

Ces séries vérifient les conditions requises. □

Les résultats qui suivent entraînent le lemme d'attachement de Cartan, ainsi qu'il est démontré dans [27], III §1. Nous n'avons apporté que quelques modifications minimales à leur preuve.

Commençons par introduire quelques notations. Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$, M une partie compacte de B et $s, t \in [0, +\infty[$. Nous définissons la norme d'une matrice

$a = (a_{i,j}) \in M_{p,q}(\mathcal{B}(M)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ par

$$\|a\|_{M,s,t} = \max_{1 \leq i \leq p} \left(\sum_{j=1}^q \|a_{i,j}\|_{M,s,t} \right).$$

La multiplication des matrices est continue par rapport à cette norme. En effet, on vérifie facilement que, quel que soient $r \in \mathbf{N}^*$, $a \in M_{p,q}(\mathcal{B}(M)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ et $b \in M_{q,r}(\mathcal{B}(M)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$, on a

$$\|ab\|_{M,s,t} \leq \|a\|_{M,s,t} \|b\|_{M,s,t}.$$

Nous noterons $I \in M_q(\mathcal{B}(M)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ la matrice identité. Nous allons, tout d'abord, démontrer quelques lemmes.

Lemme 3.2.4. — *Toute matrice a de $M_q(\mathcal{B}(M)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant*

$$\|a - I\|_{M,s,t} \leq \frac{1}{2}$$

est inversible et son inverse a^{-1} vérifie l'inégalité

$$\|a^{-1}\|_{M,s,t} \leq 2.$$

Lemme 3.2.5. — *Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de $M_q(\mathcal{B}(M)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant la condition*

$$\sum_{k \geq 0} \|a_k - I\|_{M,s,t} \leq \frac{1}{2}.$$

Alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\|a_0 \cdots a_n - I\|_{M,s,t} \leq 2 \sum_{k=0}^n \|a_k - I\|_{M,s,t}$$

Démonstration. — Démontrons ce résultat par récurrence sur l'entier $n \in \mathbf{N}$. Pour $n = 0$, c'est évident.

Supposons que la formule est vraie pour $n \in \mathbf{N}$. Nous avons

$$\begin{aligned} a_0 \cdots a_n a_{n+1} - I &= (a_0 \cdots a_n - I)(a_{n+1} - I) \\ &\quad + (a_0 \cdots a_n - I) + (a_{n+1} - I). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|a_0 \cdots a_n a_{n+1} - I\|_{M,s,t} &\leq \|a_0 \cdots a_n - I\|_{M,s,t} \|a_{n+1} - I\|_{M,s,t} \\ &\quad + \|a_0 \cdots a_n - I\|_{M,s,t} + \|a_{n+1} - I\|_{M,s,t} \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^n \|a_k - I\|_{M,s,t} \\ &\quad + (\|a_0 \cdots a_n - I\|_{M,s,t} + 1) \|a_{n+1} - I\|_{M,s,t}. \end{aligned}$$

En outre, nous avons

$$\|a_0 \cdots a_n - I\|_{M,s,t} \leq 2 \sum_{k=0}^n \|a_k - I\|_{M,s,t} \leq 1.$$

On en déduit que

$$\|a_0 \cdots a_{n+1} - I\|_{M,s,t} \leq 2 \sum_{k=0}^{n+1} \|a_k - I\|_{M,s,t}.$$

□

Lemme 3.2.6. — Soit $(g_k)_{k \geq 0}$ une suite de $M_q(\mathcal{B}(M) \langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant

$$\sum_{k \geq 0} \|g_k\|_{M,s,t} \leq \frac{1}{4}.$$

Alors la suite de terme général

$$P_n = (I + g_0) \cdots (I + g_n)$$

converge dans $M_q(\mathcal{B}(M) \langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vers une matrice inversible P vérifiant

$$\|P - I\|_{M,s,t} \leq 2 \sum_{k \geq 0} \|g_k\|_{M,s,t}.$$

Démonstration. — D'après le lemme précédent, quels que soient $j \geq i \geq 0$, nous avons

$$\|(I + g_i) \cdots (I + g_j) - I\|_{M,s,t} \leq 2 \sum_{k=i}^j \|g_k\|_{M,s,t}.$$

En particulier, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$\|P_n - I\|_{M,s,t} \leq 2 \sum_{k=0}^n \|g_k\|_{M,s,t} \leq \frac{1}{2}$$

et donc $\|P_n\|_{M,s,t} < 3/2$. On en déduit que, quels que soient $m \geq n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \|P_m - P_n\|_{M,s,t} &= \|P_n ((I + g_{n+1}) \cdots (I + g_m) - I)\|_{M,s,t} \\ &\leq \frac{3}{2} \sum_{k=n+1}^m \|g_k\|_{M,s,t}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy de $M_q(\mathcal{B}(M) \langle s \leq |T| \leq t \rangle)$. Puisque cet anneau est complet, elle converge donc vers un élément P . Nous avons nécessairement

$$\|P - I\|_{M,s,t} \leq 2 \sum_{k \geq 0} \|g_k\|_{M,s,t} \leq \frac{1}{2}.$$

Le lemme 3.2.4 nous permet alors de conclure. □

Dans le résultat qui suit, la constante D est celle introduite au lemme 3.2.3.

Lemme 3.2.7. — Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}$ vérifiant $0 < \varepsilon < 1/2D^{-1}$ et $\beta = 4D^2\varepsilon < 1$. Soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$. Soit $a = I + b \in M_q(\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant $\|b\|_{L,s,t} \leq \varepsilon$. Alors il existe $a^- = I + b^- \in M_q(\mathcal{B}(K^-)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$, $a^+ = I + b^+ \in M_q(\mathcal{B}(K^+)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ et $\tilde{a} = I + \tilde{b} \in M_q(\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $a = a^- \tilde{a} a^+$ dans $\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$;
- ii) $\|b^-\|_{K^-,r,s} \leq D \|b\|_{L,s,t}$;
- iii) $\|b^+\|_{K^+,r,s} \leq D \|b\|_{L,s,t}$;
- iv) $\|\tilde{b}\|_{L,r,s} \leq \beta \|b\|_{L,s,t}$.

Démonstration. — En appliquant le lemme de Cousin à chaque coefficient de la matrice b , on montre qu'il existe des matrices $b^- \in M_q(\mathcal{B}(K^-)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ et $b^+ \in M_q(\mathcal{B}(K^+)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $b = b^- + b^+$ dans $\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$;
2. $\|b^-\|_{K^-,r,s} \leq D \|b\|_{L,s,t}$;
3. $\|b^+\|_{K^+,r,s} \leq D \|b\|_{L,s,t}$.

Posons $a^- = I + b^-$ et $a^+ = I + b^+$. On obtient

$$a^- a^+ = a + b^- b^+ \text{ dans } \mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle.$$

Par choix de b , nous avons $D\|b\|_{L,s,t} \leq 1/2$. D'après le lemme 3.2.4, la matrice a^- est inversible dans $M_q(\mathcal{B}(K^-)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ et vérifie $\|(a^-)^{-1}\|_{K^-,s,t} \leq 2$. De même, la matrice a^+ est inversible dans $M_q(\mathcal{B}(K^+)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ et vérifie $\|(a^+)^{-1}\|_{K^+,s,t} \leq 2$.

Posons

$$\tilde{a} = (a^-)^{-1} a (a^+)^{-1} \text{ et } \tilde{b} = \tilde{a} - I \text{ dans } M_q(\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle).$$

Dans $M_q(\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \tilde{b} &= (a^-)^{-1} a (a^+)^{-1} - I \\ &= (a^-)^{-1} (a^- a^+ - b^- b^+) (a^+)^{-1} - I \\ &= -(a^-)^{-1} b^- b^+ (a^+)^{-1} \end{aligned}$$

et nous en tirons l'inégalité

$$\|\tilde{b}\|_{L,s,t} \leq 4D^2 \|b\|_{L,s,t}^2 \leq \beta \|b\|_{L,s,t}.$$

□

Nous voici enfin prêts à démontrer le lemme de Cartan.

Théorème 3.2.8 (Lemme d'attachement de Cartan)

Il existe $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ vérifiant la propriété suivante : quels que soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$, et $a \in M_q(\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant $\|a - I\|_{L,r,s} < \varepsilon$, il existe $c^- \in GL_q(\mathcal{B}(K^-)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ et $c^+ \in GL_q(\mathcal{B}(K^+)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ telles que

- i) $a = c^- c^+$ dans $M_q(\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$;
- ii) $\|c^- - I\|_{L,s,t} \leq 4D \|a - I\|_{L,s,t}$;
- iii) $\|c^+ - I\|_{L,s,t} \leq 4D \|a - I\|_{L,s,t}$.

Démonstration. — Choisissons $\varepsilon \in \mathbf{R}$ vérifiant les conditions du lemme précédent ainsi que $\beta \leq 1/2$ et $\varepsilon \leq 1/(8D)$. Soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$, et $a \in M_q(\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant $\|a - I\|_{L,s,t} < \varepsilon$. Posons $b = a - I$ et $M = \|b\|_{L,s,t}$. Définissons, à présent, par récurrence, trois suites $(b_k^-)_{k \geq 0}$, $(b_k^+)_{k \geq 0}$ et $(\tilde{b}_k)_{k \geq 0}$ de $M_q(\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant les conditions suivantes : quel que soit $k \geq 0$, nous avons

1. $\|b_k^-\|_{K^-,s,t} \leq DM\beta^k$;
2. $\|b_k^+\|_{K^-,s,t} \leq DM\beta^k$;
3. $\|\tilde{b}_k\|_{K^-,s,t} \leq M\beta^k$

et, quel que soit $k \geq 1$, nous avons

4. $(I + b_k^-)(I + \tilde{b}_k)(I + b_k^+) = (I + \tilde{b}_{k-1})$ dans $\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$.

Initialisons la récurrence en posant $\tilde{b}_0 = b$. La troisième propriété est alors vérifiée, par la définition même de M . Posons $b_0^- = 0$ et $b_0^+ = 0$. Les première et deuxième propriétés sont alors trivialement vérifiées.

Soit $k \geq 0$ tels que b_k^- , b_k^+ et \tilde{b}_k soient déjà construits et vérifient les propriétés demandées. On a alors

$$\|\tilde{b}_k\|_{L,s,t} \leq M\beta^k \leq M \leq \varepsilon$$

et le lemme précédent appliqué avec $b = \tilde{b}_k$ nous fournit trois matrices b^- , b^+ et \tilde{b} . Posons $b_{k+1}^- = b^-$, $b_{k+1}^+ = b^+$ et $\tilde{b}_{k+1} = \tilde{b}$. La quatrième propriété est alors vérifiée.

Nous disposons, en outre, des inégalités suivantes : $\|\tilde{b}_{k+1}\|_{L,s,t} \leq \beta \|\tilde{b}_k\|_{L,s,t}$, $\|b_{k+1}^-\|_{K^-,s,t} \leq D \|\tilde{b}_k\|_{L,s,t}$ et $\|b_{k+1}^+\|_{K^+,s,t} \leq D \|\tilde{b}_k\|_{L,s,t}$. On en déduit que les trois premières propriétés sont également vérifiées.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons

$$P_n = (I + b_1^-) \cdots (I + b_n^-) \in M_q(\mathcal{B}(K^-)\langle s \leq |T| \leq t \rangle)$$

et

$$Q_n = (I + b_n^+) \cdots (I + b_1^+) \in M_q(\mathcal{B}(K^+) \langle s \leq |T| \leq t \rangle).$$

De la quatrième propriété on déduit que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, nous avons

$$a = P_n (I + \tilde{b}_n) Q_n \text{ dans } \mathcal{B}(L) \langle s \leq |T| \leq t \rangle.$$

En utilisant les trois premières et le fait que $\beta \leq 1/2$, nous obtenons

$$\sum_{k \geq 0} \|b_k^-\|_{K^-, s, t} = DM \sum_{k \geq 0} \beta^k = 2DM \leq \frac{1}{4}.$$

D'après le lemme 3.2.6, la suite $(P_n)_{n \geq 0}$ converge dans $\mathcal{B}(L) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$ vers une matrice inversible $c^- \in GL_q(\mathcal{B}(K^-) \langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant

$$\|c^- - I\|_{K^-, s, t} \leq 2 \sum_{k \geq 0} \|b_k^-\|_{K^-, s, t} \leq 4DM \leq 4D\|a - I\|_{L, s, t}.$$

De même, la suite $(Q_n)_{n \geq 0}$ converge dans $\mathcal{B}(L) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$ vers une matrice inversible $c^+ \in GL_q(\mathcal{B}(K^+) \langle s \leq |T| \leq t \rangle)$ vérifiant

$$\|c^+ - I\|_{K^+, s, t} \leq 2 \sum_{k \geq 0} \|b_k^+\|_{K^+, s, t} \leq 4DM \leq 4D\|a - I\|_{L, s, t}.$$

Puisque la suite $(\tilde{b}_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0, la suite $(P_n Q_n)_{n \geq 0}$ converge vers a . On en déduit que

$$a = c^- c^+ \text{ dans } \mathcal{B}(L) \langle s \leq |T| \leq t \rangle.$$

□

3.2.2. Attachement de sections d'un faisceau

Pour démontrer les théorèmes A et B, il ne nous suffira pas d'attacher des fonctions ou des matrices : nous devons également parvenir à attacher des sections de faisceaux. Nous commençons par énoncer un résultat concernant les anneaux d'entiers de corps de nombres qui nous sera utile par la suite.

Lemme 3.2.9. — *Soit $\sigma \in \Sigma_f$. Alors il existe $h \in A$ vérifiant les propriétés suivantes*

$$\begin{cases} |h|_\sigma < 1 ; \\ \forall \sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}, |h|_{\sigma'} = 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Notons P le point de $\text{Spec}(A)$ associé à l'idéal maximal σ . Puisque le groupe de Picard de $\text{Spec}(A)$ est fini, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que le diviseur $N[P]$ soit principal. Toute fonction $h \in A$ dont $N[P]$ est le diviseur convient. □

Nous reprenons les notations de la partie précédente. Soient $\sigma \in \Sigma$, $u \in]0, l(\sigma)[$ et $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$. Nous notons (*cf.* figure 1)

$$K^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}], \quad K^+ = B \setminus]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}] \quad \text{et} \quad L = K^- \cap K^+ = \{a_\sigma^u\}$$

et

- i) $K_{s,t}^- = \overline{C}(s, t) \cap \pi^{-1}(K^-)$;
- ii) $K_{s,t}^+ = \overline{C}(s, t) \cap \pi^{-1}(K^+)$;
- iii) $L_{s,t} = \overline{C}(s, t) \cap \pi^{-1}(L) = K_{s,t}^- \cap K_{s,t}^+$;
- iv) $M_{s,t} = K_{s,t}^- \cup K_{s,t}^+$.

Lemme 3.2.10. — Soient $p, q \in \mathbf{N}$ et $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_q \in \mathcal{B}(L) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$. Soit $\delta \in \mathbf{R}_+^*$. Si σ appartient à Σ_f , alors il existe une fonction inversible $f \in \mathcal{B}(K^+) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$, des fonctions $s'_1, \dots, s'_p \in \mathcal{B}(K^+) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$ et $t'_1, \dots, t'_q \in \mathcal{B}(K^-) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$ telles que, quel que soient $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on ait

- i) $\|f^{-1}s_i - s'_i\|_{L,s,t} \|ft_j\|_{L,s,t} \leq \delta$;
- ii) $\|f^{-1}s_i\|_{L,s,t} \|ft_j - t'_j\|_{L,s,t} \leq \delta$.

Si σ appartient à Σ_∞ , alors il existe une fonction inversible $g \in \mathcal{B}(K^-) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$, des fonctions $s''_1, \dots, s''_p \in \mathcal{B}(K^+) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$ et $t''_1, \dots, t''_q \in \mathcal{B}(K^-) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$ telles que, quel que soient $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on ait

- i) $\|gs_i - s''_i\|_{L,s,t} \|g^{-1}t_j\|_{L,s,t} \leq \delta$;
- ii) $\|gs_i\|_{L,s,t} \|g^{-1}t_j - t''_j\|_{L,s,t} \leq \delta$.

Démonstration. — Posons $M = \max\{\|s_i\|_{L,s,t}, \|t_j\|_{L,s,t}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$. Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. La fonction s_i appartient à $\mathcal{B}(L) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$. Par conséquent, il existe une famille $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de \hat{K}_σ telle que

$$s_i = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$$

et les séries

$$\sum_{k \geq 0} |a_k|_\sigma^u t^k \quad \text{et} \quad \sum_{k \leq 0} |a_k|_\sigma^u s^k$$

convergent. Il existe $n_i, n'_i \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\left\| s_i - \sum_{k=n_i}^{n'_i} a_k T^k \right\|_{L,s,t} \leq \delta.$$

Il existe également $s_i^* \in K[T, T^{-1}]$ tel que

$$\left\| \sum_{k=n_i}^{n'_i} a_k T^k - s_i^* \right\|_{L,s,t} \leq \delta.$$

Distinguons deux cas. Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_f$. D'après 3.2.9, il existe $h \in A$ telle que

$$\begin{cases} |h|_\sigma < 1 ; \\ \forall \sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}, |h|_{\sigma'} = 1. \end{cases}$$

Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on ait $h^N s_i^* \in \hat{A}_\sigma[T, T^{-1}]$. En particulier, la fonction $h^N s_i^*$ définit un élément de $\mathcal{B}(K^-)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$. Posons $f = h^{-N} \in K$. Remarquons que cette fonction est inversible dans $\mathcal{B}(K^+)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$. En outre, nous avons

$$\|f^{-1}s_i - f^{-1}s_i^*\|_{L,s,t} \leq \|f^{-1}\|_{L,s,t} \|s_i - s_i^*\|_{L,s,t} \leq 2\delta |f^{-1}|_\sigma^u.$$

Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. La fonction t_j appartient à $\mathcal{B}(L)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$. Par conséquent, il existe une famille $(b_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de \hat{K}_σ telle que

$$ft_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k T^k$$

et les séries

$$\sum_{k \geq 0} |b_k|_\sigma^u t^k \text{ et } \sum_{k \leq 0} |b_k|_\sigma^u s^k$$

convergent. Il existe $m_j, m'_j \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\left\| ft_j - \sum_{k=m_j}^{m'_j} b_k T^k \right\|_{L,s,t} \leq \delta.$$

Par le théorème d'approximation fort, quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $c_{m_j}, \dots, c_{m'_j} \in K$ tels que, quel que soit $k \in \llbracket m_j, m'_j \rrbracket$, on ait

1. $\forall \sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}, c_k \in \hat{A}_{\sigma'}$;
2. $|b_k - c_k|_\sigma^u \leq \varepsilon$.

On en déduit qu'il existe $t_j^* \in \left(\bigcap_{\sigma' \in \Sigma_f \setminus \{\sigma\}} A_{\sigma'} \right) [T, T^{-1}]$ tel que

$$\left\| \sum_{k=m_j}^{m'_j} b_k T^k - t_j^* \right\|_{L,s,t} \leq \delta.$$

En particulier, la fonction t_j^* définit un élément de $\mathcal{B}(K^+)\langle s \leq |T| \leq t \rangle$ et, quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous avons

$$\|f^{-1}s_i\|_{L,s,t} \|ft_j - t_j^*\|_{L,s,t} \leq |f^{-1}|_\sigma^u \|s_i\|_{L,s,t} 2\delta \leq 2M\delta,$$

car $f^{-1} \in A$. Quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous avons également

$$\|f^{-1}s_i - f^{-1}s_i^*\|_{L,s,t} \|ft_j\|_{L,s,t} \leq 2\delta |f^{-1}|_\sigma^u |f|_\sigma^u \|t_j\|_{L,s,t} \leq 2M\delta.$$

Supposons, à présent, que $\sigma \in \Sigma_\infty$. Il existe $g \in A$ tel que, quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait $gs_i^* \in A[T, T^{-1}]$. Remarquons que la fonction g est inversible dans $\mathcal{B}(K^-) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$ et que la fonction gs_i^* définit un élément de $\mathcal{B}(K^+) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$. En outre, quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nous avons

$$\|gs_i - gs_i^*\|_{L,s,t} \leq \|g\|_L \|s_i - s_i^*\|_{L,s,t} \leq 2|g|_\sigma^u \delta.$$

Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Puisque la fonction $g^{-1}t_j$ appartient à $\mathcal{B}(L) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$, il existe une famille $(b_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de \hat{K}_σ telle que

$$g^{-1}t_j = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k T^k$$

et les séries

$$\sum_{k \geq 0} |b_k|_\sigma^u t^k \quad \text{et} \quad \sum_{k \leq 0} |b_k|_\sigma^u s^k$$

convergent. Il existe $m_j, m'_j \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\left\| g^{-1}t_j - \sum_{k=m_j}^{m'_j} b_k T^k \right\|_{L,s,t} \leq \frac{\delta}{2 \|gs_i\|_{L,s,t}}.$$

En approchant chacun des coefficients b_k , avec $k \in \llbracket m_j, m'_j \rrbracket$, on montre qu'il existe également $t_j^* \in K[T, T^{-1}]$ tel que

$$\left\| \sum_{k=m_j}^{m'_j} b_k T^k - t_j^* \right\|_{L,s,t} \leq \frac{\delta}{2 \|gs_i\|_{L,s,t}}.$$

La fonction t_j^* définit un élément de $\mathcal{B}(K^-) \langle s \leq |T| \leq t \rangle$ et, quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, vérifie

$$\|gs_i\|_{L,s,t} \|g^{-1}t_j - t_j^*\|_{L,s,t} \leq \|gs_i\|_{L,s,t} 2 \frac{\delta}{2 \|gs_i\|_{L,s,t}} \leq \delta.$$

Quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous avons encore

$$\|gs_i - s_i^*\|_{L,s,t} \|g^{-1}t_j\|_{L,s,t} \leq 2|g|_\sigma^u \delta |g^{-1}|_\sigma^u \|t_j\|_{L,s,t} \leq 2M\delta.$$

□

Lemme 3.2.11. — *Soit $\varepsilon > 0$ le nombre réel qui nous est donné par le théorème 3.2.8. Soient \mathcal{F} un faisceau de $\mathcal{O}_{M_{s,t}}$ -modules cohérent, $p, q \in \mathbf{N}$, $T^- \in \mathcal{F}(K_{s,t}^-)^p$, $T^+ \in \mathcal{F}(K_{s,t}^+)^q$, $U = (u_{\alpha,i}) \in M_{p,q}(\mathcal{O}(L_{r,s}))$ et $V = (v_{\beta,j}) \in M_{q,p}(\mathcal{O}(L_{r,s}))$ telles que, dans $\mathcal{F}(L_{s,t})$, on ait*

$$a) T^- = U T^+;$$

$$b) T^+ = V T^-.$$

Supposons qu'il existe $U_\delta \in M_{p,q}(\mathcal{O}(K_{s,t}^+))$ et $V_\delta \in M_{q,p}(\mathcal{O}(K_{s,t}^-))$ vérifiant

$$c) \|U_\delta - U\|_{L,s,t} \|V\|_{L,s,t} < \varepsilon;$$

$$d) \|U\|_{L,s,t} \|V_\delta - V\|_{L,s,t} < \varepsilon.$$

Alors il existe $S^- \in \mathcal{F}(M_{s,t})^p$, $S^+ \in \mathcal{F}(M_{s,t})^q$, $A^- \in GL_p(\mathcal{O}(K_{s,t}^-))$ et $A^+ \in GL_q(\mathcal{O}(K_{s,t}^+))$ vérifiant

$$i) S^- = A^- T^- \text{ dans } \mathcal{F}(K_{r,s}^-);$$

$$ii) S^+ = A^+ T^+ \text{ dans } \mathcal{F}(K_{r,s}^+).$$

Démonstration. — Supposons qu'il existe $U_\delta \in M_{p,q}(\mathcal{O}(K_{s,t}^+))$ et $V_\delta \in M_{q,p}(\mathcal{O}(K_{s,t}^-))$ vérifiant

$$c) \|U_\delta - U\|_{L,s,t} \|V\|_{L,s,t} < \varepsilon;$$

$$d) \|U\|_{L,s,t} \|V_\delta - V\|_{L,s,t} < \varepsilon.$$

Posons $T_\delta^- = V_\delta T^-$ dans $\mathcal{F}(K_{s,t}^-)$. Dans $\mathcal{F}(L_{s,t})$, nous avons alors

$$T_\delta^- - T^+ = (V_\delta - V) T^- = (V_\delta - V) U T^+.$$

Posons

$$A = I + (V_\delta - V) U \in M_q(\mathcal{O}(L_{s,t})).$$

Nous avons alors

$$T_\delta^- = A T^+ \text{ dans } \mathcal{F}(L_{s,t})$$

et

$$\|A - I\|_{L,s,t} \leq \|V_\delta - V\|_{L,s,t} \|U\|_{L,s,t} < \varepsilon.$$

D'après les propositions 2.2.26 et 2.2.29, il existe $s_0, t_0 \in \mathbf{R}_+$, avec $s_0 \leq t_0$, tels que $[s_0, t_0]$ soit un voisinage de $[s, t]$ dans \mathbf{R}_+ et que la matrice A appartienne à $M_q(\mathcal{B}(L)\langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle)$. Quitte à choisir s_0 et t_0 assez proches de s et t , nous pouvons supposer que

$$\|A - I\|_{L,s_0,t_0} < \varepsilon.$$

D'après le théorème 3.2.8, il existe deux matrices $C^- \in GL_q(\mathcal{B}(K^-)\langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle)$ et $C^+ \in GL_q(\mathcal{B}(K^+)\langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle)$ telles que, dans $M_q(\mathcal{B}(L)\langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle)$, on ait

$$A = C^- C^+.$$

D'après les théorèmes 2.2.27 et 2.2.30, les matrices C^- et C^+ définissent respectivement des éléments de $GL_q(\mathcal{O}(K_{s,t}^-))$ et $GL_q(\mathcal{O}(K_{s,t}^+))$. Posons

$$A^+ = C^+ \in GL_q(\mathcal{O}(K_{s,t}^+)).$$

Dans $\mathcal{F}(L_{r,s})$, nous avons alors

$$A^+ T^+ = (C^-)^{-1} A T^+ = (C^-)^{-1} T_\delta^-.$$

Nous pouvons donc définir un élément S^+ de $\mathcal{F}(M_{s,t})^q$ par

1. $S^+_{|K_{s,t}^-} = (C^-)^{-1} T_\delta^-$;
2. $S^+_{|K_{s,t}^+} = A^+ T^+$.

On procède de même pour construire la section S^- . □

Nous allons considérer deux compacts K^- et K^+ d'une forme particulière sur lesquels nous démontrerons le lemme d'attachement pour les sections d'un faisceau cohérent. Soient $\sigma \in \Sigma$ et $u, v \in]0, l(\sigma)]$ vérifiant $u \leq v$. Posons

$$K_0^- = [a_\sigma^u, a_\sigma^v].$$

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $\sigma_2, \dots, \sigma_n \in \Sigma \setminus \{\sigma\}$ et, quel que soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $u_i \in [0, l(\sigma_i)]$.

Posons

$$K_{0,1}^+ = B \setminus \left(]a_\sigma^u, a_\sigma^{l(\sigma)}] \cup \bigcup_{2 \leq i \leq n}]a_{\sigma_i}^{u_i}, a_{\sigma_i}^{l(\sigma_i)}] \right)$$

et

$$K_{0,2}^+ = [a_0, a_\sigma^u] \cup \bigcup_{2 \leq i \leq n}]a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}]$$

Soit $t \in [0, u]$. Posons

$$K_{0,3}^+ = [a_\sigma^t, a_\sigma^u].$$

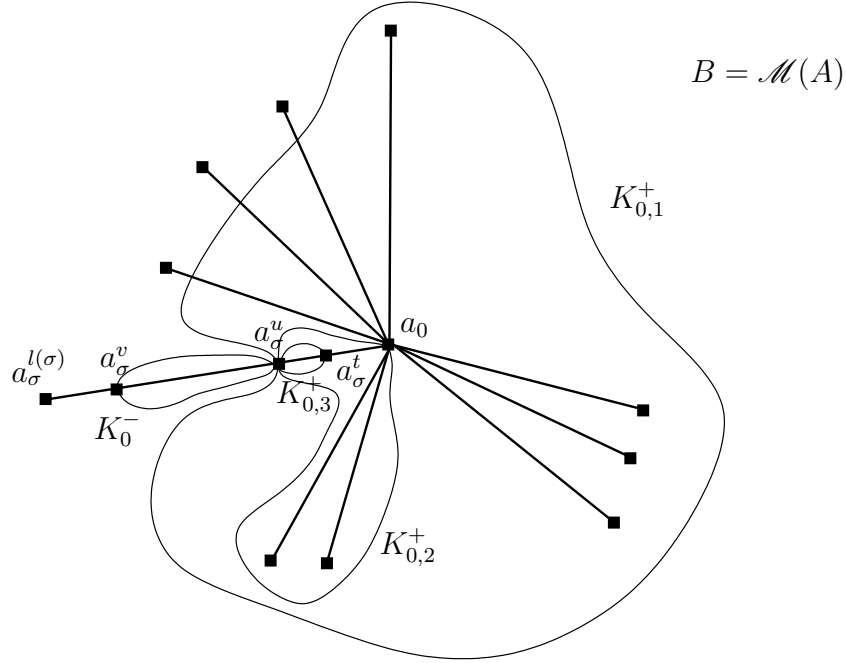
Nous désignons par K_0^+ l'un des trois compacts $K_{0,1}^+$, $K_{0,2}^+$ ou $K_{0,3}^+$ et posons $L_0 = K_0^- \cap K_0^+ = \{a_\sigma^u\}$ (cf. figure 2).

Soient $s, t \in [0, +\infty[$ avec $s \leq t$. Posons

- i) $K^- = \pi^{-1}(K_0^-) \cap \overline{C}_{s,t}$;
- ii) $K^+ = \pi^{-1}(K_0^+) \cap \overline{C}_{s,t}$;
- iii) $L = K^- \cap K^+ = \pi^{-1}(L_0) \cap \overline{C}_{s,t}$;
- iv) $M = K^- \cup K^+$.

Théorème 3.2.12. — *Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_M -modules cohérent. Supposons qu'il existe $p, q \in \mathbf{N}$, $t_1^-, \dots, t_p^- \in \mathcal{F}(K^-)$, $t_1^+, \dots, t_q^+ \in \mathcal{F}(K^+)$ dont les restrictions à L engendrent le même sous- $\mathcal{O}(L)$ -module de $\mathcal{F}(L)$. Alors il existe $s_1^-, \dots, s_p^-, s_1^+, \dots, s_q^+ \in \mathcal{F}(K)$, $a^- \in GL_p(\mathcal{O}(K^-))$ et $a^+ \in GL_q(\mathcal{O}(K^+))$ tels que*

$$\begin{pmatrix} s_1^- \\ \vdots \\ s_p^- \end{pmatrix} = a^- \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{F}(K^-)^p$$

FIG. 2. Les compacts K_0^- , $K_{0,1}^+$, $K_{0,2}^+$ et $K_{0,3}^+$.

et

$$\begin{pmatrix} s_1^+ \\ \vdots \\ s_q^+ \end{pmatrix} = a^+ \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{F}(K^+)^q.$$

Démonstration. — Posons

$$T^- = \begin{pmatrix} t_1^- \\ \vdots \\ t_p^- \end{pmatrix} \text{ et } T^+ = \begin{pmatrix} t_1^+ \\ \vdots \\ t_q^+ \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, il existe $U = (u_{\alpha,i}) \in M_{p,q}(\mathcal{O}(L))$ et $V = (v_{\beta,j}) \in M_{q,p}(\mathcal{O}(L))$ telles qu'au-dessus de L , on ait

$$T^- = U T^+ \text{ et } T^+ = V T^-.$$

D'après les propositions 2.2.26 et 2.2.29, il existe $s_0, t_0 \in \mathbf{R}_+$, avec $s_0 \leq t_0$ tels que $[s_0, t_0]$ soit un voisinage de $[s, t]$ dans \mathbf{R}_+ et que U et V soient respectivement des éléments de $M_{p,q}(\mathcal{B}(L_0)\langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle)$ et $M_{q,p}(\mathcal{B}(L_0)\langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle)$.

Supposons, tout d'abord, que $\sigma \in \Sigma_f$. Considérons le nombre réel $\varepsilon > 0$ du théorème 3.2.8. D'après le lemme 3.2.10, il existe une fonction f inversible dans $\mathcal{B}(K_0^+)\langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle$, des fonctions $\hat{u}_{\alpha,i} \in \mathcal{B}(K_0^+)\langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle$, pour

$(\alpha, i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, et $\hat{v}_{\beta, j} \in \mathcal{B}(K_0^-) \langle s_0 \leq |T| \leq t_0 \rangle$, pour $(\beta, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, vérifiant les conditions suivantes : quel que soient $(\alpha, i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$ et $(\beta, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, nous avons

- i) $\|f^{-1}u_{\alpha, i} - \hat{u}_{\alpha, i}\|_{L_0, s_0, t_0} \|fv_{\beta, j}\|_{L_0, s_0, t_0} < \varepsilon$;
- ii) $\|f^{-1}u_{\alpha, i}\|_{L_0, s_0, t_0} \|fv_{\beta, j} - \hat{v}_{\beta, j}\|_{L_0, s_0, t_0} < \varepsilon$.

D'après les théorèmes 2.2.27 et 2.2.30, la fonction f définit un élément inversible de $\mathcal{O}(K^+)$, quel que soit $(\alpha, i) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$, la fonction $\hat{u}_{\alpha, i}$ définit un élément de $\mathcal{O}(K^+)$ et, quel que soit $(\beta, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction $\hat{v}_{\beta, j}$ définit un élément de $\mathcal{O}(K^-)$. Les matrices T^- , fT^+ , $f^{-1}U$ et fV vérifient donc les hypothèses du lemme 3.2.11. Par conséquent, il existe $S^- \in \mathcal{F}(M)^p$, $S^+ \in \mathcal{F}(M)^q$, $A^- \in GL_p(\mathcal{O}(K^-))$ et $A^+ \in GL_q(\mathcal{O}(K^+))$ tels que

- 1. $S^-_{|K^-} = A^- T^-$;
- 2. $S^+_{|K^+} = A^+ fT^+$.

En posant

$$\begin{pmatrix} s_1^- \\ \vdots \\ s_p^- \end{pmatrix} = S^-, \quad \begin{pmatrix} s_1^+ \\ \vdots \\ s_q^+ \end{pmatrix} = S^+,$$

ainsi que $a^- = A^-$ et $a^+ = fA^+$, on obtient le résultat souhaité. Remarquons que $a^+ \in GL_q(\mathcal{O}(K^+))$ car f est inversible dans $\mathcal{O}(K^+)$.

Si $\sigma \in \Sigma_\infty$, on parvient au résultat de la même manière en utilisant le second résultat d'approximation figurant dans le lemme 3.2.10. \square

3.2.3. Démonstration

Dans ce paragraphe, nous démontrons les théorèmes A et B pour des couronnes compactes de $X = \mathbf{A}_A^{1, \text{an}}$ au-dessus de certains compacts de B . Soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$. Nous adopterons les notations suivantes. Pour $\sigma \in \Sigma$ et $u, v \in [0, l(\sigma)]$, on pose

$$K_0(\sigma, u, v) = [a_\sigma^u, a_\sigma^v]$$

et

$$K(\sigma, u, v) = \pi^{-1}(K_0(\sigma, u, v)) \cap \overline{\mathcal{C}}(s, t).$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$, $u_1 \in [0, l(\sigma_1)]$, \dots , $u_n \in [0, l(\sigma_n)]$, on pose

$$L_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n) = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} [a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}] \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \neq \sigma_1, \dots, \sigma_n} B_\sigma \right)$$

et

$$L(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n) = \pi^{-1}(L_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)) \cap \overline{C}(s, t).$$

Finalement, pour $n \in \mathbf{N}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$, $u_1 \in [0, l(\sigma_1)]$, \dots , $u_n \in [0, l(\sigma_n)]$, on pose

$$M_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n) = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} [a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}] \right)$$

et

$$M(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n) = \pi^{-1}(M_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)) \cap \overline{C}(s, t).$$

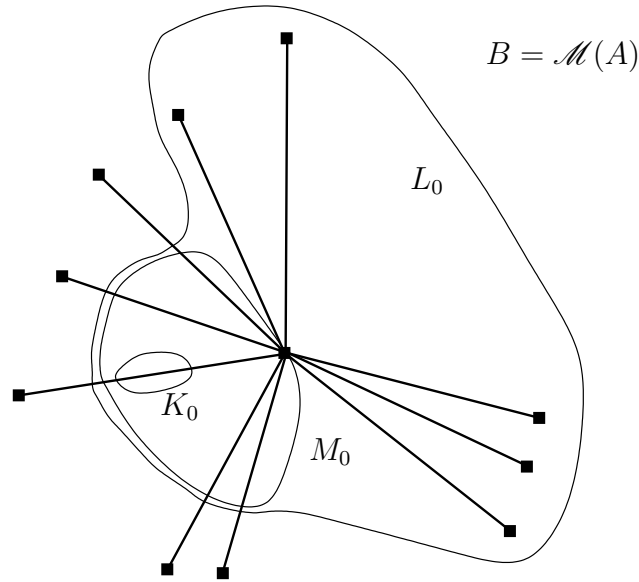


FIG. 3. Les compacts K_0 , L_0 et M_0 .

Remarquons que les parties compactes et connexes de B définies par un nombre fini d'inégalités entre fonctions globales sont toutes du type $K_0(\sigma, u, v)$, $L_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)$ ou $M_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)$.

Dans la suite, C désignera un compact du type $K(\sigma, u, v)$, $L(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)$ ou $M(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)$.

Théorème 3.2.13. — *Tout faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent vérifie le théorème A.*

Démonstration. — Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent. Soit $b \in B$. Le faisceau \mathcal{F} vérifie le théorème A sur le compact $\pi^{-1}(b) \cap C$, d'après le

théorème 3.1.1. Par conséquent, il le vérifie également au voisinage de ce compact. Puisque C est compact, il existe une partition finie de C en parties compactes au voisinage desquelles le théorème A est vérifié. Nous pouvons choisir cette partition de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n, \sigma_{n+1}, 0, \sigma_m, 0), \\ K(\sigma_1, u_1, v_{1,1}), \dots, K(\sigma_1, v_{1,j_1-1}, v_{1,j_1}), \\ \vdots \\ K(\sigma_n, u_n, v_{n,1}), \dots, K(\sigma_n, v_{1,j_{n-1}}, v_{1,j_n}) \end{array} \right\}$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} M(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n), \\ K(\sigma_1, u_1, v_{1,1}), \dots, K(\sigma_1, v_{1,j_1-1}, v_{1,j_1}), \\ \vdots \\ K(\sigma_n, u_n, v_{n,1}), \dots, K(\sigma_n, v_{1,j_{n-1}}, v_{1,j_n}) \end{array} \right\},$$

avec $n, m \in \mathbf{N}$, $n \leq m$, et, quel que soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $j_i \in \mathbf{N}^*$ et $0 < u_i < v_{i,1} < \dots < v_{i,j_i} \leq l(\sigma_i)$. Le théorème 3.2.12 nous permet alors de conclure. \square

Théorème 3.2.14. — *Tout faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent vérifie le théorème B.*

Démonstration. — Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent. Soit

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{I}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{d} \dots$$

une résolution injective de \mathcal{F} . Soient $d \in \mathbf{N}^*$ et γ un cocycle de degré q sur C . Quel que soit $b \in B$, on a $H^1(\pi^{-1}(b) \cap C, \mathcal{F}) = 0$, d'après le théorème 3.1.1. On en déduit que γ est un cobord au voisinage de $\pi^{-1}(b)$. En utilisant la compacité de C et en nous ramenant à un recouvrement compact du type de celui décrit dans la preuve précédente, il nous suffit de résoudre le problème suivant. Soient $n \in \mathbf{N}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$, $u_1 \in]0, l(\sigma_1)[$, $v_1 \in]u_1, l(\sigma_1)]$ et, quel que soit $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $u_i \in [0, l_{\sigma_i}]$. Désignons par K^- la partie compacte $K(\sigma_1, u_1, v_1)$ et par K^+ l'une des parties $L(\sigma_i, u_i, \dots, \sigma_n, u_n)$ ou $M(\sigma_i, u_i, \dots, \sigma_n, u_n)$. Posons $K^\cap = K^- \cap K^+$ et $K^\cup = K^- \cup K^+$. Supposons qu'il existe $\beta^- \in \mathcal{I}_{q-1}(K^-)$ et $\beta^+ \in \mathcal{I}_{q-1}(K^+)$ tels que

$$d(\beta^-) = \gamma \text{ sur } K^- \text{ et } d(\beta^+) = \gamma \text{ sur } K^+.$$

Nous devons montrer qu'il existe $\beta \in \mathcal{I}_{q-1}(K^\cup)$ tels que

$$d(\beta) = \gamma \text{ sur } K^\cup.$$

Supposons, tout d'abord que $q \geq 2$. Au-dessus de K^\cap , on a $d(\beta^- - \beta^+) = 0$. D'après les résultats du paragraphe précédent, on a $H^{q-1}(K^\cap, \mathcal{F}) = 0$, donc il existe $\alpha \in \mathcal{I}_{q-2}(K^\cap)$ telle que $d(\alpha) = \beta^- - \beta^+$ au-dessus de K^\cap . Puisque le faisceau \mathcal{I}_{q-2} est injectif et donc flasque, α se prolonge en une section sur X que

nous noterons identiquement. Définissons $\beta \in \mathcal{I}_{q-1}(K^\cup)$ par $\beta = \beta^-$ au-dessus de K^- et $\beta = \beta^+ + d(\alpha)$ au-dessus de K^+ . On a alors

$$d(\beta) = \gamma$$

au-dessus de K^\cup .

Intéressons-nous, à présent, au cas $q = 1$. Nous avons encore $d(\beta^- - \beta^+) = 0$ au-dessus de K^\cap . On en déduit que $\beta^- - \beta^+ \in \mathcal{F}(K^\cap)$. D'après le théorème 3.2.13, le faisceau \mathcal{F} vérifie le théorème A au voisinage du compact K^\cap . Par conséquent, il existe $m \in \mathbf{N}$ et $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{F}(K^\cup)$ dont les images engendrent \mathcal{F}_x , quel que soit $x \in M$. En d'autres termes, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^m &\rightarrow \mathcal{F} \\ (a_1, \dots, a_m) &\mapsto \sum_{i=1}^m a_i u_i \end{aligned}$$

est surjective au-dessus de K^\cup . Son noyau \mathcal{N} est un faisceau cohérent sur K^\cup . D'après la partie précédente, on a $H^1(K^\cap, \mathcal{N}) = 0$. On en déduit que la famille (u_1, \dots, u_m) engendre $H^0(K^\cap, \mathcal{F})$ en tant que $H^0(K^\cap, \mathcal{O})$ -module. Par conséquent, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathcal{O}(K^\cap)$ tels que

$$\beta^- - \beta^+ = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \text{ dans } \mathcal{F}(K^\cap).$$

D'après le lemme 3.2.3, quel que soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, il existe $\lambda_i^- \in \mathcal{O}(K^-)$ et $\lambda_i^+ \in \mathcal{O}(K^+)$ tels que

$$\lambda_i = \lambda_i^- - \lambda_i^+ \text{ dans } \mathcal{O}(K^\cap).$$

Nous avons alors l'égalité

$$\beta^- - \sum_{i=1}^m \lambda_i^- u_i = \beta^+ - \sum_{i=1}^m \lambda_i^+ u_i.$$

On en déduit l'existence d'une cochaîne $\beta \in \mathcal{I}_0(K^\cup)$ vérifiant $d(\beta) = \gamma$. \square

3.3. Théorèmes A et B pour les couronnes ouvertes

Dans cette partie, nous allons montrer que les théorèmes A et B valent encore pour les couronnes ouvertes de X définies au-dessus de certaines parties de la base B . Ici encore, nous nous inspirerons des techniques utilisées en géométrie analytique complexe. Pour toute couronne ouverte C , nous considérerons une famille croissante de couronnes fermées dont la réunion est égale à C . Nous montrerons alors que cette famille forme une exhaustion de Stein (cf. [27], IV, §1, définition 6). Il nous restera alors à montrer que toute partie possédant une exhaustion de Stein est de Stein.

La preuve que nous proposons ici suit de très près l'ouvrage [27] de H. Grauert et R. Remmert. Plus précisément, nous nous sommes inspirés de la partie IV, §1 pour les définition et propriétés des exhaustions de Stein et de la partie IV, §4, pour montrer que les familles croissantes de couronnes fermées considérées en satisfont les conditions.

3.3.1. Théorèmes généraux

Commençons par rappeler la définition d'une exhaustion.

Définition 3.3.1. — Soit S un espace topologique. Une suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de S est une **exhaustion de S** si elle vérifie les propriétés suivantes :

- i) quel que soit $n \in \mathbf{N}$, le compact K_n est contenu dans l'intérieur de K_{n+1} ;
- ii) la réunion des compacts K_n est égale à S .

Le résultat qui suit est classique (cf. [27], IV, §1, théorème 4) et nous permettra de démontrer une partie du théorème B pour les couronnes ouvertes.

Théorème 3.3.2. — Soient S un espace topologique et $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une exhaustion de S . Soient \mathcal{S} un faisceau de groupes abéliens sur S et $q \geq 2$ un nombre entier. Supposons que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on ait

$$H^{q-1}(K_n, \mathcal{S}) = H^q(K_n, \mathcal{S}) = 0.$$

Alors on a également

$$H^q(S, \mathcal{S}) = 0.$$

Venons-en, à présent, aux exhaustions de Stein (cf. [27], IV, §1, définition 6). Nous nous restreindrons à des exhaustions de parties de l'espace analytique $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$.

Définition 3.3.3. — Soient S une partie de l'espace analytique X et \mathcal{S} un faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérent. Une suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de parties compactes et de Stein de S est une **exhaustion de Stein de S relativement à \mathcal{S}** si c'est une exhaustion de S et si, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe une semi-norme $\|\cdot\|_n$ sur $\mathcal{S}(K_n)$ telle que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, les propriétés suivantes soient vérifiées :

- i) la partie $\mathcal{S}(S)|_{K_n}$ de $\mathcal{S}(K_n)$ est dense pour $\|\cdot\|_n$;
- ii) l'application de restriction $(\mathcal{S}(K_{n+1}), \|\cdot\|_{n+1}) \rightarrow (\mathcal{S}(K_n), \|\cdot\|_n)$ est bornée ;
- iii) l'application de restriction $(\mathcal{S}(K_{n+1}), \|\cdot\|_{n+1}) \rightarrow (\mathcal{S}(K_n), \|\cdot\|_n)$ envoie toute suite de Cauchy sur une suite convergente ;
- iv) tout élément s de $\mathcal{S}(K_{n+1})$ vérifiant $\|s\|_{n+1} = 0$ est nul sur K_n .

Cette notion nous permettra de compléter la démonstration du théorème B pour les couronnes ouvertes, par l'intermédiaire du résultat suivant (cf. [27], IV, §1, théorème 7).

Théorème 3.3.4. — Soient S une partie de l'espace analytique X et \mathcal{S} un faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérent. Supposons qu'il existe une exhaustion de Stein de S relativement à \mathcal{S} . Alors nous avons

$$H^1(S, \mathcal{S}) = 0.$$

Rappelons, enfin, que le théorème A se déduit du théorème B. La nullité du premier groupe de cohomologie à coefficient dans n'importe quel faisceau cohérent suffit d'ailleurs à assurer le résultat (cf. [27], IV, §1, théorème 2).

Théorème 3.3.5. — Soient S une partie de l'espace analytique X . Supposons que, pour tout faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérent \mathcal{S} , on ait $H^1(S, \mathcal{S}) = 0$. Alors tout faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérent vérifie le théorème A.

En regroupant tous ces théorèmes, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.3.6. — Soit S une partie de l'espace analytique X . Supposons que, pour tout faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérent \mathcal{S} , la partie S possède une exhaustion de Stein relativement à \mathcal{S} . Alors, la partie S est de Stein.

3.3.2. Fermeture des modules

Pour montrer que les exhaustions naturelles des couronnes ouvertes par des couronnes fermées sont bien des exhaustions de Stein, nous avons besoin de résultats de fermeture sur certains faisceaux de modules. Nous leur consacrons

cette partie. Les preuves que nous proposons sont inspirées de [33], II, D, théorèmes 2 et 3.

Commençons par introduire une notation. Soient (Y, \mathcal{O}_Y) un espace analytique, y un point de Y et V un voisinage du point y dans Y . Soient $p \in \mathbf{N}$ et \mathcal{M} un sous-module de $\mathcal{O}_{Y,y}^p$. Nous noterons $\mathcal{M}(V)$ le $\mathcal{O}_Y(V)$ -module constitué des éléments F de $\mathcal{O}_Y(V)^p$ dont le germe F_y en y appartient à \mathcal{M} . Définissons, maintenant, la notion de module fortement engendré. Nous l'utiliserons constamment dans cette partie.

Définition 3.3.7. — Soient (Y, \mathcal{O}_Y) un espace analytique et y un point de Y . Soient $p \in \mathbf{N}$ et \mathcal{M} un sous-module de $\mathcal{O}_{Y,y}^p$. Soient V un voisinage du point y dans Y et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{O}_Y(V)$. Nous munissons le module produit $\mathcal{O}_Y(V)^p$ de la norme, que nous noterons encore $\|\cdot\|$, donnée par le maximum des normes des coefficients. Soient $q \in \mathbf{N}$ et G_1, \dots, G_q des éléments de $\mathcal{O}_Y(V)^p$. Nous dirons que la famille (G_1, \dots, G_q) **engendre fortement le module \mathcal{M}_y sur V pour la norme $\|\cdot\|$** s'il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que, pour tout élément F de $\mathcal{M}(V)$, il existe des fonctions f_1, \dots, f_q dans $\mathcal{O}_Y(V)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

$$i) \quad F = \sum_{i=1}^q f_i G_i \text{ dans } \mathcal{M}(V);$$

ii) quel que soit $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, nous avons $\|f_i\| \leq C \|F\|$.

Nous dirons que le module \mathcal{M}_y est **fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|$** s'il existe une famille finie de $\mathcal{O}_Y(V)^p$ qui engendre fortement le module \mathcal{M}_y sur V pour la norme $\|\cdot\|$.

Les systèmes de générateurs forts jouissent de plusieurs propriétés agréables.

Lemme 3.3.8. — Soient (Y, \mathcal{O}_Y) un espace analytique, y un point de Y , p un entier et \mathcal{M} un sous-module de $\mathcal{O}_{Y,y}^p$. Soient V un voisinage du point y dans Y et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{O}_Y(V)$. Supposons que le module \mathcal{M} est fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|$. Soient $r \in \mathbf{N}$ et $H_1, \dots, H_r \in \mathcal{O}_Y(V)^p$ tels que la famille $((H_1)_y, \dots, (H_r)_y)$ engendre \mathcal{M} . Alors la famille (H_1, \dots, H_r) engendre fortement le module \mathcal{M} sur V pour la norme $\|\cdot\|$.

Lemme 3.3.9. — Soient (Y, \mathcal{O}_Y) , $(Y', \mathcal{O}_{Y'})$ et $(Y'', \mathcal{O}_{Y''})$ des espaces analytiques, y, y' et y'' des points de Y, Y' et Y'' , p, p', p'' des entiers et $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{M}''$ des sous-modules de $\mathcal{O}_{Y,y}^p, \mathcal{O}_{Y',y'}^{p'}$ et $\mathcal{O}_{Y'',y''}^{p''}$. Soient V, V' et V'' des voisinages des points y, y' et y'' dans Y, Y' et Y'' et $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|''$ des normes sur $\mathcal{O}_Y(V), \mathcal{O}_{Y'}(V')$ et $\mathcal{O}_{Y''}(V'')$. Supposons qu'il existe une suite exacte courte

de groupes abéliens

$$0 \rightarrow \mathcal{M}'(V') \xrightarrow{u} \mathcal{M}(V) \xrightarrow{v} \mathcal{M}''(V'') \rightarrow 0$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) le morphisme u est une isométrie ;

ii) il existe un morphisme borné $u_0 : \mathcal{O}_{Y'}(V') \rightarrow \mathcal{O}_Y(V)$ qui vérifie

$$\forall f' \in \mathcal{O}_{Y'}(V'), \forall F' \in \mathcal{M}(V'), u(f' F') = u_0(f') u(F') ;$$

iii) le morphisme v est borné ;

iv) il existe un morphisme borné $\tau : \mathcal{O}_{Y''}(V'') \rightarrow \mathcal{O}_Y(V)$ qui vérifie

$$\forall f'' \in \mathcal{O}_{Y''}(V''), \forall F \in \mathcal{M}(V), v(\tau(f'') F) = f'' v(F).$$

Si les modules \mathcal{M}' et \mathcal{M}'' sont fortement engendrés sur V' et V'' pour les normes $\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|''$, alors le module \mathcal{M} est fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|$.

Démonstration. — Commençons par traduire les hypothèses sur les morphismes bornés. Il existe des constantes $D_{u_0}, D_v, D_\tau \in \mathbf{R}$ telles que, quel que soit $f' \in \mathcal{O}_{Y'}(V')$, on ait

$$\|u_0(f')\| \leq D_{u_0} \|f'\|',$$

quel que soit $F \in \mathcal{M}(V)$, on ait

$$\|v(F)\|'' \leq D_v \|F\|$$

et, quel que soit $f'' \in \mathcal{O}_{Y''}(V'')$, on ait

$$\|\tau(f'')\| \leq D_\tau \|f''\|''.$$

Supposons que les modules \mathcal{M}' et \mathcal{M}'' sont fortement engendrés sur V' et V'' pour les normes $\|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|''$. Il existe un entier $r' \in \mathbf{N}$ et une famille $(G'_1, \dots, G'_{r'})$ de $\mathcal{M}'(V')$ qui engendre fortement le module \mathcal{M}' sur V' pour la norme $\|\cdot\|'$, avec une certaine constante $C' \in \mathbf{R}$. De même, il existe un entier $r'' \in \mathbf{N}$ et une famille $(G''_1, \dots, G''_{r''})$ de $\mathcal{M}''(V'')$ qui engendre fortement le module \mathcal{M}'' sur V'' pour la norme $\|\cdot\|''$, avec une certaine constante $C'' \in \mathbf{R}$. Quel que soit $i \in \llbracket 1, r' \rrbracket$, nous posons

$$H'_i = u(G'_i).$$

Quel que soit $j \in \llbracket 1, r'' \rrbracket$, nous choisissons un élément H''_j de $\mathcal{M}(V)$ tel que

$$v(H''_j) = G''_j.$$

Nous allons montrer que la famille $(H'_1, \dots, H'_{r'}, H''_1, \dots, H''_{r''})$ de $\mathcal{M}(V)$ engendre fortement le module \mathcal{M} sur V pour la norme $\|\cdot\|$.

Soit $F \in \mathcal{M}(V)$. Alors $v(F) \in \mathcal{M}'(V')$. Il existe donc $f''_1, \dots, f''_{r''} \in \mathcal{O}_{Y''}(V'')$ tels que l'on ait

$$i) \quad v(F) = \sum_{j=1}^{r''} f''_j G''_j;$$

$$ii) \quad \forall j \in \llbracket 1, r'' \rrbracket, \|f''_j\|'' \leq C'' \|v(F)\|''.$$

Posons

$$F_0 = F - \sum_{j=1}^{r''} \tau(f''_j) H''_j.$$

Quel que soit $j \in \llbracket 1, r'' \rrbracket$, nous avons

$$\|\tau(f''_j)\| \leq D_\tau \|f''_j\|'' \leq D_\tau C'' \|v(F)\|'' \leq D_\tau C'' D_v \|F\|.$$

Nous en déduisons que

$$\|F_0\| \leq \left(1 + D_\tau C'' D_v \sum_{j=1}^{r''} \|H''_j\| \right) \|F\|.$$

Posons

$$M = 1 + D_\tau C'' D_v \sum_{j=1}^{r''} \|H''_j\|.$$

Nous avons

$$v(F_0) = v(F) - \sum_{j=1}^{r''} v(\tau(f''_j) H''_j) = v(F) - \sum_{j=1}^{r''} f''_j G''_j = 0.$$

Par conséquent, $F_0 \in \text{Ker}(v) = \mathfrak{S}(u)$. On en déduit qu'il existe $F' \in \mathcal{M}'(V')$ tel que

$$u(F') = F_0.$$

Il existe également $f'_1, \dots, f'_{r'} \in \mathcal{O}_{Y'}(V')$ tels que l'on ait

$$i) \quad F' = \sum_{i=1}^{r'} f'_i G'_i;$$

$$ii) \quad \forall i \in \llbracket 1, r' \rrbracket, \|f'_i\|' \leq C' \|F'\|'.$$

Nous avons finalement

$$\begin{aligned}
 F &= F_0 + \sum_{j=1}^{r''} \tau(f_j'') H_j'' \\
 &= u \left(\sum_{i=1}^{r'} f_i' G_i' \right) + \sum_{j=1}^{r''} \tau(f_j'') H_j'' \\
 &= \sum_{i=1}^{r'} u_0(f_i') H_i' + \sum_{j=1}^{r''} \tau(f_j'') H_j''.
 \end{aligned}$$

Nous avons vu précédemment que la norme des coefficients $\tau(f_j'')$, avec $j \in \llbracket 1, r'' \rrbracket$, est bornée en fonction de celle de $\|F\|$. En outre, quel que soit $i \in \llbracket 1, r' \rrbracket$, nous avons

$$\|u_0(f_i')\| \leq D_{u_0} \|f_i'\|' \leq D_{u_0} C' \|F'\|' \leq D_{u_0} C' \|F_0\| \leq D_{u_0} C' M \|F\|.$$

On en déduit que la famille $(H_1', \dots, H_{r'}', H_1'', \dots, H_{r''}'')$ de $\mathcal{M}(V)$ engendre fortement le module \mathcal{M} sur V pour la norme $\|\cdot\|$. \square

Corollaire 3.3.10. — *Soient (Y, \mathcal{O}_Y) un espace analytique et y un point de Y . Soient V un voisinage du point y dans Y et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{O}_Y(V)$. Supposons que tous les idéaux de $\mathcal{O}_{Y,y}$ sont fortement engendrés sur V pour la norme $\|\cdot\|$. Alors, quel que soit $p \in \mathbf{N}^*$, tous les sous-modules de $\mathcal{O}_{Y,y}^p$ sont fortement engendrés sur V pour la norme $\|\cdot\|$.*

Démonstration. — Nous allons démontrer le résultat par récurrence. L'initialisation pour $p = 1$ n'est autre que l'hypothèse. Soit $p \in \mathbf{N}^*$ pour lequel le résultat est vrai. Soit \mathcal{M} un sous-module de $\mathcal{O}_{Y,y}^{p+1}$. Notons \mathcal{M}' l'idéal de $\mathcal{O}_{Y,y}$ composé des éléments f de $\mathcal{O}_{Y,y}$ tels que $(0, \dots, 0, f)$ appartient à \mathcal{M} . Notons \mathcal{M}'' le sous-module de $\mathcal{O}_{Y,y}^p$ dont les éléments sont les p premières composantes des éléments de \mathcal{M} . Les morphismes naturels

$$0 \rightarrow \mathcal{M}'(V) \xrightarrow{u} \mathcal{M}(V) \xrightarrow{v} \mathcal{M}''(V) \rightarrow 0$$

forment une suite exacte courte de groupes abéliens. Montrons que les propriétés du lemme 3.3.9 sont vérifiées. Le morphisme u est bien une isométrie. Choisissons pour u_0 le morphisme identité sur $\mathcal{O}_Y(V)$. Les propriétés du point *ii)* sont alors vérifiées. Le morphisme v est borné (et l'on peut même choisir la constante 1). Nous pouvons choisir pour τ le morphisme identité sur $\mathcal{O}_Y(V)$. L'hypothèse de l'énoncé nous assure que l'idéal \mathcal{M}' est fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|$. L'hypothèse de récurrence nous assure que tel est également le cas

pour le module \mathcal{M}'' . D'après le lemme 3.3.9, le module \mathcal{M} est, lui aussi, fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|$. \square

Démontrons, à présent, que certains modules possèdent des systèmes de générateurs forts. Commençons à nous intéresser à ces propriétés pour l'espace analytique B .

Lemme 3.3.11. — *Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Soit $\alpha > 0$. Posons $V = [a_{\mathfrak{m}}^\alpha, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. Alors, la famille $(\pi_{\mathfrak{m}})$ engendre fortement l'idéal $\pi_{\mathfrak{m}} \mathcal{O}_{B, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$ sur V pour la norme $\|\cdot\|_V$.*

Démonstration. — Nous avons des isomorphismes entre les anneaux

$$\hat{A}_{\mathfrak{m}} \simeq \mathcal{O}(V) \simeq \mathcal{O}_{B, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}}.$$

De plus, quel que soit $f \in \hat{A}_{\mathfrak{m}}$, nous avons

$$\|f\|_V = |f|_{\mathfrak{m}}^\alpha.$$

Soit f un élément de $\mathcal{O}(V)$ qui est multiple de $\pi_{\mathfrak{m}}$ dans l'anneau local $\mathcal{O}_{B, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$. Alors f est encore multiple de $\pi_{\mathfrak{m}}$ dans $\mathcal{O}(V)$: il existe $g \in \mathcal{O}(V)$ tel que

$$f = \pi_{\mathfrak{m}} g.$$

En outre, nous avons

$$\|g\|_V = |g|_{\mathfrak{m}}^\alpha = |\pi_{\mathfrak{m}}|^{-\alpha} |f|_{\mathfrak{m}}^\alpha = |\pi_{\mathfrak{m}}|^{-\alpha} \|f\|_V.$$

On en déduit que la famille $(\pi_{\mathfrak{m}})$ engendre fortement l'idéal $\pi_{\mathfrak{m}} \mathcal{O}_{B, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$ sur V pour la norme $\|\cdot\|_V$. \square

Corollaire 3.3.12. — *Soit $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$. Soit $\alpha > 0$. Posons $V = [a_{\mathfrak{m}}^\alpha, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]$. Alors, tout idéal de $\mathcal{O}_{B, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$ est fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|_V$.*

Démonstration. — Puisque l'anneau local $\mathcal{O}_{B, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$ est un anneau de valuation discrète, tous ses idéaux sont de la forme (0) ou $(\pi_{\mathfrak{m}}^n)$ avec $n \in \mathbf{N}$. Le principe du prolongement analytique montre que (0) engendre fortement l'idéal (0) sur V pour la norme $\|\cdot\|_V$. On constate immédiatement que (1) engendre fortement $\mathcal{O}_{B, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$ sur V pour la norme $\|\cdot\|_V$. Finalement, on montre, par récurrence, en utilisant le lemme précédent, que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, $(\pi_{\mathfrak{m}}^n)$ engendre fortement l'idéal $\pi_{\mathfrak{m}}^n \mathcal{O}_{B, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}}$ sur V pour la norme $\|\cdot\|_V$. \square

Proposition 3.3.13. — *Soit b un point de B . Soient p un entier et \mathcal{M} un sous-module de $\mathcal{O}_{B, b}^p$. Alors, il existe un voisinage W de b dans B tel que, pour tout voisinage connexe V de b dans W , le sous-module \mathcal{M} soit fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|_V$.*

Démonstration. — Si $p = 0$, le résultat provient du principe du prolongement analytique. Si $p = 1$, on conclut par ce même principe lorsque l'anneau local est un corps (les seuls idéaux de $\mathcal{O}_{Y,y}$ sont alors (0) et $\mathcal{O}_{Y,y}$) et par le corollaire précédent lorsque c'est un anneau de valuation discrète. Le corollaire 3.3.10 nous permet d'en déduire le cas général. \square

Passons maintenant aux points de la droite analytique X . Le résultat est immédiat pour ceux en lesquels l'anneau local est un corps. Nous allons commencer par étudier ceux en lesquels l'anneau local est de valuation discrète.

Lemme 3.3.14. — *Soit b un point interne ou central de B . Soit x le point rationnel de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $T(x) = 0$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un anneau de valuation discrète d'idéal maximal (T) . Il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages compacts du point x dans X tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, la famille (T) engendre fortement l'idéal $T \mathcal{O}_{X,x}$ sur W pour la norme $\|\cdot\|_W$.*

Démonstration. — Le point b de B possède un système fondamental de voisinages \mathcal{V} dont tous les éléments sont des parties compactes et connexes. Nous pouvons également supposer que, quel que soit $V \in \mathcal{V}$, le point central a_0 de B n'appartient pas au bord de V . Pour $V \in \mathcal{V}$ et $r > 0$, posons

$$V_r = \{y \in \pi^{-1}(V) \mid |T(y)| \leq r\}.$$

D'après la proposition 1.3.4, l'ensemble

$$\mathcal{W} = \{V_r, V \in \mathcal{V}, r > 0\}$$

est un système fondamental de voisinages du point x dans X .

Montrons que ces voisinages vérifient la propriété requise. Soient $V \in \mathcal{V}$ et $r > 0$. Soit f un élément de $\mathcal{O}(V_r)$ vérifiant $f(x) = 0$. D'après la proposition 2.2.26, il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}(V)$ et un nombre réel $t > r$ tels que l'on ait

$$i) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|a_k\|_V t^k = 0;$$

$$ii) \quad f = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k T^k.$$

En ces termes, la condition $f(x) = 0$ se traduit par $a_0 = 0$. Considérons la série

$$g = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_{k+1} T^k.$$

Ses coefficients vérifient la condition

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|a_{k+1}\|_V t^k = 0.$$

D'après le théorème 2.2.27, la série g définit donc un élément de $\mathcal{O}(V_r)$. En outre, nous avons l'égalité

$$f = Tg.$$

Il nous reste à comparer les normes des fonctions f et g sur V_r . Soit c un point de V . La partie $\pi^{-1}(c) \cap V_r$ est un disque fermé de rayon r . En utilisant la description explicite du bord de Shilov dans le cas ultramétrique ou le principe du maximum dans le cas archimédien, on montre qu'il existe un point y de $\pi^{-1}(c) \cap V_r$ en lequel la fonction g atteint son maximum et $|T(y)| = r$. On en déduit que

$$\|g\|_{\pi^{-1}(c) \cap V_r} = |g(y)| = r^{-1} |f(y)| \leq r^{-1} \|f\|_{V_r}.$$

Par conséquent, la famille (T) engendre fortement l'idéal $T \mathcal{O}_{X,x}$ sur V_r pour la norme $\|\cdot\|_{V_r}$. \square

Corollaire 3.3.15. — *Soit b un point interne ou central de B . Soit x un point rigide de la fibre $\pi^{-1}(b)$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un anneau de valuation discrète. Soit \mathcal{M}_x un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors, il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages compacts du point x dans X tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, l'idéal \mathcal{M}_x soit fortement engendré sur W pour la norme $\|\cdot\|_W$.*

Démonstration. — À l'aide d'un résultat d'isomorphisme local (cf. proposition 1.3.3), on se ramène au cas d'un point rationnel. Par une translation, nous nous ramenons ensuite au point 0. L'idéal \mathcal{M}_x est alors nécessairement l'idéal nul ou de la forme (T^n) , avec $n \in \mathbf{N}$. Nous concluons alors comme dans la preuve du corollaire 3.3.12. \square

Lemme 3.3.16. — *Soient $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$, $r \in]0, 1[$ et x l'unique point de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ vérifiant l'égalité $|T(x)| = r$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $(\pi_{\mathfrak{m}})$. Il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages compacts du point x dans X tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, l'idéal $\pi_{\mathfrak{m}} \mathcal{O}_{X,x}$ soit fortement engendré sur W pour la norme $\|\cdot\|_W$.*

Démonstration. — L'ensemble

$$\mathcal{V} = \{[a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}], \alpha \in \mathbf{R}_+^*\}$$

est un système fondamental de voisinages du point $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. Pour $V \in \mathcal{V}$, $s \in]0, r[$ et $t \in]r, +\infty[$, posons

$$V_{s,t} = \{y \in \pi^{-1}(V) \mid s \leq |T(y)| \leq t\}.$$

D'après la proposition 1.3.8, l'ensemble

$$\mathscr{W} = \{V_{s,t}, V \in \mathscr{V}, s \in]0, r[, t \in]r, +\infty[\}$$

est un système fondamental de voisinages du point x dans X .

Montrons que ces voisinages vérifient la propriété requise. Soient $V \in \mathscr{V}$, $s \in]0, r[$ et $t \in]r, +\infty[$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $V = [a_m^\alpha, \tilde{a}_m]$. Soit f un élément de $\mathcal{O}(V_{s,t})$ vérifiant $f(x) = 0$. D'après la proposition 2.2.29, il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{O}(V) = \hat{A}_m$ et des nombres réels $s_0 \in]0, s[$ et $t_0 \in]t, +\infty[$ tels que l'on ait

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{k \rightarrow +\infty} \|a_k\|_V t_0^k = 0; \\ ii) \quad & \lim_{k \rightarrow -\infty} \|a_k\|_V s_0^k = 0; \\ iii) \quad & f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k. \end{aligned}$$

En ces termes, la condition $f(x) = 0$ se traduit par

$$\forall k \in \mathbf{Z}, a_k = 0 \pmod{\mathfrak{m}}.$$

Par conséquent, quel que soit $k \in \mathbf{Z}$, il existe $b_k \in \hat{A}_m$ tel que $a_k = \pi_m b_k$. En outre, quel que soit $k \in \mathbf{Z}$, nous avons

$$\|b_k\|_V = |\pi_m|_m^{-\alpha} \|a_k\|_V.$$

Considérons la série

$$g = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k T^k.$$

Ses coefficients vérifient les conditions

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|b_k\|_V t_0^k = 0 \text{ et } \lim_{k \rightarrow -\infty} \|b_k\|_V s_0^k = 0.$$

D'après le théorème 2.2.30, la série g définit donc un élément de $\mathcal{O}(V_{s,t})$. En outre, nous avons l'égalité

$$f = \pi_m g.$$

Il nous reste à comparer les normes des fonctions f et g sur $V_{s,t}$. Soit $\beta \in [\alpha, +\infty[$. La partie $\pi^{-1}(a_m^\beta) \cap V_{s,t}$ est une couronne fermée. Son bord de Shilov comporte deux points : η_s et η_t . Par conséquent, nous avons

$$\|g\|_{\pi^{-1}(a_m^\beta) \cap V_{s,t}} = \max \left(\max_{k \in \mathbf{Z}} (|b_k|_m^\beta s^k), \max_{k \in \mathbf{Z}} (|b_k|_m^\beta t^k) \right).$$

Soit $k \in \mathbf{Z}$. Puisque $|b_k|_m \leq 1$, la quantité $|b_k|_m^\beta$ est maximale, pour $\beta \in [\alpha, +\infty[$, lorsque $\beta = \alpha$. Par conséquent, nous avons

$$\|g\|_{\pi^{-1}(a_m^\alpha) \cap V_{s,t}} = \max_{\beta \in [\alpha, +\infty[} (\|g\|_{\pi^{-1}(a_m^\beta) \cap V_{s,t}}) = \|g\|_{V_{s,t}}.$$

On en déduit qu'il existe un point y de $\pi^{-1}(a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}) \cap V_{s,t}$ en lequel la fonction g atteint son maximum. Par conséquent, nous avons

$$\|g\|_{V_{s,t}} = |g(y)| = |\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{-\alpha} |f(y)| \leq |\pi_{\mathfrak{m}}|_{\mathfrak{m}}^{-\alpha} \|f\|_{V_{s,t}}.$$

On en déduit que la famille $(\pi_{\mathfrak{m}})$ engendre fortement l'idéal $\pi_{\mathfrak{m}} \mathcal{O}_{X,x}$ sur $V_{s,t}$ pour la norme $\|\cdot\|_{V_{s,t}}$. \square

Corollaire 3.3.17. — Soient $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ et x un point de type 3 de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $(\pi_{\mathfrak{m}})$. Soit \mathcal{M}_x un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors, il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages compacts du point x dans X tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, l'idéal \mathcal{M}_x soit fortement engendré sur W pour la norme $\|\cdot\|_W$.

Démonstration. — À l'aide de la proposition 2.3.2, on se ramène au cas d'un point de type 3 déployé. Par une translation, nous nous ramenons ensuite à un point de la forme η_r , avec $r \in \mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$. Quitte à changer T en T^{-1} , nous pouvons supposer que $r < 1$. L'idéal \mathcal{M}_x est alors nécessairement l'idéal nul ou de la forme $(\pi_{\mathfrak{m}}^n)$, avec $n \in \mathbf{N}$. Nous concluons alors comme dans la preuve du corollaire 3.3.12. \square

Lemme 3.3.18. — Soient $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ et x le point de Gauß de la fibre extrême $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est alors un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $(\pi_{\mathfrak{m}})$. Il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages compacts du point x dans $X_{\mathfrak{m}}$ tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, l'idéal $\pi_{\mathfrak{m}} \mathcal{O}_{X,x}$ soit fortement engendré sur W pour la norme $\|\cdot\|_W$.

Démonstration. — Soient $\alpha > 0$, $\varepsilon \in]0, 1[$, $d, e \in \mathbf{N}$, P_1, \dots, P_d des polynômes à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$, deux à deux distincts irréductibles et unitaires et Q_1, \dots, Q_e des polynômes à coefficients dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$, deux à deux distincts irréductibles et unitaires. Considérons le voisinage W du point x dans $X_{\mathfrak{m}}$ défini par

$$W = \bigcap_{1 \leq i \leq d} \{y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \mid |P_i(y)| \leq 1 + \varepsilon\} \\ \cap \bigcap_{1 \leq j \leq e} \{y \in \pi^{-1}([a_{\mathfrak{m}}^{\alpha}, \tilde{a}_{\mathfrak{m}}]) \mid |Q_j(y)| \geq 1 - \varepsilon\}.$$

D'après le lemme 2.3.12, le point x possède un système fondamental de voisinages de cette forme. Montrons qu'il vérifie la propriété de l'énoncé. Soit f un élément de $\mathcal{O}(W)$ tel que $f(x) = 0$. Montrons, tout d'abord, qu'il existe un élément g de $\mathcal{O}(W)$ tel que $f = \pi_{\mathfrak{m}} g$. Il suffit de démontrer cette propriété au voisinage de tout point de W . Le principe du prolongement analytique et le fait que $\pi_{\mathfrak{m}}$

ne s'annule sur aucun ouvert nous assureront alors que les différents quotients locaux coïncident. Sur $W \cap X'_m$, la propriété est évidente car la fonction π_m est inversible. La propriété est également vraie sur un voisinage U du point x dans W car π_m est une uniformisante de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. Sur les branches partant du point de Gauß de $W \cap \tilde{X}_m$, la propriété s'obtient grâce à la description explicite des anneaux (éventuellement après changement de base en utilisant la proposition 2.3.2) et le fait que ces branches coupent la partie U .

Il nous reste, à présent, à montrer l'existence d'une constante C_W satisfaisant la dernière propriété de l'énoncé. Soit $\beta \in [\alpha, +\infty]$. Le bord de Shilov de la partie $W \cap \pi^{-1}(a_m^\beta)$ est formé d'exactlyment $d + e$ points qui sont le bord de cette partie dans $\pi^{-1}(a_m^\beta)$. On en déduit que la fonction g atteint son maximum sur la réunion de ces parties, qui est une réunion de $d + e$ couronnes de même rayon interne et externe, non nécessairement déployées. Nous voulons montrer que la fonction g atteint son maximum sur la fibre $\pi^{-1}(a_m^\alpha)$. Pour cela, la proposition 2.3.2 nous permet de nous ramener à des couronnes déployées. Nous concluons alors en utilisant la description explicite des anneaux de fonctions sur les couronnes et le même raisonnement que dans la preuve du lemme 3.3.16. \square

De nouveau, en raisonnant comme dans la preuve du corollaire 3.3.12, nous en déduisons le résultat suivant.

Corollaire 3.3.19. — *Soient $m \in \Sigma_f$ et x le point de Gauß de la fibre extrême \tilde{X}_m . Soit \mathcal{M}_x un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Alors, il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages compacts du point x dans X tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, l'idéal \mathcal{M}_x soit fortement engendré sur W pour la norme $\|\cdot\|_W$.*

En regroupant tous ces résultats, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 3.3.20. — *Soit Y l'un des deux espaces B et X . Soit y un point de Y en lequel l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$ est un corps ou un anneau de valuation discrète. Soient p un entier et \mathcal{M} un sous-module de $\mathcal{O}_{Y,y}^p$. Alors, il existe un système fondamental \mathcal{W} de voisinages compacts du point y dans Y tel que, quel que soit $W \in \mathcal{W}$, le sous-module \mathcal{M} soit fortement engendré sur W pour la norme $\|\cdot\|_W$.*

Démonstration. — Si $p = 0$, le résultat provient du principe du prolongement analytique. Si $p = 1$, on conclut par ce même principe lorsque l'anneau local est un corps (les seuls idéaux de $\mathcal{O}_{Y,y}$ sont alors (0) et $\mathcal{O}_{Y,y}$) et par les lemmes précédents lorsque c'est un anneau de valuation discrète. Le corollaire 3.3.10 nous permet d'en déduire le cas général. \square

Il nous reste à traiter le cas des points rigides des fibres extrêmes de la droite analytique $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$. Le raisonnement que nous mettons en œuvre vaudra en fait pour les points rigides de toutes les fibres.

Proposition 3.3.21. — *Soit b un point de B . Soit x le point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $T(x) = 0$. Soient p un entier et \mathcal{M} un sous-module de $\mathcal{O}_{Y,y}^p$. Soit W un voisinage de x dans X . Alors, il existe un voisinage compact V de b dans B et un nombre réel $t > 0$ tels que $\overline{D}_V(t) \subset W$ et le module \mathcal{M} soit fortement engendré sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|\cdot\|_{V,t}$.*

Démonstration. — Le cas $p = 0$ découle du principe du prolongement analytique. D'après le corollaire 3.3.10, le cas $p = 1$ entraîne les autres. Nous pouvons donc supposer que $p = 1$. Dans ce cas, le module \mathcal{M} est un idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$. Rappelons que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de séries convergentes à coefficients dans $\mathcal{O}_{B,b}$. Plus précisément, d'après le théorème 1.3.17, nous avons un isomorphisme

$$\varinjlim_{U,t} \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x},$$

où U parcourt l'ensemble des voisinages de b dans B et t l'ensemble \mathbf{R}_+^* . Si G désigne un élément de $\mathcal{O}_{X,x}$, nous noterons $G(b)$ son image par la composée

$$\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{B,b}[[T]] \rightarrow \mathcal{H}(b)[[T]].$$

Supposons, tout d'abord, que $\mathcal{M} = 0$. Le principe du prolongement analytique nous permet alors de conclure. Nous supposons, à présent, que $\mathcal{M} \neq 0$. Nous pouvons également supposer qu'il existe $G \in \mathcal{M}$ tel que $G(b) \neq 0$. Cette condition est nécessairement vérifiée lorsque l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ est un corps. Supposons donc que $\mathcal{O}_{B,b}$ est un anneau de valuation discrète. Choisissons-en une uniformisante π . Si \mathcal{N} est un idéal de $\mathcal{O}_{x,x}$, la condition (U) que vérifie l'anneau local $\mathcal{O}_{B,b}$ nous montre qu'il est équivalent de démontrer le résultat pour les modules \mathcal{N} et $\pi\mathcal{N}$ (cf. lemme 1.2.13). Quitte à diviser \mathcal{M} par une puissance de π adéquate, nous pouvons donc supposer qu'il existe $G \in \mathcal{M}$ tel que $G(b) \neq 0$.

Il existe un voisinage V de b dans B et un nombre réel $t > 0$ tels que

$$G \in \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle.$$

D'après le théorème de préparation de Weierstraß (cf. théorème 1.2.10), il existe une fonction inversible $E \in \mathcal{O}_{X,x}$ et un polynôme $\Omega \in \mathcal{O}_{B,b}[[T]]$ distingué de degré $d \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait l'égalité $G = E\Omega$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Quitte à restreindre V et à diminuer t , nous pouvons supposer que cette égalité vaut dans $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq t \rangle$.

Remarquons que Ω est un élément de \mathcal{M} . Quitte à diminuer encore V et t , nous pouvons supposer que $\overline{D}_V(t) \subset W$ et que V est contenu dans le voisinage du point b dont la proposition 3.3.13 nous assure l'existence. La description explicite de l'espace B (cf. partie 2.1.1) nous montre que nous pouvons également supposer que V est connexe, que son bord ne contient pas le point central a_0 et que $\mathcal{B}(V) = \mathcal{O}(V)$.

D'après le théorème de division de Weierstraß global, quitte à diminuer encore V et t , nous pouvons supposer que, quel que soit $u \in [t, 1]$, pour tout élément F de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq u \rangle$, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq u \rangle)^2$ tel que

- i) R soit un polynôme de degré strictement inférieur à d ;
- ii) $F = Q\Omega + R$.

En outre, il existe une constante $C \in \mathbf{R}_+^*$, indépendante de u et de F , telle que l'on ait les inégalités

$$\begin{cases} \|Q\|_{V,u} \leq C \|F\|_{V,u} ; \\ \|R\|_{V,u} \leq C \|F\|_{V,u}. \end{cases}$$

Soit F un élément de $\mathcal{O}_X(\overline{D}_V(t))$. D'après la proposition 2.2.26, il existe $u \in]t, 1]$ tel que $F \in \mathcal{B}(V)\langle |T| \leq u \rangle$. En appliquant le résultat précédent, on obtient deux éléments Q et R de $\mathcal{B}(V)\langle |T| \leq u \rangle$ et donc de $\mathcal{O}_X(\overline{D}_V(t))$, d'après le théorème 2.2.27. On en déduit que $Q\Omega$ appartient à $\mathcal{M}(\overline{D}_V(t))$ et donc que R appartient à $\mathcal{M}(\overline{D}_V(t))$. Il existe $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathcal{O}(V)$ tels que

$$R(T) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i.$$

Nous définissons un morphisme de groupes v en associant à l'élément F la famille (a_0, \dots, a_{d-1}) . Les majorations du théorème de division de Weierstraß et du lemme 1.2.3 nous assurent que

$$\|v(F)\|_{V,t} \leq C t^{1-d} \|F\|_{V,t}.$$

Notons \mathcal{M}'' le sous- $\mathcal{O}_{B,b}$ -module de $\mathcal{O}_{B,b}^d$ formé par les familles de coefficients des polynômes de \mathcal{M} de degré strictement inférieur à d . Notons \mathcal{M}' l'idéal de $\mathcal{O}_{X,x}$ engendré par Ω et $u : \mathcal{M}'(\overline{D}_V(t)) \rightarrow \mathcal{M}(\overline{D}_V(t))$ l'injection canonique. D'après le théorème de division de Weierstraß, nous disposons alors d'une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{M}'(\overline{D}_V(t)) \xrightarrow{u} \mathcal{M}(\overline{D}_V(t)) \xrightarrow{v} \mathcal{M}''(\overline{D}_V(t)) \rightarrow 0.$$

Montrons qu'elle vérifie les conditions du lemme 3.3.9. Le morphisme u est bien une isométrie. Nous pouvons choisir l'identité de $\mathcal{O}_Y(\overline{D}_V(t))$ pour le morphisme u_0 . Nous avons montré précédemment que le morphisme v était borné. Pour le morphisme τ , nous choisissons le morphisme naturel $\mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(\overline{D}_V(t))$. Il est également borné.

En outre, la famille (G) engendre fortement le module \mathcal{M}' sur V pour la norme $\|\cdot\|_{V,t}$, toujours d'après le théorème de division de Weierstraß. Le module \mathcal{M}'' est également fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|_V$, d'après la proposition 3.3.13. Le lemme 3.3.9 nous assure donc que le module \mathcal{M} est fortement engendré sur V pour la norme $\|\cdot\|_{V,t}$.

□

Remarque 3.3.22. — Ce résultat et sa démonstration valent encore pour les points rationnels des fibres des espaces de dimension plus grande. Nous pourrions également l'adapter pour les points rigides, à condition de prendre la peine définir des normes adéquates.

Démontrons, à présent, le résultat sur la fermeture des modules que nous avons en vue.

Théorème 3.3.23. — *Soient x un point de X , $p \in \mathbf{N}^*$ et \mathcal{M} un sous-module de $\mathcal{O}_{X,x}^p$. Soient U un voisinage de x dans X et F un élément de $\mathcal{O}(U)^p$. Supposons qu'il existe une suite $(F_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{O}(U)^p$ qui converge vers uniformément vers F sur U et que, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, on ait $(F_k)_x \in \mathcal{M}$. Alors, on a*

$$F_x \in \mathcal{M}.$$

Démonstration. — Nous devons distinguer plusieurs cas : celui où l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps, celui où c'est un anneau de valuation discrète et celui où le point x est un point rigide de sa fibre. La démonstration est similaire dans les trois cas. Nous ne traiterons que le dernier qui est le plus difficile, en particulier à cause de la différence, pour les fonctions définies sur des disques, entre leur norme en tant que série et leur norme uniforme. Seuls les points rigides des fibres extrêmes ne sont pas traités dans les autres cas. Nous supposons donc que x est de ce type. D'après la proposition 2.2.19, nous pouvons nous ramener au cas d'un point rationnel. Quitte à nous placer sur un voisinage assez petit du point x , puis à effectuer une translation, nous pouvons supposer que le point x est le point de sa fibre défini par l'équation $T(x) = 0$.

D'après la proposition 1.3.4, il existe un voisinage W de b dans B et un nombre réel $u > 0$ tels que la partie $\overline{D}_V(t)$ soit contenue dans U . D'après le

théorème 3.3.21, il existe un voisinage compact et connexe V de b dans W , un nombre réel $t \in]0, u[$, un entier $q \in \mathbf{N}$ et des éléments G_1, \dots, G_q de $\overline{D}_V(t)$ tels que la famille (G_1, \dots, G_q) engendre fortement le module \mathcal{M} sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|\cdot\|_{V,t}$, avec une certaine constante C .

Quitte à extraire une sous-suite de $(F_k)_{k \in \mathbf{N}}$, nous pouvons supposer que, quel que soit $k \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\|F_k - F_{k-1}\|_{\overline{D}_V(u)} \leq 2^{-k}.$$

D'après le lemme 1.2.4, nous avons alors

$$\|F_k - F_{k-1}\|_{V,t} \leq \frac{u}{u-t} 2^{-k}.$$

Construisons, à présent, par récurrence, des suites $(f_{k,1})_{k \in \mathbf{N}}, \dots, (f_{k,q})_{k \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{O}(\overline{D}_V(t))$ vérifiant les propriétés suivantes : quel que soit $k \in \mathbf{N}$, nous avons

$$F_k = \sum_{j=1}^q f_{k,j} G_j$$

et, quel que soit $k \in \mathbf{N}^*$, nous avons

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \|f_{k,j} - f_{k-1,j}\|_{\overline{D}_V(t)} \leq \frac{C}{2^k}.$$

Initialisons la récurrence. Pour construire $f_{0,1}, \dots, f_{0,q}$, il suffit d'utiliser le fait que la famille (G_1, \dots, G_q) engendre fortement le module \mathcal{M} sur $\overline{D}_V(t)$ pour la norme $\|\cdot\|_{V,t}$ avec la constante C et de l'appliquer à la fonction F_0 .

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ et supposons avoir construit $f_{k-1,1}, \dots, f_{k-1,q} \in \mathcal{O}(\overline{D}_V(t))$ vérifiant les propriétés demandées. En appliquant la propriété de génération forte à la fonction $F_k - F_{k-1}$, on montre qu'il existe $g_{k,1}, \dots, g_{k,q} \in \mathcal{O}(\overline{D}_V(t))$ vérifiant

$$F_k - F_{k-1} = \sum_{j=1}^q g_{k,j} G_j$$

et

$$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \|g_{k,j}\|_{V,t} \leq C \|F_k - F_{k-1}\|_{V,t} \leq \frac{C}{2^k}.$$

Pour $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, posons

$$f_{k,j} = f_{k-1,j} + g_{k,j}.$$

On obtient alors le résultat voulu car, quel que soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$, nous avons

$$\|g_{k,j}\|_{\overline{D}_V(t)} \leq \|g_{k,j}\|_{V,t}.$$

Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. D'après les inégalités précédentes, la suite $(f_{k,j})_{k \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{O}(\overline{D}_V(t))$. Soit U_0 un voisinage du point x dans X contenu dans

l'intérieur de $\overline{D}_V(t)$. La suite $(f_{k,j})_{k \in \mathbf{N}}$ converge alors dans $\mathcal{O}(U_0)$. Notons $f_j \in \mathcal{O}(U_0)$ sa limite. Nous avons alors

$$F = \sum_{j=1}^q f_j G_j \text{ dans } \mathcal{O}(U_0).$$

On en déduit finalement que

$$F_x \in \mathcal{M}.$$

□

3.3.3. Exhaustions de Stein

Commençons par décrire les parties de la base au-dessus desquelles nous allons considérer les disques et les couronnes. Nous donnerons également des exhaustions de ces parties.

Soient $\sigma \in \Sigma$ et $u, v \in [0, l(\sigma)]$. Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels vérifiant les propriétés suivantes :

- i)* la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante et tend vers u ;
- ii)* la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement croissante et tend vers v ;
- iii)* $u_0 \leq v_0$.

Posons

$$K_0(\sigma, u, v) = [a_\sigma^u, a_\sigma^v]$$

et, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$K_{0,n}(\sigma, u, v) = K_0(\sigma, u, v).$$

Posons

$$K'_0(\sigma, u, v) =]a_\sigma^u, a_\sigma^v]$$

et, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$K'_{0,n}(\sigma, u, v) = K_0(\sigma, u_n, v).$$

Posons

$$K''_0(\sigma, u, v) = [a_\sigma^u, a_\sigma^v[$$

et, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$K''_{0,n}(\sigma, u, v) = K_0(\sigma, u, v_n).$$

Posons

$$K'''_0(\sigma, u, v) =]a_\sigma^u, a_\sigma^v[$$

et, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$K_{0,n}'''(\sigma, u, v) = K_0(\sigma, u_n, v_n).$$

De cette manière, nous avons défini des parties de B et des exhaustions de ces parties. Considérons maintenant d'autres parties de B .

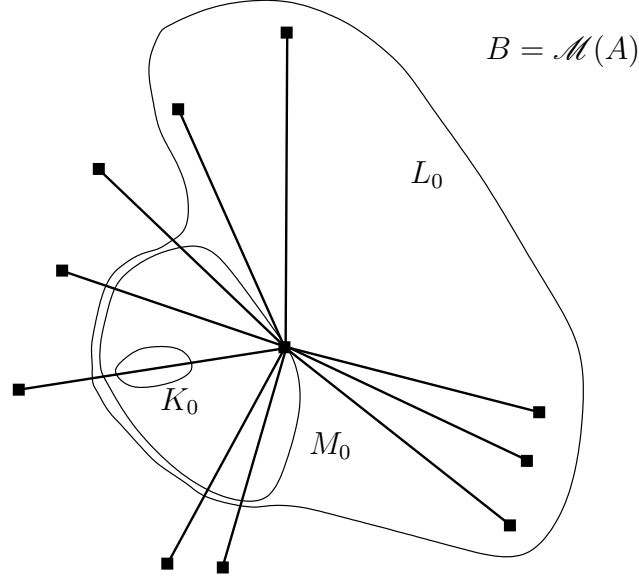


FIG. 4. Les compacts K_0 , L_0 et M_0 .

Soient $p, q \in \mathbf{N}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_{p+q} \in \Sigma$, $u_1 \in [0, l(\sigma_1)]$, \dots , $u_p \in [0, l(\sigma_p)]$, $u_{p+1} \in]0, l(\sigma_{p+1}]$, \dots , $u_{p+q} \in]0, l(\sigma_{p+q}]$. Quel que soit $i \in \llbracket p+1, q \rrbracket$, choisissons une suite $(u_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$ de \mathbf{R}_+ strictement croissante et tendant vers u_i .

Posons

$$\begin{aligned} & M_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_p, u_p; \sigma_{p+1}, u_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q}, u_{p+q}) \\ &= \left(\bigcup_{1 \leq i \leq p} [a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}] \right) \cup \left(\bigcup_{p+1 \leq i \leq p+q} [a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}[\right) \end{aligned}$$

et, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} & M_{0,n}(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_p, u_p; \sigma_{p+1}, u_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q}, u_{p+q}) \\ &= M_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_p, u_p, \sigma_{p+1}, u_{p+1,n}, \dots, \sigma_{p+q}, u_{p+q,n}). \end{aligned}$$

Posons encore

$$\begin{aligned} & L_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_p, u_p; \sigma_{p+1}, u_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q}, u_{p+q}) \\ = & M_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_p, u_p; \sigma_{p+1}, u_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q}, u_{p+q}) \cup \left(\bigcup_{\sigma \neq \sigma_1, \dots, \sigma_{p+q}} B_\sigma \right) \end{aligned}$$

et, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} & L_{0,n}(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_p, u_p; \sigma_{p+1}, u_{p+1}, \dots, \sigma_{p+q}, u_{p+q}) \\ = & L_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_p, u_p, \sigma_{p+1}, u_{p+1,n}, \dots, \sigma_{p+q}, u_{p+q,n}). \end{aligned}$$

Remarquons que les parties connexes de B définies par un nombre fini d'inégalités entre fonctions globales sont toutes de l'un des types précédent. Dans la suite, nous choisissons une partie D du type précédent et notons $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$ l'exhaustion associée.

Soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s < t$. Soient $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites réelles vérifiant les conditions suivantes :

- i)* la suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante et tend vers s ;
- ii)* la suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement croissante et tend vers t ;
- iii)* $s_0 \leq t_0$.

Posons

$$\begin{aligned} D_{s,t} &= \{x \in \pi^{-1}(D) \mid s_n \leq |T(x)| \leq t_n\} = \pi^{-1}(D) \cap \overline{C}(s, t), \\ D'_{s,t} &= \{x \in \pi^{-1}(D) \mid s_n < |T(x)| \leq t_n\}, \\ D''_{s,t} &= \{x \in \pi^{-1}(D) \mid s_n \leq |T(x)| < t_n\} \end{aligned}$$

et

$$D'''_{s,t} = \{x \in \pi^{-1}(D) \mid s_n < |T(x)| < t_n\}.$$

Désignons par C l'une de ses quatre parties de X . Définissons alors une exhaustion $(C_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de C en posant, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} C_n &= \pi^{-1}(D_n) \cap \overline{C}(s, t) \text{ si } C = D_{s,t}, \\ C_n &= \pi^{-1}(D_n) \cap \overline{C}(s_n, t) \text{ si } C = D'_{s,t}, \\ C_n &= \pi^{-1}(D_n) \cap \overline{C}(s, t_n) \text{ si } C = D''_{s,t} \end{aligned}$$

et

$$C_n = \pi^{-1}(D_n) \cap \overline{C}(s_n, t_n) \text{ si } C = D'''_{s,t}.$$

Nous souhaitons montrer que l'exhaustion $(C_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une exhaustion de Stein de C relativement à tout faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent. Nous savons

déjà, d'après les théorèmes 3.2.13 et 3.2.14, que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, la partie C_n est de Stein. Fixons un faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent \mathcal{S} .

Il nous faut, à présent, définir une semi-norme sur chacune des couronnes compactes considérées. Soit $n \in \mathbf{N}$. D'après le théorème A (cf. théorème 3.2.13) et la compacité de C_n , il existe un entier $l_n \in \mathbf{N}^*$ tel qu'il existe un morphisme de \mathcal{O}_{C_n} -modules surjectif

$$\alpha_n : \mathcal{O}_{C_n}^{l_n} \rightarrow \mathcal{S}_{C_n}.$$

D'après le théorème B (cf. théorème 3.2.14), il induit un morphisme de $\mathcal{O}(C_n)$ -modules surjectif

$$\varepsilon_n : \mathcal{O}(C_n)^{l_n} \rightarrow \mathcal{S}(C_n).$$

Nous définissons alors une semi-norme $\|\cdot\|_n$ sur $\mathcal{S}(C_n)$ en posant, pour toute section $s \in \mathcal{S}(C_n)$,

$$\|s\|_n = \inf\{\|t\|_{\infty, C_n}, t \in \varepsilon_n^{-1}(s)\},$$

où $\|\cdot\|_{\infty, C_n}$ désigne la norme sur $\mathcal{O}(C_n)^{l_n}$ obtenue en prenant le maximum des normes uniformes des coefficients.

Il nous reste à vérifier que les conditions de la définition 3.3.3 sont satisfaites. Soit $n \in \mathbf{N}$. Introduisons, tout d'abord, quelques notations. Nous désignerons par r_n et ρ_n les applications de restriction suivantes :

$$r_n : \mathcal{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}(C_n)^{l_{n+1}}$$

et

$$\rho_n : \mathcal{S}(C_{n+1}) \rightarrow \mathcal{S}(C_n).$$

D'après le théorème B, le morphisme surjectif $\alpha_{n+1} : \mathcal{O}_{C_{n+1}}^{l_{n+1}} \rightarrow \mathcal{S}_{C_{n+1}}$ considéré précédemment induit un morphisme surjectif

$$\varepsilon'_n : \mathcal{O}(C_n)^{l_{n+1}} \rightarrow \mathcal{S}(C_n).$$

Nous pouvons donc définir une nouvelle semi-norme $\|\cdot\|'_n$ sur $\mathcal{S}(C_n)$ en posant, pour toute section $s \in \mathcal{S}(C_n)$,

$$\|s\|'_n = \inf\{\|t\|_{\infty, C_n}, t \in \varepsilon'^{-1}_n(s)\},$$

où $\|\cdot\|_{\infty, C_n}$ désigne la norme sur $\mathcal{O}(C_n)^{l_{n+1}}$ obtenue en prenant le maximum des normes uniformes des coefficients. Nous noterons

$$\sigma_n : \mathcal{S}(C_n) \rightarrow \mathcal{S}(C_n)$$

le morphisme identité allant de l'anneau $\mathcal{S}(C_n)$ muni de la norme $\|\cdot\|'_n$ à l'anneau $\mathcal{S}(C_n)$ muni de la norme $\|\cdot\|_n$.

Lemme 3.3.24. — *Quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe une application bornée*

$$\eta_n : \mathcal{O}(C_n)^{l_{n+1}} \rightarrow \mathcal{O}(C_n)^{l_n}$$

qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(C_n)^{l_{n+1}} & \xrightarrow{\varepsilon'_n} & \mathcal{S}(C_n) \\ \downarrow \eta_n & & \downarrow \sigma_n \\ \mathcal{O}(C_n)^{l_n} & \xrightarrow{\varepsilon_n} & \mathcal{S}(C_n) \end{array}$$

Démonstration. — Soit $(e_1, \dots, e_{l_{n+1}})$ une base du $\mathcal{O}(C_{n+1})$ -module $\mathcal{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}}$. Quel que soit $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on choisit $g_i \in \mathcal{O}(C_n)^{l_n}$ tel que

$$\varepsilon_n(g_i) = (\sigma_n \circ \varepsilon'_n)(e_i).$$

L'application

$$\eta_n : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}} & \rightarrow & \mathcal{O}(C_n)^{l_n} \\ \sum_{i=1}^{l_{n+1}} f_i e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{l_{n+1}} f_i|_{C_n} g_i \end{array}$$

convient. □

Finalement, nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(C_{n+1})^{l_{n+1}} & \xrightarrow{\varepsilon_{n+1}} & \mathcal{S}(C_{n+1}) \\ \downarrow r_n & & \downarrow \rho_n \\ \mathcal{O}(C_n)^{l_{n+1}} & \xrightarrow{\varepsilon'_n} & \mathcal{S}(C_n) \\ \downarrow \eta_n & & \downarrow \sigma_n \\ \mathcal{O}(C_n)^{l_n} & \xrightarrow{\varepsilon_n} & \mathcal{S}(C_n) \end{array}$$

En outre, les propriétés suivantes sont vérifiées :

- i) toutes les applications figurant dans le diagramme sont bornées ;
- ii) l'application r_n envoie toute suite de Cauchy sur une suite convergente (car $C_n \subset (C_{n+1})^\circ$) ;
- iii) l'image de l'application r_n est dense dans $\mathcal{O}(C_n)^{l_{n+1}}$.

Proposition 3.3.25. — *L'application ρ_n est bornée. Elle envoie toute suite de Cauchy sur une suite convergente et son image est dense dans $\mathcal{S}(C_n)$.*

Lemme 3.3.26. — *Soit $s \in \mathcal{S}(C_{n+1})$ telle que $\|s\|_{n+1} = 0$. Alors la section s est nulle sur l'ouvert $(C_{n+1})^\circ$. En particulier, elle est nulle sur C_n .*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe $t \in \varepsilon_{n+1}^{-1}(s)$ et une suite $(t_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de $\text{Ker}(\varepsilon_{n+1})$ vérifiant

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|t - t_j\|_{\infty, C_{n+1}} = 0.$$

En d'autres termes, la suite $(t_j)_{j \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers t sur $(C_{n+1})^\circ$.

Soit $x \in (C_{n+1})^\circ$. La suite des germes $((t_j)_x)_{j \in \mathbf{N}}$ converge vers t_x dans $\mathcal{O}_{Y,x}^{l_{n+1}}$. D'après le théorème 3.3.23, nous avons

$$t_x \in \mathcal{H}er(\varepsilon_{n+1})_x.$$

Par conséquent, $t \in \mathcal{H}er(\varepsilon_{n+1})((C_{n+1})^\circ)$ et la section s est nulle sur $(C_{n+1})^\circ$. \square

Nous pouvons, à présent, conclure.

Théorème 3.3.27. — *La suite $(C_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une exhaustion de Stein de la couronne C , relativement à tout faisceau de \mathcal{O}_C -modules cohérent.*

Le théorème 3.3.6 nous permet alors d'en déduire le résultat voulu.

Corollaire 3.3.28. — *La couronne C est une partie de Stein de la droite analytique X .*

CHAPITRE 4

APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous exposons quelques résultats sur les séries arithmétiques convergentes. Rappelons que ce sont les séries à coefficients dans un anneau d'entiers de corps de nombres, éventuellement localisé par une partie multiplicative finiment engendrée, qui possèdent un rayon de convergence strictement positif à toute place. Nous allons montrer que les théorèmes géométriques généraux que nous avons obtenus jusqu'ici peuvent être appliqués à leur étude.

Nous consacrons une première partie aux problèmes de Cousin. Rappelons que le **problème de Cousin multiplicatif** consiste à prescrire l'ordre des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe et que le **problème de Cousin additif** consiste à prescrire ses parties principales (c'est-à-dire ses parties non holomorphes). En géométrie analytique complexe, l'origine de ces questions remonte au XIX^{ème} siècle. Elle sont, désormais, bien comprises et la théorie des espaces de Stein permet de leur apporter une solution élégante. Pour plus de précisions concernant ces questions, on consultera avec profit le deuxième paragraphe du chapitre V de l'ouvrage [27] de H. Grauert et R. Remmert.

Dans la seconde partie, nous nous intéresserons à la noethérianité de certains anneaux de séries arithmétiques convergentes. Un résultat de ce type a été obtenu, de façon purement algébrique, par D. Harbater dans l'article [34] (*cf.* théorème 1.8). En géométrie analytique complexe, on trouvera un résultat analogue dans l'article [26] de J. Frisch, qui sera ensuite précisé par Y.-T. Siu, dans [45]. Il nous semble important d'insister sur le fait que ce sont leurs méthodes, d'inspiration géométrique, que nous adaptons ici.

4.1. Problèmes de Cousin arithmétiques

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux problèmes de Cousin pour les anneaux de séries arithmétiques.

Nous allons nous intéresser à ces problèmes sur la droite analytique $X = \mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ au-dessus de $B = \mathcal{M}(A)$. Puisque les seules fonctions méromorphes sur X sont les fractions rationnelles (*cf.* corollaire 2.3.25), nous n'étudierons pas véritablement les problèmes de Cousin sur l'espace X , mais nous restreindrons au disque unité ouvert de rayon 1. À cet effet, nous utiliserons les résultats obtenus au chapitre précédent sur les sous-espaces de Stein de X . Signalons que les démonstrations que nous proposons présentent encore des similitudes frappantes avec celles de la géométrie analytique complexe.

Fixons quelques notations. Posons

$$\mathbf{D} = \mathring{D}(0, 1) = \{x \in X \mid |T(x)| < 1\}$$

et, quel que soit $\sigma \in \Sigma$,

$$\mathbf{D}_\sigma = \{x \in \pi^{-1}(a_\sigma) \mid |T(x)| < 1\}.$$

4.1.1. Problème de Cousin multiplicatif

Annonçons tout de suite un résultat négatif : le problème de Cousin multiplicatif n'admet pas toujours de solution sur le disque \mathbf{D} , c'est-à-dire qu'il existe un diviseur qui ne provient d'aucune fonction méromorphe. En fait, tel est déjà le cas sur un corps ultramétrique, dès que celui-ci n'est pas maximalelement complet. Ce résultat est dû à M. Lazard (*cf.* [36], proposition 6). Fixer les ordres des zéros est donc impossible, mais nous allons montrer que nous pouvons les minorer.

Définition 4.1.1. — *Soit x un point rigide de \mathbf{D}_σ . Notons $p_x \in \hat{K}_m[T]$ le polynôme irréductible et unitaire qui lui est associé. L'anneau local $\mathcal{O}_{\mathbf{D},x}$ est alors un anneau de valuation discrète dont p_x est une uniformisante. Soient f une fonction définie sur un voisinage du point x et n un entier. Nous dirons que la fonction f s'annule à l'ordre n en x si p_x^n divise f dans l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$.*

Introduisons une autre définition afin de préciser sous quelles conditions nous entendons prescrire les ordres d'annulation.

Définition 4.1.2. — *Une distribution d'ordres o sur \mathbf{D} est la donnée de*

- i) un sous-ensemble fini Σ_o de Σ ;*

- ii) pour tout $\sigma \in \Sigma_o$, un sous-ensemble E_σ de points rigides de \mathbf{D}_σ ;
 iii) pour tout $\sigma \in \Sigma_o$ et tout point $e \in E_\sigma$, un nombre entier n_e
 vérifiant la condition suivante : quel que soit $\sigma \in \Sigma_o$, l'ensemble E_σ est fermé, discret et ne contient pas le point 0.

À toute distribution d'ordres est donc associé un diviseur de Cartier sur le disque ouvert analytique \mathbf{D}_σ . Il est presque immédiat que ce diviseur s'étend en un diviseur de Cartier sur $\mathbf{D} \cap X'_\sigma$. Pour l'étendre également à la fibre centrale, nous utiliserons le résultat topologique qui suit.

Lemme 4.1.3. — Soient $\sigma \in \Sigma$, I un ensemble, $\Pi = (P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes à coefficients dans \hat{K}_σ , deux à deux distincts, irréductibles et unitaires et $(x_i)_{i \in I}$ la famille de points rigides de $\pi^{-1}(a_\sigma)$ associée. Supposons que l'ensemble E des points x_i , avec $i \in I$, soit contenu dans \mathbf{D}_σ , fermé et discret dans \mathbf{D}_σ et évite le point 0. Alors la partie

$$V_\Pi = \bigcup_{i \in I} \{y \in X'_\sigma \mid P_i(y) = 0\}$$

est fermée dans $(X'_\sigma \cup X_0) \cap \mathbf{D}$.

Démonstration. — Nous allons montrer que le complémentaire U de V_Π dans la partie $(X'_\sigma \cup X_0) \cap \mathbf{D}$ est ouvert. Par hypothèse, la partie $U \cap \mathbf{D}_\sigma$ est ouverte. La structure de produit de X'_σ (cf. propositions 2.2.1 et 2.2.2) nous permet d'en déduire que la partie $U \cap X'_\sigma$ est encore ouverte.

Soit y un point de $U \cap X_0 = \mathbf{D} \cap X_0$. Il existe un élément r de $]0, 1[$ tel que y soit le point η_r de la fibre centrale X_0 . Puisque la partie E du disque \mathbf{D}_σ est fermée et ne contient pas 0, il existe $t > 0$ vérifiant

$$\{z \in E \mid |T(z)| < t\} = \emptyset.$$

Par conséquent, la partie

$$\bigcup_{0 < \varepsilon \leq 1} \{z \in \pi^{-1}(a_\sigma^\varepsilon) \mid |T(z)| < t^\varepsilon\}$$

ne coupe pas V_Π .

Soit $s \in]r, 1[$. Il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $t^\alpha > s$. La partie définie par

$$V = \{z \in \pi^{-1}([a_0, a_\sigma^\alpha]) \mid |T(z)| < s\}$$

est un voisinage de y dans X_σ . Observons qu'elle ne coupe pas V_Π . En effet, la partie V_Π ne coupe pas la fibre centrale X_0 et ne coupe pas non plus $V \cap X'_\sigma$, par choix de s . Finalement, nous avons bien montré que la partie V_Π est fermée dans $(X'_\sigma \cup X_0) \cap \mathbf{D}$. \square

Soit o une distribution d'ordres sur \mathbf{D} . Pour montrer qu'il existe une fonction analytique qui possède des zéros d'ordre supérieur à ceux prescrits par o , nous allons commencer par interpréter une telle fonction comme une section d'un faisceau. À cet effet, construisons explicitement le diviseur de Cartier mentionné plus haut. Plus précisément, nous allons associer à la distribution d'ordres o un sous-faisceau inversible \mathcal{S}_o de \mathcal{O} sur l'espace

$$\mathbf{D}_o = \mathbf{D} \setminus \left(\bigcup_{\mathfrak{m} \in \Sigma_o \cap \Sigma_f} \tilde{X}_{\mathfrak{m}} \right).$$

Soient $\sigma \in \Sigma_o$. Pour chaque élément e de E_σ , choisissons un voisinage ouvert U_e du point e dans \mathbf{D}_σ et évitant le point 0. Quitte à restreindre ces ouverts, nous pouvons supposer qu'ils sont deux à deux disjoints. Soit $e \in E_\sigma$. Notons p_e le polynôme à coefficients dans \hat{K}_σ , irréductible et unitaire associé à ce point. L'image de l'ouvert U_e par le flot,

$$V_e = \bigcup_{y \in U_e} T_X(y),$$

est un voisinage ouvert dans \mathbf{D}_o du fermé de Zariski

$$Z_e = \{y \in X'_\sigma \mid p_e(y) = 0\}.$$

Pour $f \in E_\sigma \setminus \{e\}$, les ouverts V_e et V_f sont disjoints. Définissons le faisceau \mathcal{S}_o sur l'ouvert V_e par

$$\mathcal{S}_o|_{V_e} = p_e^{n_e} \mathcal{O}|_{V_e}.$$

D'après le lemme 4.1.3, la partie

$$U = \mathbf{D}_o \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_o, e \in E_\sigma} Z_e \right)$$

est ouverte. Nous y définissons le faisceau \mathcal{S}_o par

$$\mathcal{S}_o|_U = \mathcal{O}|_U.$$

On vérifie sans peine que cette définition est cohérente avec les précédentes et que le faisceau \mathcal{S}_o ainsi construit est un sous-faisceau inversible de $\mathcal{O}|_{\mathbf{D}_o}$.

Théorème 4.1.4. — *Soit o une distribution d'ordres sur \mathbf{D} . Alors il existe une fonction φ holomorphe sur \mathbf{D}_o et non nulle vérifiant la condition suivante : quel que soient $\sigma \in \Sigma_o$ et $e \in E_\sigma$, la fonction φ s'annule au point e à un ordre supérieur à n_e .*

Démonstration. — Le faisceau \mathcal{S}_o construit précédemment est inversible et donc cohérent. D'après le théorème 3.2.13, ce faisceau vérifie le théorème A sur \mathbf{D}_o . On en déduit qu'il existe une section globale non nulle φ du faisceau \mathcal{S}_o sur \mathbf{D}_o . Cette fonction convient. \square

4.1.2. Problème de Cousin additif

Soient F un ensemble fermé et discret de points de \mathbf{C} et $(R_f)_{f \in F}$ une famille de polynômes à coefficients dans \mathbf{C} sans terme constant. En géométrie analytique complexe, la résolution du problème de Cousin additif sur \mathbf{C} , appelé encore théorème de Mittag-Leffler, nous assure qu'il existe une fonction méromorphe φ sur \mathbf{C} vérifiant les propriétés suivantes :

- i)* la fonction φ est holomorphe sur $\mathbf{C} \setminus F$;
- ii)* pour tout point f de F , nous avons $\varphi(z) - R\left(\frac{1}{z-f}\right)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C},f}$.

Comme précédemment, nous allons chercher à adapter ce résultat pour des fonctions méromorphes sur le disque unité ouvert \mathbf{D} . Introduisons, tout d'abord, quelques définitions.

Définition 4.1.5. — *Considérons le préfaisceau qui à tout ouvert non vide U de Y associe l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}(U)$. Le faisceau associé à ce préfaisceau est noté \mathcal{M} et appelé faisceau des **fonctions méromorphes** sur X .*

Le faisceau quotient

$$\mathcal{P} = \mathcal{M} / \mathcal{O}$$

*est appelé faisceau des **parties principales** sur X .*

Par construction, nous disposons de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0.$$

Soit U un ouvert de X . La suite exacte longue de cohomologie associée commence comme suit :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U) \rightarrow H^1(U, \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

En particulier, si le groupe $H^1(U, \mathcal{O})$ est nul, alors l'application canonique

$$\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U)$$

est surjective. Cette simple remarque permet de démontrer le théorème de Mittag-Leffler en l'appliquant avec $U = \mathbf{C}$. Nous allons adopter la même démarche pour apporter une solution au problème de Cousin additif sur l'espace analytique X .

Soit $\sigma \in \Sigma$. Fixons une clôture algébrique L_σ de \hat{K}_σ . Soit x un point rigide de \mathbf{D}_σ . Il existe un élément $\alpha(x)$ de L_σ tel que l'on ait un isomorphisme

$$\hat{K}_\sigma[\alpha(x)] \simeq k(x).$$

En utilisant le théorème 1.3.3, on montre même qu'il existe un voisinage U'_x du point rationnel $\alpha(x)$ dans $\mathbf{A}_{k(x)}^{1,\text{an}}$ tel que le morphisme naturel

$$u_x : U'_x \rightarrow \mathbf{A}_{\hat{K}_\sigma}^{1,\text{an}}$$

induit un isomorphisme sur son image U_x . En particulier, nous avons un isomorphisme

$$v_x : \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{\hat{K}_\sigma}^{1,\text{an}},x} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{k(x),\alpha(x)}^{1,\text{an}}}.$$

Définition 4.1.6. — *Une distribution p de parties principales sur \mathbf{D} est la donnée de*

- i) un sous-ensemble fini Σ_p de Σ ;*
- ii) pour tout $\sigma \in \Sigma_p$, un sous-ensemble F_σ de points rigides de \mathbf{D}_σ ;*
- iii) pour tout $\sigma \in \Sigma_\Delta$ et tout point $f \in F_\sigma$, un élément R_f de $k(f)[T]$ sans terme constant*

vérifiant la condition suivante : quel que soit $\sigma \in \Sigma_p$, l'ensemble F_σ est fermé, discret et ne contient pas le point 0.

Si Σ' désigne un sous-ensemble fini de Σ , nous noterons $A[1/\Sigma']$ le sous-ensemble de K défini par

$$A \left[\frac{1}{\Sigma'} \right] = \left\{ \frac{f}{g}, f, g \in A, \forall \mathfrak{m} \in \Sigma_f \setminus \Sigma', g \notin \mathfrak{m} \right\}.$$

Le diviseur

$$D = \sum_{\mathfrak{m} \in \Sigma_f \cap \Sigma'} [\mathfrak{m}]$$

étant de torsion dans le groupe de Picard de $\text{Spec}(A)$, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ et $h \in A^*$ tels que

$$N.D = (h).$$

Nous avons alors

$$A \left[\frac{1}{\Sigma'} \right] = A \left[\frac{1}{h} \right].$$

Si p désigne une distribution de parties principales sur \mathbf{D} , nous posons

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D} \setminus \left(\bigcup_{\mathfrak{m} \in \Sigma_p \cap \Sigma_f} \tilde{X}_{\mathfrak{m}} \right).$$

Théorème 4.1.7. — Soit p une distribution de parties principales sur \mathbf{D} . Alors, il existe une fonction φ méromorphe sur \mathbf{D}_p vérifiant les conditions suivantes :

- i) quel que soit $\sigma \notin \Sigma_p$, la série φ définit une fonction holomorphe sur \mathbf{D}_σ ;
- ii) quel que soit $\sigma \in \Sigma_p$ la fonction φ définit une fonction méromorphe sur \mathbf{D}_σ , holomorphe sur le complémentaire de F_σ ;
- iii) quel que soient $\sigma \in \Sigma_p$ et $f \in F_\sigma$, nous avons

$$v_f^* \varphi - R_f \left(\frac{1}{T - \alpha(f)} \right) \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}, \alpha(f)} ;$$

$$\text{iv) } \varphi \in \left(A \left[\frac{1}{\Sigma_p} \right] \llbracket T \rrbracket \right) \cap \mathcal{O}_{\mathbf{D}_\sigma, 0}.$$

Démonstration. — Nous allons associer à la distribution de parties principales p une section s_p du faisceau \mathcal{P} sur \mathbf{D}_p . Soit $\sigma \in \Sigma_p$. Pour chaque élément f de F_σ , nous avons défini précédemment un voisinage ouvert U_f du point f dans \mathbf{D}_σ . Puisque la partie F_σ est discrète et ne contient pas 0, quitte à restreindre ces ouverts, nous pouvons supposer qu'ils sont deux à deux disjoints et évitent le point 0. Soit $f \in F_\sigma$. En utilisant les propositions 1.3.3 et 1.1.31, on montre que l'isomorphisme u_f^{-1} , défini sur U_f , se prolonge à l'image de l'ouvert U_f par le flot,

$$V_f = \bigcup_{y \in U_f} T_X(y).$$

C'est un voisinage ouvert dans \mathbf{D}_p du fermé de Zariski

$$Z_f = \{y \in X'_\sigma \mid p_f(y) = 0\}.$$

Pour $g \in F_\sigma \setminus \{f\}$, les ouverts V_f et V_g sont disjoints. Définissons la section s_p du faisceau \mathcal{P} sur l'ouvert V_f par

$$s_p|_{V_f} = (u_f^{-1})^* \left(R_f \left[\frac{1}{T - \alpha(f)} \right] \right).$$

D'après le lemme 4.1.3, la partie

$$U = \mathbf{D}_p \setminus \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_p, f \in F_\sigma} Z_f \right)$$

est ouverte. Nous y définissons la section s_p par

$$s_p|_U = 0.$$

On vérifie sans peine que cette définition est cohérente avec les précédentes et que nous avons bien construit ainsi une section s_p de \mathcal{P} sur l'ouvert \mathbf{D}_p .

D'après le théorème 3.3.28, nous avons $H^1(\mathbf{D}_p, \mathcal{O}) = 0$. On en déduit que le morphisme canonique

$$\mathcal{M}(\mathbf{D}_p) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{D}_p)$$

est surjectif. Par conséquent, la section s_p possède un antécédent φ par ce morphisme. Quel que soit $\sigma \in \Sigma$, la fonction φ définit une fonction méromorphe sur \mathbf{D}_σ qui possède les propriétés prescrites par l'énoncé.

Remarquons également que la fonction φ est holomorphe au voisinage de la section nulle de \mathbf{D}_p . On en déduit que le développement en 0 de φ est à coefficients dans $A[1/\Sigma_p]$, par la proposition 2.2.26. \square

Sous cette forme, le résultat du théorème peut être obtenu à partir du résultat analogue de géométrie analytique complexe et d'un argument d'approximation. Nous en proposons, à présent, un raffinement qui, à notre connaissance, ne peut se démontrer ainsi.

Théorème 4.1.8. — *Soient o une distribution d'ordres sur \mathbf{D} et p une distribution de parties principales sur \mathbf{D} . Supposons que, quel que soit $\sigma \in \Sigma_o \cap \Sigma_p$, les ensembles E_σ et F_σ soient disjoints. Alors, il existe une fonction φ méromorphe sur $\mathbf{D}' = \mathbf{D}_o \cap \mathbf{D}_p$ vérifiant les conditions suivantes :*

- i) quel que soit $\sigma \notin \Sigma_p$, la série φ définit une fonction holomorphe sur \mathbf{D}_σ ;*
- ii) quel que soit $\sigma \in \Sigma_p$ la fonction φ définit une fonction méromorphe sur \mathbf{D}_σ , holomorphe sur le complémentaire de F_σ ;*
- iii) quel que soient $\sigma \in \Sigma_p$ et $f \in F_\sigma$, nous avons*

$$v_f^* \varphi - R_f \left(\frac{1}{T - \alpha(f)} \right) \in \mathcal{O}_{\mathbf{A}_{k(f)}^{1, \text{an}}, \alpha(f)} ;$$

- iv) quel que soient $\sigma \in \Sigma_o$ et $e \in E_\sigma$, la fonction φ s'annule au point e à un ordre supérieur à n_e ;*

$$v) \varphi \in \left(A \left[\frac{1}{\Sigma_o \cup \Sigma_p} \right] \llbracket T \rrbracket \right) \cap \mathcal{O}_{\mathbf{D}_\sigma, 0}.$$

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve du théorème précédent en l'appliquant à d'autres faisceaux. Juste avant le théorème 4.1.4, nous avons construit un sous-faisceau \mathcal{S}_o de $\mathcal{O}_{|\mathbf{D}_o}$. Construisons un sous-faisceau \mathcal{T}_o de $\mathcal{M}_{|\mathbf{D}_o}$ par la même méthode. Reprenons les notations utilisées lors de la définition du faisceau \mathcal{S}_o . Nous pouvons, en outre, supposer que les ouverts U_e , et donc V_e , sont connexes. Soient $\sigma \in \Sigma_o$ et $e \in E_\sigma$. Notons S_e l'ensemble des éléments

de $\mathcal{O}_{|V_e}$ qui ne sont pas identiquement nuls sur Z_e . C'est une partie multiplicative de $\mathcal{O}_{|V_e}$. Nous posons

$$\mathcal{T}_o|_{V_e} = p_e^{n_e} S_e^{-1} \mathcal{O}_{|V_e}.$$

Nous posons également

$$\mathcal{T}_o|_U = \mathcal{M}|_U.$$

Nous avons bien construit ainsi un sous-faisceau de $\mathcal{M}|_{\mathbf{D}_o}$.

Le faisceau \mathcal{S}_o s'injecte dans ce faisceau. Nous allons, à présent, construire une section s_p du faisceau quotient $\mathcal{T}_o/\mathcal{S}_o$ sur l'ouvert $\mathbf{D}' = \mathbf{D}_o \cap \mathbf{D}_p$. Nous pouvons procéder exactement comme dans la preuve du théorème précédent. Il suffit de prendre garde à choisir des ouverts U_f qui évitent les points des ensembles E_σ .

Considérons la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{S}_o \rightarrow \mathcal{T}_o \rightarrow \mathcal{T}_o/\mathcal{S}_o \rightarrow 0.$$

Le faisceau \mathcal{S}_o est inversible et donc cohérent. D'après le théorème 3.3.28, nous avons donc $H^1(\mathbf{D}', \mathcal{S}_o) = 0$. On en déduit que le morphisme canonique

$$\mathcal{T}(\mathbf{D}') \rightarrow (\mathcal{T}_o/\mathcal{S}_o)(\mathbf{D}')$$

est surjectif. Par conséquent, la section s_p possède un antécédent φ par ce morphisme. Cette fonction possède les propriétés requises. \square

Nous donnerons à la fin de la partie suivante (*cf.* corollaire 4.1.10) une interprétation en termes de séries de ce théorème.

4.1.3. Théorème de Poincaré

Dans la lignée des problèmes de Cousin, le théorème de Poincaré sur \mathbf{C} nous assure que toute fonction méromorphe s'écrit *globalement* comme un quotient de deux fonctions holomorphes. Ici encore, les techniques des espaces de Stein s'avèreront utiles.

Théorème 4.1.9. — *Soit C l'une des couronnes décrite au début de la partie 3.3.3. Quel que soit $h \in \mathcal{M}(C)$, il existe $f, g \in \mathcal{O}(C)$ tels que*

$$h = \frac{f}{g} \text{ dans } \mathcal{M}(C).$$

Démonstration. — Le faisceau $\mathcal{O} \cap h\mathcal{O}$ est cohérent. D'après le théorème A, il possède donc une section globale f sur C . On en déduit le résultat voulu. \square

Ce théorème nous permet, par exemple, de décrire les fonctions méromorphes sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 comme quotient de fonctions holomorphes sur ce disque. Nous allons utiliser ce résultat pour donner une version explicite, c'est-à-dire en termes de séries convergentes, du théorème 4.1.8.

Soit $\sigma \in \Sigma$. Soient L_σ une clôture algébrique de \hat{K}_σ et \hat{L}_σ son complété pour la valeur absolue $|\cdot|_\sigma$. Remarquons que le groupe de Galois $\text{Gal}(L_\sigma/\hat{K}_\sigma)$ agit sur \hat{L}_σ . Pour $x \in L_\sigma$, nous noterons p_x le polynôme minimal unitaire de x sur \hat{K}_σ et $k(x) = \hat{K}_\sigma[T]/(p_x(T))$. Nous noterons encore

$$L_\sigma^{\circ\circ} = \{x \in L_\sigma \mid |x|_\sigma < 1\}$$

et

$$\mathbf{D}_{\hat{L}_\sigma} = \mathbf{D}_\sigma \hat{\otimes}_{\hat{K}_\sigma} \hat{L}_\sigma = \left\{ x \in \mathbf{A}_{\hat{L}_\sigma}^{1,\text{an}} \mid |T(x)| < 1 \right\}.$$

Rappelons, finalement, que l'on peut interpréter les fonctions holomorphes sur $\mathbf{A}_{\hat{K}_\sigma}^{1,\text{an}}$ comme des fonctions holomorphes sur $\mathbf{A}_{\hat{L}_\sigma}^{1,\text{an}}$ invariantes par le groupe de Galois $\text{Gal}(L_\sigma/\hat{K}_\sigma)$.

Corollaire 4.1.10. — *Soient Σ_Δ une parties finie de Σ . Pour $\sigma \in \Sigma_\Delta$, soient E_σ et F_σ deux ensembles disjoints de $L_\sigma^{\circ\circ}$ fermés, discretset évitant 0. Pour $\sigma \in \Sigma_\Delta$ et $e \in E_\sigma$, soit n_e un entier. Pour $\sigma \in \Sigma_\Delta$ et $f \in F_\sigma$, soit R_f un polynôme à coefficients dans $k(f)$ sans terme constant. Supposons que*

i) *quel que soient $\sigma \in \Sigma_\Delta$, $e \in E_\sigma$ et $\tau \in \text{Gal}(L_\sigma/\hat{K}_\sigma)$, nous avons*

$$\tau(e) \in E_\sigma \text{ et } n_{\tau(e)} = n_e ;$$

ii) *quel que soient $\sigma \in \Sigma_\Delta$, $f \in F_\sigma$ et $\tau \in \text{Gal}(L_\sigma/\hat{K}_\sigma)$, nous avons*

$$\tau(f) \in F_\sigma \text{ et } R_{\tau(f)} = \tau(R_f).$$

Alors, il existe deux séries $u, v \in A[1/\Sigma_\Delta][[T]]$ vérifiant les propriétés suivantes :

- a) *quel que soit $\sigma \notin \Sigma_\Delta$, la série u/v , vue comme fonction analytique sur \hat{L}_σ , est développable en 0 en une série entière de rayon de convergence supérieur à 1 ;*
- b) *quel que soit $\sigma \in \Sigma_\Sigma$ et $z \notin F_\sigma$, la série u/v , vue comme fonction analytique sur \hat{L}_σ , est développable en z en une série entière de rayon de convergence strictement positif ;*
- c) *quel que soit $\sigma \in \Sigma_\Sigma$ et $e \in E_\sigma$, la série u/v , vue comme fonction analytique sur \hat{L}_σ , s'annule en e à un ordre supérieur à n_e ;*
- d) *quel que soient $\sigma \in \Sigma_\Delta$ et $f \in F_\sigma$, la série u/v , vue comme fonction analytique sur \hat{L}_σ , est développable en f en une série de Laurent de partie principale $R_f \left(\frac{1}{T-f} \right)$ et de rayon de convergence strictement positif.*

4.2. Noethérianité d'anneaux de séries arithmétiques

4.2.1. Sous-variétés analytiques

Jusqu'ici, nous avons étudié les propriétés de la droite analytique X ou de certaines de ces parties, comme les disques et les couronnes relatifs. Il est également naturel de s'intéresser aux fermés analytiques de la droite X , c'est-à-dire aux parties définies localement par l'annulation de fonctions analytiques. Nous en proposons ici une brève étude.

Définition 4.2.1. — Soit U un ouvert de X . On appelle **sous-variété analytique** de U tout espace localement annelé de la forme

$$(V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_U/\mathcal{I}),$$

où \mathcal{I} est un faisceau d'idéaux de type fini de \mathcal{O}_U .

Remarque 4.2.2. — Soient U un ouvert de X et \mathcal{I} un faisceau d'idéaux de type fini de \mathcal{O}_U . Puisque le faisceau \mathcal{I} est de type fini, cette sous-variété analytique est définie localement en tout point de X par un nombre fini d'équations. L'espace topologique $V(\mathcal{I})$ est donc fermé dans U . En outre, puisque les faisceaux \mathcal{O}_U et \mathcal{I} sont cohérents, le faisceau $\mathcal{O}_U/\mathcal{I}$ l'est aussi.

Définition 4.2.3. — Soient U un ouvert de X et (Z, \mathcal{O}_Z) une sous-variété analytique de U . Soit x un point de Z . On dit que la sous-variété (Z, \mathcal{O}_Z) est **intègre en x** si l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,x}$ est intègre. On dit que la sous-variété (Z, \mathcal{O}_Z) est **intègre** si elle est intègre en chacun de ses points.

Nous allons, à présent, décrire les germes de sous-variétés analytiques intègres en un point. Soit x un point de X . Soient U un voisinage ouvert de x dans X et \mathcal{I} un faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_U tel que la sous-variété analytique

$$(Z, \mathcal{O}_Z) = (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_U/\mathcal{I})$$

soit intègre en x . L'idéal \mathcal{I}_x est donc un idéal premier de $\mathcal{O}_{X,x}$. Nous allons distinguer plusieurs cas.

Supposons tout d'abord, que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps. L'idéal \mathcal{I}_x ne peut alors être que l'idéal nul. Par le principe du prolongement analytique (cf. théorème 2.3.24), au voisinage du point x , l'idéal \mathcal{I} est nul et la sous-variété (Z, \mathcal{O}_Z) coïncide avec (X, \mathcal{O}_X) .

Supposons, à présent, que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante τ . L'idéal \mathcal{I}_x est alors soit l'idéal nul, soit l'idéal (τ) . Si $\mathcal{I}_x = (0)$, localement, la sous-variété (Z, \mathcal{O}_Z) n'est autre que l'espace total, comme précédemment. Supposons donc que $\mathcal{I}_x = (\tau)$. D'après 3.3.20, l'idéal \mathcal{I} est localement engendré par τ . Distinguons de nouveau plusieurs cas.

Supposons, tout d'abord, que le point $b = \pi(x)$ est un point interne de B . Il existe $\sigma \in \Sigma$ tel que ce point appartienne à la branche σ -adique ouverte. Il existe donc un polynôme $P(T) \in \mathcal{H}(b)[T] = K_\sigma[T]$ irréductible et unitaire tel que le point x soit le point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $P(T)(x) = 0$. En outre, nous pouvons supposer que $\tau = P(T)$. Notons V un voisinage ouvert et connexe de b dans $\pi(U)$ au-dessus duquel l'idéal \mathcal{I} est engendré par $P(T)$. Nous pouvons supposer que V est contenu dans la branche σ -adique ouverte. Alors l'application qui à tout point c de V associe l'unique point y de la fibre $\pi^{-1}(c)$ défini par l'équation $P(T)(y) = 0$ réalise un homéomorphisme de V sur $\pi^{-1}(V) \cap Z$. On en déduit que $\pi^{-1}(V) \cap Z$ est connexe et localement connexe par arcs. En outre, en tout point y de $\pi^{-1}(V) \cap Z$, l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,y}$ est un corps. Par conséquent, les parties ouvertes et connexes de la sous-variété $\pi^{-1}(V) \cap Z$ vérifient le principe du prolongement analytique.

Supposons, à présent, que $b = \pi(x)$ soit le point central a_0 de B . Il existe encore un polynôme $P(T) \in \mathcal{H}(b)[T] = K[T]$, irréductible et unitaire, tel que le point x soit le point de la fibre $\pi^{-1}(b)$ défini par l'équation $P(T)(x) = 0$. Nous pouvons également supposer que $\tau = P(T)$. Au voisinage de x , la sous-variété définie par l'équation $P(T) = 0$ est un revêtement topologique de B , ramifié au point x . Il suffit de choisir pour voisinage de x un ouvert de X sur lequel \mathcal{I} est engendré par $P(T)$ et qui évite les fibres extrêmes $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ correspondant à un idéal \mathfrak{m} tel que le polynôme $P(T)$ ait des racines multiples dans $k_{\mathfrak{m}}$ (il n'existe qu'un nombre fini de tels idéaux). Comme précédemment, il existe un voisinage W de x dans U tel que la sous-variété $W \cap Z$ soit connexe, localement connexe par arcs et que ses parties ouvertes et connexes vérifient le principe du prolongement analytique.

Supposons, pour finir, que $b = \pi(x)$ soit un point extrême de B . Il existe alors $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que $b = \tilde{a}_{\mathfrak{m}}$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète si, et seulement si, le point x est de type 2 ou 3. Nous pouvons alors choisir l'uniformisante $\tau = \pi_{\mathfrak{m}}$. Par conséquent, au voisinage du point x , la sous-variété Z n'est autre que la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$. De nouveau, nous en déduisons qu'il existe un voisinage W de x dans U tel que la sous-variété $W \cap Z$ soit connexe, localement connexe par arcs et que ses parties ouvertes et connexes vérifient le

principe du prolongement analytique.

Il nous reste à traiter le cas où l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est ni un corps, ni un anneau local. Le point x est alors nécessairement un point rigide d'une fibre extrême : il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ et un polynôme irréductible et unitaire $P(T) \in k_{\mathfrak{m}}[T]$ tel que x soit l'unique point de la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$ défini par l'équation $P(T)(x) = 0$. L'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ est $(\pi_{\sigma}, P(T))$. L'idéal premier \mathcal{I}_x peut être de plusieurs sortes. Tout d'abord, comme dans les cas précédents, nous pouvons avoir $\mathcal{I}_x = (0)$. La sous-variété Z coïncide alors localement avec l'espace X tout entier. Si l'idéal \mathcal{I}_x est de hauteur 2, c'est l'idéal maximal \mathfrak{m}_x et la sous-variété Z est, localement, réduite au point x . Si l'idéal \mathcal{I}_x est de hauteur 1, alors nous pouvons avoir $\mathcal{I}_x = (\pi_{\mathfrak{m}})$, auquel cas la sous-variété Z coïncide localement avec la fibre $\tilde{X}_{\mathfrak{m}}$, ou bien $\mathcal{I}_x = (Q(T))$, où $Q(T)$ est un polynôme irréductible de $\hat{A}_{\mathfrak{m}}[T]$ qui relève $P(T)$. Dans ce dernier cas, il est encore possible de construire une section de π qui soit un homéomorphisme d'un voisinage de $\tilde{a}_{\mathfrak{m}}$ dans B vers un voisinage de x dans Z . Dans tous les cas, il existe un voisinage W de x dans U tel que la sous-variété $W \cap Z$ soit connexe, localement connexe par arcs et que ses parties ouvertes et connexes vérifient le principe du prolongement analytique.

À l'aide de ces descriptions explicites, nous obtenons les résultats suivants.

Proposition 4.2.4. — *Soit x un point de X . Soient U un voisinage ouvert de x dans X et \mathcal{I} un faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_U tel que la sous-variété analytique*

$$(Z, \mathcal{O}_Z) = (V(\mathcal{I}), \mathcal{O}_U/\mathcal{I})$$

soit intègre en x . Alors il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que la sous-variété $Z \cap V$ de V soit intègre.

Proposition 4.2.5. — *Soient U un ouvert de X et (Z, \mathcal{O}_Z) une sous-variété analytique intègre de U . Alors Z est localement connexe par arcs et ses parties ouvertes et connexes satisfont au principe du prolongement analytique.*

4.2.2. Théorème de Frisch

Dans ce paragraphe, nous démontrons que l'anneau des germes de fonctions analytiques au voisinage de certains compacts est noethérien. Le premier résultat de ce type a été obtenu par J. Frisch dans le cadre de la géométrie analytique complexe (cf. [26], théorème I, 9) :

Théorème (Frisch). — Soit X une variété analytique réelle ou complexe. Soit K une partie compacte de X , semi-analytique et de Stein. Alors l'anneau des fonctions analytiques au voisinage de K est noethérien.

Définition 4.2.6. — Soient E une partie de X et x un point de E . La partie E est dite **morcelable au voisinage du point x** si, pour tout voisinage ouvert U de x dans X et toute sous-variété analytique Z de U intègre en x , il existe un voisinage V de x dans $E \cap U$ qui possède un système fondamental de voisinages ouverts dans U dont les traces sur Z sont connexes.

La partie E est dite **morcelable** si elle est morcelable au voisinage de chacun de ses points.

Proposition 4.2.7. — Soit E une partie morcelable de X . Soient \mathcal{F} un faisceau cohérent sur E et $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de sous-faisceaux cohérents de \mathcal{F} . Alors la suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est localement stationnaire dans E au sens où, quel que soit $x \in E$, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ et un voisinage U de x dans E tels que

$$\forall n \geq n_0, \forall z \in U, (\mathcal{F}_{n_0})_z \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_n)_z.$$

Démonstration. — Soit $x \in E$. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $n \geq n_0$, on ait

$$(\mathcal{F}_{n_0})_x \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_n)_x.$$

Quitte à remplacer \mathcal{F} par $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{n_0}$ et \mathcal{F}_n par $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n_0}$, pour $n \geq n_0$, puis à décaler les indices, nous pouvons supposer que

$$(\mathcal{F}_n)_x = 0,$$

quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque \mathcal{F}_x est un module de type fini sur $\mathcal{O}_{X,x}$, il existe un entier $r \in \mathbf{N}$ et une filtration

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \dots \subset M^r = \mathcal{F}_x$$

de \mathcal{F}_x par des sous-modules de type fini et des idéaux premiers $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_r$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ vérifiant la condition suivante : quel que soit $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, on dispose d'un isomorphisme

$$M^{(i+1)}/M^{(i)} \simeq \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{p}_i.$$

Cette filtration et ces isomorphismes se prolongent au niveau des faisceaux. Il existe une filtration de \mathcal{F}

$$0 = \mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(r)} = \mathcal{F}$$

par des sous-faisceaux cohérents définis au voisinage de a et r sous-variétés analytiques Z_0, \dots, Z_{r-1} définies au voisinage de x , intègres en x et vérifiant la

condition suivante : quel que soit $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, on dispose d'un isomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{F}^{(i+1)}/\mathcal{F}^{(i)} \simeq \mathcal{O}_{Z_i}.$$

Il nous suffit, à présent, de montrer que, pour chaque $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, la sous-suite $(\mathcal{G}_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{F}^{(i)}/\mathcal{F}^{(i+1)} \simeq \mathcal{O}_{Z_i}$ induite par $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne au voisinage de x dans E et même au voisinage de x dans $E \cap Z_i$. Soit U un voisinage ouvert de x dans X sur lequel Z_i est définie. D'après la proposition 4.2.4, nous pouvons supposer que $Z_i \cap U$ est une sous-variété intègre de U . Par hypothèse, la partie E de X est morcelable au voisinage du point x . Il existe donc un voisinage V de x dans $E \cap U$ qui possède un système fondamental de voisinages ouverts dans X dont les intersections avec Z_i sont connexes.

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $f \in \mathcal{G}_{i,n}$. Il existe un voisinage ouvert W de V dans X sur lequel la fonction f est définie et tel que $W \cap Z_i$ soit une sous-variété intègre et connexe de W . Puisque $(\mathcal{G}_{i,n})_x = 0$, la fonction f est nulle au voisinage de x dans Z_i . D'après 4.2.5, $W \cap Z_i$ vérifie le principe du prolongement analytique. On en déduit que f est nulle sur $W \cap Z_i$. Finalement, le faisceau $\mathcal{G}_{i,n}$ est nul sur $V \cap Z_i$, et donc sur V . \square

Corollaire 4.2.8. — *Soient E une partie de X morcelable et de Stein, \mathcal{F} un faisceau cohérent sur E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de sections de \mathcal{F} sur E . Le sous-faisceau de \mathcal{F} engendré par la famille $(f_i)_{i \in I}$ est cohérent.*

Théorème 4.2.9. — *Soient E une partie compacte morcelable et de Stein de X . L'anneau $\mathcal{O}(E)$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de E est noethérien.*

Démonstration. — Soit $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante d'idéaux de type fini de $\mathcal{O}(E)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons \mathcal{I}_n le faisceau d'idéaux cohérents de \mathcal{O}_X engendré par I_n . D'après la proposition 4.2.7 et la compacité de E , il existe un rang $n_0 \in \mathbf{N}$ à partir duquel la suite $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne.

Puisque l'idéal I_{n_0} est de type fini, il possède un système générateur fini (f_1, \dots, f_p) , avec $p \in \mathbf{N}$ et, quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i \in \mathcal{O}(E)$. Le morphisme de faisceaux

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X^p & \rightarrow & \mathcal{I}_{n_0} \\ (a_1, \dots, a_p) & \mapsto & a_1 f_1 + \dots + a_p f_p \end{array}$$

est alors surjectif.

Soit $n \geq n_0$. Notons \mathcal{G} le noyau du morphisme de faisceaux φ . C'est encore un faisceau cohérent sur E . Nous disposons de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{I}_n \rightarrow 0.$$

Puisque $H^1(E, \mathcal{G}) = 0$, le morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(E)^p &\rightarrow \mathcal{I}_n(E) \\ (a_1, \dots, a_p) &\mapsto a_1 f_1 + \dots + a_p f_p \end{aligned}$$

est surjectif. Par conséquent, nous avons

$$I_n \subset \mathcal{I}_n(E) = (f_1, \dots, f_p) \mathcal{O}(E) \subset I_{n_0}.$$

On en déduit que $I_n = I_{n_0}$. □

4.2.3. Séries arithmétiques

Dans ce paragraphe, nous appliquons le théorème obtenu afin de démontrer la noéthérianité de certains anneaux de séries arithmétiques. Il est vraisemblable que l'analogue du théorème de Frisch vaut pour toute partie semi-analytique de la droite $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$. Cependant, pour le démontrer par la méthode présentée ci-dessus, il nous faudrait savoir que les parties semi-analytiques de $\mathbf{A}_A^{1,\text{an}}$ sont localement connexes. Nous ne nous lancerons pas dans la démonstration de ce résultat et nous contenterons d'adapter le théorème de Frisch au cas des couronnes fermées au-dessus de certaines parties compactes de B .

Reprenons les notations de la partie 3.2.3. Soient $s, t \in [0, +\infty[$, avec $s \leq t$. Pour $\sigma \in \Sigma$ et $u, v \in [0, l(\sigma)]$, on pose

$$K_0(\sigma, u, v) = [a_\sigma^u, a_\sigma^v]$$

et

$$K(\sigma, u, v) = \pi^{-1}(K_0(\sigma, u, v)) \cap \overline{C}(s, t).$$

Pour $n \in \mathbf{N}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$, $u_1 \in [0, l(\sigma_1)]$, \dots , $u_n \in [0, l(\sigma_n)]$, on pose

$$L_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n) = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} [a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}] \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \neq \sigma_1, \dots, \sigma_n} X_\sigma \right)$$

et

$$L(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n) = \pi^{-1}(L_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)) \cap \overline{C}(s, t).$$

Finalement, pour $n \in \mathbf{N}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \Sigma$, $u_1 \in [0, l(\sigma_1)]$, \dots , $u_n \in [0, l(\sigma_n)]$, on pose

$$M_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n) = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} [a_0, a_{\sigma_i}^{u_i}] \right)$$

et

$$M(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n) = \pi^{-1}(M_0(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)) \cap \overline{C}(s, t).$$

Dans la suite, C désignera un compact du type $K(\sigma, u, v)$, $L(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)$ ou $M(\sigma_1, u_1, \dots, \sigma_n, u_n)$.

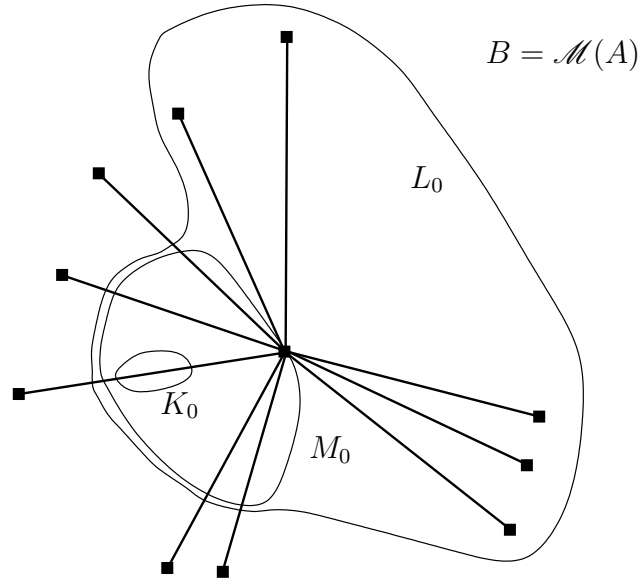


FIG. 1. Les compacts K_0 , L_0 et M_0 .

Proposition 4.2.10. — *La couronne C de X est localement connexe par arcs.*

Démonstration. — Si x est un point intérieur à C , le résultat est vrai car il l'est pour l'espace X lui-même, d'après le théorème 2.3.23. Nous supposons donc, désormais, que le point x est situé sur le bord de la couronne C . En particulier, nous avons nécessairement $|T(x)| = s$ ou $|T(x)| = t$. Nous supposons que $|T(x)| = t$. L'autre cas se traite de même. Nous allons distinguer selon le type du point x et de son projeté $\pi(x)$ sur la base.

Supposons, tout d'abord, que le point $\pi(x)$ soit un point extrême : il existe $\mathfrak{m} \in \Sigma_f$ tel que $\pi(x) = \tilde{\alpha}_{\mathfrak{m}}$. Si le point x est le point η_s , alors le résultat provient de la proposition 1.3.14, si $t \neq 1$, et de la proposition 2.3.13, si $t = 1$. Il faut plus précisément revenir à la description explicite des sections donnée dans la preuve de ces propositions. Il nous reste à traiter le cas où x vérifie $|T(x)| = 1$, mais n'est pas le point η_1 . Un tel point appartient nécessairement à l'intérieur de la couronne C . En effet, il existe $\tilde{\alpha} \in \tilde{k}_{\mathfrak{m}}^*$ et $u \in [0, 1[$ tels que $x = \eta_{\tilde{\alpha}, u}$. Choisissons un relevé α de $\tilde{\alpha}$ dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$. Soit $v \in]u, 1[$. Alors le voisinage de x dans X défini

par

$$U = \{y \in \pi^{-1}(]a_0, \tilde{a}_m]) \mid |(T - \alpha)(y)| < v\}$$

est contenu dans $\overline{C}(s, 1)$. En effet, soient $\varepsilon \in]0, +\infty]$ et $y \in U \cap \pi^{-1}(a_m^\varepsilon)$. Nous avons $|(T - \alpha)(y)| < v < 1$. Puisque $|\alpha(y)| = |\alpha|_m^\varepsilon = 1$, cela impose que $|T(y)| = 1$.

Lorsque le point $\pi(x)$ est le point central a_0 de B , le résultat se démontre de façon identique.

Venons-en, à présent, au cas de la partie archimédienne de X . Soit $\sigma \in \Sigma_\infty$. Rappelons que, d'après la proposition 2.2.2, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(a_\sigma) \times]0, 1] & \rightarrow & X'_\sigma \\ (x, \varepsilon) & \mapsto & x^\varepsilon \end{array}$$

est un homéomorphisme. Nous supposons que $K_\sigma = \mathbf{C}$. Le cas $K_\sigma = \mathbf{R}$ se traite de même. Nous avons

$$\varphi^{-1}(X'_\sigma \cap \overline{C}(s, t)) = \{(u, z) \in]0, 1] \times \mathbf{C} \mid s^{1/u} \leq |z| \leq t^{1/u}\}.$$

Cette partie est localement connexe par arcs et il en est de même de son intersection avec la couronne C .

Il nous reste à traiter le cas où le point $\pi(x)$ est de la forme a_σ^λ , avec $\sigma \in \Sigma_f$ et $\lambda \in]0, +\infty[$. Nous pouvons supposer que $\lambda = 1$. Comme dans le cas des fibres au-dessus d'un corps trivialement valué, il nous suffit de traiter le cas où x est le point η_t de sa fibre. Nous supposons que $t \in]0, 1[$. Les autres cas se traitent de même. Soit U un voisinage de x dans X . Il existe un voisinage connexe par arcs V de x dans $\pi^{-1}(a_\sigma) \cap U$. Il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que, quel que soit $u \in]t^{1/\beta}, t^\beta[$, on ait $\eta_u \in \pi^{-1}(a_\sigma) \cap V$. D'après la proposition 2.2.1, quitte à augmenter β , nous pouvons supposer que la partie

$$W = \{x^\varepsilon, x \in \pi^{-1}(a_\sigma) \cap V, \varepsilon \in]\beta, 1/\beta[\}$$

est un voisinage de x dans U . La trace de W sur chaque fibre est connexe par arcs en tant qu'intersection sur un arbre de deux parties connexes par arcs (l'une étant homéomorphe à V , l'autre étant une couronne). En outre, ces fibres sont jointes par une section depuis la base : l'application qui au point $a_{\sigma, \varepsilon}$, avec $\varepsilon \in]\beta, 1/\beta[$, associe le point η_t de sa fibre. On en déduit que la trace de la partie W sur la couronne C est connexe par arcs. \square

Corollaire 4.2.11. — *La couronne C de X est morcelable.*

Démonstration. — Soit x un point de C . Soient U un voisinage ouvert de x dans X et Z une sous-variété analytique de U intègre en x . Nous devons montrer qu'il existe un voisinage V de x dans $E \cap U$ qui possède un système fondamental de voisinages ouverts dans U dont les traces sur Z sont connexes.

Supposons, tout d'abord, que $Z = U$ au voisinage de x . Dans ce cas, la proposition précédente nous permet de conclure. Si, maintenant, Z est une sous-variété analytique stricte de U , nous en connaissons précisément la forme grâce aux descriptions données dans la partie 4.2.1. En particulier, au voisinage du point x , la sous-variété Z est soit un point, soit homéomorphe à un intervalle, soit une fibre extrême. Le résultat est immédiat dans chacun de ces cas. \square

Théorème 4.2.12. — *L'anneau $\mathcal{O}(C)$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de la couronne C de X est noethérien.*

Démonstration. — Une telle partie est morcelable en vertu du corollaire précédent. Nous savons également qu'elle est de Stein, d'après les théorèmes 3.2.13 et 3.2.14. Le théorème 4.2.9 nous permet donc de conclure. \square

Corollaire 4.2.13. — *Soient Σ' un sous-ensemble fini de Σ contenant Σ_∞ et $(r_\sigma)_{\sigma \in \Sigma'}$ une famille d'éléments de $]0, 1[$. Il existe un élément $N \in A^*$ tel que*

$$\bigcap_{\sigma \in \Sigma'} A_\sigma = A \left[\frac{1}{N} \right].$$

Le sous-anneau de $K((T))$ constitué des séries de la forme $\sum_{k \geq k_0} a_k T^k$ vérifiant les conditions

- i) $k_0 \in \mathbf{Z}$,*
- ii) $\forall k \geq k_0, a_k \in A[1/N]$,*
- iii) $\forall \sigma \in \Sigma', \exists r > r_\sigma, \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|_\sigma r^k = 0$*

est noethérien.

Le sous-anneau de $K[[T]]$ constitué des séries de la forme $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$ vérifiant les conditions

- i) $\forall k \geq 0, a_k \in A[1/N]$,*
- ii) $\forall \sigma \in \Sigma', \exists r > r_\sigma, \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|_\sigma r^k = 0$*

est noethérien.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème précédent à une couronne bien choisie. Posons

$$t = \max_{\sigma \in \Sigma'}(r_\sigma) \in]0, 1[.$$

Quel que soit $\sigma \in \Sigma'$, il existe $\varepsilon_\sigma \in]0, 1]$ tel que

$$t^{1/\varepsilon_\sigma} = r_\sigma.$$

Définissons une partie compacte V de B par

$$V = \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma'} [a_0, a_\sigma^{\varepsilon_\sigma}] \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \notin \Sigma'} B_\sigma \right).$$

Soit $s \in]0, t]$. D'après les exemples suivant le théorème 2.2.30, le premier anneau considéré n'est autre que l'anneau $\mathcal{O}(\overline{C}_V(s, t))$. Il est noethérien, en vertu du théorème précédent.

Le second énoncé s'obtient de même en considérant le disque $\overline{D}_V(t)$, au lieu de la couronne $\overline{C}_V(s, t)$.

□

Comme cas particulier du théorème, nous retrouvons un résultat de D. Harbater (*cf.* [34], théorème 1.8). Signalons que notre démonstration se distingue très nettement de la sienne, qui passe par une description explicite de tous les idéaux premiers de l'anneau étudié.

Corollaire 4.2.14. — Soit $r_\infty \in]0, 1[$. Considérons le sous-anneau $\mathbf{Z}_{r_+}[[T]]$ de $\mathbf{Z}[[T]]$ constitué des séries de la forme $\sum_{k \geq 0} a_k T^k$ vérifiant la condition

$$\exists r > r_\infty, \lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k|_\infty r^k = 0.$$

C'est l'anneau des fonctions holomorphes au voisinage du disque de centre 0 et de rayon r_∞ de \mathbf{C} dont le développement en série entière en 0 est à coefficients entiers. L'anneau $\mathbf{Z}_{r_+}[[T]]$ est noethérien.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le second résultat du théorème précédent avec $K = \mathbf{Q}$ et $\Sigma' = \Sigma_\infty$.

□

SECONDE PARTIE

UN RÉSULTAT DE CONNEXITÉ
POUR LES VARIÉTÉS
ANALYTIQUES p -ADIQUES.
PRIVILÈGE ET
NOETHÉRIANITÉ.

Introduction

Le travail que nous présentons ici trouve son origine dans une tentative d'adapter au cadre p -adique un résultat connu de géométrie analytique complexe. Il s'agit d'un théorème, dû à J. Frisch, qui assure la noethérianité de l'anneau des germes de fonctions au voisinage de certains compacts. La preuve qui figure dans l'article [26] fait appel, de manière essentielle, à deux notions dont nous ne disposons pas pour des variétés analytiques p -adiques : celle de voisinage privilégié et celle de stratification d'une partie semi-analytique.

Cependant, C. Bănică et O. Stănășilă ont abordé le problème de façon légèrement différente et rédigé, dans [2], 5, fin du §3, une démonstration, dont les arguments peuvent s'adapter, sans peine. Nous proposons, en appendice à ce texte, un énoncé du théorème, dans le cadre des espaces définis sur un corps ultramétrique complet, accompagné d'une preuve, calquée sur la leur.

La démonstration originale de J. Frisch, bien qu'à présent obsolète, nous a conduit à nous intéresser aux voisinages privilégiés. Nous avons alors cherché à étendre au cadre des variétés p -adiques le résultat d'A. Douady (*cf.* [19], §6, théorème 1) assurant l'existence de voisinages compacts privilégiés pour les faisceaux cohérents. Ainsi que nous l'expliquerons dans la dernière partie de ce texte, nous pouvons en proposer une démonstration fort simple, pour peu que nous disposions d'une sorte de généralisation du théorème d'extension de Riemann. Elle s'énonce comme suit :

Théorème 1. — *Soit X un espace k -affinoïde irréductible et f_1, \dots, f_n , avec $n \in \mathbf{N}^*$, des fonctions analytiques sur X . Alors il existe un voisinage V de 0 dans \mathbf{R}_+^n tel que le domaine analytique de X défini par*

$$V_\varepsilon = \bigcup_{1 \leq j \leq n} \{x \in X \mid |f_j(x)| \geq \varepsilon_j\}$$

est irréductible, dès que le n -uplet $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ appartient à V .

Dorénavant, c'est à ce problème que nous consacrerons notre attention. Rappelons que, dans le cadre de la géométrie analytique complexe, le théorème d'extension de Riemann assure, en particulier, qu'un espace irréductible le reste lorsque l'on lui retire un fermé analytique strict. L'analogue de ce théorème pour les variétés analytiques p -adiques est également connu de longue date (*cf.* [3], [37]). Dans quelle mesure est-il possible d'ôter un voisinage d'un tel fermé sans nuire à l'irréductibilité ?

Remarquons que, sur un ouvert, cadre naturel de la géométrie analytique complexe, toute tentative en ce sens serait vouée à l'échec. Pour nous en convaincre, considérons l'ouvert du plan complexe défini par

$$U = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < \frac{1}{|\operatorname{Re}(z)| + 1} \right\}.$$

Alors, dès que ε est assez petit, le domaine défini par $\{z \in U \mid |\sin(z)| \geq \varepsilon\}$ possède une infinité de composantes connexes.

Néanmoins, le problème garde un intérêt pour les espaces analytiques définis sur un corps ultramétrique complet. En effet, les modèles locaux de ces derniers, appelés espaces affinoïdes, se comportent, à bien des égards, comme des espaces compacts. Entre autres propriétés, ils sont quasi-compacts, définis par un nombre fini d'inégalités larges et vérifient un principe du maximum.

Nous nous placerons donc désormais sur un espace affinoïde irréductible X défini sur un corps ultramétrique complet k . Notons $\sqrt{|k^*|}$ le \mathbf{Q} -espace vectoriel engendré par le groupe des valeurs du corps de base. Dans le cadre de la géométrie analytique rigide, les fonctions prennent leurs valeurs dans l'ensemble, peu ragoûtant, $\sqrt{|k^*|} \cup \{0\}$ et la topologie des espaces est une topologie de Grothendieck, qui n'est guère aisée à manipuler. L'espace X est quasi-compact, mais, en général, nous ne pouvons assurer que l'ensemble V_ε vérifie cette propriété que dans le cas où $\varepsilon \in (\sqrt{|k^*|})^n$.

Il y a de cela une vingtaine d'années, V. G. Berkovich proposa une nouvelle approche des variétés analytiques sur un corps ultramétrique complet (*cf.* [4] et [5]). La construction qu'il mit en œuvre présentait plusieurs avantages et notamment celui de fournir des espaces possédant de nombreuses propriétés topologiques remarquables : à titre d'exemple, citons la séparation, la compacité et la connexité par arcs locales. Cette dernière propriété nous sera fort utile : le résultat que nous avons en vue imposant à un certain espace d'être connexe, cela nous simplifiera la tâche de pouvoir tracer des chemins.

Ajoutons que, dans ce nouveau cadre, les fonctions prennent leurs valeurs dans un ensemble continu, que l'espace X est compact et qu'il en est de même pour l'espace V_ε , quel que soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^n$. Ces différentes raisons nous conduisent à nous placer, tout au long de ce texte et sans plus le préciser désormais, dans le cadre des espaces analytiques au sens de V. G. Berkovich. Nous y démontrerons le théorème annoncé. Précisons, cependant, que le résultat reste valable dans le cadre de la géométrie analytique rigide.

Restreignons-nous, à présent, au cas d'une seule fonction f sur X et supposons qu'elle soit bornée par 1. Considérons les domaines affinoïdes de X de la

forme

$$V_\varepsilon = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\},$$

avec $\varepsilon \in [0, 1]$. Notre second théorème assure que les composantes connexes des domaines affinoïdes précédents varient de façon modérée en fonction du paramètre ε . Pour le démontrer, nous utiliserons, de manière essentielle, une autre spécificité des espaces construits par V. G. Berkovich : dans les bons cas, ils se rétractent sur un sous-ensemble fermé, appelé squelette, qui est muni d'une structure linéaire par morceaux. En particulier, nous parviendrons à lire le paramètre ε sur un segment réel, homéomorphe à $[0, 1]$, tracé sur le disque unité de dimension 1.

Énonçons précisément le théorème en question. Soit \bar{k} une clôture algébrique k . Nous noterons π_0^g le foncteur, défini de la catégorie des espaces k -analytiques dans celle des ensembles munis d'une action du groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\bar{k}/k)$, qui associe à un espace k -analytique l'ensemble de ses composantes connexes géométriques.

Théorème 2. — *Soient k un corps ultramétrique complet, X un espace k -affinoïde et f une fonction analytique sur X . Alors il existe une partition finie \mathcal{P} de \mathbf{R}^+ de la forme*

$$\mathcal{P} = \{[0, a_0],]a_0, a_1], \dots,]a_{r-1}, a_r],]a_r, +\infty[\},$$

où $r \in \mathbf{N}$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq r}$ est une suite croissante d'éléments de $R_X \cup \{0\}$, satisfaisant la condition suivante : quel que soit $I \in \mathcal{P}$, quels que soient $\varepsilon', \varepsilon \in I$, avec $\varepsilon' \leq \varepsilon$, l'inclusion

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon'\}$$

induit une bijection

$$\pi_0^g(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow \pi_0^g(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon'\}).$$

Le même résultat vaut pour le foncteur qui associe à un espace k -analytique le $\text{Aut}(\bar{k}/k)$ -ensemble de ses composantes irréductibles géométriques.

Dans ce théorème, l'ensemble R_X désigne le sous- \mathbf{Q} -espace vectoriel de \mathbf{R}_+^* engendré par les valeurs non nulles de la norme spectrale sur l'algèbre de X . Par exemple, si l'espace X est strictement k -affinoïde, on a $R_X = \sqrt{|k^*|}$.

Remarquons que, dans le cadre de la géométrie rigide, A. Abbes et T. Saito (cf. [1], 5.1) ont déjà démontré ce dernier résultat pour un intervalle du type $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, et en ne s'intéressant qu'au cardinal de l'ensemble des composantes connexes géométriques. Nous signalons également que, dans leur article, les bornes des intervalles sont interprétés comme les sauts d'une certaine

filtration de ramification.

La démonstration que nous proposons s’effectuera en quatre étapes, correspondant aux quatre premières parties de ce texte. Dans un premier temps, nous étudierons la manière dont varient les composantes géométriquement connexes des fibres d’un morphisme entre espaces affinoïdes. Lorsqu’elles se réaliseront comme composantes connexes, nous chercherons à les repérer par des sections. Des questions proches ont déjà été traitées pour des morphismes entre schémas : nous savons, par exemple, d’après [31], 9.7.9, que, pour un morphisme de présentation finie, la fonction qui à un point de la base associe le nombre géométrique de composantes connexes de sa fibre est localement constructible sur la base. Nous parviendrons à nos fins en appliquant des résultats de ce type sur la fibre spéciale d’un modèle formel, judicieusement choisi, du morphisme entre espaces affinoïdes dont nous sommes partis.

La difficulté principale tient dans la démonstration de l’existence d’un modèle possédant de bonnes propriétés. Elle nous est assurée par le théorème de la fibre réduite (*cf.* [15]), pourvu que le morphisme entre espaces affinoïdes soit plat et à fibres géométriquement réduites. Dans ce cas, nous parviendrons à exhiber une partition finie de la base en domaines analytiques sur lesquels le nombre géométrique de composantes connexes des fibres est constant.

Les deuxième et troisième parties seront consacrées aux domaines définis par

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\},$$

pour $\varepsilon > 0$, dans le cas particulier d’un espace X strictement affinoïde intègre défini sur un corps algébriquement clos et d’une fonction f de norme spectrale égale à 1. Nous montrerons que la variation de leurs composantes connexes, en fonction de ε , est liée à un problème du type précédent. À cet effet, nous construirons explicitement un morphisme τ au-dessus du disque analytique $\mathbf{D} = \mathcal{M}(k\{U\})$ de dimension 1 dont les fibres seront isomorphes, après extension du corps de base, aux domaines affinoïdes en question. Le paramètre réel ε recevra, lui aussi, une interprétation géométrique en termes de valeur absolue de l’évaluation de la fonction U sur le disque.

Afin d’appliquer les résultats du début, nous devons nous assurer que le morphisme τ vérifie certaines propriétés. Nous démontrerons sans peine qu’il est plat, mais buterons sur le caractère géométriquement réduit de l’une des fibres. Dans la troisième partie, nous modifierons le morphisme τ de façon à passer outre ce problème. Les techniques mises en jeu relèveront, cette fois-ci, de la géométrie

algébrique, puisque nous travaillerons sur des spectres, au sens schématique, d'algèbres affinoïdes. L'argument principal que nous utiliserons sera le théorème d'élimination de la ramification démontré par H. Epp dans [25]. Par ce biais, nous parviendrons à obtenir des informations sur les fibres de τ voisines de celle qui présente des multiplicités et à ramener le problème de la connexité de $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$, pour ε proche de 0, à celui de $\{x \in X \mid |f(x)| > 0\}$. Nous concluerons grâce à l'analogie ultramétrique du théorème de Hartogs (*cf.* [3] ou [37]).

Dans la quatrième partie, nous expliquerons comment déduire les théorèmes 1 et 2 en toute généralité, à partir des cas particuliers considérés dans les parties précédentes.

Je tiens à remercier Antoine Chambert-Loir pour les nombreux conseils qu'il m'a prodigués. C'est sur ses indications que je me suis intéressé au théorème de H. Epp, sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à terme. Ma gratitude va également à Antoine Ducros pour avoir suivi avec attention l'avancée de mes recherches et avoir toujours accepté de partager avec moi sa passion pour les espaces de Berkovich. J'exprime également mes remerciements à Ahmed Abbes pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et ses remarques qui m'ont permis de préciser le résultat du théorème 2. Finalement, je suis gré à Qing Liu qui a lu attentivement ce texte et m'a invité à étendre le résultat du théorème 1.

1. Connexité des fibres d'un morphisme

Dans cette partie, nous fixerons un corps ultramétrique complet k dont nous supposerons que la valuation n'est pas triviale. Nous noterons k° son anneau de valuation et \tilde{k} son corps résiduel.

Soit \mathcal{B} une algèbre strictement k -affinoïde. Rappelons qu'il existe deux façons de réduire l'espace affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ en une variété algébrique. La première, que l'on trouvera expliquée, par exemple, dans [4], 2.4, utilise la semi-norme spectrale, notée $|\cdot|_{\text{sup}}$, sur l'algèbre strictement k -affinoïde \mathcal{B} . Elle associe à l'espace affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ la variété algébrique $\text{Spec}(\tilde{\mathcal{B}})$ où $\tilde{\mathcal{B}}$ désigne le quotient de l'anneau $\mathcal{B}^\circ = \{g \in \mathcal{B} / |g|_{\text{sup}} \leq 1\}$ par l'idéal $\mathcal{B}^{\circ\circ} = \{g \in \mathcal{B} / |g|_{\text{sup}} < 1\}$. Dans ce cas, l'application de réduction est surjective, anticontinue et induit une bijection entre les composantes connexes.

La seconde réduction, due à M. Raynaud (*cf.* [43]), consiste à interpréter l'espace affinoïde comme la fibre générique d'un schéma formel plat sur un anneau de valuation. La variété algébrique associée est alors définie comme la fibre spéciale du modèle. On démontre aisément que tout espace affinoïde admet un modèle formel. Un résultat plus difficile assure même que tout morphisme peut se réaliser comme un morphisme entre modèles, ce dernier pouvant être choisi plat lorsque le morphisme de départ l'est. Pour plus de détails, nous renvoyons aux articles de référence [12] et [13].

Rappelons qu'un k° -schéma formel est dit admissible s'il est localement topologiquement de présentation finie et plat sur $\text{Spf}(k^\circ)$ (*i.e.* sans k° -torsion). Nous dirons qu'un morphisme entre espaces k -affinoïdes $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{B})$ est plat lorsque le morphisme associé $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ entre algèbres k -affinoïdes l'est.

Lemme 1.1. — *Tout morphisme plat entre k° -schémas formels admissibles le reste après changement de base par un morphisme entre k° -schémas formels admissibles et après extension des scalaires de k° à L° , où L° désigne l'anneau de valuation d'une extension ultramétrique complète L de k .*

Ces résultats restent valables pour les morphismes entre espaces strictement k -affinoïdes.

Démonstration. — Notons m l'idéal maximal de k° . Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de k° -algèbres topologiquement de présentation finie. D'après [12], 1.6, le morphisme φ est plat si, et seulement si, quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$, le morphisme

induit

$$A \otimes_{k^\circ} (k^\circ/m^n) \rightarrow B \otimes_{k^\circ} (k^\circ/m^n)$$

est plat. Le résultat pour les schémas formels en découle immédiatement. Celui pour les espaces strictement k -affinoïdes s'y ramène puisqu'un morphisme plat entre tels espaces admet un modèle plat, d'après [13], 5.10. \square

Les deux lemmes suivants illustrent l'importance des morphismes plats entre modèles formels. Lorsque, par la suite, nous considérerons un k° -schéma formel admissible, nous désignerons sa fibre générique (resp. spéciale) par le même symbole, auquel nous ajouterons un η (resp. une s) en indice. Nous adopterons la même convention pour les morphismes entre tels objets.

Lemme 1.2. — *Sur un schéma formel admissible, l'application de réduction est surjective.*

Démonstration. — Soit \mathcal{Y} un k° -schéma formel admissible. Nous pouvons le supposer affine, d'algèbre \mathcal{B} . Soit \tilde{y} un point de la fibre spéciale \mathcal{Y}_s de \mathcal{Y} . Notons $\tilde{k}(\tilde{y})$ son corps résiduel. Puisque \mathcal{Y}_s est un \tilde{k} -schéma de type fini, il existe une base de transcendance (T_1, \dots, T_r) , avec $r \in \mathbf{N}$, de $\tilde{k}(\tilde{y})$ sur \tilde{k} .

Soit K le complété du corps $k(U_1, \dots, U_r)$ pour la norme de Gauß. Son corps résiduel est isomorphe à $\tilde{k}(T_1, \dots, T_r)$. Considérons le complété L d'une clôture algébrique de K . D'après [11], 3.4.1/5, son corps résiduel \tilde{L} est une clôture algébrique de $\tilde{k}(T_1, \dots, T_r)$ et contient donc un corps isomorphe à $\tilde{k}(\tilde{y})$.

D'après le lemme 1.1, le morphisme

$$\varphi : \mathcal{Z} = \mathcal{Y} \times_{\mathrm{Spf}(k^\circ)} \mathrm{Spf}(L^\circ) \rightarrow \mathrm{Spf}(L^\circ)$$

est plat, autrement dit, \mathcal{Z} définit un L° -schéma formel admissible. Par construction, la fibre $\varphi_s^{-1}(\tilde{y})$ au-dessus de \tilde{y} possède un point fermé de corps résiduel isomorphe à \tilde{L} . Ce point est encore fermé dans \mathcal{Z}_s . D'après [9], 1.1.5, c'est l'image d'un point de la fibre générique, ce qui permet de conclure. \square

De ce résultat, déduisons-en un autre, que nous utiliserons à de nombreuses reprises :

Lemme 1.3. — *Soit $\varphi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ un morphisme de k° -schémas formels admissibles. Nous noterons indifféremment π les deux morphismes de spécialisation.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Y}_s \\ \varphi_\eta \downarrow & & \downarrow \varphi_s \\ \mathcal{Z}_\eta & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{Z}_s \end{array}$$

Si le morphisme φ est plat, alors les spécialisations des fibres de φ_η coïncident avec les fibres du morphisme spécialisé φ_s . Autrement dit, quel que soit $z \in \mathcal{L}_\eta$, on dispose d'un isomorphisme

$$\pi(\varphi_\eta^{-1}(z)) \simeq \varphi_s^{-1}(\pi(z)).$$

Démonstration. — Seule la surjectivité nécessite une démonstration. Nous pouvons supposer que le schéma formel \mathcal{Z} est affine, d'algèbre \mathcal{C} . Soit z un point de \mathcal{L}_η . Il lui correspond un caractère $\chi_z : \mathcal{C} \otimes_{k^\circ} k \rightarrow \mathcal{H}(z)$. On en déduit un morphisme $\chi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}(z)^\circ$, la notation $\mathcal{H}(z)^\circ$ désignant l'anneau de valuation du corps ultramétrique complet $\mathcal{H}(z)$.

Par le même raisonnement que dans le lemme précédent, on démontre que le schéma formel $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{Z}} \mathrm{Spf}(\mathcal{H}(z)^\circ)$ est un $\mathcal{H}(z)^\circ$ -schéma formel admissible. Ses fibres générique et spéciale sont respectivement isomorphes à $\varphi_\eta^{-1}(z)$ et $\varphi_s^{-1}(\pi(z)) \otimes_{\tilde{k}} \tilde{\mathcal{H}}(z)$. Le morphisme $\varphi_s^{-1}(\pi(z)) \otimes_{\tilde{k}} \tilde{\mathcal{H}}(z) \rightarrow \varphi_s^{-1}(\pi(z))$ est surjectif et le lemme précédent nous permet de conclure. \square

Des liens, détaillés dans [15], §1, existent parfois entre la réduction définie par la norme spectrale et celle au sens de Raynaud. Citons qu'elles coïncident lorsque la fibre spéciale du modèle formel est réduite. La prochaine proposition découlera de ce résultat. Énonçons, au préalable, quelques définitions.

Définition 1.4. — Soit $p : A \rightarrow B$ une application continue entre espaces topologiques. Soient un entier $r \in \mathbf{N}$, une partie P de B , une famille d'espaces topologiques $(Q_i)_{1 \leq i \leq r}$ et deux familles d'applications continues

$$\mathbf{s} = (s_i : Q_i \rightarrow B)_{1 \leq i \leq r} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = (t_i : Q_i \rightarrow A)_{1 \leq i \leq r}.$$

Nous dirons que les familles \mathbf{s} et \mathbf{t} **repèrent les composantes connexes des fibres** de p au-dessus de P si les conditions suivantes sont satisfaites :

- quel que soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, l'image de l'application s_i recouvre P ;
- quel que soit $b \in P$, la fibre $p^{-1}(b)$ possède exactement r composantes connexes ;
- quels que soient $b \in P$ et la composante connexe C de $p^{-1}(b)$, il existe un unique $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ pour lequel on ait

$$\forall b' \in s_i^{-1}(b), t_i(b') \in C.$$

Définition 1.5. — Soient $\varphi : Y \rightarrow Z$ un morphisme de schémas et P une partie de l'espace topologique sous-jacent à Z . Nous dirons que le morphisme φ admet un **découpage** au-dessus de P s'il existe un entier $r \in \mathbf{N}$ et des familles finies

$$\mathbf{s} = (s_i : Z_i \rightarrow Z)_{1 \leq i \leq r} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = (t_i : Z_i \rightarrow Z_i \times_Z Y)_{1 \leq i \leq r}$$

de morphismes entre schémas vérifiant les conditions suivantes :

- a) quel que soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le morphisme t_i définit une section du morphisme $Z_i \times_Z Y \rightarrow Z_i$, obtenu à partir de φ par le changement de base s_i ;

$$\begin{array}{ccc} Z_i \times_Z Y & \xrightarrow{s'_i} & Y \\ t_i \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Z_i & \xrightarrow{s_i} & Z \end{array}$$

- b) quel que soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le morphisme s_i est étale ;
 c) les familles \mathbf{s} et $\mathbf{t}' = (s'_i \circ t_i)_{1 \leq i \leq r}$ repèrent les composantes connexes des fibres de φ au-dessus de P .

Nous adoptons la même définition pour un morphisme entre espaces k -analytiques en remplaçant les morphismes étales par des morphismes quasi-étales⁽¹⁾ dont la source est un espace k -analytique compact.

Définition 1.6. — Nous dirons qu'un schéma (resp. espace k -analytique) est **déployé** lorsque ses composantes connexes sont géométriquement connexes.

Proposition 1.7. — Soit $\varphi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ un morphisme plat entre k° -schémas formels admissibles et quasi-compacts. Supposons que le morphisme φ_s , induit entre les fibres spéciales, soit surjectif et que ses fibres soient géométriquement réduites et déployées. Alors il existe une partition finie \mathcal{P} de \mathcal{Z}_s vérifiant les conditions suivantes :

- a) les éléments de \mathcal{P} sont des parties constructibles de \mathcal{Z}_s ;
 b) quel que soit $P \in \mathcal{P}$, le morphisme φ_η admet un découpage au-dessus du tube de P .

Démonstration. — Intéressons-nous au morphisme $\varphi_s : \mathcal{Y}_s \rightarrow \mathcal{Z}_s$ entre schémas de type fini sur le corps \tilde{k} . Soit Z un fermé irréductible de \mathcal{Z}_s de point générique ζ . Notons

$$\psi : Y = Z \times_{\mathcal{Z}_s} \mathcal{Y}_s \rightarrow Z$$

le morphisme induit par φ_s au-dessus de Z . Soient C_1, \dots, C_r , avec $r \in \mathbf{N}$, les composantes connexes de la fibre générique $\psi^{-1}(\zeta)$. Pour chaque $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, choisissons un voisinage ouvert U_i de C_i dans Y dont la trace sur $\psi^{-1}(\zeta)$ soit égale à C_i . L'ensemble des points de Y appartenant à au moins deux de ces voisinages forme une partie constructible donc, d'après le théorème de Chevalley (cf. [29],

⁽¹⁾Les morphismes quasi-étales définis par V. G. Berkovich (cf. [6], §3) correspondent aux morphismes rig-étales de la géométrie rigide (cf. [14], 3.1).

1.8.4), son image V définit une partie constructible de Z . Puisque la partie V ne contient pas le point générique ζ , elle évite même un ouvert W autour de ce point.

Une nouvelle utilisation du théorème de Chevalley nous montre qu'il existe un voisinage ouvert W' de ζ dans W tel que, quel que soit $z \in W'$, les traces des ouverts U_i , avec $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, recouvrent la fibre $\psi^{-1}(z)$. Pour $z \in W'$, elles sont donc réunions de composantes connexes disjointes de $\psi^{-1}(z)$. D'après [31], 9.7.8, le nombre géométrique de composantes connexes des fibres de ψ est constant sur un voisinage ouvert W'' de ζ dans W' . Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, notons V_i le voisinage ouvert de C_i défini par $V_i = U_i \cap \psi^{-1}(W'')$. Puisque les fibres de φ_s sont déployées, quel que soit $z \in W''$, les traces des ouverts V_i , pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, sur la fibre $\psi^{-1}(z) \simeq \varphi_s^{-1}(z)$ sont exactement les composantes connexes de cette fibre.

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Choisissons un ouvert V'_i de \mathcal{Y}_s dont la trace sur Y soit égale à V_i . Notons $\varphi_i : V'_i \rightarrow \mathcal{Z}_s$ le morphisme induit par φ_s sur V'_i . Par hypothèse, la fibre

$$\varphi_i^{-1}(\zeta) \simeq C_i$$

est géométriquement réduite et non vide. Elle contient donc un point y_i en lequel elle est lisse. Puisque le morphisme φ_s est plat, ce point est encore lisse dans \mathcal{Y}_s . Quitte à restreindre V'_i , nous pouvons donc supposer que φ_i est lisse. On en déduit qu'il existe un schéma quasi-compact S_i , un morphisme étale $s_i : S_i \rightarrow \mathcal{Z}_s$ et un point ζ'_i au-dessus de ζ tel que le morphisme $S_i \times_{\mathcal{Z}_s} V'_i \rightarrow S_i$, obtenu à partir de φ_i par le changement de base s_i , admette une section $t : S_i \rightarrow S_i \times_{\mathcal{Z}_s} V'_i$, où $t(\zeta'_i)$ s'envoie sur y_i .

$$\begin{array}{ccc} S_i \times_{\mathcal{Z}_s} V'_i & \longrightarrow & V'_i \\ t \uparrow \downarrow & & \downarrow \varphi_i \\ S_i & \xrightarrow{s} & \mathcal{Z}_s \end{array}$$

Les images des morphismes étales s_i , pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, contiennent un voisinage ouvert commun de ζ dans Z . Par construction, le morphisme φ_s y admet un découpage. Un argument de récurrence noethérienne nous montre ensuite qu'il existe une partition \mathcal{P} de \mathcal{Z}_s en parties constructibles au-dessus desquelles le morphisme φ_s admet un découpage.

Remarquons que nous pouvons relever les constructions précédentes aux schémas formels. Considérons, en effet, une restriction ψ de φ_s à un ouvert lisse U et un morphisme étale $s : S \rightarrow \mathcal{Z}_s$ tel que le morphisme $S \times_{\mathcal{Z}_s} U \rightarrow S$, obtenu à partir de ψ par le changement de base s , admette une section t . Notons \mathcal{U} le sous-schéma formel ouvert de \mathcal{Y} dont l'espace topologique sous-jacent est l'ouvert U .

D'après [6], 2.1, le morphisme s admet un modèle formel étale $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$. D'autre part, puisque le morphisme $\mathcal{S} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ est lisse, la propriété de relèvement infinitésimal nous assure que la section t se relève en une section formelle T .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ T \left(\downarrow & & \downarrow \varphi \right. \\ \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{Z} \end{array}$$

Expliquons, à présent, comment passer des schémas formels à leur fibre générique. Soient z un point de \mathcal{Z}_η et \tilde{z} son image dans \mathcal{Z}_s par l'application de spécialisation. Puisque le morphisme φ est plat et à fibres géométriquement réduites, la réduction de $\varphi_\eta^{-1}(z)$ obtenue par la norme spectrale coïncide avec celle au sens des modèles, à savoir la fibre $\varphi_s^{-1}(\tilde{z})$. D'après les propriétés de la réduction par la norme spectrale, chaque composante connexe de la fibre analytique est le tube d'une composante connexe de sa réduction, et *vice versa*.

D'autre part, si $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Z}$ est un morphisme étale entre schémas formels quasi-compacts, alors le morphisme $\mathcal{S}_\eta \rightarrow \mathcal{Z}_\eta$, induit entre les fibres génériques, est un morphisme quasi-étale entre espaces k -analytiques compacts. \square

Le théorème suivant concerne le comportement des composantes connexes des fibres d'un morphisme entre espaces analytiques. La démonstration repose sur le théorème de la fibre réduite (*cf.* [15]) qui nous permet de nous ramener à un modèle du morphisme satisfaisant les hypothèses de la proposition précédente. Cette fois encore, nous commençons par poser une définition.

Définition 1.8. — *Soit Y un espace k -affinoïde. Une partie V de Y est dite **simple** si elle peut s'obtenir par combinaison booléenne finie de domaines affinoïdes du type*

$$\{z \in Y \mid |h(z)| = 1\}$$

où h désigne une fonction analytique sur Y de norme spectrale égale à 1.

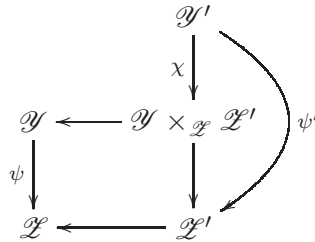
Remarquons, dès à présent, qu'une partie simple d'un espace k -affinoïde est voisinage de chacun de ses points rigides. En effet, elle s'obtient par réunion et intersection d'un nombre fini de parties qui sont soit des domaines affinoïdes, soit des ouverts et pour lesquelles ce résultat est vrai.

Théorème 1.9. — *Soit $\varphi : Y \rightarrow Z$ un morphisme plat et surjectif entre espaces strictement k -affinoïdes dont les fibres soient géométriquement réduites et déployées. Alors il existe une partition finie \mathcal{P} de Z vérifiant les conditions suivantes :*

a) *les éléments de \mathcal{P} sont des parties simples de domaines affinoïdes de Z ;*

b) quel que soit $P \in \mathcal{P}$, le morphisme φ admet un découpage au-dessus de P .

Démonstration. — Les hypothèses de l'énoncé nous permettent d'appliquer le théorème de la fibre réduite. Celui-ci nous assure qu'il existe un diagramme commutatif de schémas formels



où

- a) le morphisme $\psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ induit le morphisme $\varphi : Y \rightarrow Z$ par passage aux fibres génériques ;
- b) le morphisme $Z' \rightarrow Z$, où Z' désigne la fibre générique de \mathcal{Z}' , est quasi-étale et surjectif ;
- c) le morphisme $\chi : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Z}'$ est fini et induit un isomorphisme entre les fibres génériques ;
- d) le morphisme $\psi' : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Z}'$ est plat et ses fibres sont géométriquement réduites.

Vérifions que nous pouvons appliquer la proposition précédente au morphisme ψ' . Les k° -schémas formels obtenus comme modèles des espaces analytiques sont bien admissibles et quasi-compacts, en vertu de l'équivalence de catégories [12], 4.1. Tous les schémas formels que nous considérerons sont également de ce type.

Les fibres de ψ'_η sont isomorphes, après extension du corps de base, à des fibres de $\psi_\eta = \varphi$. Par hypothèse, le morphisme φ est surjectif. Il en est donc de même pour ψ'_η , puis pour ψ'_s , d'après 1.3.

Il nous reste à démontrer que les fibres de ψ' sont déployées. Puisque le morphisme χ est fini, il suffit même de le vérifier sur le morphisme $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Z}' \rightarrow \mathcal{Z}'$, autrement dit sur le morphisme ψ . Or le morphisme ψ est plat et à fibres géométriquement réduites, donc le nombre de composantes connexes (resp. géométriquement connexes) des fibres de ψ_η est identique à celui de leur réduction. D'après 1.3, toutes les fibres de ψ_s peuvent être obtenues par de telles réductions. Elles sont déployées, puisque les fibres de φ le sont, par hypothèse.

D'après la proposition 1.7, il existe une partition finie \mathcal{P} de \mathcal{Z}'_s en parties constructibles au-dessus des tubes desquelles le morphisme ψ'_η admet un

découpage. Notons \mathcal{Q} l'ensemble de ces tubes. Puisque le morphisme χ induit un isomorphisme entre les fibres génériques et que le morphisme $\lambda : Z' \rightarrow Z$ est quasi-étale, le morphisme $\varphi = \psi_\eta$ admet un découpage au-dessus de l'image par λ de toute partie de \mathcal{Q} . Puisque le morphisme $Z' \rightarrow Z$ est surjectif, nous démontrons ainsi l'existence d'un recouvrement fini de Z par des parties au-dessus desquelles le morphisme φ admet un découpage. Il est aisé d'en déduire une partition de Z vérifiant la même propriété et composée uniquement de combinaisons booléennes des parties précédentes.

Pour clore la démonstration, il nous reste à vérifier que l'image par λ de tout élément de \mathcal{Q} est de la forme désirée. Soit $Q \in \mathcal{L}'_\eta$ un élément de \mathcal{Q} . Il est obtenu comme le tube d'une partie constructible P de \mathcal{L}'_s . Le morphisme $\lambda : Z' \rightarrow Z$ est plat donc, d'après [13], 5.2, il existe un diagramme commutatif de schémas formels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}' & \longrightarrow & \mathcal{Z} \\ \psi_0 \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{Z}'_0 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{Z}_0 \end{array}$$

où le morphisme $\mu : \mathcal{Z}'_0 \rightarrow \mathcal{Z}_0$ est plat et induit encore le morphisme $\lambda : Z' \rightarrow Z$ entre les fibres génériques.

Le tube $Q \subset Z'$ de P est identique à celui de $(\psi_0)_s^{-1}(P)$. Le morphisme $\mu_s : (\mathcal{Z}'_0)_s \rightarrow (\mathcal{Z}_0)_s$ induit par μ est de type fini et envoie donc la partie constructible $(\psi_0)_s^{-1}(P)$ sur une partie constructible P_0 de $(\mathcal{Z}_0)_s$, d'après le théorème de Chevalley. Puisque le morphisme μ est plat, d'après 1.3, le tube de P_0 dans Z n'est autre que l'image de Q dans Z par λ .

Il nous reste, désormais, à montrer que le tube d'une partie constructible de \mathcal{Z}_s est une réunion finie de parties simples de domaines affinoïdes de \mathcal{L}_η . Ce résultat provient directement des propriétés de la réduction lorsque le schéma formel considéré est affine. Nous concluons en remarquant que le schéma formel quasi-compact \mathcal{Z} admet un recouvrement fini par de tels ouverts. \square

Rappelons, maintenant, que le nombre géométrique de composantes connexes d'un espace affinoïde ne change pas lorsque l'on étend le corps de base. On trouvera la démonstration de ce résultat dans [20], théorème 5.5. On pourrait également le déduire des théorèmes d'extension du corps de base pour les faisceaux étales qui figurent dans [5].

Par un raisonnement très proche de celui que nous venons de mettre en œuvre, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 1.10. — *Soit $\varphi : Y \rightarrow Z$ un morphisme plat entre espaces strictement k -affinoïdes dont les fibres soient géométriquement réduites. Alors il existe une partition finie de Z en parties simples de domaines affinoïdes au-dessus desquelles le nombre géométrique de composantes connexes des fibres est constant. En particulier, ce nombre est constant au voisinage des points rigides.*

Démonstration. — Appliquons le théorème de la fibre réduite et reprenons les notations de la preuve précédente. Le morphisme $\psi'_s : \mathcal{Y}'_s \rightarrow \mathcal{Z}'_s$ est un morphisme de type fini entre deux variétés algébriques de type fini sur \tilde{k} . D'après [31], 9.7.9, il existe donc une partition finie \mathcal{P} de \mathcal{Z}'_s en parties constructibles au-dessus desquelles le nombre géométrique de composantes connexes des fibres de ψ'_s soit constant.

Soit $P \in \mathcal{P}$. Notons $Q \subset Z'$ le tube de P . Puisque le morphisme ψ' est plat et que ses fibres sont géométriquement réduites, le nombre géométrique de composantes connexes des fibres de ψ'_η est constant au-dessus de tout point de Q . On en déduit le même résultat pour le morphisme ψ au-dessus de tout point de $\lambda(Q)$. Par un raisonnement en tout point identique à celui exposé dans la preuve précédente, nous obtenons une partition de Z en parties simples de domaines affinoïdes jouissant des mêmes propriétés. \square

2. Loin de l'hypersurface

Consacrons-nous, tout d'abord, à la démonstration du théorème 2, dans un cas particulier. Dans toute cette partie, k désignera un corps algébriquement clos dont la valuation n'est pas triviale, X un espace strictement k -affinoïde intègre d'algèbre \mathcal{A} et f une fonction analytique sur X de norme spectrale égale à 1. Pour $\varepsilon > 0$, définissons le domaine affinoïde V_ε de X par

$$V_\varepsilon = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Nous ne nous intéresserons, pour l'instant, qu'aux composantes connexes des espaces V_ε , avec $\varepsilon > 0$.

Tâchons, tout d'abord, de remplacer le paramètre réel ε par un autre que nous saurons interpréter géométriquement. Pour ce faire, plaçons-nous au-dessus du disque de dimension 1 et de rayon 1 défini par $\mathbf{D} = \mathcal{M}(k\{U\})$. Dans la suite, nous noterons simplement 0 le point rigide de \mathbf{D} défini par l'équation $U = 0$. L'injection $k\{U\} \hookrightarrow \mathcal{A}\{T, U\}$ induit un morphisme $t : k\{U\} \rightarrow \mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)$. Nous noterons τ le morphisme correspondant entre espaces affinoïdes. L'algèbre k -affinoïde $\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)$ hérite de nombreuses propriétés de l'algèbre k -affinoïde \mathcal{A} . Le lemme suivant en fournit un exemple.

Lemme 2.1. — *Les algèbres k -affinoïdes $\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)$ et $\mathcal{A}\{T\}$ sont isomorphes. En particulier, l'algèbre $\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)$ est intègre. En outre, elle est intégralement close lorsque \mathcal{A} l'est.*

Démonstration. — On vérifie sans peine que le morphisme de \mathcal{A} -algèbres

$$s : \mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U) \rightarrow \mathcal{A}\{T\}$$

défini par $s(T) = T$ et $s(U) = fT$ est un isomorphisme dont l'inverse est le morphisme de \mathcal{A} -algèbres

$$s^{-1} : \mathcal{A}\{T\} \rightarrow \mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)$$

défini par $s^{-1}(T) = T$.

Supposons, à présent, que \mathcal{A} soit intégralement close. Puisque le schéma $\text{Spec}(\mathcal{A})$ est normal, il en est de même du schéma $\text{Spec}(\mathcal{A}[T])$, ainsi que de son analytifié $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}^{1, \text{an}}$, d'après [5], 2.2.7. Le domaine affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{A}\{T\})$ de ce dernier est donc, lui aussi, normal, d'après [5], 2.2.1. Puisque l'anneau $\mathcal{A}\{T\}$ est intègre et normal, il est finalement intégralement clos. \square

Le lemme suivant met en lumière le lien géométrique recherché :

Lemme 2.2. — *Quel que soit $x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$, la projection*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) = X$$

induit un isomorphisme

$$\tau^{-1}(x) \xrightarrow{\sim} V_\varepsilon \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x),$$

où $\varepsilon = |U(x)| > 0$.

En particulier, les fibres du morphisme τ au-dessus des points de $\mathbf{D} \setminus \{0\}$ sont géométriquement réduites.

Démonstration. — Soit $x \in \mathbf{D} \setminus \{0\}$. Notons $\mathcal{B} = \mathcal{A} \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$. L'algèbre de la fibre $\tau^{-1}(x)$ n'est autre que

$$(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)) \hat{\otimes}_{k\{U\}} \mathcal{H}(x) \simeq \mathcal{B}\{T\}/(fT - U(x)) \simeq \mathcal{B}\{\varepsilon T\}/(fT - 1),$$

où $\varepsilon = |U(x)| > 0$. On reconnaît l'algèbre du domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ défini par

$$\{y \in \mathcal{M}(\mathcal{B}) \mid |f(y)| \geq \varepsilon\}$$

et qui est isomorphe à $V_\varepsilon \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$.

Passons à la seconde partie du lemme. L'espace affinoïde X est réduit, donc son domaine affinoïde V_ε l'est aussi, d'après [5], 2.2.1. Puisque le corps k est algébriquement clos, l'espace V_ε est géométriquement réduit et il en est de même pour $\tau^{-1}(x) \simeq V_\varepsilon \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$, d'après [20], 4.17. \square

Pour $\varepsilon \in [0, 1]$, notons η_ε le point de \mathbf{D} associé à la valeur absolue définie par $\sum_{i \geq 0} a_i U^i \in k\{U\} \mapsto \max_{i \geq 0} \{|a_i| \varepsilon^i\} \in \mathbf{R}_+$. D'après le lemme, la fibre de τ au-dessus du point η_ε est isomorphe à $V_\varepsilon \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(\eta_\varepsilon)$, quel que soit $\varepsilon \in]0, 1]$.

Afin de pouvoir appliquer les résultats du paragraphe précédent, nous avons besoin d'une propriété de platitude, que nous démontrons ici.

Lemme 2.3. — *Le morphisme*

$$\tau : \mathcal{M}(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)) \rightarrow \mathcal{M}(k\{U\}) = \mathbf{D}$$

est plat.

Démonstration. — L'anneau $k\{U\}$ étant principal, il nous suffit de montrer que l'algèbre $\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)$ ne possède aucun élément de $k\{U\}$ -torsion. Il nous suffit même de montrer que le morphisme

$$t : k\{U\} \rightarrow \mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U) \simeq \mathcal{A}\{T\}$$

est injectif, puisque l'algèbre $\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U) \simeq \mathcal{A}\{T\}$ est intègre. L'interprétation géométrique des fibres du morphisme τ nous montre que sa fibre au point η_1 n'est pas vide. En particulier, toute fonction g de $k\{U\}$ vérifiant $t(g) = 0$ est nulle en η_1 et donc nulle sur \mathbf{D} . \square

Remarque 2.4. — La fibre du morphisme τ au-dessus du point 0 de \mathbf{D} est isomorphe à l'espace $\mathcal{M}(\mathcal{A}\{T\}/(fT))$ et ne saurait donc être réduite lorsque f possède des multiplicités. Ce problème fera l'objet du prochain paragraphe.

Remarquons néanmoins que si l'hypersurface de X définie par l'équation $f = 0$ est réduite, un calcul simple montre que la fibre $\tau^{-1}(0)$ l'est aussi. En outre, elle est connexe, puisqu'elle est réunion de l'espace X et d'une droite au-dessus du lieu d'annulation de f dans X . Le théorème 1.10 appliqué au morphisme τ et au point rigide 0 de \mathbf{D} entraîne alors que le domaine affinoïde $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ est connexe, dès que ε est assez petit. S'en déduit, en particulier, l'analogie du théorème de Hartogs.

Intéressons-nous, à présent, à la variation des composantes connexes des domaines V_ε , pour $\varepsilon > 0$. Énonçons tout d'abord un lemme. Le caractère fini mis à part, nous redémontrons ici, dans un cas élémentaire, le résultat [8], 6.3.1. Rappelons que nous avons supposé le corps k algébriquement clos et de valuation non triviale. Par conséquent, l'égalité $\sqrt{|k^*|} = |k^*|$ est vérifiée.

Lemme 2.5. — *La trace d'une partie simple de \mathbf{D} sur le segment*

$$\{\eta_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq 1\} \simeq [0, 1]$$

est une réunion finie d'intervalles dont les bornes sont des éléments de $|k^| \cup \{0, +\infty\}$.*

Démonstration. — Puisqu'une partie simple est obtenue, par définition, comme une combinaison booléenne finie de domaines affinoïdes, il suffit de démontrer le résultat pour ces derniers. D'après le théorème de Gerritzen et Grauert (cf. [22], 2.4), tout domaine affinoïde de \mathbf{D} peut s'écrire comme réunion finie de domaines rationnels, eux-mêmes intersections de domaines du type $\{z \in \mathbf{D} \mid |g(z)| \leq |h(z)|\}$, où g et h désignent des fonctions analytiques sur \mathbf{D} . Remarquons encore que, si $g = \sum_{i \in \mathbf{N}} b_i U^i$ et $h = \sum_{i \in \mathbf{N}} c_i U^i$ dans $k\{U\}$, les fonctions, définies de $[0, 1]$ dans \mathbf{R}^+ ,

$$\varepsilon \mapsto \max_{i \in \mathbf{N}} \{\ln(|b_i|) + i \ln(\varepsilon)\} \quad \text{et} \quad \varepsilon \mapsto \max_{i \in \mathbf{N}} \{\ln(|c_i|) + i \ln(\varepsilon)\}$$

sont linéaires par morceaux. Nous concluons grâce à l'équivalence

$$|g(\eta_\varepsilon)| \leq |h(\eta_\varepsilon)| \iff \max_{i \in \mathbf{N}} \{\ln(|b_i|) + i \ln(\varepsilon)\} \leq \max_{i \in \mathbf{N}} \{\ln(|c_i|) + i \ln(\varepsilon)\},$$

qui est vérifiée quel que soit $\varepsilon \in [0, 1]$.

□

Venons-en au résultat concernant la variation des composantes connexes. Signalons que si l'on ne s'intéresse qu'à leur nombre, on retrouve un théorème d'A. Abbes et T. Saito (cf. [1], 5.1).

Théorème 2.6. — *Soit k un corps ultramétrique complet algébriquement clos et dont la valuation n'est pas triviale. Soit X un espace strictement k -affinoïde intègre et f une fonction analytique sur X dont la norme spectrale vaut 1. Soit $m \in]0, 1] \cap \sqrt{|k^*|}$. Alors il existe une partition finie \mathcal{P} de $[m, 1]$ en intervalles vérifiant la condition suivante : quel que soit $I \in \mathcal{P}$, quels que soient $\varepsilon', \varepsilon \in I$, avec $\varepsilon' \leq \varepsilon$, l'inclusion*

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon'\}$$

induit une bijection

$$\pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow \pi_0(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon'\}).$$

En outre, les bornes des intervalles sont des éléments de $|k^*| \cup \{0, +\infty\}$.

Démonstration. — Notons V le domaine strictement k -affinoïde de \mathbf{D} défini par

$$V = \{z \in \mathbf{D} \mid |U(z)| \geq m\}.$$

D'après 1.1, le morphisme τ' déduit de τ par le changement de base $V \hookrightarrow \mathbf{D}$ est plat. Ses fibres, isomorphes, après extension du corps de base, à des espaces du type V_ε , avec $\varepsilon > 0$, sont géométriquement réduites et déployées. D'après 1.9, il existe donc une partition finie \mathcal{P} de V en parties simples de domaines affinoïdes au-dessus desquelles le morphisme τ' admet un découpage. Considérons l'un des morphismes quasi-étales $\varphi : Z \rightarrow V$, où Z est un espace k -analytique compact, intervenant dans le découpage.

Le raisonnement qui suit fait intervenir, dans un cas simple, la notion de squelette. On la trouvera introduite dans [7], §5. L'espace k -affinoïde V est isomorphe à la fibre générique du k° -schéma formel pluristable non dégénéré

$$\mathcal{V} = \mathrm{Spf}(k^\circ\{U, V\}/(UV - \alpha)),$$

où k° désigne l'anneau de valuation de k et α un élément de k° de valeur absolue m . Le squelette $S(\mathcal{V})$ du schéma formel \mathcal{V} est le segment

$$J = \{\eta_\varepsilon, m \leq \varepsilon \leq 1\} \simeq [m, 1],$$

tracé sur la fibre générique $\mathcal{V}_\eta \simeq V$. D'après [21], 3.1, il existe alors une unique structure $\sqrt{|k^*|}$ -linéaire par morceaux (au sens de [8], §1) sur $\Delta = \varphi^{-1}(S(\mathcal{V}))$ telle que l'application

$$\varphi|_\Delta : \Delta \rightarrow S(\mathcal{V})$$

soit linéaire par morceaux et soit G -localement une immersion. En particulier, puisque Δ est compact, il existe une partition finie de Δ en parties linéaires qui sont homéomorphes à leur image par $\varphi|_\Delta$, elle-même linéaire. Pour chaque image Q , nous pouvons construire, à partir de la section associée à φ , une section de τ' au-dessus de Q .

En procédant de même pour chaque morphisme étale, nous obtenons finalement, pour chaque élément P de \mathcal{P} , une partition \mathcal{Q}_P de $P \cap J$ en un nombre fini de parties linéaires et, au-dessus de chaque $Q \in \mathcal{Q}_P$, un ensemble fini \mathcal{T} de sections de τ' au-dessus de Q vérifiant la condition suivante : quel que soit $z \in Q$, chaque composante connexe de la fibre $\tau'^{-1}(z)$ contient un et un seul élément de la forme $t(z)$, avec $t \in \mathcal{T}$.

Examinons, à présent, la forme des parties Q considérées précédemment. Nous souhaitons montrer qu'elles sont réunions finies d'intervalles à coordonnées dans $\sqrt{|k^*|} \cup \{0, +\infty\}$. C'est le cas pour les traces des éléments de \mathcal{P} sur J , d'après le lemme 2.5, et donc pour leurs parties $\sqrt{|k^*|}$ -linéaires par morceaux.

Finalement, les sections de τ' définies précédemment sont définies sur des intervalles contenus dans J . Soient I un tel intervalle et $\varepsilon \in I$. Rappelons que l'image de la fibre de τ' au-dessus de η_ε par le morphisme

$$\pi : \mathcal{M}(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) = X$$

est isomorphe au domaine affinoïde V_ε . Pour $\varepsilon' \in I$, $\varepsilon' \leq \varepsilon$, les images des sections par le morphisme π joignent les composantes connexes de V_ε à celles de $V_{\varepsilon'}$. Puisque les différentes sections aboutissent à des composantes connexes distinctes et que toutes sont atteintes, on en déduit que les composantes connexes de V_ε sont les traces de celles de $V_{\varepsilon'}$. \square

3. Élimination des multiplicités

Conservons les hypothèses de la partie précédente : le corps k est un corps algébriquement clos dont la valuation n'est pas triviale, l'espace X un espace strictement k -affinoïde intègre et la norme spectrale de la fonction f vaut 1. Nous démontrons ici le théorème 1 dans ce cas particulier.

Remarquons que, puisque le morphisme de normalisation est continu et surjectif, nous pouvons, quitte à remplacer X par son normalisé, supposer que l'espace X est normal. D'après [20], 4.18, les domaines V_ε , pour $\varepsilon > 0$, sont alors normaux. Il nous suffit donc de montrer qu'ils sont connexes, pour ε assez petit.

D'après le paragraphe précédent, nous disposons d'un morphisme plat,

$$\tau : \mathcal{M}(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)) \rightarrow \mathbf{D},$$

dont seule la fibre au-dessus du point 0 peut présenter des multiplicités. Nous allons montrer qu'il est possible de modifier ce morphisme de façon que toutes ses fibres deviennent réduites.

Dans les raisonnements qui suivent, nous quittons le domaine des espaces analytiques pour celui des schémas. Il nous faut donc introduire de nouveaux objets. Soient $D = \text{Spec}(k\{U\})$, $F = \text{Spec}(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U))$ et $\alpha : F \rightarrow D$ le morphisme induit par $t : k\{U\} \rightarrow \mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)$. Soient x un point fermé de $D \setminus \{0\}$ et \mathbf{x} le point rigide de \mathbf{D} qui lui correspond. La fibre de α au-dessus de x a même anneau que la fibre de τ au-dessus de \mathbf{x} . En particulier, elle est réduite.

D'après 2.1, le schéma F est normal. Le problème de réduction des fibres auquel nous sommes confrontés se ramène donc à un problème de multiplicités génériques. En effet, une hypersurface principale d'un schéma normal et noethérien est réduite si, et seulement si, elle est génériquement réduite (c'est une conséquence de la condition (S_2) , cf. [38], 17.I).

Rappelons que si R et S sont deux anneaux de valuation discrète et que S domine R , on dit que S est faiblement non ramifié au-dessus de R lorsque l'idéal maximal de R engendre l'idéal maximal de S . Si x désigne un point fermé de D , la remarque précédente entraîne que la fibre $\alpha^{-1}(x)$ au-dessus de x est réduite si, et seulement si, l'anneau $\mathcal{O}_{F,\eta}$ est faiblement non ramifié au-dessus de l'anneau $\mathcal{O}_{D,x}$, pour tout point générique η de $\alpha^{-1}(x)$. Aussi les méthodes que nous mettrons en œuvre viseront-elles à éliminer la ramification. Dans le

cas où elle est modérée, le lemme d'Abhyankar nous montre qu'il est possible d'y parvenir, après un nombre fini d'extensions de Kummer sur la base. Pour traiter le cas général, nous utiliserons le théorème que démontre H. Epp dans [25]. Rappelons-en l'énoncé, sous la forme corrigée qu'en proposent J. Oesterlé et L. Pharamond dit d'Costa ([40], appendice, théorème 2) :

Théorème 3.1 (Epp). — *Soient A et A' deux anneaux de valuation discrète, K et K' leur corps de fractions, k et k' leur corps résiduel. On suppose que A' domine A . Si la caractéristique p de k n'est pas nulle, on suppose que les éléments de k'^{p^∞} , le plus grand sous-corps parfait de k' , sont algébriques et séparables sur k . Il existe alors une extension algébrique K_1 de degré fini de K telle que :*

- a) *la fermeture intégrale A_1 de A dans K_1 soit un A -module de type fini et un anneau de valuation discrète ;*
- b) *si K'_1 est une extension composée de K_1 et K' , tout anneau de valuation discrète A'_1 de corps des fractions K'_1 qui domine A' est faiblement non ramifié au-dessus de A_1 .*

Nous aurons besoin d'utiliser le fait que la propriété d'être faiblement non ramifié reste stable par certaines opérations. Le résultat suivant se déduit sans peine de la proposition 1 de l'appendice du même article [40].

Proposition 3.2. — *Soient A et A' deux anneaux de valuation discrète, K et K' leur corps de fractions, k et k' leur corps résiduel. On suppose que A' domine A et que A' est faiblement non ramifié au-dessus de A . Soit A_1 un anneau de valuation discrète dont le corps des fractions K_1 est une extension algébrique de degré fini de K et dont le corps résiduel k_1 est une extension séparable de k . Alors, si K'_1 est une extension composée de K_1 et K' , tout anneau de valuation discrète A'_1 de corps des fractions K'_1 qui domine A' est faiblement non ramifié au-dessus de A_1 .*

Notons η_1, \dots, η_p , avec $p \in \mathbf{N}^*$, les points génériques de la fibre du morphisme α au-dessus de 0. Pour chaque $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous allons appliquer le théorème de Epp aux anneaux de valuation discrète $\mathcal{O}_{D,0}$ et \mathcal{O}_{F,η_i} . Les hypothèses en sont vérifiées, en vertu du résultat suivant.

Lemme 3.3. — *Supposons que la caractéristique du corps algébriquement clos k ne soit pas nulle. Soit \mathcal{B} une algèbre strictement k -affinoïde intègre. Alors le plus grand sous-corps parfait contenu dans le corps des fractions de \mathcal{B} est égal à k .*

Démonstration. — D'après le lemme de normalisation de Noether ([11], 6.1.2/2), il existe $d \in \mathbf{N}$ et un morphisme fini $\varphi : k\{T_1, \dots, T_d\} \rightarrow \mathcal{B}$. La conclusion du lemme est vérifiée pour le corps $\text{Frac}(k\{T_1, \dots, T_d\})$, car l'anneau $k\{T_1, \dots, T_d\}$ est factoriel. D'après [25], §0.4, elle l'est encore après toute extension finie, ce qui s'applique, en particulier, à $\text{Frac}(\mathcal{B})$. \square

Quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, nous obtenons ainsi une extension algébrique finie K_{η_i} de $\text{Frac}(k\{U\})$ vérifiant les conclusions du théorème de Epp.

Soient K_1 une extension finie de $k\{U\}$ dans laquelle s'injectent tous les corps K_{η_i} , avec $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, et engendrée par les images de ces corps. Notons \mathcal{N} la fermeture intégrale de $k\{U\}$ dans K_1 . Nous allons, à présent, considérer le spectre de la fermeture intégrale de $\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)$ dans un composé du corps de ses fractions et de K_1 . Géométriquement, cela revient à considérer le produit fibré de F par $\Delta = \text{Spec}(\mathcal{N})$ au-dessus de D , puis à le normaliser. Notons $G = \text{Spec}(\mathcal{G})$ le schéma ainsi obtenu.

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \xleftarrow{\mu} & F \times_D \Delta & \xleftarrow{\quad} & G \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & \swarrow \gamma & \\
 D & \xleftarrow{\lambda} & \Delta & &
 \end{array}$$

Commençons par énoncer quelques remarques sur les morphismes et les espaces apparaissant dans le diagramme.

- Le morphisme surjectif $\lambda : \Delta = \text{Spec}(\mathcal{N}) \rightarrow D$ est plat et surjectif. Puisque l'anneau $k\{U\}$ est excellent, il est également fini. En particulier, l'anneau \mathcal{N} est un anneau de Dedekind et une algèbre strictement k -affinoïde.
- Le morphisme $\mu : F \times_D \Delta \rightarrow F$ est, lui aussi, fini, plat et surjectif. Le morphisme $G \rightarrow F$ est donc encore fini et l'anneau \mathcal{G} est une algèbre strictement k -affinoïde. On en déduit également que toutes les composantes connexes de G se surjectent sur F .
- Le morphisme $\beta : F \times_D \Delta \rightarrow \Delta$ est plat et surjectif.
- Le morphisme γ est surjectif. Il est également plat, puisque, quelle que soit la composante connexe H de G , l'anneau de Dedekind \mathcal{N} s'injecte dans l'anneau de H , qui est intègre et donc sans torsion.

Établissons encore deux propriétés, moins immédiates :

Lemme 3.4. — *Le schéma $F \times_D \Delta$ est normal hors des fibres de $\alpha \circ \mu$ au-dessus du point 0. En particulier, si x est un point de $\Delta \setminus \lambda^{-1}(0)$, alors la fibre*

de γ au-dessus de x est isomorphe à celle de β au-dessus de x et donc à celle de α au-dessus de $\lambda(x)$.

Démonstration. — Remarquons, tout d’abord, que les fibres du morphisme α autres que la fibre au-dessus de 0 sont toutes normales. En effet, pour la fibre générique, c’est évident et cela découle de l’interprétation géométrique des fibres du morphisme τ pour les points fermés. Puisqu’en outre, α est plat, le morphisme $F \setminus \alpha^{-1}(0) \rightarrow D \setminus \{0\}$ est normal, au sens de [30], 6.8.1. Puisque $\Delta \setminus \lambda^{-1}(0)$ est un schéma normal, on en déduit que $(F \setminus \alpha^{-1}(0)) \times_{D \setminus \{0\}} (\Delta \setminus \lambda^{-1}(0))$ est encore normal, en vertu de [30], 6.14.1. \square

Lemme 3.5. — *Les fibres du morphisme γ sont géométriquement réduites et déployées.*

Démonstration. — Les fibres du morphisme α , à l’exception éventuelle de $\alpha^{-1}(0)$, sont géométriquement réduites et déployées. On en déduit, à l’aide du lemme précédent, que les fibres du morphisme γ au-dessus des points de $\Delta \setminus \lambda^{-1}(0)$ le sont encore. Il nous reste à considérer les fibres au-dessus de $\lambda^{-1}(0)$, qui est une réunion finie de points fermés. Puisque le corps de base k est supposé algébriquement clos, elles sont évidemment encore déployées.

Soient x un point fermé de Δ et H une composante connexe de G . La fibre du morphisme γ_H , induit par γ sur H , au-dessus de ce point est une hypersurface principale différente de H . Soit ζ l’un de ses points génériques. Il est de codimension 1 dans H , tout comme l’est son image η dans F , par les théorèmes de Cohen et Seidenberg. Le point η est donc un point générique de la fibre de α au-dessus du point fermé $\lambda(x)$ de D et l’anneau local $\mathcal{O}_{H,\zeta}$ est un anneau de valuation discrète dominant $\mathcal{O}_{F,\eta}$ et dont le corps des fractions coïncide avec le corps des fonctions de H . La construction de G et la proposition 3.2 nous permettent alors d’affirmer que l’anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{G,\zeta} = \mathcal{O}_{H,\zeta}$ est faiblement non ramifié au-dessus de $\mathcal{O}_{\Delta,x}$. Par conséquent, la fibre $\gamma^{-1}(x)$ est génériquement réduite, et donc réduite, puisqu’il s’agit d’une hypersurface principale d’un schéma normal et noethérien. \square

Revenons, à présent, à des morphismes entre espaces analytiques.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \longleftarrow & \mathcal{M}(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)) & \longleftarrow & \mathcal{M}(\mathcal{G}) \\
 & & \tau \downarrow & & \sigma \downarrow \\
 & & \mathbf{D} & \xleftarrow{\delta} & N
 \end{array}$$

Soit ω un point rigide de $N = \mathcal{M}(\mathcal{N})$ qui s'envoie sur $0 \in \mathbf{D}$ par le morphisme $\delta : N \rightarrow \mathbf{D}$. D'après le lemme 3.4, il existe un voisinage affinoïde V de ω dans N tel que, pour tout point rigide v de $V \setminus \{\omega\}$, la fibre du morphisme $\sigma : \mathcal{M}(\mathcal{G}) \rightarrow N$ au-dessus de v soit isomorphe à $V_\varepsilon \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(w)$, où $w = \delta(v)$, $\varepsilon = |U(w)| > 0$ et $V_\varepsilon = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$.

Toutes les conditions sont, à présent, réunies pour que nous puissions appliquer la théorème 1.9 au morphisme σ au voisinage du point ω . En effet, le morphisme σ est plat et à fibres géométriquement réduites et déployées, car γ l'est. Le théorème nous assure l'existence d'une partie simple P d'un domaine affinoïde de V , de morphisme quasi-étales et de sections satisfaisant certaines conditions. Rappelons qu'une partie simple contenant un point rigide contient toujours un voisinage de ce point. Considérons un morphisme quasi-étale $e : U \rightarrow V$ dont l'image contient P . Choisissons un point rigide ω' de U qui soit un antécédent de ω par e . Puisque le corps de base k est algébriquement clos, le corps résiduel complété $\mathcal{H}(\omega)$ l'est également et le morphisme e induit un isomorphisme

$$\mathcal{H}(\omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}(\omega').$$

Puisque les points ω et ω' sont rigides et donc intérieurs, on en déduit qu'il existe un isomorphisme local entre un voisinage affinoïde de ω' et un voisinage affinoïde de ω , en vertu de [5], 3.4.1.

En composant les différents isomorphismes réciproques par les sections du théorème et en restreignant de façon adéquate, nous déduisons finalement l'existence d'un voisinage V' de ω dans V et d'une famille finie \mathcal{T} de sections de σ sur V' satisfaisant la condition suivante : pour tout point v de V' , chaque composante connexe de la fibre du morphisme σ au-dessus de v contient un et un seul élément de la forme $t(v)$, avec $t \in \mathcal{T}$. Remarquons que nous pouvons supposer que V' est connexe par arcs, puisque N l'est localement.

Puisque le morphisme $\delta : N \rightarrow \mathbf{D}$ est fini et plat, il est ouvert au voisinage des points rigides de N , donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'image de V' par δ contienne l'ensemble $\{d \in \mathbf{D} \mid |U(d)| \leq \varepsilon\}$. Soit v un élément de V' tel que $|U(\delta(v))| = \varepsilon$. Soit $\varepsilon' \in]0, \varepsilon]$. Il existe un chemin continu l dans V' joignant v à un point v' vérifiant les deux conditions

$$|U(\delta(l))| \subset [\varepsilon', \varepsilon] \quad \text{et} \quad |U(\delta(v'))| = \varepsilon'.$$

Pour chaque $t \in \mathcal{T}$, l'image du chemin l par la section t fournit un chemin l_t dans $\mathcal{M}(\mathcal{G})$.

Projetons, à présent, les chemins ainsi construits dans X par le morphisme

$$\mathcal{M}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}\{T, U\}/(fT - U)) \rightarrow X = \mathcal{M}(\mathcal{A}).$$

Quel que soit $w \in l$, chaque composante connexe de $\sigma^{-1}(w)$ coupe un et un seul des chemins l_t , avec $t \in \mathcal{T}$. Les images de ces chemins joignent donc les composantes connexes de V_ε aux composantes connexes de $V_{\varepsilon'}$. En particulier, les composantes connexes de V_ε sont les traces de celles de $V_{\varepsilon'}$ et donc les traces de celles de $\{x \in X / f(x) \neq 0\}$. Or, d'après [3] ou [37], le complémentaire de l'hypersurface définie par f dans X est connexe, dès que X est connexe. Par conséquent, le domaine affinoïde V_ε est connexe. Nous avons finalement démontré le résultat suivant :

Théorème 3.6. — *Soient k un corps ultramétrique complet algébriquement clos dont la valuation n'est pas triviale, X un espace strictement k -affinoïde intègre et f une fonction analytique sur X dont la norme spectrale vaut 1. Alors le domaine affinoïde de X défini par*

$$\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

est irréductible, dès que ε est assez petit.

4. Démonstration des théorèmes annoncés

Dans cette partie, nous expliquons comment déduire les théorèmes 1 et 2 en toute généralité à partir de ceux démontrés dans les deux paragraphes précédents. Fixons un corps ultramétrique complet k et un espace k -affinoïde X d'algèbre \mathcal{A} .

Intéressons-nous, tout d'abord, au théorème 1. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et f_1, \dots, f_n des fonctions analytiques sur X . Quel que soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, nous noterons V_ε le domaine analytique de X défini par

$$V_\varepsilon = \bigcup_{1 \leq j \leq n} \{x \in X \mid |f_j(x)| \geq \varepsilon_j\}.$$

Supposons que l'espace X soit irréductible et montrons que le domaine affinoïde V_ε est irréductible, dès que ε est assez petit. Comme dans le paragraphe précédent, puisque le morphisme de normalisation est continu et surjectif, nous pouvons, quitte à remplacer X par son normalisé, supposer que l'espace X est normal.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Commençons par nous intéresser aux espaces affinoïdes du type

$$V_{j,\varepsilon} = \{x \in X \mid |f_j(x)| \geq \varepsilon\},$$

avec $\varepsilon > 0$. Soit K un corps ultramétrique complet algébriquement clos contenant k tel que l'espace $X \hat{\otimes}_k K$ soit strictement K -affinoïde. Le résultat que nous cherchons à démontrer est évident lorsque la fonction f_j est nulle. Nous excluons dorénavant ce cas. D'après [11], 6.2.1/4 (ii), il existe alors $c \in K^*$ et $m \in \mathbf{N}^*$ tels que $|c f_j^m|_{\text{sup}} = 1$. Nous pouvons donc supposer que la norme spectrale de f_j vaut 1, quitte à remplacer f_j par $c f_j^m$, les domaines affinoïdes en jeu étant alors liés par la relation

$$\{x \in X \hat{\otimes}_k K \mid |c f_j^m(x)| \geq \varepsilon\} = \left\{ x \in X \hat{\otimes}_k K \mid |f_j(x)| \geq \left(\frac{\varepsilon}{|c|} \right)^{1/m} \right\}.$$

L'espace strictement K -affinoïde $X \hat{\otimes}_k K$ possède un nombre fini Z_1, \dots, Z_r , avec $r \in \mathbf{N}$, de composantes irréductibles. Sur chacune d'elles, le théorème 1 est valable, d'après le théorème 3.6. Par conséquent, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que, quel que soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et quel que soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon']$, l'espace

$$\{z \in Z_i \mid |f_j(z)| \geq \varepsilon\}$$

soit connexe.

Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, notons Y_i l'image de Z_i dans X . Quitte à imposer un nouvel ordre sur les indices, nous pouvons supposer qu'il existe $s \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que Z_1, \dots, Z_s ne soient pas contenus dans

$$V_+ = \{x \in X \mid f_j(x) \neq 0\}$$

et que Z_{s+1}, \dots, Z_r le soient. Pour $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, choisissons un point P_i de Y_i en lequel f_j ne s'annule pas. D'après [3] ou [37], l'espace V_+ est connexe et même connexe par arcs, en vertu de [4], 3.2.1. Par conséquent, quel que soit $i \in \llbracket 2, s \rrbracket$, il existe un chemin joignant P_1 à P_i sur lequel f_j ne s'annule jamais. Ce chemin étant compact, la fonction f_j y atteint son minimum $\varepsilon'_i > 0$.

Posons $\varepsilon_j = \min(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_s)$. Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_j[$. Puisque le morphisme de changement de base

$$X \hat{\otimes}_k K \rightarrow X$$

est continu et surjectif, le domaine affinoïde $V_{j,\varepsilon}$ est connexe. D'après [20], 4.18, il est également normal, car X est normal. On en déduit qu'il est donc irréductible.

Nous pouvons, sans perte de généralité, supposer qu'aucune des fonctions f_j , avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, n'est nulle. Puisque X est irréductible, il existe un point x de X en lequel aucune des fonctions f_j , avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ne s'annule. Soit $\varepsilon \in \prod_{j=1}^n]0, \min(\varepsilon_j, |f_j(x)|)[$. Le domaine analytique V_ε est alors réunion de parties connexes dont l'intersection contient un voisinage de x dans X . Le lemme suivant nous montre qu'il est irréductible.

Lemme 4.1. — *Soient V et W deux domaines analytiques irréductibles de X . Si l'intérieur de l'intersection $V \cap W$ n'est pas vide, alors la réunion $V \cup W$ est irréductible.*

Démonstration. — Supposons que le domaine analytique $V \cup W$ soit connexe. Soient Y et Z deux fermés de Zariski de $V \cup W$ dont la réunion recouvre $V \cup W$. Supposons que $Y \neq V \cup W$. Nous avons alors $Y \cap V \neq V$ ou $Y \cap W \neq W$. Nous pouvons supposer que $Y \cap V \neq V$. Par irréductibilité de V , nous avons alors $Z \cap V = V$, autrement dit, $V \subset Z$. Par irréductibilité de W , nous devons avoir $W \subset Y$ ou $W \subset Z$.

Supposons, par l'absurde que l'on ait $W \subset Y$. Nous avons alors $V \cap W \subset Y \cap Z$. Le domaine analytique d'intérieur non vide $V \cap W$ de V est donc contenu dans le fermé de Zariski non trivial $Y \cap Z$ du domaine analytique irréductible V . D'après [4], 3.3.21, cette situation est impossible.

Finalement, nous avons $W \subset Z$ et donc $V \cup W \subset Z$. Par conséquent, le domaine analytique $V \cup W$ est irréductible. \square

Passons à la démonstration du théorème 2. Soit f une fonction analytique sur X . Nous noterons R_X le sous- \mathbf{Q} -espace vectoriel de \mathbf{R}_+^* engendré par les valeurs non nulles de la norme spectrale sur l'algèbre k -affinoïde \mathcal{A} . En particulier, si X est strictement k -affinoïde, on a $R_X = \sqrt{|k^*|}$. Cette définition est justifiée par le lemme suivant.

Lemme 4.2. — *Il existe un corps L ultramétrique complet algébriquement clos et de valuation non triviale contenant k tel que l'espace $X \hat{\otimes}_k L$ soit strictement L -affinoïde. Un tel corps peut être choisi de façon à vérifier en outre*

$$|L^*| = \sqrt{|L^*|} = R_X.$$

Dans un premier temps, nous nous intéresserons à la partie du théorème 2 concernant les composantes connexes. L'espace X n'est plus supposé irréductible. Nous utiliserons la définition suivante.

Définition 4.3. — *Soient Y un espace k -analytique et g une fonction analytique sur Y . Nous dirons qu'un intervalle I de \mathbf{R}^+ est **régulier** pour la fonction g sur l'espace Y si, quels que soient $\varepsilon', \varepsilon \in I$, avec $\varepsilon' \leq \varepsilon$, l'application*

$$\pi_0(\{y \in Y \mid |g(y)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow \pi_0(\{y \in Y \mid |g(y)| \geq \varepsilon'\})$$

induite par l'inclusion est bijective.

D'après [20], 5.5, le nombre de composantes connexes géométriques de X et de ses domaines affinoïdes reste inchangé lorsque l'on étend le corps de base. Par conséquent, quitte à changer k en le corps L du lemme précédent, nous pouvons supposer que le corps k est algébriquement clos, de valuation non triviale et que l'espace X est strictement k -affinoïde. Il nous faudra cependant remplacer $\sqrt{|k^*|}$ par $\sqrt{|L^*|} = |L^*| = R_X$.

Afin de réduire encore notre problème, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.4. — *Supposons que l'espace X soit réunion de deux fermés de Zariski Y et Z sur lesquels il existe une partition finie de \mathbf{R}^+ en intervalles réguliers pour f et dont les bornes sont des éléments de $\sqrt{|k^*|} \cup \{0, +\infty\}$. Alors, la même propriété vaut sur X .*

Démonstration. — Quel que soit $\varepsilon > 0$, nous noterons

$$V_\varepsilon' = \{x \in Y \mid |f(x)| \geq \varepsilon\} \quad \text{et} \quad V_\varepsilon'' = \{x \in Z \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Soit I un intervalle de \mathbf{R}^+ qui soit régulier pour f à la fois sur Y et sur Z et dont les bornes sont des éléments de $\sqrt{|k^*|} \cup \{0, +\infty\}$. Il suffit de montrer qu'un tel

intervalle admet une partition finie en intervalles réguliers pour f sur X avec la même condition sur les bornes. Nous pouvons supposer que, quel que soit $\varepsilon \in I$, l'espace affinoïde V_ε n'est pas vide.

Soit $\alpha \in I$. Notons C_1, \dots, C_r , avec $r \in \mathbf{N}$, les composantes connexes de V'_α et C_{r+1}, \dots, C_s , avec $s \in \mathbf{N}$, celles de V''_α . Pour $\varepsilon \in I$ et $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, nous noterons $C_{i,\varepsilon}$ l'unique composante connexe de V'_ε qui vérifie

$$C_{i,\varepsilon} \cap V'_{\max(\varepsilon,\alpha)} = C_i \cap V'_{\max(\varepsilon,\alpha)}.$$

Pour $\varepsilon \in I$ et $j \in \llbracket r+1, s \rrbracket$, on définit de même une composante connexe $C_{j,\varepsilon}$ de V''_ε .

Soit $\varepsilon \in I$. Remarquons que toute composante connexe C de V_ε s'écrit de manière unique sous la forme

$$C = \bigcup_{i \in P} C_{i,\varepsilon},$$

où P désigne une partie de $\llbracket 1, s \rrbracket$. Définissons l'application

$$c_\varepsilon : \llbracket 1, s \rrbracket \rightarrow \mathcal{P}(\llbracket 1, s \rrbracket)$$

qui à un entier $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ associe l'ensemble des entiers $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tels que $C_{j,\varepsilon}$ et $C_{i,\varepsilon}$ soient contenus dans la même composante connexe de V_ε .

L'application $c : \varepsilon \mapsto c_\varepsilon$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et est décroissante, au sens où, pour $\varepsilon' \geq \varepsilon$, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, c_{\varepsilon'}(i) \subset c_\varepsilon(i).$$

Par conséquent, il existe une partition finie \mathcal{P} de I en intervalles sur lesquels l'application c est constante. Chacun de ces intervalles est régulier pour f sur X .

Soit $\beta \in \sqrt{|k^*|}$ tel que l'application c soit constante sur l'intervalle $I \cap [0, \beta]$. Les parties $C_{1,\beta}, \dots, C_{s,\beta}$ sont alors des domaines strictement affinoïdes de V_β et donc de X . Nous pouvons choisir les intervalles de la partition \mathcal{P} de façon que leurs bornes différentes de celles de l'intervalle I soient contenues dans l'ensemble E des éléments ε de I pour lesquels il existe des indices $i, j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ tels que

$$\forall \varepsilon' \in I \cap [0, \varepsilon], C_{i,\beta} \cap C_{j,\beta} \cap V_{\varepsilon'} \neq \emptyset$$

et

$$\forall \varepsilon' \in I \cap]\varepsilon, +\infty[, C_{i,\beta} \cap C_{j,\beta} \cap V_{\varepsilon'} = \emptyset.$$

En d'autres termes, chaque élément de E peut être obtenu comme la valeur maximale de la valeur absolue de la fonction f sur un certain domaine strictement affinoïde de X . D'après [11], 6.2.1/4, on en déduit que $E \subset \sqrt{|k^*|}$. \square

Tâchons, tout d'abord, de démontrer qu'il existe une partition finie de \mathbf{R}^+ en intervalles réguliers pour f sur X et dont les bornes sont des éléments de $\sqrt{|k^*|} \cup \{0, +\infty\}$. Puisque l'espace k -affinoïde X possède un nombre fini de composantes irréductibles, le lemme précédent nous montre qu'il suffit de le prouver pour chacune d'elles. Nous pouvons donc supposer que l'espace X est irréductible et même intègre. D'après [11], 6.2.1/4 (ii), si la fonction f n'est pas nulle, nous pouvons supposer que sa norme spectrale vaut 1. Dans ce cas, nous savons, d'après le théorème 1, qu'il existe $\varepsilon' \in]0, 1] \cap \sqrt{|k^*|}$ tel que, quel que soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon']$, l'espace

$$V_\varepsilon = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

soit connexe. Par hypothèse, l'espace $V_0 = X$ est connexe, donc l'intervalle $[0, \varepsilon[$ est régulier pour f sur X . Quel que soit $\varepsilon \in]1, +\infty[$, l'espace V_ε est vide et l'intervalle $]1, +\infty[$ est donc également régulier pour f sur X . Le théorème 1.10 nous assure encore qu'il est possible de découper l'intervalle $[\varepsilon', 1]$ en un nombre fini d'intervalles réguliers pour f sur X et dont les bornes sont des éléments de $\sqrt{|k^*|} \cup \{0, +\infty\}$. Par conséquent, il existe une partition finie de \mathbf{R}^+ en intervalles réguliers pour f sur X dont les bornes jouissent de la même propriété.

Intéressons-nous à présent à la forme des intervalles de la partition précédente. Les lemmes qui suivent nous permettront de l'obtenir, concluant ainsi la démonstration du théorème 2.

Lemme 4.5. — *Quel que soit $\beta > 0$, il existe $\alpha \in [0, \beta[$ tel que, quel que soit $\varepsilon \in [\alpha, \beta]$, l'application naturelle*

$$\pi_0(V_\beta) \rightarrow \pi_0(V_\varepsilon)$$

soit injective.

Démonstration. — Soit $\beta > 0$. Puisque V_β ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes, il suffit de montrer que deux d'entre elles, C_0 et C_1 , distinctes, sont contenues dans deux composantes connexes distinctes de V_ε , avec $\varepsilon \leq \beta$, dès que ε est assez proche de β .

Remarquons qu'il existe une fonction, g analytique sur V_β , vérifiant

$$g|_{C_0} \equiv 0, \quad g|_{C_1} \equiv 1 \quad \text{et} \quad g^2 - g = 0.$$

Puisque V_β est un domaine rationnel de X , nous pouvons approcher la fonction g , uniformément sur V_β , par une suite de quotients d'éléments de \mathcal{A} sans pôles sur V_β . Par conséquent, il existe $p, q \in \mathcal{A}$ tels que q ne s'annule pas sur V_β et

$$\forall x \in V_\beta, \quad |g(x) - \frac{p(x)}{q(x)}| \leq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad |h^2(x) - h(x)| \leq \frac{1}{5},$$

où $h = p/q$. Le lieu d'annulation de q est une partie compacte de X , disjointe de V_β , sur laquelle la fonction continue f atteint son maximum $M < \beta$. Soit $M' \in]M, \beta]$. La fonction méromorphe h est analytique sur $V_{M'}$. Définissons un compact K de $V_{M'}$ par

$$K = \left\{ x \in V_{M'} \mid |h^2(x) - h(x)| \geq \frac{1}{4} \right\}.$$

La fonction continue f y atteint son maximum M_1 . Puisque K et V_β sont disjoints, on a nécessairement $M_1 < \beta$. Fixons $\alpha \in]M_1, \beta[$.

Soit $\varepsilon \in [\alpha, \beta]$. Le compact K est disjoint de V_ε donc, quel que soit $x \in V_\varepsilon$, on a $|h(h-1)(x)| < 1/4$. Posons

$$D_0 = \left\{ x \in V_\varepsilon \mid |h(x)| < \frac{1}{2} \right\} \text{ et } D_1 = \left\{ x \in V_\varepsilon \mid |h(x) - 1| < \frac{1}{2} \right\}.$$

Ces deux ouverts sont disjoints et recouvrent V_ε . Par conséquent, ils sont réunions de composantes connexes. En outre, $C_0 \subset D_0$ et $C_1 \subset D_1$, donc les parties C_0 et C_1 sont contenues dans deux composantes connexes distinctes de V_ε . \square

Lemme 4.6. — *Si l'intervalle $[\alpha, \beta[$ est régulier pour f sur X , alors l'intervalle $[\alpha, \beta]$ l'est encore.*

Démonstration. — Il nous suffit de montrer que l'application naturelle

$$\iota : \pi_0(V_\beta) \rightarrow \pi_0(V_\alpha)$$

est bijective. D'après le lemme 4.5, elle est injective. Montrons qu'elle est également surjective.

Soit C une composante connexe de V_α . C'est une partie compacte sur laquelle la fonction continue f atteint son maximum M . Puisque l'intervalle $[\alpha, \beta[$ est régulier pour f sur X , on a $C \cap V_\varepsilon \neq \emptyset$ et donc $M \geq \varepsilon$, quel que soit $\varepsilon \in [\alpha, \beta[$. On en déduit que $M \geq \beta$, autrement dit que $C \cap V_\beta \neq \emptyset$. Choisissons une composante connexe de V_β coupant C . Elle s'envoie sur C par ι . L'application ι est donc surjective. \square

Il nous reste à démontrer la partie du théorème 2 qui concerne les composantes irréductibles. Elle se déduit de celle qui concerne les composantes connexes lorsqu'on l'applique au normalisé de X .

Énonçons, à présent, un corollaire du théorème 1. Il figure déjà dans [4], §2.3, sans démonstration.

Corollaire 4.7. — *Un point d'un bon espace k -analytique en lequel l'anneau local est intègre possède une base de voisinages affinoïdes irréductibles.*

Démonstration. — L'espace étant bon, il suffit de démontrer que tout point d'un espace k -affinoïde en lequel l'anneau local est intègre possède un voisinage affinoïde irréductible. Soient Y un espace k -affinoïde et y un point de Y en lequel l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,y}$ est intègre. Alors le point y ne peut être situé que sur une seule des composantes irréductibles de Y . Notons F cette composante et G la réunion des autres. Soit g une fonction analytique sur Y nulle sur le fermé de Zariski G et ne s'annulant pas en y . D'après le théorème 1, il existe $\varepsilon \in]0, |f(x)|[$ tel que le domaine affinoïde

$$\{y' \in Y \mid |f(y')| \geq \varepsilon\} = \{y' \in F \mid |f(y')| \geq \varepsilon\}$$

soit irréductible. □

5. Privilège

Dans cette partie, nous énonçons et démontrons un résultat de privilège pour les variétés analytiques p -adiques. La septième partie de l'article [19] d'A. Douady est consacrée à cette notion, dans le cadre analytique complexe. Rappelons-en quelques définitions et notations.

Si K est une partie compacte de \mathbf{C}^n , avec $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{O}(K)$ l'espace vectoriel des germes de fonctions analytiques au voisinage de K et $B(K)$ son adhérence dans l'espace de Banach des fonctions continues sur K . Si \mathcal{F} est un faisceau analytique cohérent défini au voisinage de K , on note $\mathcal{F}(K)$ la limite inductive des modules des sections de \mathcal{F} sur les voisinages ouverts de K et

$$B(K, \mathcal{F}) = B(K) \otimes_{\mathcal{O}(K)} \mathcal{F}(K).$$

Revenons, à présent, au cadre des espaces analytiques définis sur un corps ultramétrique complet. Soient Y un espace k -analytique normal et séparé et $V = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un domaine affinoïde de Y contenu dans l'intérieur de Y . En définissant $B(V)$ de la même façon que précédemment, on obtient un isomorphisme

$$B(V) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$$

et l'on retrouve les sections du faisceau structural pour la G -topologie. De même, si \mathcal{F} désigne un faisceau cohérent pour la G -topologie de Y , la formule définissant $B(V, \mathcal{F})$ redonne exactement le \mathcal{A} -module de type fini $\mathcal{F}(V)$ des sections globales de \mathcal{F} sur V .

Définition 5.1. — *Soient k un corps ultramétrique complet, Y un bon espace k -analytique et \mathcal{F} un faisceau cohérent défini sur Y . Nous dirons qu'un voisinage affinoïde V d'un point y de l'espace k -analytique Y est **privilégié** pour le faisceau \mathcal{F} s'il vérifie*

$$\mathcal{F}(V) \hookrightarrow \mathcal{F}_y,$$

où $\mathcal{F}(V)$ doit être pris au sens de la G -topologie et \mathcal{F}_y au sens de la topologie sur l'espace topologique sous-jacent $|Y|$.

Pour qu'un voisinage compact K d'un point soit privilégié, A. Douady impose non seulement la condition qui figure dans la définition, mais encore une autre qui porte sur des propriétés d'exactitude du foncteur $B(K, \cdot)$ (cf. [19], §7, définition 2). Dans notre cadre, elles seront toujours vérifiées pour les domaines

affinoïdes.

Signalons que l'on peut penser à un voisinage privilégié pour un faisceau cohérent comme un voisinage sur lequel vaut une généralisation de l'unicité du prolongement analytique. En effet, si Y désigne un espace k -analytique irréductible et réduit, nous savons, d'après [4], 3.3.21, qu'une fonction nulle sur un ouvert non vide de Y est identiquement nulle. Ce résultat se traduit par le fait que Y est un voisinage privilégié de tous ses points pour le faisceau structural. Nous en déduisons aussitôt le lemme suivant.

Lemme 5.2. — *Dans un espace k -analytique réduit, un voisinage affinoïde d'un point est privilégié pour le faisceau structural dès que toutes les composantes irréductibles du voisinage passent par ce point.*

□

Nous souhaitons montrer ici que tout point d'un espace k -analytique possède un système fondamental de voisinages affinoïdes privilégiés pour un faisceau cohérent fixé, du moins lorsque l'espace est bon. Ce résultat est analogue à celui démontré par A. Douady dans [19] (§6, théorème 1). Notre démonstration reprend des idées qui figurent dans l'article [26] de J. Frisch.

Lemme 5.3. — *Soient Y un espace k -analytique, y un point de Y et*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$$

une suite exacte de faisceaux cohérents sur Y . Alors, un voisinage affinoïde de y privilégié pour les faisceaux \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' l'est encore pour le faisceau \mathcal{F} .

Démonstration. — Ce résultat provient directement de l'exactitude à gauche du foncteur des sections globales. □

Lemme 5.4. — *Soient Y un espace k -affinoïde et \mathcal{F} un faisceau cohérent sur Y . Alors il existe un entier $r \in \mathbf{N}$, une filtration*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$$

de \mathcal{F} par des sous-faisceaux cohérents et r fermés de Zariski de Y intègres Z_0, \dots, Z_{r-1} vérifiant la condition suivante : quel que soit $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, on dispose d'un isomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i \simeq \mathcal{O}_{Z_i}.$$

Démonstration. — Le module $\mathcal{F}(Y)$ des sections du faisceau cohérent \mathcal{F} sur Y est un module de type fini sur l'algèbre \mathcal{B} de Y . Par conséquent, il existe un entier $r \in \mathbf{N}$, une filtration

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r = M$$

de M par des sous- \mathcal{B} -modules de type fini vérifiant la condition suivante : quel que soit $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, il existe un idéal premier \mathfrak{p}_i de \mathcal{B} et un isomorphisme

$$M_{i+1}/M_i \simeq \mathcal{B}/\mathfrak{p}_i.$$

Pour $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$, notons \mathcal{F}_i le faisceau cohérent associé à M_i sur Y et, pour $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, notons Z_i le fermé de Zariski intègre de Y d'algèbre $\mathcal{B}/\mathfrak{p}_i$. Ils satisfont la conclusion du lemme. \square

Théorème 5.5. — *Soient k un corps ultramétrique complet, Y un bon espace k -analytique et \mathcal{F} une famille finie de faisceaux cohérents sur Y . Tout point de Y possède un système fondamental de voisinages affinoïdes privilégiés pour chacun des faisceaux de \mathcal{F} .*

Démonstration. — Soit $y \in Y$. Par définition d'un bon espace, le point y possède un système fondamental \mathcal{V} de voisinages affinoïdes dans Y . Il suffit de montrer que, quel que soit $V \in \mathcal{V}$, le point y possède un voisinage affinoïde dans V qui soit privilégié pour chacun des faisceaux de \mathcal{F} . Soit $V \in \mathcal{V}$. Notons \mathcal{B} son algèbre.

Soit \mathcal{F} un élément de \mathcal{F} . D'après le lemme 5.4, il existe entier $r(\mathcal{F}) \in \mathbf{N}$, une filtration

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{r(\mathcal{F})} = \mathcal{F}$$

de \mathcal{F} par des sous-faisceaux cohérents et $r(\mathcal{F})$ fermés de Zariski de V intègres

$$Z_{\mathcal{F},0}, \dots, Z_{\mathcal{F},r(\mathcal{F})-1}$$

vérifiant la condition suivante : quel que soit $i \in \llbracket 0, r(\mathcal{F})-1 \rrbracket$, on dispose d'un isomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i \simeq \mathcal{O}_{Z_{\mathcal{F},i}}.$$

Définissons l'ensemble

$$\mathcal{P} = \{Z_{\mathcal{F},i}, \mathcal{F} \in \mathcal{F}, 0 \leq i \leq r(\mathcal{F})-1\}.$$

D'après le lemme 5.3, il nous suffit pour conclure de montrer que le point y possède un voisinage affinoïde privilégié pour chacun des faisceaux \mathcal{O}_Z , avec $Z \in \mathcal{P}$. Notons \mathcal{Q} l'ensemble des éléments de \mathcal{P} évitant le point y . Leur réunion R définit un fermé de Zariski de V ne contenant pas y . Par conséquent, il existe

une fonction $g \in \mathcal{B}$ qui soit nulle sur R , mais pas en y . D'après le théorème 1, il existe $\varepsilon \in]0, |g(y)[$ tel que l'espace affinoïde

$$\{z \in Z \mid |g(z)| \geq \varepsilon\}$$

soit irréductible, quel que soit Z dans $\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$. Notons W le voisinage affinoïde de y dans V défini par

$$W = \{z \in V \mid |g(z)| \geq \varepsilon\}.$$

Soit $Z \in \mathcal{P}$. Si $Z \in \mathcal{Q}$, le faisceau \mathcal{O}_Z restreint à W est nul et le voisinage W de y est donc privilégié pour \mathcal{O}_Z . Si $Z \notin \mathcal{Q}$, le fermé de Zariski $Z \cap W$ est irréductible et on dispose donc d'un morphisme injectif

$$\mathcal{O}_Z(W) \simeq \mathcal{O}_{Z \cap W}(Z \cap W) \hookrightarrow \mathcal{O}_{Z,y}.$$

Autrement dit, le voisinage W de y est, dans ce cas encore, privilégié pour \mathcal{O}_Z . \square

ANNEXE A

UN ANALOGUE p -ADIQUE DU THÉORÈME DE J. FRISCH

Nous proposons ici un analogue, dans le cadre des espaces analytiques définis sur un corps ultramétrique complet, du théorème I,9 qui figure dans l'article [26] de J. Frisch. Nous suivrons, ici, la démonstration de C. Bănică et O. Stănășilă (cf. [2], 5, fin du §3). Nous obtiendrons une version un peu plus générale du théorème, proche de celle que propose Y.-T. Siu dans [45]. Commençons par une définition et un lemme.

Définition 0.1. — Soient k un corps ultramétrique complet et Y un espace k -analytique. Une partie A de Y est dite **morcelable** si, pour tout fermé de Zariski Z défini au voisinage de A , l'image réciproque de $A \cap Z$ dans le normalisé de Z possède un nombre fini de composantes connexes.

Lemme 0.2. — Soient k un corps ultramétrique complet et Y un espace k -analytique. Si l'espace Y est normal, alors le support de tout faisceau d'idéaux cohérent sur Y est ouvert et fermé.

Démonstration. — Nous pouvons supposer que Y est un espace k -affinoïde. Soit \mathcal{J} un faisceau d'idéaux cohérents sur Y . Comme tout faisceau cohérent, son support est fermé dans Y . Pour conclure, il nous suffit de montrer qu'il est également ouvert. Soit y un point de Y en lequel la fibre de \mathcal{J} n'est pas nulle. Alors il existe un voisinage ouvert connexe V de y et une fonction analytique $g \in \mathcal{J}(V)$ qui ne soit pas identiquement nulle sur V . Soit $z \in V$. D'après [4], 3.3.21, le fermé de Zariski défini par g est d'intérieur vide dans l'espace normal et connexe V . En particulier, la fonction g n'est nulle sur aucun voisinage de z dans V . On en déduit que la fibre \mathcal{J}_z n'est pas nulle et donc que le support de \mathcal{J} est ouvert. \square

Le résultat de finitude sur lequel nous nous appuyerons concerne les familles croissantes de faisceaux cohérents.

Lemme 0.3. — *Soient k un corps ultramétrique complet et Y un espace k -analytique. Notons $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ le morphisme de normalisation. Soit A une partie de l'espace topologique sous-jacent à Y telle que $\pi^{-1}(A)$ possède un nombre fini de composantes connexes. Soit $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de faisceaux d'idéaux cohérents de \mathcal{O}_Y définis chacun sur un voisinage de A . Soit a un point de A en lequel la fibre $(\mathcal{I}_n)_a$ est nulle, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Alors il existe un voisinage de a dans A sur lequel toutes les fibres du faisceau \mathcal{I}_n sont nulles, quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Quel que soit $b \in \pi^{-1}(a)$, il existe un voisinage V_b de b dans \tilde{Y} tel que $\pi^{-1}(A) \cap V_b$ soit connexe. La partie $V = \bigcup_{b \in \pi^{-1}(A)} V_b$ définit un voisinage de la fibre $\pi^{-1}(a)$ dans \tilde{Y} , donc il existe un voisinage U de a dans Y tel que $\pi^{-1}(U) \subset V$. Nous allons montrer que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et quel que soit $a' \in U \cap A$, on a

$$(\mathcal{I}_n)_{a'} = 0.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons \mathcal{J}_n le faisceau défini par

$$\mathcal{J}_n = \pi^{-1}(\mathcal{I}_n) \mathcal{O}_{\tilde{Y}}.$$

C'est un faisceau d'idéaux cohérent défini sur un voisinage de $\pi^{-1}(A)$ dans \tilde{Y} . Quel que soit $b \in \pi^{-1}(a)$, il existe un voisinage $V_{b,n}$ de $\pi^{-1}(A) \cap V_b$ sur lequel \mathcal{J}_n est défini. Puisque

$$(\mathcal{J}_n)_b = (\mathcal{I}_n)_a \mathcal{O}_{\tilde{Y},b} = 0,$$

la fibre de \mathcal{J}_n est nulle en tout point de $V_{b,n}$, d'après le lemme 0.2. La partie $V_n = \bigcup_{b \in \pi^{-1}(A)} V_{b,n}$ est un voisinage de $\pi^{-1}(A \cap U)$ dans \tilde{Y} . Par conséquent, la fibre du faisceau $\pi_* \mathcal{J}_n$ est nulle en tout point de $A \cap U$. Or le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_n & \longrightarrow & \pi_* \mathcal{J}_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_Y & \longrightarrow & \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} \end{array}$$

montre que le faisceau \mathcal{J}_n s'injecte dans le faisceau $\pi_* \mathcal{J}_n$. Le résultat annoncé s'en déduit. \square

Proposition 0.4. — *Soient k un corps ultramétrique complet, Y un espace k -affinoïde et A une partie de l'espace topologique sous-jacent à Y . Soient \mathcal{F} un faisceau cohérent défini sur Y et $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de sous-faisceaux*

cohérents de \mathcal{F} définis chacun sur un voisinage affinoïde de A . Si la partie A est morcelable, alors la suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est localement stationnaire dans A au sens où, quel que soit $a \in A$, il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}$ et un voisinage U de a dans A tels que

$$\forall n \geq n_0, \forall z \in A, (\mathcal{F}_{n_0})_z \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_n)_z.$$

Démonstration. — Supposons que la partie A soit morcelable. Soit $a \in A$. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $n \geq n_0$, on ait

$$(\mathcal{F}_{n_0})_a \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F}_n)_a.$$

Quitte à restreindre Y , à remplacer \mathcal{F} par $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{n_0}$ et \mathcal{F}_n par $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n_0}$, pour $n \geq n_0$, puis à décaler les indices, nous pouvons supposer que

$$(\mathcal{F}_n)_a = 0,$$

quel que soit $n \in \mathbf{N}$. D'après le lemme 5.4, il existe un entier $r \in \mathbf{N}$, une filtration

$$0 = \mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}^{(r)} = \mathcal{F}$$

de \mathcal{F} par des sous-faisceaux cohérents et r fermés de Zariski de Y intègres Z_0, \dots, Z_{r-1} vérifiant la condition suivante : quel que soit $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, on dispose d'un isomorphisme de faisceaux

$$\mathcal{F}^{(i+1)}/\mathcal{F}^{(i)} \simeq \mathcal{O}_{Z_i}.$$

Il nous suffit, à présent, de montrer que, pour chaque $i \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket$, la sous-suite $(\mathcal{G}_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$ de $\mathcal{F}^{(i)}/\mathcal{F}^{(i+1)} \simeq \mathcal{O}_{Z_i}$ induite par $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne au voisinage de a dans A et même au voisinage de a dans $A \cap Z_i$. Le lemme précédent nous permet de conclure. \square

Il ne nous reste plus qu'à rendre global le résultat précédent pour obtenir le théorème recherché.

Théorème 0.5. — *Soient k un corps ultramétrique complet, Y un bon espace k -analytique et K une partie compacte de l'espace topologique sous-jacent à Y . Si K est morcelable et possède un système fondamental de voisinages affinoïdes, alors l'anneau $\mathcal{O}(Y, K)$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de K est noethérien.*

Démonstration. — Soit $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite croissante d'idéaux de type fini de $\mathcal{O}(Y, K)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, notons \mathcal{I}_n le faisceau d'idéaux cohérents de \mathcal{O}_Y engendré par I_n . D'après la proposition précédente, la suite $(\mathcal{I}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne sur K , au

sens où il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, quel que soit $n \geq n_0$ et quel que soit $y \in K$, on dispose d'un isomorphisme

$$(\mathcal{I}_{n_0})_y \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}_n)_y.$$

Puisque l'idéal I_{n_0} est fini, il possède un système générateur fini (f_1, \dots, f_p) , avec $p \in \mathbf{N}$ et $f_i \in \mathcal{O}(Y, K)$, quel que soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Le morphisme de faisceaux

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y^p & \rightarrow & \mathcal{I}_{n_0} \\ (a_1, \dots, a_p) & \mapsto & a_1 f_1 + \dots + a_p f_p \end{array}$$

est surjectif.

Soit $n \geq n_0$. Si un morphisme entre deux faisceaux cohérents induit un isomorphisme entre les fibres en un point, alors il induit un isomorphisme au voisinage de ce point. Par conséquent, les faisceaux \mathcal{I}_{n_0} et \mathcal{I}_n coïncident sur un voisinage U_n de K . Soient $g \in I_n$ et V_n un voisinage affinoïde de K dans U_n sur lequel les fonctions f_1, \dots, f_p, g soient définies. Notons \mathcal{G} le noyau du morphisme de faisceaux φ . C'est encore un faisceau cohérent sur V_n . De la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{I}_n \rightarrow 0$, on déduit une surjection

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(V_n)^p & \rightarrow & \mathcal{I}_n(V_n) \\ (a_1, \dots, a_p) & \mapsto & a_1 f_1 + \dots + a_p f_p \end{array},$$

car $H^1(V_n, \mathcal{G}) = 0$. Par conséquent,

$$g \in (f_1, \dots, f_p) \mathcal{O}(V_n) \subset (f_1, \dots, f_p) \mathcal{O}(Y, K) = I_{n_0}.$$

On en déduit que $I_n = I_{n_0}$. □

Signalons que le théorème que démontre J. Frisch concerne des compacts possédant un système fondamental de voisinages composé d'espaces de Stein. Dans le cadre des espaces analytiques définis sur un corps ultramétrique complet k , il existe également une notion d'espace de Stein. Un espace k -analytique Y est dit de Stein s'il existe une suite croissante $(Y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de domaines affinoïdes de Y vérifiant les conditions suivantes :

- a) quel que soit $n \in \mathbf{N}$, Y_n est un domaine de Weierstraß de Y_{n+1} ;
- b) la famille $\{Y_n, n \in \mathbf{N}\}$ définit un G-recouvrement de Y .

La seconde condition, présente dans [35], 2.3, fait défaut dans [4], p. 96.

Il découle de la définition qu'une partie compacte d'un espace analytique possédant un système fondamental de voisinages constitué d'espaces de Stein possède encore un système fondamental de voisinages constitué d'affinoïdes.

Mentionnons, pour conclure, deux exemples de parties compactes morcelables :

- a) Nous dirons qu'une partie A d'un espace analytique Y est semi-analytique si tout point de A possède un voisinage affinoïde dans lequel la partie A est semi-algébrique, c'est-à-dire décrite par un nombre fini d'inégalités entre fonctions. Une telle partie est morcelable, lorsqu'elle est compacte, d'après [22], 3.2. Dans ce cas, nous retrouvons exactement l'énoncé original de J. Frisch.
- b) Si Y est un espace k -analytique et K une extension de k , nous noterons Y_K l'espace K -analytique obtenu par extension du corps de base. Nous dirons qu'un morphisme φ entre espaces k -analytiques est une immersion s'il se décompose sous la forme

$$\varphi : Z \hookrightarrow Y_K \rightarrow Y,$$

où Z désigne un fermé de Zariski d'un domaine analytique de Y_K et s'il induit un homéomorphisme de Z sur son image Z' et des isomorphismes entre les corps résiduels complétés en tous les points de Z' . L'image de toute immersion définit une partie morcelable. Les fibres des morphismes entre espaces k -analytiques rentrent, par exemple, dans ce cadre. Remarquons qu'elles ne sont pas semi-analytiques, en général.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ahmed Abbes and Takeshi Saito. Ramification of local fields with imperfect residue fields. *Amer. J. Math.*, 124(5) :879–920, 2002.
- [2] Constantin Bănică and Octavian Stănășilă. *Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes. Vol. 2.* Gauthier-Villars, Paris, 1977. Troisième édition, Traduit du roumain, Collection “Varia Mathematica”.
- [3] Wolfgang Bartenwerfer. Einige Fortsetzungssätze in der p -adischen Analysis. *Math. Ann.*, 185 :191–210, 1970.
- [4] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, volume 33 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [5] Vladimir G. Berkovich. Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (78) :5–161 (1994), 1993.
- [6] Vladimir G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. *Invent. Math.*, 115(3) :539–571, 1994.
- [7] Vladimir G. Berkovich. Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible. *Invent. Math.*, 137(1) :1–84, 1999.
- [8] Vladimir G. Berkovich. Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible. II. In *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, pages 293–370. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004.
- [9] Pierre Berthelot. Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres, première partie. Prépublication de l’IRMAR 96-03, 1996.

- [10] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Géométrie algébrique réelle*, volume 12 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [11] Siegfried Bosch, Ulrich Guntzer, and Reinhold Remmert. *Non-Archimedean analysis*, volume 261 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. A systematic approach to rigid analytic geometry.
- [12] Siegfried Bosch and Werner Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces. *Math. Ann.*, 295(2) :291–317, 1993.
- [13] Siegfried Bosch and Werner Lütkebohmert. Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques. *Math. Ann.*, 296(3) :403–429, 1993.
- [14] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. Formal and rigid geometry. III. The relative maximum principle. *Math. Ann.*, 302(1) :1–29, 1995.
- [15] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem. *Invent. Math.*, 119(2) :361–398, 1995.
- [16] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXX. Algèbre commutative. Chapitre 5 : Entiers. Chapitre 6 : Valuations*. Actuelles Scientifiques et Industrielles, No. 1308. Hermann, Paris, 1964.
- [17] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXI. Algèbre commutative. Chapitre 7 : Diviseurs*. Actuelles Scientifiques et Industrielles, No. 1314. Hermann, Paris, 1965.
- [18] Henri Cartan. Faisceaux analytiques sur les variétés de Stein : démonstration des théorèmes fondamentaux. In *Séminaire Henri Cartan*, volume 4, exposé n° 19, pages 1–15, 1951–1952.
- [19] Adrien Douady. Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(fasc. 1) :1–95, 1966.

- [20] Antoine Ducros. Étude de certaines propriétés locales et globales des espaces de Berkovich. Prépublication de l'IRMAR 03-41, 2003.
- [21] Antoine Ducros. Image réciproque du squelette par un morphisme entre espaces de Berkovich de même dimension. *Bull. Soc. Math. France*, 131(4) :483–506, 2003.
- [22] Antoine Ducros. Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p -adique. *Manuscripta Math.*, 111(4) :513–528, 2003.
- [23] Antoine Ducros. Espaces analytiques p -adiques au sens de Berkovich. *Sém. Bourbaki*, (Exp. 958), 2006.
- [24] Antoine Ducros. Géométrie analytique p -adique : la théorie de Berkovich. *Gaz. Math.*, (111) :12–27, 2007.
- [25] Helmut P. Epp. Eliminating wild ramification. *Invent. Math.*, 19 :235–249, 1973.
- [26] Jacques Frisch. Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes. *Invent. Math.*, 4 :118–138, 1967.
- [27] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Theory of Stein spaces*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the German by Alan Huckleberry, Reprint of the 1979 translation.
- [28] Elmar Grosse-Klönne. Rigid analytic spaces with overconvergent structure sheaf. *J. Reine Angew. Math.*, 519 :73–95, 2000.
- [29] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (20) :259, 1964.
- [30] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (24) :231, 1965.
- [31] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (28) :255, 1966.

- [32] Alexandre Grothendieck and Jean Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas.*, volume 8 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [33] Robert C. Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [34] David Harbater. Convergent arithmetic power series. *Amer. J. Math.*, 106(4) :801–846, 1984.
- [35] Reinhardt Kiehl. Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. *Invent. Math.*, 2 :256–273, 1967.
- [36] Michel Lazard. Les zéros des fonctions analytiques d’une variable sur un corps valué complet. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (14) :47–75, 1962.
- [37] Werner Lütkebohmert. Der Satz von Remmert-Stein in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. *Math. Z.*, 139 :69–84, 1974.
- [38] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*, volume 56 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., second edition, 1980.
- [39] Jun-iti Nagata. *Modern dimension theory*. Bibliotheca Mathematica, Vol. VI. Edited with the cooperation of the “Mathematisch Centrum” and the “Wiskundig Genootschap” at Amsterdam. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
- [40] Joseph Oesterlé and Layla Pharamond dit d’Costa. Fermetures intégrales des $\overline{\mathbb{Z}}$ -algèbres. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 12(2) :147–159, 1997.
- [41] Jérôme Poineau. Un résultat de connexité pour les variétés analytiques p -adiques. Privilège et noethérianité. À paraître dans *Compositio. Math.*
- [42] Michel Raynaud. *Anneaux locaux henséliens*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 169. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

- [43] Michel Raynaud. Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, In *Table Ronde d'Analyse non archimédienne (Paris, 1972)*, pages 319–327. Bull. Soc. Math. France, Mém. No. 39–40. Soc. Math. France, Paris, 1974.
- [44] Jean-Pierre Serre. *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [45] Yum-Tong Siu. Noetherianness of rings of holomorphic functions on Stein compact series. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 21 :483–489, 1969.
- [46] John Tate. Rigid analytic spaces. *Invent. Math.*, 12 :257–289, 1971.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	i
PREMIÈRE PARTIE. Espaces de Berkovich sur Z	1
1. Espaces analytiques sur un anneau de Banach	3
1.1. Définitions	5
1.1.1. Spectre d'un anneau de Banach	5
1.1.2. Espace affine analytique	8
1.1.2.1. Espace affine sur un corps archimédien	9
1.1.2.2. Droite sur un corps trivialement valué	9
1.1.2.3. Droite sur un corps ultramétrique quelconque	12
1.1.3. Faisceau structural	15
1.1.4. Parties compactes rationnelles	17
1.1.5. Flot	22
1.2. Algèbres de séries convergentes	29
1.2.1. Algèbres globales de polydisques et polycouronnes	29
1.2.2. Limites d'algèbres de disques	35
1.2.2.1. Théorèmes de Weierstraß	36
1.2.2.2. Propriétés	42
1.2.3. Limites d'algèbres de couronnes	47
1.3. Anneaux locaux	53
1.3.1. Existence locale de racines	53
1.3.2. Description	58

1.3.2.1. Systèmes fondamentaux de voisinages sur la droite affine	58
1.3.2.2. Points déployés	65
1.3.3. Un exemple	67
2. Espace analytique sur un anneau d'entiers de corps de nombres	71
2.1. Spectre d'un anneau d'entiers de corps de nombres	73
2.1.1. Description ensembliste	73
2.1.2. Faisceau structural	77
2.1.2.1. Parties compactes	77
2.1.2.2. Parties ouvertes	82
2.2. Espace affine	85
2.2.1. Fibres internes	85
2.2.2. Dimension topologique	89
2.2.3. Points rigides des fibres	91
2.2.3.1. Voisinages sur la droite	91
2.2.3.2. Étude de la topologie	97
2.2.3.3. Étude des anneaux locaux	104
2.2.4. Anneaux de sections globales	105
2.3. Droite affine	113
2.3.1. Points de type 3	113
2.3.1.1. Fibres extrêmes	113
2.3.1.2. Fibre centrale	116
2.3.2. Points de type 2	117
2.3.2.1. Fibres extrêmes	117
2.3.2.2. Fibre centrale	122
2.3.3. Résumé	129
2.3.4. Cohérence	130
3. Espaces de Stein	135
3.1. Théorèmes A et B pour les couronnes fermées des fibres	137
3.1.1. Fibres internes	137
3.1.2. Fibre centrale	138
3.1.3. Fibres extrêmes	142

3.2. Théorèmes A et B pour les couronnes fermées	145
3.2.1. Lemmes de Cousin et Cartan	145
3.2.2. Attachement de sections d'un faisceau	154
3.2.3. Démonstration	161
3.3. Théorèmes A et B pour les couronnes ouvertes	165
3.3.1. Théorèmes généraux	165
3.3.2. Fermeture des modules	166
3.3.3. Exhaustions de Stein	181
4. Applications	187
4.1. Problèmes de Cousin arithmétiques	189
4.1.1. Problème de Cousin multiplicatif	189
4.1.2. Problème de Cousin additif	192
4.1.3. Théorème de Poincaré	196
4.2. Noethérianité d'anneaux de séries arithmétiques	199
4.2.1. Sous-variétés analytiques	199
4.2.2. Théorème de Frisch	201
4.2.3. Séries arithmétiques	204
SECONDE PARTIE. Un résultat de connexité pour les variétés	
analytiques p -adiques. Privilège et noethérianité.	209
Introduction	211
1. Connexité des fibres d'un morphisme	217
2. Loin de l'hypersurface	227
3. Élimination des multiplicités	233
4. Démonstration des théorèmes annoncés	239
5. Privilège	247
A. Un analogue p -adique du théorème de J. Frisch	251
Bibliographie	257

ESPACES DE BERKOVICH SUR \mathbf{Z}

Résumé

À la fin des années quatre-vingts, Vladimir G. Berkovich a introduit une notion d'espace analytique sur tout anneau de Banach. Nous nous proposons, dans cette thèse, d'étudier le cas particulier où l'anneau de Banach considéré est l'anneau des entiers \mathbf{Z} ou, plus généralement, un anneau d'entiers de corps de nombres.

La majeure partie de notre travail est consacrée à la droite analytique. Elle jouit de propriétés semblables à celles des espaces analytiques complexes d'un point de vue topologique, mais également algébrique, son faisceau structural étant cohérent. En outre, en termes cohomologiques, ses disques se comportent comme des espaces de Stein.

Pour finir, nous exposons quelques applications des résultats géométriques énoncés auparavant. Nous obtenons ainsi quelques propriétés de classes de fonctions particulières, telles les fonctions holomorphes sur un disque contenu dans \mathbf{C} et dont le développement en un point est à coefficients entiers.

BERKOVICH SPACES OVER \mathbf{Z}

Abstract

At the end of the eighties, Vladimir G. Berkovich defined a notion of analytic space over any Banach ring. Our thesis is devoted to the special case where this Banach ring is \mathbf{Z} or the ring of integers of a number field.

Most of our work deals with the analytic line. We manage to show it shares many properties with the usual complex analytic spaces : the topological space is locally arcwise connected, the local rings are Henselian and Noetherian, the structure sheaf is coherent, the disks have no coherent cohomology, etc.

At last, we explain how these general results can be used to derive some properties of convergent arithmetic power series, for example holomorphic functions over \mathbf{C} whose developpement in one prescribed point has integer coefficients.