Processus à sauts et risque de défaut

Christophette Blanchet-Scalliet

Université D'Evry Val D'Essonne

UFR de Sciences Fondamentales et Appliquées

THESE

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université d'Evry Val d'Essonne

Discipline : Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement par

Christophette Blanchet-Scalliet

le 19 Octobre 2001

Titre :

PROCESSUS A SAUTS ET RISQUE DE DEFAUT

Jury

Marie-Claire QUENEZ	Université de Marne la Vallée	Président
Monique JEANBLANC	Université d'Evry	Directeur
Jean-Paul DECAMPS	Université de Toulouse I	Rapporteur
Axel GRORUD	Université de Provence	Rapporteur
Olivier SCAILLET	Université de Louvain	Rapporteur
Jean-Luc PRIGENT	Université de Cergy	
Francesco RUSSO	Université de Paris XIII	
Nizar TOUZI	Crest	

Cette thèse a débuté lorsque, à la recherche d'un directeur pour mon mémoire de DEA et pour une thèse en finance et sur les conseils des mes professeurs de Rennes, j'ai pris contact avec Monique Jeanblanc.

Son accueil chaleureux dès notre première rencontre et la confiance qu'elle m'a témoignée tout au long de cette thèse, malgré mon absence pour congé de maternité, ont largement contribué à la réussite de ce travail. Pendant ces trois années, elle a toujours su être à l'écoute, disponible, acceptant de répondre à mes questions. Ses conseils m'ont permis de découvrir de larges domaines de la finance.

Je l'en remercie vivement.

Je tiens également à remercier Jean-Paul Decamps, Axel Grorud et Olivier Scaillet d'avoir accepté d'être rapporteurs. Le temps qu'ils y ont passé et les remarques faites m'ont permis d'amélioer ce travail.

Merci aussi à Jean-Luc Prigent, Marie-Claire Quenez, Francesco Russo et Nizar Touzi de participer à mon jury.

La bonne ambiance qui règne au département de Mathématiques a rendu ces trois années agréables. Je tiens à remercier particulièrement Shiqi Song, Nadine Bellamy, Stéphane Villeneuve et Nourredine Bounechada pour leur aide.

Ces remerciements ne sauraient être sans un petit mot pour ceux avec qui je partage le reste de mon temps en dehors du labo. Tout d'abord à mon mari, Fabien, qui par sa présence et son soutien m'a permis de mener à bout ce travail. Enfin, mes derniers mots seront pour Vianney qui fut depuis un an et demi mon plus fidèle stimulant. Je le remercie d'avoir accepté de passer des heures à jouer sagement assis à coté de l'ordinateur, (ô combien attirant !) sans me déranger

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'utilisation des probabilités pour la modélisation financière date du début du vingtième siècle. En 1900, L. Bachelier [1] définit le mouvement brownien pour bâtir une "théorie de la spéculation". Cet outil mathématique n'est cependant utilisé de manière systématique que plusieurs décennies après. En 1973, Black et Scholes proposent un modèle où les prix suivent une loi lognormale. Depuis, en temps continu, la majorité des modèles utilisés en finance sont des modèles gaussiens.

Cependant, ces modèles ne tiennent pas compte de la présence de sauts dans l'évolution des prix. De nombreux auteurs ont utilisé les processus à sauts pour rendre compte de ces faits. On s'intéresse depuis quelques années à des modèles où les prix sont donnés par

$$dX_t = X_{t^-}(\widetilde{\alpha}_t dt + \widetilde{\sigma}_t dW_t + \widetilde{\phi}_t d\widetilde{M}_t)$$

où W est un mouvement brownien et $\widetilde{M}$ la martingale compensée d'un processus de Poisson.

L'un des problèmes majeurs en finance est celui de la valorisation d'actifs financiers. Or dans ce cadre, l'introduction de processus à sauts pose le problème de l'incomplétion des marchés. En effet, la martingale $(\int_0^t \widetilde{\sigma}_s dW_s + \widetilde{\phi}_s d\widetilde{M}_s, t \geq 0)$ ne possède en général pas la propriété de représentation prévisible. Cette situation, conduisant à une fourchette de prix et à l'impossibilité de construire une couverture parfaite, peut être évitée en construisant un processus mixte (cf. [19]) où $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\phi}$ vérifient

$$\widetilde{\sigma}_t \widetilde{\phi}_t = 0 \tag{1.1}$$

et sont ajustés de façon à ce que la martingale $(\int \widetilde{\sigma}_t dW_t + \widetilde{\phi}_t d\widetilde{M}_t)_t$ ait la propriété de représentation prévisible.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude d'un modèle de marché complet dans lequel la dynamique de prix de l'actif S est dirigée par une diffusion mixte vérifiant la condition (1.1).

On considère un marché financier constitué d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué S tels que

$$dS_t^0 = S_t^0 r(t) dt \qquad S_0^0 = 1 \qquad 0 \leq t \leq T \tag{1.2}$$

et

$$\begin{cases} dS_t &= S_{t^-}(\mu_t dt + \sigma_t dY_t^{(\alpha)}) \qquad 0 \le t \le T \\ S_0 &= s_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

où T est un horizon fini. La martingale $Y^{(\alpha)}$ est solution de l'équation de structure

$$d[Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}]_t = \alpha_t^2 dt + \phi_t dY_t^{(\alpha)}, 0 \le t \le T \tag{1.4}$$

où ϕ et α sont deux fonctions déterministes bornées définies de $[0, \infty]$ dans $\mathbb{R}$ (resp. de $[0, \infty]$ dans $\mathbb{R}_+^*$) Cette modélisation a été introduite dans [11].

La complétion du marché est assurée dès que la martingale $Y^{(\alpha)}$ possède la propriété de représentation prévisible. Nous établissons cette propriété et nous caractérisons l'unique martingale mesure équivalente. Dans le cas d'un call européen, nous montrons qu'il existe une expression du type Black-Scholes pour le prix et nous explicitons ensuite la stratégie de couverture.

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé) ont été introduites par Pardoux [17] et Peng [18] dans le cadre mathématique. Leur utilisation en modélisation financière a permis de résoudre des problèmes d'optimisation. Le troisième paragraphe de cette partie est consacré à l'étude des solutions de l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante

$$\begin{cases} -dS_t &= f(t, S_t, H_t)dt - H_t dY_t^{(\alpha)} \\ S_T &= \xi. \end{cases} \tag{1.5}$$

Nous énonçons un théorème d'existence de solutions et un résultat de comparaison pour les solutions de l'équation (1.5). Ces résultats nous permettent de résoudre dans le quatrième paragraphe le problème d'optimisation de richesse/consommation suivant

$$V(x) = \max_{(\pi,c)} E[\int_0^T U_1(t, c(t))dt + U_2(X_T^{x,\pi,c})].$$

Enfin, nous donnons la loi du temps d'atteinte d'une barrière pour le processus S.

La deuxième partie de ce travail est consacrée à l'étude d'une modélisation du risque de défaut. Depuis l'introduction des problèmes de modélisation du risque de défaut, deux types de modèles coexistent. Dans la première classe due à Merton [16], appelée modèle de structure, le défaut apparaît comme le premier instant où le prix d'une firme passe en-dessous d'une barrière. En particulier, l'instant de défaut est un temps d'arrêt dans la filtration des prix.

La seconde classe de modèle est "le modèle à intensité"(Duffie et Lando [7], Duffie Schroder et Skiadas [8], Jarrow-Turnbull [10], Madan et Unal [15]). Le défaut dans ce cas est modélisé comme le premier saut d'un processus ponctuel avec une intensité stochastique.

Dans les deux cas, les auteurs ne distinguent cependant pas l'information liée au défaut de l'information du marché.

Nous proposons une modélisation de l'instant de défaut qui différencie ces deux types d'information. Cette approche présente d'une part l'intérêt de faire le lien entre les deux approches décrites précédemment, et d'autre part la possibilité de comparer les marchés "sans" et "avec" défaut.

Considérons un marché financier construit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, constitué de n actifs risqués S^i, $i = 1, ..., n$ et d'un actif sans risque S^0.
L'information $\mathcal{F}_t$ disponible sur ce marché à la date t est contenue dans la connaissance des prix des actifs. On a donc

$$\mathcal{F}_t \subseteq \sigma(S^i_s,\ S^0_s,\ s \leq t,\ i = 1, .., n).$$

Les cas particuliers que nous étudions par la suite sont les cas où la filtration $\mathbb{F}$ est la filtration grossière (chapitre 4), la filtration des prix, la filtration des prix observés à des instants discrets (chapitres 6, 8, 9).
L'instant de défaut dans le marché est modélisé par une variable aléatoire τ, supposée $\mathcal{G}$-mesurable et positive. Le processus de défaut est défini par le processus croissant continu à droite

$$N_t = 1_{\{\tau \leq t\}}. \tag{1.6}$$

La filtration complétée engendrée par le processus de défaut est notée $(\mathcal{H}_t)$,

$$\mathcal{H}_t = \sigma(N_s, s \leq t).$$

On remarque que τ est un $\mathbb{H}$-temps d'arrêt, et donc un $\mathbb{I}-$temps d'arrêt pour toute filtration $\mathbb{I}$ contenant $\mathbb{H}$. De plus, $\mathbb{H}$ est la plus petite filtration faisant de τ un temps d'arrêt.
Nous supposons que les agents financiers sont avertis lorsque le défaut se produit.
Par conséquent, l'information que les agents possèdent à la date t est représentée par la tribu $\mathcal{G}_t$ où

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t. \tag{1.7}$$

La filtration $\mathbb{G}$ est la plus petite filtration contenant $\mathbb{F}$ telle que τ est un $\mathbb{G}-$temps d'arrêt.

Le problème de modélisation consiste à comprendre le lien entre le temps de défaut τ et la filtration $\mathbb{F}$. Il s'agit donc de récrire les dynamiques des prix dans la filtration $\mathbb{G}$, filtration du monde avec défaut. En particulier se posent les questions suivantes :
- les prix restent-ils des $\mathbb{G}$-semi martingales ?
- sous quelles hypothèses les $\mathbb{F}$-martingales restent-elles des $\mathbb{G}$-martingales ?
- comment calculer les espérances conditionnelles dans la filtration $\mathbb{G}$?
- comment évaluer le prix d'actifs contingents, compléter le marché s'il n'est pas complet ?

Les trois premiers problèmes ont été largement étudiés dans les travaux de Jeulin [12], Yor [21], Dellacherie ([5] ou [6]).

Filtration grossière

Nous commençons l'étude de ce problème par le cas particulier où la filtration $\mathbb{F}$ est la filtration grossière. Le chapitre 4 est consacré à l'étude de ce cas.

Nous remarquons que $\mathbb{G} = \mathbb{H}$. Ceci est notamment réalisé en information partielle (cf [7]). Cette situation présente deux intérêts majeurs. Premièrement, les calculs peuvent se mener facilement "à la main". De plus, la simplicité de la situation permet de bien comprendre la problématique.
Dans le second paragraphe, nous donnons la valeur d'un zéro-coupon soumis au défaut. Nous montrons que l'évaluation d'un tel actif se fait au moyen de la fonction de répartition de τ. Par conséquent, la calibration des paramètres nécessite de pouvoir retrouver à partir de données du marché la fonction de répartition. Si des zéro-coupons de toutes maturités sont traités sur le marché, nous établissons que la fonction de répartition est obtenue à partir des prix des zéro-coupons.

L'instant de défaut est un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt

Lors de la modélisation de l'instant de défaut, il peut arriver que la variable aléatoire τ soit un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt. Ce cas se produit lorsque $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$. Alors, la filtration $\mathbb{G}$ et la filtration $\mathbb{F}$ coïncident.
Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'évaluation d'actifs contingents dans ce cadre. Les techniques de calcul de la théorie du grossissement de filtrations restent valables dans ce cas. Mais en général, les égalités sont trivialement vérifiées et n'apportent pas de solution au problème d'évaluation d'actifs contingents soumis au défaut. Nous montrons qu'une solution peut être apportée en utilisant l'intensité du temps d'arrêt. Après avoir énoncé les conditions d'existence de l'intensité, nous rappelons la condition due à Duffie ([7], [8]) pour l'évaluation des actifs contingents. Enfin nous montrons que, lorsque τ est le temps d'atteinte d'une barrière d'un processus S qui suit l'équation (1.3), on peut sous certaines conditions déterminer l'intensité du temps d'arrêt.

Hypothèse (H)

Le chapitre 6 est consacré au cas où la filtration $\mathbb{F}$ est l'observation des prix des actifs $S^i, i = 0, ..., n$ c'est-à dire

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S_s^i,\ S_s^0,\ s \leq t,\ i = 1, ..., n).$$

La filtration $\mathbb{F}$ et la filtration $\mathbb{G}$ ne sont à priori pas les mêmes.
Nous précisons les hypothèses $(\mathbf{H})$ et $(\mathbf{G})$ qui impliquent la conservation de la propriété de martingales lors d'un grossissement de filtration. Nous rappelons ensuite le lien entre l'hypothèse $(\mathbf{H})$ et le fait que τ soit le temps d'atteinte d'une barrière stochastique ; ceci nous permet de donner des exemples d'instants de défaut où l'on se trouve dans cette situation.
Les questions de complétion de marché sont fortement liées à la question de propriété de représentation prévisible. Ainsi nous établissons, dans le deuxième paragraphe, un théorème de représentation prévisible pour des $\mathbb{G}-$martingales du type $E[h_\tau/\mathcal{G}_t]$ où h est un processus $\mathbb{F}-$prévisible. Ce résultat nous permet de donner la dynamique d'un zéro-coupon et d'expliciter la couverture d'actifs contingents (chapitre 9).
Nous étudions la stabilité de l'hypothèse $(\mathbf{H})$. Nous montrons que sous des conditions peu contraignantes sur les coefficients du processus S, l'hypothèse $(\mathbf{H})$ est vérifiée sous toute martingale mesure équivalente.
Enfin nous donnons une justification financière de l'hypothèse $(\mathbf{H})$ en étudiant la relation entre l'absence d'arbitrage et la propriété d'invariance des martingales (hypothèse $(\mathbf{H})$).

Instants de défaut multiples

La présence d'un unique temps de défaut est peu réaliste et la réalité est souvent plus complexe. En général, le marché est constitué de plusieurs actifs qui sont chacun soumis à un risque de défaut. C'est pourquoi il est intéressant de généraliser les résultats du chapitre précédent en présence de plusieurs temps de défaut. Comme précédemment, nous introduisons les temps de défaut comme des variables aléatoires positives sur un espace probabilisé.

Soient $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé avec une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ et $\tau_1, ..., \tau_n$ des temps aléatoires définis sur cet espace.

Pour $i = 1, ..., n$, nous posons

$$N_t^i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

et nous notons $\mathbb{H}^i$ la filtration engendrée par le processus N^i. Nous introduisons la filtration $\mathbb{G}$ définie par

$$\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1 \vee ... \vee \mathbb{H}^n,$$

et les filtrations $\mathbb{G}^i$ définies par

$$\mathbb{G}^i = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}^i.$$

Dans le premier paragraphe, nous traitons quelques exemples qui permettent de comprendre les questions qui apparaissent lors de la présence de plusieurs temps de défaut. En particulier nous montrons que la connaissance de la loi du minimum des temps de défaut si l'on s'arrête à l'arrivée du premier instant de défaut, et de la loi des temps ordonnés dans le cas contraire, est indispensable pour mener les calculs. Dans le cas où l'on s'intéresse au premier instant où un défaut se produit, l'évaluation d'actifs contingents soumis au défaut se fait à l'aide du processus de hasard du minimum.

Dans le paragraphe suivant, nous donnons des conditions pour déterminer le processus de hasard et le $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$-martingale processus de hasard du minimum.

Nous avons montré dans le chapitre 6 que la structure du marché pouvait imposer que la propriété $(\mathbf{H})$ était vérifiée. Le troisième paragraphe est consacré à l'étude de la conservation de l'hypothèse $(\mathbf{H})$ lorsqu'il y a plusieurs temps de défaut. Nous énonçons une condition sur les temps de défaut qui implique que la propriété $(\mathbf{H})$ est vraie entre les filtrations $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$.

Cas général

Le chapitre 6 nous a permis de montrer que la structure du $\mathcal{G}_T$-marché, en particulier la nature des actifs contingents négociables, imposait une hypothèse très forte sur la conservation des martingales de la filtration $\mathbb{F}$ en $\mathbb{G}-$martingales. Cettte hypothèse n'est plus nécessaire si l'on considère que les actifs ne sont négociables que jusqu'en τ et que les seuls actifs contingents disponibles sont de la forme $X1_{T<\tau}$ et $h_\tau 1_{\tau \leq T}$. L'hypothèse $(\mathbf{H})$ n'est pas non plus vérifiée si nous observons les prix des actifs S en temps discrets.

Dans un premier temps, nous montrons dans un contexte d'observation à temps discrets des prix, que le processus F n'est jamais croissant. Ainsi ni l'hypothèse $(\mathbf{H})$, ni l'hypothèse $(\mathbf{G})$ ne sont vérifiées.

Dans le cas général, les résultats sur la décomposition des $\mathbb{F}-$martingales dans la filtration $\mathbb{G}$ ont été établis dans la théorie du grossissement de filtration dans les travaux de Jeulin [12]. Nous commençons, dans le second paragraphe, par rappeler ces résultats, ainsi que des résultats nous permettant de calculer les espérances conditionnelles dans la filtration $\mathbb{G}$.

Ensuite, nous généralisons le théorème de représentation établi dans le chapitre 6 pour les $\mathbb{G}-$martingales du type $E[h_\tau / \mathcal{G}_t]$ où h est un processus $\mathbb{F}-$prévisible. Ceci nous permet de montrer que le marché

considéré est incomplet si l'on considère uniquement des actifs du $\mathcal{F}_T$-marché. Ce marché peut néanmoins être complété par un zéro-coupon avec défaut dont nous donnons la dynamique dans le cas où $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne.
Le dernier paragraphe est consacré à des exemples de temps de défaut pour lesquels la propriété (**H**) n'est pas vérifiée.

Complétion, fourchette des prix dans le marché avec défaut

Ce chapitre est consacré au problème de complétion dans le cas où la filtration $\mathbb{F}$ est la filtration des prix $S^i, i = 0, ..n$ et où l'hypothèse (**H**) est vérifiée. Si les agents ne peuvent investir que dans des actifs sans défaut, nous avons vu précédemment que la présence d'un risque de défaut entrainait l'incomplétion du marché.
Sous l'hypothèse que le marché considéré est non arbitré, il existe une infinité de martingales mesures équivalentes. Dans un marché ne présentant pas d'opportunités d'arbitrage, l'évaluation d'un actif contingent se fait au moyen d'une martingale mesure équivalente. Par conséquent, nous pouvons définir une infinité de prix pour chaque actif contingent.
Un premier pas consiste à déterminer la fourchette des prix. Dans le troisième paragraphe, nous déterminons la fourchette des prix pour une option européenne, lorsque la dynamique des actifs risqués est dirigée par un $\mathbb{F}-$mouvement brownien et que l'information disponible pour les agents est la filtration $\mathbb{G}= (\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ définie par (1.7).
Pour réduire la fourchette des prix, l'agent peut être amené à chercher une mesure qui minimise une certaine distance entre la probabilité historique et la martingale mesure équivalente. Nous caractérisons dans le quatrième paragraphe d'une part la probabilité minimale, et d'autre part la probabilité du minimum d'entropie. Nous établissons qu'elles coïncident avec le prolongement de la martingale mesure équivalente du $\mathcal{F}_T-$marché.
Un autre problème important en marché incomplet est de déterminer la dynamique d'actifs pouvant compléter le marché. Nous montrons en utilisant les théorèmes de représentation établis dans le chapitre 6 que nous pouvons compléter le marché par un zéro-coupon avec défaut dont nous précisons la dynamique ; nous caractérisons ensuite le portefeuille de couverture d'un actif contingent soumis au défaut.

Optimisation

Nous nous intéressons dans ce chapitre à deux problèmes d'optimisation. Premièrement, la présence d'un instant de défaut entraine l'incomplétion du $\mathcal{G}_T-$marché et l'existence d'une infinité de martingales mesures équivalentes. Cette multitude de prix peut être évitée si l'agent utilise une fonction d'utilité qui caractérise son attitude face au risque. Dans ce cas, l'agent est amené à choisir une martingale mesure équivalente particulière pour optimiser sa richesse. Nous nous plaçons dans le cas où la filtration $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne et est la filtration des prix $S^i, i = 0, ..n$ et où l'hypothèse (**H**) est vérifiée.
Nous considérons un agent dont l'attitude face au risque est caractérisée par une fonction d'utilité U, qui investit de manière autofinançante sa richesse entre les actifs risqués et l'actif sans risque. Nous cherchons à résoudre le problème de maximisation de l'espérance de l'utilité de la richesse suivant

$$V^{\mathbb{G}}(t,x) = \sup_{\pi \in A^{\mathbb{G}}(t,x)} E[U(X_T^\pi) \;/\; X_t^\pi = x],$$

où $\mathcal{A}^{\mathbb{G}}(t,x)$ est l'ensemble des portefeuilles admissibles $\mathbb{G}-$prévisibles. En marché incomplet, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'optimisation de portefeuille (par exemple Karatzas [13] lorsque la dynamique des actifs est continue et Bellamy [3] dans le cas de diffusion mixte).
Nous établissons l'existence d'une unique solution au problème d'optimisation. Nous obtenons que la stratégie optimale détermine une unique martingale mesure équivalente qui coïncide avec la martingale mesure équivalente existant sur le $\mathcal{F}_T$-marché et avec la probabilité de Davis.
Pour réduire la fourchette des prix, Hodges et Neuberger [9] ont introduit une méthode de pricing via la fonction d'utilité de l'agent. Cette méthode revient à déterminer le plus petit montant p qu'il faut ajouter à la richesse initiale x afin d'espérer la même utilité que s'il n'avait pas à vendre l'actif contingent à la date T. Des travaux de Rouge et El Karoui [20] pour un marché dirigé par un mouvement brownien en présence de contraintes et Collin-Dufresne et Hugonnier [4] en présence d'un risque de défaut ont donné une caractérisation du prix de Hodges . Dans notre modèle, pour des actifs contingents particuliers et lorsque le temps de défaut τ est indépendant de la filtration $\mathcal{F}_\infty$, nous caractérisons le prix de Hodges à l'aide de la solution d'un problème d'optimisation. Dans le cas d'une fonction d'utilité exponentielle, nous relions le prix de Hodges et le prix de Davis.
En étudiant le problème de modélisation du défaut, il est naturel de se poser le problème d'optimisation lorsque les agents ne peuvent investir que jusqu'au temps de défaut. Dans la dernière section, nous étudions le problème d'optimisation avec un horizon aléatoire suivant

$$V(t,x) = \sup_{\pi \in A^{\mathbb{F}}(t,x)} E[U(X^\pi_{T\wedge\tau}) \ / \ X^\pi_{t\wedge\tau} = x],$$

Ce problème peut se poser de manière plus générale que la présence d'un défaut. C'est par exemple le problème d'un agent qui cherche à optimiser sa richesse à chaque instant. Des travaux de Karatzas [14] ont étudié ce problème dans le cadre d'un marché complet et lorsque l'horizon est un temps d'arrêt pour la filtration des prix. Nous étudions le cas plus général où le temps τ n'est plus forcément un temps d'arrêt.
Nous montrons que ce problème revient à résoudre un problème d'optimisation dans le $\mathcal{F}_T-$marché qui est complet. Nous caractérisons la solution de ce problème qui dépend de la loi conditionnelle de τ par rapport à $\mathcal{F}_t$.

Une partie des résultats de la seconde partie a été regroupée dans l'article (C. Blanchet-Scalliet, M. Jeanblanc, Information et risque de défaut, à paraître dans le journal de la Société Française de Statistique) et dans une prépublication (C. Blanchet-Scalliet, M. Jeanblanc, Hasard rates for credit risk and hedging defaultable contingent claims, prépublication 145 de l'université d'Evry).
On trouvera à la fin de cette thèse une bibliographie générale et un index des notations et des hypothèses.

Bibliographie

[1] Bachelier L. : Théorie de la spéculation, (Thèse 1900), *Annales de l'Ecole Normale Supérieure,3eme série, Tome XVII,* 21-86, réédité par Gabay.

[2] Bellamy N. : Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus, *Thèse, Université d'Evry,* 1999.

[3] Bellamy N. : Wealth Optimisation in an Incomplete Market driven by a Jump-Diffusion Process, *Journal of Mathematical Economica,* 35, 259-287, 2001.

[4] Collin Dufresne P., Hugonnier J. : On the Pricing & Hedging of Contingent Claims in the Pressence of Extraneous Risks, *Prébublication,* 2001.

[5] Dellacherie C. : Un exemple de la théorie générale des processus, *Séminaire de probabilités IV, Lecture Notes in Math. 124*, 60-70, Springer-verlag, Berlin, 1970.

[6] Dellacherie C. : *Capacités et processus stochastiques,* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[7] Duffie D., Lando D. : Term structure of credit spreads with incomplete accounting information, *preprint, CAF Copenhagen*, 1997.

[8] Duffie D., Schroder M., Skiadas C. : Recursive valuation of defaultable securities and the timing resolution of uncertainty, *Annals of Applied Probability*, 6,1075-1090, 1997.

[9] Hodges S. D., Neuberger A. : Optimal Replication of Conntingent Claims under Transaction Costs, *Rev. Futur Markets* 8, 222-239, 1989.

[10] Jarrow R., Turnbull S. : Pricing options on financial securities subject to default risk, *J. Finance* 50, 53-86, 1995.

[11] Jeanblanc M, Privault N : Complete Market with Poisson and Brownian Components, *Prépublication, Université D'Evry,* 1999.

[12] Jeulin T. : *Semi-martingales et grossissement de filtration,* Lecture Notes in Math. 833, Springer-Verlag, Berlin, 1980

[13] Karatzas I. : *Lectures on the Mathematics of Finance,* CRM Monograph Series, Montréal, vol 8, 1996.

[14] Karatzas I., Wang H. : Utility maximization with discretionary Stopping, à paraître dans *SIAM Journal on Control & Optimisation.*

[15] Madan D., Unal H. : Pricing the risk default, *Rev Derivatives Research* 2, 121-160, 1995.

[16] Merton R.C. : On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates, *Journal of Finance ,* 29, 449-470, 1974.

[17] Pardoux E, Peng S : Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equation. *Lecture Notes in CIS* 176, p 200-217, Springer, 1992.

[18] Peng S : A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Stochastics*, Vol 38, p 119-134, 1992.

[19] Protter P : *Stochastic Integration and Differential Equation.* Application of Mathematics-21, Springer-Verlag, 1990.

[20] Rouge R., El Karoui N. : Pricing via Utility Maximisation and Entropy, *Mathematical Finance,* Vol 10/2, 259-276, 2000.

[21] Yor M. : *Some aspects of Brownian Motion. Part II : Some recent Martingale Problems,* Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser, 1997.

Première partie

Etude d'un marché

Chapitre 2

Un marché complet dirigé par un actif discontinu

La majorité des modèles en temps continu utilisés en finance sont des modèles où les prix sont dirigés par une équation différentielle stochastique de la forme

$$dS_t = S_t(\alpha_t dt + \sigma_t dW_t)$$

où W est un mouvement brownien.

Depuis quelques années, les processus à sauts sont utilisés et l'on s'intéresse à des modèles où les prix sont donnés par

$$dX_t = X_{t^-}(\widetilde{\alpha}_t dt + \widetilde{\sigma}_t dW_t + \widetilde{\phi}_t d\widetilde{M}_t)$$

où W est un mouvement brownien et $\widetilde{M}$ la martingale compensée d'un processus de Poisson.

L'introduction de processus à sauts pose le problème de l'incomplétion des marchés. En effet, la martingale $(\int_0^t \widetilde{\sigma}_s dW_s + \widetilde{\phi}_s d\widetilde{M}_s, t \geq 0)$ ne possède en général pas la propriété de représentation prévisible. Cette situation, conduisant à une fourchette de prix et à l'impossibilité de construire une couverture parfaite, peut être évitée en construisant un processus mixte (cf [5]) où $\widetilde{\sigma}$ et $\widetilde{\phi}$ vérifient

$$\widetilde{\sigma}_t \widetilde{\phi}_t = 0 \tag{2.1}$$

et sont ajustés de façon à ce que la martingale $(\int \widetilde{\sigma}_t dW_t + \widetilde{\phi}_t d\widetilde{M}_t)_t$ ait la propriété de représentation prévisible. Dans ce cas le marché est complet et l'on peut valoriser les actifs contingents.

Dans la suite, nous étudions un modèle de marché complet dans lequel la dynamique de prix de l'actif S est dirigée par une diffusion mixte vérifiant la condition (2.1). Cette modélisation a été introduite dans [11].

Nous nous intéressons tout d'abord à la propriété de représentation prévisible et aux prix d'options. Dans le cas d'un call européen, nous montrons qu'il existe une expression du type Black Scholes pour le prix et nous explicitons ensuite la stratégie de couverture. Dans le troisième paragraphe, nous énonçons des résultats sur l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante

$$\begin{cases} -dS_t &= f(t, S_t, H_t)dt - H_t dY_t^{(\alpha)} \\ S_T &= \xi \end{cases} \tag{2.2}$$

ce qui nous permet de résoudre dans le quatrième paragraphe un problème d'optimisation de richesse. Enfin dans le dernier paragraphe, nous donnons la loi du temps d'atteinte d'une barrière pour le processus S (Résultat que nous utilisons dans le chapitre 5).

2.1 Le Modèle

Soient ϕ et α deux fonctions déterministes bornées définies de $[0,\infty]$ dans $\mathbb{R}$ (resp. de $[0,\infty]$ dans $\mathbb{R}_+^*$) et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient W un mouvement brownien et N un processus de Poisson d'intensité $1_{\{\phi_t \neq 0\}} \frac{\alpha_t^2}{\phi_t^2}$ sous la probabilité $\mathbb{P}$. On pose $i_t = 1_{\{\phi_t = 0\}}, t \in \mathbb{R}_+$; on note
$v(t) = \int_0^t (1 - i_s) \frac{\alpha_s^2}{\phi_s^2} ds, t \in \mathbb{R}_+$ le compensateur de N et $\widetilde{M}$ la martingale compensée de N.
On suppose que $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = \infty$.
Nous construisons sur cet espace la martingale $Y^{(\alpha)}$ solution de l'équation de structure

$$d[Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}]_t = \alpha_t^2 dt + \phi_t dY_t^{(\alpha)}, 0 \leq t \leq T. \tag{2.3}$$

Pour l'existence d'une solution $Y_t^{(\alpha)}$, on peut se reporter à [7]. La martingale $Y^{(\alpha)}$ s'écrit de manière explicite en fonction de W et de N comme suit

$$dY_t^{(\alpha)} = i_t \alpha_t dW_t + (1 - i_t)\phi_t d\widetilde{M}_t.$$

On note $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle du processus $Y^{(\alpha)}$.

Pour rendre les calculs et les expressions plus lisibles, on prendra sans perte de généralité $\alpha = 1$ dans toute la suite (ce qui revient à travailler un coefficient ϕ différent).

On considère un marché financier constitué d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué S tels que

$$dS_t^0 = S_t^0 r(t) dt \qquad S_0^0 = 1 \qquad 0 \leq t \leq T \tag{2.4}$$

et

$$\begin{cases} dS_t &= S_{t^-}(\mu_t dt + \sigma_t dY_t^{(\alpha)}) \qquad 0 \leq t \leq T \\ S_0 &= s_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

où T est un horizon fini.

On fait l'hypothèse suivante

[H1][1] r, μ et σ sont des fonctions déterministes bornées, $r \geq 0$, $\sigma \neq 0$, $0 \leq t \leq T$.

[1] On trouvera à la fin de la thèse un récapitulatif de toutes les hypothèses.

Sous l'hypothèse **[H1]**, l'équation (2.5) admet pour unique solution

$$S_t = s_0 \exp[\int_0^t i_s\sigma_s dW_s + \int_0^t (\mu_s - (1-i_s)\frac{\sigma_s}{\phi_s})ds - \frac{1}{2}\int_0^t i_s\sigma_s^2 ds + \int_0^t \ln(1+\sigma_s\phi_s)dN_s].$$

On note $\lambda(t) = \int_0^t (1-i_s)\sigma_s^2 ds$ la variance de $\int_0^t (1-i_s)\sigma_s dW_s$ et $R_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$ le coefficient d'actualisation.

Une stratégie admissible est définie par un processus $\Psi = (\pi_t^0, \pi_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ représentant la richesse investie dans chaque actif au cours du temps. On suppose que π^0 est un processus adapté vérifiant $E(\int_0^T |\pi_s^0\mu_s|\, ds) < \infty$ et que π est un processus prévisible vérifiant $E(\int_0^T \pi_s^2\sigma_s^2 ds) < \infty$ et $E(\int_0^T \left|\pi_s(1-i_s)\frac{1}{\phi_s^2}\right| ds)$. Comme le processus S est continu à droite, cela signifie qu'on ne peut réagir aux sauts qu'après coup. La valeur à l'instant t de la stratégie Ψ est donnée par

$$X_t = \pi_t^0 + \pi_t$$

et on demande que la stratégie soit autofinancée, c'est-à-dire que X vérifie :

$$dX_t = \pi_t^0\frac{dS_t^0}{S_t^0} + \pi_t\frac{dS_t}{S_t},$$

ou de manière équivalente

$$dX_t \quad = \quad r(t)X_t dt + \pi_t[\mu_t - r(t)]dt + \pi_t\sigma_t dY_t^{(\alpha)}.$$

2.2 Probabilité risque-neutre et prix d'options

2.2.1 Propriété de représentation prévisible pour la martingale $Y^{(\alpha)}$

Enonçons tout d'abord un résultat général. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}_t, P)$ un espace probabilisé filtré et L une martingale locale sur cet espace. On écrit $L = L^{(c)} + L^{(d)}$ où $L^{(c)}$ est la partie martingale continue et $L^{(d)}$ la partie martingale discontinue. Pour plus de détails sur cette décomposition, on peut se reporter à [16]. On note $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$

Proposition 2.1 *: On suppose que l'on a les hypothèses suivantes :*

i) le processus L est quasi-continu à gauche et $\Delta L_t = \varkappa_t 1_{\{\Delta L_t \neq 0\}}$ avec $\varkappa$ prévisible,

ii) les mesures aléatoires $d\left\langle L^{(c)}\right\rangle, d\left\langle L^{(d)}\right\rangle$ sont étrangères,

iii) toute $\mathbb{G}$-martingale de carré intégrable continue s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport à $L^{(c)}$ et toute $\mathbb{G}$-martingale de carré intégrable discontinue s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport à $L^{(d)}$.

Alors L a la propriété de représentation prévisible (PRP en abrégé) pour la filtration $\mathbb{G}$ c'est-à-dire que toute $\mathbb{G}$-martingale de carré intégrable s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport à L.

Démonstration : Jacod-Yor montrent dans [10] qu'un processus L vérifiant les conditions i), iii) et la condition ii)bis où ii)bis Si $d\zeta_s$ désigne la projection prévisible duale de la mesure $d\eta_s(\omega) = \sum_t 1_{\{\Delta L_t(\omega)} \neq 0\}\varepsilon_t(ds)$, alors les mesures $d\zeta$ et $d\left\langle L^{(c)}\right\rangle$ sont étrangères,

possède la propriété de représentation prévisible.

Pour démontrer la proposition, il suffit de démontrer que ii) implique ii)bis.

Notons Γ le support de $d\left\langle L^{(c)}\right\rangle$, alors $\eta(\omega)(\Gamma) = 0$. Par conséquent, $\zeta(\Gamma) = 0$ et les mesures $d\zeta$ et $d\left\langle L^{(c)}\right\rangle$ sont étrangères. ■

En appliquant cette proposition à la martingale $Y^{(\alpha)}$ on obtient le théorème.

Théorème 2.2 *La martingale $Y^{(\alpha)}$ possède la propriété de représentation prévisible pour sa propre filtration.*

Démonstration : Le processus $Y^{(\alpha)}$ est quasi-continu à gauche comme somme d'un mouvement brownien et d'un processus de Poisson (cf [9] p.34) et $\Delta Y_t^{(\alpha)} = (1 - i_t)\frac{1}{\phi_t^2}1_{\{\Delta Y_t^{(\alpha)} \neq 0\}}$.

De plus, les mesures $d\left\langle Y^{(\alpha)(c)}\right\rangle = i_t dt$ et $d\left\langle Y^{(\alpha)(d)}\right\rangle = (1 - i_t)dt$ sont deux mesures étrangères.

Enfin, le couple $(W, \widetilde{M})$ a la propriété de représentation prévisible pour $\mathbb{F}$. Par conséquent, toute $\mathbb{F}-$martingale continue s'écrit comme intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien et toute $\mathbb{F}-$martingale discontinue s'écrit comme intégrale stochastique par rapport au processus de Poisson compensé.

Ainsi la condition i), ii) et iii) sont vérifiées et $Y^{(\alpha)}$ a la propriété de représentation prévisible pour sa filtration naturelle. ■

Remarque 2.3 *: On peut aussi montrer la propriété de représentation prévisible en utilisant l'équation de structure de $Y^{(\alpha)}$ et en montrant que $Y^{(\alpha)}$ a la propriété de développement en chaos.(cf [7])*

2.2.2 Probabilité martingale équivalente

La martingale $Y^{(\alpha)}$ possédant une propriété de représentation prévisible, on montre qu'il existe une mesure martingale équivalente (m.m.e en abrégé). Pour cela, on cherche une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que le prix actualisé $\widetilde{S} = RS$ soit une martingale sous $\mathbb{Q}$. On fait dans toute la suite du paragraphe l'hypothèse

[H2] : $\phi\frac{r-\mu}{\sigma\alpha^2} > -1$

Remarque 2.4 *: Cette hypothèse est nécessaire pour éviter les opportunités d'arbitrage.*

Notations :

On note $\mathcal{E}(aW)$ et $\mathcal{E}(b\widetilde{M})$ pour $b > -1$, les martingales de Doléans-Dade

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathcal{E}(aW)_t & = & \exp(\int_0^t a(s)dW_s - \frac{1}{2}a(s)^2 ds \\ \mathcal{E}(b\widetilde{M})_t & = & \exp(\int_0^t \ln(1 + b(s))dN_s - b(s)(1 - i_s)\frac{\alpha_s^2}{\phi_s^2}ds) \\ & = & \exp(-\int_0^t b(s)(1 - i_s)\frac{\alpha_s^2}{\phi_s^2}ds)\prod_{k\geq 1}(1 + \phi_{T_k}\frac{r_{T_k} - \mu_{T_k}}{\sigma_{T_k}}) \end{array}\right.$$

où les T_k sont les instants de saut du processus de Poisson.

Proposition 2.5 *: Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie par*

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}_{/\ \mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(i\frac{r - \mu}{\sigma}W)_t\mathcal{E}((1 - i)\frac{r - \mu}{\phi\sigma}\widetilde{M})_t$$

Alors le processus Z défini par

$$dZ_t = dY_t^{(\alpha)} - \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} dt$$

est une martingale sous $\mathbb{Q}$. ■

Démonstration : Le processus K défini par $dK_t = K_{t^-} \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} dY_t^{(\alpha)}$ est une $\mathbb{P}$-martingale strictement positive d'après l'hypothèse (**H2**). Le théorème de Girsanov montre que le processus Z défini par

$$dZ_t = dY_t^{(\alpha)} - \frac{1}{K_{t-}} d\left\langle K, Y^{(\alpha)} \right\rangle_t = dY_t^{(\alpha)} - \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} d\left\langle Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)} \right\rangle_t$$

est une martingale sous $\mathbb{Q}$.
Or $d\left\langle Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)} \right\rangle_s = d\left\langle \int i_t dW_t + (1-i_t)\phi_t d\widetilde{M}_t, \int i_t dW_t + (1-i_t)\phi_t d\widetilde{M}_t \right\rangle_s = i_s ds + (1-i_t)\frac{\phi_s^2}{\phi_s^2} ds = ds.$
D'où

$$dZ_t = dY_t^{(\alpha)} - \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} dt$$

On peut donc énoncer le résultat suivant.

Proposition 2.6 *: Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus de prix actualisé $\widetilde{S}$ est une martingale ainsi que la valeur actualisée de toute stratégie admissible $\widetilde{X}$.*

Démonstration : En exprimant la dynamique des prix au moyen de la $\mathbb{Q}-$martingale Z

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t^-}(\mu_t dt + \sigma_t dY_t^{(\alpha)}) \\ &= S_{t^-}(\mu_t dt + \sigma_t(dZ_t + \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} dt)) \\ &= S_{t^-}(\sigma_t dZ_t + r_t dt) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp[\int_0^t \sigma_s dW_s^{\mathbb{Q}} + \int_0^t (r_s - \frac{1}{2} i_s \sigma_s^2 - (1-i_s)(\frac{\sigma_s - \mu_s - r_s}{\phi_s}) ds + \int_0^t \ln(1 + \sigma_s \phi_s) dN_s \\ &= S_0 \exp(\int_0^t r_s ds) \mathcal{E}(i\sigma W^{\mathbb{Q}})_t \mathcal{E}((1-i)\sigma\phi \widetilde{M}^{\mathbb{Q}})_t \end{aligned}$$

où $(W^{\mathbb{Q}})_t$, $dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t - \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t} dt$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien et $(\widetilde{M}^{\mathbb{Q}})_t$, $d\widetilde{M}_t^{\mathbb{Q}} = d\widetilde{M}_t - (1-i_s)\frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t \phi_t} dt$ est une $\mathbb{Q}-$martingale.
En utilisant la formule d'Itô

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= -r_t \exp(\int_0^t -r_s ds) S_t dt + \exp(-\int_0^t r_s ds) dS_t \\ &= \widetilde{S}_{t^-} \sigma_t dZ_t \end{aligned}$$

on obtient le résultat souhaité pour le prix actualisé.
La propriété concernant la valeur actualisée d'une stratégie est alors évidente. ■

Remarque 2.7 *: La probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, telle que $\widetilde{S}$ soit une martingale, est unique. En effet soit $\mathbb{Q}'$ équivalente à $\mathbb{P}$ vérifiant cette propriété et L' la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}'$. Alors, en* *utilisant la propriété de représentation prévisible de $Y^{(\alpha)}$, $dL'_t = L'_{t^-} a_t dY_t^{(\alpha)}$. Il reste à ajuster a_t pour que $S_t e^{-\int_0^t r(s)ds}$ soit une martingale, on a nécessairement $a_t = \frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t}$.*

L'existence d'une m.m.e assure l'absence d'opportunité d'arbitrage. De plus, le marché est complet car cette probabilité est unique. (cf [8])

2.2.3 Prix d'un call

Nous considérons un actif de gain terminal H d'échéance T définie par une variable aléatoire H $\mathcal{F}_T-$mesurable de carré intégrable. Nous explicitons en particulier le prix d'un call de prix d'exercice K ce qui correspond à une option pour laquelle $H = (S_T - K)_+$.

Le prix de l'option est $V_T = E_{\mathbb{Q}}(\exp(-\int_0^T r_s ds)H)$. Nous notons

$$V_t = E_{\mathbb{Q}}(\exp(-\int_t^T r_s ds)H/\mathcal{F}_t)$$

le prix de l'option à l'instant t.

Soit $BS(x, \sigma^2, K, T) = E((x\exp(U) - K)_+)$, la fonction de Black-Scholes où U est une variable aléatoire gaussienne de variance $T\sigma^2$ et d'espérance $-T\frac{\sigma^2}{2}$. Le prix d'un call est donné par

$$E_{\mathbb{Q}}(\exp(-\int_t^T r_s ds)(S_T - K)_+/\mathcal{F}_t) \quad = \quad E_{\mathbb{Q}}(R_T^t(S_t \exp(\int_t^T r_s ds)\mathcal{E}(i\sigma W^{\mathbb{Q}})_T^t \mathcal{E}((1-i)\sigma\phi\widetilde{M}^{\mathbb{Q}})_T^t - K)_+/\mathcal{F}_t)$$

où on a noté $\mathcal{E}(i\sigma W^{\mathbb{Q}})_T^t$ et $\mathcal{E}((1-i)\sigma\phi\widetilde{M}^{\mathbb{Q}})_T^t$ les exponentielles de Doléans partant de t.

$$E_{\mathbb{Q}}(\exp(-\int_t^T r_s ds)(S_T - K)_+ \ / \ \mathcal{F}_t) \quad = \quad F(t, S_t)$$

où

$$\begin{aligned}
F(t,x) &= E_{\mathbb{Q}}[\exp(-\int_t^T r_s ds)(x\exp(\int_t^T r_s ds)\mathcal{E}(i\sigma W^{\mathbb{Q}})_T^t \mathcal{E}((1-i)\sigma\phi\widetilde{M}^{\mathbb{Q}})_T^t - K)_+] \\
&= E_{\mathbb{Q}}[E_{\mathbb{Q}}(x\mathcal{E}(i\sigma W^{\mathbb{Q}})_T^t \mathcal{E}((1-i)\sigma\phi\widetilde{M}^{\mathbb{Q}})_T^t - K\exp(-\int_t^T r_s ds))_+ \ / \ \sigma(\widetilde{M}_s^{\mathbb{Q}}, t \le s \le T)] \\
&= E_{\mathbb{Q}}(BS(x\mathcal{E}((1-i)\sigma\phi\widetilde{M}^{\mathbb{Q}})_T^t, \frac{\lambda(T) - \lambda(t)}{T - t}, K\exp(-\int_t^T r_s ds), T).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&E_{\mathbb{Q}}((S_T - K)_+) \\
&\quad = F(0, S_0) \\
&\quad = E_{\mathbb{Q}}(BS(S_0\mathcal{E}((1-i)\sigma\phi\widetilde{M}^{\mathbb{Q}})_T^t, \tfrac{\lambda(T)}{T}, K\exp(-\textstyle\int_0^T r_s ds), T) \\
&\quad = \exp(-v^{\mathbb{Q}}(T)) \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{v^{\mathbb{Q}}(T)^j}{j!} E_{\mathbb{Q}}(BS(S_0 A_j, \tfrac{\lambda(T)}{T}, K\exp(-\int_0^T r_s ds), T) \ / \ N_T = j)
\end{aligned}$$

où

$$A_j = \prod_{k=1}^{j}(1 + \sigma_{T_k}\phi_{T_k})\exp(-\int_0^T (1 - i_s)(\frac{\sigma_s - \mu_s - r_s}{\phi_s})ds)$$

On a noté $v^{\mathbb{Q}}(T) = v(T) - \int_0^T (1 - i_t)\frac{r_t - \mu_t}{\sigma_t}dt$, i.e le compensateur de N sous $\mathbb{Q}$.

Or si on note $(v_t^{\mathbb{Q}})^{-1}_{t\in\mathbb{R}_+}$ l'inverse continu à droite de $(v_t^{\mathbb{Q}})_{t\in\mathbb{R}_+}$, $(N_{(v_t^{Q})^{-1}})_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus standard de Poisson sous $\mathbb{Q}$. Donc, conditionnellement à $N_{(v_t^{\mathbb{Q}})^{-1}(v_T^{\mathbb{Q}})} = k$, les instants de sauts $(v_{T_1}^{\mathbb{Q}}, ..., v_{T_k}^{\mathbb{Q}})$ ont une loi uniforme sur $[0, v^{\mathbb{Q}}(T)]^k$.

Ainsi sous la probabilité $\mathbb{Q}$ conditionnellement à $\{N_t = k\}$, $(T_1, ..., T_k)$ a la loi

$$\frac{1}{v^{\mathbb{Q}}(T)^k} 1_{[0,T]}(t_1)...1_{[0,T]}(t_k) \prod_{j=1}^{k} (1 - i_{t_j})(\frac{1}{\phi_{t_j}^2} - \frac{r_{t_j} - \mu_{t_j}}{\phi_{t_j} \sigma_{t_j}}) dt_1...dt_k.$$

D'où

$E_{\mathbb{Q}}((S_T - K)_+)$
$= \exp(-v^{\mathbb{Q}}(T)) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^{\mathbb{Q}}(T)^j}{j!} E_{\mathbb{Q}}(BS(S_0 A_j, \frac{\lambda(T)}{T}, K \exp(-\int_0^T r_s ds), T)) \prod_{i=1}^{j} (1 - i_{t_i})(\frac{1}{\phi_{t_j}^2} - \frac{r_{t_j} - \mu_{t_j}}{\phi_{t_j} \sigma_{t_j}}) dt_1...dt_j.$

2.2.4 Stratégie de couverture

Nous allons maintenant examiner le problème de couverture.

Le marché étant complet, nous pouvons dupliquer toutes les options.

Or $d\widetilde{X}_t = \pi_t \sigma_t R_t dZ_t$ et $\widetilde{X}_t = \widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$ où $\widetilde{F}(t, x) = \exp(-\int_0^t r_s ds) F(t, x \exp(\int_0^t r_s ds))$.

En appliquant la formule d'Itô à $\widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(t, \widetilde{S}_t) &= F(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(s, \widetilde{S}_s) ds + \int_0^t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s, \widetilde{S}_s) d\widetilde{S}_s \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^2}(s, \widetilde{S}_s) \left\langle \widetilde{S}, \widetilde{S} \right\rangle_s \\
&\quad + \sum_{s \leq t} (\widetilde{F}(s, \widetilde{S}_s) - \widetilde{F}(s, \widetilde{S}_{s-}) - \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s, \widetilde{S}_{s-}) \widetilde{S}_{s-} \sigma_s (1 - i_s) \phi_s \Delta N_s) \\
&= F(0, S_0) + \int_0^t (i_s \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s, \widetilde{S}_s) + (1 - i_s) \frac{\Delta \widetilde{F}}{\phi_s \sigma_s \widetilde{S}_{s-}}) \widetilde{S}_{s-} \sigma_s dZ_s + \int_0^t K(s) ds
\end{aligned}$$

où $K(s) = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(s, \widetilde{S}_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^2}(s, \widetilde{S}_s) \sigma_s^2 \widetilde{S}_s^2 i_s + [\Delta \widetilde{F}_s - \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s, \widetilde{S}_{s-}) \widetilde{S}_{s-} \sigma_s (1 - i_s) \phi_s] \frac{(1 - i_s)}{\phi_s^2}$.

Comme $\widetilde{X_t}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale, la partie à variation finie est identiquement nulle et le candidat naturel pour le processus H est

$$\pi_t R_t = i_t \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(t, \widetilde{S}_t) + (1 - i_t) \frac{\Delta \widetilde{F}_t}{\phi_t \sigma_t \widetilde{S}_{t-}} = i_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) + (1 - i_t) \frac{\Delta F_t}{\phi_t \sigma_t S_{t-}}.$$

On remarque comme vérification de ce résultat que sur $\{i = 1\}$, le portefeuille obtenue coïncide avec le portefeuille du modèle de Black-Scholes. Sur $\{i = 0\}$, on trouve

$$\pi_t R_t = \frac{\Delta F_t}{\phi_t \sigma_t S_{t-}}$$

Le fait que $K = 0$ implique que $\widetilde{F}$ vérifie l'équation différentielle aux dérivées partielles suivante

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(s, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^2}(s, x) \sigma_s^2 x^2 i_s + [\Delta \widetilde{F} - \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}(s, x) x \sigma_s (1 - i_s) \phi_s] \frac{(1 - i_s)}{\phi_s^2} = 0, \forall s \geq 0.$$

qui se scinde en deux parties suivant que i est nul ou pas. Sur $\{i = 1\}$, on retrouve l'équation différentielle vérifiée dans le modèle de Black-Scholes

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial t}(s, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial x^2}(s, x) \sigma_s^2 x^2 = 0.$$

2.3 Equations différentielles stochastiques rétrogrades

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'existence et à l'unicité de solutions de l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -dS_t & = & f(t,S_t,H_t)dt - H_t dY_t^{(\alpha)} \\ S_T & = & \xi \end{array} \right. \tag{2.6}$$

lorsque $Y^{(\alpha)}$ est la martingale solution de l'équation de structure $d\left[Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}\right]_t = \alpha_t^2 dt + \phi_t dY_t^{(\alpha)}$.
En appliquant les méthodes standards nous montrons tout d'abord, sous certaines hypothèses sur la fonction f, l'existence et l'unicité d'un couple (S,H) de solution de (2.6). Puis nous énonçons un théorème de comparaison.
Ces résultats nous permettent dans le paragraphe suivant de résoudre un problème d'optimisation de richesse.

2.3.1 Existence et unicité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé sur lequel est construite la martingale $Y^{(\alpha)}$ et soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration de $Y^{(\alpha)}$. On note
-L_T^2 l'espace des variables aléatoires X $\mathcal{F}_T-$mesurables telles que $E[X^2] < +\infty$
-$\mathbb{H}_T^2$ l'espace des processus progressivement mesurables φ tels que $E\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt < +\infty$.
-$\mathbb{H}_T^1$ l'espace des processus progressivement mesurables φ tels que $E\sqrt{\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt} < +\infty$.
On pose pour $\beta > 0$ et y appartenant à $\mathbb{H}_T^2$, $\|y\|_\beta^2 = E[\int_0^T exp(\beta s) y_s^2 ds]$.

Théorème 2.8 *:On suppose que f est une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant*
-$f(t,.,.)$ est adaptée
-il existe une constante $c > 0$ telle que $|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \leq c(|y-y'| + |z-z'|), dt \otimes dP$ p.s
-$f(.,0,0) \in \mathbb{H}_T^2$
et $\xi \in L_T^2$.
Alors il existe un unique couple $(S,H) \in \mathbb{H}_T^2 \times \mathbb{H}_T^2$ solution de l'équation (2.6).

Démonstration : Nous allons utiliser comme dans [6] un théorème de point fixe de $\mathbb{H}_T^2 \times \mathbb{H}_T^2$ muni de la norme $\|.\|_\beta \times \|.\|_\beta$. Soit ξ fixé dans L_T^2. On définit l'application
$\Lambda :\ \mathbb{H}_T^2 \times \mathbb{H}_T^2 \to \mathbb{H}_T^2 \times \mathbb{H}_T^2$ par $\Lambda(X,V) = (S,H)$
avec $S = (S_t)_{t\geq 0}$, $S_t = E[\int_t^T f(s,X_s,V_s)ds + \xi/\mathcal{F}_t]$ et où H est obtenu au moyen de la PRP appliquée à la martingale de carré intégrable $S_t + \int_0^t f(s,X_s,V_s)ds = E[\int_0^T f(s,X_s,V_s)ds + \xi/\mathcal{F}_t]$. Alors

$$S_t = S_0 - \int_0^t f(s,X_s,V_s)ds + \int_0^t H_s dY_s^{(\alpha)}.$$

Le processus H appartient à $\mathbb{H}_T^2$. En effet, par définition de la PRP pour la martingale $Y^{(\alpha)}$, on a $E(\int_0^T H_s^2 d[Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}]_s) < +\infty$. Le crochet droit de $Y^{(\alpha)}$ est donné par

$$d[Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}]_s = ds + \phi_s dY_s^{(\alpha)},$$

d'où $E(\int_0^T H_s^2 d[Y^{(\alpha)},Y^{(\alpha)}]_s) = E(\int_0^T H_s^2(ds+\phi_s dY_s^{(\alpha)}))$.
Or, le processus $(\int_0^t H_s^2\phi_s dY_s^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ est une martingale locale. Par conséquent, il existe une suite de temps d'arrêt T_n tel que $\lim_n T_n = +\infty$ p.s et $(\int_0^{t\wedge T_n} H_s^2\phi_s dY_s^{(\alpha)})_{t\geq 0}$ est une martingale. Ainsi pour n suffisamment grand, $T\wedge T_n = T$ p.s et

$$E(\int_0^T H_s^2(ds+\phi_s dY_s^{(\alpha)})) = E(\int_0^T H_s^2 ds) < +\infty. \tag{2.7}$$

Le processus S appartient à $\mathbb{H}_T^2$, car

$$|S_t|^2 \leq 4\left|\int_0^t f(s,X_s,V_s)ds\right|^2 + 4\left|\int_0^t H_s dY_s^{(\alpha)}\right|^2 + 2|S_0|^2.$$

La propriété de Lipschitz de g entraîne que

$$E(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t f(s,X_s,V_s)ds\right|^2) \leq 2E(\int_0^T f(s,0,0)^2 ds) + 4cE(\int_0^T |X_s|^2 + |V_s|^2\, ds) < +\infty.$$

En utilisant les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (cf [4]), on obtient

$$E(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t H_s dY_s^{(\alpha)}\right|^2) \leq E(\int_0^T H_s^2 d[Y^{(\alpha)},Y^{(\alpha)}]_s) < +\infty.$$

Donc

$$E(\sup_{t\leq T}|S_t|^2) < +\infty. \tag{2.8}$$

Montrons que Λ est une contraction. Soient $(X^1,V^1),(X^2,V^2)$ et $(S^1,H^1),(S^2,H^2)$ leur image respective par Λ. Soit $dS_t^i = -f(t,X_t^i,V_t^i)dt + H_t^i dY_t^{(\alpha)}$. On pose $\overline{S}_t = S_t^1 - S_t^2$, $\overline{H}_t = H_t^1 - H_t^2$, $\overline{X}_t = X_t^1 - X_t^2$, $\overline{V}_t = V_t^1 - V_t^2$.
En appliquant la formule d'Itô à $\exp(\beta t)\left|\overline{S_t}\right|^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\exp(\beta t)\left|\overline{S_t}\right|^2 &= \exp(\beta T)\left|\overline{S_T}\right|^2 - \beta\int_t^T \exp(\beta s)\left|\overline{S_s}\right|^2 ds \\
&\quad +2\int_t^T \exp(\beta s)\overline{S}_s(f(s,X_s^1,V_s^1) - f(s,X_s^2,V_s^2))ds \\
&\quad -2\int_t^T \exp(\beta s)\overline{S}_s\overline{H}_s dY_s^{(\alpha)} - \int_t^T \exp(\beta s) i_s \overline{H}_s^2 ds \\
&\quad -\sum_{t<s\leq T}\exp(\beta s)(\left|\overline{S}_s\right|^2 - \left|\overline{S}_{s^-}\right|^2 - 2\overline{S}_{s^-}\overline{H}_s(1-i_s)\phi_s\Delta N_s)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

or $(\left|\overline{S}_s\right|^2 - \left|\overline{S}_{s^-}\right|^2 - 2\overline{S}_{s^-}\overline{H}_s(1-i_s)\phi_s\Delta N_s) = (\overline{H}_s(1-i_s)\phi_s\Delta N_s)^2$, et

$$\sum_{t<s\leq T}\exp(\beta s)(\overline{H}_s(1-i_s)\phi_s\Delta N_s)^2 = \int_t^T \exp(\beta s)(\overline{H}_s(1-i_s)\phi_s)^2 dN_s.$$

On a remarqué au début de la démonstration que $\sup_{s\leq T}\left|\overline{S}_s\right| \in L^2_T$ (égalité (2.8)) ; donc $\overline{SH}$ appartient à $\mathbb{H}^1_T$.

Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy appliquées au processus $(\int_0^t \exp(\beta s)\overline{S}_s\overline{H}_s dY_s^{(\alpha)},\ t\geq 0)$ entraînent

$$\begin{aligned}
E(\sup_{t\leq T}(\int_0^T \exp(\beta s)\overline{S}_s\overline{H}_s dY_s^{(\alpha)})^2) &\leq E(\int_0^T \exp 2(\beta s)\overline{S}_s^2\overline{H}_s^2(ds+\phi_s dY_s^{(\alpha)}))\\
&\leq E(\int_0^T \exp 2(\beta s)\overline{S}_s^2\overline{H}_s^2 ds)\\
&\leq T\exp(2T\beta)E(\sqrt{\int_0^T \overline{S}_s^2\overline{H}_s^2 ds})\\
&< +\infty \text{ car } \overline{SH} \text{ appartient à } \mathbb{H}^1_T
\end{aligned}$$

D'où le processus $(\int_0^t \exp(\beta s)\overline{S}_s\overline{H}_s dY_s^{(\alpha)},\ t\geq 0)$ est uniformément intégrable et est par conséquent une martingale.

De plus, il existe c tel que $|f(s,x,y)-f(s,x',y')|\leq c(|x-x'|+|y-y'|)$ uniformément en s et en ω. En prenant l'espérance dans l'égalité (2.9), on obtient

$$\begin{aligned}
E(\exp(\beta t)\left|\overline{S}_t\right|^2) = \;& E(\exp(\beta T)\left|\overline{S_T}\right|^2) - E(\beta\int_t^T \exp(\beta s)\left|\overline{S}_s\right|^2 ds)\\
&+2E(\int_t^T \exp(\beta s)\overline{S}_s(f(s,X_s^1,V_s^1)-f(s,X_s^2,V_s^2))ds)\\
&-2E(\int_t^T \exp(\beta s)\overline{S}_s\overline{H}_s dY_s^{(\alpha)})\\
&-E(\int_t^T \exp(\beta s)i_s\overline{H}_s^2 ds + \int_t^T \exp(\beta s)\overline{H}_s^2(1-i_s)ds
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&E[\exp(\beta t)\left|\overline{S}_t\right|^2 + \beta\int_t^T \exp(\beta s)\left|\overline{S}_s\right|^2 ds + \int_t^T \exp(\beta s)\left|\overline{H}_s\right|^2 ds]\\
&\quad\leq E[\exp(\beta T)\left|\overline{S}_T\right|^2 + 2c\int_t^T \exp(\beta s)\left|\overline{S}_s\right|(\left|\overline{X}_s\right|+\left|\overline{V}_s\right|)ds]\\
&\quad\leq E[\int_t^T 2c^2\exp(\beta s)\left|\overline{S}_s\right|^2 ds + \tfrac{1}{2}\int_t^T \exp(\beta s)(\left|\overline{X}_s\right|^2+\left|\overline{V}_s\right|^2)ds]
\end{aligned}$$

car $\overline{S}_T = 0$ et $|ab|\leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

Soit $\beta = 1+2c^2$, alors

$$E[\exp(\beta t)\left|\overline{S}_t\right|^2 + \int_t^T \exp(\beta s)\left|\overline{S}_s\right|^2 ds + \int_t^T \exp(\beta s)\left|\overline{H}_s\right|^2 ds] \leq \frac{1}{2}E[\int_t^T \exp(\beta s)(\left|\overline{X}_s\right|^2+\left|\overline{V}_s\right|^2)ds].$$

D'où

$$E[\int_0^T \exp(\beta s)(\left|\overline{S}_s\right|^2+\left|\overline{H}_s\right|^2)ds] \leq \tfrac{1}{2}E[\int_0^T \exp(\beta s)(\left|\overline{X}_s\right|^2+\left|\overline{V}_s\right|^2)ds]\ .$$

Donc Λ est une contraction pour la norme $\|.\|_\beta \times \|.\|_\beta$ et on peut appliquer le théorème de point fixe. Ainsi il existe un unique couple (S,H) appartenant à $\mathbb{H}^2_T\times\mathbb{H}^2_T$ vérifiant l'équation (2.6). ■

2.3.2 Théorème de comparaison

2.3.2.1 Equations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires

Proposition 2.9 *: Soient (β,γ) deux processus prévisibles bornés, ψ élément de $\mathbb{H}^2_T$, et ξ un élément de L^2_T. Alors l'équation linéaire*

$$\begin{cases} -dS_t &= [\psi_t + S_t\beta_t + \gamma_t H_t]dt - H_t dY_t^{(\alpha)} \\ S_T &= \xi \end{cases} \tag{2.10}$$

a une unique solution $(S,H) \in \mathbb{H}^2_T \times \mathbb{H}^2_T$ définie par

$$\Gamma_t S_t = E[\xi\Gamma_T + \int_t^T \Gamma_s\psi_s ds \; / \; \mathcal{F}_t],$$

$$d\Gamma_t = \Gamma_{t^-}(\beta_t dt + \gamma_t dY_t^{(\alpha)}), \;\; \Gamma_0 = 1.$$

En particulier, si ξ et ψ sont positifs ou nuls et si $\phi\gamma > -1$, le processus S est positif ou nul.

Démonstration : D'après le théorème 2.8, il existe une unique solution (S,H) de l'équation (2.10). En appliquant la formule d'Itô à $\Gamma_t S_t$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(\Gamma_t S_t) &= \Gamma_{t^-}dS_t + S_{t^-}d\Gamma_t + d[\Gamma,S]_t \\ &= \Gamma_{t^-}(-\psi_t - S_t\beta_t - \gamma_t H_t)dt + \Gamma_{t^-}H_t dY_t^{(\alpha)} \\ &\quad + S_{t^-}\Gamma_{t^-}(\beta_t dt + \gamma_t dY_t^{(\alpha)}) + \Gamma_{t^-}\gamma_t H_t d[Y^{(\alpha)},Y^{(\alpha)}]_t \end{aligned}$$

$$\text{or } d[Y^{(\alpha)},Y^{(\alpha)}]_t = dt + \phi_t dY_t^{(\alpha)}$$

$$\begin{aligned} d(\Gamma_t S_t) &= -\Gamma_{t^-}\psi_t dt + \Gamma_{t^-}(S_{t^-}\gamma_t + H_t(1+\gamma_t\phi_t))dY_t^{(\alpha)} \\ &= -\Gamma_{t^-}\psi_t dt + \Gamma_{t^-}(S_{t^-}\gamma_t + (H_t(1+\gamma_t\phi_t))(i_t dW_t + (1-i_t)\phi_t d\widetilde{M_t}) \end{aligned}$$

Les processus $(\int_0^t \Gamma_{s-}S_{s-}\gamma_s i_s dW_s, t\geq 0)$ et $(\int_0^t \Gamma_{s-}H_s i_s(1+\gamma_s\phi_s)dW_s, t\geq 0)$ sont des martingales car $\gamma, \gamma\phi$ sont bornés, $\sup_{s\leq T}\Gamma_s \times \sup_{s\leq T} H_s \in L^1$et $\sup_{s\leq T}\Gamma_s \times \sup_{s\leq T} S_s \in L^1$. De plus, puisque ϕ_s est borné par hypothèse, le processus $(\int_0^t \Gamma_{s-}(S_{s-}\gamma_s + (H_s(1+\gamma_s\phi_s))\phi_s)d\widetilde{M}_s, t\geq 0)$ est une martingale. Donc $\Gamma_t S_t + \int_0^t \Gamma_s\psi_s ds$ est une martingale et l'on a $\Gamma_t S_t + \int_0^t \Gamma_s\psi_s ds = E[\Gamma_T\xi + \int_0^T \Gamma_s\psi_s ds \; / \; \mathcal{F}_t]$. Si $\phi\gamma > -1$, le processus Γ est strictement positif. De plus, si ξ et φ sont positifs ou nuls, le processus S est positif ou nul. ∎

2.3.2.2 Théorème de comparaison

Théorème 2.10 *: Soient (f,ξ) (resp (f',ξ')) le générateur et la condition terminale d'une équation différentielle stochastique rétrograde du type (2.6) vérifiant les conditions du théorème 2.8. On note (Y,Z) (resp (Y',Z')) la solution de l'EDSR correspondante. On suppose que $\xi \geq \xi'$ $\mathbb{P}$ ps,*
$\delta_2 f_t = f(t,Y'_t,Z'_t) - f'(t,Y'_t,Z'_t) \geq 0$ $dt\times P$ ps et $\Delta_z f(t)\phi > -1$ où

$$\Delta_z f(t) \begin{cases} = \frac{f(t,Y_t,Z_t)-f(t,Y_t,Z'_t)}{Z_t - Z'_t} \; si \; Z_t - Z'_t \neq 0 \\ = 0 \; sinon. \end{cases}$$

Alors, $Y \geq Y'$ $\mathbb{P}$ ps. De plus, si $Y_t = Y'_t$, alors $\xi = \xi'$, $f(t, Y_t, Z_t) = f'(t, Y'_t, Z'_t)$, et $Y_s = Y'_s$ ps pour $s \geq t$.

Démonstration : On pose $\overline{Y}_t = Y_t - Y'_t$ et $\overline{Z}_t = Z_t - Z'_t$, alors $(\overline{Y}, \overline{Z})$ est solution de l'équation linéaire suivante

$$\begin{cases} -d\overline{Y}_t &= [\Delta_y f(t)\overline{Y}_t + \Delta_z f(t)\overline{Z}_t + \delta_2 f_t]dt - \overline{Z}_t dY_t^{(\alpha)} \\ \overline{Y}_T &= \xi - \xi' \end{cases}$$

où

$$\Delta_y f(t) \begin{cases} = & \frac{f(t,Y_t,Z_t)-f(t,Y'_t,Z_t)}{Y_t - Y'_t} \text{ si } Y_t - Y'_t \neq 0 \\ = & 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme f est uniformément lipschitzienne, $\Delta_z f(t)$ et $\Delta_y f(t)$ sont bornés. Donc on peut appliquer la proposition 2.9 et on obtient le résultat. ■

2.4 Optimisation de richesse

2.4.1 Le modèle

On reprend le modèle de marché de la section 2.1 avec les hypothèses (**H1**) et (**H2**). Sous ces hypothèses, nous avons montré que le marché est complet. Soit $\mathbb{Q}$ l'unique martingale mesure équivalente et K sa densité de Radon-Nikodym. Alors $K_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t$ et on note $\widetilde{K}(t) = R(t)K_t$.

On considère un agent avec une richesse initiale $x > 0$ qui investit dans les deux actifs décrits précédemment. Soit $m_i(t)$ le nombre d'actif i détenus à la date t. La richesse en t est

$$X_t = m_0(t)S_t^0 + m_1(t)S_t.$$

On note $\pi_t = m_1(t)S_t$ le montant investi dans l'actif S^1.

Définition 2.11 *: On appelle portefeuille tout processus prévisible $(\pi_t, t \geq 0)$, tel que*

$$E\int_0^T \pi_t^2 dt < +\infty \text{ et } E[\int_0^T \pi_s(1 - i_s)\frac{1}{\phi_s}ds] < +\infty \tag{2.11}$$

et consommation, tout processus mesurable adapté $C = \{c(t),\, 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans $[0, \infty)$ tel que

$$\int_0^T c(s)ds < +\infty \ p.s \tag{2.12}$$

On suppose que la stratégie $(c(t), \pi(t))$ est autofinancée, c'est-à-dire que $(X_t, t \geq 0)$ est solution de l'équation

$$dX_t = m_0(t)dS_t^0 + m_1(t)dS_t - c(t)dt.$$

En utilisant les dynamiques des prix données par (2.4) et (2.5) ainsi que la relation $\pi_t = m_1(t)S_t$, on obtient

$$\begin{cases} dX_t &= r(t)X_t dt + \pi_t[\mu_t - r(t)]dt + \pi_t\sigma_t dY_t^{(\alpha)} - c(t)dt \\ X_0 &= x \end{cases}$$

Avec les hypothèses faites sur r, μ, σ, cette équation a une unique solution forte qui s'écrit

$$R(t)X_t = x - \int_0^t R(s)c(s)ds + \int_0^t R(s)\pi_s[\sigma_s dY_s^{(\alpha)} + (\mu_s - r(s))ds] \tag{2.13}$$

On note $X^{x,\pi,c}$ le processus de richesse associé au portefeuille π, à la consommation c et de valeur initiale x.

Définition 2.12 *: Un couple (π, c) satisfaisant (2.11) et (2.12) est dit admissible pour une richesse initiale $x > 0$ si $X_t^{x,\pi,c} \geq 0$ pour $0 \leq t \leq T$ p.s. Soit $\mathcal{A}(x)$ l'ensemble des couples (π, c) admissibles pour la richesse initiale x.*

2.4.2 Optimisation

On suppose que l'attitude de l'agent face au risque est représentée par une fonction additivement séparable de son flux de consommation et de sa richesse terminale. Soient U_1 et U_2 définies respectivement sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$[\mathbf{H3}] \quad \begin{cases} i)\ U_i \text{ est strictement croissante, strictement concave de classe } C_1 \\ ii)\ \lim_{x\to 0} U_i'(x) = +\infty, \ \ \lim_{x\to +\infty} U_i'(x) = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Sous les hypothèses $[\mathbf{H3}]$, la fonction U_i' admet un inverse I_i défini sur $]0, +\infty[$.
Soit

$$J(x, \pi, c) = E[\int_0^T U_1(t, c(t))dt + U_2(X_T^{x,\pi,c})]$$

où x est la richesse initiale. Dans cette expression, l'espérance est prise sous $\mathbb{P}$.
On cherche à maximiser $J(x, ., .)$ sous la contrainte de richesse positive c'est-à dire on cherche

$$V(x) = \max_{(\pi,c)} E[\int_0^T U_1(t, c(t))dt + U_2(X_T^{x,\pi,c})]$$

.

2.4.3 Méthode des martingales

On va donner une forme pratique à la contrainte trajectorielle $X_t \geq 0$, $t \in [0, T]$.

Proposition 2.13 *: Soient (π, c) un couple admissible et $\xi = X_T^{\pi,c}$ sa richesse finale associée. Alors*

$$E[\xi \widetilde{K}(T) + \int_0^T \widetilde{K}(s)c(s)ds] \leq x$$

Démonstration : En reprenant l'équation (2.13), on a

$$R(t)X_t = x - \int_0^t R(s)c(s)ds + \int_0^t R(s)\pi_s\sigma_s dZ_s$$

où $dZ_t = dY_t^{(\alpha)} + \frac{\mu_t - r(t)}{\sigma_t} dt$. Le processus Z est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Si le couple (π, c) est admissible, le processus $n_t = x + \int_0^t R(s)\pi_s\sigma_s dZ_s$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale égale à $X_t^{\pi,c}R(t) + \int_0^t R(s)c(s)ds$. C'est une martingale locale de valeur terminale positive donc elle est positive et c'est une surmartingale. D'où $E_{\mathbb{Q}}[n_T] = E(n_T L_T) \leq x$. ■

Proposition 2.14 *: Soient c un processus de consommation et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable et positive telle que*

$$E_{\mathbb{P}}[\widetilde{K}(T)\xi + \int_0^T \widetilde{K}(t)c(t)dt] = x > 0 \tag{2.15}$$

Alors il existe un portefeuille π tel que (π, c) soit admissible et $X^{x,\pi,c}(T) = \xi$.

Démonstration : Considérons l'équation différentielle stochastique rétrograde suivante

$$\begin{cases} -dX_t = [c(t) - X_t r_t - \pi_t(\mu_t - r_t)]dt - \pi_t\sigma_t dY_t^{(\alpha)} \\ X_T = \xi \end{cases} \tag{2.16}$$

D'après les résultats obtenus sur les équations différentielles stochastiques linéaires, l'équation (2.16) a une unique solution (X, π) et le fait que c et ξ sont positifs ou nuls entraîne que $X_t \geq 0$ pour $t \in [0, T]$. Donc le couple (π, c) est admissible. ■

Bien que la démonstration de la proposition soit achevée, il est utile pour faire des calculs lorsque les fonctions d'utilité sont connues de donner des expressions plus explicites de X et de π. Soit
$n_t = E_{|}[\widetilde{K}(T)\xi + \int_0^T \widetilde{K}(s)c(s)ds/\mathcal{F}_t]$, $0 \leq t \leq T$.
D'après la propriété de représentation prévisible pour la martingale $Y^{(\alpha)}$, il existe un processus ψ prévisible tel que $E\left[\int_0^T \psi_s^2 ds\right] < \infty$ et

$$n_t = x + \int_0^t \psi_s dY_s^{(\alpha)}.$$

Alors $X_t = \frac{1}{\widetilde{K}(t)}[n_t - \int_0^t \widetilde{K}(s)c(s)ds]$ est le processus de richesse $X^{x,\pi,c}$ associé à la consommation c et au portefeuille

$$\pi_t = \sigma_t^{-1}[X_t \frac{r(t) - \mu_t}{\sigma_t} + \frac{1}{\widetilde{K}(t)}\psi_t] \tag{2.17}$$

Remarque 2.15 *: Si on considère $\tilde{N}_t = E_{\mathbb{Q}}[R(T)\xi + \int_0^T R(s)c(s)ds/\mathcal{F}_t]$, alors on obtient une autre expression pour π*

$$\pi_t = (\sigma_t R(t))^{-1}\eta_t$$

où η est défini par $\tilde{N}_t = x + \int_0^t \eta_s dZ_s$. Ces deux expressions de π se déduisent l'une de l'autre par le théorème de Girsanov.

Le problème revient donc à maximiser $E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(t, c(t))dt + U_2(\xi)]$ sur c, ξ sous la contrainte

$$E_P[\widetilde{K}(T)\xi + \int_0^T \widetilde{K}(t)c(t)dt] = x. \tag{2.18}$$

Nous allons déterminer un couple optimal avec les multiplicateurs de Lagrange. Pour $\lambda > 0$, on regarde

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}(\int_0^T U_1(t,c(t))dt + U_2(\xi)) + \lambda \left\{ x - E_{\mathbb{P}}[\widetilde{K}(T)\xi + \int_0^T \widetilde{K}(t)c(t)dt] \right\} \\ = E[\int_0^T (U_1(t,c(t)) - \lambda\widetilde{K}(t)c(t))dt] + E[U_2(\xi) - \lambda\widetilde{K}(T)\xi] + x\lambda \\ \leq [\int_0^T \widetilde{U_1}(t,\lambda\widetilde{K}(t))dt + \widetilde{U_2}(\lambda\widetilde{K}(T)] + x\lambda \end{aligned}$$

où $\widetilde{U_i}(y) = \max_{x\geq 0}(U_i(x) - xy) = U_i(I_i(y)) - yI_i(y)$.
On remarque que l'inégalité est une égalité si et seulement si X^*et c^* vérifient

$$c^*(t) = I_1(t,\lambda\widetilde{K}(t)) \text{ et } X^* = I_2(\lambda\widetilde{K}(T)). \tag{2.19}$$

Vérifions que ce couple est optimal. On a

$$\begin{aligned} J(x,c,X) \quad \leq \quad & E_{\mathbb{P}}[\int_0^T U_1(I_1(y_s))ds - U_2(I_2(y_T)] + E_{\mathbb{P}}[\int_0^T y_s(c(s) - I_1(y_s))ds + y_T(X_T - I_2(y_T)) \\ & \forall y \ \mathcal{F}_s - \text{adapté}. \end{aligned}$$

Si on choisit $y_s = \lambda R(s)L(s)$, on a pour tout couple (c,π) admissible, $J(x,c,X) \leq J(x,c^*,X^*)$. Le couple (c^*,X^*) étant admissible par le choix de λ, l'optimalité de (c^*,X^*) est assurée. On détermine λ en substituant les expressions de c^* et ξ^* dans (2.18). On définit la fonction χ par :

$$\chi(y) = E_{\mathbb{P}}[\widetilde{K}(T)I_2(y\widetilde{K}(T)) + \int_0^T \widetilde{K}(t)I_1(t,y\widetilde{K}(t))dt]$$

Alors λ vérifie $\chi(\lambda) = x$.

Si on suppose que

$$\chi(y) < \infty, \ \forall 0 < y < \infty, \tag{2.20}$$

alors χ est continue, strictement décroissante et telle que $\lim_{y\to 0^+}\chi(y) = \infty$ et $\lim_{y\to+\infty}\chi(y) = 0$. Par conséquent, χ possède un inverse continu ; donc $\lambda = \chi^{-1}(x)$.

Nous pouvons maintenant énoncer sous forme de théorème les résultats obtenus.

Théorème 2.16 *: Sous l'hypothèse (2.20). Il existe un couple (π^*,c^*) optimal. La consommation optimale c^* est déterminée par (2.19) et la fonction valeur associée est donnée par*

$$V(x) = G(\chi^{-1}(x))$$

où

$$G(y) = E[\int_0^T U_1(t,I_1(t,y\widetilde{K}(t)))dt + U_2(I_2(y\widetilde{K}(T)))], \ 0 < y < \infty.$$

2.4.4 Exemples de fonctions d'utilité.

Dans tout le paragraphe nous supposons r, μ, σ constants.

2.4.4.1 $U_1(t,x) = U_2(x) = \log(x)$

Dans ce cas, les fonctions U_1et U_2 vérifient les conditions (2.14) et on a $I_1(x) = I_2(x) = \frac{1}{x}$. La richesse initiale x est fixée, $x > 0$.

Déterminons le couple $(c^*, \, \xi^*)$ de (consommation/richesse terminale) optimal.

La fonction χ s'explicite par

$$\begin{aligned} \chi(y) &= E[\widetilde{K}(T)\frac{1}{y\widetilde{K}(T)} + \int_0^T \frac{1}{y}dt] = \frac{T+1}{y}, \text{ il en résulte} \\ \chi^{-1}(y) &= \frac{T+1}{y}. \\ \text{Donc } \lambda &= \frac{T+1}{x}, \ \xi^* = \frac{x}{T+1}\frac{1}{\widetilde{K}(T)}, \ c^*(t) = \frac{x}{T+1}\frac{1}{\widetilde{K}(t)} \ \ 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Le processus de richesse correspondant est

$$X^*(t) \ = \ \tfrac{1}{\widetilde{K}(t)}E[\widetilde{K}(T)\xi^* + \textstyle\int_t^T \widetilde{K}(s)c^*(s)ds \,/\mathcal{F}_t] \ ,$$

soit en utilisant la forme de c^* et de ξ^*,

$$X^*(t) \ = \ \tfrac{x}{T+1}\tfrac{1+T-t}{\widetilde{K}(t)}.$$

Un calcul simple montre que la martingale $K^1(t) = E[\widetilde{K}(T)\xi^* + \int_0^T \widetilde{K}(s)c^*(s)ds \,/\mathcal{F}_t]$ est une constante égale à x.

D'où en utilisant (2.17) $\pi_t^* = \frac{1}{\sigma}(\frac{r-\mu}{\sigma})X_t^* = \frac{1}{\sigma}(\frac{r-\mu}{\sigma})\frac{x}{T+1}\frac{1+T-t}{\widetilde{K}(t)}$.

La fonction de valeur associée s'explicite facilement :

$$\begin{aligned} V(x) &= E[\int_0^T \log(\tfrac{1}{\lambda\widetilde{K}(t)})dt + \log(\tfrac{1}{\lambda\widetilde{K}(T)})] \\ &= E[\int_0^T \log(\tfrac{x}{T+1}) - \log(\widetilde{K}(t))dt + \log(\tfrac{x}{T+1}) - \log(\widetilde{K}(T))] \\ &= \log(\tfrac{x}{T+1})(T+1) - E[\int_0^T \log(\widetilde{K}(t))dt + \log(\widetilde{K}(T))]. \end{aligned}$$

En utilisant

$$\log(\widetilde{K}(t)) = -rt + \int_0^t (\frac{r-\mu}{\sigma})dY_s^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{r-\mu}{\sigma})^2 ds + \int_0^t [\ln(1+\frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s) - \frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s + \frac{1}{2}(\frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s)^2]dN_s,$$

on obtient

$$\begin{aligned} V(x) &= \log(\tfrac{x}{T+1})(T+1) + \tfrac{r}{2}T^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^T dt \textstyle\int_0^t (\frac{r-\mu}{\sigma})^2 ds + rT + \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^T (\tfrac{r-\mu}{\sigma})^2 ds \\ &\quad + \int_0^T dt \textstyle\int_0^t (1-i_u)\frac{A(u)}{\phi_u^2}du + \int_0^T (1-i_u)\frac{A(u)}{\phi_u^2}du \end{aligned}$$

où $A(s) = \ln(1 + \frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s) - \frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s + \frac{1}{2}(\frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s)^2$.

2.4.4.2 $U_1(t,x) = U_2(x) = -\exp(-ax)$ **où** $a > 0$

Dans ce cas, les hypothèses (2.14) sont vérifiées. On a $I_1(y) = I_2(y) = -\frac{1}{a}\log(\frac{y}{a})$.
Calculons tout d'abord χ.

$$\begin{aligned}\chi(y) &= E_{\mathbb{P}}[\int_0^T -\tfrac{\widetilde{K}(t)}{a}\log(y\tfrac{\widetilde{K}(t)}{a})dt - \tfrac{\widetilde{K}(T)}{a}\log(y\tfrac{\widetilde{K}(T)}{a})] \\ &= E_{\mathbb{Q}}[-\tfrac{\exp(-rT)}{a}(\log(\tfrac{y}{a}) + \log(\widetilde{K}(T)) - \int_0^T \tfrac{\exp(-rt)}{a}(\log(\tfrac{y}{a}) + \log(\widetilde{K}(t)))dt].\end{aligned}$$

En utilisant

$$\log(\widetilde{K}(t)) = -rt + \int_0^t(\tfrac{r-\mu}{\sigma})dZ_s + \tfrac{1}{2}\int_0^t(\tfrac{r-\mu}{\sigma})^2ds + \textstyle\int_0^t[\ln(1+\tfrac{r-\mu}{\sigma}\phi_s) - \tfrac{r-\mu}{\sigma}\phi_s + \tfrac{1}{2}(\tfrac{r-\mu}{\sigma}\phi_s)^2]dN_s,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\chi(y) &= -\tfrac{\exp(-rT)}{a}\log(\tfrac{y}{a}) - \int_0^T \tfrac{\exp(-rt)}{a}\log(\tfrac{y}{a})dt \\ &\quad -\tfrac{\exp(-rT)}{a}E_Q[-rT + \int_0^T \theta dZ_s + \tfrac{1}{2}\int_0^T \theta^2 ds + \int_0^T p_s ds] \\ &\quad +E_Q[\int_0^T -\tfrac{\exp(-rt)}{a}(-rt + \int_0^t \theta dZ_s + \int_0^t(\tfrac{1}{2}\theta^2 + p_s)ds)]\end{aligned}$$

où $\theta = \frac{r-\mu}{\sigma}$ et $p_s = [\ln(1+\frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s) - \frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s + \frac{1}{2}(\frac{r-\mu}{\sigma}\phi_s)^2](1+\theta)(1-i_s)\frac{1}{\phi_s^2}$.

$$\begin{aligned}\chi(y) &= -\tfrac{\exp(-rT)}{a}(\log(\tfrac{y}{a}) - \int_0^T \tfrac{\exp(-rt)}{a}(\log(\tfrac{y}{a})dt + rT\tfrac{\exp(-rT)}{a} - \tfrac{\exp(-rT)}{a}\int_0^T(\tfrac{1}{2}\theta^2 + p_s)ds \\ &\quad + \int_0^T rt\tfrac{\exp(-rt)}{a}dt - \int_0^T \tfrac{\exp(-rt)}{a}dt\int_0^t(\tfrac{1}{2}\theta^2 + p_s)ds \\ &= -\tfrac{\exp(-rT)}{a}(\log(\tfrac{y}{a}) + (\tfrac{\exp(-rT)-1}{ra})\log(\tfrac{y}{a}) + K\end{aligned}$$

où $K = rT\frac{\exp(-rT)}{a} + \int_0^T rt\frac{\exp(-rt)}{a}dt - \frac{\exp(-rT)}{a}\int_0^T(\frac{1}{2}\theta^2 + p_s)ds - \int_0^T \frac{\exp(-rt)}{a}dt\int_0^t(\frac{1}{2}\theta^2 + p_s)ds$
D'où $\lambda = \chi^{-1}(x) = a\exp(\frac{ra(x-K)}{\exp(-rT)-1-r\exp(-rT)})$,

$$\xi^* = \frac{1}{a}[\frac{(x-K)ra}{\exp(-rT) - 1 - r\exp(-rT)} + \log(\widetilde{K}(T))]$$

et

$$c^*(t) = \frac{1}{a}[\frac{(x-K)ra}{\exp(-rT) - 1 - r\exp(-rT)} + \log(\widetilde{K}(t))], 0 \le t \le T.$$

Pour déterminer le portefeuille optimal, nous devons rechercher la représentation prévisible de la martingale

$$K^1(t) = E_{\mathbb{Q}}[R(T)\xi^* + \int_0^T \exp(-rs)c^*(s)ds/\mathcal{F}_t] = x + \int_0^t \varphi(s)dZ_s$$

$$\begin{aligned}
K^1(t) &= E_{\mathbb{Q}}[\tfrac{r\exp(-rT)(x-K)}{\exp(-rT)-1-r\exp(-rT)} + \tfrac{\exp(-rT)}{a}\log(\widetilde{K}(T))/\mathcal{F}_t] \\
&+E_{\mathbb{Q}}[\int_0^T \tfrac{r\exp(-rs)(x-K)}{\exp(-rT)-1-r\exp(-rT)} + \tfrac{\exp(-rs)}{a}\log(\widetilde{K}(s))ds/\mathcal{F}_t] \\
&= (x-K) + E_{\mathbb{Q}}[\int_0^t \tfrac{\exp(-rs)}{a}\log(\widetilde{K}(s))ds/\mathcal{F}_t] \\
&+E_{\mathbb{Q}}[\int_t^T \tfrac{\exp(-rs)}{a}\log(\widetilde{K}(s))ds/\mathcal{F}_t] + \tfrac{\exp(-rT)}{a}E_Q[\log(\widetilde{K}(T)] \\
&= (x-K) + \int_0^t \tfrac{\exp(-rs)}{a}\log(\widetilde{K}(s))ds + \int_t^T \tfrac{\exp(-rs)}{a}E_{\mathbb{Q}}[\log(\widetilde{K}(s))/\mathcal{F}_t]ds \\
&+\tfrac{\exp(-rT)}{a}E_{\mathbb{Q}}[\log(\widetilde{K}(T)]
\end{aligned}$$

or

$$E_{\mathbb{Q}}[\log(\widetilde{K}(s))/\mathcal{F}_t] = \log(\widetilde{K}(t)) - r(s-t) + \int_t^s (\frac{1}{2}\theta^2 + p_u)du.$$

et

$$E_{\mathbb{Q}}[\log(\widetilde{K}(T)] = -rT + \int_0^T (\frac{1}{2}\theta^2 + p_s)ds$$

D'où

$$\begin{aligned}
K^1(t) &= (x-K) + \int_0^t \tfrac{\exp(-rs)}{a}\log(\widetilde{K}(s))ds + \tfrac{\exp(-rT)}{a}(-rT + \textstyle\int_0^T(\frac{1}{2}\theta^2 + p_u)du) \\
&+ \int_t^T \tfrac{\exp(-rs)}{a}\log(\widetilde{K}(t))ds + \int_t^T \tfrac{r(s-t)\exp(-rs)}{a}ds + \int_t^T ds\tfrac{\exp(-rs)}{a}\textstyle\int_t^s(\frac{1}{2}\theta^2 + p_u)du
\end{aligned}$$

$$dK^1(t) = -\tfrac{\exp(-rT)-\exp(-rt)}{ra}\theta dZ_t$$

et

$$\pi_t^* = (R(t))^{-1}\varphi(t)\sigma_t^{-1} = \exp(-rt)\sigma_t^{-1}\frac{\exp(-rt)-\exp(-rT)}{ra}\theta$$

La fonction de valeur associée est

$$V(x) = G(\lambda)$$

or

$$\begin{aligned}
G(y) &= E[\textstyle\int_0^T \frac{y}{a}\widetilde{K}(t)dt + \frac{y}{a}\widetilde{K}(T)] \\
&= \tfrac{y}{a}(\tfrac{\exp(-rT)-1}{r} + \exp(-rT))
\end{aligned}$$

D'où

$$V(x) = (\frac{\exp(-rT)-1-r\exp(-rT)}{r})\exp(\frac{ra(x-K)}{\exp(-rT)-1-r\exp(-rT)}).$$

2.4.4.3 $U_1(t,x) = U_2(x) = \frac{x^a}{a}$, $0 < a < 1$

Les hypothèses (2.14) étant vérifiées. On a $I_1(y) = I_2(y) = y^{-\frac{1}{1-a}}$.

Calculons tout d'abord χ.

$$\begin{aligned}
\chi(y) &= E[\widetilde{K}(T)^{-\frac{a}{1-a}}y^{-\frac{1}{1-a}} + \int_0^T y^{-\frac{1}{1-a}}\widetilde{K}(t)^{-\frac{a}{1-a}}dt] \\
&\quad \text{soit } b = -\tfrac{a}{1-a}, \text{ alors} \\
\chi(y) &= y^{-\frac{1}{1-a}}E[R(T)^b L(T)^b + \int_0^T R(s)^b L(s)^b ds] \\
&= y^{-\frac{1}{1-a}}\{R(t)^b E(L(T)^b) + \int_0^T R(s)^b E(L(s)^b)ds\} \\
\text{or} & \\
L(s)^b &= \exp(\int_0^s g_u(b)du)\mathcal{E}(i(\tfrac{r-\mu}{\sigma\alpha})bW)_s \mathcal{E}((1+(1-i)\tfrac{r-\mu}{\sigma\alpha^2}\phi)^b - 1)\widetilde{M})_s \\
\text{où} &\quad g_u(b) = \tfrac{1}{2}b(b-1)(i_u(\tfrac{r-\mu}{\sigma}))^2 \\
&\quad + \tfrac{(1-i_u)}{\phi_u^2}[(1+(1-i_u)\tfrac{r-\mu}{\sigma}\phi_u)^b - 1 - (1-i_u)\tfrac{r-\mu}{\sigma}\phi_u b]
\end{aligned}$$

D'où $L(s)^b$ est une martingale et

$$\begin{aligned}
\chi(y) &= y^{\frac{-1}{1-a}}\{R(T)^b \exp(\int_0^T g_u(b)du) + \int_0^T R(s)^b \exp(\int_0^s g_u(b)du)ds\} \\
&= y^{\frac{-1}{1-a}}j(T)
\end{aligned}$$

où $j(T) = R(T)^b \exp(\int_0^T g_u(b)du) + \int_0^T R(s)^b \exp(\int_0^s g_u(b)du)ds$

Donc $\lambda = \chi^{-1}(x) = (\frac{x}{j(T)})^{a-1}$, $c^*(t) = \frac{x}{j(T)}\widetilde{K}(t)^{\frac{-1}{1-a}}$ et $\xi^* = \frac{x}{j(T)}\widetilde{K}(T)^{\frac{-1}{1-a}}$.

Nous allons déterminer la représentation de la martingale $K^1(t) = \frac{x}{j(T)}E[\widetilde{K}(T)^b + \int_0^T \widetilde{K}(s)^b ds/\mathcal{F}_t]$ pour obtenir le portefeuille optimal.

$$\begin{aligned}
K^1(t) &= \tfrac{x}{j(T)}\{R(T)^b E[L(T)^b/\mathcal{F}_t] + \int_0^T R(s)^b E[L(s)^b/\mathcal{F}_t]\} \\
&= \tfrac{x}{j(T)}\{R(T)^b \exp(\int_t^T g_u(b)du)L(t)^b + \int_0^t R(s)^b L(s)^b ds \\
&\quad + \int_t^T R(s)^b \exp(\int_t^s g_u(b)du)L(t)^b ds\}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
dK^1(t) &= \tfrac{x}{j(T)}\{-R(T)^b \exp(\int_t^T g_u(b))du)(g_t(b)L(t)^b dt - d(L(t)^b) \\
&\quad + R(t)^b L(t)^b dt + (\int_t^T R(s)^b \exp(\int_t^s g_u(b)du)ds)d(L(t)^b) \\
&\quad - L(t)^b R(t)^b dt - L(t)^b g_t(b)\int_t^T R(s)^b \exp(\int_t^s g_u(b)du)ds\}
\end{aligned}$$

or

$$d(L(t)^b) = bL_{t^-}^b \tfrac{r-\mu}{\sigma}dY_t^{(\alpha)} + \tfrac{1}{2}b(b-1)L_{t^-}^b(\tfrac{r-\mu}{\sigma})^2 d\left\langle Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}\right\rangle_t + (L_t^b - L_{t^-}^b - bL_{t^-}^b\tfrac{r-\mu}{\sigma}\phi_t)dN_t$$

et

$$dN_t = (1-i_t)\tfrac{1}{\phi_t^2}d[Y^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}]_t = (1-i_t)\tfrac{1}{\phi_t^2}(dt + \phi_t dY_t^{(\alpha)})$$

D'où

$$\begin{aligned}
dK^1(t) &= \tfrac{x}{J(T)}\{R(T)^b \exp(\int_t^T g_s(b)ds) + \int_t^T R(s)^b \exp(\int_t^s g_u(b)du)ds\} * \\
&\quad \{bL(t^-)^b\tfrac{r-\mu}{\sigma} + (L(t)^b - L(t^-)^b - bL(t^-)^b\tfrac{r-\mu}{\sigma}\phi_t)(1-i_t)\tfrac{1}{\phi_t}\}dY_t^{(\alpha)} \\
&= \psi_t dY_t^{(\alpha)}
\end{aligned}$$

et

$$\pi_t^* = (R(t))^{-1}\psi(t)\sigma_t^{-1}.$$

La fonction de valeur est égale à

$$V(x) = G(\lambda)$$

où

$$\begin{aligned} G(\lambda) &= \tfrac{1}{a}E[(y\widetilde{K}(T))^{\frac{a}{a-1}} + \int_0^T (y\widetilde{K}(t))^{\frac{a}{a-1}}dt] \\ &= \frac{y^{\frac{a}{a-1}}}{a}\widetilde{K}(T) \end{aligned}$$

D'où

$$V(x) = \frac{x^a}{a}(j(T))^{1-a}.$$

2.5 Temps d'atteinte d'une barrière

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe au temps d'atteinte d'une barrière. Si $a > 0$, on veut déterminer la loi de $T_a(S) = \inf\{t, S_t \geq a\}$ où S est la solution de (2.5) et $s_0 \in \mathbb{R}_+, s_0 \leq a$.
Avant de déterminer la loi de $T_a(S)$ dans un cas particulier, nous allons rappeler les résultats existant dans le cas où S est soit un mouvement brownien, soit un processus de Poisson.

2.5.1 Rappel

Cas d'un mouvement brownien

Soit $(W_s)_{s\geq 0}$ un mouvement brownien. On note $W_s^{(\mu)} = W_s + \mu s$ et $T_z^{(\mu)} = \inf\{s, W_s^{(\mu)} = z\}$. Alors il est bien connu que (cf [17] pour une démonstration)

$$\mathbb{P}_x(T_z^{(\mu)} \in dt) = \frac{|z-x|}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{(z-x-\mu t)^2}{2t})dt$$

Cas d'un processus de Poisson

Soit N un processus de Poisson d'intensité λ et h une fonction monotone définie sur $\mathbb{R}_+$. On cherche la loi de $T_h(N) = \inf\{t > 0, N_t \geq h(t)\}$. Nous allons distinguer deux cas :
-1^e cas : h est une fonction positive et strictement croissante. Alors d'après [15]

$$\mathbb{P}(T_h(N) > x) = \exp(-\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)1_{\{x\geq \nu_n^c\}} \tag{2.21}$$

où $\nu_n^c = h^{-1}(n) = \inf\{y/h(y) \geq n\}$ et où $(A_n)_{n\geq 0}$ est la famille de polynômes vérifiant

$$\begin{cases} A_0 &= 1 \\ A_n'(x) &= \lambda A_{n-1}(x) \text{ et } A_n(\nu_n^c) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

-2^e cas : h est une fonction décroissante et telle que $h(0) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(T_h(N) > x) = \exp(-\lambda x)\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n(x)1_{\{x<\nu_n^d\}}$$

où $\nu_n^d = \inf\{y, h(y) \leq n\}$ et $\widetilde{A}_n$ vérifie

$$\begin{cases} \widetilde{A}_0 & = 1 \\ \widetilde{A}'_n(x) & = \lambda \widetilde{A}_{n-1}(x) \text{ et } \widetilde{A}_n(0) = 0. \end{cases}$$

En effet, si on note $P_n(x) = \mathbb{P}(T_h(N) > x, N_x = n\}$. Soit τ le dernier instant de saut avant x, on montre par un raisonnement identique à celui fait dans le premier cas dans [15] que

$$P_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \nu_n \\ E[P_{n-1}(\tau)] & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, si $x > \nu_n^d$, alors $h(x) < n$; sur l'évènement "$N_x = n$" cela signifie qu'à la date x la trajectoire de $t \to N_t$ a déjà croisé la courbe $t \to h(t)$, donc $T_h(N) < x$. Par conséquent, l'évènement "$T_h(N) > x$ et $N_x = n$" est impossible. Lorsque $x \leq \nu_n^d$, pour avoir simultanément $T_h(N) > x$ et $N_x = n$, il est nécessaire que $\tau_n < \nu_n^d$ (sinon $T_h(N) < x$) et que la trajectoire $t \to N_t$ ait atteint le niveau $n-1$ en τ sans avoir croisé $t \to h(t)$ dans l'intervalle de temps $(0, \tau)$.
Comme $x - \tau$ suit une loi exponentielle de paramètre λ, on obtient si $x < \nu_n$

$$P_n(x) = \int_0^x P_{n-1}(t)\lambda \exp(-\lambda(x-t))dt.$$

Par conséquent, en réecrivant cette égalité sous forme différentielle, on obtient la relation suivante

$$P'_n(x) = \lambda P_{n-1}(x).$$

D'où le résultat en posant

$$P_n(x) = \exp(-\lambda x)\widetilde{A}_n(x) \text{ pour } \{x < \nu_n^d\}.$$

-3^e cas : Si $h(0) \leq 0$, alors

$$T_h(N) = 0.$$

On a aussi besoin de la loi de $\widetilde{T}_h(N) = \inf\{t > 0, N_t \geq h(t)\}$. on distingue comme précédemment plusieurs cas suivant la monotonie de la fonction h.
-1^e cas : Si $h(0) \geq 0$, alors

$$\widetilde{T}_h(N) = 0.$$

-2^e cas : Si $h(0) < 0$ et h est décroissante, alors

$$\widetilde{T}_h(N) = +\infty. \tag{2.23}$$

-3^e cas : Si $h(0) < 0$ et h est croissante, alors

$$\mathbb{P}(T_h(N) > x) = \exp(-\lambda x) \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n(x) 1_{\{x < \nu_n^c\}} \tag{2.24}$$

où $\nu_n^c = h^{-1}(n) = \inf\{y/h(y) \geq n\}$ et et $\widetilde{A}_n$ vérifie

$$\begin{cases} \widetilde{A}_0 & = 1 \\ \widetilde{A}'_n(x) & = \lambda \widetilde{A}_{n-1}(x) \text{ et } \widetilde{A}_n(0) = 0. \end{cases}$$

2.5.2 Loi de $\mathbf{T}_a$

On s'intéresse au cas où les coefficients σ, μ sont des constantes et où la fonction ϕ est constante par intervalles et continue à droite, ne prenant que deux valeurs 0 et ϕ. On note $\upsilon = \frac{1}{\phi^2}$, N est d'intensité $(1 - i_t)\upsilon$.

Par exemple, nous supposons

$$\forall\ t \in [0,1],\ S_t = S_0 \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \mu t) \tag{2.25}$$

$$\forall\ t \in [1,2],\ S_t = S_1 \exp[(\mu - \frac{\sigma}{\phi})(t-1)](1+\sigma\phi)^{N_t} \tag{2.26}$$

$$\forall\ t \in [2,3], S_t = S_2 \exp(\sigma(W_t - W_2) - \frac{1}{2}\sigma^2(t-2) + \mu(t-2)) \tag{2.27}$$

Nous allons maintenant pouvoir calculer $\mathbb{P}(T_a(S) > t)$ dans le cas où $a > S_0$.

-Pour tout $t \in$ [0,1]

$\mathbb{P}(T_a(S) > t) = \mathbb{P}(\sup\limits_{0 \leq s \leq t} S_0 \exp(\sigma W_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s + \mu s)) > a) = \mathbb{P}(T_z^{(u)} > t) = \int_t^\infty \frac{z}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{(z-us)^2}{2s}) ds$ où $u = -\frac{1}{\sigma}[(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu)]$ et $z = \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{a}{S_0})$

-Pour tout $t \in$[1,2]

$\mathbb{P}(T_a > t) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} S_s < a) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq 1} S_s < a, \sup_{1 \leq s \leq t} S_s < a)$.

Or $S_s = S_1 S_s^1$ sur [1,2] avec S_s^1 indépendant de S_1.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_a > t) &= E(1_{\{\sup_{s\leq 1} S_s < a\}} E(1_{\{\sup_{1\leq s\leq t} S_s^1 S_1 < a\}} / \mathcal{F}_1)) \\ &= E(1_{\{\sup_{s\leq 1} S_s < a\}} E(1_{\{\sup_{1\leq s\leq t} S_s^1 S_1 < a\}} / S_1)) \\ &= E(1_{\{\sup_{s\leq 1} S_s < a\}} \Phi(S_1)) \end{aligned}$$

avec $\Phi(x) = \mathbb{P}(\sup_{1 < s \leq t} x S_s^1 < a)$ pour $x > 0$. On peut calculer Φ en utilisant les remarques du début du paragraphe. En effet, comme $xS_t^1 = x\exp[(\mu - \frac{\sigma}{\phi})(t-1)](1+\sigma\phi)^{N_t}$ pour $t \in [1,2]$,

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(T_h(N) > t)$$

avec

$$h_x = \frac{\ln(\frac{a}{x}) - (\mu - \frac{\sigma}{\phi})(t-1)}{\ln(1+\sigma\phi)}.$$

Suivant les propriétés de la fonction h_x, on peut appliquer les résultats rappelés dans le paragraphe précédent.

-Pour tout $t \in$ [2,3]

$\mathbb{P}(T_a > t) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} S_s < a) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq 1} S_s < a, \sup_{1 \leq s \leq 2} S_s < a, \sup_{2 \leq s \leq t} S_s < a)$.

Or $S_s = S_1 S_s^1$ sur [1,2] avec S_s^1 indépendant de S_1 et $S_s = S_2 S_s^2$ sur [2,3] avec S_s^2 indépendant de S_2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_a > t) &= E(1_{\{\sup_{s\leq 1} S_s < a\}} E(1_{\{\sup_{1\leq s\leq 2} S_s^1 S_1 < a\}} E(1_{\{\sup_{2\leq s\leq t} S_s^2 S_2 < a\}} / \mathcal{F}_2)/\mathcal{F}_1)) \\
&= E(1_{\{\sup_{s\leq 1} S_s < a\}} E(1_{\{\sup_{1\leq s\leq t} S_s^1 S_1 < a\}} E(1_{\{\sup_{2\leq s\leq t} S_s^2 S_2 < a\}} / S_2)/S_1)) \\
&= E(1_{\{\sup_{s\leq 1} S_s < a\}} E(1_{\{\sup_{1\leq s\leq t} S_s^1 S_1 < a\}} \Psi(S_2)/S_1)) \\
&\quad \text{avec } \Psi(x) = \mathbb{P}(\sup_{2<s\leq t} x S_s^2 < a) \\
&= E(1_{\{\sup_{s\leq 1} S_s < a\}} \Phi(S_1)) \\
&\quad \text{avec } \Phi(x) = E(1_{\{\sup_{1\leq s\leq 2} x S_s^1 < a\}} \Psi(x S_2^1))
\end{aligned}$$

Le calcul explicite de Ψ se fait en utilisant la relation

$$\Psi(S_2) = P(T_z^{(u)} + 2 > t)$$

où $u = -\frac{1}{\sigma}[(\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu)]$ et $z = \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{a}{S_2})$.

Dans le cas général, on fait le même raisonnement sur chaque intervalle où ϕ est constante.

Il est aussi intéressant de calculer $\mathbb{P}(T_a > t + h \;/\; \mathcal{F}_t)$.

On calcule cette probabilité pour des valeurs de h assez petites pour que, sur l'intervalle $[t, t+h]$, la fonction i ne change pas de valeur. Ceci est possible puisque ϕ est constante par morceaux. Nous avons

$$\mathbb{P}(T_a > t + h/\mathcal{F}_t) = 1_{\{\sup_{s\leq t} S_s < a\}} \mathbb{P}(sup_{t<s\leq t+h} S_s < a/\mathcal{F}_t).$$

De plus, $\mathbb{P}(sup_{t<s\leq t+h} S_s < a/\mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(S_t \sup_{t<s\leq t+h} S_s^t < a \;/\; \mathcal{F}_t) = \Psi(S_t)$ où

$$\Psi(x) = \mathbb{P}(\sup_{t<s\leq t+h} S_s^t < \frac{a}{x})$$

Deux cas se présentent :

1) Si $i_t = 1$, alors

$$S_s^t = \exp(\sigma(W_s - W_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(s-t)).$$

Et par conséquent,

$$\Psi(x) = \mathbb{P}(T_z^u > h) = \int_h^{+\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{(z-us)^2}{2s}) ds \tag{2.28}$$

où $u = \frac{1}{\sigma}[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]$ et $z = \frac{\ln(a/x)}{\sigma}$. D'où

$$\mathbb{P}(T_a > t + h/\mathcal{F}_t) = 1_{\{\sup_{s\leq t} S_s < a\}} \int_h^{+\infty} \frac{\ln(a/S_t)/\sigma}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{(\ln(a/S_t)/\sigma - us)^2}{2s}) ds$$

2) Si $i_t = 0$,

$$S_s^t = \exp[(\mu - \frac{\sigma}{\phi})(s-t)](1+\sigma\phi)^{N_s - N_t}$$

et $(N_s, t \leq s \leq t+h)$ a pour intensité v. Par conséquent, si $\sigma\phi > 0$

$$\Psi(x) = \mathbb{P}(T_g(N) > h)$$

D'où en utilisant (2.21) et (2.22)

$$\Psi(x) = \mathbb{P}(T_g(N) > h) = \begin{cases} \exp(-\upsilon h)\sum_{n=0}^{\infty} A_n(h) 1_{\{h \geq \nu_n^c\}} & si \quad \mu - \frac{\sigma}{\phi} < 0 \text{ et } \sigma\phi > 0 \\ \exp(-\upsilon h)\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n(h) 1_{\{h \leq \nu_n^d\}} & \text{si} \quad \mu - \frac{\sigma}{\phi} > 0 \text{ et } \sigma\phi > 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

où $g(t) = \frac{-(\mu - \frac{\sigma}{\phi})t + \ln(a/x)}{\ln(1+\sigma\phi)}$, $\nu_n^c = \inf\{t, \frac{-(\mu-\frac{\sigma}{\phi})t+\ln(a/x)}{\ln(1+\sigma\phi)} \geq n\}$ et $\nu_n^d = \inf\{t, \frac{-(\mu-\frac{\sigma}{\phi})t+\ln(a/x)}{\ln(1+\sigma\phi)} \leq n\}$.
Si $\sigma\phi > 0$, on a

$$\Psi(x) = \mathbb{P}(\widetilde{T}_g(N) > h).$$

On obtient en remplaçant par (2.23) et (2.24)

$$\mathbb{P}(\widetilde{T}_g(N) > h) = \begin{cases} 0 & si \quad \mu - \frac{\sigma}{\phi} < 0 \text{ et } \sigma\phi < 0 \\ \exp(-\upsilon h)\sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n(h) 1_{\{h \leq \nu_n^c\}} & \text{si} \quad \mu - \frac{\sigma}{\phi} > 0 \text{ et } \sigma\phi < 0. \end{cases} \tag{2.30}$$

Bibliographie

[1] Barles G, Buckdahn R, Pardoux E : BSDE's and integral-partial differential equations. *Stochastics and Stochastic Reports*, 1995.

[2] Borodin.A.N, Salminen.P : *Handbook of Browian Motion-Facts and Formulae.* Probability and its Applications. Birkhauser Verlag, 1996.

[3] Dana R-A, Jeanblanc-Picqué M : *Marchés Financiers en temps continu ; Valorisation et Equilibre,* Economica, Paris, 1994

[4] Dellacherie C, Meyer P.A : *Probabilités et potentiel*, chap V à VIII, Hermann, 1980.

[5] Dritschel.P, Protter P : Complete markets with Discontinuous Security Price, *Finance and Stochastics,*3, p 203-214, 1999.

[6] El Karoui N, Mazliak L : *Backward Stochastic Differential Equations.* Pitman-Research Notes in Mathematics Series 364, 1994.

[7] Emery M : On the Azéma' Martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Mathematics,* vol 1372, p 66-87, Springer Verlag, 1990.

[8] Harrison J, Piska S : Martingales and Stochastic Integrals in the theory of continuous Trading, *Stochastic Processes and their applications,* 11, 215-260, 1981.

[9] Jacod J., Shiryaev A.N. : *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Grudlehren der methematischen Wissenschaften 288, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[10] Jacod J, Yor M : Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales, *Z. Wahrscheinlichkeistheorie verw. Gebiete,* 38, 83-125, 1977.

[11] Jeanblanc M, Privault N : Complete Market with Poisson and Brownian Components, *Prébublication, Université D'Evry,* 1999.

[12] Karatzas I. : *Lectures on the Mathematics of Finance,* CRM Monograph Series, Montréal, vol 8, 1996.

[13] Pardoux E, Peng S : Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equation. *Lecture Notes in CIS* 176, p 200-217, Springer, 1992.

[14] Peng S : A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Stochastics*, Vol 38, p 119-134, 1992.

[15] Picard.P, Lefèvre.C : The Probability of Ruin in Finite Time with Discrete Claim Size *Distribution. Scand. Actuarial J.* 1 : p 58-69, 1997

[16] Protter P : *Stochastic Integration and Differential Equation.* Application of Mathematics-21, Springer-Verlag, 1990.

[17] Revuz D, Yor M : *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Third Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Deuxième partie

Choix d'un modèle pour le défaut

Chapitre 3

Le modèle

Dans la littérature sur le risque de défaut apparaissent deux types de modèles. Dans la première classe introduite par Merton [11], appelée modèle de structure, le défaut apparaît quand le prix d'une firme passe en-dessous d'une barrière.
La seconde classe de modèle est "le modèle à intensité"(Duffie et Lando [5], Duffie Schroder et Skiadas [6], Jarrow-Turnbull [7], Madan et Unal [10]). Le défaut dans ce cas est modélisé comme le premier instant de saut d'un processus ponctuel d'intensité stochastique.
Ces auteurs ne distinguent cependant pas l'information liée au défaut de l'information du marché.
Nous proposons une modélisation de l'instant de défaut qui différencie ces deux types d'information. Cette approche présente l'intérêt de faire le lien entre les deux approches décrites précédemment et de comparer les marchés "sans" et "avec" défaut.

Considérons un marché financier construit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, constitué de n actifs risqués S^i, $i = 1, ..., n$ et d'un actif sans risque S^0 .
L'information $\mathcal{F}_t$ disponible sur ce marché à la date t est contenue dans la connaissance des prix des actifs. On a donc

$$\mathcal{F}_t \subseteq \sigma(S^i_s,\ S^0_s,\ s \leq t,\ i = 1, ..., n).$$

L'instant de défaut dans le marché est modélisé par une variable aléatoire τ, supposée $\mathcal{G}$-mesurable et positive. Le processus de défaut est défini par le processus croissant continu à droite

$$N_t = 1_{\{\tau \leq t\}}. \tag{3.1}$$

La filtration complétée continue à droite engendrée par le processus de défaut est notée $(\mathcal{H}_t)$,

$$\mathcal{H}_t = \sigma(N_s, s \leq t).$$

On remarque que τ est un $\mathbb{H}$-temps d'arrêt, et donc un $\mathbb{I}-$temps d'arrêt pour toute filtration $\mathbb{I}$ contenant $\mathbb{H}$. De plus, $\mathbb{H}$ est la plus petite filtration faisant de τ un temps d'arrêt.
Nous travaillons sous l'hypothèse suivante :

$$\{\text{Les agents financiers sont avertis lorsque le défaut se produit}\}.$$

Par conséquent, l'information que les agents possèdent à la date t est représentée par la tribu $\mathcal{G}_t$ où

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t.$$

La filtration $\mathbb{G}$ est la plus petite filtration contenant $\mathbb{F}$ telle que τ est un $\mathbb{G}-$temps d'arrêt.

Le problème de modélisation consiste à comprendre le lien entre le temps de défaut τ et la filtration $\mathbb{F}$. Il s'agit donc de récrire les dynamiques des prix dans la filtration $\mathbb{G}$, filtration du monde avec défaut. Les problèmes liés au grossissement progressif de filtration sont d'une part le calcul d'espérance conditionnelle par rapport à la filtration $\mathbb{G}$ avec en finance le problème d'évaluation d'actifs contingents. En particulier, on regarde le problème d'évaluation lorsque le paiement X a lieu en T ,si le défaut n'est pas apparu avant la maturité, on verse l'actif, sinon dans le cas contraire une compensation versée à maturité ou au moment du défaut. En cas de marché complet, le prix de ce contrat est

$$E_{\mathbb{Q}}(X \ / \ \mathcal{G}_t)$$

où $\mathbb{Q}$ est l'unique martingale mesure équivalente. Ici, le marché n'est pas complet si l'on ne peut négociés que les actifs S^i. Dans un premier temps, on calcule

$$E_{\mathbb{Q}}(X \ / \ \mathcal{G}_t)$$

où $\mathbb{Q}$ est une m.m.e.
Dans un deuxième temps, on cherche à compléter le marché. Se pose alors le problème de récrire les dynamiques des actifs S^i dans la filtration $\mathbb{G}$. Pour cela, il est important de préciser les hypothèses qui permettent de conserver les propriétés de martingales et de semi-martingales entre les filtrations $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ et d'expliciter la décomposition des $\mathbb{F}$-martingales en $\mathbb{G}$-semi-martingales lorsque ceci est possible. Ces problèmes ont largement été étudiés dans les travaux de Jeulin [9], Yor [12], Dellacherie ([1] ou [2]). Dans la suite de ce paragraphe, nous rappelons les éléments qui permettent de répondre à ces deux questions.

Calcul d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathbb{G}$

Soit F la version continue à droite de la sous-martingale $P(\tau \leq t/\mathcal{F}_t)$. Nous supposons $F_0 = 0$ et $F_t < 1$ pour tout t, en particulier τ n'est pas un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. De plus, nous supposons que l'une des deux conditions suivantes est toujours vérifiée :
- (**C1**) toutes les $\mathbb{F}-$martingales sont continues.
- (**C2**) pour tout $\mathbb{F}$-temps d'arrêt θ, $\mathbb{P}(\tau = \theta) = 0$.

Remarque 3.1 *: Tout processus $\mathbb{G}-$prévisible est égal jusqu'en τ à un processus $\mathbb{F}-$prévisible. Autrement dit, si H est un processus $\mathbb{G}-$prévisible, il existe h un processus $\mathbb{F}-$prévisible tel que*

$$H_t 1_{\{t< \ \tau\}} = h_t 1_{\{t< \ \tau\}}.$$

Le processus h est unique à condition de le prendre nul sur l'ensemble $\{1 - F_t = 0\}$, ensemble qui est vide dans notre cas (cf Dellacherie-Meyer [4] p.186).

Nous pouvons ainsi définir le processus de hasard de la manière suivante :

Définition 3.2 *: Nous appelons $\mathbb{F}-$processus de hasard le processus Γ défini par $\Gamma_t = -\ln(1-F_t)$.*

Nous rappelons deux résultats ([1] ou [2])

Lemme 3.3 *: Pour toute variable aléatoire $\mathcal{G}_T-$mesurable Y intégrable*

$$E(Y1_{\{T<\tau\}}/\mathcal{G}_t) = 1_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}E(Y1_{T<\tau}/\mathcal{F}_t). \tag{3.2}$$

En particulier, si $X \in \mathcal{F}_T$ est intégrable

$$E(X1_{\{T<\tau\}}/\mathcal{G}_t) = 1_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}E(Xe^{-\Gamma_T}/\mathcal{F}_t). \tag{3.3}$$

Démonstration : Nous reprenons la preuve de ce lemme qui se trouve dans [1]. Il suffit de remarquer que la restriction à l'ensemble $\{\tau > t\}$ de toute variable aléatoire $\mathcal{G}_t-$mesurable est égale à une variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable. L'expression (3.3) provient de (3.2) et du fait que

$$E(X1_{\{T<\tau\}}/\mathcal{F}_t) = E(XE(1_{\{T<\tau\}}/\mathcal{F}_T)/\mathcal{F}_t).$$

■

Remarque 3.4 *Si le processus Γ est à variation bornée, alors il est croissant. En effet, F est dans ce cas un processus à variation bornée. Comme c'est une sous-martingale, la décomposition de Doob-Meyer (cf [3]) entraîne que F est un processus croissant et par suite Γ aussi.*

Remarque 3.5 *Lorsque le processus Γ est croissant, lors de l'évaluation d'un actif contingent, on peut l'interpréter dans les égalités précédentes comme un spread. En effet, si l'on veut évaluer le zéro-coupon avec défaut $1_{T<\tau}$ avec un taux d'actualisation r $\mathbb{F}-$adaptée, l'égalité (3.3) implique que le prix actualisé est*

$$E(e^{-\int_0^T r_s ds}1_{\{T<\tau\}}/\mathcal{G}_t) = 1_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}E(e^{-\int_0^T r_s ds}e^{-\Gamma_T}/\mathcal{F}_t).$$

Par conséquent, le prix en t vérifie

$$1_{\{t<\tau]}e^{\int_0^t r_s ds+\Gamma_t}E(e^{-(\int_0^T r_s ds+\Gamma_T)}/\mathcal{F}_t).$$

Corollaire 3.6 *: Le processus*

$$L_t = (1-N_t)e^{\Gamma_t} \tag{3.4}$$

est une $\mathbb{G}-$martingale.

Démonstration : Pour montrer que L est une $\mathbb{G}-$martingale, il suffit de calculer $E[(1-N_t)e^{\Gamma_t}/\mathcal{G}_s]$ pour $t > s$. Or en utilisant l'égalité (3.3), nous avons

$$E[(1-N_t)e^{\Gamma_t}/\mathcal{G}_s] = 1_{\{s<\tau\}}e^{\Gamma_s}E[1_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}/\mathcal{F}_s]$$

et

$$E[1_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}/\mathcal{F}_s] = E[e^{\Gamma_t}E[1_{\{t<\tau\}}/\mathcal{F}_t]/\mathcal{F}_s] = 1.$$

Ce résultat est tres général dans le sens où l'on utilise pas la formule d'Itô pour le démontrer ■

Corollaire 3.7 *: Soit Z un processus $\mathbb{F}-$prévisible et borné.*

a) Si F est croissant et continu, alors

$$E(Z_\tau/\mathcal{G}_t) = 1_{\{\tau\leq t\}}Z_\tau + 1_{\{t<\tau\}}E(\int_t^\infty Z_u \exp(\Gamma_t - \Gamma_u)d\Gamma_u/\mathcal{F}_t). \tag{3.5}$$

b) Dans le cas général,

$$E(Z_\tau/\mathcal{G}_t) = 1_{\{\tau\leq t\}}Z_\tau + 1_{\{t<\tau\}}e^{\Gamma_t}E(\int_t^\infty Z_u dF_u/\mathcal{F}_t). \tag{3.6}$$

Démonstration : Nous reprenons la preuve de ce lemme qui se trouve dans [8]. Pour démontrer l'égalité (3.6), nous commençons par la vérifier pour des processus Z de la forme

$$Z_u = \sum_{i=0}^n Z_{t_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}(u)$$

où $t_0 = t < ... < t_{n+1} = \infty$. En utilisant le lemme 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned}
E(Z_\tau 1_{\{t<\tau\}}/\mathcal{G}_t) &= \textstyle\sum_{i=0}^n E(E(1_{\{t<\tau\}}Z_{t_i}1_{]t_i,t_{i+1}]}(\tau)/\mathcal{F}_{t_{i+1}})/\mathcal{F}_t) \\
&= E(\textstyle\sum_{i=0}^n Z_{t_i}(F_{t_{i+1}} - F_{t_i})/\mathcal{F}_t) \\
&= E(\textstyle\sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} Z_u dF_u/\mathcal{F}_t) \\
&= E(\textstyle\int_t^\infty Z_u dF_u/\mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

Le résultat final s'obtient en utilisant un théorème de classe monotone.

A partir de (3.6) nous obtenons (3.5) en remarquant que $dF_u = \exp(-\Gamma_u)d\Gamma_u$ si F est croissant et continu. ■

Remarque 3.8 *: Ce résultat reste valable pour un processus Z $\mathbb{G}-$prévisible grâce à la remarque 3.1.*

Remarque 3.9 *: Les égalités (3.3) et (3.6) sont trivialement vérifiées si τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. Il suffit de poser $e^{\Gamma_t} = 1 - F_t = 1_{\{t<\tau\}}$.*

Bibliographie

[1] Dellacherie C. : Un exemple de la théorie générale des processus, *Séminaire de probabilités* IV, Lecture Notes in Math. 124, 60-70, Springer-verlag, Berlin, 1970.

[2] Dellacherie C. : *Capacités et processus stochastiques,* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[3] Dellacherie C., Meyer P.A. : *Probabilités et potentiel, Théorie des martingales,* Hermann, 1980.

[4] Dellacherie C., Maisonneuve B., Meyer P.A. : *Probabilités et potentiel, processus de Markov. Compléments de calcul stochastique.* Herman, 1992.

[5] Duffie D., Lando D. : Term structure of credit spreads with incomplete accounting information, *preprint*, CAF Copenhagen, 1997

[6] Duffie D., Schroder M., Skiadas C. : Recursive valuation of defaultable securities and the timing resolution of uncertainty, *Annals of Applied Probability*, 6, 1075-1090, 1997.

[7] Jarrow R., Turnbull S. : Pricing options on financial securities subject to default risk, *J. Finance* 50, 53-86, 1995.

[8] Jeanblanc M., Rutkowski M. : Modelling on default risk : An overview. *Mathematical Finance : theory and practice. Modern Mathematics Series, High Education press ;* 1999.

[9] Jeulin T. : *Semi-martingales et grossissement de filtration,* Lecture Notes in Math. 833, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[10] Madan D., Unal H. : Pricing the risk default, *Rev Derivatives Research* 2, 121-160, 1995.

[11] Merton R.C. : On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates, *Journal of Finance* , 29, 449-470, 1974.

[12] Yor M. : *Some aspects of Brownian Motion. Part II : Some recent Martingale Problems,* Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser, 1997.

Chapitre 4

La filtration $\mathbb{F}$ est la filtration grossière

Ce chapitre est consacré à l'étude du risque de défaut lorsque la filtration $\mathbb{F}$ est la filtration grossière. Cette situation est par exemple réalisée en cas d'information partielle (cf [1]) lorsque l'on modélise l'instant de défaut par une approche structurelle. Dans ce cas, les filtrations $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont identiques.

Remarque 4.1 *: Le processus F est dans ce cas la fonction de répartition de τ, choisie continue à droite.*

Dans ce cadre, nous considérons le problème d'évaluation d'actifs contingents soumis au défaut. Nous montrons que la plupart des calculs peuvent se mener facilement. En particulier, nous donnons la valeur de zéro-coupon.

Dans le dernier parargraphe, nous démontrons le monotonicité des prix en fonction de la maturité. Ensuite, nous montrons que la connaissance des prix d'un zéro-coupon permet d'obtenir des renseignements sur le temps de défaut τ. Plus précisément, nous déterminons la fonction de répartition de τ, F, en fonction des prix de zéro-coupons de différentes maturités. Les prix d'actifs contingents sont calculés à l'aide de la fonction F. Par conséquent, sa connaissance à partir des prix du marché permet la calibration des paramètres du modèle.

Nous faisons l'hypothèse que le taux r est déterministe.

Notation :

$R_t = \exp(\int_0^t r_s ds)$ est le taux d'actualisation.

4.1 Etude d'un exemple simple

Nous donnons dans ce paragraphe la valeur d'un zéro-coupon avec défaut dont la compensation est versée dans un premier cas à maturité et dans un second cas à la date du défaut. Nous parlons de valeur d'un actif contingent, et non de prix, car le prix d'un contrat dans un marché complet à l'instant t est obtenu au moyen d'une probabilité appelée martingale mesure équivalente (m.m.e en abrégé). Or nous n'avons pour l'instant pas de notion de complétion de marché, ni unicité de m.m.e.

Nous commençons par énoncer le lemme 3.3 dans cette situation de filtration grossière qui nous permet de calculer les espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{G}_t$.

Lemme 4.2 *:*

$$E(1_{T<\tau} \ / \ \mathcal{G}_t) = 1_{t<\tau}\frac{1-F(T)}{1-F(t)}. \tag{4.1}$$

Si h est une fonction borélienne,

$$1_{t<\tau}E(h(\tau)1_{\tau\leq T} \ / \ \mathcal{G}_t) = 1_{t<\tau}\frac{1}{1-F(t)}\int_t^T h(u)dF(u).$$

Démonstration : Ce résultat est un cas particulier du lemme 3.3. ∎

Remarque 4.3 *: Toute variable aléatoire $\mathcal{G}_t-$mesurable et intégrable H est de la forme*

$$H = 1_{t<\tau}\widetilde{h} + h(\tau)1_{t\geq\tau}$$

où h est une fonction borélienne et $\widetilde{h}$ est une constante. Ceci permet d'obtenir le résultat du lemme précédent directement.

Théorème 4.4 *: Le processus M défini par*

$$M_t = N_t - \int_0^{t\wedge\tau}\frac{dF(s)}{1-F(s-)}$$

est une $\mathcal{G}_t-$martingale.

Démonstration : Nous montrons que $E(M_t - M_s \ / \ \mathcal{G}_s) = 0 = E(N_t - N_s \ / \ \mathcal{G}_s) - E(\Lambda_{t\wedge\tau} - \Lambda_{s\wedge\tau} \ / \ \mathcal{G}_s)$ où Λ est défini par

$$\Lambda_t = \int_0^t \frac{dF(s)}{1-F(s-)}.$$

D'où

$$\Lambda_{t\wedge\tau} - \Lambda_{s\wedge\tau} = \int_s^t (1-N_{u-})\frac{dF(u)}{1-F(u-)}.$$

De plus,

$$E(N_t - N_s/\,\mathcal{G}_s) = E(1_{s<\tau\leq t}/\mathcal{G}_s) = 1_{s<\tau}\frac{\mathbb{P}(s<\tau\leq t)}{\mathbb{P}(s<\tau)} = 1_{s<\tau}\frac{F(t)-F(s)}{1-F(s)}$$

et

$$E(\int_s^t (1-N_{u-})\frac{dF(u)}{1-F(u-)} \ / \ \mathcal{G}_s) = 1_{s<\tau}\frac{1}{1-F(s)}[(1-F(t)\int_s^t \frac{dF(u)}{1-F(u-)} + \int_s^t dF(u)\int_s^u \frac{dF(v)}{1-F(v-)}).$$

Par le théorème de Fubini, on obtient

$$E(\int_s^t (1-N_{u-})\frac{dF(u)}{1-F(u-)} \ / \ \mathcal{G}_s) = 1_{s<\tau}\frac{F(t)-F(s)}{1-F(s)}.$$

4.1.1 Prime δ versée à maturité

Nous considérons le contrat suivant qui verse en T

. 1 si le défaut n'est pas arrivé avant la date T

. $\delta(\tau) \leq 1$ si le défaut apparaît avant la date T où δ est une fonction borélienne.

Le valeur de ce zéro-coupon en 0 est

$$\begin{aligned} P_d(0,T) &= E[R_T(1_{T<\tau} + \delta(\tau)1_{\tau<T})] \\ &= E[R_T(1 + 1_{\tau<T}(\delta(\tau) - 1))] \\ &= R_T[1 - (\int_0^T (1 - \delta(u))dF(u))]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Donnons trois cas particuliers dans lesquels nous pouvons expliciter la fonction de répartition F.

i) Si τ est de loi exponentielle de paramètre λ, alors

$$P_d(0,T) = R_T(1 - \int_0^T (1 - \delta(u))\lambda e^{-\lambda u} du).$$

ii) Si $\tau = \inf\{t, \int_0^t \lambda(s)ds > \Theta\}$ où λ est une fonction à valeurs positives et Θ une variable aléatoire de paramètre un, alors

$$F(T) = \mathbb{P}(\tau \leq T) = \mathbb{P}(\int_0^T \lambda(s)ds > \Theta) = 1 - \exp(-\int_0^T \lambda(s)ds)$$

et

$$P_d(0,T) = R_T(1 - \int_0^T (1 - \delta(u))\lambda(u)\exp(-\int_0^u \lambda(s)ds)du).$$

Ce cas se présente notamment si τ est le premier instant de saut d'un processus de Poisson d'intensité déterministe.

iii) Si $\tau = \inf\{t, \int_0^t \lambda(s)ds > \Xi\}$ où Ξ est une variable aléatoire positive de fonction de répartition Φ avec $\Phi(0) = 0$, alors

$$F(T) = \mathbb{P}(\tau \leq T) = \mathbb{P}(\int_0^T \lambda(s)ds > \Xi) = \Phi(\int_0^T \lambda(s)ds)$$

et si δ est constante

$$P_d(0,T) = R_T(1 - (1 - \delta)\Phi(\int_0^T \lambda(s)ds)).$$

Nous pouvons remarquer que tous les cas se ramènent à ces cas particuliers. En effet, si F est une fonction de répartition, nous introduisons la fonction Γ telle que $F(T) = 1 - \exp(-\Gamma_T)$. On obtient

$$P_d(0,T) = R_T(1 - (1 - \delta)(1 - \exp(-\Gamma_T)).$$

La valeur à la date t d'un tel contrat est

$$P_d(t,T) \quad = \quad 1_{t<\tau}E[R_T^t(1_{T<\tau} + \delta(\tau)1_{\tau\leq T}) \;/\; \mathcal{G}_t] + 1_{t\geq\tau}R_T^t\delta(\tau)$$

$$= \quad 1_{t<\tau} R_T^t (1 - E(1_{\tau \leq T}(1-\delta(\tau)) \;/\; \mathcal{G}_t) + 1_{t \geq \tau} R_T^t \delta(\tau)$$

où $R_T^t = \frac{R_T}{R_t}$.

En utilisant le lemme 4.2 ou par un calcul direct, il vient

$$P_d(t,T) = 1_{t<\tau} R_T^t (1 - \frac{1}{1-F(t)} \int_t^T (1-\delta(u)) dF(u) + 1_{t \geq \tau} R_T^t \delta(\tau)$$

et si δ est constante

$$P_d(t,T) = \delta R_T^t + 1_{t<\tau} R_T^t (1-\delta) \frac{1-F(T)}{1-F(t)} \tag{4.3}$$

Remarque 4.5 *On peut noter que la valeur d'un zéro-coupon et la fonction de répartition de τ sous la probabilité utilisée pour mener les calculs sont liées. Nous montrons plus loin que la fonction de répartition s'obtient à partir des prix des zéro-coupons.*

4.1.2 Prime δ versée au moment du défaut

La compensation est de la forme $\delta(s) \leq 1$ et est payée à l'instant de défaut. La valeur d'un tel contrat à la date 0 est

$$P_d(0,T) = E(R_T 1_{T<\tau} + R_\tau \delta(\tau) 1_{\tau<T}) = R_T(1-F(T)) + \int_0^T \delta(u) R_u dF_u. \tag{4.4}$$

Si nous reprenons les cas particuliers i) et ii) du paragraphe précédent, nous obtenons

i) si λ, δ et r sont constants

$$\begin{aligned} P_d(0,T) &= R_T \exp(-\lambda T) + \textstyle\int_0^T \delta \exp(-ru) \lambda \exp(-\lambda u) du \\ &= e^{-(r+\lambda)T} + \tfrac{\delta\lambda}{r+\lambda}(1 - e^{-(r+\lambda)T}). \end{aligned}$$

ii) Dans le cas général, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \delta(u) R_u dF_u &= \int_0^T \delta(u) R_u \exp(-\int_0^u \lambda(s) ds) \lambda(u) du \\ &= \int_0^T \delta(u) \lambda(u) \exp(-\int_0^u (r(s) + \lambda(s)) ds) du. \end{aligned}$$

La valeur à la date t est donné par

$$\begin{aligned} P_d(t,T) &= E(R_T^t 1_{T<\tau} + R_\tau^t \delta(\tau) 1_{\tau \leq T} / \; \mathcal{G}_t) \\ &= 1_{\tau \leq t} \delta(\tau) R_\tau^t + 1_{t<\tau} R_T^t \tfrac{\mathbb{P}(T<\tau)}{\mathbb{P}(t<\tau)} + 1_{t<\tau} \tfrac{1}{\mathbb{P}(t<\tau)} \textstyle\int_t^T R_u^t \delta(u) d\mathbb{P}(\tau \leq u) \\ &= 1_{\tau \leq t} \delta(\tau) R_\tau^t + 1_{t<\tau} R_T^t \tfrac{1-F(T)}{1-F(t)} + 1_{t<\tau} \tfrac{1}{1-F(t)} \textstyle\int_t^T R_u^t \delta(u) dF(u). \end{aligned}$$

Dans le cas i) avec r et δ constants, nous obtenons

$$P_d(t,T) = 1_{\tau \leq t} \delta e^{-r(t-\tau)} + 1_{t<\tau} \{ e^{-(r+\lambda)(T-t)} + \frac{\delta\lambda}{r+\lambda} (1 - e^{-(r+\lambda)(T-t)}) \}.$$

Exemple 4.6 : *On reprend l'exemple de Duffie-Lando (cf [1]) où il existe un unique actif S dirigé par une diffusion qui n'est pas observée et où le temps de défaut τ est le premier instant où l'actif touche zéro c'est-à-dire*

$$\tau = \inf\{t > 0,\ S_t = 0\}.$$

En appliquant notre méthode, on obtient que le processus de hasard Γ vérifie

$$d\Gamma_t = \frac{dF(t)}{1 - F(t)}$$

car F est continue. Si on note f la densité de τ si elle existe, la fonction $\frac{f(t)}{1-F(t)}$ correspond à l'intensité de τ si l'on appelle intensité la fonction λ vérifiant $N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds$ est une $\mathbb{G}-$martingale.
Duffie et Lando obtiennent que l'intensité λ vérifie

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}\sigma^2(t,0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,0). \tag{4.5}$$

où φ est la densité conditionnelle de S_t quand $t < \tau$.
En fait pour montrer leur résultat, Duffie et Lando utilisent l'égalité suivante

$$\lambda(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(1-F(t))} \int_0^\infty \mathbb{P}(S_t \in dx, t < \tau)\mathbb{P}_x(\tau < h).$$

Or cette égalité s'écrit

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(1-F(t))}[\mathbb{P}(t<\tau) - \int_0^\infty \mathbb{P}(S_t \in dx, t<\tau)\mathbb{P}_x(\tau > h)] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h(1-F(t))}[\mathbb{P}(t<\tau) - \mathbb{P}(t+h<\tau)] = \frac{f(t)}{1-F(t)}.
\end{aligned}$$

Par contre l'égalité entre $\frac{f(t)}{1-F(t)}$ et le membre de droite dans l'expression (4.5) n'est pas triviale. Les auteurs commencent par le montrer pour un brownien géométrique puis le généralisent.

4.2 Propriétés des prix d'un zéro-coupon

4.2.1 Monotonicité des prix

La proposition suivante confirme le résultat attendu à savoir que le prix d'un zéro-coupon est décroissant en T.

Proposition 4.7 *Si la fonction de répartition de taux est différentiable de dérivée f, la fonction $T \to P_d(0,T)$ est décroissante en T .*

Démonstration : i) Si la compensation est versée à maturité et si on dérive par rapport à T l'expression (4.3), on obtient

$$P_d'(0,T) = -r_T P_d(0,T) - R_T(1-\delta(T))f(T) \le 0, \text{ car } \delta \le 1.$$

ii) Si la compensation est versée au moment du défaut, en dérivant l'expression 4.4, il vient

$$P'_d(0,T) = -r_T(1 - F(T)) - R_T(1 - \delta(T))f(T) \leq 0, \text{ car } \delta \leq 1.$$

4.2.2 Relation entre les prix des zéro-coupons et la fonction de répartition F

Le paragraphe précédent a mis en évidence que la connaissance de la fonction de répartition F ou de sa densité f sous une m.m.e étaient indispensable pour évaluer kes zéro-coupons avec défaut sous cette m.m.e. Ainsi se pose le probblème de la calibration des paramètres du modèle et notamment du moyen de retrouver la fonction F à partir des prix du marché. Grâce aux expressions obtenues précédemment, on peut montrer que la connaissance des prix des zéro-coupons de différentes maturités permet d'obtenir de l'information sur la fonction de répartition de τ.
On considère que des zéro-coupons de différentes maturités sont négociés sur le marché. Par conséquent, il existe $\widetilde{\mathbb{P}}$ une m.m.e. La probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ est fixée par le marché. On peut énoncer le résultat suivant

Proposition 4.8 *Si la prime δ est constante et versée à maturité, et si des zéro-coupons de toutes maturités sont négociés sur le marché, alors on connait la fonction de répartiton F sous la m.m.e fixée par le marché.*

Démonstration : D'après l'expression (4.3), on a

$$P_d(0,T) = R_T(1 - (1 - \delta)F(T))$$

où $P_d(0,T)$ est le prix du zéro-coupon. Par conséquent,

$$F(T) = \frac{1}{(1-\delta)}(1 - \frac{P_d(0,T)}{R_T})$$

■

Ce résultat se généralise de la manière suivante lorsque la compensation n'est pas constante.

Proposition 4.9 *Si τ admet une densité f, et si des zéro-coupons de toutes maturités sont négociés, alors la densité f sous la m.m.e fixée par le marché est connue.*

Démonstration : L'expression 4.2 peut se récrire vec la densité f comme suit

$$P_d(0,T) = R_T(1 - \int_0^T (1 - \delta(u))f(u)du).$$

Par conséquent,

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_d(0,T+h) - P_d(0,T)}{h} = -rP_d(0,T) + R_T(1 - \delta(T))f(T).$$

■

Bibliographie

[1] Duffie D., Lando D. : Term structure of credit spreads with incomplete accounting information, *preprint, CAF Copenhagen*, 1997.

Chapitre 5

La v.a τ est un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt

Lorsque l'on modélise l'instant de défaut par une variable aléatoire positive $\mathcal{G}-$mesurable, il peut arriver que la variable aléatoire τ soit un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt. Ce cas se produit lorsque la tribu $\mathcal{H}_t$ est incluse dans la tribu $\mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$. Alors la filtration $\mathbb{G}$ et la filtration $\mathbb{F}$ coïncident. Ce chapitre est consacré à l'étude de ce cas particulier.

Comme précédemment, nous nous intéressons à l'évaluation d'actifs contingents. Nous montrons qu'une méthode consiste à utiliser l'intensité du temps d'arrêt. Après avoir énoncé les conditions d'existence de l'intensité, nous rappelons la condition due à Duffie ([2], [3]). Enfin nous reprenons dans les exemples le cas où τ est le temps d'atteinte d'une barrière lorsque le processus S suit dans un premier temps le modèle présenté dans le chapitre 2. Nous montrons que le temps τ admet une intensité sous certaines conditions dont nous déterminons l'expression.

5.1 Intensité d'un temps d'arrêt

Soit $\mathbb{I}$ une filtration. Nous introduisons la notion d'intensité pour un $\mathbb{I}-$temps d'arrêt.

Définition 5.1 *: Soit τ un $\mathbb{I}-$temps d'arrêt. Supposons qu'il existe un processus λ positif $\mathbb{I}-$adapté non identiquement nul tel que*

$$N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds$$

soit une $\mathbb{I}-$martingale, alors le processus λ est appelé $\mathbb{I}-$intensité de τ.

Remarquons que l'intensité n'est définie que jusqu'en τ et que sa valeur dépend du choix de la filtration.

Proposition 5.2 *: i) Un temps d'arrêt $\mathbb{I}-$prévisible n'admet pas d'intensité dans le filtration $\mathbb{I}$.*
ii) Si τ est un temps d'arrêt totalement inaccessible, alors il admet une intensité.

Démonstration : i) Dans ce cas, le processus N est $\mathbb{I}-$prévisible. Par unicité du compensateur de N dans la filtration $\mathbb{I}$, N est son propre compensateur.
ii) (cf Rogers -Williams [5]) ■

L'exemple suivant met en évidence le choix crucial de la filtration pour le calcul de l'intensité

Remarque 5.3 *Considérons τ_1 et τ_2 deux temps de défaut définis par*

$$\tau_i = \inf\{t, \psi_t^i \geq \Theta\}$$

où ψ^i, $i = 1, 2$ sont des processus $\mathbb{F}-$adaptés vérifiant $0 \leq \psi_t^1 < \psi_t^2$ et Θ est une variable exponentielle de paramètre un indépendante de $\mathbb{F}$. Si on note

$$\mathbb{G}^i = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}^i \text{ et } \mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1 \vee \mathbb{H}^2$$

Alors ψ^i est la $\mathbb{G}^i-$ intensité de τ_i.
On peut remarquer que τ_2 est un temps d'arrêt prévisible dans la filtration $\mathbb{G}$, par suite il ne possède pas de $\mathbb{G}-$intensité. En effet, la suite croissante de $\mathbb{G}-$temps d'arrêt $\tau^{(n)} = \inf\{t > \tau_1, \psi_t^2 \geq \Theta - \frac{1}{n}\}$, $(\tau^{(n)})_{n>0}$ converge vers τ_2 .

Remarque 5.4 *: Si $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne, tous les $\mathbb{F}-$temps d'arrêt sont prévisibles. Dans la suite, $\mathbb{F}$ n'est pas une filtration brownienne.*

Si l'intensité de τ existe, alors on peut la calculer comme suit

Proposition 5.5 *i) Si τ admet une $\mathbb{I}$-intensité, alors*

$$\lambda(t) = \lim_{h\to 0} \frac{E(N_{t+h} - N_t \ / \mathcal{I}_t)}{h}.$$

Démonstration : i) Il existe un processus λ positif $\mathbb{I}-$adapté non identiquement nul tel que

$$E(N_{t+h} - N_t \ / \ \mathcal{I}_t) = E(\int_0^{(t+h)\wedge\tau} \lambda_s ds - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds \ / \ \mathcal{I}_t).$$

Or si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite qui converge p.s vers f et qui vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut montrer que $\lim_n E(f_n \ / \ \mathcal{I}_t) = E(f \ / \ \mathcal{I}_t)$. Or

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{(t+h)} \lambda_s ds = \lambda_t.$$

Par conséquent $\lim_{h\to 0} \frac{E(N_{t+h}-N_t \ / \ \mathcal{I}_t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E(\int_{t\wedge\tau}^{(t+h)\wedge\tau} \lambda_s ds \ / \ \mathcal{I}_t) = \lambda_t$.
Nous donnons tout d'abord un exemple simple dans lequel nous pouvons calculer l'intensité d'un temps d'arrêt.

Exemple 5.6 *: Soit N^1 un processus de Poisson standard d'intensité λ^1. Soit $\mathbb{I}$ sa filtration naturelle et τ le premier instant de saut de N^1. Alors τ admet une intensité $\lambda = \lambda^1$, car il est inaccessible.*
On a $N_t^1 - \lambda^1 t$ est une martingale. En appliquant le théorème de Doob, on obtient

$$N_{t\wedge\tau}^1 - \lambda^1(t \wedge \tau) \text{ est une martingale.}$$

Il reste à remarquer que $N_{t\wedge\tau}^1 = N_t$.
La méthode qui consiste à calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(N_{t+h} - N_t \ / \ \mathcal{I}_t)}{h}$$

conduit au même résultat.

5.2 Hypothèse (D)

Pour pouvoir évaluer les actifs contingents du type $X1_{\{\tau>T\}}$ où $X \in \mathcal{F}_T$, de nombreux auteurs (Duffie, Lando et Duffie, Schroder, Skiadas) ont introduit une condition qu'ils ont énoncée "le processus $E(Xe^{-\int_t^T \lambda_u du} \ / \ \mathcal{F}_t)$ ne saute pas en τ". Cette condition présente une ambiguïté quand au choix de λ sur $\{\tau < t\}$, nous la réénonçons sous la forme suivante sous le nom d'hypothèse (**D**)(cf [2], [3]).

[**D**] Il existe une intensité $\overline{\lambda}$ $\mathbb{F}-$adaptée telle que le processus V défini par

$$V_t = E(Xe^{-\int_t^T \overline{\lambda}_u du} \ / \ \mathcal{F}_t),$$

est continu en τ, i.e $\Delta V_{T\wedge\tau} = 0$.

Cette hypothèse peut être remplacé de manière équivalente par l'hypothèse

[**D'**] Il existe une intensité $\overline{\lambda}$ $\mathbb{F}-$adaptée telle que la martingale M^X définie par $M_t^X = E[Xe^{-\int_0^T \overline{\lambda}_u du} \ / \ \mathcal{F}_t]$ est continue en τ.

Sous l'hypothèse (**D'**), le principal résultat de Duffie et al. est le suivant

Proposition 5.7 *: Soit $T > 0$ fixé et X une v.a $\mathcal{F}_T-$mesurable intégrable. Sous l'hypothèse (**D'**), pour tout $t < T$*

$$E(X1_{\{T<\tau\}} \ / \ \mathcal{F}_t) = 1_{\{t<\tau\}} E(Xe^{-\int_t^T \overline{\lambda}_u du} \ / \ \mathcal{F}_t). \tag{5.1}$$

*Si (**D'**) n'est pas vérifiée,*

$$E(X1_{\{T<\tau\}} \ / \ \mathcal{F}_t) = 1_{\{t<\tau\}} E(Xe^{-\int_t^T \overline{\lambda}_u du} - \Delta M_\tau 1_{t<\tau\leq T} \ / \ \mathcal{F}_t) \tag{5.2}$$

Démonstration : Soit

$$U_t = (1 - N_t)V_t = (1 - N_t)e^{-\int_0^t \overline{\lambda}_u du} M_t^X.$$

Par un calcul d'Itô, on montre que $L_t^1 = (1 - N_t)e^{-\int_0^t \overline{\lambda}_u du}$ est une $\mathbb{F}$-martingale qui a un seul saut en τ. Ainsi si M^Xest continue en τ, U est une $\mathbb{F}-$martingale comme produit de martingales orthogonales, car elles n'ont pas de sauts communs. Comme $U_T = X1_{\{T<\tau\}}$, nous avons l'égalité (5.1)

$$E(X1_{\{T<\tau\}} \ / \ \mathcal{F}_t) = 1_{\{t<\tau\}} E(Xe^{-\int_t^T \overline{\lambda}_u du} \ / \ \mathcal{F}_t).$$

Sinon en appliquant la formule d'Itô au processus U, nous obtenons

$$dU_t = M_{t-}^X dL_t^1 + L_{t-}^1 dM_t^X - \Delta M_t \Delta N_t.$$

Or $\Delta N_t = dN_t$ et par suite le processus $\int dU_t + \Delta M_t dN_t$ est une $\mathbb{F}-$martingale.
Par conséquent,

$$E(X1_{\{T<\tau\}} + \Delta M_\tau 1_{\tau\leq T} \ /\mathcal{F}_t) = U_t + \Delta M_\tau 1_{\tau\leq t}.$$

Et l'égalité (5.2) est vérifiée. ■

Remarque 5.8 : *Dans la pratique, il est difficile d'utiliser cette proposition. Premièrement, on ne sait pas déterminer en toute généralité le saut ΔV. Deuxièmement, le choix du prolongement $\overline{\lambda}$ n'est pas aisé. On peut remarquer que le choix naturel $\overline{\lambda}_u = \lambda_u 1_{u<\tau}$ ne convient pas, puisque dans ce cas le processus $E(e^{-\int_t^T \overline{\lambda}_u du} \ / \ \mathcal{F}_t)$ n'est jamais continu. De plus, le prolongement de λ vérifiant l'hypothèse **(D)** dépend de X et peut ne pas exister pour toute v.a X. Sinon, en choisissant $X = Ye^{-\int_t^T \overline{\lambda}_u du}$, on a $E(Y \ / \ \mathcal{F}_t)$ est continu. Par conséquent, on aurait que toutes les $\mathbb{F}$-martingales sont continues. Ce que nous avons exclu pour obtenir l'existence de l'intensité. De plus, L^1 a un saut en τ. Duffie et al. ont supprimé ce problème en donnant une expression à l'aide du saut ΔV. Cependant la difficulté du calcul de ΔV n'est pas supprimée.*

Nous donnons maintenant un exemple de temps de défaut qui est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathbb{F}$ en utilisant la modélisation du chapitre 2 pour les prix des actifs S.

Exemple 5.9 : *Considérons le marché constitué d'un actif sans risque S^0 vérifiant l'équation*

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt, \ \ S_0^0 = 1$$

où r est déterministe, et d'un actif risqué S satisfaisant l'équation (2.5). On suppose que les coefficients σ, μ sont des constantes et que la fonction ϕ est constante par morceaux, continue à droite égale à zéro ou à ϕ. On note $\mathbb{F}$ la filtration de S.
Soit T_a le temps d'arrêt $T_a = \inf\{t > 0, \ S_t \geq a)$.
Déterminons l'intensité $\widetilde{\lambda}$ de T_a.
D'après les résultats obtenus dans le paragraphe 2.5.2, nous avons

$$\begin{aligned} E(N_{t+h} - N_t \ / \ \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(t < \tau \leq t+h \ / \ \mathcal{F}_t) \\ &= 1_{\{\sup_{s\leq t} S_s < a\}} \mathbb{P}(sup_{t<s\leq t+h} S_s \geq a / \mathcal{F}_t). \\ &= 1_{\{\sup_{s\leq t} S_s < a\}} \Phi(S_t) \end{aligned}$$

où

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(\sup_{t<s\leq t+h} S_s^t \geq \frac{a}{x}), \ x < a.$$

Distinguons deux cas :
1^e : $i_t = 1$.
Comme par la suite, on s'intéresse à la limite quand h tend vers zéro, on peut se restreindre aux h tels que $i_u = 1$, $t \leq u \leq t+h$; alors l'égalité (2.28) donne

$$\Phi(h) = \int_0^h \frac{z}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{(z-us)^2}{2s}) ds$$

où $u = \frac{1}{\sigma}[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2]$ et $z = 1/\sigma \ln(a/x)$. Par conséquent,

$$\widetilde{\lambda}_t = \lim_{h\to 0} \frac{1_{\{\sup_{s\leq t} S_s < a\}} \int_0^h \frac{z}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{(z-us)^2}{2s}) ds}{h} = 0.$$

Ainsi l'intensité de T_a n'existe pas sur $\{i = 1\}$. Ce résultat était prévisible puisque il n'y a que la partie brownienne qui intervient dans le calcul.

2e : $i_t = 0$.

On se restreint aux h tels que $i_u = 0$, $t \leq u \leq t+h$;

-Si $\sigma\phi > 0$, alors en utilisant l'égalité (2.29), il vient

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\upsilon h) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(h) 1_{\{h \geq \nu_n^c\}} & si \quad \mu - \frac{\sigma}{\phi} < 0 \ et \ \sigma\phi > 0 \\ 1 - \exp(-\upsilon h) \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n(h) 1_{\{h \leq \nu_n^d\}} & si \quad \mu - \frac{\sigma}{\phi} > 0 \ et \ \sigma\phi > 0 \end{cases}$$

où $\nu_n^c = \inf\{t, \frac{-(\mu - \frac{\sigma}{\phi})t + \ln(a/x)}{\ln(1+\sigma\phi)} \geq n\}$ et $\nu_n^d = \inf\{t, \frac{-(\mu - \frac{\sigma}{\phi})t + \ln(a/x)}{\ln(1+\sigma\phi)} \leq n\}$.

Ainsi si $\mu - \frac{\sigma}{\phi} < 0$ et $\sigma\phi > 0$, soit $n_0 = \inf\{n, \nu_n^c > 0\} = [\frac{\ln(a/x)}{\ln(1+\sigma\phi)}] + 1$. Pour $h < \nu_{n_0}^c$

$$\lambda \lim_{h \to 0} \frac{1 - \exp -h \sum_{n=0}^{n_0 - 1} A_n(h)}{h} = \begin{cases} 0 & si \ n_0 > 1 \\ \upsilon & si \ n_0 = 1 \end{cases}.$$

car $A_n(\nu_n^c) = 0$ pour $n \geq 1$. Or $n_0 = 1$ est équivalent à $\frac{a}{x} < 1 + \sigma\phi$ i.e à $x > a(1+\sigma\phi)$.

Si $\mu - \frac{\sigma}{\phi} > 0$ et $\sigma\phi > 0$, pour h assez petit, $\nu_n^d = \inf\{t, \frac{-(\mu - \frac{\sigma}{\phi})t + \ln(a/x)}{\ln(1+\sigma\phi)} \leq n\} \leq h$ et $\widetilde{\lambda}_t = 0$. Par conséquent l'intensité n'existe pas.

.-Si $\sigma\phi < 0$, alors en utilisant l'égalité (2.30), il vient

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & si \quad \mu - \frac{\sigma}{\phi} > 0 \ et \ \sigma\phi < 0 \\ 1 - \exp(-\upsilon h) \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{A}_n(h) 1_{\{h \leq \nu_n^c\}} & si \quad \mu - \frac{\sigma}{\phi} < 0 \ et \ \sigma\phi < 0. \end{cases}$$

Si $\mu - \frac{\sigma}{\phi} > 0$ et $\sigma\phi < 0$, l'intensité n'existe pas.

Si $\mu - \frac{\sigma}{\phi} < 0$ et $\sigma\phi > 0$, pour h assez petit, $\nu_n^c > h$, par conséquent l'intensité n'existe pas.

Si on récapitule, T_a admet une intensité $\widetilde{\lambda}_t$ en t seulement sur $\{i_t = 0\}$ et si $\mu - \frac{\sigma}{\phi} < 0$, $\sigma\phi > 0$. On a

$$\widetilde{\lambda}_t = (1 - N_{t-}) 1_{\{S_t > a(1+\sigma\phi)\}} \upsilon.$$

*On peut remarquer que sur cette exemple, l'intensité n'existe pas sur $\{i-1\}$. On ne pourra pas trouver un processus vérifiant l'hypothèse **(D)**. Par conséquent, il faudra toujours évaluer le saut ΔV.*

Dans tout ce chapitre, nous nous sommes intéressés à des instants de défaut qui n'étaient pas des temps d'arrêt prévisibles. Notons que lorsque τ est un temps d'arrêt prévisible, on retrouve aussi le modèle structurel proposé par Merton (cf. [4]).

Bibliographie

[1] Bellamy N. : Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des procesus discontinus, *Thèse, Université d'Evry,* 1999.

[2] Duffie D., Lando D. : Term structure of credit spreads with incomplete accounting information, *preprint, CAF Copenhagen*, 1997.

[3] Duffie D., Schroder M., Skiadas C. : Recursive valuation of defaultable securities and the timing resolution of uncertainty, *Annals of Applied Probability*, 6, 1075-1090, 1997.

[4] Merton R.C. : On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates, *Journal of Finance* , 29, 449-470, 1974.

[5] Rogers L.C.G., Williams D. : *Diffusions, Markov processes and Martingales, Vol 2,* Wiley series in probability and mathematical Statistics, 1990.

Chapitre 6

Hypothèse (H)

Nous reprenons le marché décrit dans l'introduction dans le cas particulier où la filtration $\mathbb{F}$ est l'observation des prix des actifs $S^i, i = 0, ..., n$ c'est-à dire

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S^i_s,\ S^0_s,\ s \leq t,\ i = 1, ..., n).$$

Dans ce cas, la filtration $\mathbb{F}$ et la filtration $\mathbb{G}$ ne sont pas les mêmes à priori. Nous avons donc un grossissement de filtration.

Nous précisons les hypothèses ($\mathbf{H}$) et ($\mathbf{G}$) qui impliquent la conservation de la propriété de martingales lors d'un grossissement de filtration. Nous établissons ensuite le lien entre l'hypothèse ($\mathbf{H}$) et le fait que τ soit le temps d'atteinte d'une barrière stochastique ; ceci nous permet de donner des exemples d'instant de défaut où l'on se trouve dans cette situation.

Les questions de complétion de marché sont fortement liées à la question de propriété de représentation prévisible. Ainsi, nous établissons des théorèmes de représentation prévisible pour des $\mathbb{G}-$martingales. Ces résultats nous permettent d'établir la dynamique d'un zéro-coupon et d'étudier la complétion du marché (chapitre 9).

Enfin nous donnons une justification financière de l'hypothèse ($\mathbf{H}$) en étudiant la relation entre l'absence d'arbitrage et la propriété d'invariance des martingales (hypothèse ($\mathbf{H}$)).

Nous avons traité dans le chapitre précédent le cas particulier où τ est un $\mathbb{F}-$temps d'arrêt. Ainsi à partir de maintenant, τ n'est pas un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt.

6.1 Hypothèse (H) et hypothèse (G)

Nous allons rappeler dans la suite du paragraphe différentes hypothèses qui impliquent la conservation de la propriété de martingales ou de martingales arrêtées.

6.1.1 Hypothèse (H)

Le cas le plus simple de grossissement de filtration est celui où la propriété de martingale se conserve lorsque l'on passe de la filtration $\mathbb{F}$ à la filtration $\mathbb{G}$. Cette hypothèse est appelée hypothèse ($\mathbf{H}$) et se formule de la manière suivante :

[**H**] Toute $\mathbb{F}$-martingale de carré intégrable est une $\mathbb{G}$-martingale de carré intégrable.

Cette hypothèse est équivalente à l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{F}_\infty$ et $\mathcal{G}_t$ par rapport à $\mathcal{F}_t$, soit à l'une des hypothèses équivalentes suivantes (cf. Dellacherie [4])

$$\begin{array}{ll} (H1) & \forall F \in \mathcal{F}_\infty, \forall G_t \in \mathcal{G}_t, E(FG_t/\mathcal{F}_t) = E(F/\mathcal{F}_t)E(G_t/\mathcal{F}_t) \\ (H2) & \forall t \geq 0, \forall G_t \in \mathcal{G}_t, E(G_t/\mathcal{F}_\infty) = E(G_t/\mathcal{F}_t) \\ (H3) & \forall t \geq 0, \forall F \in \mathcal{F}_\infty, E(F/\mathcal{G}_t) = E(F/\mathcal{F}_t) \end{array}$$

et dans le cas particulier $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ à

$$\forall s \leq t,\ P(\tau \leq s/\mathcal{F}_\infty) = P(\tau \leq s/\mathcal{F}_t)$$

ou de manière équivalente à (cf. Dellacherie [4])

$$\forall t, P(\tau \leq t/\mathcal{F}_\infty) = P(\tau \leq t/\mathcal{F}_t).$$

En particulier, les processus F et Γ sont croissants.

Remarque 6.1 *: Dans le cas où la filtration $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne, l'hypothèse **(H)** est vérifiée si et seulement si le $\mathbb{F}-$mouvement brownien est un $\mathbb{G}-$mouvement brownien.*

Remarque 6.2 *Si τ et la filtration $\mathbb{F}$ sont indépendants, le problème se traite de la même manière puisque le processus F est déterministe.*

6.1.2 Hypothèse (G)

Nous notons (**G**) l'hypothèse suivante.

[**G**] Le processus F est croissant.

Cette hypothèse est proche de l'hypothèse (**H**) comme le montre le résultat suivant (cf. [7]). De plus, (**H**) implique (**G**).

Proposition 6.3 *: Si toutes les $\mathbb{F}$-martingales sont continues, nous avons équivalence entre*
*i) **(G)** est vérifiée*
ii) si $(Y_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}-$martingale de carré intégrable, alors $(Y_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ est une $\mathbb{G}-$martingale.

Nous introduisons maintenant, la $\mathbb{G}-$martingale M, martingale compensée du processus de défaut N. Pour cela, nous appelons Λ le processus $\mathbb{F}-$prévisible s'il existe défini de la manière suivante :

Définition 6.4 *: Le processus Λ, $\mathbb{F}-$prévisible continu à droite et croissant vérifiant $M_t = N_t - \Lambda(t \wedge \tau)$ est une $\mathbb{G}-$martingale, est appelé le $\mathbb{F}$-martingale processus de hasard (m.p.h en abrégé) du temps τ.*

Remarque 6.5 *Sous la condition **(C2)**, le caractère $\mathbb{F}$-prévisible du processus Λ entraîne que $\Delta\Lambda_\tau = 0$ car les instants de saut d'un processus prévisible sont des temps d'arrêts prévisibles (cf Jacod-Shiryaev [9]).*

Définition 6.6 : *Supposons qu'il existe un processus λ $\mathbb{F}-$adapté vérifiant*

$$d\Lambda_t = \lambda_t dt.$$

Alors le processus λ est appelé $\mathbb{F}-$intensité de τ.

Les auteurs qui, comme Duffie, n'utilisent que la seule filtration $\mathbb{G}$, parlent aussi d'intensité pour le temps τ. Dans ce cas, l'intensité λ est définie comme l'intensité d'un $\mathbb{G}-$temps d'arrêt, i.e un processus $\mathbb{G}-$adapté. Cependant en réalité λ est $\mathbb{F}-$adapté et défini jusqu'en τ de manière unique. On peut la définir de manière unique après τ si on pose $\lambda = 0$ sur l'ensemble $\{1 - F_t\}$. Ceci permet d'éviter d'avoir recours à des conditions du type de l'hypothèse (**D**). Notamment, le calcul du saut du processus V n'est pas utile. Il suffit d'appliquer les égalités (3.2) et (3.3) valables en toute généralité.
La proposition suivante nous permet de montrer l'existence et de caractériser le processus Λ sous l'hypothèse (**G**).

Proposition 6.7 : *i) Nous supposons que l'hypothèse **(G)** est vérifiée et que le processus Λ défini par*

$$d\Lambda_t = \frac{dF_t}{1 - F_{t-}}, \ \Lambda_0 = 0$$

est $\mathbb{F}-$prévisible. Alors Λ est le $\mathbb{F}$-m.p.h de τ.
ii) Si les hypothèses de i) ne sont pas satisfaites, alors le $\mathbb{F}$-m.p.h de τ est égal à

$$d\Lambda_t = \frac{d\widehat{F}_t}{1 - F_{t-}}, \ \Lambda_0 = 0,$$

où $\widehat{F}$ est le $\mathbb{F}-$compensateur de F i.e le processus croissant $\mathbb{F}-$prévisible tel que $F - \widehat{F}$ est une $\mathbb{F}-$martingale.

Démonstration : Il faut montrer que $N_t - \Lambda_{t\wedge\tau}$ est une $\mathbb{G}-$martingale. La démonstration suit la même méthode que celle du théorème 4.4 en tenant compte de la filtration $\mathbb{F}$. ■

Remarque 6.8 : *Si F est continu, alors $\Lambda = \Gamma$.*
Si $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne, alors le processus F est $\mathbb{F}-$prévisible et $d\Lambda_t = \frac{dF_t}{1-F_{t-}}$, $\Lambda_0 = 0$.

De manière plus générale, la proposition suivante établit le lien entre le processus Γ et le processus Λ.

Proposition 6.9 : *i) Sous l'hypothèse **(G)**, nous avons*

$$e^{-\Gamma_t} = (1 - F_t) = e^{-\Lambda_t^c} \prod_{0 \le s \le t} (1 - \Delta\Lambda_s), \tag{6.1}$$

où Λ^c est la partie continue de Λ.
*ii) Sous l'hypothèse **(H)**, si la filtration $\mathbb{F}$ ne contient que des martingales continues (en particulier si $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne) et si le processus Λ est continu, alors Γ est continu et $\Lambda = \Gamma$.*

Démonstration : i) Il suffit de remarquer

$$e^{-\Delta\Gamma_t} = 1 - \Delta\Lambda_t.$$

ii) D'après la décomposition de Doob-Meyer, il existe une $\mathbb{F}$-martingale Z et un processus $\mathbb{F}$-prévisible croissant $\widehat{F}$ tels que

$$F_t = Z_t + \widehat{F}_t.$$

Par hypothèse, M est continu et $\widehat{F}$ aussi. Car $\Delta\Lambda_t = \frac{\Delta \widehat{F}_t}{1-F_{t-}} = 0$. Par conséquent, le processus F est continu. Sous $(\mathbf{H})$, ceci implique $\Lambda = \Gamma$. ■

L'exemple suivant illustre cette proposition :

Exemple 6.10 *: Soit τ indépendant de la filtration $\mathbb{F}$ tel que $\mathbb{P}(\tau = t_1) = p$ et $\mathbb{P}(\tau = t_2) = 1 - p$ avec $t_1 < t_2 < T$. Alors*

$$\begin{aligned} \Lambda_t &= 0 \quad si \quad 0 \leq t < t_1 \\ \Lambda_t &= p \quad si \quad t_1 \leq t < t_2 \\ \Lambda_t &= 1 \quad si \quad t_2 \leq t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 1 - F_t &= 1 \quad && si \quad 0 \leq t < t_1 \\ 1 - F_t &= 1 - p \quad && si \quad t_1 \leq t < t_2 \\ 1 - F_t &= 0 \quad && si \quad t_2 \leq t \end{aligned}$$

Or $\Lambda^c = 0$, par conséquent l'égalité (6.1) est vérifiée.

Lemme 6.11 *: Sous l'hypothèse **(G)** et si le processus F est prévisible, la $\mathbb{G}$-martingale L définie par l'égalité (3.4) satisfait l'équation*

$$dL_t = -e^{\Gamma_t} dM_t.$$

Démonstration : De l'expression $dL_t = (1 - N_{t^-})d(e^{\Gamma_t}) - e^{\Gamma_{t^-}} dN_t - \Delta N_t \Delta e^{\Gamma_t}$, nous déduisons

$$dL_t = -e^{\Gamma_t} dN_t + e^{\Gamma_{t-}}(1 - N_{t-})[d\Gamma_t + e^{\Delta\Gamma_t} - 1 - \Delta\Gamma_t].$$

Or

$$e^{\Gamma_{t-}}(d\Gamma_t + e^{\Delta\Gamma_t} - 1 - \Delta\Gamma_t) = e^{\Gamma_t} \frac{dF_t}{1 - F_{t-}}$$

d'où

$$dL_t = e^{\Gamma_t}(-dN_t + (1 - N_{t-}) \frac{dF_t}{1 - F_{t-}}).$$

On vérifie que le saut de L en τ est $L_{\tau-}$. ■

6.1.3 Processus de Cox

Les processus de Cox permettent de construire des exemples typiques de temps de défaut où l'hypothèse $(\mathbf{H})$ est vérifiée. Nous montrons que ce sont les seuls. Pour construire un tel temps de défaut, nous nous donnons Λ un processus croissant, $\mathbb{F}-$adapté sur un espace $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ et nous considérons Θ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre un, construite sur un espace $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbb{P}})$. On définit alors τ sur l'espace produit $(\Omega \times \widehat{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \widehat{\mathcal{F}}, \mathbb{P} \otimes \widehat{\mathbb{P}})$ par

$$\tau = \inf\{t; \Lambda_t \geq \Theta),$$

où Λ est un processus croissant vérifiant $\Lambda_0 = 0$.

Alors l'hypothèse (**H**) est vérifiée pour les filtrations $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. En effet, comme $\{\tau > t\} = \{\Lambda_t < \Theta\}$, nous avons

$$P(\tau > t/\mathcal{F}_\infty) = \exp(-\Lambda_t)$$

et

$$1 - F_t = P(\tau > t/\mathcal{F}_t) = P(\tau > t/\mathcal{F}_\infty/\mathcal{F}_t) = \exp(-\Lambda_t).$$

Par conséquent, l'égalité suivante est vérifiée

$$P(\tau \leq t/\mathcal{F}_t) = P(\tau \leq t/\mathcal{F}_\infty)$$

et l'hypothèse (**H**) est vraie.

Le processus Λ coïncide avec le processus de hasard Γ. A l'aide de la remarque 3.5, on peut l'interpréter comme un spread que de nombreux auteurs modélisent.

Remarque 6.12 *: Dans le cas où Θ n'est pas de loi exponentielle, mais simplement une variable aléatoire positive de fonction de répartition Φ, nous pouvons construire encore des processus similaires (cf Wong [15] ou Bélanger, Shreve et Wong [1]). On se ramène au cas d'une variable exponentielle en posant $1 - \Phi(\Lambda_t) = \exp(-\Lambda_t^1)$.*

Remarque 6.13 *: Si le processus Λ s'écrit $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$ où λ n'est pas positif , nous pouvons construire un temps de défaut par le même procédé à la seule différence que dans ce cas*

$$P(\tau > t/\mathcal{F}_\infty) = \exp(-\sup_{s \leq t} \int_0^s \lambda_u du).$$

Le processus F est égal à $F_t = 1 - \exp(-\sup_{s\leq t} \int_0^s \lambda_u du)$.

Dans l'article de Jarrow-Yu [10], les auteurs utilisent non pas le supremum du processus $\int_0^s \lambda_u du$, mais le processus lui-même.

Dans le cas où le processus λ est un processus d'Orstein-Ulembech, cette simplification est licite En effet le tableau suivant donne les valeurs obtenus pour la variance de l'erreur commise pour un processus d'Orstein-Ulembech partant de x et de paramètre b.

x	a	*variance de l'erreur*
0.03	*0.2*	*3.58391* 10^{-6}
0.03	*0.1*	*3.49613* 10^{-6}
0.03	*2*	*4.14* 10^{-6}
0.03	*0.02*	*3.45* 10^{-6}
0.05	*0.2*	*3.31* 10^{-6}
0.05	*0.1*	*3.23547* 10^{-6}
0.07	*0.2*	*3.07824* 10^{-6}
0.07	*0.1*	*2.98492* 10^{-6}

6.1.4 Barrière stochastique

Nous venons de voir que dans le cas où τ apparaît comme le premier instant où un processus $\mathbb{F}-$adapté à variation bornée atteint une barrière indépendante de $\mathcal{F}_\infty$, la propriété (**H**) est vérifiée. Le résulat suivant montre qu'il est équivalent de travailler sous la propriété (**H**) ou de modéliser τ par un processus de Cox. Nous reproduisons la démonstration qui figure dans [8].

Proposition 6.14 *: Si le temps de défaut τ vérifie la propriété* ***(H)****, alors il existe une variable aléatoire Θ indépendante de $\mathcal{F}_\infty$ et X un processus $\mathcal{F}_t-$adapté croissant tel que*

$$\tau = \inf\{t; X_t \geq \Theta).$$

Si le processus Γ est continu, on peut prendre Θ de loi exponentielle de paramètre un.

Démonstration : Le processus Γ est défini par $\mathbb{P}(\tau > t/\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau > t/\mathcal{F}_t) = e^{-\Gamma_t}$.
Si on pose $\Theta = \Gamma_\tau$, nous obtenons

$$(t < \Gamma_\tau) = (\gamma_t < \tau)$$

où γ est l'inverse du processus croissant Γ, $\mathbb{F}$- adapté et défini par

$$\gamma_t = \inf\{u\,;\,\Gamma_u > t\}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(\Theta > t\ /\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\gamma_t < \tau\ /\ \mathcal{F}_\infty) = \exp(-\Gamma_{\gamma_t}) = \exp(-t)$$

si le processus Γ est continu. Par conséquent Θ est indépendante de $\mathcal{F}_\infty$ et de loi exponentielle.
Si Γ n'est pas continu, alors

$$\exp(-\Gamma_{\gamma_t}) = \exp -t_1 \text{ où } t_1 = \sup\{u \geq t, \gamma_u = \gamma_{t_1}\}.$$

Le processus Γ étant croissant, il s'en suit que

$$\tau = \inf\{t; \Gamma_t \geq \Theta).$$

Cette proposition montre que les processus de Cox sont les seuls exemples pour lesquels la propriété (**H**) est vérifiée.
On peut remarquer que, par changement de probabilité équivalente, la propriété (**H**) sera conservée si l'on préserve l'indépendance entre Θ et $\mathcal{F}_\infty$. En effet, si sous $\mathbb{Q}$ probabilité équivalente à $\mathbb{P}$, Θ est indépendant de $\mathcal{F}_\infty$, alors (**H**) sera vérifiée. Par contre, la loi de Θ ne sera pas nécessairement une loi exponentielle.

6.2 Relation entre hypothèse (H) et arbitrage

6.2.1 Théorèmes de représentation

Nous rappelons tout d'abord dans le cas où $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne, le théorème de représentation prévisible du couple (W, M) établi par Kusuoka [13] dans le cas où F est continu. Ce résultat peut être généralisé au cas discontinu (F étant prévisible puisque la filtration $\mathbb{F}$ est brownienne).

Théorème 6.15 *: Sous l'hypothèse **(H)**, si X est une $\mathbb{G}-$martingale de carré intégrable, il existe deux processus $\mathbb{G}-$prévisibles, $\varphi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant*

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt] < \infty, E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \psi_t^2 d\Lambda_t] < \infty$$

tels que

$$X_t = x + \int_0^t \varphi_s dW_s + \int_0^t \psi_s dM_s.$$

où M est la $\mathbb{G}$-martingale $M_t = N_t - \Lambda_{t\wedge\tau}$.

Démonstration : Dans le cas où F est discontinu, il suffit de montrer que toute variable aléatoire $Z = (1 - N_s)G_t = L_s e^{-\Gamma_s} G_t$ pour $s \leq t$ s'écrit comme somme de deux intégrales stochastiques. Or d'après le théorème de représentation pour la filtration $\mathbb{F}$, appliqué à la v.a $\mathcal{F}_t-$mesurable $e^{-\Gamma_s} G_t$, il existe χ un processus $\mathbb{F}-$prévisible tel que

$$e^{-\Gamma_s} G_t = E(e^{-\Gamma_s} G_t) + \int_0^t \chi(u) dW_u.$$

Comme $dL_u = -e^{\Gamma_u} dM_u$ et que W et M n'ont pas de sauts communs, on obtient le résultat en appliquant une intégration par parties. ■

Remarque 6.16 *: La démonstration de ce théorème repose sur le fait que W et M n'ont pas de sauts communs et que W possède la propriété de représentation prévisible. Nous pouvons le généraliser au cas où la filtration $\mathbb{F}$ est la filtration d'une martingale ayant la propriété de représentation prévisible et sans sauts communs avec M. En particulier, dans le cas où $\mathbb{F}$ est la filtration d'un second temps de défaut τ_2 vérifiant $\mathbb{P}(\tau = \tau_2) = 0$.*

Ce théorème nous donne l'existence de la propriété de représentation prévisible des martingales de carré intégrable. Notons que les coefficients intervenant dans les intégrales stochastiques ne sont pas explicitement connus.
Pour les martingales du type $E(h_\tau \ / \ \mathcal{G}_t)$, nous pouvons énoncer un théorème qui précise leur décomposition et qui permet de s'affranchir de l'hypothèse $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne.

Proposition 6.17 *: On suppose que l'hypothèse **(H)** est vérifiée et que le processus*

$$F_t = P(\tau \leq t / \mathcal{F}_t)$$

est continu. Soit h un processus $\mathbb{F}$-prévisible borné et $H_t = E(h_\tau \ / \ \mathcal{G}_t)$. Alors la $\mathbb{G}-$martingale H admet *la décomposition suivante*

$$H_t = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_u} dm_u + \int_0^{t\wedge\tau} (h_u - H_{u-}) dM_u$$

où m est la $\mathbb{F}$- martingale

$$m_t = E(\int_0^{\infty} h_u e^{-\Gamma_u} d\Gamma_u / \mathcal{F}_t),$$

et où $M_t = N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{dF_u}{1-F_u}$.

Démonstration : Nous avons, en appliquant l'égalité 3.5

$$H_t = E(h_\tau / \mathcal{G}_t) = 1_{\{\tau \leq t\}} h_\tau + 1_{\{\tau > t\}} E(\int_t^{\infty} h_u e^{\Gamma_t - \Gamma_u} d\Gamma_u \; / \mathcal{F}_t) = 1_{\{\tau \leq t\}} h_\tau + 1_{\{\tau > t\}} A_t$$

où

$$A_t \quad = \quad e^{\Gamma_t} m_t - e^{\Gamma_t} \int_0^t h_u e^{-\Gamma_u} d\Gamma_u.$$

Par une intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} dA_t &= e^{\Gamma_t} dm_t + m_{t-} d(e^{\Gamma_t}) - h_t d\Gamma_t - (\int_0^t h_u e^{-\Gamma_u} d\Gamma_u) d(e^{\Gamma_t}) \\ &= e^{\Gamma_t} dm_t + (A_{t-} - h_t) d\Gamma_t. \end{aligned}$$

Or

$$A_t 1_{\{t<\tau\}} = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} dA_s - A_\tau 1_{\{\tau \leq t\}}.$$

Puisque $A_u = H_u$ sur $\{u < \tau\}$ et $\Delta A_\tau = \Delta m_\tau = 0$ (car ou bien toutes les $\mathbb{F}-$martingales sont continues ou bien $\mathbb{P}(\theta = \tau) = 0$ pour tout $\mathbb{F}-$temps d'arrêt θ, condition **(C1)** ou **(C2)**), alors

$$H_t = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_u} dm_u + \int_0^{t\wedge\tau} (h_u - H_{u-}) dM_u.$$

■

Remarque 6.18 *: Si la filtration $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne il existe un processus*

$$\mu = (\mu^i, i = 1, ..., n)$$

tel que $dm_t = \mu_t dW_t$ et

$$H_t = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_u} \mu_u dW_u + \int_0^{t\wedge\tau} (h_u - H_{u-}) dM_u.$$

La proposition suivante généralise le résultat précédent au cas où le processus F n'est pas continu :

Proposition 6.19 *: On suppose que l'hypothèse **(H)** est vérifiée et que F est $\mathbb{F}-$prévisible.*
Soit h un processus $\mathbb{F}$-prévisible borné, et $H_t = E(h_\tau \; / \mathcal{G}_t)$. Alors le processus H admet la décomposition suivante :

$$H_t = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_{u^-}} dm_u + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Delta\Gamma_u} (h_u - H_{u-}) dM_u$$

et M la $\mathbb{G}$-martingale $M_t = N_t - \Lambda_{t\wedge\tau}$ où $d\Lambda_u = \frac{dF_u}{1-F_{u-}}$.

Démonstration : La démonstration se déroule de manière similaire à celle effectuée dans le cas continu. Nous avons $H_t = 1_{\{\tau \leq t\}} h_\tau + 1_{\{\tau > t\}} A_t$ où $A_t = e^{\Gamma_t} m_t - e^{\Gamma_t} \int_0^t h_u dF_u$.

Par une intégration par parties, en utilisant que le processus Γ est croissant, nous obtenons grâce à la formule d'Itô

$$d(e^{\Gamma_t}) = e^{\Gamma_{t^-}}(d\Gamma_t + e^{\Delta\Gamma_t} - 1 - \Delta\Gamma_t) = e^{\Gamma_{t^-}} \frac{dF_t}{1 - F_t},$$

d'où

$$dA_t = e^{\Gamma_{t^-}} dm_t + A_{t^-} \frac{dF_t}{1 - F_t} - h_t(e^{\Gamma_{t^-}} dF_t + \Delta F_t \Delta e^{\Gamma_t}).$$

Si on note F^c la partie continue du processus croissant F, nous avons que

$$e^{\Gamma_{t^-}} dF_t + \Delta F_t \Delta e^{\Gamma_t} = e^{\Gamma_{t^-}} dF_t^c + \Delta F_t(e^{\Gamma_{t^-}} + \Delta e^{\Gamma_t}) = \frac{dF_t}{1 - F_t}.$$

Alors

$$\begin{aligned} dA_t &= e^{\Gamma_{t^-}} dm_t + (A_{t^-} - h_t)\tfrac{dF_t}{1-F_t} \\ &= e^{\Gamma_{t^-}} dm_t + e^{\Delta\Gamma_t}(H_{t^-} - h_t)\tfrac{dF_t}{1-F_{t^-}}. \end{aligned}$$

Or

$$A_t 1_{\{t<\tau\}} = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} dA_s - A_\tau 1_{\{\tau \leq t\}}$$

et comme $A_u = H_u$ sur $\{u < \tau\}$et $\Delta A_\tau = -e^{\Gamma_\tau} h_\tau \Delta F_\tau + A_{\tau^-} \frac{\Delta F_\tau}{1-F_\tau}$, car comme précédemment $\Delta m_\tau = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} H_t &= m_0 + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_{u^-}} dm_u + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Delta\Gamma_u}(H_{u^-} - h_u)\frac{dF_u}{1-F_{u^-}} + (h_\tau - A_\tau)1_{\{\tau\leq t\}} \\ &= m_0 + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_{u^-}} dm_u + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Delta\Gamma_u}(H_{u^-} - h_u)\frac{dF_u}{1-F_{u^-}} + \\ &\quad [(h_\tau - A_{\tau^-})(1 + \tfrac{\Delta F_\tau}{1-F_\tau})]1_{\{\tau\leq t\}} \\ &= m_0 + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_{u^-}} dm_u + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Delta\Gamma_u}(h_u - H_{u-})dM_u. \end{aligned}$$

■

Remarque 6.20 *Le processus F étant prévisible, il en est de même pour $e^{\Delta\Gamma}$, le processus $(\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Delta\Gamma_u}(h_u - H_{u-})dM_u,\, t \geq 0)$ est donc une martingale locale.*

6.2.2 Stabilité de l'hypothèse (H) par changement de probabilité

On se place dans le cas où la filtration $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne. On suppose que (**H**) est vérifiée sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. On a donc

$$\mathbb{P}(\tau \leq t/\mathcal{F}_\infty) = P(\tau \leq t/\mathcal{F}_t).$$

Soient $\widetilde{\mathbb{P}}$ une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{G}_T$, et $(K_t, t \geq 0)$ la densité de Radon-Nikodym de $\widetilde{\mathbb{P}}$ par rapport à $\mathbb{P}$.

$$d\widetilde{\mathbb{P}}_{|\mathcal{G}_t} = K_t d\mathbb{P}_{|\mathcal{G}_t}.$$

D'après le théorème 6.15 et pour K positive, la martingale K admet l'écriture suivante

$$\begin{aligned} dK_t &= K_{t-}(\psi_t dW_t + \varphi_t dM_t) \\ K_0 &= 1 \end{aligned}$$

où φ et ψ sont deux processus $\mathbb{G}-$ prévisibles vérifiant

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T K_t^2 |\psi_t|^2 dt] < \infty, E_{\mathbb{P}}[\int_0^T K_t^2 \varphi_t^2 d\Lambda_t] < \infty.$$

Théorème 6.21 *: Si ψ est $\mathbb{F}$-adapté alors **(H)** est vérifiée sous $\widetilde{\mathbb{P}}$.*

Démonstration : Le processus K s'écrit

$$K_t = \mathcal{E}(\psi W)_t \mathcal{E}(\varphi M)_t$$

et on note $d\widehat{\mathbb{P}}_{|\mathcal{G}_t} = \mathcal{E}(\varphi M)_t d\mathbb{P}_{|\mathcal{G}_t}$.

Comme (**H**) est vérifiée sous $\mathbb{P}$, $\mathcal{G}_t$ et $\mathcal{F}_\infty$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{F}_t$,

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_t) = \frac{\mathbb{P}(K_t 1_{\tau \leq t}/\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(K_t/\mathcal{F}_t)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{E}(\psi W)_t/\mathcal{F}_t)\mathbb{P}(\mathcal{E}(\varphi M)_t 1_{\tau \leq t}/\mathcal{F}_t)}{\mathbb{P}(\mathcal{E}(\psi W)_t/\mathcal{F}_t)\mathbb{P}(\mathcal{E}(\varphi M)_t/\mathcal{F}_t)} = \widehat{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_t)$$

et

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_T) = \frac{\mathbb{P}(K_T 1_{\tau \leq t}/\mathcal{F}_T)}{\mathbb{P}(K_T/\mathcal{F}_T)} = \frac{\mathbb{P}(\mathcal{E}(\psi W)_T/\mathcal{F}_T)\mathbb{P}(\mathcal{E}(\varphi M)_T 1_{\tau \leq t}/\mathcal{F}_T)}{\mathbb{P}(\mathcal{E}(\psi W)_T/\mathcal{F}_T)\mathbb{P}(\mathcal{E}(\varphi M)_T/\mathcal{F}_T)} = \widehat{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_T),\ \forall T.$$

Donc

$$\widehat{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_\infty) = \widetilde{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_\infty).$$

Si (**H**) est vérifiée sous $\widehat{\mathbb{P}}$, alors

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_t) = \widehat{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_t) = \widehat{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_\infty) = \widetilde{\mathbb{P}}(\tau \leq t/\mathcal{F}_\infty)$$

Par conséquent, il suffit de montrer que (**H**) est vérifiée sous $\widehat{\mathbb{P}}$.

Or W est un $\mathbb{P} - \mathcal{G}_t$-mouvement brownien et $\mathcal{E}(\varphi M)$ est une martingale de saut pur. De plus les martingales W et $\mathcal{E}(\varphi M)$ n'ont pas de sauts communs, elles sont donc orthogonales. Ainsi par orthogonalité $W\mathcal{E}(\varphi M)$ est une $\mathbb{P} - \mathcal{G}_t$- martingale. Ainsi W est une $\widehat{\mathbb{P}} - \mathcal{G}_t$-martingale. Comme W est $\mathbb{F}-$ adapté, c'est un $\widehat{\mathbb{P}} - \mathcal{F}_t$-mouvement brownien. Nous obtenons la conclusion grâce au lemme suivant. ∎

Lemme 6.22 *: Toutes les $\widehat{\mathbb{P}} - \mathcal{F}_t$-martingales de carré intégrable s'écrivent comme intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien W.*

Démonstration du lemme : Si X est une $\widehat{\mathbb{P}} - \mathcal{F}_t$-martingales de carré intégrable, alors

$$X_t = E_{\widehat{\mathbb{P}}}(X_T \ / \ \mathcal{F}_t) = \frac{E_{\mathbb{P}}(K_T X_T \ / \ \mathcal{F}_t)}{E_{\mathbb{P}}(K_T \ / \ \mathcal{F}_t)} = \frac{E_{\mathbb{P}}(K_T \ / \ \mathcal{F}_t)}{E_{\mathbb{P}}(K_T \ / \ \mathcal{F}_t)} E_{\mathbb{P}}(X_T \ / \ \mathcal{F}_t)$$

car (**H**) est vraie sous $\mathbb{P}$. La propriété de représentation prévisible permet d'écrire $(E_{\mathbb{P}}(X_T \ / \ \mathcal{F}_t), t \geq 0)$ comme une intégrale stochastique par rapport à W. Comme W est un $\widehat{\mathbb{P}} - \mathcal{F}_t$-mouvement brownien. Le résultat est vrai. ∎

Remarque 6.23 : *Dans le cas d'une filtration $\mathbb{F}$ engendrée par un processus Y, la remarque 6.16 permet d'étendre le théorème précédent.*

Remarque 6.24 : *Si le processus Γ s'écrit $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_s ds$, on montre qu'il existe une probabilité $\mathbb{R}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que sous $\mathbb{R}$, τ et $\mathcal{F}_\infty$ sont indépendants. Cette probabilité est définie par $d\mathbb{R} = \xi_t d\mathbb{P}$ où*

$$\xi_t = \mathcal{E}((\gamma^{-1} - 1)M)_t.$$

Cependant, le théorème 6.21 ne peut se généraliser lorsque le coefficient dans le changement de probabilité n'est pas $\mathbb{F}$- adapté comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6.25 : *On reprend l'exemple de Kusuoka (cf [13]) en corrigeant la formule erronée qui figure dans cet article. Soient $T > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\Omega = [0, \infty)^2$, et $\mathcal{F}$ la tribu borélienne sur Ω,*

$$\mathbb{P}(dx, dy) = (\lambda_1 \lambda_2) \exp(-\lambda_1 x - \lambda_2 y) dx dy,$$

*$\tau_1(x, y) = x$, $\tau_2(x, y) = y$ et $N_k(t) = 1_{\{\tau_k \leq t\}}$, $t \in [0, T]$. Les temps τ_1 et τ_2 sont indépendants sous $\mathbb{P}$. Alors si on prend $\mathcal{F}_t = \sigma(N_2(s), s \leq t)$ et $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(N_1(s), s \leq t)$, l'hypothèse **(H)** est vérifiée sous $\mathbb{P}$. Considérons maintenant $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ et*

$$\begin{aligned} k_1(t) &= (\tfrac{\alpha_1}{\lambda_1} - 1) N_2(t-), \\ k_2(t) &= (\tfrac{\alpha_2}{\lambda_2} - 1) N_1(t-). \end{aligned}$$

Soit K la solution de l'équation différentielle

$$dK_t = K_{t^-}(k_1(t) dM_1(t) + k_2(t) dM_2(t)), \ K_0 = 1$$

où $M_k(t) = N_k(t) - \lambda_k(t \wedge \tau_k)$. Le processus K est une martingale positive d'espérance un qui s'écrit

$$\begin{aligned} K_t &= \exp(\int_0^t (\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - 1) N_2(s-) \lambda_1 ds + \int_0^t \ln(1 + (\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - 1) N_2(s-)) dN_1(s)) \\ &\quad * \exp(\int_0^t (\frac{\alpha_2}{\lambda_2} - 1) N_1(s-) \lambda_2 ds + \int_0^t \ln(1 + (\frac{\alpha_2}{\lambda_2} - 1) N_1(s-)) dN_2(s)). \end{aligned}$$

On note $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{G}_T$ par $d\mathbb{Q} = K_T d\mathbb{P}$.
Calculons $\mathbb{Q}(\tau_1 > t \ / \ \mathcal{F}_t)$. En utilisant le lemme 3.3

$$\mathbb{Q}(\tau_1 > t / \mathcal{F}_t) = (1 - N_2(t)) \frac{\mathbb{Q}(\tau_1 > t, \tau_2 > t)}{\mathbb{Q}(\tau_2 > t)} + N_2(t) \mathbb{Q}(\tau_1 > t / \tau_2)$$

Or par changement de probabilité

$$\mathbb{Q}(\tau_2 > t) = \frac{1}{D} [(\lambda_2 - \alpha_2) \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2) t) + \lambda_1 \exp(-\alpha_2 t)] \tag{6.2}$$

où $D = \lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2$. Il suffit de remarquer que sur $\{\tau_2 > t\}$,

$$K_t = \exp(-(\lambda_2 - \alpha_2)t \wedge \tau_1).$$

De plus, sur $\{\tau_1 > t, \tau_2 > t\}$, $N_1(s) = N_2(s) = 0$, pour $s \leq t$ donc $K_t = 1$ et

$$\mathbb{Q}(\tau_1 > t, \tau_2 > t) = \exp(-\lambda_1 t)\exp(-\lambda_2 t). \tag{6.3}$$

Il nous reste donc à déterminer $1_{\tau_2 \leq t}\mathbb{Q}(\tau_1 > t/\tau_2)$. D'après la formule de Bayes

$$1_{\tau_2 \leq t}\mathbb{Q}(\tau_1 > t/\tau_2) = 1_{\tau_2 \leq t}\frac{E_{\mathbb{P}}[K_{\tau_1 \vee \tau_2}.1_{\{\tau_1 > t\}}/\tau_2]}{E_{\mathbb{P}}[K_{\tau_1 \vee \tau_2}/\tau_2]}.$$

Sur $\{\tau_1 > t, \tau_2 \leq t\}$, $N_1(s) = k_2(s) = 0$, pour $s \leq t$ d'où

$$K_{\tau_1 \vee \tau_2} = \frac{\alpha_1}{\lambda_1}\exp(-\int_{\tau_2}^{\tau_1}(\alpha_1 - \lambda_1)ds),$$

et

$$\begin{array}{rcl} 1_{\tau_2 \leq t}E_{\mathbb{P}}[K_{\tau_1 \vee \tau_2}.1_{\{\tau_1 > t\}}/\tau_2] & = & 1_{\tau_2 \leq t}\exp((\alpha_1 - \lambda_1)\tau_2))E_{\mathbb{P}}(1_{\{\tau_1 > t\}}\frac{\alpha_1}{\lambda_1}e^{-\tau_1(\alpha_1 - \lambda_1)}) \\ & = & 1_{\tau_2 \leq t}\exp((\alpha_1 - \lambda_1)\tau_2))\int_t^\infty \alpha_1 e^{-\alpha_1 u}du \\ & = & 1_{\tau_2 \leq t}\exp((\alpha_1 - \lambda_1)\tau_2))e^{-\alpha_1 t}. \end{array}.$$

Il reste à calculer $E_{\mathbb{P}}[K_{\tau_1 \vee \tau_2}/\tau_2] = E_{\mathbb{P}}[K_{\tau_1}1_{\tau_1 > \tau_2}/\tau_2] + E_{\mathbb{P}}[K_{\tau_2}1_{\tau_1 < \tau_2}/\tau_2]$. Or

$$K_{\tau_1}1_{\tau_1 > \tau_2} = 1_{\tau_1 > \tau_2}\exp(\ln(1 + k_1(\tau_1)) + \ln(1 + k_2(\tau_1)) - \int_{\tau_2}^{\tau_1}(\alpha_1 - \lambda_1)ds)$$

et

$$K_{\tau_1}1_{\tau_1 > \tau_2} = 1_{\tau_1 > \tau_2}\frac{\alpha_1}{\lambda_1}\exp(-(\tau_1 - \tau_2)(\alpha_1 - \lambda_1)).$$

Par symétrie,

$$K_{\tau_2}1_{\tau_2 > \tau_1} = 1_{\tau_2 > \tau_1}\frac{\alpha_2}{\lambda_2}\exp(-(\tau_2 - \tau_1)(\alpha_2 - \lambda_2)),$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} 1_{\tau_2 \leq t}E_{\mathbb{P}}[K_{\tau_1 \vee \tau_2}/\tau_2] & = & 1_{\tau_2 \leq t}[\frac{\alpha_1}{\lambda_1}\exp(\tau_2(\alpha_1 - \lambda_1))E_{\mathbb{P}}(\exp(-\tau_1(\alpha_1 - \lambda_1)1_{\tau_1 > u})_{u = \tau_2} \\ & & +\frac{\alpha_2}{\lambda_2}\exp(-\tau_2(\alpha_2 - \lambda_2))E_{\mathbb{P}}(\exp(\tau_1(\alpha_2 - \lambda_2))1_{\tau_1 < u})_{u = \tau_2}] \\ & = & 1_{\tau_2 \leq t}[\frac{\alpha_1}{\lambda_1}\exp(\tau_2(\alpha_1 - \lambda_1))[\int_{\tau_2}^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}e^{-x(\alpha_1 - \lambda_1)}dx] \\ & & +\frac{\alpha_2}{\lambda_2}\exp(-\tau_2(\alpha_2 - \lambda_2))[\int_0^{\tau_2}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}e^{x(\alpha_2 - \lambda_2)}dx]] \\ & = & 1_{\tau_2 \leq t}[e^{-\tau_2\lambda_1} + \frac{\alpha_2\lambda_1}{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2)}e^{-\tau_2(\alpha_2 - \lambda_2)}(e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2)\tau_2} - 1)]. \end{array}$$

Par conséquent

$$1_{\tau_2 \leq t}\mathbb{Q}(\tau_1 > t/\tau_2) \quad = \quad 1_{\tau_2 \leq t}\frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2)e^{-\alpha_1(t - \tau_2)}}{\alpha_2\lambda_1 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2)\tau_2} + (\lambda_2 - \alpha_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} \tag{6.4}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(\tau_1 > t/\mathcal{F}_t) &= (1 - N_2(t))\frac{D\exp(-\lambda_1 t)\exp(-\lambda_2 t)}{[(\lambda_2 - \alpha_2)\exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t) + \lambda_1\exp(-\alpha_2 t)]} \\
&\quad + N_2(t)\frac{\lambda_2 D e^{-\alpha_1(t-\tau_2)}}{\alpha_2\lambda_1 e^{D\tau_2} + (\lambda_2 - \alpha_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} \\
&= (1 - N_2(t))\frac{D}{(\lambda_2 - \alpha_2) + \lambda_1\exp(Dt)} \\
&\quad + N_2(t)\frac{\lambda_2 D e^{-\alpha_1(t-\tau_2)}}{\alpha_2\lambda_1 e^{D\tau_2} + (\lambda_2 - \alpha_2)(\lambda_1 + \lambda_2)}.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Déterminons maintenant les conditions sur les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ *pour que le processus* $1 - F_t = \mathbb{Q}(\tau_1 > t/\mathcal{F}_t) = (1 - N_2(t))u(t) + N_2(t)v(t)$ *soit décroissant, avec*

$$u(t) = \frac{D}{(\lambda_2 - \alpha_2) + \lambda_1\exp(Dt)}$$

et $v(t) = \mathbb{Q}(\tau_1 > t/\tau_2)$.

En étudiant les variations de u, *nous obtenons que* u *est décroissant,* v *est trivialement décroissant. Il reste à déterminer le saut en* τ_2. *Ce saut* Δ *est*

$$\Delta = [\mathbb{Q}(\tau_1 > t/\tau_2)]_{t=\tau_2} - D\frac{1}{(\lambda_2 - \alpha_2) + \lambda_1\exp(D\tau_2)}.$$

D'où

$$\Delta = \frac{\lambda_2 D}{\alpha_2\lambda_1 e^{D\tau_2} + (\lambda_2 - \alpha_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} - \frac{D}{(\lambda_2 - \alpha_2) + \lambda_1\exp(D\tau_2)}.$$

En utilisant l'expression précédente, il vient que $\Delta < 0$ *si et seulement si* $\lambda_2 > \alpha_2$.
Par conséquent, si $\lambda_2 > \alpha_2$ *alors* $1 - F_t$ *est décroissant. Donc l'hypothèse* ***(G)*** *est vérifiée sous* $\mathbb{Q}$.
Par contre, on peut montrer que ***(H)*** *n'est pas vérifiée sous* $\mathbb{Q}$ *entre les filtrations* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$. *En effet, si on prend* $t < s$ *et* $X = 1_{\{\tau_2 > s\}}$, *alors on peut montrer que* $E_{\mathbb{Q}}[X/\mathcal{F}_t] \neq E_{\mathbb{Q}}[X/\mathcal{G}_t]$. *En effet*

$$E_{\mathbb{Q}}[X/\mathcal{F}_t] = \mathbb{Q}(\tau_2 > s/\mathcal{F}_t) = 1_{\{\tau_2 > t\}}\frac{\mathbb{Q}(\tau_2 > s)}{\mathbb{Q}(\tau_2 > t)}.$$

En utilisant l'expression (6.2), on obtient

$$E_{\mathbb{Q}}[X/\mathcal{F}_t] = 1_{\{\tau_2 > t\}}\frac{(\lambda_2 - \alpha_2)\exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)s) + \lambda_1\exp(-\alpha_2 s)}{(\lambda_2 - \alpha_2)\exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)t) + \lambda_1\exp(-\alpha_2 t)}.$$

D'autre part

$$E_{\mathbb{Q}}[X/\mathcal{G}_t] = \mathbb{Q}(\tau_2 > s/\mathcal{G}_t) = 1_{\{\tau_1 > t, \tau_2 > t\}}\frac{\mathbb{Q}(\tau_2 > s, \tau_1 > t)}{\mathbb{Q}(\tau_2 > t, \tau_1 > t)} + 1_{\{\tau_1 \leq t < \tau_2\}}\frac{\mathbb{Q}(\tau_2 > s \;/\; \tau_1)}{\mathbb{Q}(\tau_2 > t \;/\; \tau_1)}.$$

Or

$$\mathbb{Q}(\tau_2 > s, \tau_1 > t) = \mathbb{Q}(\tau_2 > s, \tau_1 > s) + \mathbb{Q}(\tau_2 > s, s \geq \tau_1 > t).$$

Sur $\{\tau_2 > s, s \geq \tau_1 > t\}$, $K_s = e^{(\alpha_2 - \lambda_2)(t - \tau_1)}$. *Par conséquent,*

$$\mathbb{Q}(\tau_2 > s, s \geq \tau_1 > t) = \mathbb{P}(e^{(\alpha_2 - \lambda_2)(t - \tau_1)}1_{\{\tau_2 > s, s \geq \tau_1 > t\}}) = \int_s^{+\infty} \lambda_2 e^{-\lambda_2 u}du \int_t^s e^{(\alpha_2 - \lambda_2)(t - v)}\lambda_1 e^{-\lambda_1 v}dv.$$

Après simplification et en utilisant 6.3, on obtient

$$1_{\{\tau_1>t,\tau_2>t\}}\frac{\mathbb{Q}(\tau_2>s,\tau_1>t)}{\mathbb{Q}(\tau_2>t,\tau_1>t)}=1_{\{\tau_1>t,\tau_2>t\}}\frac{1}{D}(\lambda_1 e^{-\alpha_2(s-t)}-(\alpha_2-\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(s-t)}.$$

Grâce à l'expression (6.4), en interchageant le rôle de τ_1 et τ_2, on a

$$1_{\{\tau_1\le t<\tau_2\}}\frac{\mathbb{Q}(\tau_2>s\ /\ \tau_1)}{\mathbb{Q}(\tau_2>t\ /\ \tau_1)}=1_{\{\tau_1\le t<\tau_2\}}e^{-\alpha_2(s-t)}.$$

Ainsi, $E_{\mathbb{Q}}[X/\mathcal{F}_t]\neq E_{\mathbb{Q}}[X/\mathcal{G}_t]$.

6.2.3 Hypothèse (H) et absence d'arbitrage

Nous montrons que sous certaines hypothèses l'absence d'arbitrage entraîne que l'hypothèse (**H**) est vérifiée sous une m.m.e particulière.
L'information $\mathcal{F}_t$ disponible sur ce marché à la date t est la connaissance des prix des actifs. On a donc

$$\mathcal{F}_t=\sigma(S_s^i,S_s^0,s\le t,i=1,...,n).$$

Nous introduisons les notions d'arbitrage, de marché complet et de portefeuille de la manière suivante :

Définition 6.26 *: Si $\mathbb{I}$ est une filtration, nous dirons qu'un $\mathcal{I}_T-$marché est sans arbitrage s'il existe une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{I}_T$ telle que les prix des actifs actualisés sous cette probabilité sont des $\mathbb{I}-$martingales. Cette probabilité est appelée mesure martingale équivalente (m.m.e en abrégé).*

Définition 6.27 *Un portefeuille est un processus $\pi=(\pi^i,\ i=1,...,n)$ $\mathcal{I}_t-$ prévisible, satisfaisant*

$$\sum_{i=1}^n\int_0^T\pi_t^i dt<+\infty\ ,\ p.s.$$

Un portefeuille est autofinançant si la variation de la richesse ne provient que de la variation des prix et non d'un rééquilibrage du portefeuille. Ceci équivaut au fait que la richesse actualisée est une $\mathbb{Q}$-martingale pour toute m.m.e $\mathbb{Q}$.

Définition 6.28 *Nous dirons que le $\mathcal{I}_T-$marché est complet si tout actif contingent (i.e les variables aléatoires $\mathcal{I}_T$-mesurables de carré intégrable) peut être dupliqué par un portefeuille autofinançant c'est à dire qu'il existe un portefeuille autofinançant de valeur terminale égale à l'actif contingent.*

Nous faisons l'hypothèse suivante

[**HF**] Le $\mathcal{F}_T-$marché est sans arbitrage et complet.

Cette hypothèse implique qu'il existe une unique martingale mesure équivalente à $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ notée $\mathbb{P}^0$ telle que les processus $(\widetilde{S_t^i}=S_t^iR_t,t\le T)$ sont des $\mathbb{P}^0-\mathcal{F}_t-$martingales.

Nous avons vu précédemment que $\widetilde{S}$ n'est pas nécessairement une martingale dans la filtration $\mathbb{G}$. Ce problème peut être écarté grâce à l'hypothèse (**H**) selon laquelle toutes les $\mathbb{F}$-martingales de carré intégrable sont des $\mathbb{G}$-martingales. Cette hypothèse peut être justifiée par une structure particulière du $\mathcal{G}_T-$marché.

En effet, supposons que les actifs $S_t = (S_t^i, t \leq T)$ restent négociables dans le $\mathcal{G}_T-$marché. Si de plus, ce marché est sans arbitrage, alors $R_t S_t$ est une $\mathbb{G}-$martingale sous $\widetilde{\mathbb{P}}$ où $\widetilde{\mathbb{P}}$ est une m.m.e sur ce marché. Donc, comme $R_t S_t$ est $\mathbb{F}-$mesurable, c'est aussi une $\widetilde{\mathbb{P}} - \mathcal{F}_t$-martingale. Or l'hypothèse [**HF**] implique l'unicité de la m.m.e $\mathbb{P}^0$. Par conséquent, $\widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}^0$ sur $\mathcal{F}_T$ et comme RS engendre toutes les $\mathbb{F}$-martingales, l'hypothèse (**H**) est vérifiée pour $\widetilde{\mathbb{P}}$.

La remarque 6.24 assure que dans ce cas, il existe une probabilité $\mathbb{R}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que τ et $\mathcal{F}_\infty$ sont indépendants. La réciproque est aussi vraie et nous l'énonçons comme suit.

Proposition 6.29 *: S'il existe une probabilité $\mathbb{R}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que τ et $\mathcal{F}_\infty$ sont indépendants, alors il existe une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que les processus $(\widetilde{S_t^i} = S_t^i R_t, t \leq T)$ sont des $\widetilde{\mathbb{P}}-\mathcal{G}_t-$martingales. De plus, $\widetilde{\mathbb{P}}$ coïncide avec $\mathbb{P}^0$ sur $\mathcal{F}_T$.*

Démonstration : Commençons par montrer ce résultat lorsque $\mathbb{P}^0$ coïncide avec $\mathbb{P}$. Nous notons $R_t^g = \frac{d\mathbb{R}}{d\mathbb{P}}/\mathcal{G}_t$ et $R_t^f = E(R_t^g \ / \ \mathcal{F}_t) = \frac{d\mathbb{R}}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t$.

Dans ce cas, $\widetilde{S}$ est une $\mathbb{P}-\mathcal{F}_t-$martingale, donc une $\mathbb{R}-\mathcal{F}_t$-semimartingale. Sa décomposition sous $\mathbb{R}$ s'écrit

$$\widetilde{S}_t = X_t + \int_0^t \frac{d\left\langle \widetilde{S}, R^f \right\rangle_t}{R_{t-}^f}$$

où X est une $\mathbb{R}-\mathcal{F}_t-$martingale. Du fait de l'indépendance de τ et $\mathcal{F}_\infty$ sous $\mathbb{R}$, c'est une $\mathbb{R}-\mathcal{G}_t-$martingale. Donc $\widetilde{S}$ est une $\mathbb{R}-\mathcal{G}_t$-semimartingale. De plus, la complétion du $\mathcal{F}_T-$marché implique qu'il existe un processus H $\mathbb{F}-$prévisible vérifiant $E(\int_0^T H_s^2 d[S,S]_s) < +\infty$, tel que

$$R_t^f = \int_0^t R_s^f H_s d\widetilde{S}_s.$$

Comme $(R^g)_t^{-1} = \mathcal{E}(HX)_t$, la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ définie par

$$d\widetilde{\mathbb{P}} = (R^g)_T^{-1} R_T^f d\mathbb{P}$$

coïncide avec $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ et est telle que les processus $(\widetilde{S_t^i} = S_t^i R_t, t \leq T)$ sont des $\widetilde{\mathbb{P}}-\mathcal{G}_t-$martingales.

Dans le cas général, comme $\mathbb{P}^0$ est équivalent à $\mathbb{P}$, $\mathbb{R}$ est équivalente à $\mathbb{P}^0$. Par la même argumentation en remplaçant $\mathbb{P}$ par $\mathbb{P}^0$, on obtient le résultat. ■

Par notre raisonnement précédent, l'hypothèse (**H)** est vérifiée sous $\widetilde{\mathbb{P}}$.

L'exemple de Kusuoka (cf [13]) illustre bien cette situation. Si on prend comme probabilité historique la probabilité appelée $\mathbb{Q}$ dans l'exemple et pour actif S la martingale

$$M_t^{2,\mathbb{Q}} = N_2(t) + \int_0^{t\wedge\tau_2} \frac{d(\mathbb{Q}(\tau_2 > s))}{\mathbb{Q}(\tau_2 > s)}.$$

La filtration $\mathbb{F}$ est $\mathcal{F}_t = \sigma(N_2(s), s \leq t)$ et $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(N_1(s), s \leq t)$. On a montré que (**H)** n'est pas vraie sous $\mathbb{Q}$. Cependant, le $\mathcal{G}_T-$marché est non arbitré, puisque la probabilité $\mathbb{P}$ rend τ_1 et τ_2 indépendants.

La m.m.e du $\mathcal{G}_T-$marché coïncide avec $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_T$.

Remarque 6.30 *: L'hypothèse **(H)** est présente dans la plupart des articles traitant du risque de défaut, même si elle n'est pas toujours énoncée explicitement.*

Remarque 6.31 *: Si l'hypothèse **(H)** n'est pas vérifiée sous la probabilité historique, il existe des exemples où le $\mathcal{G}_T-$marché présente des opportunités d'arbitrage.*
Par exemple supposons $T = 1$, $r = 0$, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$,

$$dS_t = S_t dW_t,\ S_0 = 1$$

et soit τ le dernier temps de passage avant 1 par le niveau x

$$\tau = \sup\{t \leq 1, S_t = x\} \text{ où } x \neq 1.$$

Soit $A = \{S_{\frac{1}{2}} < \frac{x}{2}, \tau > \frac{1}{2}\}$. Cet ensemble appartient à $\mathcal{G}_{1/2}$. S'il existait une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que S soit une martingale, alors

$$E_{\mathbb{Q}}(S_{\tau \vee \frac{1}{2}} 1_A) = E_{\mathbb{Q}}(S_{\frac{1}{2}} 1_A) = E_{\mathbb{Q}}(S_\tau 1_A) = x\mathbb{Q}(A)$$

et $E_{\mathbb{Q}}(S_{\frac{1}{2}} 1_A) < x\mathbb{Q}(A)/2$ d'où $\mathbb{Q}(A) = 0$. Ce qui est absurde puisque $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
L'arbitrage peut être vu de façon financière de la manière suivante. On se place au temps 1/2. Si $\tau < \frac{1}{2}$ on ne fait rien et si $\tau > \frac{1}{2}$ et $S_{\frac{1}{2}} > x$, on vend à découvert S et on solde sa position quand S vaudra $\frac{[S_{1/2} - x]}{2}$; ceci arrive avant τ avec une probabilité 1. Si $\tau > \frac{1}{2}$ et $S_{\frac{1}{2}} \leq x$, on achète S et on le revend quand il vaudra $\frac{[x - S_{1/2}]}{2}$.
L'arbitrage existe aussi sur l'intervalle $]0, \tau[$. En effet, puisque l'agent sait que τ n'est pas arrivé, il réalise un arbitrage en achetant l'actif si son prix S est inférieur à x et en le revendant lorsque son prix est $\frac{[x-S]}{2}$. Ceci se produit avec une probabilité un avant τ et en faisant le contraire si S est supérieur à x.
Dans cet exemple, l'arbitrage vient du fait que l'on a une maturité qui majore constamment le temps de défaut τ, ce qui fait qu'au moment du défaut l'agent sera initié. Si dans le même exemple, on prend une maturité $T = 1/2$, alors il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ telle que le processus S arrêté en τ soit une martingale. En effet, la dynamique de S est donnée dans la filtration $\mathcal{G}$ par :

$$dS_t = S_t\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} sgn(W_t)\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\right)dt + dW_t\right)$$

où $\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^{+\infty} dy \exp(\frac{-y^2}{2})$. Nous redonnons la démonstration de ce résultat qui se trouve dans [16], basé sur le calcul de $\mathbb{P}(\tau \leq t/\mathcal{F}_t)$. L'ensemble $\{\tau \leq t\}$ est égal à $\{d_t > 1\}$ où $d_t = \inf\{s \geq t, W_s = 0)$ et

$$d_t \overset{loi}{=} t + \frac{W_t^2}{G^2}$$

où G est une variable gaussienne centrée réduite indépendante de W. D'où

$$\mathbb{P}(\tau \leq t/\mathcal{F}_t) = \phi(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}).$$

*Pour $t \leq 1/2$, $\frac{1}{\sqrt{1-t}} sgn(W_t)(\frac{\phi'}{\phi})(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}})$ est borné. Donc, il existe une m.m.e. sur $\mathcal{G}_T$. Si on suppose que l'actif S reste négociable jusqu'en $T = 1/2$, on peut montrer que l'hypothèse **(H)** est vraie sous cette m.m.e.*

Bibliographie

[1] Bélanger A., Shreve S., Wong D. : A unified Model for Credit Derivatives, *Prébublication,* 2001.

[2] Dellacherie C. : Un exemple de la théorie générale des processus, *Séminaire de probabilités* IV, Lecture Notes in Math. 124, 60-70, Springer-verlag, Berlin, 1970.

[3] Dellacherie C. : *Capacités et processus stochastiques,* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[4] Dellacherie C., Meyer P.A. : A propos du travail de Yor sur les grossissements de tribus, *Séminaire de probabilités* XII, Lecture notes in Math., 69-78,Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[5] Dellacherie C., Maisonneuve B., Meyer P.A. : *Probabilité et potentiel, processus de Markov. Compléments de calcul stochastique.* Hermann, 1992.

[6] Duffie D., Schroder M., Skiadas C. : Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty, *Annals of Applied Probability,* 6, 1075-1090, 1997.

[7] Elliott R.J., Jeanblanc M., Yor M. : On models of default risk, *Mathematical Finance* 10, 179-196, 2000.

[8] El Karoui N. : Modélisation de l'information : *Ecole d'été INRIA*, Rocquencourt Juin 1999.

[9] Jacod J., Shiryaev A.N. : *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Grudlehren der methematischen Wissenschaften 288, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[10] Jarrow R.A., Yu F. : Counterparty Risk and Pricing of Defaultable Securities, *Preprint*, 1999.

[11] Jeanblanc M., Rutkowski M. : Modelling of default risk : An overview. *Mathematical Finance : theory and practice. Modern Mathematics Series, High Education press,* 1999.

[12] Jeulin T. : *Semi-martingales et grosssissement de filtration,* Lecture Notes in Math. 833, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[13] Kusuoka S. : A remark on default risk models, *Advances in Mathematical Economics*, 1, 69-82, 1999.

[14] Rutkowski M. : "On models of default risk" by R.Elliott, M.Jeanblanc and M.Yor. *Working paper*, 2000.

[15] Wong D. : A Unifiying Credit Model, *preprint,* Scotia Capital Group, 1998.

[16] Yor M. : *Some aspects of Brownian Motion. Part II : Some recent Martingale Problems,* Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser, 1997.

Chapitre 7

Instants de défaut multiples

Dans la réalité, il n'existe pas un seul instant de défaut. En général, le marché est constitué de plusieurs actifs qui sont chacun soumis à un risque de défaut. C'est pourquoi il est intéressant de généraliser les résultats du chapitre précédent en présence de plusieurs temps de défaut. Comme précédemment, nous introduisons les temps de défaut comme des variables aléatoires positives sur un espace probabilisé.
Soient $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé avec une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ et $\tau_1, ..., \tau_n$ des temps aléatoires définis sur cet espace.
Pour $i = 1, ..., n$, nous posons

$$N_t^i = 1_{\{\tau_i \leq t\}}, \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

et nous notons $\mathbb{H}^i$ la filtration engendrée par le processus N^i. Nous introduisons la filtration $\mathbb{G}$ définie par

$$\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1 \vee ... \vee \mathbb{H}^n,$$

et les filtrations $\mathbb{G}^i$ définies par

$$\mathbb{G}^i = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}^i.$$

Nous commençons par traiter quelques exemples qui permettent de comprendre les questions qui apparaissent lors de la présence de plusieurs temps de défaut.
En particulier, nous montrons que la connaissance de la loi du minimum des temps de défaut si l'on s'arrête à l'arrivée du premier instant de défaut et de la loi des temps ordonnés sinon, est indispensable pour mener les calculs. Dans le cas où on s'intéresse au premier instant où un défaut se produit, l'évaluation d'actifs contingent soumis au défaut se fait à l'aide du processus de hasard du minimum. Nous donnons des conditions pour déterminer le processus de hasard et le $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$-martingale processus de hasard du minimum.
Nous avons montré dans le chapitre 6 que la structure du marché pouvait imposer que la propriété $(\mathbf{H})$ était vérifiée. C'est pourquoi nous étudions la conservation de l'hypothèse $(\mathbf{H})$ lorsqu'il y a plusieurs temps de défaut. Nous énonçons une condition sur les temps de défaut qui implique que la propriété $(\mathbf{H})$ est vraie entre les filtrations $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$.

7.1 Quelques exemples

1. Soient deux temps aléatoires τ_1 et τ_2, nous supposons que la valeur de la firme vérifie

$$\begin{aligned} dV_t &= V_t(\mu dt + \sigma dW_t),\ 0 \le t < \tau_1,\ \tau_1 \le t < \tau_2,\ \tau_2 \le t < T, V_0 = x \\ V_{\tau_1} &= \delta_1 V_{\tau_1 -} \text{ et } V_{\tau_2} = \delta_2 V_{\tau_2} \end{aligned}$$

   où W est un mouvement brownien

   Nous supposons que $\tau_1 < \tau_2$ et $\mathbb{F}$ est la filtration brownienne.

   Nous cherchons la valeur d'un contrat qui donne $h(V_T)$ en T. Le prix d'un tel contrat en $t = 0$ est

$$P(0,T) = E[e^{-R_T}(h(\widetilde{V}_T)1_{\{T<\tau_1\}} + h(\delta_1 \widetilde{V}_T)1_{\{\tau_1 \le T < \tau_2\}} + h(\delta_1\delta_2\widetilde{V}_T)1_{\{\tau_2 \le T\}}]$$

   où $R_T = \int_0^T r_s ds$ est le taux d'actualisation et $\widetilde{V}$ est la solution de

$$d\widetilde{V}_t = \widetilde{V}_t(\mu dt + \sigma dW_t),\ 0 \le t < T,\ V_0 = x.$$

   Alors

$$P(0,T) \quad = \quad E(e^{-R_T}h(\widetilde{V}_T)) - E[e^{-R_T}(h(\widetilde{V}_T)1_{\{T>\tau_1\}} - h(\delta_1\widetilde{V}_T)1_{\{\tau_1 \le T < \tau_2\}} - h(\delta_1\delta_2\widetilde{V}_T)1_{\{\tau_2 \le T\}})].$$

   Dans le cas où $h(cx) = ch(x)$ et $(\tau_1\ ,\ \tau_2)$,sont indépendants du brownien, on obtient

$$P(0,T) \quad = \quad E(e^{-R_T}h(\widetilde{V}_T))(1 - \mathbb{P}(T > \tau_1) - \delta_1\mathbb{P}(\tau_1 \le T < \tau_2) - \delta_1\delta_2\mathbb{P}(\tau_2 \le T)] \ .$$

   Si la loi du couple $(\tau_1\ ,\ \tau_2)$ est connue, il est possible d'obtenir une formule explicite de $P(0,T)$.

2. Si nous reprenons l'exemple précédent dans le cas où τ_1 et τ_2 ne sont plus forcément ordonnés. Alors la valeur du contrat qui donne $h(V_T)$ en T est

$$P(0,T) = E[e^{-R_T}(h(\widetilde{V}_T)1_{\{T<\underline{\tau}\}} + \delta_1 h(\widetilde{V}_T)1_{\{\tau_1 \le T < \tau_2\}} + \delta_2 h(\widetilde{V}_T)1_{\{\tau_2 \le T < \tau_1\}} + \delta_1\delta_2 h(\widetilde{V}_T)1_{\{\overline{\tau} \le T\}}]$$

   où $\underline{\tau} = \min(\tau_1\ ,\ \tau_2)$ et $\overline{\tau} = \max(\tau_1\ ,\ \tau_2)$.

   Dans le cas où τ_1 et τ_2 sont indépendants et où le couple $(\tau_1\ ,\ \tau_2)$ est indépendant de la filtration $\mathbb{F}$, on obtient

$$\begin{aligned} P(0,T) &= E(e^{-R_T}h(\widetilde{V}_T))(1 - \mathbb{P}(T > \underline{\tau}\,) - \delta_1\mathbb{P}(\tau_1 \le T < \tau_2) \\ &\quad -\delta_2\mathbb{P}(\tau_2 \le T < \tau_1) - \delta_1\delta_2\mathbb{P}(\overline{\tau} \le T)] \\ &= E(e^{-R_T}h(\widetilde{V}_T))[F_1(T)F_2(T) - \delta_1 F_1(T)(1 - F_2(T)) \\ &\quad -\delta_2 F_2(T)(1 - F_1(T)) - \delta_1\delta_2 F_1(T)F_2(T)]. \end{aligned}$$

   Dans le cas général, nous utilisons la densité conditionnelle $f(x,y)$ par rapport à $\mathcal{F}_T$ du couple

$(\tau_1\ ,\ \tau_2)$. Nous pouvons écrire le prix comme suit

$$\begin{aligned} P(0,T) &= E[e^{-R_T}h(\widetilde{V}_T)\{1-\mathbb{P}(T>\underline{\tau}\ /\ \mathcal{F}_T\ )-\delta_1\mathbb{P}(\tau_1\leq T<\tau_2/\ \mathcal{F}_T) \\ &\quad -\delta_2\mathbb{P}(\tau_2\leq T<\tau_1\ /\ \mathcal{F}_T)-\delta_1\delta_2\mathbb{P}(\overline{\tau}\leq T\ /\ \mathcal{F}_T)\}] \\ &= E[e^{-R_T}h(\widetilde{V}_T)\{(1-\delta_1\delta_2)\int_0^T\int_0^T f(x,y)dxdy-\delta_1\int_0^T\int_T^{+\infty} f(x,y)dxdy \\ &\quad -\delta_2\int_T^{+\infty}\int_0^T f(x,y)dxdy\}]. \end{aligned}$$

7.2 Propriété du minimum de plusieurs temps de défaut

Nous rappelons tout d'abord les définitions suivantes :

Définition 7.1 *: Si τ est un temps aléatoire, le $(\mathbb{F}-\mathbb{G})$ m.p.h de τ est le processus Λ, $\mathbb{F}-$prévisible, croissant continu à droite tel que*

$$M_t = N_t - \Lambda_{t\wedge\tau}$$

soit une $\mathbb{G}-$martingale.

Définition 7.2 *: On appelle $\mathbb{F}-$intensité de τ, le $(\mathbb{F}-\mathbb{F}\vee\mathbb{H})$ m.p.h de τ pour $\mathcal{H}_t=\sigma(t\wedge\tau)$.*

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux propriétés du processus de hasard et du $(\mathbb{F}-\mathbb{G})-$ p.m.h du minimum τ des temps aléatoires $\tau_1,...,\tau_n$. En particulier, nous cherchons à relier ces processus à ceux des différents temps aléatoires. Nous montrons ensuite que l'hypothèse faite pour calculer le $(\mathbb{F}-\mathbb{G})$ martingale processus de hasard de τ entraîne des conditions très fortes sur la loi conjointe de $(\tau_1,...,\tau_n)$.

7.2.1 Fonction de hasard et martingale processus de hasard

Nous rappelons des résultats établis dans [3]

Lemme 7.3 *: Soient τ_i, $i=1,...,n$ des temps aléatoires définis sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$. Supposons que τ_i admet un $(\mathbb{F}-\mathbb{G}^i)$ processus de hasard Γ^i. Si τ_i, $i=1,...,n$, sont mutuellement indépendants, alors le processus de hasard Γ de τ est égal à la somme des processus de hasard Γ^i.*

Démonstration : Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, nous avons

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma_t} &= 1-F(t)=\mathbb{P}(\tau>t\ /\ \mathcal{F}_t)=\prod_{i=1}^n\mathbb{P}(\tau_i>t\ /\ \mathcal{F}_t) \\ &= \prod_{i=1}^n(1-F_i(t))=e^{-\sum_{i=1}^n\Gamma_t^i}. \end{aligned}$$

■

Lemme 7.4 *: Soient τ_i, $i=1,...,n$ des temps aléatoires tels que $\mathbb{P}(\tau_i=\tau_j\ )=0$ pour $i\neq j$. Si τ_i admet un $(\mathbb{F}-\mathbb{G})$ m.p.h Λ^i, alors le $(\mathbb{F}-\mathbb{G})$ p.m.h Λ du minimum τ est égal à la somme des $(\mathbb{F}-\mathbb{G})$ p.m.h, i.e*

$$\Lambda_t=\sum_{i=1}^n\Lambda_t^i. \tag{7.1}$$

Démonstration : Par hypothèse, pour $i=1,...,n$, le processus $M_t^i=N_t^i-\Lambda_{t\wedge\tau_i}^i$ est une $\mathbb{G}-$martingale, ainsi que le processus arrêté $(M^i)^\tau$.

Comme $\mathbb{P}(\tau_i = \tau_j) = 0$ pour $i \neq j$, nous avons

$$N_t = \sum_{i=1}^{n} N^i_{t\wedge\tau}.$$

Par conséquent, le processus

$$M_t = N_t - \sum_{i=1}^{n} \Lambda^i_{t\wedge\tau}$$

est une $\mathbb{G}-$martingale comme somme de martingales. D'où l'égalité (7.1). ■

Remarque 7.5 *: En général, la $\mathbb{F}-$intensité du minimum n'est pas égale à la somme des $\mathbb{F}-$intensités. Considérons τ_1 et τ_2 deux temps de défaut définis par*

$$\tau_i = \inf\{t, \psi^i_t \geq \Theta\}$$

où ψ^i, $i = 1, 2$ sont des processus $\mathbb{F}-$adaptés vérifiant $0 \leq \psi^1_t < \psi^2_t$ et Θ est une variable exponentielle de paramètre un indépendante de $\mathbb{F}$.
Alors ψ^i est la $(\mathbb{F} - \mathbb{G}^i)-$ intensité de τ_i et la $\mathbb{F}-$intensité du minimum τ est ψ^1 (et $\psi^1 \neq \psi^1 + \psi^2$).
On peut remarquer que τ_2 est un temps d'arrêt prévisible dans la filtration $\mathbb{G}$, par suite il ne possède pas de $(\mathbb{F} - \mathbb{G})-$intensité. En effet, la suite croissante de $\mathbb{G}-$temps d'arrêt $\tau^{(n)} = \inf\{t > \tau_1, \psi^2_t \geq \Theta - \frac{1}{n}\}$, $(\tau^{(n)})_{n>0}$ converge vers τ_2 .
Par contre, le $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$ processus martingale de hasard $\widehat{\Lambda}$ de τ est égal à la somme des $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$ processus martingale de hasard $\widehat{\Lambda^i}$ des τ_i, s'ils existent.

Nous avons vu précédemment que d'une part, l'indépendance des temps de défaut permet de calculer facilement le processus de hasard du minimum, d'autre part que l'existence des $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$ martingale processus de hasard Λ^i permet d'obtenir le $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$ martingale processus de hasard Λ. La proposition suivante donne une condition pour que ces $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$ martingales processus de hasard Λ^i existent.

Proposition 7.6 *: Soient τ_i, $i = 1, ..., n$ des temps aléatoires admettant des $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$ m.p.h Λ^i absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue et vérifiant $\mathbb{P}(\tau_i = \tau_j) = 0$ pour $i \neq j$. Alors τ_i, $i = 1, ..., n$ sont deux à deux indépendants conditionnellement à $\mathcal{F}_t$.*

Démonstration : Dans un premier temps, considérons pour la filtration $\mathbb{F}$ la filtration triviale.
Commençons par le cas $n = 2$. Soient τ_1 et τ_2 deux instants de défaut. On note λ_i la fonction déterministe telle que

$$d\Lambda_i(s) = \lambda_i(s)ds$$

Comme M^1M^2 est une martingale (les deux martingales de saut pur n'ont pas de saut commun, car elles ont chacune un unique saut en τ_i et $\mathbb{P}(\tau_i = \tau_j) = 0$ pour $i \neq j$), pour $t \leq u$

$$E(M^1_t M^2_u) = E(M^1_t E(M^2_u \ / \ \mathcal{G}_t)) = E(M^1_t M^2_t) = 0.$$

La démonstration sera identique pour $u < t$.

$$\begin{aligned} E(M_t^1 M_u^2) &= F(t,u) - \int_0^\infty dy \int_0^t dx f(x,y)\Lambda_2(y\wedge u) \\ &- \int_0^\infty dx \int_0^u dy f(x,y)\Lambda_1(x\wedge t) \\ &+ \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy f(x,y)\Lambda_1(x\wedge t)\Lambda_2(y\wedge u) \end{aligned}$$

où $F(x,y) = \mathbb{P}(\tau_1 \leq x, \tau_2 \leq y)$ et f est la densité jointe de τ_1 et τ_2. D'où

$$\begin{aligned} 0 = F(t,u) &- \int_0^t dx \int_0^u dy f(x,y)\Lambda_2(y) - \int_0^t dx \int_u^\infty dy f(x,y)\Lambda_2(u) \\ &- \int_0^u dy \int_0^t dx f(x,y)\Lambda_1(x) - \int_0^u dy \int_u^\infty dx f(x,y)\Lambda_1(t) \\ &+ \int_0^t dx \int_0^u dy f(x,y)\Lambda_1(x)\Lambda_2(y) + \int_0^t dx \int_u^\infty dy f(x,y)\Lambda_1(x)\Lambda_2(u) \\ &+ \int_t^\infty dx \int_0^u dy f(x,y)\Lambda_1(t)\Lambda_2(y) + \int_t^\infty dx \int_u^\infty dy f(x,y)\Lambda_1(t)\Lambda_2(u) \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à t puis par rapport à u, on obtient après simplification

$$f(t,u) - \lambda_1(t)\int_t^\infty dx f(x,u) - \lambda_2(u)\int_u^\infty dy f(t,y) + \lambda_1(t)\lambda_2(u)\int_t^\infty dx \int_u^\infty dy f(x,y) = 0. \tag{7.2}$$

Si on pose $G(t,u) = 1 - F(t,u) = e^{-\Lambda_1(t)} + e^{-\Lambda_2(u)} - e^{-\Lambda_1(t)}e^{-\Lambda_2(u)}H(t,u)$, l'équation (7.2) devient

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u \partial t} = 0$$

c'est-à-dire H s'écrit $H(t,u) = h_1(t) + h_2(u)$.
Par conséquent on cherche deux fonctions h_1 et h_2 telles que $F = 1 - e^{-\Lambda_1(t)} - e^{-\Lambda_2(u)} + e^{-\Lambda_1(t)}e^{-\Lambda_2(u)}(h_1(t) + h_2(u))$ soit une fonction de répartition.
Comme M_1 et M_2 sont des martingales, les lois marginales sont connues et

$$\begin{aligned} F(\infty,u) &= 1 - \exp(-\Lambda_2(u)),\ F(0,u) = 0 \\ F(t,\infty) &= 1 - \exp(-\Lambda_1(t)),\ F(t,0) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique $h_1(0) + h_2(u) = 1 = h_1(t) + h_2(0)$. D'où h_1 (resp. h_2) est égale à une constante a (resp. b) telles que $a + b = 1$.
Ainsi $F(t,u) = (1 - e^{-\Lambda_1(t)})(1 - e^{-\Lambda_2(u)})$ et τ_1 et τ_2 sont indépendants.
Si $n > 2$, soient τ_i et τ_j deux instants de défaut. Comme ils admettent des $(\mathbb{F} - \mathbb{G})$ m.p.h Λ^i et Λ^j absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue, ils admettent Λ^i et Λ^j comme $(\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^i \vee \mathbb{H}^j)$ m.p.h. Par le raisonnement précédent, τ_i et τ_j sont indépendants.
Dans le cas où la filtration $\mathbb{F}$ n'est pas triviale, nous utilisons la même méthode, en considérant les distributions conditionnellement à $\mathcal{F}_t$. ■

7.3 Etude de la propriété (H)

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'un cas intéressant en finance était le cas où les $\mathbb{F}-$martingales de carré intégrable sont des $\mathbb{G}-$martingales. Ceci sera vérifié dans le cas où la propriété (**H**) est vraie à chaque grossissement de filtration c'est-à-dire entre les filtrations $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1$ et entre $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1 \vee ... \vee \mathbb{H}^i$

et $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1 \vee ... \vee \mathbb{H}^{i+1}$ pour $i = 1, .; n-1$.

En présence de deux temps de défaut $\tau_1$et τ_2, nous étudions les conditions que doivent vérifier ces deux instants pour que l'hypothèse $(\mathbf{H})$ soit vraie entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1$ d'une part et $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1$et $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1 \vee \mathbb{H}^2$ d'autre part et de manière symétrique. Nous montrons ensuite que dans le cas de deux processus de Cox, ces conditions ne sont jamais vérifiées.

Dans toute la suite, nous faisons l'hypothèse suivante

$$\mathbb{P}(\tau_i = \tau_j) = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

7.3.1 Cas de la filtration triviale

Soit $\mathbb{F}$ la filtration triviale. Nous notons $\mathcal{H}_t = \sigma(\tau_1 \wedge t)$ et $\mathcal{G}_t = \mathcal{H}_t \vee \sigma(\tau_2 \wedge t)$.

D'après le théorème 6.15, les $\mathbb{H}-$martingales de carré intégrable s'écrivent comme intégrales stochastiques par rapport à M^1 où

$$M_t^1 = N_t^1 - \int_0^{t\wedge\tau_1} \frac{dF_1(s)}{1 - F_1(s-)}.$$

et F_1 est la fonction de répartition de τ_1.

Par conséquent, les $\mathbb{H}-$martingales sont des $\mathbb{G}-$martingales si et seulement si M^1 reste une $\mathbb{G}-$martingale, ce qui équivaut à

$$\mathbb{P}(\tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{H}_t) = \mathbb{P}(\tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{H}_\infty)$$

soit

$$E(h(\tau_1)\mathbb{P}(\tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{H}_t)) = E(h(\tau_1)1_{\tau_2 \leq t}) \text{ pour toute fonction borélienne.} \tag{7.3}$$

Or

$$\begin{aligned} E(h(\tau_1)1_{\tau_1 \leq t}\mathbb{P}(\tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{H}_t)) &= E(h(\tau_1 \wedge t)1_{\tau_1 \leq t}\mathbb{P}(\tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{H}_t)) \\ &= E(h(\tau_1 \wedge t)1_{\tau_1 \leq t}1_{\tau_2 \leq t}) \\ &= E(h(\tau_1)1_{\tau_1 \leq t}1_{\tau_2 \leq t}). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (7.3) est équivalente à

$$E(h(\tau_1)1_{\tau_1 > t}\mathbb{P}(\tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{H}_t)) = E(h(\tau_1)1_{\tau_1 > t}1_{\tau_2 \leq t}).$$

On peut se restreindre à des fonctions élémentaires, d'où l'équivalence avec

$$E(1_{u > \tau_1 > t}\mathbb{P}(\tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{H}_t)) = E(1_{u > \tau_1 > t}1_{\tau_2 \leq t}).$$

Comme

$$1_{\tau_1 > t}\mathbb{P}(\tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{H}_t) = 1_{\tau_1 > t}\frac{\mathbb{P}(\tau_2 \leq t, \tau_1 > t)}{\mathbb{P}(\tau_1 > t)},$$

l'égalité (7.3) est équivalente à

$$\mathbb{P}(\tau_2 \leq t < \tau_1)\mathbb{P}(u > \tau_1 > t) = \mathbb{P}(u > \tau_1 > t \geq \tau_2)\mathbb{P}(\tau_1 > t), \forall t, \forall u. \tag{7.4}$$

De manière symétrique, si on veut que l'hypothèse $(\mathbf{H})$ soit vraie entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^2$ d'une part et

$\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^2$et $\mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1 \vee \mathbb{H}^2$ d'autre part, on obtient la relation

$$\mathbb{P}(\tau_1 \leq t < \tau_2)\mathbb{P}(u > \tau_2 > t) = \mathbb{P}(u > \tau_2 > t \geq \tau_1)\mathbb{P}(\tau_2 > t), \forall t, \forall u. \tag{7.5}$$

Remarque 7.7 *: Si τ_1 et τ_2 sont indépendants alors les égalités (7.4) et (7.5) sont vérifiées. Si une seule égalité est vérifiée, par exemple (7.4), cela n'implique pas que τ_1 et τ_2 sont indépendants. En effet, si nous prenons τ_1 et $\tau_2 = \tau + \tau_1$, l'égalité (7.4) est trivialement vérifiée. Par contre, même si τ_1 et τ sont indépendants, l'égalité (7.5) n'est pas forcément vraie. On peut prendre le contre-exemple où τ_1 et τ sont indépendants de même loi $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{1.75}$ et $u = 5, t = 3$.*

7.3.2 Cas de processus de Cox

Nous considérons le cas particulier où τ_1 et τ_2 sont définis au moyen de deux processus de Cox par

$$\tau_i = \inf\{t \ / \int_0^t \lambda_i(s)ds > \Theta\} = \inf\{t \ / \ \Lambda_i(t) > \Theta\}$$

où λ_i sont des fonctions déterministes positives vérifiant $\lambda_1 < \lambda_2$ ce qui implique $\tau_2 < \tau_1$.
Montrons que dans ce cas, l'égalité (7.4) n'est pas vérifiée.
Nous avons $\mathbb{P}(\tau_2 \leq t < \tau_1) = \mathbb{P}(\Lambda_1(t) < \Theta < \Lambda_2(t))$, $\mathbb{P}(u > \tau_1 > t) = \mathbb{P}(\Lambda_1(t) < \Theta < \Lambda_1(u))$, et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(u > \tau_1 > t, \tau_2 \leq t) &= \mathbb{P}(\Theta < \Lambda_2(t),\ \Lambda_1(t) < \Theta < \Lambda_1(u)) \\ &= \mathbb{P}(\ \Lambda_1(t) < \Theta < \inf(\Lambda_2(t), \Lambda_1(u)))\text{ pour } u > t.\end{aligned}$$

Par conséquent, comme Θ est une variable exponentielle de paramètre un,

$$\mathbb{P}(\tau_2 \leq t < \tau_1) = \exp(-\Lambda_1(t)) - \exp(-\Lambda_2(t)),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(u > \tau_1 > t, \tau_2 \leq t) &= \exp(-\Lambda_1(t)) - \exp(-\inf(\Lambda_2(t), \Lambda_1(u))\text{ pour } u > t \\ &= \exp(-\Lambda_1(t)) - \sup(\exp(-\Lambda_2(t)), \exp(-\Lambda_1(u)))\end{aligned}$$

L'égalité (7.4) est vérifiée si et seulement si
$[\exp(-\Lambda_1(t)) - \exp(-\Lambda_2(t))][\exp(-\Lambda_1(t)) - \exp(-\Lambda_1(u))]$
$= \exp(-\Lambda_1(t))[\exp(-\Lambda_1(t)) - \sup(\exp(-\Lambda_2(t)), \exp(-\Lambda_1(u)))]$.
Si $\Lambda_2(t) > \Lambda_1(u)$, on a égalité si et seulement si $\Lambda_1(u) = \Lambda_1(t)$, c'est-à-dire si $\lambda_1 = 0$ sur $[t, u]$.
Si $\Lambda_2(t) < \Lambda_1(u)$, on a égalité si et seulement si $\Lambda_2(t) = \Lambda_1(u) = 0$.
Par conséquent, si on prend $t = 0$ et u quelconque, on obtient $\lambda_1 = 0$.

7.3.3 Cas où la filtration $\mathbb{F}$ est quelconque

Nous notons $\mathbb{G}^1 = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}^1$ et $\mathbb{G} = \mathbb{G}^1 \vee \mathbb{H}^2$. Par le même raisonnement que précédemment, nous obtenons que les $\mathbb{G}^1-$martingales sont des $\mathbb{G}-$martingales si et seulement si

$$\mathbb{P}(\tau_2 \leq t, \tau_1 > t \ / \ \mathcal{F}_t)\mathbb{P}(u > \tau_1 > t \ / \ \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(u > \tau_1 > t, \tau_2 \leq t \ / \ \mathcal{F}_t)\mathbb{P}(\tau_1 > t \ / \ \mathcal{F}_t), \forall t, \forall u. \tag{7.6}$$

Ainsi les $\mathbb{F}-$martingales sont des $\mathbb{G}-$martingales, si la propriété (**H**) est vérifiée pour $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}^1$ et si l'égalité (7.6) est vraie.

Remarque 7.8 *: Le fait d'imposer que la propriété* ***(H)*** *est vérifiée pour chaque grossissement est une condition restrictive pour avoir la conservation des martingales de la filtration $\mathbb{F}$ comme martingales de la filtration $\mathbb{G}$. En effet, si τ_1 et τ_2 sont deux temps de défaut indépendants de la filtration $\mathbb{F}$, mais ne vérifiant pas (7.6), les $\mathbb{F}-$martingales sont tout de même des $\mathbb{G}-$martingales.*

Les exemples donnés au début de ce chapitre nous ont permis de voir que dans le cas de défauts multiples, nous avons besoin, pour mener les calculs, du processus de hasard de la loi conditionnelle du minimum des temps de défaut ainsi que de la propriété (**H**) entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}\vee\mathbb{H}$ où $\mathbb{H} = (\sigma(\tau\wedge t))$. Les résultats précédents montrent que dans le cas de temps de défaut indépendants les résultats s'obtiennent facilement.
Cependant dans le cas de temps τ_1 et τ_2 corrélés, nous pouvons calculer sur des exemples le processus de hasard associé au minimum τ et montrer que l'hypothèse (**H**) est vraie bien que l'égalité (7.6) ne soit pas vérifiée. Pour corréler les temps de défaut, de nombreux auteurs utilisent les copulas (cf. Bouyé et al. [1], Frey et [2])

Exemple 7.9 *Soient $\mathbb{F}$ une filtration brownienne, Θ_i, i=1,2 deux variables aléatoires indépendantes de $\mathbb{F}$ de loi exponentielle de paramètre un telles que*

$$\mathbb{P}(\Theta_1 > t, \Theta_2 > t') = \frac{\exp(-t)\exp(-t')}{1+(1-e^{-t})(1-e^{-t'})}.$$

Si on définit

$$\tau_i = \inf\{t \;/\; \Lambda_i(t) \geq \Theta_i\}$$

où Λ_i sont deux processus croissants $\mathbb{F}-$mesurables, alors le processus de hasard Γ associé au minimum est égal à

$$\begin{aligned}
e^{-\Gamma_t} &= 1 - F_t = P(\tau > t \;/\; \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{P}(\Theta_1 > \Lambda_1(t), \Theta_2 > \Lambda_2(t)) \\
&= \frac{\exp(-\Lambda_1(t))\exp(-\Lambda_2(t))}{1+(1-e^{-\Lambda_1(t)})(1-e^{-\Lambda_2(t)})} \\
&= \mathbb{P}(\tau > t \;/\; \mathcal{F}_\infty)
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété ***(H)*** *est vraie entre $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}\vee\mathbb{H}$.*
L'égalité (7.6) n'est cependant pas vérifiée puisque

$$\mathbb{P}(\tau_2 \leq t < \tau_1)\mathbb{P}(u > \tau_1 > t) = \frac{(e^{-\Lambda_1(t)} - e^{-\Lambda_1(u)})(1-e^{-\Lambda_2(t)})^2 e^{-\Lambda_1(t)}}{[1+(1-e^{-\Lambda_1(t)})(1-e^{-\Lambda_2(t)})][1+(1-e^{-\Lambda_1(u)})(1-e^{-\Lambda_2(t)})]}$$

et

$$\mathbb{P}(u > \tau_1 > t \geq \tau_2)\mathbb{P}(\tau_1 > t) = \frac{(e^{-\Lambda_1(t)} - e^{-\Lambda_1(u)})e^{-\Lambda_1(t)}[1+(1-e^{-\Lambda_2(t)})(3-e^{-\Lambda_1(t)}-e^{-\Lambda_1(u)})]}{[1+(1-e^{-\Lambda_1(t)})(1-e^{-\Lambda_2(t)})][1+(1-e^{-\Lambda_1(u)})(1-e^{-\Lambda_2(t)})]}$$

Bibliographie

[1] Bouyé E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G., Roncalli T. : Copulas for Finance A Reading Guide and Some Applications, 2000

[2] Frey R., McNeil A. : Modelling Dependent Defaults, Prépublication, 2001.

[3] Duffie D. : First-to-default valuation. *Working paper*, 1998.

[4] Rutkowski M. : "On models of default risk by R.Elliott, M.Jeanblanc and M.Yor", *Working Paper*, 2000.

Chapitre 8

Cas général

Le chapitre 6 nous a permis de montrer que la structure du $\mathcal{G}_T$-marché, en particulier la nature des actifs contingents négociables, imposait une hypothèse très forte sur la conservation des martingales de la filtration $\mathbb{F}$ en $\mathbb{G}-$martingales. Cettte hypothèse n'est plus nécessaire si l'on considère que les actifs ne sont négociables que jusqu'en τ et que les seuls actifs contingents disponibles sont de la forme $X1_{T<\tau}$ et $h_\tau 1_{\tau \leq T}$. L'hypothèse $(\mathbf{H})$ n'est pas non plus vérifiée si nous observons les prix des actifs S en temps discrets.

Dans un premier temps, nous montrons dans un contexte d'observation à temps discrets des prix, que le processus F n'est jamais croissant. Ainsi ni l'hypothèse $(\mathbf{H})$, ni l'hypothèse $(\mathbf{G})$ ne sont vérifiées.

Dans le cas général, les résultats sur la décomposition des $\mathbb{F}-$martingales dans la filtration $\mathbb{G}$ ont été établis dans la théorie du grossissement de filtration dans les travaux de Jeulin[14]. Nous commençons dans une première partie par rappeler ces résultats, ainsi que des résultats nous permettant de calculer les espérances conditionnelles dans la filtration $\mathbb{G}$.

Ensuite nous établissons un théorème de représentation semblable à celui établi dans le chapitre 6. Ceci nous permet de montrer que le marché considéré est incomplet si l'on considère uniquement des actifs du $\mathcal{F}_T$-marché. Ce marché peut néanmoins être complété par un zéro-coupon avec défaut dont nous donnons la dynamique dans le cas où $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne.

Enfin nous terminons par des exemples de temps de défaut où l'on est bien dans ce cadre général du grossissement de filtration, c'est-à-dire où la propriété $(\mathbf{H})$ n'est pas vérifiée.

8.1 Observation à temps discrets

Supposons $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s,\, s \leq [t])$ où $[t]$ est la partie entière de t. Montrons que le processus F n'est jamais croissant. Comme

$$F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t \ / \ \mathcal{F}_t),$$

F est croissant sur les intervalles $[n, n+1[$. Mais il n'est pas croissant en $n > 0$. En effet,

$$F_n - F_{n^-} = \mathbb{P}(\tau \leq n \ / \ \mathcal{F}_n) - \mathbb{P}(\tau \leq n \ / \ \mathcal{F}_{n-1}) = F_n - E(F_n \ /\mathcal{F}_{n-1}).$$

Or $F_n - E(F_n\ /\mathcal{F}_{n-1})$ n'est pas de signe constant. Sinon, comme $E(F_n - E(F_n\ /\mathcal{F}_{n-1})) = 0$, on aurait

$$F_n = E(F_n/\mathcal{F}_{n-1})$$

i.e $\mathbb{P}(\tau \leq n\ /\ \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(\tau \leq n\ /\ \mathcal{F}_{n-1})$. Ce qui n'est pas vrai en toute généralité.
Ce résultat était prévisible. Dans le chapitre 6, l'hypothèse (**H**) a été justifiée à condition que le $\mathcal{F}_T-$marché soit complet. Or en cas d'observation à temps discrets, le $\mathcal{F}_T-$marché n'est jamais complet.

8.2 Cas général

8.2.1 Décomposition des martingales dans la filtration $\mathbb{G}$

Afin d'établir la décomposition des $\mathbb{F}-$martingales dans la filtration $\mathbb{G}$, nous rappelons la définition du compensateur d'un processus.

Définition 8.1 *: Soit K une $\mathbb{F}-$sous-martingale, alors le processus croissant $\widehat{K}$, prévisible, continu à droite tel que $Z = K - \widehat{K}$ est une $\mathbb{F}-$martingale, est appelé le $\mathbb{F}$-compensateur de K.*

Remarque 8.2 *: L'existence du compensateur est assurée par le théorème de Doob-Meyer (cf [7]).*

Notation :
Le processus $\widehat{F}$ est le compensateur de F et le processus Z la martingale égale à $F - \widehat{F}$.

La décomposition des $\mathbb{F}-$martingales dans la filtration $\mathbb{G}$ est donnée dans [18] pour une filtration brownienne et dans [14] pour une filtration quelconque.

Proposition 8.3 *: Si X est une $\mathbb{F}-$martingale, il existe une $\mathbb{G}-$martingale $\overline{X}$ telle que*

$$X_{t\wedge\tau} = \overline{X}_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, F\rangle_s}{1 - F_{s-}}. \tag{8.1}$$

Dans certains cas, il peut être judicieux d'écrire l'expression (8.1) à l'aide du crochet droit. La proposition devient

Proposition 8.4 *: Si X est une $\mathbb{F}-$martingale, il existe une $\mathbb{G}-$martingale $\overline{X}$ telle que*

$$X_{t\wedge\tau} = \overline{X}_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\,[X, F]_s}{1 - F_s}.$$

Démonstration : Voir Dellacherie Meyer [8] p.188. ■

Dans le cas général, nous ne pouvons préciser le comportement des $\mathbb{F}-$martingales après l'instant de défaut sans imposer des conditions supplémentaires sur τ. Nous avons besoin que la variable τ soit une variable honnête c'est-à-dire la fin d'un ensemble $\mathbb{F}-$prévisible autrement dit $\tau = \sup\{t : (t,\omega) \in \Gamma\}$ où Γ est un ensemble $\mathbb{F}-$prévisible. Sous cette condition nous pouvons énoncer le résultat suivant (cf [18] ou [14]).

Proposition 8.5 *: Si τ est une variable honnête et si X est une $\mathbb{F}-$martingale, il existe une $\mathbb{G}-$martingale $\overline{X}$ telle que*

$$X_t = \overline{X}_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\langle X, F\rangle_s}{1 - F_{s-}} - 1_{\tau\leq t}\int_\tau^t \frac{d\langle X, F\rangle_s}{F_{s-}}.$$

Remarque 8.6 *: Bien que les instants de défaut τ construits à l'aide des processus de Cox ne soient pas des variables honnêtes, on a quand même une décomposition des $\mathbb{F}-$martingales puisque* **(H)** *est vraie. Pour montrer que τ n'est pas honnête, on utilise un résultat dû à Azema et al. (cf [1]) dans lequel les auteurs montrent que pour un temps honnête, le processus $\widehat{F}_\infty$ est une variable exponentielle. Or pour un processus de Cox, $\widehat{F}_\infty = F_\infty$ est à valeur dans $[0,1]$. On peut aussi utiliser que le processus*

$$\Gamma_\tau = -\ln(1-\widehat{F}_\infty) = -\ln(1-F_\infty)$$

est une variable exponentielle.

<u>Notation</u> :

Pour toute $\mathbb{F}$-martingale X, on notera $\overline{X}$ la $\mathbb{G}$-martingale associée par la proposition précédente.

Le lemme suivant nous permet de calculer les espérances conditionnelles et de caractériser la $\mathbb{F}-$martingale processus de hasard Λ.

Lemme 8.7 *: i) Si h est un processus $\mathbb{F}-$prévisible alors*

$$E(h_\tau/\mathcal{G}_t) = h_\tau 1_{\tau\le t} + 1_{\tau>t} e^{\Gamma_t} E(\int_t^\infty h_u d\widehat{F}_u/\mathcal{F}_t). \tag{8.2}$$

ii) Le $\mathbb{F}-$martingale processus de hasard de τ est donné par

$$\Lambda_t = \int_0^t \frac{d\widehat{F}_s}{1-F_{s-}}. \tag{8.3}$$

Démonstration : i) L'expression (8.2) s'obtient à partir de (3.6) en utilisant la définition du compensateur. ii) Nous reprenons la démonstration de [13]. Le processus Λ donné par (8.3) est $\mathbb{F}$-prévisible. Pour montrer que $N_t - \Lambda(t\wedge\tau)$ est une $\mathbb{G}-$martingale, il suffit de vérifier que pour tout $s \ge t$

$$E(\int_{t\wedge\tau}^{s\wedge\tau} \frac{d\widehat{F}_u}{1-F_{u-}} \;/\; \mathcal{F}_t) = E(F_s - F_t \;/\; \mathcal{F}_t) = E(\widehat{F}_s - \widehat{F}_t \;/\; \mathcal{F}_t).$$

Or

$$\begin{aligned}
E(1_{\{t<\tau\}} \textstyle\int_{t\wedge\tau}^{s\wedge\tau} \frac{d\widehat{F}_u}{1-F_{u-}} \;/\; \mathcal{F}_s) &= E(1_{\{s<\tau\}} \textstyle\int_t^s \frac{d\widehat{F}_u}{1-F_{u-}} + 1_{\{t<\tau\le s} \textstyle\int_t^{s\wedge\tau} \frac{d\widehat{F}_u}{1-F_{u-}} \;/\; \mathcal{F}_s) \\
&= (1-F_s) \textstyle\int_t^s \frac{d\widehat{F}_u}{1-F_{u-}} + \textstyle\int_t^s \int_t^u \frac{d\widehat{F}_v}{1-F_{v-}} d\widehat{F}_u \\
&= (\Lambda_s - \Lambda_t)(1-F_s) + \textstyle\int_t^s (\Lambda_u - \Lambda_t) d\widehat{F}_u \\
&= (\Lambda_s - \Lambda_t)(1-F_s) + \textstyle\int_t^s (\Lambda_u - \Lambda_t) d(F_u - F_u + \widehat{F}_u).
\end{aligned}$$

Comme Λ est $\mathbb{F}-$prévisible,

$$E(\int_t^s (\Lambda_u - \Lambda_t) d(F_u - \widehat{F}_u) \;/\; \mathcal{F}_t) = 0. \tag{8.4}$$

En utilisant l'égalité

$$F(t) = \int_0^t \Lambda_u dF_u + \Lambda(t)(1-F_t),$$

nous obtenons

$$E(\int_{t\wedge\tau}^{s\wedge\tau} \frac{d\widehat{F}_u}{1-F_{u-}}/\mathcal{F}_t) = E(E(1_{\{t<\tau\}} \int_t^{s\wedge\tau} \frac{d\widehat{F}_u}{1-F_{u-}}/\mathcal{F}_s/\mathcal{F}_t)) = E(F_s - F_t/\mathcal{F}_t) = E(\widehat{F}_s - \widehat{F}_t/\mathcal{F}_t).$$

■

8.2.2 Théorèmes de représentation

Les théorèmes de représentation prévisible permettent en finance d'établir la complétion du marché. C'est pourquoi, nous établissons un théorème de représentation prévisible pour certaines $\mathbb{G}-$martingales.
Nous commençons par rappeler un résultat [1] qui donne la décomposition de toutes les $\mathbb{G}-$martingales dans le cas où la variable τ est honnête $\mathcal{F}_\infty-$mesurable et où la filtration $\mathbb{F}$ est une filtration brownienne engendrée par W. On note $\mathcal{F}_\tau^+$ la filtration engendrée par les procesus Z_τ où Z est $\mathbb{F}$-progressivement mesurable.

Théorème 8.8 *: Soit τ une variable honnête $\mathcal{F}_\infty-$mesurable. Toute $\mathbb{G}-$martingale de carré intégrable $(\overline{X_t})_{t\geq 0}$, nulle en 0, peut se décomposer de manière unique en la somme de quatre martingales de carré intégrable, orthogonales dans la filtration $\mathbb{G}$:*

$$\begin{aligned}\overline{X_t} &= \int_0^{t\wedge\tau} J_s^{(1)} d\overline{W}_s + 1_{\tau\leq t}\int_\tau^t J_s^{(2)} d\overline{W}_s \\ &\quad + [J_\tau^{(3)} 1_{\tau\leq t} - \int_0^{t\wedge\tau} J_s^{(3)} d\widehat{F}_s] + v1_{\tau\leq t}\end{aligned}$$

où $J^{(i)}$, i=1,2,3, sont trois processus $\mathbb{F}-$prévisibles vérifiant

$$E[\int_0^\infty (J_s^{(1)})^2(1-F_s)ds] < \infty;\ E[\int_0^\infty (J_s^{(2)})^2 F_s ds] < \infty;\ E[\int_0^\infty (J_s^{(3)})^2 d\widehat{F}_s] < \infty$$

et $v \in L^2(\mathcal{F}_\tau^+)$ satisfait $E(v\ /\ \mathcal{F}_\tau) = 0$.

Ce théorème très général n'a pour l'instant pas d'interprétation en finance. En particulier, nous ne savons pas interpréter en toute généralité le terme en v. Barlow et al. [2] ont montré que $\mathcal{F}_\tau^+$ et $\mathcal{F}_\tau$ ne différent qu'à un ensemble près, dans le cas où $\tau = g_1$, $v = sgn\ W_1$.
De plus, certaines variables honnêtes donnent des arbitrages (cf les exemples de la remarque 6.31).
Nous pouvons cependant établir un théorème plus précis pour les martingales de la forme $H_t = E[h_\tau/\mathcal{G}_t]$ où h est un processus $\mathbb{F}-$prévisible sans hypothèse sur la filtration $\mathbb{F}$.

Théorème 8.9 *: Soit h un processus $\mathbb{F}-$prévisible et $H_t = E[h_\tau/\mathcal{G}_t]$, alors H admet la décomposition suivante*

$$H_t = m_0^{(h)} + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_{s-}}[(H_{s-}-h_s)d\overline{Z}_s + d\overline{m}_s^{(h)}] + \int_0^t e^{\Delta\Gamma_s}(h_s - H_{s-})dM_s,$$

où $m_t^{(h)} = E[\int_0^\infty h_u d\hat{F}_u/\mathcal{F}_t)$ est une $\mathbb{F}$-martingale.

Démonstration : L'idée de la démonstration est la même que pour le théorème 6.17. En utilisant l'égalité (8.2), nous avons

$$H_t = h_\tau 1_{\tau\leq t} + 1_{\tau>t}e^{\Gamma_t}E(\int_t^\infty h_u d\hat{F}_u/\mathcal{F}_t)$$

et

$$A_t = E(\int_t^\infty h_u e^{\Gamma_t} d\hat{F}_u/\mathcal{F}_t) = e^{\Gamma_t}(m_t^{(h)} - \int_0^t h_u d\hat{F}_u).$$

Par une intégration par parties, nous obtenons grâce à la formule d'Itô

$$d(e^{\Gamma_t}) = e^{\Gamma_{t^-}}(d\Gamma_t + e^{\Delta\Gamma_t} - 1 - \Delta\Gamma_t + \frac{1}{2}d\langle\Gamma^c,\Gamma^c\rangle_t) = e^{\Gamma_{t^-}}(\frac{dF_t}{1-F_t} + \frac{d\langle F^c,F^c\rangle_t}{(1-F_{t-})^2}),$$

d'où

$$\begin{aligned} dA_t &= e^{\Gamma_{t^-}}(dm_t^{(h)} - h_t dF_t) + (m_{t-}^{(h)} - \textstyle\int_0^{t-} h_u dF_u)d(e^{\Gamma_t}) + d[e^{\Gamma_t}, m_t^{(h)} - \textstyle\int_0^t h_u dF_u] \\ &= e^{\Gamma_{t^-}}(dm_t^{(h)} + \tfrac{d[m^{(h)},F]}{1-F_t}) + A_{t-}(\tfrac{dF_t}{1-F_t} + \tfrac{d\langle F^c,F^c\rangle_t}{(1-F_{t-})^2}) - h_t(\tfrac{dF_t}{1-F_{t-}} + \tfrac{e^{\Gamma_{t-}}}{1-F_t}\{d[F,Z]_t + \Delta F_t\Delta\widetilde{F}_t\}) \\ &= e^{\Gamma_{t^-}}(dm_t^{(h)} + \tfrac{d[m^{(h)},F]}{1-F_t}) + A_{t-}(\tfrac{dZ_t}{1-F_t} + \tfrac{d\langle F^c,Z^c\rangle_t}{(1-F_{t-})^2}) - h_t(\tfrac{dZ_t}{1-F_{t-}} + \tfrac{e^{\Gamma_{t-}}}{1-F_t}d[F,Z]_t) \\ &\quad + A_{t-}\tfrac{d\widetilde{F}_t}{1-F_t} - h_t(\tfrac{d\widetilde{F}_t}{1-F_{t-}} + \tfrac{e^{\Gamma_{t-}}}{1-F_t}\Delta F_t\Delta\widetilde{F}_t). \end{aligned}$$

Or $\frac{d\widetilde{F}_t}{1-F_{t-}} + \frac{e^{\Gamma_{t-}}}{1-F_t}\Delta F_t\Delta\widetilde{F}_t = \frac{d\widetilde{F}_t}{1-F_t}$ et

$$\begin{aligned} \frac{dZ_t}{1-F_t} + \frac{d\langle F^c,Z^c\rangle_t}{(1-F_{t-})^2} &= \frac{dZ_t^c}{1-F_{t-}} + \frac{d\langle F^c,Z^c\rangle_t}{(1-F_{t-})(1-F_t)} + \frac{\Delta Z_t}{1-F_t} \\ &= \frac{dZ_t^c}{1-F_{t-}} + \frac{d[F,Z]_t}{(1-F_{t-})(1-F_t)} + \Delta Z_t(\frac{1}{1-F_t} - \frac{\Delta F_t}{(1-F_{t-})(1-F_t)}) \\ &= \frac{dZ_t^c}{1-F_{t-}} + \frac{\Delta Z_t}{1-F_{t-}} + \frac{d[F,Z]_t}{(1-F_{t-})(1-F_t)} \\ &= \frac{dZ_t}{1-F_{t-}} + \frac{d[F,Z]_t}{(1-F_{t-})(1-F_t)} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$dA_t = e^{\Gamma_{t^-}}\{(dm_t^{(h)} + \frac{d[m^{(h)},F]}{1-F_t}) + A_{t-}(dZ_t + \frac{d[F,Z]_t}{(1-F_t)}) - h_t(dZ_t + \frac{d[F,Z]_t}{1-F_t}) + e^{\Delta\Gamma_t}(A_{t-} - h_t)\frac{d\widetilde{F}_t}{1-F_{t-}}\}.$$

Comme

$$A_t 1_{\{t<\tau\}} = m_0^{(h)} + \int_0^{t\wedge\tau} dA_s - A_\tau 1_{\{\tau\le t\}}$$

et comme $A_u = H_u$ sur $\{u<\tau\}$ et $\Delta A_\tau = -e^{\Gamma_\tau}h_\tau\Delta F_\tau + A_{\tau^-}\frac{\Delta F_\tau}{1-F_\tau}$, car les conditions **(C1)** ou **(C2)** implique $\Delta m_\tau^{(h)} = 0$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} H_t &= m_0^{(h)} + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_{s^-}}[(e^{\Delta\Gamma_s}H_{s-} - h_s)d\overline{Z}_s + d\overline{m}_s^{(h)}] + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Delta\Gamma_u}(H_{u^-} - h_u)\frac{d\widetilde{F}_u}{1-F_{u^-}} + (h_\tau - A_\tau)1_{\{\tau\le t\}} \\ &= m_0^{(h)} + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_{s^-}}[(e^{\Delta\Gamma_s}H_{s-} - h_s)d\overline{Z}_s + d\overline{m}_s^{(h)}] + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Delta\Gamma_u}(H_{u^-} - h_u)\frac{d\widetilde{F}_u}{1-F_{u^-}} + \\ &\quad [(h_\tau - A_{\tau^-})(1 + \tfrac{\Delta F_\tau}{1-F_\tau})]1_{\{\tau\le t\}} \\ &= m_0^{(h)} + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_{s^-}}[(e^{\Delta\Gamma_s}H_{s-} - h_s)d\overline{Z}_s + d\overline{m}_s^{(h)}] + \textstyle\int_0^{t\wedge\tau} e^{\Delta\Gamma_u}(h_u - H_{u-})dM_u. \end{aligned}$$

■

Corollaire 8.10 *: Si la filtration $\mathbb{F}$ est la filtration d'un mouvement brownien W et F est continu, alors le théorème précédent s'écrit*

$$H_t = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_s}(z_s(H_s - h_s) + \mu_s^{(h)})d\overline{W}_s + \int_0^t (h_s - H_{s-})dM_s,$$

où $m_t^{(h)} = E[\int_0^\infty h_u d\hat{F}_u/\mathcal{F}_t)$ est une $\mathbb{F}$-martingale de décomposition $dm_t^{(h)} = \mu_t^{(h)}dW_t$ et où $dF_t - d\widehat{F}_t =$

$z_t dW_t$.

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre particulier où F est continu et $\mathbb{F}$ une filtration brownienne. Dans ce cas les $\mathbb{F}-$martingales sont continues et la condition (**C1**) est vérifiée.

8.2.3 Dynamique d'un zéro-coupon

Le processus $L_t = (1 - N_t)e^{\Gamma_t}$ est une $\mathbb{G}-$martingale et par un calcul direct, on obtient

$$dL_t = \frac{1}{1-F_t}(-dM_t + \frac{z_t}{1-F_t}d\overline{W}_t) = L_{t-}(-dM_t + \frac{z_t}{1-F_t}d\overline{W}_t)$$

La dynamique du zéro-coupon actualisé sous la martingale mesure équivalente fixée $\mathbb{Q}$ par le $\mathcal{G}_T-$marché est donné par

$$\begin{aligned} d\widetilde{\rho}_t &= m_t dL_t + L_{t-}dm_t + \tfrac{z_t}{1-F_t}L_{t-}d\langle m, W\rangle_t \\ &= m_t dL_t + L_{t-}d\overline{m}_t \\ &= \widetilde{\rho}_{t-}(-dM_t + (\tfrac{z_t}{1-F_t} + v_t)d\overline{W}_t) \\ &= \widetilde{\rho}_{t-}(-dM_t + (\tfrac{z_t}{1-F_t} + \tfrac{\mu_t}{m_t})d\overline{W}_t) \end{aligned}$$

où m est la martingale strictement positive $m_t = E_{\mathbb{Q}}[R_T e^{\Gamma_T}/\mathcal{F}_t]$ où Γ est calculée sous $\mathbb{Q}$ et $dm_t = m_t v_t dW_t = \mu_t dW_t$.

8.2.4 Complétion du marché

Le théorème 8.9 montre que le $\mathcal{G}_{T-}$ marché est incomplet si l'on ne dispose que des actifs du $\mathcal{F}_T-$marché, même si celui est complet. Il peut être complété si les actifs négociables sont les actifs sans défaut arrêtés en τ et un zéro-coupon avec défaut et si on ne veut couvrir que les actifs du type $X1_{T<\tau}$ ou $h(\tau)1_{\tau\leq T}$. Supposons que le $\mathcal{G}_T$-marché constitué des actifs du $\mathcal{F}_T-$marché jusqu'en τ et d'un zéro-coupon est sans arbitrage. Alors sous la m.m.e

$$R_t\rho_t = E(R_T\rho_T \;/\; \mathcal{G}_t)$$

où ρ est le prix de marché du zéro-coupon.

Nous supposons que sous la m.m.e

$$d(RS)_t = (RS)_t\sigma_t d\overline{W}_t$$

Les calculs sont menés sous cette probabilité.

Si $X \in \mathcal{F}_T$, $h_t = X1_{T<t}$ est $\mathbb{F}-$adapté, continu à gauche limité à droite, donc prévisible. Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème 8.9 et

$$\begin{aligned} R_T X 1_{T<\tau} &= x + \int_0^{T\wedge\tau}\phi_s d\overline{W}_s + \int_0^T \psi_s dM_s \\ &= x + \int_0^{T\wedge\tau}(\phi_s + \psi_s(\tfrac{z_s}{1-F_s} + \tfrac{\mu_s}{m_s}))(R_s S_s\sigma_s)^{-1}d(RS)_s - \int_0^{T\wedge\tau}\tfrac{\psi_s}{R_s\rho_{s-}}d(R\rho)_s \end{aligned}$$

où

$$\phi_s = \frac{1}{1-F_s}(z_s(H_{s-}) + \mu_s^X)$$

et

$$\psi_s = -H_{s-}.$$

Le coefficient μ_s^X est le coefficient de la représentation prévisible de la $\mathbb{G}-$martingale $\overline{m}^X$ associée à la $\mathbb{F}$-martingale

$$m_t^X = E(\int_T^\infty R_T X d\hat{F}_u / \mathcal{F}_t) = E(X R_T e^{-\Gamma_T} / \mathcal{F}_t).$$

En remarquant que $H_s = L_s m_s^X$ et $R_s \rho_s = L_s m_s$, on obtient après simplification

$$R_T X 1_{T<\tau} = x + \int_0^{T\wedge\tau} \frac{1}{1-F_s}(\mu_s^X - \frac{m_s^X}{m_s}\mu_s)(R_s S_s \sigma_s)^{-1} d(RS)_s - \int_0^{T\wedge\tau} \frac{m_s^X}{m_s} d(R\rho)_s.$$

Le résultat demeure pour les actifs contingents de la forme $h_\tau 1_{\{\tau\leq T\}}$ à condition de modifier les coefficients ϕ et ψ à l'aide du théorème 8.9.

Ce résultat est important car il permet d'obtenir explicitement le portefeuille de couverture de l'actif contingent et il montre que le marché composé des actifs contingents du type $X 1_{T<\tau}$ ou $h(\tau) 1_{\tau\leq T}$ est complété par le zéro-coupon avec défaut.

La complétion du marché reste valable sous l'hypothèse (**H**), puisque le théorème 8.9 a son équivalent sous l'hypothèse (**H**). Seule la couverture change, puisque l'on n'a pas de partie martingale pour le processus F.

Dans le chapitre suivant, sous l'hypothèse (**H**) nous explicitons la partie du portefeuille à placer dans l'actif sans risque et, pour un exemple de processus Γ, nous calculons le portefeuille de couverture dans le cas d'un call européen.

Le marché est aussi complet dans le cas où l'on peut négocier une option européenne avec défaut (en particulier un call européen) obtenue à partir du sous-jacent S et un zéro-coupon avec défaut, même si l'on ne peut négocier directement le sous-jacent S. En effet, on note pour $X \in \mathcal{F}_T$,

$$H_t = E[R_T X 1_{T<\tau} \; / \; \mathcal{G}_t]$$

le prix actualisé de l'option européenne négociée sous la m.m.e fixée par le marché. Alors le théorème 8.9 permet d'écrire

$$dH_t = (1 - N_{t-})(e^{\Gamma_t} z_t H_t + \mu_t^X) d\overline{W}_t - (1 - N_{t-}) H_{t-} dM_t,$$

où μ_t^X est le coefficient de la représentation prévisible de la martingale

$$m_t^X = E(\int_T^\infty R_T X d\hat{F}_u / \mathcal{F}_t) = E(X R_T e^{-\Gamma_T} / \mathcal{F}_t).$$

Comme sous la m.m.e, le prix du zéro-coupon vérifie

$$d\widetilde{\rho}_t \;\; = \widetilde{\rho}_{t-}(-dM_t + (e^{\Gamma_t} z_t + \frac{\mu_t}{m_t}) d\overline{W}_t),$$

le marché sera complet dès que l'on pourra écrire $\overline{W}$ et M en fonction de H et $\widetilde{\rho}$. Ceci est possible dès que le processus

$$(\mu_t^X - H_{t-}\frac{\mu_t}{m_t})$$

ne s'annule pas. Dans ce cas, on a

$$dM_t = (e^{\Gamma_t} z_t + \frac{\mu_t}{m_t}) d\overline{W}_t - \frac{d\widetilde{\rho}_t}{\widetilde{\rho}_{t-}}$$

et

$$d\overline{W}_t = (1 - N_{t-})(\mu_t^X - H_{t-}\frac{\mu_t}{m_t})^{-1}[dH_t - \frac{d\widetilde{\rho}_t}{\widetilde{\rho}_{t-}}].$$

Il faut remarquer que le cas où X est une constante, ne permet pas de couvrir.

Remarque 8.11 *: Dans le cas où F est discontinu, en remarquant que*

$$dL_t = \frac{1}{1-F_t}(-dM_t + \frac{z_t}{1-F_{t-}} d\overline{W}_t) = -L_{t-}(\frac{1-F_{t-}}{1-F_t} dM_t + \frac{z_t}{1-F_{t-}} d\overline{W}_t) \tag{8.5}$$

nous pouvons encore écrire la dynamique du zéro-coupon sous une m.m.e et compléter le marché avec celui-ci. L'expression (8.5) permet de justifier que le second terme $\int_0^t e^{\Delta\Gamma_s}(h_s - H_{s-})dM_s$ du théorème 8.9 où apparaît $e^{\Delta\Gamma_s}$, est effectivement une $\mathbb{G}$-martingale.

8.2.5 Exemples

Nous avons vu dans le chapitre 6 un exemple purement mathématique dans lequel la propriété (**G**) n'était pas vérifiée, le temps de défaut étant $\mathcal{F}_\infty-$mesurable. Nous allons donner maintenant d'autres exemples où l'on est dans la même situation.

Exemple 8.12 *: Soit un actif dont le prix S_t vérifie l'équation suivante*

$$dS_t = S_t dW_t^1$$

où W^1 satisfait l'équation

$$dW^1 = dW_t - \frac{W_t}{t} dt$$

et où W est un mouvement brownien. Nous notons $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de W et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ celle engendrée par S. Cette dernière est aussi celle de W^1.
Il est connu (cf [16]) que le processus W^1 est un mouvement brownien dans sa propre filtration et que $\mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_t \vee \sigma(W_t)$.
Ainsi le $\mathcal{F}_T-$marché est sans arbitrage. Par contre, le $\mathcal{F}_T^W-$marché est arbitré, puisque il n'existe pas de probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T^W$ telle que sous cette probabilité S soit une martingale. On peut même montrer que l'arbitrage a lieu tout de suite (cf [3]).
Nous considérons le temps aléatoire τ défini de la manière suivante

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \ / \ \int_0^t \frac{W_s}{s} ds = -a\} \text{ où } a > 0.$$

On peut interpréter de manière financière τ comme étant le moment où le rendement cumulé devient trop petit.
*La propriété **(H)** n'est pas vraie dans ce contexte. Par conséquent, les $\mathbb{F}-$martingales ne restent pas des $\mathbb{G}-$martingales avec $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(t \wedge \tau)$. En effet, si nous supposons que **(H)** est vérifiée, alors puisque*

le processus Y défini par

$$Y_t = \exp(W_t^1 - \frac{1}{2}t)$$

est une $\mathbb{F}-$martingale, Y est une $\mathbb{G}-$martingale. Si nous définissons

$$\tau_n = \inf\{t \ / \ W_t^1 = n\},$$

le processus $Y_{.\wedge\tau_n}$ est uniformément intégrable, car borné par $\exp n$, et $\lim_{n\to\infty}\tau_n = +\infty$.
D'après le théorème de Doob appliqué à ce processus, nous devrions avoir

$$E(Y_{\tau_n\wedge\tau}) = 1.$$

Or

$$\exp(W^1_{t\wedge\tau\wedge\tau_n} - \frac{1}{2}(t\wedge\tau\wedge\tau_n)) = \exp(W_{t\wedge\tau\wedge\tau_n} - \frac{1}{2}t\wedge\tau\wedge\tau_n)\exp(-\int_0^{t\wedge\tau\wedge\tau_n}\frac{W_s}{s}ds)$$

et

$$E(\exp(W_{t\wedge\tau\wedge\tau_n} - \frac{1}{2}(t\wedge\tau\wedge\tau_n))\exp(-\int_0^{t\wedge\tau\wedge\tau_n}\frac{W_s}{s}ds)) = \widetilde{E}(\exp(-\int_0^{t\wedge\tau\wedge\tau_n}\frac{W_s}{s}ds))$$

où $\widetilde{E}$ est l'espérance prise sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ de densité de Radon-Nikodym par rapport à $\mathbb{P}$ égale à $Z_t = \exp(W_t - \frac{1}{2}t)$ sur les éléments de $\mathcal{F}_t^W$.
De plus, le processus $(\exp(-\int_0^{t\wedge\tau\wedge\tau_n}\frac{W_s}{s}ds)\ ,\ t\geq 0)$ est borné par $1\vee e^a$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\widetilde{E}(\exp(-\int_0^{t\wedge\tau\wedge\tau_n}\frac{W_s}{s}ds)) = \widetilde{E}(\exp(-\int_0^{t\wedge\tau}\frac{W_s}{s}ds))$$

et

$$\lim_{t\to+\infty}\widetilde{E}(\exp(-\int_0^{t\wedge\tau}\frac{W_s}{s}ds)) = e^a.$$

*Ainsi comme $a\neq 0$, l'hypothèse **(H)** n'est pas vérifiée pour les filtrations $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$.*

Exemple 8.13 *: Soit un actif dont le prix S_t vérifie l'équation suivante*

$$S_t = W_t + Yt, T\geq\ t\geq 0$$

où W est un mouvement brownien sur $(\Omega;\mathcal{G},\mathbb{P})$ et Y une variable aléatoire indépendante de W de loi ν vérifiant

$$\nu(dy) = p\varepsilon_{1/4}(dy) + q\varepsilon_1(dy)$$

où ε_i est la masse de Dirac au point i.
La décomposition de S_t dans sa filtration naturelle $\mathbb{F}$ est

$$S_t = \beta_t + \int_0^t ds(\frac{h'}{h})(s, S_s),$$

où

$$h(t,x) = \int\nu(dy)\exp(-yx - \frac{y^2t}{2})$$

et β *est un* $\mathbb{P}-\mathbb{F}_t$*−mouvement brownien.*

En effet, sur la filtration $(\mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}^Y)_{t\geq 0}$, S *est un* $\mathbb{Q}$*−mouvement brownien où la probabilité* $\mathbb{Q}$ *est définie par* $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(YW_T - \frac{1}{2}Y^2T) = K_T$. *D'après le théorème de représentation des martingales, la probabilité* $\mathbb{Q}$ *est l'unique martingale qui fait de* S *un* $(\mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}^Y)$*-mouvement brownien.*

De plus, S *et* Y *sont indépendants sous* $\mathbb{Q}$. *En effet,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[g(Y)f(S_u, u \leq T)] &= \mathbb{P}[L_T g(Y) f(uY + W_u, u \leq T)] \\
&= \int \nu(dy) E_{\mathbb{P}}(g(y)\exp(-yW_T - \tfrac{y^2T}{2}) f(uy + W_u, u \leq T). \\
&= \int \nu(dy) g(y) E_{\mathbb{P}}(f(\widetilde{W}_u, u \leq T)
\end{aligned}$$

où $\widetilde{W}$ *est un* $\mathbb{P}$*−mouvement brownien. Comme* S *est un mouvement brownien sous* $\mathbb{Q}$,

$$E_{\mathbb{P}}(f(\widetilde{W}_u, u \leq T) = E_{\mathbb{Q}}(f(S_u, u \leq T).$$

Par conséquent, $\mathbb{Q}[g(Y)f(S_u, u \leq T)] = E_{\mathbb{Q}}(f(S_u, u \leq T) \int \nu(dy) g(y)$. *D'où*

$$\mathbb{Q}(g(Y)) = \int \nu(dy) g(y).$$

Ainsi Y *a même loi sous* $\mathbb{Q}$ *et sous* $\mathbb{P}$ *et on a l'indépendance.*

Pour obtenir la décomposition de S *dans sa propre filtration sous* $\mathbb{P}$, *il suffit de prendre la restriction de* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *à* $\mathcal{F}_T$. *Il vient que*

$$d\mathbb{P}_{/F_T} = E_{\mathbb{Q}}(\exp(-YS_T - \frac{1}{2}Y^2T) \ / \ \mathcal{F}_T) d\mathbb{Q} = h(T, S_T) d\mathbb{Q}$$

car S *et* Y *sont indépendants sous* $\mathbb{Q}$.

En appliquant le théorème de Girsanov, on obtient que le processus

$$S_t + \int_0^t ds \frac{h'}{h}(s, S_s)$$

est sous $\mathbb{P}$ *un* $\mathbb{F}_t$*−mouvement brownien.*

Notons $p_t(f) = E(f(Y) \ / \ S_s, \ s \leq t)$, *alors le processus* p *satisfait*

$$\begin{aligned}
p_t(f) &= \frac{E_{\mathbb{Q}}(K_t^{-1} f(Y)/\mathcal{F}_t)}{E_{\mathbb{Q}}(K_t^{-1}/ \ \mathcal{F}_t)} \\
&= \frac{E_{\mathbb{Q}}(\exp(-YS_t - \frac{1}{2}Y^2 t) f(Y) \ / \ \mathcal{F}_t)}{E_{\mathbb{Q}}(K_t^{-1}/ \ \mathcal{F}_t)} \\
&= \frac{h^f(t, S_t)}{h(t, S_t)}
\end{aligned}$$

où $h^f(t,x) = \int \nu(dy) f(y) \exp(-yx - \frac{y^2 t}{2})$ *en utilisant l'indépendance de* S *et de* Y *sous* $\mathbb{Q}$.

Posons $\tau = \inf\{t, Yt > 1\} = \frac{1}{Y}$. *On a*

$$\mathbb{P}(\tau \leq t \ / \ \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(Y \geq \frac{1}{t} \ / \ \mathcal{F}_t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 1 \\ \mathbb{P}(Y = 1 \ / \ \mathcal{F}_t) & sinon \end{cases}$$

*Donc ni l'hypothèse **(H)** ni l'hypothèse **(G)** ne sont vérifiées entre les filtrations* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *sous la probabilité historique.*

Cependant, il existe une m.m.e sur $\mathcal{G}_T$. *Il suffit de prendre la restriction de* $\mathbb{Q}$ *à* $\mathcal{G}_T$. *Comme sous* $\mathbb{Q}$, S *est un* $(\mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}^Y)$*-mouvement brownien* $\mathcal{G}_t-$*adapté, c'est un* $\mathcal{G}_t$*-mouvement brownien.*

*Ainsi, l'hypothèse **(H)** est vérifiée sous* $\mathbb{Q}$ *entre les filtrations* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$, *elle est encore vraie entre les filtrations* $\mathbb{F}$ *et* $(\mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}^Y)_{t \geq 0}$.

On peut remarquer que pour n'importe quel instant de défaut τ *qui est un* $(\mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}^Y)-$*temps d'arrêt, l'hypothèse **(H)** sera vérifiée entre les filtrations* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *sous la probabilité* $\mathbb{Q}$.

Exemple 8.14 *On peut donner un autre exemple où l'on a le même phénomène que dans l'exemple 8.13. Soient* W^1 *et* W^2 *deux mouvements browniens indépendants sur un espace de probabilité* $(\Omega; \mathcal{G}, \mathbb{P})$. *on considère le processus* S *solution de l'équation*

$$dS_t = dW_t^1 + (f(t)W_t^2 + h(t)S_t)dt, \ S_0 = 0$$

où les fonctions f *et* h *appartiennent à l'espace* $C^1(0,1) \cap \mathcal{A}(0,1)$. *L'espace* $\mathcal{A}(0,1)$ *est défini comme l'espace*

$$\mathcal{A}(0,1) = \{g \ mesurable \ telle \ que \ \int_0^t sg(s)ds < +\infty, \ \forall t < 1\}.$$

On peut montrer (cf. Föllmer-Wu-Yor [11]) que S *admet pour décomposition dans sa propre filtration*

$$S_t = B_t + \int_0^t (f(u)k_u(S_v; v \leq u) + h(u)S_u)du$$

où B *est un* $\mathcal{F}_t^S-$*mouvement brownien.*

Si on définit sur $\mathcal{F}_T^{W^1} \vee \mathcal{F}_T^{W^2}$ *la probabilité* $\mathbb{Q}$ *par*

$$d\mathbb{Q} = \exp\left(\int_0^T (f(t)W_t^2 + h(t)W_t^1)dW_t^1 - \frac{1}{2}\int_0^T (f(t)W_t^2 + h(t)W_t^1)^2 dt\right) d\mathbb{P},$$

alors sous $\mathbb{Q}$, S *est un* $\mathcal{F}_T^{W^1} \vee \mathcal{F}_T^{W^2}-$*mouvement brownien et un* $\mathcal{F}_t^S-$*mouvement brownien.*

Pour n'importe quel $\mathcal{F}_T^{W^1} \vee \mathcal{F}_T^{W^2}-$*temps d'arrêt* τ, S *est* $\mathcal{G}_t-$*mouvement brownien sous* $\mathbb{Q}$. *Par conséquent, l'hypothèse **(H)** est toujours vérifiée sous* $\mathbb{Q}$ *entre* $\mathbb{F}^S$ *et* $\mathbb{G}$, *alors qu'elle ne sera pas vraie en général sous la probabilité historique.*

Bibliographie

[1] Azéma. J., Jeulin T., Knight F. et Yor M. : Le théorème d'arrêt en fin d'ensemble prévisible, *Séminaire de Probabilités XXVII,* , Lecture Notes in Math. 1557, 133-158, Springer, 1993.

[2] Barlow M.T., Emery M., Knight F.B.,Song S et Yor M. : Autour d'un théorème de Tsirelson sur les filtrations browniennes et non browniennes, *Séminaire de Probabilités XXXII, Lecture Notes in Math.* 1686, 264-305, Springer, Berlin, 1998.

[3] Delbaen F., Schachermayer W. : The existence of absolutely continuous local martingale measures, *The Annals of Applied Probability,* Vol 5, No 4, 925-945, 1995.

[4] Dellacherie C. : Un exemple de la théorie générale des processus, *Séminaire de Probabilités IV, Lecture Notes in Math.* 124, 60-70, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[5] Dellacherie C. : *Capacités et processus stochastiques,* Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[6] Dellacherie C., Meyer P.A. : A propos du travail de Yor sur les grossissements de tribus, *Séminaire de probabilités XII,* Lecture notes in Math., 69-78, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[7] Dellacherie C., Meyer P.A. : *Probabilités et potentiel, Théorie des martingales,* Hermann. 1980.

[8] Dellacherie C., Meyer P.A. : *Probabilités et potentiel, processus de Markov. Compléments de calcul stochastique.* Hermann. 1992.

[9] Duffie D., Schroder M., Skiadas C. : Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty, *Annals of Applied Probability,* 6, 1075-1090, 1997.

[10] Elliott R.J., Jeanblanc M., Yor M. : On models of default risk, *Mathematical Finance*, 10, 179-196, 2000.

[11] Föllmer H., Wu C.T., Yor M. : Canonical decomposition of linear transformations of two independant Brownian motions motivated by models of insiders trading, *Stochastic processes and Applications,* 84, 137-164, 1999.

[12] Jarrow R.A, Yu F. : Counterparty Risk and Pricing of Defaultable Securities, *Preprint* 1999.

[13] Jeanblanc M., Rutkowski M. : Modelling on default risk : An overview. *Mathematical Finance : theory and practice. Modern Mathematics Series, High Education press;* 1999.

[14] Jeulin T. : *Semi-martingales et grosssissement de filtration,* Lecture Notes in Math. 833, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[15] Kusuoka S. : A remark on default risk models, *Advances in Mathematical Economics*, 1, 69-82, 1999.

[16] Revuz D., Yor M. : *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Third Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[17] Rutkowski M. : "On models of default risk" by R.Elliott, M.Jeanblanc and M.Yor, *Working paper,* 2000.

[18] Yor M. : *Some aspects of Brownian Motion. Part II : Some recent Martingale Problems,* Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser, 1997.

Chapitre 9

Complétion, fourchette des prix dans le marché avec défaut

Ce chapitre est consacré aux conséquences financières qu'implique la présence d'un risque de défaut sur le marché financier décrit dans le chapitre 6. Lorsque les agents ne peuvent investir que dans des actifs sans défaut, nous avons vu précédemment que la présence d'un risque de défaut entraînait l'incomplétion du marché.
Sous l'hypothèse que le marché considéré est non arbitré, il existe une infinité de martingales mesures équivalentes. Dans un marché ne présentant pas d'opportunités d'arbitrage, l'évaluation d'un actif contingent se fait au moyen d'une martingale mesure équivalente. Par conséquent, nous pouvons définir une infinité de "prix" pour chaque actif contingent.
Un premier pas consiste à déterminer la fourchette des prix. Dans ce chapitre, nous déterminons la fourchette des prix pour une option européenne, lorsque la dynamique des actifs risqués est dirigée par un $\mathbb{F}-$mouvement brownien et que l'information disponible pour les agents est la filtration $\mathbb{G}= (\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ définie dans l'introduction de la partie 2.
Du fait de l'incomplétion du marché, l'agent dispose d'une infinité de m.m.e pour construire les prix des actifs contingents. Il peut être amené à chercher une mesure qui minimise une certaine distance entre la probabilité historique et la m.m.e. Nous caractérisons dans le quatrième paragraphe d'une part la probabilité minimale, d'autre part la probabilité du minimum d'entropie. Nous établissons que ces deux probabilités coïncident avec le prolongement de la m.m.e du $\mathcal{F}_T-$marché.
Un autre problème intéressant en marché incomplet est de déterminer la dynamique d'actifs pouvant compléter le marché. Nous montrons, en utilisant les théorèmes de représentation établis dans le chapitre 6, que nous pouvons compléter le marché par un zéro-coupon avec défaut dont nous précisons la dynamique ; nous caractérisons le portefeuille de couverture d'un actif contingent soumis au défaut.

9.1 Le modèle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, W un mouvement brownien n-dimensionnel sur cet espace, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ et T un réel fixé. Considérons le $\mathcal{F}_T-$marché formé par un actif sans risque S^0 de taux r

et de n actifs risqués dont les prix S_t^i sont solutions des équations différentielles

$$dS_t^i = S_t^i(\mu_t^i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_t^{i,j} dW_t^j),\ i = 1, ..., n. \tag{9.1}$$

On écrira parfois l'équation (9.1) sous la forme concise

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t),$$

où $\mu = \left(\mu^i\right)_i$; $\sigma = (\sigma^{i,j})_{i,j}$.

Soit τ une variable aléatoire positive, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t)$, et M la martingale compensée de $1_{\tau \leq t}$. On considère un $\mathcal{G}_T-$marché formé par des actifs contingents appartenant à $\mathcal{G}_T$, mais où seulement les actifs $(S^i,\, i = 0, ..., n)$ sont négociés. Nous faisons les hypothèses suivantes

$$[\mathbf{HF1}] : \begin{cases} i)\ \mathcal{F}_t = \sigma(S_s, s \leq t). \\ ii)\ \text{Les processus } \mu,\, r \text{ sont bornés et } \mathcal{F}_t\text{-prévisibles et } r_t \geq 0. \\ iii)\ \text{Le processus à valeurs matricielles } \sigma \text{ est borné,} \\ \quad \text{inversible, d'inverse borné et } \mathcal{F}_t\text{-prévisible.} \end{cases}$$

et

$$[\mathbf{HG}] : \begin{cases} i)\ (\mathbf{H}) \text{ est vérifiée sous } \mathbb{P} \\ ii)\ \text{Le processus } \Lambda \text{ est continu.} \end{cases}$$

L'hypothèse [**HF1**] implique l'hypothèse [**HF**]**,** autrement dit le $\mathcal{F}_T-$marché est complet et non arbitré. D'après les résultats du chapitre 6, la martingale M s'écrit

$$M_t = N_t - \Lambda_{t\wedge\tau} = N_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{dF_u}{1 - F_{u-}}.$$

Remarque 9.1 *: Le processus Λ étant continu, il vient de la proposition 6.9 que $\Gamma = \Lambda$ et le processus F est croissant et continu. Si τ vérifie la condition **(C2),** le processus Λ est forcément continu. En effet, la martingale M a un saut égal à un en τ ($\Delta\Lambda_\tau = 0$ d'après la remarque 6.5), donc*

$$E(M_\tau) \neq E(M_{\tau-}).$$

Or si S est un $\mathbb{G}$-temps d'arrêt prévisible, $E(M_S) = E(M_{S-})$. Par conséquent, τ est un temps d'arrêt totalement inaccessible dans la filtration $\mathbb{G}$. Or le compensateur d'un temps d'arrêt totalement inaccessible est continu (cf Rogers-Williams [4]).

Notations :

$R_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$ désigne le facteur d'actualisation.

Les processus avec un tilde correspondent aux processus actualisés.

9.2 Martingales mesures équivalentes

Définition 9.2 *: Une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ (respectivement sur $(\Omega, \mathcal{G}_T)$) est une martingale mesure équivalente si elle vérifie les deux conditions suivantes* *i)* $\mathbb{Q}$ *est équivalente à* $\mathbb{P}$ *sur* $\mathcal{F}_T$ *(resp. sur* $\mathcal{G}_T$*)*

ii) $(R_t S_t,\ 0 \leq t \leq T)$ *est une* $\mathbb{F}-$*martingale (resp. une* $\mathbb{G}-$*martingale).*

Sous les hypothèses [**HF1**], le $\mathcal{F}_T-$marché est non arbitré et complet et il existe une unique martingale mesure équivalente $\mathbb{P}^0$ dont la densité de Radon-Nikodym Z^0 vérifie l'équation

$$dZ_t^0 = -Z_t^0 \theta_t dW_t$$

où $\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t)$.

Comme (**H**) est vérifiée, $(Z_t^0,\ 0 \leq t \leq T)$ est une $\mathbb{P}-\mathbb{G}-$martingale. Par conséquent, nous pouvons étendre la définition de $\mathbb{P}^0$ à $\mathcal{G}_T$ en posant

$$\forall A \in \mathcal{G}_t,\ \mathbb{P}^0(A) = E(Z_t^0 1_A) \tag{9.2}$$

et $\mathbb{P}^0$ sera une m.m.e pour le $\mathcal{G}_T-$marché. A priori, elle n'est pas unique.

Ainsi si [**HF1**] et [**HG**] sont vérifiées, le $\mathcal{G}_T-$marché formé par les actifs $(S^i,\ i = 0, ..., n)$ n'admet pas d'opportunités d'arbitrage, mais n'est pas complet.

Notation :

Nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des martingales mesures équivalentes sur le $\mathcal{G}_T$-marché dont la densité par rapport à $\mathbb{P}$ est de carré intégrable.

Le résultat suivant nous permet de caractériser les éléments de $\mathcal{P}$.

Proposition 9.3 *: Pour tout élément* $\widetilde{\mathbb{P}}$ *de* $\mathcal{P}$*, il existe un processus* φ $\mathbb{G}-$*prévisible vérifiant* $-1 < \varphi_t < \infty$ *tel que la densité de Radon-Nikodym s'écrive*

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{G}_T} = \mathcal{E}(-\theta W)_T \mathcal{E}(\varphi M)_T.$$

Démonstration : Soient $\widetilde{\mathbb{P}}$ une m.m.e sur le $\mathcal{G}_T-$marché appartenant à $\mathcal{P}$ et K sa densité par rapport à $\mathbb{P}$. Alors d'après le théorème de représentation (6.15) comme K est positive, il existe deux processus ψ et φ vérifiant

$$E_{\mathbb{P}}[\int_0^T |\psi_t K_t|^2 \, dt] < \infty, E_{\mathbb{P}}[\int_0^T \varphi_t^2 K_t^2 d\Lambda_t] < \infty$$

tels que

$$dK_t = K_{t-}(-\psi_t dW_t + \varphi_t dM_t).$$

Comme K est strictement positif, φ_t vérifie $-1 < \varphi_t < \infty$. De plus, RSK est une $\mathbb{P}-$martingale. Or

$$d(RSK)_t = (RSK)_{t-}((\mu_t - r_t - \sigma_t \psi_t)dt + \sigma_t dW_t) + (RSK)_{t-}(-\psi_t dW_t + \varphi_t dM_t).$$

Nous en déduisons que $\psi_t = \theta_t$. D'où le résultat en utilisant l'orthogonalité de W et de M. ■

Notation :

Les éléments de $\mathcal{P}$ seront par la suite indexés par φ, notés $\mathbb{P}^\varphi$, leur densité K^φ et les processus de hasard associés Γ^φ et Λ^φ.

On a

$$\Lambda_t^\varphi = \int_0^t (1+\varphi_s)d\Lambda_s$$

et comme Λ est continu, Λ^φ l'est aussi et par la proposition 6.9,

$$\Gamma_t^\varphi = \Lambda_t^\varphi.$$

Remarque 9.4 *: Comme le processus θ est $F-$adapté, la propriété* (**H**) *est vérifiée pour tous les éléments de $\mathcal{P}$ et la restriction d'un élément de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{F}_T$ coïncide avec $\mathbb{P}^0$.*

9.3 Fourchette des prix

L'évaluation d'un actif contingent se fait au moyen d'une m.m.e. Nous avons montré précédemment que l'ensemble des martingales mesures équivalentes n'était pas réduit à un point. Ceci implique que l'on n'a pas un unique prix viable pour un actif contingent. Nous nous proposons de déterminer l'ensemble des prix viables pour une option européenne de valeur terminale $X \in \mathcal{G}_T$. Cet ensemble est un intervalle que l'on appelle fourchette des prix.

Soit X un actif contingent de carré intégrable, le prix de X sous une martingale mesure $\mathbb{P}^\varphi$ est défini par

$$E_{\mathbb{P}^\varphi}(XR_T\ /\ \mathcal{G}_t).$$

Nous sommes amenés à distinguer deux cas. Dans un premier temps, nous regardons la fourchette des prix pour des actifs contingents appartenant à $\mathcal{F}_T$. Puis dans une seconde proposition, nous considérons des actifs contingents de la forme $X1_{T<\tau}, X \in \mathcal{F}_T$ et $h(\tau)1_{\tau\leq T}$ où h est une fonction déterministe.

Proposition 9.5 *: Si $X \in \mathcal{F}_T$, alors la fourchette est réduite à un singleton*

$$E_{\mathbb{P}^\varphi}(XR_T/\mathcal{G}_t) = E_{\mathbb{P}^0}(XR_T/\mathcal{F}_t).$$

Démonstration : L'égalité vient du fait que X est atteignable dans le $\mathcal{G}_T-$marché.

En effet, d'après [**HF**] tout actif contingent $\mathcal{F}_T-$mesurable et de carré intégrable X peut être atteint par une stratégie autofinançante. Ainsi il existe un nombre réel x et un processus $F-$prévisible π tel que

$$X = x + \int_0^T \pi_s dS_s.$$

Le prix V_t en t de X est tel que $R_tV_t = E_{\mathbb{P}^0}(R_TX/\mathcal{F}_t)$.

Sous les hypothèses [**HF**] et [**HG**], le $\mathcal{G}_T-$marché est sans arbitrage. L'actif X est disponible sur le $\mathcal{G}_T-$marché, il est aussi atteignable par une stratégie $\mathbb{G}-$mesurable (avec le même portefeuille que dans le $\mathcal{F}_T-$marché).

Le prix actualisé de X est

$$E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_TX/\mathcal{G}_t)$$

où $\mathbb{P}^\varphi$ est une m.m.e sur ce marché. Par unicité du prix d'un actif atteignable

$$E_{\mathbb{P}^0}(R_T X/\mathcal{F}_t) = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X/\mathcal{G}_t)$$

ce qui implique $E_{\mathbb{P}^\varphi}(X/\mathcal{F}_t) = E_{\mathbb{P}^0}(X/\mathcal{G}_t)$ pour tout $X \in \mathcal{F}_T$. ■

Proposition 9.6 *: i) La fourchette des prix liée à un actif contingent de la forme $X 1_{T<\tau}$, avec $X \in \mathcal{F}_T$ et $X \geq 0$ est*

$$\left]0, 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(X R_T/\mathcal{F}_t)\right[.$$

Ainsi le prix de X à l'instant t est compris entre le prix de X à l'instant t lorsque le défaut arrive tout de suite et celui lorsque le défaut n'arrive jamais avant T.
ii) Si $h \in \mathcal{F}_T$, la fourchette des prix pour l'actif contingent $h 1_{\tau \leq T}$ est

$$\left]0, 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(h R_T/\mathcal{F}_t)\right[.$$

iii) Si h est une fonction déterministe et bornée, alors la fourchette des prix pour l'actif contingent $h(\tau) 1_{\tau \leq T}$ est

$$\left]0, 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(R_T \sup_{t \leq u \leq T} h_u/\mathcal{F}_t)\right[.$$

Démonstration : i) L'ensemble des m.m.e est un convexe, donc la fourchette des prix est un intervalle de $\mathbb{R}$. De plus

$$0 \leq E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X 1_{T<\tau}/\mathcal{G}_t) = 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X 1_{T<\tau}/\mathcal{G}_t) \leq 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X/\mathcal{G}_t)$$

et comme (**H**) est vérifiée sous $\mathbb{P}^\varphi$ (cf remarque 9.4), nous avons $E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X/\mathcal{G}_t) = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X/\mathcal{F}_t) = E_{\mathbb{P}^0}(X/\mathcal{F}_t)$.
En conséquence

$$0 \leq E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X 1_{T<\tau}/\mathcal{G}_t) \leq 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(R_T X/\mathcal{F}_t).$$

De plus,

$$E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X 1_{T<\tau}/\mathcal{G}_t) = 1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^\varphi} E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T X e^{-\Gamma_T^\varphi}/\mathcal{F}_t) = 1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^\varphi} E_{\mathbb{P}^0}(R_T X e^{-\Gamma_T^\varphi}/\mathcal{F}_t)$$

Comme $\Lambda_t^\varphi = \int_0^t (1+\varphi_s) d\Lambda_s$ est un processus continu, en utilisant la proposition 6.9, il vient que $\Gamma_t^\varphi = \Lambda_t^\varphi = \int_0^t (1+\varphi_s) d\Lambda_s$. En considérant des processus φ constants, nous obtenons

$$\lim_{\varphi \to -1} 1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^\varphi} E_{\mathbb{P}^0}(R_T X e^{-\Gamma_T^\varphi}/\mathcal{F}_t) = 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(R_T X/\mathcal{F}_t)$$

et

$$\lim_{\varphi \to +\infty} 1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^\varphi} E_{\mathbb{P}^0}(R_T X e^{-\Gamma_T^\varphi}/\mathcal{F}_t) = 0.$$

Par conséquent la fourchette des prix est $\left]0, 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(R_T X/\mathcal{F}_t)\right[$.

ii) En remarquant que

$$E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T h 1_{T\geq\tau}/\mathcal{G}_t) = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T h/\mathcal{G}_t) - E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T h 1_{T<\tau}/\mathcal{G}_t),$$

le résultat s'obtient avec le i).

iii) Nous commençons par montrer le résultat pour une fonction h élémentaire de la forme

$$h_u = \sum_{i=0}^{n} h_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

où les t_i sont des instants vérifiant $0 = t_0 < ... < t_n = T$ et h_i des constantes. Remarquons tout d'abord

$$0 \leq 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T h_\tau 1_{T\geq\tau}/\mathcal{G}_t) \leq 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}[R_T \sup_{t\leq u\leq T} h_u \ / \ \mathcal{F}_t].$$

L'égalité (3.5) donne

$$1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T h_\tau 1_{T\geq\tau}/\mathcal{G}_t) = 1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^\varphi} E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T \int_t^T h_u e^{-\Gamma_u^\varphi} d\Gamma_u^\varphi/\mathcal{F}_t).$$

Soit i tel que $t_i \leq t < t_{i+1}$, montrons que $\forall j \geq i$, il existe un processus φ^j $\mathbb{G}-$adapté tel que

$$1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^{\varphi^j}} E_{\mathbb{P}^0}(R_T \int_t^T h_u e^{-\Gamma_u^{\varphi^j}} d\Gamma_u^{\varphi^j}/\mathcal{F}_t) = 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}[R_T h_j \ / \ \mathcal{F}_t] = 1_{\{t<\tau\}} h_j E_{\mathbb{P}^0}[R_T / \ \mathcal{F}_t].$$

Prenons $\varphi^j(u) = 1 - \frac{1}{n}$ pour $u < t_j$ et $\varphi^j(u) = n$ sinon, alors comme $\Gamma^{\varphi^j} = \int_0^t (1+\varphi_s^j) d\Gamma_s$, nous obtenons

$1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^{\varphi^j}} E_{\mathbb{P}^0}(R_T \int_t^T h_u e^{-\Gamma_u^{\varphi^j}} d\Gamma_u^{\varphi^j}/\mathcal{F}_t)$
$= 1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^{\varphi^j}} \{E_{\mathbb{P}^0}[R_T\{h_i(e^{-\Gamma_t^{\varphi^j}} - e^{\Gamma_{t_{i+1}}^{\varphi^j}}) + \sum_{k=i+1}^n h_k(e^{-\Gamma_{t_k}^{\varphi^j}} - e^{-\Gamma_{t_{k+1}}^{\varphi^j}})\} \ / \ \mathcal{F}_t]$
$= 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}[R_T h_j \ / \ \mathcal{F}_t] = 1_{\{t<\tau\}} h_j E_{\mathbb{P}^0}[R_T / \ \mathcal{F}_t].$

Par conséquent

$$1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(\sup_{t\leq u\leq T} h_u \ / \ \mathcal{F}_t) = 1_{\{t<\tau\}} \sup_{t\leq u\leq T} h_u \geq \sup_\varphi 1_{\{t<\tau\}} e^{\Gamma_t^{\varphi^j}} E_{\mathbb{P}^0}(\int_t^T h_u e^{-\Gamma_u^{\varphi^j}} d\Gamma_u^{\varphi^j}/\mathcal{F}_t) \geq 1_{\{t<\tau\}} \sup_{j\geq i} h_j.$$

Or $1_{\{t<\tau\}} \sup_{j\geq i} h_j = 1_{\{t<\tau\}} \sup_{t\leq u\leq T} h_u = 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(\sup_{t\leq u\leq T} h_u \ / \ \mathcal{F}_t)$.

On termine la démonstration par un théorème de classe monotone. ■

Dans le cas où l'hypothèse (**H**) ne serait pas vérifiée, mais où (**G**) serait vraie, on peut généraliser le résultat précédent aux actifs contingents de la forme $X1_{T<\tau}, X \in \mathcal{F}_T$.

Proposition 9.7 *: Si l'hypothèse (**G**) est vraie, la fourchette des prix pour un actif contingent de la forme $X1_{T<\tau}$, où $X \in \mathcal{F}_T$,et $X \geq 0$ est*

$$\big]0, 1_{\{t<\tau\}} E_{\mathbb{P}^0}(X/\mathcal{F}_t)\big[.$$

Le prix de X à l'instant t est compris entre le prix de X à l'instant t lorsque le défaut arrive tout de suite et celui lorsque le défaut n'arrive jamais avant T.

Démonstration : Si (**G**) est vraie, les $\mathbb{F}-$martingales restent seulement des $\mathbb{G}-$martingales arrêtées en

τ. Par conséquent, nous ne nous intéressons au marché que jusqu'en τ. Ainsi les m.m.e seront définies sur $\mathcal{G}_{T\wedge\tau}$. Si $\mathbb{P}^\varphi$ est une m.m.e et K^φ sa densité, $(K^\varphi_{t\wedge\tau})_t$ est une $\mathcal{G}_t-$martingale et $K^\varphi_{t\wedge\tau} = K^\varphi_t 1_{\{t<\tau\}} + K^\varphi_\tau 1_{\{t\geq\tau\}}$. En utilisant le théorème de représentation prévisible 8.9, on peut écrire

$$dK^\varphi_{t\wedge\tau} = K^\varphi_{t\wedge\tau}(\theta_{t\wedge\tau}dW_{t\wedge\tau} + \varphi_{t\wedge\tau}dM_{t\wedge\tau}),$$

ou encore $K^\varphi_{t\wedge\tau} = \mathcal{E}(\theta W)_{t\wedge\tau}\mathcal{E}(\varphi M)_{t\wedge\tau}$.
On peut remarquer que $(\mathbf{G})$ sera vérifiée sous $\mathbb{P}^\varphi$ puisque $\Gamma^\varphi = \int_0^t(1+\varphi_s)d\Gamma_s$.
Comme précédemment, la fourchette des prix est un intervalle. On peut écrire

$$E_{\mathbb{P}^\varphi}(X1_{\{T<\tau\}}/\mathcal{G}_t) = \frac{E_{\mathbb{P}}(K^\varphi_{T\wedge\tau}X1_{\{T<\tau\}}\ /\ \mathcal{G}_t)}{K^\varphi_{t\wedge\tau}}.$$

Or $1_{\{t<\tau\}}K^\varphi_{t\wedge\tau} = 1_{\{t<\tau\}}\mathcal{E}(\theta W)_t \exp(-\int_0^t(1+\varphi_s)d\Lambda_s)$. D'où

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}^\varphi}(X1_{\{T<\tau\}}/\mathcal{G}_t) &= 1_{\{t<\tau\}}\frac{E_{\mathbb{P}}(\mathcal{E}(\theta W)_T X\exp(-\int_t^T(1+\varphi_s)d\Lambda_s)1_{\{T<\tau\}}\ /\ \mathcal{G}_t)}{\mathcal{E}(\theta W)_t} \\ &= 1_{\{t<\tau\}}\frac{E_{\mathbb{P}}(\mathcal{E}(\theta W)_T X\exp(-\int_t^T(1+\varphi_s)d\Lambda_s)e^{-(\Gamma_T-\Gamma_t)}\ /\ \mathcal{F}_t)}{\mathcal{E}(\theta W)_t}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi > -1$, on obtient l'encadrement

$$0 \leq E_{\mathbb{P}^\varphi}(X1_{\{T<\tau\}}/\mathcal{G}_t) \leq 1_{\{t<\tau\}}\frac{E_{\mathbb{P}}(\mathcal{E}(\theta W)_T X\ /\ \mathcal{F}_t)}{\mathcal{E}(\theta W)_t} = 1_{\{t<\tau\}}E_{\mathbb{P}^0}(X\ /\mathcal{F}_t).$$

Le résultat s'obtient en considérant des suites $\varphi_n = n$ dans un premier temps et $\varphi_n = 1 - \frac{1}{n}$ ensuite. ■

9.4 Martingales mesures particulières

L'existence d'une infinité de martingales mesures équivalentes entraine comme nous venons de le montrer une fourchette des prix. Pour construire ses prix, l'agent peut utiliser des m.m.e vérifiant un critère particulier. Par exemple, il peut construire ses prix au moyen de la martingale mesure minimale ou de la probabilité d'entropie minimale. Un autre moyen est d'utiliser une fonction d'utilité U (ce dernier point sera étudié dans le chapitre 10).

9.4.1 Martingale mesure minimale

La notion de martingale mesure minimale été introduite par Föllmer et Schweizer [2] dans le but de minimiser le risque quadratique D^φ associé à un actif contingent X. Le processus D^φ est défini par

$$D^\varphi(t) = E_{\mathbb{P}^\varphi}[(Y^\varphi_T - Y^\varphi_t)^2\ /\ \mathcal{G}_t]$$

où $(Y^\varphi_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{P}^\varphi-$martingale de carré intégrable, d'espérance nulle, orthogonale à RS qui vérifie

$$E_{\mathbb{P}^\varphi}[X\ /\ \mathcal{G}_t] = E_{\mathbb{P}^\varphi}[X\ ] + \int_0^t \xi_s d(RS)_s + Y^\varphi_t.$$

Cette martingale est nulle si l'actif X est duplicable.

Définition 9.8 *: Une martingale mesure $\mathbb{Q}$ est appelée martingale mesure minimale si*

i) $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{G}_T$.

ii) $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ sur $\mathcal{G}_0$.

iii) Toute $\mathbb{P} - (\mathcal{G}_t)-$martingale de carré intégrable, orthogonale à la partie martingale de S sous $\mathbb{P}$, est une $\mathbb{Q}-(\mathcal{G}_t)$-martingale.

Nous pouvons rappeler le résultat sur l'existence de la probabilité minimale dans le cas où les actifs sont continus du à Ansel-Stricker [1].

Proposition 9.9 *Si Y est une semi-martingale continue de décomposition*

$$Y_t = Y_0 + M + A,$$

une condition nécessaire pour l'existence de la mesure minimale est que, si B est un processus prévisible croissant intégrable nul en 0 tel que

$$A^i = \gamma^i.B \text{ et } \langle M, M\rangle = \sigma^{i,j}.B \text{ pour } i,j = 1,...,d,$$

alors il existe un processus prévisible $\widehat{\lambda}$ tel que $\sigma\widehat{\lambda} = \gamma$.

Dans le $\mathcal{G}_T$-marché, la semi-martingale RS vérifie cette proposition. Nous pouvons maintenant caractériser dans le $\mathcal{G}_T-$marché la probabilité minimale.

Proposition 9.10 *: La m.m.e $\mathbb{P}^0$ est la martingale mesure minimale.*

Démonstration : La probabilité $\mathbb{P}^0$ vérifie les points i) et ii) de la définition 9.8. Il suffit de montrer que iii) est vraie.
Soit Y une $\mathbb{P} - \mathbb{G}-$martingale de carré intégrable, orthogonale à la partie martingale de S sous $\mathbb{P}$, alors d'après le théorème 6.15, Y s'écrit

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \xi_s dM_s.$$

Comme M reste une martingale sous $\mathbb{P}^0$, Y est une $\mathbb{P}^0-$martingale. ■

9.4.2 Probabilité d'entropie minimale

Définition 9.11 *: Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités définies sur le même espace. On appelle entropie relative de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$, ou information de Kullback de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$, on note $I(\mathbb{Q},\mathbb{P})$ l'élément de $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ défini par*

$$I(\mathbb{Q},\mathbb{P}) = \begin{cases} E[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \ln \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] & si\ \mathbb{Q} << \mathbb{P} \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

où E désigne l'espérance calculée sous la probabilité $\mathbb{P}$.

Dans le $\mathcal{G}_T-$marché, on peut montrer que la m.m.e qui minimise l'entropie est la probabilité $\mathbb{P}^0$.

Proposition 9.12 *: La probabilité $\mathbb{P}^0$ est la m.m.e qui minimise l'entropie par rapport à $\mathbb{P}$.*

Démonstration : Pour une m.m.e $\mathbb{P}^\varphi$, on a

$$\begin{aligned} I(\mathbb{P}^\varphi,\mathbb{P}) &= E[K_T^\varphi \ln K_T^\varphi] = E^\varphi[\ln K_T^\varphi] \\ &= E^\varphi\{\int_0^T [\frac{1}{2}\theta_t^2 dt + (1-N_{t-})[(1+\varphi_t)\ln(1+\varphi_t)-\varphi_t]d\Lambda_t]\} \\ &= E^0[\int_0^T \frac{1}{2}\theta_t^2 dt] + E^\varphi\{\int_0^T (1-N_{t-})[(1+\varphi_t)\ln(1+\varphi_t)-\varphi_t]d\Lambda_t\}. \end{aligned}$$

On remarque que la fonction définie de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui φ associe $(1+\varphi)\ln(1+\varphi)-\varphi$ est convexe, positive et atteint son minimum 0 en $\varphi = 0$.
Par conséquent, le minimum de $I(\mathbb{P}^\varphi,\mathbb{P})$ est atteint pour $\varphi = 0$. ■

9.5 Dynamique d'un zéro-coupon sous la probabilité historique

Dans le chapitre précédent sans l'hypothèse (**H**), nous avons donné la dynamique d'un zéro-coupon sous une m.m.e et nous avons montré que le $\mathcal{G}_T$-marché pouvait être complété à l'aide d'un zéro-coupon. Le théorème de représentation prévisible nous permettait d'obtenir de façon explicite la couverture. Ces résultats existent encore sous l'hypothèse (**H**), il suffit de tenir compte du fait que la partie martingale de F est nulle.
L'hypothèse (**H**) permet en plus d'obtenir la dynamique d'un zéro-coupon sous la probabilité historique.

9.5.1 Dynamique d'un zéro-coupon sous une m.m.e

Nous allons donner la dynamique d'un zéro-coupon sous une m.m.e.

Proposition 9.13 *: Supposons qu'un zéro-coupon avec défaut soit négocié au prix ρ_t alors il existe une martingale mesure équivalente $\mathbb{P}^\varphi$ choisie par le marché telle que*

$$\widetilde{\rho}(t,T) = E_{\mathbb{P}^\varphi}(1_{T<\tau}R_T/\mathcal{G}_t) = R_t\rho_t.$$

La dynamique de $\widetilde{\rho}$ où $\widetilde{\rho}$ est donnée par

$$d\widetilde{\rho}_t = \widetilde{\rho}_{t-}(\upsilon_t dW_t^\varphi - dM_t). \tag{9.3}$$

où $m_t = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T \exp(\Gamma_T^\varphi)/\mathcal{F}_t)$, $dm_t = \mu_t dW_t^\varphi = m_t\upsilon_t dW_t^\varphi$ et W^φ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^\varphi$.

Démonstration : Sous la m.m.e $\mathbb{P}^\varphi$, le processus $R\rho$ est une $\mathbb{G}-$martingale de valeur terminale $1_{T<\tau}R_T$ et d'après le lemme 3.3, nous avons

$$\widetilde{\rho}(t,T) = E_{\mathbb{P}^\varphi}(1_{T<\tau}R_T/\mathcal{G}_t) = L_t m_t$$

où $m_t = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T \exp(\Gamma_T^\varphi)/\mathcal{F}_t)$ est une $\mathbb{F}-$ martingale strictement positive. Par conséquent, nous pouvons l'écrire $dm_t = \mu_t dW_t^\varphi = m_t\upsilon_t dW_t^\varphi$.

De plus, le processus Γ^φ est continu, puisque par hypothèse Λ est continu et

$$\Lambda_t^\varphi = \int_0^t (1+\varphi_s) d\Lambda_s.$$

La formule d'Itô appliquée à $L_t m_t$ donne

$$d\widetilde{\rho}(t,T) = \widetilde{\rho}(t-,T)(\upsilon_t dW_t^\varphi - dM_t).$$

Puisque la martingale M ne saute qu'une fois en τ et que $\Delta M_\tau = 1$, le saut de ρ est égal à

$$-\rho_{\tau-}\Delta M_\tau = -\rho_{\tau-}.$$

Ce résultat était attendu puisque, après τ, le processus ρ est nul. ■

La proposition précédente donnait la dynamique d'un zéro-coupon sans prime. Ce résultat se généralise à un zéro-coupon avec une prime versée à maturité.

Proposition 9.14 *Supposons qu'un zéro-coupon avec une prime $\delta(\tau)$ versée à maturité est négocié au prix $\rho_t^{(\delta)}$ alors il existe une martingale mesure équivalente $\mathbb{P}^\varphi$ choisie par le marché telle que $\widetilde{\rho}^{(\delta)}(t,T) = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T(1_{T<\tau} + \delta(\tau)1_{T\geq\tau})/\mathcal{G}_t) = R_t\rho_t^{(\delta)}$. La dynamique de $\widetilde{\rho}^{(\delta)}$est donnée par*

$$d\widetilde{\rho}_t^{(\delta)} = (1-N_{t-})(\widetilde{\rho}_{t-}\upsilon_t + \widetilde{\rho}_2(t-,T)\upsilon_t^{(\delta)})dW_t^\varphi - (\widetilde{\rho}_{t-}^{(\delta)} - \delta(t))dM_t.$$

où $\widetilde{\rho}_2(t,T) = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T\delta(\tau)1_{T\geq\tau}/\mathcal{G}_t)$, $m_t = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T\exp(\Gamma_T^\varphi)/\mathcal{F}_t), dm_t = m_t\upsilon_t dW_t^\varphi$, $m_t^{(\delta)} = E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T\int_0^T \delta(u)\exp(\Gamma_u^\varphi)d\Gamma_u^\varphi/\mathcal{F}_t)$, $dm_t^{(\delta)} = m_t^{(\delta)}\upsilon_t^{(\delta)}dW_t^\varphi$et W^φ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}^\varphi$.

Démonstration : On écrit

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}^{(\delta)}(t,T) &= E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T 1_{T<\tau}/\mathcal{G}_t) + E_{\mathbb{P}^\varphi}(R_T\delta(\tau)1_{T\geq\tau}/\mathcal{G}_t) \\ &= \widetilde{\rho}(t,T) + \widetilde{\rho}_2(t,T).\end{aligned}$$

Le théorème 6.17 appliqué au processus $\mathbb{F}$-prévisible $R_T\delta(u)1_{T\geq u}$ permet d'écrire

$$d\widetilde{\rho}_2(t,T) = (1-N_{t-})e^{\Gamma_t^\varphi} m_t^{(\delta)}\upsilon_t^{(\delta)}dW_t^\varphi - (\widetilde{\rho}_2(t-,T) - R_T\delta(t))dM_t.$$

Or l'égalité (3.6) implique

$$\widetilde{\rho}_2(t,T) = R_T\delta(\tau)1_{t\geq\tau} + (1-N_{t-})e^{\Gamma_t^\varphi}m_t^{(\delta)}.$$

Par conséquent,

$$d\widetilde{\rho}_2(t,T) = \widetilde{\rho}_2(t-,T)(1-N_{t-})\upsilon_t^{(\delta)}dW_t^\varphi - (\widetilde{\rho}_2(t-,T) - R_T\delta(t))dM_t.$$

En utilisant cette expression et l'égalité (9.3), on obtient

$$d\widetilde{\rho}^{(\delta)}_t = (1-N_{t-})(\widetilde{\rho}(t-,T)\upsilon_t + \widetilde{\rho}_2(t-,T)\upsilon^{(\delta)}_t)dW^{\varphi}_t - (\widetilde{\rho}^{(\delta)}_{t-} - R_T\delta(t))dM_t.$$

■

Remarque 9.15 *Dans le cas d'une prime versée au moment du défaut, seul change le coefficient d'actualisation devant la prime. Il faut remplacer* R_T *par* R_τ *et la martingale* $m^{(\delta)}_t$ *devient*

$$m^{(\delta)}_t = E_{\mathbb{P}^\varphi}(\int_0^T R_u\delta(u)\exp(\Gamma^\varphi_u)d\Gamma^\varphi_u/\mathcal{F}_t)$$

La dynamique est

$$d\widetilde{\rho}^{(\delta)}_t = (1-N_{t-})(\widetilde{\rho}(t-,T)\mu_t + \widetilde{\rho}_2(t-,T)\upsilon^{(\delta)}_t)dW^{\varphi}_t - (\widetilde{\rho}^{(\delta)}_{t-} - R_t\delta(t))dM_t.$$

Dans la suite, on travaille avec un zéro-coupon sans prime, mais on peut remplacer sans difficulté par un zéro-coupon avec une prime $\delta(\tau)$ versée à maturité ou bien à l'instant du défaut. Il suffit d'utiliser les dynamiques correspondantes.

9.5.2 Complétion du marché et stratégie de couverture

Le théorème 6.19 permet d'écrire tout actif contingent de la forme $X1_{T<\tau}$

$$X1_{T<\tau} \quad = \quad x + \int_0^{T\wedge\tau} L_s(\mu^X_s - m^X_s\tfrac{\mu_s}{m_s})d(RS)_s + \int_0^{T\wedge\tau}\tfrac{m^X_{s-}}{m_{s-}}d(R\rho)_s \tag{9.4}$$

si μ et μ^x sont les coefficients de représentation prévisible des $\mathbb{F}$-martingales

$$m_t = E_{\mathbb{P}^\varphi}[R_Te^{-\Gamma_T}/\mathcal{F}_t]$$

et

$$m^X_t = E_{\mathbb{P}^\varphi}[\int_0^\infty XR_T1_{T<u}e^{-\Gamma_u}d\Gamma_u/\mathcal{F}_t] = E_{\mathbb{P}^\varphi}[XR_Te^{-\Gamma_T}/\mathcal{F}_t]$$

par rapport à RS.

La partie α investie dans le zéro-coupon sans risque est

$$\begin{aligned}\alpha_t &= E(X1_{T<\tau}/\mathcal{G}_t) - L_t(\mu^X_t - m^X_t\frac{\mu_t}{m_t})(RS)_t - \frac{m^X_t}{m_t}(R\rho)_t \\ &= L_t(m^X_t - (\mu^X_t - m^X_t\frac{\mu_t}{m_t}) - m^X_t) = -L_t(\mu^X_t - m^X_t\frac{\mu_t}{m_t}).\end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant

Théorème 9.16 *: Soit* $X\in\mathcal{F}_T$*. Pour couvrir l'actif contingent* $X1_{T<\tau}$*, il faut investir un nombre de parts égal à*

. $L_s(\mu^X_s - m^X_s\frac{\mu_s}{m_s})$ *dans les actifs* S*,*

. $\frac{m^X_s}{m_s}$ *dans le zéro-coupon avec défaut*

. $-L_s(\mu^X_s - m^X_s\frac{\mu_s}{m_s})$ *dans le zéro-coupon sans risque.*

On peut justifier ce résulat de manière financière. On remarque que la richesse investie dans le sans risque est l'opposée de celle investie dans S. Ceci provient du fait que dans le marché $\mathcal{F}_T$, le temps de défaut est invisible. Par conséquent, pour couvrir un actif soumis au défaut, il faut adopter une position neutre sur le $\mathcal{F}_T-$marché. La part investie sur le zéro-coupon permet de couvrir à chaque instant l'actif. Pour cela, il nous faut une richesse qui nous redonne X en T si le défaut n'a pas eu lieu et 0 sinon. Ce raisonnement implique, si on tient compte des conditions de mesurabilité, que la richesse investie dans le zéro-coupon est égale à $\frac{m_s^X}{m_s}$. La part placée sur S est obtenue de façon à rendre le portefeuille autofinançant.

Dans le cas où les processus Γ et r sont déterministes,

$$E_{\mathbb{P}^\varphi}[XR_Te^{-\Gamma_T}/\mathcal{F}_t] = R_Te^{-\Gamma_T}E_{\mathbb{P}^0}[X\ /\ \mathcal{F}_t]$$

et $m_t = R_Te^{-\Gamma_T}$. Donc $\mu = 0$.

La martingale $R_TE_{\mathbb{P}^0}[X\ /\ \mathcal{F}_t]$ est le prix actualisé de l'actif contingent X et $\mu_s^X\ (R_sS_s\sigma_s)^{-1}$ correspond à la couverture dans le $\mathcal{F}_T-$marché. Ainsi, on a le corollaire

Corollaire 9.17 *Si les processus Γ et r sont déterministes, l'expression (9.4) devient*

$$X1_{T<\tau} \quad = \quad x + \int_0^{T\wedge\tau} e^{\Gamma_s - \Gamma_T}\mu_s^X(R_sS_s\sigma_s)^{-1}d(RS)_s + \int_0^{T\wedge\tau} E_{\mathbb{P}^0}[X\ /\ \mathcal{F}_s]d(R\rho)_s.$$

Dans un prochain paragraphe, nous explicitons la couverture dans le cas d'un processus Γ aléatoire particulier et pour X un call européen.

Dans le chapitre 3, nous avons montré la stabilité de la propriété $(\mathbf{H})$ par changement de probabilité équivalente lorsque le coefficient du mouvement brownien était $\mathbb{F}-$adapté. Or le changement de probabilité pour le mouvement brownien est déterminé par les actifs risqués sans défaut, la propriété $(\mathbf{H})$ est vraie sous la probabilité historique car les coefficients de l'équation différentielle stochastique qui gère S sont $\mathbb{F}-$adaptés. Nous pouvons alors déterminer les dynamiques du zéro-coupon avec défaut sous la probabilité historique.

9.5.3 Dynamique du zéro-coupon avec défaut sous la probabilité historique

On suppose que la dynamique du zéro-coupon avec défaut de maturité T est de la forme

$$d\rho_t = \rho_{t-}(a(t,T)dt + b(t,T)d\Lambda_t + c(t,T)dW_t + f(t,T)dM_t). \tag{9.5}$$

Nous allons préciser les conditions sur les coefficients a, d, c, f pour que le modèle soit cohérent. Les coefficients des martingales étant invariants par changement de probabilité équivalente, $f_t = -1$.

Nous faisons l'hypothèse que Λ n'est pas absolument continu (Λ est continu par hypothèse) par rapport à la mesure de Lebesgue et nous écrivons

$$d\Lambda_t = \lambda_t dt + d\Lambda_t^e$$

où $d\Lambda_t^e$ est une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue.

On suppose que le marché défini par S, ρ et l'actif sans risque, n'admet pas d'opportunité d'arbitrage. Soit $\overline{\mathbb{P}}$ une m.m.e sur ce marché et K sa densité par rapport à $\mathbb{P}$. Alors K est une $\mathbb{P}-$martingale et d'après le théorème 6.15

$$dK_t = K_{t-}(-\psi_t dW_t + \varphi_t dM_t). \tag{9.6}$$

Comme le processus RSK est une $\mathbb{P}-$martingale,

$$\psi_t = -\sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t) = -\theta_t$$

et ψ est $F-$adapté. Donc $(\mathbf{H})$ est vérifiée sous $\overline{\mathbb{P}}$. Le processus $RK\rho$ est une $\mathbb{P}$-martingale et vérifie

$$\begin{aligned} d(RK\rho)_t &= (RK\rho)_{t-}[(a(t,T) - r_t - \theta_t c(t,T))dt + (b(t,T) - (1-N_{t-})\varphi_t)d\Lambda_t \\ &\quad +(c(t,T) - \theta_t)dW_t + (-\varphi_t - 1 + \varphi_t)dM_t \\ &\quad +(b(t,T)\varphi_t - 2(1-N_{t-})\varphi)d[\Lambda, N]_t - (1-N_{t-})(b(t,T)\varphi_t + (1-N_{t-})\varphi_t)d[\Lambda,\Lambda]_t] \end{aligned}$$

On en déduit comme Λ est continu

$$a(t,T) - r_t - \theta_t c(t,T) + b(t,T) - (1-N_{t-})\varphi_t\lambda_t = 0 \tag{9.7}$$

$$b(t,T) + (1-N_{t-})f_t\varphi_t = 0 \text{ sur l'ensemble chargé par } d\Lambda_t^e \tag{9.8}$$

Ainsi la dynamique de ρ étant donnée par (9.5), le modèle est cohérent si nous pouvons trouver un processus φ prévisible tel que $\varphi > -1$ et tel que les coefficients a, b vérifient les égalités (9.8) et (9.7). La m.m.e $\overline{\mathbb{P}}$ étant fixée par (9.6), le processus c_t doit coïncider avec le processus donné par le théorème de représentation pour la $\overline{\mathbb{P}}-$martingale $E_{\overline{\mathbb{P}}}[e^{\overline{\Gamma}_T}/\mathcal{F}_t]$.

Remarque 9.18 *: Si le processus Λ est absolument continu, nous pouvons écrire la dynamique du zéro-coupon comme suit*

$$d\rho_t = \rho_{t-}(a(t,T)dt + c(t,T)dW_t - dM_t).$$

Les conditions de non arbitrage impliquent que les égalités (9.7) et (9.8) deviennent

$$a(t,T) - r_t - \theta_t c(t,T) - (1-N_{t-})\varphi_t\lambda_t = 0 \tag{9.9}$$

Remarque 9.19 *: Si l'on se donne une martingale mesure équivalente, il existe une seule dynamique pour le prix d'un zéro-coupon avec défaut qui permette de compléter le $\mathcal{G}_t-$marché de manière à ce qu'il soit non arbitré et complet. En effet, si φ est fixé (en réalité φ est donné par le marché par l'intermédiaire de la m.m.e), alors b est donné par (9.8). La m.m.e $\overline{\mathbb{P}}$ étant fixée par (9.6), le processus c est donné par le théorème de représentation pour la $\overline{\mathbb{P}}-$martingale $E_{\overline{\mathbb{P}}}[e^{\overline{\Gamma}_T}/\mathcal{F}_t]$ et a est donné par (9.7).*

9.5.4 Lien entre zéro-coupon et taux

Jusqu'à présent, nous avons toujours modélisé la dynamique du zéro-coupon avec défaut. Il peut cependant être utile de modéliser la dynamique du taux forward. Dans ce cas, il est intéressant de relier ces deux dynamiques. Pour cela, nous rappelons la définition suivante.

Définition 9.20 *: i) Le prix d'un zéro coupon avec défaut de maturité T à l'instant t est noté $\rho(t,T)$.*
ii) Si la dérivée par rapport à T de $\rho(t,T)$ existe, le taux forward est défini par

$$\overline{f}(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln \rho(t,T)$$

et le taux instantané par

$$\overline{r}(t) = \overline{f}(t,t).$$

On suppose que la dynamique de $\overline{f}$ est donnée par

$$d\overline{f}(t,T) = \overline{\alpha}(t,T)dt + \overline{\beta}(t,T)d\Lambda_t + \overline{\sigma}(t,T)dW_t \tag{9.10}$$

et on en déduit celle du zéro coupon avec défaut sous la forme

$$d\rho(t,T) = \rho(t-,T)(\alpha(t,T)dt + \beta(t,T)d\Lambda_t + \gamma(t,T)dW_t - dM_t). \tag{9.11}$$

Réciproquement, si la dynamique de ρ est donnée par (9.11), alors on en déduit celle de f.
On suppose que dans (9.11) les coefficients sont des processus $\mathcal{G}$-prévisibles permettant de différencier sous le signe somme, d'échanger l'ordre d'intégration et de dériver par rapport à T.
On obtient comme conséquence de l'expression (9.10) que la dynamique du taux instantané avec défaut est

$$\overline{r}(t) = \overline{f}(0,t) + \int_0^t \overline{\alpha}(s,t)ds + \int_0^t \overline{\beta}(s,t)d\Lambda_s + \int_0^t \overline{\sigma}(s,t)dW_s.$$

Comme dans le modèle Heath-Jarrow-Morton, les coefficients du taux forward et du zéro-coupon avec défaut sont liés.

Proposition 9.21 *: i) Si la dynamique du taux forward avec défaut est donnée par (9.10), alors la dynamique du zéro coupon avec défaut est*

$$d\rho(t,T) = \rho(t-,T)[(-a(t,T) + \overline{r}(t) + \frac{1}{2}c^2(t,T))dt - b(t,T)d\Lambda_t + c(t,T)dW_t - dN_t] \tag{9.12}$$

où

$$\begin{array}{rcl} a(t,T) & = & \int_t^T \overline{\alpha}(t,v)dv \\ b(t,T) & = & \int_t^T \overline{\beta}(t,v)dv \\ c(t,T) & = & -\int_t^T \overline{\sigma}(t,v)dv \end{array}$$

et la dynamique du taux instantané par

$$\overline{r}(t) = \overline{f}(0,t) + \int_0^t \overline{\alpha}(s,t)ds + \int_0^t \overline{\beta}(s,t)d\Lambda_s + \int_0^t \overline{\sigma}(s,t)dW_s.$$

ii) Si la dynamique du zéro-coupon avec défaut est (9.11), alors la dynamique du taux forward avec défaut *est donnée par (9.10) où*

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}(t,T) &= \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta T}\gamma^2(t,T) - \frac{\delta}{\delta T}\alpha(t,T)\\ \overline{\beta}(t,T) &= -\frac{\delta}{\delta T}\beta(t,T)\\ \overline{\sigma}(t,T) &= -\frac{\delta}{\delta T}\gamma(t,T).\end{aligned}$$

Démonstration : i) On utilise le fait que

$$\rho(t,T) = (1-N(t))\exp(-\int_t^T \overline{f}(t,s)ds)$$

et une méthode analogue à celle utilisée par Schönbucher dans [5]. Il s'agit simplement de tenir compte du terme en $d\Lambda$.

ii) On applique la formule d'Itô à $\ln\rho(t,T)$ et on prend la dérivée par rapport à T.

9.5.5 Condition pour l'absence d'arbitrage

Dans le paragraphe précédent, nous avons énoncé les conditions vérifiées par les coefficients des dynamiques de S et ρ pour que le marché défini par S,ρ et l'actif sans risque n'admette pas d'opportunité d'arbitrage. Nous regardons maintenant les conditions vérifiées par les coefficients de la dynamique du taux forward pour que le marché défini par S,ρ et l'actif sans risque n'admette pas d'opportunité d'arbitrage.

On peut énoncer le théorème suivant

Théorème 9.22 *: Considérons les dynamiques données sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. Si (**H**) est vérifiée sous cette probabilité, alors nous avons l'équivalence entre*

i) Il y a absence d'arbitrage.

ii) Il existe θ et ϕ deux processus prévisibles avec ϕ positif tel que

$$\left\{\begin{aligned}\sigma(t)\theta(t) &= \mu(t)-r(t)\\ c(t,T)\theta(t) &= -a(t,T)+\overline{r}(t)+\frac{1}{2}c^2(t,T)-r(t)+(1-N(t)\phi_t-b(t,T))\lambda_t\\ b(t,T) &= (1-N(t))(1-\phi(t)) \text{ sur le support de } d\Lambda_t^e\end{aligned}\right. \tag{9.13}$$

où λ est défini par $d\Lambda_t = \lambda_t dt + d\Lambda_t^e$.

Démonstration : D'après la définition sur l'absence d'arbitrage, la condition $i)$ est équivalente au fait qu'il existe une probabilité $\overline{\mathbb{P}}$ équivalente à $\mathbb{P}$. Si on note K sa densité, d'après le théorème 6.15, il existe θ et ϕ tels que

$$dK_t = K_{t-}(-\theta(t)dW_t + (\phi(t)-1)dM_t)$$

et que RSK et $R\rho K$ soient des $\mathbb{P}-$martingales. On obtient ainsi les relations (9.13). ■

Le marché fixant la m.m.e et par suite le processus ϕ, on peut se demander s'il est possible d'obtenir des informations sur le processus de hasard (ou sur le m.p.h) sous la m.m.e. Dans ce cas, on pourrait évaluer les actifs contingents.

En utilisant le prix actualisé $\widetilde{c}$ de l'actif qui rémunère la somme un placée en zéro jusqu'à l'instant du défaut, on obtient que

$$\widetilde{c}(t) = 1_{\{t<\tau\}}\exp(\int_0^t \overline{r}(s)-r(s)ds)$$

est une $\mathbb{G}-$martingale sous la m.m.e. En remarquant que c'est l'exponentielle de Doléans du processus

$$-N(t) + \int_0^{t\wedge\tau} \overline{r}(s) - r(s)ds,$$

on en déduit que c'est une martingale. Le processus $\overline{r} - r$ étant $\mathbb{F}-$prévisible, on a l'égalité suivante

$$\overline{r}(t) - r(t) = \phi_t \lambda_t \tag{9.14}$$

pour presque tout t.

Nous pouvons remarquer que dans le cas où Λ n'est pas absolument continu, contrairement au résultat de Schönbucher (cf [5]), l'absence d'arbitrage n'implique pas que les taux instantanés r et $\bar{r}$ soient liés par le processus de hasard Λ.

De plus la relation (9.14) implique que nous pouvons seulement obtenir des informations sur la partie absolument continue de Λ et donc de Γ.

9.5.6 Régularité de la volatilité

Pour relier la dynamique du taux avec celle du zéro-coupon, nous avons imposé des conditions de régularité sur les coefficients des dynamiques. En particulier, le coefficient du brownien dans la dynamique du zéro-coupon est supposé différentiable par rapport à la deuxième variable. Or nous avons montré que ce coefficient s'obtient au moyen d'un théorème de représentation prévisible. Il n'est donc pas évident que cette hypothèse soit vérifiée. Nous explicitons dans ce paragraphe des situations où les calculs peuvent être explicités et où cette propriété est vraie.

Soit W un mouvement brownien unidimensionnel.

Supposons que $r = 0$ et que le processus Γ est de la forme

$$\Gamma_t = \int_0^t \gamma(s, W_s)ds$$

où γ est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à valeurs positives et différentiable par rapport à la deuxième variable de dérivée notée γ'. Une telle situation se produit lorsqu'on utilise les processus de Cox pour construire τ.

Soit $m_t = E(\exp - \int_0^T \gamma(s, W_s)ds / \mathcal{F}_t)$. Alors

$$m_t = \psi(t, T, W_t)\exp(-\Gamma_t),$$

où

$$\psi(t, T, x) = E_x(\exp - \int_0^{T-t} \gamma(t + s, W_s)ds) = E(\exp - \int_0^{T-t} \gamma(t + s, W_s + x)ds)$$

et, puisque m est une martingale, sa dérive est nulle. D'où

$$dm_t = \exp(-\Gamma_t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(t, T, W_t)dW_t = m_t \mu(t, T)dW_t$$

où

$$\mu(t,T) = -\frac{E[(\int_0^{T-t}\gamma'(t+s,W_s+x)ds)(\exp-\int_0^{T-t}\gamma(t+s,W_s+x)ds)]}{E(\exp-\int_0^{T-t}\gamma(t+s,W_s+x)ds)}\,|_{x=W_t}$$

On remarque en particulier que $\mu(t,t)=0$ et μ est différentiable par rapport à la deuxième variable. Dans la pratique, le calcul de ψ n'est pas aisé. Nous allons donner deux exemples où nous avons une expression explicite.

1^{er} cas : $\gamma(x) = x^2$.

Dans ce cas

$$\psi(t,T,x) = \exp[-\frac{x^2}{\sqrt{2}}\tanh(\sqrt{2}(T-t))][\cosh(\sqrt{2}(T-t))]^{-\frac{1}{2}},$$

et $\mu(t,T) = \sqrt{2}W_t\tanh(\sqrt{2}(T-t))$.

Démonstration : On peut montrer ce résultat en utilisant le théorème de Girsanov (cf [6], chap. 2). En effet si on note $I_b = E(\exp(-\frac{b^2}{2}\int_0^t ds\left|\widehat{W_s}\right|^2))$ où $\widehat{W}$ est un mouvement brownien partant de $x\in\mathbb{R}$ et $b\geq 0$, $(\widehat{W_u}, u\leq t)$ satisfait l'équation $\widehat{W_u} = x+\beta_u - b\int_0^u ds\widehat{W_s}$ sous la probabilité $\mathbb{P}^{(b)}$ définie par

$$\mathbb{P}^{(b)}_{/\mathcal{F}_t} = \exp\{-\frac{b}{2}(\left|\widehat{W_t}\right|^2 - x^2 - t) - \frac{b^2}{2}\int_0^t ds\left|\widehat{W_s}\right|^2\}.P_{/\mathcal{F}_t}$$

où $(\beta_u, u\leq t)$ est un $\mathbb{P}^{(b)}$ mouvement brownien. Ainsi $(\widehat{W_u}, u\leq t)$ est un $\mathbb{P}^{(b)}$processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre $-b$, partant de x.

Par conséquent, on peut exprimer $(\widehat{W_u}, u\leq t)$ en fonction de β par la formule suivante

$$\widehat{W_u} = e^{-bu}(x+\int_0^u e^{bs}d\beta_s).$$

Cette expression permet d'obtenir la moyenne et la variance de la variable gaussienne $\widehat{W_u}$ sous $\mathbb{P}^{(b)}$. Enfin en remarquant que $I_b = E^{(b)}[\exp(\frac{b}{2}(\left|\widehat{W_t}\right|^2 - x^2 - t)]$, on obtient

$$I_b = \cosh(bt)^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{x^2 b}{2}\tanh(bt)),$$

d'où

$$\psi(t,T,x) = \exp[-\frac{x^2}{\sqrt{2}}\tanh(\sqrt{2}(T-t))][\cosh(\sqrt{2}(T-t))]^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$\mu(t,T) = \sqrt{2}W_t\tanh(\sqrt{2}(T-t)).$$

$\blacksquare$

2^e cas : $\gamma(x) = 1_{\{x>0\}}$

Nous obtenons dans ce cas

$$\psi(t,T,x) = \begin{cases} \int_0^{T-t}\frac{-x}{\pi\sqrt{2\pi y}}e^{-y}\int_0^{T-t-y}\frac{e^{-\frac{x^2}{2u}}du}{\sqrt{u^3}\sqrt{t-u-y}}dy + \int_{T-t}^{+\infty}\frac{-x}{\sqrt{2\pi u^3}}\exp(-\frac{x^2}{2u})du & \text{pour} \quad x<0 \\ \int_0^{T-t}dz\frac{x}{\pi\sqrt{2\pi z}}e^{-z}\int_0^{T-t-z}\frac{e^{-\frac{x^2}{2u}+u}du}{\sqrt{u^3}\sqrt{t-u}} + e^{-(T-t)}\int_{T-t}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi u^3}}\exp(-\frac{x^2}{2u})du & \text{pour} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Démonstration : Nous voulons calculer $E(\exp - \int_0^t 1_{W_s > l} ds)$. Considérons tout d'abord le cas où $l > 0$. Nous remarquons que

$$\int_0^t 1_{W_s > l} ds = \begin{cases} 0 \text{ si } t < T_l \\ \int_{T_l}^t 1_{W_s - W_{T_l} > 0} ds \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Or la loi de $\int_{T_l}^t 1_{W_s - W_{T_l} > 0} ds$ est égale à la loi de $\int_0^{t-T_l} 1_{\widehat{W}_u > 0} du = \widehat{A}^+_{t-T_l}$ où $\widehat{W}$ est un mouvement brownien indépendant de T_l. Par conséquent pour $x < t$

$$\begin{aligned} P((\int_0^t 1_{W_s > l} ds) \in dx) &= \int_0^t \frac{l}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{l^2}{2u}) P(\widehat{A}^+_{t-u} \in dx) du + \delta_0(dx) P(T_l > t) \\ &= \int_0^t \frac{l}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{l^2}{2u}) \frac{dx}{\pi \sqrt{x(t-u-x)}} du 1_{x < t-u} + \delta_0(dx) P(T_l > t) \\ &= \frac{l}{\pi \sqrt{2\pi x}} \int_0^{t-x} \frac{e^{-\frac{l^2}{2u}} du}{\sqrt{u^3} \sqrt{t-u-x}} dx + \delta_0(dx) P(T_l > t). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E(\exp - \int_0^t 1_{W_s > l} ds) &= \int_0^t \exp(-x) P(\int_0^t 1_{W_s > l} ds \in dx) \\ &= \int_0^t \frac{l}{\pi \sqrt{2\pi x}} e^{-x} \int_0^{t-x} \frac{e^{-\frac{l^2}{2u}} du}{\sqrt{u^3} \sqrt{t-u-x}} dx + \int_t^{+\infty} \frac{l}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{l^2}{2u}) du \end{aligned}$$

et pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} \psi(t, T, x) &= E(\exp(-\int_0^{T-t} 1_{W_s + x > 0} ds) \\ &= \int_0^{T-t} \frac{-x}{\pi \sqrt{2\pi y}} e^{-y} \int_0^{T-t-y} \frac{e^{-\frac{x^2}{2u}} du}{\sqrt{u^3} \sqrt{t-u-y}} dy + \int_{T-t}^{+\infty} \frac{-x}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{x^2}{2u}) du. \end{aligned}$$

Dans le cas où $l < 0$, nous remarquons que

$$\int_0^t 1_{W_s > l} ds = \begin{cases} t \text{ si } t < T_l \\ T_l + \int_{T_l}^t 1_{W_s - W_{T_l} > 0} ds \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme précédemment la loi de $\int_{T_l}^t 1_{W_s - W_{T_l} > 0} ds$ est égale à la loi de $\int_0^{t-T_l} 1_{\widehat{W}_u > 0} du = \widehat{A}^+_{t-T_l}$ où $\widehat{W}$ est un mouvement brownien indépendant de T_l. D'où pour $x \le t$,

$$\begin{aligned} P(\int_0^t 1_{W_s > l} ds \in dx) &= \int_0^t \frac{-l}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{l^2}{2u}) P(u + \widehat{A}^+_{t-u} \in dx) du + \delta_t(dx) P(T_l > t) \\ &= \int_0^t \frac{-l}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{l^2}{2u}) \frac{dx}{\pi \sqrt{(x-u)(t-x)}} du 1_{u < x} + \delta_t(dx) P(T_l > t). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} E(\exp - \int_0^t 1_{W_s > l} ds) &= \int_0^t \exp(-x) P(\int_0^t 1_{W_s > l} ds \in dx) \\ &= \int_0^t e^{-x} dx \int_0^x \frac{-l}{\pi \sqrt{2\pi u^3}} \frac{e^{-\frac{l^2}{2u}} du}{\sqrt{x-u} \sqrt{t-x}} + e^{-t} \int_t^{+\infty} \frac{-l}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{l^2}{2u}) du \end{aligned}$$

et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \psi(t, T, x) &= E(\exp(-\int_0^{T-t} 1_{W_s + x > 0} ds) \\ &= \int_0^{T-t} \frac{x}{\pi \sqrt{2\pi}} e^{-y} \int_0^y \frac{e^{-\frac{x^2}{2u}} du}{\sqrt{u^3} \sqrt{y-u} \sqrt{t-y}} dy + e^{-(T-t)} \int_{T-t}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{x^2}{2u}) du \\ &= \int_0^{T-t} dz \frac{x}{\pi \sqrt{2\pi z}} e^{-z} \int_0^{T-t-z} \frac{e^{-\frac{x^2}{2u} + u} du}{\sqrt{u^3} \sqrt{t-u}} + e^{-(T-t)} \int_{T-t}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi u^3}} \exp(-\frac{x^2}{2u}) du. \end{aligned}$$

■

Nous avons montré précédemment que le $\mathcal{G}_T-$marché était complet lorsque l'on dispose des actifs du $\mathcal{F}_T-$marché et d'un zéro-coupon et nous avons donné la forme du portefeuille de couverture. Dans le cas particulier où le processus $\gamma(x) = x^2$, nous pouvons calculer explicitement les coefficients du portefeuille dans le cas d'un call européen soumis au défaut, c'est-à-dire si nous prenons comme actif contingent $X = (S_T - K)_+$.

Pour simplifier les calculs, nous prendrons $S_t = \exp(W_t)$. D'après le théorème 9.16 il nous faut calculer la décomposition des martingales

$$m_t = E(\exp - \int_0^T \gamma(s, W_s)ds)/\mathcal{F}_t)$$

et

$$m_t^X = E(X \exp - \int_0^T \gamma(s, W_s)ds)/\mathcal{F}_t).$$

Les calculs précédents nous donnent la décomposition de m_t, il nous reste donc à calculer m_t^X.

Nous remarquons que $m_t^X = e^{-\Gamma_t}\psi^X(t,T,W_t)$ où $\psi^X(t,T,x) = E_x[(e^{\widehat{W}_{T-t}} - K)_+ e^{\int_0^{T-t}(\widehat{W}_s)^2 ds}]$ où $\widehat{W}$ est un mouvement brownien partant de x. En utilisant le même changement de probabilité que pour calculer m_t, nous obtenons

$$\psi^X(t,T,x) = E^{(\sqrt{2})}[(e^{\widehat{W}_{T-t}} - K)_+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(\left|\widehat{W_{T-t}}\right|^2 - x^2 - (T-t))}).$$

Or sous $\mathbb{P}^{(\sqrt{2})}$, $\widehat{W}_{T-t}$ est une variable gaussienne de moyenne $m = e^{-b(T-t)}x$ et de variance $v^2 = \frac{1-e^{-2b(T-t)}}{2b}$ où $b = \sqrt{2}$.

D'où

$$\begin{aligned}
\psi^X(t,T,x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(e^y - K)_+ e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(y^2 - x^2 - (T-t))} e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}v} \\
&= \int_{\ln K}^{+\infty}(e^y - K) e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(y^2 - x^2 - (T-t))} e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}v} \\
&= \int_{\ln K}^{+\infty} e^y e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(y^2 - x^2 - (T-t))} e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}v} \\
&\quad - \int_{\ln K}^{+\infty} K e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(y^2 - x^2 - (T-t))} e^{-\frac{(y-m)^2}{2v^2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}v} \\
&= A(x) + W(x).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
A(x) &= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 - (T-t)) - \frac{m^2(\sigma^2 v^2 - 1)}{v^4 c^2}} \int_{\ln K}^{+\infty} e^{y - (cy - \frac{m}{vc})^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}v} \\
&= e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 - (T-t)) - \frac{m^2}{v} + \frac{(2m+v^2)^2}{4v^2c^2}} \int_{\ln K}^{+\infty} e^{-(cy - \frac{2m+v^2}{2v^2 c})^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}v}
\end{aligned}$$

et

$$W(x) = -Ke^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 - (T-t)) - \frac{m^2(v^2c^2 - 1)}{v^4 c^2}} \int_{\ln K}^{+\infty} e^{-(cy - \frac{m}{v^2 c})^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}v}.$$

où $c = \sqrt{\frac{1}{2v^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$. Par conséquent

$$\frac{\partial \psi^X(t,T,x)}{\partial x} = \frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial W(x)}{\partial x}$$

où

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A(x)}{\partial x} &= A(x)[\sqrt{2}x - 2x\frac{e^{-2\sqrt{2}(T-t)}}{v^2c^2} + \frac{(2m+v^2)e^{-\sqrt{2}(T-t)}}{v^4c^2}] \\
&\quad + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-(T-t))-\frac{m^2}{v^2}+\frac{(2m+v^2)^2}{4v^4c^2}} \int_{\ln K}^{+\infty} 2\frac{e^{-\sqrt{2}(T-t)}}{v^2c}(cy - \frac{2m+v^2}{2v^2c})e^{-(cy-\frac{2m+v^2}{2v^2c})^2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}v} \\
&= A(x)[\sqrt{2}x - 2x\frac{e^{-2\sqrt{2}(T-t)}}{v^2c^2} + \frac{(2m+v^2)e^{-\sqrt{2}(T-t)}}{v^4c^2}] \\
&\quad + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-(T-t))-\frac{m^2}{v^2}+\frac{(2m+v^2)^2}{4v^4c^2}-\sqrt{2}(T-t)-(c\ln k-\frac{2m+v^2}{2v^2c})^2} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}v^3c^2} \\
&= A(x)[\sqrt{2}x - 2x\frac{e^{-2\sqrt{2}(T-t)}}{v^2c^2} + \frac{(2m+v^2)e^{-\sqrt{2}(T-t)}}{v^4c^2}] \\
&\quad + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-3(T-t))-\frac{m^2}{v^2}-c^2\ln^2 K+2\ln K*\frac{2m+v^2}{2v^2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}v^3c^2}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial W(x)}{\partial x} &= W(x)[\sqrt{2}x - 2xe^{-2\sqrt{2}(T-t)}\frac{(v^2c^2-1)}{v^4c^2}] \\
&\quad - Ke^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-(T-t))-\frac{m^2(v^2c^2-1)}{v^4c^2}} \int_{\ln K}^{+\infty} 2\frac{e^{-\sqrt{2}(T-t)}}{v^2c}(cy - \frac{m}{v^2c})e^{-(cy-\frac{m}{vc})^2}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}v} \\
&= W(x)[\sqrt{2}x - 2xe^{-2\sqrt{2}(T-t)}\frac{(v^2c^2-1)}{v^4c^2}] \\
&\quad - Ke^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-(T-t))-\frac{m^2(v^2c^2-1)}{v^4c^2}-\sqrt{2}(T-t)-(c\ln K-\frac{m}{v^2c})^2} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}v^3c^2} \\
&= W(x)[\sqrt{2}x - 2xe^{-2\sqrt{2}(T-t)}\frac{(v^2c^2-1)}{v^4c^2}] - Ke^{\frac{\sqrt{2}}{2}(x^2-3(T-t))-\frac{m^2}{v^2}-c^2\ln^2 K+2\ln K*\frac{m}{v^2}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}v^3c^2}.
\end{aligned}
$$

D'où $dm_t^X = \frac{\partial\psi^X(t,T,W_t)}{\partial x}dW_t$ et

$$
1_{T<\tau}(S_T-K)_+ = h + \int_0^T L_u(\frac{\partial\psi^X(t,T,W_t)}{\partial x} - \frac{m_u^X}{m_u}\frac{\partial\psi(t,T,W_t)}{\partial x})\frac{d(RS)_u}{\sigma R_u S_u} + \int_0^T \frac{m_u^X}{m_u}dR_u\rho_u.
$$

Bibliographie

[1] Ansel J.P., Stricker C. : Lois de martingale, densités et décomposition de Fôllmer-Schweizer, *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 28, 375-392, 1992.

[2] Föllmer H., Schweizer M. : Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information, *Applied Stochastic Analysis, Stochastics Monographs* 5, 389-414, 1991.

[3] Kusuoka S. : A remark on default risk models, *Advances in Mathematical Economics*, 1, 69-82, 1999.

[4] Rogers L.C.G., Williams D. : *Diffusions, Markov processes, and Martingales, Vol 2,* Wiley series in probability and mathematical Statistics, 1990.

[5] Schönbucher P. : Credit Risk Modelling and Credit Derivatives. *Thèse, Université de Bonn.* 2000.

[6] Yor M. : *Some aspect of brownian Motion. Part I : Some recent Martingale Problems,* Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser, 1997.

Chapitre 10

Optimisation

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'optimisation de portefeuille en marché incomplet avec un horizon fixe. Nous pouvons citer les travaux de Karatzas [6] lorsque la dynamique des actifs est continue et Bellamy [1] dans le cas de diffusion mixte.

Notre marché est le marché décrit dans le paragraphe 9.1 du chapitre précédent. Nous considérons un agent dont l'attitude face au risque est caractérisée par une fonction d'utilité U, qui investit de manière autofinançante sa richesse entre les actifs risqués et l'actif sans risque. Nous cherchons à résoudre le problème de maximisation de l'espérance de l'utilité de la richesse.

Nous établissons dans le cadre de ce marché incomplet l'existence d'une unique solution au problème d'optimisation qui coïncide avec la solution du problème d'optimisation en marché complet lorsque les actifs sont dirigés par un mouvement brownien. Nous obtenons que la stratégie optimale détermine une unique martingale mesure équivalente qui coïncide avec la martingale mesure équivalente existant sur le $\mathcal{F}_T$-marché et avec la probabilité de Davis.

En 1989, Hodges et Neuberger [4] ont introduit une méthode de pricing via la fonction d'utilité de l'agent. Des travaux de Rouge et El Karoui [9] pour un marché dirigé par un mouvement brownien en présence de contraintes d'une part, et Collin-Dufresne et Hugonnier [2] lorsqu'en présence d'un risque de défaut d'autre part ont montré l'existence du prix de Hodges . Pour des actifs contingents particuliers et lorsque le temps de défaut τ est indépendant de la filtration $\mathcal{F}_\infty$, nous caractérisons le prix de Hodges à l'aide de la solution d'un problème d'optimisation. De plus, pour une fonction d'utilité exponentielle, nous donnons l'expression explicite du prix de Hodges et nous montrons, que le prix de Davis correspondant s'obtient comme valeur limite du prix de Hodges.

En présence d'un risque de défaut, il apparaît naturel de considérer un problème d'optimisation avec comme horizon le temps de défaut τ. La dernière section est consacrée à l'étude d'un problème d'optimisation avec horizon aléatoire. Ce problème n'est pas exclusivement lié à la présence de défaut. C'est aussi le problème d'un agent qui cherche à optimiser sa richesse à chaque instant. Des travaux dus à Karatzas [7] existent dans le cas d'un marché complet et où l'horizon est un temps d'arrêt pour la filtration des prix. Nous étudions le cas plus général où le temps τ n'est plus forcément un temps d'arrêt. Dans le cas où l'on optimise uniquement la consommation, le problème a été résolu dans [8].

Nous montrons que ce problème revient à résoudre un problème d'optimisation dans le $\mathcal{F}_T-$marché qui est complet. Nous caractérisons la solution de ce problème qui dépend de la loi conditionnelle de τ par rapport à $\mathcal{F}_t$.

10.1 Le modèle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, W un mouvement brownien n-dimensionnel sur cet espace $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \le t)$ et T un réel fixé. Considérons le $\mathcal{F}_T-$marché formé par un actif sans risque S^0 de taux r et de n actifs risqués dont les prix S^i_t sont solutions des équations différentielles

$$dS^i_t = S^i_t(\mu^i_t dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma^{i,j}_t dW^j_t), \; i = 1, ..., n. \tag{10.1}$$

On écrira parfois l'équation (10.1) sous la forme concise

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_t dt + \sigma_t dW_t),$$

où $\mu = \left(\mu^i\right)_i$; $\sigma = (\sigma^{i,j})_{i,j}$.

Soit τ une variable aléatoire positive, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t)$, et M la martingale compensée de $1_{\tau \le t}$. Nous faisons comme dans le chapitre précédent l'hypothèse suivante

$$[\mathbf{HF1}] \begin{cases} i)\ \mathcal{F}_t = \sigma(S_s, s \le t). \\ ii)\ \text{Les processus } \mu,\ r \text{ sont bornés et } \mathcal{F}_t\text{-prévisibles et } r_t \ge 0. \\ iii)\ \text{Le processus à valeurs matricielles } \sigma \text{ est borné,} \\ \quad \text{inversible, d'inverse borné et } \mathcal{F}_t\text{-prévisible.} \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, le $\mathcal{F}_T-$marché est complet et non arbitré. On note $\mathbb{P}^0$ l'unique martingale mesure équivalente et Z^0 sa densité de Radon-Nikodym. Le processus Z^0 vérifie l'équation

$$dZ^0_t = -Z^0_t \theta_t dW_t$$

où $\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t)$. On note $\widetilde{Z}^0_t = Z^0_t R_t$.

Pour résoudre le problème d'optimisation, nous supposons de plus

[HFd] : les coefficients r, μ, σ sont déterministes.

10.2 Optimisation en présence du défaut

10.2.1 Optimisation de la richesse

On considère un $\mathcal{G}_T-$marché formé par des actifs contingents appartenant à $\mathcal{G}_T$, mais où seulement les actifs $(S^i,\ i = 0, ..., n)$ sont négociés. On a montré dans le chapitre 9 que ce marché est incomplet. L'existence de plusieurs m.m.e entraîne une fourchette des prix pour un actif contingent. Cette multitude de prix peut être évitée si l'agent utilise une fonction d'utilité qui caractérise son attitude face au risque. Dans ce cas, on montre que la résolution du problème d'optimisation permet à l'agent de choisir une m.m.e particulière. Comme dans le chapitre 9, nous supposons

$$[\mathbf{HG}] \begin{cases} i) \ (\mathbf{H}) \text{ est vérifiée sous } \mathbb{P} \\ ii) \text{ Le processus } \Lambda \text{ est continu.} \end{cases}$$

Ceci implique que la dynamique des prix s'écrit de manière identique dans la filtration $\mathbb{G}$.

Nous considérons un agent muni d'une fonction d'utilité U. A chaque instant, il investit sa richesse entre l'actif sans risque S^0 et les actifs risqués S_i solution de l'équation (10.1).

Nous notons π_i, $i = 1, ..., n$ la quantité de richesse investie à l'instant t dans l'actif S^i.

Définition 10.1 *: Nous appelons portefeuille tout processus $\mathbb{G}$-prévisible $\pi_t = (\pi_t^i,\ i = 1, ..., n)^T$ vérifiant la condition d'intégrabilité suivante*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^T (\pi_s^i)^2 ds < +\infty \ ,\ p.s.$$

L'agent constitue son portefeuille de manière autofinançante. Si nous notons le processus de richesse associé $(X_t^{\pi,x},\ 0 \leq t \leq T)$, avec $X_0^{\pi,x} = x$, cela implique

$$dX_t^{\pi,x} = X_t^{\pi,x} r_t dt + \pi_t[(\mu_t - r_t)dt + \sigma_t dW_t]. \tag{10.2}$$

Définition 10.2 *: Un portefeuille $(\pi_t,\ 0 \leq t \leq T)$ sera dit admissible si le processus de richesse est positif.*

Soit $A^{\mathbb{G}}(t, x)$ l'ensemble des portefeuilles admissibles dont la richesse vaut x en t. On peut écrire

$$A^{\mathbb{G}}(t,x) = \{\pi_u, t \leq u \leq T, X_t^{\pi} = x,\ \pi \text{ est admissible, } \mathbb{G}\text{−prévisible}\}$$

.

L'attitude de l'agent face au risque est caractérisée par une fonction d'utilité, définie sur $\mathbb{R}_*^+$ et vérifiant les conditions suivantes

$$[\mathbf{H}_{ut}] : \begin{cases} i) \ U \text{ est strictement croissante, strictement concave, de classe } \mathcal{C}^2 \\ ii) \ \lim_{x \to +\infty} U'(x) = 0 \\ iii) \ \lim_{x \to 0} U'(x) = +\infty \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, la fonction U' admet un inverse noté I défini sur $\mathbb{R}_*^+$.

On cherche à résoudre le problème d'optimisation

$$V^{\mathbb{G}}(t,x) = \max_{\pi \in A^{\mathbb{G}}(t,x)} E[U(X_T^{\pi,t,x})].$$

Le lemme suivant donne une propriété de la fonction valeur V.

Lemme 10.3 *: Supposons $[\mathbf{H}_{ut}]$ satisfaite. Alors pour tout t de $[0, T]$, la fonction valeur $V^{\mathbb{G}}$ est croissante et concave en x.*

Démonstration : Elle repose sur le fait que si $x \leq y$, alors $A^{\mathbb{G}}(t,x) \subset A^{\mathbb{G}}(t,y)$ et sur les propriétés de croissance et de concavité de la fonction U. ■

En appliquant le principe de programmation dynamique à la fonction $V^{\mathbb{G}}(t,x)$, on obtient le résultat suivant

Théorème 10.4 *: Si $V^{\mathbb{G}}$ est de classe C^2, la fonction de valeur $V^{\mathbb{G}}$ est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann suivante*

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & \dfrac{\partial V^{\mathbb{G}}(t,x)}{\partial t} + \sup_{\pi\in\mathcal{A}^{\mathbb{G}}(t,x)} A(t,x,\pi) \text{ où} \\ A(t,x,\pi) & = & [xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x^{\mathbb{G}}(t,x) + \frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}^{\mathbb{G}}(t,x) \end{array}\right. \tag{10.3}$$

avec

$$V^{\mathbb{G}}(T,x) \quad = \quad U(x) \tag{10.4}$$

Démonstration : La démonstration est identique à celle faite en marché complet.

Remarque 10.5 *: Si on note $V^{\mathbb{F}}$ la fonction de valeur associée au problème classique d'optimisation dans le $\mathbb{F}_T-$marché, on remarque que la fonction $V^{\mathbb{G}}$ est solution de la même équation d'HJB. Par conséquent, $V^{\mathbb{G}} = V^{\mathbb{F}}$. Ce résultat était prévisible, puisque la dynamique des prix est inchangée sous l'hypothèse **(H)**.*

Cette remarque, ainsi que le théorème nous permettent de caractériser le portefeuille optimal et la richesse optimale qui coïncident avec ceux obtenus en marché complet.

Proposition 10.6 *: Le richesse optimale et le portefeuille optimal sont donnés par*

$$\pi^{\mathbb{G},*}(t,x) = \pi^{\mathbb{F},*}(t,x) = -\sigma_t^{-1}\theta_t \frac{V_x^{\mathbb{F}}(t,x)}{V_{xx}^{\mathbb{F}}(t,x)}$$

et

$$X_t^* = \frac{1}{\widetilde{Z}_t^0} E[\widetilde{Z}_T^0 I(\nu \widetilde{Z}_T^0) \ / \ \mathcal{F}_t]$$

où ν est le multiplicateur de Lagrange qui sature la contrainte $E[\widetilde{Z}_T^0 I(\nu\widetilde{Z}_T^0)] = x$.

Remarque 10.7 *: L'utilisation par l'agent d'une fonction d'utilité U permet de fixer une unique m.m.e sur $\mathcal{G}_T$ qui est la m.m.e $\mathbb{P}^0$ (cf (9.2) pour la définition de $\mathbb{P}^0$ sur $\mathcal{G}_T$).*

10.2.2 Prix de Davis

Nous rappelons la définition du prix de Davis [3] pour une option européenne de flux terminal $X \in \mathcal{G}_T$. Ce prix est donné pour un agent dont la richesse initiale est x et dont l'attitude face au risque est caractérisée par une fonction d'utilité U vérifiant les conditions $\mathbf{H}_{ut}$.

Définition 10.8 *: Nous notons $F(\delta,x,p) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}^{\mathbb{G}}(x)} E[U(X_T^{\pi,x-\delta} + \frac{\delta}{p}X)]$, où $\mathcal{A}^{\mathbb{G}}(x)$ est l'ensemble des portefeuilles admissibles, quand la richesse initiale est égale à x. Nous supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) $\forall(x,p)$ la fonction $\delta \rightarrow F(\delta,x,p)$ est différentiable en $\delta = 0$

ii) $\exists!\ \widetilde{p}(x)$ / $\frac{\partial F}{\partial \delta}(0,\widetilde{p},x) = 0$

Alors $\widetilde{p}(x)$ est le prix de Davis en $t = 0$.

Nous rappelons deux résultats de Davis [3] qui donne une caractérisation de $\widetilde{p}(x)$.

Proposition 10.9 *: Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

i) Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, la fonction de valeur $V^{\mathbb{G}}(0,x)$ est dérivable par rapport à x.

ii) $V_x^{\mathbb{G}}(0,x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Alors $\widetilde{p}(x) = \dfrac{E(U'(X_T^{\pi^*,x})X)}{V_x^{\mathbb{G}}(0,x)}$ où π^* est le portefeuille optimal.

Proposition 10.10 *: Dans un marché incomplet dirigé par un mouvement brownien d-dimensionnel.*

1) Il existe une unique martingale mesure équivalente $\mathbb{P}^u$ équivalente à $\mathbb{P}$ et un processus β tels que

$$\widetilde{p}(x) = E_{\mathbb{P}^u}[\exp(-\int_0^T \beta_s ds)X].$$

2) $\mathbb{P}^u$ et le taux d'actualisation β ne dépendent pas de l'actif contingent X ; ils ne dépendent que de la fonction de valeur et de la richesse initiale.

Dans notre contexte, nous montrons que la probabilité $\mathbb{P}^u$ coïncide avec la probabilité $\mathbb{P}^0$.

Proposition 10.11 *: i) La martingale mesure équivalente $\mathbb{P}^u$ coïncide avec la probabilité $\mathbb{P}^0$.*
ii) Si la fonction $V^{\mathbb{G}}$ est C^3, le coefficient d'actualisation coïncide avec le taux sans risque r et on a

$$\widetilde{p}(x) = E_{\mathbb{P}^0}[\exp(-\int_0^T r_s ds)X]. \tag{10.5}$$

Démonstration : i) D'après le paragraphe précédent, le portefeuille optimal associé au $\max_\pi E[U(X_T)]$ est donné par

$$\pi^{\mathbb{G},*}(t,x) = -\sigma_t^{-1}\theta_t \frac{V_x^{\mathbb{G}}(t,x)}{V_{xx}^{\mathbb{G}}(t,x)}$$

Définissons la fonction k par

$$k(t,x) = \ln V_x^{\mathbb{G}}(t,x).$$

avec cette définition, nous avons

$$\widetilde{p}(x) = e^{-k(0,x)}E[e^{k(T,X_T^*)}X].$$

La formule d'Itô nous permet d'écrire

$$\exp(k(T,X_T^*) - k(0,x)) = \mathcal{E}(\frac{\partial k}{\partial x}\pi^*\sigma W)_T \exp(-\int_0^T \beta_t dt)$$

où

$$\beta_t = -\frac{\partial k(t,X_t^*)}{\partial t} - (\pi_t^*(\mu_t - r_t) + X_t^* r_t)\frac{\partial k(t,X_t^*)}{\partial x} - \frac{1}{2}(\pi_t^*\sigma_t)^2[\frac{\partial^2 k(t,X_t^*)}{\partial x^2} + (\frac{\partial k(t,X_t^*)}{\partial x})^2]. \tag{10.6}$$

Comme $\pi^{\mathbb{G},*}(t,x) = -\sigma_t^{-1}\theta_t\frac{V_x^{\mathbb{G}}(t,x)}{V_{xx}^{\mathbb{G}}(t,x)}$, il en résulte par définition de k, que

$$\frac{\partial k}{\partial x}\pi^*\sigma = -\theta.$$

Par conséquent,

$$\widetilde{p}(x) = E[\mathcal{E}(-\theta W)_T \exp(-\int_0^T \beta_t dt)X] = E_{\mathbb{P}^0}[\exp(-\int_0^T \beta_t dt)X].$$

ii) La fonction $V^{\mathbb{G}}$ est solution de l'équation

$$0 = \frac{\partial V^{\mathbb{G}}(t,x)}{\partial t} + [xr_t + \pi_t^*(\mu_t - r_t)]V_x^{\mathbb{G}}(t,x) + \frac{1}{2}(\pi_t^*)^2\sigma_t^2 V_{xx}^{\mathbb{G}}(t,x).$$

Sous l'hypothèse qu'elle est C^3, en dérivant par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= e^{k(t,x)}\{\frac{\partial k(t,x)}{\partial t} + (\pi_t^*(\mu_t - r_t) + xr_t)\frac{\partial k(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\pi_t^*\sigma_t)^2[\frac{\partial^2 k(t,x)}{\partial x^2} + (\frac{\partial k(t,x)}{\partial x})^2] \\ &\quad + r_t + \frac{\partial \pi^*(t,x)}{\partial x}[(\mu_t - r_t) + \pi_t^*{\sigma_t}^2\frac{\partial k(t,x)}{\partial x}]. \end{aligned}$$

Comme le portefeuille optimal est solution de

$$(\mu_t - r_t) + \pi_t^*\sigma_t^2 V_{xx}^{\mathbb{G}} = (\mu_t - r_t) + \pi_t^*{\sigma_t}^2\frac{\partial k(t,x)}{\partial x} = 0$$

Ainsi , $r_t = \beta_t$.

10.2.3 Prix de Hodges

Hodges et Neuberger [4] ont introduits une autre notion de pricing via la fonction d'utilité d'un agent. Nous rappelons la définition du prix de Hodges. Comme précédemment on note U une fonction d'utilité vérifiant les conditions $(\mathbf{H}_{ut})$.

Définition 10.12 *: On appelle prix de Hodges le réel $p(x,X)$ tel que*

$$p(x,X) = \inf\{p \geq 0, \max_\pi E[U(X_T^{x,\pi})] \leq \max_\pi E[U(X_T^{x+p,\pi} - X)]\}.$$

Ce prix correspond au prix auquel il faut acheter l'actif contingent X pour que le problème d'optimisation de richesse partant d'une richesse initiale $x+p$ et où l'on livre l'actif X en T soit identique au problème d'optimisation de richesse.

Dans le cas où l'actif X est la payoff d'un zéro-coupon avec défaut de maturité T et où τ est indépendant de $\mathcal{F}_\infty$, on peut donner une caractérisation du prix de Hodges.
Notons $V^H(0,y) = \max_\pi E[U(X_T^{y,\pi} - X)]$ et F la fonction de répartition de τ. On remarque

$$E[U(X_T^{y,\pi} - X)] = (1 - F_T)E[U(X_T^{y,\pi} - 1)] + F_T E[U(X_T^{y,\pi})].$$

Si on note $v(x) = (1 - F_T)U(x-1) + F_T U(x)$, la fonction v vérifie les conditions $(\mathbf{H}_{ut})$. Par conséquent chercher $V^H(0,y)$ revient à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\max_\pi E[v(X_T^y)].$$

D'après les résultats du paragraphe 10.2.1, la fonction V^H est solution de l'équation d'HJB suivante

$$\begin{cases} 0 &= \dfrac{\partial V^H(t,x)}{\partial t} + \sup_{\pi \in \mathcal{A}^{\mathbb{G}}(t,x)} A(t,x,\pi) \text{ où} \\ A(t,x,\pi) &= [xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x^H(t,x) + \frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}^H(t,x) \end{cases} \qquad (10.7)$$

avec

$$V^H(T,x) = v(x). \tag{10.8}$$

On peut maintenant caractériser le prix de Hodges, et le calculer dans un cas particulier.

Proposition 10.13 *: Il existe un unique réel $p(x,X)$ tel que*

$$V^H(0,x+p) = V^{\mathbb{G}}(0,x).$$

C'est le prix de Hodges de l'actif contingent X.

Démonstration : D'après le lemme 10.3, la fonction $p \mapsto V^H(0,x+p)$ est croissante, C^2 et vérifie $\lim_{p\to+\infty} V^H(0,x+p) = +\infty$. De plus, comme $V^H(T,x) \leq V^{\mathbb{G}}(T,x)$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure à l'existence de $p(x,X)$. ■

Lorsque U est une fonction exponentielle, il est possible d'obtenir une expression explicite du prix de Hodges pour un zéro-coupon.

Proposition 10.14 *Si $U(x) = \exp(-\gamma x), r = 0,$ et $X = 1_{T<\tau}$,alors*

$$p(x,X) = \frac{1}{\gamma}\ln(e^\gamma(1-F_T)+F_T).$$

Démonstration : On cherche p tel que

$$\max_\pi E[U(X_T^{x,\pi})] = \max_\pi E[U(X_T^{x+p,\pi} - H)]. \tag{10.9}$$

Des résultats classiques donnent $\max_\pi E[U(X_T^{x,\pi})] = e^{-\gamma x}$.
De plus,

$$\begin{aligned} E[U(X_T^{x+p,\pi} - 1_{T<\tau})] &= E[1_{T<\tau}e^\gamma U(X_T^{x+p,\pi}) + 1_{T\geq\tau}U(X_T^{x+p,\pi})] \\ &= (1-F_T)e^\gamma E[U(X_T^{x+p,\pi})] + F_T E[U(X_T^{x+p,\pi})]. \end{aligned}$$

Par conséquent, on cherche à maximiser $E[U(X_T^{x+p,\pi})]((1-F_T)e^\gamma + F_T)$. La solution est $((1-F_T)e^\gamma + F_T)e^{-\gamma(x+p)}$. Par conséquent, l'égalité (10.9) devient

$$e^{-\gamma x} = ((1-F_T)e^\gamma + F_T)e^{-\gamma(x+p)}.$$

D'où

$$p(x,X) = \frac{1}{\gamma}\ln(e^\gamma(1-F_T)+F_T).$$

On peut remarquer que si $F_T = 0$, i.e si le défaut n'arrive jamais avant T. Le prix de hodges est dans ce cas un. Ceci resulte du fait que l'actif X est le payoff d'un zéro-coupon de maturité T. Par conséquent il est duplicable dans le $\mathcal{F}_T-$marché et son prix vaut un (car $r = 0$).
Dans [9], les auteurs lient le prix de Hodges pour une fonction d'utilité exponentielle au prix de Davis par la relation suivante

$$\widetilde{p}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} p(\varepsilon\gamma, X).$$

Dans le contexte particulier précédent, le prix de Davis de l'actif $1_{T<\tau}$ est d'après l'expression (10.5)

$$\widetilde{p}(x) = E_{\mathbb{P}^0}[1_{T<\tau}] = 1 - F_T$$

car τ est indépendant de $\mathcal{F}_\infty$ sous $\mathbb{P}^0$ et de même loi que sous $\mathbb{P}$. Or

$$1 - F_T = \lim_{\varepsilon \to 0} p(\varepsilon\gamma, X) = \lim_{\gamma \to 0} \frac{1}{\gamma} \ln(e^\gamma(1 - F_T) + F_T).$$

Remarque 10.15 *Le cas où l'actif contingent est de la forme $X = h1_{\tau \leq T}$ où h est une constante positive, se traite de manière identique.*

10.3 Optimisation avec un horizon aléatoire

Lors de la présence d'un temps aléatoire τ, on peut aussi se poser le problème d'optimisation suivant. Comment un agent qui investit dans le $\mathcal{F}_T-$marché, c'est-à-dire qui construit son portefeuille avec des processus $\mathbb{F}-$adaptés peut-il optimiser l'espérance de l'utilité de sa richesse jusqu'à un horizon aléatoire ? On note comme précédemment U une fonction d'utilité vérifiant les hypothèses $[\mathbf{H}_{ut}]$ et $A^{\mathbb{F}}(t,x) = \{\pi_u, t \leq u \leq T, X_t^\pi = x, \pi$ est admissible, $\mathbb{F}-$prévisible$\}$. La dynamique de processus de richesse est identique à celle de l'équation (10.2) en prenant des processus π $\mathbb{F}-$prévisibles.
Notre problème d'optimisation s'écrit

$$V(x) = \sup_{\pi \in A^{\mathbb{F}}(0,x)} E[U(X_{\tau \wedge T}^{\pi;x})\ ],$$

c'est-à-dire que l'agent n'investit que jusqu'en τ.
En notant $F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t \ / \ \mathcal{F}_t)$, on peut récrire le problème comme suit

$$V(x) = \sup_{\pi \in A^{\mathbb{F}}(0,x)} E[\int_0^\infty U(X_{t\wedge T}^{\pi,x})dF_t] = \sup_{\pi \in A^{\mathbb{F}}(0,x)} E[\int_0^T U(X_u^{\pi,x})dF_u + U(X_T^{\pi,x})(1 - F_T)],$$

Nous faisons les hypothèses supplémentaires
[Hac] : Le processus $F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t \ / \ \mathcal{F}_t)$ est croissant et absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue de densité égale à f.
Le lemme suivant donne une propriété de la fonction valeur V.

Lemme 10.16 *: Supposons $[\mathbf{H}_{ut}]$ et $[\mathbf{Hac}]$ satisfaites. Alors pour tout t de $[0,T]$, la fonction valeur V est croissante et concave en x.*

Démonstration : Elle repose sur le fait que si $x \leq y$, alors $A^{\mathbb{F}}(t,x) \subset A^{\mathbb{F}}(t,y)$ et sur les propriétés de croissance et de concavité de la fonction U. ∎

Remarque 10.17 *: Aussi curieux que cela puisse paraître, ce problème est plus complexe que le problème suivant*

$$\sup_{\pi,c} E \int_0^\tau u(s, c_s) ds$$

où l'on optimise sur les portefeuilles π et les processus de consommation c. En effet, on peut transformer le problème en horizon aléatoire en un problème en horizon infini comme suit.

$$E\int_0^\tau u(s,c_s)ds = E\int_0^\infty dF_t \int_0^t u(s,c_s)ds = E\int_0^\infty u(s,c_s)(1-F_s)ds.$$

Le problème revient à résoudre

$$\sup_{\pi,c} E\int_0^\tau \widetilde{u}(s,c_s)ds$$

avec $\widetilde{u}(t,c,\omega) = u(c)(1-F_t(\omega))$. La contrainte de budget s'écrit donc

$$E[\int_0^{+\infty} \widetilde{K}_s c_s ds] = x. \tag{10.10}$$

Par conséquent par un raisonnement classique avec les multiplicateurs de Lagrange,on obtient

$$c_t^* = I(\frac{v\widetilde{K}_t}{1-F_t})$$

où v sature la contrainte $E[\int_0^\infty \widetilde{K}_s I(\frac{v\widetilde{K}_s}{1-F_s})ds]$. On peut vérifier facilement que le processus c^* défini précédemment est optimal. En effet, pour toute consommation c vérifiant(10.10) en utilisant la concavité de u

$$\begin{aligned} E\int_0^{+\infty} ds(1-F_s)(u(c_s)-u(c_s^*)) &\leq E\int_0^{+\infty} ds(1-F_s)(c_s-c_s^*)\frac{v\widetilde{K}_s}{1-F_s} \\ &\leq vE\int_0^{+\infty} ds(c_s-c_s^*)\widetilde{K}_s = 0 \end{aligned}$$

sous la contrainte (10.10).

10.3.1 Cas où f est déterministe

On peut récrire le problème en faisant apparaître la densité conditionnelle de τ par rapport à $\mathcal{F}_\infty$. On a

$$V(x) = \sup_{\pi\in A^{\mathbb{F}}(0,x)} E[\int_0^\infty f(t)U(X_{t\wedge T}^{\pi,x})dt],$$

et

$$V(t,x) = \sup_{\pi\in A^{\mathbb{F}}(t,x)} E[\int_t^\infty f(u)U(X_{u\wedge T}^{t,x})du]. \tag{10.11}$$

En appliquant le principe de programmation dynamique à la fonction V, on obtient que V est solution d'une équation d'HJB

Théorème 10.18 *i) Si* [**Hac**] *est vérifiée et V est de classe C^2, $T=+\infty$, la fonction de valeur V est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann suivante*

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& f_t U(x) + (\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sup_{\pi\in\mathcal{A}^{\mathbb{F}}(t,x)} A(t,x,\pi)) \text{ où} \\ A(t,x,\pi) &=& [xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x(t,x) + \frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}(t,x) \end{array}\right. \tag{10.12}$$

avec

$$\begin{array}{lcl} V(T^1,x) & = & 0 \text{ si } f(t)=0 \ \forall t \geq T^1 \\ \lim_{t\to+\infty} V(t,x) & = & 0 \text{ sinon} \end{array} \tag{10.13}$$

où V_x (resp. V_{xx}) représente la dérivée première par rapport à la seconde variable (resp. la dérivée seconde).

ii) Si [**Hac**] *est vérifiée et V est de classe C^2, $T < +\infty$, la fonction de valeur V est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann suivante*

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & f_t U(x) + (\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sup_{\pi\in\mathcal{A}^{\mathbb{F}}(t,x)} A(t,x,\pi)) \text{ où} \\ A(t,x,\pi) & = & [xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x(t,x) + \frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}(t,x) \end{array}\right. \tag{10.14}$$

avec

$$V(T,x) \quad = \quad U(x)(1-F(T)). \tag{10.15}$$

iii) Le portefeuille optimal est donné par la relation suivante

$$\pi_t = -\sigma_t^{-1}\theta_t \frac{V_x(t,x)}{V_{xx}(t,x)}. \tag{10.16}$$

Démonstration : i) Le principe de programmation dynamique permet d'écrire

$$V(t,x) = \sup_{\pi\in\mathcal{A}^{\mathbb{F}}(t,x)} E(\int_t^{t+h} f(u)U(X_u^{t,x})du + V(t+h, X_{t+h}^{t,x})). \tag{10.17}$$

En écrivant la formule d'Itô entre $V(t+h, X_{t+h})$ et $V(t,x)$, il vient

$$\begin{array}{l} [V(t+h, X_{t+h}^{t,x}) - V(t,x)] \\ = \int_t^{(t+h)} \{ \dfrac{\partial V(s, X_s^{t,x})}{\partial s} ds + V_x(s, X_s^{t,x}) dX_s + \frac{1}{2} V_{xx}(s, X_s^{t,x}) \pi_s^2 \sigma_s^2 ds. \end{array}$$

En utilisant la dynamique de la richesse donnée en (10.2)

$$\begin{array}{l} V(t+h, X_{t+h}^{t,x}) - V(t,x) \\ \quad = \int_t^{(t+h)} \{ \dfrac{\partial V(s, X_s^{t,x})}{\partial s} + V_x(s, X_s^{t,x})(X_s^{t,x} r_s + \pi_s(\mu_s - r_s)) + \frac{1}{2} V_{xx}(s, X_s^{t,x}) \pi_s^2 \sigma_s^2 \} ds \\ \quad + \int_t^{(t+h)} V_x(s, X_s^{t,x}) \pi_s \sigma_s dW_s. \end{array}$$

En supposant que $\int_t^{t+h} V_x(s, X_s^{t,x})\pi_s\sigma_s dW_s$ est une martingale, nous obtenons en utilisant l'inégalité (10.17) avec une égalité pour le portefeuille optimal

$$\begin{array}{lcl} 0 & \geq & E[\int_t^{t+h} f(u)U(X_u^{t,x})du + \\ & & \int_t^{(t+h)} \{ \dfrac{\partial V(s, X_s^{t,x})}{\partial s} + V_x(s, X_s^{t,x})(X_s^{t,x} r_s + \pi_s(\mu_s - r_s)) + \frac{1}{2} V_{xx}(s, X_s^{t,x}) \pi_s^2 \sigma_s^2 \} ds. \end{array}$$

Par conséquent, nous obtenons en divisant par h et en prenant la limite quand h tend vers zéro

$$0 \quad \geq \quad f(t)U(x) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + [xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x(t,x) + \frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}(t,x).$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tous les portefeuilles admissibles avec égalité à l'optimalité, il s'ensuit

$$0 \quad = \quad f(t)U(x) + \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sup_{\pi \in \mathcal{A}(t,x)}\{[xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x(t,x) + \tfrac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}(t,x)\}.$$

L'égalité (10.11) impose

$$\begin{aligned} V(T,x) &= 0 \text{ si } f(t) = 0 \ \forall t \geq T \\ \lim_{t\to+\infty} V(t,x) &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

ii) Si $T < \infty$, la fonction $V(t,x)$ s'écrit

$$V(t,x) = \max\{\int_t^T dsf(s)U(X_{s\wedge T}^{t,x}) + (1 - F(T))U(X_T^{t,x})\}. \tag{10.18}$$

La suite de la démonstration est identique au i).
La condition (10.15) provient de l'égalité (10.18)
iii) L'équation

$$(\mu_t - r_t)V_x(t,x) + \pi\sigma_t^2 V_{xx}(t,x) = 0$$

admet une unique solution en la variable π notée π^* qui vérifie $\pi^*(t,x) = -\sigma_t^{-1}\theta_t\dfrac{V_x(t,x)}{V_{xx}(t,x)}$. Comme la fonction V est concave en la seconde variable, cette valeur correspond à un maximum de la fonction $A(t,x,\pi)$. Il faut vérifier que le portefeuille $\pi^*(t, X_t^{x,\pi^*})$ est admissible, c'est-à-dire que la richesse associée est positive. Il n'est pas facile de montrer ce résultat en toute généralité. On le vérifiera uniquement sur les exemples que l'on résout explicitement dans le paragraphe suivant. ■

Dans des cas particuliers, on peut résoudre le problème d'optimisation directement en exhibant le processus de richesse optimal.

Théorème 10.19 *: S'il existe une fonction ν déterministe vérifiant $I(\nu(0)) = x$ telle que le processus $H_t^0 I(\nu(t)H_t^0)$ est une $\mathbb{F}-$martingale, alors le processus X^* défini par $X_t^* = I(\nu(t)H_t^0)$ est optimal et le portefeuille π^* vérifie*

$$\pi^*(t, X_t^*) = -I'(\nu(t)H_t^0)\nu(t)H_t^0\theta_t.$$

Démonstration : Soit X un processus de richesse de valeur initiale x, alors la concavité de la fonction U entraîne

$$E[U(X_\tau) - U(X_\tau^*)] \leq E[(X_\tau - X_\tau^*)U'(X_\tau^*)].$$

Or $E[(X_\tau - X_\tau^*)U'(X_\tau^*)] = E[\int_0^\infty f(t)(X_t - X_t^*)\nu(t)H_t^0 dt] = \int_0^\infty dtf(t)\nu(t)E[(X_t - X_t^*)H_t^0] = 0$, car H^0X et H^0X^* sont des martingales de même valeur initiale x. Le portefeuille est obtenu en appliquant la formule d'Itô au processus $I(\nu(t)H_t^0)$ et en identifiant les termes en dW. ■

Pour appliquer ce résultat, il reste à déterminer les conditions d'existence d'une telle fonction ν. Nous montrons que les seules fonctions d'utilité qui vérifient cette condition sont la fonction ln ou une fonction puissance, et la fonction exponentielle lorsque le taux r est nul.
En effet, la formule d'Itô appliqué au processus $H_t^0 I(\nu(t)H_t^0)$ pour une fonction υ déterministe donne

$$\begin{aligned} dH_t^0 I(\nu(t)H_t^0) \quad &= \quad H^0[\nu(t)H_t^0 I'(\nu(t)H_t^0) - \nu(t)\theta_t]dW_t \\ &+ \quad \{-r_t H_t^0 I(\nu(t)H_t^0) + (I'(\nu(t)H_t^0)(\nu(t)(H_t^0)^2(\theta_t^2 - r_t) + (H_t^0)^2\nu(t)') + \tfrac{1}{2}\nu(t)^2(H_t^0)^3\theta_t^2 I''(\nu(t)H \end{aligned}$$

La condition de martingale implique, après simplification par H^0, en posant $z = \nu H^0$

$$-rI(z) + I'(z)z(\theta^2 - r) + \frac{1}{2}z^2\theta^2 I''(z) + I'(z)z\frac{\nu'}{\nu} = 0. \tag{10.19}$$

Cette équation a une solution ν déterministe si et seulement si la fonction I vérifie l'équation suivante

$$-rI(z) + \frac{1}{2}z^2\theta^2 I''(z) = CzI'(z)$$

où C est une constante. Si $r \neq 0$, cette équation est vérifiée uniquement par des fonctions I qui sont des fonctions puissances. Donc ceci donne pour U des fonctions puissances et la fonction log. Si $r = 0$, cette équation est vérifiée uniquement par des fonctions I' qui sont des fonctions puissances. Donc ceci donne pour U des fonctions puissances, la fonction log et la fonction exponentielle.

Si $U(x) = \ln x$, alors $\nu(t) = x$ est solution de (10.19). La richesse optimale vaut $X_t^* = \frac{x}{H_t^0}$Le portefeuille optimale est $\frac{\mu - r}{\sigma^2}X_t^*$.

Si $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ où $0 < \alpha < 1$, alors $\nu(t) = x\exp[-\int_0^t(\theta^2(s) - r(s) + \frac{r(s)}{\beta-1} + \frac{1}{2}(\beta - 2)\theta^2(s))ds]$ où $\beta = \frac{1}{\alpha-1}$ convient.

Pour $U(x) = \exp -x$,si $r = 0$, $\nu(t) = x\exp[-\int_0^t \frac{1}{2}\theta^2(s)ds]$ est solution de (10.19).

10.3.2 Exemples

Pour les exemples classiques de fonctions d'utilité, nous explicitons la fonction de valeur et le portefeuille optimal. Les exemples sont résolus dans le cas où les coefficients μ, r, σ sont constants et où la condition limite est $\lim_{t\to+\infty} V(t,x) = 0$.

Proposition 10.20 *Supposons $U(x) = \ln x, E(\tau) < \infty$ et $f(t) \underset{\infty}{=} o(t^{-2})$. Alors la fonction de valeur et le portefeuille optimal sont donnés par*

$$\begin{aligned} V(t,x) &= p(t) + q(t)\ln x \\ \pi_t^* &= \tfrac{\mu - r}{\sigma^2}X_t^* \end{aligned}$$

où $q(t) = 1 - \int_0^t f(s)ds$, $p(t) = \lambda_2 - at + \int_0^t ads\int_0^s f(u)du$, $a = r + \frac{1}{2}\theta^2$,
$\lambda_2 = \lim_{t\to+\infty}[r + \frac{1}{2}\theta^2]\int_0^t du\{1 - \int_0^u f(s)ds\}$.

Démonstration : On cherche $V(t,x)$ sous la forme $V(t,x) = p(t) + q(t)\ln x$. Le portefeuille optimal vérifie

$$\pi_t^* = -\sigma_t^{-1}\theta_t\frac{V_x(t,X_t^*)}{V_{xx}(t,X_t^*)} = \frac{\mu - r}{\sigma^2}X_t^*.$$

En introduisant cette expression dans l'équation d'HJB (10.12), on obtient une équation pour p et q

$$0 = f(t)\ln x + p'(t) + q'(t)\ln x + q(t)[r + \frac{1}{2}\theta^2].$$

Une condition suffisante et nécessaire pour que cette équation soit vérifiée est

$$\begin{aligned} q'(t) &= -f(t) \\ p'(t) &= -q(t)[r + \tfrac{1}{2}\theta^2]. \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{aligned} q(t) &= \lambda_1 - \int_0^t f(s)ds \\ p(t) &= \lambda_2 - [r + \tfrac{1}{2}\theta^2] \int_0^t du\{\lambda_1 - \int_0^u f(s)ds\}. \end{aligned}$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes. Pour les déterminer, nous utilisons la condition $\lim_{t\to+\infty} V(t,x) = 0$ qui équivaut à $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} q(t) = 0$. Il s'ensuit que $\lambda_1 = \int_0^{+\infty} f(s)ds = 1$ et $\lambda_2 = \lim_{t\to+\infty}[r + \frac{1}{2}\theta^2] \int_0^t du\{1 - \int_0^u f(s)ds\}$. Cette limite est finie si $E(\tau) < \infty$ et $f(t) = o(t^{-2})$. ■

Proposition 10.21 *Supposons* $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ *où* $0 < \alpha < 1$, $(r - \frac{\theta^2}{2(\alpha-1)}) > 0$, *et* $E[e^{(r-\frac{\theta^2}{2(\alpha-1)})\tau}] < \infty$.

i) Alors la fonction de valeur est

$$V(t,x) \quad = \quad q(t)x^\alpha$$

où $q(t) = e^{-at}[\int_t^{+\infty} e^{as} f(s)ds]$, $a = r - \frac{\theta^2}{2(\alpha-1)}$.

ii) Le portefeuille optimal vaut

$$\pi_t^* = -\frac{\mu - r}{(\alpha-1)\sigma^2} X_t^*.$$

Démonstration : On cherche la fonction de valeur $V(t,x) = q(t)U(x)$. L'unique solution de l'équation

$$(\mu - r)V_x(t,x) + \pi\sigma^2 V_{xx}(t,x) = 0$$

est $\pi^*(t,x) = -\frac{\mu-r}{(\alpha-1)\sigma^2}x$. Cette expression nous permet d'obtenir l'équation différentielle suivante vérifiée par q

$$0 = f(t) + q'(t) + q(t)[r - \frac{\theta^2}{2(\alpha-1)}].$$

D'où $q(t) = e^{-at}[\lambda - \int_0^t e^{as} f(s)ds]$. Nous déterminons la constante λ à l'aide de la condition limite qui s'écrit dans ce cas $\lim_{t\to+\infty} q(t) = 0$. D'où $\lambda = \int_0^{+\infty} e^{as} f(s)ds$. ■

Proposition 10.22 *Si* $U(x) = e^{-x}, r = 0$ *et* $E[e^{(\frac{\theta^2}{2})\tau}] < \infty$, *alors la fonction de valeur est donnée par*

$$V(t,x) = p(t)e^{-x}$$

où $p(t) = e^{-at}[\int_t^{+\infty} e^{as} f(s)ds]$ *et* $a = \frac{\theta^2}{2}$.

Le portefeuille optimal est

$$\pi_t^* = \frac{\mu}{\sigma^2}.$$

Démonstration : On pose $V(t,x) = p(t)e^{-x}$. Dans ce cas, le portefeuille optimale vaut

$$\pi_t^* = \frac{\mu}{\sigma^2}.$$

A l'aide de cette expression, l'équation d'HJB (10.12) devient

$$0 = f(t) + p'(t) + p(t)[\frac{\theta^2}{2}].$$

Par conséquent $p(t) = e^{-at}[\lambda - \int_0^t e^{as} f(s)ds]$ et la constante λ est déterminée par $\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0$. ■

Remarque 10.23 *Si la condition au bord est* $V(T^1, x) = 0$ *ou* $V(T,x) = U(x)(1 - F(T))$ *alors la forme de la fonction valeur et le portefeuille optimal sont identiques. Seules changent les constantes et il n'est* *plus nécessaire d'avoir des conditions d'intégrabilité sur f.*

Remarque 10.24 *Dans ces exemples, on remarque que le portefeuille obtenu à l'aide HJB coïncide avec celui obtenu par le théorème 10.19. Par conséquent, la richesse associée est positive car sa valeur actualisée une martingale de valeur terminale positive.*
De plus, le portefeuille et le processus de richesse sont identiques à ceux obtenus en horizon fini T, seule la fonction de valeur est différente. Ceci est une conséquence du fait qu'en horizon fini T, dans ces exemples le portefeuille ne dépend pas de l'horizon T.

10.3.3 Cas où f est stochastique

On reprend la modélisation de f introduite par Martellini [8]pour résoudre le problème d'optimisation avec horizon aléatoire lorsqu'il n'y a que de la consommation. On suppose que f suit la dynamique suivante

$$df_t = f_t(a(t, f_t)dt + b(t, f_t)dW_t), f_0 = y. \tag{10.20}$$

et que l'hypothèse suivante est vérifiée
[HFd1] : les coefficients r, μ, σ, a, b sont déterministes.
Le couple (f, X) est markovien. La fonction valeur V est une fonction dépendant de t, x, y, c'est-à-dire

$$V(t, x, y) = \sup_{\pi \in A(t,x)} E[\int_t^\infty f_u^{t,y} U(X_{u \wedge T}^{t,x})du]$$

En réécrivant le principe de programmation dynamique pour la fonction V nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 10.25 *: i) Si* [**Hac**] *est vérifiée, $T = +\infty$ et V est de classe C^2, la fonction de valeur V est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann suivante*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & yU(x) + (\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sup_{\pi \in \mathcal{A}(t,x)} A(t,x,y,\pi)) \text{ où} \\ A(t,x,y,\pi) & = & [xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x(t,x,y) + \frac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}(t,x,y) \\ & & +V_y(t,x,y)ya_t + V_{xy}(t,x,y)yb_t\pi\sigma_t + \frac{1}{2}V_{yy}(t,x,y)y^2b_t^2 \end{array} \right. \tag{10.21}$$

avec

$$\lim_{t \to +\infty} V(t,x,y) \quad = \quad 0 \tag{10.22}$$

où V_x (resp. V_{xx}) représente la dérivée première par rapport à la seconde variable (resp. la dérivée seconde) et .V_y (resp. V_{yy}) représente la dérivée première par rapport à la troisième variable (resp. la dérivée seconde).
ii) Si [**Hac**] *est vérifiée, $T < +\infty$ et V est de classe C^2, la fonction de valeur V est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellmann (10.21)avec*

$$V(T,x,y) \quad = \quad U(x)E(1 - F_T/f_T = y) \tag{10.23}$$

Démonstration : i) Le principe de programmation dynamique permet d'écrire

$$V(t,x,y) = \sup_{\pi} E(\int_t^{t+h} f_u^{t,y} U(X_u^{t,x})du + V(t+h, X_{t+h}^{t,x}, f_{t+h}^{t,y})). \tag{10.24}$$

La démonstration est identique à celle du théorème 10.18 en tenant compte de la dépendance de V en y et en utilisant la dynamique de f donnée par (10.20).

En écrivant la formule d'Itô entre $V(t+h, X_{t+h})$ et $V(t,x)$, il vient

$$\begin{aligned}
&V(t+h, X_{t+h}^{t,x}, f_{t+h}^{t,y}) - V(t,x,y) \\
&= \int_t^{(t+h)} \frac{\partial V(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})}{\partial s} ds + V_x(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})dX_s + \tfrac{1}{2} V_{xx}(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})\pi_s^2\sigma_s^2 ds \\
&+ V_y(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})df_s + \tfrac{1}{2} V_{yy}(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s^2 b_s^2 ds + V_{xy}(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s^{t,y}\pi_s\sigma_s ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la dynamique de la richesse donnée en (10.2) et celle de f

$$\begin{aligned}
&V(t+h, X_{t+h}^{t,x}, f_{t+h}^{t,y}) - V(t,x) \\
&= \int_t^{(t+h)} \{\frac{\partial V(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})}{\partial s} + V'(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})(X_s^{t,x} r_s + \pi_s(\mu_s - r_s)) + \tfrac{1}{2} V''(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})\pi_s^2\sigma_s^2\} ds \\
&+ \int_t^{(t+h)} \{V_y(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s^{t,y} a_s + V_{yy}(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s^2 b_s^2 ds + V_{xy}(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s^{t,y}\pi_s\sigma_s\} ds \\
&+ \int_t^{(t+h)} \{V_x(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})\pi_s\sigma_s + V_y(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s b_s\} dW_s.
\end{aligned}$$

En supposant que $\int_t^{t+h} \{V_x(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})\pi_s\sigma_s + V_y(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s b_s\} dW_s$ est une martingale, nous obtenons en utilisant l'inégalité (10.24) avec une égalité pour le portefeuille optimal.

$$\begin{aligned}
0 \quad \geq \quad & E[\int_t^{t+h} f_u^{t,y} U(X_u^{t,x})du + \\
& \int_t^{(t+h)} \{\frac{\partial V(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})}{\partial s} + V_x(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})(X_s^{t,x} r_s + \pi_s(\mu_s - r_s)) + \tfrac{1}{2} V_{xx}(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y})\pi_s^2\sigma_s^2\} ds \\
& + \int_t^{(t+h)} \{V_y(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s^{t,y} a_s + V_{yy}(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s^2 b_s^2 ds + V_{xy}(s, X_s^{t,x}, f_s^{t,y}) f_s^{t,y}\pi_s\sigma_s\} ds].
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons en divisant par h et en prenant la limite quand h tend vers zéro

$$\begin{aligned}
0 \quad \geq \quad & yU(x) + \frac{\partial V(t,x,y)}{\partial t} + [xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x(t,x,y) + \tfrac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}(t,x,y) \\
& + V_y(t,x,y) y a_t + V_{xy}(t,x,y) y b_t \pi^2\sigma_t^2 + \tfrac{1}{2} V_{yy}(t,x,y) y^2 b_t^2.
\end{aligned}$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tous les portefeuilles admissibles, il s'ensuit

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & yU(x) + \frac{\partial V(t,x,y)}{\partial t} + \sup_{\pi \in \mathcal{A}^{\mathbb{F}}(t,x)} \{[xr_t + \pi(\mu_t - r_t)]V_x(t,x,y) + \tfrac{1}{2}\pi^2\sigma_t^2 V_{xx}(t,x,y) \\
& + V_y(t,x,y) y a_t + V_{xy}(t,x,y) y b_t \pi\sigma_t + \tfrac{1}{2} V_{yy}(t,x,y) y^2 b_t^2\},
\end{aligned}$$

et $\lim_{x\to\infty} V(t,x,y) \quad = \quad 0.$

ii) La fonction de valeur vérifie pour $t \leq T$

$$V(t,x,y) = \sup_{\pi} E(\int_t^T f_u^{t,y} U(X_u^{t,x})du + U(X_T^{t,x})\int_T^{+\infty} f_u^{t,y} du).$$

Donc $V(T,x,y) = U(X_T^{t,x}) \int_T^{+\infty} f_u^{T,y} du$. Comme f est markovien, le processus

$$\int_T^{+\infty} f_u^{T,y} du = E(\int_T^{+\infty} f_u du / f_T = y)$$

est une fonction de y.

L'équation (10.21) s'obtient comme précédemment en appliquant le principe de programmation dynamique à V.

La proposition suivante nous donne une caractérisation du portefeuille optimal.

Proposition 10.26 *:Il existe un portefeuille optimal donné par la relation suivante*

$$\pi_t = -\sigma_t^{-1}\theta_t \frac{V_x(t,x,y)}{V_{xx}(t,x,y)} - yb_t\sigma_t^{-1}\frac{V_{xy}(t,x,y)}{V_{xx}(t,x,y)}. \tag{10.25}$$

Démonstration : L'équation

$$(\mu_t - r_t)V_x(t,x,y) + \pi\sigma_t^2 V_{xx}(t,x,y) + V_{xy}(t,x,y)yb_t\sigma_t = 0$$

admet une unique solution en la variable π notée π^* qui vérifie $\pi^*(t,x,y) = -\sigma_t^{-1}\theta_t\dfrac{V_x(t,x,y)}{V_{xx}(t,x,y)} - yb_t\sigma_t^{-1}\frac{V_{xy}(t,x,y)}{V_{xx}(t,x,y)}$. Comme la fonction V est concave en la seconde variable, cette valeur correspond à un maximum de la fonction $A(t,x,y,\pi)$. ■

10.3.4 Exemples

Dans le cas où l'horizon est infini, il est difficile de trouver la forme de la fonction de valeur. Par contre, si $T < \infty$, on peut trouver explicitement la fonction de valeur et le portefeuille optimal dans le cas où la fonction U est la fonction log ou une fonction puissance. On mène les calculs dans le cas où les coefficients a, b, r, μ, σ sont constants pour simplifier les expressions. On trouvera en annexe le détail des calculs.

Proposition 10.27 *i) Si $U(x) = \log x$ et $a < 0$, alors la fonction de valeur V est donné par*

$$V(t,x,y) = y(C_2 e^{-C_1 t}\int_t^T q(s)e^{C_1 s}ds + q(t)\log(x))$$

où $q(t) = (1+\frac{1}{C_1})e^{C_1(T-t)} - \frac{1}{C_1}$, $C_1 = b(\frac{\mu-r}{\sigma}+b)$. $C_2 = r + (\mu-r)\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r+\sigma b)^2}{\sigma^2}$.

Le portefeuille est donné par

$$\pi_t^* = [\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma^2}]X_t^*.$$

ii) Si $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ et $a < 0$, la fonction de valeur et le portefeuille optimal solution du problème sont

$$V(t,x,y) = y\frac{x^\alpha}{\alpha}(1+\frac{1}{C}e^{CT})e^{-Ct} - \frac{1}{C}$$

et

$$\pi_t^* = -[\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma^2}]\frac{X_t^*}{\alpha-1}$$

où $C = \alpha(r + (\mu-r)\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma^2(\alpha-1)}) + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)(\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma(\alpha-1)})^2 - b(\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma(\alpha-1)})$.

Remarque 10.28 *: Dans ces deux exemples, les portefeuilles optimaux sont admissibles. En effet, ils sont de la même forme que ceux obtenus pour le problème d'optimisation pour le $\mathcal{F}_T$−marché (marché complet), il suffit de modifier le coefficient de dérive μ en $\mu' = \mu + \sigma b$.*

Démonstration :

a) On cherche $V(t,x,y)$ sous la forme

$$V(t,x,y) = y(p(t) + q(t)\log x).$$

Le portefeuille est solution de l'équation

$$(\mu - r)V_x(t,x) + \pi\sigma^2 V_{xx}(t,x) + V_{xy}(t,x,y)yb\sigma = 0$$

est $\pi^*(t,x,y) = [\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma^2}]x$.

En introduisant cette expression dans l'équation d'HJB (10.21), on obtient p et q solutions de

$$0 = \log x + p'(t) + q'(t)\log x + q(t)[r + (\mu - r)\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(\mu - r + \sigma b)^2}{\sigma^2}] + (p(t) + q(t)\ln x)[b(\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma})].$$

Cette équation est vérifiée si

$$\begin{array}{lcl} 1 + q'(t) + b(\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma})q(t) & = & 0 \\ p'(t) + b(\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma})p(t) + (r + (\mu - r)\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r+\sigma b)^2}{\sigma^2})q(t) & = & 0. \end{array}$$

Soit $q(t) = \lambda_1 e^{-C_1 t} - \frac{1}{C_1}$ et $p(t) = (\lambda_2 - C_2\int_0^t q(s)e^{C_1 s}ds)e^{-C_1 t}$ où $C_1 = b(\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma})$, $C_2 = r + (\mu - r)\frac{\mu-r+\sigma b}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{(\mu-r+\sigma b)^2}{\sigma^2}$.

b) Déterminons les constantes λ_1 et λ_2.

La condition finale s'écrit $V(T,x,y) = U(x)E(\int_T^{+\infty} f_s ds\ /f_T = y)$. Or pour $s \geq T$,

$$f_s = f_T \exp(b(W_s - W_T) - (\frac{b^2}{2} - a)(s - T).$$

Par conséquent,

$$E(\int_T^{+\infty} f_s ds/f_T = y) = y\int_T^{+\infty} dsE[\exp(b(W_s - W_T) - (\frac{b^2}{2} - a)(s - T)] = y\int_T^{+\infty} ds\exp -a(T - s) = \frac{y}{a}$$

si $a < 0$. D'où $V(T,x,y) = \frac{y}{a}U(x)$.

Cette condition implique

$$p(T) = 0 \text{ et } q(T) = \frac{1}{a}.$$

D'où $\lambda_1 = (\frac{1}{a} + \frac{1}{C_1})e^{C_1 T}$ et $\lambda_2 = C_2\int_0^T q(s)e^{C_1 s}ds$.

Démonstration du ii) de la proposition 10.27

a) On cherche la fonction de valeur sous la forme $V(t,x,y) = yp(t)\frac{x^\alpha}{\alpha}$.

Le portefeuille optimal est de la forme

$$\pi^*(t,x,y) = -[\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma^2}]\frac{x}{\alpha - 1}.$$

On obtient que p est solution de l'équation différentielle suivante

$$0 = 1 + p'(t) + p(t)(\alpha(r + (\mu - r)\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma^2(\alpha - 1)}) + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)(\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma(\alpha - 1)})^2 - b(\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma(\alpha - 1)}).$$

D'où $p(t) = \lambda e^{-Ct} - \frac{1}{C}$ où $C = \alpha(r + (\mu - r)\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma^2(\alpha - 1)}) + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)(\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma(\alpha - 1)})^2 - b(\frac{\mu - r + \sigma b}{\sigma(\alpha - 1)})$.
b) La constante λ est déterminée par $V(T, x, y) = \frac{y}{a}U(x)$. Ceci équivaut à $p(T) = \frac{1}{a}$. Par conséquent,

$$\lambda = (\frac{1}{a} + \frac{1}{C})e^{CT}.$$

Ainsi la fonction de valeur vaut pour $t \leq T$

$$V(t, x, y) = y((1 + \frac{1}{C})e^{C(T-t)} - \frac{1}{C})\frac{x^\alpha}{\alpha}.$$

Bibliographie

[1] Bellamy N. : Wealth Optimisation in an Incomplete Market driven by a Jump-Diffusion Process, *Journal of Mathematical Economics, 35, 259-287, 2001.*

[2] Collin Dufresne P., Hugonnier J. : On the Pricing & Hedging of Contingent Claims in the Presence of Extraneous Risks, *Prépublication,* 2001.

[3] Davis M. : Option Pricing in Incomplete Markets, in M.H.A. Demtser and S.R. Pliska, editors, *Mathematics of derivative securities,* Publication of Newton institute, pages 216-227, Cambridge University Press, 1997.

[4] Hodges S. D., Neuberger A. : Optimal Replication of Conntingent Claims under Transaction Costs, *Rev. Futurs Markets* 8, 222-239, 1989.

[5] Hugonnier J. : Trois essais sur la théorie des marchés financiers en temps continu. *Thèse, Université de Paris I Panthéon-Sorbonne*, 2001.

[6] Karatzas I. : *Lectures on the Mathematics of Finance,* CRM Monograph Series, Montréal, vol 8.1996.

[7] Karatzas I., Wang H. : Utility maximization with discretionary Stopping, à paraître dans *SIAM Journal on Control & Optimisation.*

[8] Martellini L. : Optimal investment and consumption with uncertain time horizon, *Prépublication,* 2001.

[9] Rouge R., El Karoui N. : Pricing via Utility Maximisation and Entropy, *Mathematical Finance,* Vol 10/2, 259-276, 2000.

Bibliographie

[1] Ansel J.P., Stricker C. : Lois de martingale, densités et décomposition de Fôllmer-Schweizer, *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 28, 375-392, 1992.

[2] Azéma. J., Jeulin T., Knight F. et Yor M. : Le théorème d'arrêt en une fin d'ensemble prévisible, *Séminaire de Probabilités XXVII,* Springer, p. 133-158, Lecture Notes in Math. 1557, 1993.

[3] Bachelier L. : Théorie de la spéculation, (Thèse 1900), *Annales de l'Ecole Normale Supérieure,3eme série, Tome XVII,* 21-86.

[4] Barles G, Buckdahn R, Pardoux E : BSDE's and integral-partial differential equations. *Stochastics and Stochastic Reports*, 1995.

[5] Barlow M.T., Emery M., Knight F.B.,Song S et Yor M. : Autour d'un théorème de Tsirelson sur les filtrations browniennes et non browniennes, *Séminaire de Probabilités XXXII, Lecture Notes in Math.* 1686, 264-305, Springer, Berlin, 1998.

[6] Bélanger A., Shreve S., Wong D. : A unified Model for Credit Derivatives, *Prépublication,* 2001.

[7] Bellamy N. : Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus, *Thèse, Université d'Evry,* 1999.

[8] Bellamy N. : Wealth Optimisation in an Incomplete Market driven by a Jump-Diffusion Process, *Journal of Mathematical Economics,* 35, 259-287, 2001.

[9] Blanchet-Scalliet C., Jeanblanc M. : Information et risque de défaut, *à paraître dans le Journal de la Société Française de Statistiques.*

[10] Blanchet-Scalliet C., Jeanblanc M. : Hasard rates for credit risk and hedging defaultable contingent claims, *Prépublication 145 de l'Université d'Evry ,* 2001. Submitted.

[11] Borodin A.N, Salminen P : *Handbook of Browian Motion-Facts and Formulae.* Probability and its Applications. Birkhauser Verlag, 1996.

[12] Bouyé E., Durrleman V., Nikeghbali A., Riboulet G., Roncalli T. : Copulas for Finance A Reading Guide and Some Applications, 2000.

[13] Collin Dufresne P., Hugonnier J. : On the Pricing & Hedging of Contingent Claims in the Presence of Extraneous Risks, *Prépublication,* 2001.

[14] Dana R-A, Jeanblanc-Picqué M : *Marchés Financiers en temps continu ; Valorisation et Equilibre,* Economica, Paris, 1994.

[15] Davis M. : Option Pricing in Incomplete Markets, in M.H.A. Demtser and S.R. Pliska, editors, *Mathematics of derivative securities,* Publication of Newton institute, pages 216-227, Cambridge University Press, 1997.

[16] Delbaen F., Schachermayer W. : The existence of absolutely continuous local martingale measures, *The Annals of Applied Probability,* Vol 5, No 4, 925-945, 1995.

[17] Dellacherie C. : Un exemple de la théorie générale des processus, *Séminaire de probabilités IV, Lecture Notes in Math.* 124, 60-70, Springer-verlag, Berlin, 1970.

[18] Dellacherie C. : *Capacités et processus stochastiques,* Springer-Verlag, Berlin,1972.

[19] Dellacherie C., Meyer P.A. : A propos du travail de Yor sur les grossissements de tribus, *Séminaire de probabilités XII, Lecture notes in Math.*, 69-78,Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[20] Dellacherie C, Meyer P.A : *Probabilités et potentiel, Théorie des martingales,* chap V à VIII, Hermann, 1980.

[21] Dellacherie C., Maisonneuve B., Meyer P.A. : *Probabilités et potentiel, processus de Markov. Compléments de calcul stochastique.* Hermann. 1992.

[22] Dritschel.P, Protter P : Complete markets with Discontinuous Security Price, *Finance and Stochastics,*3, p 203-214, 1999.

[23] Duffie D. : First-to-default valuation. *Working paper.* 1998.

[24] Duffie D., Lando D. : Term structure of credit spreads with incomplete accounting information, preprint, *CAF Copenhagen*, 1997.

[25] Duffie D., Schroder M., Skiadas C. : Recursive valuation of defaultable securities and the timing resolution of uncertainty, *Annals of Applied Probability*, 6,1075-1090, 1997.

[26] Elliott R.J., Jeanblanc M., Yor M. : On models of default risk, *Mathematical Finance* 10, 179-196, 2000.

[27] El Karoui N. : Modélisation de l'information : *Ecole d'été INRIA, Rocquencourt* Juin 1999.

[28] El Karoui N, Mazliak L : *Backward Stochastic Differential Equations.* Pitman-Research Notes in Mathematics Series 364, 1994.

[29] Emery M : On the Azéma' Martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Mathematics,* vol 1372, p 66-87, Springer Verlag, 1990.

[30] Föllmer H., Schweizer M. : Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information, *Applied Stochastic Analysis, Stochastics Monographs* 5,389-414, 1991.

[31] Föllmer H., Wu C.T., Yor M. : Canonical decomposition of linear transformations of two independent Brownian motions motivated by models of insiders trading.

[32] Frey R., McNeil A. : Modelling Dependent Defaults, Prépublication, 2001.

[33] Harrison J, Piska S : Martingales and Stochastic Integrals in the theory of continuous Trading, *Stochastic Processes and their applications,* 11 : 215-260, 1981.

[34] Hodges S. D., Neuberger A. : Optimal Replication of Contingent Claims under Transaction Costs, *Rev. Futur Markets* 8, 222-239, 1989.

[35] Hugonnier J. : Trois essais sur la théorie des marchés financiers en temps continu. *Thèse, Université de Paris I Panthéon-Sorbonne*, 2001.

[36] Jacod J., Shiryaev A.N. : *Limit Theorems for Stochastic Processes*, Grudlehren der methematischen Wissenschaften 288, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[37] Jacod J., Yor M. : Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales, *Z. Wahrscheinlichkeistheorie verw. Gebiete,* 38, 83-125, 1977.

[38] Jarrow R., Turnbull S. : Pricing options on financial securities subject to default risk, *J. Finance* 50, 53-86, 1995.

[39] Jarrow R.A., Yu F. : Counterparty Risk and Pricing of Defaultable Securities, *Preprint*, 1999.

[40] Jeanblanc M, Privault N : Complete Market with Poisson and Brownian Components,*Prépublication, Université D'Evry,* 1999.

[41] Jeanblanc M., Rutkowski M. : Modelling on default risk : An overview. *Mathematical Finance : theory and practice. Modern Mathematics Series, High Education press;* 1999.

[42] Jeulin T. : *Semi-martingales et grosssissement de filtration,* Lecture Notes in Math. 833, Springer-Verlag, Berlin, 1980

[43] Karatzas I. : *Lectures on the Mathematics of Finance,* CRM Monograph Series, Montréal, vol 8.1996.

[44] Karatzas I., Wang H. : Utility maximization with discretionary Stopping, à paraître dans *SIAM Journal on Control & Optimisation.*

[45] Kusuoka S. : A remark on default risk models, *Advances in Mathematical Economics*, 1, 69-82, 1999.

[46] Madan D., Unal H. : Pricing the risk default, *Rev Derivatives Research* 2, 121-160, 1995.

[47] Martellini L. : Optimal investment and consumption with uncertain time horizon, *Prépublication,* 2001.

[48] Merton R.C. : On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates, *Journal of Finance* , 29, 449-470, 1974.

[49] Pardoux E, Peng S : Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equation. *Lecture Notes in CIS* 176, p 200-217, Springer, 1992.

[50] Peng S : A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equations. *Stochastics*, Vol 38, p 119-134, 1992.

[51] Picard.P, Lefèvre.C : The Probability of Ruin in Finite Time with Discrete Claim Size *Distribution. Scand. Actuarial J.* 1 : p 58-69, 1997.

[52] Protter P : *Stochastic Integration and Differential Equation.* Application of Mathematics-21, Springer-Verlag, 1990.

[53] Revuz D, Yor M : *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Third Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[54] Rogers L.C.G., Williams D. : *Diffusions, Markov processes and Martingales, Vol 2,* Wiley series in probability and mathematical Statistics, 1990.

[55] Rouge R., El Karoui N. : Pricing via Utility Maximisation and Entropy, *Mathematical Finance,* Vol 10/2, 259-276, 2000.

[56] Rutkowski M. : "On models of default risk" by R.Elliott, M.Jeanblanc and M.Yor. *Working paper*, 2000.

[57] Schönbucher P. : Credit Risk Modelling and Credit Derivatives. *Thèse, Université de Bonn.* 2000

[58] Wong D. : A Unifiying Credit Model, *preprint, Scotia Capital Group*,1998.

[59] Yor M. : *Some aspects of Brownian Motion. Part II : Some recent Martingale Problems,* Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser, 1997.

Index

Hypothèses