Des théories quantiques de champ topologiques aux théories de jauge supersymétriques

Guillaume Bossard

Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie
en physique théorique

Présentée par

Guillaume BOSSARD*

Pour obtention du grade de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Des théories quantiques de champ topologiques aux théories de jauge supersymétriques

soutenue le 25 Octobre 2007

devant le jury composé de :
Constantin BACHAS, directeur de recherche (LPTENS, Paris) ;
Laurent BAULIEU, directeur de recherche (LPTHE, Paris), directeur de thèse ;
Michela PETRINI, professeur (Université Pierre et Marie Curie, LPTHE, Paris) ;
Kellogg S. STELLE, professeur (Imperial College, Londres), rapporteur ;
Raymond STORA, directeur de recherche émérite (CERN / Annecy-le-Vieux), rapporteur ;
Erik VERLINDE, professeur (Universiteit van Amsterdam, ITF).

*adresse électronique : bossard@lpthe.jussieu.fr

Remerciements

Je suis très reconnaissant à Messieurs Laurent Baulieu et Olivier Babelon qui m'ont accueilli au Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energie de l'Université Pierre et Marie Curie et m'ont permis de réaliser cette thèse. Monsieur Laurent Baulieu a été mon Directeur de thèse et je lui suis très reconnaissant de m'avoir initié à la recherche.

Je remercie aussi tous les membres du laboratoire dont l'attitude bienveillante a été pour moi un constant encouragement.

Les travaux présentés dans cette thèse sont le fruit de collaborations suivies avec mes collègues avec qui j'ai de surcroît tissé des liens d'amitiés. Je désire tout particulièrement exprimer ma gratitude à Nathan Berkovits, Jan de Boer, Alexis Martin, Silvio Paolo Sorella et Alessandro Tanzini.

Mes séjours à l'étranger m'ont été extrêmement bénéfiques. Je remercie Monsieur Luis Alvarez-Gaumé pour un séjour prolongé au CERN où j'ai eu la chance de pouvoir interagir avec Monsieur Raymond Stora. Grâce au contrat Européen de *the European Superstring Theory Network* dirigé par Monsieur Lars Brink, j'ai pu travailler à l'*Instituut voor Theoretische Fysica* de l'*Universiteit van Amsterdam* et au *Max-Planck Institut für Gravitationsphysik* de Golm. Les invitations de Messieurs les Professeurs Robert Dijkgraaf et Hermann Nicolai m'ont particulièrement obligé.

Madame et Messieurs les Professeurs Michela Petrini, Kellogg Stelle et Erik Verlinde, ainsi que Messieurs Constantin Bachas et Raymond Stora ont bien voulu participer au jury de ma thèse. J'en suis extrêmement honoré.

Je suis très reconnaissant envers mes amis et ma famille pour leur soutien sans faille. Je remercie enfin Hervé Blancho, Gwénaël Massuyeau, François Arleo et Andrei Smilga qui ont joué un rôle si important au cours de mes études, et sans lesquels je n'aurai peut être jamais eu l'occasion de pouvoir me consacrer à cette thèse.

Résumé

Mots clés : Supersymétrie, théorie de Yang–Mills, variables *twistées*, renormalisation, identités de Slavnov–Taylor.

Cette thèse est constituée de deux contributions scientifiques qui ont donné lieu à deux séries d'articles. On construit dans la première une symétrie vectorielle dans les théories cohomologiques via une généralisation de l'équation de Baulieu–Singer, qui définit avec l'opérateur BRST topologique un sous ensemble de générateurs de supersymétrie admettant une représentation qui détermine l'action de la théorie de manière unique.

La seconde série propose une méthode pour renormaliser les théories supersymétriques de Yang–Mills en l'absence de schéma de régularisation préservant à la fois l'invariance de jauge et la supersymétrie. La prescription de renormalisation est obtenue en définissant deux opérateurs de Slavnov–Taylor compatibles respectivement pour l'invariance de jauge et la supersymétrie. La construction de ces derniers nécessite l'introduction de champs additionnels que nous avons appelés les champs d'ombre. Nous avons ainsi été en mesure de démontrer la renormalisabilité des théories de Yang–Mills supersymétriques et l'annulation de la fonction β dans le cas de la supersymétrie maximale.

Après une brève introduction, le second chapitre propose une revue de la théorie de Yang–Mills de type cohomologique en huit dimensions. Le chapitre suivant examine les réductions dimensionnelles en sept et six dimensions de cette théorie. Le dernier chapitre propose quand à lui des résultats indépendants, sur une interprétation géométrique des champs d'ombre, ainsi que des travaux non publiés sur la gravité topologique en quatre dimensions, des considérations sur la symétrie superconforme et enfin la solution des contraintes dans le super-espace *twisté*.

Abstract

From topological quantum field theories to supersymmetric Yang–Mills theories

Key words : *Supersymmetry, Yang–Mills theory, twisted variables, renormalization, Slavnov–Taylor identities.*

This thesis contains tow parts based on scientific contributions that have led to two series of publications. The first one concerns the introduction of vector symmetry in cohomological theories, through a generalization of the so called Baulieu–Singer equation. Together with the topological BRST operator, this symmetry gives an off-shell closed subsector of supersymmetry that permits to determine the action uniquely.

The second part proposes a methodology for renormalizing supersymmetric Yang–Mills theory without assuming a regularization scheme which is both supersymmetry and gauge invariance preserving. The renormalization prescription is derived thanks to the definition of two consistent Slavnov–Taylor operators for supersymmetry and gauge invariance, whose construction requires the introduction of the so called shadow fields. We demonstrate the renormalizability of supersymmetric Yang–Mills theories. We give a fully consistent, regularization scheme independent, proof of the vanishing of the β *function and of the anomalous dimensions of the one half BPS operators in maximally supersymmetric Yang–Mills theory.*

After a short introduction, in chapter two, we give a review of the cohomological Yang–Mills theory in eight dimensions. We then study its dimensional reductions in seven and six dimensions. The last chapter gives quite independent results, about a geometrical interpretation of the shadow fields, an unpublished work about topological gravity in four dimensions, an extension of the shadow formalism to superconformal invariance, and finally the solution of the constraints in twisted superspace.

à Gabriel Bossard

Description de la thèse

Cette thèse se décompose en deux contributions scientifiques, ayant donné lieu à des publications dans des revues à comité de lecture, discutant des propriétés des théories supersymétriques dans leurs formulations dites tordues (*twistées*). Les articles sont annexés à la fin de la thèse, accompagnés d'un résumé en français. Leur contenu n'est pas reproduit dans le corps de celle-ci. Ce dernier discute au contraire quelques résultats qui n'ont pas étés publiés ainsi que quelques sujets reliés au travail de thèse.

***

La première série de publications (annexes A.1, A.2, et A.3) considère la construction de la supersymétrie vectorielle dans les théories topologiques de type cohomologique de Yang–Mills comme une symétrie de la fixation de jauge. On a ainsi mis en évidence le fait qu'une action tordue (*twistée*) peut être déterminée de manière unique par une construction dans la théorie cohomologique correspondante, sans avoir pour ce faire à la définir à partir d'une opération de torsion (*twist*) sur une action supersymétrique. Le principal résultat de cette construction est que les théories de Yang–Mills maximalement supersymétriques admettent une sous algèbre de symétrie incluant neuf générateurs de supersymétrie qui permettent de déterminer l'action de manière unique tout en admettant une représentation fonctionnelle locale. Ce résultat est comparé dans la dernière publication (annexe A.7) avec un résultat obtenu par Nathan Berkovits dans le passé.

*

Le tenseur énergie impulsion des théories de type cohomologique peut s'écrire comme l'application de l'opérateur BRST topologique à un tenseur antécédent. On montre dans [A.1] que la conservation de cet antécédent est équivalente à la donnée d'une symétrie impaire dépendant d'un vecteur constant de la variété, dont l'anticommutateur avec la différentielle BRST topologique est la dérivée de Lie le long de ce même vecteur. En incluant la représentation de la différentielle BRST topologique de Yang–Mills dans celle de la gravité topologique, nous avons été en mesure de généraliser la notion de courbure étendue de Baulieu–Singer pour les théories de type cohomologique souches en dimension quatre et huit, de manière à y inclure la définition de cet opérateur vectoriel. L'équation correspondante dépend d'une connexion de fond, de telle sorte qu'elle est définie globalement quelque soit le secteur topologique considéré. Pour l'obtenir, nous avons relevé la définition de la courbure étendue sur le fibré principal correspondant, de manière à comprendre du point de vue de la courbure étendue, les changements de variables qui permettent de simplifier la représentation de la différentielle BRST associée à une théorie de jauge et qui font intervenir des termes dépendant de connexions de fond. En plus de permettre la définition d'une symétrie vectorielle, l'existence d'un vecteur constant permet de définir une involution qui intervertit les opérateurs scalaire et vectoriel, ainsi que les fantômes et les antifantômes topologiques. Cette involution est une symétrie résiduelle de la symétrie $SL(2,\mathbb{R})$ de la théorie de type cohomologique équilibrée obtenue par réduction dimensionnelle sur le cercle. De fait, l'existence d'un vecteur constant sur la variété permet de montrer que l'indice de l'opérateur de Dirac de la théorie est nul, ce qui exprime la dualité entre fantômes et antifantômes. On a montré que l'action pouvait s'écrire comme l'action répétée des opérateurs BRST topologique et vectoriel sur une action de type Chern–Simons correspondant à la fonction de Morse de la théorie équilibrée en dimensions trois et sept.

En considérant le secteur complet de la théorie supersymétrique dans sa formulation tordue, on a obtenu le résultat que l'opérateur vectoriel et la symétrie BRST topologique déterminaient l'action de manière unique. Ces deux opérateurs admettant une représentation fonctionnelle sur les champs, ils définissent un sous-secteur cohérent de la supersymétrie maximale qui permet de déterminer correctement la théorie. Nous avons généralisé ces différents résultats au cas de théories supersymétriques dans des fonds dits Ω, qui correspondent à la réduction dimensionnelle de théories de Yang–Mills définies sur des espaces fibrés de base torique. Du point de vue des théories de type cohomologique, ces fonds apparaissent dans l'étude de la cohomologie équivariante par rapport à un groupe abélien d'isométries de la variété. On a montré dans [A.1] que la symétrie vectorielle pouvait également être naturellement interprétée dans ce cas. L'action peut encore être obtenue comme l'action répétée des opérateurs scalaire et vectoriel sur une fonctionnelle de type Chern–Simons.

*

Nous avons étendu ces résultats dans [A.2] au cas de la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique en quatre dimensions dans sa formulation tordue correspondant à la torsion (au *twist*) de Vafa–Witten. Les deux charges scalaires et les deux charges vectorielles de la théorie peuvent êtres obtenues à partir d'équations de courbures étendues généralisant l'équation de Baulieu–Singer. On y montre qu'en plus de la symétrie $SL(2,\mathbb{R})$ reliant respectivement les différentes charges scalaires et vectorielles, on peut définir un automorphisme $U(1)$ qui mélange les opérateurs scalaires et vectoriels. Le générateur de ce dernier constitue un opérateur antécédent aux opérateurs vectoriels qui ne définit cependant pas lui-même une symétrie de la théorie. Afin d'obtenir une représentation fonctionnelle locale de ces symétries, il est nécessaire de réduire la covariance $SL(2,\mathbb{R})$ à un sous groupe $U(1)$ et de ne considérer qu'un opérateur vectoriel. Les six charges de supersymétrie restantes ont la propriété remarquable de contraindre à elles seules l'action de la théorie de manière unique. On a établi que cette propriété intéressante de la théorie maximalement supersymétrique dans sa formulation tordue à la Vafa–Witten, n'admet cependant pas d'analogie dans les deux autres formulations tordues de la théorie.

*

Ces derniers résultats montrent, que la grande majorité des théories de Yang–Mills qui possède un nombre étendu de supersymétries, peut être définie de manière unique à partir des secteurs basiques (invariants de jauge et incluant les fantômes topologiques) de théories topologiques dans une jauge admettant un certain nombre de symétries vectorielles. La publication annexée A.3 généralise ces résultats aux cas des théories supersymétriques $\mathcal{N}=1$ en quatre et six dimensions. On y montre qu'on peut donner un sens à la formulation tordue de ces théories, bien que le changement de variable ne soit défini que sur les champs complexifiés. Ceci fait intervenir l'interprétation d'H. Nicolai des théories supersymétriques dans l'euclidien à l'aide d'identités de Ward formelles pour la supersymétrie. On peut cependant définir une involution dépendant d'un vecteur constant, de telle sorte que la condition de réalité pour une fonctionnelle scalaire de Lorentz en fonction des variables tordues, implique que la fonctionnelle correspondante via une rotation de Wick définie dans la théorie minkowskienne est hermitienne. On y définit à partir de la définition d'une courbure étendue, une charge scalaire et une charge vectorielle qui permettent de définir de manière unique l'action réelle sous l'involution vectorielle. Le résultat s'étend au cas de couplages à la matière faisant intervenir un superpotentiel général et des termes de Fayet–Iliopoulos.

*

N. Berkovits a proposé une solution générale qui assure une représentation fonctionnelle locale de la supersymétrie pour la théorie de Yang–Mills en dix dimensions. Celle-ci fait intervenir des spineurs à valeurs dans un espace vectoriel de dimension sept, contraints en fonction des paramètres spinoriels de supersymétrie. Il a montré que cette procédure permet d'assurer l'involution d'au plus, neuf charges de supersymétrie. L'existence d'une solution linéaire à ces contraintes nécessite de restreindre l'invariance de la théorie à un groupe de symétrie globale admettant une représentation irréductible de dimension sept. Nous avons montré dans le dernier article annexé A.7, que le sous super-groupe maximal du super-groupe de super-Poincaré en dix dimensions qui admet une représentation fonctionnelle locale dans cette construction, a pour sous groupe bosonique, le groupe des translations en produit semi-direct avec le sous groupe $SO(1,1) \times Spin(7)$ de $SO(9,1)$. Cette dernière propriété nous a amené à considérer la solution générale des contraintes non linéaires de N. Berkovits, en fonction des champs décomposés en représentations irréductibles de dimension finie de $SO(1,1) \times Spin(7)$. On a ainsi établi que la solution générale linéaire correspond a une version « oxydée » de la théorie de type cohomologique en huit dimensions, définie par les charges de supersymétrie scalaire et vectorielle. Les transformations des champs sous ces charges peuvent êtres définies à partir de la définition d'une courbure étendue en dix dimensions. Nous proposons dans cet article la définition d'un super-espace tordu comptant neuf coordonnées fermioniques. Les contraintes vérifiées par les superchamps de jauge correspondent à la version tordue des contraintes usuelles définies modulo les équations du mouvement, plus une contrainte additionnelle d'anti-autodualité pour une composante de la courbure, qui correspond à la 2-forme antifantôme dans la théorie de type cohomologique. Ces contraintes peuvent être résolues, les détails sont expliqués dans la section 4.4. On a finalement écrit l'action de la théorie en fonction de superchamps dans une forme qui rappelle le formalisme de super-espace harmonique.

***

La seconde série d'articles (annexes A.4, A.5 et A.6) résout le problème de la renormalisation des théories supersymétriques à tous les ordres de la théorie des perturbations, en l'absence de régularisation préservant à la fois la supersymétrie et l'invariance de jauge. La bonne définition du régulateur introduit par W. Siegel (réduction dimensionnelle) s'avère ne pas s'étendre au delà de trois boucles, et aucune alternative satisfaisante n'a été proposée jusqu'ici. Au prix de l'introduction de nouveaux champs, que nous avons appelés des champs d'ombre, il est possible de définir des identités de Slavnov–Taylor en involution pour l'invariance BRST et la supersymétrie. Ces identités permettent de déterminer sans ambiguïté les contre-termes non invariants nécessaires à la préservation des symétries de la théorie à chaque ordre de la théorie des perturbations. La procédure s'étend au cas où l'on considère des insertions d'opérateurs composites.

*

Nous définissons ces champs d'ombre et les transformations associées dans [A.4]. Ils permettent d'écrire les transformations de supersymétrie des champs à l'aide d'un opérateur nilpotent modulo une dérivée de manière compatible avec la définition de l'opérateur BRST, c'est à dire de façon que ces deux opérateurs anticommutent. En introduisant des sources pour les variations des champs sous l'action de ces opérateurs ainsi que sous leur action composée, on construit deux opérateurs de Slavnov–Taylor compatibles pour la supersymétrie et l'invariance de jauge. On définit ainsi rigoureusement le problème des anomalies dans une théorie de jauge supersymétrique. On montre qu'on peut définir une fixation de jauge qui dépend d'un paramètre constant de supersymétrie compatible avec les deux symétries. La dépendance dans ce paramètre de la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductibles est une variation par rapport à l'opérateur linéarisé de Slavnov–Taylor BRST, de telle sorte que ce paramètre ne contribue pas aux observables physiques de la théorie. On montre que la fixation de jauge vérifie un certain nombre de symétries supplémentaires correspondant à des généralisations des identités de Ward antifantômes en théorie de jauge. On résout dans cet article le problème des anomalies et de la stabilité de l'action, apportant ainsi la première preuve complète et indépendante du régulateur de la renormalisabilité des théories de jauge supersymétriques dans leur formulation en composantes.

*

C'est une conjecture communément admise que la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique admet comme symétrie l'algèbre superconforme $\mathfrak{psu}(2,2|4)$. L'invariance conforme de la théorie implique que sa fonction β soit nulle, puisque c'est le coefficient qui détermine l'anomalie de trace. Jusqu'à il y a peu, les différentes preuves de l'annulation de cette fonction β à tous les ordres de la théorie des perturbations avaient toutes pour défaut d'admettre l'existence d'un régulateur préservant à la fois l'invariance de jauge et la supersymétrie. Seule la preuve proposée par S. P. Sorella et ses collaborateurs était formulée à l'aide d'identités de Slavnov–Taylor valables indépendamment du régulateur utilisé pour renormaliser la théorie. Cependant, les rôles des identités de Slavnov–Taylor associées respectivement à la supersymétrie et à l'invariance BRST y étaient mélangés. Une clarification de cette preuve nécessite en fait l'introduction des champs d'ombre. Sa formulation correcte à l'aide du formalisme introduit en [A.4] a été l'objet de l'article annexé [A.5]. On y utilise les résultats de [A.2] afin de simplifier considérablement les calculs. La preuve de la nullité de la fonction β fait intervenir un lien, via des équations de descente, entre la densité lagrangienne et des opérateurs un-demi BPS primaires ; ce dernier est établi en utilisant la sous algèbre de supersymétrie à six générateurs qui admet une représentation fonctionnelle. On établit également une preuve de l'annulation à tous les ordres de la théorie des perturbations de la dimension anormale des opérateurs un-demi BPS, sans prendre pour hypothèse l'invariance superconforme de la théorie. On déduit ce dernier résultat en utilisant des identités de Slavnov–Taylor pour cinq charges de supersymétrie qui admettent une représentation fonctionnelle.

*

Le formalisme des ombres permet de calculer les fonctions de corrélation d'opérateurs composites à n'importe quel ordre donné de la théorie des perturbations, tout en maintenant l'invariance par rapport à la supersymétrie. La publication annexée A.6 explique la prescription de calcul des contre-termes non invariants à chaque ordre de la théorie des perturbations. On y expose une simplification du formalisme dans le cas où on se restreint à l'étude d'opérateurs composites BPS ou de dimension canonique petite. Dans ces cas, les fantômes de Faddeev–Popov et les fantômes associés aux ombres peuvent être intégrés trivialement.

***

Le corps de la thèse discute les théories de type cohomologique et leur lien avec les théories supersymétriques correspondantes via une opération de torsion.

Le premier chapitre expose les motivations et introduit quelques concepts concernant la supersymétrie et les théories de jauge.

Le chapitre suivant propose une brève revue de la théorie de Yang–Mills de type cohomologique en huit dimensions introduite par L. Baulieu, I. M. Singer et H. Kanno, et inclut quelques nouvelles notions dérivant des contributions de l'auteur. La fixation de jauge de la théorie est définie en utilisant des champs d'ombre introduits dans la publication annexée A.4. On y discute quelques propriétés de la symétrie vectorielle qui ne sont pas exposées dans les publications.

Le troisième chapitre décrit les réductions dimensionnelles de la théorie en sept et six dimensions. On y explique que les résultats de la publication annexée A.1 s'étendent aux cas de ces théories.

Le quatrième chapitre est constitué de quatre parties distinctes. On discute dans la première certaines interprétations géométriques des champs d'ombre introduits dans la publication annexée A.4, ainsi que des théorèmes de non renormalisation proposés dans [A.5]. La deuxième partie expose un travail sur la gravité topologique qui définit l'opération de torsion en espace courbe. La troisième discute une extension du formalisme introduit dans les publications [A.4, A.5, A.6] qui considère l'invariance superconforme de la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique. La quatrième explique la résolution des contraintes sur le superespace tordu à dix dimensions définies dans [A.7].

Au court de la thèse, on parle souvent de représentation fonctionnelle locale, qu'on appelle dans les publications et de manière générale dans la littérature « représentation hors couche de masse » . On a préféré dans cette thèse ne pas étendre la notion de couche de masse, attribuée aux champs libres vérifiant leurs équations du mouvement, aux cas de champs en interaction. Nous appellerons, dans ce qui suit, représentation fonctionnelle locale une représentation fonctionnelle locale - qui existe toujours dans le formalisme de Batalin–Vilkovisky - indépendante des antichamps.

Table des matières

1 Préambule **21**

1.1 Motivations 21

1.1.1 Pourquoi étudier la supersymétrie 21

1.1.2 La géométrie des théories de jauge 24

1.2 Généralités sur les théories de jauge supersymétriques 27

1.2.1 Quelques notions de supersymétrie 27

1.2.2 Les champs de jauge, connexions de fibrés principaux 28

1.2.3 Représentations non-linéaires de la supersymétrie 32

1.2.4 Les différentes théories de Yang–Mills supersymétriques 32

2 La théorie de type cohomologique souche **35**

2.1 L'opération de torsion en huit dimensions 36

2.1.1 La théorie de Yang–Mills supersymétrique 36

2.1.2 La théorie tordue 38

2.1.3 Formulation tordue de la théorie supersymétrique 44

2.1.4 Torsion du tenseur énergie impulsion 46

2.2 Construction du fixage de jauge 52

2.2.1 Formalisme de Mathai–Quillen 52

2.2.2 Invariance de jauge 57

2.2.3 Symétrie vectorielle 61

3 Réductions dimensionnelles **71**

3.1 La torsion sur un espace de dimension sept 71

3.1.1 La théorie de type cohomologique 72

3.1.2 Torsion de la théorie 74

3.1.3 Symétrie interne des théories équilibrées 76

3.1.4 BRST-exactitude du tenseur énergie impulsion 80

3.1.5 Réalisation fonctionnelle locale de la supersymétrie 82
3.2 La théorie en six dimensions 86
3.2.1 Réduction dimensionnelle sur le tore 87
3.2.2 La théorie tordue 92
3.2.3 Les fonds Ω en six dimensions 95
3.3 Réductions dimensionnelles subséquentes 97

4 Travaux non publiés et interprétations 99
4.1 Champs d'ombre pour la supersymétrie 99
4.1.1 Interprétation géométrique de l'ombre 101
4.1.2 Renormalisation algébrique et géométrie 103
4.2 La supergravité tordue 106
4.2.1 Formulation de la supergravité $\mathcal{N}=2$ jaugée sous $SU(2)$ 106
4.2.2 L'opération de torsion en espace courbe 112
4.3 Invariance superconforme 116
4.3.1 Annulation de la fonction β 117
4.3.2 Identités de Slavnov–Taylor superconformes 123
4.4 Solution des contraintes dans le super-espace tordu 129

A Publications 135
A.1 Symétrie topologique vectorielle de BRSTQFT 136
A.1.1 Introduction 139
A.1.2 Physical evidence for vector symmetry 143
A.1.3 The gravitational and Yang–Mills extended curvatures 147
A.1.4 The action 162
A.1.5 Conservation of $\Lambda_{\mu\nu}$ 165
A.1.6 Untwisting toward Yang–Mills supersymmetry 167
A.1.7 Equivariant Topological Field Theories 169
A.1.8 Conclusion 179
A.2 Supersymétrie maximale en 4 dimensions 181
A.2.1 Introduction 183
A.2.2 From the $D=8$ to the $D=7$ Yang–Mills theory 184
A.2.3 Reduction to four dimensions and $\mathcal{N}=4$ theory 191
A.2.4 Different twists of $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills 195
A.3 Reconstruction de la supersymétrie $\mathcal{N}=1$ 197
A.3.1 Introduction 199

A.3.2 Holomorphic vector symmetry in four dimensions 201
A.3.3 Yang–Mills $\mathcal{N} = 1$ on Calabi–Yau 3-fold 210
A.3.4 Conclusion 211
A.4 Champs d'ombre et jauges supersymétriques 213
A.4.1 Introduction 215
A.4.2 Supersymmetry algebra with shadow fields 217
A.4.3 Slavnov–Taylor identities for s and Q symmetries 220
A.4.4 Non-local supersymmetry in the Landau-gauge 226
A.4.5 Supersymmetric anomalies 229
A.4.6 General local solution of the Slavnov–Taylor identities 236
A.4.7 Interpolating gauges 237
A.4.8 An example : the case of $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills 239
A.4.9 Conclusion 240
A.5 Finitude de super-Yang–Mills $\mathcal{N} = 4$ 241
A.5.1 Introduction 244
A.5.2 Twisted $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills 246
A.5.3 Renormalization of the action 252
A.5.4 Physical observables 256
A.5.5 Protected and 1/2 BPS operators 257
A.5.6 Cancellation of the β function 262
A.5.7 Conclusion 267
A.6 Prescription de renormalisation 269
A.6.1 Introduction 270
A.6.2 Supersymmetry Slavnov–Taylor identities 272
A.6.3 Enforcement of supersymmetry 276
A.7 Yang–Mills supersymétrique en dix dimensions 284
A.7.1 Introduction 286
A.7.2 Ten dimensional super-Yang–Mills with auxiliary fields 287
A.7.3 Link with eight-dimensional Yang–Mills BRSTQFT 293
A.7.4 Toward a twisted superspace formulation 295
A.7.5 Super-Yang–Mills action in superspace 297

B Formulaire **299**
B.1 L'algèbre de Clifford sur l'espace euclidien de dimension huit 299
B.2 L'algèbre de la 4-forme octonionique 300

B.3 Annexes de la publication annexée A.1 301
B.3.1 $\delta_{\mathfrak{k}}$ invariance of the gauge function in Ω background 301
B.3.2 Ω background in euclidean space 304
B.4 Elimination des doublets triviaux 305

Chapitre 1

Préambule

> « *Figure-toi donc des hommes comme dans une habitation souterraine ressemblant à une caverne, ayant l'entrée ouverte à la lumière sur toute la longueur de la caverne, dans laquelle ils sont depuis l'enfance, les jambes et le cou dans des chaînes pour qu'ils restent en place et voient seulement devant eux, (...) ceux-ci en effet, pour commencer, d'eux-mêmes et les uns des autres, penses-tu qu'ils aient pu voir autre chose que les ombres projetées par le feu sur la partie de la caverne qui leur fait face ? (...) Eh bien sans doute, s'ils étaient capables de dialoguer entre eux, les choses présentes étant les mêmes, ne crois-tu pas qu'ils prendraient l'habitude de donner des noms à cela même qu'ils voient ?* »

L'allégorie de la caverne, traduite du septième livre de la république de Platon

1.1 Motivations

1.1.1 Pourquoi étudier la supersymétrie

Un grand nombre de phénomènes en physique des particules sont décrits par des théories de jauge. Il est admis dans la communauté scientifique que la physique des hautes énergies aux échelles d'ores et déjà accessibles par les expériences, est décrite avec une grande précision par le modèle standard. Mais si les théories de jauge semblent donner une modélisation tout à fait satisfaisante de la physique à haute énergie, de nombreux problèmes théoriques demeurent sans solution. Bien que les physiciens soient aujourd'hui convaincus que la physique des hadrons est décrite par la chromodynamique quantique, le phénomène de confinement des quarks et des gluons demeure obscur. Ce problème majeur est loin d'être le seul en chromodynamique quantique et le phénomène de Higgs pour les interactions électro-faibles n'est pas compris d'un point de vue purement quantique. La très grande complexité de ces problèmes est une des principales motivations pour étudier des modèles plus simples, tels que les théories de jauge supersymétriques. Ces théories possèdent un grand nombre de propriétés simplificatrices, comme, pour ne citer qu'elles, l'annulation de nombreuses divergences dans la théorie des perturbations, l'existence de dualités exactes entre les couplages faibles et forts, des propriétés d'analyticité dans les constantes de couplage, ou encore des propriétés de localisation de l'intégrale fonctionnelle. Bon nombre de résultats concernant les théories de jauge ont été obtenus dans le cas des théories supersymétriques, voir [1, 2, 3] pour quelques revues récentes.

Si les descriptions théoriques, d'une part de la physique des hautes énergies par le modèle standard, et de la cosmologie par la relativité générale de l'autre, sont relativement satisfaisantes d'un point de vue expérimental, le fait qu'elles semblent incompatibles, à première vue, est peu satisfaisant pour l'esprit. En outre, il subsiste un grand nombre de questions qui semblent nécessiter une formulation unifiée des lois de la physique. Parmi elles, les problèmes de la constante cosmologique et de l'entropie des trous noirs, sont intimement liés au problème de quantification de la gravité. Différentes approches ont étés proposées pour résoudre cette importante question. La plus pertinente est très probablement la théorie des cordes. En plus de proposer une quantification cohérente de la gravité, la théorie des cordes constitue également un modèle de grande unification. Si la compréhension de la théorie est encore bien loin d'être exhaustive, où même suffisamment étendue pour qu'on puisse en tirer des prédictions expérimentales précises, elle confère l'espoir de résoudre bien des questions en physique des particules comme en cosmologie moderne. En tant que théorie unificatrice, on espère y trouver des réponses au problème de la hiérarchie des masses et de la brisure de la symétrie CP dans le modèle standard. La quantification de la gravité permettrait quand à elle une compréhension nouvelle du « big bang » et de l'entropie des trous noirs. La théorie des cordes offre d'ores et déjà un certain nombre de modèles simplifiés qui permettent de comprendre l'entropie de trous noirs supersymétriques d'un point de vue statistique, et certaines résolutions de singularité de type espace. D'un point de vue indirect, la théorie des cordes ouvre également une nouvelle fenêtre sur les théories de jauge. Dans certains fonds particuliers, et dans certaines limites, la très grande majorité de l'infinitude des degrés de liberté de la théorie des cordes se découple, et la théorie des cordes devient équivalente à une théorie de jauge. Ce phénomène se produit dans le cadre de la conjecture AdS/CFT entre la théorie de Yang–Mills supersymétrique à $\mathcal{N} = 4$ générateurs de supersymétrie et la théorie des cordes de type IIB dans une géométrie de fond $AdS_5 \times S^5$ (voir [4, 5] pour des revues sur le sujet). La théorie des cordes permet également de donner un sens à des théories de Yang–Mills non renormalisables dont certaines pourraient avoir un rôle important dans la compréhension d'une éventuelle brisure de supersymétrie à haute énergie.

Les seules théories de champ en quatre dimensions qu'on sache résoudre exactement sont des théories libres. Celle-ci servent de base pour la construction de développement perturbatifs formels, par exemple dans la constante réduite de Planck $\hbar$. Les quantités pertinentes sont les fonctions de corrélation des champs et de polynômes locaux dans les champs et leur dérivées. On utilise couramment la fonctionnelle génératrice $Z[J, u]$

$$Z[J,u] = e^{\frac{i}{\hbar} Z_c[J,u]} \equiv \left\langle e^{\frac{i}{\hbar}\int (J_a\, \varphi^a + u_A \mathcal{O}^A\,)} \right\rangle \tag{1.1}$$

où le symbole $\langle\ \rangle$ est formellement représenté par une intégrale fonctionnelle de Feynman. $Z_c[J, u]$ ainsi définie est la fonctionnelle génératrice connexe, qui se représente formellement par une somme de diagrammes de Feynman connexes. Sa transformée de Legendre

$$\Gamma[\varphi] \equiv \left(Z_c[J,u] - \int J_a\, \varphi^a \right)_{| \frac{\delta Z_c}{\delta J} = \varphi} \tag{1.2}$$

est elle donnée par une somme de diagrammes une particule irréductibles. Elle est souvent appelée action effective, car son terme d'ordre zéro en $\hbar$ est l'action classique de la théorie. De manière générale il est en principe nécessaire de calculer toutes les fonctions de corrélation d'opérateurs composites. Ces opérateurs composites peuvent être locaux, mais aussi localisés sur des sous-variétés de l'espace physique considéré, comme c'est le cas des opérateurs de Wilson pour des boucles fermées. Le cas des théories de jauge non-abéliennes est en quelque sorte orthogonal à celui des théories libres, étant donné que les seuls opérateurs pertinents sont les opérateurs invariants de jauge qui sont nécessairement composites dans le cas d'un groupe de jauge semi-simple. Une théorie de champ pour laquelle il serait possible de calculer l'ensemble des fonctions de corrélation d'opérateurs locaux composites invariants de jauge constituerait une avancée théorique remarquable dans la compréhension des théories de jauge. La théorie de Yang–Mills à $\mathcal{N} = 4$ générateurs de supersymétrie en dimension 4 admet une algèbre de symétrie particulièrement grande dans sa phase conforme, l'algèbre superconforme $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$. Le calcul des dimensions anormales des opérateurs composites locaux de cette théorie possède une structure intégrable au niveau perturbatif dans la limite d'un grand nombre de couleurs $N \to \infty$. Une structure intégrable à tous les ordres de la théorie des perturbations a été conjecturée dans cette même limite. La structure intégrable, au moins au niveau classique, de la théorie des cordes de type IIB dans une géométrie de fond AdS/CFT permet de caresser l'espoir que la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 4$ admette une structure intégrable au niveau non-perturbatif qui pourrait permettre un jour de calculer exactement les fonctions de corrélation de n'importe quels opérateurs composites locaux de la théorie.

1.1.2 La géométrie des théories de jauge

Malgré les grandes réussites théoriques et phénoménologiques de la théorie des perturbations en théorie des champs, il est aujourd'hui clair qu'un grand nombre de phénomènes intéressants en physique des particules sont de nature non-perturbative. V. N. Gribov a mis en évidence une difficulté de la formulation intégrale fonctionnelle des théories de jauge non-abéliennes fixées de jauge, à savoir qu'elle n'a de sens que perturbativement [6]. Cette obstruction à l'existence d'une jauge globalement définie est de nature purement géométrique. I. M. Singer a en effet établi que ce problème était dû à la topologie non-triviale de l'espace des orbites de jauge [7]. La définition complète de l'intégrale fonctionnelle en théorie des champs doit donc faire intervenir un atlas de cartes ainsi qu'une partition de l'unité sur un espace courbe de dimension infinie et qui plus est stratifié. Ce problème, insurmontable d'apparence, peut être résolu dans le cas où un théorème de localisation permet de réduire l'intégrale fonctionnelle à une intégrale sur un espace de dimension finie. Cette propriété exceptionnelle est une caractéristique des théories topologiques de type cohomologique. En particulier, la théorie de Donaldson–Witten [8] et ses extensions constituent des exemples de théories de Yang–Mills topologiques de type cohomologique pour lesquelles l'intégrale fonctionnelle se réduit par localisation à une intégrale sur un espace de dimension finie [9].

La théorie de Donaldson–Witten a été introduite par ce dernier comme un sous secteur de la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ qui peut être défini sur une variété riemannienne quadridimensionnelle quelconque, bien que la théorie supersymétrique ne soit bien définie que sur un espace plat. Pour ce faire, il utilise des variables dites tordues, c'est à dire des champs correspondant à la décomposition des représentations irréductibles de $Spin(4) \times SU(2)_R \cong SU(2)_+ \times SU(2)_- \times SU(2)_R$ (groupe de symétrie globale de la théorie) auxquelles appartiennent les champs de la théorie supersymétrique, en des représentations irréductibles de $\big(SU(2)_+ \times SU(2)\big)/\mathbb{Z}_2$ (groupe des automorphismes verticaux du fibré des repères) ; où $SU(2)$ est défini comme la diagonale de $SU(2)_- \times SU(2)_R$ [10]. Dans ces nouvelles variables, les générateurs de supersymétrie se réorganisent dans les représentations irréductibles $(0,0)$, $(0,1)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ de $SU(2)_+ \times SU(2)$. Le noyau du générateur scalaire de supersymétrie Q définit un sous espace $\mathscr{V}$ de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ de la théorie

$$\mathscr{V} \equiv \{|\psi\rangle \in \mathscr{H} \mid Q|\psi\rangle = 0\} \tag{1.3}$$

$\mathscr{H}$ muni de l'opérateur nilpotent Q possède une structure de complexe différentiel gradué qui s'étend à l'algèbre des opérateurs linéaires agissant sur lui. Du fait que la supersymétrie scalaire n'est pas anormale, le changement de variable infinitésimal des champs φ^A de la théorie, en $\varphi^A + \theta Q \varphi^A$, laisse invariantes la mesure et l'action dans le formalisme fonctionnel. On peut déduire de ce résultat que toute fonction de corrélation de fonctionnelles des champs Q-fermés (c'est à dire invariantes sous l'action de Q) contenant au moins une fonctionnelle des champs Q-exact (qui peut s'écrire comme l'action de Q appliquée à une fonctionnelle antécédente) est nulle. Ce qui implique formellement dans le formalisme opératoriel que les vecteurs Q-exacts de $\mathscr{V}$ ont un produit scalaire nul avec tout autre vecteur de $\mathscr{V}$, et que par conséquent, les éléments de $\mathscr{V}$ dont la différence est Q-exacte peuvent être identifiés. On définit le sous-espace de Hilbert $\mathscr{H}_{\mathrm{T}}$ de $\mathscr{H}$ comme la complétion de la cohomologie de Q dans $\mathscr{H}$. Ce sous-espace de Hilbert détermine un sous secteur, dit topologique, de la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 2$, qui constitue une théorie quantique de champ à part entière. Dans cette théorie, la charge de supersymétrie scalaire n'est plus interprétée comme le générateur associé à une symétrie de la théorie, mais comme une charge BRST [11]. Les fermions de la théorie jouent alors le rôle de fantômes et d'antifantômes associés à la symétrie topologique et il devient naturel d'interpréter le groupe de symétrie globale $SU(2)_+ \times SU(2)$ comme associé au groupe des rotations de l'espace. On nomme torsion (*twist*) la procédure qui consiste à passer de la théorie de Yang–Mills supersymétrique à la théorie topologique ainsi définie, et on qualifie cette dernière de tordue (*twistée*). Il est important de ne pas confondre la formulation tordue d'une théorie supersymétrique, ce qui consiste seulement à utiliser les variables tordues et donc un formalisme où la symétrie globale manifeste est restreinte, d'une théorie supersymétrique tordue pour laquelle on a de surcroît restreint considérablement l'espace de Hilbert de la théorie et réinterprété le groupe des rotations de celle-ci. Le tenseur énergie impulsion de la théorie tordue est une Q variation, d'où on déduit que les observables de celle-ci ne sont pas affectées par des modifications infinitésimales arbitraires de la métrique. Il est possible de définir la théorie sur une variété riemannienne quelconque. En étendant la construction algébrique de Mathai et Quillen d'une classe de Thom, on montre formellement que les observables de la théorie tordue sont des invariants de la structure différentielle des variétés riemanniennes quadridimensionnelles définies par S. K. Donaldson [12].

Un point de vue usuel en théorie des champs est de considérer l'action classique de la théorie comme une perturbation de sa composante quadratique. Mais dans le cas d'une théorie de Yang–Mills, cette procédure ne respecte pas la géométrie globale du problème. Pour remédier à ce défaut, il est indispensable de tenir compte du caractère non-linéaire des équations de Yang–Mills. C'est une des motivations qui ont poussé N. Nekrasov, E. Frenkel et A. Losev à étudier la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ en considérant l'action classique comme la perturbation de l'action non-hermitienne, limite de la première quand la constante de couplage g tend vers zéro alors que la partie imaginaire du paramètre ϑ associé à la classe de Chern (normalement nulle dans le cas hermitien) tend vers $-\infty$, de manière à maintenir finie la combinaison complexe $\tau \equiv \frac{\vartheta}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g^2}$ [13]. Ils ont montré qu'on pouvait étendre le théorème de localisation intervenant dans la théorie de Donaldson–Witten aux observables de la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ dans cette limite particulière, de manière à ce que l'intégrale fonctionnelle se réduise à une intégrale sur l'espace de modules des orbites de jauge autoduales. La théorie de Yang–Mills supersymétrique admet alors une théorie des perturbations autour de cette limite en série formelle du paramètre $\bar{\tau}$.

La théorie de Donaldson–Witten, et ses généralisations [14, 15, 16] ont historiquement été introduites via des opérations de torsion sur des théories supersymétriques. Au cours de cette thèse nous allons suivre le point de vue inverse, et définir les théories de Yang–Mills supersymétriques, comme des extensions des théories topologiques de type cohomologique ou plus généralement des théories de type cohomologique. Nous allons voir que d'autres générateurs de supersymétrie peuvent être introduits naturellement dans le cadre des théorie de type cohomologique, sous forme de symétrie de la fixation de jauge topologique. Nous déduirons de la fixation de jauge complète de la théorie topologique une manière de fixer la jauge dans les théories supersymétriques tout en préservant la supersymétrie. On verra que le fait de considérer les champs de la théorie supersymétrique comme des variables tordues permet des interprétations géométriques amenant naturellement à des théorèmes de non-renormalisation.

1.2 Généralités sur les théories de jauge supersymétriques

1.2.1 Quelques notions de supersymétrie

Selon le théorème de Coleman–Mandula, les seules algèbres de Lie de générateurs de symétrie d'une théorie des champs,[1] consistent en la somme de l'algèbre de Poincaré ou de l'algèbre conforme associée et d'une algèbre de symétrie interne compacte. Il est cependant possible de passer outre à ce théorème en introduisant une superalgèbre de symétrie, c'est à dire une algèbre de Lie dite $\mathbb{Z}_2$ graduée dont les générateurs de graduation non nulle ont pour paramètres les générateurs d'une algèbre de Grassmann. Une algèbre de Lie $\mathbb{Z}_2$ graduée $\mathfrak{g}$ se décompose en $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ tel que des éléments $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ et $Z_\gamma \in \mathfrak{g}_\gamma$ vérifient que $X_\alpha Y_\beta - (-1)^{\alpha\beta} Y_\beta X_\alpha = Z_{\alpha+\beta}$, qu'on notera $[X_\alpha, Y_\beta] = Z_{\alpha+\beta}$, ainsi que l'identité de Jacobi graduée

$$(-1)^{\alpha\gamma}[X_\alpha, [Y_\beta, Z_\gamma]] + (-1)^{\beta\alpha}[Y_\beta, [Z_\gamma, X_\alpha]] + (-1)^{\gamma\beta}[Z_\gamma, [X_\alpha, Y_\beta]] = 0 \qquad (1.4)$$

A partir de l'algèbre de Poincaré de l'espace de Minkowski de dimension n, on peut construire différentes extensions $\mathbb{Z}_2$ graduées. Pour satisfaire au théorème spin-statistique en théorie des champs, les générateurs fermioniques de symétrie, afin de s'exprimer en fonction de courants locaux, doivent être dans des représentations spinorielles de $Spin(n-1,1)$. De manière générale les générateurs fermioniques sont définis dans des représentations irréductibles de $R \times Spin(n-1,1)$ qui apparaissent dans la décomposition de la représentation produit tensoriel de la représentation spinorielle complexe non contrainte de $Spin(n-1,1)$ et d'une représentation de R, où R est un groupe de Lie compact. Les représentations irréductibles sont obtenues à partir de la représentation produit tensoriel (noté avec des indice i pour R et α pour $Spin(n-1,1)$) en imposant des contraintes linéaires de la forme $\lambda^{a\,*}_{\alpha} = B^{a\,\beta}_{\alpha\,b}\lambda^b_\beta$ ou, et $\lambda^a_\alpha = G^{a\,\beta}_{\alpha\,b}\lambda^b_\beta$. Soit l'algèbre de Clifford associée à $Spin(n-1,1)$ engendrée par les matrices de Dirac γ^μ, C la matrice de conjugaison de charge et $\boldsymbol{\tau}^i$ des tenseurs invariants du groupe de symétrie interne, les générateurs fermioniques vérifient des relations d'anticommutation de la forme

$$[\mathcal{Q}_{a\alpha}, \mathcal{Q}_{b\beta}] = 2(C\gamma^\mu)_{a\alpha\, b\beta} P_\mu + 2M(C\boldsymbol{\tau}^I)_{a\alpha\, b\beta} Z_I \qquad (1.5)$$

où les Z_I sont des charges centrales de l'algèbre et M un paramètre.

Dans une théorie de champ supersymétrique, les champs de la théorie, dans des représentations irréductibles du produit du groupe de Poincaré par un groupe de symétrie

[1]Dans le cas où celle-ci vérifie quelques propriétés tout à fait raisonnables, voir [17] pour plus de détails.

interne, se regroupent dans des représentations irréductibles de l'algèbre de supersymétrie. Les particules représentées par des champs d'une représentation irréductible de l'algèbre de supersymétrie sont dites définir un supermultiplet de supersymétrie. Nous nous restreignons dans cette thèse au cas d'algèbres de supersymétrie dépourvues de charges centrales, ce qui correspond au cas $M = 0$ dans l'équation (1.5).

Considérons une théorie de champ libre supersymétrique. On choisit un état $|\psi\rangle$ contenant une seule particule d'énergie E et de masse nulle. On se place dans les coordonnées du cône de lumière associées de telle sorte que l'impulsion de la particule soit donnée par $p_\mu dx^\mu = Edx^+$. Puisque les générateurs de supersymétrie $\mathcal{Q}_{a\alpha}$ commutent avec les générateurs des impulsions, on obtient d'autres particules de même impulsion en appliquant à l'état n'importe lequel des générateurs de supersymétrie, engendrant ainsi par définition un supermultiplet. Projetée sur l'état $|\psi\rangle$, l'algèbre de supersymétrie devient

$$[\mathcal{Q}_{a\alpha}, \mathcal{Q}_{b\beta}]|\psi\rangle = 2E(C\gamma^+)_{a\alpha\, b\beta}|\psi\rangle \tag{1.6}$$

La représentation irréductible de $R \times Spin(n-1, 1)$ associée aux générateurs de supersymétrie se décompose en deux représentations irréductibles isomorphes du petit groupe $R \times Spin(n-2)$ associées à l'impulsion $p_\mu dx^\mu = Edx^+$. Les anticommutateurs non-triviaux peuvent s'écrire sous la forme

$$[\mathcal{Q}^{\dagger A}, \mathcal{Q}_B]|\psi\rangle = 2E\mathcal{P}^A{}_B|\psi\rangle \tag{1.7}$$

où $\mathcal{P}$ est un projecteur ($\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$). On en déduit directement que les générateurs vérifiant $\mathcal{P}^B{}_A\mathcal{Q}_B = 0$ donnent zéro sur $|\psi\rangle$ et que les générateurs vérifiant $\mathcal{P}^B{}_A\mathcal{Q}_B = \mathcal{Q}_A$ agissent sur $|\psi\rangle$ comme un ensemble d'opérateurs de création et d'annihilation. Ceci permet de montrer que pour une algèbre de supersymétrie avec des générateurs fermioniques appartenant à une représentation irréductible de dimension $\mathcal{N}$, les supermultiplets de masses nulles contiennent des particules de spin allant de j à $j + \frac{\mathcal{N}}{8}$. Les théories de Yang–Mills supersymétriques, qui ne contiennent pas de champ de spin supérieur à 1 par définition, peuvent donc admettre jusqu'à 16 charges de supersymétrie.

1.2.2 Les champs de jauge, connexions de fibrés principaux

En théorie des champs, les propriétés des représentations du petit groupe associé à un vecteur nul, impliquent que certaines interactions locales entre des particules de masse nulle de spin supérieur ou égal à un et des particules de spin moins élevé ou massives sont décrites à l'aide de champs qui ne sont définis qu'à une transformation de jauge près [18].

Il en découle que ces champs ne sont pas nécessairement globalement définis sur l'espace physique. Dans le cas du spin 1, on peut comprendre géométriquement cette propriété en définissant un champ de jauge comme une connexion sur un fibré principal.

Un fibré principal P est un espace qui admet une action à droite R libre et propre d'un groupe de topologique G et une projection π sur un espace M appelé la base, de telle sorte que pour tout point p de P et tout élément g de G, $\pi(R_g p) = \pi(p)$. On considère dans ce qui suit que le groupe de structure G est un groupe de Lie et que la base M est le quotient de P par G. Un espace fibré est localement le produit cartésien de sa base par sa fibre, c'est à dire que pour tout point p de projection $\pi(p)$ appartenant à un ouvert contractible U de M, il existe un ouvert V de P contenant p tel que $V \cong U \times G$. On peut définir des coordonnées locales du fibré principal à partir d'un atlas $\{U_i\}$ de M en définissant explicitement sur chaque ouvert U_i des difféomorphismes s_i de $U_i \times G$ dans V_i tels que pour tout g de G, $\pi \circ s_i(g)$ soit l'application identité sur U_i et $R_{g'} s_i(x, g) = s_i(x, gg')$. De telles fonctions s_i sont appelées des sections locales trivialisantes ou des trivialisations locales. On définit alors les fonctions de recollement sur les intersections d'ouverts $U_i \cap U_j$ du fibré principal comme $g_{ij}(x) \equiv {s_i}^{-1}(x) s_j(x, 1)$. Elles vérifient

$$g_{ik}(x) g_{kj}(x) g_{ji}(x) = g_{ij}(x) g_{ji}(x) = 1 \tag{1.8}$$

L'action de G sur P permet d'attribuer de manière unique un vecteur de TP à tout élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associé à G. On définit le vecteur fondamental X^v associé à l'élément X de $\mathfrak{g}$ comme le vecteur défini au point p par

$$X^v_{|p} \equiv \Big(\frac{\partial}{\partial t} R_{e^{tX}}\, p \Big)_{|t=0} \tag{1.9}$$

L'ensemble de ces vecteurs engendre le sous espace vectoriel VP des vecteurs verticaux de TP. Cette application commute avec les crochets de Lie de l'algèbre $\mathfrak{g}$ et des vecteurs de TP. Le sous espace VP n'a pas de supplémentaire naturel dans TP. Une connexion sur un fibré principal est la définition d'un supplémentaire HP cohérent avec l'action de G, c'est à dire que pour tout X de HP, $X_{|R_g p} = R_{*\,g} X_{|p}$. Cette définition est équivalente à la donnée d'une 1-forme équivariante A de TP^* à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

$$A_{|R_g p}(R_{*\,g} X_{|p}) = g^{-1} A_{|p}(X_{|p}) g \tag{1.10}$$

telle que pour tout vecteur fondamental X^v, $A(X^v) = X$. Le noyau de cette forme définit de manière unique un supplémentaire HP de VP dans TP et cette forme peut être définie de manière unique par la définition de ce dernier.

Pour tout espace vectoriel V sur lequel G agit à gauche on peut définir un fibré E associé au fibré principal P comme le quotient de leur produit par G, qu'on écrit $P \times_G V$, où la notation sous-entend que l'action de G passe à travers le produit.

Les champs d'une théorie physique peuvent être en particulier des sections de fibrés vectoriels sur M. On considère le plus souvent le fibré cotangent des formes sur M et différents fibrés spinoriels dont les fibres vectorielles correspondent à des représentations spinorielles. Dans le cas d'une théorie de jauge, les champs sont des sections de ces mêmes fibrés à valeur dans des fibrés vectoriels associés à un fibré principal dont la connexion correspond au champ de jauge de la théorie.

Localement, on définit un ensemble de trivialisations locales s_i. Les applications de restriction correspondantes, s_i^*, permettent de définir des expressions locales de ces différents champs sur les ouvert U_i. Si on considère le champ de jauge A et d'autre champs φ^a à valeur dans un fibré vectoriel associé, ces champs peuvent êtres représentés localement par des formes ou des sections de fibré spinoriel sur M. Les fonctions de transition permettent de recoller ces fonctions sur les intersections $U_i \cap U_j$

$$s_i^* A = g_{ij}\ s_j^* A\ g_{ij}^{-1} + g_{ij}\, d\, g_{ij}^{-1} \qquad s_i^* \varphi^a = l_{g_{ij}}\ s_j^* \varphi^a \tag{1.11}$$

où l_g représente l'action de G sur la fibre V. Les formes sur M à valeur dans un fibré vectoriel E associé à P peuvent être définies comme des formes horizontales et équivariantes de P à valeur dans V. Elles constituent l'espace des formes tensorielles $\Omega^\bullet(P, V)$ sur P. L'application de la différentielle extérieure sur une forme tensorielle n'est pas horizontale en général, mais sa projection sur l'espace des formes horizontale HP^* donne une forme tensorielle. On définit la différentielle covariante comme cette différentielle horizontale, qu'on notera d_A. Cette différentielle n'est pas nilpotente, son carré est donné par l'action d'une 2-forme tensorielle F sur la forme tensorielle considérée, qu'on appelle la courbure. On a localement les expressions

$$s_i^* F = s_i^* d_A A = d\ s_i^* A + (s_i^* A)^2 \qquad s_i^*\ d_A \varphi^a = d\ s_i^* \varphi^a + l_{s_i^* A}\ s_i^* \varphi^a \tag{1.12}$$

La connexion permet de définir un champ de vecteur horizontal sur HP à partir d'un champ de vecteur défini sur la base. On appelle v^h le relèvement horizontal du vecteur v, défini de manière unique par le choix d'un point de P et

$$\pi_*(v^h) = v \qquad A(v^h) = 0 \tag{1.13}$$

Contrairement au crochet de Lie de deux vecteurs verticaux qui définit un vecteur vertical, le crochet de Lie de deux vecteurs horizontaux n'est pas horizontal en général. La déviation est mesurée par la courbure

$$\{v^h, \bar{v}^h\} = \{v, \bar{v}\}^h - F(v, \bar{v})^v \tag{1.14}$$

On définit les automorphismes verticaux sur un fibré principal comme les difféomorphismes f du fibré principal sur lui même qui préservent la base et l'action du groupe G

$$\pi \circ f(p) = \pi(p) \qquad R_g \circ f(p) = f \circ R_g(p) \tag{1.15}$$

L'ensemble des automorphismes verticaux est isomorphe à l'ensemble des sections du fibré associé au fibré principal, de fibre G et d'action de G sur G l'action adjointe. Il constitue un groupe de Lie de dimension infinie, qu'on notera $\mathscr{G}$, dont l'algèbre de Lie est donnée par l'ensemble des sections du fibré associé de fibre $\mathfrak{g}$ et d'action de G sur $\mathfrak{g}$ l'action adjointe.

Une théorie de jauge peut être considérée comme une théorie définie sur un espace M, dont les champs quantiques sont définis sur un fibré principal P au dessus de M. Les états physiques de cette théorie peuvent être formellement décrits par des fonctionnelles des champs définis sur P et des fonctions de M^n. Pour être bien définies sur des fonctions de M^n, ces fonctionnelles ne doivent pas dépendre des coordonnées sur la fibre de P. Ceci est imposé en pratique par le fait que mis à part la connexion, tous les champs peuvent être vus comme des tenseurs horizontaux et équivariants sur le fibré principal et que toute fonctionnelle décrivant un état physique est invariante sous les automorphismes verticaux de celui-ci. Notons que cette notion conforte l'extension de l'idée de Kaluza et Klein, que les théories de jauge seraient des limites à basse énergie de théories de la gravité sur des espaces de dimension plus élevée, dans la limite où la gravité sur la base pourrait être considérée comme classique. En physique, on utilise les objets définis localement sur les ouverts U_i de M. Les automorphismes verticaux correspondent localement à ce qu'on appelle en physique, les transformations de jauge. L'invariance de jauge d'une fonctionnelle des champs dans son expression locale, implique que celle-ci soit définie globalement sur le fibré principal, puisque les recollements sont définis localement par des transformations de jauge dont les paramètres sont les fonctions de transition. Par analogie avec la relativité générale, où la covariance de l'action permet à celle-ci d'être définie globalement sur la variété et de ne dépendre que de la classe de coordonnées locales modulo l'action des difféomorphismes, l'invariance de jauge de l'action permet à celle-ci d'être globalement définie sur le fibré principal et de ne dépendre que de la classe de trivialisations locales modulo l'action des automorphismes verticaux.

1.2.3 Représentations non-linéaires de la supersymétrie

Pour qu'une algèbre de symétrie agisse sur les observables, il suffit qu'elle agisse sur les champs définis sur P en respectant la loi d'algèbre, modulo l'action des automorphismes verticaux. Localement, ceci implique que la loi d'algèbre est respectée sur les champs modulo des transformations de jauge, et de telle sorte que l'application de chaque générateur à un champ bien défini sur P soit également bien définie. Tous les champs tensoriels sont définis sur des fibrés vectoriels au dessus de M, et par conséquent, leurs variations infinitésimales seront définies sur les même fibrés vectoriels. Si ce n'est pas le cas de la connexion, la différence de deux connexions peut être définie comme une 1-forme à valeur dans le fibré associé de fibre $\mathfrak{g}$ et d'action sur $\mathfrak{g}$, l'action adjointe.

Les opérateurs de translation bien définis sur P seront les relèvements horizontaux de dérivées de Lie de M, sur P. C'est à dire localement

$$s_i^* \ \mathscr{L}_\kappa A = i_\kappa \ s_i^* F \qquad s_i^* \ \mathscr{L}_\kappa \varphi^a = \mathcal{L}_\kappa \ s_i^* \varphi^a + l_{i_\kappa s_i^* A} \ s_i^* \varphi^a \tag{1.16}$$

Dans ce qui suivra on n'écrira plus explicitement les trivialisations locales et on écrira cette même équation sous une forme plus familière aux physiciens

$$\mathscr{L}_\kappa \varphi^a = \mathcal{L}_\kappa \varphi^a + \delta^{\text{jauge}}(i_\kappa A)\varphi^a \tag{1.17}$$

L'équation (1.5) dans le cas d'une théorie de jauge, prendra sur les champs la forme suivante

$$[\mathcal{Q}_{a\alpha}, \mathcal{Q}_{b\beta}] = -2i(C\gamma^\mu)_{a\alpha\, b\beta} \left(\partial_\mu + \delta^{\text{jauge}}(A_\mu)\right) + 2(C\tau^k)_{a\alpha\, b\beta}\, \delta^{\text{jauge}}(\phi_k) \tag{1.18}$$

où nous avons ignoré dans ce cas l'existence d'éventuelles charges centrales. On expliquera dans le dernier chapitre comment ces transformations de jauge peuvent être déterminées géométriquement, mais il nous faudra tout d'abord mieux comprendre la géométrie de l'espace des orbites de jauge. Notons également qu'en général cette équation ne s'applique qu'aux champs modulo les équations du mouvement, et que l'algèbre de supersymétrie n'admet pas toujours de représentation fonctionnelle locale non linéaire.

1.2.4 Les différentes théories de Yang–Mills supersymétriques

Comme nous l'avons déjà vu, une théorie de Yang–Mills supersymétrique peut admettre jusqu'à 16 charges de supersymétrie. Ceci implique qu'une théorie de Yang–Mills supersymétrique peut être définie sur un espace de Minkowski de dimension allant jusqu'à dix. En effet la représentation spinorielle de $Spin(9,1)$ de Majorana–Weyl est de dimension 16, et aucune représentation spinorielle de cette dimension n'existe en dimension plus élevée. Avec seize générateurs de supersymétrie, tous les supermultiplets contiennent une particule de spin supérieur ou égal à 1. On se limitera ici au supermultiplet vectoriel contenant le champs de Yang–Mills comme champ de spin le plus élevé. Toutes les autres théories de Yang–Mills maximalement supersymétriques peuvent être engendrées à partir de la théorie « souche » en dix dimensions, par une procédure de réduction dimensionnelle. Plus de 8 charges de supersymétries impliquent la supersymétrie maximale, le second cas est donc celui de 8 générateurs de supersymétrie. Dans cette seconde éventualité, la théorie « souche » est définie sur l'espace de Minkowski à six dimensions. La dernière possibilité que l'on considérera est celle de 4 générateurs de supersymétrie, dont la théorie « souche » est Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ en quatre dimensions. Ces trois classes de théorie incluent respectivement les théories de Yang–Mills supersymétriques $\mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = 2$ et $\mathcal{N} = 4$ en quatre dimensions. Ces théories ne sont à priori bien définies que sur un espace de Minkowski, mais il est possible d'étendre leur définition sur un espace euclidien par continuation analytique [19]. On fait cependant remarquer qu'une condition de type Majorana, ou de ses différentes généralisations faisant intervenir le groupe de symétrie interne, qui existe pour $Spin(n-1,1)$, existe également pour $Spin(n-2)$. Ceci implique que les algèbres de supersymétries de type Yang–Mills « souches » sont en dimension 8, 4 et 2 dans un espace euclidien. Mais bien que ces algèbres de symétrie puissent être construites, elles admettent en général un groupe de symétrie interne non compact qui implique qu'un des champs scalaires de toute théorie admettant cette symétrie ait un terme cinétique du mauvais signe dans l'action. La bonne définition de la théorie nécessite de redéfinir ces champs de telle sorte que les transformations de supersymétrie définissent alors des identités de Ward formelles qui ne correspondent pas à des transformations infinitésimales des champs. Dans ce qui suit, nous utiliserons cependant parfois ces représentations lorsqu'elles existent, car elles permettent de décrire les identités de Ward des théories physiques associées comme des transformations infinitésimales des champs et sont plus en accord avec certaines interprétations algébriques dans les théories de type cohomologique correspondantes. Dans les cas de la supersymétrie non maximale, il est possible de considérer des supermultiplets de matière incluant seulement des champs scalaires et des spineurs.

Chapitre 2

La théorie de type cohomologique souche

La procédure de torsion et l'interprétation de la théorie tordue qu'on en fait sont différentes en dimension supérieure à quatre. Dans les cas quadridimensionnels l'opération de torsion se fait en réduisant la covariance sous l'action du groupe des rotations fois un groupe de symétrie interne à un sous groupe, qui fait intervenir la diagonale d'un sous groupe $SU(2)$ de $Spin(4)$ ou de $Spin(4)$ lui même avec un sous groupes $SU(2)$ ou $Spin(4)$ du groupe de symétrie interne. La formulation ainsi obtenue est toujours covariante sous l'action d'un groupe isomorphe à $Spin(4)$ qui est réinterprété comme associé au groupe des rotations de la théorie, ce qui permet de définir la théorie sur une variété riemannienne arbitraire. En dimension supérieure, l'opération de torsion se fait en réduisant la covariance sous le groupe des rotations $Spin(n)$ à un sous groupe G de celui-ci, pour lequel la représentation vectorielle reste irréductible. La nouvelle théorie admet une covariance réduite et ne peut être définie que sur des variétés dites, d'holonomie spéciale, ou des variétés « plus simples » , dont les groupes d'holonomie sont des sous groupes de G [16, 20]. Les théories topologiques de type cohomologique sont invariantes par des déformations arbitraires de la métrique, ce qui permet de montrer formellement l'invariance des observables par les homéomorphismes isotopes à l'identité. Dans le cadre des théories de type cohomologique faisant intervenir explicitement une G-structure, celles-ci ne seront en général invariantes que par les homéomorphismes isotopes à l'identité qui préservent cette G-structure. On admet cependant que ces observables sont invariantes sous l'action de tout difféomorphisme, comme dans le cas des théories topologiques.

2.1 L'opération de torsion en huit dimensions

La théorie de type cohomologique de Yang–Mills définie par une opération de torsion appliquée à une théorie supersymétrique sur l'espace de dimension la plus élevée est définie sur une variété de Joyce de dimension huit [16, 20]. On peut l'obtenir par une opération de torsion sur la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N}=2$ définie sur un espace plat euclidien.

2.1.1 La théorie de Yang–Mills supersymétrique

Pour plus de clarté nous allons brièvement dériver l'action et les symétries de cette théorie par réduction dimensionnelle de la théorie de Yang–Mills supersymétrique en dimension dix. Les champs de cette théorie consistent en un champ de jauge, connexion d'un fibré principal de groupe G, et un fermion dans une représentation spinorielle de Majorana–Weyl à valeur dans le fibré adjoint associé [21].

$$\int_M d^{10}x \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F_{mn}F^{mn}+\frac{i}{2}(\overline{\Lambda}\not{D}\Lambda)\right) \tag{2.1}$$

avec les matrices gamma en dix dimensions définies à partir de celles en huit comme suit

$$\Gamma^m \equiv \sigma_2\otimes\gamma^\mu, \sigma_2\otimes\gamma_9, \sigma_1\otimes 1 \tag{2.2}$$

A l'aide d'un spineur constant dans la représentation de Majorana–Weyl, on peut écrire les transformations de supersymétrie de la manière suivante

$$\begin{aligned} \delta A_m &= i\big(\overline{\epsilon}\Gamma_m\Lambda\big) \\ \delta\Lambda &= \not{F}\epsilon \end{aligned} \tag{2.3}$$

où la convention pour $\not{F}$ sera la même quelque soit la dimension, c'est à dire qu'une forme barrée de rang n est la contraction de celle-ci avec n matrices gamma, avec un facteur $\frac{1}{n!}$. On ne peut pas obtenir directement la théorie euclidienne en huit dimensions par réduction dimensionnelle sur un tore, puisque la théorie à dix dimensions est définie sur un espace de Minkowski. La théorie définie sur un espace de Minkowski à huit dimensions obtenue par réduction dimensionnelle a pour champs, un champ de jauge, un scalaire et un pseudoscalaire ainsi qu'un spineur de Majorana. L'action prend la forme

$$\begin{aligned} \int_M d^8x \mathrm{Tr}\Big(&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}D_\mu\phi_1D^\mu\phi_1-\frac{1}{2}D_\mu\phi_2D^\mu\phi_2+\frac{i}{2}\left(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\right) \\ &-\frac{1}{2}[\phi_1,\phi_2]^2+\frac{i}{2}\left(\overline{\lambda}\gamma_9[\phi_1,\lambda]\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}[\phi_2,\lambda]\right)\Big) \end{aligned} \tag{2.4}$$

et les transformations de supersymétrie sont

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu &= i(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda) \\
\delta\phi_1 &= i(\bar{\epsilon}\gamma_9\lambda) \\
\delta\phi_2 &= (\bar{\epsilon}\lambda) \\
\delta\lambda &= \not{F}\epsilon - \gamma_9\not{D}\phi_1\epsilon - i\not{D}\phi_2\epsilon - i\gamma_9[\phi_1,\phi_2]\epsilon
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Cette représentation de la supersymétrie peut être continûment déformée par extension de la méthode de Van Nieuwenhuizen et Waldron [22]

$$
\begin{gathered}
x^0 \to e^{-i\theta}x^0 \qquad\qquad \gamma^8 \equiv i\gamma^0 \\
A_\mu \to (e^{i\theta}A_8, A_i) \\
\lambda \to e^{\frac{1}{2}\theta\gamma^8\gamma_9}\lambda \qquad\qquad \lambda^\dagger \to \lambda^\dagger e^{\frac{1}{2}\theta\gamma^8\gamma_9} \\
\phi_1 \to e^{i\theta}\phi_1 \qquad\qquad \phi_2 \to \phi_2
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

La représentation sur un espace euclidien est obtenue pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. L'action supersymétrique correspondante est cependant mal définie, le terme cinétique du champ ϕ_1 et le terme quartique dans les champs scalaires sont du mauvais signe. La bonne définition de la rotation de Wick nécessite de considérer une action non hermitienne et les transformations de supersymétries comme des identités de Ward formelles qui ne sont pas des variations infinitésimales des champs [19]. L'intégration fonctionnelle sur les fermions étant purement algébrique, on peut considérer les champs spinoriels et les paramètres de supersymétrie dans la représentation de Majorana. La bonne définition de la théorie est obtenue en substituant $-i\phi_1$ au champ ϕ_1 dans l'action et les transformations de supersymétrie. On obtient ainsi l'action de la théorie euclidienne désirée

$$
\begin{aligned}
\int_M d^8x \mathrm{Tr}\Big(&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_\mu\phi_1 D^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}D_\mu\phi_2 D^\mu\phi_2 - \frac{i}{2}\left(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\right) \\
&-\frac{1}{2}[\phi_1,\phi_2]^2 - \frac{i}{2}\left(\overline{\lambda}\gamma_9[\phi_1,\lambda]\right) - \frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}[\phi_2,\lambda]\right)\Big)
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

et les transformations de supersymétrie

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -i(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda) \\
\delta\phi_1 &= -i(\bar{\epsilon}\gamma_9\lambda) \\
\delta\phi_2 &= -(\bar{\epsilon}\lambda) \\
\delta\lambda &= \not{F}\epsilon - \gamma_9\not{D}\phi_1\epsilon - i\not{D}\phi_2\epsilon - i\gamma_9[\phi_1,\phi_2]\epsilon
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

On peut calculer le commutateur de deux supersymétries, et remarquer qu'on obtient une translation modulo une transformation de jauge et les équations du mouvement. Sur le champ de jauge et les deux champs scalaires, l'algèbre est en involution comme suit

$$[\delta_1, \delta_2] = -2i(\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2)\big(\partial_\mu + \delta^{\text{jauge}}(A_\mu)\big) - 2\,\delta^{\text{jauge}}\big(\bar{\epsilon}_1[i\gamma_9\phi_1 + \phi_2]\epsilon_2\big) \tag{2.9}$$

alors que dans le cas du fermion

$$[\delta_1, \delta_2]\lambda = -2i(\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2) D_\mu \lambda - [2\,(\bar{\epsilon}_1[i\gamma_9\phi_1 + \phi_2]\epsilon_2)\,, \lambda] - M\big(i\not{D}\lambda + i\gamma_9[\phi_1, \lambda] + [\phi_2, \lambda]\big) \tag{2.10}$$

où

$$\begin{aligned} M = \Big(&-\frac{7}{16}\big(\bar{\epsilon}_1\epsilon_2\big) - \frac{7}{16}\big(\bar{\epsilon}_1\gamma^\mu\epsilon_2\big)\gamma_\mu + \frac{3}{2}\big(\bar{\epsilon}_1\gamma^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_2\big)\gamma_{\mu\nu\sigma\rho} \\ &+ \frac{3}{8}\big(\bar{\epsilon}_1\gamma_9\gamma^{\mu\nu\sigma}\epsilon_2\big)\gamma_9\gamma_{\mu\nu\sigma} - \frac{7}{16}\big(\bar{\epsilon}_1\gamma_9\epsilon_2\big)\gamma_9\Big) \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.1.2 La théorie tordue

Sur une variété de dimension huit dont le groupe d'holonomie est inclus dans $Spin(7) \subset SO(8)$, où l'inclusion est de telle sorte que $Spin(7)$ agit sur un vecteur de $SO(8)$ comme sur un spineur de Majorana, il est possible de définir globalement un spineur constant ζ qui peut être choisi de Majorana–Weyl chiral et normé [20]. La donnée de ce spineur permet de définir une 4-forme constante sur la variété, dite 4-forme octonionique, étant donné son lien direct avec les coefficients de structure des octonions.

$$\big(\bar{\zeta}\zeta\big) = 1 \qquad\qquad 4!\big(\bar{\zeta}\gamma_{\mu\nu\sigma\rho}\zeta\big) = \Omega_{\mu\nu\sigma\rho} \tag{2.12}$$

La représentation d'un spineur de Majorana en dimension huit euclidienne est réductible dans ses composantes chirales et antichirales. Sous l'action de $Spin(7)$, un spineur de Majorana–Weyl chiral se représente dans la représentation somme directe de la représentation scalaire et de la représentation vectorielle de $Spin(7)$. Cette dernière est équivalente à celle d'une 2-forme en huit dimensions, anti-autoduale au sens de la 4-forme octonionique

$$\chi = \frac{1}{2}\big(\chi - \star\Omega_{\wedge}\chi\big) \tag{2.13}$$

La représentation d'un spineur antichiral est quand à elle isomorphe à la représentation spinorielle de $Spin(7)$, c'est à dite la représentation vectorielle en huit dimensions. On peut donc décomposer un spineur de Majorana en huit dimensions comme suit

$$\begin{aligned}\lambda_+ &= (\eta + \not{\chi})\zeta \\ \lambda_- &= i\not{\Psi}\zeta\end{aligned} \tag{2.14}$$

On redéfinit les champs scalaires de la manière suivante

$$\Phi \equiv i\phi_1 + \phi_2 \qquad\qquad \bar{\Phi} \equiv \frac{1}{2}\big(i\phi_1 - \phi_2\big) \tag{2.15}$$

Partant de la théorie supersymétrique définie sur un espace plat, il est possible de tordre (*twister*) les générateurs de supersymétrie de la même manière. Si on ne désire conserver que la charge scalaire de supersymétrie, l'action, l'algèbre et en fait la théorie, peuvent être définies sur une variété arbitraire dont le groupe d'holonomie est inclus dans $Spin(7)$. Afin que le carré de la charge scalaire soit donné par une transformation de jauge indépendamment des équations du mouvement, on introduit une 2-forme anti-autoduale auxiliaire T. La charge scalaire agit comme suit sur les champs

$$\begin{aligned}
sA &= \Psi \\
s\Psi &= -d_A\Phi \\
s\Phi &= 0 \\
\\
s\bar{\Phi} &= \eta \\
s\eta &= [\Phi, \bar{\Phi}] \\
\\
s\chi &= F^- + T \\
sT &= \big(\, d_A\Psi\,\big)^- + [\Phi, \chi]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

On reconnaît la forme de la différentielle d'un modèle de Cartan de cohomologie équivariante pour le groupe des automorphismes verticaux d'un fibré principal de base octodimensionnelle [33]. Il s'agit de la forme équivariante de l'opérateur BRST topologique définie par L. Baulieu, I. M. Singer et H. Kanno [16].

La forme tordue de l'action est obtenue en appliquant le changement de variable et en ajoutant un terme quadratique pour le champ auxiliaire T, dont l'intégration gaussienne est triviale.

$$\begin{aligned}\int_M d^8x \mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \eta D_\mu\Psi^\mu + D_\mu\bar{\Phi}D^\mu\Phi + 4\chi^{\mu\nu}D_\mu\Psi_\nu \\ +2\bar{\Phi}\Psi_\mu\Psi^\mu + 2\Phi\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu} + \Phi\eta^2 + \frac{1}{2}[\Phi, \bar{\Phi}]^2 + T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\Big)\end{aligned} \tag{2.17}$$

La décomposition des représentations de $Spin(8)$ dans des représentation de $Spin(7)$ correspondant à l'opération de torsion définit le champ Φ comme proportionnel au complexe conjugué de $\bar{\Phi}$ et les champs fermioniques Ψ, η et χ comme réels. L'opérateur BRST topologique est ainsi un opérateur formel qui ne correspond pas à une transformation infinitésimale des champs. L'interprétation algébrique de la différentielle BRST topologique comme la différentielle d'un modèle de Cartan nécessite pourtant que celle-ci soit réelle. De plus, le champ scalaire Φ se localise dans la théorie de type cohomologique sur une courbure de l'espace des connexions, considéré comme un fibré principal de groupe de structure, le groupe des transformations de jauge quotienté par le centre du groupe de jauge, et doit par conséquent être défini réel. La bonne définition de la théorie de type cohomologique nécessite ainsi une redéfinition des champs de telle sorte que les champs A, Ψ, Φ soient réels et les champs $\bar{\Phi}$, η, χ et T imaginaires purs. Examinons la théorie des champs qui admet (2.17) pour action, en considérant que les champs A et Ψ sont réels, que les champs scalaires Φ et $\bar{\Phi}$ sont définis en fonctions de champs réels ϕ_1 et ϕ_2 par

$$\Phi \equiv e^{i\theta}\phi_1 + \phi_2 \qquad\qquad \bar{\Phi} \equiv \frac{i}{2}\big(\phi_1 - e^{-i\theta}\phi_2\big) \tag{2.18}$$

et pour laquelle les fermions η et $\chi_{\mu\nu}$ et le champ auxiliaire $T_{\mu\nu}$ sont redéfinis avec un facteur de phase $e^{i\tau}$. L'action de cette théorie en fonction des champs réels s'écrit

$$\begin{aligned}\int_M d^8x\mathrm{Tr}\,\Big(&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^{i\tau}\eta D_\mu\Psi^\mu + 4e^{i\tau}\chi^{\mu\nu}D_\mu\Psi_\nu - \frac{1}{2}[\phi_1,\phi_2]^2 + e^{2i\tau}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\\ &+\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2}D_\mu\phi_1 D^\mu\phi_1 + \frac{e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2}D_\mu\phi_2 D^\mu\phi_2 \\ &+i\phi_1\Psi_\mu\Psi^\mu + e^{i(\theta+2\tau)}\phi_1\big(2\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu}+\eta^2\big) + e^{-i(\frac{\pi}{2}+\theta)}\phi_2\Psi_\mu\Psi^\mu + e^{2i\tau}\phi_2\big(2\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu}+\eta^2\big)\Big)\end{aligned} \tag{2.19}$$

On définit pour chaque diagramme de Feynman, I_1, I_2 et $I_\pm$ les nombres de propagateurs respectivement associés aux champs scalaires ϕ_1, ϕ_2 et aux fermions de ce diagramme, V_1, V_2 et $V_\pm$ les nombres de vertex couplant le champ de jauge respectivement aux champs ϕ_1, ϕ_2 et aux fermions, V_{12}, V_{1+}, V_{1-}, V_{2+}, et V_{2-} les vertex couplant respectivement les champs scalaires entre eux, le champs ϕ_1 au champ Ψ_μ, le champ ϕ_1 aux champs η et $\chi_{\mu\nu}$, le champs ϕ_2 au champ Ψ_μ, et le champ ϕ_2 aux champs η et $\chi_{\mu\nu}$, et enfin, E_1, E_2, E_+, E_-, les sommes des nombres de pattes externes associées respectivement aux champs ϕ_1, ϕ_2, Ψ_μ, η et $\chi_{\mu\nu}$, et des ordres auxquels ces champs apparaissent respectivement dans les insertions de polynômes locaux. Par simple comptage, on obtient que la dépendance d'un diagramme donné dans les paramètres θ et τ se réduit à un facteur de phase $e^{-i\theta(I_1-I_2-V_1+V_2+V_{2+}-V_{1-})-i\tau(I_\pm-V_\pm-2V_{1-}-2V_{2-})}$. Les identités

$$\begin{aligned} 2I_1 &= E_1+2V_1+2V_{12}+V_{1+}+V_{1-} \qquad & 2I_2 &= E_2+2V_2+2V_{12}+V_{2+}+V_{2-} \\ I_\pm &= E_+ + V_\pm + 2V_{1+} + 2V_{2+} & I_\pm &= E_- + V_\pm + 2V_{1-} + 2V_{2-} \end{aligned} \tag{2.20}$$

impliquent que ce facteur de phase est égal à $e^{\frac{i\theta}{4}(2E_2-2E_1+E_+-E_-)-i\tau E_-}$ et qu'il est donc le même pour tous les diagrammes qui correspondent à la même fonction de corrélation. On en déduit que les fonctions de corrélation des champs ou de polynômes locaux des champs de la théorie dépendent des paramètres θ et τ, uniquement à travers un facteur de phase. Les observables de la théorie de type cohomologique sont des fonctionnelles des champs A, Ψ et Φ, dont les seules fonctions de corrélation non nulles sont de nombre de fantôme topologique égal à l'indice de l'opérateur de Dirac covariant de jauge défini sur la variété. Pour de telles fonctions de corrélation, la dépendance dans les paramètre θ et τ est donnée par le facteur de phase $e^{\frac{i\theta}{4}\,\mathrm{ind}(\not{D})}$. L'intégrale fonctionnelle vérifie donc une certaine covariance par des déformations complexes du domaine d'intégration fonctionnelle bien précises, qui permettent d'identifier la théorie définie à partir de l'action (2.17), où les champs scalaires sont définis par (2.15) et tous les autres champs sont réels ($\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\tau = 0$), avec la théorie définie à partir de cette même action, où les champs A, Ψ, Φ sont réels et les champs $\bar{\Phi}$, η, χ et T imaginaires purs ($\theta = 0$ et $\tau = \frac{\pi}{2}$). On considérera dorénavant les champs de la théorie tordue A, Ψ, Φ comme réels et les champs $\bar{\Phi}$, η, χ et T comme imaginaires purs. Nous n'écrirons pas ces champs imaginaires purs comme i en facteur de champs réels, de manière à faciliter les comparaisons avec la formulation non tordue de la théorie et le contenu des publications.

Afin de mettre en évidence les propriétés de l'action tordue, on décompose le terme de Yang–Mills en un terme topologique plus un terme ne faisant intervenir que la partie anti-autoduale de la courbure [16]

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{8}\Omega^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} - F^-_{\mu\nu}F^{-\mu\nu} \tag{2.21}$$

Par terme topologique, on n'entend pas que $\int \Omega_\wedge \mathrm{Tr}\ F_\wedge F$ définit un invariant topologique de la variété de base, car ce terme dépend explicitement de la métrique à travers la 4-forme octonionique. Néanmoins, ce terme est invariant par rapport à toute variation infinitésimale du champ de jauge, ce qui signifie qu'il est invariant par rapport aux difféomorphismes isotopes à l'identité définis sur l'espace des connexions. L'action de la théorie se réécrit ainsi

$$\int_M d^8x \mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{8}\Omega^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} - F^-_{\mu\nu}F^{-\mu\nu} + \eta D_\mu\Psi^\mu + D_\mu\bar{\Phi}D^\mu\Phi + 4\chi^{\mu\nu}D_\mu\Psi_\nu$$
$$+2\bar{\Phi}\Psi_\mu\Psi^\mu + 2\Phi\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu} + \Phi\eta^2 + \frac{1}{2}[\Phi,\bar{\Phi}]^2 + T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\Big) \quad (2.22)$$

Comme l'ont montré Acharya, Figuera–O'Farrill, Spence et O'Loughlinsix dans [23], cette action peut être écrite sous une forme propre au théories de type cohomologique, c'est à dire comme la somme d'un terme topologique et d'un terme BRST-exact

$$-\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Tr}\,\big(\,\Omega_\wedge F_\wedge F\,\big) + s\int_M \mathrm{Tr}\,\Big(-2\chi\star(F-T) + \bar{\Phi}d_A\star\Psi + \frac{1}{2}\star\eta[\Phi,\bar{\Phi}]\Big) \quad (2.23)$$

Cette action peut être interprétée comme une fixation de jauge du terme topologique, en considérant le fait que les champs de la théorie constituent une tour bien définie de fantômes et d'antifantômes [16]

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \Psi & & \chi & \\ \Phi & & T & & \bar{\Phi} \\ & & & \eta & \end{array} \quad (2.24)$$

Dans le formalisme de Mathai–Quillen, il est possible d'interpréter l'exponentielle du terme BRST-exact comme le représentant algébrique d'une classe de Thom qui implique une localisation de l'intégrale fonctionnelle sur les orbites de jauge de courbure autoduale (toujours au sens de la 4-forme octonionique) [33]. Cette construction est en principe invariante sous difféomorphisme. La bonne définition de l'intégrale fonctionnelle requiert en outre de fixer la jauge associée à l'invariance de jauge ordinaire. Le formalisme de Mathai–Quillen ne constitue une construction rigoureuse que dans le cas d'un espace de dimension finie [24]. Une bonne définition dans le cadre de la théorie des champs requiert en particulier une étude scrupuleuse des modes zéro des fermions de la théorie. L'indice de l'opérateur de Dirac covariant de jauge, qui définit la dimension dite virtuelle de l'espace de modules considéré, doit être égal à la dimension de celui-ci. Il est donné par l'opposé de l'intégrale du produit extérieur du genre $\hat{A}$ de la variété octodimensionnelle et du caractère de Chern du fibré principal selon le théorème d'Atiyah–Singer [25].

$$\mathrm{ind}(\not{D}) = \frac{1}{24(8\pi)^4}\int\Big(R^{ab}{}_\wedge R_{ab\wedge}\mathrm{Tr}\ F_\wedge F - 16\,\mathrm{Tr}\ F_\wedge F_\wedge F_\wedge F\Big) - \hat{A}(M)\,\mathrm{Tr}\ 1 \quad (2.25)$$

En dehors des variétés d'holonomie incluse dans G_2, pour lesquelles l'indice de l'opérateur de Dirac covariant de jauge est nul,[1] il existe quatre classes de variétés compactes d'holo-

[1] L'opérateur de Dirac covariant de jauge est alors autoadjoint.

nomie incluse dans $Spin(7)$ qu'on peut étudier dans le cadre de cette théorie. Le cas des variétés de Joyce, dont le groupe d'holonomie est $Spin(7)$ lui-même, celui des variétés de Calabi–Yau dont le groupe d'holonomie est $SU(4)$, les variétés hyperKähler dont le groupe d'holonomie est $Sp(2)$ et enfin les produits de deux surfaces K3 (variétés quadridimensionnelles de Calabi–Yau) d'holonomie $SU(2) \times SU(2)$, avec l'inclusion naturelle des groupes $Spin(4) \subset Spin(5) \subset Spin(6) \subset Spin(7)$ auxquels ces groupes d'holonomie sont isomorphes [20]. Le genre $\hat{A}(M)$ peut être déterminé dans ces cas comme le nombre $a = 1, 2, 3, 4$ de spineurs de Majorana–Weyl constants sur les variétés d'holonomie $Spin(8-a)$, ce qui permet de démontrer que ces variétés sont nécessairement simplement connexes [20]. Les auteurs de [16] différencient le cas des variétés d'holonomie incluse dans $SU(4)$, en utilisant explicitement la structure complexe définie sur celles-ci. Notons que la construction ADHM des connexions autoduales [26] en quatre dimensions n'a pas été généralisée au cas octodimensionnel, et les espaces de modules pertinents pour cette théorie sont encore aujourd'hui bien mystérieux. Il est malgré tout possible de définir formellement des observables de la théorie, c'est à dire des classes de cohomologie de l'opérateur BRST dans le complexe des fonctionnelles invariantes de jauge des champs, à partir des polynômes invariants du champ Φ et des fonctionnelles des champs dont ils descendent. Dans le formalisme de Mathai–Quillen, ce champ est le représentant algébrique de la courbure de l'espace des connexions de jauge irréductibles, considéré comme un fibré principal, de groupe de structure, le groupe des automorphismes verticaux quotienté par le centre du groupe de jauge [33]. En l'absence de construction explicite de ces observables, il est difficile de caractériser intégralement leur invariance. La construction de Mathai–Quillen suggère que ces observables constituent des applications qui associent des éléments de cohomologie de de Rham de l'espace de modules des orbites de jauge autoduales à des cycles d'homologie de la variété octodimensionnelle, proposant ainsi une extension des invariants de Donaldson au cas des variétés octodimensionnelles d'holonomie réduite [27]. La construction des invariants de Donaldson en mathématique est indépendante de leur formulation en théorie des champs. On montre formellement en théorie des champs qu'il s'agit d'invariants par rapport aux homéomorphismes isotopes à l'identité, en référant à la trivialité BRST du tenseur énergie impulsion. Cependant, S. K. Donaldson a démontré qu'il s'agit, et c'est là tout leur intérêt en mathématique, d'invariants par rapport aux difféomorphismes qui permettent de distinguer des structures différentielles distinctes d'une même variété topologique. Il constituent donc des invariants par rapport aux difféormorphismes, sur lesquels des homéomorphismes non isotopes à l'identité agissent de manière non triviale. L'absence de construction explicite en mathématique dans le cas de la théorie en huit dimensions empêche de déterminer l'étendue des difféomorphismes sous l'action desquels les observables de la théorie sont invariantes. Si ceux-ci se restreignaient aux difféomorphismes préservant la structure $Spin(7)$, les observables dépendraient du choix de la structure $Spin(7)$ considérée sur la variété, ce qui semblerait proscrire toute interprétation mathématique signifiante de celles-ci en tant qu'invariants. Mais si on admet en revanche, en considérant que la construction de Mathai–Quillen en apporte une preuve formelle, que ces observables définissent des invariants sous difféomorphisme de la variété, ceux-ci dépendraient seulement de la classe d'équivalence par rapport aux difféormorphismes de la structure $Spin(7)$ considérée [16]. D. Joyce a montré dans le cas des variétés irréductibles discuté ci-dessus, que le quotient de l'espace des structures $Spin(7)$ par les difféomorphismes isotopes à l'identité est une variété différentiable de dimension[2] $a + b^4_-(M)$ [28]. Cette dimension est comprise entre 30 et 3880 dans les exemples de variété d'holonomie $Spin(7)$ qu'il propose dans [28, 29].

2.1.3 Formulation tordue de la théorie supersymétrique

Sur un espace plat, on peut considérer la théorie supersymétrique dans sa formulation tordue. Dans ce cas on peut considérer l'ensemble des charges de supersymétrie comme des charges tordues, en substituant $\big(\theta + \not{\Theta} + i\not{\vartheta}\big)\zeta$ au spineur constant ϵ. Les transformations des fermions sont obtenues en développant les formules

$$\delta^{Susy}\eta = \big(\bar{\zeta}\delta^{Susy}\lambda\big) \qquad \delta^{Susy}\chi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\big(\bar{\zeta}\gamma_{\mu\nu}\delta^{Susy}\lambda\big)$$
$$\delta^{Susy}\Psi_\mu = -i\big(\bar{\zeta}\gamma_\mu\delta^{Susy}\lambda\big) \tag{2.26}$$

Avec la définition $\delta^{Susy} \equiv \theta s + \Theta^{\mu\nu}s_{\mu\nu} + \vartheta^\mu s_\mu$, on obtient l'action des opérateurs s_μ et $s_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu}A_\sigma &= 4P^-{}_{\mu\nu\sigma}{}^\rho\Psi_\rho \\ s_{\mu\nu}\Psi_\sigma &= 4P^-{}_{\mu\nu\sigma}{}^\rho D_\rho\Phi \\ s_{\mu\nu}\Phi &= 0 \end{aligned}$$

[2]Où b^4_- est la dimension de l'espace des 4-formes harmoniques anti-autoduales.

$$
\begin{aligned}
s_{\mu\nu}\bar{\Phi} &= 2\chi_{\mu\nu} \\
s_{\mu\nu}\eta &= -2F^{-}_{\mu\nu} \\
s_{\mu\nu}\chi_{\sigma\rho} &= -4P^{-}{}_{\mu\nu[\sigma}{}^{\kappa}F^{+}{}_{\kappa|\rho]} + P^{-}{}_{\mu\nu\sigma\rho}[\Phi,\bar{\Phi}]
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{\mu}A_{\nu} &= \delta_{\mu\nu}\,\eta - 4\chi_{\mu\nu} \\
s_{\mu}\Psi_{\nu} &= -\Big(\delta^{\sigma\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\Big)F_{\sigma\rho} - \delta_{\mu\nu}[\Phi,\bar{\Phi}] \\
s_{\mu}\Phi &= 2\Psi_{\mu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{\mu}\bar{\Phi} &= 0 \\
s_{\mu}\eta &= -2D_{\mu}\bar{\Phi} \\
s_{\sigma}\chi_{\mu\nu} &= 4P^{-}{}_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}D_{\rho}\bar{\Phi}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Si on calcule les anticommutateurs de ces opérateurs, on obtient

$$
\begin{aligned}
\{s_{\mu}, s_{\nu}\} &= 4\delta_{\mu\nu}\delta^{\text{jauge}}(\bar{\Phi}) \\
\{s, s_{\mu}\} &= -2\big(\partial_{\mu} + \delta^{\text{jauge}}(A_{\mu})\big) \\
\{s_{\mu\nu}, s_{\sigma\rho}\} &= 4P^{-}{}_{\mu\nu\sigma\rho}\delta^{\text{jauge}}(\Phi) \\
\{s, s_{\mu\nu}\} &= 0 \\
\{s_{\sigma}, s_{\mu\nu}\} &= -4P^{-}{}_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}\big(\partial_{\rho} + \delta^{\text{jauge}}(A_{\rho})\big)
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

excepté pour les fermions, pour lesquels ces égalités ne sont valables que modulo l'introduction des équations du mouvement. Comme dans le cas de la symétrie scalaire, nous allons tenter de compléter l'algèbre en introduisant la 2-forme anti-autoduale T. Pour le cas de la symétrie vectorielle, on peut montrer que cela peut être effectué en modifiant la transformation du champ Ψ_{μ} comme suit

$$
\begin{aligned}
s_{\mu}\Psi_{\nu} &= -\Big(\delta^{\sigma\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\Big)F_{\sigma\rho} - \delta_{\mu\nu}[\Phi,\bar{\Phi}] + \alpha T_{\mu\nu} \\
s_{\sigma}T_{\mu\nu} &= -\frac{8}{\alpha}P^{-}{}_{\mu\nu\sigma}{}^{\rho}\Big(D_{\rho}\eta + 4D^{\kappa}\chi_{\kappa\rho} - 2[\bar{\Phi},\Psi_{\rho}]\Big)
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

La mise en involution de l'algèbre à travers l'anticommutateur $ss_{\mu} + s_{\mu}s$ implique que le paramètre α est égal à 4.

Dans le cas de la symétrie tensorielle, on doit modifier les transformations des champs η et $\chi_{\mu\nu}$. Le calcul montre que les transformations du champ scalaire et du champ auxiliaire doivent être modifiées de la manière suivante

$$\begin{aligned} s_{\mu\nu}\eta &= -2\big(F^-_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}\big) \\ s_{\mu\nu}T_{\sigma\rho} &= 2P^-{}_{\mu\nu\sigma\rho}\big(D_\kappa\Psi^\kappa - [\Phi,\eta]\big) \end{aligned} \tag{2.31}$$

La transformation du champ $\chi_{\mu\nu}$ devrait également être modifiée pour supprimer les équations du mouvement dans

$$\begin{aligned} \{s_{\mu\nu}, s_{\sigma\rho}\}\chi_{\kappa\lambda} &= 4\,P^-{}_{\mu\nu\sigma\rho}[\Phi,\chi_{\kappa\lambda}] - 4\,P^-{}_{\mu\nu\sigma\rho}\Big(\big(d_A\,\Psi\big)^-_{\kappa\lambda} + [\Phi,\chi_{\kappa\lambda}]\Big) \\ &\quad + 2\,P^-{}_{\sigma\rho\kappa\lambda}\Big(\big(d_A\,\Psi\big)^-_{\mu\nu} + [\Phi,\chi_{\mu\nu}]\Big) + 2\,P^-{}_{\mu\nu\kappa\lambda}\Big(\big(d_A\,\Psi\big)^-_{\sigma\rho} + [\Phi,\chi_{\sigma\rho}]\Big) \end{aligned} \tag{2.32}$$

et pour empêcher leur apparition dans les commutateurs de $s_{\mu\nu}$ avec les autres générateurs, due à l'introduction du champ auxiliaire. Dans le cas quadridimensionnel il est suffisant pour ce faire de substituer aux transformations de $\chi_{\mu\nu}$ et du champ auxiliaire

$$\begin{aligned} s^{\rm New}_{\mu\nu}\chi_{\sigma\rho} &\equiv s^{\rm Old}_{\mu\nu}\chi_{\sigma\rho} + \alpha\,P^-{}_{\mu\nu[\sigma}{}^{\kappa}T_{\kappa|\rho]_-} \\ s^{\rm New}_{\mu\nu}T_{\sigma\rho} &\equiv s^{\rm Old}_{\mu\nu}T_{\sigma\rho} + \beta\,P^-{}_{\mu\nu[\sigma}{}^{\kappa}\Big(\big(d_A\,\Psi\big)^-_{\kappa|\rho]_-} + [\Phi,\chi_{\kappa|\rho]_-}]\Big) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Mais en huit dimensions cette modification est nulle, à cause des propriétés du projecteur anti-autodual (voir appendice B.2 équations (B.8)). Cette différence provient du fait qu'en dimension quatre, la décomposition d'une 2-forme dans ses composantes autoduales et anti-autoduales correspond à la décomposition de la représentation adjointe de $\mathfrak{so}(4)$ en $\mathfrak{su}(2)\oplus\mathfrak{su}(2)$ qui permet de construire une 2-forme anti-autoduale à partir d'une forme bilinéaire sur les 2-formes anti-autoduales. Alors qu'en huit dimensions, $\mathfrak{so}(8)$ se décompose en $\mathfrak{so}(7)$ plus la représentation vectorielle de $\mathfrak{so}(7)$, dont le produit tensoriel avec elle-même se décompose en la représentation scalaire, la représentation symétrique sans trace de $\mathfrak{so}(7)$ et la représentation adjointe de $\mathfrak{so}(7)$, qui n'incluent pas la représentation vectorielle de $\mathfrak{so}(7)$. Les algèbres de supersymétrie des théories de Yang–Mills sont intimement liées aux algèbres sans diviseur de zéro de la construction de Cayley–Dickson [30]. Les algèbres de supersymétrie $\mathcal{N} = 1$, 2, 4 en quatre dimensions sont respectivement reliées aux algèbres $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ et $\mathbb{O}$. D'un point de vue algébrique, on peut comprendre l'impossibilité de fermer l'algèbre complète de supersymétrie maximale comme une conséquence de la non-associativité de l'algèbre des octonions $\mathbb{O}$ [31].

2.1.4 Torsion du tenseur énergie impulsion

Afin de mieux comprendre ce que signifie la réinterprétation du groupe des rotations lors de la procédure de torsion, nous allons comparer les tenseurs énergie impulsion respectifs de la théorie supersymétrique et de la théorie tordue. La seule difficulté technique dans le calcul du tenseur énergie impulsion de la théorie supersymétrique, réside dans le terme $\left(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\right)$ qui fait intervenir les octades e_μ^a et la connexion de spin $\omega_\mu{}^a{}_b$ en espace courbe.

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{Tr}\,\left(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\right) &= \delta e_a^\mu\,\mathrm{Tr}\,\left(\overline{\lambda}\gamma^a D_\mu\lambda\right) + \frac{1}{2}e_a^\mu\delta\omega_\mu^{bc}\,\mathrm{Tr}\,\left(\overline{\lambda}\gamma^a\gamma_{bc}\lambda\right)\\ &= \delta e_a^\mu\,\mathrm{Tr}\,\left(\overline{\lambda}\gamma^a D_\mu\lambda\right) + \frac{3}{2}e_a^\mu\delta\omega_\mu^{bc}\,\mathrm{Tr}\,\left(\overline{\lambda}\gamma^a{}_{bc}\lambda\right)\end{aligned} \tag{2.34}$$

En utilisant l'équation de torsion nulle $\nabla^s_{[\mu}\delta e^a_{\nu]} + \delta\omega_{[\mu}{}^a{}_b\, e^b_{\nu]} = 0$ et l'équation

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\,\left(\overline{\lambda}\gamma_{\{\mu}D_{\nu\}}\lambda\right) = \mathrm{Tr}\,\left(-\frac{i}{2}\left(\overline{\lambda}\gamma_\nu D_\mu\lambda\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu}E^{(\lambda)}\right) + \frac{3i}{4}D_\sigma\left(\overline{\lambda}\gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\lambda\right)\right) \tag{2.35}$$

où on notera dorénavant $E^{(\varphi)}$ l'équation du mouvement du champ φ,[3] on montre que le tenseur énergie impulsion, modulo une partie antisymétrique linéaire dans les équations du mouvement, est donné par

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,\Bigg(&-F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} - D_\mu\phi_1\, D_\nu\phi_1 - D_\mu\phi_2\, D_\nu\phi_2 - \frac{i}{2}\left(\overline{\lambda}\gamma_{\{\mu}D_{\nu\}}\lambda\right)\\ &+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Bigg(\frac{1}{2}F_{\sigma\rho}F^{\sigma\rho} + D_\sigma\Phi_1\, D^\sigma\phi_1 + D_\sigma\phi_2\, D^\sigma\phi_2 + i\left(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\right)\\ &+[\phi_1,\phi_2]^2 + i\left(\overline{\lambda}\gamma_9[\phi_1,\lambda]\right) + \left(\overline{\lambda}[\phi_2,\lambda]\right)\Bigg)\Bigg)\end{aligned} \tag{2.36}$$

En utilisant la même formule (2.35), on montre aisément que ce tenseur est conservé modulo les équations du mouvement.

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,\left(-F_{\mu\nu}E^{(A)\,\nu} - D_\mu\phi_1 E^{(\phi_1)} - D_\mu\phi_2 E^{(\phi_2)} - \left(\overline{D_\mu\lambda}E^{(\lambda)}\right) + \frac{1}{2}D^\nu\left(\overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu}E^{(\lambda)}\right)\right) \tag{2.37}$$

Notons également que la connexion de spin agit différemment sur les fermions après et avant l'opération de torsion. Si on tord la dérivée covariante des fermions, on obtient

$$\begin{aligned}\nabla^s_\mu\eta &= \partial_\mu\eta - \omega_\mu^{-\,ab}\chi_{ab}\\ \nabla^s_\mu\chi_{ab} &= \partial_\mu\chi_{ab} + \frac{1}{2}\omega^-_{\mu\,ab}\eta + 2\,\omega^+_{\mu\,[a}{}^c\chi_{c|b]_-}\\ \nabla^s_\mu\Psi_a &= \partial_\mu\Psi_a - \omega^-_{\mu\,a}{}^b\Psi_b + \omega^+_{\mu\,a}{}^b\Psi_b\end{aligned} \tag{2.38}$$

[3]avec la définition

$$\delta S = \int_M d^8x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\left(\sum_A \delta\varphi_A E^A\right)$$

alors qu'après l'opération de torsion, la dérivée covariante agit sur les champs tordus de la manière suivante

$$
\begin{aligned}
\nabla^s_\mu \eta &= \partial_\mu \eta \\
\nabla^s_\mu \chi_{ab} &= \partial_\mu \chi_{ab} + 2\,\omega_{\mu\,[a}{}^c \chi_{c|b]_-} \\
\nabla^s_\mu \Psi_a &= \partial_\mu \Psi_a + \omega_{\mu\,a}{}^b \Psi_b
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

On remarque que ces définitions sont identiques si et seulement si $\omega^{-\,ab}_\mu = 0$, c'est à dire si et seulement si les octades définissent une structure $Spin(7)$ sur la variété. Cette propriété est équivalente au fait que dans le cas d'une connexion de torsion nulle, le groupe d'holonomie est inclus dans $Spin(7)$ [20]. Ceci implique que la procédure de torsion n'est globalement définie que sur une variété d'holonomie incluse dans $Spin(7)$; ce qui n'est pas vraiment une restriction puisque la théorie tordue n'est elle même définie que dans ce cas. Remarquons la différence avec le cas de la torsion de la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ en quatre dimensions, pour lequel l'opération de torsion n'est définie que sur une variété d'holonomie incluse dans $SU(2)$ alors que la théorie tordue peut être définie sur une variété riemannienne arbitraire.

On obtient enfin, en réécrivant le tenseur énergie impulsion en fonction des variables tordues

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,\Bigg(&-F_{\{\mu}{}^\sigma F_{\nu\}\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} + 2\, D_{\{\mu} \bar\Phi\, D_{\nu\}} \Phi - g_{\mu\nu} D_\sigma \bar\Phi\, D^\sigma \Phi \\
&+ \frac{1}{2} \eta D_{\{\mu} \Psi_{\nu\}} + \frac{1}{2} \Psi_{\{\mu} D_{\nu\}} \eta - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \big(\eta D^\sigma \Psi_\sigma + \Psi_\sigma D^\sigma \eta \big) \\
&+ 2\, \chi_{\{\mu}{}^\sigma D_{\nu\}} \Psi_\sigma + 2\, \Psi^\sigma D_{\{\mu} \chi_{\nu\}\sigma} - 2 g_{\mu\nu} \big(\chi^{\sigma\rho} D_\sigma \Psi_\rho + \Psi^\rho D^\sigma \chi_{\sigma\rho} \big) \\
&+ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Big(\eta [\Phi, \eta] + 2\, \chi_{\sigma\rho} [\Phi, \chi^{\sigma\rho}] + 2\, \Psi_\sigma [\bar\Phi, \Psi^\sigma] - [\Phi, \bar\Phi]^2 \Big) \Bigg)
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

La réécriture en fonction des variables tordues ne modifie en rien le fait que celui-ci soit conservé. La version tordue de l'équation (2.35) est

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\, \Big(&\frac{1}{2} \eta D_{\{\mu} \Psi_{\nu\}} + 2\, \chi_{\{\mu}{}^\sigma D_{\nu\}} \Psi_\sigma + \frac{1}{2} \Psi_{\{\mu} D_{\nu\}} \eta + 2\, \Psi^\sigma D_{\{\mu} \chi_{\nu\}\sigma} \Big) \\
= \mathrm{Tr}\, \Bigg(&\frac{1}{2} \eta D_\mu \Psi_\nu + 2\, \chi_\nu{}^\sigma D_\mu \Psi_\sigma + \frac{1}{2} \Psi_\nu D_\mu \eta + 2\, \Psi^\sigma D_\mu \chi_{\nu\sigma} \\
&- \frac{1}{4} \Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho} D_\sigma \big(\eta \Psi_\rho \big) - \big(3 \delta^{\rho\kappa\lambda}_{\sigma\mu\nu} + \delta^{[\kappa}_{[\sigma} \Omega^{\lambda]}{}_{\mu\nu\rho]} \big) D^\sigma \big(\chi_{\kappa\lambda} \Psi_\rho \big) \\
&+ \chi_{\mu\nu} E^{(\eta)} - \frac{1}{2} \eta E^{(\chi)}_{\mu\nu} + 4\, \chi_{[\mu}{}^\sigma E^{(\chi)}_{\nu]\sigma} + \frac{1}{2} \big(\delta^{\sigma\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho} \big) \Psi_\sigma E^{(\Psi)}_\rho \Bigg)
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

et la conservation du tenseur s'écrit modulo les équations du mouvement

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} \approx \mathrm{Tr}\,\left(\frac{1}{2}R_{\mu\nu}\eta\Psi^\nu - 2\,R_{\mu\nu}\chi^{\nu\sigma}\Psi_\sigma - 2\,R^\rho{}_{\mu\nu\sigma}\chi^{\nu\rho}\Psi_\rho\right) \tag{2.42}$$

L'expression de droite n'est nulle que dans le cas où les octades définissent une structure $Spin(7)$, ce qui implique la nullité du tenseur de Ricci et le fait que le tenseur de Riemann prend valeur dans le produit tensoriel symétrisé de la représentation des 2-formes autoduales avec elle-même.

Pour calculer le tenseur énergie impulsion dans la théorie tordue, il est important de bien comprendre la dépendance du projecteur anti-autodual dans les octades.

$$\begin{aligned}\delta P^{-\ \sigma\rho}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{8}\delta\big(e^a_\mu e^b_\nu e^\sigma_c e^\rho_d\big)\Omega_{ab}{}^{cd}\\ &= \frac{1}{4}\Omega_{\lambda\nu}{}^{\sigma\rho}e^a_\mu\delta e^\lambda_a - \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}{}^{\lambda[\rho}e^a_\lambda\delta e^{\sigma]}_a\end{aligned} \tag{2.43}$$

Ce qui est cohérent, puisque $P^{-\ \kappa\lambda}_{\mu\nu}\delta P^{-\ \theta\tau}_{\kappa\lambda}\,P^{-\ \sigma\rho}_{\theta\tau} = 0$. Ainsi, sous un difféomorphisme f, une 2-forme anti-autoduale w^- se transforme en une 2-forme f_*w^- qui est anti-autoduale par rapport au projecteur transformé f_*P^-. Notons néanmoins que la dépendance du projecteur anti-autodual dans les octades ne se réduit pas à leur dépendance dans la métrique. Ceci implique que le tenseur énergie impulsion de la théorie tordue n'est pas symétrique.

Arrêtons nous un instant pour discuter cette propriété du tenseur énergie impulsion dans les théories faisant intervenir explicitement une G-structure strictement incluse dans la structure $SO(n)$ associée à l'existence d'une métrique et d'une forme de volume. De manière générale, ces théories font intervenir en plus de la métrique et du tenseur antisymétrique de rang maximal, certains tenseurs invariants sous l'action du groupe G. Pour les groupes de la liste de Berger, d'holonomie locale possibles des variétés riemanniennes compactes irréductibles et non symétriques classifiés par M. Berger [32], qui couvrent tous les cas considérés en physique, il s'agit de formes différentielles constantes sur la variété. Dans le cas usuel, tout difféomorphisme laissant invariante la métrique est une symétrie de l'action, et on peut y associer une charge conservée de la théorie. Le tenseur énergie impulsion étant dans ce cas symétrique, on peut y associer une charge conservée pour chaque vecteur vérifiant l'équation de Killing. Dans le cas où la théorie fait aussi intervenir des tenseurs constants associés à une G-structure, seuls les difféomorphismes laissant invariants ces tenseurs seront des symétries de l'action. Le tenseur énergie impulsion ne doit donc permettre de définir une charge conservée que si on le contracte avec des vecteurs engendrant des difféomorphismes qui laissent la G-structure invariante, c'est à dire seulement si ces vecteurs κ, sont tels que $e^\mu_a e_{b\,\nu} \nabla_\mu \kappa^\nu$ est un élément de $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Ceci implique que le tenseur énergie impulsion est de manière générale défini dans le supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. On retrouve bien que le tenseur énergie impulsion est symétrique dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$. En revanche celui-ci aura une composante antisymétrique anti-autoduale dans le cas de notre théorie tordue faisant intervenir une structure $Spin(7)$.

Pour calculer le tenseur énergie impulsion, nous allons utiliser ici le fait que la 4-forme octonionique n'intervient dans l'action que sous la forme du projecteur anti-autodual. L'action d'une dérivée de Lie sur une 2-forme anti-autoduale se décompose en ses composantes autoduales et anti-autoduales. Lorsqu'on considère la variation de l'action, on peut donc décomposer explicitement

$$\mathcal{L}_\kappa w^-_{\mu\nu} \frac{\delta^L S}{\delta w_{\mu\nu}} = \mathcal{L}_\kappa w^-_{\mu\nu} \frac{\delta^L S}{\delta w^-_{\mu\nu}} + \mathcal{L}_\kappa w^-_{\mu\nu} \frac{\delta^L S}{\delta w^+_{\mu\nu}} \tag{2.44}$$

où la notation dans le terme de droite désigne une dérivée fonctionnelle par rapport à une 2-forme générale, qu'on projette ensuite sur ses composantes autoduales et anti-autoduales. Etant donné que le terme $\frac{\delta^L S}{\delta w^+_{\mu\nu}}$ n'est pas l'équation du mouvement du champ w^-, les termes le faisant intervenir doivent être inclus dans la définition du tenseur énergie impulsion. L'invariance de l'action sous difféomorphisme peut ainsi s'écrire

$$\int_M d^8x \left(\frac{\delta' S}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L}_\kappa g^{\mu\nu} + 2\,\mathrm{Tr}\,\left(\chi_{\mu\sigma} \nabla_\nu \kappa^\sigma \cdot \frac{\delta^L S}{\delta \chi^+_{\mu\nu}} + T_{\mu\sigma} \nabla_\nu \kappa^\sigma \cdot \frac{\delta^L S}{\delta T^+_{\mu\nu}} \right) + \sum_A \mathcal{L}_\kappa \varphi_A \, E^{(\varphi_A)} \right) \tag{2.45}$$

où la notation $\frac{\delta'}{\delta g^{\mu\nu}}$ indique que la dérivée fonctionnelle ne prend pas en compte la dépendance du projecteur anti-autodual dans la métrique. On peut ainsi définir le tenseur énergie impulsion

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta' S}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{2}{\sqrt{g}}\,\mathrm{Tr}\,\left(\chi_\mu{}^\sigma \frac{\delta^L S}{\delta \chi^{+\,\nu\sigma}} + T_\mu{}^\sigma \frac{\delta S}{\delta T^{+\,\nu\sigma}} \right) \tag{2.46}$$

qui sera conservé par définition. Cette définition est identique à la définition usuelle faisant intervenir la dérivée fonctionnelle par rapport aux octades. On peut alors calculer ce tenseur explicitement

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,\Bigg(& -F_\mu{}^\sigma F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} + 2 D_{\{\mu} \bar\Phi \, D_{\nu\}} \Phi - g_{\mu\nu} D_\sigma \bar\Phi \, D^\sigma \Phi \\ & + 2 \Psi_{\{\mu} D_{\nu\}} \eta - g_{\mu\nu} \Psi_\sigma D^\sigma \eta - 4 \chi_\nu{}^\sigma \big(d_A \Psi \big)^+_{\mu\sigma} - 2 g_{\mu\nu} \chi^{\sigma\rho} D_\sigma \Psi_\rho \\ & + 2\bar\Phi \, \{\Psi_\mu, \Psi_\nu\} - 4\Phi \{\chi_\mu{}^\sigma, \chi_{\nu\sigma}\} - g_{\mu\nu} \Big(\bar\Phi \{\Psi_\sigma, \Psi^\sigma\} + \Phi \eta^2 + \frac{1}{2} [\Phi, \bar\Phi]^2 \Big) \Bigg) \end{aligned} \tag{2.47}$$

Notons que ce tenseur est BRST-exact, comme c'est le cas de manière générale dans les théories de type cohomologique. Le lecteur pourra trouver plus de détails à ce sujet dans l'annexe A.1.

On va maintenant considérer la différence du tenseur énergie impulsion de la théorie supersymétrique et de la théorie tordue, en fonction des variables tordues. On montre que celle-ci est une dérivée totale modulo les équations du mouvement

$$\begin{aligned}\Delta T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,\Big(&-\frac{1}{2}D_\mu\big(\eta\Psi_\nu\big) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}D^\sigma\big(\eta\Psi_\sigma\big) + \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}D_\sigma\big(\eta\Psi_\rho\big)\\ &+ 2\,D_\mu\big(\chi_{\nu\sigma}\Psi^\sigma\big) - 2\,g_{\mu\nu}D^\sigma\big(\chi_{\sigma\rho}\Psi^\rho\big) + 4\,D^\sigma\big(\chi_{\sigma\nu}\Psi_\mu\big)\\ &+ \big(3\delta^{\rho\kappa\lambda}_{\sigma\mu\nu} + \delta^{[\kappa}_{[\sigma}\Omega^{\lambda]}{}_{\mu\nu\rho]}\big)D^\sigma\big(\chi_{\kappa\lambda}\Psi_\rho\big)\\ &- \chi_{\mu\nu}E^{(\eta)} + \frac{1}{2}\eta E^{(\chi)}_{\mu\nu} + 2\,\chi_\nu{}^\sigma E^{(\chi)}_{\mu\sigma} + \Psi_\mu E^{(\Psi)}_\nu - \frac{1}{2}\big(\delta^{\sigma\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\big)\Psi_\sigma E^{(\Psi)}_\rho\Big)\end{aligned} \tag{2.48}$$

La définition du tenseur énergie impulsion est d'une importance cruciale en théorie quantique des champs, mais elle affecte principalement la théorie à travers les charges conservées que celui-ci permet de construire dans la formulation opératorielle. Si une théorie de champ définie sur un espace euclidien n'admet pas de formulation opératorielle, il est formellement possible de définir l'action des charges conservées dans la formulation fonctionnelle de la théorie. Supposons que nous étudiions une théorie définie sur l'espace de Minkowski dont on connaisse à la fois la formulation opératorielle et la formulation fonctionnelle. La définition du produit chronologique (T produit) dans le formalisme opératoriel permet d'écrire l'action d'une charge conservée Q associée à un courant J^μ, sur un opérateur $\mathcal{O}^i$, comme étant donnée dans la formulation fonctionnelle par les termes de contact apparaissant dans des fonctions de corrélation faisant intervenir la loi de conservation modulo les équations du mouvement de ce courant dans la formulation fonctionnelle $\partial_\mu J^\mu = E \approx 0$ et la fonctionnelle locale des champs correspondant à l'opérateur $\mathcal{O}^i$.

$$\big\langle E(x)\,\mathcal{O}^i(y)\cdots\big\rangle = \delta^{(4)}(x-y)\big\langle[Q,\mathcal{O}^i(x)]\cdots\big\rangle + \cdots \tag{2.49}$$

Les termes dérivatifs apparaissant dans la différence des deux tenseurs énergie impulsion sont conservés indépendamment des équations du mouvement, et n'affectent donc pas la définition des charges. Les termes linéaires dans les équations du mouvement quand à eux, font état du changement de représentation des fermions avant et après l'opération de torsion. Dans le cas quadridimensionnel, cette modification de l'action du groupe des rotations correspond à l'action du groupe $SU(2)$ de symétrie interne sur les fermions, et la différence des tenseurs énergie impulsion tordue et non-tordue peut être identifiée au courant associé à cette symétrie dans la formulation tordue. Dans le cas présent, la partie antisymétrique anti-autoduale du tenseur énergie impulsion implique qu'il ne permet d'engendrer qu'un nombre réduit de charges conservées, correspondant aux isométries qui préservent la structure $Spin(7)$.

2.2 Construction du fixage de jauge

Les théories de jauge de type cohomologique admettent deux groupes de symétrie de dimension infinie. La première symétrie est l'invariance de jauge et la seconde est la symétrie topologique de translation dans l'espace des connexions. L'interprétation de M. F. Atiyah et L. Jeffrey de ces théories dans le formalisme de Mathai–Quillen permet de comprendre comment ces groupes sont subtilement imbriqués l'un dans l'autre [9].

2.2.1 Formalisme de Mathai–Quillen

Dans le cas idéal où les antifantômes de la théorie n'admettent pas de mode zéro, il est possible d'interpréter la valeur moyenne dans le vide de produits d'observables d'une théorie de jauge de type cohomologique comme l'intégrale sur un espace de modules pertinent, d'applications de l'ensemble des éléments d'homologie de l'espace de base, dans l'ensemble des éléments de cohomologie de de Rham de cet espace de modules. Ces éléments de cohomologie sont construits à partir d'éléments de cohomologie équivariante dans le formalisme de Mathai–Quillen. Dans le cas des théories de jauge, cette cohomologie équivariante permet de calculer les éléments de cohomologie non-triviaux de la base du fibré universel classifiant du groupe des transformations de jauge. Nous allons définir les applications à valeur dans l'ensemble de ces observables comme les caractères de Chern associés à un fibré principal plus grand [33].

L'action des transformations de jauge sur l'espace des connexions n'est pas libre. En l'occurrence, la transformation de jauge donnée par un élément constant à valeur dans le centre du groupe appartient au groupe d'isotropie de toutes les connexions. On définit le groupe des transformations de jauge pointées $\mathscr{G}^\circ$, comme le groupe des transformations de jauge vérifiant que, pour un point fixé de la base $x^\circ \in M$, tout élément $g \in \mathscr{G}^\circ$ (défini comme une section du fibré adjoint) soit tel que $g(x^\circ) = 1$. Ce groupe agit librement sur l'espace des connexions $\mathscr{A}$ [34]. Celui ci admet donc une structure de fibré principal de groupe de structure $\mathscr{G}^\circ$ et de base $\tilde{\mathscr{B}}$. L'espace des orbites $\mathscr{B} \equiv \mathscr{A} / \mathscr{G}$ en tant qu'espace topologique, admet quand à lui une stratification en variétés différentielles d'Hilbert [35]. Cette structure est mise en évidence en définissant $\mathscr{B}$ comme le quotient de $\tilde{\mathscr{B}}$ par G. L'ensemble des strates peut être classifié par l'ensemble des groupes d'isotropie admissibles déterminé en [36]. De manière générale, on ne s'intéresse qu'à la strate principale $\mathscr{B}^*$, donnée par le quotient des connexions irréductibles, $\mathscr{A}^*$, par le groupe des transformation de jauge $\mathscr{G}$; ou de manière équivalente, par le quotient de l'ensemble $\tilde{\mathscr{B}}^*$ des éléments irréductibles de $\tilde{\mathscr{B}}$, par le groupe G. Les groupes $\mathscr{G}^C$ et G^C définis comme les quotients respectifs de $\mathscr{G}$ et G par le centre de ce dernier, agissent librement sur $\mathscr{A}^*$ et $\tilde{\mathscr{B}}^*$ respectivement. $\mathscr{B}^*$ est donc la base des fibrés principaux $\mathscr{A}^*$ et $\tilde{\mathscr{B}}^*$, de groupes de structure respectifs $\mathscr{G}^C$ et G^C.

$$\begin{array}{rl} \mathscr{G}^\circ \rightarrow & \mathscr{A}^* \\ & \downarrow \\ G^C \rightarrow & \tilde{\mathscr{B}}^* \\ & \downarrow \\ & \mathscr{B}^* \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} \mathscr{G}^C \rightarrow & \mathscr{A}^* \\ & \downarrow \\ & \mathscr{B}^* \end{array} \tag{2.50}$$

L'espace des connections irréductibles $\mathscr{A}^*$ est contractible, et constitue ainsi un espace fibré classifiant du groupe des transformations de jauge $\mathscr{G}^C$. Le modèle de Cartan pour la cohomologie équivariante par rapport au groupe $\mathscr{G}^C$ de $\mathscr{A}^*$ [9, 33], est constitué de l'algèbre graduée librement engendrée par les champs A, Ψ et Φ, et la différentielle de Cartan est donnée par la charge scalaire de supersymétrie. Les observables de la théorie des champs correspondante, définies comme les éléments de cohomologie équivariante, sont obtenues dans le modèle de Cartan comme les éléments de cohomologie de la différentielle de Cartan dans le complexe des fonctionnelles invariantes de jauge. En théorie des champs il est préférable de faire intervenir une différentielle nilpotente sur les champs, et c'est pourquoi on préférera le modèle BRST au modèle de Cartan. Le modèle BRST est constitué de la même algèbre graduée, élargie par l'introduction du représentant algébrique c de la connexion sur le fibré $\mathscr{A}^* \rightarrow \mathscr{B}^*$. La différentielle BRST agit sur les générateurs de l'algèbre comme suit

$$\begin{array}{ll} QA = \Psi - d_A c & Qc = \Phi - c^2 \\ Q\Psi = -d_A\Phi - [c, \Psi] & Q\Phi = -[c, \Phi] \end{array} \tag{2.51}$$

La définition donnée des fibrés principaux sur $\mathscr{B}^*$ permet de définir les fibrés principaux suivants sur $\mathscr{B}^* \times M$

$$
\begin{array}{ccc}
\mathscr{G}^\circ \times G^C \rightarrow & \mathscr{A}^* \times P & \\
 & \downarrow & \\
G \quad \rightarrow & \tilde{\mathscr{B}}^* \times_{G^C} P & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathscr{B}^* \times M &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathscr{G}^C \times G \rightarrow \mathscr{A}^* \times P \\
\downarrow \\
\mathscr{B}^* \times M
\end{array}
\tag{2.52}
$$

On définit de manière canonique une connexion sur le fibré principal $\mathscr{A}^* \rightarrow \mathscr{B}^*$, en utilisant la métrique $\mathscr{G}$-invariante $g(X,Y) \equiv -\int \mathrm{Tr}\ X \star Y$, comme l'espace tangent horizontal $H\mathscr{A}^* \equiv \mathrm{Ker}(d_A^*)$. On définit la différentielle extérieure sur $\Lambda^\bullet \mathscr{A}^*$ comme la variation fonctionnelle graduée impaire

$$\delta \equiv \int \mathrm{Tr}\ \delta A \frac{\delta^L}{\delta A} \tag{2.53}$$

La connexion définit la différentielle horizontale sur les fonctionnelles tensorielles de A et δA dans une représentation donnée R, comme

$$\delta_h \equiv \delta - R(\,G_A d_A^* \delta A\,) \tag{2.54}$$

où G_A est l'inverse de $d_A^* d_A$, qui est par définition bien défini sur $\mathscr{A}^*$. On peut ainsi calculer formellement la courbure introduite par I. M. Singer [7]

$$
\begin{aligned}
&\delta\,(-1) G_A d_A^* \delta A + (\,-G_A d_A^* \delta A\,)^2 \\
&= -G_A \star [\delta A, \star d_A G_A d_A^* \delta A] - G_A d_A^* [\delta A, G_A d_A^* \delta A] + G_A \star [\delta A, \star \delta A] + G_A d_A^* d_A (G_A d_A^* \delta A)^2 \\
&= G_A \star [\delta_h A, \star \delta_h A]
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

où $\delta_h A \equiv \delta A - d_A G_A d_A^* \delta A$. On calcule de la même manière la courbure du fibré principal $P \times \mathscr{A}^* \rightarrow M \times \mathscr{B}^*$ à partir de la connexion $A - G_A d_A^* \delta A$

$$(d+\delta)\big(A - G_A d_A^* \delta A\big) + \big(A - G_A d_A^* \delta A\big)^2 = F + \delta_h A + G_A \star [\delta_h A, \star \delta_h A] \tag{2.56}$$

Nous allons voir dans la suite que cette équation s'écrit en fonction des champs de la théorie de type cohomologique, et attribue ainsi à l'opérateur BRST le rôle de la différentielle extérieure sur $\mathscr{A}^*$ [11]

$$(d+Q)\big(A+c\big) + \big(A+c\big)^2 = F + \Psi + \Phi \tag{2.57}$$

Les transformations des champs Ψ et Φ sous Q découlent de l'identité de Bianchi.

Le fibré principal $\tilde{\mathscr{B}}^* \times_{\mathcal{G}^C} P \to \mathscr{B}^* \times M$ de groupe de structure G peut être défini comme un fibré image inverse du fibré universel classifiant du groupe G. Ceci permet d'associer un élément de cohomologie de $\mathscr{B}^* \times M$ à tout polynôme invariant de $\mathfrak{g}$. On obtient ainsi les caractères de Chern associés à la courbure de $P \times \mathscr{A}^* \to M \times \mathscr{B}^*$

$$ch_n(\mathscr{B}^* \times M) \equiv \frac{1}{n!(2\pi i)^n} \mathrm{Tr}\,\left(F + \delta_h A + G_A \star [\delta_h A, \star\delta_h A]\right)^n \tag{2.58}$$

représentés dans la théorie des champs par les opérateurs locaux

$$\mathcal{O}^n \equiv \frac{1}{n!(2\pi i)^n} \mathrm{Tr}\,\left(F + \Psi + \Phi\right)^n \tag{2.59}$$

Ces caractères de Chern définissent les applications généralisées de Donaldson en intégrant ceux-ci sur des classes d'homologie de la variété de base, avec la convention formelle à la Berezin que l'intégrale d'une forme w de degré n sur un cycle γ de dimension k est égale à $\delta_k^n \int_\gamma w$.[4]

$$\begin{aligned} ch_n(\mathscr{B}^* \times M) \;:\; \mathcal{H}_k(M) \;&\to\; \mathcal{H}^{n-k}(\mathscr{B}^*) \\ \gamma \;&\to \int_\gamma ch_n(\mathscr{B}^* \times M) \end{aligned} \tag{2.60}$$

La procédure se généralise en principe à toute classe caractéristique du fibré universel classifiant de G. La géométrie de l'espace fibré de groupe de structure $\mathcal{G}^C \times G$, $\mathscr{A}^* \times P \to \mathscr{B}^* \times M$ a en quelque sorte été réduite dans cette construction à celle de l'espace fibré de groupe de structure G, $\tilde{\mathscr{B}}^* \times_{\mathcal{G}^C} P \to \mathscr{B}^* \times M$. Du point de vue de la théorie des champs, nous nous sommes restreints aux observables définies par des fonctionnelles locales intégrées sur des cycles donnés de M. La cohomologie complète de Q contient probablement des solutions non locales définissant des éléments de cohomologie ne correspondant pas à des classes caractéristiques du fibré universel classifiant de G.

Nous allons démontrer formellement la propriété de localisation de l'intégrale fonctionnelle. On va pour ce faire supposer qu'on est capable de définir la mesure d'intégration fonctionnelle sur l'espace des orbites irréductibles $\mathscr{B}^*$, ce qui est en réalité un problème toujours ouvert aujourd'hui. Etant donné que l'action de la théorie de type cohomologique s'écrit comme un terme Q-exact, on peut choisir n'importe quelle fonction de jauge topologique isotope à l'action définie dans la section précédente. L'intégrale fonctionnelle correctement fixée de jauge, au sens de l'invariance de jauge ordinaire, se réduit en principe à l'intégrale sur l'espace des orbites de jauge de la même fonctionnelle des champs,

[4] où δ_k^n est le delta de Kronecker.

multipliée par le pfaffien de l'opérateur $d_A^* d_A$, (nous expliquerons ce résultat lorsque nous discuterons la fixation de jauge), à savoir

$$\int_{\mathscr{B}^* \times T\mathscr{A}^*} \mu \quad \mathrm{Pf}[d_A^* d_A] \prod_k \mathcal{O}^{n_k}(\gamma_k) \quad e^{\,-Q\,\boldsymbol{\Psi}} \tag{2.61}$$

avec $\boldsymbol{\Psi}$ défini tel que

$$Q\,\boldsymbol{\Psi} = \int \mathrm{Tr}\,\Big(T \star F + \chi \star d_A \Psi + \eta d_A \star \Psi + \bar{\Phi}\big(d_A \star d_A \Phi + [\Psi, \star\Psi]\big)\Big) \tag{2.62}$$

L'intégration gaussienne sur les champs imaginaires purs T, χ, η et $\bar{\Phi}$ définit formellement le produit de fonctionnelles delta

$$\int_{\mathscr{B}^* \times T\mathscr{A}^*} \mu \quad \mathrm{Pf}[d_A^* d_A] \prod_k \mathcal{O}^{n_k}(\gamma_k) \quad \delta[F^-]\,\delta[(d_A\Psi)^-]\,\delta[d_A^*\Psi]\,\delta\big[d_A^* d_A \Phi - \star[\Psi, \star\Psi]\big] \tag{2.63}$$

La fonctionnelle delta $\delta[d_A^*\Psi]$ contraint Ψ à sa composante dans $H\mathscr{A}^* \cong T\mathscr{B}^*$,

$$\Psi \approx \Psi - d_A G_A d_A^* \Psi \tag{2.64}$$

et introduit comme facteur le déterminant formel de d_A^*, vu comme un opérateur de $\Lambda^\bullet \mathscr{A}^*$ dans $\mathrm{Lie}(\mathscr{G})$. Puisque A est irréductible, ce déterminant est égal au déterminant formel de l'opérateur adjoint d_A de $\mathrm{Lie}(\mathscr{G})$ dans $\Lambda^\bullet \mathscr{A}^*$, et donc au pfaffien du laplacien associé, $\mathrm{Pf}[d_A^* d_A]$, sur $\mathrm{Lie}(\mathscr{G})$. En multipliant ce pfaffien avec son homologue apparaissant dans la définition de l'intégrale fonctionnelle, on obtient le déterminant de $d_A^* d_A$. Ce déterminant multiplié par la fonctionnelle delta $\delta\big[d_A^* d_A \Phi - \star[\Psi, \star\Psi]\big]$, contraint le champ Φ à la courbure de $\mathscr{A}^* \to \mathscr{B}^*$

$$\Phi \approx G_A \star [\Psi, \star\Psi] \tag{2.65}$$

sans introduire de facteur supplémentaire. L'intégrale fonctionnelle se réduit alors à

$$\int_{\mathscr{B}^* \times T\mathscr{B}^*} \mu \quad \prod_k ch_{n_k}(\gamma_k) \quad \delta[F^-]\,\delta[(d_A\Psi)^-] \tag{2.66}$$

Les dernières fonctionnelles delta définissent formellement une classe de Thom pour F^- vue comme une fonction de $\mathscr{B}^*$ dans l'espace des 2-formes tensorielles anti-autoduales. C'est à dire que les déterminants qu'elles font intervenir se compensent l'un l'autre et qu'elles restreignent l'intégrale fonctionnelle à l'intégrale sur les orbites de jauge autoduales.

$$\int_{\mathscr{M}} \prod_k ch_{n_k}(\gamma_k) \tag{2.67}$$

La localisation perdure dans le cas où les antifantômes admettent des modes zéro, mais dans ce cas l'intégration fonctionnelle sur ces champs introduit en facteur la classe d'Euler du fibré de fibre le conoyau de l'opérateur tordu de Dirac et d'action sur la fibre, l'action des automorphismes verticaux sur les sections du fibré adjoint, qu'on appelle communément le fibré d'obstruction (obstruction à l'égalité de la dimension de l'espace de modules avec sa dimension virtuelle). Un argument simpliste consiste à dire qu'on régularise l'intégrale sur les modes zéro des antifantômes ($d_A^*\chi(u) = d_A\eta(v) = 0$) en considérant le terme

$$\int \mathrm{Tr}\,\Big(\chi \star [\Phi, \chi] + \eta \star [\Phi, \eta]\Big) \tag{2.68}$$

dans l'action, introduisant ainsi dans l'intégrale fonctionnelle le facteur

$$\int \mu(u,v)\;\; e^{-\int \mathrm{Tr}\,\Big(\chi(u) \star [\Phi, \chi(u)] + \eta(v) \star [\Phi, \eta(v)]\Big)} \tag{2.69}$$

qui n'est autre que la classe d'Euler du fibré d'obstruction, une fois le champ Φ identifié à la courbure d'I. M. Singer.

On peut ainsi en principe calculer des fonctions de corrélation d'observables BPS de la théorie supersymétrique en huit dimensions à partir d'intégrales ordinaires sur l'espace de modules. Si le formalisme nécessaire n'a pas été construit en huit dimensions, cette méthode s'est avérée fructueuse en quatre dimensions [37].

2.2.2 Invariance de jauge

La propriété de localisation offre une alternative à l'intégration fonctionnelle. Il est néanmoins intéressant d'étudier ces théories par le biais de la théorie des perturbations dans le but de comprendre l'intégration fonctionnelle elle-même. Cette propriété considérablement simplificatrice des théories de type cohomologique offre en effet un laboratoire très intéressant pour tester la théorie des perturbations.

L'espace des orbites de jauge irréductibles $\mathscr{B}^*$ est une variété différentiable d'Hilbert, séparable, métrisable et paracompacte [35].[5] Il admet en tant que tel, un recouvrement d'ouverts contractibles localement fini $\{U_{\mathring{a}}\}$ [7]. Pour tout point $\mathring{a}$ de $\mathscr{B}^*$, il existe un ouvert de $\mathscr{B}^*$ contenant $\mathring{a}$ difféomorphe à $T\mathscr{B}^*_{|\mathring{a}}$

$$\begin{aligned} \phi_{\mathring{a}} \;:\; T\mathscr{B}^*_{|\mathring{a}} &\rightarrow U_{\mathring{a}} \;\subset \mathscr{B}^* \\ X &\rightarrow \phi_{\mathring{a}}[X] \end{aligned} \tag{2.70}$$

[5] Cette définition requière des restrictions sur l'espaces des sections considéré, voir [38]

$T\mathscr{B}^*_{|\mathring{a}}$ est lui même difféomorphe à l'espace tangent horizontal en un représentant $\mathring{A}$ de l'orbite $\mathring{a}$ dans $\mathscr{A}^*$, via le relèvement horizontal de $X \in T\mathscr{B}^*_{|\mathring{a}}$ en $X^{\mathring{h}} \in H\mathscr{A}^*_{|\mathring{A}}$. La fonction $\phi_{\mathring{a}}$ n'étant définie que modulo difféomorphisme, on peut la contraindre de telle sorte que la fonction

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathring{a}} \ : \ U_{\mathring{a}} \rightarrow \ & V_{\mathring{A}} \ \subset \mathscr{A}^* \\ a \rightarrow \ & \mathring{A} + (\phi_{\mathring{a}}^{-1}[a])^{\mathring{h}} \end{aligned} \tag{2.71}$$

définit une section locale trivialisante de $\mathscr{A}^* \rightarrow \mathscr{B}^*$. Ce qui définit des coordonnées locales de $\mathscr{B}^*$ dans un sous espace de $\mathscr{A}^*$ obtenu via la projection (π est la projection de $\mathscr{A}^*$ dans $\mathscr{B}^*$)

$$\sigma_{\mathring{a}} \circ \pi(A) = U[A, \mathring{A}] d_A U[A, \mathring{A}]^{-1} \tag{2.72}$$

avec $U[A, \mathring{A}]$ défini tel que

$$d^*_{\mathring{A}}\Big(U[A, \mathring{A}] d_A U[A, \mathring{A}]^{-1} - \mathring{A}\Big) = 0 \tag{2.73}$$

ce qui correspond en physique à la jauge généralisée de Landau. $\mathscr{B}^*$ admet un sous ensemble localement fini $\mathscr{B}^{**}$ tel que pour chaque point $\mathring{a} \in \mathscr{B}^{**}$ il existe un ouvert $U_{\mathring{a}}$ de $\mathscr{B}^*$ dont l'image via $\sigma_{\mathring{a}}$ est strictement incluse dans le domaine restreint de Gribov défini par D. Zwanziger et G. Dell'Antonio [39], et dont l'union est $\mathscr{B}^*$ lui-même. Sachant que toute orbite de jauge compte une intersection avec le premier domaine de Gribov [39], il est raisonnable de supposer que $\mathscr{B}^{**}$ peut être choisi de manière à être isomorphe à un espace de dimension finie. Cette propriété n'est pas indispensable de toute manière, on admettra seulement qu'il est possible de définir correctement l'intégration sur cet espace. Ceci permettrait de construire une partition de l'unité $\varrho(|A - \mathring{A}(\mathring{a})|)$ avec

$$|A - \mathring{A}|^2 \equiv -\int \mathrm{Tr}\ \big(A - \mathring{A}\big) \star \big(A - \mathring{A}\big) \tag{2.74}$$

telle que $\varrho(|A - \mathring{A}(\mathring{a})|)$ soit nulle en dehors du domaine restreint de Gribov associé à $\mathring{A}$ et que

$$\int_{\mathscr{B}^{**}} \varrho(|A - \mathring{A}(\mathring{a})|) \ = 1 \tag{2.75}$$

L'intégrale fonctionnelle, définie comme une intégrale sur l'espace des orbites irréductibles $\mathscr{B}^*$ doit faire intervenir en facteur le rapport du volume de l'orbite dans l'espace des connexions irréductibles sur celui du groupe de jauge lui-même. Ceci est dû au fait que la quantification canonique de la théorie dans le cadre de l'algèbre d'Heisenberg n'a de sens que sur un espace des phases plat, et que l'intégrale fonctionnelle correspondante est par conséquent définie sur l'espace des connexions et non l'espace des orbites [40]. Ce rapport de volume est donné par le pfaffien du laplacien covariant $d^\star_A d_A$ [41]. L'intégrale fonctionnelle est donc définie comme suit

$$\int_{\mathscr{B}^*} \mu \;\; \mathrm{Pf}[d^\star_A d_A] \; \mathcal{O}\, e^{-S} = \int_{\mathscr{B}^{**}} \int_{H\mathscr{A}^*} \mu \;\; \varrho(|X|) \;\; \mathrm{Pf}[d^\star_{\mathring{A}+X} d_{\mathring{A}+X}] \; \mathcal{O}\, e^{-S} \tag{2.76}$$

La racine du déterminant de la métrique, intervenant dans la mesure définie sur $H\mathscr{A}^*_{|\mathring{A}}$, multipliée par le pfaffien du laplacien covariant $d^\star_A d_A$, n'est autre que le déterminant de l'opérateur de Faddeev–Popov divisé par celui du laplacien covariant par rapport à la connexion de fond $\mathring{A}$ [42]. L'intégrale fonctionnelle se réécrit ainsi à l'aide des fantômes de Faddeev–Popov[6]

$$\int_{\mathscr{B}^{**}} \int_{\mathscr{A}} \mu \;\; \varrho(|A - \mathring{A}|) \; \mathcal{O}\, e^{-S \,-\, s \int \mathrm{Tr}\; \bar{\Omega} d_{\mathring{A}} \star (A - \mathring{A})} \tag{2.77}$$

Dans le cadre de la théorie topologique, la forme locale de l'opérateur BRST topologique Q dans les coordonnées locales autour du point $\mathring{A}$, est un opérateur nilpotent de $H\mathscr{A}^*_{|\mathring{A}} \times T\mathscr{A}^* \times \cdots$ dans lui même. C'est à dire que QA satisfait

$$d^*_{\mathring{A}} QA = 0 \tag{2.78}$$

Dans l'ouvert $\sigma_{\mathring{a}} U_{\mathring{a}}$, l'opérateur de Faddeev–Popov $d^*_{\mathring{A}} d_A$ est inversible, et on peut définir le projecteur $\sigma_{\mathring{a}\,*} \circ \pi_*$ sur $H\mathscr{A}^*_{|\mathring{A}} \times T\mathscr{A}^* \times \cdots$ en faisant intervenir son inverse $G_{\mathring{A}A}$

$$\sigma_{\mathring{a}\,*} \circ \pi_*\big(\delta A\,,\, \delta\varphi\big) \equiv \big(\delta A - d_A G_{\mathring{A}A} d^*_{\mathring{A}} \delta A \;,\; \delta\varphi - [G_{\mathring{A}A} d^*_{\mathring{A}} \delta A\,,\, \varphi]\big) \tag{2.79}$$

Ce qui revient à définir une connexion $G_{\mathring{A}A} d^*_{\mathring{A}} \delta A$ sur $T\mathscr{A}^*_{|\mathring{A}}$. Dans le modèle BRST constitué des champs fixés de jauge ($d_{\mathring{A}} \star (A - \mathring{A}) \approx 0$), le champ c n'est en fait pas un représentant algébrique de la connexion de $\mathscr{A}^* \to \mathscr{B}^*$, mais celui de cette connexion associée à la projection $\sigma_{\mathring{a}\,*} \circ \pi_*$. Malgré cette différence, le champ c définit bien les directions verticales dans le modèle BRST, il est en quelque sorte la « silhouette algébrique » de la connexion géométrique dans le modèle BRST. Ce n'est en aucun cas une contradiction avec le formalisme de Mathai–Quillen, puisque le modèle algébrique directement relié à la géométrie du problème est en fait le modèle de Weil [33]. On nomme le champ c, *l'ombre*, et les champs associés *les champs d'ombre* [A.4]. Afin de représenter la fonctionnelle $G_{\mathring{A}A} d^*_{\mathring{A}} \Psi$ en théorie des champs à l'aide d'un opérateur local, on introduit le

[6]On a omis de restreindre l'intégrale fonctionnelle aux connexions irréductibles, car cette restriction est réalisée par l'intégration sur les éventuels modes zéro du fantôme de Faddeev–Popov.

terme

$$\int \mathrm{Tr}\ \bar{c}\, d_{\hat{A}} \star \big(d_A c - \Psi\big) \tag{2.80}$$

dans l'action, de manière à ce que l'intégration sur le champ $\bar{c}$ définisse l'ombre comme cette fonctionnelle $c \approx G_{\hat{A}A} d^*_{\hat{A}} \Psi$. Cette procédure introduit en facteur un déterminant de Faddeev–Popov, qui doit être compensé par un terme de la forme

$$\int \mathrm{Tr}\ \bar{\mu}\, d_{\hat{A}} \star d_A \mu \tag{2.81}$$

avec des champs scalaires pairs $\bar{\mu}$ et μ. Nous allons maintenant voir que ces termes apparaissent naturellement dans la construction BRST de la fixation de jauge.

Du point de vue du formalisme de Mathai–Quillen, les observables de la théorie sont les éléments de cohomologie équivariante, qu'on définit dans le modèle BRST comme la cohomologie de l'opérateur BRST topologique Q dans le complexe basique [43]. Le complexe basique est quand à lui défini comme l'ensemble des fonctions des champs et de leurs dérivées qui sont invariantes et horizontales. C'est à dire, dans le cas d'une théorie de Yang–Mills, qu'elles sont invariantes de jauge et qu'elle ne dépendent pas de l'ombre c. On définit donc l'opérateur BRST s comme une différentielle dont la cohomologie définit le complexe basique. La cohomologie de l'opérateur BRST est donnée dans le cas usuel, sans l'adjonction de l'ombre c, par l'ensemble des fonctions invariantes de jauge des champs.

$$\begin{aligned} s\,A &= -d_A\Omega & \qquad s\,\Omega &= -\Omega^2 \\ s\,\Psi &= -[\Omega, \Psi] & & \\ s\,\Phi &= -[\Omega, \Phi] & & \cdots \end{aligned} \tag{2.82}$$

Afin d'obtenir en outre l'indépendance par rapport à c, on définit tout simplement son fantôme μ, de telle sorte qu'ils constituent à eux deux un doublet trivial

$$s\,c = \mu \qquad s\,\mu = 0 \tag{2.83}$$

On étend la définition du BRST topologique et du BRST ordinaire à tous les champs de manière à ce que ces deux opérateurs soient nilpotents et anticommutent, ce qui détermine l'action de Q comme suit

$$Q\Omega = -\mu - [c, \mu] \qquad Q\mu = -[\Phi, \Omega] - [c, \mu] \tag{2.84}$$

Dans le cas usuel, l'écriture explicite d'une fixation de jauge nécessite l'introduction d'un doublet BRST-trivial

$$s\,\bar{\Omega} = b \qquad s\,b = 0 \tag{2.85}$$

Afin d'écrire une fixation de jauge s-exacte qui soit de plus Q invariante, on introduit un quatuor trivial

$$\begin{aligned} s\,\bar\mu = \bar c \qquad Q\bar\mu = \bar\Omega \\ Q\bar c = -b \end{aligned} \tag{2.86}$$

La fixation de jauge, dans la jauge généralisée de Landau, s'écrit alors

$$\begin{aligned} - s\,Q \int \mathrm{Tr}\ \bar\mu\, d_{\mathring{A}} \star (A - \mathring{A}) = \int \mathrm{Tr}\ \Big(-b\, d_{\mathring{A}} \star (A - \mathring{A}) + \bar\Omega\, d_{\mathring{A}} \star d_A \Omega \\ - \bar c\, d_{\mathring{A}} \star \big(d_A c - \Psi\big) \ - \bar\mu\, d_{\mathring{A}} \star \big(d_A \mu + [d_A\Omega, c] - [\Omega, \Psi]\big)\Big) \end{aligned} \tag{2.87}$$

ce qui concorde avec la discussion précédente. Cette fixation de jauge définit ainsi de bonnes coordonnées locales sur le domaine restreint de Gribov associé à la connexion de fond $\mathring{A}$. L'action complète fixée de jauge est donc la somme d'une classe de cohomologie de s, Q-exact et d'un terme s et Q-exact. Ceci établit l'ordre des projections sur les cohomologies ; ainsi, les observables sont bien les éléments de cohomologie de Q dans la cohomologie de s, et pas l'inverse, qui de toute manière est vide. Du point de vue de la théorie des champs, une manipulation formelle naïve porterait à croire qu'une fonction de corrélation incluant un opérateur Q-exact dont l'antécédent ne serait pas s invariant, soit tout de même nulle. Une étude plus scrupuleuse incluant la définition globale de l'intégrale fonctionnelle (2.77) montre que les observables non s invariantes ne se recollent pas sur les intersections d'ouverts. Ainsi une observable Q-exacte d'antécédent non s-invariant peut être considérée comme localement Q-exact, mais pas globalement. On peut en fait montrer que la cohomologie de Q dans le complexe complet est triviale, ce qui relie au lemme de Poincaré via l'interprétation de Q comme la différentielle extérieure sur chaque ouvert étoilé $U_{\mathring{a}}$. On réfère à [44] pour une interprétation équivalente ne faisant pas intervenir l'opérateur BRST de jauge.

2.2.3 Symétrie vectorielle

L'interprétation géométrique de la fixation de jauge ordinaire est plus aisée dans la jauge généralisée de Landau. Cette dernière a de plus la propriété d'admettre une symétrie supplémentaire, la symétrie fantôme. Les identités de Ward fantôme et anti-fantôme imposent la stabilité de la fixation de jauge sous le groupe de renormalisation en dimension inférieure ou égale à quatre [45]. Ces identités de Ward se généralisent au cas où les champs d'ombre sont inclus [A.4]. Nous allons voir dans cette section que la composante équivariante de l'action $Q\Psi$ peut également être contrainte par des symétries supplémentaires de manière à être stable par rapport au groupe de renormalisation. Nous avons en effet expliqué dans la publication annexée A.1, qu'un choix « canonique » de fixation de jauge consiste à exiger que l'antécédent du tenseur énergie impulsion soit conservé modulo les équations du mouvement. Dans le cas où la variété sur laquelle on définit la théorie admet un vecteur constant, ce choix de jauge implique une symétrie additionnelle de la théorie. Dans le cas où la théorie est définie sur un espace plat celle-ci admet une symétrie de paramètre vectoriel qui contraint complètement l'action. Elle n'est autre que la composante vectorielle de la supersymétrie tordue, dans sa forme équivariante (voir [A.1] pour plus de détails). Nous allons seulement discuter ici la possibilité de construire une fixation de jauge complète, pour la symétrie topologique et l'invariance de jauge, admettant cette symétrie. Pour ce faire on doit construire une représentation de cette symétrie vectorielle qui soit cohérente avec la symétrie BRST. Dans [A.1] nous avons résolu ce problème en abandonnant la propriété de factorisation de l'opérateur vectoriel en $\delta = \kappa^\mu \delta_\mu$. Ceci impose que toute fixation de jauge δ invariante dépend explicitement du paramètre vectoriel κ. Cette dépendance n'est en fait pas problématique pour la renormalisation de la théorie [A.4]. Nous allons cependant expliquer ici comment définir une fixation de jauge $Spin(7)$ invariante. Une représentation de la symétrie vectorielle compatible avec l'invariance BRST doit s'inclure dans une algèbre d'opérateurs qui n'introduit pas les transformations de jauge. C'est à dire

$$\delta^2 = 0 \qquad [Q, \delta] = \mathring{\mathscr{L}}_\kappa \tag{2.88}$$

$\mathring{\mathscr{L}}_\kappa$ étant la dérivée de Lie le long de κ, horizontale par rapport à la connexion de fond $\mathring{A}$. Pour ce faire, on définit δ sur les champs physiques comme l'action de la supersymétrie vectorielle, moins une transformation de jauge de paramètre $i_\kappa\gamma_1$ où γ_1 est une 1-forme fermionique de nombre d'ombres -1 (nombre de fantômes topologique qu'on différencie avec cette appellation du nombre de fantômes ordinaire). L'équation $\delta^2 = 0$ impose alors

$$\delta\gamma_1 = i_\kappa\gamma_2 - g(\kappa)\bar{\Phi} - \frac{1}{2}[\gamma_1, i_\kappa\gamma_1] \tag{2.89}$$

où γ_2 est une 2-forme paire de nombre d'ombres -2 dont l'apparition est causée par l'indétermination due à la nilpotence de i_κ en tant que différentielle. $g(\kappa)$ est la 1-forme associée au vecteur κ par la métrique sur M.[7] L'équation $[Q, \delta] = \mathring{\mathscr{L}}_\kappa$ impose quand à elle

$$Qi_\kappa\gamma_1 + \delta c + [c, i_\kappa\gamma_1] = i_\kappa\big(A - \mathring{A}\big) \tag{2.90}$$

[7] Pour tout v de TM, $g(\kappa)(v) = g(\kappa, v)$.

dont on déduit les transformations suivantes, en introduisant la 1-forme paire de nombre d'ombres zéro c_1

$$\delta c = i_\kappa\big(c_1 + A - \mathring{A}\big) \qquad Q\gamma_1 = c_1 - [c, \gamma_1] \tag{2.91}$$

De manière générale, pour compléter l'algèbre, on doit ajouter un champ pour chaque produit antisymétrique d'opérateur Q et δ_μ. On doit ainsi introduire des k-formes de nombre d'ombres $-k$, γ_k, avec k allant de 2 à 8 pour les produits antisymétriques de δ_μ, et des k-formes de nombre d'ombres $1-k$, c_k, avec k allant de 1 à 8 pour les produits antisymétriques incluant Q. On note pour deux formes tensorielles X et Y, (localement des formes différentielles à valeur dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$), $\mathrm{ad}_X Y$ le commutateur gradué de celles-ci pour le produit extérieur. La transformation de γ_k sous δ fait en général intervenir $\mathrm{ad}^k_{\gamma_1} i_\kappa \gamma_1$. Les calculs deviennent donc de plus en plus compliqués au fur et à mesure que le degré des formes considérées augmente. L'astuce consiste à deviner à partir des transformations des formes de plus bas degré, la transformation des formes généralisées de degré de forme plus nombre d'ombres fixé, $\tilde{\gamma} \equiv \oplus_{k=1}^{8}\gamma_k$ et $\tilde{c}^* \equiv \oplus_{k=1}^{8} c_k$, en fonction d'elles mêmes. On définit également $\tilde{c} \equiv c \oplus \tilde{c}^*$.

Ces formes peuvent tout aussi bien être considérées comme des superchamps, et on aimerait formuler la théorie à l'aide de ce type de formes généralisées. On se contentera cependant dans cette thèse d'écrire la fixation de jauge comme une intégrale sur un super-espace. Nous travaillons actuellement sur une formulation en super-espace tordu, c'est à dire une théorie des champs dont les champs sont dans des représentations produits tensoriels gradués de plusieurs répliques de l'algèbre extérieur. Nous espérons qu'à la formulation en super-espace de la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N}=1$ en quatre dimensions, correspond une formulation en super-espace tordu de la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N}=2$. Une telle formulation pourrait ensuite être généralisée à la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N}=2$ en huit dimensions. Mais cette fois-ci cette théorie serait le reflet tordu d'une théorie impliquant une formulation dans un super-espace harmonique. Un éventuel super-espace harmonique tordu de la théorie en huit dimensions, proposerait une formulation $Spin(7)$ invariante de la théorie en fonction de représentations complexes de $SU(4)$, qui ferait intervenir les fonctions harmoniques de $Spin(7)/SU(4)$.

La formulation tordue est définie par sa propriété de n'admettre qu'un sous groupe de symétrie du groupe des rotations, ce qui la contraint à n'être définie que sur une variété d'holonomie réduite. Du point de vue géométrique, les variétés compactes de dimension supérieure ou égale à quatre sont, d'après la liste de Berger, ou, des cas particuliers telles que les variétés homogènes ou réductibles en produit de cercles et d'autres variétés, ou, des variétés d'holonomie maximale, ou encore des variétés de la liste réduite de Berger [32]. Les groupes de cette dernière ont pour particularité d'admettre des représentations spinorielles isomorphes à des représentations de formes contraintes par des équations définies à l'aide de tenseurs invariants de ces groupes. Les variétés d'holonomie spéciale correspondant à cette liste constituent les solutions génériques purement gravitationnelles de la théorie des cordes. Ces variétés ont ainsi un grand intérêt en physique, même si on doit reconnaître que ce type de solution de la théorie des cordes n'est pas réaliste, et qu'il est nécessaire d'introduire des flux et des branes de Dirichlet afin d'espérer obtenir le modèle standard dans la limite de basse énergie. Pour une théorie de Yang–Mills supersymétrique définie sur un espace plat, la restriction de l'invariance par rapport aux rotations à ces sous groupes permet d'accroître le nombre de représentations irréductibles tout en maintenant la représentation vectorielle irréductible.

Fermons cette parenthèse et revenons à la question qui nous intéresse ici, c'est à dire une représentation des différentielles nilpotentes Q et δ. On note que la forme des transformations n'est pas unique, puisqu'on peut toujours redéfinir une k-forme en lui ajoutant des commutateurs de formes de plus bas degré. Une convention permet cependant de deviner les transformations suivantes

$$\begin{aligned} Q\tilde{c} &= e^{-\tilde{\gamma}}\Phi e^{\tilde{\gamma}} - \tilde{c}^2 & \delta\tilde{c} &= i_\kappa\big(\tilde{c} - \mathring{A}\big) + e^{-\tilde{\gamma}}\big(\mathscr{L}_\kappa - g(\kappa)\eta\big)e^{\tilde{\gamma}} \\ Q\tilde{\gamma} &= \mathrm{td}(\tilde{\gamma})\tilde{c}^* - [c,\tilde{\gamma}] & \delta\tilde{\gamma} &= i_\kappa\tilde{\gamma} - \mathrm{td}(-\tilde{\gamma})\big(g(\kappa)\bar{\Phi} + i_\kappa\gamma_1\big) \end{aligned} \tag{2.92}$$

où $\mathrm{td}(X)$ est la série formelle dans les puissances de ad_X définie par le développement de Taylor de la fonction de Todd, $\frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$, qui apparaît dans la formule de Campbell–Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+\mathrm{td}(A)B+\mathcal{O}(B^2)} \tag{2.93}$$

Il est en fait plus aisé de montrer que les opérateurs Q et δ vérifient l'algèbre souhaitée sur le générateur $e^{\tilde{\gamma}}$

$$Qe^{\tilde{\gamma}} = e^{\tilde{\gamma}}\tilde{c} - c\,e^{\tilde{\gamma}} \qquad \delta e^{\tilde{\gamma}} = i_\kappa e^{\tilde{\gamma}} - \big(g(\kappa)\bar{\Phi} + i_\kappa\gamma_1\big)e^{\tilde{\gamma}} \tag{2.94}$$

On peut maintenant introduire l'opérateur BRST s, qui doit en plus d'être nilpotent, anticommuter avec les opérateurs scalaires et vectoriels Q et δ. Encore une fois, il est nécessaire d'introduire un champ pour chaque produit antisymétrique d'opérateurs, soit, des k-formes de nombre de fantômes 1 et de nombre d'ombres $-k$, Ω_k, avec k allant de 1 à 8, pour les produits antisymétriques de δ_μ avec s, et des k-formes de nombre de fantômes 1 et de nombre d'ombres $1-k$, μ_k, avec k allant de 0 à 8, pour les produits antisymétriques de s, Q et δ_μ. Il est préférable de condenser les notations en définissant les formes généralisées de degré de forme plus nombre d'ombres fixé, $\tilde{\Omega}^* \equiv \oplus_{k=1}^{8}\Omega_k$, $\tilde{\Omega} \equiv \Omega\oplus\tilde{\Omega}^*$ et $\tilde{\mu} \equiv \oplus_{k=0}^{8}\mu_k$. Tous ces champs, s'ils permettent d'obtenir une représentation de la symétrie vectorielle sur les champs fixés de jauge, ne doivent pas influer directement sur les observables physiques. On définit donc la symétrie BRST de manière à ce qu'ils se regroupent en doublets triviaux. Comme on vient de le voir, les champs γ_k sont plus naturellement représentés par la forme généralisée $e^{\tilde{\gamma}}$, qui ne prend pas valeur dans l'algèbre de Lie mais dans l'algèbre enveloppante. On définit en conséquence les transformations BRST

$$\begin{aligned} s\, e^{\tilde{\gamma}} &= \tilde{\Omega}^* e^{\tilde{\gamma}} \qquad & s\,\tilde{c} &= \tilde{\mu} \\ s\,\tilde{\Omega}^* &= \tilde{\Omega}^{*\,2} \qquad & s\,\tilde{\mu} &= 0 \end{aligned} \tag{2.95}$$

La transformation de $\tilde{\gamma}$ correspondante étant donnée par $s\,\tilde{\gamma} = \mathrm{td}(-\tilde{\gamma})\tilde{\Omega}^*$. La forme de la transformation de Ω^* peut sembler à première vue plus proche de la transformation du fantôme de Faddeev–Popov que d'éléments de doublets triviaux, mais ce n'est qu'un leurre, car on doit tenir compte du fait que le carré Ω_k^2 n'apparaît que dans la transformation de $s\,\Omega_{2k}$. L'algèbre d'opérateurs permet de calculer les transformations des fantômes sous Q et δ comme suit

$$\begin{aligned} Q\tilde{\Omega} &= -e^{\tilde{\gamma}}\tilde{\mu}e^{-\tilde{\gamma}} - [c,\tilde{\Omega}] \qquad & \delta\tilde{\Omega} &= i_\kappa\tilde{\Omega} - [g(\kappa)\bar{\Phi} + i_\kappa\gamma_1,\tilde{\Omega}] \\ Q\tilde{\mu} &= -e^{-\tilde{\gamma}}[\Phi,\tilde{\Omega}]e^{\tilde{\gamma}} - [\tilde{c},\tilde{\mu}] \qquad & \delta\tilde{\mu} &= i_\kappa\tilde{\mu} + e^{-\tilde{\gamma}}\big(g(\kappa)[\eta,\tilde{\Omega}] - \mathscr{L}_\kappa\tilde{\Omega}\big)e^{\tilde{\gamma}} \end{aligned} \tag{2.96}$$

Nous voudrions maintenant écrire une fixation de jauge qui soit invariante par rapport à toutes les symétries dont on vient de déterminer une représentation. Suivant la méthode proposée dans l'article annexé A.4, on introduit un 1024-plet trivial (2^{1+1+8}), qu'on regroupe en un quatuor de formes généralisées

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\bar{\mu}} & \\ \tilde{\bar{\Omega}} & & \tilde{\bar{c}} \\ & \tilde{b} & \end{array} \tag{2.97}$$

qui se transforment sous s et Q comme le quatuor original (2.85,2.86), et sous δ de la manière suivante

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\bar{\mu}} &= i_\kappa\tilde{\bar{\mu}} \\ \delta\tilde{\bar{\Omega}} &= i_\kappa\tilde{\bar{\Omega}} + \mathring{\mathscr{L}}_\kappa\tilde{\bar{\mu}} \qquad \delta\,\tilde{\bar{c}} = i_\kappa\,\tilde{\bar{c}} \\ \delta\tilde{b} &= i_\kappa\tilde{b} - \mathring{\mathscr{L}}_\kappa\,\tilde{\bar{c}} \end{aligned} \tag{2.98}$$

Le lecteur est en droit de s'inquiéter du fait que certains de ces champs ont des dimensions canoniques négatives. Ce n'est en fait pas un problème, car une fixation de jauge $s\,Q\prod_\mu \delta_\mu$-exacte vérifie des identités de Ward supplémentaires de type antifantômes qui impliquent que ces formes étendues se renormalisent d'un bloc ; ce qui permet de ne considérer que la dimension canonique du champ de dimension la plus élevée dans la forme étendue.

Une manière efficace d'écrire un terme $\prod_\mu \delta_\mu$-exact consiste à construire des formes étendues qui se transforment sous δ comme des superchamps

$$\delta\tilde{V} = i_\kappa \tilde{V} \tag{2.99}$$

L'application de $\prod_\mu \delta_\mu$ à un produit de composantes de degré zéro de tels superchamps est alors trivialement donnée par le terme d'ordre maximal de leur produit. On vérifie aisément que

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\tilde{\bar{\mu}}} & \\ \tilde{\tilde{\bar{\Omega}}} + d_{\mathring{A}}\tilde{\tilde{\bar{\mu}}} & & \tilde{\tilde{\bar{c}}} \\ & \tilde{b} - d_{\mathring{A}}\tilde{\tilde{\bar{c}}} & \end{array} \tag{2.100}$$

constituent de tels superchamps. Il nous faut maintenant obtenir le superchamp dont la première composante est le terme $d_{\mathring{A}} \star (A - \mathring{A})$. Etant donné qu'on interprète les formes différentielles comme les composantes d'un superchamp, on doit écrire ce terme comme un scalaire. Les calculs étant cependant plus aisés lorsqu'on fait intervenir l'algèbre extérieure, on introduit la notation suivante

$$\int d^8\,\theta \mathring{\mathscr{L}}_\theta \star_\theta i_\theta(A - \mathring{A}) \tag{2.101}$$

où l'intégrale est l'intégrale usuelle de Berezin sur huit variables de Grassmann θ^μ et l'opérateur $\star_\theta$ correspond à l'opérateur étoile de Hodge défini sur ces variables. Il s'agit maintenant d'obtenir la forme étendue se transformant comme un superchamp dont la première composante est $i_\theta(A - \mathring{A})$. Un calcul itératif permet de déterminer cette forme étendue comme

$$e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}}_\theta + g(\theta)\big(\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}} \; - i_\theta \mathring{A} \tag{2.102}$$

avec $\tilde{\mathscr{L}}_\theta \equiv [i_\theta, d_{\tilde{A}}]$ et $\tilde{A}$ défini comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{A} \equiv A + \chi - \star\Omega d_A\bar{\Phi} - \Omega[\bar{\Phi}, \eta] + \Omega_4([\bar{\Phi}, \chi]) \\ + \Omega[\bar{\Phi}, d_A\bar{\Phi}] + \star[\bar{\Phi}, [\bar{\Phi}, \chi]] + \star[\bar{\Phi}, [\bar{\Phi}, d_A\bar{\Phi}]] + \star[\bar{\Phi}, [\bar{\Phi}, [\bar{\Phi}, \eta]]] \end{aligned} \tag{2.103}$$

où Ω_4 est l'application linéaire qui associe une 4-forme à une 2-forme anti-autoduale comme suit

$$\Omega_4(\chi)_{\mu\nu\sigma\rho} \equiv \Omega_{[\mu\nu\sigma}{}^{\lambda}\chi_{\lambda|\rho]} \tag{2.104}$$

Il nous faut également connaître les transformations sous s et Q de cette forme étendue, afin de déterminer tous les termes de la fixation de jauge. La courbure étendue de Baulieu–Singer peut en fait être généralisée de manière à inclure des champs covariants sous l'action de δ. On montre que le superchamp dont la première composante est l'ombre c prend la forme suivante

$$\tilde{c} + e^{-\tilde{\gamma}} d_{\tilde{A}} e^{\tilde{\gamma}} \tag{2.105}$$

et qu'il permet de définir une courbure qui se transforme également de manière covariante sous δ

$$(d+Q)\Big(\tilde{c} + e^{-\tilde{\gamma}} d_{\tilde{A}} e^{\tilde{\gamma}}\Big) + \Big(\tilde{c} + e^{-\tilde{\gamma}} d_{\tilde{A}} e^{\tilde{\gamma}}\Big)^2 = e^{-\tilde{\gamma}}\ \tilde{\Phi} e^{\tilde{\gamma}} \tag{2.106}$$

La forme étendue $\tilde{\Phi}$ peut être calculée sans difficulté à partir de l'équation

$$(d+Q)\big(c+\tilde{A}\big) + \big(c+\tilde{A}\big)^2 = \tilde{\Phi} \tag{2.107}$$

En définissant de plus la forme étendue $\tilde{F} \equiv d\tilde{A} + \tilde{A}^2$, on obtient les transformations du terme apparaissant dans la fixation de jauge sous s et Q comme suit

$$\begin{aligned}
s\, e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}_\theta} + g(\theta)\big(\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}} &= -e^{-\tilde{\gamma}}\big(\tilde{\mathscr{L}_\theta}\tilde{\Omega} + g(\theta)[\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}, \tilde{\Omega}]\big)e^{\tilde{\gamma}}\\
\delta e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}_\theta} + g(\theta)\big(\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}} &= -\mathcal{L}_\theta\tilde{c} - \Big[e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}_\theta} + g(\theta)\big(\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}}, \tilde{c}\Big]\\
&\quad -e^{-\tilde{\gamma}}\Big(g(\theta)\big(d_{\tilde{A}}\eta + [\bar{\Phi}, \tilde{\Phi} - \tilde{F}]\big) - i_\theta\big(\tilde{\Phi} - \tilde{F}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}}\\
s\,\delta e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}_\theta} + g(\theta)\big(\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}} &= -\mathcal{L}_\theta\tilde{\mu} - \Big[e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}_\theta} + g(\theta)\big(\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}}, \tilde{\mu}\Big]\\
&\quad +e^{-\tilde{\gamma}}\Big(g(\theta)\big[d_{\tilde{A}}\eta + [\bar{\Phi}, \tilde{\Phi} - \tilde{F}], \tilde{\Omega}\big] - \big[i_\theta\big(\tilde{\Phi} - \tilde{F}\big), \tilde{\Omega}\big]\Big)e^{\tilde{\gamma}}\\
&\quad -\Big[\tilde{c}, e^{-\tilde{\gamma}}\big(\tilde{\mathscr{L}_\theta}\tilde{\Omega} + g(\theta)[\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}, \tilde{\Omega}]\big)e^{\tilde{\gamma}}\Big]
\end{aligned} \tag{2.108}$$

On peut remarquer que les transformations ainsi obtenues sont covariantes de jauge, malgré l'apparition de la dérivée de Lie ordinaire $\mathcal{L}_\theta$, car les termes $e^{-\tilde{\gamma}}\mathscr{L}_\theta e^{\tilde{\gamma}}$ se développent comme suit

$$e^{-\tilde{\gamma}}\mathscr{L}_\theta e^{\tilde{\gamma}} = i_\theta A + \mathscr{L}_\theta\tilde{\gamma} - \frac{1}{2}[\tilde{\gamma}, \mathscr{L}_\theta\tilde{\gamma}] + \frac{1}{6}[\tilde{\gamma}, [\tilde{\gamma}, \mathscr{L}_\theta\tilde{\gamma}]] + \mathcal{O}(\tilde{\gamma}^4) \tag{2.109}$$

En utilisant la convention à la Berezin que, seule la forme de degré maximal contribue à l'intégrale sur l'espace, la fixation de jauge dans la jauge généralisée de Landau, s'écrit

$$s\,\delta \int \mathrm{Tr}\ \tilde{\bar{\mu}}\, \mathring{\mathscr{L}_\theta} \star_\theta \left(e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}_\theta} + g(\theta)\big(\eta + d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}} - i_\theta\mathring{A}\right) \tag{2.110}$$

qui se développe sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\int \mathrm{Tr}\ \Bigg(&\tilde{b}\,\mathring{\mathscr{L}}_\theta\star_\theta\Big(e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}}_\theta+g(\theta)\big(\eta+d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}}-i_\theta\mathring{A}\Big)-\tilde{\bar{\Omega}}\,\mathring{\mathscr{L}}_\theta\star_\theta e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}}_\theta\tilde{\Omega}+g(\theta)[\eta+d_{\tilde{A}}\bar{\Phi},\tilde{\Omega}]\Big)e^{\tilde{\gamma}}\\
&+\tilde{\bar{c}}\,\mathring{\mathscr{L}}_\theta\star_\theta\Big(\mathcal{L}_\theta\tilde{c}+\Big[e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}}_\theta+g(\theta)\big(\eta+d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}},\tilde{c}\Big]+e^{-\tilde{\gamma}}\Big(g(\theta)\big(d_{\tilde{A}}\eta+[\bar{\Phi},\tilde{\Phi}-\tilde{F}]\big)-i_\theta\big(\tilde{\Phi}-\tilde{F}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}}\Big)\\
&+\tilde{\bar{\mu}}\,\mathring{\mathscr{L}}_\theta\star_\theta\Big(\mathcal{L}_\theta\tilde{\mu}+\Big[e^{-\tilde{\gamma}}\Big(\tilde{\mathscr{L}}_\theta+g(\theta)\big(\eta+d_{\tilde{A}}\bar{\Phi}\big)\Big)e^{\tilde{\gamma}},\tilde{\mu}\Big]+\Big[\tilde{c},e^{-\tilde{\gamma}}\big(\tilde{\mathscr{L}}_\theta\tilde{\Omega}+g(\theta)[\eta+d_{\tilde{A}}\bar{\Phi},\tilde{\Omega}]\big)e^{\tilde{\gamma}}\Big]\\
&\qquad+e^{-\tilde{\gamma}}\Big(-g(\theta)\big[d_{\tilde{A}}\eta+[\bar{\Phi},\tilde{\Phi}-\tilde{F}],\tilde{\Omega}\big]+\big[i_\theta\big(\tilde{\Phi}-\tilde{F}\big),\tilde{\Omega}\big]\Big)e^{\tilde{\gamma}}\Big)\Bigg)\end{aligned}\tag{2.111}$$

Cette forme de l'action fixée de jauge comportant un nombre de champs bien plus important n'est pas très intéressante dans l'étude de la théorie cohomologique, tout particulièrement parce que les symétries qui la déterminent ne sont définies que sur un espace plat. Cependant elle constitue une étape préliminaire vers une formulation en super-espace tordu de la théorie supersymétrique correspondante. Nous travaillons actuellement sur une telle construction.

Notons tout de même qu'on peut montrer formellement que cette fixation de jauge est équivalente à la fixation de jauge usuelle de Faddeev–Popov. Définissons pour ce faire les quantités « semi-conservées » suivantes. On définit M qui agit non trivialement seulement sur les champs $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\bar{\mu}}$, en leurs attribuant les valeurs propres 1 et -1 respectivement. On définit également O qui attribue la valeur propre 1 aux champs $\tilde{\mu}$ et $\tilde{c}$ et -1 aux champs $\tilde{\bar{\mu}}$ et $\tilde{\bar{c}}$, et enfin les charges F_n qui attribuent p aux composantes de degré de forme p supérieur à n de $\tilde{\gamma}$, $\tilde{c}$, $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\Omega}$, et $-p$ aux composantes de degré de forme p supérieur à n de $\tilde{b}$, $\tilde{\bar{c}}$, $\tilde{\bar{\mu}}$ et $\tilde{\bar{\Omega}}$. On peut vérifier que tous les termes de l'action ont des charges inférieures ou égales à zéro par rapport à tous ces opérateurs. On en conclut que si on considère des fonctions de corrélation de charges nulles par rapport à ces derniers, aucun terme de l'action ayant une de ses charges strictement négative ne contribuera, puisque la brisure impliquée par l'interaction correspondante ne pourra pas être compensée. Ainsi, seuls les termes de l'action vérifiant ces symétries contribuent à de telles fonctions de corrélation. On constate aisément que la partie de l'action fixatrice de jauge vérifiant chacune de ces symétries est simplement donnée par

$$-\int \mathrm{Tr}\ \Big(\tilde{b}\mathring{D}^\mu\big(D_\mu\tilde{\gamma}+A_\mu-\mathring{A}_\mu\big)-\tilde{\bar{\Omega}}\mathring{D}^\mu D_\mu\tilde{\Omega}+\tilde{\bar{c}}\mathring{D}^\mu D_\mu\tilde{c}+\tilde{\bar{\mu}}\mathring{D}^\mu D_\mu\tilde{\mu}\Big)\tag{2.112}$$

On peut ainsi intégrer formellement les champs par quatuors, de manière à ce que cette action se réduise à la fixation de jauge ordinaire de Faddeev–Popov dans la jauge de

Landau, sans faire intervenir de facteur du déterminant de Faddeev–Popov.

$$\int \mathrm{Tr}\,\Big(-b\mathring{D}^{\mu}\big(A_{\mu}-\mathring{A}_{\mu}\big)+\bar{\Omega}\mathring{D}^{\mu}D_{\mu}\Omega\Big) \tag{2.113}$$

On pourrait montrer dans le cas quadridimensionnel que cet argument formel n'est pas mis en défaut par la procédure de renormalisation, en utilisant les identités de Slavnov–Taylor associées à l'invariance de jauge et à la supersymétrie, ainsi que des généralisations des identités de Ward antifantômes associées aux équations du mouvement des composantes de $\tilde{b}$, $\tilde{\bar{c}}$, $\tilde{\bar{\mu}}$ et $\tilde{\bar{\Omega}}$.

Chapitre 3

Réductions dimensionnelles

L'ensemble des théories de type cohomologique de Yang–Mills connues, définies par une opération de torsion à partir d'une théorie de Yang–Mills supersymétrique sur un espace de dimension strictement supérieure à quatre, peuvent êtres obtenues par une réduction dimensionnelle de la théorie souche en huit dimensions sur un n-tore. Ceci est en partie dû au fait que les groupes spéciaux de la liste de Berger associés à une connexion Ricci plate, s'incluent naturellement les uns dans les autres.

$$\begin{array}{ccccccc}
Sp(1) & & \subset & & Sp(2) & & \\
\wr\!\parallel & & & & \cap & & \\
SU(2) & \subset & SU(3) & \subset & SU(4) & & \\
 & & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & \cap & & \\
 & & & G_2 \subset & Spin(7) & &
\end{array} \tag{3.1}$$

3.1 La torsion sur un espace de dimension sept

Dans le cas où la théorie tordue en huit dimensions est définie sur un espace réductible de la forme $S^1 \times N$, on peut définir en plus de la charge de supersymétrie scalaire interprété comme une charge BRST, une charge vectorielle le long d'un vecteur constant tangent au cercle. On peut montrer en décomposant les représentions de $Spin(7)$ par rapport à $SO(7)$ que pour que l'espace complet admette un groupe d'holonomie inclus dans $Spin(7)$, la variété N doit avoir un groupe d'holonomie inclus dans G_2.[1] Nous allons voir dans cette section que la théorie tordue en dimension sept peut être obtenue par réduction

[1] Il faut tenir compte ici que l'inclusion de $Spin(7)$ dans $SO(8)$ est telle qu'un vecteur de l'espace à huit dimensions se représente comme un spineur de Majorana de $Spin(7)$, alors que celle de $SO(7)$ est l'inclusion naturelle dans $SO(8)$.

dimensionnelle sur un cercle de la théorie tordue définie en huit dimensions ; comme elle peut être obtenue par une opération de torsion appliquée à la théorie de Yang–Mills supersymétrique en sept dimensions, elle même obtenue par réduction dimensionnelle à partir de la théorie supersymétrique en huit. Ainsi, l'opération de torsion commute avec l'opération de réduction dimensionnelle.

3.1.1 La théorie de type cohomologique

Le groupe G_2 est le groupe exceptionnel de plus petite dimension dans la classification de Cartan. Il peut être défini comme le groupe des automorphismes des octonions, et ainsi comme le sous groupe de $SO(7)$ qui préserve les coefficients de structure des octonions imaginaires purs. Sur une variété dont le groupe d'holonomie est inclus dans G_2, il est possible de définir une 3-forme constante C correspondant aux coefficients de structure apparaissant dans le commutateur de deux octonions imaginaires purs, ainsi qu'une 4-forme constante $C^\star$, duale de Hodge de la première, correspondant aux coefficients apparaissant dans l'associateur de trois octonions imaginaires purs. On appelle ces formes, respectivement la 3-forme et la 4-forme associatives. De manière semblable au cas octodimensionnel, la représentation des 2-formes de $SO(7)$ se réduit sous l'action de G_2 en une composante autoduale dans la représentation adjointe $\mathfrak{g}_2$ et une composante anti-autoduale dans la représentation fondamentale correspondant à un vecteur.

$$\begin{aligned} \mathbf{21} &= \mathbf{7} \oplus \mathbf{14} \\ P^{-\,kl}_{ij} &\equiv \frac{1}{3}\Big(\delta^{kl}_{ij} - \frac{1}{2} C^{\star\,kl}_{ij}\Big) \\ P^{+\,kl}_{ij} &\equiv \frac{2}{3}\Big(\delta^{kl}_{ij} + \frac{1}{4} C^{\star\,kl}_{ij}\Big) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Une 2-forme anti-autoduale en huit dimensions se décompose sous G_2 en une 1-forme et une 2-forme anti-autoduale linéairement isomorphe à la première, de telle sorte qu'elle correspond à une 1-forme en sept dimensions.

$$\chi_{\mu\nu} \equiv \Big(\chi_{ij} = C_{ij}{}^{k}\chi_k \,,\; \chi_{0i} = \chi_i\Big) \tag{3.3}$$

Pour éviter de décomposer la courbure de Yang–Mills anti-autoduale en ses différentes composantes F^- et $d_A L$ en sept dimensions, on préférera réduire dimensionnellement la forme de l'action de Yang–Mills avec le terme cinétique usuel pour le champ de jauge.

L'action ainsi obtenue est donnée par

$$\int_N d^7x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}D_iLD^iL + D_i\bar{\Phi}D^i\Phi + \eta D_i\Psi^i + 4C^{ijk}\chi_iD_j\Psi_k - 4\chi_iD^i\psi$$
$$+ [L,\bar{\Phi}][L,\Phi] + \eta[L,\psi] + 4\chi_i[L,\Psi^i]$$
$$+ \bar{\Phi}\{\Psi_i,\Psi^i\} + \bar{\Phi}\{\psi,\psi\} + 8\Phi\{\chi_i,\chi^i\} + \Phi\,\eta^2 + \frac{1}{2}[\Phi,\bar{\Phi}]^2 + 8T_iT^i\Big) \tag{3.4}$$

Notons que le terme de Yang–Mills à sept dimensions se décompose de manière similaire à son antécédent octodimensionnel comme un terme topologique[2] et un terme ne faisant intervenir que la composante anti-autoduale de la courbure

$$\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = \frac{1}{8}C^{\star\,ijkl}F_{ij}F_{kl} + \frac{3}{4}F^{-}_{ij}F^{-\,ij} \tag{3.5}$$

L'action se réécrit sous une forme qui met en évidence le caractère cohomologique de la théorie

$$-\frac{1}{2}\int_N \mathrm{Tr}\,\big(\,C\wedge F\wedge F\,\big)$$
$$+\,s\int_N \mathrm{Tr}\,\Big(2\,C\star\chi\wedge F + 2\,\chi\star d_AL - \bar{\Phi}\,d_A\star\Psi$$
$$+\,8\,\chi\star T - \star\bar{\Phi}[L,\psi] - \frac{1}{2}\star\eta[\Phi,\bar{\Phi}]\Big) \tag{3.6}$$

où l'opérateur BRST est obtenue par réduction dimensionnelle comme suit

$$\begin{aligned} sA_i &= \Psi_i \\ s\Psi_i &= -D_i\Phi \\ s\Phi &= 0 \\ \\ sL &= \psi \\ s\psi &= [\Phi, L] \end{aligned}$$

[2] On rappelle que la fonctionnelle $\int C\wedge\mathrm{Tr}\;F\wedge F$ ne définit pas un invariant topologique sur la variété de base. L'appellation de terme topologique provient de la propriété d'invariance de ce terme sous les transformations infinitésimales du champ de jauge.

$$
\begin{aligned}
s\bar{\Phi} &= \eta \\
s\eta &= [\Phi, \bar{\Phi}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s\chi_i &= T_i + \frac{1}{8} C_i^{\ jk} F_{jk} - \frac{1}{4} D_i L \\
sT_i &= [\Phi, \chi_i] - \frac{1}{4} C_i^{\ jk} D_j \Psi_k - \frac{1}{4}[L, \Psi_i] + \frac{1}{4} D_i \psi
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Comme on l'a évoqué dans l'introduction, la symétrie vectorielle le long du cercle en huit dimensions produit une seconde symétrie scalaire δ par réduction dimensionnelle.

$$
\begin{aligned}
\delta A_i &= -4\chi_i \\
\delta \Psi_i &= D_i L + \frac{1}{2} C_i^{\ jk} F_{jk} + 4T_i \\
\delta \Phi &= 2\psi \\
\delta L &= \eta \\
\delta \psi &= [\bar{\Phi}, \Phi] \\
\delta \bar{\Phi} &= 0 \\
\delta \eta &= 2[\bar{\Phi}, L] \\
\delta \chi_i &= \frac{1}{2} D_i \bar{\Phi} \\
\delta T_i &= -\frac{1}{4} D_i \eta + \frac{1}{2}[\bar{\Phi}, \Psi_i] - [L, \chi_i] + C_i^{\ jk} D_j \chi_k
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Ces deux opérateurs scalaires ont les relations d'anticommutation suivantes

$$
s^2 = \delta^{\text{jauge}}(\Phi) \qquad \delta^2 = 2\,\delta^{\text{jauge}}(\bar{\Phi}) \qquad \{s, \delta\} = -2\,\delta^{\text{jauge}}(L) \tag{3.9}
$$

La fonction de jauge, en plus d'être invariante sous l'action de δ, se trouve être δ-exacte. C'est une propriété générales des théories de type cohomologique obtenues par réduction dimensionnelle d'une théorie du même type.

3.1.2 Torsion de la théorie

Les matrices de Dirac en huit dimensions peuvent être définies en fonction de celles en dimension sept comme suit

$$
\begin{aligned}
\gamma^\mu &\equiv \sigma_2 \otimes \gamma^i, \sigma_1 \otimes 1 \\
\gamma_9 &\equiv \sigma_3 \otimes 1 \\
\mathscr{C} &\equiv 1 \otimes 1
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

où les $\sigma_\imath$ sont les matrices de Pauli. La condition de Majorana[3] s'écrit

$$\lambda^t \mathscr{C} = \lambda^\dagger \beta \,\hat{=} \big(\lambda_1^t, \lambda_2^t\big) = \big(\lambda_1^\dagger, -\lambda_2^\dagger\big) \tag{3.11}$$

de telle manière qu'un spineur de Majorana en huit dimensions se décompose ainsi

$$\lambda \,\hat{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ i\lambda_2 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

où λ_1 et λ_2 sont deux spineurs réels en sept dimensions. La simplicité de la représentation de Majorana dans ce cas, est due au fait qu'on peut écrire les matrices gamma en sept dimensions en fonction des coefficients de structure des octonions, de telle sorte que la matrice de conjugaison de charge est l'identité et qu'un spineur de Majorana est réel. Après réduction dimensionnelle sur le cercle, l'action octodimensionnelle devient

$$\begin{aligned} \int_N d^7x \, \mathrm{Tr} \Bigg(& -\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} D_i L D^i L + D_i \bar{\Phi} D^i \Phi - i \big(\overline{\lambda_{[1}} \not{D} \lambda_{2]}\big) \\ & + [L, \bar{\Phi}][L, \Phi] + \frac{1}{2}[\Phi, \bar{\Phi}]^2 + \big(\overline{\lambda_{\{1}}[L, \lambda_{2\}}]\big) - \frac{1}{2}\big(\overline{\lambda_1}[\Phi, \lambda_1]\big) - \big(\overline{\lambda_2}[\bar{\Phi}, \lambda_2]\big) \Bigg) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Celle-ci est laissée invariante par les transformations de supersymétrie

$$\begin{aligned} \delta A_i &= -i \left(\overline{\epsilon_1} \gamma_i \lambda_2\right) + i \left(\overline{\epsilon_2} \gamma_i \lambda_1\right) \\ \delta L &= \left(\overline{\epsilon_1} \lambda_2\right) - \left(\overline{\epsilon_2} \lambda_1\right) \\ \delta \Phi &= 2 \left(\overline{\epsilon_2} \lambda_2\right) \\ \delta \bar{\Phi} &= \left(\overline{\epsilon_1} \lambda_1\right) \\ \delta \lambda_1 &= \Big(\not{F} - i \not{D} L + [\Phi, \bar{\Phi}]\Big) \epsilon_1 + 2 \Big(i \not{D} \bar{\Phi} - [L, \bar{\Phi}]\Big) \epsilon_2 \\ \delta \lambda_2 &= \Big(\not{F} + i \not{D} L - [\Phi, \bar{\Phi}]\Big) \epsilon_2 - \Big(i \not{D} \Phi + [L, \Phi]\Big) \epsilon_1 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Sur une variété dont le groupe d'holonomie est inclus dans G_2, il existe au moins un spineur constant. On définit l'opération de torsion sur les fermions de Majorana en espace plat à partir d'un tel spineur ζ, scalaire sous l'action de G_2, comme suit

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv \eta \zeta + \big(C^i{}_{jk} \gamma^{jk} + i \gamma^i\big) \chi_i \zeta \\ \lambda_2 &\equiv \psi \zeta + i \gamma^i \Psi_i \zeta \end{aligned} \tag{3.15}$$

[3]On parle en dimension sept de condition de pseudo-Majorana ou de réalité. On ne fera pas la distinction dans cette thèse, étant donné qu'on n'y considérera que des champs sans masse.

La donnée de ce spineur constant, permet de définir la 3-forme associative

$$\big(\bar{\zeta}\zeta\big) = 1 \qquad \big(\bar{\zeta}\gamma_{ijk}\zeta\big) = \frac{i}{3!}C_{ijk} \tag{3.16}$$

On peut construire les deux charges scalaires à partir de ce même spineur

$$\begin{aligned} s &= \delta(\epsilon_1 = \zeta, \epsilon_2 = 0) \\ \delta &= \delta(\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = \zeta) \end{aligned} \tag{3.17}$$

On peut également obtenir deux opérateurs vectoriels correspondant aux autres charges de supersymétrie. Celui correspondant à la réduction dimensionnelle de la symétrie vectorielle en huit dimensions est donné par $\delta_i = \delta(\epsilon_1 = 0, \epsilon_2 = i\gamma_i\zeta)$ et vérifie

$$\begin{aligned} \delta_i A_j &= g_{ij}\eta - 4C_{ij}{}^k\chi_k \\ \delta_i L &= 4\chi_i \\ \delta_i\Psi_j &= -\Big(\delta_{ij}^{kl} + \frac{1}{2}C^{\star\,kl}_{ij}\Big)F_{kl} - C_{ij}{}^k D_k L + g_{ij}[\bar{\Phi}, \Phi] + 4C_{ij}{}^k T_k \\ \delta_i\psi &= -D_i L - \frac{1}{2}C_i^{\,jk}F_{jk} - 4T_i \\ \delta_i\Phi &= 2\Psi_i \\ \delta_i\bar{\Phi} &= 0 \\ \delta_i\eta &= -2D_i\bar{\Phi} \\ \delta_i\chi_j &= -\frac{1}{2}C_{ij}{}^k D_k\bar{\Phi} + \frac{1}{2}g_{ij}[\bar{\Phi}, L] \\ \delta_i T_j &= g_{ij}\Big(\frac{1}{4}[L, \eta] - D_k\chi^k - \frac{1}{2}[\bar{\Phi}, \psi]\Big) \\ &\qquad + C_{ij}{}^k\Big(\frac{1}{4}D_k\eta - C_k{}^{lr}D_l\chi_r + [L, \chi_k] - \frac{1}{2}[\bar{\Phi}, \Psi_k]\Big) \end{aligned} \tag{3.18}$$

On peut vérifier les relations d'anticommutation

$$\begin{aligned} \{\delta_i, \delta_j\} &= 4g_{ij}\delta^{\text{jauge}}(\bar{\Phi}) \\ \{s, \delta_i\} &= -2\big(\partial_i + \delta^{\text{jauge}}(A_i)\big) \\ \{\delta, \delta_i\} &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

et la condition d'invariance par rapport à s, δ et δ_i permet de déterminer la fonction de jauge.

3.1.3 Symétrie interne des théories équilibrées

Les théories de type cohomologique obtenues par réduction dimensionnelle d'une théorie souche, elle même du même type, ont de manière générale la propriété d'avoir deux charges scalaires de symétrie de nombres d'ombres opposés. Cette propriété résulte d'une symétrie interne $SL(2,\mathbb{R})$, dont la conservation du nombre d'ombres est un sous groupe et sous lequel les deux charges de supersymétrie se transforment comme un doublet [46]. Cette symétrie implique l'absence d'anomalie du nombre d'ombres. Les fantômes et les antifantômes étant dans des représentations identiques, l'opérateur tordu de Dirac est autoadjoint et donc d'indice nul. On parle alors de théorie de type cohomologique équilibrée [47].

Pour obtenir directement une formulation manifestement $SL(2,\mathbb{R})$ invariante de la théorie, on acquiert celle-ci à partir d'une opération de torsion sur la théorie de Yang–Mills obtenue par réduction dimensionnelle sur le « 3-tore formel de Minkowski » (c'est à dire un espace de Minkowski considéré formellement comme compact). Cette dernière a pour champs, un champ de jauge, un triplet de trois scalaires dans la représentation adjointe de $SL(2,\mathbb{R})$ et un doublet de $SL(2,\mathbb{R})$ de deux spineurs de Majorana.[4] La théorie ainsi obtenue est mal définie. Sa bonne définition nécessite de redéfinir un des champs scalaires par un facteur i de manière à obtenir un groupe de symétrie interne $SU(2)$. Il n'existe alors pas de redéfinition des champs qui permette de définir le doublet de différentielles BRST topologiques comme des opérateurs réels. L'interprétation algébrique proposée dans [47] est ainsi plus transparente en prenant en compte l'action hermitienne mal définie admettant $SL(2,\mathbb{R})$ comme groupe de symétrie interne et c'est celle que nous considérerons dans ce qui suit, ainsi que la représentation de la supersymétrie associée. On peut obtenir une représentation de la supersymétrie et l'action non hermitienne qui définissent une théorie des champs cohérente en substituant les matrices de Pauli aux générateurs de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ et en attribuant les bons facteurs de phases. L'action hermitienne formelle est donnée par

$$\begin{aligned} S = \int_M d^7x \mathrm{Tr}\,\Big(& -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}D_\mu\phi_i D^\mu\phi^i - \frac{i}{2}\big(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\big) \\ & - \frac{1}{4}[\phi_i,\phi_j][\phi^i,\phi^j] - \phi_i\big(\overline{\lambda}\boldsymbol{\tau}^i\lambda\big)\Big) \end{aligned} \quad (3.20)$$

On définit les variables tordues par $\lambda_\alpha \equiv \big(\eta_\alpha + i\not{\psi}_\alpha\big)\zeta$, en fonction desquelles l'action

[4] De manière à ne pas les confondre avec les indices de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, nous utiliserons dorénavant les lettres du milieu de l'alphabet grec pour dénoter les indices d'espace .

s'écrit

$$
\begin{aligned}
S = \int_M d^7x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{8}C^{\star\,\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} - \frac{3}{4}F^{-}_{\mu\nu}F^{-\,\mu\nu} - \frac{1}{2}D_\mu\phi_i D^\mu\phi^i \\
+ \psi^\alpha_\mu D^\mu\eta_\alpha - \frac{1}{2}C^{\mu\nu\sigma}\psi^\alpha_\mu D_\nu\psi_{\sigma\,\alpha} + \frac{1}{2}T_\mu T^\mu \\
- \frac{1}{4}[\phi_i,\phi_j][\phi^i,\phi^j] - \sigma^{i\,\alpha\beta}\phi_i\eta_\alpha\eta_\beta - \sigma^{i\,\alpha\beta}\phi_i\psi_{\alpha\mu}\psi^\mu_\beta\Big)
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

La torsion des générateurs de supersymétrie permet de définir les différentielles

$$
\begin{aligned}
s^\alpha A_\mu &= \psi^\alpha_\mu \\
s^\alpha\psi_{\mu\beta} &= \delta^\alpha_\beta\Big(T_\mu + \frac{1}{2}C_\mu{}^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}\Big) + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha D_\mu\phi_i \\
s^\alpha\phi_i &= \sigma_i{}^{\alpha\beta}\eta_\beta \\
s^\alpha\eta_\beta &= \sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha[\phi_i,\phi_j] \\
s^\alpha T_\mu &= D_\mu\eta^\alpha - C_\mu{}^{\nu\sigma}D_\nu\psi^\alpha_\sigma - \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\psi_{\mu\beta}]
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
s^\alpha_\mu A_\nu &= g_{\mu\nu}\eta^\alpha - C_{\mu\nu}{}^\sigma\psi^\alpha_\sigma \\
s^\alpha_\mu\psi_{\nu\beta} &= \delta^\alpha_\beta\Big(F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}C^\star_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho} - C_{\mu\nu}{}^\sigma T_\sigma\Big) + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha C_{\mu\nu}{}^\sigma D_\sigma\phi_i - \sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha g_{\mu\nu}[\phi_i,\phi_j] \\
s^\alpha_\mu\phi_i &= -\sigma_i{}^{\alpha\beta}\psi_{\mu\beta} \\
s^\alpha_\mu\eta_\beta &= \delta^\alpha_\beta\Big(\frac{1}{2}C_\mu{}^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma} + T_\mu\Big) + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha D_\mu\phi_i \\
s^\alpha_\mu T_\nu &= -g_{\mu\nu}\big(D_\sigma\psi^{\sigma\alpha} + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\eta_\beta]\big) + C_{\mu\nu}{}^\sigma\big(D_\sigma\eta^\alpha - C_\sigma{}^{\kappa\lambda}D_\kappa\psi^\alpha_\lambda - \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\psi_{\beta\sigma}]\big)
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Nous avons ici inclus le champ auxiliaire T_μ, ce qui permet de mettre en involution la majeure partie des anticommutateurs. Seul l'anticommutateur $\{s^{[\alpha}_{[\mu}, s^{\beta]}_{\nu]}\}$ appliqué à n'importe quelle 1-forme de la théorie, fait intervenir les équations du mouvement.

$$
\begin{aligned}
\{s^\alpha_\mu, s^\beta_\nu\}A_\sigma &= 2\sigma^{i\,\alpha\beta}g_{\mu\nu}D_\sigma\phi_i + 2\varepsilon^{\alpha\beta}C_{\mu\nu}{}^\rho F_{\rho\sigma} \\
&\quad +2\varepsilon^{\alpha\beta}C^\star_{\mu\nu\sigma}{}^\rho T_\rho \\
\{s^\alpha_\mu, s^\beta_\nu\}\psi_{\sigma\gamma} &= -2\sigma^{i\,\alpha\beta}g_{\mu\nu}[\phi_i,\psi_{\sigma\gamma}] + 2\varepsilon^{\alpha\beta}C_{\mu\nu}{}^\rho D_\rho\psi_{\sigma\gamma} \\
&\quad 2\varepsilon^{\alpha\beta}C^\star_{\mu\nu\sigma}{}^\rho\Big(D_\rho\eta_\gamma - C_\rho{}^{\kappa\lambda}D_\kappa\psi_{\lambda\gamma} - \sigma^i{}_\gamma{}^\delta[\phi_i,\psi_{\rho\delta}]\Big) \\
\{s^\alpha_\mu, s^\beta_\nu\}T_\sigma &= -2\sigma^{i\,\alpha\beta}g_{\mu\nu}[\phi_i,T_\sigma] + 2\varepsilon^{\alpha\beta}C_{\mu\nu}{}^\rho D_\rho T_\sigma \\
&\quad -2\varepsilon^{\alpha\beta}C^\star_{\mu\nu\sigma}{}^\rho\Big(D^\kappa F_{\kappa\rho} - [\phi_i, D_\rho\phi^i] + \{\eta^\alpha,\psi_{\rho\alpha}\} - \frac{1}{2}C_\rho{}^{\kappa\lambda}\{\psi^\alpha_\kappa,\psi_{\lambda\alpha}\}\Big) \\
&\quad +2\varepsilon^{\alpha\beta}C^\star_{\mu\nu}{}^{\kappa\lambda}\Big(g_{\sigma\kappa}C_\lambda{}^{\rho\tau}D_\rho T_\tau - C_{\sigma\kappa}{}^\rho D_\rho T_\lambda\Big)
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

C'est en fait le mieux que l'on puisse faire, comme nous allons le montrer dans la section suivante. Les équations du mouvement n'apparaissent qu'à travers des termes faisant intervenir les coefficients de l'associateur des octonions imaginaires purs, révélant ainsi que la non existence d'une représentation fonctionnelle locale de la supersymétrie maximale est intimement liée à la non associativité de cette algèbre [31].

L'action peut être écrite comme la somme d'un terme topologique et de la variation d'une fonction de jauge par rapport à n'importe quelle combinaison linéaire des charges scalaires de supersymétrie, $a^\alpha s_\alpha$,

$$S = -\frac{1}{8}\int_M d^7x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(C^{\star\,\mu\nu\sigma\rho}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}\Big) + s^\alpha \mathbf{\Psi}_\alpha \tag{3.25}$$

Le fermion de jauge est lui même la variation d'une fonctionnelle par rapport à la combinaison linéaire orthogonale, $\bar{a}^\alpha s_\alpha$ $(\bar{a}^1 a^1 + \bar{a}^2 a^2 = 0)$, des charges scalaires.

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}_\alpha &= \int_M d^7x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{8}C^{\mu\nu\sigma}\psi_{\alpha\mu}F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\psi_{\beta\mu}D^\mu\phi_i + \frac{1}{4}\psi_{\alpha\mu}T^\mu + \frac{1}{4}\sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta\eta_\beta[\phi_i,\phi_j]\Big)\\ &= s_\alpha\mathbf{\Omega}\\ \mathbf{\Omega} &= \int_M d^7x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{8}C^{\mu\nu\sigma}\Big((A_\mu\partial_\nu A_\nu + \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\sigma\Big) - \frac{1}{8}\psi^\alpha_\mu\psi^\mu_\alpha + \frac{1}{8}\eta^\alpha\eta_\alpha\Big)\end{aligned} \tag{3.26}$$

Par souci de simplicité nous avons écrit $\mathbf{\Omega}$ dans une forme qui n'est bien définie que dans le cas où la seconde classe de Chern est triviale, mais elle peut être généralisée à n'importe quelle configuration en introduisant une connexion de fond de seconde classe de Chern identique [A.1]. L'introduction de cette connexion de fond n'est pas problématique pour l'interprétation de cet antécédent en théorie des champs, puisque la seconde classe de Chern est constante sur chaque composante connexe de l'espace des connexions. Notons également que $\mathbf{\Omega}$ n'est défini qu'à un terme BRST-exact près

$$\int_M d^7x\sqrt{g}\,\varsigma \equiv \int_M d^7x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(\eta^\alpha\eta_\alpha - \frac{2i}{3}\varepsilon^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\Big) \tag{3.27}$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, le fait que cette théorie de type cohomologique soit équilibrée implique que le nombre d'ombres soit conservé exactement. De ce fait, la seule observable non-triviale de la théorie est la fonction de partition, qu'on identifie formellement comme la constante d'Euler de l'espace de modules des orbites de jauge autoduales, et qui constitue ainsi une généralisation de l'invariant de Casson à une variété d'holonomie incluse dans G_2 [27]. En pratique cette analyse n'est valable que dans le cas où les antifantômes n'admettent pas de mode zéro. Dans ce cas idéal, l'intégrale fonctionnelle se réduit à une somme discrète des signes du hessien de la fonctionnelle $\mathbf{\Omega}$ à chacun de ses points fixes. Ceux-ci correspondent aux orbites de jauge autoduales. On interprète alors la théorie de type cohomologique comme une extension infinie dimensionnelle de la théorie de Morse de fonction $\mathbf{\Omega}$ sur l'espace des orbites de jauge [47]. Dans un cas plus général, il devient moins aisé d'interpréter cette fonction de partition dans la théorie de Morse, mais elle propose toujours une extension intéressante de l'invariant de Casson.

3.1.4 BRST-exactitude du tenseur énergie impulsion

Le tenseur énergie impulsion d'une théorie de type cohomologique a la propriété générale d'être BRST-exact. Comme il a déjà été mentionné, dans le cas des théories faisant intervenir des formes constantes sur la variété, cette propriété n'implique que l'invariance par rapport aux homéomorphismes isotopes à l'identité qui préservent la G-structure associée. Cette propriété permet en outre de déterminer une fixation de jauge particulière en exigeant de surcroît que l'antécédent du tenseur énergie impulsion soit également conservé modulo les équations du mouvement. Dans le cas où la théorie est définie sur une variété admettant un vecteur constant, la conservation de ce tenseur permet de définir une charge de supersymétrie supplémentaire, qui, dans le cas d'un espace plat, s'étend à une symétrie de paramètre vectoriel qui contraint la fixation de jauge de telle sorte que l'action de la théorie cohomologique soit la forme tordue de l'action d'une théorie supersymétrique. Nous allons dans cette section établir explicitement cette propriété pour la théorie cohomologique définie sur une variété de dimension sept.

La propriété de BRST-exactitude n'est valable que lorsque l'algèbre BRST ne fait intervenir la métrique ou la G-structure qu'à travers la définition de champs dans des représentations les faisant intervenir. Ceci implique une redéfinition $T_\mu \rightarrow T_\mu - \frac{1}{2}C_\mu{}^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma}$ du champ auxiliaire T_μ. Si ce changement de variable n'affecte pas la mesure d'intégration fonctionnelle, il modifie la forme du tenseur énergie impulsion par des termes linéaires dans les équations du mouvement. Dans cette section, nous utiliserons cette nouvelle définition pour laquelle l'action prend la forme

$$\begin{aligned} S = \int_M d^7x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{2}C^{\mu\nu\sigma}T_\mu F_{\nu\sigma} + \frac{1}{2}T_\mu T^\mu - \frac{1}{2}D_\mu\phi_i D^\mu\phi^i \\ + \psi^\alpha_\mu D^\mu\eta_\alpha - \frac{1}{2}C^{\mu\nu\sigma}\psi^\alpha_\mu D_\nu\psi_{\sigma\alpha} \\ - \frac{1}{4}[\phi_i,\phi_j][\phi^i,\phi^j] - \sigma^{i\,\alpha\beta}\phi\eta_\alpha\eta_\beta - \sigma^{i\,\alpha\beta}\phi_i\psi_{\alpha\mu}\psi^\mu_\beta\Big) \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec pour antécédent BRST

$$\mathbf{\Psi}_\alpha = \int_M d^7x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{4}C^{\mu\nu\sigma}\psi_{\mu\alpha}F_{\nu\sigma} - \frac{1}{4}\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\psi_{\mu\beta}D^\mu\phi_i + \frac{1}{4}\psi_{\mu\alpha}T^\mu + \frac{1}{4}\sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta\eta_\beta[\phi_i,\phi_j]\Big) \quad (3.29)$$

L'action des charges scalaires et vectorielles devient dans ce cas

$$\begin{aligned}
s^\alpha\psi_{\mu\beta} &= \sigma^i{}_\beta{}^\alpha D_\mu\phi_i + \delta^\alpha_\beta T_\mu\\
s^\alpha T_\mu &= D_\mu\eta^\alpha - \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\psi_{\mu\beta}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^\alpha_\mu\psi_{\nu\beta} &= \delta^\alpha_\beta\big(2F_{\mu\nu} - C_{\mu\nu}{}^\sigma T_\sigma\big) + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha C_{\mu\nu}{}^\sigma D_\sigma\phi_i - \sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha g_{\mu\nu}[\phi_i,\phi_j]\\
s^\alpha_\mu\eta_\beta &= \delta^\alpha_\beta T_\mu + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha D_\mu\phi_i\\
s^\alpha_\mu T_\nu &= -g_{\mu\nu}\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi,\eta_\beta] - 2D_\mu\psi^\alpha_\nu + D_\nu\psi^\alpha_\mu + 2C_{\mu\nu}{}^\sigma D_\sigma\eta^\alpha - C_{\mu\nu}{}^\sigma\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\psi_{\sigma\beta}]
\end{aligned} \quad (3.30)$$

Le tenseur énergie impulsion est alors la BRST-variation de l'antécédent

$$\Lambda_{\alpha\mu\nu} = \mathrm{Tr}\,\Bigg(-\frac{3}{4}C_\nu{}^{[\sigma\rho}\delta^{\kappa]}_\mu\psi_{\alpha\sigma}F_{\rho\kappa} + \frac{1}{2}\psi_{\alpha\{\mu}T_{\nu\}} - \frac{1}{2}\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\psi_{\beta\{\mu}D_{\nu\}}\phi_i + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\Big(C^{\sigma\rho\kappa}\psi_{\alpha\sigma}F_{\rho\kappa} - \psi_{\alpha\sigma}T^\sigma + \sigma^i{}_\alpha{}^\beta\psi_{\beta\sigma}D^\sigma\phi_i - \sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta\eta_\beta[\phi_i,\phi_j]\Big)\Bigg) \quad (3.31)$$

dont la divergence est

$$\begin{aligned}
\nabla^\nu\Lambda_{\alpha\,\mu\nu} = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\Bigg(&\Big(\delta^\nu_\mu\eta_\alpha - C_\mu{}^{\nu\sigma}\psi_{\sigma\alpha}\Big)E^{(A)}_\nu\\
&+\Big(\delta^\beta_\alpha\big(C_\mu{}^{\nu\sigma}T_\sigma - 2F_\mu{}^\nu\big) + \sigma^i{}_\alpha{}^\beta C_\mu{}^{\nu\sigma}D_\sigma\phi_i - \sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta\delta^\nu_\mu[\phi_i,\phi_j]\Big)E^{(\psi)}_{\nu\beta}\\
&\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\psi_{\mu\beta}E^{(\phi)}_i + \Big(-\delta^\beta_\alpha T_\mu + \sigma^i{}_\alpha{}^\beta D_\mu\phi_i\Big)E^{(\eta)}_\beta\\
&-\Big(\delta^\nu_\mu\sigma^i{}_\alpha{}^\beta[\phi_i,\eta_\beta] + 2D_\mu\psi^\nu_\alpha - D^\nu\psi_{\mu\alpha} - 2C_\mu{}^{\nu\sigma}D_\sigma\eta_\alpha + C_\mu{}^{\nu\sigma}\sigma^i{}_\alpha{}^\beta[\phi_i,\psi_{\sigma\beta}]\Big)E^{(T)}_\nu\\
&+D^\nu\big(\psi_{\alpha\mu}E^{(T)}_\nu\big)\Bigg)\\
-\frac{1}{4}\nabla^\nu\mathrm{Tr}\,\Bigg(&C_{\mu\nu}{}^\sigma\Big(-\eta_\alpha T_\sigma + \sigma^i{}_\alpha{}^\beta\eta_\beta D_\sigma\phi_i + \sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta\psi_{\beta\sigma}[\phi_i,\phi_j]\Big)\\
&+C^\star_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\Big(T_\sigma\psi_{\rho\alpha} - \sigma^i{}_\alpha{}^\beta\psi_{\beta\sigma}D_\rho\phi_i\Big)\Bigg)
\end{aligned} \quad (3.32)$$

Le second terme n'est pas BRST fermé, mais si on le soustrait à la définition de l'antécédent du tenseur énergie impulsion, celui-ci est modifié par un terme anti-autodual $\frac{1}{2}C_{\mu\nu}{}^{\sigma}\nabla_\sigma\varsigma$ (où ς est donné par (3.27)) qui n'affecte pas la définition des charges conservées associées puisqu'il est séparément conservé. Le premier terme est écrit de manière à mettre en évidence le fait qu'il est nul lorsque les équations du mouvement sont satisfaites. On constate que l'antécédent $\Lambda^\alpha_{\mu\nu}$, après soustraction du second terme antisymétrique, est bien le courant conservé associé à la symétrie vectorielle δ^α.

3.1.5 Réalisation fonctionnelle locale de la supersymétrie

Notons dans un premier temps qu'il n'existe pas d'autre extension de l'algèbre modulo les équations du mouvement qui n'introduise pas de champ auxiliaire supplémentaire. Etant donné le comptage de puissance et la conservation du nombre d'ombres, le champ auxiliaire T_μ ne peut apparaître que dans les transformations des champs fermioniques, avec un coefficient pour facteur. L'invariance par rapport à G_2 et $SL(2,\mathbb{R})$ fixe en outre ces termes à un facteur réel près. Il est donc nécessaire d'introduire de nouveaux champs pour pouvoir mettre l'algèbre en involution. Nous allons montrer que si il existait des représentations de l'algèbre tordue de supersymétrie incluant le multiplet de départ (sur lequel la représentation n'est définie que modulo les équations du mouvement), celles-ci seraient nécessairement réductibles, de telle sorte que la sous-représentation incluant la représentation modulo les équations du mouvement serait isomorphe à celle-ci. Puisque la propriété d'être en involution est par définition conservée sous l'action d'un isomorphisme de représentation, une représentation fonctionnelle locale de l'algèbre complète de supersymétrie ne peut exister. Nous supposons pour ce faire que le groupe de jauge est semi-simple.

On définit les extensions possibles du multiplet en ajoutant à l'action des générateurs de supersymétrie sur chaque champ, une fonction locale des champs et de leur dérivées covariantes linéaire dans les équations du mouvement des champs, incluant n'importe quel nouveau champ auxiliaire parmi les champs. Ce qui constitue la modification la plus générale qui n'affecte pas la représentation modulo les équations du mouvement. Par souci de simplicité on appellera champs non physiques ces équations du mouvement. On supposera en outre que cette modification de la représentation préserve la covariance sous l'action de G_2 et $SL(2,\mathbb{R})$. On écrit les nouvelles transformations des champs comme suit

$$
\begin{aligned}
s^\alpha A_\mu &= \cdots + \chi^\alpha_\mu \\
s^\alpha \psi_{\mu\beta} &= \cdots + \delta^\alpha_\beta h_\mu + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha H_{i\mu} \\
s^\alpha \phi_i &= \cdots + \rho^\alpha{}_i \\
s^\alpha \eta_\beta &= \cdots + \delta^\alpha_\beta P + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha Q_i \\
s^\alpha T_\mu &= \cdots + \Xi^\alpha_\mu
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
s^\alpha_\mu A_\nu &= \cdots + \chi^\alpha_{\mu\nu} \\
s^\alpha_\mu \psi_{\nu\beta} &= \cdots + \delta^\alpha_\beta h_{\mu\nu} + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha H_{i\mu\nu} \\
s^\alpha_\mu \phi_i &= \cdots + \rho^\alpha_{\mu i} \\
s^\alpha_\mu \eta_\beta &= \cdots + \delta^\alpha_\beta P_\mu + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha Q_{i\mu} \\
s^\alpha_\mu T_\nu &= \cdots + \Xi^\alpha_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

où les « $\cdots$ » désignent les transformations définies dans la section précédente. Nous allons tout d'abord montrer que la représentation de l'algèbre incluant les charges scalaires et les transformations de jauge est réductible. En utilisant le fait que l'anticommutateur des charges scalaires est une transformation de jauge de paramètre $-\sigma^{i\,\alpha\beta}\phi_i$, nous allons être en mesure de déterminer l'action des charges scalaires sur les nouveaux champs introduits. Appliquant cette anticommutateur sur ϕ_i, on obtient la partie symétrique dans les indices $\frac{1}{2}$ de $SL(2,\mathbb{R})$ de $s^\alpha \rho^\beta{}_i$. On appellera respectivement $\frac{1}{2}$ et 1 les indices des représentations fondamentale et adjointe de $SL(2,\mathbb{R})$. Afin de lever cette indétermination, on ajoute un nouveau champ non physique R_i dans le multiplet

$$
s^\alpha \rho^\beta{}_i = -\sigma^{i\,\alpha\beta} P - 2\sigma_i{}^{j\,\alpha\beta} Q_j + \varepsilon^{\alpha\beta} R_i
\tag{3.35}
$$

La partie symétrique sans trace dans les indices internes 1 de l'équation équivalente associée à $\rho^\alpha{}_i$ après contraction avec $\sigma^{j\,\alpha\beta}$, se lit

$$
[\phi_{(j}, \rho^\alpha{}_{i)}] = \frac{1}{2}\sigma_{(j}{}^{\alpha\beta} s_\beta R_{i)}
\tag{3.36}
$$

ce qui contraint $\rho^\alpha{}_i$ à être de la forme $\sigma_i{}^{\alpha\beta}\rho_\beta$. On reprend alors la même procédure en prenant en compte la transformation des champs scalaires $s^\alpha\phi_i = \cdots + \sigma^{i\,\alpha\beta}\rho_\beta$. On en déduit les transformations des champs ρ_α, P et Q_i modulo une indétermination qu'on fixe en introduisant le nouveau champ ϑ_β.

$$\begin{aligned} s^\alpha \rho_\beta &= -\delta^\alpha_\beta P - {\sigma^i}_\beta{}^\alpha Q_i \\ s^\alpha P &= \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i, \rho_\beta] + \vartheta^\alpha \\ s^\alpha Q_i &= [\phi_i, \rho^\alpha] + {\sigma_i}^{\alpha\beta}\vartheta_\beta \end{aligned} \tag{3.37}$$

On détermine la transformation de ϑ_α en appliquant la même relation de fermeture au champ Q_i.

$$s^\alpha \vartheta_\beta = \{\rho^\alpha, \eta_\beta + \rho_\beta\} + 2{\sigma^{ij}}_\beta{}^\alpha[\phi_i, Q_j] \tag{3.38}$$

Le lecteur peut alors vérifier que l'anticommutateur des charge scalaires $\{s^\alpha, s^\beta\}$ donne bien la transformation de jauge souhaitée sur les champs P et ϑ_α.

En regardant de plus près la représentation de s^α sur les champs ϕ_i, η_α, ρ_α, P, Q_i et ϑ_α ainsi obtenue, on remarque que celle-ci est réductible. Il est effectivement possible de redéfinir les champs $\hat{\varphi}_A \equiv f^{\scriptscriptstyle 1}_*\, \varphi_A$ via l'isomorphisme,

$$f^{\scriptscriptstyle 1}_*\, \eta_\alpha = \eta_\alpha + \rho_\alpha \qquad\qquad f^{\scriptscriptstyle 1}_*\, \Xi^\alpha_\mu = \Xi^\alpha_\mu - D_\mu \rho^\alpha \tag{3.39}$$

ce qui redonne l'ancien sous-multiplet. On peut donc considérer sans perte de généralité que les champs ρ_α, P, Q_i et ϑ_α sont nuls.

On va utiliser la même relation de fermeture sur le champ de jauge A_μ afin de déterminer la transformation du champ χ^α_μ, modulo la composante antisymétrique dans les indices $\frac{1}{2}$, qu'on fixe en introduisant le champ H_μ

$$s^\alpha \chi_{\beta\mu} = -\delta^\alpha_\beta H_\mu - {\sigma^i}_\beta{}^\alpha H_{i\mu} \tag{3.40}$$

La même procédure appliquée à $\psi_{\alpha\mu}$ donne l'équation

$${\sigma^i}_\alpha{}^\beta\big(s_\beta h_\mu + \Xi_{\mu\beta} + {C_\mu}^{\nu\sigma} D_\nu \chi_{\sigma\beta}\big) + (\sigma^j\sigma^i)_\alpha{}^\beta\big(s_\beta H_{j\mu} - [\phi_j, \chi_{\mu\beta}]\big) = 0 \tag{3.41}$$

qui fixe les transformations suivantes,[5] modulo l'introduction du champ non physique $\Theta_{\mu\alpha}$

$$\begin{aligned} s^\alpha H_{i\mu} &= [\phi_i, \chi^\alpha_\mu] + {\sigma_i}^{\alpha\beta}\Theta_{\mu\beta} \\ s^\alpha h_\mu &= -\Xi^\alpha_\beta - {C_\mu}^{\nu\sigma} D_\nu \chi^\alpha_\sigma + \Theta^\alpha_\mu \end{aligned} \tag{3.42}$$

On obtient ensuite la transformation du champ H_μ en réitérant la procédure sur le champ $\chi_{\alpha\mu}$

$$s^\alpha H_\mu = \Theta^\alpha_\mu + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i, \chi_{\beta\mu}] \tag{3.43}$$

[5]Soit A et B_i deux spineurs tridimentionnels, l'équation $\sigma^i A + \sigma^j \sigma^i B_j = 0$ admet pour unique solution $B_i = \sigma_i A$.

La relation de fermeture appliqué à H_μ détermine la composante symétrique dans les indices $\frac{1}{2}$ de la transformation de $\Theta_{\alpha\mu}$, et son application à $H_{i\mu}$, la composante anti-symétrique.

$$s^\alpha \Theta_{\beta\mu} = 2\sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha [\phi_i, H_{j\mu}] - \{\chi^\alpha_\mu, \eta_\beta\} \tag{3.44}$$

En itérant la même procédure, on obtient la transformation du champ $\Xi_{\alpha\mu}$, et celle d'un nouveau champ M_μ, apparaissant pour fixer les indéterminations.

$$\begin{aligned} s^\alpha \Xi^\beta_\mu &= -\{\chi^\alpha_\mu, \eta^\beta\} + C_\mu{}^{\nu\sigma}\{\chi^\alpha_\nu, \psi^\beta_\sigma\} + \sigma^{i\,\alpha\beta} C_\mu{}^{\nu\sigma} D_\nu H_{i\sigma} \\ &\qquad + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i, h_\mu] + 2\sigma^{ij\,\alpha\beta}[\phi_i, H_{j\beta}] + \varepsilon^{\alpha\beta} M_\mu \\ s^\alpha M_\mu &= \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i, \Xi_{\mu\beta} - \Theta_{\mu\beta}] - \sigma^{i\,\alpha\beta} C_\mu{}^{\nu\sigma}[H_{i\nu}, \psi_{\sigma\beta}] - C_\mu{}^{\nu\sigma} D_\nu \Theta^\alpha_\sigma \\ &\qquad - [\chi^{\nu\alpha}, F^-_{\mu\nu}] - [\eta^\alpha, h_\mu] - C_\mu{}^{\nu\sigma}[\chi^\alpha_\nu, T_\sigma + h_\sigma] \end{aligned} \tag{3.45}$$

La représentation de l'algèbre étant précisée, il est possible de construire un second isomorphisme

$$f^2_*\, \psi_{\alpha\mu} = \psi_{\alpha\mu} + \chi_{\alpha\mu} \qquad f^2_*\, T_\mu = T_\mu + h_\mu - H_\mu \qquad f^2_*\, \Xi^\alpha_\mu = \Xi^\alpha_\mu - \Theta^\alpha_\mu \tag{3.46}$$

qui décompose la représentation en quatre multiplets irréductibles, incluant le multiplet modulo les équations du mouvement dans sa forme de départ. Il est donc possible de définir l'isomorphisme de représentation $f_* \equiv f^2_* \circ f^1_*$ qui permet d'extraire la représentation modulo les équations du mouvement de la représentation la plus générale ainsi construite. Il est donc possible de considérer sans perte de généralité que la représentation la plus générale de l'algèbre de supersymétrie admet l'action des charges scalaires sur les champs du multiplet modulo les équations du mouvement ainsi qu'elle à été définie dans la section précédente.

Nous allons maintenant déterminer la transformation des champs introduits en (3.34). En utilisant la relation de fermeture $\{s^\alpha, s^\beta_\mu\} = 2\varepsilon^{\alpha\beta}\big(\partial_\mu + \delta_{\text{jauge}}(A_\mu)\big)$ sur les champs ϕ_i et η_α, on obtient

$$\begin{aligned} s^\alpha \rho^\beta_{\mu i} &= -\sigma_i{}^{\alpha\beta} P_\mu - \varepsilon^{\alpha\beta} Q_{\mu i} - 2\sigma_i{}^{j\,\alpha\beta} Q_{\mu j} \\ s^\alpha P_\mu &= \sigma^{ij\,\alpha\beta}[\rho_{\mu\beta i}, \phi_j] \\ s^\alpha Q_{\mu i} &= (\sigma^i \sigma^{jk})^{\beta\alpha}[\phi_j, \rho_{\mu\beta k}] \end{aligned} \tag{3.47}$$

En appliquant l'anticommutateur $s^{\{\alpha} s^{\beta\}} = -\sigma^{i\,\alpha\beta}\delta^{\text{jauge}}(\phi_i)$ sur P_μ, on détermine la contrainte

$$\{\rho^\alpha_{\mu i}, \eta_\alpha\} = 0 \tag{3.48}$$

qui n'admet pas de solution non-triviale. On en déduit que les champs $\rho^\alpha_{\mu i}$, P_μ et $Q_{\mu i}$ sont nuls. On développe maintenant $\{s^\alpha_\mu, s^\beta_\nu\}\eta$, ce dont on déduit

$$\begin{aligned} C_{[\nu}{}^{\sigma\rho} D_\sigma \chi^\alpha_{\mu]\rho} + \Xi^\alpha_{[\mu\nu]} + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\chi_{[\mu\nu]\beta}, \phi_i] = 0 \\ \sigma^i{}_\alpha{}^\beta \big(C_{\{\nu}{}^{\sigma\rho} D_\sigma \chi_{\mu\}\rho\beta} + \Xi_{\{\mu\nu\}\beta} + \sigma^j{}_\beta{}^\gamma [\phi_j, \chi_{\{\mu\nu\}\gamma}]\big) = [\phi^i, \chi_{\{\mu\nu\}\alpha}] \end{aligned} \tag{3.49}$$

Il est évident que le terme de droite de la seconde équation ne peut inclure le tenseur $\sigma^i{}_\alpha{}^\beta$, de telle sorte qu'il est nul. Le champ $\chi^\alpha_{\mu\nu}$ est donc antisymétrique dans ses indices d'espace, et le champ $\Xi^\alpha_{\mu\nu}$ est déterminé en fonction des autres champs comme suit

$$\Xi^\alpha_{\mu\nu} = \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i, \chi_{\mu\nu\beta}] - C_\nu{}^{\sigma\rho} D_\sigma \chi^\alpha_{\mu\rho} \tag{3.50}$$

L'application de l'anticommutateur $\{s^\alpha, s^\beta_\mu\} = 2\varepsilon^{\alpha\beta}\big(\partial_\mu + \delta_{\text{jauge}}(A_\mu)\big)$ au champ A_μ lui-même, détermine la transformation de $\chi^\alpha_{\mu\nu}$ sous l'action des charges scalaires

$$s^\alpha \chi^\beta_{\mu\nu} = -\varepsilon^{\alpha\beta} h_{\mu\nu} - \sigma^{i\,\alpha\beta} H_{\mu\nu i} \tag{3.51}$$

La composante antisymétrique dans les indices $\frac{1}{2}$ de ce même anticommutateur appliqué au champ T_μ, donne enfin que

$$\{\eta^\alpha, \chi_{\mu\nu\alpha}\} = 0 \tag{3.52}$$

dont l'unique solution est donnée par $\chi_{\mu\nu\alpha} \propto g_{\mu\nu}\eta_\alpha$, alors que $\chi_{\mu\nu\alpha}$ est contraint à être antisymétrique dans ses indices d'espace. Tous les champs non physiques additionnels sont donc nécessairement nuls.

On en déduit donc, que si il existait une représentation fonctionnelle locale de l'algèbre de supersymétrie, on pourrait alors définir un isomorphisme de représentation, en étendant la définition de l'isomorphisme f_* à l'ensemble des champs, qui décomposerait la représentation en un certain nombre de sous-représentations, incluant la représentation modulo les équations du mouvement. Il n'existe donc pas de telle représentation.

3.2 La théorie en six dimensions

Nous allons expliciter dans cette section la procédure de torsion en six dimensions. Là encore la réduction dimensionnelle commute avec l'opération de torsion. On considérera également la possibilité d'effectuer la réduction dimensionnelle sur le tore dans le cas d'une fibration.

3.2.1 Réduction dimensionnelle sur le tore

On utilisera des spineurs de Majorana à valeur dans la fondamentale de $SL(2,\mathbb{R})$.

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{t\,\mu} \qquad C^{-1}\gamma_7 C = -\gamma_7^t \qquad C^t = C \tag{3.53}$$

La procédure de réduction dimensionnelle utilise la convention

$$\begin{aligned}
&\Gamma^m \equiv \sigma_2\otimes\sigma_2\otimes\gamma^\mu,\ \sigma_2\otimes\sigma_2\otimes\gamma_7,\ -\sigma_2\otimes\sigma_3\otimes 1,\ \sigma_1\otimes 1\otimes 1,\ \sigma_2\otimes\sigma_1\otimes 1\\
&\Gamma_{11} \equiv \sigma_3\otimes 1\otimes 1\\
&\mathscr{C} \ \equiv \sigma_2\otimes 1\otimes C
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Et le champ de jauge se décompose en

$$A_m \equiv A_\mu,\ h,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3 \tag{3.55}$$

On obtient par réduction dimensionnelle sur le 4-tore formel de Minkowski

$$\begin{aligned}
\int_M d^6x\mathrm{Tr}\,\biggl(&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu h D^\mu h - \frac{1}{2}D_\mu\phi_i D^\mu\phi^i - \frac{i}{2}\bigl(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\bigr)\\
&+\frac{1}{2}[h,\phi_i][h,\phi^i] - \frac{1}{4}[\phi_i,\phi_j][\phi^i,\phi^j] + \frac{1}{2}\bigl(\overline{\lambda}\gamma_7[h,\lambda]\bigr) - \frac{1}{2}\bigl(\overline{\lambda}\boldsymbol{\tau}^i[\phi_i,\lambda]\bigr)\biggr)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Cette fois encore la bonne définition de la théorie requiert de définir le champ h et un des champs scalaire ϕ^i comme imaginaires purs, de manière à ce que le groupe de symétrie interne soit $SU(2)$. Nous avons préféré utilisé des conventions mal définies du point de vue de la théorie des champs, pour privilégier l'interprétation de la théorie en tant que théorie de type cohomologique équilibré. Les conventions cohérentes du point de vue de la théorie des champs peuvent être obtenues en substituant les matrices de Pauli aux générateurs de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ et en ajoutant les bons facteurs de phase.

On décompose la partie chirale du générateur des rotations

$$\Gamma_+^{mn} \,\hat{=} \begin{pmatrix} \bigl[1\otimes\gamma^{\mu\nu}\bigr] & -\frac{1}{2}1\otimes\gamma_7\gamma^\mu & -\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}^i\otimes\gamma^\mu\\ \frac{1}{2}1\otimes\gamma_7\gamma^\nu & 0 & -\frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}^i\otimes\gamma_7\\ \frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}^j\otimes\gamma^\nu & \frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}^j\otimes\gamma_7 & \bigl[\boldsymbol{\tau}^{ij}\otimes 1\bigr] \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

afin d'obtenir les transformations de supersymétrie réduites

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -i\bigl(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda\bigr)\\
\delta h \ &= -\bigl(\bar{\epsilon}\gamma_7\lambda\bigr)\\
\delta\phi_i &= -\bigl(\bar{\epsilon}\boldsymbol{\tau}_i\lambda\bigr)\\
\delta\lambda \ &= \not{F}\epsilon - i\gamma_7\not{D}h\epsilon - i\boldsymbol{\tau}^i\not{D}\phi_i\epsilon + \boldsymbol{\tau}^i\gamma_7[h,\phi_i]\epsilon + \boldsymbol{\tau}^{ij}[\phi_i,\phi_j]\epsilon
\end{aligned} \tag{3.58}$$

On peut tordre cette théorie en faisant intervenir la structure complexe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$. De manière générale, on peut définir deux spineurs constants de chiralité opposée sur une variété de Calabi–Yau de dimension complexe impaire [20]. On peut choisir ces deux spineurs ζ et $\bar{\zeta}$ de manière à ce qu'ils vérifient $\bar{\zeta}^t = \zeta^t C$, ainsi que les formules ci-dessous. Nous avons utilisé ici des conventions peu ordinaires où les indices holomorphes et antiholomorphes sont notés avec les indices réels, respectivement affublés d'un $\mathring{}$ et d'un $\breve{}$. La raison de cette notation peu orthodoxe, est que nous allons rapidement passer à des notations réelles pour mettre en évidence le fait que la théorie peut être formulée sans complexifier les champs.

$$\begin{aligned}
\gamma^{\mathring{\mu}}\zeta &= 0 \qquad \gamma^{\breve{\mu}}\bar{\zeta} = 0 \\
\gamma^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\zeta &= \frac{1}{2}g^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\zeta = \frac{i}{2}k^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\zeta \\
\gamma^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\bar{\zeta} &= -\frac{1}{2}g^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\bar{\zeta} = -\frac{i}{2}k^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\bar{\zeta} \\
\gamma^{\mathring{\mu}\mathring{\nu}}\bar{\zeta} &= -\frac{i}{2}\Omega^{\mathring{\mu}\mathring{\nu}}{}_{\breve{\sigma}}\gamma^{\breve{\sigma}}\zeta \\
\gamma^{\breve{\mu}\breve{\nu}}\zeta &= -\frac{i}{2}\Omega^{\breve{\mu}\breve{\nu}}{}_{\mathring{\sigma}}\gamma^{\mathring{\sigma}}\bar{\zeta} \\
\gamma^{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}\bar{\zeta} &= -\frac{i}{3}\Omega^{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}\zeta \\
\gamma^{\breve{\mu}\breve{\nu}\breve{\sigma}}\zeta &= -\frac{i}{3}\Omega^{\breve{\mu}\breve{\nu}\breve{\sigma}}\bar{\zeta}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Ici k est la 2-forme de Kähler et Ω la 3-forme holomorphe, normalisé à $\Omega_{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}} = \sqrt{2}\varepsilon_{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}$ dans le cas plat. On décompose la représentation spinorielle comme suit

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha &= \mathring{\eta}_\alpha\zeta + i\psi_{\mathring{\mu}\alpha}\gamma^{\mathring{\mu}}\bar{\zeta} + \breve{\eta}_\alpha\bar{\zeta} + i\psi_{\breve{\mu}\alpha}\gamma^{\breve{\mu}}\zeta \\
\overline{\lambda}^\alpha &= -\bar{\zeta}^t\mathring{\eta}^\alpha + i\zeta^t\gamma^{\mathring{\mu}}\psi^\alpha_{\mathring{\mu}} - \zeta^t\breve{\eta}^\alpha + i\bar{\zeta}^t\gamma^{\breve{\mu}}\psi^\alpha_{\breve{\mu}}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Sous une rotation de paramètre $\omega_{\mu\nu}$ de la théorie non tordue, les champs tordus se transforment comme suit

$$\begin{aligned}
\delta\mathring{\eta}_\alpha &= \frac{1}{2}\Omega^{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}\omega_{\mathring{\mu}\mathring{\nu}}\psi_{\mathring{\sigma}\alpha} + \frac{i}{2}\omega_{\mathring{\mu}\breve{\nu}}k^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\mathring{\eta}_\alpha \\
\delta\psi_{\mathring{\mu}\alpha} &= \omega_{\mathring{\mu}}{}^{\mathring{\nu}}\psi_{\mathring{\nu}\alpha} - \frac{i}{2}\omega_{\mathring{\sigma}\breve{\rho}}k^{\mathring{\sigma}\breve{\rho}}\psi_{\mathring{\mu}\alpha} - \frac{1}{2}\Omega_{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}\omega^{\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}\mathring{\eta}_\alpha \\
\delta\breve{\eta}_\alpha &= \frac{1}{2}\Omega^{\breve{\mu}\breve{\nu}\breve{\sigma}}\omega_{\breve{\mu}\breve{\nu}}\psi_{\breve{\sigma}\alpha} - \frac{i}{2}\omega_{\mathring{\mu}\breve{\nu}}k^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\breve{\eta}_\alpha \\
\delta\psi_{\breve{\mu}\alpha} &= \omega_{\breve{\mu}}{}^{\breve{\nu}}\psi_{\breve{\nu}\alpha} + \frac{i}{2}\omega_{\mathring{\sigma}\breve{\rho}}k^{\mathring{\sigma}\breve{\rho}}\psi_{\breve{\mu}\alpha} - \frac{1}{2}\Omega_{\breve{\mu}\breve{\nu}\breve{\sigma}}\omega^{\breve{\nu}\breve{\sigma}}\breve{\eta}_\alpha
\end{aligned} \tag{3.61}$$

On remarque que dans le cas où la rotation appartient à $SU(3)$, ces champs se transforment de manière covariante.

En fonction des variables tordues, l'action s'écrit

$$\begin{aligned}\int_M d^6x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}D_\mu h D^\mu h-\frac{1}{2}D_\mu\phi_i D^\mu\phi^i\\
&+2\psi^\alpha_{\mathring{\mu}}D^{\mathring{\mu}}\mathring{\eta}_\alpha+\psi^\alpha_{\breve{\mu}}D^{\breve{\mu}}\breve{\eta}_\alpha+\Omega^{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}\psi^\alpha_{\mathring{\mu}}D_{\mathring{\nu}}\psi_{\mathring{\sigma}\alpha}+\Omega^{\breve{\mu}\breve{\nu}\breve{\sigma}}\psi^\alpha_{\breve{\mu}}D_{\breve{\nu}}\psi_{\breve{\sigma}\alpha}\\
&+\frac{1}{2}[h,\phi_i][h,\phi^i]-\frac{1}{4}[\phi_i,\phi_j][\phi^i,\phi^j]\\
&-\breve{\eta}^\alpha[h,\mathring{\eta}_\alpha]-2\psi^\alpha_{\breve{\mu}}[h,\psi^{\breve{\mu}}_\alpha]-\sigma^{i\,\alpha\beta}\breve{\eta}_\alpha[\phi_i,\mathring{\eta}_\beta]-2\sigma^{i\,\alpha\beta}\psi_{\breve{\mu}\alpha}[\phi_i,\psi^{\breve{\mu}}_\beta]\Big)\end{aligned}\tag{3.62}$$

Les transformations tordues de supersymétrie consistent en quatre opérateurs scalaires décomposés en deux doublets de $SL(2,\mathbb{R})$ et deux opérateurs vectoriels qui forment des doublet de $SL(2,\mathbb{R})$. On ajoute deux champs auxiliaires t et T_μ de manière à mettre en involution la majeure partie de l'algèbre. Les transformations sous l'action des opérateurs scalaires sont données par

$$\begin{aligned}
&\mathring{s}^\alpha A_\mu=2\psi^\alpha_{\mathring{\mu}} && \breve{s}^\alpha A_\mu=2\psi^\alpha_{\breve{\mu}}\\
&\mathring{s}^\alpha h=\breve{\eta}^\alpha && \breve{s}^\alpha h=-\mathring{\eta}^\alpha\\
&\mathring{s}^\alpha\phi_i=-\sigma_i{}^{\alpha\beta}\breve{\eta}_\beta && \breve{s}^\alpha\phi_i=-\sigma_i{}^{\alpha\beta}\breve{\eta}_\beta\\
&\mathring{s}^\alpha\breve{\eta}_\beta=0 && \breve{s}^\alpha\mathring{\eta}_\beta=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathring{s}^\alpha\mathring{\eta}_\beta&=\delta^\alpha_\beta\big(t+g^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}F_{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\big)+\sigma^i{}_\beta{}^\alpha[h,\phi_i]+\sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha[\phi_i,\phi_j]\\
\breve{s}^\alpha\breve{\eta}_\beta&=-\delta^\alpha_\beta\big(t+g^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}F_{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\big)-\sigma^i{}_\beta{}^\alpha[h,\phi_i]+\sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha[\phi_i,\phi_j]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathring{s}^\alpha\psi_{\mathring{\mu}\beta}=\delta^\alpha_\beta\big(T_{\mathring{\mu}}-\tfrac{1}{2}\Omega_{\mathring{\mu}}{}^{\breve{\nu}\breve{\sigma}}F_{\breve{\nu}\breve{\sigma}}\big) && \breve{s}^\alpha\psi_{\breve{\mu}\beta}=-\delta^\alpha_\beta D_{\mathring{\mu}}h-\sigma^i{}_\beta{}^\alpha D_{\mathring{\mu}}\phi_i\\
&\mathring{s}^\alpha\psi_{\breve{\mu}\beta}=\delta^\alpha_\beta D_{\breve{\mu}}h-\sigma^i{}_\beta{}^\alpha D_{\breve{\mu}}\phi_i && \breve{s}^\alpha\psi_{\breve{\mu}\beta}=\delta^\alpha_\beta\big(T_{\breve{\mu}}-\tfrac{1}{2}\Omega_{\breve{\mu}}{}^{\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}F_{\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathring{s}^\alpha T_{\mathring{\mu}}=0 \qquad\qquad \breve{s}^\alpha T_{\breve{\mu}}=0\\
&\mathring{s}^\alpha T_{\breve{\mu}}=2D_{\breve{\mu}}\mathring{\eta}^\alpha+2\Omega_{\breve{\mu}}{}^{\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}D_{\mathring{\nu}}\psi^\alpha_{\mathring{\sigma}}+2[h,\psi^\alpha_{\breve{\mu}}]+2\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\psi_{\breve{\mu}\beta}]\\
&\breve{s}^\alpha T_{\mathring{\mu}}=2D_{\mathring{\mu}}\breve{\eta}^\alpha+2\Omega_{\mathring{\mu}}{}^{\breve{\nu}\breve{\sigma}}D_{\breve{\nu}}\psi^\alpha_{\breve{\sigma}}-2[h,\psi^\alpha_{\mathring{\mu}}]+2\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\psi_{\mathring{\mu}\beta}]\\
&\mathring{s}^\alpha=2D^{\mathring{\mu}}\psi^\alpha_{\mathring{\mu}}-[h,\breve{\eta}^\alpha]-\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\breve{\eta}_\beta]\\
&\breve{s}^\alpha t=-2D^{\breve{\mu}}\psi^\alpha_{\breve{\mu}}-[h,\mathring{\eta}^\alpha]+\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\mathring{\eta}_\beta]
\end{aligned}\tag{3.63}$$

Ces opérateurs sont en involution. On peut les combiner en un seul doublet de $SL(2,\mathbb{R})$ d'opérateur réels qui constituent les charges BRST de la théorie tordue équilibrée. La théorie est invariante sous l'action d'une involution qui interchange les composantes de type $(0,p)$ et $(p,0)$ des champs, et attribue un signe moins aux champs h et t. Nous allons dorénavant décomposer les champs en parties réelles et imaginaires, plutôt qu'en parties de type $(0,p)$ et $(p,0)$.

$$
\begin{gathered}
s^\alpha \equiv \mathring{s}^\alpha + \breve{s}^\alpha \\
\eta_\alpha \equiv -\mathring{\eta}_\alpha - \breve{\eta}_\alpha \qquad\qquad \bar{\eta}_\alpha \equiv \breve{\eta}_\alpha - \mathring{\eta}_\alpha \\
\Omega_{\mu\nu\sigma} \equiv \Omega_{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}, \Omega_{\breve{\mu}\breve{\nu}\breve{\sigma}} \qquad\qquad \overline{\Omega}_{\mu\nu\sigma} \equiv \Omega_{\mathring{\mu}\mathring{\nu}\mathring{\sigma}}, -\Omega_{\breve{\mu}\breve{\nu}\breve{\sigma}} \\
\bar{V}_\mu \equiv -ik_\mu{}^\nu V_\nu
\end{gathered}
\tag{3.64}
$$

Les seuls objets impairs sous l'involution sont h, t, $\bar{\eta}_\alpha$ et ik. L'action des charges scalaires est donnée par

$$
\begin{gathered}
s^\alpha A_\mu = 2\psi^\alpha_\mu \qquad\qquad s^\alpha h = \bar{\eta}^\alpha \\
s^\alpha \phi_i = \sigma_i{}^{\alpha\beta}\eta_\beta \qquad s^\alpha \eta_\beta = -2\sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha[\phi_i,\phi_j]
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
s^\alpha \bar{\eta}_\beta &= -2\delta^\alpha_\beta\big(t + \frac{i}{2}k^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\big) - 2\sigma^i{}_\beta{}^\alpha[h,\phi_i] \\
s^\alpha \psi_{\mu\beta} &= \delta^\alpha_\beta\big(T_\mu - \frac{1}{2}\Omega_\mu{}^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma} - \bar{D}_\mu h\big) - \sigma^i{}_\beta{}^\alpha D_\mu\phi_i \\
s^\alpha t &= -2\bar{D}_\mu\psi^\alpha_\mu + [h,\eta^\alpha] - \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\bar{\eta}_\beta] \\
s^\alpha T_\mu &= -D_\mu\eta^\alpha + \bar{D}_\mu\bar{\eta}^\alpha + 2\Omega_\mu{}^{\nu\sigma}D_\nu\psi^\alpha_\sigma - 2[h,\bar{\psi}^\alpha_\mu] + 2\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\psi_{\mu\beta}]
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

et vérifie $s^{\{\alpha}s^{\beta\}} = \sigma^{i\,\alpha\beta}\delta^{\text{jauge}}(\phi_i)$. On peut alors écrire l'action de manière à rendre explicite sa réalité sous l'action de l'involution

$$
\begin{aligned}
\int_M d^6x \mathrm{Tr}\,\sqrt{g}\,\Big(&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu h D^\mu h - \frac{1}{2}D_\mu\phi_i D^\mu\phi^i \\
&- \psi^\alpha_\mu D^\mu\eta_\alpha + \psi^\alpha_\mu\bar{D}^\mu\bar{\eta}_\alpha + \Omega^{\mu\nu\sigma}\psi^\alpha_\mu D_\nu\psi_{\nu\alpha} \\
&+ \frac{1}{2}[h,\phi_i][h,\phi^i] - \frac{1}{4}[\phi_i,\phi_j][\phi^i,\phi^j] \\
&+ \frac{1}{2}\bar{\eta}^\alpha[h,\eta_\alpha] + \frac{1}{4}\sigma^{i\,\alpha\beta}\bar{\eta}_\alpha[\phi_i,\bar{\eta}_\beta] - \frac{1}{4}\sigma^{i\,\alpha\beta}\eta_\alpha[\phi_i,\eta_\beta] \\
&- \psi^\alpha_\mu[h,\bar{\psi}^\mu_\beta] - \sigma^{i\,\alpha\beta}\psi_{\mu\alpha}[\phi_i,\psi^\mu_\beta]\Big)
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Cette action est bien entendue BRST-exacte, à un terme topologique près,

$$
S = -\frac{i}{2}\int_M k_\wedge \mathrm{Tr}\,\big(F_\wedge F\big) + s^\alpha \mathbf{\Psi}_\alpha
$$

avec

$$\mathbf{\Psi}_\alpha = \frac{1}{4}\int_M d^6x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(\frac{1}{2}\Omega^{\mu\nu\sigma}\psi_{\mu\alpha}F_{\nu\sigma} - \frac{i}{4}\bar\eta_\alpha k^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \psi_{\mu\alpha}\bar D^\mu h + \sigma^i{}_\alpha{}^\beta\psi_{\mu\beta}D^\mu\phi_i + \psi_{\mu\alpha}T^\mu + \frac{1}{2}\bar\eta_\alpha t - \frac{1}{2}\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\bar\eta_\beta[h,\phi_i] - \frac{1}{2}\sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta\eta_\beta[\phi_i,\phi_j]\Big)$$

où on utilise

$$-\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Tr}\,\big(F\star F\big) = -\frac{i}{2}\int_M k_\wedge\mathrm{Tr}\,\big(F_\wedge F\big) - \frac{1}{8}\int_M d^6x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(\big(\Omega_\kappa{}^{\mu\nu}\Omega^{\kappa\sigma\rho} + k^{\mu\nu}k^{\sigma\rho}\big)F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}\Big) \quad (3.67)$$

De la même manière que dans le cas heptadimensionnel, le fermion de jauge s'écrit comme un terme BRST-exact $\mathbf{\Psi}_\alpha = s_\alpha\mathbf{\Omega}$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{8}\int_M d^6x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(\Omega^{\mu\nu\sigma}\big(A_\mu\partial_\nu A_\sigma + \frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\sigma\big) - \frac{1}{2}ihk^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + th - \psi^\alpha_\mu\psi^\mu_\alpha + \frac{1}{4}\eta^\alpha\eta_\alpha\Big) \quad (3.68)$$

où encore une fois on n'a pas écrit les termes faisant intervenir une connexion de fond pour compenser une éventuelle seconde classe de Chern non nulle. La symétrie vectorielle se réécrit quand à elle

$$\begin{aligned}
s^\alpha_\mu A_\nu &= -g_{\mu\nu}\eta^\alpha - ik_{\mu\nu}\bar\eta^\alpha + 2\Omega_{\mu\nu}{}^\sigma\psi^\alpha_\sigma\\
s^\alpha_\mu h &= 2\bar\psi^\alpha_\mu \qquad\qquad s^\alpha_\mu\phi_i = 2\sigma_i{}^{\alpha\beta}\psi_{\mu\beta}\\
s^\alpha_\mu\eta_\beta &= \delta^\alpha_\beta\big(\Omega_\mu{}^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma} + 2\bar D_\mu h - 2T_\mu\big) + 2\sigma^i{}_\beta{}^\alpha D_\mu\phi_i\\
s^\alpha_\mu\bar\eta_\beta &= \delta^\alpha_\beta\big(-\overline{\Omega}_\mu{}^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma} + 2D_\mu h + 2\bar T_\mu\big) + 2\sigma^i{}_\beta{}^\alpha\bar D_\mu\phi_i\\
s^\alpha_\mu\psi_{\nu\beta} &= \delta^\alpha_\beta\Big(ik_{\mu\nu}t + \Omega_{\mu\nu}{}^\sigma T_\sigma - \frac{1}{2}k_{\mu\nu}k^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho} + 2F^{(1,1)}_{\mu\nu} + \overline{\Omega}_{\mu\nu}{}^\sigma D_\sigma h\Big)\\
&\quad + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha\Omega_{\mu\nu}{}^\sigma D_\sigma\phi_i - ik_{\mu\nu}\sigma^i{}_\beta{}^\alpha[h,\phi_i] - g_{\mu\nu}\sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha[\phi_i,\phi_j]\\
s^\alpha_\mu t &= D_\mu\bar\eta^\alpha - \bar D_\mu\eta^\alpha + 2\overline{\Omega}_\mu{}^{\nu\sigma}D_\nu\psi^\alpha_\sigma - 2[h,\psi^\alpha_\mu] + 2\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\bar\psi_{\mu\beta}]\\
s^\alpha_\mu T_\nu &= ik_{\mu\nu}\Big(2ik^{\sigma\rho}D_\sigma\psi^\alpha_\rho - [h,\eta^\alpha] + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\bar\eta_\beta]\Big)\\
&\quad - g_{\mu\nu}\Big(2g^{\sigma\rho}D_\sigma\psi^\alpha_\rho - [h,\bar\eta^\alpha] + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\eta_\beta]\Big)\\
&\quad + \overline{\Omega}_{\mu\nu}{}^\sigma\Big(D_\sigma\bar\eta^\alpha - \bar D_\sigma\eta^\alpha + \overline{\Omega}_\sigma{}^{\kappa\lambda}D_\kappa\psi^\alpha_\lambda - 2[h,\psi^\alpha_\sigma] + 2\sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i,\bar\psi_{\sigma\beta}]\Big)
\end{aligned} \quad (3.69)$$

L'anticommutateur de cette opérateur avec les charges scalaires est donné par

$$\{s^\alpha, s^\beta_\mu\} = 4\,\varepsilon^{\alpha\beta}\big(\partial_\mu + \delta^{\text{jauge}}(A_\mu)\big) \tag{3.70}$$

3.2.2 La théorie tordue

On peut également obtenir l'algèbre « réelle » de ces opérateurs (par rapport à l'involution définie dans la section précédente), directement par réduction dimensionnelle de l'algèbre d'opérateurs en sept dimensions. Dans ce cas on fera juste abstraction des opérateurs scalaires obtenus par réduction dimensionnelle des composantes tangentes au cercle des symétries vectorielles. Ceux-ci correspondent aux parties imaginaires des opérateurs scalaires après réduction dimensionnelle. On obtient dans ce cas les même opérateurs, modulo le changement de variable

$$\begin{aligned} T_\mu &\rightarrow \frac{1}{2}T_\mu + \frac{1}{2}\Omega_\mu{}^{\nu\sigma}F_{\nu\sigma} + \bar{D}_\mu h \\ t &\rightarrow -\frac{1}{2}t - \frac{i}{2}k^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ \eta^\alpha, \psi^\alpha_\mu, \phi_i &\rightarrow \frac{1}{2}\eta^\alpha, \frac{1}{2}\psi^\alpha_\mu, \frac{1}{2}\phi_i \end{aligned} \tag{3.71}$$

Ce qui permet d'obtenir une algèbre ne faisant intervenir la 2-forme de Kähler et la 3-forme holomorphe, qu'en tant qu'isomorphismes de représentations entre, respectivement, la représentation scalaire et la représentation vectorielle, et leurs équivalents dans la décomposition de la représentation des 2-formes sous $SU(3)$, $\mathbf{15} = \mathbf{8}\oplus\mathbf{1}\oplus\mathbf{6}$. Remarquons que la décomposition subséquente en $\mathbf{15} = \mathbf{8}\oplus\mathbf{1}\oplus\mathbf{3}\oplus\mathbf{3}$ ne se fait que dans l'espace des formes à valeur complexe, alors que les symétries dont nous parlons sont correctement définies sur l'espace des formes réelles. On obtient deux multiplets irréductibles pour les symétries scalaires, le multiplet réel de Yang–Mills et un multiplet imaginaire pur de matière.

$$\begin{aligned} s^\alpha A &= \psi^\alpha & s^\alpha h &= \bar{\eta}^\alpha \\ s^\alpha \psi_\beta &= \delta^\alpha_\beta T - \sigma^i{}_\beta{}^\alpha d_A \psi_i & s^\alpha \bar{\eta}_\beta &= \delta^\alpha_\beta t + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha [\phi_i, h] \\ s^\alpha \phi_i &= \sigma_i{}^{\alpha\beta}\eta_\beta & s^\alpha t &= \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i, \bar{\eta}_\beta] + [\eta^\alpha, h] \\ s^\alpha \eta_\beta &= -\sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha [\phi_i, \phi_j] && \\ s^\alpha T &= \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i, \psi_\beta] + d_A \eta^\alpha && \end{aligned} \tag{3.72}$$

Ces opérateurs vérifient l'algèbre

$$s^{\{\alpha}s^{\beta\}} = \sigma^{i\,\alpha\beta}\delta^{\text{jauge}}(\phi_i) \tag{3.73}$$

Les symétries vectorielles peuvent également être obtenues par réduction dimensionnelle, mais notons qu'elles sont également déterminées par l'algèbre

$$\begin{aligned}
\{s^\alpha, \delta^\beta\} &= 4\,\varepsilon^{\alpha\beta}\big(\mathcal{L}_\kappa + \delta^{\text{jauge}}(i_\kappa A)\big)\\
\delta^{\{\alpha}\delta^{\beta\}} &= \sigma^{i\,\alpha\beta}\delta^{\text{jauge}}(\phi_i)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

La représentation des opérateurs vectoriels est déterminée, modulo une renormalisation multiplicative du multiplet imaginaire pur et une convention de signe sur la 3-forme holomorphe.

$$\begin{aligned}
\delta^\alpha A &= \frac{1}{2}\,g(\kappa)\eta^\alpha + g(\bar\kappa)\bar\eta^\alpha + i_\kappa \star \Omega_\wedge \psi^\alpha\\
\delta^\alpha \psi_\beta &= \delta^\alpha_\beta\,\big(-g(\bar\kappa)t + i_\kappa \star \Omega_\wedge T + 4 i_\kappa F\,\big)\\
&\quad + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha\,\big(\,i_\kappa \star \Omega_\wedge d_A\phi_i + g(\bar\kappa)[\phi_i, h]\,\big) - \frac{1}{2}\,\sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha g(\kappa)[\phi_i,\phi_j]\\
\delta^\alpha \phi_i &= -2\,\sigma_i{}^{\alpha\beta}\,i_\kappa\psi_\beta\\
\delta^\alpha \eta_\beta &= -2\,\delta^\alpha_\beta\,i_\kappa T + 2\,\sigma^i{}_\beta{}^\alpha\,\mathscr{L}_\kappa\phi_i\\
\delta^\alpha T &= -2\mathscr{L}_\kappa\psi^\alpha - 2\,i_\kappa\big(d_A\psi^\alpha + \star\Omega_\wedge d_A\eta^\alpha\big) + 2g(\bar\kappa)[h,\eta^\alpha]\\
&\quad + \sigma^{i\,\alpha\beta}\,\Big(\,\frac{1}{2}\,g(\kappa)[\phi_i,\eta_\beta] - g(\bar\kappa)[\phi_i,\bar\eta_\beta] - i_\kappa \star \Omega_\wedge[\phi_i,\psi_\beta]\,\Big)\\
\\
\delta^\alpha h &= i_{\bar\kappa}\psi^\alpha\\
\delta^\alpha \bar\eta_\beta &= \delta^\alpha_\beta\big(-i_{\bar\kappa}T + 4\mathscr{L}_\kappa h\big) - \sigma^i{}_\beta{}^\alpha\,\mathscr{L}_{\bar\kappa}\phi_i\\
\delta^\alpha t &= -4\mathscr{L}_\kappa\bar\eta^\alpha - 2\mathscr{L}_{\bar\kappa}\eta^\alpha - 2[h, i_\kappa\psi^\alpha] - \sigma^{i\,\alpha\beta}[\phi_i, i_{\bar\kappa}\psi_\beta]
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Afin de faire ces calculs dans le cadre de l'algèbre extérieure, il est commode d'introduire la formule

$$w_1 = \big(\,g(\kappa)i_\kappa - g(\bar\kappa)i_{\bar\kappa} - i_\kappa \star \Omega_\wedge i_\kappa \star \Omega\,\big)\,w_1 \tag{3.76}$$

pour toute 1-forme w_1. La symétrie vectorielle correspond clairement à la symétrie engendrée par l'antécédent du tenseur énergie impulsion. Pour le voir, on doit modifier celui-ci par un terme inessentiel, puisque séparément conservé, à savoir

$$\Omega_{\mu\nu}{}^\sigma \nabla_\sigma \Upsilon \tag{3.77}$$

avec Υ de la forme

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \mathrm{Tr}\,\Big(\alpha\left(\eta^\alpha\eta_\alpha + \frac{2i}{3}\,\varepsilon^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k\right) + \beta\left(\bar\eta^\alpha\bar\eta_\alpha + 2th\right)\Big)\\ &= s^\alpha \mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{\alpha}{3}\,\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\eta_\beta\phi_i + \beta\,\bar\eta_\alpha h\Big)\end{aligned} \tag{3.78}$$

Il est possible de contraindre la fixation de jauge par les symétries de la théorie. Etant donné que les opérateurs de supersymétrie qu'on a définis ici sont tous réels par rapport à l'involution de la théorie, le fermion de jauge le plus général vérifiant les symétries vectorielles, se décompose en une partie réelle et une partie imaginaire. Les fermions imaginaires correspondent aux antécédents de l'action par rapport aux opérateurs imaginaires purs de la section précédente.

$$s^\alpha\mathbf{\Psi}_\alpha = \bar s^\alpha\bar{\mathbf{\Psi}}_\alpha = \mathring{s}^\alpha\breve{\mathbf{\Psi}}_\alpha = \breve{s}^\alpha\mathring{\mathbf{\Psi}}_\alpha \tag{3.79}$$

Il est donc nécessaire d'imposer en outre la réalité de l'action.[6] Pour imposer la symétrie vectorielle sur le fermion de jauge, il faut tenir compte du fait, qu'après avoir choisi un $U(1) \subset SL(2,\mathbb{R})$ pour définir le nombre d'ombres, on impose seulement l'invariance du fermion de jauge de nombre d'ombres -1 par rapport à l'opérateur vectoriel du même nombre d'ombres. En terme des représentations de $SL(2,\mathbb{R})$, ceci correspond à la contrainte

$$\delta^\alpha\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\mathbf{\Psi}_\beta = 0 \tag{3.80}$$

Cette contrainte permet de déterminer le fermion de jauge réel de manière unique comme étant celui obtenu par réduction dimensionnelle

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}_\alpha = \int_M \mathrm{Tr}\,\Big(&\Omega_\wedge\psi_{\alpha\wedge}F + i\bar\eta_\alpha\,k_\wedge\star F + ik_\wedge\star\psi_{\alpha\wedge}d_Ah + \frac14\,\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\,\psi_{\beta\wedge}\star d_A\phi_i\\ &+\frac14\,\psi_{\alpha\wedge}\star T + \frac14\star\bar\eta_\alpha t\\ &+\frac14\,\sigma^i{}_\alpha{}^\beta\star\bar\eta_\beta[h,\phi_i] + \frac1{16}\,\sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta\star\eta_\beta[\phi_i,\phi_j]\Big)\end{aligned} \tag{3.81}$$

Ce fermion de jauge est lui même BRST-exact par rapport à la charge scalaire orthogonale

$$\begin{aligned}\mathbf{\Omega} = \int_M \mathrm{Tr}\,\Big(&-\frac12\,\Omega_\wedge\big(A_\wedge dA + \frac23\,A_\wedge A_\wedge A\big) + ih\,k_\wedge\star F\\ &+\frac14\star th + \frac18\,\psi^\alpha{}_\wedge\star\psi_\alpha + \frac1{32}\star\eta^\alpha\eta_\alpha\Big)\end{aligned} \tag{3.82}$$

[6]La condition de réalité n'est pas en contradiction avec le fait que l'action bien définie en théorie des champs ne soit pas hermitienne, puisqu'il s'agit d'une condition de réalité par rapport à une involution formelle sur les champs qui n'est pas liée à l'hermiticité.

Cette fonctionnelle n'est définie que modulo le terme $\int_M \star\Upsilon$. Dans le cas idéal où les antifantômes de la théorie n'admettent pas de modes zéro, cette fonctionnelle peut être interprétée comme la fonction de Morse intervenant dans le calcul d'une extension de la constante d'Euler au cas de l'espace des orbites de jauge. De manière générale, la fonction de partition est donnée par l'intégrale sur l'espace de modules des orbites de jauge autoduales de la classe d'Euler du fibré d'obstruction,[7] qui ne coïncide pas toujours avec le fibré tangent [33]. Dans cette dernière publication, les auteurs ont pu calculer la fonction de partition dans le cas d'un champ de jauge abélien sur des variétés toriques Calabi–Yau. Ils ont, entre autre, utilisé des propriétés de localisation propres au cas des fonds Ω de N. Nekrasov [48, 49], que nous allons brièvement discuter dans la section suivante. La définition mathématique proposée dans [27] de la généralisation de l'invariant de Casson aux variétés de Calabi–Yau hexadimensionnelles, formellement donnée par la fonction de partition de cette théorie, a été établie par R. Thomas [50]. Il démontre l'invariance par rapport aux difféomorphismes de cet invariant, et l'utilise pour distinguer différentes structures différentielles sur une même variété topologique. A la suite de [48, 49] et [50], cet invariant a été conjecturé comme étant équivalant à l'invariant de Gromov–Witten [51], et sa définition a été généralisée au cas des variétés Kähler de première classe de Chern non nulle. Ce lien étroit entre la théorie de champ de type cohomologique en six dimensions et la théorie topologique des cordes suggère que la fonction de partition de la théorie en sept dimensions discutée dans la section précédente a un rôle à jouer dans la théorie M topologique [52].

3.2.3 Les fonds Ω en six dimensions

Les propriétés de ces fonds sont déjà longuement expliquées dans la première publication de l'auteur [A.1], et nous nous contenterons ici de donner quelques propriétés. On considérera le cas le plus général, incluant quatre vecteurs de Killing commutant entre eux sur l'espace de Calabi–Yau, même si un seul suffit en pratique. On associe un vecteur de Killing à chaque scalaire de la théorie, respectivement ς et υ_i à h et ϕ^i. Suivant la prescription proposée dans la publication annexée A.1, on obtient l'action dans un fond

[7] Voir page 57.

Ω comme suit

$$
\begin{aligned}
\int_M d^6x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Bigg(&-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\Big(D^\sigma h+\varsigma^\mu F_\mu{}^\sigma\Big)\Big(D_\sigma h+\varsigma^\nu F_{\nu\sigma}\Big)\\
&-\frac{1}{2}\Big(D^\sigma\phi_i+\upsilon_i^\mu F_\mu{}^\sigma\Big)\Big(D_\sigma\phi^i+\upsilon^{i\nu}F_{\nu\sigma}\Big)-\frac{i}{2}(\overline{\lambda}\not{D}\lambda)\\
&+\frac{1}{2}\Big([h,\phi_i]-\mathscr{L}_\varsigma\phi_i+\mathscr{L}_{\upsilon_i}h-i_\varsigma i_{\upsilon_i}F\Big)\Big([h,\phi^i]-\mathscr{L}_\varsigma\phi^i+\mathscr{L}_{\upsilon^i}h-i_\varsigma i_{\upsilon^i}F\Big)\\
&-\frac{1}{4}\Big([\phi_i,\phi_j]-\mathscr{L}_{\upsilon_i}\phi_j+\mathscr{L}_{\upsilon_j}\phi_i-i_{\upsilon_i}i_{\upsilon_j}F\Big)\Big([\phi^i,\phi^j]-\mathscr{L}_{\upsilon^i}\phi^j+\mathscr{L}_{\upsilon^j}\phi^i-i_{\upsilon^i}i_{\upsilon^j}F\Big)\\
&+\frac{1}{2}\Big(\overline{\lambda}\gamma_7\big([h,\lambda]-\mathscr{L}_\varsigma\lambda\big)\Big)-\frac{1}{2}\Big(\overline{\lambda}\tau^i\big([\phi_i,\lambda]-\mathscr{L}_{\upsilon_i}\lambda\big)\Big)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

Cette action est laissée invariante par les supersymétries suivantes, tant que le spineur constant associé est invariant par rapport aux isométries engendrées par les vecteurs de Killing ς et υ_i.

$$
\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -i(\overline{\epsilon}\gamma_\mu\lambda)\\
\delta h &= -(\overline{\epsilon}\gamma_7\lambda)-i\big(\overline{\epsilon}\not{\varsigma}\lambda\big)\\
\delta\phi_i &= -(\overline{\epsilon}\tau_i\lambda)-i\big(\overline{\epsilon}\not{\upsilon}_i\lambda\big)\\
\delta\lambda &= \not{F}\epsilon-i\gamma_7\Big(\not{D}h+i_\varsigma\not{F}\Big)\epsilon-i\tau^i\Big(\not{D}\phi_i+i_{\upsilon_i}\not{F}\Big)\epsilon\\
&\quad+\tau^i\gamma_7\Big([h,\phi_i]-\mathscr{L}_\varsigma\phi_i+\mathscr{L}_{\upsilon_i}h-i_\varsigma i_{\upsilon_i}F\Big)\epsilon\\
&\quad\quad+\tau^{ij}\Big([\phi_i,\phi_j]-\mathscr{L}_{\upsilon_i}\phi_j+\mathscr{L}_{\upsilon_j}\phi_i-i_{\upsilon_i}i_{\upsilon_j}F\Big)\epsilon
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

Les seules modifications de l'action et de l'algèbre en présence de ce fond, se réduisent aux substitutions suivantes.

$$
\delta^{\text{jauge}}(h)\longrightarrow\delta^{\text{jauge}}(h-i_\varsigma A)-\mathcal{L}_\varsigma\qquad\delta^{\text{jauge}}(\phi_i)\longrightarrow\delta^{\text{jauge}}(\phi_i-i_{\upsilon_i}A)-\mathcal{L}_{\upsilon_i}\tag{3.85}
$$

Etant donné que ces modifications apparaissent comme exclusivement bosoniques, il est relativement aisé de se convaincre qu'elles commutent avec l'opération de torsion. On peut montrer que

$$
\big(s^\alpha\mathcal{F}\big)_\Omega=s^\alpha_\Omega\mathcal{F}_\Omega\tag{3.86}
$$

où l'indice Ω correspond à la substitution (3.85), lorsque celle-ci est possible, c'est à dire quand les champs scalaires n'apparaissent que sous la forme de transformations de jauge. Ces fonds deviennent tout à fait intéressants pour les propriétés de localisation de l'intégrale fonctionnelle lorsque certaines des matrices Ω_i et Ω^J, définies par

$$\Omega_{i\,ab} \equiv \frac{1}{2}\big(dg(\upsilon_i)\big)_{ab} \qquad \Omega^J_{ab} \equiv \frac{1}{2}\big(dg(\varsigma)\big)_{ab} \tag{3.87}$$

sont non dégénérées, alors que les matrices $\not{\Omega}_i$ et $\not{\Omega}^J$ admettent un noyau commun non trivial, de manière à préserver quelques supersymétries. Ces matrices sont choisies dans un sous groupe abélien du tore maximal de $SO(6)$ [48, 49]. On choisit ce tore tel que $T^3 \subset U(3) \subset SO(6)$, avec ς engendrant le sous groupe $U(1)$ de $U(3) \cong \frac{U(1)\times SU(3)}{\mathbb{Z}_3}$, et les υ_i générant un tore maximal de $SU(3)$. Ce choix est fait de manière à préserver la condition de réalité de l'action et de l'algèbre. Afin de préserver au minimum une supersymétrie, on doit choisir un tore maximal de $SU(3)$. Mais il est possible de restaurer l'invariance dans le cas incluant le facteur $U(1)$ en ajoutant un terme à l'action non tordue. En utilisant

$$\frac{i}{8}k^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\big(i\not{k} + \gamma_7\big)\lambda_\alpha = \frac{i}{2}k^{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\omega_{\mathring{\mu}\breve{\nu}}\Big(-\mathring{\eta}_\alpha\zeta + \psi_{\mathring{\sigma}\alpha}i\gamma^{\mathring{\sigma}}\bar{\zeta} + \breve{\eta}_\alpha\bar{\zeta} - \psi_{\breve{\sigma}\alpha}i\gamma^{\breve{\sigma}}\zeta\Big) \tag{3.88}$$

et (3.61), on calcule qu'une telle modification de l'action non tordue peut être obtenue en substituant à $\frac{1}{4}\big(\overline{\lambda}\gamma_7\not{\Omega}^J\lambda\big)$, le terme

$$\frac{1}{16}\big(\overline{\lambda}\gamma_7\not{\Omega}^J\lambda\big) + \frac{i}{32}k^{\mu\nu}\Omega^J_{\mu\nu}\big(\overline{\lambda}\lambda\big) \tag{3.89}$$

3.3 Réductions dimensionnelles subséquentes

Si on continue la procédure, on obtient en quatre dimensions la théorie tordue de Vafa et Witten [53]. On ne dira rien de plus ici, ce cas étant largement discuté dans la publication annexée A.2. On peut continuer la procédure jusqu'en trois puis en deux dimensions [54].

Chapitre 4

Travaux non publiés et interprétations

Les théories de type cohomologique sont souvent définies à partir des théories supersymétriques, comme des sous secteurs de celles-ci. Tout au long de cette thèse nous avons exploré la possibilité de considérer au contraire, les théories supersymétriques comme des extensions des théories de type cohomologique. Nous allons discuter dans ce chapitre les outils que l'on peut étendre au secteur non topologique des théories supersymétriques, et l'interprétation qu'on peut donner de l'algèbre de supersymétrie en l'incluant dans la symétrie topologique.

4.1 Champs d'ombre pour la supersymétrie

De manière équivalente au cas des théories de type cohomologique, il est possible de fixer la jauge tout en maintenant la supersymétrie manifeste, sans introduire pour autant un formalisme de superchamps. Ceci s'avère particulièrement utile dans le cas de la théorie de Yang–Mills supersymétrique avec le nombre $\mathcal{N} = 4$ maximal de supercharges en quatre dimensions. En effet, il n'existe pas de formalisme de superchamps dans ce cas.[1] Le formalisme que nous avons introduit pour la symétrie vectorielle dans le second chapitre, s'il permet d'écrire une fixation de jauge manifestement supersymétrique, reste trop compliqué à mettre en pratique. Il est nécessaire d'introduire autant de différentielles que de charges de supersymétrie et la mise en involution de celles-ci nécessite l'introduc-

[1]Même s'il est possible de définir un superespace pour les champs définis modulo les équations du mouvement.

tion d'un champ d'ombre pour chaque produit antisymétrique de ces différentielles ; le nombre de champs à introduire croit ainsi exponentiellement avec le nombre de charges de supersymétrie et le nombre de diagrammes à calculer devient bien trop important. Il est néanmoins possible de restreindre considérablement le nombre de champs, en introduisant des paramètres libres dans la fixation de jauge. Considérons pour illustrer ce propos le cas plus simple d'une fixation de jauge ne préservant pas l'invariance de Lorentz, telle que celle associée à la jauge de Coulomb. On pourrait montrer que les observables se transforment correctement sous les transformations de Lorentz, en introduisant un vecteur constant κ, et la jauge

$$\partial^\mu A_\mu - \kappa^\mu \partial_\mu \kappa^\nu A_\nu \tag{4.1}$$

qui reproduit la jauge de Coulomb lorsque $\kappa = \partial_0$. En introduisant un fantôme constant associé à κ, on pourrait en effet montrer que les observables ne dépendent pas de ce vecteur, si les fonctions de corrélation considérées étaient des fonctions analytiques de celui-ci [45]. Ce n'est en fait pas le cas, car les propagateurs des fantômes de Faddeev–Popov sont singuliers dans la limite $\kappa \rightarrow \partial_0$. Il s'avère cependant que cette preuve peut être appliquée dans le cas des théories supersymétriques, pour lesquelles l'ensemble des propagateurs et des interactions de la théorie sont des fonctions analytiques des paramètres de supersymétrie apparaissant dans la fixation de jauge [A.4].

De manière à introduire une seule ombre c pour tous les générateurs de supersymétrie, on considère une fixation de jauge qui dépend explicitement d'un spineur constant et pair dans la représentation voulue. La représentation de la supersymétrie par une différentielle δ^{Susy}, dépendant d'un paramètre constant de supersymétrie ϵ, invariant sous l'action de celle-ci, de la forme[2]

$$\delta^{Susy} A_\mu = i\big(\bar\epsilon\gamma_\mu\lambda\big) \qquad \delta^{Susy}\phi^i = -\big(\bar\epsilon\tau^i\lambda\big) \qquad \delta^{Susy}\lambda = \Big(\not{F} + i\not{D}\phi + \frac{1}{2}[\phi,\phi]\Big)\epsilon \tag{4.2}$$

peut être modifiée en introduisant un opérateur Q, nilpotent modulo une dérivée de Lie inessentielle sur les fonctionnelles des champs. Cet opérateur agit sur les champs physiques comme $Q \equiv \delta^{Susy} - \delta^{\text{jauge}}(c)$, et sur l'ombre c comme suit

$$Qc = \big(\bar\epsilon[\phi - i\not{A}]\epsilon\big) - c^2 \tag{4.3}$$

Ces transformations peuvent être déduites de la définition de la courbure étendue

$$(d + Q + i_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)})\big(A + c\big) \;+ \big(A + c\big)^2 = F - i\big(\bar\epsilon\gamma_1\lambda\big) + \big(\bar\epsilon\,\phi\,\epsilon\big) \tag{4.4}$$

[2]Ici $\phi \equiv \phi^i\tau_i$, où les matrices τ^i sont tout simplement absentes dans le cas $\mathcal{N} = 1$, sont 1 et γ_5 dans le cas $\mathcal{N} = 2$, et les matrices de Dirac en six dimensions pour $\mathcal{N} = 4$. Le spineur λ est respectivement un spineur de Majorana, $SU(2)$-Majorana, ou $SU(4)$-Majorana dans ces trois cas.

et de son identité de Bianchi ($\gamma_1 \equiv \gamma_\mu dx^\mu$).

4.1.1 Interprétation géométrique de l'ombre

Interprétons cette équation à la lumière de ce que nous avons appris dans le cadre des théories de type cohomologique. Les transformations de supersymétrie sont définies sur les observables physiques, et donc sur l'espace des orbites de jauge dans l'espace des champs de la théorie, $\mathscr{B}^* \times \cdots$. On définit le vecteur impair $\mathcal{S}$ de $T\mathscr{B}^* \times \cdots$, dépendant d'un spineur constant ϵ, dont la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\mathcal{S} = [I_\mathcal{S}, \delta]$ sur l'espace des orbites de jauge est donnée par l'action des générateurs de supersymétrie selon le spineur ϵ. L'algèbre de supersymétrie est décrite à l'aide du crochet de Lie de $\mathcal{S}$ avec lui même, qui donne le champs de vecteur de $T\mathscr{B}^* \times \cdots$ générant les translations de M, $\frac{1}{2}\{\mathcal{S}, \mathcal{S}\} = -i(\bar{\epsilon} \not{P} \epsilon)$.

On définit l'action des générateurs de supersymétrie selon le spineur ϵ sur $\mathscr{A}^* \times \cdots$ comme la dérivée de Lie le long du relèvement horizontal $\mathcal{S}^h$ de $\mathcal{S}$ sur $T\mathscr{A}^* \times \cdots$ par rapport à une connexion de $\mathscr{A}^* \times \cdots \to \mathscr{B}^* \times \cdots$. Sur l'espace des champs considéré, la connexion la plus naturelle n'est pas la même que dans le cas où on s'intéresse seulement à l'espace des champs de jauge. La métrique invariante sur l'espace des champs bosoniques du multiplet vectoriel d'une théorie supersymétrique prend la forme

$$g[\, \delta_1 A \oplus \delta_1 \phi^i \,,\, \delta_2 A \oplus \delta_2 \phi^i \,] \equiv \int \operatorname{Tr} \Big(\delta_1 \phi^i \star \delta_2 \phi_i - \delta_1 A \star \delta_2 A \Big) \tag{4.5}$$

Cette équation en fonction des composantes signifie que le produit scalaire de deux vecteurs bosoniques de $T\mathscr{A}^* \times \cdots$, définis formellement comme des fonctionnelles des champs, linéaires en $\boldsymbol{\delta} A$ et $\boldsymbol{\delta}\phi^i$,

$$\mathscr{F}_\alpha[A, \phi, \boldsymbol{\delta} A, \boldsymbol{\delta}\phi] \equiv \int d^4x \operatorname{Tr} \Big(K^\mu_\alpha[A,\phi](x) \boldsymbol{\delta} A_\mu(x) + K^i_\alpha[A,\phi](x) \boldsymbol{\delta}\phi_i(x) \Big) \tag{4.6}$$

est donné par

$$\langle \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \rangle \equiv \int d^4x \operatorname{Tr} \Big(g_{\mu\nu} K^\mu_1[A,\phi](x) K^\nu_2[A,\phi](x) + \delta_{ij} K^i_1[A,\phi](x) K^j_2[A,\phi](x) \Big) \tag{4.7}$$

La connexion sur $\mathscr{A}^* \times \cdots \to \mathscr{B}^* \times \cdots$ définie à partir de cette métrique est donnée par le noyau de l'opérateur de $T\mathscr{A}^* \times \cdots$ dans $\operatorname{Lie}(\mathscr{G})$

$$\delta A \oplus \delta\phi^i \to d^*_A \delta A + [\phi^i, \delta\phi_i] \tag{4.8}$$

On définit $G_{A\phi}$ comme l'inverse de l'opérateur $d^*_A d_A + \operatorname{ad}_{\phi^i} \operatorname{ad}_{\phi_i}$ sur $\operatorname{Lie}(\mathscr{G})$. La 1-forme de connexion, correspondant à la définition de l'espace horizontal via le noyau de (4.8), est $-G_{A\phi}\ (d_A^*\delta A + [\phi^i, \delta\phi_i])$. La variation horizontale correspondante de $A \oplus \phi^i$ s'écrit

$$\delta_h A \oplus \delta_h \phi^i = \delta A - d_A G_{A\phi}\ \big(d_A^*\delta A + [\phi^i, \delta\phi_i]\big) \oplus \delta\phi^i - \big[\phi^i,\ G_{A\phi}\ \big(d_A^*\delta A + [\phi^j, \delta\phi_j]\big)\big] \quad (4.9)$$

On peut calculer la courbure de $\mathscr{A}^* \times \cdots \to \mathscr{B}^* \times \cdots$ de la même manière que nous l'avons fait dans le second chapitre, dans le cadre de la théorie cohomologique. Celle-ci est donnée par la 2-forme de $\Lambda^\bullet \mathscr{A}^* \times \cdots$ à valeur dans Lie($\mathscr{G}$)

$$G_{A\phi}\big(\star[\delta_h A, \star\delta_h A] - [\delta_h\phi^i, \delta_h\phi_i]\big) \quad (4.10)$$

L'algèbre de supersymétrie sur $\mathscr{A}^* \times \cdots$, définie par le relèvement horizontal de l'algèbre définie sur $\mathscr{B}^* \times \cdots$, s'obtient en appliquant la formule (1.14)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathcal{S}^h}{}^2 &= -\mathcal{L}_{i(\bar\epsilon\ \not{p}^h\epsilon)} - \delta^{\text{jauge}}\Big(\frac{1}{2}I_{\mathcal{S}^h}{}^2\, G_{A\phi}\big(\star[\delta_h A, \star\delta_h A] - [\delta_h\phi^i, \delta_h\phi_i]\big)\Big) \\
&= -\mathscr{L}_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)} - \delta^{\text{jauge}}\Big(G_{A\phi}\big(\star[\delta^{Susy}A, \star\delta^{Susy}A] - [\delta^{Susy}\phi^i, \delta^{Susy}\phi_i]\big)\Big) \\
&\qquad - \delta^{\text{jauge}}\Big(G_{A\phi}\big(d_A^*\mathcal{L}_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}A + [\phi^i,\ \mathcal{L}_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}\phi_i]\big) + i(\bar\epsilon\not{A}\epsilon)\Big) \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Par extension du cas des théories de type cohomologique, l'opérateur Q est le représentant algébrique de la dérivée de Lie le long de $\mathcal{S}$ sur $\mathscr{A}^* \times \cdots$, et l'ombre c, celui de la composante de la connexion de $\mathscr{A}^* \times \cdots \to \mathscr{B}^* \times \cdots$ le long de ce même vecteur,

$$I_{\mathcal{S}}\Big(-G_{A\phi}\big(d_A^*\delta A + [\phi^i, \delta\phi_i]\big)\Big) \quad (4.12)$$

La définition de la courbure (4.4), et l'identité

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}} I_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}I_{\mathcal{S}}{}^2\delta + \frac{1}{2}I_{\{\mathcal{S},\mathcal{S}\}} - \frac{1}{2}\delta I_{\mathcal{S}}{}^2 \quad (4.13)$$

permettent d'identifier formellement le terme $Qc + c^2$ de (4.4) à

$$\frac{1}{2}I_{\mathcal{S}}{}^2 G_{A\phi}\big(\star[\delta_h A, \star\delta_h A] - [\delta_h\phi^i, \delta_h\phi_i]\big) + \frac{1}{2}I_{i(\bar\epsilon\ \not{p}\epsilon)}G_{A\phi}\big(d_A^*\delta A + [\phi^i, \delta\phi_i]\big) \quad (4.14)$$

et ainsi le terme $(\bar\epsilon\phi\epsilon)$ à l'élément de Lie($\mathscr{G}$)

$$G_{A\phi}\big(\star[\delta^{Susy}A, \star\delta^{Susy}A] - [\delta^{Susy}\phi^i, \delta^{Susy}\phi_i] + d_A^*\mathcal{L}_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}A + [\phi^i,\ \mathcal{L}_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}\phi_i]\big) + i(\bar\epsilon\not{A}\epsilon) \quad (4.15)$$

qui détermine la modification de l'algèbre de supersymétrie causée par le relèvement horizontal. Dans le cas où le spineur constant vérifie l'équation $(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon) = 0$,[3] ce terme se

[3]Même dans le cas de la supersymétrie étendue, il n'existe de solutions non triviales à cette équation que dans un espace euclidien, l'analyticité de la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductibles permet cependant de considérer ces solutions dans la théorie définie dans un espace de Minkowski.

réduit à la composante de la courbure de $\mathscr{A}^* \times \cdots \to \mathscr{B}^* \times \cdots$ le long du vecteur $\mathcal{S}$. Cette composante de la courbure s'avère constituer une obstruction topologique à l'existence d'anomalie chirale [A.4,A.5]. Dans le cas de la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 1$, il n'existe pas de solution non triviale à l'équation $(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon) = 0$, et une anomalie chirale peut être engendrée, en fonction de la représentation des champs de matière. Dans ce cas, l'élément (4.15) prend la forme suivante en composante

$$- G_A\big[(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda), (\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda)\big] + i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)\big(G_A D^\nu \partial_\mu A_\nu - A_\mu\big) = i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)\, G_A \left(D^\nu F_{\mu\nu} - i(\overline{\lambda}\gamma_\mu\lambda)\right) \tag{4.16}$$

qui est nul modulo les équations du mouvement. Ceci valide son identification à $(\bar{\epsilon}\phi\epsilon)$ qui est nul dans la cas $\mathcal{N} = 1$, puisqu'il n'y a alors pas de scalaire dans le multiplet vectoriel. Un calcul équivalant permet de montrer que le terme (4.15) est égal à $(\bar{\epsilon}\phi\epsilon)$ modulo les équations du mouvement dans les théories de Yang–Mills qui admettent des supersymétrie étendues, à savoir

$$\begin{aligned} &G_{A\phi}\big(\star[\delta^{Susy} A, \star\delta^{Susy} A] - [\delta^{Susy}\phi^i, \delta^{Susy}\phi_i] + d^*_A \mathcal{L}_{i(\bar{\epsilon}\gamma\epsilon)} A + [\phi^i,\, \mathcal{L}_{i(\bar{\epsilon}\gamma\epsilon)}\phi_i] \big) + i(\bar{\epsilon}\not{A}\epsilon) \\ &\qquad = \big(\bar{\epsilon}\,\phi\,\epsilon\big) \;+\; i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)\, G_{A\phi}\, E^{(A)}_\mu \;-\; (\bar{\epsilon}\tau^i\epsilon)\, G_{A\phi}\, E^{(\phi)}_i \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.1.2 Renormalisation algébrique et géométrie

Dans la publication annexée A.4, la preuve de l'absence d'anomalie chirale dans les théories de Yang–Mills admettant des supersymétries étendues, attribue celle-ci à l'existence de l'élément non trivial de cohomologie de Q dans le complexe des fonctionnelles locales invariantes de jauge

$$\int \mathrm{Tr}\, \Big((\bar{\epsilon}\phi\epsilon)\, F_\wedge F - F_\wedge(\bar{\epsilon}\gamma_1\lambda)_\wedge(\bar{\epsilon}\gamma_1\lambda)\Big) \tag{4.18}$$

Dans le cas d'un spineur constant vérifiant $(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon) = 0$, ce cocycle peut être identifié à la composante de l'élément de cohomologie de de Rham sur $\mathscr{B}^*$ de Donaldson–Witten

$$ch_3(M) \equiv \frac{i}{16\pi^3} \int \mathrm{Tr}\, \Big(F_\wedge F\, G_A \star [\delta_h A, \star\delta_h A] + F_\wedge \delta_h A_\wedge \delta_h A \Big) \tag{4.19}$$

le long du vecteur $\mathcal{S}$, à savoir $\frac{1}{2} I_{\mathcal{S}}{}^2 ch_3(M)$. Ici nous avons écrit la courbure telle qu'elle est définie dans le formalisme de Mathai–Quillen. Les invariants de Donaldson ne dépendent en fait pas du choix de la connexion, comme c'est le cas des classes caractéristiques en général. Cette indépendance est comprise du point de vue de la théorie des champs de type cohomologique du fait que les observables de la théorie ne dépendent pas de l'addition du terme Q-exact qui permet de passer de l'action définie dans le formalisme de Mathai–Quillen à l'action tordue de la théorie supersymétrique. C'est pourquoi ici, par souci de simplicité, nous avons préféré écrire ces invariants en fonction de la courbure dérivée par I. M. Singer. Si on admet que le noyau de $I_{\mathcal{S}}$ est trivial dans l'ensemble des 2-formes sur $\mathscr{B}^*$ considéré, on peut montrer en utilisant (4.13) que l'existence d'un antécédent sous $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ de $\frac{1}{2}{I_{\mathcal{S}}}^2 ch_3(M)$ impliquerait la trivialité de $ch_3(M)$ dans $\mathcal{H}^2(\mathscr{B}^*)$. La non trivialité de la classe caractéristique (4.19) impose donc l'absence d'anomalie chirale dans les théories supersymétriques admettant un nombre étendu de générateurs de supersymétrie.

On construit les supermultiplets d'opérateurs locaux à partir d'opérateurs $\mathcal{O}^a$ qui ne peuvent être obtenus par l'application d'un générateur de supersymétrie à d'autres opérateurs locaux. L'ensemble des opérateurs engendrés par application successive de générateurs de supersymétrie à un opérateur donné, constitue un multiplet de supersymétrie. En partant d'un opérateur générique dans une représentation de $Spin(3,1) \times SU(4)$, on obtient à partir d'une composante, $2^{4\mathcal{N}}$ opérateurs locaux. Les multiplets BPS sont construits à partir d'opérateurs invariants sous un certain nombre de générateurs de supersymétrie, et sont par conséquents courts. C'est à dire qu'on n'obtient à partir d'une composante d'un opérateur $\mathcal{O}^a$ qu'un nombre réduit d'opérateurs locaux $2^{\frac{(k-1)4\mathcal{N}}{k}}$ dans un multiplet $\frac{1}{k}$ BPS. On conjecture que la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique vérifie la symétrie superconforme associée à l'algèbre $\mathfrak{psu}(2,2|4)$. Les opérateurs BPS $\mathcal{O}^a(x)$ de cette théorie sont en outre annulés à l'origine par les charges de supersymétrie spéciales ($\mathcal{S}_\alpha\, \mathcal{O}^a(0) = 0$). Ces opérateurs jouent un rôle similaire aux opérateurs primaires en théorie conforme, dans les théories vérifiant une symétrie superconforme, et on les appelle par analogie « opérateurs BPS primaires » , ou parfois par abus de langage « chiraux primaires » . Les opérateurs BPS sont dans des représentations courtes de l'algèbre superconforme, et leur valeurs propres sous l'action de l'opérateur dilatation sont déterminées algébriquement en fonction des représentations de $Spin(3,1) \times SU(4)$ auxquelles ils appartiennent. La représentation des opérateurs sous le groupe $Spin(3,1) \times SU(4)$ n'est pas modifiée par les corrections quantiques. Dans le cas où un opérateur appartient à une représentation courte de $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ dont les représentations de $Spin(3,1) \times SU(4)$ ne peuvent s'inclure dans une représentation plus grande de $\mathfrak{psu}(2,2|4)$, la représentation de cet opérateur ne peut être modifiée par les corrections quantiques, et sa valeur propre sous l'action de l'opérateur dilatation ne dépend pas de la constante de couplage. De tels opérateurs ont ainsi une dimension anormale nulle non-perturbativement. C'est par exemple le cas des opérateurs $\frac{1}{2}$ BPS.

Afin de vérifier la conjecture de l'invariance superconforme de la théorie, nous avons montré dans l'article annexé A.5 que la fonction β de la théorie, ainsi que les dimensions anormales des opérateurs locaux un-demi BPS primaires, sont nulles à tous les ordres de la théorie des perturbations. Nous voudrions maintenant interpréter ce dernier résultat géométriquement. Pour montrer l'annulation des dimensions anormales de ces opérateurs locaux, on utilise dans [A.5] le fait que si on se restreint à cinq générateurs de supersymétrie de telle sorte que l'algèbre de supersymétrie admet une représentation fonctionnelle locale et que les paramètres de supersymétrie associés vérifient $(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon) = 0$, la décomposition des opérateurs, construits comme des polynômes invariants $\mathcal{P}_n$ de $(\bar\epsilon\phi\epsilon)$, engendre tous les $\frac{1}{2}$ BPS primaires. Des représentations explicites de tels spineurs constants peuvent être obtenues dans la formulation tordue de la théorie [A.5]. A la lumière de ce que nous venons de discuter, ces opérateurs peuvent êtres assimilés à la composante d'éléments de cohomologie de Donaldson–Witten le long du vecteur $\mathcal{S}$ associé à ϵ.

$$\mathcal{P}_n\big(\bar\epsilon\phi\epsilon\big) \;\sim\; \frac{1}{(2n)!} {I_\mathcal{S}}^{2n}\, \mathcal{P}_n\Big(\; G_A \star [\delta_h A, \star\delta_h A]\;\Big) \tag{4.20}$$

On peut en fait associer un opérateur appartenant au multiplet superconforme d'un opérateur primaire donné à chacune des applications de Donaldson dérivant du polynôme invariant associé via les équations de descente. La finitude des opérateurs un-demi BPS primaires est attribuée dans [A.5] au fait que ceux-ci sont les Q variations d'opérateurs faisant intervenir le champ d'ombre, qui sont eux mêmes protégés par des identités de Ward dites fantômes, dans la jauge de Landau. Cette propriété est directement relié au fait que les classes caractéristiques auxquelles ils sont attachés sont localement δ-exactes dans l'espace des orbites, via la formule de Chern–Simons. Leur finitude est donc intimement lié à leur caractère topologique.

On note cependant que, malgré les interprétations géométriques proposées dans cette section, l'ombre c se localise formellement dans l'intégrale fonctionnelle sur un opérateur qui ne correspond pas à une connexion de $\mathscr{A}^* \times \cdots \to \mathscr{B}^* \times \cdots$, mais à une connexion permettant de définir Q comme une variation préservant la condition de jauge [A.4]. On suppose cependant, par extension du cas des théories de type cohomologique, que le modèle algébrique BRST reste valable en dehors du secteur topologique, pour décrire les objets basiques telles que les classes caractéristiques associées à la courbure.

4.2 La supergravité tordue

Dans le premier article d'E. Witten sur les théories topologiques [10], celui-ci expose la possibilité que la création d'un univers puisse être modélisée par une transition de phase dans une théorie topologique de cordes. Cette hypothèse suggère que la construction d'une théorie topologique de la gravité puisse être d'un grand intérêt physique. Une procédure de torsion de la théorie de supergravité $\mathcal{N} = 2$ en quatre dimensions a été proposée en [55], ainsi qu'une proposition de définition d'une théorie topologique de la gravité en quatre dimensions. L'action invariante de la théorie a été tordue en [56]. Les auteurs y montrent que cette action tordue peut s'écrire comme la variation d'un antécédent par rapport à une charge topologique scalaire modulo les équations du mouvement, ainsi que quelques autres propriétés de la théorie tordue annoncées en [55]. L'analyse reste néanmoins très incomplète, puisque l'action équivariante du point de vue de la théorie topologique inclut la fixation de jauge de la supersymétrie locale, qui doit, pour ce faire, être invariante par rapport aux difféomorphismes, les rotations locales tordues et les transformations de jauge abéliennes associées au graviphoton.

4.2.1 Formulation de la supergravité $\mathcal{N} = 2$ jaugée sous $SU(2)$

Nous allons tout d'abord étendre les travaux de [56] au cas d'une représentation fonctionnelle locale de l'algèbre de supersymétrie locale. Pour ce faire on utilise la version euclidienne d'une formulation fonctionnelle proposée par B. de Wit en [57], où celui-ci utilise sa définition du supermultiplet de super-Poincaré à partir de supermultiplets superconformes [58] pour introduire une symétrie $SU(2)$ interne locale supplémentaire. Cette symétrie est en quelque sorte factice, dans le sens où la connexion associée n'est pas dynamique ; le champ dynamique pertinent est au contraire un élément des transformations de jauge de ce $SU(2)$, qui compense très exactement les degrés de liberté longitudinaux manquants de la connexion. Cette formulation fonctionnelle est obtenue à partir du multiplet de super-Poincaré dérivé du multiplet superconforme non linéaire. Elle a été introduite par B. de Wit, entre autres, afin de simplifier l'algèbre de supersymétrie locale.

Les champs dynamiques de la théorie de supergravité $\mathcal{N} = 2$ dans l'euclidien sont, le graviton représenté par les tétrades e^a, le graviphoton représenté par la connexion abélienne A et les gravitinos représentés par la 1-forme spineur de $SU(2)$-Majorana ψ. Les champs auxiliaires de ce multiplet fonctionnelle (communément appelé multiplet hors couche de masse par abus de langage) sont un scalaire M, un vecteur V_a, un tenseur antisymétrique t_{ab}, un pseudo-vecteur $\overset{\star}{V}_a$ et un pseudo-scalaire $\overset{\star}{M}$, ainsi qu'un scalaire S et une 1-forme B à valeur dans $\mathfrak{su}(2)$ (dont on note les générateurs τ_i et au besoin ces champs $S^i\tau_i$ et $B^i\tau_i$), et enfin deux fermions spineurs de $SU(2)$-Majorana λ et χ. L'introduction d'un champ scalaire u à valeur dans $SU(2)$ permet de rendre locale la symétrie globale $SU(2)$, en agissant à gauche sur les représentations globales de $SU(2)$ comme le feraient des triades [57]. Mathématiquement, le champ u définit une section globale d'un fibré principal trivial de groupe de structure $SU(2)$, qui permet de faire correspondre aux champs de la théorie, fonctions dans des représentations linéaires de $SU(2)$, des sections de fibrés associés à ce fibré principal sur lesquels le groupe des automorphismes verticaux agit naturellement. Tous les champs de la théorie à valeur dans une représentation de $SU(2)$ sont ainsi considérés comme étant dans la représentation locale correspondante, et la 1-forme B comme une connexion sur ce même fibré principal.

Avant d'écrire explicitement l'action de la supersymétrie locale sur les champs, on introduit les fonctions des champs suivantes, à valeur dans l'algèbre de Clifford correspondant à la représentation de $SU(2)$-Majorana

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_a &\equiv \hat{F}^{-_5}_{ab}\gamma^b + \star_5 t_{ab}\gamma^b + S\gamma_a + \gamma_5\gamma_{ab}\,\overset{\star}{V}{}^b \\
\mathbb{R}_{ab} &\equiv -\hat{F}^{+_5}_{ab} + \star_5 t_{ab} + 2\gamma_{ab}S + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\,\gamma^c\,\overset{\star}{V}{}^d \\
\mathbb{G}^i &\equiv \not{t}\tau^i + 2S^i - \tau^i\gamma_5\overset{\star}{\not{V}}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Ces objets peuvent en fait être interprétés géométriquement comme des composantes de la super-torsion et de la super-courbure en super-espace [59]. L'opérateur $\star_5$ est défini comme la composition de l'opérateur étoile de Hodge et de la multiplication matricielle par γ_5 ; les exposants $\pm_5$ dénotent les projections de la 2-forme à valeur dans l'algèbre de Clifford associée, sur les valeurs propres correspondantes de $\star_5$. Le fait que l'opérateur étoile de Hodge apparaisse toujours associé à la matrice γ_5 exprime la chiralité du modèle.

Les transformations de supersymétrie locale, de paramètre un spineur pair ϵ, s'écrivent

$$\begin{aligned}
\delta^S(\epsilon)e^a &= \big(\overline{\epsilon}\gamma^a\psi\big) \\
\delta^S(\epsilon)A &= \big(\overline{\epsilon}\psi\big) \\
\delta^S(\epsilon)\psi &= d_{\omega+B}\epsilon - e^a\mathbb{T}_a\epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^S(\epsilon)\omega_{ab} &= e^c\big(\overline{\epsilon}[\gamma_{[a}\hat{\rho}_{b]c} - \tfrac{1}{2}\gamma_c\hat{\rho}_{ab}]\big) + 2\big(\overline{\epsilon}\,\mathbb{R}_{ab}\psi\big) \\
\delta^S(\epsilon)B^i &= \tfrac{1}{2}e^a\big(\overline{\epsilon}\tau^i[\gamma_a\chi + \gamma_5\gamma^b \star \hat{\rho}_{ab}]\big) + \big(\overline{\epsilon}\,\mathbb{G}^i\psi\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta^S(\epsilon)t_{ab} &= \big(\bar\epsilon\gamma_{ab}[\chi+\not{\rho}]\big) - \big(\bar\epsilon\hat\rho^{+_5}_{ab}\big)\\
\delta^S(\epsilon)S^i &= \tfrac12\big(\bar\epsilon\tau^i[\chi+\not{\rho}]\big)\\
\delta^S(\epsilon)\overset{\star}{V}_a &= -\big(\bar\epsilon\gamma_5\gamma_a[\chi+\not{\rho}]\big) + \tfrac12\big(\bar\epsilon\gamma^b\star\hat\rho_{ab}\big)\\
\\
\delta^S(\epsilon)u &= \big(\bar\epsilon\tau^i\lambda\big)\tau_i u\\
\delta^S(\epsilon)\lambda &= \tfrac12\big[M+\gamma_5\overset{\star}{M}+\not{V}\big]\epsilon - \tfrac12\big[u\hat{\not{D}}u^{-1}+\not{t}+2S-\gamma_5\overset{\star}{\not{V}}\big]\epsilon + \big[\big(\bar\epsilon\lambda\big)+\big(\bar\epsilon\tau^i\lambda\big)\tau_i\big]\lambda\\
\\
\delta^S(\epsilon)M &= \big(\bar\epsilon\big[\hat{\not{D}}\lambda-\tfrac12\chi+\mathbb{N}\lambda\big]\big)\\
\delta^S(\epsilon)\overset{\star}{M} &= -\big(\bar\epsilon\gamma_5\big[\hat{\not{D}}\lambda-\tfrac12\chi+\mathbb{N}\lambda\big]\big)\\
\delta^S(\epsilon)V_a &= -\big(\bar\epsilon\gamma_a\big[\hat{\not{D}}\lambda-\tfrac12\chi+\mathbb{N}\lambda\big]\big) + \big(\bar\epsilon\hat D_a\lambda\big) + \big(\bar\lambda\ \mathbb{T}_a\epsilon\big)
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta^S(\epsilon)\chi = {} & \hat{\not{G}}\epsilon - \hat{\not{D}}\big[\not{t}+2S-\gamma_5\overset{\star}{\not{V}}\big]\epsilon + [\hat D_aV^a+\hat D_au\hat D^au^{-1}]\epsilon\\
& -2\big(\bar\lambda\big[\hat{\not{D}}\lambda-\chi-\tfrac12\not{\rho}+\mathbb{N}\lambda\big]\big)\epsilon + \big[M^2-\overset{\star}{M}{}^2-V_aV^a+\overset{\star}{V}_a\overset{\star}{V}{}^a-8S^iS_i\big]\epsilon\\
& +\big[\not{t}(\hat{\not{F}}-\not{t})-2(\hat F-t)^{ab}\star_5 t_{ab}-2\big(\hat{\not{F}}+\not{t}-2\gamma_5\overset{\star}{\not{V}}\big)S+2\big(\hat{\not{F}}-\not{t}\big)\gamma_5\overset{\star}{\not{V}}\big]\epsilon
\end{aligned}
$$

où D_a est la dérivée covariante par rapport aux transformations de Lorentz locales ainsi que par rapport aux transformations de jauge associées aux groupes $U(1)$ et $SU(2)$. L'addition d'un accent circonflexe signifie que la dérivée ou la courbure considérée est de plus supercovariantisée, c'est à dire qu'on a ajouté un terme dépendant des gravitinos de manière à ce que la variation de l'objet ainsi obtenu sous l'action de la supersymétrie locale ne fasse pas intervenir les dérivées du paramètre de supersymétrie. Les gravitinos sont les champs de jauge associés à la supersymétrie locale. La différentielle supercovariantisée d'un champ s'écrit

$$\hat d_{\omega+A+B} \equiv d_{\omega+A+B} + \delta^S(\psi) \tag{4.23}$$

et les courbures supercovariantisées sont

$$
\begin{aligned}
\hat T &\equiv d_\omega e^a + \tfrac12\big(\bar\psi\gamma^a\psi\big)\\
\hat F &\equiv dA + \tfrac12\big(\bar\psi\psi\big)\\
\hat\rho &\equiv d_{\omega+B}\psi - e^a\mathbb{T}_a\psi\\
\\
\hat R_{ab} &\equiv d_\omega\omega_{ab} + e^c\big(\bar\psi[\gamma_{[a}\hat\rho_{b]c}-\tfrac12\gamma_c\hat\rho_{ab}]\big) + \big(\bar\psi\ \mathbb{R}_{ab}\psi\big)\\
\hat G^i &\equiv d_BB^i + \tfrac12e^a\big(\bar\psi\tau^i[\gamma_a\chi+\gamma_5\gamma^b\star\hat\rho_{ab}]\big) + \tfrac12\big(\bar\psi\ \mathbb{G}^i\psi\big)
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

On a en outre défini la fonction des champs à valeur dans l'algèbre de Clifford

$$\mathbb{N} \equiv u\hat{\not{D}}u^{-1} + \hat{\not{F}} - \not{t} + \tfrac{1}{2}\gamma_5\overset{\star}{\not{V}} + M - \gamma_5\overset{\star}{M} - \not{V} \tag{4.25}$$

afin d'alléger les notations.

On peut vérifier la cohérence de l'algèbre de supersymétrie locale ainsi définie

$$\delta^S(\epsilon)^2 = \hat{\mathscr{L}}_{\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}\gamma\epsilon)} - \delta^L(\bar{\epsilon}\mathbb{R}\epsilon) - \delta^{U(1)}(\tfrac{1}{2}\bar{\epsilon}\epsilon) - \delta^{SU(2)}(\tfrac{1}{2}\bar{\epsilon}\mathbb{G}\epsilon) \tag{4.26}$$

où $\hat{\mathscr{L}}_{\frac{1}{2}(\bar{\epsilon}\gamma\epsilon)}$ est la dérivée de Lie covariante par rapport à toutes les symétries locales de la théorie, y compris la supersymétrie. On donnera seulement ici quelque étapes intermédiaires.

$$\begin{aligned}
\delta^S(\epsilon)\hat{F}_{ab} &= -\big(\bar{\epsilon}\hat{\rho}_{ab}\big)\\
\delta^S(\epsilon)\hat{\rho}_{ab} &= -\big(\tfrac{1}{2}\hat{R}_{ab}{}^{cd}\gamma_{cd} + \hat{G}_{ab} - 2\hat{D}_{[a}\mathbb{T}_{b]} + [\mathbb{T}_a,\mathbb{T}_b]\big)\epsilon\\
\delta^S(\epsilon)u\hat{D}_a u^{-1} &= \big(\bar{\epsilon}\tau^i\lambda\big)[\tau_i, u\hat{D}_a u^{-1}] - \big(\bar{\epsilon}\tau^i\hat{D}_a\lambda\big)\tau_i + \big(\overline{\lambda}\tau^i\mathbb{T}_a\epsilon\big)\tau_i + \tfrac{1}{2}\big(\bar{\epsilon}\tau^i[\gamma_a\chi + \gamma_5\gamma^b \star \hat{\rho}_{ab}]\big)\tau_i\\
\delta^S(\epsilon)\hat{D}_a\lambda &= \hat{D}_a\delta^S(\epsilon)\lambda - \delta^S(\hat{D}_a\epsilon)\lambda - \tfrac{1}{2}\big(\bar{\epsilon}[\gamma_b\hat{\rho}_{ca} - \tfrac{1}{2}\gamma_a\hat{\rho}_{bc}]\big)\gamma^{bc}\lambda - \tfrac{1}{2}\big(\bar{\epsilon}\tau^i[\gamma_a + \gamma_5\gamma^b \star \hat{\rho}_{ab}]\big)\tau_i\lambda\\
\delta^S(\epsilon)\big(\hat{\not{D}}\lambda - \tfrac{1}{2}\chi + \mathbb{N}\lambda\big) &= \tfrac{1}{2}\hat{\not{D}}[M + \gamma_5\overset{\star}{M} + \not{V}]\epsilon - \tfrac{1}{2}\hat{D}_a\big(V^a + u\hat{D}^a u^{-1}\big)\epsilon\\
&\quad + \big(\overline{\lambda}\tau^i[\hat{\not{D}}\lambda - \chi - \tfrac{1}{2}\not{\partial}]\big)\tau_i\epsilon + \tfrac{1}{2}\big(\overline{\lambda}\hat{\rho}_{ab}\big)\gamma^{ab}\epsilon\\
&\quad + M\big(\hat{\not{F}} + S\big)\epsilon - \gamma_5\overset{\star}{M}\big(\not{t} + S\big)\epsilon + V^a u\hat{D}_a u^{-1}\epsilon
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Si nous avons écrit les tétrades et la connexion de spin comme des champs indépendants, l'algèbre n'est en fait cohérente que modulo la nullité de la torsion supercovariantisée qui détermine la connexion de spin en fonction des tétrades et des gravitinos.

L'invariance par rapport aux difféomorphismes, à l'ensemble des symétries de jauge et de Lorentz local, ainsi que par rapport à la supersymétrie locale, détermine une extension unique de l'action d'Einstein–Hilbert, qui prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
&\int_M \bigg(\frac{1}{8}\varepsilon_{abcd}\, e^a_{\wedge} e^b_{\wedge} R^{cd} + \frac{1}{2}\big(\overline{\psi}_{\wedge}\gamma_5 e^a\gamma_{a\wedge}\rho\big) + \frac{1}{2}\hat{F}_{\wedge}\star\hat{F} + \frac{1}{4}\big(\overline{\psi}_{\wedge}\gamma_5\psi\big)_{\wedge}\big(F + \hat{F}\big)\\
&\quad + \frac{1}{2}\big(\overline{\psi}_{\wedge}\gamma_5 e^a\gamma_{a\wedge} u d_B u^{-1}{}_{\wedge}\psi\big) + e^a_{\wedge}e^b_{\wedge}\Big(\big(\overline{\psi}\gamma_5\gamma_{ab}\lambda\big)_{\wedge}\big(\overline{\lambda}\psi\big) - \big(\overline{\psi}\tau^i\gamma_5\gamma_{ab}\lambda\big)_{\wedge}\big(\overline{\lambda}\tau_i\psi\big)\Big)\bigg)\\
&+ \int_M e\, d^4x\, \bigg(\Big(M^2 - \overset{\star}{M}{}^2 - V_a V^a + \operatorname{Tr}\, \hat{D}_a u\hat{D}^a u^{-1} - \tfrac{1}{2}t_{ab}t^{ab} - 2S^i S_i - \tfrac{1}{2}\overset{\star}{V}_a \overset{\star}{V}{}^a\Big)\\
&\qquad - 2\Big(\overline{\lambda}[\not{D}\lambda - \chi + \mathbb{N}\lambda + \gamma^a(u\hat{\not{D}}u^{-1} + \not{t} + 2S - \gamma_5\overset{\star}{\not{V}})\psi_a - (V^a + u\hat{D}^a u^{-1})\psi_a]\Big)\bigg)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Si cette action est bien invariante par rapport à la supersymétrie locale, ce résultat n'est pas trivial et il est très difficile de déterminer l'action la plus générale à tous les ordres dans ce formalisme. Le formalisme de super-espace harmonique permet de résoudre partiellement ce problème, mais sa grande complexité obscurcit profondément la théorie.

La quantification de la théorie via une formulation intégrale fonctionnelle nécessite de considérer la fixation de jauge des symétries locales de la théorie. Il est difficile d'interpréter cette fixation de jauge géométriquement comme dans le cas des théories de Yang–Mills. Tout d'abord parce que le groupe des difféomorphismes n'est pas un groupe de Lie de dimension infinie, dans le sens où il n'est pas localement difféomorphe à l'algèbre de Lie correspondante des champs de vecteurs sur la variété [38]. L'algèbre de supersymétrie locale ne correspond quand à elle même pas à un groupe de dimension infinie bien défini. On peut néanmoins définir un opérateur BRST qui tient compte de toutes ces symétries de jauge. Il est nécessaire d'introduire un fantôme associé à chaque invariance de jauge de la théorie. On définit ainsi le fantôme des difféomorphismes comme un champ de vecteur impair ξ, celui associé aux transformations de Lorentz locales comme un tenseur antisymétrique Ω_{ab}, deux fantômes de Faddeev–Popov c et C respectivement associés aux symétries de jauge $U(1)$ et $SU(2)$, ainsi qu'un spineur de $SU(2)$-Majorana pair ϵ pour la supersymétrie locale. On peut obtenir de manière canonique les transformations BRST des champs à partir d'une condition d'horizontalité sur les courbures supercovariantisées. On définit pour ce faire les connexions étendues comme les sommes formelles des connexions et de leurs fantômes associés. Les tétrades étendues sont quand à elles définies comme $e^{i_\xi} e^a = e^a + i_\xi e^a$ [60]. Les conditions d'horizontalité s'écrivent comme suit

$$\begin{aligned}(d+s)_{\omega+\Omega}\, e^{i_\xi} e^a + \tfrac{1}{2}\big(\overline{[\psi+\epsilon]}\gamma^a[\psi+\epsilon]\big) &= e^{i_\xi}\hat{T}\\ (d+s)\big(A+c\big) + \tfrac{1}{2}\big(\overline{[\psi+\epsilon]}[\psi+\epsilon]\big) &= e^{i_\xi}\hat{F}\\ (d+s)_{\omega+\Omega+B+C}\big(\psi+\epsilon\big) - e^{i_\xi} e^a \mathbb{T}_a\big(\psi+\epsilon\big) &= e^{i_\xi}\hat{\rho}\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}(d+s)_{\omega+\Omega}\big(\omega_{ab}+\Omega\big) + e^{i_\xi}\; e^c\big(\overline{[\psi+\epsilon]}[\gamma_{[a}\hat{\rho}_{b]c} - \tfrac{1}{2}\gamma_c\hat{\rho}_{ab}]\big) + \big(\overline{[\psi+\epsilon]}\,\mathbb{R}_{ab}[\psi+\epsilon]\big) &= e^{i_\xi}\hat{R}_{ab}\\ d_{B+C}\big(B^i+C^i\big) + \tfrac{1}{2}e^{i_\xi}e^a\big(\overline{[\psi+\epsilon]}\tau^i[\gamma_a\chi + \gamma_5\gamma^b \star \hat{\rho}_{ab}]\big) + \tfrac{1}{2}\big(\overline{[\psi+\epsilon]}\,\mathbb{G}^i[\psi+\epsilon]\big) &= e^{i_\xi}\hat{G}^i\end{aligned}$$

On peut cependant simplifier la représentation de l'opérateur BRST en redéfinissant la différentielle étendue $d+s$ de manière à absorber les exponentielles de la contraction par rapport au fantômes ξ [60]. Afin de déterminer ces transformations sur une géométrie topologiquement non triviale, on définit les équations d'horizontalité sur le fibré principal de groupe de structure $SO(4)\times U(1)\times SU(2)$ sur la variété. Le vecteur ξ est quand à lui défini comme le relèvement horizontal du vecteur correspondant sur M, par rapport à une connexion de fond $\mathring{\omega} + \mathring{A}$ sur ce fibré (annexe A.1). Il devient ensuite naturel de redéfinir les fantômes comme suit

$$\begin{aligned} &\Omega - i_\xi(\omega - \mathring{\omega}) \to \Omega && \epsilon - i_\xi\psi \to \epsilon \\ &c - i_\xi(A - \mathring{A}) \to c && C - i_\xi B \to C \end{aligned} \tag{4.30}$$

La nouvelle différentielle étendue est quand à elle

$$e^{-i_{\xi^h}}(d+s)e^{i_{\xi^h}} = d + s - \mathcal{L}_{\xi^h} - i_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)^h} + i_{r^v} \tag{4.31}$$

où r est l'élément $\frac{1}{2}{i_\xi}^2\big(\mathring{R} + \mathring{F}\big)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(4)\oplus\mathfrak{u}(1)$ qui apparaît via la formule (1.14). Les transformations BRST des champs physiques sont ainsi définies comme

$$s = \mathring{\mathscr{L}}_\xi - \delta^L(\Omega) - \delta^{U(1)}(c) - \delta^{SU(2)}(C) - \delta^S(\epsilon) \tag{4.32}$$

et celles des fantômes

$$\begin{aligned} s\xi &= \tfrac{1}{2}\{\xi,\xi\} - \tfrac{1}{2}\big(\bar\epsilon\gamma\epsilon\big) \\ s\Omega &= \mathring{\mathscr{L}}_\xi\Omega - \Omega^2 - \big(\bar\epsilon\,\mathbb{R}\epsilon\big) + i_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}(\omega - \mathring{\omega}) - \tfrac{1}{2}{i_\xi}^2\mathring{R} \\ sc &= \mathring{\mathscr{L}}_\xi c - \tfrac{1}{2}\big(\bar\epsilon\epsilon\big) + i_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}(A - \mathring{A}) - \tfrac{1}{2}{i_\xi}^2\mathring{F} \\ sC &= \mathring{\mathscr{L}}_\xi C - C^2 - \tfrac{1}{2}\big(\bar\epsilon\,\mathbb{G}\epsilon\big) + i_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}B \\ s\epsilon &= \mathring{\mathscr{L}}_\xi\epsilon - \tfrac{1}{2}\not{\Omega}\epsilon - C\epsilon + i_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}\psi \end{aligned} \tag{4.33}$$

Les identités de Bianchi associées aux courbures supercovariantisées étendues permettent de déterminer la transformation BRST des courbures supercovariantisées. On a entre autre

$$(d + s - \mathring{\mathscr{L}}_\xi - i_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)})\hat{F} = \big(\overline{(\psi+\epsilon)}\hat\rho\big) - i_{\frac{1}{2}\left(\overline{(\psi+\epsilon)}\gamma(\psi+\epsilon)\right)}\hat{F} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} &\big(d + s - \mathring{\mathscr{L}}_\xi - i_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)} + \tfrac{1}{2}(\not{\omega} + \not{\Omega}) + B + C\big)\hat\rho \\ &\qquad = \big[\tfrac{1}{2}\hat{\not{R}} + \hat{G} - \widehat{d_{\omega+B}}\mathbb{T} + \mathbb{T}^2\big]\big(\psi + \epsilon\big) + \mathbb{T}\hat\rho - i_{\frac{1}{2}\left(\overline{(\psi+\epsilon)}\gamma(\psi+\epsilon)\right)}\hat\rho \end{aligned}$$

où $\mathbb{T}$ est la 1-forme à valeur dans l'algèbre de Clifford $e^a\mathbb{T}_a$. La formulation ordinaire de la supergravité sans symétrie locale $SU(2)$ est obtenue en fixant de jauge la section u à l'unité. Cette contrainte brise la supersymétrie locale et l'invariance de jauge $SU(2)$ à un sous ensemble de transformations qui laissent le champ u invariant

$$\big(\delta^S(\epsilon) - \delta^{SU(2)}(\bar\epsilon\tau\lambda)\big)u = 0 \tag{4.35}$$

et qui vérifient l'algèbre

$$\begin{aligned}\big(\delta^{\mathcal{S}}(\epsilon) - \delta^{SU(2)}(\bar\epsilon\tau\lambda)\big)^2 = \\ \mathcal{L}_{\frac{1}{2}\bar\epsilon\gamma\epsilon} - \delta^L(\bar\epsilon\mathbb{R}\epsilon - i_{\frac{1}{2}\bar\epsilon\gamma\epsilon}\omega) - \delta^{U(1)}(\tfrac{1}{2}\bar\epsilon\epsilon - i_{\frac{1}{2}\bar\epsilon\gamma\epsilon}A) \\ + \big(\delta^{\mathcal{S}}(i_{\frac{1}{2}\bar\epsilon\gamma\epsilon}\psi) - \delta^{SU(2)}(i_{\frac{1}{2}\bar\epsilon\gamma\epsilon}\bar\psi\tau\lambda)\big) + \delta^{SU(2)}(i_{\frac{1}{2}\bar\epsilon\gamma\epsilon}udu^{-1})\end{aligned} \tag{4.36}$$

Les transformations de supersymétrie locale dans cette jauge sont alors données par

$$\delta'^{\mathcal{S}}(\epsilon) \equiv \big(\delta^{\mathcal{S}}(\epsilon) - \delta^{SU(2)}(\bar\epsilon\tau\lambda)\big) \tag{4.37}$$

et vérifient l'algèbre de supersymétrie ordinaire [58]

$$\delta'^{\mathcal{S}}(\epsilon)^2 = \hat{\mathscr{L}}'_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)} - \delta^L(\bar\epsilon\mathbb{R}\epsilon) - \delta^{U(1)}(\tfrac{1}{2}\bar\epsilon\epsilon) \tag{4.38}$$

où la différentielle $\hat{\mathscr{L}}'_{\frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}$ dénote la dérivée de Lie covariante par rapport à Lorentz local et l'invariance de jauge $U(1)$, supercovariantisée par rapport à la supersymétrie locale $\delta'^{\mathcal{S}}$. On note que la 1-forme B est alors un champ de vecteur ordinaire, et n'apparaît dans l'action qu'à travers le terme $-B_aB^a$. L'invariance globale $SU(2)$ reste néanmoins une symétrie de la théorie.

4.2.2 L'opération de torsion en espace courbe

Afin de définir une opération de torsion on va laisser la section u libre. Nous avons défini jusqu'ici la connexion de spin de telle sorte que la torsion supercovariantisée soit nulle. Dans le cadre de la théorie tordue, il est préférable de considérer la solution de torsion nulle. La connexion de spin de la section précédente s'écrira dorénavant $\omega + \Delta\omega$ où $\Delta\omega$ constitue la composante quadratique dans les gravitinos. L'opération de torsion définie dans [55] ne s'applique que dans le cas de configurations classiques où la connexion de spin est autoduale $\omega_{ab^-} = 0$. L'introduction de la section u permet d'étendre cette définition au secteur topologique des géométries dont la composante anti-autoduale du fibré des repères est triviale ($\mathring{\omega}_{ab^-} = 0$)

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_M R^{ab^-}{}_\wedge R_{ab^-} = 0 \tag{4.39}$$

Ce secteur de l'espace des orbites sous difféomorphisme des métriques n'est pas connecté aux autres. Ainsi la composante anti-autoduale de la connexion de spin définit une connexion sur le fibré principal trivial $SU(2)$, et on peut définir la différentielle covariante tordue comme

$$d_\omega \equiv d + \delta^L(\omega) + \delta^{SU(2)}(\omega^-) \tag{4.40}$$

qui annule un spineur ζ. Ce spineur constant va permettre de définir l'opération de torsion. On lui attribue un nombre d'ombres 1. Les spineurs de $SU(2)$-Majorana se décomposent selon ce spineur dans des représentations irréductibles du groupe des rotations tordues.

$$\begin{gathered}\psi \to \psi,\ \psi_{ab^-},\ \psi^a \\ \lambda \to \lambda,\ \lambda_{ab^-},\ \lambda^a \qquad \chi \to \chi,\ \chi_{ab^-},\ \chi^a\end{gathered} \tag{4.41}$$

On inclut dans ces redéfinitions des facteurs $\frac{1}{(\bar\zeta\zeta)}$ de telle sorte que ψ^a, λ, λ_{ab} et χ^a soient de nombre d'ombres 1 et toutes les autres composantes de nombre d'ombres -1. On redéfinit également les champs à valeurs dans $\mathfrak{su}(2)$ en fonction de représentations irréductibles du groupe des rotations tordues comme suit

$$udu^{-1} \to \varsigma_{ab^-} \qquad B - udu^{-1} \to B_{ab^-} \qquad S \to S_{ab^-} \tag{4.42}$$

On note que contrairement à B, B_{ab} est une 1-forme tensorielle. La courbure supercovariantisée en fonction des variables tordues du graviphoton renormalisé $\frac{1}{(\bar\zeta\zeta)}A \to A$ fait intervenir explicitement $(\bar\zeta\zeta)$,

$$\frac{1}{(\bar\zeta\zeta)}\hat F = dA + \frac{1}{2}\big(\psi\psi + \psi^{ab}\psi_{ab}\big) \ + \frac{1}{2(\bar\zeta\zeta)^2}\psi_a\psi^a \tag{4.43}$$

ce qui est à la l'origine de la brisure du nombre de fantômes modulo 4 discutée en [55]. On définit la charge scalaire $\delta \equiv \delta^S(\zeta)$, dont le carré donne une rotation locale tordue de paramètre $-\phi$, avec

$$\phi_{ab} \equiv (\bar\zeta\zeta)\big(-\hat F^+ + \star t + S\big)_{ab} \tag{4.44}$$

auquel on ajoute la définition

$$\bar\phi_{ab} \equiv -\frac{1}{2(\bar\zeta\zeta)}\big(\hat F^+ + \star t - S\big)_{ab} \tag{4.45}$$

L'action de δ sur les quelques champs suivants

$$\begin{aligned}
&\delta e^a = \psi^a && \delta A = \psi \\
&\delta\psi^a = -\phi^a{}_b e^b && \delta\psi = 0 \\
&\delta\phi_{ab} = 0 && \\
&\delta\psi_{ab} = \tfrac{1}{2}(\omega^- - \varsigma + \Delta\omega^- - B)_{ab} - e_{[a}\overset{\star}{V}_{b]^-} && \\
&\delta\bar\phi_{ab} = \chi_{ab} - (\hat\rho)^+_{ab} &&
\end{aligned} \tag{4.46}$$

suggère une interprétation de cette différentielle comme la différentielle équivariante par rapport aux rotations locales d'un modèle de Cartan. C'est en fait la version définie modulo les équations du mouvement de cet opérateur qui est interprétée comme la différentielle de Cartan de la gravité topologique dans [56]. Ici $(\hat{\rho})^+_{ab}$ est la projection de la courbure supercovariantisée des gravitinos, $\hat{\rho}$, sur le spineur constant ζ et sur sa composante autoduale de l'espace tangent à l'aide des tétrades. Les tétrades définissent les coordonnées sur l'espace considéré dans le modèle de Cartan, ψ^a leurs fantômes topologiques et ϕ le fantôme de fantôme topologique associé au groupe des rotations locales tordues. Les champs ψ_{ab} et B_{ab} définissent respectivement l'antifantôme topologique et le multiplicateur de Lagrange associés à la contrainte autoduale. Les champs A, ψ, $\bar{\phi}_{ab}$ et χ_{ab} constituent quand à eux des doublets triviaux, dont l'interprétation nécessite la considération du groupe d'invariance complet incluant les difféomorphismes et les transformations de jauge abéliennes.

Il manque clairement la génération d'une dérivée de Lie selon un champ de vecteur φ pour pouvoir interpréter cette opérateur comme la différentielle d'un modèle de Cartan pour le groupe produit des groupes des rotations locales et des difféomorphismes. On peut néanmoins écrire l'action invariante (4.28) dans sa forme tordue comme un terme δ-exact. Nous n'allons pas écrire ici l'action tordue étant donné que celle-ci est relativement compliquée et que son interprétation est encore très incomplète. Mais nous allons en revanche discuter la réécriture de l'action d'Einstein–Hilbert proposée dans [55] dans une forme invariante sous rotation locale tordue. Si la composante anti-autoduale de la connexion de spin n'est pas une forme tensorielle, c'est le cas en revanche de $\omega^- - \varsigma$, en tant que différence de deux connexions sur un fibré principal $SU(2)$ trivial. De plus ς définit une forme de Maurer–Cartan et est par conséquent de courbure nulle. On en déduit que l'action d'Einstein–Hilbert peut se réécrire, modulo l'équation de torsion nulle

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}\int_M \varepsilon_{abcd}\, e^a_{\wedge} e^b_{\wedge} R^{cd} &= -\frac{1}{2}\int_M R^-_{ab\,\wedge} e^a_{\wedge} e^b \\ &= \frac{1}{2}\int_M (\omega^- - \varsigma)^a{}_{b\,\wedge} e^b_{\wedge} (\omega^- - \varsigma)_{ac\,\wedge} e^c \;-\; \frac{1}{2}\int_{\partial M} (\omega^- - \varsigma)_{ab\,\wedge} e^a_{\wedge} e^b \end{aligned} \tag{4.47}$$

Dans le cas compact, le second terme disparaît trivialement. Ceci définit bien la contrainte souhaitée dans le cadre d'une théorie topologique, c'est à dire qu'on impose que la courbure soit autoduale et pas nécessairement que la connexion associée le soit. L'action invariante s'écrit alors comme la somme du terme de bord ci-dessus et d'un terme δ-exact, dont l'antécédent est la fonctionnelle suivante

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi} = \int_M \Bigg(& \psi_{ac\,\wedge} e^c_{\wedge} (\omega^- - \varsigma - B)^a{}_{b\,\wedge} e^c - e^a_{\wedge} \psi_{a\,\wedge} dA \\ & + \frac{1}{4(\bar{\zeta}\zeta)} e^c_{\wedge} \psi_{c\,\wedge} (\hat{F}^+ - 3 \star t - 2t + 3S)_{ab}\, e^a_{\wedge} e^b - \psi_{ab\,\wedge} e^a_{\wedge}\ e^b_{\wedge} \overset{\star}{V}_c e^c \\ - \frac{1}{4(\bar{\zeta}\zeta)^2} e^a_{\wedge}\ \psi_{a\,\wedge} \psi^b_{\wedge} \psi_b & - \frac{1}{2} e^a_{\wedge}\ \psi_{a\,\wedge} \psi_{\,\wedge} \psi - \psi_{ab\,\wedge} e^b_{\wedge} \psi_{\,\wedge} \psi^a + \frac{1}{4!} \chi\, \varepsilon_{abcd} e^b_{\wedge} e^b_{\wedge} e^c_{\wedge} e^d \Bigg) \end{aligned} \tag{4.48}$$

Afin d'obtenir une formulation de la gravité topologique il est en fait nécessaire d'introduire la fixation de jauge de la supersymétrie locale [55]. Les fantômes et les antifantômes correspondants ainsi que le fantôme de référence doivent être inclus dans le modèle de Cartan de la théorie. Il semble évident qu'il en est de même pour le fantôme C et les antifantômes associés à la fixation de jauge de la symétrie $SU(2)$. Nous avons vérifié qu'une fixation de jauge déterminant la section u en fonction des tétrades, qui préserve l'invariance par rapport aux rotations locales tordues, brise nécessairement l'invariance par rapport aux difféomorphismes. On en déduit que la fixation de jauge de la section u doit être fondamentalement différente de la fixation de jauge définie par B. de Wit pour reproduire la théorie de la supergravité seulement invariante sous l'action globale d'un groupe $SU(2)$. Une fixation de jauge vérifiant les exigences nécessaires à la bonne définition d'une opération de torsion est donnée par

$$d_\omega \star \big(\omega^- - \varsigma\big) \approx 0 \tag{4.49}$$

Elle implique l'introduction d'un antifantôme et d'un multiplicateur de Lagrange définis comme des tenseurs antisymétriques anti-autoduaux.

A partir d'un unique opérateur BRST s, et d'une action somme d'une composante invariante par s et de plusieurs composantes s-exactes définissant les fixations de jauge, dont celles de la supersymétrie locale et de la symétrie $SU(2)$ sont en particulier choisies invariantes par difféomorphisme, par le groupe des rotations tordues et par l'invariance de jauge $U(1)$,

$$S + s\, \boldsymbol{\Psi}^{\scriptscriptstyle Susy+SU(2)}[\epsilon, C] + s\, \boldsymbol{\Psi}^{\text{Diff}+SO(4)+U(1)}[\epsilon, C, \xi, \Omega, c] \tag{4.50}$$

l'opération de torsion complète doit définir deux opérateurs BRST, le premier $\mathscr{s}$ définissant l'opérateur BRST associé à l'invariance par rapport aux difféomorphismes, au groupe des rotations tordues et à l'invariance de jauge $U(1)$, le second Q définissant l'opérateur BRST topologique de la gravité, de telle sorte que l'action tordue s'écrive comme la somme d'un terme Q-exact et $\mathscr{s}$ invariant et d'une fixation de jauge $\mathscr{s}$ et Q-exacte. Afin de prendre en compte la torsion du groupe des rotations, on redéfinit $C \to C + \Omega^-$. On voudrait définir la différentielle de Cartan comme la composante de $-s$ une fois les fantômes ξ, Ω et c, associés aux difféomorphismes, aux rotations locales tordues et aux transformations de jauge $U(1)$, fixés à zéro. En comparant les transformations de supersymétrie et la définition de l'opérateur BRST topologique pour la gravité [55], on déduit que les gravitinos doivent êtres décomposés comme suit

$$\psi = \frac{1}{(\bar\epsilon\gamma_5\epsilon)}\Big(-(\bar\epsilon\gamma^a\psi)\gamma_5\gamma_a\epsilon + (\bar\epsilon\psi)\gamma_5\epsilon + (\bar\epsilon\gamma_5\tau^i\psi)\tau_i\epsilon\Big) \tag{4.51}$$

avec ϵ suffisamment proche de ζ pour que $(\bar\epsilon\gamma_5\epsilon)$ soit strictement positif. On définit ainsi les champs tordus associés comme

$$\Psi^a \equiv (\bar\epsilon\gamma^a\psi) \qquad \Psi \equiv \frac{1}{(\bar\epsilon\gamma_5\epsilon)}(\bar\epsilon\psi) \qquad \bar\Psi_{ab^-} \equiv \frac{1}{(\bar\epsilon\gamma_5\epsilon)}(\bar\epsilon\gamma_5\tau_{ab^-}\psi) \tag{4.52}$$

dont l'ordre zéro dans la perturbation de ϵ autour de ζ ($\epsilon = \zeta$) coïncide avec ψ^a, ψ et ψ_{ab^-}. Les fantômes de fantômes topologiques sont quand à eux définis comme

$$\begin{gathered}\varphi^\mu \equiv \tfrac{1}{2}e^\mu_a\,(\bar\epsilon\gamma^a\epsilon) \qquad \Phi \equiv \tfrac{1}{2}(\bar\epsilon\epsilon)\\ \Phi_{ab} \equiv \big(\bar\epsilon[-\hat F^{+_5}_{ab} + \star_5 t_{ab} \; - 2S\gamma_{ab} + \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\gamma^c \overset{\star d}{V}\;]\epsilon\big)\end{gathered} \tag{4.53}$$

qui donnent bien 0, 0 et ϕ_{ab} à l'ordre zéro.

Il n'est cependant pas trivial d'obtenir l'action fixée de jauge pour la supersymétrie locale et l'invariance de jauge $SU(2)$, invariante sous les difféomorphismes, les rotations locales tordues et les transformations de jauge $U(1)$, sous la forme de la Q variation d'un fermion de jauge également invariant par rapport à ces dernières symétries. Il est en outre possible qu'il soit nécessaire d'introduire pour ce faire d'autres composantes de l'action, contenant éventuellement d'autres champs, associées aux jacobiens des changements de variable hautement non linéaires associés à la procédure de torsion. On voudrait cependant trouver une fixation de jauge pour laquelle on pourrait démontrer que ces jacobiens se compensent ; et pour laquelle le champ fantôme ϵ développerait spontanément une valeur moyenne dans le vide brisant la conservation du nombre de fantômes modulo quatre

$$\big\langle\, (\bar\epsilon\gamma_5\epsilon)^2 \,\big\rangle = (\overline{\zeta}\zeta)^2 \tag{4.54}$$

de manière à justifier le développement de ϵ autour de ζ.

4.3 Invariance superconforme

L'annulation de la fonction β dans la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique implique que l'anomalie de trace est identiquement nulle à tous les ordres de la théorie des perturbations. Cette propriété remarquable de la théorie a inspiré la conjecture de l'invariance superconforme de la théorie par rapport à l'action des générateurs de l'algèbre $\mathfrak{psu}(2,2|4)$. Cette conjecture est au cœur de la correspondance AdS/CFT, et a aujourd'hui été confirmée par un grand nombre de calculs explicites sur des fonctions de corrélation d'opérateurs composites de la théorie. Nous proposons ici une démonstration de l'annulation de la fonction β, ainsi qu'une extension du formalisme des ombres qui inclut l'invariance superconforme.

4.3.1 Annulation de la fonction β

La preuve de l'annulation de la fonction β de la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique proposée dans [A.5] est obtenue dans la formulation tordue de la théorie en fonction de champs réels. Contrairement aux fermions de Majorana, les fermions de $SU(2)$ et de $SL(2,\mathbb{H})$-Majorana peuvent être définis dans un espace euclidien. Cependant, les représentations de supersymétrie étendue $\mathcal{N}=2$ et $\mathcal{N}=4$ correspondantes, définies comme des transformations infinitésimales des champs, impliquent alors qu'un des scalaires de la théorie admet un terme cinétique du mauvais signe dans l'action. Il est en fait nécessaire de relaxer la condition d'hermiticité du lagrangien dans les théories supersymétriques, en considérant les fermions dans des représentations complexes non-contraintes. Le bon nombre de degrés de liberté est restauré en ne définissant l'intégrale fonctionnelle que sur ces variables complexes et pas sur leurs conjugués complexes, de la même manière qu'on procéderait pour intégrer sur une courbe du plan complexe sur les coordonnées holomorphes. La bonne définition de ce type d'intégrale fonctionnelle a été établie en [19] par continuation analytique de l'intégrale fonctionnelle dans la théorie minkowskienne. Ainsi les théories de champ supersymétriques $\mathcal{N}=2$ et $\mathcal{N}=4$ dans leur formulation tordue sont définies correctement en considérant les variables fermioniques et les paramètres de supersymétrie comme complexes, ainsi que les champs scalaires Φ et $\bar{\Phi}$ comme conjugués complexes l'un de l'autre.[4] L'algèbre de supersymétrie définit alors des identités de Ward formelles qui ne correspondent pas explicitement à des variations des champs. Malgré ces subtilités, les représentations réelles de supersymétrie étendue des théories euclidiennes, et ainsi leurs formulations tordues, permettent de déterminer correctement les identités de Ward des théories correspondantes ainsi que les contraintes qui en découlent. Il est donc pertinent d'utiliser ces représentations réelles afin d'obtenir des

[4]Comme nous l'avons discuté dans la sous section 2.1.2, l'interprétation géométrique de la théorie tordue nécessite de considérer ces champs comme réel et imaginaire pur, ce qui ne modifie les fonctions de corrélation que par une phase globale dépendant du nombre de fantôme topologique.

propriétés de la théorie par des méthodes algébriques comme dans [A.5]. La formulation de preuves algébriques en fonction des variables tordues a seulement pour effet de simplifier considérablement les calculs et de rendre leurs interprétations géométriques plus accessibles. Afin de convaincre les lecteurs sceptiques, nous allons maintenant réécrire la preuve de l'annulation de la fonction β de la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique dans la formulation non tordue de la théorie définie dans un espace de Minkowski.

On utilise pour ce faire les conventions de [A.6], dans lesquelles les transformations de supersymétrie sont données par (4.2) et l'action fixée de jauge dépendant des sources admet des termes quadratiques dans ces dernières de manière à tenir compte du fait que la représentation de l'algèbre de supersymétrie maximale n'est définie que modulo les équations du mouvement.

L'absence d'anomalie cohérente pour les identités de Slavnov–Taylor respectivement associées à l'invariance de jauge et à la supersymétrie [A.4, A.5] implique que celles-ci ne sont pas affectées par les corrections radiatives quel que soit le schémas de régularisation utilisé. La définition d'un régulateur à la Pauli–Villars faisant intervenir des champs auxiliaires ${}^{M}\!A_\mu$, ${}^{M}\!\lambda$ et ${}^{M}\!\phi^i$ dans les mêmes représentations que les champs physiques, avec respectivement pour terme de masse $\frac{M^2}{2}\,{}^{M}\!A_\mu\,{}^{M}\!A^\mu$, $\frac{iM}{2}\big(\overline{{}^{M}\!\lambda}\,{}^{M}\!\lambda\big)$ et $\frac{M^2}{2}{}^{M}\!\phi^i\,{}^{M}\!\phi_i$, permet de démontrer que la symétrie globale $Spin(3,1)\times SU(4)$ de la théorie n'est pas affectée par les corrections radiatives. La symétrie globale $SU(4)$ n'est donc pas en conflit avec l'invariance de jauge et est préservée quelque soit le régulateur utilisée dans la procédure de renormalisation.

Annulation de la dimension anormale des $\frac{1}{2}$ BPS primaires

On va tout d'abord montrer que la dimension anormale de l'opérateur $\frac{1}{2}$ BPS primaire $\mathrm{Tr}\,(\phi^i\phi^j-\frac{1}{6}\delta^{ij}\phi^k\phi_k)$ est nulle. La dimension canonique et la représentation de $SU(4)$ des opérateurs $\frac{1}{2}$ BPS primaires sont telles que ceux-ci ne peuvent se mélanger à d'autres opérateurs locaux par renormalisation.

On explique dans [A.5] que l'insertion d'un opérateur composite physique peut être obtenue de manière équivalente par l'insertion du même opérateur contracté avec un polynôme du spineur constant paramètre de supersymétrie. La contrainte non linéaire $(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)=0$ n'admet pas de solution non triviale pour un spineur de $SU(4)$-Majorana. En substituant le spineur ϵ^c contracté à la matrice de conjugaison de charge au spineur $\bar\epsilon$, auquel il est égal selon la condition $SU(4)$-Majorana, la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductibles Γ est une fonction analytique du paramètre ϵ. Le prolongement analytique de Γ à des spineurs complexes non contraints est donc défini de telle sorte que celle-ci vérifie ses identités de Ward, bien que les identités de Slavnov–Taylor associées à la supersymétrie soient dans ce cas des identités de Ward formelles qui ne correspondent pas à des variations infinitésimales des champs. On peut ainsi considérer de manière cohérente la théorie en fonction d'un spineur ϵ dans la représentation de $SL(2,\mathbb{H})$-Majorana, solution non triviale de l'équation $(\epsilon^c\gamma^\mu\epsilon) = 0$, qui définit un vecteur complexe de norme nulle de l'espace hexadimensionnel $(\epsilon^c\tau^i\epsilon)$. Les propriétés de transformation de ce vecteur par rapport à l'action de $SU(4)$ impliquent qu'il existe un espace de solution contractible de $(\epsilon^c\gamma^\mu\epsilon) = 0$ pour lequel les vecteurs $(\epsilon^c\tau^i\epsilon)$ engendrent tout l'espace hexadimensionnel. On peut ainsi calculer l'insertion de l'opérateur $\frac{1}{2}$ BPS primaire Tr $(\phi^i\phi^j - \frac{1}{6}\delta^{ij}\phi^k\phi_k)$ en insérant la fonction des champs Tr $(\epsilon^c\phi\epsilon)^2$.

Cette dernière fonction des champs satisfait les équations

$$
\begin{aligned}
Q\mathrm{Tr}\,\Bigl((\epsilon^c\phi\epsilon)c - \frac{1}{3}c^3\Bigr) = \mathrm{Tr}\,(\epsilon^c\phi\epsilon)^2 \qquad & s\,Q\mathrm{Tr}\,\Bigl((\epsilon^c\phi\epsilon)c - \frac{1}{3}c^3\Bigr) = 0 \\
s\,\mathrm{Tr}\,\Bigl((\epsilon^c\phi\epsilon)c - \frac{1}{3}c^3\Bigr) = \mathrm{Tr}\,\Bigl(\mu\bigl((\epsilon^c\phi\epsilon) - c^2\bigr) & - [\Omega,(\epsilon^c\phi\epsilon)]c\Bigr)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

On considère les insertions de ces différents opérateurs locaux en ajoutant à l'action de la théorie, Σ, le terme dépendant de sources

$$
u\mathrm{Tr}\,\Bigl((\epsilon^c\phi\epsilon)c - \frac{1}{3}c^3\Bigr) + u^{(s)}\mathrm{Tr}\,\Bigl(\mu\bigl((\epsilon^c\phi\epsilon) - c^2\bigr) - [\Omega,(\epsilon^c\phi\epsilon)]c\Bigr) + u^{(Q)}\mathrm{Tr}\,(\epsilon^c\phi\epsilon)^2 \tag{4.56}
$$

L'action ainsi obtenue satisfait aux identités de Slavnov–Taylor associées respectivement à l'invariance de jauge et à la supersymétrie, avec s et Q agissant respectivement sur les sources $u^\bullet$ de la manière suivante

$$
\begin{aligned}
s\,u^{(Q)} &= 0 \qquad & Qu^{(Q)} &= u \\
s\,u^{(s)} &= u \qquad & Qu^{(s)} &= 0 \\
s\,u &= 0 \qquad & Qu &= 0
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

On peut facilement se convaincre du fait que l'introduction de ces nouvelles sources n'introduit pas de nouvelles anomalies aux identités de Slavnov–Taylor. Les identités de Slavnov–Taylor et l'invariance par rapport à $SU(4)$ impliquent que ces opérateurs locaux se renormalisent multiplicativement et que les dimensions anormales associées à chacune des sources sont les mêmes.

Dans la jauge de Landau supersymétrique

$$
\begin{aligned}
-\int d^4x\mathrm{Tr}\,\Bigl(b\partial^\mu A_\mu - \bar{c}\partial^\mu\bigl(D_\mu c + i(\epsilon^c\gamma_\mu\lambda)\bigr) \\
+ \bar{\Omega}\partial^\mu D_\mu\Omega - \bar{\mu}\partial^\mu\bigl(D_\mu\mu + [D_\mu\Omega, c] - i(\epsilon^c\gamma_\mu[\Omega,\lambda])\bigr)\Bigr)
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

la génératrice fonctionnelle des diagrammes une particule irréductible vérifie les identités de Ward fantômes [A.5]

$$\begin{gathered}
\int\Big(\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\mu}-\Big[\bar\mu,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta b}\Big]+u^{(s)}\frac{\delta^L\Gamma}{\delta c^{(Q)}}-(-1)^a[\varphi^{(Q_s)}{}_a,\varphi^a]+[\Omega^{(Q_s)},\Omega]+[\mu^{(Q)},c]\Big)=0\\
\int\Big(\frac{\delta^L\Gamma}{\delta c}+\Big[\bar c,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta b}\Big]-\Big[\bar\mu,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\bar\Omega}\Big]+(-1)^a\Big[\varphi^{(Q_s)}{}_a,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\varphi^{(s)}{}_a}\Big]-\Big[\Omega^{(Q_s)},\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\Omega^{(s)}}\Big]\\
+u\frac{\delta^L\Gamma}{\delta c^{(Q)}}+u^{(s)}\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\mu^{(Q)}}+[\varphi^{(Q)}{}_a,\varphi^a]+[\Omega^{(Q)},\Omega]+[c^{(Q)},c]+[\mu^{(Q)},\mu]\Big)=0\\
\int\Big(\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\Omega}-\Big[\bar\Omega,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta b}\Big]+\Big[\bar\mu,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\bar c}\Big]-\Big[c,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\mu}\Big]-(-1)^a\Big[\varphi^{(Q_s)}{}_a,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\varphi^{(Q)}{}_a}\Big]\\
+\Big[\Omega^{(Q_s)},\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\Omega^{(Q)}}\Big]+\Big[\mu^{(Q)},\frac{\delta^L\Gamma}{\delta c^{(Q)}}\Big]+[\varphi^{(s)}{}_a,\varphi^a]+[\Omega^{(s)},\Omega]\Big)=0
\end{gathered}\tag{4.59}$$

Celles-ci impliquent de surcroît que la dimension anormale de ces opérateurs composites est nulle, et ainsi l'annulation de la dimension anormale de l'opérateur $\frac{1}{2}$ BPS primaire Tr $(\phi^i\phi^j-\frac{1}{6}\delta^{ij}\phi^k\phi_k)$.

Annulation de la dimension anormale de l'action

La variation de la densité lagrangienne privée de sa composante BRST-exacte[5]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}=\operatorname{Tr}\Big(&-\frac14F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac12D_\mu\phi^iD^\mu\phi_i+\frac{i}{2}\big(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\big)-\frac12\big(\overline{\lambda}[\phi,\lambda]\big)-\frac14[\phi^i,\phi^j][\phi_i,\phi_j]\\
&+\frac{g^4}{2}\Big(\overline{\lambda}^*\big[\epsilon\bar\epsilon-\frac12(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\gamma_\mu-\frac12(\bar\epsilon\tau_i\epsilon)\tau^i\big]\lambda^*\Big)\Big)
\end{aligned}\tag{4.60}$$

par rapport à l'opérateur linéarisé de Slavnov–Taylor associé à la supersymétrie, $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$, est une dérivée totale, $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathcal{L}+\partial^\mu\mathcal{L}_\mu=0$, avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\mu=\operatorname{Tr}\Big(&\frac{i}{2}F_{\mu\nu}\big(\bar\epsilon\gamma^\nu\lambda\big)+\frac{i}{4}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho}\big(\bar\epsilon\gamma_5\gamma^\nu\lambda\big)-\frac12D_\mu\phi^i\big(\bar\epsilon\tau_i\lambda\big)-D^\nu\phi^i\big(\bar\epsilon\gamma_{\mu\nu}\tau_i\lambda\big)\\
&+\frac{i}{2}[\phi^i,\phi^j]\big(\bar\epsilon\gamma_\mu\tau_{ij}\lambda\big)+\frac{ig^2}{2}\Big(\overline{\lambda}\big[\frac12(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\gamma_\mu+\frac12(\bar\epsilon\tau_i\epsilon)\tau^i-\epsilon\bar\epsilon\big]\lambda^*\Big)\Big)
\end{aligned}\tag{4.61}$$

[5] où $\lambda^*\equiv\lambda^{(Q)}-[\lambda^{(Q_s)},\Omega]$ et $\big(\overline{\lambda}^*M\lambda^*\big)=-\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\big(\overline{\lambda}^*M\lambda^{(Q_s)}\big)$, voir [A.6].

Cette dernière fonction des champs vérifie $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathcal{L}_\mu + \partial^\nu\mathcal{L}_{\mu\nu} = i(\bar\epsilon\gamma_\mu\epsilon)\mathcal{L}$, où

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mu\nu} = \text{Tr }\biggl(&\frac{3}{8}(\bar\epsilon\tau_i\epsilon)\bigl(\overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu}\tau^i\lambda\bigr) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}(\bar\epsilon\gamma_5\tau_i\epsilon)\Bigl(\phi^i F_{\sigma\rho} - \frac{1}{8}\ \bigl(\overline{\lambda}\gamma_{\sigma\rho}\tau^i\lambda\bigr)\Bigr)\\ &- \frac{3}{16}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}(\bar\epsilon\gamma^\sigma\epsilon)\bigl(\overline{\lambda}\gamma_5\gamma^\rho\lambda\bigr) - \varepsilon_{\mu\nu\sigma}{}^\rho(\bar\epsilon\gamma_5\gamma^\sigma\tau_{ij}\epsilon)\Bigl(i\phi^i D_\rho\phi^j + \frac{1}{8}\ \bigl(\overline{\lambda}\gamma_\rho\tau^{ij}\lambda\bigr)\Bigr)\\ &+ 12(\bar\epsilon\gamma_{\mu\nu}\tau_{ijk}\epsilon)\Bigl(\frac{1}{3}\phi^i\phi^j\phi^k - \frac{1}{8}\bigl(\overline{\lambda}\tau^{ijk}\lambda\bigr)\Bigr)\biggr)\end{aligned} \tag{4.62}$$

satisfait lui même $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathcal{L}_{\mu\nu} + \partial^\sigma\mathcal{L}_{\mu\nu\sigma} = -2i(\bar\epsilon\gamma_{[\mu}\epsilon)\mathcal{L}_{\nu]}$, avec

$$\mathcal{L}_{\mu\nu\sigma} = i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\bigl[(\bar\epsilon\gamma_5\tau_i\epsilon)\bar\epsilon\gamma^\rho - (\bar\epsilon\gamma_5\gamma^\rho\tau_{ij}\epsilon)\bar\epsilon\tau^j\bigr]\text{Tr }\bigl(\phi^i\lambda\bigr) \tag{4.63}$$

et

$$\mathcal{L}_{\mu\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}(\bar\epsilon\gamma_5\tau_i\epsilon)(\bar\epsilon\tau_j\epsilon)\text{Tr }\bigl(\phi^i\phi^j\bigr) \tag{4.64}$$

qui vérifient quand à eux

$$\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathcal{L}_{\mu\nu\sigma} + \partial^\rho\mathcal{L}_{\mu\nu\sigma\rho} = 3i(\bar\epsilon\gamma_{[\mu}\epsilon)\mathcal{L}_{\nu\sigma]} \qquad \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathcal{L}_{\mu\nu\sigma\rho} = -4i(\bar\epsilon\gamma_{[\mu}\epsilon)\mathcal{L}_{\nu\sigma\rho]} \tag{4.65}$$

Les duales de Hodge de ces formes fonctions des champs définissent la forme étendue

$$\tilde{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L}^0_4 + \mathcal{L}^1_3 + \mathcal{L}^2_2 + \mathcal{L}^3_1 + \mathcal{L}^4_0 \tag{4.66}$$

élément de cohomologie non trivial de la différentielle étendue $d+\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}+\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}+i_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}$, où $\mathcal{L}^0_4$ est la densité lagrangienne considérée comme une 4-forme, et $\mathcal{L}^4_0 = \frac{1}{2}\text{Tr }(\bar\epsilon\gamma_5\phi\epsilon)(\bar\epsilon\phi\epsilon)$. Le seul autre élément non trivial de cohomologie de la différentielle étendue $d + \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} + \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} + i_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}$ de dimension canonique 4 est la forme étendue

$$\frac{1}{2}\text{Tr }\Bigl(F - i\bigl(\bar\epsilon\gamma_1\lambda\bigr) + \bigl(\bar\epsilon\phi\epsilon\bigr)\Bigr)^2 \tag{4.67}$$

Comme il est expliqué dans [A.5], les identités de Slavnov–Taylor impliquent que la forme étendue $\tilde{\mathcal{L}}$ se renormalise d'un bloc, multiplicativement, ou en se mélangeant à une autre forme étendue $d + \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} + \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} + i_{i(\bar\epsilon\gamma\epsilon)}$-fermée.

L'identité de Fierz

$$(\bar\epsilon\gamma_5\tau_i\epsilon)(\bar\epsilon\tau^i\epsilon) = 0 \tag{4.68}$$

permet de montrer que l'insertion de l'opérateur composite $\mathcal{L}^4_0$ est équivalente à celle de l'opérateur $\frac{1}{2}$ BPS primaire Tr $(\phi^i\phi^j - \frac{1}{6}\delta^{ij}\phi^k\phi_k)$, et que cet opérateur composite est donc de dimension anormale nulle. Ceci implique que les seuls contre-termes invariants qui peuvent intervenir dans la renormalisation de la densité lagrangienne sont, ou des dérivées totales, où des termes BRST-exacts. On en déduit directement que l'action de l'opérateur de Callan–Symanzik

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\,\mathscr{F} &\equiv m\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial m} + \beta\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial g} + \mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}} \int \Big(\sum_a \gamma^a\, \varphi^a \varphi^{(Q_s)}{}_a + \gamma^{(A)}\,\mathrm{Tr}\;\bar\mu \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b}\Big) \\ &= m\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial m} + \beta\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial g} - \sum_a \gamma^a \int \Big(\varphi^a \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi^a} - \varphi^{(s)}{}_a \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi^{(s)}{}_a} - \varphi^{(Q)}{}_a \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi^{(Q)}{}_a} - \varphi^{(Q_s)}{}_a \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi^{(Q_s)}{}_a}\Big) \\ &\qquad + \gamma^{(A)} \int \mathrm{Tr}\,\Big(\bar\mu \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar\mu} + \bar c \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar c} + \bar\Omega \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar\Omega} + b \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b}\Big)\end{aligned} \tag{4.69}$$

sur l'insertion de l'action dans la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductibles est une variation BRST

$$\mathcal{C}\;\Big[\int \mathcal{L}^0_4 \cdot \Gamma\Big] = \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\big[\boldsymbol{\Psi}^{(1)} \cdot \Gamma\big] \tag{4.70}$$

Conclusion de la preuve

Selon le principe d'action quantique, la variation de la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductibles Γ par rapport à la constante de couplage est donnée par l'insertion d'une fonctionnelles locale des champs dans Γ, qui est invariante par rapport à l'action des opérateurs linéarisés de Slavnov–Taylor et des transformations propres du groupe de Lorentz. La seule solution étant l'action elle-même modulo une variation BRST, on en déduit que

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial g} + \frac{2}{g^3}a(g)\,\Big[\int \mathcal{L}^0_4 \cdot \Gamma\Big] = \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\big[\boldsymbol{\Psi}^{(2)} \cdot \Gamma\big] \tag{4.71}$$

où $a(g) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}*} a_n g^{2n}$ tient compte des éventuelles corrections radiatives. En appliquant l'équation

$$\Big[\mathcal{C}, \frac{\partial}{\partial g}\Big]\mathscr{F} = -\frac{\partial\beta}{\partial g}\,\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial g} - \mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}} \int \Big(\sum_a \frac{\partial \gamma^a}{\partial g}\, \varphi^a \varphi^{(Q_s)}{}_a + \frac{\partial \gamma^{(A)}}{\partial g}\mathrm{Tr}\;\bar\mu \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b}\Big) \tag{4.72}$$

à la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductibles Γ, on obtient en utilisant (4.70) et (4.71) que

$$\frac{\partial}{\partial g}\Big(\beta\,\frac{2}{g^3}a(g)\Big)\,\Big[\int \mathcal{L}^0_4 \cdot \Gamma\Big] = \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\big[\boldsymbol{\Psi}^{(3)} \cdot \Gamma\big] \tag{4.73}$$

et puisque l'insertion de l'action définit un élément non trivial de la cohomologie de l'opérateur BRST

$$\frac{\partial}{\partial g}\Big(\beta\,\frac{2}{g^3}a(g)\Big) = 0 \tag{4.74}$$

La solution générale de cette équation différentielle en fonction de la fonction β calculée au premier ordre de la théorie des perturbations, β_1, est proportionnelle à celle-ci

$$\beta = \left(1 + \sum_{n\in\mathbb{N}*} g^{2n} \sum_{p=1}^{n} \sum_{\{k_{i|_1^p}\} | \sum_{i=1}^{p} k_i = n} \prod_{i=1}^{p} (-a_{k_i}) \right) \beta_1 \tag{4.75}$$

L'annulation de la fonction β de la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique au premier ordre de la théorie des perturbations implique donc son annulation à tous les ordres.

4.3.2 Identités de Slavnov–Taylor superconformes

L'algèbre $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ contient l'algèbre de super-Poincaré dont on note les paramètres impairs associés aux translations, π^μ, et aux transformations de Lorentz, $\Lambda_{\mu\nu}$. La composante bosonique de l'algèbre est étendue à l'algèbre conforme, qui comporte également les dilatations et les inversions, dont on note respectivement les paramètres impairs associés θ et κ^μ. L'introduction des supersymétries spéciales de paramètre pair η implique l'introduction des générateurs du groupe de symétrie interne $SU(4)$, dont on note les paramètres υ_{ij}. Le paramètre η est un spineur pair de $SU(4)$-Majorana, qui descend d'un spineur de Majorana–Weyl à dix dimensions de chiralité opposée à celle de celui dont descend le paramètre de supersymétrie ϵ. L'algèbre $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ est déterminée, dans la formulation duale de Cartan, par l'action de la différentielle nilpotente Q sur les paramètres associés aux générateurs de graduation opposée

$$\begin{aligned}
Q\pi^\mu &= -\theta\pi^\mu - \Lambda^\mu{}_\nu \pi^\nu + i(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon) \\
Q\kappa^\mu &= \theta\kappa^\mu - \Lambda^\mu{}_\nu \kappa^\nu + i(\bar\eta\gamma^\mu\eta) & Q\epsilon &= \tfrac{1}{2}\big(-\theta - \not{\Lambda} + \upsilon_{ij}\tau^{ij}\big)\epsilon + \not{\pi}\eta \\
Q\theta &= -2\,\pi\cdot\kappa + 2i(\bar\epsilon\eta) \\
Q\Lambda_{\mu\nu} &= -2\pi_\mu\kappa_\nu + 2\pi_\nu\kappa_\mu - \Lambda_\mu{}^\sigma\Lambda_{\sigma\nu} + 4i(\bar\epsilon\gamma_{\mu\nu}\eta) & Q\eta &= \tfrac{1}{2}\big(\theta - \not{\Lambda} + \upsilon_{ij}\tau^{ij}\big)\eta + \not{\kappa}\epsilon \\
Q\upsilon_{ij} &= \upsilon_i{}^k\upsilon_{kj} + 4i(\bar\epsilon\tau_{ij}\eta)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Le groupe conforme est un sous groupe de dimension finie du groupe des difféomorphismes. On peut écrire l'algèbre en introduisant le champ de vecteur, le spineur et l'élément de $\mathfrak{su}(4)$

$$\begin{aligned}
\xi^\mu &\equiv \pi^\mu + x^2\kappa^\mu - 2x\cdot\kappa\, x^\mu + \theta x^\mu + \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\
\chi &\equiv \epsilon + \not{x}\eta \qquad\qquad \upsilon \equiv \tfrac{1}{2}\upsilon_{ij}\tau^{ij}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

sur le modèle de l'algèbre de symétrie de la supergravité

$$
\begin{gathered}
Q\xi^\mu = \xi^\nu \partial_\nu \xi^\mu + i(\overline{\chi}\, \gamma^\mu \chi) \qquad\qquad Q\upsilon = \upsilon^2 + \tfrac{i}{2}(\overline{\chi}\, \tau_{ij}\, \partial\!\!\!/ \chi)\tau^{ij} \\
Q\chi = {}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{L}_\xi \chi + \upsilon\chi
\end{gathered}
\tag{4.78}
$$

avec la définition suivante de la dérivée de Lie d'un spineur, respectivement d'un scalaire, de poids conforme d

$$
{}^d\mathcal{L}_\xi \equiv \xi^\mu \partial_\mu + \tfrac{1}{2}\partial_\mu \xi_\nu \gamma^{\mu\nu} + \tfrac{d}{4}\partial_\mu \xi^\mu \qquad {}^d\mathcal{L}_\xi \equiv \xi^\mu \partial_\mu + \tfrac{d}{4}\partial_\mu \xi^\mu \tag{4.79}
$$

On utilise cette similitude pour écrire les transformations des champs sous l'action d'un opérateur nilpotent Q incluant les transformations de l'algèbre superconforme à partir de la courbure étendue

$$
(d+Q)\big(A+c\big) + \big(A+c\big)^2 = e^{i_\xi}\big(F - i(\overline{\chi}\gamma_1\lambda) + (\overline{\chi}\phi\chi)\big) \tag{4.80}
$$

L'action de Q sur les champs représente l'action d'une symétrie de la théorie associée à une algèbre graduée de dimension finie, on interprète donc le champ c comme une ombre et non pas comme un fantôme de Faddeev–Popov. Suivant la procédure proposée dans la section précédente, on simplifie la représentation de Q en redéfinissant l'ombre c et en utilisant la différentielle étendue

$$
e^{-i_\xi}(d+Q)e^{i_\xi} = d + Q - \mathcal{L}_\xi + i_{i(\overline{\chi}\gamma\chi)} \tag{4.81}
$$

où on a supposé ici une connexion de fond nulle. La nouvelle courbure étendue s'écrit alors

$$
(d + Q - \mathcal{L}_\xi + i_{i(\overline{\chi}\gamma\chi)})\big(A+c\big) + \big(A+c\big)^2 = F - i(\overline{\chi}\gamma_1\lambda) + (\overline{\chi}\phi\chi) \tag{4.82}
$$

Cette définition et l'identité de Bianchi associée permettent de déterminer l'algèbre superconforme sur les champs de la théorie de Yang–Mills $\mathcal{N} = 4$. On note que l'identité de Bianchi s'applique bien que l'opérateur Q ne soit nilpotent que modulo les équations du mouvement dans sa représentation complète sur les champs. Ces transformations s'écrivent

$$
\begin{aligned}
QA_\mu &= \mathcal{L}_\xi A_\mu + i\big(\overline{\chi}\gamma_\mu\lambda\big) + D_\mu c \qquad\qquad Qc = \mathcal{L}_\xi c + \big(\overline{\chi}[\phi - iA\!\!\!/]\chi\big) - c^2 \\
Q\phi^i &= {}^1\mathcal{L}_\xi \phi^i + \upsilon^i{}_j\, \phi^j - \big(\overline{\chi}\tau^i\lambda\big) - [c, \phi^i] \\
Q\lambda &= {}^{\frac{3}{2}}\mathcal{L}_\xi \lambda + \upsilon\lambda + \big(F\!\!\!/ + iD\!\!\!\!/\,\phi + \tfrac{1}{2}[\phi,\phi]\big)\chi + 2i\phi\,\eta - [c,\lambda]
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

L'action classique est bien invariante sous la symétrie conforme, car la dérivée de Lie d'un scalaire de poids conforme 4 est une dérivée totale. On voudrait maintenant fixer la jauge tout en préservant l'invariance de l'action sous l'opérateur Q, de manière à pouvoir écrire des identités de Slavnov–Taylor pour la symétrie superconforme. Pour ce faire, on introduit le fantôme de Faddeev–Popov Ω et l'opérateur BRST s, qui agit de manière usuelle sur les champs physiques de la théorie, comme une transformation de jauge de paramètre $-\Omega$. Suivant la construction présentée dans l'article annexé A.4, on définit le fantôme de l'ombre μ, avec les transformations suivantes

$$\begin{aligned} s\,c &= \mu & Q\Omega &= -\mu - [c,\Omega] \\ s\,\mu &= 0 & Q\mu &= \mathcal{L}_\xi \mu - [(\overline{\chi}\phi\chi)\,,\,\Omega] + i(\overline{\chi}\gamma^\mu\chi)D_\mu\Omega - [c,\mu] \end{aligned} \tag{4.84}$$

L'écriture explicite d'une fixation de jauge Q invariante nécessite l'introduction d'un quatuor trivial sous l'action des deux différentielles s et Q. Le terme quatuor trivial signifie que toute fonctionnelle, invariante par rapport à s et Q dépendant de ces champs, peut s'écrire comme l'action répétée de s et Q sur une autre fonctionnelle. Si on ne peut pas écrire une fixation de jauge invariante par rapport à toutes les symétries de l'algèbre superconforme sans introduire de nouveaux champs, la fixation de jauge dans la jauge interpolante de Landau–Feynman est invariante par rapport aux transformations du groupe de Poincaré ainsi que sous les dilatations. Il est donc préférable de définir l'action de Q sur les champs du quatuor trivial, en considérant l'action de l'algèbre conforme, de manière à définir la fixation de jauge la plus simple possible. Celle-ci ne dépendra que des paramètres associés aux symétries brisées par la fonction de jauge. On définit donc les transformations de ces champs comme suit

$$\begin{aligned} s\,\bar\mu &= \bar c & Q\bar\mu &= {}^2\mathcal{L}_\xi\bar\mu + \bar\Omega \\ s\,\bar c &= 0 & Q\bar c &= {}^2\mathcal{L}_\xi\bar c - b \\ s\,\bar\Omega &= b & Q\bar\Omega &= {}^2\mathcal{L}_\xi\bar\Omega - {}^2\mathcal{L}_{i(\overline{\chi}\gamma\chi)}\bar\mu \\ s\,b &= 0 & Qb &= {}^2\mathcal{L}_\xi b + {}^2\mathcal{L}_{i(\overline{\chi}\gamma\chi)}\bar c \end{aligned} \tag{4.85}$$

L'action fixatrice de jauge interpolante de Landau–Feynman Q invariante s'écrit

$$\begin{aligned} -\,s\,Q\int \mathrm{Tr}\,\Big(\bar\mu\partial^\mu A_\mu + \tfrac{\alpha}{2}\bar\mu b\Big) = \int \mathrm{Tr}\,\Big(& b\partial^\mu A_\mu + \tfrac{\alpha}{2}b^2 - \bar\Omega\partial^\mu D_\mu\Omega \\ & + \bar c\partial^\mu\Big(D_\mu c + i\big(\overline{\epsilon + \not{x}\eta}\gamma_\mu\lambda\big)\Big) + 4\bar c\kappa^\mu A_\mu - \tfrac{i\alpha}{2}\big(\overline{\epsilon+\not{x}\eta}\gamma^\mu[\epsilon+\not{x}\eta]\big)\,\bar c\partial_\mu\bar c \\ & + \bar\mu\partial^\mu\Big(D_\mu\mu + [D_\mu\Omega,c] - \big[\Omega\,,\,i\big(\overline{\epsilon+\not{x}\eta}\gamma_\mu\lambda\big)\,\big]\Big) - 4\bar\mu\kappa^\mu D_\mu\Omega\Big) \end{aligned} \tag{4.86}$$

Cette action dépend du vecteur impair κ et des deux spineurs pairs ϵ et η à travers le spineur $\epsilon + \not{x}\eta$. L'apparition explicite des coordonnées dans l'action est à première vue dramatique. L'invariance par rapport aux translations est en effet d'une importance capitale en théorie des champs, particulièrement en ce qui concerne la stabilité de l'action. L'invariance par rapport aux translations est dans ce cadre maintenue via les identités de Slavnov–Taylor associées à la différentielle Q. On admet sans preuve que le principe d'action quantique reste valable dans ce cas, c'est à dire que les contre-termes et les anomalies sont des fonctionnelles locales, qui dépendent éventuellement des coordonnées. L'invariance superconforme étant très contraignante, on peut espérer que l'action fixée de jauge reste stable, même sans être explicitement invariante par translation. L'unicité de la représentation de l'algèbre superconforme sur les champs, modulo une renormalisation de ceux-ci, suggère que le problème de la stabilité se restreint à la détermination de l'action renormalisable par comptage de puissance la plus générale, dépendant des coordonnées, qui soit invariante sous l'ensemble des identités de Ward de la théorie. Le résultat de P. L. White [61] en ce qui concerne la cohomologie de l'opérateur linéarisé de Slavnov–Taylor pour la symétrie superconforme peut probablement être généralisé afin de démontrer l'absence d'anomalie cohérente pour les opérateurs de Slavnov–Taylor associés à la symétrie superconforme et à l'invariance de jauge. Bien que le groupe des dilatations admette une représentation linéaire sur les champs, celle-ci est modifiée par les corrections radiatives pour donner place au groupe de renormalisation. Il semble cependant que les champs de la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique ne soient pas renormalisés dans la jauge de Landau. On va ici supposer que l'annulation de la dimension anormale des champs permet de considérer que leurs transformations sous les générateurs du groupe conforme ne se renormalisent pas dans la jauge de Landau. Afin d'obtenir la stabilité de l'action, il est nécessaire de démontrer la validité des identités de Ward antifantômes à tous les ordres de la théorie des perturbations. Celles-ci ont la forme suivante dans la jauge de Landau ($\alpha = 0$), à l'ordre des arbres

$$\begin{gathered}
\frac{\delta^L \Sigma}{\delta b} = \partial^\mu A_\mu \\
\frac{\delta^L \Sigma}{\delta \bar\Omega} + \partial_\mu \frac{\delta^L \Sigma}{\delta A^{(s)}_\mu} = 0 \qquad \frac{\delta^L \Sigma}{\delta \bar c} - \partial_\mu \frac{\delta^L \Sigma}{\delta A^{(Q)}_\mu} = -{}^2\mathcal{L}_\xi \partial^\mu A_\mu \\
\frac{\delta^L \Sigma}{\delta \bar\mu} - \partial_\mu \frac{\delta^L \Sigma}{\delta A^{(Qs)}_\mu} - {}^2\mathcal{L}_\xi \partial_\mu \frac{\delta^L \Sigma}{\delta A^{(s)}_\mu} = 0
\end{gathered} \tag{4.87}$$

Les champs $A^{(Q)}$, $A^{(s)}$ et $A^{(Qs)}$ sont les sources associées aux transformations du champ de jauge. Admettons pour le moment que toutes les identités de Ward puissent êtres étendues au niveau quantique pour la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductibles. Sachant qu'il n'existe pas de régulateur préservant la symétrie superconforme à tous les ordres, on devrait tout de même faire face à la génération d'une dépendance arbitraire de l'action nue dans les coordonnées. Il semble indispensable d'utiliser un régulateur minimisant la complexité de celle-ci. L'espoir serait de pouvoir maintenir la propriété de l'action nue à ne dépendre des coordonnées qu'à travers le spineur $\epsilon + \not{x}\eta$.

L'opérateur de Slavnov–Taylor superconforme comporte des anomalies dans le complexe étendu incluant les sources d'opérateurs locaux invariants de jauge. Ces anomalies sont dues à des propriétés générales des représentations de groupes non compacts. Définissons formellement le vecteur $|\mathcal{O}\rangle$, dont chaque composante est un opérateur local invariant de jauge, et le vecteur $\langle u|$, dont chaque composante duale correspond à la source associée à un opérateur, de telle sorte que le produit scalaire $\langle u|\mathcal{O}\rangle$, définit le couplage des opérateurs locaux à leurs sources dans l'action. Etant donné que l'algèbre superconforme ne ferme sur les champs de la théorie que modulo les équations du mouvement, on doit étendre ces deux vecteurs en considérant des opérateurs BRST-exacts, faisant intervenir les sources des transformations des champs sous s et Q [A.6]. On va cependant laisser de côté ces corrections pour l'instant, en les incluant dans la notation « $\cdots$ » . A l'ordre des arbres, l'opérateur de Slavnov–Taylor agit sur $|\mathcal{O}\rangle$ comme un opérateur fonctionnel local, linéaire dans les paramètres $\hat{\xi} \equiv \{\theta,\, \pi^\mu,\, \kappa^\mu,\, \Lambda_{\mu\nu},\, \upsilon_{ij},\, \epsilon,\, \eta\}$

$$\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}|\mathcal{O}\rangle = L(\hat{\xi})|\mathcal{O}\rangle + \cdots \tag{4.88}$$

L'invariance de l'action implique qu'il agisse sur $\langle u|$ de la même manière[6]

$$\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\langle u| = -\langle u|L(\hat{\xi}) + \cdots \tag{4.89}$$

La nilpotence de l'opérateur linéarisé de Slavnov–Taylor est équivalente au fait que l'opérateur $L(\hat{\xi})$ définit une représentation de l'algèbre superconforme.

$$L(\hat{\xi})^2 = L(Q\hat{\xi}) \tag{4.90}$$

Les représentations unitaires irréductibles de l'algèbre superconforme $\mathfrak{psu}(2,2|4)$ sont classifiées en fonction de leurs nombres de Dynkin discrets de $SU(2)\times SU(2)\times SU(4)$ et de leur dimension conforme réelle [62]. Les représentations génériques ont une dimension conforme supérieure ou égale à la somme des nombres de Dynkin de $SU(2)\times SU(2)\times$

[6] On omet ici les signes moins associés au fait que l'algèbre est graduée.

$SU(4)$ plus 2. On peut donc définir une représentation de l'algèbre $L(\hat{\xi},t)$,

$$L(\hat{\xi},t)^2 = L(Q\hat{\xi},t) \tag{4.91}$$

dépendant analytiquement d'autant de paramètres t_A qu'il y a de représentations irréductibles continûment déformables, telles que $L(\hat{\xi},0) = L(\hat{\xi})$ et que la représentation de $Spin(3,1)\times SU(4)$ ne dépende pas des t_A. Les représentations irréductibles courtes incluses dans $L(\hat{\xi},0)$, qui ne peuvent apparaître dans la décomposition d'une représentation longue dans la limite $t\rightarrow 0$, sont par conséquent inchangées dans $L(\hat{\xi},t)$. On va voir que les opérateurs appartenant à de telles représentations irréductibles, sont protégés du point de vue des identités de Slavnov–Taylor.

Nous cherchons maintenant des anomalies de l'identité de Slavnov–Taylor superconforme. La fonctionnelle

$$t_A\Bigl(\frac{\partial}{\partial t_A}\langle u|L(\hat{\xi},t)|\mathcal{O}\rangle\Bigr)_{|t=0} \tag{4.92}$$

sur laquelle, l'opérateur linéarisé de Slavnov–Taylor donne zéro,

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\, t_A\Bigl(\frac{\partial}{\partial t_A}\langle u|L(\hat{\xi},t)|\mathcal{O}\rangle\Bigr)_{|t=0}\\ &= t_A\langle u|\biggl(\Bigl(\frac{\partial}{\partial t_A}L(Q\hat{\xi},t)\Bigr)_{|t=0} - L(\hat{\xi},0)\Bigl(\frac{\partial}{\partial t_A}L(\hat{\xi},t)\Bigr)_{|t=0} - \Bigl(\frac{\partial}{\partial t_A}L(\hat{\xi},t)\Bigr)_{|t=0}L(\hat{\xi},0)\biggr)|\mathcal{O}\rangle\\ &= t_A\Bigl(\frac{\partial}{\partial t_A}\langle u|L(Q\hat{\xi},t) - L(\hat{\xi},t)^2|\mathcal{O}\rangle\Bigr)_{|t=0} = 0\end{aligned} \tag{4.93}$$

définit une anomalie cohérente. On peut montrer que cette anomalie est non triviale en se restreignant aux générateurs du produit du groupe de Poincaré et des dilatations. Dans ce cas, $t_A\Bigl(\frac{\partial}{\partial t_A}L(\theta,\pi,\Lambda,t)\Bigr)_{|t=0}$ se restreint à une matrice diagonale attribuant une valeur propre égale à θt_A à chaque représentation irréductible correspondante, pour une définition normalisée de $L(\hat{\xi},t)$. Un éventuel contre-terme invariant de jauge invariant par rapport à $Spin(3,1)\times SU(4)$, peut être écrit en fonction d'un opérateur M^A, invariant par rapport à $Spin(3,1)\times SU(4)$, comme $\langle u|M^A|\mathcal{O}\rangle$. Le fait que celui-ci définisse un antécédent à l'anomalie conforme de la représentation irréductible indexée par A, impliquerait que

$$\bigl[M^A, L(\theta,\pi,\Lambda,0)\bigr] = \Bigl(\frac{\partial}{\partial t_A}L(\theta,\pi,\Lambda,t)\Bigr)_{|t=0} = \theta\,\mathbb{1}^A \tag{4.94}$$

Le terme linéaire en π imposerait alors que M^A ne dépende pas des coordonnées,[7] ce qui ne laisserait pas de solution possible.

[7]L'invariance par translation étant brisée par la fixation de jauge, elle n'est maintenue qu'à travers les identités de Slavnov–Taylor associées.

Bien que non triviale, cette anomalie n'est cependant pas incurable. Supposons qu'elle apparaisse à une boucle,

$$\mathcal{S}_{(Q)}(\Gamma) = \gamma_A \Big(\frac{\partial}{\partial t_A} \langle u | L(\hat{\xi}, t) | \mathcal{O} \rangle \Big)_{|t=0} + \mathcal{O}(g^4) \tag{4.95}$$

on peut l'éliminer en renormalisant l'opérateur de Slavnov–Taylor, de telle sorte que l'action de celui-ci sur les sources soit donnée par

$$\mathcal{S}_{(Q)|\Gamma} \langle u| = -\langle u | L(\hat{\xi}, \gamma) + \cdots = -\langle u | L(\hat{\xi}, 0) - \gamma_A \langle u | \Big(\frac{\partial}{\partial t_A} L(\hat{\xi}, t) \Big)_{|t=0} + \mathcal{O}(g^4) + \cdots \tag{4.96}$$

ce qui correspond tout simplement à la génération de dimensions anormales pour les opérateurs appartenant à des représentations le permettant. Si cette interprétation de l'anomalie (4.92) est correcte, il serait plus satisfaisant de montrer qu'elle est la seule anomalie possible. Ce problème reviendrait à prouver que toutes les déformations infinitésimales de représentations incluses dans $L(\hat{\xi})$ définissent des déformations finies

$$R(Q\hat{\xi}) = \big\{ L(\hat{\xi}), R(\hat{\xi}) \big\} \quad \Rightarrow \quad R(\hat{\xi}) = r_A \Big(\frac{\partial}{\partial t_A} L(\hat{\xi}, t) \Big)_{|t=0} \tag{4.97}$$

Les obstructions à l'extension d'une déformation infinitésimale d'une représentation en une représentation finie, définissent des éléments de cohomologie de l'opérateur linéarisé de Slavnov–Taylor de nombre d'ombres deux, linéaires dans les sources. En effet, si tout opérateur fonctionnel $\Delta(\hat{\xi})$ de nombre d'ombres deux (quadratique en $\hat{\xi}$), vérifiant que $Q\hat{\xi} \frac{\partial}{\partial \hat{\xi}} \Delta(\hat{\xi}) = \big[L(\hat{\xi}), \Delta(\hat{\xi}) \big]$, peut s'écrire $\Delta(\hat{\xi}) = R(Q\hat{\xi}) - \big\{ L(\hat{\xi}), R(\hat{\xi}) \big\}$, pour un opérateur fonctionnel $R(\hat{\xi})$ de nombre d'ombres un donné, on peut alors démontrer par récurrence que la proposition (4.97) est vraie.

De manière intéressante dans ce cas, les rôles des différentes cohomologies de l'opérateur linéarisé de Slavnov–Taylor sont décalés. Les éléments de cohomologie linéaires dans les sources de nombre d'ombres un, définissent les déformations possibles de la représentation de la symétrie sur les opérateurs composites, et les éléments de cohomologie linéaires dans les sources de nombre d'ombres deux, définissent les véritables anomalies, dont l'apparition en théorie des perturbations briserait la symétrie.

4.4 Solution des contraintes dans le super-espace tordu

On définit dans la dernière publication [A.7] une formulation fonctionnelle locale de la théorie de Yang–Mills en dix dimensions sur un super-espace tordu. Dans cette section nous allons déterminer la solution générale des contraintes. On définit un super-espace composé de dix coordonnées bosoniques x^m, décomposées en les variables du cônes de lumière x^+ et x^- et les coordonnées euclidiennes octodimensionnelles x^μ, ainsi que de neuf coordonnées fermioniques décomposées en un scalaire θ et un vecteur ϑ^μ se transformant respectivement comme un spineur chiral et un spineur antichiral sous $SO(1,1)$. On définit les dérivées covariantes fermioniques $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\partial_+$ et $\nabla_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu} - \theta\partial_\mu - \vartheta_\mu\partial_-$, qui vérifient les relations de commutation

$$\nabla^2 = -\partial_+ \qquad \{\nabla, \nabla_\mu\} = -\partial_\mu \qquad \{\nabla_\mu, \nabla_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}\partial_- \tag{4.98}$$

qu'on résume dans la différentielle étendue $d + \nabla + \nabla_{d\vartheta} + i_{\partial_+ + d\vartheta + |d\vartheta|^2\partial_-}$. On définit la connexion du super-espace fibré associée à cette différentielle, qui se décompose en trois superchamps comme suit, $\mathbb{A} + \mathbb{C} + \boldsymbol{\Gamma} \equiv \mathbb{A}_m dx^m + \mathbb{C} + \boldsymbol{\Gamma}_\mu d\vartheta^\mu$. On définit ainsi la courbure

$$\begin{aligned}(d + \nabla + \nabla_{d\vartheta} + i_{\partial_+ + d\vartheta + |d\vartheta|^2\partial_-})\big(\mathbb{A} + \mathbb{C} + \boldsymbol{\Gamma}\big) + \big(\mathbb{A} + \mathbb{C} + \boldsymbol{\Gamma}\big)^2 \\ = \mathbb{F} + \boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\Phi} + \mathbb{L} + \bar{\boldsymbol{\Phi}} \\ \equiv \tfrac{1}{2}\mathbb{F}_{mn} dx^m_{\wedge} dx^n + \boldsymbol{\Psi}_m dx^m + \boldsymbol{\chi}_{\mu n} d\vartheta^\mu dx^n + \boldsymbol{\Phi} + \mathbb{L}_\mu d\vartheta^\mu + \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{\mu\nu} d\vartheta^\mu d\vartheta^\nu\end{aligned} \tag{4.99}$$

Les contraintes définies dans [A.7] peuvent s'écrire en fonction des composantes de cette courbure étendue comme

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbb{L}_\mu = \bar{\boldsymbol{\Phi}}_{\mu\nu} = 0 \qquad \boldsymbol{\chi}_{\mu\nu} - \boldsymbol{\chi}_{\nu\mu} + \tfrac{1}{3}\Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\boldsymbol{\chi}_{\sigma\rho} = 0 \tag{4.100}$$

Ces contraintes sont invariantes sous les transformations de jauge dans le super-espace, de paramètre un superchamp général $\boldsymbol{\alpha}$,

$$\mathbb{A} + \mathbb{C} + \boldsymbol{\Gamma} \rightarrow e^{-\boldsymbol{\alpha}}\big(d + \nabla + \nabla_{d\vartheta} + \mathbb{A} + \mathbb{C} + \boldsymbol{\Gamma}\big)e^{\boldsymbol{\alpha}} \tag{4.101}$$

On peut donc les résoudre dans une jauge limitant la complexité des connexions. On va tout d'abord fixer $\boldsymbol{\alpha}$ de manière à ce que toutes les dérivées de $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ par rapport aux coordonnées fermioniques θ et ϑ^μ n'aient pas de composante complètement antisymétrique, une fois les coordonnées fermioniques fixées à zéro. Pour ce faire, on va définir $e^{\boldsymbol{\alpha}}$ comme un produit de $e^{\boldsymbol{\alpha}_I}$. Il est aisé d'éliminer la composante $\boldsymbol{\Gamma}_{\mu\,|0}$ de $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ aux coordonnées fermioniques fixées à zéro, en choisissant $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\Gamma}_{\mu\,|0}\vartheta^\mu$. Le superchamp ainsi obtenu n'a pas de composante à l'ordre zéro, et on peut éliminer la composante antisymétrique $\big(\frac{\partial}{\partial\theta^{[\mu}}\boldsymbol{\Gamma}_{\nu]}\big)_{|0}$ en choisissant $\boldsymbol{\alpha}_2 = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial\theta^{[\mu}}\boldsymbol{\Gamma}_{\nu]}\big)_{|0}\vartheta^\mu\vartheta^\nu$. On détermine de même toutes les composantes de $\boldsymbol{\alpha}$, mise à part celle qui ne dépend pas des coordonnées fermioniques qui correspond à l'invariance de jauge ordinaire, de telle sorte que les superchamps $\mathbb{C}$ et $\boldsymbol{\Gamma}$ vérifient

$$\mathbb{C}_{|0} = 0 \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta^{[\mu}}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\cdots\frac{\partial}{\partial\vartheta^\rho}\boldsymbol{\Gamma}_{\sigma]}\Big)_{|0} = \Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\;\frac{\partial}{\partial\vartheta^{[\mu}}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\cdots\frac{\partial}{\partial\vartheta^\rho}\boldsymbol{\Gamma}_{\sigma]}\Big)_{|0} = 0 \tag{4.102}$$

Nous allons maintenant résoudre l'équation $\bar{\mathbf{\Phi}} = 0$, qui s'écrit

$$\nabla_{d\vartheta}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^2 = -|d\vartheta|^2\mathbb{A}_- \tag{4.103}$$

et dont l'identité de Bianchi implique

$$d\vartheta^\mu \frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\mathbb{A}_- - d\vartheta^\mu\theta\partial_\mu\mathbb{A}_- = \partial_-\mathbf{\Gamma} + [\mathbb{A}_-, \mathbf{\Gamma}] + d\vartheta_\mu\vartheta^\mu\partial_-\mathbb{A}_- \tag{4.104}$$

Chaque composante du terme de gauche à l'ordre zéro en θ est un tenseur complètement antisymétrique alors qu'aucune composante du terme de droite n'est complètement antisymétrique dans la jauge choisie. Les composantes à l'ordre zéro en θ de $\mathbb{A}_-$ se réduisent donc à sa composante à l'ordre zéro en ϑ. En examinant de la même manière la composante en θ, en supposant connues ses composantes à $\theta = 0$, on en déduit que $\mathbb{A}_-$ s'écrit en composantes

$$\mathbb{A}_- = A_- + \theta\big(\eta - \vartheta^\mu\partial_\mu A_-\big) \tag{4.105}$$

On résout ensuite (4.103) en y substituant cette solution. La composante à l'ordre zéro dans les coordonnées fermioniques donne $\big(\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\mathbf{\Gamma}_\nu\big)_{|0} = -\delta_{\mu\nu}A_-$. La nullité de $\mathbf{\Gamma}_{\mu\,|0}$ implique la nullité de $\big(\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta^\nu}\mathbf{\Gamma}_\rho\big)_{|0}$, la nullité de $\big[\big(\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\mathbf{\Gamma}_\nu\big)_{|0}, \big(\frac{\partial}{\partial\theta^\rho}\mathbf{\Gamma}_\sigma\big)_{|0}\big]$, celle de $\big(\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta^\nu}\frac{\partial}{\partial\theta^\rho}\mathbf{\Gamma}_\sigma\big)_{|0}$ et ainsi de suite jusqu'à la composante de plus haut degré en ϑ. De la même manière on obtient $\big(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\mathbf{\Gamma}_\nu\big)_{|0} = -\delta_{\mu\nu}\eta$ et $\big(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta^{\{\nu}}\mathbf{\Gamma}_{\rho\}}\big)_{|0} - \partial_{\{\nu}\delta_{\rho\}\mu}A_- = -\delta_{\nu\rho}\partial_\mu A_-$ qui donne $\big(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta^\nu}\mathbf{\Gamma}_\rho\big)_{|0} = 2\delta_{\rho[\mu}\partial_{\nu]}A_-$. La nullité de $(d\vartheta_\mu\vartheta^\mu)^2$ implique enfin que toutes les autres composantes sont nulles, et ainsi $\mathbf{\Gamma}_\mu = -\vartheta_\mu\mathbb{A}_-$. On peut vérifier que cette expression définit une solution cohérente de la contrainte $\bar{\mathbf{\Phi}} = 0$.

La contrainte $\mathbf{\Phi} = 0$ détermine $\mathbb{A}_+$ en fonction de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{A}_+ = -\nabla\mathbb{C} - \mathbb{C}^2$. On introduit alors les fonctions $\tilde{A}$ et $\tilde{A}_+$ des variables fermioniques ϑ, telles que la composante d'ordre zéro en ϑ de $\tilde{A}$ soit nulle, et on décompose $\mathbb{C}$ comme

$$\mathbb{C} \equiv -\tilde{A} - \theta\big(\tilde{A}_+ + \tilde{A}^2\big) \tag{4.106}$$

La contrainte $\mathbb{L}_\mu = 0$ détermine $\mathbb{A}_\mu$ comme suit

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_\mu = \frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\tilde{A} - \vartheta_\mu\Big(\eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\nu\partial_\nu A_-\Big) + \theta\Bigg(-\partial_\mu\tilde{A} - \Big[\frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\tilde{A}\,,\,\tilde{A}\Big] - \frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\tilde{A}_+ \\ + \vartheta_\mu\Big(D_-\tilde{A}_+ - \partial_+A_- + \big[\tilde{A}\,, \eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\nu\partial_\nu A_-\big]\Big)\Bigg)\end{aligned} \tag{4.107}$$

Les premières composantes de $\mathbb{A}_\mu$ et $\mathbb{A}_+$ sont ainsi données par les premières composantes de $\tilde{A}$ et $\tilde{A}_+$, qu'on identifie ainsi à $A_\mu\vartheta^\mu$ et A_+. On peut alors vérifier explicitement que la courbure $\boldsymbol{\chi}_{\mu\nu}$ se décompose en $\boldsymbol{\chi}_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\chi}_{[\mu\nu]}$, avec

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\eta} &= \eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\mu\partial_\mu A_- + \theta\Big(D_-\tilde{A}_+ - \partial_+A_- + \big[\tilde{A}\,,\,\eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\mu\partial_\mu A_-\big]\Big)\\
\boldsymbol{\chi}_{[\mu\nu]} &= \frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\tilde{A} - 2\vartheta_{[\mu}\Big(D_-\frac{\partial}{\partial\vartheta^{\nu]}}\tilde{A} - \partial_{\nu]}A_-\Big) + \vartheta_\mu\vartheta_\nu D_-\Big(\eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\mu\partial_\mu A_-\Big)\\
&\quad +\theta\Bigg(\frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\tilde{A}_+ - 2\partial_{[\mu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^{\nu]}}\tilde{A} - \Big[\frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\tilde{A}\,,\,\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\tilde{A}\Big]\\
&\quad -2\vartheta_{[\mu}\Big(D_-\frac{\partial}{\partial\vartheta^{\nu]}}\tilde{A}_+ + \partial_{\nu]}\Big(\eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\mu\partial_\mu A_-\Big) + \Big[\frac{\partial}{\partial\vartheta^{\nu]}}\tilde{A}\,,\,\eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\mu\partial_\mu A_-\Big]\Big)\\
&\quad +\vartheta_\mu\vartheta_\nu\Big(D_-\Big(D_-\tilde{A}_+ - \partial_+A_-\Big) + 2\Big(\eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\mu\partial_\mu A_-\Big)^2\Big)\\
&\quad +\Big[\tilde{A}\,,\,\frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\tilde{A} - 2\vartheta_{[\mu}\Big(D_-\frac{\partial}{\partial\vartheta^{\nu]}}\tilde{A} - \partial_{\nu]}A_-\Big) + \vartheta_\mu\vartheta_\nu D_-\Big(\eta + D_-\tilde{A} - \vartheta^\mu\partial_\mu A_-\Big)\Big]\Bigg)
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Nous allons maintenant résoudre la contrainte d'autodualité $\boldsymbol{\chi}_{[\mu\nu]^+} = 0$. La composante à l'ordre zéro implique

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\tilde{A}\Big)_{|0} = P^{-\ \sigma\rho}_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta^\sigma}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\rho}\tilde{A}\Big)_{|0} \equiv \chi_{\mu\nu} \tag{4.109}$$

où χ est une 2-forme anti-autoduale graduée impaire. Au premier ordre en ϑ, on obtient

$$P^{+\ \sigma\rho}_{\mu\nu}\Bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta^\lambda}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\sigma}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\rho}\tilde{A}\Big)_{|0} + 2\delta_{\lambda\sigma}F_{\rho-}\Bigg) = 0 \tag{4.110}$$

qui donne

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta^\sigma}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\tilde{A}\Big)_{|0} = -\Omega_{\mu\nu\sigma}{}^\rho F_{\rho-} \tag{4.111}$$

La composante suivante

$$P^{+\ \lambda\kappa}_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta^\sigma}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\rho}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\lambda}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\kappa}\tilde{A}\Big)_{|0} = 2P^+_{\mu\nu\sigma\rho}D_-\eta - 4P^{+\ \ \lambda}_{\mu\nu[\sigma}D_-\chi_{\rho]\lambda} \tag{4.112}$$

permet de déterminer la troisième composante de $\tilde{A}$ comme suit

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\sigma}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\rho}\tilde{A}\Big)_{|0} = \Omega_{\mu\nu\sigma\rho}D_-\eta - \Omega_{[\mu\nu\sigma}{}^\lambda D_-\chi_{\rho]\lambda} \tag{4.113}$$

Par récurrence, toutes les composantes de $\tilde{A}$ sont déterminées en fonction des champs déjà définis. Si on prend la forme étendue (2.103) et qu'on y substitue ϑ^μ à dx^μ, $\vartheta^\mu F_{\mu-}$ à $d_A\bar{\Phi}$, ainsi que D_- à chaque commutateur avec $\bar{\Phi}$, on obtient très exactement la forme complète de $\tilde{A}$. On résout ensuite de la même manière les termes linéaires en θ de la contrainte anti-autoduale. La composante linéaire en ϑ de $\tilde{A}_+$ est libre ; on définit $\tilde{A}_+ = A_+ + \Psi_\mu \vartheta^\mu + \cdots$. Le premier terme de la contrainte implique que

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta^\mu}\frac{\partial}{\partial\vartheta^\nu}\tilde{A}_+\Big)_{|0} = H_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \tag{4.114}$$

où H est une 2-forme anti-autoduale paire. On montre que toutes les autres composantes de $\tilde{A}_+$ sont également déterminées en fonction des champs déjà définis. En appliquant les mêmes substitutions définissant $\tilde{A}$ à partir de (2.103), auxquelles on ajoute la substitution de F_{+-} à $[\Phi, \bar{\Phi}]$, on peut écrire toutes les composantes de $\tilde{A}_+$ en fonction de celles de la forme étendue (2.107).

La solution générale des contraintes incluant les degrés de liberté longitudinaux dans le super-espace peut être obtenue via une super-transformation de jauge (4.101) à l'aide d'un superchamp général de composante d'ordre zéro nulle. On définit la fonction paire de ϑ, $\tilde{\gamma}$ vérifiant $\tilde{\gamma}_{|0} = 0$ et la fonction graduée impaire de ϑ, $\tilde{c}$; en fonction desquels on définit le superchamp $\boldsymbol{\alpha}$ par

$$e^{\boldsymbol{\alpha}} \equiv e^{-\theta\vartheta^\mu\partial_\mu} e^{\tilde{\gamma}} e^{\theta\tilde{c}} = e^{\tilde{\gamma}}\Big(1 + \theta\big(\tilde{c} - e^{-\tilde{\gamma}}\vartheta^\mu\partial_\mu e^{\tilde{\gamma}}\big)\Big) \tag{4.115}$$

La forme générale de $\mathbb{C}$ est alors

$$\mathbb{C} = \tilde{c} - e^{-\tilde{\gamma}}\big(\vartheta^\mu\partial_\mu + \tilde{A}\big)e^{\tilde{\gamma}} - \theta e^{-\tilde{\gamma}}\big(\partial_+ + \tilde{A}_+\big)e^{\tilde{\gamma}} - \theta\Big(\tilde{c} - e^{-\tilde{\gamma}}\big(\vartheta^\mu\partial_\mu + \tilde{A}\big)e^{\tilde{\gamma}}\Big)^2 \tag{4.116}$$

dont la composante à l'ordre zéro en θ correspond à la forme étendue (2.105). Les similitudes avec la symétrie vectorielle de la théorie de type cohomologique ne s'arrêtent pas là. On peut en fait définir la fixation de jauge sur le super-espace, $\partial^m \mathbb{A}_m$, dont le développement en composantes est similaire à la fixation de jauge (2.111).

Résumons la résolution des contraintes. Les superchamps $\mathbb{C}$, $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ et $\mathbb{A}_m$ contiennent respectivement 2^9, $8\cdot 2^9$ et $10\cdot 2^9$ degrés de liberté, incluant 2^9 degrés de liberté longitudinaux associés à l'invariance de jauge dans le superespace. La contrainte $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ élimine $\mathbb{A}_-$ en fonction de $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ et contraint celui-ci à n'avoir que de 2^9 degrés de liberté. Les contraintes $\boldsymbol{\Phi}$ et $\mathbb{L}_\mu$ déterminent respectivement $\mathbb{A}_+$ et $\mathbb{A}_\mu$ en fonction de $\mathbb{C}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$. A ce point nous avons donc deux superchamps $\mathbb{C}$ et $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ admettant chacun 2^9 degrés de liberté, dont 2^9 sont des degrés de liberté de pure jauge. La contrainte anti-autoduale contraint enfin $\mathbb{C}$ a ne dépendre que de 32 degrés de liberté, laissant bien les $16 + 16$ degrés de liberté transverses de la théorie de Yang–Mills supersymétrique dans sa formulation tordue en composantes [A.7].

Annexe A

Publications

On trouve dans cette annexe mes publications accompagnées d'un résumé en français.

A.1 Symétrie topologique vectorielle de BRSTQFT

L. Baulieu, G. Bossard et A. Tanzini,

« Topological vector symmetry of BRSTQFT and construction of maximal supersymmetry »

JHEP **0508**, 037 (2005), `hep-th/0504224`.

Dans les théories de type cohomologique, la BRST exactitude de l'action permet de choisir librement les paramètres de chaque terme du fermion de jauge invariant par rapport aux symétries globales de la théorie. Une manière naturelle de fixer la jauge consiste à contraindre l'antécédent BRST du tenseur énergie impulsion à être conservé modulo les équations du mouvement. On montre dans cette publication, que lorsque la théorie est définie sur une variété riemannienne admettant un champ de vecteur constant κ, la conservation de ce tenseur est équivalente à la donnée d'une symétrie vectorielle, δ, qui anticommute avec l'opérateur BRST topologique s pour donner la dérivée de Lie le long du champ de vecteur κ

$$\{s, \delta\} = \mathcal{L}_\kappa \tag{A.1}$$

La donnée de cette équation implique que l'opérateur étendu $d + s + \delta - i_\kappa$ est nilpotent (i_κ est la contraction le long du vecteur κ). On définit dans cet article une généralisation de la courbure étendue de Baulieu–Singer en quatre et huit dimensions, faisant intervenir cette différentielle, à partir de la définition d'une courbure étendue dans la théorie de Yang–Mills topologique couplée à la gravité topologique.

$$\begin{aligned}(d + s + \delta - i_{\kappa^h})\big(A + c + |\kappa|\bar{c}\big) + \big(A + c + |\kappa|\bar{c}\big)^2 \\ = F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_{\kappa^h}\chi + \Phi + |\kappa|^2\bar{\Phi}\end{aligned} \tag{A.2}$$

Cette équation détermine la transformation des champs sous les opérateurs scalaire et vectoriel, modulo la condition d'anti-autodualité sur la 2-forme antifantôme χ. Celle-ci est définie de manière usuelle dans le cas quadridimensionnel, et fait intervenir la 4-forme octonionique C en huit dimensions [16]. Le « h » en exposant du vecteur κ^h provient du fait qu'on considère les champs comme étant définis sur le fibré principal associé à la théorie de jauge couplée à la gravité, et le vecteur κ^h comme le relèvement horizontal du vecteur κ défini sur la variété de base, via la définition d'une connexion de fond $\mathring{\omega} \oplus \mathring{A}$ caractéristique du secteur topologique considéré. On montre dans cette publication que le fait de définir les équations de courbure étendue sur le fibré principal, permet de comprendre le changement de variable défini en [73] du point de vue de celles-ci, à travers la formule

$$\begin{aligned} \exp(-i_{\xi^h})(d+\mathcal{S})\exp(i_{\xi^h}) &= d+\mathcal{S}-\mathcal{L}_{\xi^h}+i_{\mathcal{S}\xi^h-\frac{1}{2}\{\xi^h,\xi^h\}} \\ &= d+\mathcal{S}-\mathcal{L}_{\xi^h}+i_{(\frac{1}{2}i^2_{\xi^h}\mathring{R})^v}+i_{(\frac{1}{2}i^2_{\xi^h}\mathring{F})^v}+i_{(\mathcal{S}\xi-\frac{1}{2}\{\xi,\xi\})^h} \end{aligned} \tag{A.3}$$

On retrouve après construction de l'action contrainte par les symétries, que le tenseur énergie impulsion admet un antécédent conservé modulo les équations du mouvement. On note que ce dernier possède une composante antisymétrique BRST invariante, de telle sorte que ce tenseur ne définit une symétrie de l'action que pour les vecteurs constants, et non pour tout vecteur de Killing laissant invariante la structure $Spin(7)$. La définition de la représentation des charges scalaire et vectorielle via l'équation de courbure étendue établit un « équilibre » entre les fantômes et les antifantômes. Ceci résulte du fait que la définition d'un vecteur constant sur la variété est une première étape vers la réduction dimensionnelle de la théorie, et que les réductions dimensionnelles sur le cercle des théories de type cohomologique souches en quatre et huit dimensions sont des théories de type cohomologique dites équilibrées [47]. Ces dernières admettent un groupe de symétrie globale $SL(2,\mathbb{R})$ dont un sous groupe $U(1)$ définit la conservation du nombre de fantômes. On montre dans cet article que la théorie souche admet comme symétrie une involution vectorielle, qui intervertit les fantômes et les antifantômes. L'action s et δ invariante, invariante par rapport à la symétrie globale $Spin(7)$ ($SO(4)$ en quatre dimensions), peut en fait s'écrire comme $s\delta\int\frac{1}{|\kappa|^2}\mathscr{F}$ modulo la seconde classe de Chern. Dans le cas d'une configuration topologique triviale, cette fonction s'écrit

$$\mathscr{F} = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{2}g(\kappa)_\wedge C_\wedge\Big(A_\wedge dA+\frac{2}{3}A^3\Big)+\big(g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi\big)_\wedge\star\Psi\right) \tag{A.4}$$

Elle rappelle la fonction de Morse de la théorie équilibrée correspondante en dimension sept (trois avec $C=1$).

Sur un espace plat, on montre que les charges scalaire et vectorielle s et δ déterminent l'action $Spin(7)$ invariante, ne faisant pas intervenir de terme qui ne serait pas renormalisable par comptage de puissance après réduction dimensionnelle jusqu'en quatre dimensions. Du point de vue de la théorie supersymétrique, ces charges définissent un sous super-groupe du super-groupe de super-Poincaré de la supersymétrie maximale en huit dimensions qui admet une représentation fonctionnelle sur les champs et qui est suffisante pour contraindre correctement l'action.

Cette construction est ensuite généralisée au cas de la théorie de type cohomologique équivariante par rapport à un groupe abélien $K \times H$, produit d'un groupe d'isométries K de la variété et d'un tore maximal du groupe de jauge $H \subset G$. Cette extension équivariante est en fait pertinente pour obtenir des propriétés de localisation supplémentaires de la théorie [49, 83]. Elle correspond à la torsion d'une théorie supersymétrique dite dans des fonds Ω, définie par réduction dimensionnelle de la théorie en dix dimensions, elle même définie sur un espace correspondant à une fibration de base torique et de fibre la variété octodimensionnelle [48]. On définit ainsi la courbure étendue

$$\begin{aligned}(d + s_{\mathfrak{k}} + \delta_{\mathfrak{k}} - i_{\kappa^h + \xi^* + |\kappa|^2 \bar{\xi}^*})\big(A + c + |\kappa|\bar{c}\big) + \big(A + c + |\kappa|\bar{c}\big)^2 \\ = F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_{\kappa^h}\chi + \Phi + |\kappa|^2\bar{\Phi} \qquad \text{(A.5)}\end{aligned}$$

où ξ^* et $\bar{\xi}^*$ sont des vecteurs définis sur le fibré principal qui engendrent l'action de $K \times H$ sur ce dernier. L'action peut encore s'écrire sous la forme $s_{\mathfrak{k}}\delta_{\mathfrak{k}} \int \frac{1}{|\kappa|^2}\mathscr{F}$, modulo la seconde classe de Chern. L'involution vectorielle n'est cependant une symétrie de la théorie que dans le cas $\xi^* = \bar{\xi}^*$. Or l'invariance par rapport à $\delta_{\mathfrak{k}}$ implique de fortes contraintes sur $\pi_*\bar{\xi}^*$ alors que $(d\pi_*\xi^*)_{ab}$ doit définir une matrice non dégénérée pour que la théorie ait des propriétés de localisation intéressantes. On montre également dans ce cas généralisé que l'action est uniquement déterminée par les charges scalaire et vectorielle sur un espace euclidien.

Topological vector symmetry of BRSTQFT and construction of maximal supersymmetry

abstract

The scalar and vector topological Yang–Mills symmetries determine a closed and consistent sector of Yang–Mills supersymmetry. We provide a geometrical construction of these symmetries, based on a horizontality condition on reducible manifolds. This yields globally well-defined scalar and vector topological BRST operators. These operators generate a subalgebra of maximally supersymmetric Yang–Mills theory, which is small enough to be closed off-shell with a finite set of auxiliary fields and large enough to determine the Yang–Mills supersymmetric theory. Poincaré supersymmetry is reached in the limit of flat manifolds. The arbitrariness of the gauge functions in BRSTQFT's is thus removed by the requirement of scalar and vector topological symmetry, which also determines the complete supersymmetry transformations in a twisted way. Provided additional Killing vectors exist on the manifold, an equivariant extension of our geometrical framework is provided, and the resulting "equivariant topological field theory" corresponds to the twist of super Yang–Mills theory on Ω backgrounds.

A.1.1 Introduction

Topological Yang–Mills theories have been studied extensively in various dimensions some years ago [16, 27, 23, 63]. They can be defined as a BRST invariant gauge-fixing of a topological invariant, and their topological observables are determined from the cohomology of the topological BRST scalar symmetry, whose geometrical interpretation is well understood.

However, a yet unsolved mystery is their relation, by a twist operation, to Poincaré supersymmetric theories, which describes particles. There is good evidence that this relation also extends to the case of topological gravity versus supergravity [64]. In fact, since topological symmetry has a clear geometrical interpretation, it has been proposed to use it to *define* Poincaré supersymmetry. Here we reach an understanding of the so-called vectorial topological symmetry of TQFT's, which further support this idea.

Vector symmetry was first observed as an invariance of the Chern–Simons action, gauge-fixed in the Landau gauge [65]. Its existence can be heuristically guessed from the possible conservation of the BRST antecedent of the energy momentum tensor. For a topological action that is the twist of a supersymmetric theory, its expression is identical to the symmetry that one obtains by twisting the spinorial generators of Poincaré supersymmetry, (as for the case of the scalar topological BRST operator). In fact, the twisted formulation has been used to greatly improve the study of various non-renormalization properties of $\mathcal{N}=2$ and 4 supersymmetric theories [68, 69, 70, 108].

This paper focuses to the Yang–Mills case. We show that the vectorial topological symmetry can be directly introduced, geometrically, prior to the construction of the TQFT. Basically, the vector symmetry arises when one associates reparametrization symmetry and topological symmetry in a relevant way. It is important to work on manifolds that contain at least one covariantly constant vector. Eventually, the super-Yang–Mills theory, with Poincaré supersymmetry, is reached by untwisting the theory, in the limit of flat manifolds.

We also use the method for constructing "equivariant topological field theories", whose observables are related to the equivariant cohomology classes of the moduli space of instantons. In fact, these topological theories can be seen as the twisted versions of the Super Yang–Mills theories on the Ω background introduced in [48], that are deformed version of ordinary supersymmetric theories.

The scalar and vector invariances of TQFT's constitute a relevant subalgebra that can be closed "off-shell". Eventually, this subalgebra is sufficient to completely determine the full "on-shell" set of supersymmetry generators in the flat space limit. We actually show that the invariance under scalar and vector symmetry, which we will geometrically construct, is sufficient in order to fully determine the $\mathcal{N}=2$ supersymmetric action, in 8 and 4 dimensions, respectively. In the latter case the supersymmetry with its 8 generators is actually determined by the construction of 5 generators, which build a closed algebra, and in the former case, 9 generators are sufficient to determine the supersymmetry with its 16 generators. The rest of the generators, (they are antiselfdual tensor in the twisted form), can be considered as an effective symmetry, that one gets for free as an additional symmetry of the action. They complete the scalar and vector symmetry generators into a set that can be untwisted toward Poincaré supersymmetry. They have no geometrical interpretation in our knowledge, and, moreover, the complete set of generators cannot be closed off-shell for the case of maximal supersymmetry, with 16 generators. Our result solves in particular the paradox that for maximal supersymmetry, there is no set of auxiliary fields for closing the on-shell set of supersymmetry transformations.

Determining the TQFT, and afterward the supersymmetric theory, from a symmetry principle that has a clear geometrical meaning, appears to us as a progress. Indeed, in earlier works, after having the geometrical construction of the scalar topological BRST symmetry, the determination of the action was tantamount to that of "topological gauge functions", including selfduality equations, but was not relying on a symmetry principle. Rather, one was looking for selfduality equations for the gauge fields, which one can enforce in a BRST invariant way. The lack of a complete symmetry principle was frustrating in this construction.

The way the geometrical construction for the scalar and vector BRST symmetries works is through the construction of two nilpotent graded differential operators s and δ that are nilpotent and anticommute up to a Lie derivative. These operators have a transparent meaning in the fiber bundles where the Yang–Mills field and the classical gravitational field are naturally defined. At each step of our construction, the necessary requirement of global well definition can be checked.

There is eventually a duality symmetry between s and δ, which merely express a symmetry between topological ghosts and antighosts. This gives a better understanding of antighosts as geometric entities, instead as BRST antecedents of the Lagrange multipliers of gauge functions, as has been traditionally done, through the notion of trivial BRST quartets.

In the generic case of 8 dimensions for maximal supersymmetry, the necessity of having a manifold with a constant vector implies that its holonomy group be G_2, or a subgroup of G_2. For such manifolds, the vector symmetry can be globally defined. Some example of such eight dimensional manifolds are given by $T^4 \times K_3$ and $T^2 \times CY_3$, where the Calabi–Yau 3-fold could be for example any quintic of $\mathbb{CP}^4$. These spaces are compatible with the twist operation from the topological symmetry to Poincaré supersymmetry. Notice that global supersymmetric theories must be defined in flat space, where the notion of a constant vector is not a restriction. It is only for the twisted case that the choice of the manifold is an issue. In 4 dimensions, to have a vector symmetry and perform twist operations, the space must be flat.

The formula that we will obtain are very similar in four and eight dimensions. Our results can be extended in lower dimensions by using dimensional reduction.

One may consider special actions with higher order derivative terms that depend on the twisted variables, and are invariant under both scalar and vector BRST symmetries.

(Scalar and vector BRST invariant actions that are quadratic in the field derivatives are automatically invariant under the full supersymmetric algebra in flat space). Such actions, which are only invariant under a smaller but consistent supersymmetry, can be defined on direct products of flat manifolds times manifolds of special holonomy.

From a physical point of view, our approach brings new insight for $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills in four dimensions. Having a closed off-shell algebra tremendously clarifies the control of the renormalization, since it allows for a standard BRST quantization. In previous covariant formulations, one must use instead a symmetry, which is larger in a spurious way, and only closes modulo equations of motion. Moreover, in the twisted formulation, the geometrical equations also directly introduce all Faddeev–Popov ghost in a consistent way, and BRST quantization and renormalization follow by imposing only both scalar and vector topological symmetries. One expects that this permits one to directly show that the renormalized gauge independent observables maintain their supersymmetry covariance. These facts will be published in a separate work, including the derivation of the $\mathcal{N}=4, d=4$ theory in the twisted formulation, and an improved and simpler proof of renormalization and finiteness.

Eventually, we express the topological acions as a $s\delta$-exact (i.e, scalar *and* vector BRST-exact) term, with a nice correspondence with the Chern–Simon action. In fact our formula are reminiscent of previous one found in the general context of "balanced topological theories", [47], with $\mathcal{N}_T \geq 2$, but here we manage to consider the case $\mathcal{N}_T = 1$, with a pair of "balanced operators" (s and δ), by using a covariantly constant vector in the manifold. Then, it is quite natural to write supersymmetric actions as a $s\delta$-exact term, but the potential cannot be generally considered as a Morse function, and it allows for ghosts and antighost that different tensor structures.

The paper is organized as follows. We first give heuristic evidence that the vector symmetry is a consequence of the possible conservation of the BRST-antecedent of the energy-momentum tensor of a TQFT - in fact it is equivalent. Then we give the important result that there is a geometrical construction of the vector symmetry which is completely independent of the idea of Poincaré supersymmetry. (We include a section for ensuring global consistency of the formula). We display the invariant action under various forms, and briefly discuss the untwisting toward supersymmetry. In the last part of the paper, we show the equivariant extension of our formulation and show the relationship with twisted supersymmetry on the Ω-background.

A.1.2 Physical evidence for vector symmetry

Let S be a BRSTQFT topological action. Its Lagrangian is reparametrization invariant. In local coordinates, $\mathcal{L}_\xi$ represents the action of diffeomorphisms on the fields, and we can define local functionals $L_{A\,\mu}(x-y)$ corresponding to each field φ_A of the theory as follows :

$$\mathcal{L}_\xi \varphi_A(x) = -\int_M d^n y \xi^\mu(y) L_{A\,\mu}(y-x) \tag{A.6}$$

We are aware that in order this operator be globally well-defined, we should add to the Lie derivative $\mathcal{L}_\xi$ gauge transformations that permit its covariantization. However, in this section, we only consider operators that are basically defined modulo gauge transformations, in such a way that this subtlety is not relevant. Global requirements will be fulfilled when we will construct the vector symmetry, the existence of which we heuristically justify in this section. The reparametrization invariance of S implies the "off-shell" conservation law :

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_A \int_M d^n y\, L_{A\,\mu}(x-y) \frac{\delta^L S}{\delta \varphi_A(y)} \tag{A.7}$$

where δ^L denotes the left-derivative, and $T_{\mu\nu}$ is the energy momentum tensor

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{e}\, \delta_{ab}\, \frac{\delta S}{\delta e^\mu_b}\, e^a_\nu \tag{A.8}$$

Up to a topological term, the action S is s-exact, $S = s\int_M \mathbf{\Psi}$, where the topological gauge function $\mathbf{\Psi}$ has ghost number -1 and s is a topological BRST operator, which is a scalar under reparametrization. The s-exactness of the action implies that the energy momentum tensor is also s-exact. Thus :

$$T_{\mu\nu} = s\Lambda_{\mu\nu} \tag{A.9}$$

where $\Lambda_{\mu\nu}$ is a local functional of the fields and has ghost number -1. The gauge function $\mathbf{\Psi}$ is yet arbitrary. Our aim is of removing this indetermination by a symmetry principle. The latter should also be a canonical property that defines a regularized action in the path integral.

We propose that this additional requirement is that the energy momentum tensor admits a conserved BRST antecedent, modulo equations of motions, consistently with Eq.(A.9) :

$$\nabla^\nu \Lambda_{\mu\nu} \approx 0 \tag{A.10}$$

As a matter of fact, this property (A.10) determines the theory in the Yang–Mills case, by adjusting all coefficients in the possible topological gauge functions $\mathbf{\Psi}$, in such a way that one eventually gets the twisted Yang–Mills supersymmetric action.

Eventually, we will transform this property into a symmetry principle.

Since $\Lambda_{\mu\nu}$ is a local functional of the fields, its conservation law must take the form

$$\nabla^\nu \Lambda_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_A \int_M d^n y \, V_{A\,\mu}(x-y) \frac{\delta^L S}{\delta \varphi_A(y)} \tag{A.11}$$

where $V_{A\,\mu}(x-y)$ are local functionals with ghost number -1 of the fields φ_A. As in the case of the energy momentum tensor, where $L_{A\,\mu}$ determines the diffeomorphism generators, we can define from the $V_{A\,\mu}$ the following vector operator [66, 67] :

$$\delta \varphi_A(x) = -\int_M d^n y \, \kappa^\mu(y) V_{A\,\mu}(y-x) \tag{A.12}$$

Here $\kappa^\mu(y)$ is a globally well defined *given* vector field (which makes a distinction as compared to the ghost $\xi^\mu(x)$ of the diffeomorphism symmetry). Note also that this transformation is not an infinitesimal one, κ is a finite vector field. Asking for the invariance of the action S under δ-transformations restricts the choice of κ. One has indeed :

$$\delta S = -\int_M d^n x \sum_A \int_M d^n y \, \kappa^\mu(y) V_{A\,\mu}(y-x) \frac{\delta^L S}{\delta \varphi_A(x)} = \int_M d^n x \sqrt{g} \, \Lambda_{\mu\nu} \nabla^\nu \kappa^\mu \tag{A.13}$$

(In the last equality we performed an integration by parts, so the necessity of global consistency must be remembered). From Eq. (A.13) we deduce that the δ-invariance of the action only holds if κ is covariantly constant. We stress that, κ being a Killing vector is sufficient, since $\Lambda_{\mu\nu}$ is generally non symmetrical, see Sect.5 for more details.

The association between a global symmetry of the theory and the conservation of a current is nothing but the Noether theorem. As a matter of fact, on any given specific case, one can redefine $\Lambda_{\mu\nu}$ by the addition of a term linear in the equations of motion, in such way that its conservation law takes the simpler form

$$\nabla^\nu \Lambda'_{\mu\nu}(x) = \sum_A V_{A\,\mu}(x) \frac{\delta^L S}{\delta \varphi_A(x)} \tag{A.14}$$

Under this form, $\Lambda'_{\mu\nu}$ can be identified to the Noether current associated to the δ symmetry.

The statement that the conservation equation determines the complete form of the operator δ is however a non trivial one. As we will see further down, in this heuristic derivation, δ is determined modulo gauge transformations and terms linear in the equations of motion.

The understanding of the vector symmetry requires the determination of its commutation relations with the scalar BRST symmetry. We have :

$$
\begin{aligned}
\int d^n y L_{\mu A}(x-y)\frac{\delta S}{\delta\varphi_A(y)} = \sqrt{g}\,\nabla^\nu T_{\mu\nu}(x) = s\int d^n y V_{\mu A}(x-y)\frac{\delta S}{\delta\varphi_A(y)} \\
= \int d^n y\Big(sV_{\mu A}(x-y)\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_A(y)} - (-1)^A V_{\mu A}(x-y)s\frac{\delta S}{\delta\varphi_A(y)}\Big) \\
= \int d^n y\Big(sV_{\mu A}(x-y) + \int d^n z V_{\mu B}(y-z)\frac{\delta s\varphi_A(y)}{\delta\varphi_B(z)}\Big)\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_A(y)}
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

where the sum over repeated indices is assumed, as well as the fact that the functionals derivatives are taken to the left. To prove Eq. (A.15), one uses the following identity, which is consequence of the s-invariance of S :

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_M d^n z\frac{\delta}{\varphi_A(y)}\Big(s\varphi_B(z)\frac{\delta S}{\delta\varphi_B(z)}\Big) \\
&= \int_M d^n z\left(\frac{\delta s\varphi_B(z)}{\delta\varphi_A(y)}\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_B(z)} + (-1)^{(A+1)B}s\varphi_B(z)\frac{\delta}{\varphi_A(y)}\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_B(z)}\right) \\
&= \int_M d^n z\frac{\delta s\varphi_B(z)}{\delta\varphi_A(y)}\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_B(z)} + (-1)^A s\frac{\delta S}{\delta\varphi_A(y)}
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

In fact, Eq. (A.15) indicates that one has

$$
\{s,\delta\} \approx \mathcal{L}_\kappa \tag{A.17}
$$

on all fields φ_A, at least modulo gauge transformations and modulo terms proportional to the equations of motion.

This point is not completely obvious. Eq. (A.17) would be exact if the Eq. (A.15) would constrain the both functionals $L_{\mu\, A}(x-y)$ and $sV_{\mu A}(x-y)+\int d^n z V_{\mu B}(y-z)\frac{\delta s\varphi_A(y)}{\delta\varphi_B(z)}$ to be equal. The indetermination of this equation reverts to the determination of the solution of the equation

$$
\int d^n y R_{\mu\, A}(x-y)\frac{\delta S}{\delta\varphi_A(y)} = 0 \tag{A.18}
$$

and the equation (A.17) is satisfied modulo the transformations which could be generated by the functional $R_{\mu\, A}$. One has actually an analogous situation for the determination of the operator δ from the conservation low of $\Lambda_{\mu\nu}$.

We first observe the existence of the following solution of Eq. (A.18)

$$R_{\mu\,A}(x-y) = \Big(R_{\mu\,AB}(x-y) - (-1)^{AB} R_{\mu\,BA}(x-y)\Big)\frac{\delta S}{\delta\varphi_B(y)} \tag{A.19}$$

for any local functional of the fields $R_{\mu\,AB}$. Because of this solution the commutation relation of s and δ could be true only modulo terms involving the equations of motion. One has to check whether there are other solutions of the equation (A.18) that cannot be written as a term linear in the equations of motion. We assume that all local functionals which are zero when the equations of motion are satisfied are linear in the equations of motion thereself via a local functional of the fields. With this assumption, if there is another solution, we can differentiate the equation (A.18) with respect to $\varphi_B(z)$, and obtain

$$\left(\int d^n y R_{\mu\,A}(x-y)\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_A(y)\delta\varphi_B(z)}\right)_{\big|\frac{\delta S}{\delta\varphi_A}=0} = 0 \tag{A.20}$$

when the equations of motion are satisfied. The functional $\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_A\delta\varphi_B}$ is only degenerated in theories with constraints. The solution of the equation (A.20) is by definition a gauge transformation. So the general solution of the equation (A.18) is a sum of terms linear in the equations of motion, and of local functionals which correspond to gauge transformations (or reparametrizations in gravity). Therefore δ and its commutator with s are determined modulo gauge transformations and equations of motion from (A.11) and (A.15).

At this level of the discussion, one may feel frustrated by the lack of geometrical understanding of the situation, and it appears that a direct construction of δ, which satisfies Eq.(A.17) and has ghost number -1, is needed.

Therefore we now adopt the attitude that one must reverse the point of view, and directly construct both differential operators s and δ, from geometrical principles. Then the determination of the action from s and δ invariances will warranty the conservation law of both the energy momentum tensor and of its $s-$antecedent $\Lambda_{\mu\nu}$ [1]. The determination of the superPoincaré algebra will be a corollary, using twist arguments that are allowed on the manifold that we will use.

The following sections are devoted to the geometrical construction of the symmetries in the Yang–Mills case, for the generic dimensions 4 and 8. We will also construct abinitio the differential operators s and δ, with an interesting irruption of antighosts on

[1] The question of anomalies of s and δ invariances is of course an interesting question

the scenery. In fact, their geometrically interpretation will arise form a duality relation between the ghosts and the antighosts, as in balanced topological field theories.

The algebra will respect by construction the closure relation Eq.(A.17) that is suggested by the above heuristic discussion. Eventually, we will compute the antecedent of the energy momentum tensor, and verify that it generates the δ-symmetry.

A.1.3 The gravitational and Yang–Mills extended curvatures

Topological symmetry and globality requirement

The Yang–Mills topological symmetry BRST operator s_{top} is defined from the equation

$$(d + s_{\text{top}})\big(A + c\big) + \big(A + c\big)^2 = F + \Psi + \Phi \tag{A.21}$$

Ref. [16] gives the interpretation of all fields in Eq.(A.21).

To extend this horizontality condition and eventually define the vector symmetry, we found that we must make it compatible with reparametrization invariance, and, moreover, antighost dependent. In fact, by finding the way of combining consistently topological symmetry and reparametrization invariance, we will define scalar and vector topological invariances and reparametrization symmetry, with transformation laws that are globally well-defined. To obtain global consistency, we face the not so trivial question of expressing the transformation laws of Yang–Mills connections under reparametrizations, in the base space M, over which one compute the path integral. The appropriate language is well-known : it is the fiber bundle formalism. It allows one to define connections and their curvatures, and, eventually, combine Eq.(A.21) with reparametrization symmetry. We will show that the symmetry transformations of the fields are most easily obtained when they are lifted in the fiber bundle. Then we will give the prescription to perform the projection on the base space, which defines the fields that one can insert in a path integral. Taking equal to zero the background connection is basically the wish for the impatient reader. The latter can identify the vector ghost that expresses the reparametrization ghost in the base space with its lifted expression in the fiber bundle. (The background connections for Lorentz and Yang–Mills invariances that we will shortly introduce, $\mathring{A}$ and $\mathring{\omega}$, define the horizontal lift of the reparametrization ghost, from ξ to ξ^h. Taking $\mathring{A} = \mathring{\omega} = 0$ is often possible for field configurations that one encounters in quantum field theory, so one can indeed often identify ξ and ξ^h)

Using the fiber bundle language is not an unjustified excess of mathematical rigor. It allows the construction of an action that is a well-defined integral over the whole manifold, by ensuring that the Lagrangian and the symmetry transformations involve globally well defined objects.

To define the reparametrization symmetry, one uses the notion of spin-connection, with ω as a gauge field for the Lorentz symmetry. This allows us to define the expression of combined Lorentz and reparametrization symmetry, as was done long time ago in the case of determining and classifying gravitational anomalies [71, 72, 73]. We will first consider the purely gravitational bundle, and then generalize it for including the topological Yang–Mills symmetry.

Eq.(A.21) only involves the topological ghosts. In [16] the antighosts are considered as a trivial BRST sector, which one introduces in order to do the topological gauge-fixing. At the heart of the notion of a TQFT, there is however a mapping between the ghost and antighost Hilbert spaces. The introduction of the topological vector symmetry will unexpectedly permit a transparent geometrical interpretation of the antighosts, "dual" to that of the ghosts, with some relationship to the idea of antiBRST symmetry.

Pure gravitational case

We will construct a gravitational "horizontality condition" for defining the reparametrization symmetry and the way Yang–Mills connections and their topological ghosts transform under reparametrization. We will eventually reach an algebra that is globally well defined.

To carry out this program, we define the gravitational horizontality condition on the total gravitational principal bundle Π over the manifold M_n, (n is either 4 or 8), over which we will define the path integral.

$$\begin{array}{ccc} SO(n) & \rightarrow & \Pi \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array} \tag{A.22}$$

Then, we will introduce a relevant background Lorentz connection $\overset{\circ}{\omega}$.

A given connexion on Π is equivalent to the selection of a decomposition of its tangent space

$$T\Pi \cong TV \oplus TH \tag{A.23}$$

It is known that the $\mathfrak{so}(n)$ valued p-forms on M are identified by the use of local trivializations to the equivariant forms in $\mathfrak{so}(n) \otimes \Lambda^p TH^*$. The gauge potential defined on open sets of M is the local trivialization of the globally well defined connection in

$\mathfrak{so}(n) \otimes TV^*$. In order not add too much notations, we will use the same notations for the objects defined on Π as for their local trivializations on M.

The following covariant horizontality condition on Π defines a nilpotent and consistent graded differential operator $\mathcal{S}$, (which we donnot yet interpret), acting on the connection ω and its ghost Ω

$$(d+\mathcal{S})\big(\omega+\Omega\big)+\big(\omega+\Omega\big)^2=\exp(i_{\xi^h})R \tag{A.24}$$

ξ^h is the horizontal lift on TH_0 of the reparametrization ghost vector field ξ defined on TM. Eq. (A.24) is the generalization of that first found in [71] for M. It is aimed to determine transformations that contain local Lorentz transformations and reparametrization transformations, in the BRST formalism. The ξ^h- dependence, instead of a genuine ξ-dependence, involves the existence of a background connexion $\mathring{\omega}$, which allows us to make reparametrization explicitly compatible with (Lorentz) gauge transformations[2]. $R = d_\omega \omega$ is the definition of the curvature in Π.

The contraction operator i_{ξ^h} acts on all relevant objects in Π, forms and connections. An easy computation gives the following identity on Π :

$$\exp(-i_{\xi^h})(d+\mathcal{S})\exp(i_{\xi^h})=d+\mathcal{S}-\mathcal{L}_{\xi^h}+i_{(\mathcal{S}\xi^h-\frac{1}{2}\{\xi^h,\xi^h\})} \tag{A.25}$$

where $\mathcal{L}_{\xi^h}=[i_{\xi^h},d]$.

The nilpotency of the graded operator $(d+\mathcal{S})$ amounts to that in the rhs of Eq.(A.25). This equation implies the introduction in M of a vector field $\varphi=\mathcal{S}\xi-\frac{1}{2}\{\xi,\xi\}$, that we may call a ghost of ghost of the reparametrization ghost ξ. We must have for consistency the following transformation laws :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\xi&=\varphi+\frac{1}{2}\{\xi,\xi\}\\ \mathcal{S}\varphi&=\mathcal{L}_\xi\varphi\end{aligned} \tag{A.26}$$

(Ref. [72] explains the algebraic details of this construction). Provided that the latter equation is satisfied, nothing forbids that $\varphi \neq 0$.

φ is a vector field on TM, with horizontal lift φ^h on TH_0 whose possible existence is, for the moment, just a logical possibility.

In ordinary gravity, in order to interpret $\mathcal{S}$ as the BRST operator of plain reparametrization invariance, φ must be fixed to zero. In this case, $\mathcal{S}$ just express the ordinary gravitational and Lorentz BRST symmetry. Formally, when $\varphi \neq 0$, Eq.(A.26) looks like the Weyl extension of the Lie algebra of diffeomorphisms.

[2] We note TH_0 the horizontal tangent space defined by the background connexion $\mathring{\omega}$.

Since $\mathring{\omega}$ is a background field, $\mathcal{S}\mathring{\omega}=0$ and the BRST operator must commute with the horizontal lift that it defines, $\mathcal{S}(\xi^h)=(\mathcal{S}\xi)^h$, that is

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\xi^h &= \varphi^h+\frac{1}{2}\{\xi,\xi\}^h\\ &= \varphi^h+\frac{1}{2}\{\xi^h,\xi^h\}+\Big(\frac{1}{2}i^2_{\xi^h}\mathring{R}\Big)^v\end{aligned} \tag{A.27}$$

where $\Big(\frac{1}{2}i^2_{\xi^h}\mathring{R}\Big)^v\equiv r^v$ is the fundamental vertical vector associated to the $\mathfrak{so}(n)$-valued element $\frac{1}{2}i^2_{\xi^h}\mathring{R}$. Eq.(A.27) can be read as a definition of the background curvature $\mathring{R}\equiv d_{\mathring{\omega}}\mathring{\omega}$.

We can thus rewrite Eq.(A.25) in Π under the following form :

$$\exp(-i_{\xi^h})(d+\mathcal{S})\exp(i_{\xi^h})=d+\mathcal{S}-\mathcal{L}_{\xi^h}+i_{r^v}+i_{\varphi^h} \tag{A.28}$$

We redefine on Π, $\tilde{\Omega}\equiv\Omega-i_{\xi^h}\omega$, which must be written on M as follows, by the use of local trivialization

$$\tilde{\Omega}=\Omega-i_\xi(\omega-\mathring{\omega}) \tag{A.29}$$

Indeed $\omega-\mathring{\omega}$ is a tensorial form, and truly corresponds to a horizontal form on Π ; we can thus finally rewrite the gravitational horizontality condition in Π as :

$$(d+\mathcal{S}-\mathcal{L}_{\xi^h}+i_{r^v}+i_{\varphi^h})\big(\omega+\tilde{\Omega}\big)+\big(\omega+\tilde{\Omega}\big)^2=R \tag{A.30}$$

Eq.(A.30) can be expanded in ghost number, and projected on M.

For $\varphi=0$, the resulting pure gravitational transformation laws depends on $\mathring{\omega}$, and are as those that were computed in [73], by asking that the gravitational BRST equations correspond to a Lie algebra.

We will actually generalize Eq.(A.30), when the relevant new ingredients will be introduced to combine it with the Yang–Mills topological symmetry and obtain the topological vector symmetry, with $\varphi\neq 0$. We will perform the projection at this moment. So, we momentarily leave Eq.(A.30) as it, and spend a few lines to comment on the operators that appear in it.

Since it is defined on $\Lambda^\bullet TV^*$, the contraction operator (i_{r^v}) acts non trivially only on the connection. It generates a term $\frac{1}{2}i^2_{\xi^h}\mathring{R}$ when one expands in ghost number the horizontality condition.

$\mathcal{L}_{\xi^h}$ is defined as, $\mathcal{L}_{\xi^h}\equiv[i_{\xi^h},d]$, where d is the exterior derivative on $\Lambda^\bullet T\Pi^*$. It is defined for any p-form w to be :

$$\mathcal{L}_{\xi^h}w\equiv\Big(\frac{d}{dt}\phi^*_{\xi^h,t}w\Big)_{|t=0} \tag{A.31}$$

where $\phi^*_{\xi^h,t}$ is the pullback application of the flow $\phi_{\xi^h,t}$, defined by

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,\phi_{\xi^h,t}(p) &\equiv \xi^h{}_{|\phi_{\xi^h,t}(p)} \\ \phi_{\xi^h,0}(p) &\equiv p \end{aligned} \tag{A.32}$$

The curve $t \in [0,1] \to \phi_{\xi^h,t}(p) \in \Pi$ is the horizontal lift of $t \in [0,1] \to \phi_{\xi,t}(\pi p) \in M$ starting from p , where π is the projection from Π to M of the fiber bundle. As such, $\mathcal{L}_{\xi^h}$ is a parallel transport generator and since the parallel transports preserves the tensoriality property of forms, $\mathcal{L}_{\xi^h}$ does also. It follows that the projection of $\mathcal{L}_{\xi^h}$ in M must be locally expressed as :

$$\mathcal{L}_\xi + \delta_{\text{Lorentz}}(i_\xi \mathring{\omega}) \tag{A.33}$$

In fact, the projection in M of i_{ξ^h} is i_ξ for a tensorial form, and $i_\xi(\omega - \mathring{\omega})$ for a connection.

We will now address the possibility $\varphi \neq 0$ by coupling gravity to Yang–Mills topological symmetry, so that $\mathcal{S}$ will have a more general interpretation, which will allow us to define the vector topological symmetry.

Yang–Mills coupled to gravity

In order to couple the Yang–Mills symmetry with gravity and obtain a horizontality condition for the topological Yang–Mills symmetry coupled to reparametrization symmetry, we introduce another (Yang–Mills) principal bundle P :

$$\begin{array}{ccc} G & \to & P \\ & & \downarrow \\ & & M \end{array} \tag{A.34}$$

The additional horizontal Yang–Mills lift is defined by introducing a background connexion $\mathring{A}$ on P. One defines in P :

$$(d+\mathcal{S})\big(A+\mathcal{C}\big) + \big(A+\mathcal{C}\big)^2 = \exp(i_{\xi^h})\big(F+\Psi+\Phi\big) \tag{A.35}$$

In an analogous way as in the previous section, we do a left-multiplication by the operator $\exp(-i_{\xi^h})$, and we obtain :

$$(d+\mathcal{S}-\mathcal{L}_{\xi^h}+i_{f^v}+i_{\varphi^h})\big(A+\tilde{\mathcal{C}}\big) + \big(A+\tilde{\mathcal{C}}\big)^2 = F+\Psi+\Phi \tag{A.36}$$

where $f^v \equiv \left(\frac{1}{2} i^2_{\xi^h} \mathring{F}\right)^v$ ($\mathring{F} \equiv d_{\mathring{A}}\mathring{A}$) and $\tilde{\mathcal{C}} \equiv \mathcal{C} - i_{\xi^h} A$.

To absorb the reparametrization ghost dependence, it is convenient to define a new operator $\hat{\mathcal{S}}$, from $\mathcal{S}$ [72]. For all fields, but the Faddeev-Popov ghosts $\tilde{\Omega}$ and $\tilde{\mathcal{C}}$, we define

$$\hat{\mathcal{S}} \equiv \mathcal{S} - \mathcal{L}_\xi - \delta_{\text{Lorentz}}(i_\xi \mathring{\omega}) - \delta_{\text{gauge}}(i_\xi \mathring{A}); \tag{A.37}$$

and for $\tilde{\Omega}$ and $\tilde{\mathcal{C}}$, we define :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}\tilde{\Omega} &\equiv \mathcal{S}\tilde{\Omega} - \mathring{\mathscr{L}}_\xi \tilde{\Omega} + \frac{1}{2} i_\xi^2 \mathring{R} \\ \hat{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{C}} &\equiv \mathcal{S}\tilde{\mathcal{C}} - \mathring{\mathscr{L}}_\xi \tilde{\mathcal{C}} + \frac{1}{2} i_\xi^2 \mathring{F}, \end{aligned} \tag{A.38}$$

where $\mathring{\mathscr{L}}_\xi \equiv [i_\xi, d_{\mathring{\omega}+\mathring{A}}]$.

As a consequence of $\mathcal{S}^2 = 0$, one can check that :

$$\hat{\mathcal{S}}^2 = -\mathcal{L}_\varphi - \delta_{\text{Lorentz}}(i_\varphi \mathring{\omega}) - \delta_{\text{gauge}}(i_\varphi \mathring{A}) \tag{A.39}$$

and

$$\hat{\mathcal{S}} d + d\hat{\mathcal{S}} = 0. \tag{A.40}$$

Using $\hat{\mathcal{S}}$ or $\mathcal{S}$ is a matter of convenience, which depends on the problem at hand.

The "decoupled" (i.e, with no explicit ξ-dependence) horizontality conditions read on Π and P :

$$\begin{aligned} (d + \hat{\mathcal{S}} + i_{\varphi^h})\big(\omega + \tilde{\Omega}\big) + \big(\omega + \tilde{\Omega}\big)^2 &= R \\ (d + \hat{\mathcal{S}} + i_{\varphi^h})\big(A + \tilde{\mathcal{C}}\big) + \big(A + \tilde{\mathcal{C}}\big)^2 &= F + \mathbf{\Psi} + \mathbf{\Phi} \end{aligned} \tag{A.41}$$

They look almost as standard equations in flat space, except for the appearance of the operator i_{φ^h}.

To summarize, we started from horizontality equations that are well-defined in the fiber bundle. By projection on the manifold M, we obtain graded equations that determine the operator $\mathcal{S}$ in local coordinates, with transformation laws that are by construction globally well-defined, and will be shortly displayed. The redefinition of $\mathcal{S}$ into $\hat{\mathcal{S}}$ gives simple expressions.

By expansion in ghost number, the latter equations (A.41) determines the action of the BRST operator $\hat{\mathcal{S}}$ that is equivariant with respect to the reparametrization group. After projection on M, they are :

$$\mathcal{S}A - i_\xi F + d_A i_\xi \big(A - \mathring{A}\big) + d_A \tilde{\mathcal{C}} = \mathbf{\Psi} \tag{A.42}$$

$$\mathcal{S}\tilde{\mathcal{C}} - \mathring{\mathscr{L}}_\xi \tilde{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}[\tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{C}}] + i_\varphi \big(A - \mathring{A}\big) + \frac{1}{2} i_\xi^2 \mathring{F} = \mathbf{\Phi} \tag{A.43}$$

We have similar equations for the action of $\mathcal{S}$ on ω and $\hat{\Omega}$. Using the relation between $\mathcal{S}$ and $\hat{\mathcal{S}}$, the equations can be equivalently rewritten in the following way, which shows more explicitly, term by term, that we have truly reached a globally well-defined definition of the BRST operation $\hat{\mathcal{S}}$:

$$\hat{\mathcal{S}}A + d_A\tilde{\mathcal{C}} = \boldsymbol{\Psi} \tag{A.44}$$

$$\hat{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}[\tilde{\mathcal{C}},\tilde{\mathcal{C}}] + i_\varphi\big(A - \mathring{A}\big) = \boldsymbol{\Phi} \tag{A.45}$$

This latter expression of the symmetry is particularly convenient, in particular for computing the invariant Lagrangian.

Putting equal to zero the background connections

The formula are simplest when one sets to zero the background connections $\mathring{A} = 0$ and $\mathring{\omega} = 0$, and make no distinction between the vector fields in the fiber bundle and in M (which is generally an improper choice from a global point of view, but is sufficient in perturbative quantum field theory around the trivial vacuum). This gives the transformation laws as in [72], which express the reparametrization and Yang–Mills symmetry. As indicated at the time, they express the symmetry in two equivalent ways, which are sufficient to control the symmetry of the TQFT :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}A + d_A\mathcal{C} &= \boldsymbol{\Psi} + i_\xi F \\ \mathcal{S}\mathcal{C} + \frac{1}{2}[\mathcal{C},\mathcal{C}] &= \boldsymbol{\Phi} + i_\xi\Psi + \frac{1}{2}i_\xi^2 F \end{aligned} \tag{A.46}$$

and

$$\begin{aligned} (\mathcal{S} - \mathcal{L}_\xi)A + d_A\tilde{\mathcal{C}} &= \boldsymbol{\Psi} \\ (\mathcal{S} - \mathcal{L}_\xi)\tilde{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}[\tilde{\mathcal{C}},\tilde{\mathcal{C}}] + i_\varphi A &= \boldsymbol{\Phi} \end{aligned} \tag{A.47}$$

where $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} - i_\xi A$. The expression of $\mathcal{S}$ in Eq.(A.46) is explicitly covariant, but tedious to use. The expression of $\hat{\mathcal{S}} \equiv (\mathcal{S} - \mathcal{L}_\xi)$ in Eq.(A.47) is convenient, all dependence in ξ is hidden, owing to the field redefinition $\mathcal{C} \to \mathcal{C} - i_\xi A$. Moreover, for an integral over the manifold, $\mathcal{S}$ and $\hat{\mathcal{S}}$ invariances are the same. This field redefinition looks not globally well-defined, as $i_\xi A$ is ambiguous from a global point of view, but the above analysis has taught us how to remedy this, it must be understood as $\mathcal{C} \to \mathcal{C} - i_\xi(A - \mathring{A})$, and for the rest one should keep in mind the dependence in the background connection $\mathring{A}$, indicated in Eqs.(A.37,A.38).

We actually have a consistent recipe : global consistency is obtained from the simplest formulation with no background connection, provided one replaces all connections that may appear in the form $i_\varphi \omega$ or $i_\varphi A$ by their difference with a background connection $i_\varphi\big(A-\mathring{A}\big)$ or $i_\varphi\big(\omega-\mathring{\omega}\big)$. This eventually defines a differential $\hat{\mathcal{S}}$, which encodes the relevant information on the gauge symmetry and reparametrization. $\hat{\mathcal{S}}$-invariance defines the theory.

The above presentation makes a bridge between the facts that the expression for the BRST symmetry is simplest in the fibers bundle Π, P, defined over the manifold M, while it needs more elaborate formula on M, where quantum field theory is computed. It yields unambiguously the dependence in the background connection that delivers well-defined integrals over M.

Extended horizontality condition for the scalar and vector topological symmetry

We now reach the important point of the paper, that, given a given covariantly constant vector κ on M, we can geometrically build the topological vector BRST operator out of a globally well-defined operator $\hat{\mathcal{S}}$. the vector symmetry will be shortly defined as a differential graded operator δ with ghost number -1. We understood in section 2 that a BRST-exact action can possibly define a vector symmetry that leaves it invariant. The question is to find a geometrical way of building this vector symmetry.

Since we have in mind the determination of the vector symmetry from an "extended horizontality condition", we may wish to get a hint that it is possibly contained in the geometrical formalism. We can see it from the following indirect argument, which heuristically provides evidence that the ordinary horizontality condition of a $\mathcal{N}_T = 1$ TQFT contains the germs of another symmetry than the usual topological BRST symmetry. There are in fact topological theories with more than one scalar operator that can be identified to a BRST operator. They are known as balanced topological theories [47]. They are often obtained by dimensional reduction of a $\mathcal{N}_T = 1$ TQFT. Such theories have a symmetry between ghosts and anti-ghost which is $SL(2,\mathbb{R})$ in the case of two charges, $\mathcal{N}_T = 2$. Both BRST algebras can be described by a BRST-antiBRST horizontality condition, which displays a symmetry between ghosts and anti-ghosts. For instance, $\mathcal{N}_T = 2$ occurs when one dimensionally reduces from 4 to 3 (or from 8 to 7) dimensions the genuine d=8 (or d=4) $\mathcal{N}_T = 1$ topological Yang–Mills theory. In this case, the topological ghost and antighost of the dimensionally reduced gauge field are symmetrical pair of anticommuting vectors that belong to the fundamental representation of $SL(2,\mathbb{R})$, and the scalar topological ghost of ghost, the corresponding antighost of antighost and the Higgs field, which results from the dimensional reduction of the Yang–Mills field, fall into the adjoint representation of $SL(2,\mathbb{R})$. (Of course this phenomenon is related to the property of the R-symmetry in supersymmetric theories). In these cases, dimensional reduction allows us to obtain a BRST-antiBRST symmetry from a theory that seems to have only one BRST symmetry.

Dimensional reduction occurs by giving a special role to a given dimension, and results in the elimination of the non-zero modes along a one-dimensional space H.

By enforcing reparametrization invariance in the relevant way, we will find, that on a reducible manifold $M \cong H \times N$ where $H \cong \mathbb{R}$ or S_1, we can construct an extended horizontality condition for $\mathcal{N}_T = 1$ topological theories. An important point is that the invariant action will not depend on the constant vector κ that defines the one-dimensional space H. This eventually defines the vector topological symmetry, which completes the ordinary scalar BRST symmetry, and shows that the $\mathcal{N}_T = 1$ theories contain an enlarged symmetry.

For the case of Ω backgrounds, we will need the existence of a Killing vector in addition to that of a covariantly constant vector field on the manifold. Eventually, we will obtain a twisted version of a deformed supersymmetry.

In what follows, we thus consider a manifold M that contains at least a constant vector. This property reduces to the reducibility property for a simply connected manifold [74]. (Reducibility only holds locally in the general case.)

Obtaining of the extended horizontality condition

We start from the formalism that introduces ghosts and antighosts of the Yang–Mills TQFT in a fully symmetrical way. We will shortly break this symmetry.

The Lorentz invariant Yang–Mills BRST-antiBRST horizontality condition is

$$(d+s+\bar{s})\big(A+c+\bar{c}\big) + \big(A+c+\bar{c}\big)^2 = F+\Psi+\bar{\Psi}+\Phi+\bar{\Phi}+L \qquad \text{(A.48)}$$

It must be completed with its Bianchi identity that determines the action of s and $\bar{s}$ on the topological ghosts that occur on the right hand side, and ensures $(d+s+\bar{s})^2 = 0$. For such equations one has a conserved grading made of the sum of the ghost number and the form degree on M. The total ghost number of $A, c, \bar{c}, \Psi, \bar{\Psi}, \Phi, L, \bar{\Phi}$ are respectively $0, 1, -1, 1, -1,\ 2, 0, -2$, and their form degree $1, 0, 0, 1, 1,\ 0, 0, 0$. A ghost antighost bigrading exists, such that its values for $A, c, \bar{c}, \Psi, \bar{\Psi}, \Phi, L, \bar{\Phi}$ are respectively

$(0,0)(1,0),(0,1),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2)$. The scalar BRST and antiBRST operators s and $\bar{s}$ have bigradings $(1,0)$ and $(0,1)$, respectively. The net ghost number of a field with ghost bigrading (g,g') is simply $g-g'$.

The fields $\bar{\Psi}$ and L do not show up in the $\mathcal{N}_T=1$ theory, while the antiselfdual 2-form antighost χ_2^{-1} and the scalar ghost η^{-1} of this theory does not appear in Eq.(A.48). We will fill this apparent contradiction and come to the point of directly determining both s and δ symmetries.

We classically couple the topological theory to gravity, to express reparametrization invariance in M, but use the freedom of introducing a vector $\varphi \neq 0$, as generally shown in the last section. This will produces a symmetry operator $\hat{\mathcal{S}}$, which obviously contains more information than the usual scalar operator s.

The existence of a covariantly constant vector field κ on the manifold basically permits one to gauge-fix the component $i_\kappa e^a$ to δ_0^a. This property allows one to bypass the usual gravitational horizontality condition of the vielbeins, which imposes φ to be null in a fully $SO(n)$ invariant theory. Some deformations of the BRST transformation of ξ can in fact be consistent with the closure of $\mathcal{S}$ on ω and Ω. The challenge is that the deformation must be compatible with the Bianchi identity :

$$\mathcal{S}^2\omega = i_\varphi R \qquad \mathcal{S}^2\Omega = i_\xi i_\varphi R \tag{A.49}$$

Here, it is solved by some restriction of the geometry, such that the equation of motion of the first order formalism $T=0$, gives an $SO(n-1)$ holonomy curvature, leading to $i_\kappa R = 0$. This is because the gauge fixing of the vielbeins imposes to the holonomy group of the second order curvature to be included in $SO(n-1)$.

We are thus allowed to give to φ a non-zero value in the κ direction. To be definite, we choose $\varphi = -\kappa$. The norm of κ is an irrelevant quantity. Therefore, all identities must be homogeneous in κ. It is equivalent to either impose the conservation of the bigrading (g,g'), or to impose the conservation of the net ghost number $g-g'$, assuming that κ's bigrading is $(1,1)$. We conjecture that this bigrading can be identified to the ghost antighost bigrading, in such a way that g and g' are both positive.

We identify $\hat{\mathcal{S}} = s^{(1,0)}+s^{(0,1)}$, and $\tilde{\mathcal{C}} = c^{(1,0)}+c^{(0,1)}$. The consistent horizontality equation (A.41) can be written as follows :

$$\begin{aligned}(d+s^{(1,0)}+s^{(0,1)}-i_{\kappa^h})\big(A+c^{(1,0)}+c^{(0,1)}\big)+\big(A+c^{(1,0)}+c^{(0,1)}\big)^2\\ = F+\Psi^{(1,0)}+\Psi^{(0,1)}+\Phi^{(2,0)}+\Phi^{(1,1)}+\Phi^{(0,2)}\end{aligned} \tag{A.50}$$

We now break the symmetry between the ghost and antighost sectors, using the vector field κ. Each field of (g,g') graduation must be homogeneous of degree g' in κ, and thus we define :

$$c^{(0,1)} \equiv |\kappa|\bar{c} \qquad \Psi^{(0,1)} \equiv g(\kappa)\eta + i_\kappa \chi$$
$$\Phi^{(0,2)} \equiv |\kappa|^2 \bar{\Phi} \tag{A.51}$$

where we defined the following 1-form out of κ :

$$g(\kappa) \equiv g_{\mu\nu}\kappa^\mu dx^\nu . \tag{A.52}$$

The 1-form $g(\kappa)$ satisfies $i_\kappa g(\kappa) = |\kappa|^2$, and will play an important role, together with the property $(i_\kappa)^2 = 0$. A non zero value of $\Phi^{(1,1)}$ defines a consistent algebra ; however there is no corresponding invariant action. Therefore, we set $\Phi^{(1,1)} = 0$.

Of course, c and $\bar{c}$ are identified as the Faddeev–Popov ghost and antighost, respectively.

The redefinition $\Psi^{(0,1)} \to (\eta, \chi)$ is κ dependent in a non-trivial way. In fact, the decomposition of $\Psi^{(0,1)}$ implies that the 2-form representation of the holonomy group be reducible, in order that the pair $\eta^{-1}, \chi^{-1}_{\mu\nu}$ has as many degrees of freedom as the vector $\Psi^{(0,1)}_\mu$. In 8 dimensions, we thus suppose that M has a holonomy group not larger than $Spin(7)$, so that χ be antiselfdual in the octonionic point of view in eight dimensions, with seven independent components (or χ is antiselfdual in 4 dimensions, with three independent components). Moreover, in order that κ be globally well defined in 8 dimensions, the holonomy group must be included in G_2 (i.e, N be a G_2-manifold in the reducible case).

We call :

$$s = s^{(1,0)}$$
$$\delta = s^{(0,1)} \tag{A.53}$$

Having introduced all these fields, we obtain[3]

$$(d + s + \delta - i_{\kappa^h})\big(A + c + |\kappa|\bar{c}\big) + \big(A + c + |\kappa|\bar{c}\big)^2$$
$$= F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_{\kappa^h}\chi + \Phi + |\kappa|^2\bar{\Phi} \tag{A.54}$$

and the associated Bianchi relation

$$(d + s + \delta - i_{\kappa^h})\big(F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_{\kappa^h}\chi + \Phi + |\kappa|^2\bar{\Phi}\big)$$
$$+ [A + c + |\kappa|\bar{c}\, ,\, F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_{\kappa^h}\chi + \Phi + |\kappa|^2\bar{\Phi}] = 0 \tag{A.55}$$

[3] $g(\kappa)$ must be seen on P as $\pi^* g(\kappa)$, where π is the projection of the fiber bundle.

The property $(d+s+\delta-i_{\kappa^h})^2=0$ implies in M :

$$\hat{\mathcal{S}}^2 = s^2 + \{s,\delta\} + \delta^2 = \mathcal{L}_\kappa + \delta_{\text{gauge}}(i_\kappa \mathring{A}) \tag{A.56}$$

We have therefore on all fields

$$\begin{aligned} s^2 &= 0 \\ \{s,\delta\} &= \mathcal{L}_\kappa + \delta_{\text{gauge}}(i_\kappa \mathring{A}) \\ \delta^2 &= 0 \end{aligned} \tag{A.57}$$

And the decomposition in power of κ of the transformation of the reparametrization ghost implies

$$\begin{aligned} s\xi &= -\tfrac{1}{2}\{\xi,\xi\} \qquad & \delta\xi &= -\kappa \\ s\kappa &= 0 & \delta\kappa &= 0 \end{aligned} \tag{A.58}$$

We will see shortly that a complete and finite field representation of the algebra can be found in a consistent way in four and eight dimensions.

Resolution of the extended horizontality condition

The decomposition of the first equation (A.189) according to the gradings gives :

$$\begin{gathered} sA + d_A c = \Psi \qquad \delta A + d_A|\kappa|\bar{c} = g(\kappa)\eta + i_\kappa\chi \\ sc + c^2 = \Phi \qquad \delta\bar{c} + |\kappa|\bar{c}^2 = |\kappa|\bar{\Phi} \\ s|\kappa|\bar{c} + \delta c - i_\kappa\big(A-\mathring{A}\big) + [c,|\kappa|\bar{c}] = 0 \end{gathered} \tag{A.59}$$

It is most convenient to use the s and δ operators in the Cartan representation defined by

$$s_c \equiv s + \delta_{\text{gauge}}(c) \qquad \delta_{\bar{c}} \equiv \delta + \delta_{\text{gauge}}(|\kappa|\bar{c}) \tag{A.60}$$

On all fields, but c and $\bar{c}$, one has :

$$\begin{gathered} s_c^2 = \delta_{\text{gauge}}(\Phi) \qquad \delta_{\bar{c}}{}^2 = \delta_{\text{gauge}}(|\kappa|^2\bar{\Phi}) \\ \{s_c,\delta_{\bar{c}}\} = \mathcal{L}_\kappa + \delta_{\text{gauge}}\big(i_\kappa A\big) \end{gathered} \tag{A.61}$$

So, the decomposition of the Bianchi identity (A.5.2) gives

$$\begin{gathered} s_c\Psi + d_A\Phi = 0 \qquad \delta_{\bar{c}}\big(g(\kappa)\eta + i_\kappa\chi\big) + |\kappa|^2 d_A\bar{\Phi} = 0 \\ s_c\big(g(\kappa)\eta + i_\kappa\chi\big) + \delta_{\bar{c}}\Psi - i_\kappa F = 0 \\ s_c\Phi = 0 \qquad \delta_{\bar{c}}|\kappa|^2\bar{\Phi} = 0 \\ \delta_{\bar{c}}\Phi - i_\kappa\Psi = 0 \qquad s_c|\kappa|^2\bar{\Phi} + |\kappa|^2\eta = 0 \end{gathered} \tag{A.62}$$

Because of the bigraduation, the horizontality condition does not fully determine the action of the s and δ on all fields. Indeed, one has degenerate equations of the type s(antighost)+δ(ghost)= .... To raise the indetermination, we introduce "auxiliary" fields, a scalar b^0 and a 2-form T_2^0, with :

$$\begin{aligned} s_c\chi = T \;\; s_cT = [\Phi, \chi] \\ s_c\bar{c} = b \quad s_cb = [\Phi, \bar{c}] \end{aligned} \tag{A.63}$$

It is by construction that we can consistently define the action of s and δ on the "auxiliary" fields. In practice, this require a step by step computation, which yields the action of δ, such that $\delta^2 = 0$, $\{s, \delta\} = \mathscr{L}_\kappa$.

The field χ occurs in the horizontality relation only trough its contraction along κ, $i_\kappa\chi$. Since ${i_\kappa}^2 = 0$, the resolution of equation is not yet established, since χ is defined modulo terms that are i_κ-exact.

A little of algebra must now be done to obtain the transformation of $\chi_{\mu\nu}$. If we use the decomposition $\delta_{\bar{c}} = \kappa^\mu s_\mu$, (which is only true locally), we have from (A.59) and (A.60) that

$$s_{[\mu}A_{\nu]} = -\chi_{\mu\nu} \qquad s_{\{\mu}s_{\nu\}}A_\sigma = -g_{\mu\nu}D_\sigma\bar{\Phi} \tag{A.64}$$

This gives

$$s_\sigma\chi_{\mu\nu} = -s_\sigma s_{[\mu}A_{\nu]} \tag{A.65}$$

and we deduce from the decomposition

$$\ydiagram{1} \otimes \ydiagram{1,1} = \ydiagram{1,1,1} \oplus 2\times \ydiagram{2,1}$$

that

$$s_\sigma\chi_{\mu\nu} = 2g_{\sigma[\mu}D_{\nu]}\bar{\Phi} - s_{[\sigma}s_\mu A_{\nu]} \tag{A.66}$$

The ghost number and dimension of fields are such that, without introducing other fields, $s\chi$ must be proportional to $d_A\bar{\Phi}$

$$s_\sigma\chi_{\mu\nu} = 2g_{\sigma[\mu}D_{\nu]}\bar{\Phi} - {C^\star_{[\sigma\mu\nu]}}^\rho D_\rho\bar{\Phi} \tag{A.67}$$

We have introduced an invariant tensor $C_4^\star$ on the manifold. (It is the ϵ tensor for 4-manifolds, and the octonionic selfdual 4-form for Joyce manifolds.)

We already know that the condition $\chi_{\mu\nu} = P^{-\ \sigma\rho}_{\mu\nu}\chi_{\sigma\rho}$, for this field to count for $n-1$ degrees of freedom in n dimensions. Since ${\delta_{\bar{c}}}^2\chi = [\bar{\Phi},\chi]$, $C^{\star}_{\mu\nu\sigma\rho}$ must be totally antisymmetric and that

$$\Big(2\delta^{\{\sigma|\kappa}_{\mu\nu} - C^{\star\ \{\sigma|\kappa}_{\mu\nu}\Big)P^{-\ \rho\}}{}_{\kappa}{}^{\theta\tau} = g^{\sigma\rho}P^{-\ \theta\tau}_{\mu\nu} \tag{A.68}$$

which gives

$$P^{-\ \sigma\rho}_{\mu\nu} = \frac{2}{n}\Big(\delta^{\sigma\rho}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}C^{\star\ \sigma\rho}_{\mu\nu}\Big) \tag{A.69}$$

We know from [75] that the only possibilities to construct such projector with the holonomy group reduced to at most the maximal invariant subgroup of $SO(n)$ are in four and eight dimensions. This is a further check of the need of a holonomy group of M. We will adopt a unified notation for this projector in four and eight dimensions, with the convention that C is just the unity in four dimensions and the octonionic 4-form in eight dimensions :

$$w_2^- \equiv \frac{2}{n}\big(w_2 - \star C w_2\big) \tag{A.70}$$

Expression of the s and δ symmetries

The resolution of the horizontality condition has thus given us the following expression for the action s and δ on the fields we started from, plus the fields that we had to introduce to solve the degeneracies. These transformation laws are written in a way that is globally well defined :

$$\begin{aligned}
&s_c A = \Psi && \delta_{\bar{c}} A = g(\kappa)\eta + i_\kappa\chi\\
&s_c\Psi = -d_A\Phi && \delta_{\bar{c}}\Psi = i_\kappa\big(T+F\big) + g(\kappa)[\Phi,\bar{\Phi}]\\
&s_c\Phi = 0 && \delta_{\bar{c}}\Phi = i_\kappa\Psi\\
\\
&s_c\bar{\Phi} = \eta && \delta_{\bar{c}}\bar{\Phi} = 0\\
&s_c\eta = [\Phi,\bar{\Phi}] && \delta_{\bar{c}}\eta = \mathscr{L}_\kappa\bar{\Phi}\\
\\
&s_c\chi = T && \delta_{\bar{c}}\chi = \tfrac{n}{2}\big(g(\kappa)d_A\bar{\Phi}\big)^-\\
&s_c T = [\Phi,\chi] && \delta_{\bar{c}}T = -\tfrac{n}{2}\big(g(\kappa)d_A\eta + g(\kappa)[\bar{\Phi},\Psi]\big)^- + \mathscr{L}_\kappa\chi\\
\\
&s\,c = \Phi - c^2 && \delta\,c = i_\kappa\big(A - \mathring{A}\big) - |\kappa| b\\
\\
&s\bar{c} = b - [c,b] && \delta\bar{c} = |\kappa|\big(\bar{\Phi} - \bar{c}^2\big)\\
&sb = [\Phi,\bar{c}] - [c,b] && \delta b = \mathscr{L}_\kappa\bar{c} - |\kappa|\eta
\end{aligned} \tag{A.71}$$

(A.72)

Let us give for the sake of clarity the explicit c and $\bar{c}$ dependence in the transformation laws Eqs. (A.71)

$$
\begin{array}{ll}
sA = \Psi - d_A c & \delta A = g(\kappa)\eta + i_\kappa \chi - |\kappa| d_A \bar{c} \\
s\Psi = -d_A \Phi - [c, \Psi] & \delta\Psi = i_\kappa\big(T + F\big) + g(\kappa)[\Phi, \bar{\Phi}] - |\kappa|[\bar{c}, \Psi] \\
s\Phi = -[c, \Phi] & \delta\Phi = i_\kappa \Psi - |\kappa|[\bar{c}, \bar{\Phi}] \\
 & \\
s\bar{\Phi} = \eta - [c, \bar{\Psi}] & \delta\bar{\Phi} = -|\kappa|[\bar{c}, \bar{\Psi}] \\
s\eta = [\Phi, \bar{\Phi}] - [c, \eta] & \delta\eta = \mathscr{L}_\kappa \bar{\Phi} - |\kappa|[\bar{c}, \eta] \\
 & \\
s\chi = T - [c, \chi] & \delta\chi = \frac{n}{2}\big(g(\kappa) d_A \bar{\Phi}\big)^- - |\kappa|[\bar{c}, \chi] \\
sT = [\Phi, \chi] - [c, T] & \delta T = -\frac{n}{2}\big(g(\kappa) d_A \eta + g(\kappa)[\bar{\Phi}, \Psi]\big)^- + \mathscr{L}_\kappa \chi - |\kappa|[\bar{c}, T]
\end{array}
\tag{A.73}
$$

The following remarks are important :

- As for an explicit dependence on the background connection, it only occurs in δc.

- The part of the BRST algebra that is relevant for untwisting only involve the fields in the first sector of the BRST equations, in Eqs. (A.71). It is important to note that the BRST invariance, introduces the Faddeev-Popov ghost in a way that is compatible with the δ invariance. This property is, in particular, very important for the questions relative to renormalization of supersymmetric gauge theories.

- In the flat space limit, we can define the anticommuting generators s_μ, using $\delta_{\bar{c}} = \kappa^\mu s_\mu$, and expanding in κ^μ, both in 4 and 8 dimensions. The action of s_μ for the fields in (A.73) identifies itself with the vector symmetry [68, 69, 70, 108] used in $d = 4$ and obtained by twisting the supersymmetry algebra. However, here, the presence of auxiliary fields and Faddeev–Popov ghosts and antighost fully ensures consistency.

- The fields $\bar{c}$ and b are indispensable in order to close the s and δ operator on the Fadeev-Popov ghost c. In fact, the existence of the δ symmetry, and its link with reparametrization invariance, is likely to provide the geometrical interpretation of $\bar{c}$ and b, as well as of other antighosts of the TQFT.

- The ghost antighost duality which will be defined in the next section will make the latter point more precise.

- Power counting arguments based on the dimensionality and ghost number of fields show that the above transformation laws are the most general ones that solve the relations $s^2 = \delta^2 = 0$, $\{s, \delta\} = \mathring{\mathscr{L}}_\kappa$, up to irrelevant field multiplicative renormalization factors and linear field redefinitions for the"auxiliary" fields b and T. The geometrical horizontality equation that we defined in the fiber bundle actually solve this constraint.

In the next section, we will construct invariant actions for the symmetry. Eventually, we will discuss this untwisting toward the Poincaré superalgebra.

A.1.4 The action

The topological/supersymmetric action as a s-exact term

We now have a complete realization of the s and δ symmetries, and wish to compute an invariant action.

Even if the algebra is defined only on a manifold of reducible tangent bundle, we demand a $Spin(7)$ or an $SO(4)$ invariant action in respectively eight and four dimensions. This means that the action must be independent of κ, which is an non trivial requirement. (Our construction needs a base space of the topological Yang–Mills theory that contains a constant vector. However, we wish the theory be generalizable for a more general manifold, provided it has the required holonomy for defining selfduality equations.)

We will focus on the terms of power counting corresponding to the strictly renormalisable case in four dimensions, and extend this requirement in 8 dimensions, which can be done by a formal power counting argument (so we exclude higher order derivative terms).

The only way to construct an $\hat{\mathcal{S}}$-exact action, which is invariant under gauge transformations, reparametrization invariant and independent of κ, is such that

$$\begin{gathered} S = s\mathbf{\Psi}^{(-1,0)} + \delta\mathbf{\Psi}^{(0,-1)} \\ \delta\mathbf{\Psi}^{(-1,0)} = 0 \qquad s\mathbf{\Psi}^{(0,-1)} = 0 \end{gathered} \tag{A.74}$$

There is only one solution of $s\mathbf{\Psi}^{(0,-1)} = 0$ which gives an action independent of κ. In turn, the δ-invariance completely determines $\mathbf{\Psi}^{(-1,0)}$ (with the hypothesis that there are nor higher order derivative terms). As a matter of fact, up to a global scale factor and a topological term, these two solutions give the same action. One has indeed :

$$s\mathbf{\Psi}^{(-1,0)} = \delta\mathbf{\Psi}^{(0,-1)} + \frac{1}{2}\int_M C_\wedge \mathrm{Tr}\ F_\wedge F \tag{A.75}$$

So, we restrict ourself to the δ invariant gauge function, and we define :

$$S = s\mathbf{\Psi} \tag{A.76}$$

where $\boldsymbol{\Psi}$ is a δ-closed gauge invariant functional, such that :

$$\boldsymbol{\Psi} = \int_M \operatorname{Tr}\Big(\chi \star \big(F + \frac{2}{n}T\big) + \bar{\Phi} d_A \star \Psi + \star\eta[\Phi, \bar{\Phi}]\Big) \tag{A.77}$$

One has the usual interpretation that the action $s\boldsymbol{\Psi}$ is the gauge-fixing of a topological invariant. But the gauge fixing-function has been fixed from $\delta_{\bar{c}}$ invariance.

We will shortly show that there is a duality symmetry between s and δ, and that one can express this action as a $s\delta$-exact action.

Gauge-fixing part

We identify $\bar{c}$ and b as the familiar Faddeev–Popov pair of an antighost and a Lagrange multiplier for gauge-fixing the Yang–Mills invariance. We could use a term like $s(\bar{c}\partial \cdot A)$, which violates the δ-invariance, but we prefer a $s\delta$-exact term :

$$s\delta \frac{1}{2|\kappa|} \int_M \operatorname{Tr}\Big(\big(A - \mathring{A}\big) \star \big(A - \mathring{A}\big)\Big) \tag{A.78}$$

This gauge-fixing term breaks the $SO(n)$ invariance, since it depends on κ. From the point of view of the equivariant theory, however, the relevant action is the part of the action that is gauge invariant. It is determined by both s and δ invariance. A further $SO(n)$ invariant gauge-fixing of the Yang–Mills symmetry implies the breaking of the vector symmetry. (This is of course a gauge-fixing artifact, which does not appear for the gauge invariant observables, which are κ-independent). This is understandable in the untwisted formalism, where a supersymmetric gauge-fixing process of the Yang–Mills invariance only holds in a fully superspace version of the theory, and would yield an infinite number of fields in 8 dimensions.[4]

A $s\delta$-exact expression of the supersymmetric action

As in the case of $\mathcal{N}_T = 2$ topological theories, the action (A.74) is $s\delta$-exact on a reducible manifold. Indeed, we can verify the following very suggestive formula, which shows directly s and δ invariances :

$$S = s\,\delta \int_M \frac{1}{|\kappa|}{}^2 \mathscr{F} \tag{A.79}$$

[4] A refinement of our work can be reached by extending our result in the context of equivariant invariance, which implies the introduction of a background gauge symmetry, along the line of [76, 77].

with

$$\mathscr{F} = \mathrm{Tr}\,\left(\frac{1}{2}g(\kappa)_\wedge C_\wedge\Big(\big(A-\mathring{A}\big)_\wedge\big(F+\mathring{F}\big)-\frac{1}{3}\big(A-\mathring{A}\big)^3\Big)+\big(g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi\big)_\wedge\star\Psi\right) \tag{A.80}$$

where we recognize the last term to be the Chern–Simon term

$$d\,\mathrm{Tr}\,\Big(\big(A-\mathring{A}\big)_\wedge\big(F+\mathring{F}\big)-\frac{1}{3}\big(A-\mathring{A}\big)^3\Big)=\mathrm{Tr}\,\big(F_\wedge F-\mathring{F}_\wedge\mathring{F}\big) \tag{A.81}$$

Note that in the case of a trivial fiber bundle we can take $\mathring{A}=0$ and recover the ordinary form of the Chern–Simon term. Unlike in the $\mathcal{N}_T=2$ case, the "potential" $\int_M\mathscr{F}$ cannot be interpreted as a Morse function for the theory. Indeed, the function $\int_M\mathrm{Tr}\,\Big(\frac{1}{2}g(\kappa)_\wedge C_\wedge\big(AdA+\frac{2}{3}A^3\big)\Big)$ has degenerated critical points, ($i_\kappa A$ does not appear in its equations of motions), while the Chern–Simons potential gives a well defined Morse function in dimension $n-1$, when there is a balanced topological theories [47].

Ghost antighost duality

In spite of the fact that $\int_M\mathscr{F}$ is not a well defined Morse function, we can interpret formally

$$F+g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi+|\kappa|^2\bar{\Phi} \tag{A.82}$$

as a curvature as in the case $\mathcal{N}_T=2$. This interpretation can be seen by introducing an involution $*$, which gives a duality between ghosts and anti-ghosts.

$$\begin{gathered}
*A=A \qquad *T=-T-\frac{n}{2|\kappa|^2}\big(g(\kappa)i_\kappa F\big)^-\\
*\Psi=g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi \qquad *\eta=\frac{1}{|\kappa|^2}i_\kappa\Psi \qquad *\chi=\frac{n}{2|\kappa|^2}\big(g(\kappa)\Psi\big)^-\\
*\Phi=|\kappa|^2\bar{\Phi} \qquad *\bar{\Phi}=\frac{1}{|\kappa|^2}\Phi\\
*c=|\kappa|\bar{c} \qquad *b=-b+[c,\bar{c}]+\frac{1}{|\kappa|}i_\kappa\big(A-\mathring{A}\big) \qquad *\bar{c}=\frac{1}{|\kappa|}c
\end{gathered} \tag{A.83}$$

This involution relates both operators s and δ, as follows :

$$*s*=\delta \qquad *\delta*=s \tag{A.84}$$

Note that $*$ does not act as a derivative but as a group element, that is

$$*\big(A\cdot B\big)=*A\cdot *B \tag{A.85}$$

Indeed, by definition of $*$, we can associate to the δ-invariant gauge function $\mathbf{\Psi}$ defined in Eq. (A.77) a mirror s-invariant gauge function, which defines a slightly different δ-exact gauge invariant action $*S$, which gives the same observables. By construction, $*S$ is s- and δ-invariant. However $*S$ is κ-dependent, but this dependence disappears after elimination of the auxiliary field T, and then $*S$ becomes equal to S.

The horizontality relation gives indeed :

$$
\begin{aligned}
(d+\delta)\big(A+|\kappa|\bar{c}\big)+\big(A+|\kappa|\bar{c}\big)^2 &= F+g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi+|\kappa|^2\bar{\Phi}\\
(d_A+\delta_{\bar{c}})\big(F+g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi+|\kappa|^2\bar{\Phi}\big) &= 0
\end{aligned}
\tag{A.86}
$$

The gauge function $*\mathbf{\Psi}$ replaces the ordinary gauge function $\mathbf{\Psi}$, when one interchanges the rôles of s and δ :

$$
*\,\mathbf{\Psi}=\frac{1}{|\kappa|}{}^2\int_M \mathrm{Tr}\,\Big(-g(\kappa)\,{}_\wedge C\,{}_\wedge\Psi\,{}_\wedge F-g(\kappa)\Psi\star T+\Phi d_A\star\big(g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi\big)+\star i_\kappa\Psi[\bar{\Phi},\Phi]\Big)
\tag{A.87}
$$

Eventually, we can define the topological observables as functions of the dual variables, using any gauge invariant polynomial in the fields $P\big(F,\Psi,\Phi\big)$, as follows :

$$
\begin{aligned}
*\,\big\langle P\big(F,\Psi,\Phi\big)\big\rangle &= *\int\mu\ P\big(F,\Psi,\Phi\big)e^{-s\mathbf{\Psi}}\\
&=\int *\mu\ P\big(F,g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi,|\kappa|^2\bar{\Phi}\big)e^{-\delta*\mathbf{\Psi}}\\
&=\big\langle P\big(F,g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi,|\kappa|^2\bar{\Phi}\big)\big\rangle
\end{aligned}
\tag{A.88}
$$

The descent equations are obtained by changing $d+s$ into $d+\delta$. As a conclusion, after the duality operation $*$, the curvature of the "big bundle" defined in [33] becomes $F+g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi+|\kappa|^2\bar{\Phi}$ instead of $F+\Psi+\Phi$.

A.1.5 Conservation of $\Lambda_{\mu\nu}$

We now verify that the operator δ is truly generated by the conservation law of the BRST antecedent of the energy momentum tensor. This computation is tricky, since the topological action is generally only invariant under $G\subset SO(n)$. Let us write the action $s\mathbf{\Psi}$ as :

$$
\begin{aligned}
S=\int_M d^nx\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Big(&\frac{1}{2}T^{\mu\nu}\big(-F_{\mu\nu}+\frac{2}{n}T_{\mu\nu}\big)+\chi^{\mu\nu}\big(D_\mu\Psi_\nu-\frac{1}{n}[\Phi,\chi_{\mu\nu}]\big)\\
&+\eta D_\mu\Psi^\mu+\bar{\Phi}\{\Psi_\mu,\Psi^\mu\}-\bar{\Phi}D_\mu D^\mu\Phi+[\Phi,\bar{\Phi}]^2-\eta[\Phi,\eta]\Big)
\end{aligned}
\tag{A.89}
$$

To compute the energy momentum tensor, we use the standard formula :

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{e}\,\delta_{ab}\,\frac{\delta S}{\delta e^{\mu}_{b}}\,e^{a}_{\nu} \tag{A.90}$$

We have to understand the way the projector on selfdual 2-forms transform under variations of the vielbeins. In 8 dimensions, the variation of this projector P^{-} with respect to the vielbeins is[5] :

$$\begin{aligned}\delta P^{-}_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho} &= -\frac{1}{n}\delta\big(e^{a}_{\mu}e^{b}_{\nu}e^{\sigma}_{c}e^{\rho}_{d}\big)C_{ab}{}^{cd}\\ &= \frac{2}{n}C_{\lambda[\nu}{}^{\sigma\rho}e^{a}_{\mu]}\delta e^{\lambda}_{a} - \frac{2}{n}C_{\mu\nu}{}^{\lambda[\rho}e^{a}_{\lambda}\delta e^{\sigma]}_{a}\end{aligned} \tag{A.91}$$

Using this formula, the energy momentum tensor is given by

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\Bigg(&-T_{\nu}{}^{\sigma}\hat{F}^{+}_{\mu\sigma} + 2\chi_{\nu}{}^{\sigma}D_{[\mu}\Psi_{\sigma]+} - 2D_{\{\mu}\eta\cdot\Psi_{\nu\}} + 2\bar{\Phi}\{\Psi_{\mu},\Psi_{\nu}\} + 2D_{\{\mu}\bar{\Phi}\cdot D_{\nu\}}\Phi\\ &+g_{\mu\nu}\Bigg(\big(\frac{2}{n}-\frac{1}{2}\big)T^{\sigma\rho}\big(-F_{\sigma\rho}+\frac{2}{n}T_{\sigma\rho}\big) + \big(\frac{4}{n}-1\big)\chi^{\sigma\rho}\big(D_{\sigma}\Psi_{\rho}-\frac{1}{n}[\Phi,\chi_{\sigma\rho}]\big)\\ &+D_{\sigma}\eta\cdot\Psi^{\sigma} - \bar{\Phi}\{\Psi_{\sigma},\Psi^{\sigma}\} - D_{\sigma}\bar{\Phi}\cdot D^{\sigma}\Phi - [\Phi,\bar{\Phi}]^{2} + \eta[\Phi,\eta]\Bigg)\Bigg)\end{aligned} \tag{A.92}$$

This tensor is not symmetric in eight dimensions and its antisymmetric part is anti-selfdual (it is valued in $\mathfrak{so}(8)\backslash\mathfrak{spin}(7)$). This is allowed to the fact that only isometries which preserve the octonionic 4-form C define conserved charges. In four dimensions, it is symmetric.

Since the BRST operator does not depend on e^{a}_{μ}, we have :

$$T_{\mu\nu} = s\,\frac{1}{e}\,\delta_{ab}\,\frac{\delta\boldsymbol{\Psi}}{\delta e^{\mu}_{b}}\,e^{a}_{\nu} \tag{A.93}$$

In this way, we find a s-antecedent of the energy momentum tensor :

$$\begin{aligned}\Lambda^{(0)}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathrm{Tr}\Bigg(&\frac{1}{2}\big(\frac{4}{n}-1\big)\,\chi^{\sigma\rho}\Big(-F^{-}_{\sigma\rho}+\frac{2}{n}T_{\sigma\rho}\Big) + \Psi^{\sigma}D_{\sigma}\bar{\Phi} - \eta[\Phi,\bar{\Phi}]\Bigg)\\ &-\mathrm{Tr}\Big(\chi_{\nu}{}^{\sigma}F^{+}_{\mu\sigma} + 2\Psi_{\{\mu}D_{\nu\}}\bar{\Phi}\Big)\end{aligned} \tag{A.94}$$

[5] In 4 dimensions, one replaces $C_{ab}{}^{cd}$ by the ϵ symbol

It is not yet conserved. However, by adding a s-exact term to $\Lambda^{(0)}_{\mu\nu}$, we can enforce the conservation law, as follows :

$$\begin{aligned}\nabla^\nu \Lambda_{\mu\nu} \equiv \nabla^\nu \Bigg(\Lambda^{(0)}_{\mu\nu} - s\,\mathrm{Tr}\,\Big(\frac{1}{2}C^{\star}_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}F_{\sigma\rho}\bar\Phi + \chi_{\mu\nu}\eta - \frac{1}{2}\big(1-\frac{4}{n}\big)\chi_{[\mu}{}^{\sigma}\chi_{\nu]\sigma}\Big)\Bigg) \\ = -\mathrm{Tr}\,\Bigg(\big(-g_{\mu\nu}\eta + \chi_{\mu\nu}\big)\frac{\delta^L S}{\delta A_\nu} + \big(F_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}[\Phi,\bar\Phi]\big)\frac{\delta^L S}{\delta \Psi_\nu} - \Psi_\mu \frac{\delta^L S}{\delta\Phi} \\ + D_\mu\bar\Phi\frac{\delta^L S}{\delta\eta} - nD^\nu\bar\Phi\frac{\delta^L S}{\delta\chi^{\mu\nu}} + \frac{n}{2}\big(2\,D^\nu\eta + D_\sigma\chi^{\sigma\nu} - 2\,[\bar\Phi,\Psi^\nu]\big)\frac{\delta^L S}{\delta T^{\mu\nu}} \\ -\frac{n}{2}\chi^{\mu\sigma}D^\nu\frac{\delta^L S}{\delta T^{\nu\sigma}} + \big(\frac{n}{2}-2\big)D^\nu\Big(\chi_\mu{}^\sigma\frac{\delta^L S}{\delta T^{\nu\sigma}}\Big)\Bigg)\end{aligned} \tag{A.95}$$

From the above equation we can recover the explicit form of the functional generators $V_{A\,\mu}$ that we introduced in section A.1.2. We can verify that the resulting symmetry truly correspond to the δ-operator that we build in section A.1.3 directly from the horizontality condition.

A.1.6 Untwisting toward Yang–Mills supersymmetry

The theories that we have determined in four and eight dimensions from δ and s invariances correspond by twist to super-Yang–Mills $\mathcal{N} = 2$ theories. The equivariant form of the scalar and the δ BRST operators can in fact be identified on twisted combinations of spinorial supersymmetry generators. As a matter of fact, if we define the theory on a manifold that is sufficiently constrained to admit two supersymmetries of opposed chirality, the equivariant form of these s and δ can be related to supersymmetry transformations as follows :

$$\theta s_c = \delta^{Susy}(\theta\zeta) \qquad \theta\delta_{\bar c} = \delta^{Susy}(i\theta\,\not{\kappa}\zeta) \tag{A.96}$$

for θ an anticommuting parameter and ζ a chiral covariantly constant spinor. As it is well known, in eight dimensions we can construct the $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills algebra from the dimensional reduction on a torus of the ten dimensional super-Yang–Mills algebra, with a further Wick rotation of the $\mathcal{N} = 1$ theory that is generally defined on Minkowski space. The transition from $\mathcal{N} = 1$ to $\mathcal{N} = 2$ is allowed by the fact that the Majorana-Weyl condition is consistent in eight dimensions for an Euclidean space and not for a

Minkowski one. The *Euclidean* action obtained in this way is

$$\int_M d^8x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}D_\mu\phi_1D^\mu\phi_1-\frac{1}{2}D_\mu\phi_2D^\mu\phi_2-\frac{i}{2}\left(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}[\phi_1,\phi_2]^2+\frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}\gamma_9[\phi_1,\lambda]\right)-\frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}[\phi_2,\lambda]\right)\right) \quad (A.97)$$

It is invariant under the following supersymmetries for any covariantly constant spinor ϵ

$$\begin{aligned}
\delta^{Susy}A_\mu &= -i(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda)\\
\delta^{Susy}\phi_1 &= -(\bar{\epsilon}\gamma_9\lambda)\\
\delta^{Susy}\phi_2 &= -(\bar{\epsilon}\lambda)\\
\delta^{Susy}\lambda &= \not{F}\epsilon-i\gamma_9\not{D}\phi_1\epsilon-i\not{D}\phi_2\epsilon+\gamma_9[\phi_1,\phi_2]\epsilon
\end{aligned} \quad (A.98)$$

If M is defined to be a $Spin(7)$-manifold, it contains a chiral covariantly constant spinor ζ. We choose it Majorana-Weyl with norm equal to one. One can further construct the octonionic 4-form, as follows :

$$\left(\overline{\zeta}\zeta\right)=1 \qquad\qquad 4!\left(\overline{\zeta}\gamma_{\mu\nu\sigma\rho}\zeta\right)=C_{\mu\nu\sigma\rho} \quad (A.99)$$

We can decompose the Majorana spinor fields of the theory in term of differential forms, by projection over ζ, which is the definition of the twist in 8 dimensions :

$$\begin{aligned}
\lambda_+ &= (\eta+\not{\chi})\zeta\\
\lambda_- &= i\not{\Psi}\zeta
\end{aligned} \quad (A.100)$$

Here η, χ and Ψ represent the same fields as in the previous sections, and the convention for the crossed out forms of rank k is that they are contracted with k gamma matrices with a normalization factor $\frac{1}{k!}$. Then, we have the redefinition for the scalar fields :

$$\Phi\equiv-\left(\phi_1-\phi_2\right) \qquad\qquad \bar{\Phi}\equiv-\frac{1}{2}\left(\phi_1+\phi_2\right) \quad (A.101)$$

The twisted action that one obtains in this way is

$$\int_M d^8x\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\eta D_\mu\Psi^\mu+D_\mu\bar{\Phi}D^\mu\Phi+4\chi^{\mu\nu}D_\mu\Psi_\nu\right.$$
$$\left.+2\bar{\Phi}\Psi_\mu\Psi^\mu+2\Phi\chi_{\mu\nu}\chi^{\mu\nu}+\Phi\eta^2+\frac{1}{2}[\Phi,\bar{\Phi}]^2\right) \quad (A.102)$$

It is the same action as that obtained in section A.174, from the demand of s and δ invariances, after the integration of the auxiliary field T, modulo some rescalings, and up to the sum of a topological term :

$$-\frac{1}{2}\int_M C_\wedge \mathrm{Tr}\,\big(F_\wedge F\big) \tag{A.103}$$

By using the decomposition by twist of the spinorial supersymmetry parameter $\epsilon = \big(\theta + \Theta^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} + i\vartheta^\mu\gamma_\mu\big)\zeta$, one gets twisted generators $Q, Q_\mu, Q_{\mu\nu}$. (Q and $\kappa^\mu Q_\mu$ are truly identified with the BRST operators s_c and $\delta_{\bar c}$, in their equivariant form, both in 8 and 4 dimensions.)

Both charges $\big(\bar\zeta\mathcal{Q}\big)$ and $i\big(\bar\zeta\not\kappa\mathcal{Q}\big)$ completely constrain the supersymmetric theory. In this sense, the number of relevant supersymmetries can be reduced to five real supercharges in four dimensions (as already observed in [68, 69, 70, 108]) and to nine real supercharges in eight dimensions.

It is very instructive that this reduced number of relevant generators can be directly constructed from one extended horizontality condition, defined in the Yang–Mills principal bundle.

As a further remark, the tensor generator of supersymmetry cannot be closed off-shell in eight dimension [79], contrarily to the case of 4 dimensions [6]. It is unknown if a system of auxiliary fields can be introduced to close the algebra of maximal supersymmetry. The existence of the tensor symmetry is not foreseen from the point of view of TQFT's, and its existence seems unnecessary, since the Q and Q_μ symmetries are enough to determine the supersymmetry action.

A.1.7 Equivariant Topological Field Theories

The observables of the topological theories that we discussed so far are defined as classes of the ordinary de Rham cohomology of the extended exterior derivative $\tilde d = d + s$ acting on $M \times \tilde{\mathcal{B}}^*$, where M is the manifold on which the topological theory is formulated and $\tilde{\mathcal{B}}^*$ is the space of gauge orbits of irreducible framed connections [33, 11]. In these theories, the scalar ghost-for-ghost field Φ goes to zero at infinity, or in other words,

[6] From a technical point of view, the difference between four and eight dimensions amounts the fact that one can construct an antiselfdual 2-form as a bilinear combination of two other in four dimensions, by the use of

$$P^-{}_{\mu\nu}{}^{\theta\tau} P^-{}_{\theta}{}^{\eta\sigma\rho} P^-{}_{\tau\eta}{}^{\kappa\lambda} \tag{A.104}$$

but not in eight, because this term is zero in this case.

has vanishing vacuum expectation value. Since, as we can see from (A.101), the Φ field is related to the scalar fields of the supersymmetric Yang–Mills theory, it is interesting to construct a topological theory whose scalar fields acquire a non-vanishing vacuum expectation value [81]. This topological field theory can be obtained by considering the equivariant extension of the construction of [11] with respect to the Lie algebra $\mathfrak{h}$ of an Abelian subgroup $H \subset G$ acting on $\tilde{\mathcal{B}}^*$. For example, for $G = SU(N)$ one can consider the maximal Abelian subgroup $H = U(1)^{N-1}$, which is the suitable choice for the Seiberg–Witten model. Moreover, we also consider an equivariant extension with respect to a compact Abelian group of isometries K of M. This corresponds to a kind of spontaneous breaking of the symmetries of M down to K. In fact, as we will see in the following, the resulting equivariant topological theory corresponds to the twisted version of the Super Yang–Mills theory on a non-trivial gravitational background.

The equivariant formulation allows for the use of a powerful localization formula [82] that reduce the integral over the equivariant forms on $M \times \tilde{\mathcal{B}}^*$ to a sum over the isolated fixed points of the $K \times H$ symmetry[7]. The results on the ordinary cohomology may in general be recovered by sending to zero the parameters associated to this symmetry with a suitable prescription. In this sense, the equivariant extension can be thought as a very useful regularization procedure for the topological invariants. The localization formula has been extended for supermanifolds in [83] and exploited in the four dimensional case to compute the integral on the instanton moduli space, recovering the non-perturbative contribution to the low-energy Seiberg–Witten effective action [83, 49, 84].

In the following we will discuss the equivariant extension of our horizontality conditions and obtain from them the scalar and vector topological symmetries along the same lines of the previous sections. Then we will untwist our topological theory and show its relationship with the supersymmetric theory on the Ω-background introduced in [48].

Equivariant horizontality condition

Let us define the Weil complex corresponding to the equivariant cohomology

$$H^{\bullet}_{K\times H}\big(M \times \tilde{\mathcal{B}}^*\big)$$

equivariant with respect to the action of $K \times H$ on $\tilde{\mathcal{B}}^*$. The action of K on $\tilde{\mathcal{B}}^*$ can be defined as follows. The action of K on M can be lifted to an action on the principal bundle P by the use of a background connexion $\mathring{A}$. This action induces a pullback action on the

[7]Notice that the fixed points are isolated only in this case : considering the equivariance with respect to only one of the two groups, K or H, is not enough to localize to isolated points.

equivariant forms on P, which defines the action of K on $\tilde{\mathcal{B}}^*$. The relevant equivariant differential $s_{\mathfrak{k}}$ on the Weil complex is defined as usual on an equivariant form $w(\xi)$ by

$$\big(s_{\mathfrak{k}}w\big)(\xi) \equiv \big(s + I_{\xi^*}\big)w(\xi) \tag{A.105}$$

where ξ^* is the vector field of TP generating the action on $\tilde{\mathcal{B}}^*$ associated to $\xi = (\Omega, a) \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$. ξ^* decomposes into the horizontal lift v^h of the vector field v of TM generated by the element Ω of $\mathfrak{k}$ and the fundamental vector a^v associated to the element a of $\mathfrak{h}$,

$$\xi^* \equiv (v^h, a^v) \in TH \oplus TV \tag{A.106}$$

The closure of the equivariant BRST operator (A.105) reads on a generic form

$$s_{\mathfrak{k}}^2 = \mathcal{L}_{\xi^*} \tag{A.107}$$

so that $s_{\mathfrak{k}}$ is a nilpotent operator on equivariant forms. This is locally expressed on M

$$s_{\mathfrak{k}}^2 = \mathcal{L}_v + \delta_{\text{gauge}}(i_v \mathring{A} - a) \tag{A.108}$$

The explicit representation of the operator (A.105) on antiselfdual gauge connections has been discussed in detail in [84, 83, 85]. Since i_{ξ^*} commutes with $s_{\mathfrak{k}}$,we have the following nilpotent operator on the whole complex (not restricted to its invariant subcomplex)

$$(d + s_{\mathfrak{k}} - i_{v^h+a^v})^2 = 0 \tag{A.109}$$

So we can define $s_{\mathfrak{k}}$ as usual by the use of an horizontality condition

$$(d + s_{\mathfrak{k}} - i_{v^h+a^v})\big(A + c\big) + \big(A + c\big)^2 = F + \Psi + \Phi \tag{A.110}$$

and its associated Bianchi identity. Moving the term $i_{\xi^*}A$ to the right hand side we obtain the definition of the equivariant curvature [82]

$$(d + s_{\mathfrak{k}})\big(A + c\big) + \big(A + c\big)^2 = F + \Psi + \Phi_{\mathfrak{k}} \tag{A.111}$$

Notice that on the right hand side of (A.111) it appears the equivariant extension of the scalar field $\Phi_{\mathfrak{k}} = \Phi_{\mathfrak{h}} + i_v(A - \mathring{A}) = \Phi + a + i_v(A - \mathring{A})$, where $\mu(\xi) = a + i_v(A - \mathring{A})$ is the moment of the vector field ξ^* [82]. This deformation of the scalar field is precisely that found in the explicit computations on the instanton moduli space in four dimensions [86]. The field $\Phi_{\mathfrak{h}}$ has a non-trivial vacuum expectation value in the Cartan subalgebra of the group G, due to the presence of the term a [84, 83, 86]. Notice that the vector ξ^* has ghost number 2.

The dual version of equation (A.110) is naturally defined with the use of another Killing vector $\bar{\upsilon}$ on M and another element $\bar{a}$ of $\mathfrak{h}$ which define a vector $\bar{\xi}^* = \bar{\upsilon}^h + \bar{a}^v$ on P, all with ghost number -2, and reads

$$(d + \delta_{\mathfrak{k}} - |\kappa|^2 i_{\bar{\upsilon}^h + \bar{a}^v})\big(A + |\kappa|\bar{c}\big) + \big(A + |\kappa|\bar{c}\big)^2 = F + g(\kappa)\eta + i_\kappa \chi + |\kappa|^2 \bar{\Phi} \tag{A.112}$$

Exactly in the same way as in the previous sections, we can combine the horizontality conditions (A.110) and (A.112) into a single one which will define the equivariant BRST operator as well as the corresponding vector symmetry. The extended horizontality condition is

$$\begin{aligned}(d + s_{\mathfrak{k}} + \delta_{\mathfrak{k}} - i_{\kappa^h + \xi^* + |\kappa|^2 \bar{\xi}^*})\big(A + c + |\kappa|\bar{c}\big) + \big(A + c + |\kappa|\bar{c}\big)^2 \\ = F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_{\kappa^h}\chi + \Phi + |\kappa|^2\bar{\Phi}\end{aligned} \tag{A.113}$$

and its associated Bianchi relation

$$\begin{aligned}(d + s_{\mathfrak{k}} + \delta_{\mathfrak{k}} - i_{\kappa^h + \xi^* + |\kappa|^2 \bar{\xi}^*})\big(F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_{\kappa^h}\chi + \Phi + |\kappa|^2\bar{\Phi}\big) \\ + [A + c + |\kappa|\bar{c}\,,\ F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_{\kappa^h}\chi + \Phi + |\kappa|^2\bar{\Phi}] = 0\end{aligned} \tag{A.114}$$

By following the same procedure described in the previous sections for the ordinary topological field theory, and redefining now

$$s_c \equiv s_{\mathfrak{k}} + \delta_{\text{gauge}}(c) \qquad \delta_{\bar{c}} \equiv \delta_{\mathfrak{k}} + \delta_{\text{gauge}}(|\kappa|\bar{c}) \tag{A.115}$$

we can extract from (A.113) and (A.114) the complete transformations of the fields

$$\begin{aligned}
&s_c A = \Psi && \delta_{\bar{c}} A = g(\kappa)\eta + i_\kappa\chi \\
&s_c \Psi = -d_A\Phi + i_\upsilon F && \delta_{\bar{c}}\Psi = i_\kappa\big(T + F\big) + g(\kappa)s_c\eta \\
&s_c\Phi = i_\upsilon\Psi && \delta_{\bar{c}}\Phi = i_\kappa\Psi + (\kappa\cdot\upsilon)\eta + i_\upsilon i_\kappa\chi \\
\\
&s_c\bar{\Phi} = \eta + i_{\bar{\upsilon}}\Psi && \delta_{\bar{c}}\bar{\Phi} = (\bar{\upsilon}\cdot\kappa)\eta + i_{\bar{\upsilon}} i_\kappa\chi \\
&s_c\eta = [\Phi,\bar{\Phi}] + \mathscr{L}_\upsilon\bar{\Phi} - \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}}\Phi + i_{\bar{\upsilon}} i_\upsilon F && \delta_{\bar{c}}\eta = \mathscr{L}_\kappa\bar{\Phi} - i_\kappa i_{\bar{\upsilon}} F \\
\\
&s_c\chi = T && \delta_{\bar{c}}\chi = \tfrac{n}{2}\big(g(\kappa)(d_A\bar{\Phi} - i_{\bar{\upsilon}}F)\big)^- \\
&s_c T = [\Phi,\chi] + \mathscr{L}_\upsilon\chi && \delta_{\bar{c}}T = -\tfrac{n}{2}\big(g(\kappa)(d_A\eta + [\bar{\Phi},\Psi] + \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}}\Psi)\big)^- + \mathscr{L}_\kappa\chi
\end{aligned} \tag{A.116}$$

We remark that in the four dimensional case the s_c transformations on the fields in the first column of (A.116) induce exactly the BRST transformations on the instanton moduli space that have been used for the localization in [49, 84, 83]. The transformations in the Faddeev–Popov sector read

$$\begin{aligned}
&s_{\mathfrak{k}}\, c = \Phi + a - c^2 + i_\upsilon\big(A - \mathring{A}\big) && \delta_{\mathfrak{k}}\, c = i_\kappa\big(A - \mathring{A}\big) - |\kappa| b \\
&s_{\mathfrak{k}}\, \bar{c} = b - [c, \bar{c}] && \delta_{\mathfrak{k}}\, \bar{c} = |\kappa|\big(\bar{\Phi} + \bar{a} - \bar{c}^2 + i_{\bar{\upsilon}}\big(A - \mathring{A}\big)\big) \\
&s_{\mathfrak{k}}\, b = [\Phi, \bar{c}] - \mathscr{L}_\upsilon \bar{c} - [c, b] && \delta_{\mathfrak{k}}\, b = |\kappa|\big(\mathscr{L}_\kappa \bar{c} - \eta\big)
\end{aligned} \tag{A.117}$$

The algebra (A.116), (A.117) closes off-shell, provided that $[\upsilon, \bar{\upsilon}] = \mathcal{L}_\upsilon \bar{\upsilon} = 0$, $d(\kappa \cdot \bar{\upsilon}) = 0$. Moreover, $dg(\upsilon)$ and $dg(\bar{\upsilon})$ must be selfduals in the eight dimensional case. Then, one has, but on the Faddeev-Popov sector :

$$\begin{gathered}
s_c^2 = \delta_{\text{gauge}}(\Phi + i_\upsilon A) + \mathcal{L}_\upsilon \qquad \delta_{\bar{c}}{}^2 = \delta_{\text{gauge}}(\bar{\Phi} + i_{\bar{\upsilon}} A) + \mathcal{L}_{\bar{\upsilon}} \\
\{s_c, \delta_{\bar{c}}\} = \mathcal{L}_\kappa + \delta_{\text{gauge}}(i_\kappa A)
\end{gathered} \tag{A.118}$$

The $s_{\mathfrak{k}}$ and $\delta_{\mathfrak{k}}$ symmetries completely constrain the classical action also in the equivariant case. The details of this computation are given in appendix B.3.1. The action of the equivariant topological theory is $s_{\mathfrak{k}}\, \delta_{\mathfrak{k}}$-exact

$$S = s_{\mathfrak{k}}\, \delta_{\mathfrak{k}} \int_M \frac{1}{|\kappa|}{}^2 \mathscr{F} \tag{A.119}$$

with

$$\mathscr{F} = \operatorname{Tr}\left(\frac{1}{2} g(\kappa)_\wedge C_\wedge \Big(\big(A - \mathring{A}\big)_\wedge \big(F + \mathring{F}\big) - \frac{1}{3}\big(A - \mathring{A}\big)^3\Big) + \big(g(\kappa)\eta + i_\kappa \chi\big)_\wedge \star \Psi\right) \tag{A.120}$$

and still displays an intriguing relationship with the Chern–Simons action functional. By acting with $\delta_{\mathfrak{k}}$ in (A.120) one gets

$$\begin{aligned}
I = s_{\mathfrak{k}} \int_M \operatorname{Tr}\Bigg(&\chi \star (F + \frac{2}{n} T) + \Psi \star \Big(d_A \bar{\Phi} - i_{\bar{\upsilon}} F\Big) \\
&+ \star \eta \Big([\Phi, \bar{\Phi}] + \mathscr{L}_\upsilon \bar{\Phi} - \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}} \Phi + i_{\bar{\upsilon}} i_\upsilon F\Big)\Bigg)
\end{aligned} \tag{A.121}$$

and finally by acting with $s_{\mathfrak{k}}$

$$\begin{aligned}
I = \int_M \operatorname{Tr}\Bigg(&F^- \star F^- - \Big(d_A \Phi - i_\upsilon F\Big) \star \Big(d_A \bar{\Phi} - i_{\bar{\upsilon}} F\Big) + \chi \star d_A \Psi - \Psi \star d_A \eta \\
&+ T \star \big(F + \frac{2}{n} T\big) - \frac{2}{n} \chi \star \Big([\Phi, \chi] + \mathscr{L}_\upsilon \chi\Big) - \eta \star \Big([\Phi, \eta] + \mathscr{L}_\upsilon \eta\Big) \\
&- \Psi \star \Big([\bar{\Phi}, \Psi] + \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}} \Psi\Big) + \Big([\Phi, \bar{\Phi}] + \mathscr{L}_\upsilon \bar{\Phi} - \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}} \Phi + i_{\bar{\upsilon}} i_\upsilon F\Big)^2\Bigg)
\end{aligned} \tag{A.122}$$

By comparing the equivariant topological action (A.122) to the topological action (A.102) one get a simple rule to pass from one to the other. In the case discussed in Sect.4 the s_c and $\delta_{\bar{c}}$ operators are nilpotent modulo gauge transformations, i.e. $s_c^2 = \delta^{\text{gauge}}(\Phi)$ and $\delta_{\bar{c}}^2 = \delta^{\text{gauge}}(\bar{\Phi})$. In the equivariant case, the nilpotency is also verified modulo reparametrizations along the Killing vectors υ and $\bar{\upsilon}$, as one can see from the first line of Eq. (A.118). To pass from the ordinary topological theory to the equivariant one, we have to make the substitution

$$\delta^{\text{gauge}}(\Phi) \to \delta^{\text{gauge}}(\Phi + i_\upsilon A) + \mathcal{L}_\upsilon \qquad \delta^{\text{gauge}}(\bar{\Phi}) \to \delta^{\text{gauge}}(\bar{\Phi} + i_{\bar{\upsilon}} A) + \mathcal{L}_{\bar{\upsilon}} \tag{A.123}$$

This amounts to the redefinitions

$$\begin{gathered} d_A\Phi \to d_A\Phi - i_\upsilon F \qquad d_A\Phi \to d_A\bar{\Phi} - i_{\bar{\upsilon}} F \\ [\Phi, \bar{\Phi}] \to [\Phi, \bar{\Phi}] + \mathscr{L}_\upsilon \bar{\Phi} - \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}} \Phi + i_{\bar{\upsilon}} i_\upsilon F \end{gathered} \tag{A.124}$$

for the bosonic fields, and

$$\begin{gathered} [\Phi, \chi] \to [\Phi, \chi] + \mathscr{L}_\upsilon \chi \qquad [\Phi, \eta] \to [\Phi, \eta] + \mathscr{L}_\upsilon \eta \\ [\bar{\Phi}, \Psi] \to [\bar{\Phi}, \Psi] + \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}} \Psi \end{gathered} \tag{A.125}$$

for the fermion fields. One can check that, by doing the substitutions (A.124) and (A.125) in the topological action (A.102), one obtains the equivariant topological action (A.122).

Finally, we see that in the equivariant topological theory, the scalar field $\Phi_{\mathfrak{h}}$ has a non-trivial expectation value. In the following subsection we will show that the equivariant action (A.122) can be related by twist to the Super Yang–Mills theory on the Ω-background introduced in [48].

Dimensional reduction and Ω background

The so-called Ω-background can be introduced by considering a non-trivial dimensional reduction of the Super Yang–Mills theory on a torus. In this dimensional reduction, the original theory is defined on a Riemannian fiber bundle E

$$\begin{array}{ccc} M \to & E \\ & \downarrow \\ & T^{m-n} \end{array} \tag{A.126}$$

such that the manifold M on which the dimensionally reduced theory lives is fibered on the torus. Eventually, we can define the metric as follows :

$$G \equiv \delta_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \otimes dy^\beta + g_{\mu\nu}\big(dx^\mu + \upsilon^\mu_\alpha dy^\alpha\big) \otimes \big(dx^\nu + \upsilon^\nu_\beta dy^\beta\big) \tag{A.127}$$

Here, the x^μ are local coordinates on M, y^α are coordinates on T^{m-n} and υ_α are vector fields on M. It is natural to require that the metric G does not depend on the torus coordinates ; in fact, any non-trivial dependence would forbid a consistent cancellation of non-zero modes in the limit of zero radius.

In order to have a supersymmetric theory, one requires the existence of, at least, one supersymmetry generator, and thus the existence of a covariantly constant spinor field on the manifold. This implies that both manifolds M and E are Ricci flat [20] :

$$ {}^E R_{mn} = 0 \qquad {}^M R_{\mu\nu} = 0 \tag{A.128} $$

These equations turn into constraints on the vector fields υ_α

$$ \begin{aligned} \mathcal{L}_{\upsilon_\alpha} g_{\mu\nu} &= 0 \\ [\upsilon_\alpha, \upsilon_\beta] &= 0 \\ d \star dg(\upsilon_\alpha) &= 0 \end{aligned} \tag{A.129} $$

The first equation in (A.129) implies that υ_α's are Killing vectors for the manifold M, while the second imposes that they commute, *i.e.* $\mathcal{L}_{\upsilon_\alpha} \upsilon_\beta = 0$. The vectors υ_α can be mapped upon the Killing vectors that we used in the construction of the equivariant topological field theory in the previous subsection. The last equation in (A.129) imposes further restrictions on the υ_α's in order to preserve the supersymmetry. These conditions are not present in the topological theory. In fact, as we will see in detail in the following, they can be relaxed at the price of breaking the $SO(n)$ rotation invariance of the supersymmetric theory to the special holonomy subgroup required to define the topologically twisted theory.

Let us now work out the case of the eight-dimensional super Yang–Mills theory.

Supersymmetric formulation in eight dimensions

The ten-dimensional vielbeins corresponding to the metric (A.127) are

$$ e_m^A \hat{=} \begin{pmatrix} e_\mu^a & i_{\upsilon_\beta} e^a \\ 0 & \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix} \qquad e_A^m \hat{=} \begin{pmatrix} e_a^\mu & 0 \\ -\upsilon_\alpha^\mu & \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix} \tag{A.130} $$

The dimensional reduction of the ten-dimensional Yang–Mills curvature reads

$$ \frac{1}{2} F_{mn}\, dx^m{}_\wedge dx^n = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^\mu{}_\wedge dx^\nu + D_\mu \phi_\alpha\, dx^\mu{}_\wedge dy^\alpha + \frac{1}{2} [\phi_\alpha, \phi_\beta]\, dy^\alpha{}_\wedge dy^\beta $$

We can write this curvature in locally flat coordinates by using the vielbeins (A.130)

$$\frac{1}{2}F_{AB}\,e^A{}_\wedge e^B = \frac{1}{2}F_{ab}\,e^a{}_\wedge e^b + \Big(e^\mu_a D_\mu\phi_\beta - \upsilon^\nu_\beta e^\mu_a F_{\mu\nu}\Big)\,e^a{}_\wedge dy^\alpha \\ + \frac{1}{2}\Big([\phi_\alpha,\phi_\beta] - \upsilon^\mu_\alpha D_\mu\phi_\beta + \upsilon^\mu_\beta D_\mu\phi_\alpha + \upsilon^\mu_\alpha\upsilon^\nu_\beta F_{\mu\nu}\Big)\,dy^\alpha{}_\wedge dy^\beta \quad \text{(A.131)}$$

By plugging (A.131) into the action

$$\int_M d^8x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}F_{AB}F^{AB} + \frac{i}{2}\big(\,\overline{\Lambda}\,\Gamma^A D_A\,\Lambda\,\big)\right) \quad \text{(A.132)}$$

one can read the bosonic part of the eight-dimensional action. Concerning the fermionic part, we have to decompose the contraction of the covariant derivative $e^m_A D_m$. To simplify the computation we observe that

$$e^m_A D_m = \mathscr{L}_{e^m_A} \quad \text{(A.133)}$$

since e^m_A is covariantly constant. The Lie derivative is independent of the Riemannian connection and thanks to this property, one has :

$$e^m_A D_m \hat{=} \Big(\,e^\mu_a D_\mu\ ,\ \phi_\alpha - \mathscr{L}_{\upsilon_\alpha}\Big) \quad \text{(A.134)}$$

The ten-dimensional gamma matrices are related to those in eight dimensions as follows :

$$\Gamma^m \equiv \sigma_2\otimes\gamma^\mu, \sigma_2\otimes\gamma_9, \sigma_1\otimes 1 \quad \text{(A.135)}$$

Using the above equations one obtains the action and its supersymmetries on a eight dimensional pseudo-Riemannian manifold. By extending to eight dimensions the Wick rotation on the fermions, which is defined in [22], one can Wick-rotate this theory to a Riemannian manifold, as follows :

$$\begin{array}{ll} x^0 \to e^{-i\theta}x^0 & \gamma^8 \equiv i\gamma^0 \\ \multicolumn{2}{c}{A_\mu \to (e^{i\theta}A_8, A_i)} \\ \lambda \to e^{\frac{1}{2}\theta\gamma^8\gamma_9}\lambda & \lambda^\dagger \to \lambda^\dagger e^{\frac{1}{2}\theta\gamma^8\gamma_9} \\ \phi_1 \to e^{i\theta}\phi_1 & \phi_2 \to \phi_2 \\ \upsilon_1 \to e^{i\theta}\upsilon_1 & \upsilon_2 \to \upsilon_2 \end{array} \quad \text{(A.136)}$$

Eventually, one sets $\theta = \frac{\pi}{2}$, and one gets the Euclidean action

$$\int_M d^8x\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,\Bigg(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Big(D_\mu\phi_\alpha + \upsilon^\nu_\alpha F_{\nu\mu}\Big)\Big(D^\mu\Phi^\alpha + \upsilon^\alpha_\sigma F^{\sigma\mu}\Big) + \frac{i}{2}\,(\overline{\lambda}\not{D}\lambda)$$
$$- \frac{1}{2}\Big([\phi_1,\phi_2] - \mathscr{L}_{\upsilon_1}\phi_2 + \mathscr{L}_{\upsilon_2}\phi_1 + \upsilon_1^\mu\upsilon_2^\nu F_{\mu\nu}\Big)^2$$
$$+ \frac{i}{2}\Big(\overline{\lambda}\gamma_9\big([\phi_1,\lambda] - \mathscr{L}_{\upsilon_1}\lambda\big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\overline{\lambda}\big([\phi_2,\lambda] - \mathscr{L}_{\upsilon_2}\lambda\big)\Big)\Bigg) \quad \text{(A.137)}$$

We recall that the spinor Lie derivative is defined by

$$\mathscr{L}_\upsilon\lambda = \upsilon^\mu D_\mu\lambda + \frac{1}{2}D_\mu\upsilon_\nu\gamma^{\mu\nu}\lambda \quad \text{(A.138)}$$

where $\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$.

The action (A.137) has the following supersymmetry :

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu &= -i(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda)\\
\delta\phi_1 &= -(\bar{\epsilon}\gamma_9\lambda) - i\big(\bar{\epsilon}\not{\phi}_1\lambda\big)\\
\delta\phi_2 &= -(\bar{\epsilon}\lambda) - i\big(\bar{\epsilon}\not{\phi}_2\lambda\big)\\
\delta\lambda\ &= \not{F}\epsilon - i\gamma_9\Big(\not{D}\phi_1 + i_{\upsilon_1}\not{F}\Big)\epsilon - i\Big(\not{D}\phi_2 + i_{\upsilon_2}\not{F}\Big)\epsilon\\
&\quad +\gamma_9\Big([\phi_1,\phi_2] - \mathscr{L}_{\upsilon_1}\phi_2 + \mathscr{L}_{\upsilon_2}\phi_2 + i_{\upsilon_2}i_{\upsilon_1}F\Big)\epsilon
\end{aligned} \quad \text{(A.139)}$$

In fact, the symmetry holds only if the covariantly constant spinor ϵ is constant along the flow of the υ_α's. Thus $\Omega^\alpha_{ab} \equiv \frac{1}{2}\big(dg(\upsilon^\alpha)\big)_{ab}$ must define a degenerated matrix $\not{\Omega}^\alpha$. In eight dimensions, a constant spinor only exists on a Joyce manifold, and its Lie derivative can be written as

$$\mathcal{L}_\upsilon\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}\not{\Omega}_\alpha{}^\beta\varepsilon_\beta \quad \text{(A.140)}$$

which is zero if and only if Ω is selfdual. Thus the constant spinor remains invariant under the isometries generated by υ_α's only if the matrix Ω_α is selfdual. Such vectors verify the third equations in (A.129) $d{\star}dg(\upsilon_\alpha)$=0. The explicit form of the action (A.137) for $M \cong \mathbb{R}^8$ is displayed in Appendix C.

The twisted theory for Ω backgrounds

The modifications of the supersymmetric theory are formally quite mild when one introduces the Ω backgrounds. They are completely determined at the purely bosonic level. Thus, all twist operations must remain identical, and one can define the twisted scalar and vector operators Q and Q_μ from Eq.(A.139). To compute the twisted version of the action (A.137), we define :

$$\upsilon = \upsilon_1 - \upsilon_2 \qquad \bar{\upsilon} = \frac{1}{2}\big(\upsilon_1 + \upsilon_2\big) \tag{A.141}$$

We obtain :

$$\begin{aligned} I = \int_M \mathrm{Tr}\ \Bigg(-\frac{1}{2} F \star F - \Big(d_A\Phi - i_\upsilon F\Big) \star \Big(d_A\bar{\Phi} - i_{\bar{\upsilon}} F\Big) - 4\chi \star d_A\Psi - \Psi \star d_A\eta \\ - 2\chi \star \Big([\Phi, \chi] + \mathscr{L}_\upsilon \chi\Big) - \frac{1}{2}\eta \star \Big([\Phi, \eta] + \mathscr{L}_\upsilon \eta\Big) \\ - \Psi \star \Big([\bar{\Phi}, \Psi] + \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}}\Psi\Big) + \frac{1}{2}\Big([\Phi, \bar{\Phi}] + \mathscr{L}_\upsilon \bar{\Phi} - \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}}\Phi + i_{\bar{\upsilon}} i_\upsilon F\Big)^2 + 2T \star T \Bigg) \end{aligned} \tag{A.142}$$

One can verify that this action is Q exact, up to a topological term and can be written as follows :

$$\begin{aligned} I = -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Tr}\ \big(\ C_\wedge F_\wedge F\ \big) \\ + Q \int_M \mathrm{Tr}\ \Bigg(-2\chi \star (F - T) + \Psi \star \Big(d_A\bar{\Phi} - i_{\bar{\upsilon}} F\Big) \\ + \frac{1}{2} \star \eta\Big([\Phi, \bar{\Phi}] + \mathscr{L}_\upsilon \bar{\Phi} - \mathscr{L}_{\bar{\upsilon}}\Phi + i_{\bar{\upsilon}} i_\upsilon F\Big)\Bigg) \end{aligned} \tag{A.143}$$

We thus recover by twisting the action of the equivariant topological theory (A.122)[8], and discover that the scalar and vector topological symmetries defined from the equivariant horizontality conditions correspond to the twisted supersymmetries of the Super Yang–Mills theory on the Ω-background. Notice that the action in the twisted formulation (A.142) is BRST-exact, and so BRST closed, for all commuting vector fields υ_α, so that the matrices Ω^α_{ab} are no longer required to be selfdual in order to have a BRST-closed action. This can be understood as follows : if we consider the twisted theory for a generic Ω-background (*i.e.* Ω^α_{ab} generic matrices) and we untwist it, we get a term

$$\frac{1}{4}\lambda^\alpha \mathscr{D}^{+\beta}_{\alpha}\lambda^\beta - \frac{1}{2}\lambda_{\dot{\alpha}}\big(\overline{\mathscr{D}}^{+\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} - \overline{\mathscr{D}}^{-\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\big)\lambda^{\dot{\beta}} \tag{A.144}$$

[8]This hold true, up to a rescaling in (A.121) which leaves the BRST operator invariant. That is of a factor -2 for χ and T, a factor $\frac{1}{2}$ for $\bar{\Phi}, \eta$ and $\bar{\upsilon}$, and a global factor 2 on the action. We must also add the substitution $T \to T + F^-$.

where the plus and the minus stand for the selfdual and antiselfdual projections with respect to the Cayley four form C. The term (A.144) breaks the rotation invariance from $SO(8)$ to $Spin(7)$, effectively twisting the theory.

A.1.8 Conclusion

On manifolds of reducible tangent bundle, the existence of a covariantly constant vector field allows one to extend the horizontality condition. This extension define two nilpotent topological operators, the usual scalar one, and the vector topological operator. These two operators define a closed off-shell algebra, in a globally well-defined way. In order to make contact with known results, we observe that the dimensional reduction on a circle with tangent vector κ of this horizontality condition is nothing but the BRST-antiBRST horizontality condition, which also defines two topological charges of a resulting balanced topological theory, as it was defined in [47]. The consistency of the algebra needs the existence of the concept of selfduality or antiselfduality. In eight dimensions, this implies that the manifold is of a Joyce type. The use of the vector symmetry permits one to raise the indetermination of the topological gauge function, and eventually of a topological BRSTQFT action that determines by twist supersymmetry.

The invariance of the action under the vector symmetry is in fact equivalent to the conservation of its Noether current, which turns out to be a BRST-antecedent of the energy momentum tensor. A more conventional construction would be the definition of a BRSTQFT from the last condition, but it would obscure the geometrical interpretation.

This algebraic construction of topological theory extends to the case of Ω background. The extended differential is understood as the equivariant differential with respect to the action of an isometry group of the physical space, and the observables of the theory are in the equivariant cohomology of this differential.

Beyond the mathematical interpretation of the fields occurring in BRSTQFT, it is striking that the extended horizontality condition also provides a geometrical construction of a subalgebra of (possibly maximal) supersymmetry which can be closed off-shell and *completely* determines the action. Thus, it determines the whole supersymmetric algebra in the flat space limit, and the question of having no finite set of auxiliary field for the superPoincaré algebra becomes irrelevant. These results are compatible with dimensional reduction, and apply therefore to different cases of supersymmetry, in other dimensions.

A most interesting application of this construction is for four-dimensional $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills, which will be published separately. The existence of an off-shell closed sector of supersymmetry permits to greatly improve algebraic study of renormalization.

This is a progress, since, until now, one had to use symmetries which close only modulo equations of motion. The nilpotent form of the algebra is also useful for algebraic renormalization and show that the gauge-fixing is compatible with supersymmetry.

A.2 Supersymétrie maximale en 4 dimensions

L. Baulieu et G. Bossard,

« New results on $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory »

Phys. Lett. B **632**, 131 (2006) `hep-th/0507003`.

On déduit des résultats de la première publication, trois courbures étendues pour la théorie de type cohomologique en sept dimensions, dont deux permettent de déterminer la représentation de l'ensemble des charges de supersymétrie de la théorie. La théorie est équilibrée. Les générateurs tordus sont ainsi dans des doublets du groupe de symétrie interne $SL(2, \mathbb{R})$. Ils sont constitués d'un doublet de charges scalaires s^α et d'un doublet de charges vectorielles δ^α. On définit ici un automorphisme vectoriel $e^{t\,\mathrm{ad}_\gamma}$ qui mélange les charges scalaires avec les charges vectorielles. Le générateur de cet automorphisme γ constitue un antécédent des charges vectorielles par rapports aux charges scalaires.

$$\delta^\alpha = [s^\alpha, \gamma] \tag{A.145}$$

L'action de la théorie peut s'écrire aussi bien comme un terme $s^\alpha s_\alpha$-exact que comme un terme $s^\alpha \delta_\alpha$-exact, modulo la seconde classe de Chern. La représentation fonctionnelle des charges de supersymétrie n'est cependant en involution que si l'on brise la covariance $SL(2, \mathbb{R})$ au sous groupe $SO(2)$ et qu'on ne considère qu'une des charges vectorielles. Les neufs charges restantes correspondent à la réduction dimensionnelle de la charge scalaire et de la charge vectorielle en huit dimensions.

On reproduit ensuite l'ensemble de ces résultats pour la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique quadridimensionnelle dans sa formulation tordue à la Vafa–Witten. Celle-ci peut être obtenue par réduction dimensionnelle à partir de la théorie en sept dimensions, en identifiant le groupe de symétrie interne $SU(2)$ ($SO(3)$ des modes zéro des vecteurs définis sur le 3-tore) avec le sous groupe $SU(2)$ anti-autodual de $Spin(4)$, de telle sorte que le sous groupe préservé de $Spin(4) \times SU(2)$ est inclus dans G_2. On ne considère pas les charges tensorielles, qui apparaissent par réduction dimensionnelle des charges vectorielles en sept dimensions et se représentent dans l'adjointe du $SU(2)$ diagonal. La propriété remarquable est que la sous algèbre de supersymétrie composée de deux charges scalaires et d'une charge vectorielle qui admet une représentation fonctionnelle locale sur les champs, détermine à elle seule l'action renormalisable invariante par rapport au groupe des rotations tordues. On obtient ainsi que six charges de supersymétrie impliquent à elles seules l'invariance par rapport aux seize charges de la supersymétrie maximale.

Il s'avère que cette propriété est propre de la formulation tordue de Vafa–Witten, et ne se retrouve pas dans les deux autres formulations tordues de la théorie.

New results on $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory

abstract

The $\mathcal{N} = 4$ SuperYang–Mills theory is covariantly determined by two scalar and one vector BRST topological symmetry operators. This determines an off-shell closed sector of $\mathcal{N} = 4$ SuperYang–Mills, with 6 generators, which is big enough to fully determine the theory, in a Lorentz covariant way. This reduced algebra derives from horizontality conditions in four dimensions. The horizontality conditions only depend on the geometry of the Yang–Mills fields. They also descend from a genuine horizontality condition in eight dimensions. When the four dimensional manifold is hyperKähler, one can perform a twist operation that defines the $\mathcal{N} = 4$ supersymmetry and a $SL(2, \mathbb{H})$ interne symmetry (the "Euclidean version" of the $SU(4)$ R-symmetry in Minkowski space). These results extend in a covariant way the light-cone property that the $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills theory is actually determined by only 8 independent generators, instead of the 16 generators that occur in the physical representation of the super Poincaré algebra. The topological construction disentangles the off-shell closed sector of the (twisted) maximally supersymmetric theory from the sector that closes only modulo equations of motion. It allows one to escape the question of auxiliary fields in $\mathcal{N} = 4$ SuperYang–Mills theory.

A.2.1 Introduction

Recently, we have constructed the genuine $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric algebra in four and eight dimensions in their twisted form, directly from extended horizontality conditions [A.1]. The new features were the geometrical construction of both scalar and vector topological BRST symmetries. A remarkable property is that the supersymmetry Yang–Mills algebra, both with 8 and 16 generators, contain an off-shell closed sector, with 5 and 9 generators, respectively, which is big enough to completely determine the theory. The key of the geometrical construction is the understanding that one must determine the scalar topological BRST symmetry in a way that is explicitly consistent with reparametrization symmetry. This yields the vector topological BRST symmetry in a purely geometrical way.

Here we will extend the result to the case of the maximally supersymmetric $\mathcal{N}=4$ algebra in four dimensions, with its 16 supersymmetric spinorial generators and $SL(2,\mathbb{H})$ internal symmetry[9]. The most determining phenomenon occurs when one computes the dimensional reduction from eight to seven dimensions, which provides an $SL(2,\mathbb{R})$ symmetry. This explains the organization of the paper and the eventual obtaining of four-dimensional horizontality conditions, which determine the $\mathcal{N}=4$ algebra in a twisted form. We will also discuss the possible other twists of the supersymmetric theory.

As for the physical application of our construction, having obtained an off-shell closed algebra allows one to escape the question of auxiliary fields in $\mathcal{N}=4$ SuperYang–Mills theory. In a separate publication, using this algebra and its consequences, we will give an improved demonstration of the renormalization and finiteness of the $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills theory [68, 69].

A.2.2 From the $D=8$ to the $D=7$ Yang–Mills theory

Determination of both topological scalar symmetries in seven dimensions

The $D=8$ topological Yang–Mills theory relies on the following horizontality equation, completed with its Bianchi identity [A.1] :

$$(d+s+\delta-i_\kappa)\big(A+c+|\kappa|\bar{c}\big)+\big(A+c+|\kappa|\bar{c}\big)^2 = F+\Psi+g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi+\Phi+|\kappa|^2\bar{\Phi} \quad \text{(A.146)}$$

One has the closure relations :

$$s^2=\delta^2=0 \qquad \{s,\delta\}=\mathcal{L}_\kappa \quad \text{(A.147)}$$

We refer to [A.1] for a detailed explanation of these formula and the twisted fields that they involve. Ψ is a 1-form topological ghost and χ is an antiselfdual 2-form in eight dimensions, with 7 independent components. Selfduality exists in eight dimensions when the manifold has a holonomy group included in $Spin(7)$. The octonionic invariant 4-form of such a manifold allows one to define selfduality, by the decomposition of a 2-form as $\mathbf{28}=\mathbf{7}\oplus\mathbf{21}$. κ is a covariantly constant vector, which exists if the holonomy group is included in $G_2\subset Spin(7)$. Φ and $\bar{\Phi}$ are respectively a topological scalar ghost of ghost and an antighost for antighost. c and $\bar{c}$ can be interpreted as the Faddeev–Popov ghost

[9]The internal symmetry group $SU(4)$ of $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills, defined on a Minkowski space, must be replaced on a Euclidean one by $SL(2,\mathbb{H})\sim SO(5,1)$. This is implied by the fact that $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills is the dimensional reduction of the ten-dimensional $\mathcal{N}=1$ super-Yang–Mills theory, which is only defined on Minkowski space.

and antighost of the eight-dimensional Yang–Mills field A. s and δ are the scalar and vector topological BRST operators. In flat space, one can write $\delta + |\kappa|\delta^{\text{gauge}}(\bar{c}) = \kappa^\mu Q_\mu$, and we understand that $Q = s + \delta^{\text{gauge}}(c)$ and Q_μ count for 9 independent generators, giving an off-shell closed sector of $\mathcal{N} = 2, D = 8$ twisted supersymmetry, which fully determines the theory [A.1].

To determine the topological symmetry in seven dimensions, we start from a manifold in eight dimensions that is reducible, $M_8 = N_7 \times S^1$, where N is a G_2-manifold. We can chose κ as a tangent vector to S^1. Thus, the 8-dimensional vector symmetry along the circle reduces to a scalar one in seven dimensions, $\bar{s}$, and the reduction of the antiself-dual 2-form χ gives a seven-dimensional 1-form $\bar{\Psi}$. So, the dimensional reduction of the horizontality condition (A.189) is

$$(d + s + \bar{s})\big(A + c + \bar{c}\big) + \big(A + c + \bar{c}\big)^2 = F + \Psi + \bar{\Psi} + \Phi + L + \bar{\Phi} \qquad \text{(A.148)}$$

Indeed, with our choice of κ, $L = i_\kappa A = A_8$ in eight dimensions. Eq. (A.148) can be given a different interpretation than Eq. (A.189). It contains no vector symmetry and looks like a standard 7-dimensional BRST-antiBRST equation. The transformation of L, the origin of which is A_8, is now given by the Bianchi identity of Eq. (A.148). In fact, after dimensional reduction, L is understood as a curvature. Using the convenient pyramidal diagrammatic description of ghost-antighost structures, we can rewrite the field description, as follows :

$$\begin{array}{ccccc} & & A\,,\,L & & \\ & \Psi\,,\,\bar{\eta} & & \bar{\Psi} & \\ \Phi & & & & \bar{\Phi} \\ & & \eta & & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \Psi & & \bar{\Psi} & \\ \Phi & & L & & \bar{\Phi} \\ & \bar{\eta} & & \eta & \end{array} \qquad \text{(A.149)}$$

As compared to the asymmetrical diagram on the left hand-side, the one on the right hand-side exhibits an $SL(2,\mathbb{R})$ symmetry, which counts the ghost antighost numbers. Indeed, each line of this diagram corresponds to an irreducible representation of $SL(2,\mathbb{R})$, namely a completely symmetrical $SL(2,\mathbb{R})$-spinorial tensor with components $\phi^{g,G-g}$, where g and $G-g$ are respectively the (positive) ghost and antighost numbers of ϕ, and $2g - G$ is the effective ghost number of ϕ. This $SL(2,\mathbb{R})$ symmetry actually applies to the covariant ghost-antighost spectrum of a p-form gauge field ϕ_p, $\tilde{\phi}_p = \sum_{0\leq G\leq p} \sum_{0\leq g\leq G} \phi^{g,G-g}_{p-G}$.

In fact, the fields $(\Psi, \bar{\Psi})$ and $(\eta, \bar{\eta})$ can be identified as $SL(2,\mathbb{R})$ doublets, Ψ^α and η^α, $\alpha = 1,2$, and the three scalar fields $(\Phi, L, \bar{\Phi})$ as a $SL(2,\mathbb{R})$ triplet, Φ^i, $i = 1,2,3$. The index α and i are respectively raised and lowered by the volume form $\varepsilon_{\alpha\beta}$ of $SL(2,\mathbb{R})$ and the Minkowski metric η_{ij} of signature $(2,1)$. Both BRST and antiBRST operators can be assembled into a $SL(2,\mathbb{R})$ doublet $s^\alpha = (s, \bar{s})$.

The horizontality condition (A.148) can be solved, with the introduction of three 0-form Lagrange multipliers, $\eta, \bar{\eta}, b$ and a 1-form T.

$$
\begin{array}{ll}
sA = \Psi - d_A c & \bar{s}A = \bar{\Psi} - d_A \bar{c} \\
s\Psi = -d_A\Phi - [c,\Psi] & \bar{s}\Psi = -T - d_A L - [\bar{c},\Psi] \\
s\Phi = -[c,\Phi] & \bar{s}\Phi = -\bar{\eta} - [\bar{c},\Phi] \\
s\bar{\Phi} = \eta - [c,\bar{\Phi}] & \bar{s}\Phi = -[\bar{c},\bar{\Phi}] \\
s\eta = [\Phi,\bar{\Phi}] - [c,\eta] & \bar{s}\eta = -[\bar{\Phi},L] - [\bar{c},\eta] \\
sL = \bar{\eta} - [c,L] & \bar{s}L = -\eta - [\bar{c},L] \\
s\bar{\eta} = [\Phi,L] - [c,\bar{\eta}] & \bar{s}\bar{\eta} = [\Phi,\bar{\Phi}] - [\bar{c},\bar{\eta}] \\
s\bar{\Psi} = T - [c,\bar{\Psi}] & \bar{s}\bar{\Psi} = -d_A\bar{\Phi} - [\bar{c},\bar{\Psi}] \\
sT = [\Phi,\bar{\Psi}] - [c,T] & \bar{s}T = -d_A\eta + [L,\bar{\Psi}] - [\bar{\Phi},\Psi] - [\bar{c},T] \\
 & \\
sc = \Phi - c^2 & \bar{s}c = L - b \\
s\bar{c} = b - [c,\bar{c}] & \bar{s}\bar{c} = \bar{\Phi} - \bar{c}^2 \\
sb = [\Phi,\bar{c}] - [c,\bar{c}] & \bar{s}b = \eta + [\bar{c},L]
\end{array}
\tag{A.150}
$$

These equations are not $SL(2,\mathbb{R})$ covariant because of our simplest choice of the transformation of antighosts transformations, like $s\bar{c} = b - [c,\bar{c}]$. By suitable redefinitions of auxiliary fields, one can get, however, a manifestly $SL(2,\mathbb{R})$ covariant formulation of the symmetry, as follows :

$$
\begin{array}{ll}
s^\alpha A = \Psi^\alpha - d_A c^\alpha & s^\alpha \eta_\beta = -2\sigma^{ij}{}_\beta{}^\alpha [\Phi_i,\Phi_j] - [c^\alpha,\eta_\beta] \\
s^\alpha \Psi_\beta = \delta^\alpha_\beta T - \sigma^i{}_\beta{}^\alpha d_A\Phi_i - [c^\alpha,\Psi_\beta] & s^\alpha T = \frac{1}{2} d_A \eta^\alpha + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\Phi_i,\Psi_\beta] - [c^\alpha, T] \\
s^\alpha \Phi_i = \frac{1}{2}\sigma_i{}^{\alpha\beta}\eta_\beta - [c^\alpha,\Phi_i] &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
s^\alpha c_\beta &= -\delta^\alpha_\beta b + \sigma^i{}_\beta{}^\alpha \Phi_i - \frac{1}{2}[c^\alpha, c_\beta] \\
s^\alpha b &= -\frac{1}{2}\eta^\alpha + \frac{1}{2}\sigma^{i\,\alpha\beta}[\Phi_i, c_\beta] + \frac{1}{12}[c^\beta,[c_\beta,c^\alpha]] - \frac{1}{2}[c^\alpha, b]
\end{aligned}
\tag{A.151}
$$

The Cartan algebra (that we will denote by the subindex $_{(c)}$) is obtained by adding gauge transformations with parameters c and $\bar{c}$, from s and $\bar{s}$, respectively. It reads :

$$
\begin{aligned}
&s^{\alpha}_{(c)} A = \Psi^{\alpha} \\
&s^{\alpha}_{(c)} \Psi_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} T - \sigma^{i}{}_{\beta}{}^{\alpha} d_A \Phi_i \\
&s^{\alpha}_{(c)} \Phi_i = \frac{1}{2} \sigma_i{}^{\alpha\beta} \eta_{\beta}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&s^{\alpha}_{(c)} \eta_{\beta} = -2\sigma^{ij}{}_{\beta}{}^{\alpha} [\Phi_i, \Phi_j] \\
&s^{\alpha}_{(c)} T = \frac{1}{2} d_A \eta^{\alpha} + \sigma^{i\,\alpha\beta} [\Phi_i, \Psi_{\beta}]
\end{aligned}
\tag{A.152}
$$

The equivariant (Cartan) algebra is the one that will match by twist with the relevant part of the twisted supersymmetry algebra. Its closure is only modulo gauge transformations, with parameters that are ghosts of ghosts.

Determination of the equivariant part of both topological vector symmetries in seven dimensions

We have produced by dimensional reduction a new scalar (antiBRST) topological symmetry operator. However, we have apparently lost the rest of the vector symmetry in eight dimensions, since we have chosen κ along the circle of dimensional reduction. The freedom of choosing this circle generates an automorphism of the seven dimensional symmetry. It allows one to obtain two vector topological symmetries, in seven dimensions, in a $SL(2,\mathbb{R})$ symmetric way.

In the genuine theory in eight dimensions, the definition of a chosen $Spin(7)$ structure is actually arbitrary. The different choices of a $Spin(7)$ structure on the eight dimensional Riemann manifold can be parametrized by the transformations of $SO(8) \setminus Spin(7)$. However, such transformations cannot be represented on eight dimensional fields such as the antiselfdual 2-form $\chi_{\mu\nu}$. They are generated by antiselfdual 2-form infinitesimal parameters, which can be parametrized by seven-dimensional vectors, after dimensional reduction to 7 dimensions. One can thus define the following (commuting) 7-dimensional derivation $\boldsymbol{\gamma}$, which depends on a covariantly constant seven-dimensional vector κ^{μ}, (the indices $\mu, \nu ...$ are seven dimensional), and acts as follows on the 7-dimensional fermion fields :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} \Psi^{\alpha}_{\mu} &= -\kappa_{\mu} \eta^{\alpha} - C_{\mu\nu}{}^{\sigma} \kappa^{\nu} \Psi^{\alpha}_{\sigma} \\
\boldsymbol{\gamma} \eta^{\alpha} &= \kappa^{\mu} \Psi^{\alpha}_{\mu}
\end{aligned}
\tag{A.153}
$$

The action of $\boldsymbol{\gamma}$ is zero on the bosonic field of the equivariant BRST algebra, but on the Lagrange multiplier field T. (We will shortly define $\boldsymbol{\gamma} T$, by consistency). $C_{\mu\nu\sigma}$ is the seven dimensional G_2 invariant octonionic 3-form and its dual is the 4-form $C^{\star}_{\mu\nu\sigma\rho}$. We will use the notation $i_{\kappa} \star C^{\star} w_1 = -C_{\mu\nu}{}^{\sigma} \kappa^{\nu} w_{\sigma} dx^{\mu}$. The derivation $\boldsymbol{\gamma}$ expresses the arbitrariness in the choice of an eighth component, in order to perform the dimensional reduction. To each constant vector on N, one can assign an $U(1)$ group, which is subset of $SO(8)\setminus Spin(7)$. Since $\{s^\alpha_{(c)}, s^\beta_{(c)}\} = \sigma^{i\,\alpha\beta}\delta_{\text{gauge}}(\Phi_i)$, one can verify on all fields :

$$\{e^{t\gamma}s^\alpha_{(c)}e^{-t\gamma}, e^{t\gamma}s^\beta_{(c)}e^{-t\gamma}\} = \{s^\alpha_{(c)}, s^\beta_{(c)}\} \tag{A.154}$$

One defines the vector operator :

$$\delta^\alpha_{(c)} \equiv [s^\alpha_{(c)}, \gamma] \tag{A.155}$$

Since $[[s^\alpha_{(c)}, \gamma], \gamma] = -s^\alpha_{(c)}$, one has :

$$e^{t\gamma}s^\alpha_{(c)}e^{-t\gamma} = \cos t\ s^\alpha_{(c)} - \sin t\ \delta^\alpha_{(c)} \tag{A.156}$$

To ensure the validity of this formula on T, one defines the transformation of the auxiliary field T as follows :

$$\gamma T = -i_\kappa F - 2 i_\kappa \star C^\star T \tag{A.157}$$

Computing the commutators of $s^\alpha_{(c)}$ and γ, one gets the action of $\delta^\alpha_{(c)}$:

$$\begin{aligned}
\delta^\alpha_{(c)} A &= g(\kappa)\eta^\alpha + i_\kappa \star C^\star \Psi^\alpha \\
\delta^\alpha_{(c)} \Psi_\beta &= \delta^\alpha_\beta i_\kappa\big(F + \star C^\star T\big) + {\sigma^i}_\beta{}^\alpha i_\kappa \star C^\star d_A \Phi_i - 2g(\kappa){\sigma^{ij}}_\beta{}^\alpha [\Phi_i, \Phi_j] \\
\delta^\alpha_{(c)} \Phi_i &= -\frac{1}{2}{\sigma_i}^{\alpha\beta} i_\kappa \Psi_\beta \\
\delta^\alpha_{(c)} \eta_\beta &= -\delta^\alpha_\beta i_\kappa T + {\sigma^i}_\beta{}^\alpha \mathscr{L}_\kappa \Phi_i \\
\delta^\alpha_{(c)} T &= \frac{1}{2} d_A i_\kappa \Psi^\alpha - i_\kappa \star C^\star d_A \eta^\alpha + g(\kappa)\sigma^{i\,\alpha\beta}[\Phi_i, \eta_\beta] - \sigma^{i\,\alpha\beta} i_\kappa \star C^\star [\Phi_i, \Psi_\beta] - \mathscr{L}_\kappa \Psi^\alpha
\end{aligned} \tag{A.158}$$

$\delta^\alpha_{(c)}$ is a pair of two vector symmetries in seven dimensions, which transform as an $SL(2,\mathbb{R})$-doublet. This completes the scalar doublet $s^\alpha_{(c)}$.

Then, one can verify that the anticommutation relations for the vector operator $\delta^\alpha_{(c)}$ are :

$$\{s^\alpha_{(c)}, \delta^\beta_{(c)}\} = \varepsilon^{\alpha\beta}\big(\mathcal{L}_\kappa + \delta_{\text{gauge}}(i_\kappa A)\big) \qquad \{\delta^\alpha_{(c)}, \delta^\beta_{(c)}\} = 2\sigma^{i\,\alpha\beta}\delta_{\text{gauge}}(\Phi_i) \tag{A.159}$$

Reciprocally, these closure relations uniquely determine $\delta^\alpha_{(c)}$, from the knowledge of $s^\alpha_{(c)}$.

In the next section, we will re-derive these transformation laws, from horizontality equations. Moreover, we will extend them as nilpotent transformations, by including gauge transformations.

It is instructive to check the expression we have just obtained for $\delta^\alpha_{(c)}$, by starting from Eq. (A.189) in 8 dimensions (with the notational change $\bar{c} \to \gamma$), and computing the dimensional reduction with a vector κ along N, instead of along the circle. This gives :

$$
\begin{aligned}
\delta A &= g(\kappa)\eta + i_\kappa \star C^\star \bar\Psi - |\kappa| d_A \gamma & \delta\bar\Phi &= -[|\kappa|\gamma, \bar\Phi] \\
\delta\Psi &= i_\kappa\big(F - \star C^\star T\big) + g(\kappa)[\Phi,\bar\Phi] - [|\kappa|\gamma, \Psi] & \delta\eta &= \mathscr{L}_\kappa \bar\Phi - [|\kappa|\gamma, \eta] \\
\delta\Phi &= i_\kappa \Psi - [|\kappa|\gamma, \Phi] & \delta L &= i_\kappa \bar\Psi - [|\kappa|\gamma, L] \\
& & \delta\bar\eta &= i_\kappa\big(T + d_A L\big) - [|\kappa|\gamma, \bar\eta]
\end{aligned}
$$
$$
\delta\bar\Psi = i_\kappa \star C^\star d_A \bar\Phi - g(\kappa)[\bar\Phi, L] - [|\kappa|\gamma, \bar\Psi]
$$
$$
\delta T = \mathscr{L}_\kappa \bar\Psi + i_\kappa \star C^\star\big(d_A\eta + [\bar\Phi]\big) + g(\kappa)[L,\eta] - g(\kappa)[\bar\Phi,\bar\eta] - [|\kappa|\gamma, T] \tag{A.160}
$$

One can then verify :

$$
[\bar s, \boldsymbol{\gamma}] = \delta \tag{A.161}
$$

with the modified definition that

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\gamma} T = i_\kappa F - 2 i_\kappa \star C^\star T - i_\kappa \star C^\star d_A L \\
\boldsymbol{\gamma}\bar c = -|\kappa|\gamma \qquad \boldsymbol{\gamma}\gamma = \frac{1}{|\kappa|}\bar c
\end{gathered} \tag{A.162}
$$

The difference between this expression of $\delta + |\kappa|\delta^{\text{gauge}}(\gamma)$ and that of a component of the $SL(2,\mathbb{R})$ covariant vector symmetry operators $\delta^\alpha_{(c)}$ is just a field redefinition.

The complete Faddeev–Popov ghost dependent vector and scalar topological symmetries in seven dimensions

We now directly construct the scalar and vector BRST topological operators s^α and δ^α, the equivariant analogs of which are $s^\alpha_{(c)}$ and $\delta^\alpha_{(c)}$. One needs scalar Faddeev–Popov ghosts, $c, \bar c, \gamma, \bar\gamma$, which are associated to the equivariant BRST operators $s_{(c)}, \bar s_{(c)}, \delta_{(c)}, \bar\delta_{(c)}$, respectively.

The relations (A.159) suggests the following horizontality condition, with $(d+s+\bar s+\delta+\bar\delta)^2 = 0$:

$$
\begin{aligned}
&(d + s + \bar s + \delta + \bar\delta)\big(A + c + \bar c + |\kappa|\gamma + |\kappa|\bar\gamma\big) + \big(A + c + \bar c + |\kappa|\gamma + |\kappa|\bar\gamma\big)^2 \\
&\qquad = F + \Psi + \bar\Psi + g(\kappa)\big(\eta + \bar\eta\big) + i_\kappa \star C^\star\big(\Psi + \bar\Psi\big) + (1 + |\kappa|^2)\big(\Phi + L + \bar\Phi\big)
\end{aligned} \tag{A.163}
$$

It is $SL(2,\mathbb{R})$ and $\boldsymbol{\gamma}$ invariant. By construction, this equation has the following indetermination :

$$
\{s, \delta\} + \{\bar s, \bar\delta\} = 0 \tag{A.164}
$$

This degeneracy is raised, owing to the introduction of the constant vector κ, with,

$$\{s,\delta\}=\mathcal{L}_\kappa \qquad \{\bar s,\bar\delta\}=-\mathcal{L}_\kappa \tag{A.165}$$

This relation is fulfilled by completing Eq. (A.163) by the following ones :

$$\begin{aligned}(d+s+\delta-i_\kappa)\big(A+c+|\kappa|\gamma\big)+\big(A+c+|\kappa|\gamma\big)^2 &\\ =F+\Psi+g(\kappa)\eta+i_\kappa\star C^\star\big(\bar\Psi\big)+\big(\Phi+|\kappa|^2\bar\Phi\big)& \quad (\text{A.166})\\ (d+\bar s+\bar\delta+i_\kappa)\big(A+\bar c+|\kappa|\bar\gamma\big)+\big(A+\bar c+|\kappa|\bar\gamma\big)^2 &\\ =F+\bar\Psi+g(\kappa)\bar\eta+i_\kappa\star C^\star\big(\Psi\big)+\big(\bar\Phi+|\kappa|^2\Phi\big)& \quad (\text{A.167})\end{aligned}$$

The $SL(2,\mathbb{R})$ and $\boldsymbol{\gamma}$ invariant Eqs. (A.163),(A.166),(A.167) are consistent, but not independent. Only one of Eqs. (A.166) or (A.167) is needed to complete Eq. (A.163). One introduces the b field as usual in order to solve equations of the type $s\bar c+\bar s c+...=0$. One can verify that, by expansion in ghost number, the horizontality conditions reproduce the transformations (A.150) and (A.160).

We note that the number of symmetries carried by the generators $s^\alpha_{(c)}$ and $\delta^\alpha_{(c)}$ is 1+1+7+7=16. They yield, by untwisting in flat space, the complete set of Poincaré supersymmetry generators (we donnot reproduce here this lengthy computation). We can understand the seven generators determined by $\bar\delta$ as the dimensional reduction of the twisted antiselfdual generator of $\mathcal{N}=2, D=8$ supersymmetry, and $\bar s$ and δ as the dimensional reduction of the twisted vector supersymmetry in 8 dimensions. Only a maximum of 9=1+1+7 generators, among the 16 ones that are determined by $s,\bar s,\delta,\bar\delta$, build an off-shell closed algebra, since both operators $\delta^\alpha_{(c)}$ depend on a single vector κ. In fact, the commutation relations of the vector operators Q_μ and $\bar Q_\nu$, where $\delta_{(c)}=\kappa^\mu Q_\mu$ and $\bar\delta_{(c)}=\kappa^\mu\bar Q_\mu$, yield non closure terms for their antisymmetric part in μ,ν. One can choose $Q,\bar Q,Q_\mu$ as such a maximal subalgebra.

Dimensional reduction therefore transforms the $\mathcal{N}_T=1$ eight-dimensional theory into a $\mathcal{N}_T=2$ theory, with an $SL(2,\mathbb{R})$ internal symmetry, and a $G_2\subset Spin(7)$ Lorentz symmetry. As a matter of fact, this algebra gives the $SL(2,\mathbb{R})$ invariant twisted supersymmetry transformations [88] in the limit of flat manifold.

Seven-dimensional invariant action

The most general gauge invariant topological gauge function $\boldsymbol{\Psi}$, which yields a δ invariant action $S=s\boldsymbol{\Psi}-\frac12\int_M C_\wedge\mathrm{Tr}\ F_\wedge F$, is :

$$\boldsymbol{\Psi}=2\int_M\mathrm{Tr}\ \Big(C^\star_\wedge\bar\Psi_\wedge F+\bar\Psi\star\big(d_AL+T\big)+\Psi\star d_A\bar\Phi+\star\eta[\Phi,\bar\Phi]+\star\bar\eta[\bar\Phi,L]\Big) \tag{A.168}$$

This function turns out to be $\bar{s}$-exact and thus $\bar{s}$ invariant. Moreover, S is $\bar{\delta}$ invariant. By using the $SL(2,\mathbb{R})$ covariant form of the algebra, we can compute the gauge function $\boldsymbol{\Psi}$ in a manifestly invariant way, as a component of a doublet $\boldsymbol{\Psi}_\alpha$. One has $\sigma^{i\,\alpha\beta}\delta_\alpha\boldsymbol{\Psi}_\beta = 0$ and $\boldsymbol{\Psi}_\alpha = \delta_\alpha\mathscr{G}$. $S = s^\alpha\boldsymbol{\Psi}_\alpha - \frac{1}{2}\int_M C_\wedge\mathrm{Tr}\ F_\wedge F$, and, with our conventions, $\boldsymbol{\Psi} \propto \boldsymbol{\Psi}_1$. The automorphism generated by $\boldsymbol{\gamma}$ leaves invariant neither the gauge function, nor the action, since its action breaks the structure $Spin(7)$ of the 8-dimensional theory. These properties will remain analogous in 4 dimensions, and we will give more details in this case.

A.2.3 Reduction to four dimensions and $\mathcal{N} = 4$ theory

The process of dimensional reduction can be further done, from 7 dimensions. The ghost antighost symmetry that has appeared when going down from 8 to 7 dimensions will continue to hold true, and therefore, one remains in the framework of an $\mathcal{N}_T = 2$ theory, with $SL(2,\mathbb{R})$ invariance.

One is concerned by going down from seven to four dimensions. The $SO(7)$-symmetry is decomposed into $SO(4) \times SO(3) \sim SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$, and insides this decomposition, the G_2-symmetry is decomposed into $SU(2) \times \mathrm{diag}\big(SU(2) \times SU(2)\big)$. So, the (twisted) 4-dimensional theory has a $Spin(4)$ Lorentz symmetry, with an $SL(2,\mathbb{R})$ internal symmetry.

It is useful to use a hyperKähler structure to simplify the form of the equations. For instance, given the 3 constant hyperKähler 2-forms $J^I_{\mu\nu}$, an antiselfdual 2-form $h_{\mu\nu}$ can be written as $h_{\mu\nu} = h_I J^I_{\mu\nu}$, where h_I is a $SU(2)$ triplet made of scalars. Capital indices as I are devoted to the adjoint representation of the chiral $SU(2)$ factor of the the Lorentz symmetry, (which leaves invariant self-dual 2-forms), the scalars h^I correspond to A_7, A_6, A_5, etc.... This allows simplified expressions for scalars, such as, for instance, $\varepsilon_{IJK}h^I h^J h^K$ instead of $h_\mu{}^\nu h_\nu{}^\sigma h_\sigma{}^\mu$. Moreover, one is interested in obtaining by twist the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory. This is a justification of the restricted choice of a hyperKähler manifold, since two constant spinors are needed to perform the twist operation and eventually to map the topological ghosts on spinors. In the untwisted theory, the bosonic fields h^I is in the representation of the $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{H})$ R-symmetry.

Equivariant scalar and vector algebra in four dimensions

By dimensional reduction of the seven-dimensional equations of section 2, one can compute the Cartan $SL(2,\mathbb{R})$ doublet of scalar topological BRST operators for the topological symmetry in four dimensions :

$$\begin{aligned}
s^{\alpha}_{(c)} A &= \Psi^{\alpha} \\
s^{\alpha}_{(c)} \Psi_{\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta} T - \sigma^{i}{}_{\beta}{}^{\alpha} d_A \Phi_i & s^{\alpha}_{(c)} h^I &= \chi^{\alpha\, I} \\
s^{\alpha}_{(c)} \Phi_i &= \frac{1}{2} \sigma_i{}^{\alpha\beta} \eta_{\beta} & s^{\alpha}_{(c)} \chi^I_{\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta} H^I + \sigma^{i}{}_{\beta}{}^{\alpha} [\Phi_i, h^I] \\
s^{\alpha}_{(c)} \eta_{\beta} &= -2\sigma^{ij}{}_{\beta}{}^{\alpha} [\Phi_i, \Phi_j] & s^{\alpha}_{(c)} H^I &= \frac{1}{2} [\eta^{\alpha}, h^I] + \sigma^{i\,\alpha\beta} [\Phi_i, \chi^I_{\beta}] \\
s^{\alpha}_{(c)} T &= \frac{1}{2} d_A \eta^{\alpha} + \sigma^{i\,\alpha\beta} [\Phi_i, \Psi_{\beta}]
\end{aligned} \tag{A.169}$$

One has the closure relation $s^{\{\alpha}_{(c)} s^{\beta\}}_{(c)} = \sigma^{i\,\alpha\beta} \delta_{\text{gauge}}(\Phi_i)$. The Cartan vector algebra is :

$$\begin{aligned}
\delta^{\alpha}_{(c)} A &= g(\kappa)\eta^{\alpha} + g(J_I\kappa)\chi^{\alpha\, I} \\
\delta^{\alpha}_{(c)} \Psi_{\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta}\big(i_\kappa F - g(J_I\kappa)H^I\big) + \sigma^{i}{}_{\beta}{}^{\alpha} g(J_I\kappa)[\Phi_i, h^I] - 2\sigma^{ij}{}_{\beta}{}^{\alpha} g(\kappa)[\Phi_i, \Phi_j] \\
\delta^{\alpha}_{(c)} \Phi_i &= -\frac{1}{2}\sigma_i{}^{\alpha\beta} i_\kappa \Psi_{\beta} \\
\delta^{\alpha}_{(c)} \eta_{\beta} &= -\delta^{\alpha}_{\beta} i_\kappa T + \sigma^{i}{}_{\beta}{}^{\alpha} \mathscr{L}_\kappa \Phi_i \\
\delta^{\alpha}_{(c)} T &= \frac{1}{2} d_A i_\kappa \Psi^{\alpha} - g(J_I\kappa)\big([\eta^{\alpha}, h^I] + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\Phi_i, \chi^I_{\beta}]\big) + g(\kappa)\sigma^{i\,\alpha\beta}[\Phi_i, \eta_{\beta}] - \mathscr{L}_\kappa \Psi^{\alpha} \\
\delta^{\alpha}_{(c)} h^I &= -i_{J^I\kappa}\Psi^{\alpha} \\
\delta^{\alpha}_{(c)} \chi^I_{\beta} &= \delta^{\alpha}_{\beta}\big(\mathscr{L}_\kappa h^I + i_{J^I\kappa} T\big) + \sigma^{i}{}_{\beta}{}^{\alpha} \mathscr{L}_{J^I\kappa}\Phi_i \\
\delta^{\alpha}_{(c)} H^I &= \frac{1}{2}[i_\kappa \Psi^{\alpha}, h^I] + \mathscr{L}_{J^I\kappa}\eta^{\alpha} + \sigma^{i\,\alpha\beta}[\Phi_i, i_{J^I\kappa}\Psi_{\beta}] - \mathscr{L}_\kappa \chi^{\alpha\, I}
\end{aligned} \tag{A.170}$$

One has, $\delta^{\{\alpha}_{(c)} \delta^{\beta\}}_{(c)} = |\kappa|^2 \sigma^{i\,\alpha\beta} \delta_{\text{gauge}}(\Phi_i)$, and $\delta^{\alpha}_{(c)}$ anticommute with $s^{\alpha}_{(c)}$, as follows[10] :

$$\{s^{\alpha}_{(c)}, \delta^{\beta}_{(c)}\} = \varepsilon^{\alpha\beta}\big(\mathcal{L}_\kappa + \delta_{\text{gauge}}(i_\kappa A)\big) \tag{A.171}$$

The four dimensional vector operators are s^{α}-exact, as in seven dimensions, $\delta^{\alpha}_{(c)} = [s^{\alpha}_{(c)}, \boldsymbol{\gamma}]$, where the non zero component of $\boldsymbol{\gamma}$ are

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}\Psi_{\alpha} &= -g(\kappa)\eta_{\alpha} - g(J_I\kappa)\chi^I_{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} T &= -i_\kappa F + 2g(J_I\kappa)H^I \\
\boldsymbol{\gamma}\eta_{\alpha} &= i_\kappa \Psi_{\alpha} & \boldsymbol{\gamma} H^I &= -\mathscr{L}_\kappa h^I - 2i_{J^I\kappa} T \\
\boldsymbol{\gamma}\chi^I_{\alpha} &= i_{J^I\kappa}\Psi_{\alpha}
\end{aligned} \tag{A.172}$$

As in seven dimensions, one has a $U(1)$ automorphism of the algebra, which is not a symmetry of the theory, with $e^{t\boldsymbol{\gamma}} s^{\alpha}_{(c)} e^{-t\boldsymbol{\gamma}} = \cos t\ s^{\alpha}_{(c)} - \sin t\ \delta^{\alpha}_{(c)}$ and $e^{t\boldsymbol{\gamma}} \delta^{\alpha}_{(c)} e^{-t\boldsymbol{\gamma}} = \cos t\ \delta^{\alpha}_{(c)} + \sin t\ s^{\alpha}_{(c)}$.

[10] Note that, the existence of a covariantly constant vector field on a hyperKähler manifold M implies that M is flat. This explains the possible use of a complete quaternionic base of the tangent space TM : κ, $J^I\kappa$ for the description of the vector symmetry.

Invariant action

There are two gauge functions which fit in a fundamental multiplet of $SL(2,\mathbb{R})$, and satisfy :

$$\sigma^{i\,\alpha\beta}\delta_{(c)\,\alpha}\boldsymbol{\Psi}_\beta = 0 \tag{A.173}$$

The action is defined as :

$$S = -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Tr}\ F_\wedge F + s^\alpha_{(c)}\boldsymbol{\Psi}_\alpha \tag{A.174}$$

Eq. (A.173) completely constrains the gauge function (up to a global scale factor), as follows :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Psi}_\alpha = \int_M \mathrm{Tr}\ \Big(&\star\chi^I_\alpha H_I + \chi^I_\alpha J_I \star F - \Psi_\alpha \star T + J^I \star \Psi_{\alpha\,\wedge} d_A h_I - \sigma^i{}_\alpha{}^\beta \Psi_\beta \star d_A \Phi_i \\ &- 2 \star \sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta \eta_\beta [\Phi_i, \Phi_j] - \star\sigma^i{}_\alpha{}^\beta \chi^I_\beta [\Phi_i, h_I] + \frac{1}{2} \star \varepsilon_{IJK}\chi^I_\alpha [h^J, h^K]\Big)\end{aligned} \tag{A.175}$$

The action (A.174) is δ^α and s^α invariant. Indeed, one can check that it verifies :

$$S = -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Tr}\ F_\wedge F + s^\alpha_{(c)} s_{(c)\,\alpha}\mathscr{F} \ = -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{Tr}\ F_\wedge F + s^\alpha_{(c)}\delta_{(c)\,\alpha}\mathscr{G} \tag{A.176}$$

with

$$\mathscr{F} = \int_M \mathrm{Tr}\ \left(\star h_I H^I + h_I J^I \star F + \frac{1}{3}\varepsilon_{IJK} h^I h^J h^K - \frac{1}{2}\Psi^\alpha \star \Psi_\alpha + \frac{1}{2}\star \eta^\alpha \eta_\alpha\right) \tag{A.177}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{G} = \int_M \mathrm{Tr}\ \Big(& -\frac{1}{2} g(\kappa)_\wedge \big((A - \mathring{A})_\wedge (F + \mathring{F}) - \tfrac{1}{3}(A - \mathring{A})^3\big) \\ &- \frac{1}{2} \star \varepsilon_{IJK} h^I \mathscr{L}_{J^J{}_\kappa} h^K + \star\, s^\alpha_{(c)}\delta_{(c)\,\alpha}\ \big(\tfrac{1}{2}\, h_I h^I \ - \ \tfrac{2}{3}\, \Phi^i \Phi_i\big)\Big)\end{aligned} \tag{A.178}$$

These facts remind us that we are in the context of a $\mathcal{N}_T = 2$ theory. The critical points of the Morse function $\mathscr{F}$ in the field space are given by the equations

$$\begin{aligned}J^I \star F + \frac{1}{2}\star \varepsilon^I{}_{JK}[h^J, h^K] = 0 \\ d_A \star h_I J^I = 0\end{aligned} \tag{A.179}$$

Eqs. (A.179) are the dimensional reduction of selfduality equations in 7 dimensions. [53, 15, 89] display analogous equations, corresponding to the dimensional reduction of the selfduality equation in 8 dimensions. [87] indicates that the moduli problems defined by both equations are equivalent[11].

Expanding the action S, and integrating out T and H^I, reproduces the $\mathcal{N}=4$ action in its twisted form [53, 15][12]

$$\begin{aligned} S \approx \int_M \mathrm{Tr}\,\Big(& -\frac{1}{2}F\star F + \frac{1}{4}d_A h_I \star d_A h^I + 2d_A\Phi^i \star d_A\Phi_i - 2\chi_I^\alpha J^I \star d_A\Psi_\alpha + 2\Psi^\alpha \star d_A\eta_\alpha \\ & + 2\star\eta^\alpha[h_I,\chi_\alpha^I] + J_I\star\Psi^\alpha[h^I,\Psi_\alpha] + \star\varepsilon_{IJK}\chi^{\alpha\, I}[h^J,\chi_\alpha^K] \\ & - 2\star\sigma^{i\,\alpha\beta}\chi_{\alpha\, I}[\Phi_i,\chi_\beta^I] - 2\star\sigma^{i\,\alpha\beta}\eta_\alpha[\Phi_i,\eta_\beta] - 2\sigma^{i\,\alpha\beta}\Psi_\alpha\star[\Phi_i,\Psi_\beta] \\ & - \frac{1}{8}\star[h_I,h_J][h^I,h^J] - 2\star[\Phi^i,h_I][\Phi_i,h^I] - 4\star[\Phi^i,\Phi^j][\Phi_i,\Phi_j]\Big) \end{aligned} \tag{A.180}$$

In fact, it is not necessary to ask $SL(2,\mathbb{R})$-invariance from the beginning. Rather, looking for a δ, s and $\bar{s}$ invariant action, with ghost number zero, determines a unique action, Eq. (A.174). This action has the additional $SL(2,\mathbb{R})$ and $\bar{\delta}$ invariances. Thus the $\mathcal{N}=4$ supersymmetric action is determined by the invariance under the action of only 6 generators $s,\bar{s},\delta$, with a much smaller internal symmetry than the $SL(2,\mathbb{H})$ R-symmetry, namely the ghost number symmetry.

Horizontality condition in four dimensions

The algebra is not contained in a single horizontality condition, as in the seven-dimensional case. In fact, one has splite conditions for the Yang–Mills field, and for the scalar fields h^I. (This gives the possibility of building matter multiplets, by relaxing the condition that h^I is in the adjoint representation of the gauge group). They are :

$$\begin{aligned} (d+s+\bar{s}+\delta+\bar{\delta})\big(A+c+\bar{c}+|\kappa|\gamma+|\kappa|\bar{\gamma}\big) + \big(A+c+\bar{c}+|\kappa|\gamma+|\kappa|\bar{\gamma}\big)^2 \\ = F+\Psi+\bar{\Psi}+g(\kappa)\big(\eta+\bar{\eta}\big)+g(J_I\kappa)\big(\chi^I+\bar{\chi}^I\big)+(1+|\kappa|^2)\big(\Phi+L+\bar{\Phi}\big) \\ (d_A+s_{(c)}+\bar{s}_{\bar{c}}+\delta_\gamma+\bar{\delta}_{\bar{\gamma}})h^I = d_Ah^I+\bar{\chi}^I-\chi^I+i_{J^I\kappa}\big(\bar{\Psi}-\Psi\big) \end{aligned} \tag{A.181}$$

$$\begin{aligned} (d+s+\delta-i_\kappa)\big(A+c+|\kappa|\gamma\big)+\big(A+c+|\kappa|\gamma\big)^2 = F+\Psi+g(\kappa)\eta+g(J_I\kappa)\chi^I+\Phi+|\kappa|^2\bar{\Phi} \\ (d_A+s_{(c)}+\delta_\gamma-i_\kappa)h^I = d_Ah^I+\bar{\chi}^I+i_{J^I\kappa}\bar{\Psi} \end{aligned} \tag{A.182}$$

[11] In fact, to solve the complete moduli problem [87], one must add the following equations for the curvatures : $d_A\Phi_i=0$, $[\Phi_i,h^I]=0$, $[\Phi_i,\Phi_j]=0$.

[12] As a matter of fact, if the manifold on which the theory is defined is not hyperKähler, the J^I can not be considered as constant. In this case the scalar fields h^I acquires a "mass" term linear in the selfdual part of the Riemann tensor.

These equations and their Bianchi identities fix the action of s, $\bar{s}$, δ and $\bar{\delta}$, by expansion in ghost number, up to the introduction of auxiliary fields that are needed for solving the indeterminacies of the form "s antighost + $\bar{s}$ ghost" . These indeterminacies introduce auxiliary fields in the equivariant part of the algebra, T and H^I, as well as in the Faddeev–Popov sector. The latter does not affect the equivariant, that is, gauge invariant, sector. To be more precise about the number of auxiliary fields, all the actions given by a symmetrized product of operators on the four Faddeev–Popov ghosts are determined by the closure relations of the algebra. There is one indeterminacy for each antisymmetrized product of operators. To close the algebra in the Faddeev–Popov sector, $11 = 6 + 4 + 1$ Lagrange multiplier fields must be introduced, with the standard technique. We do not give here the complete algebra for these fields, which we postpone for a further paper, devoted to a new demonstration of the finiteness of the $\mathcal{N} = 4, D = 4$ theory.

We can gauge-fix the action in a s and $\bar{s}$ invariant way *and/or* in a s and δ invariant way. In the former case, one uses an $s\bar{s}$-exact term which gauge-fixes the connection A.. This $s\bar{s}$-exact term eliminates all fields of the Faddeev–Popov sector, but c, $\bar{c}$, and $b \equiv s\bar{c}$. In the former case, one uses an $s\delta$-exact term. In this case, $\bar{c}$ is replaced by γ.

A.2.4 Different twists of $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills

As noted in [15, 14] there are three non equivalent twists of $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills, corresponding to the different possible choices of an $SU(2)$ in the R-symmetry group $SL(2, \mathbb{H})$. When one defines the symmetry by horizontality conditions, these 3 different possibilities correspond to different representations of the matter fields. These matter fields are respectively organized in an $SL(2, \mathbb{R})$-Majorana–Weyl spinor, a vector field and a quaternion. The latter is the one studied in the previous section [13], and, as a matter of fact, the most studied in the literature [87, **?**, 89, 92]. It is the only case that can be understood as a dimensional reduction of the eight-dimensional topological theory. We will shortly see that the two other cases have scalar and vector symmetries that are not big enough for a determination of the action.

Spinor representation

The first twist gives an $\mathcal{N}_T = 1$ theory. It is obtained by breaking $Spin(4) \otimes SL(2, \mathbb{H})$ into $Spin(4) \otimes SU(2) \otimes SL(2, \mathbb{R}) \otimes U(1)$, and then taking the diagonal of the chiral $SU(2)$ of $Spin(4)$ with the $SU(2)$ of the previous decomposition of $SL(2, \mathbb{H})$. The bosonic matter

[13] The field L is the real part of the quaternion and the fields h^I the imaginary one.

field h^α is then a chiral $SL(2,\mathbb{R})$-Majorana–Weyl spinor. The ghost λ_+^α and antighost λ_-^α of the matter field are respectively chiral and antichiral $SL(2,\mathbb{R})$-Majorana–Weyl spinors. The horizontality condition reads :

$$(d_A + s_{(c)} + \delta_{(c)} - i_\kappa)h^\alpha = d_A h^\alpha + \lambda_+^\alpha + \not{\kappa}\lambda_-^\alpha \tag{A.183}$$

Introducing the auxiliary antichiral $SL(2,\mathbb{R})$-Majorana–Weyl spinors D^α, one gets :

$$\begin{aligned}
s_{(c)}h^\alpha &= \lambda_+^\alpha & \delta_{(c)}h^\alpha &= \not{\kappa}\lambda_-^\alpha \\
s_{(c)}\lambda_+^\alpha &= [\Phi, h^\alpha] & \delta_{(c)}\lambda_+^\alpha &= \not{\kappa}D^\alpha + \mathscr{L}_\kappa h^\alpha \\
s_{(c)}\lambda_-^\alpha &= D^\alpha & \delta_{(c)}\lambda_-^\alpha &= \not{\kappa}[\bar{\Phi}, h^\alpha] \\
s_{(c)}D^\alpha &= [\Phi, \lambda_-^\alpha] & \delta_{(c)}D^\alpha &= \not{\kappa}[\eta, h^\alpha] + \not{\kappa}[\bar{\Phi}, \lambda_+^\alpha] + \mathscr{L}_\kappa \lambda_-^\alpha
\end{aligned} \tag{A.184}$$

With this definition of the twist, there is no other scalar or vector charge, which leaves us with a $\mathcal{N}_T = 1$ theory. The action is not completely determined by these two symmetries.

Vector representation

One breaks $SL(2,\mathbb{H})$ into $Spin(4)\otimes SO(1,1)$ and then takes the diagonal of $Spin(4)\otimes Spin(4)$ [91]. The matter horizontality condition involves a vector field $V^\mu \equiv h^\mu$, its vector ghost $\bar{\Psi}$ and antighosts scalar $\bar{\eta}$ and selfdual 2-form $\bar{\chi}$,

$$(d_A + s_{(c)} + \delta_{(c)} - i_\kappa)V = d_A V + \bar{\Psi} + g(\kappa)\bar{\eta} + i_\kappa \bar{\chi} \tag{A.185}$$

This give the following transformations of the fields

$$\begin{aligned}
s_{(c)}V &= \bar{\Psi} & \delta_{(c)}V &= g(\kappa)\bar{\eta} + i_\kappa\bar{\chi} \\
s_{(c)}\bar{\Psi} &= [\Phi, V] & \delta_{(c)}\bar{\Psi} &= g(\kappa)h + i_\kappa \bar{H} + \mathscr{L}_\kappa V \\
s_{(c)}\bar{\eta} &= h & \delta_{(c)}\bar{\eta} &= -[\bar{\Phi}, i_\kappa V] \\
s_{(c)}h &= [\Phi, \bar{\eta}] & \delta_{(c)}h &= [\eta, i_\kappa V] - [\bar{\Phi}, i_\kappa\bar{\Psi}] + \mathscr{L}_\kappa\bar{\eta} \\
s_{(c)}\bar{\chi} &= \bar{H} & \delta_{(c)}\bar{\chi} &= -2[\bar{\Phi}, \big(g(\kappa)V\big)^+] \\
s_{(c)}\bar{H} &= [\Phi, \bar{\chi}] & \delta_{(c)}\bar{H} &= 2[\eta, \big(g(\kappa)V\big)^+] - 2[\bar{\Phi}, \big(g(\kappa)\bar{\Psi}\big)^+] + \mathscr{L}_\kappa\bar{\chi}
\end{aligned} \tag{A.186}$$

This corresponds to a $\mathcal{N}_T = 2$ theory. However, the mirror operators $\bar{s}_{(c)}$ and $\bar{\delta}_{(c)}$ have the same ghost number as the primary ones. The internal symmetry in this case is $\mathbb{Z}_2$ instead of $SL(2,\mathbb{R})$ [15]. As a matter of fact the four symmetries are not enough to fix the action and do not give an algebra which can be closed off-shell without the introduction of an infinite set of fields.

A.3 Reconstruction de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$

L. Baulieu et G. Bossard,

« *Reconstruction of* $\mathcal{N} = 1$ *supersymmetry from topological symmetry* »

Phys. Lett. B **632**, 138 (2006) `hep-th/0507004`.

La condition de Majorana n'est pas définie correctement sur l'espace euclidien en quatre dimensions. On peut cependant définir la formulation euclidienne de la théorie en considérant les fermions comme des spineurs complexes. Le bon nombre de degrés de liberté est restauré en ne considérant pas leurs conjugués complexes dans l'intégrale fonctionnelle et en fixant les propriétés de celle-ci de telle sorte que les fonctions de corrélation qu'elle définit soient bien identifiables, via une rotations de Wick, aux fonctions de corrélation minkowskiennes. La supersymétrie définit alors des identités de Ward formelles qui ne correspondent plus à des variations infinitésimales des champs. De ce point de vue, on peut définir une procédure de torsion pour la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 1$, en fonction de composantes de formes à valeurs complexes sur la variété. Celle-ci fait intervenir l'isomorphisme de représentation de $U(n)$ en dimension $2n$ entre les spineurs complexes chiraux et antichiraux, et respectivement, l'ensemble des formes de type $(0, 2p)$ et l'ensemble des formes de type $(2p + 1, 0)$. On définit dans cette publication une courbure étendue complexe qui détermine l'action d'une charge scalaire s et d'une charge vectorielle de type (0,1) δ. On montre que l'action renormalisable la plus générale en fonction des champs tordus de la théorie de Yang–Mills pure, invariante par rapport à $U(2) \subset SO(4)$ et par rapport aux charges scalaire et vectorielle, est complètement déterminée et correspond à la forme tordue de l'action de Yang–Mills supersymétrique. On peut définir de la même manière n'importe quelle représentation de la matière. On définit ici une involution vectorielle qui correspond à la conjugaison complexe dans le minkowskien. On montre que l'action renormalisable la plus générale invariante par rapport à $U(2)$, aux charges scalaire et vectorielle et qui de plus est réelle sous l'involution vectorielle, n'est autre que la formulation tordue de l'action supersymétrique la plus générale faisant intervenir un superpotentiel renormalisable et des termes de Fayet–Iliopoulos. Il est ainsi possible de reproduire n'importe quelle action de Yang–Mills supersymétrique en fonction des variables tordues. A l'exception des termes provenant du superpotentiel, l'action peut s'écrire comme un terme $s\delta$-exact, modulo des termes topologiques.

On étend ces résultats au cas de la formulation tordue de la théorie de Yang–Mills supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ en six dimensions. Afin de déterminer l'algèbre de supersymétrie il est nécessaire dans ce cas de ne pas considérer la composante de type $(2, 0)$ de la courbure étendue et de définir une autre équation pour laquelle cette composante apparaît comme l'antifantôme d'une 3-forme fermionique de type $(3, 0)$.

Reconstruction of $\mathcal{N}=1$ supersymmetry from topological symmetry

abstract

The scalar and vector topological Yang–Mills symmetries on Calabi–Yau manifolds geometrically define consistent sectors of Yang–Mills $D=4,6$ $\mathcal{N}=1$ supersymmetry, which fully determine the supersymmetric actions up to twist. For a CY_2 manifold, both $\mathcal{N}=1, D=4$ Wess and Zumino and superYang–Mills theory can be reconstructed in this way. A superpotential can be introduced for the matter sector, as well as the Fayet–Iliopoulos mechanism. For a CY_3 manifold, the $\mathcal{N}=1, D=6$ Yang–Mills theory is also obtained, in a twisted form. Putting these results together with those already known for the $D=4,8$ $\mathcal{N}=2$ cases, we conclude that all Yang–Mills supersymmetries with 4, 8 and 16 generators are determined from topological symmetry on special manifolds.

A.3.1 Introduction

In a recent paper [A.1], it was shown that the scalar and vectorial topological Yang–Mills symmetries can be directly constructed, in four and eight dimensions, leading one to a geometrical definition of a closed off-shell twisted sector of Yang–Mills supersymmetric theories, with 8 and 16 generators, respectively. In fact, both scalar and vectorial topological symmetries completely determine the supersymmetric theory, (up to a twist that exists on special manifolds). Basically, the vector symmetry arises when one associates reparametrization symmetry and topological symmetry. It is important to work on manifolds that contain at least one covariantly constant vector. The $\mathcal{N}=2$ Poincaré supersymmetry is reached by untwisting the theory in the limit of flat manifolds.

The possibility of directly twisting the $\mathcal{N}=1$ super Yang–Mills theory in a "microscopic" TQFT was studied in [93, 10, 94, 87, 16]. In fact, the full topological symmetry $sA_\mu = \Psi_\mu + D_\mu c$ involves topological ghosts and antighosts, with twice as many degrees of freedom as there are in the gauge field, so it leads one to $\mathcal{N}=2$ supersymmetry. To get the $\mathcal{N}=1$ supersymmetry algebra in a twisted form, the number of independent topological transformations must be reduced by half. This leads one to build a TQFT on a Kähler manifold, such that the gauge field can be splite in holomorphic and antiholomorphic components, $A_1 = A_{(0,1)} + A_{(1,0)}$. Only one of the components of A undergoes topological transformations, with [93, 10, 94, 87, 16] :

$$sA_m = \Psi_m + D_m c \qquad sA_{\bar{m}} = D_{\bar{m}} c \tag{A.187}$$

This holomorphic symmetry can be interpreted on a Calabi–Yau manifold as the symmetry of classical actions, which couple forms $B_{(0,n-2)}$, with only antiholomorphic components, to a Yang–Mills curvature $F = dA + A_\wedge A$ [95] :

$$I_{2n} = \int_{M_{2n}} \Omega_{(n,0)} \,{}_\wedge \mathrm{Tr}\; B_{(0,n-2)} \,{}_\wedge F_{(0,2)} \tag{A.188}$$

The BRST-invariant gauge-fixing of such actions provides in a twisted way the $\mathcal{N} = 1$ Wess and Zumino and Yang–Mills models in 4 and 6 dimensions, on Calabi–Yau manifolds [95].

Here we show that both scalar and vector topological BRST symmetries can be also geometrically built for the $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry, in a way that justifies the choice of topological gauge functions of [95]. In fact, the various properties of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry can be reformulated, in the context of topological symmetry.

Let us briefly summarize the situation for getting the scalar and vector topological symmetry, and, eventually $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in twisted way. [A.1] shows that, for special manifolds with dimensions 4 or 8 that contain at least one constant vector κ, one can define an extended horizontality condition with its Bianchi identity, which involves the (twisted) fields of $\mathcal{N} = 2$ supersymmetry in 4 and 8 dimensions. It reads :

$$\begin{aligned}(d+s+\delta-i_\kappa)\big(A+c+|\kappa|\bar{c}\big)+\big(A+c+|\kappa|\bar{c}\big)^2 &= F+\Psi+g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi+\Phi+|\kappa|^2\bar{\Phi}\\ (d+s+\delta-i_\kappa)\big(F+\Psi+g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi+\Phi+|\kappa|^2\bar{\Phi}\big)&\\ +[A+c+|\kappa|\bar{c}\,,\,F+\Psi+g(\kappa)\eta+i_\kappa\chi+\Phi+|\kappa|^2\bar{\Phi}] &= 0\end{aligned} \tag{A.189}$$

By expansion in form degree and ghost number, both equations define the action of s and δ on all the fields, with the closure relations[14] :

$$s^2 = \delta^2 = 0 \qquad \{s,\delta\} = \mathcal{L}_\kappa + \delta_{\mathrm{gauge}}(i_\kappa \mathring{A}) \tag{A.190}$$

The property that s and δ close off-shell on a reparametrization, $\{s,\delta\} = \mathcal{L}_\kappa$, is at the heart of the property that the commutator of two supersymmetries is a translation in

[14] $\mathring{A}$ is a background connection that must be introduced for the sake of global consistency, but can be chosen equal to zero for trivial vacua.

the super Poincaré algebra. In flat space, one defines the twisted scalar supersymmetric operator $Q = s_c$ and the vector supersymmetric operator Q_μ from the equivariant vector operator $\delta_{\bar{c}} = \kappa^\mu Q_\mu$, so one has $Q_\mu Q_\nu + Q_\nu Q_\mu = 2g_{\mu\nu}\delta^{\text{gauge}}(\bar{\Phi})$ and $Q_\mu Q + QQ_\mu = D_\mu$. We refer to [A.1] for a detailed explanation of these formula and the twisted fields that they involve, with their relationship with $D = 4, 8$ $\mathcal{N} = 2$ Yang–Mills supersymmetry, and the way reparametrization symmetry is encoded in s and δ.

The aim of this paper is to understand the way the extended horizontality condition (A.189) applies to the case of Calabi–Yau manifolds, for reconstructing $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry. In fact, by separation of holomorphic and antiholomorphic sectors, $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry will appear. The relevant information on the Wess and Zumino and Yang–Mills independent multiplets of $D = 4$ or $D = 6$ $\mathcal{N} = 1$ will be obtained as off-shell closed sectors of the supersymmetry transformation laws. More precisely, the supersymmetry transformations will be encoded into scalar and vector topological BRST symmetries, corresponding to 3 (resp. 4) twisted generators in 4 (resp. 6) dimensions. The topological construction has the great advantage of purely geometrically determining a closed sector of the supersymmetric algebra, which is large enough to completely determine the theory. Furthermore, it determines the Faddeev–Popov ghosts for the supersymmetry algebra, in a way that is relevant for a control of the covariant gauge-fixing of the Yang–Mills symmetry.

A.3.2 Holomorphic vector symmetry in four dimensions

Pure Yang–Mills

We begin from the "semi-horizontality" condition for a Yang–Mills field A and its Faddeev–Popov ghost c, on a Kähler 2-fold :

$$(d+s)\big(A+c\big) + \big(A+c\big)^2 = F + \Psi, \tag{A.191}$$

$\Psi = \Psi_m dz^m$ is the holomorphic 1-form topological ghost. If J is the complex structure on the manifold, one has $J\Psi = i\Psi$, Eq. (A.191) reproduces the "heterotic" BRST transformations, Eq. (A.187), and includes the ghost dependence, with :

$$\begin{aligned} sA_m &= \Psi_m + D_m c & \qquad sA_{\bar{m}} &= D_{\bar{m}} c \\ s\Psi_m &= -[c, \Psi_m] & sc &= -c^2 \end{aligned}$$

The Euclidean vector ghost $\Psi_{m(z^m, z^{\bar{m}})}$ must be considered as a complex field that counts for 2 real degrees of freedom in the quantum theory, as it will be explained in section

A.3.2. To introduce the vector symmetry, we suppose that the manifold contains at least a covariantly constant antiholomorphic vector $\kappa^{\bar m}$. κ defines the holomorphic 1-form $g(\kappa) = g_{m\bar m}\kappa^{\bar m}dz^m$. The norm of κ is $|\kappa|^2 = \kappa^{\bar m}\bar\kappa_{\bar m} = i_{\bar\kappa}g(\kappa)$, where $\bar\kappa$ is the complex conjugate of κ. The differential δ will be geometrically constructed, and is somehow the mirror of s. In flat space, formula must be expanded as series in $\kappa^{\bar m}$. The vector symmetry operator $Q_{\bar m}$ is then defined by the identification $\delta + |\kappa|\delta^{\rm gauge}(\bar c) = \kappa^{\bar m}Q_{\bar m}$, and determines, together with $s + \delta_{\rm gauge}(c)$, the relevant closed sector of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry.

The dual of the "holomorphic" 1-form topological ghost Ψ_m is made of a pair of a scalar η and an "antiholomorphic" 2-form $\chi_{\bar m\bar n}$, counting altogether for 2 real degrees of freedom. $\bar c$ is the Faddeev–Popov antighost. The ghost anti-ghost dependent horizontality condition that defines both s and δ symmetry is :

$$(d + s + \delta - i_\kappa)\big(A + c + |\kappa|\bar c\big) + \big(A + c + |\kappa|\bar c\big)^2 = F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_\kappa\chi \qquad \text{(A.192)}$$

This gives

$$\begin{aligned} sA + d_A c &= \Psi & \delta A + d_A|\kappa|\bar c &= g(\kappa)\eta + i_\kappa\chi \\ sc + c^2 &= 0 & \delta|\kappa|\bar c + \big(|\kappa|\bar c\big)^2 &= 0 \end{aligned}$$
$$\delta c + s|\kappa|\bar c + [c, |\kappa|\bar c] = i_\kappa\big(A - \mathring{A}\big) \qquad \text{(A.193)}$$

One defines the "equivariant" differential $s_c \equiv s + \delta_{\rm gauge}(c)$ and $\delta_{\bar c} \equiv \delta + |\kappa|\delta_{\rm gauge}(\bar c)$.

The property $(d + s + \delta - i_\kappa)^2 = 0$, is equivalent to the Bianchi identity

$$(d_A + s_c + \delta_{\bar c} - i_\kappa)\big(F + \Psi + g(\kappa)\eta + i_\kappa\chi\big) = 0 \qquad \text{(A.194)}$$

The introduction of two scalar fields, b and h allows one to remove the indeterminacy that occurs in the determination of $s\bar c$ and $s\eta$. Eq. (A.471) and its Bianchi identity (A.194) provide by expansion in ghost number and form degree the following BRST transformations :

$$\begin{aligned} s_c A_m &= \Psi_m & \delta_{\bar c} A_m &= \kappa_m \eta \\ s_c A_{\bar m} &= 0 & \delta_{\bar c} A_{\bar m} &= \kappa^{\bar n}\chi_{\bar n\bar m} \\ s_c \Psi_m &= 0 & \delta_{\bar c}\Psi_m &= \kappa^{\bar n}F_{\bar n m} - \kappa_m h \\ s_c\eta &= h & \delta_{\bar c}\eta &= 0 \\ s_c h &= 0 & \delta_{\bar c} h &= \kappa^{\bar m}D_{\bar m}\eta \\ s_c\chi_{\bar m\bar n} &= F_{\bar m\bar n} & \delta_{\bar c}\chi_{\bar m\bar n} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.195)}$$

$$\begin{aligned} sc &= -c^2 & \delta c &= \kappa^{\bar m}\big(A_{\bar m} - \mathring{A}_{\bar m}\big) - |\kappa| b \\ s\bar c &= b - [c, \bar c] & \delta\bar c &= -|\kappa|\,\bar c^2 \\ sb &= -[c, b] & \delta b &= \kappa^{\bar n}D_{\bar n}\bar c \end{aligned} \qquad \text{(A.196)}$$

By construction, one has the required relations :

$$s^2=0 \qquad \delta^2=0 \qquad \{s,\delta\}=\mathcal{L}_\kappa+\delta_{\text{gauge}}(i_\kappa \mathring{A}) \tag{A.197}$$

One has also "equivariant" commutation relations for all fields, but c, $\bar{c}$ and b :

$$s_c^2=0 \qquad \delta_{\bar{c}}{}^2=0 \qquad \{s_c,\delta_{\bar{c}}\}=\mathcal{L}_\kappa+\delta_{\text{gauge}}(i_\kappa A) \tag{A.198}$$

The most general δ-closed topological gauge function, which has ghost number -1, is gauge invariant and gives κ independent renormalisable terms, is :

$$\boldsymbol{\Psi}_{\text{YM}}=\int_M d^4x\sqrt{g}\,\text{Tr}\,\Big(\frac{1}{2}\boldsymbol{\chi}^{mn}F_{mn}+\boldsymbol{\eta}\big(h+iJ^{m\bar{n}}F_{m\bar{n}}\big)\Big) \tag{A.199}$$

It defines the ungauge-fixed s_c and $\delta_{\bar{c}}$ invariant action $I_{\text{YM}}=s\boldsymbol{\Psi}_{\text{YM}}$. Integrating out the field h gives :

$$I_{\text{YM}}=\approx\int_M d^4x\sqrt{g}\,\text{Tr}\,\Big(\frac{1}{2}F^{mn}F_{mn}+\frac{1}{4}\big(J^{m\bar{n}}F_{m\bar{n}}\big)^2-\boldsymbol{\chi}^{mn}D_m\Psi_n+\boldsymbol{\eta}D^m\Psi_m\Big) \tag{A.200}$$

This is the twisted form of the $\mathcal{N}=1$ supersymmetric Yang–Mills action, as expressed in [93].

This invariant action is in fact $s\delta$-exact. One has indeed :

$$\boldsymbol{\Psi}_{\text{YM}}=\tfrac{1}{(\kappa\cdot\bar{\kappa})}\,\delta\int_M d^4x\sqrt{g}\,\text{Tr}\,\Big(\ \boldsymbol{\eta}\bar{\kappa}^m\Psi_m+\bar{\kappa}^{[m}g^{n]\bar{m}}\big(3\,A_{[\bar{m}}\partial_m A_{n]}+2A_{[\bar{m}}A_mA_{n]}\big)\Big) \tag{A.201}$$

The last term is nothing but the Chern–Simon term $g(\bar{\kappa})\big(AdA+\frac{2}{3}A^3\big)$

Wess and Zumino matter multiplet

The matter multiplet is defined from horizontality conditions, for both extended fields $\bar{\psi}_{\bar{m}}dz^{\bar{m}}+\phi$ and $\frac{1}{2}\bar{\chi}_{mn}dz^m_\wedge dz^n+\kappa_m dz^m\bar{\phi}$. $\bar{\chi}$ is a "holomorphic" 2-form, $\bar{\psi}$ a "antiholomorphic" 1-form, and ϕ and $\bar{\phi}$ two scalars. These fields are valued in an arbitrarily given gauge group representation. The horizontality conditions and Bianchi identities are :

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}_A+s_c+\delta_{\bar{c}}-i_\kappa)\big(\bar{\psi}+\phi\big)&=\bar{\partial}_A\bar{\psi}+i_\kappa B\\
(d_A+s_c+\delta_{\bar{c}}-i_\kappa)\big(\bar{\chi}+g(\kappa)\bar{\phi}\big)&=\bar{\partial}_A\bar{\chi}+T-g(\kappa)\big(\bar{\partial}_A\bar{\phi}+\bar{\eta}\big)\\
(\bar{\partial}_A+s_c+\delta_{\bar{c}}-i_\kappa)\big(\bar{\partial}_A\bar{\psi}+i_\kappa B\big)&=\big(F_{(0,2)}+i_\kappa\,\boldsymbol{\chi}\big)\big(\bar{\psi}+\phi\big)\\
(d_A+s_c+\delta_{\bar{c}}-i_\kappa)\big(\bar{\partial}_A\bar{\chi}+T-g(\kappa)\big(\bar{\partial}_A\bar{\phi}+\bar{\eta}\big)\big)&=\big(F+\Psi+g(\kappa)\boldsymbol{\eta}+i_\kappa\,\boldsymbol{\chi}\big)\big(\bar{\chi}+g(\kappa)\bar{\phi}\big)
\end{aligned} \tag{A.202}$$

The gauge field A obeys the same equations as defined in the previous section. This gives the following BRST transformations :

$$
\begin{aligned}
s_c\bar\psi_{\bar m} &= -D_{\bar m}\phi & \delta_{\bar c}\bar\psi_{\bar m} &= \kappa^{\bar n}B_{\bar n\bar m} \\
s_c\phi &= 0 & \delta_{\bar c}\phi &= -\kappa^{\bar m}\bar\psi_{\bar m} \\
s_cB_{\bar m\bar n} &= 2D_{[\bar m}\bar\psi_{\bar n]} + \boldsymbol{\chi}_{\bar m\bar n}\phi & \delta_{\bar c}B_{\bar m\bar n} &= 0 \\
s_c\bar\chi_{mn} &= T_{mn} & \delta_{\bar c}\bar\chi_{mn} &= 2\kappa_{[m}D_{n]}\bar\phi \\
s_cT_{mn} &= 0 & \delta_{\bar c}T_{mn} &= \kappa^{\bar p}D_{\bar p}\bar\chi_{mn} - 2\kappa_{[m}D_{n]}\bar\eta - 2\kappa_{[m}\Psi_{n]}\bar\phi \\
s_c\bar\phi &= \bar\eta & \delta_{\bar c}\bar\phi &= 0 \\
s_c\bar\eta &= 0 & \delta_{\bar c}\bar\eta &= \kappa^{\bar m}D_{\bar m}\bar\phi
\end{aligned}
\tag{A.203}
$$

They represent the twisted scalar and vector supersymmetric transformations for a Wess and Zumino multiplet.

For a general simple non Abelian gauge group, the δ invariance uniquely determines the most general renormalisable and κ independent topological gauge function with ghost number -1 , $\boldsymbol{\Psi}_{\text{Matter}}$, as follows[15] :

$$
I_{\text{Matter}} = s\boldsymbol{\Psi}_{\text{Matter}}, \qquad \boldsymbol{\Psi}_{\text{Matter}} = \int_M d^4x\sqrt{g}\left(\frac{1}{2}\bar\chi^{\bar m\bar n}B_{\bar m\bar n} + \bar\phi D_m\bar\psi^m + \phi\boldsymbol{\eta}\bar\phi\right) \tag{A.204}
$$

The δ-closed gauge function $\boldsymbol{\Psi}_{\text{Matter}}$ turns out to be δ-exact :

$$
\boldsymbol{\Psi}_{\text{Matter}} = \tfrac{1}{(\bar\kappa\cdot\kappa)}\,\delta\int_M d^4x\sqrt{g}\left(\bar\kappa_{\bar m}\bar\psi_{\bar n}\bar\chi^{\bar m\bar n} + \bar\kappa^m\phi D_m\bar\phi\right) \tag{A.205}
$$

When on computes $I_{\text{Matter}} = s\boldsymbol{\Psi}_{\text{Matter}}$, one sees that T_{mn} and $B_{\bar m\bar n}$ identify thereself as both scalar auxiliary fields of the Wess and Zumino multiplet.

If one combines this result with that of section A.3.2, one finds that the complete supersymmetric action for a matter field coupled to the Yang–Mills theory can be obtained by adding both gauge functions. Let t_α be the generators of the Lie algebra of the gauge group for the matter representation. The scale factor between the Yang–Mills and the matter gauge functions can be included in the definition of the trace. After integration

[15] We do not write explicitly the sum over the index of the matter representation, so that, one has for instance $\phi\bar\phi \equiv \sum_A \phi_A\bar\phi_A$

of the fields h, T and B, the action is :

$$I_{\text{YM+Matter}} \approx \int_M d^4x\sqrt{g}\Bigg(\text{Tr}\ \Big(\frac{1}{2}F^{mn}F_{mn} + \frac{1}{4}\big(J^{m\bar{n}}F_{m\bar{n}}\big)^2 - \boldsymbol{\chi}^{mn}D_m\Psi_n + \boldsymbol{\eta}D^m\Psi_m\Big) + \Big(\bar{\eta}D_m\bar{\psi}^m - \bar{\chi}^{\bar{m}\bar{n}}D_{\bar{m}}\bar{\psi}_{\bar{n}} - \frac{1}{2}\bar{\phi}\big(D_mD^m + D^mD_m\big)\phi - \frac{1}{2}\bar{\chi}_{mn}\boldsymbol{\chi}^{mn}\phi + \bar{\phi}\Psi_m\bar{\psi}^m - \phi\boldsymbol{\eta}\bar{\eta}\Big) - \sum_\alpha \frac{1}{4\,\text{Tr}\ (t^\alpha t^\alpha)}\Big(\phi\, t^\alpha\bar{\phi}\Big)\Big(\phi\, t^\alpha\bar{\phi}\Big)\Bigg) \quad \text{(A.206)}$$

The $\mathcal{N}=1$ supersymmetric action for a Yang–Mills field and a scalar complex field can therefore be directly and uniquely constructed in a twisted form, as an $s\delta$-exact term.

Embedding of the $\mathcal{N}=1$ theory in the $\mathcal{N}=2$ theory

Consider the complexified twisted $\mathcal{N}=2$ theory on a Kähler manifold. The moduli space of instantons has a Kähler structure. The exterior differential on M can be decomposed into Dolbeault operators and a similar property exists for the BRST operator. [10] shows that the equivariant scalar BRST charge of the $\mathcal{N}=1$ theory can be identified as a component of the scalar BRST charge of the $\mathcal{N}=2$ theory. Here, we show that, starting from the $\mathcal{N}=2$ horizontality equation, the projection of a general constant vector field κ into antiholomorphic components gives the $\mathcal{N}=1$ vector symmetry for the Yang–Mills field and the matter field.

For a constant vector κ, with both holomorphic and antiholomorphic components, the expansion in ghost number of Eq.(A.189) determines the equivariant vector symmetry operator $\delta_{\bar{c}}$ for the $\mathcal{N}=2$ supersymmetry, that is [A.1] :

$$\begin{aligned}
\delta_{\bar{c}}A_\mu &= -\kappa_\mu\eta + \kappa^\nu\chi_{\nu\mu} \\
\delta_{\bar{c}}\Psi_\mu &= \kappa^\nu\big(F_{\nu\mu} - T_{\nu\mu}\big) + \kappa_\mu[\Phi,\bar{\Phi}] \\
\delta_{\bar{c}}\Phi &= -\kappa^\mu\Psi_\mu \qquad\qquad \delta_{\bar{c}}\bar{\Phi} = 0 \\
\delta_{\bar{c}}\eta &= \kappa^\mu D_\mu\bar{\Phi} \\
\delta_{\bar{c}}\chi_{\mu\nu} &= -4\kappa_{[\mu}D_{\nu]^-}\bar{\Phi} \\
\delta_{\bar{c}}T_{\mu\nu} &= 4\kappa_{[\mu}\big(D_{\nu]^-}\eta + \frac{1}{2}D^\sigma\chi_{\sigma|\nu]^-} - [\bar{\Phi},\Psi_{\nu]^-}]\big) + 2\kappa^\sigma D_{[\mu}\chi_{\sigma|\nu]^-}
\end{aligned} \quad \text{(A.207)}$$

Notice that, in holomorphic coordinates, the antiselfduality condition is $\chi_{m\bar{n}} = \frac{1}{2}J_{m\bar{n}}J^{n\bar{m}}\chi_{n\bar{m}}$. Therefore, the Kähler metric allows one to define scalar fields χ and t, with :

$$\chi_{m\bar{n}} = g_{m\bar{n}}\chi \qquad \chi_{\bar{m}n} = -g_{\bar{m}n}\chi \qquad T_{m\bar{n}} = g_{m\bar{n}}t \qquad T_{\bar{m}n} = -g_{\bar{m}n}t \quad \text{(A.208)}$$

If one chooses a constant antiholomorphic vector $\kappa^{\bar m}$, Eq.(A.207) is projected into :

$$
\begin{aligned}
&\delta_{\bar c} A_m = -\kappa_m\big(\eta+\chi\big) && \delta_{\bar c} A_{\bar m} = \kappa^{\bar n}\chi_{\bar m\bar n}\\
&\delta_{\bar c} \Psi_m = \kappa^{\bar n}F_{\bar n m} + \kappa_m\big(t+[\Phi,\bar\Phi]\big) && \delta_{\bar c}\Psi_{\bar m} = \kappa^{\bar n}\big(F_{\bar n\bar m} - T_{\bar n\bar m}\big)\\
&\delta_{\bar c}\Phi = -\kappa^{\bar m}\Psi_{\bar m} && \delta_{\bar c}\bar\Phi = 0\\
&\delta_{\bar c}\eta = \kappa^{\bar m}D_{\bar m}\bar\phi &&\\
&\delta_{\bar c}\chi_{mn} = -4\kappa_{[m}D_{n]}\bar\Phi \qquad \delta_{\bar c}\chi = -\kappa^{\bar m}D_{\bar m}\bar\Phi && \delta_{\bar c}\chi_{\bar m\bar n} = 0\\
&\delta_{\bar c}T_{mn} = \kappa^{\bar m}D_{\bar m}\chi_{mn} + 4\kappa_{[m}\big(D_{n]}\eta - [\bar\Phi,\Psi_{n]}]\big) &&\\
&\delta_{\bar c} t = \kappa^{\bar m}D_{\bar m}\big(\eta+\chi\big) - [\bar\Phi,\kappa^{\bar m}\Psi_{\bar m}] && \delta_{\bar c}T_{\bar m\bar n} = 2\kappa^{\bar p}D_{[\bar m}\chi_{\bar p|\bar n]}
\end{aligned}
\tag{A.209}
$$

By comparison with Eq. (A.195), one sees that, up to field redefinitions, the antiholomorphic component of the vector BRST symmetry of the twisted $\mathcal{N}=2$ theory is nothing but the vector symmetry of the $\mathcal{N}=1$ twisted theory, as directly constructed in the last section.

As for the holomorphic component of the scalar BRST operator s of $\mathcal{N}=2$, it can be obtained by looking for an operator that act in a nilpotent way on the multiplet and verifies $\{s_c,\delta_{\bar c}\} = \mathcal{L}_\kappa + \delta_{\text{gauge}}(i_\kappa A)$. This defines the same operator s as in Eq. (A.195).

Looking for a Lagrangian $I = s_c\boldsymbol{\Psi}$, which is invariant under antiholomorphic s_c and $\delta_{\bar c}$ transformations, one finds both independent $\delta_{\bar c}$-exact topological gauge functions $\boldsymbol{\Psi}_{\text{YM}}$ and $\boldsymbol{\Psi}_{\text{Matter}}$ of the previous section. Relaxing the antiholomorphicity condition of κ, only a special combination of both gauge functions is $\delta_{\bar c}$ invariant, which turns out to be that of the $\mathcal{N}=2$ theory.

Matching with the untwisted theory

To twist the anticommuting fields $(\Psi_m, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\chi}_{\bar m\bar n})$ of a topological multiplet into a Dirac spinor, a pair of covariantly constant antichiral spinors $\zeta_\pm$, with $iJ^{m\bar n}\sigma_{m\bar n}\zeta_\pm = \pm\zeta_\pm$ is needed. This implies that the manifold must be hyperKähler. We can normalize $\zeta_\pm$ with $\big(\zeta_{-\,\dot\alpha}\zeta_+^{\dot\alpha}\big) = 1$. Then, the Euclidean twist formula are [93, 10, 16] :

$$
\lambda_\alpha = \Psi_m\sigma^m{}_{\alpha\dot\alpha}\zeta_-^{\dot\alpha} \qquad \lambda^{\dot\alpha} = \boldsymbol{\eta}\zeta_+^{\dot\alpha} + \boldsymbol{\chi}_{\bar m\bar n}\sigma^{\bar m\bar n\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\zeta_+^{\dot\beta} \tag{A.210}
$$

Performing these changes of variables in the topological actions found in the previous section, one finds the Euclidean "Majorana action" for Dirac spinors $(\lambda_\alpha, \lambda^{\dot\alpha})$ described by Nicolai [19], that is, the analytic continuation of the Minkowski $\mathcal{N}=1$ super-Yang–Mills theory in Euclidean space. (The untwisted action is independent on $\zeta_\pm$, as a result of the change of variables). Both twisted and untwisted actions do not depend on the complex conjugates of the complex fields, i.e, λ in the untwisted theory and η, χ, Ψ in the twisted theory. In both cases, the path integral is formally understood as counting four real degrees of freedom. The Euclidean prescription must be considered as justified by the analytic continuation of the Minkowski case, where real representations do exist (Majorana condition) [19].

It follows that both supersymmetric $\mathcal{N} = 1$ Yang–Mills and Wess and Zumino actions are truly determined by a subsector of supersymmetry algebra with three independent generators, corresponding to both scalar and antiholomorphic vector symmetries, s_c and $\delta_{\bar{c}}$. The closure of $s_c = Q$ and $\delta_{\bar{c}} = \kappa^{\bar{m}} Q_{\bar{m}}$, and thus of the 3 generators Q and $Q_{\bar{m}}$ under the form $Q^2 = 0, Q_{\bar{m}}Q_{\bar{n}} + Q_{\bar{n}}Q_{\bar{m}} = 0$ and $Q_{\bar{m}}Q + QQ_{\bar{m}} = D_{\bar{m}}$, stems from the property $(s + d + \delta - i_\kappa)^2 = 0$. The above change of variables actually maps the four supersymmetry generators Q^α and $Q_{\dot{\alpha}}$ on the four twisted generators $(Q, Q_{\bar{m}}, Q_{mn})$. The symmetry of the action under the action of the fourth twisted generator Q_{mn} appears as an additional symmetry, which is not needed, geometrically. Moreover, it is not needed for enforcing supersymmetry, for instance in technical proofs, such as those concerning renormalization.

Formal reality condition for the action

The Euclidean action that is the analytic continuation of the Minkowski $\mathcal{N} = 1$ super-Yang–Mills action is not Hermitian in the usual sense. However, as suggested in [19], a "formal complex conjugation" can be defined, for which the action is Hermitian.

Such a "formal complex conjugation" can be extended to the twisted case. It is the composition of a Wick rotation, an ordinary complex conjugation, and an inverse Wick rotation. The complex conjugation takes into account the fact that, in Minkowski space one has the Majorana condition for the spinors. This "formal complex conjugation", which we define as $*$, breaks the Lorentz invariance, since we must define which direction defines the imaginary time one. However, the operation $*$ can be covariantly defined, by defining the temporal direction of the Minkowski space to be the covariantly constant vector field κ of the Euclidean manifold. The action of $*$ is the ordinary complex conjugation on c-numbers and the following transformations on the fields of the theory[16] :

$$
\begin{aligned}
&*\partial_A* = \bar\partial_A - g(\bar\kappa)\mathscr{L}_{\kappa-\bar\kappa} && *\bar\partial_A* = \partial_A + g(\kappa)\mathscr{L}_{\kappa-\bar\kappa} \\
&\big(*\Psi\big)_{\bar m} = \bar\kappa_{\bar m}\boldsymbol{\eta} + \kappa^{\bar n}\boldsymbol{\chi}_{\bar n\bar m} && *\boldsymbol{\eta} = \bar\kappa^m\Psi_m \qquad \big(*\boldsymbol{\chi}\big)_{mn} = 2\kappa_{[m}\Psi_{n]} \\
&*h = -h - \bar\kappa^m\kappa^{\bar n}F_{m\bar n} && \\
&\big(*\bar\psi\big)_m = \kappa_m\bar\eta + \bar\kappa^n\bar\chi_{nm} && *\bar\eta = \kappa^{\bar m}\bar\psi_{\bar m} \qquad \big(*\bar\chi\big)_{\bar m\bar n} = 2\bar\kappa_{[\bar m}\bar\psi_{\bar n]} \\
&*\phi = -\bar\phi && *\bar\phi = -\phi \\
&\big(*T\big)_{\bar m\bar n} = B_{\bar m\bar n} && \big(*B\big)_{mn} = T_{mn}
\end{aligned}
\tag{A.211}
$$

This $*$ operation interchanges s_c and $\delta_{\bar c}$:

$$
* \, s_c * = \delta_{\bar c} \qquad * \, \delta_{\bar c} * = s_c \tag{A.212}
$$

The "reality" condition of the action means that, after integration of auxiliary fields, one has :

$$
* \, I_{\mathrm{YM}} = I_{\mathrm{YM}} \qquad * \, I_{\mathrm{Matter}} = I_{\mathrm{Matter}} \tag{A.213}
$$

modulo the addition of the topological term $\int_M \mathrm{Tr}\ F\wedge F$. In fact, this topological term is not invariant under the $*$ operation, only the Yang–Mills action $\int_M \mathrm{Tr}\ F \star F$ is.

Introduction of the WZ superpotential and Fayet–Iliopoulos term in the twisted formalism

The introduction of a s and δ invariant superpotential for a Calabi–Yau manifold involves terms that have zero ghost number only modulo 2. This parallels the breaking of chirality induced by a superpotential in the untwisted theory.

Consider a scalar field φ valued in a certain representation of the gauge group. Let $f(\varphi)$ be a superpotential, which is an analytical function of φ. Looking for an action I_{SP}, which is s, δ and $*$ invariant and has ghost number zero modulo 2, gives :

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{SP}} = \int_M d^4x\sqrt{g}\bigg(&\overline{\Omega}^{mn}\Big(T^A_{mn}f_A(\bar\phi) - \bar\chi^A_{mn}\bar\eta^B f_{AB}(\bar\phi)\Big) \\
&+ \Omega^{\bar m\bar n}\Big(B^A_{\bar m\bar n}f_A(-\phi) + \bar\psi^A_{\bar m}\bar\psi^B_{\bar n}f_{AB}(-\phi)\Big)\bigg)
\end{aligned}
\tag{A.214}
$$

[16] To simplify the notations, we normalize $|\kappa|$ to 1, and define $\mathscr{L}_\xi \equiv \{i_\xi, d_A\}$.

Ω and $\overline{\Omega}$ are respectively the holomorphic and the antiholomorphic 2-form in the Calabi–Yau 2-fold, and f_A and f_{AB} stand for the first and second derivatives of the superpotential[17].

This term is neither s- nor δ-exact. However, it can be written as follows :

$$I_{\mathrm{SP}} = (s+\delta)\int_M d^4x\sqrt{g}\Big(\overline{\Omega}^{mn}\bar{\chi}^A_{mn}f_A(\bar{\phi}) + 2\Omega^{\bar{m}\bar{n}}\bar{\kappa}_{\bar{m}}\bar{\psi}^A_{\bar{n}}f_A(-\phi)\Big) \tag{A.215}$$

After expansion, one recovers, up to twist, the Wess and Zumino formula for a superpotential. The superpotential is at most a cubic function, to ensure renormalizability.

In order to make the distinction between the topological action, which has ghost number zero, and the superpotential, which has non vanishing even ghost number, we may interpret the latter as the insertion of an operator in the path integral.

The s and δ symmetry actually does not constrain the potential of ϕ (which we will name holomorphic) to be equal to that of $\bar{\phi}$ (antiholomorphic) : we could have chosen independent functions f and $\bar{f}$. However, the "formal reality condition" $*I_{\mathrm{SP}} = I_{\mathrm{SP}}$, constrains the holomorphic and the antiholomorphic superpotential to be related. This condition determines a real action when one goes to Minkowski space.

Finally, if the group has a $U(1)$ sector, one can add the Fayet–Iliopoulos term, under the simplest invariant form :

$$I_{FI} = \int_M d^4x\sqrt{g}s\,\delta\,\left(\bar{\kappa}^m A_m^{U(1)}\right) = \int_M d^4x\sqrt{g}h^{U(1)} \tag{A.216}$$

The integration of the auxiliary field h gives then a mass term for the Abelian component of the scalar fields, plus a topological term

$$\int_M J_\wedge F^{U(1)} \tag{A.217}$$

This parallels the property that the full super-Yang–Mills action is BRST exact, modulo a topological term. $J_\wedge F^{U(1)}$ is not invariant under the formal complex conjugation $*$. Thus, the formal reality condition of the twisted action implies that this topological term must be subtracted from the action.

So, we conclude that most of the features of the supersymmetric theory in four dimensions are captured in the TQFT formalism, from the principle of s and δ invariance.

[17] The index A denotes the group representation of the matter.

A.3.3 Yang–Mills $\mathcal{N}=1$ on Calabi–Yau 3-fold

By analogy with the four dimensional case, we might tentatively define the horizontality condition in six dimensions, (with 8 spinorial generators in the untwisted formalism), as :

$$(d+s+\delta-i_\kappa)\big(A+c+|\kappa|\bar{c}\big)+\big(A+c+|\kappa|\bar{c}\big)^2=F+\Psi_{(1,0)}+g(\kappa)\eta_{(0,0)}+i_\kappa\chi_{(0,2)} \quad \text{(A.218)}$$

However, something more elaborated must be done, because the counting of degrees of freedom would not be quite right. In four dimensions there is as much degrees of freedom in the connexion, modulo gauge transformations, as in a selfdual curvature, whereas in the six dimensional case the counting is more subtle and involves a scalar field [16] .

In order to solve the question, we must refine the Kähler decomposition of extended differentials, which include the BRST scalar and vector operators s and δ. We define :

$$\tilde{d}=\tilde{\partial}+\tilde{\bar{\partial}} \quad \text{(A.219)}$$

These extended "heterotic" Dolbeault operators are defined as :

$$\tilde{\partial}\equiv\partial \qquad \tilde{\bar{\partial}}\equiv\bar{\partial}+s+\delta-i_\kappa \quad \text{(A.220)}$$

The twisted $\mathcal{N}=1$ algebra takes into account this asymmetry between holomorphic and antiholomorphic sectors, in a way that generalizes the four dimensional case. In fact, for a Kähler manifold, the Bianchi identity of the curvature F can be decomposed as follows :

$$\partial_A F_{(2,0)}=0 \qquad \partial_A F_{(1,1)}+\bar{\partial}_A F_{(2,0)}=0 \qquad \bar{\partial}_A F_{(1,1)}+\partial_A F_{(0,2)}=0 \qquad \bar{\partial}_A F_{(0,2)}=0 \quad \text{(A.221)}$$

Eq. (A.218) decomposes into two horizontality conditions :

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}+s+\delta-i_\kappa)\big(A_{(0,1)}+c+|\kappa|\bar{c}\big)+\big(A_{(0,1)}+c+|\kappa|\bar{c}\big)^2&=F_{(0,2)}+i_\kappa\chi\\ \big\{\bar{\partial}_A+s_c+\delta_{\bar{c}}-i_\kappa,\partial_A\big\}&=F_{(1,1)}+\Psi+g(\kappa)\eta\end{aligned} \quad \text{(A.222)}$$

with their Bianchi identities

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}_A+s_c+\delta_{\bar{c}}-i_\kappa)\big(F_{(0,2)}+i_\kappa\chi\big)&=0\\ (\bar{\partial}_A+s_c+\delta_{\bar{c}}-i_\kappa)\big(F_{(1,1)}+\Psi+g(\kappa)\eta\big)+\partial_A\big(F_{(0,2)}+i_\kappa\chi\big)&=0\end{aligned} \quad \text{(A.223)}$$

These equations only determine part of the BRST algebra. Indeed, they miss a dependence on the holomorphic curvature $F_{(2,0)}$. One must therefore introduce a third horizontality condition, which completes Eq. (A.218), and enforces the definition of $F_{(2,0)}$ as a curvature. In order to have the necessary balance between the ghosts and antighosts degrees of freedom, we understand that one further degree of freedom with ghost number one must be introduced. It can be represented as a holomorphic 3-form ς. The third horizontality condition and Bianchi identity are :

$$(\bar\partial_A + s_c + \delta_{\bar c} - i_\kappa)\,\varsigma_{(3,0)} = \bar\partial_A \varsigma_{(3,0)} + \Phi_{(3,0)} + g(\kappa) F_{(2,0)} \tag{A.224}$$

$$(\bar\partial_A + s_c + \delta_{\bar c} - i_\kappa)\big(\bar\partial_A \varsigma + \Phi + g(\kappa) F_{(2,0)}\big) = [F_{(0,2)} + i_\kappa \chi,\, \varsigma\,] \tag{A.225}$$

Expending the equations in form degree and ghost number determines the action of s_c and $\delta_{\bar c}$:

$$\begin{aligned}
s_c A_m &= \Psi_m & \delta_{\bar c} A_m &= \kappa_m \eta \\
s_c A_{\bar m} &= 0 & \delta_{\bar c} A_{\bar m} &= \kappa^{\bar n} \chi_{\bar n \bar m} \\
s_c \Psi_m &= 0 & \delta_{\bar c} \Psi_m &= \kappa^{\bar n} F_{\bar n m} - \kappa_m h \\
s_c \eta &= h & \delta_{\bar c} \eta &= 0 \\
s_c \chi_{\bar m \bar n} &= F_{\bar m \bar n} & \delta_{\bar c} \chi_{\bar m \bar n} &= \kappa^{\bar p} \bar\Phi_{\bar p \bar m \bar n} \\
s_c h &= 0 & \delta_{\bar c} h &= \kappa^{\bar m} D_{\bar m} \eta \\
s_c \bar\Phi_{\bar p \bar m \bar n} &= 3 D_{[\bar p} \chi_{\bar m \bar n]} & \delta_{\bar c} \bar\Phi_{\bar p \bar m \bar n} &= 0 \\
s_c \varsigma_{pmn} &= \Phi_{pmn} & \delta_{\bar c} \varsigma_{pmn} &= 3 \kappa_{[p} F_{mn]} \\
s_c \Phi_{pmn} &= 0 & \delta_{\bar c} \Phi_{pmn} &= \kappa^{\bar q} D_{\bar q} \varsigma_{pmn} - 6 \kappa_{[p} D_m \Psi_{n]}
\end{aligned}$$

The δ invariance determines the following topological gauge function :

$$\mathbf{\Psi} = \int_M d^6x \sqrt{g}\, \mathrm{Tr}\, \Big(\frac{1}{2} \chi^{mn} F_{mn} + \eta\big(h + i J^{m\bar n} F_{m\bar n}\big) - \frac{1}{6} \bar\Phi^{mnp} \varsigma_{mnp} \Big) \tag{A.226}$$

Integrating out h, Φ, $\bar\Phi$ gives the following s and δ invariant action :

$$I = s\mathbf{\Psi} = \int_M d^6x \sqrt{g}\, \mathrm{Tr}\, \left(\frac{1}{2} F^{mn} F_{mn} + \frac{1}{4} \big(J^{m\bar n} F_{m\bar n}\big)^2 - \chi^{mn} D_m \Psi_n + \eta D_{\bar m} \Psi^{\bar m} + \frac{1}{2} \varsigma^{\bar p \bar m \bar n} D_{\bar p} \chi_{\bar m \bar n} \right) \tag{A.227}$$

This action is the twisted, $\mathcal{N}=1, D=6$ supersymmetric action, up to a topological term $\int_M iJ_\wedge \mathrm{Tr}\; F_\wedge F$, as in [16]. As in the four dimensional case, this action is $s\delta$-exact,

$$I = s\,\delta_{\frac{1}{(\kappa\cdot\bar\kappa)}} \int_M d^4x \sqrt{g}\, \mathrm{Tr}\, \Big(\eta \bar\kappa^m \Psi_m + \frac{1}{2} \varsigma_{pmn} \bar\kappa^p \chi^{mn} + \bar\kappa^{[m} g^{n]\bar m} \big(3 A_{[\bar m} \partial_m A_{n]} + 2 A_{[\bar m} A_m A_{n]}\big) \Big) \tag{A.228}$$

The last term is just $ig(\bar\kappa)_\wedge J_\wedge \mathrm{Tr}\, \big(AdA + \frac{2}{3} A^3\big)$.

A.3.4 Conclusion

Putting together the results of this paper and of [A.1], we reach an interesting conclusion for the super Yang–Mills symmetries with 4, 8 and 16 generators, which can be represented as $\mathcal{N}=1$ theories in 4 and 6 dimensions and $\mathcal{N}=2$ theories in 4 and 8 dimensions.

On the one hand, one can directly see that the known spinorial generators of the superPoincaré "on-shell algebra" can be mapped on tensor operators with either Lorentz indices or holomorphic indices, as follows :

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{N}=2 & D=4,8 & (Q,\ Q_\mu, Q_{\mu\nu^-}) \\
\mathcal{N}=1 & D=4 & (Q, Q_{\bar m},\ Q_{mn}) \\
\mathcal{N}=1 & D=6 & (Q, Q_{\bar m},\ Q_{mn},\ Q_{\bar m\bar n\bar p})
\end{array}
$$

In some cases, auxiliary fields exist, giving "off-shell" closed transformations.

On the other hand, we found a reverse construction, that clarifies the structure of supersymmetry. In all cases, the set of both scalar and vector generators (Q, Q_μ) or $(Q, Q_{\bar m})$ are determined by horizontality conditions, which only involve fields related to the geometry of the Yang–Mills fields. The theory is in fact defined by these equivariant scalar and vector BRST differential operators. This reduced set of generators builds a closed "off-shell" algebra, which is large enough to determine the supersymmetric actions. It allows one to reconstruct by an untwisting procedure the complete structure of Poincaré supersymmetry. Moreover, the dependence on Faddeev–Popov ghosts can be computed, in a way that clearly allows a consistent and convenient covariant Yang–Mills gauge-fixing of the supersymmetric actions. Tensor generators, such as $Q_{\mu\nu^-}$, Q_{mn}, $Q_{\bar m\bar n\bar p}$, are decoupled sets of generators. They appear as additional symmetries of the actions that are defined by invariance under scalar and vector topological symmetries, but are not needed, neither for geometrical reasons, nor for the sake of defining the theories. However, by completion, they allow the construction of the irreducible set of on-shell supersymmetry spinorial generators in flat space.

A.4 Champs d'ombre et jauges supersymétriques

L. Baulieu, G. Bossard et S. P. Sorella,

« Shadow fields and local supersymmetric gauges »

Nucl. Phys. B **753**, 273 (2006), hep-th/0603248.

En l'absence de régulateur préservant à la fois l'invariance de jauge et la supersymétrie, le problème de la renormalisabilité des théories supersymétriques en composantes était jusqu'à maintenant encore ouvert. Si il était connu qu'il est possible de définir un opérateur nilpotent à une dérivée près, qui détermine la variation par rapport à la supersymétrie des opérateurs invariants de jauge, le champ scalaire impair permettant de fermer l'algèbre avec les transformations de jauge était mal interprété comme le fantôme de Faddeev–Popov. On explique dans cette publication que l'intervention des transformations de jauge dans la différentielle Q représentant la supersymétrie ne permet pas de se dispenser de l'opérateur BRST ordinaire $\mathscr{s}$. En effet, la définition des observables est donnée par la cohomologie de ce dernier et le bon ajustement des contre-termes associés à la renormalisation des opérateurs composites nécessite sa définition sous forme d'un opérateur de Slavnov–Taylor.

On nomme ainsi l'ombre, le champ impair c, paramètre des transformations de jauge sur les champs physiques dans l'action de Q. L'indépendance des observables physiques dans ce champ est assurée en définissant son fantôme μ, de telle sorte que ces deux champs définissent un doublet trivial pour l'opérateur BRST $\mathscr{s}$. On définit les transformations des champs par $\mathscr{s}$ et Q de telle sorte que ces deux opérateurs anticommutent. En faisant intervenir un quatuor trivial de champs par rapport à l'action de $\mathscr{s}$ et Q, on définit une fixation de jauge $\mathscr{s}Q$-exacte pour les théories de Yang–Mills supersymétriques. Après l'introduction de sources pour les $\mathscr{s}$, Q, et $\mathscr{s}Q$ variations des champs, on est en mesure d'écrire deux opérateurs de Slavnov–Taylor $\mathcal{S}_{(\mathscr{s})}$ et $\mathcal{S}_{(Q)}$, respectivement associés à l'invariance BRST et à la supersymétrie. On montre que pour toute fonctionnelle $\mathscr{F}$, ces opérateurs vérifient des relations de cohérence

$$\mathcal{S}_{(\mathscr{s})|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(\mathscr{s})}(\mathscr{F}) = 0 \qquad \mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) = 0$$
$$\mathcal{S}_{(\mathscr{s})|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) + \mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(\mathscr{s})}(\mathscr{F}) = 0 \tag{A.229}$$

qui permettent de poser rigoureusement le problème des anomalies à partir du principe d'action quantique. L'extension de la jauge interpolante de Landau–Feynman incluant les champs d'ombre vérifie un certain nombre de symétries généralisant les identités de Ward antifantômes, et fantômes dans la jauge de Landau. Les opérateurs fonctionnels associés à ces identités de Ward constituent des quatuors triviaux d'opérateurs par rapport aux opérateurs de Slavnov–Taylor $\mathcal{S}_{(s)}$ et $\mathcal{S}_{(Q)}$. On montre que ces identités de Ward peuvent être étendues à tous les ordres de la théorie des perturbations, en établissant l'absence d'anomalie cohérente. On démontre enfin que le problème des anomalies pour les théories supersymétriques se réduit à la détermination de la fonctionnelle des champs physiques de dimension canonique inférieure ou égale à quatre, invariante de jauge, dépendant linéairement des paramètres de supersymétrie, qui est invariante par supersymétrie sans pour autant pouvoir s'écrire comme l'action de la supersymétrie sur une fonctionnelle. On montre que l'anomalie d'Adler-Bardeen ne définit pas une anomalie cohérente pour les théories admettant des supersymétries étendues. La preuve découle de la non-trivialité d'un invariant de Donaldson–Witten dans les formulations tordues de ces théories. Une fois le problème des anomalies résolu, nous montrons que le problème de la stabilité de l'action se réduit à celui de l'unicité de la représentation de l'algèbre de supersymétrie sur les champs, modulo une renormalisation de ces derniers. Ceci conclut notre preuve de la renormalisabilité des théories supersymétriques, indépendamment du schéma de régularisation.

On montre également la cohérence de la procédure. Tous d'abord, les paramètres de supersymétrie n'apparaissent dans l'action qu'à travers un terme s-exact, et on peut démontrer que les fonctions de corrélation sont des fonctions analytiques de ces derniers ; ce qui établit que les grandeurs physiques de la théorie sont indépendantes du choix de ces paramètres. On montre qu'on peut définir de manière cohérente une jauge interpolante entre la fixation de jauge de Faddeev–Popov usuelle et la fixation de jauge $s\,Q$-exacte, ce qui démontre l'équivalence des deux jauges, modulo les ambiguïtés qui apparaissent si on ne considère pas les champs d'ombre. On intègre formellement les champs d'ombre dans la jauge de Landau pour aboutir à la conclusion que ces derniers permettent la description en théorie des perturbations d'une représentation non locale de la supersymétrie sur les champs qui préserve la jauge.

Shadow fields and local supersymmetric gauges

abstract

To control supersymmetry and gauge invariance in super-Yang–Mills theories we introduce new fields, called shadow fields, which enable us to enlarge the conventional Faddeev–Popov framework and write down a set of useful Slavnov–Taylor identities. These identities allow us to address and answer the issue of the supersymmetric Yang–Mills anomalies, and to perform the conventional renormalization programme in a fully regularization-independent way.

A.4.1 Introduction

Renormalizing super-Yang–Mills theories is a subtle issue. One major difficulty is that of finding the right way of preserving both supersymmetry and gauge invariance, since supersymmetry involves the matrix γ_5 and no consistent regularization scheme preserving both supersymmetry and gauge invariance is available so far.

It is worth recalling that, for $\mathcal{N} = 1$ super-Yang–Mills theories, a superspace formulation is at our disposal. In this case, by means of the introduction of superfield Faddeev–Popov ghosts, the Slavnov–Taylor identity associated to super gauge transformations can be established directly in superspace [96]. This has allowed for a superspace characterization of both counterterms and gauge anomalies, by means of algebraic methods [96, 97]. However, the gauge superfield is dimensionless, and its renormalization in superspace is achieved through non-linear redefinition and involves an infinite number of parameters in the gauge sector [96, 98]. In the case of $\mathcal{N} = 2, 4$ super Yang–Mills theories, a component field framework, based on the Wess–Zumino gauge, is frequently employed. Although in this gauge the physical degrees of freedom are more transparent, gauge and supersymmetric transformations mix each other in a nonlinear way, a feature that has required a careful use of the antifield formalism to write down suitable Slavnov–Taylor identities [99, 100, 101]. However, these identities are not suited for a check of general supersymmetry covariance : they only control the invariance of observables that are scalar under supersymmetric transformations.

In this work, these issues will be faced in a novel way. We introduce new fields in supersymmetric theories, which we call shadow fields, not to be confused with the

Faddeev–Popov ghosts. This determines a system of coupled Slavnov-Taylor identities, which allow for a characterization of the possible anomalies as well as of the compensating non-invariant counterterms needed to restore both gauge invariance and supersymmetry, order by order in perturbation theory, in component formalism. Eventually, within a class of renormalisable gauges, one gets a proof that observables truly fall in supersymmetric multiplets.

The method improves the Faddeev–Popov gauge-fixing procedure. It can be applied to all models, for $\mathcal{N} = 1, 2, 4$. Despite their name, these shadow fields add light to the theory ! Their introduction allows us to write down a family of local gauge-fixing terms with several gauge parameters. With some particular choice of the latter, the gauge-fixing becomes explicitly supersymmetric, while the result of the usual non-supersymmetric Faddeev–Popov procedure is recovered for another choice of the gauge parameters. Both class of gauges determine the same set of observables, characterized by the cohomology of the BRST operator. Shadow fields are in fact of great importance, as they allow us to define the relevant Slavnov–Taylor identities that control both gauge invariance and supersymmetry, using the properties of local quantum field theory. The possible gauge and supersymmetric anomalies can then be classified. By introducing the corresponding set of shadow and ghost fields, we thus have a generalization of the case of the non-supersymmetric Yang–Mills theory, where Faddeev–Popov ghosts are sufficient.

The content of the paper is quite general.[18] The ordinary BRST symmetry s of supersymmetric theories involves the physical fields and the Faddeev–Popov ghost Ω, the antighost $\bar{\Omega}$ and the Lagrange multiplier $b = s\bar{\Omega}$. The BRST doublet $(\bar{\Omega}, b)$ is cohomologically trivial and is normally used to construct a BRST-invariant gauge-fixing term. Observables are defined as belonging to the cohomology sector of ghost number zero. Shadow fields are introduced in the form of two BRST doublets, $(c,\, \mu)$, and $(\bar{\mu},\, \bar{c})$. They make it possible to define a second differential operator Q that consistently anticommutes with s and carries the relevant information about supersymmetry. The introduction of the shadow doublets $(c,\, \mu)$ and $(\bar{\mu},\, \bar{c})$ is just what is needed to make the supersymmetric transformations compatible with a large enough class of local gauge functions. As we shall see, this allows us to define suitable Slavnov–Taylor identities to control both gauge invariance and supersymmetry. This is achieved by introducing classical external sources for the s, Q and sQ transforms of the gauge and matter fields, as well as of the Faddeev–Popov and shadow fields. In fact, for Green's functions with no external legs

[18]However, for pedagogical reasons and to illustrate the method, we sketch at the end the example of $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills theory.

of shadow type, internal loops of shadow fields compensate each other in a way that is specific to the class of renormalisable gauge that we choose. Shadow fields can be formally integrated out by making explicit use of their equations of motion, within the Landau gauge. However, this leads to the appearance of a highly complex and non-local supersymmetry of the ordinary Faddeev–Popov action in the Landau gauge, which cannot be used to obtain meaningful Slavnov–Taylor identities. Therefore, shadow fields have to be kept for non-ambiguously defining the quantization of supersymmetric gauge theories.

We also give an explanation of why anomalies for supersymmetry and gauge symmetry can only occur for $\mathcal{N} = 1$ models, but not for $\mathcal{N} = 2$, 4 models. The reason has to do only with the structure of the classical supersymmetric algebra, and it boils down to the existence of non-trivial supersymmetric cocycles. The classification of anomalies involves only the supersymmetric transformations and the set of gauge-invariant local functional in the physical fields. We generalize the derivation of the Adler–Bardeen anomaly from a "Russian formula", to determine solutions of the consistency conditions including supersymmetry. This equation allows for an algebraic proof of the absence of Adler–Bardeen anomaly in extended supersymmetry. Notice that the demonstration that we display here only holds for cases where the supersymmetric algebra can be closed without the use of the equations of motion, i.e. for $\mathcal{N} = 1$, 2. In the case of $\mathcal{N} = 4$ supersymmetry, our method can be used, but it must be improved. In order to keep a linear dependence on the sources, one has to restrict to a subalgebra of the whole supersymmetric one, a question that will be detailed in a forthcoming paper [**?**]. Interestingly, shadow fields arise very naturally for topological quantum field theories [**?**].

A.4.2 Supersymmetry algebra with shadow fields

The "physical" fields of a generic supersymmetric Yang–Mills theory in four dimensions are the Yang–Mills field A and the matter fields $\varphi^{a'}$, which take values in a given representation of the gauge group. For simplicity, we adopt a notation as if the matter fields were in the adjoint representation. All our results remain true when they are in any given representation.[19] We denote by φ^a the whole set of fields $(A, \varphi^{a'})$, and by $\delta^{\mathcal{S}usy}$ the generator of the corresponding supersymmetric transformations. The way two supersymmetries commute can be generically cast in the following form :

$$(\delta^{\mathcal{S}usy})^2 \approx \delta^{\text{gauge}}(\omega(\varphi) + i_\kappa A) + \mathcal{L}_\kappa \tag{A.230}$$

[19] In the discussion of the anomalies we will suppose, however, that the gauge group is semi-simple.

where $\approx$ means that this equality can hold modulo equations of motion. δ^{Susy} stands for a supersymmetry transformation, with a “ghostified” spinor parameter ϵ, which is commuting. The quantities $\omega(\varphi)$ and κ are bilinear functions in the parameter ϵ. For example, in the case of $\mathcal{N}=2$ super-Yang–Mills one has (see section A.4.8)

$$\omega(\varphi) = \big(\bar{\epsilon}[\gamma_5\phi^5 - \phi]\epsilon\big) \qquad \kappa^\mu = -i\big(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon\big) \tag{A.231}$$

For $\mathcal{N}=1,2$, the closure relation (A.230) can hold off-shell with the introduction of auxiliary fields. When auxiliary fields are not used (for example in $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills) one has, for each field φ^a,

$$(\delta^{Susy})^2\varphi^a + C^{ab}\frac{\delta^L S}{\delta\varphi^b} = \delta^{\text{gauge}}(\omega(\varphi)+i_\kappa A)\varphi^a + \mathcal{L}_\kappa\varphi^a \tag{A.232}$$

where C^{ab} are bilinear functions of the supersymmetric parameters, which do not depend on the fields.[20] From the invariance of the classical action S and from the Jacobi identity for the differential δ^{Susy}, one has :

$$\begin{gathered} C^{ab} + (-1)^{ab}C^{ba} = 0 \\ \frac{\delta^R\,\delta^{Susy}\varphi^a}{\delta\varphi^c}C^{cb} - (-1)^{ab}\frac{\delta^R\,\delta^{Susy}\varphi^b}{\delta\varphi^c}C^{ca} = 0 \end{gathered} \tag{A.233}$$

Let Ω be the Faddeev–Popov ghost for the gauge transformations, with antighost $\bar{\Omega}$ and Lagrange multiplier field b. The BRST operator s is :

$$\begin{aligned} &s\,A = -d_A\Omega \qquad && s\,\varphi^{a'} = -[\Omega,\varphi^{a'}] \\ &s\,\Omega = -\Omega^2 && \\ &s\,\bar{\Omega} = b && s\,b = 0 \end{aligned} \tag{A.234}$$

We introduce two s trivial doublets, $(\bar{\mu},\bar{c})$, and (c,μ) with :

$$\begin{aligned} s\,\bar{\mu} &= \bar{c} \qquad & s\,\bar{c} &= 0 \\ s\,c &= \mu & s\,\mu &= 0 \end{aligned} \tag{A.235}$$

We call the set $(\bar{\mu}^{(-1,-1)}, \bar{c}^{(-1,0)}, c^{(0,1)}, \mu^{(1,1)})$ the shadow quartet. In analogy with the Faddeev–Popov ghost number, we define a shadow number. The upper index $\phi^{(g,s)}$ means that g and s are respectively the ghost and shadow numbers of the field ϕ. With this notation, one has for the physical fields $A^{(0,0)}$ and $\varphi^{(0,0)}$. The sum, modulo 2, of g, s, the

[20]This property holds true for all super-Yang–Mills theories

ordinary form degree and the usual Grassmann grading associated to the spin, determines the commutation properties of any given field or operator. The transformations and the gradings of the shadow quartet and the Faddeev–Popov ghosts can be deduced from the following diagrams :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & \bar{\mu}^{(-1,-1)} & \\ \Omega^{(1,0)} & & c^{(0,1)} & & \bar{c}^{(0,-1)} & & \bar{\Omega}^{(-1,0)} \\ & \mu^{(1,1)} & & & & b^{(0,0)} & \end{array} \tag{A.236}$$

We attribute the values $g = 0$ and $s = 1$ to each one of the supersymmetry parameters present in the operator δ^{Susy} (they are commuting spinors). Then, we define a differential graded operator Q with $g = 0$, $s = 1$, (for s, $g = 1$, $s = 0$) which represents supersymmetry in a nilpotent way, as follows :

$$\begin{aligned} QA &= \delta^{Susy} A - d_A c & Q\varphi^{a'} &= \delta^{Susy}\varphi^{a'} - [c, \varphi^{a'}] \\ Qc &= \omega(\varphi) + i_\kappa A - c^2 & & \\ Q\Omega &= -\mu - [c, \Omega] & Q\mu &= -[\omega(\varphi), \Omega] - \mathscr{L}_\kappa \Omega - [c, \mu] \\ Q\bar{\mu} &= \bar{\Omega} & Q\bar{\Omega} &= \mathcal{L}_\kappa \bar{\mu} \\ Q\bar{c} &= -b & Qb &= -\mathcal{L}_\kappa \bar{c} \end{aligned} \tag{A.237}$$

The operators s and Q verify

$$\begin{gathered} s^2 = 0 \qquad Q^2 \approx \mathcal{L}_\kappa \\ \{s, Q\} = 0 \end{gathered} \tag{A.238}$$

These consistent closure relations hold true thanks to the introduction of the ghost and shadow fields [77]. In fact, one has the graded equation, $(d + s + Q - i_\kappa)^2 = 0$, and the s and Q transformations of the fields can be nicely condensed into a graded horizontality equation

$$(d + s + Q - i_\kappa)\big(A + \Omega + c\big) + \big(A + \Omega + c\big)^2 = F + \delta^{Susy} A + \omega(\varphi) \tag{A.239}$$

completed by $(d + s + Q - i_\kappa)\bar{\mu} = d\mu + \bar{c} + \bar{\Omega}$, and their Bianchi identities.[21] Eq. (A.239) is analogous to the horizontality condition that one encounters in topological quantum field theories [A.1]. Here, it will be used for classifying supersymmetric anomalies.

[21] For any matter super multiplet associated to scalar fields h^α in any given representation of the gauge group, one has also

$$(d + s + Q - i_\kappa)h^\alpha + (A + \Omega + c)h^\alpha = d_A h^\alpha + \delta^{Susy} h^\alpha$$

A.4.3 Slavnov–Taylor identities for s and Q symmetries

Source dependent local effective action

To extend both s and Q symmetry at the quantum level, we must introduce external sources for all s, Q and $s\,Q$ transformations of the fields, which are non-linear. We shall consider the following class of gauge-fixing fermion :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi} = \int \mathrm{Tr}\,\Big(\bar\Omega d\star A - \frac{\alpha}{2}\star\bar\Omega b + \bar\mu d\star dc + (1-\zeta)\bar\mu d\star\big([A,c]-\delta^{Susy}A\big) + \frac{\alpha}{2}\star\bar\mu\mathcal{L}_\kappa\bar c\Big)\\ = \zeta\int \mathrm{Tr}\,\Big(\bar\Omega d\star A - \frac{\alpha}{2}\star\bar\Omega b + \bar\mu d\star dc + \frac{\alpha}{2}\star\bar\mu\mathcal{L}_\kappa\bar c\Big)\\ +(1-\zeta)\,Q\int \mathrm{Tr}\,\Big(\bar\mu d\star A - \frac{\alpha}{2}\star\bar\mu b\Big)\end{aligned} \quad (A.240)$$

where α and ζ are gauge parameters. It leads one to the following classical gauge-fixed and BRST invariant local action Σ, which also contains all needed external sources :

$$\begin{aligned}\Sigma = S[\varphi] + s\,\mathbf{\Psi} + \int(-1)^a\Big(\varphi_a^{(s)}\,s\,\varphi^a + \varphi_a^{(Q)}Q\varphi^a + \varphi_a^{(Qs)}\,s\,Q\varphi^a\Big)\\ + \int \mathrm{Tr}\,\Big(\Omega^{(s)}\Omega^2 - \Omega^{(Q)}Q\Omega - \Omega^{(Qs)}\,s\,Q\Omega + \mu^{(Q)}Q\mu - c^{(Q)}Qc\Big)\\ + \int\frac{1}{2}\big(\varphi_a^{(Q)} - [\varphi_a^{(Qs)},\Omega]\big)C^{ab}\big(\varphi_b^{(Q)} - [\varphi_b^{(Qs)},\Omega]\big)\\ +(1-\zeta)\int \mathrm{Tr}\,\big(d\bar c - [\Omega, d\bar\mu]\big)\star C^{A\,H^I}\big(H_I^{(Q)} - [H_I^{(Qs)},\Omega]\big)\end{aligned} \quad (A.241)$$

Here, $H_I^{(Q)}$ and $H_I^{(Qs)}$ are the sources for the Q and $s\,Q$ transformations of the possible auxiliary fields H^I of the chosen supersymmetric model. The last term can be of utility only for the case $\mathcal{N}=4$.

We will shortly show that the gauge function $\mathbf{\Psi}$ is stable under renormalization, for all values of the parameters α and ζ. This determines a very interesting class of gauges, which interpolates, in particular, between the Feynman–Landau gauges, for $\zeta=1$, and a new class of explicitly supersymmetric gauges, for $\zeta=0$.

Slavnov–Taylor identity for the s-symmetry

The s-invariance of the action Σ implies the following Slavnov-Taylor identity, which is valid for all values of α and ζ :

$$\mathcal{S}_{(s)}(\Sigma) = 0 \quad (A.242)$$

where the Slavnov–Taylor operator $\mathcal{S}_{(s)}$ is given by

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{(s)}(\mathscr{F}) \equiv &\int \Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta\varphi^a} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta\varphi_a^{(s)}} + (-1)^a \varphi_a^{(Q)} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta\varphi_a^{(Qs)}} \Big) \\ &+ \int \mathrm{Tr}\,\Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta\Omega} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta\Omega^{(s)}} - \Omega^{(Q)} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta\Omega^{(Qs)}} - c^{(Q)} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta\mu^{(Q)}} + \mu \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta c} + b \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta\bar\Omega} + \bar c \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta\bar\mu} \Big) \end{aligned} \tag{A.243}$$

Here and elsewhere, $\mathscr{F}$ is a generical functional of fields and sources. Let us introduce for further use the linearized Slavnov-Taylor operator

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}} \equiv &\int \Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta\varphi^a} \frac{\delta^L}{\delta\varphi_a^{(s)}} - \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta\varphi_a^{(s)}} \frac{\delta^L}{\delta\varphi^a} + (-1)^a \varphi_a^{(Q)} \frac{\delta^L}{\delta\varphi_a^{(Qs)}} \Big) \\ &+ \int \mathrm{Tr}\,\Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta\Omega} \frac{\delta^L}{\delta\Omega^{(s)}} - \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta\Omega^{(s)}} \frac{\delta^L}{\delta\Omega} - \Omega^{(Q)} \frac{\delta^L}{\delta\Omega^{(Qs)}} - c^{(Q)} \frac{\delta^L}{\delta\mu^{(Q)}} + \mu \frac{\delta^L}{\delta c} + b \frac{\delta^L}{\delta\bar\Omega} + \bar c \frac{\delta^L}{\delta\bar\mu} \Big) \end{aligned} \tag{A.244}$$

In particular, the identity (A.242) implies that $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ is nilpotent :

$$\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}{}^2 = 0 \tag{A.245}$$

The aim of perturbative gauge theory is to compute, order by order in the loop expansion, a quantum effective action Γ that satisfies $\mathcal{S}_{(s)}(\Gamma) = 0$. The property $\mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(s)}(\mathscr{F}) = 0$ allows us to characterize the possible gauge anomalies. However, in the present case, one also has to take into account the Q symmetry, as we will shortly see.

Gauge independence of the s-invariant observables

The spinor commuting parameters of supersymmetric transformation $\delta^{Susy} A$ enter the action Σ through a s-exact term. (Notice that these parameters have shadow number 1). As such, they can be treated as gauge parameters, precisely as the parameters α and ζ. This property, combined with the s invariance of the action, allows us to select observables that do not depend on the gauge parameters, within the class of gauges that we are considering.

In fact, the observables are defined from the cohomology of s, and they turn out to be independent from these generalized gauge parameters. To prove this property, one uses the fact that the free propagators and interaction terms of the theory depend analytically on these gauge parameters, and thus, the full generating functional also depends analytically on them. Then, the derivative of the 1PI generating functional Γ with respect to any one of the gauge parameters amounts to the insertion of a s-exact local term in Γ. It can be shown, using for instance the method [45], that these insertions yield a vanishing contribution when inserted in a Green function of s invariant observables. Moreover, the theory can be constructed, while maintaining all relevant Ward identities for the Q and s symmetries, for all possible values of the parameters α and ζ, (Section A.4.7). In fact, the gauges defined by the gauge fermion (A.240) are stable under renormalization, due to some additional Ward identities stemming from field equations that are "linear" in the quantum fields. As the Green's functions of s invariant observables are independent on all gauge parameters, their values are the same within this class of gauges. This gives a nice way of understanding the supersymmetry covariance of observables, even for a gauge-fixing that is not manifestly supersymmetric.

When the gauge parameter ζ is set to 1, the shadow fields $\bar{\mu}, \bar{c}, c$ and μ become free, since, in this case, their contribution in the action is just $\int \mathrm{Tr}\ (\bar{\mu} d \star d\mu + \bar{c} d \star dc)$. The remaining of the gauge-fixing action is the ordinary Faddeev–Popov action. In this gauge, supersymmetry is not manifest, and supersymmetry covariance of observables is very difficult to be established. On the other hand, after having introduced the shadows, one finds that the Landau–Feynman gauges are a continuous limit of more general gauges, which are parametrized by ζ and α and by the parameters of the supersymmetry transformations. These gauges can now be made explicitly supersymmetric, by choosing $\zeta = 0$, and keeping non-zero values for the supersymmetric parameters. Indeed, in this case, the gauge-fixing term is nothing but a $s\,Q$-exact term, namely

$$s\,Q \int \mathrm{Tr}\ \left(\bar{\mu} d \star A - \frac{\alpha}{2} \star \bar{\mu} b\right) . \tag{A.246}$$

The idea is thus to perform the renormalization programme in the gauge $\zeta = 0$, since in this case the supersymmetric Ward identities take the simplest form. One relies on the independence theorem of the observables upon changes of the gauge parameters, so that the result will be the same as in a standard Faddeev–Popov gauge-fixing, thereby ensuring the supersymmetry covariance, that is automatic in the gauges where $\zeta = 0$, provided that no anomaly occur for the Ward identities implied by the Q symmetry.

Slavnov–Taylor identity for the Q-symmetry in the $\zeta = 0$ gauge

In the gauge $\zeta = 0$, as a consequence of the Q and s invariance of the gauge-fixing term (A.246), the complete action Σ satisfies a second Slavnov–Taylor identity

$$\mathcal{S}_{(Q)}(\Sigma) = 0 \tag{A.247}$$

where $\mathcal{S}_{(Q)}$ is defined by

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) \equiv \int \Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \varphi^a} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi_a^{(Q)}} - (-1)^a \varphi_a^{(s)} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi_a^{(Qs)}} - (-1)^a \mathcal{L}_\kappa \varphi_a^{(Qs)} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi_a^{(s)}} + \varphi_a^{(Q)} \mathcal{L}_\kappa \varphi^a \Big) \\ + \int \mathrm{Tr} \, \Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \Omega} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(Q)}} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta c} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta c^{(Q)}} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \mu} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \mu^{(Q)}} + \Omega^{(s)} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(Qs)}} + \mathcal{L}_\kappa \Omega^{(Qs)} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(s)}} \\ + \Omega^{(Q)} \mathcal{L}_\kappa \Omega + c^{(Q)} \mathcal{L}_\kappa c + \mu^{(Q)} \mathcal{L}_\kappa \mu - b \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{c}} - \mathcal{L}_\kappa \bar{c} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b} + \bar{\Omega} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\mu}} + \mathcal{L}_\kappa \bar{\mu} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\Omega}} \Big) \quad \text{(A.248)}\end{aligned}$$

Notice that the equation $\mathcal{S}_{(Q)}(\Sigma) = 0$ displays non homogeneous terms which do not depend on Σ. However, the latter are linear in the quantum fields. One defines a linearized Slavnov–Taylor operator $\mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}} \equiv \int \Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \varphi^a} \frac{\delta^L}{\delta \varphi_a^{(Q)}} - \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \varphi_a^{(Q)}} \frac{\delta^L}{\delta \varphi^a} - (-1)^a \varphi_a^{(s)} \frac{\delta^L}{\delta \varphi_a^{(Qs)}} - (-1)^a \mathcal{L}_\kappa \varphi_a^{(Qs)} \frac{\delta^L}{\delta \varphi_a^{(s)}} \Big) \\ + \int \mathrm{Tr} \, \Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \Omega} \frac{\delta^L}{\delta \Omega^{(Q)}} - \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(Q)}} \frac{\delta^L}{\delta \Omega} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta c} \frac{\delta^L}{\delta c^{(Q)}} - \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta c^{(Q)}} \frac{\delta^L}{\delta c} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \mu} \frac{\delta^L}{\delta \mu^{(Q)}} - \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \mu^{(Q)}} \frac{\delta^L}{\delta \mu} \\ + \Omega^{(s)} \frac{\delta^L}{\delta \Omega^{(Qs)}} + \mathcal{L}_\kappa \Omega^{(Qs)} \frac{\delta^L}{\delta \Omega^{(s)}} - b \frac{\delta^L}{\delta \bar{c}} - \mathcal{L}_\kappa \bar{c} \frac{\delta^L}{\delta b} + \bar{\Omega} \frac{\delta^L}{\delta \bar{\mu}} + \mathcal{L}_\kappa \bar{\mu} \frac{\delta^L}{\delta \bar{\Omega}} \Big) \quad \text{(A.249)}\end{aligned}$$

Provided the identities (A.242) and (A.247) hold true, the operators $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ and $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ satisfy the following anticommutation relations :

$$\begin{aligned}{\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}}^2 = 0 \qquad {\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}}^2 = \mathcal{P}_\kappa \\ \big\{ \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}, \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} \big\} = 0 \qquad \text{(A.250)}\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_\kappa$ is the differential operator which acts as the Lie derivative along κ on all fields and external sources.

When $\zeta \neq 0$, the gauge-fixing term breaks the Q symmetry. However, this breaking can be kept under control by introducing an anticommuting parameter z which forms a doublet together with the parameter ζ, namely, $Qz = \zeta$, $Q\zeta = 0$, and $s\,\zeta = s\,z = 0$. As a consequence, the term

$$s\,\zeta \int \mathrm{Tr} \, \Big(\bar{\Omega} d \star A - \frac{\alpha}{2} \star \bar{\Omega} b + \bar{\mu} d \star dc + \frac{\alpha}{2} \star \bar{\mu} \mathcal{L}_\kappa \bar{c} \Big) \qquad \text{(A.251)}$$

is changed into

$$s\,(\zeta - zQ) \int \mathrm{Tr} \, \Big(\bar{\Omega} d \star A - \frac{\alpha}{2} \star \bar{\Omega} b + \bar{\mu} d \star dc + \frac{\alpha}{2} \star \bar{\mu} \mathcal{L}_\kappa \bar{c} \Big) \qquad \text{(A.252)}$$

Thanks to the introduction of the anticommuting parameter z, the Slavnov–Taylor identity $\mathcal{S}_{(Q)}(\Sigma) = 0$ can be maintained for $\zeta \neq 0$. Section A.4.7 will be devoted to the study of this improved Slavnov–Taylor identity, as well as to the stability of the modified action, with its z dependence.

From now on and till section A.4.7, we will consider that $\zeta = 0$. All results, but those involving the ghost Ward identities, can be generalized to the case $\zeta \neq 0$, by including the z and ζ dependence. Section A.4.7 sketches the relevant modifications.

Antighost Ward identities

For all values of α, we have "linear field equations" for the fields $\bar{\mu}$, $\bar{c}$, $\bar{\Omega}$ and b. These equations imply the antighost Ward identities that can be enforced in perturbation theory. They constitute a BRST quartet :

$$\overline{\mathcal{G}}(\Sigma) = 0 \ , \quad \overline{\mathcal{G}_{(s)}}(\Sigma) = 0 \ , \quad \overline{\mathcal{G}_{(Q)}}(\Sigma) = 0 \ , \quad \overline{\mathcal{G}_{(Qs)}}(\Sigma) = 0 \tag{A.253}$$

where

$$\overline{\mathcal{G}}(\mathscr{F}) \equiv \int \mathrm{Tr}\ X\Big(\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b} - d \star A + \alpha \star b\Big)$$

$$\overline{\mathcal{G}_{(s)}}(\mathscr{F}) \equiv \int \mathrm{Tr}\ X\Big(\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\Omega}} + d \star \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta A^{(s)}}\Big) \qquad \overline{\mathcal{G}_{(Q)}}(\mathscr{F}) \equiv \int \mathrm{Tr}\ X\Big(\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{c}} - d \star \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta A^{(Q)}} - \alpha \star \mathcal{L}_\kappa \bar{c}\Big)$$

$$\overline{\mathcal{G}_{(Qs)}}(\mathscr{F}) \equiv \int \mathrm{Tr}\ X\Big(\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\mu}} + d \star \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta A^{(Qs)}}\Big) \tag{A.254}$$

To obtain integrated equations, we introduced a local arbitrary function X, which takes values in the Lie algebra of the gauge group. We call the set of the four operators $\overline{\mathcal{G}_{\bullet}} = (\overline{\mathcal{G}},\ \overline{\mathcal{G}_{(s)}},\ \overline{\mathcal{G}_{(Q)}},\ \overline{\mathcal{G}_{(Qs)}})$ the antighost operator quartet.

Ghost Ward identities

For the particular case of the Landau gauge, $\alpha = 0$, we have integrated Ward identities :

$$\mathcal{G}^{(Qs)}(\Sigma) = 0 \ , \quad \mathcal{G}^{(Q)}(\Sigma) = 0 \ , \quad \mathcal{G}^{(s)}(\Sigma) = 0 \tag{A.255}$$

with

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(Qs)}(\mathscr{F}) &= \int \mathrm{Tr}\, \Big(\mathrm{x}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \mu} - [\mathrm{x}, \bar{\mu}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b} + \mathrm{x}\big(-(-1)^a[\varphi_a^{(Qs)}, \varphi^a] + [\Omega^{(Qs)}, \Omega] + [\mu^{(Q)}, c]\big)\Big) \\
\mathcal{G}^{(Q)}(\mathscr{F}) &= \int \mathrm{Tr}\, \Big(\mathrm{x}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta c} + [\mathrm{x}, \bar{c}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b} - [\mathrm{x}, \bar{\mu}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\Omega}} + (-1)^a[\mathrm{x}, \varphi_a^{(Qs)}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi_a^{(s)}} - [\mathrm{x}, \Omega^{(Qs)}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(s)}} \\
&\qquad + \mathrm{x}\big([\varphi_a^{(Q)}, \varphi^a] + [\Omega^{(Q)}, \Omega] + [c^{(Q)}, c] + [\mu^{(Q)}, \mu]\big)\Big) \\
\mathcal{G}^{(s)}(\mathscr{F}) &= \int \mathrm{Tr}\, \Big(\mathrm{x}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega} - [\mathrm{x}, \bar{\Omega}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b} + [\mathrm{x}, \bar{\mu}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{c}} - [\mathrm{x}, c]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \mu} - (-1)^a[\mathrm{x}, \varphi_a^{(Qs)}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi_a^{(Q)}} \\
&\qquad + [\mathrm{x}, \Omega^{(Qs)}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(Q)}} + [\mathrm{x}, \mu^{(Q)}]\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta c^{(Q)}} + \mathrm{x}[\varphi_a^{(s)}, \varphi^a] + \mathrm{x}[\Omega^{(s)}, \Omega]\Big)
\end{aligned}
\tag{A.256}
$$

x is an arbitrary constant element of the Lie algebra. One has also the obvious property

$$
\mathcal{G}(\Sigma) = 0 \tag{A.257}
$$

where the linear operator $\mathcal{G}[\mathrm{x}]$ stands for global gauge transformations of parameter $-\mathrm{x}$, The operators $\mathcal{G}^\bullet = (\mathcal{G}^{(Qs)},\ \mathcal{G}^{(Q)},\ \mathcal{G}^{(s)},\ \mathcal{G})$ form a quartet. We call $\mathcal{G}^\bullet$ the ghost operator quartet.

Consistency equations for Slavnov–Taylor, antighost and ghost operators

Given the operators $\overline{\mathcal{G}_\bullet}$ and $\mathcal{G}^\bullet$, we define their linearized functional operators $\overline{L\mathcal{G}_\bullet}$ and $L\mathcal{G}^\bullet$, which will complete the linearized Slavnov–Taylor operators.[22] This set of operators builds the following closed algebra :

$$
\begin{gathered}
\mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(s)}(\mathscr{F}) = 0 \qquad \mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) = 0 \\
\mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) + \mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(s)}(\mathscr{F}) = 0 \\
\mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\overline{\mathcal{G}}(\mathscr{F}) - \overline{L\mathcal{G}}\mathcal{S}_{(s)}(\mathscr{F}) = -\overline{\mathcal{G}_{(s)}}(\mathscr{F}) \qquad \mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}\overline{\mathcal{G}}(\mathscr{F}) - \overline{L\mathcal{G}}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) = \overline{\mathcal{G}_{(Q)}}(\mathscr{F}) \\
\mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\overline{\mathcal{G}_{(Q)}}(\mathscr{F}) + \overline{L\mathcal{G}_{(Q)}}\mathcal{S}_{(s)}(\mathscr{F}) = \mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}\overline{\mathcal{G}_{(s)}}(\mathscr{F}) + \overline{L\mathcal{G}_{(s)}}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) = \overline{\mathcal{G}_{(Qs)}}(\mathscr{F}) \\
\mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{G}^{(Qs)}(\mathscr{F}) - L\mathcal{G}^{(Qs)}\mathcal{S}_{(s)}(\mathscr{F}) = -\mathcal{G}^{(Q)}(\mathscr{F}) \qquad \mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}\mathcal{G}^{(Qs)}(\mathscr{F}) - L\mathcal{G}^{(Qs)}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) = \mathcal{G}^{(s)}(\mathscr{F}) \\
\mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{G}^{(s)}(\mathscr{F}) + L\mathcal{G}^{(s)}\mathcal{S}_{(s)}(\mathscr{F}) = \mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}}\mathcal{G}^{(Q)}(\mathscr{F}) + L\mathcal{G}^{(Q)}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) = \mathcal{G}(\mathscr{F})
\end{gathered}
\tag{A.258}
$$

[22] For example $\overline{L\mathcal{G}} = \int \mathrm{Tr}\ X\frac{\delta^L}{\delta b}$.

The ghost and antighost operators commute in the following way

$$
\begin{aligned}
L\mathcal{G}^{(s)}[\mathrm{x}]\overline{\mathcal{G}_{(s)}}[X](\mathscr{F}) + \overline{L\mathcal{G}_{(s)}}[X]\mathcal{G}^{(s)}[\mathrm{x}](\mathscr{F}) &= -\overline{\mathcal{G}}[[\mathrm{x}, X]](\mathscr{F})\\
L\mathcal{G}^{(Q)}[\mathrm{x}]\overline{\mathcal{G}_{(Q)}}[X](\mathscr{F}) + \overline{L\mathcal{G}_{(Q)}}[X]\mathcal{G}^{(Q)}[\mathrm{x}](\mathscr{F}) &= \overline{\mathcal{G}}[[\mathrm{x}, X]](\mathscr{F})\\
L\mathcal{G}^{(Qs)}[\mathrm{x}]\overline{\mathcal{G}_{(Qs)}}[X](\mathscr{F}) - \overline{L\mathcal{G}_{(Qs)}}[X]\mathcal{G}^{(Qs)}[\mathrm{x}](\mathscr{F}) &= \overline{\mathcal{G}}[[\mathrm{x}, X]](\mathscr{F})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L\mathcal{G}^{(s)}[\mathrm{x}]\overline{\mathcal{G}_{(Qs)}}[X](\mathscr{F}) - \overline{L\mathcal{G}_{(Qs)}}[X]\mathcal{G}^{(s)}[\mathrm{x}](\mathscr{F}) &= -\overline{\mathcal{G}_{(Q)}}[[\mathrm{x}, X]](\mathscr{F})\\
L\mathcal{G}^{(Q)}[\mathrm{x}]\overline{\mathcal{G}_{(Qs)}}[X](\mathscr{F}) - \overline{L\mathcal{G}_{(Qs)}}[X]\mathcal{G}^{(Q)}[\mathrm{x}](\mathscr{F}) &= \overline{\mathcal{G}_{(s)}}[[\mathrm{x}, X]](\mathscr{F})
\end{aligned}
\tag{A.259}
$$

$$
L\mathcal{G}^{(s)}[\mathrm{x}]\mathcal{G}^{(Q)}[\mathrm{y}](\mathscr{F}) + L\mathcal{G}^{(Q)}[\mathrm{y}]\mathcal{G}^{(s)}[\mathrm{x}](\mathscr{F}) = -\mathcal{G}^{(Qs)}[[\mathrm{x}, \mathrm{y}]](\mathscr{F})
\tag{A.260}
$$

$$
\begin{aligned}
L\mathcal{G}[\mathrm{x}]\overline{\mathcal{G}_\bullet}[X](\mathscr{F}) - \overline{L\mathcal{G}_\bullet}[X]\mathcal{G}[\mathrm{x}](\mathscr{F}) &= -\overline{\mathcal{G}_\bullet}[[\mathrm{x}, X]](\mathscr{F})\\
L\mathcal{G}[\mathrm{x}]\mathcal{G}^\bullet[\mathrm{y}](\mathscr{F}) - L\mathcal{G}^\bullet[\mathrm{y}]\mathcal{G}[\mathrm{x}](\mathscr{F}) &= -\mathcal{G}^\bullet[[\mathrm{x}, \mathrm{y}]](\mathscr{F})
\end{aligned}
\tag{A.261}
$$

where we have written the dependence in the Lie algebra elements X and x. For simplicity, we shall consider cases such that

$$
Q^2 = \mathcal{L}_\kappa \qquad C^{ab} = 0
\tag{A.262}
$$

For instance, by introducing auxiliary fields, this condition holds true for $\mathcal{N} = 1, 2$ supersymmetry. We will see how the case $\mathcal{N} = 4$ can be handled in a separate publication [A.5].

A.4.4 Non-local supersymmetry in the Landau-gauge

In the class of gauges that we are considering, the dependence of the action Σ on the shadow fields c, $\bar{c}$ and their ghosts $\bar{\mu}$ and μ is quadratic, including the classical source dependence. Thus, they can be eliminated by gaussian integration. This defines an effective action Σ^{eff} :

$$
\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}c\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}\mu\mathcal{D}\bar{\mu}\ e^{-\Sigma-\int(Jc+\bar{J}\bar{c}+K\mu+\bar{K}\bar{\mu})}\\
&= \det{}^{-1}\begin{bmatrix} -1 & \alpha G\mathcal{L}_\kappa \\ G\big(\mathrm{ad}_{c^{(Q)}} + d^\dagger \mathrm{ad}_{d_A\Omega} G \mathrm{ad}_{\mu^{(Q)}} + \mathrm{ad}_{\mu^{(Q)}} G \mathrm{ad}^\dagger_{d_A\Omega} d\big) & 1 \end{bmatrix} e^{-\Sigma^{\mathrm{eff}}}
\end{aligned}
\tag{A.263}
$$

The simplicity of the determinant in Eq.(A.263) is due to compensations between the bosonic and fermionic gaussian integrations over the shadow fields c, $\bar{c}$ and μ, $\bar{\mu}$. Here,

ad_X denotes the adjoint action by a gauge Lie algebra element X, and the symbol † indicates the adjoint of the corresponding operator with respect to the metric $\big(f, g\big) \equiv \int \mathrm{Tr}\ \big(f \star g\big)$. The operator G is the inverse of the Faddeev–Popov operator, so that, one has $G d^\dagger d_A = d^\dagger d_A G = 1$.

In the Landau gauge, $\alpha = 0$, the determinant (A.263) is one. Therefore, in this gauge, the functional integration over the shadow fields c, $\bar{c}$, $\bar{\mu}$ and μ reduces to the implementation of their equations of motion. Since the Q transformations depends on c and μ, the effective Q symmetry then depends on a non-local operator, namely, on the inverse of the Faddeev–Popov operator. Although perturbation theory cannot be safely controlled in presence of a symmetry implying non-local operators, it is interesting to discuss this resulting effective supersymmetry.

The classical equations of motion of the shadow fields are :

$$\begin{aligned} d_A^\dagger d\bar{c} &\approx J + ... & \qquad d_A^\dagger d\bar{\mu} &\approx K + ... \\ c &\approx G\big(d^\dagger \delta^{Susy} A + \bar{J}\big) & \qquad \mu &\approx s\ G d^\dagger \delta^{Susy} A + G\bar{K}, \end{aligned} \tag{A.264}$$

where the dots ... stand for terms depending on the external sources of the Q and $s\,Q$ transformations of the fields. The effective action Σ^{eff} is obtained by substituting the solution of the equations of motion for c, $\bar{c}$, $\bar{\mu}$ and μ in the action $(\Sigma + \int(Jc + \bar{J}\bar{c} + K\mu + \bar{K}\bar{\mu}))$. Upon setting the sources $\bar{J}$ and $\bar{K}$ to zero, the resulting effective action Σ^{eff} turns out to be the ordinary Faddeev–Popov action in the Landau gauge, with the addition of external sources coupled to non-local operators. In particular, this amounts to replace c by the non local expression $G d^\dagger \delta^{Susy} A$, and μ by $s\ G d^\dagger \delta^{Susy} A$. For this effective action, the external sources J, K, $c^{(Q)}$ and $\mu^{(Q)}$ have to be regarded as sources for the non local operator $G d^\dagger \delta^{Susy} A$ and its variations under s, Q and $s\,Q$, respectively.

The corresponding Slavnov–Taylor identities inherit this non-locality, and become quite complicated. However, one can compute the 1PI generating functional Γ^{eff} associated to the classical action Σ^{eff} in the framework of local quantum field theory. Let us consider at first the 1PI generating functional Γ computed from the local classical action Σ including the shadow fields. Then, we eliminate the external shadow fields by Legendre transformation, substituting to them their solutions c^*, μ^*, $\bar{c}^*$ and μ^* of the equations :[23]

$$\begin{aligned} \frac{\delta^R \Gamma}{\delta c} &= -J & \qquad \frac{\delta^R \Gamma}{\delta \mu} &= -K \\ \frac{\delta^R \Gamma}{\delta \bar{c}} &= 0 & \qquad \frac{\delta^R \Gamma}{\delta \bar{\mu}} &= 0 \end{aligned} \tag{A.265}$$

[23] These equations are solvable as power series in $\hbar$ since the classical equations of motions are solvable.

These solutions are non-local functionals of the sources J and K, and of other fields. The Legendre transformation,

$$\Gamma^{\text{eff}}[J,K] \equiv \Gamma[c^*,\mu^*,\bar{c}^*,\bar{\mu}^*] + \int \big(Jc^* + K\mu^*\big) \tag{A.266}$$

defines the 1PI generating functional Γ^{eff} associated to Σ^{eff}. In this way, we obtain well defined Slavnov–Taylor identities, which formally take into account the insertions of the non local operator $Gd^\dagger\delta^{Susy}A$ and its transformations.

After elimination of the shadow fields, for $\alpha = 0$, one has :

$$Q\varphi^a = \delta^{Susy}\varphi^a - \delta^{\text{gauge}}(Gd^\dagger\delta^{Susy}A)\varphi^a \tag{A.267}$$

This is the combination of an ordinary supersymmetry transformation and a gauge transformation with a field dependent fermionic parameter. This parameter involves the non-local inverse Faddeev–Popov operator.

This effective Q transformation provides a representation of supersymmetry on the physical fields, since one has :

$$Q^2 = \mathcal{L}_\kappa + \delta^{\text{gauge}}(Gd^\dagger\mathcal{L}_\kappa A) \tag{A.268}$$

For the gauge field, we have :

$$QA = (1 - d_AGd^\dagger)\,\delta^{Susy}A \tag{A.269}$$

One notices that $1 - d_AGd^\dagger$ is a projector, since $(1 - d_AGd^\dagger)^2 = 1 - d_AGd^\dagger$. Moreover, one has :

$$d^\dagger(1 - d_AGd^\dagger) = 0 \tag{A.270}$$

Therefore, after the elimination of the shadow fields, Q can be regarded as a representation of supersymmetry which is compatible with the Landau gauge condition

$$d^\dagger A = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d^\dagger(A + QA) = 0 \tag{A.271}$$

Furthermore, one has :

$$Q\Omega = -Gd^\dagger[\Omega, \delta^{Susy}A - d_AGd^\dagger\delta^{Susy}A] \qquad Q\bar{\Omega} = 0 \qquad Qb = 0 \tag{A.272}$$

so one can check that $Qd^\dagger d_A\Omega = 0$. These remarks indicate that the Faddeev–Popov determinant admits a supersymmetry in the absence of the shadow fields, that is :

$$Q\ \det\big[\,d^\dagger d_A\,\big]\ \delta\,[\,d^\dagger A\,] = 0 \tag{A.273}$$

However, the non-locality of this symmetry makes it of no practical use for controlling the quantum theory. In contrast, by keeping the local dependence on the shadow fields, one can safely use the conventional tools of local quantum field theory.

A.4.5 Supersymmetric anomalies

The standard method to discuss the renormalizability of the theory to all orders of perturbation theory is as follows. One assumes that the renormalized generating functional Γ_n has been computed at a given order n, in such a way that it satisfies the Slavnov–Taylor identities for the s and Q symmetry and the antighost (and possibly ghost) Ward identities. Then, one checks if one can proceed to the next order, with the same conclusion. By definition, this recursive procedure holds true if there are no obstructions, i.e. if anomalies are absent. In the present case, since a manifest invariant regularization framework does not exist, one must check the absence of anomalies, defined as cohomological non trivial solutions of the consistency conditions of linearized operators $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$, $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$, $\overline{L\mathcal{G}_\bullet}$ and $L\mathcal{G}^\bullet$, for ensuring that we can define the supersymmetric theory with all necessary Ward identities order by order in perturbation theory, through the introduction of suitable compensating local non invariant counterterms [45]. It is thus essential to classify the possible solutions of the consistency conditions of the linearized Slavnov–Taylor operators that we have constructed, within our class of renormalisable gauges.

The supersymmetric transformation δ^{Susy} is nilpotent on the set $\mathscr{O}_{\text{inv}}$ of gauge-invariant functionals of physical fields φ^a and supersymmetric parameters. We can consider its restriction to this set of functionals. This permits us to introduce a differential complex, $\mathscr{O}^*_{\text{inv}}(\delta^{Susy})$, which is graded by the shadow number. We shall show that the question of finding the possible anomalies for the Ward identities $\mathcal{S}_{(s)}$, $\mathcal{S}_{(Q)}$, $\overline{\mathcal{G}_\bullet}$ and $\mathcal{G}^\bullet$ is closely linked to that of finding the cohomology $\mathcal{H}^*$ of $\mathscr{O}^*_{\text{inv}}(\delta^{Susy})$.

We will find that the possible anomalies are either elements with shadow number one in $\mathcal{H}^1$, or pairs built from the $(1,0)$ Adler–Bardeen anomaly and a $(0,1)$ supersymmetric counterpart. In fact, the latter possibility only occurs provided we are in a theory where the following local functional :

$$\mathcal{I} = \int \text{Tr}\,\left(F_\wedge \delta^{Susy} A_\wedge \delta^{Susy} A + \omega(\varphi) F_\wedge F\right) \tag{A.274}$$

is such that $\mathcal{I} = \delta^{Susy}(\dots)$, that is, vanishes in $\mathcal{H}^2$.

We must proceed by steps. First, we will show that the eventual anomalies of the antighost equations can be removed without spoiling the Slavnov–Taylor identities. Then, we will be able to restrict to the search of solutions of the ordinary BRST invariance consistency conditions, the unique solution of which is the Adler–Bardeen anomaly. Afterward, we will classify the solutions of the rest of the consistency conditions associated to supersymmetry, which must be consistent with the BRST invariance. Finally, we will check that there are no solutions corresponding to the ghost operators which satisfy all the consistency conditions.

Absence of anomalies associated to the antighost operators

To demonstrate that there are no anomalies associated with the antighost operators, it is convenient to assemble the linearized operators (but the ghost ones) into the following nilpotent differential operator δ :

$$\delta \equiv \alpha^{(s)} \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} + \alpha^{(Q)} \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} + \overline{L\mathcal{G}}[X] + \overline{L\mathcal{G}_{(s)}}[X^{(s)}] + \overline{L\mathcal{G}_{(Q)}}[X^{(Q)}] + \overline{L\mathcal{G}_{(Qs)}}[X^{(Qs)}] + \sigma \quad \text{(A.275)}$$

$\alpha^{(s)}$ and $\alpha^{(Q)}$ are commuting scalars, X and $X^{(Qs)}$ are anticommuting Lie algebra valued functions and $X^{(s)}$ and $X^{(Q)}$, commuting ones. The differential operator σ has been introduced in order that :

$$\delta^2 = (\alpha^{(Q)})^2 \ \mathcal{P}_\kappa \quad \text{(A.276)}$$

so that δ is nilpotent, when acting on functionals. The operator σ gives zero on all quantities, but the functions $X^\bullet$, with :

$$\begin{aligned} \sigma X &= \alpha^{(Q)} \mathcal{L}_\kappa X^{(Q)} & \sigma X^{(s)} &= -\alpha^{(s)} X - \alpha^{(Q)} \mathcal{L}_\kappa X^{(Qs)} \\ \sigma X^{(Qs)} &= -\alpha^{(Q)} X^{(s)} - \alpha^{(s)} X^{(Q)} & \sigma X^{(Q)} &= \alpha^{(Q)} X \end{aligned} \quad \text{(A.277)}$$

To show that there are no anomalies for the ghost operators, one can use a standard and general method [103]. It suffices to exhibit that δ admits a trivializing homotopy k, such that the anticommutator of k and δ determines the following counting operator

$$\begin{aligned} \{\delta, k\} &= e^{\int \mathrm{Tr}\ \left(-d\bar\Omega \star \frac{\delta^L}{\delta A^{(s)}} + d\bar c \star \frac{\delta^L}{\delta A^{(Q)}} + d\bar\mu \star \frac{\delta^L}{\delta A^{(Qs)}}\right)} N e^{-\int \mathrm{Tr}\ \left(-d\bar\Omega \star \frac{\delta^L}{\delta A^{(s)}} + d\bar c \star \frac{\delta^L}{\delta A^{(Q)}} + d\bar\mu \star \frac{\delta^L}{\delta A^{(Qs)}}\right)} \\ N &\equiv \int \mathrm{Tr}\ \left(b \frac{\delta^L}{\delta b} + \bar\Omega \frac{\delta^L}{\delta \bar\Omega} + \bar c \frac{\delta^L}{\delta \bar c} + \bar\mu \frac{\delta^L}{\delta \bar\mu} + X \frac{\delta^L}{\delta X} + X^{(s)} \frac{\delta^L}{\delta X^{(s)}} + X^{(Q)} \frac{\delta^L}{\delta X^{(Q)}} + X^{(Qs)} \frac{\delta^L}{\delta X^{(Qs)}} \right) \end{aligned} \quad \text{(A.278)}$$

This trivializing homotopy is simply :

$$k \equiv \int \mathrm{Tr}\ \left(b \frac{\delta^L}{\delta X} + \bar\Omega \frac{\delta^L}{\delta X^{(s)}} + \bar c \frac{\delta^L}{\delta X^{(Q)}} + \bar\mu \frac{\delta^L}{\delta X^{(Qs)}} \right) \quad \text{(A.279)}$$

Therefore, we can always remove the anomalies of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ and $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ in a way which preserves the antighost symmetries.

Cohomology of the BRST operator $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$

We then compute the cohomology of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ alone. This operator can be split in two parts

$$\mathcal{S}_{(s)|\Sigma} = \Sigma_{(s)} + \varsigma \tag{A.280}$$

where $\Sigma_{(s)}$ is the operator which acts on any functional $\mathscr{F}$ of the fields trough the following antibracket

$$\Sigma_{(s)}\mathscr{F} = \big(\Sigma, \mathscr{F}\big)_{(s)} \equiv \int \Big(\frac{\delta^R \Sigma}{\delta \varphi^a} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi_a^{(s)}} - \frac{\delta^R \Sigma}{\delta \varphi_a^{(s)}} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi^a} + \mathrm{Tr}\ \frac{\delta^R \Sigma}{\delta \Omega} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(s)}} - \mathrm{Tr}\ \frac{\delta^R \Sigma}{\delta \Omega^{(s)}} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega} \Big) \tag{A.281}$$

and ς is the Σ independent part of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$. One then finds that ς admits a trivializing homotopy $k^{(s)}$ defined by

$$k^{(s)} \equiv \int (-1)^a \varphi_a^{(Qs)} \frac{\delta^L}{\delta \varphi^{(Q)}} + \int \mathrm{Tr}\ \Big(-\Omega^{(Qs)} \frac{\delta^L}{\delta \Omega^{(Q)}} - \mu^{(Q)} \frac{\delta^L}{\delta c^{(Q)}} + c \frac{\delta^L}{\delta \mu} + \bar{\Omega} \frac{\delta^L}{\delta b} + \bar{\mu} \frac{\delta^L}{\delta \bar{c}} \Big) \tag{A.282}$$

The anticommutator of $k^{(s)}$ with ς is the counting operator M for all fields but the physical ones, the ghost Ω and their sources for the BRST symmetry s. One can construct perturbatively a functional V, such that, the differential operator $V_{(s)} \equiv \big(V, \cdot\big)_{(s)}$ satisfies

$$e^{-V_{(s)}} \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} e^{V_{(s)}} = \Sigma^0_{(s)} + \varsigma \tag{A.283}$$

Here, Σ^0 is the part of Σ which is annihilated by M and $k^{(s)}$. This uses the "Maurer–Cartan" equation (see appendix B.4) :

$$\varsigma^2 = 0 \qquad \varsigma\, \Sigma + \frac{1}{2} \big(\Sigma, \Sigma\big)_{(s)} = 0 \tag{A.284}$$

Eq.(A.283) implies that the cohomology of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ is isomorphic to that of $\Sigma^0_{(s)} + \varsigma$. The latter is itself isomorphic to the cohomology of $\Sigma^0_{(s)}$ on the set of fields made by the physical fields, the ghost Ω and the sources for their s transformations. This cohomology turns out to be the Adler–Bardeen anomaly $\mathscr{A}$ in the case of a semi-simple gauge group [102].

Supersymmetric anomalies consistent with BRST invariance

As announced, we now show that there are two possibilities for the consistent anomalies of the Ward identities. Either one has a supersymmetric term associated to the Adler-Bardeen anomaly, or one has a pure supersymmetric anomaly.

Possibility for the "supersymmetric" Adler–Bardeen anomaly

Consider the Adler–Bardeen anomaly $\mathscr{A}$. To make it consistent with the operator $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$, we need an integrated local functional $\mathscr{B}$, possibly depending on all fields and sources, with ghost number 0, shadow number one and canonical dimension $\frac{9}{2}$. $\mathscr{B}$ must verify the consistency conditions

$$\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\mathscr{B} + \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathscr{A} = 0 \qquad \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathscr{B} = 0 \tag{A.285}$$

To look for possible solutions, we use the horizontality condition Eq.(A.239) and its Bianchi identity, which express the s and Q transformation laws. One has :

$$\tilde{F} \equiv (d + s + Q - i_\kappa)\big(A + \Omega + c\big) + \big(A + \Omega + c\big)^2 = F + \delta^{Susy}A + \omega(\varphi) \tag{A.286}$$

The extended curvature defined by the latter equation permits one to use the formal five-dimensional Chern–Simon identity

$$\text{Tr } \tilde{F}^3 = \tilde{d}\,\text{Tr }\big(\tilde{A}\tilde{F}^2 - \frac{1}{2}\tilde{A}^3\tilde{F} + \frac{1}{10}\tilde{A}^5\big) \tag{A.287}$$

to determine both the Adler–Bardeen anomaly and its supersymmetric counter part. The term with ghost and shadow numbers $(2,0)$ shows that the Adler–Bardeen anomaly satisfies the consistency condition for s :

$$\mathscr{A} \equiv \int \text{Tr } d\Omega\big(AdA + \frac{1}{2}A^3\big) \qquad s\mathscr{A} = 0 \tag{A.288}$$

The term with ghost and shadow numbers $(1,1)$ gives a solution for the consistency condition

$$s\mathscr{B}^{\text{c}} + Q\mathscr{A} = 0 \tag{A.289}$$

It is defined by

$$\mathscr{B}^{\text{c}} \equiv \text{Tr }\Big(dc\big(AdA + \frac{1}{2}A^3\big) + \big([A,F] - \frac{1}{2}A^3\big)\delta^{Susy}A\Big) \tag{A.290}$$

The term with ghost and shadow numbers $(0,2)$ gives the breaking of the consistency condition $Q\mathscr{B} = 0$ for this solution. Indeed, one gets :

$$Q\mathscr{B}^{\text{c}} = 3\int \text{Tr }\big(F_\wedge\delta^{Susy}A_\wedge\delta^{Susy}A + \omega(\varphi)F_\wedge F\big) \tag{A.291}$$

To obtain a consistent $\mathscr{B}$, we must add a $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$-closed term $\mathscr{B}^{\text{inv}}$ to $\mathscr{B}^{\text{c}}$, in order to have a $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$-closed functional $\mathscr{B}$, which preserves Eq. (A.289). Since $Q\mathscr{B}^{\text{c}}$ is not $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$-exact,

$\mathscr{B}^{\text{inv}}$ must be in the cohomology of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$. Therefore $\mathscr{B}^{\text{inv}}$ is a gauge-invariant functional on the physical fields. Because the transformation $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ acts as δ^{Susy} on gauge-invariant functionals, we obtain the following result. A functional $\mathscr{B}$, which satisfies the consistency equations (A.285), where $\mathscr{A}$ is the Adler–Bardeen anomaly, exists, if and only if, there is a gauge-invariant local functional $\mathscr{B}^{\text{inv}}$, for which the following equation holds

$$\delta^{Susy}\mathscr{B}^{\text{inv}} = -3\int \text{Tr}\,\big(F_{\wedge}\delta^{Susy}A_{\wedge}\delta^{Susy}A + \omega(\varphi)F_{\wedge}F\big) \tag{A.292}$$

For the case $\mathcal{N} = 2,\, 4$, the right hand side in the last equation can be identified as a cohomology class of the operator δ^{Susy}. It can be associated to Donaldson–Witten invariants [A.5]. This gives an algebraic proof of the absence of Adler–Bardeen anomaly in extended supersymmetry. This feature is usually attributed to the fact that there are no chiral fermions in such theories.

For the case $\mathcal{N} = 1$, one can construct the following antecedent :[24]

$$\delta^{Susy}\frac{1}{4}\text{Tr}\,\big(\bar{\epsilon}\gamma^{\mu}\lambda\big)\big(\overline{\lambda}\gamma_5\gamma_{\mu}\lambda\big) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\text{Tr}\,F_{\mu\nu}\big(\bar{\epsilon}\gamma_{\sigma}\lambda\big)\big(\bar{\epsilon}\gamma_{\rho}\lambda\big) \tag{A.295}$$

Thus, gauge anomalies can exist in this case. They can be detected as gauge anomalies and as anomalies in the supersymmetry Noether current.

Purely supersymmetric anomalies

Since the Adler–Bardeen is the only possible anomaly for the $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ operator, other potential anomalies for $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ must be in the kernel of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$. In other word, we may have a term $\mathscr{C}^{(0,1)}$, with

$$\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\mathscr{C} = 0 \qquad \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathscr{C} = 0 \tag{A.296}$$

As a result of [102], any element of the kernel of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ of ghost number zero can be decomposed into a gauge-invariant functional in the physical fields and a $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$-exact term. Thus, one computes the cohomology of $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ in the image of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$. Any such

[24] For $\mathcal{N} = 1$ in Minkowski space time

$$\delta^{Susy}A_{\mu} = -i\big(\bar{\epsilon}\gamma_{\mu}\lambda\big) \qquad \delta^{Susy}\lambda = \big(\not{F} + \gamma_5 H\big)\epsilon \qquad \delta^{Susy}H = i\big(\bar{\epsilon}\gamma_5\not{D}\lambda\big) \tag{A.293}$$

with

$$(\delta^{Susy})^2 = i\big(\bar{\epsilon}\gamma^{\mu}\epsilon\big)\big(\partial_{\mu} + \delta^{\text{gauge}}(A_{\mu})\big) \tag{A.294}$$

element must be of the following form

$$\mathscr{C}^{\rm im} = \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} \int \Big(\big\langle \bar\Omega,\, \ell^{(0,1)}_{\frac52} \big\rangle + \big\langle \bar\mu, \ell^{(0,2)}_{3} \big\rangle + \big\langle \varphi^{(s)}_a , f^{(0,1)}_{[a]+\frac12}{}^a \big\rangle + \big\langle \varphi^{(Qs)}_a , g^{(0,2)}_{[a]+1}{}^a \big\rangle + \big\langle \Omega^{(s)} , f^{(1,1)}_{\frac12} \big\rangle + \big\langle \Omega^{(Qs)} , g^{(1,2)}_{1} \big\rangle + \big\langle \Omega^{(Q)} , h^{(0,2)}_{1} \big\rangle + \big\langle \mu^{(Q)} , h^{(0,3)}_{\frac32} \big\rangle \Big) \tag{A.297}$$

Here $\ell^{(g,s)}_d$, $f^{(g,s)}_d$, $g^{(g,s)}_d$ and $h^{(g,s)}_d$ are local functions of the fields, where the sub-index d is the canonical dimension. The explicit form of $\mathscr{C}^{\rm im}$ is

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^{\rm im} = \int \Big(&\big\langle b, \ell^{(0,1)}_{\frac52} \big\rangle - \big\langle \bar\Omega, \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\, \ell^{(0,1)}_{\frac52} \big\rangle + \big\langle \bar c, \ell^{(0,2)}_{3} \big\rangle + \big\langle \bar\mu, \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\, \ell^{(0,2)}_{3} \big\rangle \\ &+ \big\langle \frac{\delta^R\Sigma}{\delta\varphi^a} , f^{(0,1)}_{[a]+\frac12}{}^a \big\rangle + (-1)^a \big\langle \varphi^{(Q)}_a , g^{(0,2)}_{[a]+1}{}^a \big\rangle - (-1)^a \big\langle \varphi^{(s)}_a , \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} f^{(0,1)}_{[a]+\frac12}{}^a \big\rangle + (-1)^a \big\langle \varphi^{(Qs)}_a , \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\, g^{(0,2)}_{[a]+1}{}^a \big\rangle \\ &+ \big\langle \frac{\delta^R\Sigma}{\delta\Omega} , f^{(1,1)}_{\frac12} \big\rangle - \big\langle \Omega^{(Q)} , g^{(1,2)}_{1} - \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\, h^{(0,2)}_{1} \big\rangle + \big\langle \Omega^{(s)} , \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} f^{(1,1)}_{\frac12} \big\rangle - \big\langle \Omega^{(Qs)} , \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\, g^{(1,2)}_{1} \big\rangle \\ &- \big\langle c^{(Q)} , h^{(0,3)}_{\frac32} \big\rangle - \big\langle \mu^{(Q)} , \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\, h^{(0,3)}_{\frac32} \big\rangle \Big)\end{aligned} \tag{A.298}$$

The consistency conditions imply that :

$$\overline{\mathcal{G}}_{\bullet}\mathscr{C}^{\rm im} = 0 \tag{A.299}$$

Thus :

$$\ell^{(0,1)}_{\frac52} = \ell^{(0,2)}_{3} = 0 \tag{A.300}$$

On the other hand, the condition $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\mathscr{C}^{\rm im} = 0$ yields at zero-th order in the sources :

$$\int \Big(\big\langle \frac{\delta^L\Sigma}{\delta\varphi^a} , \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} f^{(0,1)}_{[a]+\frac12}{}^a + g^{(0,2)}_{[a]+1}{}^a \big\rangle + \big\langle \frac{\delta^L\Sigma}{\delta\Omega} , \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} f^{(1,1)}_{\frac12} + g^{(1,2)}_{1} - \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\, h^{(0,2)}_{1} \big\rangle + \big\langle \frac{\delta^L\Sigma}{\delta c} , h^{(0,3)}_{\frac32} \big\rangle - \big\langle \frac{\delta^L\Sigma}{\delta\mu} , \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\, h^{(0,3)}_{\frac32} \big\rangle \Big) = \mathcal{O}(\varphi^\bullet) \tag{A.301}$$

This equation is solved, either when each term vanishes, or when the action Σ admits an accidental symmetry, with ghost and shadow numbers $(0,2)$, and canonical dimension one, which only acts on the physical fields, Ω, c and μ. It is reasonable to assume that this latter possibility never arises. Therefore, one must have :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} f^{(0,1)}_{[a]+\frac12}{}^a + g^{(0,2)}_{[a]+1}{}^a &= C^{(0,2)}_{[a]+[b]-3}{}^{ab} \frac{\delta^R\Sigma}{\delta\varphi^b} + \mathcal{O}(\varphi^\bullet) \\ \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} f^{(1,1)}_{\frac12} + g^{(1,2)}_{1} - \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} h^{(0,2)}_{1} &= \mathcal{O}(\varphi^\bullet) \\ h^{(0,3)}_{\frac32} &= \mathcal{O}(\varphi^\bullet) \end{aligned} \tag{A.302}$$

This property tells us that $\mathscr{C}^{\rm im}$ is trivial at zeroth order in the sources $\varphi^\bullet$, that is :

$$\mathscr{C}^{\rm im} = \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\int\Big(-(-1)^a\big\langle\varphi_a^{(Qs)},f_{[a]+\frac{1}{2}}^{(0,1)\ a}\big\rangle + \big\langle\Omega^{(Qs)},f_{\frac{1}{2}}^{(1,1)}\big\rangle\Big) + \mathcal{O}(\varphi^\bullet) \tag{A.303}$$

Due to the power counting, only the functions $f_{[a]+\frac{1}{2}}^{(0,1)\ a}$ and $g_{[a]+1}^{(0,2)\ a}$ can depend on the external sources. Moreover, this dependence must be linear. One can then compute that $\mathscr{C}^{\rm im}$ must be trivial at all order in the sources, extending the equations (A.301,A.302). We thus obtain the desired result that the cohomology of $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ in the image of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ is empty.

We have thus shown that, the possible purely supersymmetric anomalies $\mathscr{C}$ are the elements of $\mathcal{H}^1$ with canonical dimension four. In fact, $\mathcal{H}^1$ depends on the given supersymmetric theory. As a direct consequence of results in [101], $\mathcal{H}^1 = \{0\}$ in $\mathcal{N} = 2$ super Yang–Mills. Preliminary computations show that there are no supersymmetric anomalies in $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills, in agreement with [61].

To summarize, anomalies for the linearized operators $\overline{L\mathcal{G}_\bullet}$, $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ and $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ must be, either an element of $\mathcal{H}^1$, or the Adler–Bardeen anomaly $\mathscr{A}$, provided that a corresponding counterpart $\mathscr{B}$ exists.

Solutions of the consistency conditions associated to the ghost operators

In the Landau gauge, there are additional symmetries, expressed by the ghost operators $\mathcal{G}^\bullet$, whose homogeneous parts are the differential operators $L\mathcal{G}^\bullet$. This gauge has many advantages, but one must check that there is no anomaly for the operators $L\mathcal{G}^\bullet$. From the previous computation, one can check that the possible anomalies for $\overline{L\mathcal{G}_\bullet}$, $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ and $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ are left invariant by the four operators $L\mathcal{G}^\bullet$'s. Therefore, the computation of possible anomalies of the ghost operators reduces to a relatively simple system of consistency equations. Moreover, because the operators $L\mathcal{G}^\bullet$ decrease the ghost and shadow numbers, their anomalies $\Delta^\bullet$ must depend on the anti-ghosts, the anti-shadows, and the sources, which have large canonical dimensions. By inspection, one finds that the consistency conditions of $\Delta^\bullet$ have no local solutions with the required canonical dimension.

Therefore, one can use the ghost Ward identities of the Landau gauge, and the anomaly problem is the same in this gauge as for all other values of α. The advantage of the Landau gauge, is that it simplifies the proof of the stability of the action. Most importantly, it is a preferred gauge for demonstrating non-renormalization theorems [45, 104].

A.4.6 General local solution of the Slavnov–Taylor identities

In this section we assume that the anomalies mentioned in the last section do not exist in the supersymmetric theory we are dealing with, or at least that these anomalies do not arise in perturbation theory. For $\mathcal{N}=2,4$ no anomaly can arise, but for $\mathcal{N}=1$, the consistency conditions may have solutions, and the coupled hypermultiplet must be carefully chosen.

To prove the stability of the action, i.e. to show that the ambiguities related to the local invariant counterterms, which can be freely added at each order of perturbation theory, do not exceed the number of parameters of the classical starting action, we must compute the most general integrated local polynomial, with ghost and shadow numbers $(0,0)$ and canonical dimension four, which satisfies all Ward identities. We will work in the Landau gauge, $\alpha=0$.

Because of the ghost equations and power counting, the source dependence of the action must be linear, but for possible quadratic terms in the $\varphi_a^{(Q)}$. However, since the Slavnov–Taylor identities mix the different sources ($\varphi_a^{(Q)}$, $\varphi_a^{(s)}$ and $\varphi_a^{(Qs)}$), such quadratic terms must be absent. Therefore, the most general solution $\Sigma^{\mathcal{R}}$ of the Slavnov–Taylor identities must have a linear dependence on all sources. It can be written as follows :

$$\Sigma^{\mathcal{R}} = S^{\mathcal{R}}[\varphi^a,\Omega,\bar{\Omega},c,\bar{c},b,\bar{\mu},\mu] + \int (-1)^a \Big(\varphi_a^{(s)}\Delta^a_{(s)} + \varphi^{(Q)}\Delta^a_{(Q)} + \varphi^{(Qs)}\Delta^a_{(Qs)}\Big)$$
$$+ \int \mathrm{Tr}\,\Big(-\Omega^{(s)}\Delta_{(s)} - \Omega^{(Q)}\Delta_{(Q)} - \Omega^{(Qs)}\Delta_{(Qs)} + \mu^{(Q)}\Lambda_{(Qs)} - c^{(Q)}\Lambda_{(Q)}\Big) \quad \text{(A.304)}$$

Here, the $\Delta_\bullet$'s are local polynomials in the quantum fields, which can be used to define differential operators $s^{\mathcal{R}}$ and $Q^{\mathcal{R}}$.

$$\begin{gathered}
\Delta^a_{(s)} = s^{\mathcal{R}}\varphi^a \qquad \Delta^a_{(Q)} = Q^{\mathcal{R}}\varphi^a \\
\Delta^a_{(Qs)} = s^{\mathcal{R}}Q^{\mathcal{R}}\varphi^a \\
\Delta_{(s)} = s^{\mathcal{R}}\Omega \qquad \Delta_{(Q)} = Q^{\mathcal{R}}\Omega \\
\Delta_{(Qs)} = s^{\mathcal{R}}Q^{\mathcal{R}}\Omega \\
\Lambda_{(Qs)} = Q^{\mathcal{R}}\mu \qquad \Lambda_{(Q)} = Q^{\mathcal{R}}c
\end{gathered} \quad \text{(A.305)}$$

The Slavnov–Taylor identities imply that $S^{\mathcal{R}}$ must be invariant under the action of $s^{\mathcal{R}}$ and $Q^{\mathcal{R}}$, and that these latter must verify

$$\begin{gathered}
s^{\mathcal{R}2} = 0 \qquad Q^{\mathcal{R}2} = \mathcal{L}_\kappa \\
\{s^{\mathcal{R}}, Q^{\mathcal{R}}\} = 0
\end{gathered} \quad \text{(A.306)}$$

$s^{\mathcal{R}}$ and $Q^{\mathcal{R}}$ acts as s and Q when these ones act linearly. Modulo a rescaling of ghosts and shadows Ω, μ and c as well as of the structure constants of the gauge group, it turns out that the operators $s^{\mathcal{R}}$ and $Q^{\mathcal{R}}$ must have the same form of s and Q. Thus, the gauge symmetry can only be renormalized multiplicatively, and supersymmetric transformations must be renormalized in the most general possible way, which is compatible with power counting and their closure on a renormalized gauge transformation.

$$\delta^{Susy}{}_{\mathcal{R}}{}^2 = \delta^{\text{gauge}}(\omega^{\mathcal{R}}(\varphi) + i_\kappa A) + \mathcal{L}_\kappa \tag{A.307}$$

Then, the renormalized action decomposes into a part belonging to the cohomology of $s^{\mathcal{R}}$ and into a $s^{\mathcal{R}}$-exact part. Because $s^{\mathcal{R}}$ and s are identical modulo rescalings of ghosts and the coupling constant, the former term is a gauge invariant local functional which depends only on the fields φ^a. It must also be invariant under the renormalized supersymmetry. Since the transformations are the same on the fields of negative ghost number, the $s^{\mathcal{R}}$-exact part must be $Q^{\mathcal{R}}$-exact in order to be $Q^{\mathcal{R}}$ invariant. The antighost equations then fix this part to be the one of the classical action

$$s^{\mathcal{R}} Q^{\mathcal{R}} \int \text{Tr}\ \bar{\mu} d \star A \tag{A.308}$$

To go further in determining $\omega^{\mathcal{R}}(\varphi)$, one must look at the details of the particular supersymmetric theory. Therefore, the conclusion is that in a supersymmetric theory with a supersymmetric algebra which closes off-shell, and which has no anomaly, the action is stable under radiative corrections if and only if, the most general supersymmetric algebra defined on the set of fields from Eq. (A.307), can be related to the standard one by linear redefinitions of the fields. In fact, this is the case in all super Yang–Mills theories.

A.4.7 Interpolating gauges

In this section, we discuss the extension of the Slavnov–Taylor identity associated to supersymmetry to an arbitrary value of the gauge parameter ζ. As already mentioned, this is achieved by introducing an anticommuting parameter z which allows one to vary the gauge parameter ζ, while maintaining the desired Slavnov–Taylor identity.

The anticommuting parameter z is such that $Qz = \zeta$, $Q\zeta = 0$, and $s\zeta = 0$, $s z = 0$. For $\zeta \neq 0$, one has a non-vanishing Q-variation of the gauge-fixing term. Using the gauge-fixing term eq.(A.252), one has, however, an extended Slavnov–Taylor identity :

$$\mathcal{S}_{(Q)}{}'(\Sigma') \equiv \mathcal{S}_{(Q)}(\Sigma') + \zeta \frac{\partial \Sigma}{\partial z} = 0 \tag{A.309}$$

The antighost Ward identities can also be extended to a generic value of the gauge parameters ζ and z. In the present case, these Ward identities generalize to

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{G}}(\mathscr{F}) &\equiv \int \mathrm{Tr}\ X\Big(\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta b} - d\star A + \alpha\star b - zd\star\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta A^{(Q)}} + zd\star dc\Big)\\
\overline{\mathcal{G}_{(s)}}(\mathscr{F}) &\equiv \int \mathrm{Tr}\ X\Big(\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta\bar\Omega} + d\star\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta A^{(s)}} + zd\star\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta A^{(Q_s)}} + zd\star d\mu\Big)\\
\overline{\mathcal{G}_{(Q)}}(\mathscr{F}) &\equiv \int \mathrm{Tr}\ X\Big(\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta\bar c} - (1-\zeta)d\star\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta A^{(Q)}} - \zeta d\star dc - \alpha\star\mathcal{L}_\kappa\bar c + zd\star d\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta c^{(Q)}} + z\mathcal{L}_\kappa d\star A\Big)\\
\overline{\mathcal{G}_{(Q_s)}}(\mathscr{F}) &\equiv \int \mathrm{Tr}\ X\Big(\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta\bar\mu} + (1-\zeta)d\star\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta A^{(Q_s)}} - \zeta d\star d\mu - zd\star d\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta\mu^{(Q)}} - z\mathcal{L}_\kappa d\star\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta A^{(s)}}\Big)
\end{aligned} \tag{A.310}$$

The consistency conditions for the operators $\mathcal{S}_{(s)}$, $\mathcal{S}_{(Q)}$ and $\overline{\mathcal{G}_\bullet}$ remain the same. For the classification of anomalies, one can repeat the same arguments as previously, with $\zeta\neq 0$. The only change is that, the translation operator :

$$e^{\int \mathrm{Tr}\ \left(-d\bar\Omega\star\frac{\delta^L}{\delta A^{(s)}} + d\bar c\star\frac{\delta^L}{\delta A^{(Q)}} + d\bar\mu\star\frac{\delta^L}{\delta A^{(Q_s)}}\right)} \tag{A.311}$$

which appears in (A.278), must be modified to

$$e^{\int \mathrm{Tr}\ \left(-d\bar\Omega\star\frac{\delta^L}{\delta A^{(s)}} + ((1-\zeta)d\bar c + zdb)\star\frac{\delta^L}{\delta A^{(Q)}} + ((1-\zeta)d\bar\mu - zd\bar\Omega)\star\frac{\delta^L}{\delta A^{(Q_s)}} - zd\star d\bar c\frac{\delta^L}{\delta c^{(Q)}} - zd\star d\bar\mu\frac{\delta^L}{\delta\mu^{(Q)}}\right)} \tag{A.312}$$

When checking the stability of the action, one still finds that the gauge-fixing action $s\boldsymbol{\Psi}$, which depends on the parameters ζ and z, is stable. However, we have not been able to derive ghosts Ward identities and prove that the action depends linearly in the sources, even in the Landau gauge. As a matter of fact, more computations are needed, to obtain the stability of the whole action, including the sources.

However, ghost Ward identities are in fact not necessary to remove ambiguities. What matters is that the supersymmetric gauge, $\zeta=0$, can be analytically linked to the other gauges $\zeta\neq 0$, and, in particular, to the ordinary Faddeev–Popov gauge-fixing. As we have just seen, one can extend all the required Ward identities necessary to define the theory in the interpolating gauge. The Green functions of quantities which are left invariant by the operators $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ are independent from the parameter ζ and z. The supersymmetric gauge $\zeta=0,\ z=0$ gives the simplest gauge for explicit computations and check the Slavnov–Taylor identities at each order in perturbation theory. For $\zeta\neq 0$, one must keep the $\zeta,\ z$ dependence, in order to control supersymmetric covariance.

A.4.8 An example : the case of $\mathcal{N}=2$ super-Yang–Mills

In order to illustrate our general formalism, let us consider the example of $\mathcal{N}=2$ super-Yang–Mills in Euclidean space. In this case the supersymmetry algebra closes off-shell with the introduction of an auxiliary field H^i in the adjoint representation of the $SU(2)$ R-symmetry group. The theory contains a gauge field A, a $SU(2)$-Majorana fermion λ (we do not write the R-symmetry index), one scalar ϕ and one pseudo-scalar ϕ^5. The classical action is

$$\int d^4x \mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}H_iH^i+\frac{1}{2}D_\mu\phi^5\,D^\mu\phi^5-\frac{1}{2}D_\mu\phi\,D^\mu\phi-\frac{i}{2}\big(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\big)$$
$$\frac{1}{2}[\phi^5,\phi]^2+\frac{1}{2}\big(\overline{\lambda}\gamma_5[\phi^5,\lambda]\big)-\frac{1}{2}\big(\overline{\lambda}[\phi,\lambda]\big)\Big) \tag{A.313}$$

and the supersymmetric algebra is :

$$\begin{aligned}
\delta^{Susy}A_\mu &= -i\big(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda\big)\\
\delta^{Susy}\phi^5 &= -\big(\bar{\epsilon}\gamma_5\lambda\big) \qquad \delta^{Susy}\phi=-\big(\bar{\epsilon}\lambda\big)\\
\delta^{Susy}\lambda &= \not{F}\epsilon+\gamma_5[\phi^5,\phi]\epsilon-i\big(\gamma_5\not{D}\phi^5+\not{D}\phi\big)\epsilon+H_i\tau^i\epsilon\\
\delta^{Susy}H^i &= \Big(\bar{\epsilon}\tau^i\big(-i\not{D}\lambda+\gamma_5[\phi^5,\lambda]-[\phi,\lambda]\big)\Big)
\end{aligned} \tag{A.314}$$

It closes as follows

$$(\delta^{Susy})^2=\delta^{\mathrm{gauge}}\big((\bar{\epsilon}[\gamma_5\phi^5-\phi]\epsilon)-i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)A_\mu\big)-i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)\partial_\mu \tag{A.315}$$

The supersymmetric gauge fixing-term is :

$$-\,s\,Q\int d^4x\mathrm{Tr}\;\bar{\mu}\big(\partial^\mu A_\mu+\frac{\alpha}{2}b\big)=$$
$$\int d^4x\mathrm{Tr}\;\Big(-b\partial^\mu A_\mu-\frac{\alpha}{2}b^2+\bar{\Omega}\partial^\mu D_\mu\Omega-\bar{c}\partial^\mu D_\mu c-\bar{\mu}\partial^\mu D_\mu\mu$$
$$-\,i\frac{\alpha}{2}(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)\bar{c}\partial_\mu\bar{c}+i\bar{c}(\bar{\epsilon}\,\not{\partial}\lambda)+\partial_\mu\bar{\mu}\big([D^\mu\Omega,c]+i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu[\Omega,\lambda])\big)\Big) \tag{A.316}$$

We notice that this gauge-fixing term gives propagators between the shadow and the fermion fields, which depends on the supersymmetric parameters, as follows :

$$\langle c\;\lambda\rangle_0=-\frac{\epsilon}{p^2} \qquad \langle c\;c\rangle_0=(1-\alpha)\frac{(\bar{\epsilon}\not{p}\epsilon)}{(p^2)^2} \tag{A.317}$$

We checked that, no infra-red problem , which cannot be cured, is implied by the apparently infra-red dangerous propagator $\langle c\ c\rangle_0$. The dependence on the supersymmetric parameters ϵ of the propagators has no physical consequences for the observables, since the latter can be considered as gauge parameters. Their appearance in the propagators can be handled as that of the parameter α in the gauge propagator :

$$\langle A_\mu\ A_\nu\rangle_0 = -\frac{\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2} \tag{A.318}$$

A.4.9 Conclusion

An important component of this paper is the introduction of a new sector in super-Yang–Mills theories, namely that of shadow fields. It defines new gauge-fixing terms that depend on a more general family of gauge parameters. Some of them can be identified as the "constant ghosts" for supersymmetry transformations. The preserved BRST symmetry allows one to define supersymmetric covariant and gauge-invariant observables. Moreover, the Slavnov–Taylor identities imply that the correlation functions of the observables do not depend on these parameters. The ordinary Faddeev–Popov gauge-fixing, which is not supersymmetric, is obtained for a given choice of these parameters. Other choices give an explicitly supersymmetric gauge-fixing. This provides a proof that supersymmetry and gauge invariance of physical observables can be safely maintained, even in the simplest non-supersymmetric gauges.

A.5 Finitude de super-Yang–Mills $\mathcal{N} = 4$

L. Baulieu, G. Bossard et S. P. Sorella,

« Finiteness properties of the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory in supersymmetric gauge »

Nucl. Phys. B **753**, 252 (2006), `hep-th/0605164`.

Nous apportons dans cette publication la première preuve cohérente et exhaustive de l'annulation de la fonction β dans la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique, sans supposer l'existence d'un régulateur qui préserve à la fois l'invariance de jauge et la supersymétrie. Une première version de cette preuve, publiée par un des auteurs, confondait le rôle des opérateurs de Slavnov–Taylor associés respectivement à l'invariance BRST et à la supersymétrie. Cette preuve émettait en particulier l'hypothèse que l'insertion de l'action dans la fonctionnelle génératrice des diagrammes une particule irréductibles définit un élément non trivial de la cohomologie de l'opérateur linéarisé de Slavnov–Taylor associé à la supersymétrie

$$\Big[\int \mathcal{L}_4^0 \cdot \Gamma\Big] \neq \mathcal{S}_{(Q)|\Gamma}\big[\Psi \cdot \Gamma\big] \tag{A.319}$$

Cette dernière propriété qui semble naturelle, en tant qu'extension de la propriété classique de non trivialité de l'action dans le complexe des fonctionnelles dépendant analytiquement des paramètres de supersymétrie, n'est cependant pas nécessairement vraie. Admettons qu'on écrive ces équations pour la fonctionnelle génératrice connexe et qu'on fixe à zéro toutes les sources qui ne sont pas couplées à des opérateurs $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ invariants dans l'action, de manière à annuler le terme de droite. Alors la $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ exactitude de la densité lagrangienne dans le complexe des fonctions des champs, séries de Laurent des paramètres de supersymétrie, implique que le terme de gauche est également nul. La bonne définition de la preuve fait, en fait, intervenir l'équation

$$\Big[\int \mathcal{L}_4^0 \cdot \Gamma\Big] \neq \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\big[\Psi \cdot \Gamma\big] \tag{A.320}$$

que l'on peut démontrer en considérant des fonctions de corrélation non triviales entre la densité lagrangienne et des opérateurs composites invariants de jauge.

Afin d'établir correctement la preuve de finitude, nous établissons la renormalisabilité de la théorie maximalement supersymétrique dans sa formulation tordue à la Vafa–Witten, avec six ou neuf charges de supersymétrie admettant une représentation fonctionnelle locale sur les champs [A.3]. L'action est stable avec seulement six charges de supersymétrie, et on peut démontrer que l'invariance par rapport à ces six charges interdit l'apparition d'une anomalie triviale pour les trois autre charges en involution. Les identités de Slavnov–Taylor associées à six charges de supersymétrie sont ainsi suffisamment contraignantes pour fixer les ambiguïtés associées à l'invariance par rapport aux neuf charges de supersymétrie qui admettent une représentation fonctionnelle locale.

On montre dans cette publication, qu'on peut obtenir de manière cohérente des propriétés des opérateurs invariants de jauge en les contractant avec des paramètres de supersymétrie apparaissant dans la fixation de jauge. On est ainsi en mesure de montrer l'annulation de la dimension anormale des opérateurs un-demi BPS primaires, en démontrant qu'on peut les construire en développant des opérateurs dépendant de cinq paramètres de supersymétrie en fonction de ces derniers.

$$\mathrm{Tr}\,\left(\varpi^2\Phi + \varpi\omega L + \varpi\upsilon_I h^I + (\omega^2 + \upsilon_I\upsilon^I)\bar{\Phi}\right)^n \;\sim\; \mathrm{Tr}\,\phi^i\phi^j\phi^k\cdots\phi^l \tag{A.321}$$

L'annulation de leur dimension anormale découle de leur Q exactitude via la formule de Chern–Simons, qui permet de contraindre celle-ci en fonction de la dimension anormale d'opérateurs composites qui font intervenir l'ombre. Ces derniers s'avèrent être protégés par les identités de Ward fantômes dans la jauge de Landau. Le fait d'établir ce résultat sur les multiplets complets de $SU(4)$ est d'importance, puisque la formulation tordue n'interdit pas en principe une procédure de renormalisation des opérateurs composites qui brise cette invariance.

La preuve de l'annulation de la fonction β est ensuite proprement établie. En démontrant l'existence de seulement deux cocycles étendus non triviaux solutions des équations de descentes

$$\left(d + \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} + \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} - \varpi i_\varepsilon\right)\mathcal{L} = 0 \tag{A.322}$$

on est en mesure de montrer que la dimension anormale de la densité lagrangienne ne peut être non nulle (modulo une renormalisation $(d+\mathcal{S}_{(s)|\Sigma})$-exacte) si celle des opérateurs un-demi BPS primaires de dimension 2 est zéro. La construction de ces cocycles est significativement simplifiée en se restreignant à six générateurs permettant de déterminer l'action de manière unique [A.2]. Ce résultat permet de démontrer que toutes les contributions de la fonction β sont proportionnelles à la fonction β à une boucle, dont l'annulation est un fait établi.

On apporte ainsi des preuves rigoureuses, indépendantes du schéma de régularisation, de l'annulation de la fonction β et de la dimension anormale des opérateurs un-demi BPS à tous les ordres de la théorie des perturbations. Ceci conforte la conjecture que l'invariance par rapport à la supersymétrie maximale implique l'invariance de la théorie par rapport à l'ensemble des générateurs de l'algèbre superconforme $\mathfrak{psu}(2,2|4)$.

Finiteness properties of the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory in supersymmetric gauge

abstract

With the introduction of shadow fields, we demonstrate the renormalizability of the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory in component formalism, independently of the choice of UV regularization. Remarkably, by using twisted representations, one finds that the structure of the theory and its renormalization is determined by a subalgebra of supersymmetry that closes off-shell. Starting from this subalgebra of symmetry, we prove some features of the superconformal invariance of the theory. We give a new algebraic proof of the cancellation of the β function and we show the ultraviolet finiteness of the 1/2 BPS operators at all orders in perturbation theory. In fact, using the shadow field as a connexion form, the invariant polynomials in the scalar fields in traceless symmetric representations of the internal R-symmetry group are simply related to characteristic classes. Their UV finiteness is a consequence of the Chern–Simons formula.

A.5.1 Introduction

In a recent paper, new fields have been introduced for supersymmetric gauge theories, which we called shadow fields. These fields are elements of BRST doublets. They determine a BRST like operator for the supersymmetry invariance, which is fully compatible with the gauge symmetry [A.4]. Shadow fields also allow for the construction of new classes of gauges that interpolate between the usual Faddeev–Popov gauges and new ones, which are explicitly supersymmetric. These gauges give an additional Slavnov–Taylor identity, for controlling supersymmetry at the quantum level. The observables are determined from the cohomology of the BRST operator for gauge invariance, and their supersymmetry covariance can be established from the new Slavnov–Taylor identity.

It has been conjectured for many years that the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory is a superconformal theory. Its β function vanishes at all orders in perturbation theory [105, 106, 61]. The superconformal invariance is a basic feature of the AdS/CFT Maldacena's conjecture [107]. In this paper we use the new supersymmetric gauges to directly prove in perturbation theory some of the results that are implied by the conformal invariance of the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory, with the only symmetry hypothesis of super Poincaré supersymmetry.

In [A.4], the renormalization of supersymmetric theories, using shadow fields, was detailed when the supersymmetry algebra closes off-shell, that is, for cases where auxiliary fields exist for closing the whole supersymmetry algebra. In the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory, no such auxiliary fields exist. Here, we will bypass this point by combining the methodology of [A.4] and the existence of a supersymmetry subalgebra with 9 generators, which is large enough to constrain the classical $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills action, and small enough to be closed without the use of equations of motion. This subalgebra was introduced in [A.1,A.2], using methods that are specific to topological field theory and involve twisted variables.

The Slavnov–Taylor identities that are allowed by the introduction of the shadow fields enable us to prove the renormalizability of the $\mathcal{N} = 4$ theory, without any assumption on the choice of the ultraviolet regularization. In this paper, we show the absence of a possible anomaly for the $\mathcal{N} = 4$ theory. Algebraic methods have been used to show that invariant polynomials depending on one of the scalar fields of the supersymmetry multiplet are protected from renormalization [69]. We will extend this result to the whole set of local observables of the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory, which are invariant polynomials in scalar fields, taking their values in any given traceless symmetric representation of the R-symmetry group. These operators are the 1/2 BPS primary operators. We then obtain the finiteness of the whole 1/2 BPS multiplets, by supersymmetry covariance. We will give a new proof of the cancellation of the β function at all orders in perturbation theory. Remarkably, all these results are obtained by using small sectors of the supersymmetry algebra. The latter exist, thanks to the possibility of twisting the supersymmetry algebra, by combining the R-symmetry and the Lorentz symmetry. In order to prove the stability of the action under renormalization, it is in fact sufficient to use a sector of the supersymmetry algebra with 6 generators. And, to prove that all 1/2 BPS primary operators are protected operators, one uses a sector of the supersymmetry algebra with 5 generators. A key feature of this proof is the Chern–Simons formula, where the shadow field can be identified as a Maurer–Cartan form. It appears that the scalar observables of topological field theories determine the 1/2 BPS primary operators by covariance under the R-symmetry of the supersymmetric theory. In fact, their finiteness property is closely related to the existence of characteristic classes.

We will suppose everywhere that the gauge group is simple.

A.5.2 Twisted $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills

Fields and symmetries

Consider the $\mathcal{N} = 4$ multiplet $(A, \lambda^\alpha, \phi^i)$ in a flat euclidean space $Spin(4) \cong SU(2)_+ \times SU(2)_-$, where α, i are indices in the **4** and the **6** of the internal symmetry $SL(2, \mathbb{H})$, which is the euclidean version of the $SU(4)$ R-symmetry in Minkowski space. The components of spinor and scalar fields λ^α and ϕ^i can be twisted, i.e., decomposed on irreducible representations of the following subgroup[25]

$$SU(2)_+ \times \text{diag}\big(SU(2)_- \times SU(2)_R\big) \times U(1) \subset SU(2)_+ \times SU(2)_- \times SL(2, \mathbb{H}) \quad \text{(A.323)}$$

We redefine $SU(2) \cong \text{diag}\big(SU(2)_- \times SU(2)_R\big)$. The $\mathcal{N} = 4$ multiplet is decomposed as follows

$$(A_\mu, \Psi_\mu, \eta, \chi^I, \Phi, \bar\Phi) \qquad (L, h_I, \bar\Psi_\mu, \bar\eta, \bar\chi_I) \quad \text{(A.324)}$$

In this equation, the vector index μ is a "twisted world index", which stands for the $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ representation of $SU(2)_+ \times SU(2)$. The index I is for the adjoint representation of the diagonal $SU(2)$. In fact, any given field X^I can be identified as a twisted antiselfdual 2-form $X_{\mu\nu^-}$, by using the flat hyperKähler structure $J^I_{\mu\nu}$.

The twisted "matter" multiplet $(L, h_I, \bar\Psi_\mu, \bar\eta, \bar\chi_I)$ involves therefore four scalars, which are now assembled as a scalar L and an antiselfdual 2-form h_I. For the sake of clarity, we will shortly display a table with the representations of the twisted fields under the various symmetries, as well as their commutation properties.

The ten-dimensional super-Yang–Mills theory determines by dimensional reduction the untwisted $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory. Analogously, the twisted eight-dimensional $\mathcal{N} = 2$ theory determines the twisted formulation of the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory in four dimensions [16]. An horizontality conditions is given in [A.1], which determines the maximal supersymmetry subalgebra of the twisted $\mathcal{N} = 2,\ d = 8$ theory, which can be closed without the equations of motion. We will consider this horizontality condition with minor modifications, which are convenient for perturbation theory. It defines the BRST operator s associated to gauge invariance and the graded differential operator Q, which generates the maximal off-shell closed supersymmetry subalgebra. The latter

[25] Usually, one means by twist a redefinition of the energy momentum tensor that we do not consider here.

depends on nine twisted supersymmetry parameters, which are one scalar ϖ and one eight-dimensional vector ε. s and Q are thus obtained by expanding over all possible gradings the following horizontality condition

$$(d + s + Q - \varpi i_\varepsilon)\big(A + \Omega + c\big) + \big(A + \Omega + c\big)^2 \\ = F + \varpi\Psi + g(\varepsilon)\eta + i_\varepsilon\chi + \varpi^2\Phi + |\varepsilon|^2\bar{\Phi} \tag{A.325}$$

and its associated Bianchi relation

$$(d + s + Q - \varpi i_\varepsilon)\big(F + \varpi\Psi + g(\varepsilon)\eta + i_\varepsilon\chi + \varpi^2\Phi + |\varepsilon|^2\bar{\Phi}\big) \\ + [A + \Omega + c\,,\, F + \varpi\Psi + g(\varepsilon)\eta + i_\varepsilon\chi + \varpi^2\Phi + |\varepsilon|^2\bar{\Phi}] = 0 \tag{A.326}$$

Ω is the Faddeev–Popov ghost, while c is the shadow field [A.4]. The action of Q on the physical fields decomposes as a gauge transformation with parameter c and a supersymmetry transformation δ^{Susy}, as follows

$$Q = \delta^{Susy} - \delta^{\text{gauge}}(c) \tag{A.327}$$

By dimensional reduction of these formula one obtains the maximal subalgebra of the $\mathcal{N} = 4$ supersymmetry algebra which can be closed off-shell [A.2]. By dimensional reduction in four dimensions, the eight components of the vector ε decomposes into one scalar ω, one antiselfdual 2-form written as an $SU(2)$ triplet υ_I and one four-dimensional vector ε^μ. The corresponding supersymmetry algebra is

$$\begin{aligned}
\delta^{Susy} A &= \varpi\Psi + \omega\bar{\Psi} + g(\varepsilon)\eta + g(J_I\varepsilon)\chi^I + \upsilon_I J^I(\bar{\Psi}) \\
\delta^{Susy}\Psi &= -\varpi d_A\Phi - \omega\big(d_A L + T\big) + i_\varepsilon F + g(J_I\varepsilon)H^I + g(\varepsilon)[\Phi, \bar{\Phi}] - \upsilon_I\big(d_A h^I + J^I(T)\big) \\
\delta^{Susy}\Phi &= -\omega\bar{\eta} + i_\varepsilon\Psi - \upsilon_I\bar{\chi}^I \\
\delta^{Susy}\bar{\Phi} &= \varpi\eta \\
\delta^{Susy}\eta &= \varpi[\Phi, \bar{\Phi}] - \omega[\bar{\Phi}, L] + \mathscr{L}_\varepsilon\bar{\Phi} - \upsilon_I[\bar{\Phi}, h^I] \\
\delta^{Susy}\chi^I &= \varpi H^I + \omega[\bar{\Phi}, h^I] + \mathscr{L}_{J^I\varepsilon}\bar{\Phi} - \upsilon_I[\bar{\Phi}, L] + \varepsilon^I{}_{JK}\upsilon^J[\bar{\Phi}, h^K] \\
\delta^{Susy} H^I &= \varpi[\Phi, \chi^I] + \omega\big([L, \chi^I] - [\eta, h^I] - [\bar{\Phi}, \bar{\chi}^I]\big) - \mathscr{L}_{J^I\varepsilon}\eta - [\bar{\Phi}, i_{J^I\varepsilon}\Psi] + \mathscr{L}_\varepsilon\chi^I \\
&\quad + \upsilon_J[h^J, \chi^I] + \upsilon^I\big([\eta, L] + [\bar{\Phi}, \bar{\eta}]\big) - \varepsilon^I{}_{JK}\upsilon^J\big([\eta, h^K] + [\bar{\Phi}, \bar{\chi}^K]\big) \\
\delta^{Susy} L &= \varpi\bar{\eta} - \omega\eta + i_\varepsilon\bar{\Psi} - \upsilon_I\chi^I \\
\delta^{Susy}\bar{\eta} &= \varpi[\Phi, L] + \omega[\Phi, \bar{\Phi}] + \mathscr{L}_\varepsilon L + i_\varepsilon T + \upsilon_I\big(H^I + [h^I, L]\big) \\
\delta^{Susy}\bar{\Psi} &= \varpi T - \omega d_A\bar{\Phi} - g(\varepsilon)[\bar{\Phi}, L] + g(J_I\varepsilon)[\bar{\Phi}, h^I] + \upsilon_I J^I(d_A\bar{\Phi}) \\
\delta^{Susy} T &= \varpi[\Phi, \bar{\Psi}] + \omega\big(-d_A\eta - [\bar{\Phi}, \Psi] + [L, \bar{\Psi}]\big) - g(\varepsilon)\big([\eta, L] + [\bar{\Phi}, \bar{\eta}]\big) \\
&\quad + g(J_I\varepsilon)\big([\eta, h^I] + [\bar{\Phi}, \bar{\chi}^I]\big) + \mathscr{L}_\varepsilon\bar{\Psi} + \upsilon_I\big([h^I, \bar{\Psi}] + J^I(d_A\eta + [\bar{\Phi}, \bar{\Psi}])\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta^{Susy} h^I &= \varpi\bar\chi^I + \omega\chi^I - i_{J^I\varepsilon}\bar\Psi - \upsilon^I\eta - \varepsilon^I{}_{JK}\upsilon^J\chi^K \\
\delta^{Susy}\bar\chi^I &= \varpi[\Phi, h^I] + \omega\big([L, h^I] - H^I\big) + \mathscr{L}_\varepsilon h^I - i_{J^I\varepsilon}T + \upsilon^I[\Phi,\bar\Phi] + \upsilon_J[h^J, h^I] + \varepsilon^I{}_{JK}\upsilon^J H^K
\end{aligned} \tag{A.328}$$

Notice the presence of auxiliary fields H_I and T_μ, for a total of $7 = 3+4$ degrees of freedom. They have been introduced to lift some degeneracy when solving the horizontality condition, while ensuring that the supersymmetry algebra closes, according to

$$(\delta^{Susy})^2 = \delta^{\text{gauge}}(\omega(\varphi) + \varpi i_\varepsilon A) + \varpi\mathcal{L}_\varepsilon \tag{A.329}$$

with

$$\omega(\varphi) \equiv \varpi^2\Phi + \varpi\omega L + \varpi\upsilon_I h^I + (\omega^2 + \upsilon_I\upsilon^I + |\varepsilon|^2)\bar\Phi \tag{A.330}$$

As explained in [A.4], the field dependent gauge transformation that appears in the commutator of two supersymmetries (A.329) justifies the introduction of the shadow field c, with the following Q transformation

$$Qc = \omega(\varphi) + \varpi i_\varepsilon A - c^2 \tag{A.331}$$

When all parameters, but ϖ, vanish, $\omega(\varphi)$ can be identified as a topological ghost of ghost.

The s transformations of physical fields are their gauge transformations with parameter Ω.

In order to solve the degeneracy in the horizontality condition $s\,c + Q\Omega + [c,\Omega] = 0$, one introduces the field μ, with

$$\begin{aligned}
&s\,\Omega = -\Omega^2 \qquad && Q\Omega = -\mu - [c,\Omega] \\
&s\,c = \mu && \\
&s\,\mu = 0 && Q\mu = -\big[\omega(\varphi),\Omega\big] - \varpi\mathscr{L}_\varepsilon\Omega - [c,\mu]
\end{aligned} \tag{A.332}$$

As explained in [A.4], the use of c and Ω allows one to disentangle the gauge symmetry and supersymmetry in the gauge-fixing process. In fact, antighosts and antishadows must be introduced, in order to concretely perform a gauge-fixing, which we will choose to be Q-invariant. The new fields come as a BRST quartet, and their transformation laws are as follows :

$$\begin{array}{llll}
s\,\bar\mu = \bar c & s\,\bar c = 0 & s\,\bar\Omega = b & s\,b = 0 \\
Q\bar\mu = \bar\Omega & Q\bar c = -b & Q\bar\Omega = \varpi\mathcal{L}_\varepsilon\bar\mu & Qb = -\varpi\mathcal{L}_\varepsilon\bar c
\end{array} \tag{A.333}$$

On all the fields of the theory one has $(d + s + Q - \varpi i_\varepsilon)^2 = 0$, that is :

$$
\begin{aligned}
s^2 = 0 \qquad Q^2 = \varpi \mathcal{L}_\varepsilon \\
\{ s , Q\} = 0
\end{aligned}
\tag{A.334}
$$

Q depends on 9 parameters. We see that if we restrict to the subalgebra with five parameters, by taking $\varepsilon = 0$, we have $Q^2 = 0$. This observation will be shortly used.

The grading of the fields is determined from the assignments of the Faddeev–Popov ghost number and the shadow number [A.4]. The other quantum numbers are those for the global symmetry $SU(2)_+ \times SU(2) \times U(1)$. Together with δ^{Susy}, the latter invariance gives rise to a well-defined graded subalgebra of the whole $\mathcal{N} = 4$ symmetry, which is big enough to completely determine the $\mathcal{N} = 4$ action [A.2]. As we will see shortly, the Ward identities associated to the invariance under this subalgebra also determine the theory at the quantum level, in such a way that one recovers eventually the whole symmetry of the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory, including its $Spin(4) \times SL(2, \mathbb{H})$ R-symmetry, after untwisting. All relevant quantum numbers are summarized in the following tables

	A	h_I	Ψ	η	χ_I	$\bar\Psi$	$\bar\eta$	$\bar\chi_I$	Φ	L	$\bar\Phi$	H_I	T
canonical dimension	1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	1	1	2	2
$U(1)$	0	0	1	-1	-1	-1	1	1	2	0	-2	0	0
$SU(2)_+$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
$SU(2)$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$
commutation property	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$

Table I : Quantum numbers of physical fields (with ghost and shadow number zero)

	Ω	$\bar\Omega$	b	$\bar\mu$	$\bar c$	c	μ	ϖ	ω	ε	υ_I	χ	$\chi^{(s)}$	$\chi^{(Q)}$	$\chi^{(Qs)}$
canonical dimension	0	2	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	d	$4-d$	$\frac{7}{2}-d$	$\frac{7}{2}-d$
ghost number	1	-1	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	g	$-1-g$	$-g$	$-1-g$
shadow number	0	0	0	-1	-1	1	1	1	1	1	1	s	$-s$	$-1-s$	$-1-s$
$U(1)$	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	1	u	$-u$	$-u$	$-u$
$SU(2)_+$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	j_+	j_+	j_+	j_+
$SU(2)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	j	j	j	j
commutation property	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\pm$	$\mp$	$\mp$	$\pm$

Table II : Quantum numbers of ghosts, shadows and sources for s, Q, sQ transformations where χ stands for any field of the theory.

Classical action and gauge-fixing

The classical action S is defined as a gauge-invariant local functional in the physical fields, which has canonical dimension four, is invariant under the global symmetry $SU(2)_+ \times SU(2) \times U(1)$ and under the Q symmetry with its nine supersymmetry generators. The corresponding lagrangian density is any given linear combination of

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^0_4 \equiv \mathrm{Tr}\ \Big(\frac{1}{2}F_\wedge F + H_I J^I \star F - \star H_I H^I + \varepsilon_{IJK} \star H^I[h^J, h^K] + \star H_I[L, h^I] + T \star T \\ + T \star d_A L + J_I \star T d_A h^I + d_A\Phi \star d_A\bar\Phi + \chi_I J^I \star d_A\Psi + \Psi \star d_A\eta - \bar\chi_I J^I \star d_A\bar\Psi - \bar\Psi \star d_A\bar\eta \\ + \star\eta[\Phi, \eta] + \Psi[\bar\phi, \star\Psi] + \star\chi_I[\Phi, \chi^I] + \star\bar\eta[\bar\Phi, \bar\eta] + \bar\Psi[\Phi, \star\bar\Psi] + \star\bar\chi_I[\bar\Phi, \bar\chi^I] \\ - \star\eta[L, \bar\eta] - \Psi[L, \star\bar\Psi] - \star\chi_I[L, \bar\chi^I] - \star\eta[h_I, \bar\chi^I] + \star\bar\eta[h_I, \chi^I] \\ + J_I \star \Psi[h^I, \bar\Psi] - \star\varepsilon_{IJK}\chi^I[h^J, \bar\chi^K] - \star[\Phi, \bar\Phi]^2 - \star[\Phi, h_I][\bar\Phi, h^I] - \star[\Phi, L][\bar\Phi, L]\Big)\end{aligned} \tag{A.335}$$

and the of topological term

$$Ch^0_4 \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ F_\wedge F \tag{A.336}$$

Here, we are only interested in the sector of zero instanton number $\int Ch^0_4 = 0$, in such a way that

$$S = \frac{1}{g^2}\int \mathcal{L}^0_4 \tag{A.337}$$

The only physical parameter of the theory is thus the coupling constant g. Modulo the elimination of the auxiliary fields H and T, and the addition of a topological term, $\mathcal{L}^0_4$ can be identified as the untwisted $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric lagrangian.

One can check that the action S is in fact invariant under the sixteen generators of supersymmetry. Remarkably, we found that it is already completely determined by the δ^{Susy} invariance, when the supersymmetry generators are reduced to the six ones associated to ϖ, ω and ε [A.2].

As shown in [A.4], the introduction of the trivial BRST quartet $(\bar\mu, \bar c, \bar\Omega, b)$ allows a renormalisable supersymmetric (i.e. Q invariant) gauge-fixing $s\boldsymbol{\Psi}$ for S, where $\boldsymbol{\Psi}$ is a Q-exact gauge fermion that depends on the shadow fields and on the supersymmetry parameters

$$\boldsymbol{\Psi} = Q\int \mathrm{Tr}\ \bar\mu(d \star A - \alpha b) \tag{A.338}$$

Here, we will restrict to the shadow-Landau gauge $\alpha = 0$. More Ward identities exist in this gauge, which is stable under renormalization. They greatly simplify the renormalization problems. When $\alpha = 0$, the supersymmetric gauge-fixing action is

$$
\begin{aligned}
s\,\Psi = \int \mathrm{Tr}\,\Big(& bd\star A - \bar\Omega d\star d_A\Omega + \bar c d\star d_A c + \bar\mu d\star d_A\mu \\
& - \bar c d\star\left(\varpi\Psi + \omega\bar\Psi + g(\varepsilon)\eta + g(J_I\varepsilon)\chi^I + \upsilon_I J^I(\bar\Psi)\right) \\
& + \bar\mu d\star\left([d_A\Omega, c] + [\Omega, \varpi\Psi + \omega\bar\Psi + g(\varepsilon)\eta + g(J_I\varepsilon)\chi^I + \upsilon_I J^I(\bar\Psi)]\right)\Big)
\end{aligned} \tag{A.339}
$$

Let $\varphi^{(s)}$, $\varphi^{(Q)}$ and $\varphi^{(Qs)}$ be respectively the sources of the s, Q and $s\,Q$ transformations of the fields. The gauge-fixed complete action Σ, including the insertions of these operators, is

$$
\begin{aligned}
\Sigma = S + s\,\Psi + \sum_a \int (-1)^a & \Big(\varphi^{(s)}{}_a\, s\,\varphi^a + \varphi^{(Q)}{}_a Q\varphi^a + \varphi^{(Qs)}{}_a\, s\,Q\varphi^a\Big) \\
& + \int \mathrm{Tr}\,\Big(\Omega^{(s)}\Omega^2 - \Omega^{(Q)}Q\Omega - \Omega^{(Qs)}\, s\,Q\Omega + \mu^{(Q)}Q\mu - c^{(Q)}Qc\Big)
\end{aligned} \tag{A.340}
$$

Owing to the source dependence, the s and Q invariance can be expressed as functional identities, namely the Slavnov–Taylor identities, defined in [A.4]

$$
\mathcal{S}_{(s)}(\Sigma) = 0 \qquad \mathcal{S}_{(Q)}(\Sigma) = 0 \tag{A.341}
$$

Choosing the class of "linear gauges" (A.338), one has equations of motion for the quartet $(\bar\mu, \bar c, \bar\Omega, b)$ that imply functional identities $\overline{\mathcal{G}_\bullet}(\Sigma) = 0$, which can be used as Ward identities. Moreover, the shadow-Landau gauge allows for further functional identities, associated to the equations of motion of Ω, c and μ, $\mathcal{G}^\bullet(\Sigma) = 0$, which constitute a BRST quartet with the global gauge transformations. We refer to [A.4] for the detailed expressions of these antighost and ghost Ward identities. All Ward identities verify consistency conditions and their solutions determine a Lie algebra of linear functional operators. The linearized Slavnov–Taylor operators associated to s and Q satisfy the algebra

$$
\begin{gathered}
{\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}}^2 = 0 \qquad {\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}}^2 = \varpi\mathcal{P}_\varepsilon \\
\left\{\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}, \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\right\} = 0
\end{gathered} \tag{A.342}
$$

$\mathcal{P}_\varepsilon$ is the differential operator which acts as the Lie derivative along ε on all fields and external sources. It must be noted that the Green functions depend on the supersymmetry parameters generated by the Q-exact gauge-fixing term, but not the physical observables [A.4].

A.5.3 Renormalization of the action

The problem of the renormalization of supersymmetric theories is strongly simplified in the case where the supersymmetry algebra closes without the use of the equations of motion, provided one uses shadow fields [A.4]. To treat the renormalization of the $\mathcal{N}=4$ model, for which no set of auxiliary fields exists, we will adapt the results of [A.4], using the maximal off-shell closed Q symmetry of the $\mathcal{N}=4$ model, with nine generators. This reduces the question of the anomalies and of the stability of the theory to algebraic problems, which involve only the physical fields and the differential δ^{Susy}.

Anomalies

The possible anomalies associated to the Ward identities

$$\mathcal{S}_{(s)}(\Gamma)=0 \qquad \mathcal{S}_{(Q)}(\Gamma)=0 \qquad \overline{\mathcal{G}_\bullet}(\Gamma)=0 \qquad \mathcal{G}^\bullet(\Gamma)=0 \tag{A.343}$$

are related to the cohomology $\mathcal{H}^*=\oplus_{s\in\mathbb{N}}\mathcal{H}^s$ of the differential complex of gauge-invariant functionals in the physical fields and the supersymmetry parameters (ϖ, ω, υ_I and ε^μ) with differential δ^{Susy}. The shadow number s defines the grading of this complex. The non-trivial anomalies are either elements of $\mathcal{H}^1$ or a doublet made out of the Adler–Bardeen anomaly and of a supersymmetric counterpart, which exists if and only if the cocycle

$$\int \mathrm{Tr}\,\left(F_\wedge\delta^{Susy}A_\wedge\delta^{Susy}A+\omega(\varphi)F_\wedge F\right) \tag{A.344}$$

is δ^{Susy}-exact [A.4]. If this cocycle were δ^{Susy}-exact in the $\mathcal{N}=4$ theory, its restriction to the value ($\varpi=1, \omega=\upsilon=\varepsilon=0$) of the supersymmetry parameters would also be δ^{Susy}_1-exact. This restricted operator δ^{Susy}_1 can be identified with the equivariant form of the topological BRST operator defined in the generalized Donaldson–Witten theory associated to twisted $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills theory [A.2] and the cocycle (A.344) can be identified with the Donaldson–Witten invariant

$$\int \mathrm{Tr}\,\left(\Phi F_\wedge F+\Psi_\wedge\Psi_\wedge F\right) \tag{A.345}$$

The latter expression is a non-trivial cohomology class. Thus the consistency equations for both s and Q symmetries forbid the possibility of an Adler–Bardeen anomaly in $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills theory. In fact, one obtains an analogous result for the cases $\mathcal{N}=2,3$.

This very simple demonstration gives an algebraic proof of the absence of Adler–Bardeen anomaly in Yang–Mills theories with extended supersymmetry.

As for the absence of purely supersymmetric anomaly, one can straightforwardly compute that $\mathcal{H}^1$ is empty. Indeed, the invariance under only six supersymmetry generators is sufficient to determine the classical action [A.2]. Then, one finds that the possible elements of $\mathcal{H}^1$ associated to transformations linear in ϖ, ω, and ε must be trivial. After their elimination, power counting forbids the possibility of functionals, which are linear in the parameter υ_I and satisfy all the invariances required by the consistency conditions.

As a corollary, one finds that, when one renormalizes the theory and adjusts the 1PI generating functional at a given order of perturbation theory by adding non-invariant counter-terms, it is sufficient to consider the Slavnov–Taylor identity with the six generators. Once this is done, it is automatic that one has also restored the Slavnov–Taylor identity with nine generators.

Therefore, in the absence of a solution to the consistency conditions of the functional operators associated to the Ward identities, it is by definition possible to renormalize the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory, while maintaining all the Ward identities of the shadow-Landau gauge. The process is straightforward, and independent of the choice of the regularization.

Stability

In order to ensure that the renormalized action does not depend on more parameters than the classical lagrangian that we are starting from, one must prove its stability property. Basically, this amounts to prove that the most general local solution of the Ward identities, which can be imposed in perturbation theory, has the same form as the local gauge-fixed effective action that one starts from to define perturbation theory.

In [A.4], within the framework of our class of renormalisable gauges, we reduced the question of the stability of the action to that of finding the most general supersymmetry algebra acting on the set of physical fields of the theory. Using power counting, we checked by inspection that, for the $\mathcal{N} = 4$ theory, the solution of this problem is unique, modulo a rescaling of each physical field and modulo a redefinition of the auxiliary fields H_I and T

$$\begin{aligned} H_I^{\mathcal{R}} &= z_{10} H_I + z_{11} J_I^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + z_{12} \varepsilon_{IJK} [h^I, h^K] + z_{13} [L, h_I] \\ T_\mu^{\mathcal{R}} &= z_{20} T_\mu + z_{21} D_\mu L + z_{22} J_{I\mu}{}^{\nu} D_\nu h^I \end{aligned} \tag{A.346}$$

Here the z's are arbitrary coefficients. Such a non linear renormalizations can in fact be avoided. For this, one defines H^I and T in such way that

$$\frac{\delta^L S}{\delta H^I} = -2 \star H_I \qquad \frac{\delta^L S}{\delta T} = 2 \star T \tag{A.347}$$

The auxiliary fields then decouple and are not renormalized. This property can be checked by using Ward identities associated to the equations of motion of these auxiliary fields, which are consistent with the whole set of Ward identities of the theory. To define such Ward identities, one adds to the action sources that are tensors of rank two in the adjoint representation of the gauge group, for the local operator $c \otimes \Omega$ (where the tensor product is for the adjoint representation of the gauge group) and for its s, Q and $s\,Q$ variations.

It follows that the source independent part, $S^{\mathcal{R}} + s^{\mathcal{R}}\, \Psi^{\mathcal{R}}$, of the most general local solution of Ward identities is determined by its invariance under both renormalized symmetries $s^{\mathcal{R}}$ and $Q^{\mathcal{R}}$. The graded differential operators $s^{\mathcal{R}}$ and $Q^{\mathcal{R}}$ have the same expression as s and Q, with a mere substitution of the bare fields and the coupling constant into renormalized ones. Modulo these substitutions, $S^{\mathcal{R}}$, defined as the most general local functional of ghost and shadow number zero, power counting four, and invariant under all the global symmetries, which is invariant under $\delta^{Susy^{\mathcal{R}}}$ and belongs to the cohomology of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$, is the same as S in Eq. (A.337). In our class of gauge, the gauge-fixing term keeps the same form, due to the ghost and antighost Ward identities. One can thus write, for the most general possible local solution of Ward identities for the $\mathcal{N} = 4$ theory

$$\begin{aligned}\Sigma^{\mathcal{R}} = \frac{1}{{g_{\mathcal{R}}}^2} \int \mathcal{L}_4^{0\,\mathcal{R}} &+ s^{\mathcal{R}} Q^{\mathcal{R}} \int \mathrm{Tr}\ \bar{\mu} d \star A \\ &+ \sum_a \int (-1)^a \Big(\varphi^{(s)}{}_a\, s^{\mathcal{R}} \varphi^a + \varphi^{(Q)}{}_a Q^{\mathcal{R}} \varphi^a + \varphi^{(Qs)}{}_a\, s^{\mathcal{R}} Q^{\mathcal{R}} \varphi^a \Big) \\ + \int \mathrm{Tr}\ \Big(-\Omega^{(s)}\, s^{\mathcal{R}} \Omega &- \Omega^{(Q)} Q^{\mathcal{R}} \Omega - \Omega^{(Qs)}\, s^{\mathcal{R}} Q^{\mathcal{R}} \Omega + \mu^{(Q)} Q^{\mathcal{R}} \mu - c^{(Q)} Q^{\mathcal{R}} c \Big)\end{aligned} \tag{A.348}$$

Callan–Symanzik equation

We define m as the subtraction point. The renormalized generating functional Γ of 1PI vertices of fields and insertion of s, Q and $s\,Q$ transformations of all fields verifies by construction the Callan–Symanzik equation

$$\mathcal{C}\, \Gamma = 0 \tag{A.349}$$

With our choice of gauge, the supersymmetry parameters do not get renormalized, because of the Ward identities. Thus, in the shadow-Landau gauge, the unique parameter of the theory that can be possibly renormalized is the coupling constant g.

Because of the quantum action principle, $m\frac{\partial\Gamma}{\partial m}$ is equal to the insertion of a local operator in the 1PI generating functional satisfying all the linearized functional identities associated to the Ward identities. Using furthermore the stability property of the effective action, one obtains that the anomalous dimensions of the fields can be adjusted, order by order in perturbation theory, in such a way that the Callan–Symanzik operator takes the following form

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\,\mathscr{F} \equiv m\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial m} + \beta\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial g} + \mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}} \int \Big(\sum_a \gamma^a\, \varphi^a {\varphi^{(Q_s)}}_a + \gamma^{(A)}\,\mathrm{Tr}\;\bar{\mu}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b}\Big) \\
= m\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial m} + \beta\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial g} - \sum_a \gamma^a \int \Big(\varphi^a \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \varphi^a} - {\varphi^{(s)}}_a \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta {\varphi^{(s)}}_a} - {\varphi^{(Q)}}_a \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta {\varphi^{(Q)}}_a} - {\varphi^{(Q_s)}}_a \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta {\varphi^{(Q_s)}}_a}\Big) \\
+ \gamma^{(A)} \int \mathrm{Tr}\,\Big(\bar{\mu}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\mu}} + \bar{c}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{c}} + \bar{\Omega}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\Omega}} + b\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b}\Big)
\end{aligned} \tag{A.350}$$

Any given local operator $\mathcal{O}_A$ generally mixes under renormalization with all other operators with equal or lower canonical dimensions, except if a symmetry forbids this phenomenon.

To generate insertions of any observable $\mathcal{O}_A$ in the 1PI generating functional Γ, one couples them to external sources u^A and redefine

$$\Sigma \to \Sigma[u] = \Sigma + \sum_A \int \langle u^A, \mathcal{O}_A \rangle \tag{A.351}$$

Renormalization can only mix a finite number of local operators, because of power counting. To control renormalization, one must generically introduce new sources v^X for other operators and extend $\Sigma[u]$ into $\Sigma[u, v]$ in such a way that one can define the s and Q transformations of sources u^A and v^X so that $\Sigma[u, v]$ satisfies all the Ward identities of the theory. By doing so, the Slavnov–Taylor, ghost and antighost operators get modified by source dependent terms. Then, for any given observable with a given canonical dimension, the theory generated by $\Sigma[u, v]$ can be renormalized in such a way that it satisfies the same Ward identities as the theory generated by Σ, provided one has introduced the large enough but finite set of sources v^X and that the introduction of these new sources does not generate anomalies.

The quantum action principle implies that the Callan–Symanzik equation for the 1PI generating functional $\Gamma[u, v]$ can be written as follows

$$\mathcal{C}\,\Gamma[u, v] = \big[L[u, v] \cdot \Gamma[u, v]\big] \tag{A.352}$$

The right hand side stands for the insertion of a local functional $L[u,v]$ of canonical dimension four in $\Gamma[u,v]$. Because of the commutation property between the Callan–Symanzik operator and the functional operators associated to the Ward identities of the theory, this insertion must satisfy all the modified linearized functional identities associated to the Ward identities including the source dependence

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\big[L\cdot\Gamma\big]&=0 \qquad & \mathcal{S}_{(Q)|\Gamma}\big[L\cdot\Gamma\big]&=0\\ \overline{L\mathcal{G}_\bullet}\,\big[L\cdot\Gamma\big]&=0 \qquad & L\mathcal{G}^\bullet\,\big[L\cdot\Gamma\big]&=0 \end{aligned} \tag{A.353}$$

Therefore, the local functional L must be invariant under all the global symmetries of the theory and verify

$$\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}L=\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}L=\overline{L\mathcal{G}_\bullet}\,L=L\mathcal{G}^\bullet\,L=0 \tag{A.354}$$

where the linearized operators are assumed to contain the source dependent modifications associated to $\Sigma[u,v]$. The most general form of L thus corresponds to the most general u,v dependent invariant counterterm, solution of Ward identities [45].

A.5.4 Physical observables

Physical observables are defined as the correlation functions of gauge-invariant functionals $\mathcal{O}_A^{\text{inv}}$ of physical fields,

$$\big\langle \mathcal{O}_A^{\text{inv}}\,\mathcal{O}_B^{\text{inv}}\,\mathcal{O}_C^{\text{inv}}\cdots\big\rangle \tag{A.355}$$

They belong to the cohomology of s. Thus, they do not depend on the gauge parameters, including the supersymmetry parameters [A.4]. One can study them in the shadow-Landau gauge without loss of generality. We mentioned in section A.5.3 that the supersymmetry parameters are not renormalized in this gauge. Thus, for any set of functions of the supersymmetry parameter $f^A(\varpi,\omega,\upsilon_I,\varepsilon)$, one has

$$\Big\langle\Big(\sum_A f^A\mathcal{O}_A^{\text{inv}}\Big)\,\mathcal{O}_B^{\text{inv}}\,\mathcal{O}_C^{\text{inv}}\cdots\Big\rangle=\sum_A f^A\big\langle\mathcal{O}_A^{\text{inv}}\,\mathcal{O}_B^{\text{inv}}\,\mathcal{O}_C^{\text{inv}}\cdots\big\rangle \tag{A.356}$$

The Slavnov–Taylor identities imply that the insertion of any given gauge-invariant functional in the physical fields $\mathcal{O}_A^{\text{inv}}$ are renormalized such that

$$\big[\delta^{\mathcal{S}usy}\mathcal{O}_A^{\text{inv}}\cdot\Gamma\big]=\mathcal{S}_{(Q)|\Gamma}\big[\mathcal{O}_A^{\text{inv}}\cdot\Gamma\big] \tag{A.357}$$

This equation and the factorization property (A.356) imply that physical observables fall into supersymmetry multiplets, when they are sandwiched between physical states.

Eq. (A.356) is a useful property, since it is often convenient to introduce field functionals under the form $\mathcal{O} = \sum_A f^A \mathcal{O}_A^{\text{inv}}$. One can study the observables $\left\langle \mathcal{O}_A^{\text{inv}} \cdots \right\rangle$ through correlations functions involving the functional $\mathcal{O}$, as long as each $\mathcal{O}_A^{\text{inv}}$ is unambiguously defined by $\mathcal{O}$ at the classical level.

In the shadow-Landau gauge, it is therefore meaningful to define the physical observables as the field functionals in the cohomology of $\mathcal{s}$, including the ones with a dependence on the supersymmetry parameters. Observables are allowed to have an arbitrary positive shadow number.

A.5.5 Protected and 1/2 BPS operators

Some of the local operators of the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory are protected from renormalization. A strong definition of this property is

$$\mathcal{C}\left[\mathcal{O} \cdot \Gamma\right] = 0 \tag{A.358}$$

expressing the vanishing of the corresponding anomalous dimension, $\gamma_{\mathcal{O}} = 0$. However, the form of this equation must be slightly relaxed, since we are interested in physical operators, and their finiteness is only meaningful for their values between physical states. We thus define a protected physical operator by the request that it satisfies the previous condition, up to an unphysical $\mathcal{s}$-exact term, namely

$$\mathcal{C}\left[\mathcal{O}^{\text{inv}} \cdot \Gamma\right] = \mathcal{S}_{(\mathcal{s})|\Gamma}\left[\Upsilon^{(\mathcal{O})} \cdot \Gamma\right] \tag{A.359}$$

Here $\Upsilon^{(\mathcal{O})}$ is a local functional of ghost number -1. Its expression can be gauge-dependent.

Well-known protected local operators of the $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills theory are those belonging to BPS multiplets. In superconformal theory it is natural to classify the physical observables in irreducible superconformal multiplets. In each superconformal multiplet, there is a superconformal primary operator that is annihilated by the so-called special supersymmetry generators at the point $x^\mu = 0$. Moreover, the action of supersymmetry generators on a superconformal primary operator generates all operators of its superconformal multiplet. When at least one of the supercharges commutes with the superconformal primary operator of a superconformal multiplet, the latter is called BPS. Such irreducible multiplets are short. They play an important role in the AdS/CFT correspondence. Superconformal invariance implies that the dimension of any operators belonging to such multiplets do not receive radiative corrections.

The 1/2 BPS primary operators are the primary operators that are annihilated by half of the supersymmetry generators. They are the gauge-invariant polynomials in the scalar fields of the theory in a traceless symmetric representation of the $SO(5,1)$ R-symmetry group. In this section we will prove that all the 1/2 BPS primary operators, and thus all their descendants, are protected operators, without assuming that the theory is conformal, using only Ward identities associated to gauge and supersymmetry invariance.

In the gauge $\varepsilon = 0$ the operator Q is nilpotent. The Lie algebra valued function of the scalar fields $\omega(\varphi)$ that characterizes the field dependent gauge transformations that appear in the commutators of the supersymmetries depends in this case on five parameters,

$$\omega(\varphi) = \varpi^2 \Phi + \varpi\omega L + \varpi\upsilon_I h^I + (\omega^2 + \upsilon_I \upsilon^I)\bar{\Phi} \tag{A.360}$$

If we had considered all the supersymmetry generators, $\omega(\varphi)$ would take the form

$$\omega(\varphi)_{16} = \bigl(\bar{\epsilon}\tau^i\epsilon\bigr)\phi_i \tag{A.361}$$

where τ^i are the six-dimensional gamma matrices for the $SL(2,\mathbb{H})$ spinor representations. We have not indicated the $SL(2,\mathbb{H})$ index for the spinor ϵ. The quantity $\omega(\varphi)$ is a particular case of $\omega(\varphi)_{16}$, when ϵ satisfies, among other conditions, that $(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon) = 0$. Thus, the expansion of any invariant polynomial in $\omega(\varphi)$ in powers of the supersymmetry parameters gives operators that belong to symmetric representations of $SO(5,1)$. Moreover, because of the original ten-dimensional Fiertz identity

$$\bigl(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\Gamma_m\boldsymbol{\varepsilon}\bigr)\Gamma^m\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \tag{A.362}$$

for any given commuting Majorana–Weyl spinor $\boldsymbol{\varepsilon}$, any given $\mathcal{N} = 4$ Majorana spinor that satisfies $(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon) = 0$, is such that

$$\bigl(\bar{\epsilon}\tau^i\epsilon\bigr)\bigl(\bar{\epsilon}\tau_i\epsilon\bigr) = 0 \tag{A.363}$$

Therefore, all operators obtained from the expansion of $\omega(\varphi)$ belong to traceless symmetric representations of $SO(5,1)$.

In fact, the invariant polynomials $\mathcal{P}\bigl(\omega(\varphi)\bigr)$ give by expansion in the supersymmetry parameters the whole traceless symmetric representations of $SO(5,1)$. To obtain this result, it is sufficient to show that this expansion provides an equal number of operators than there are components in the representations. It is convenient to use a four dimensional notation, with $\beth = (0, I)$, $\upsilon^\beth \equiv (\omega, \upsilon^I)$ and $h_\beth \equiv (L, h_I)$. Call $X(n_+, n_-)$ the sum of the monomials, of degree n_+ in ϖ and n_- in $\upsilon^\beth$, which may stand in the expansion of

$\mathcal{P}\big(\omega(\varphi)\big)$. For $n_+ \geqslant n_-$, $X(n_+,n_-)$ takes the following form[26]

$$X(n_+,n_-) \propto \mathrm{sTr}\ \Phi^{\frac{n_+-n_-}{2}}\Big((v^\urcorner h_\lrcorner)^{n_-} + \sum_{p=1}^{\frac{n_-}{2}} C^p_{n_+\,n_-}(v^\urcorner h_\lrcorner)^{n_--2p}(v_\lrcorner v^\urcorner \Phi\bar\Phi)^p\Big) \tag{A.364}$$

where sTr is the symmetrized trace and $C^p_{n_+\,n_-} = \frac{n_-!(\frac{n_+-n_-}{2})!}{p!(n_--2p)!(p+\frac{n_+-n_-}{2})!}$. By defining $S^n_d = \frac{(d+n-1)!}{(d-1)!n!}$ as the dimension of the symmetric representation of rank n in $SO(d)$, $X(n_+,n_-)$ gives $S_4^{n_-}$ operators. For $n_+ < n_-$, $X(n_+,n_-)$ takes the form

$$X(n_+,n_-) \propto \mathrm{sTr}\ (v_\lrcorner v^\urcorner\bar\Phi)^{\frac{n_--n_+}{2}}\Big((v^\urcorner h_\lrcorner)^{n_+} + \sum_{p=1}^{\frac{n_+}{2}} C^p_{n_-\,n_+}(v^\urcorner h_\lrcorner)^{n_+-2p}(v_\lrcorner v^\urcorner \Phi\bar\Phi)^p\Big) \tag{A.365}$$

and gives $S_4^{n_+}$ operators. By expanding an invariant polynomial of degree n as a power series in the supersymmetry parameters, one thus obtains

$$\sum_{n_-=0}^{n} S_4^{n_-} + \sum_{n_+=0}^{n-1} S_4^{n_+} = S_4^n + 2\sum_{p=0}^{n-1} S_4^p \tag{A.366}$$

independent operators in the traceless symmetric representation of $SO(5,1)$. The traceless symmetric representation of $SO(5,1)$ of rank n is of dimension $S_6^n - S_6^{n-2}$. One can then compute by recurrence that

$$S^n_{d-2} + 2\sum_{p=0}^{n-1} S^p_{d-2} = S^n_d - S^{n-2}_d \tag{A.367}$$

One has

$$S^2_{d-2} + 2(S^0_{d-2}+S^1_{d-2}) = S^2_d - S^0_d = \frac{(d-1)(d+2)}{2} \tag{A.368}$$

and

$$\begin{aligned} S^n_{d-2} + 2\sum_{p=0}^{n-1} S^p_{d-2} - \Big(S^{n-1}_{d-2} + 2\sum_{p=0}^{n-2} S^p_{d-2}\Big) &= S^n_{d-2} + S^{n-1}_{d-2} \\ S^n_d - S^{n-2}_d - \big(S^{n-1}_d - S^{n-3}_d\big) &= \frac{(d+n-4)!}{(d-1)!n!}(2n+d-3) \end{aligned} \tag{A.369}$$

Thus, we finally have the result that any gauge invariant polynomial in the scalar fields that belongs to a traceless symmetric representations of $SO(5,1)$ can be represented by an invariant polynomial $\mathcal{P}$ in $\omega(\varphi)$.

[26] For simplicity we have written $X(n_+,n_-)$ in the simplest case where $\mathcal{P}\big(\omega(\varphi)\big) = \mathrm{Tr}\ \omega(\varphi)^{\frac{n_++n_-}{2}}$. The demonstration extends trivially to any invariant polynomials.

Since $Q^2 = 0$ with the restricted symmetry with the five parameters ω, ϖ, v^I, we can use the horizontality condition (A.5.2) and the Chern–Simons formula. It implies that, for any given invariant symmetrical polynomial $\mathcal{P}$, one has

$$\mathcal{P}\big(\omega(\varphi)\big) = Q\,\Delta\big(c, \omega(\varphi)\big) \tag{A.370}$$

with

$$\Delta\big(c, \omega(\varphi)\big) = \int_0^1 dt\, \mathcal{P}\big(c\,|\,t\omega(\varphi) + (t^2 - t)c^2\,\big) \tag{A.371}$$

where $\mathcal{P}(X) \equiv \mathcal{P}(X, X, X, \cdots)$ and

$$\mathcal{P}(Y|X) \equiv \mathcal{P}(Y, X, X, \cdots) + \mathcal{P}(X, Y, X, \cdots) + \mathcal{P}(X, X, Y, \cdots) + \cdots \tag{A.372}$$

Any given polynomial in the scalar fields belonging to a traceless symmetric representation of $SO(5,1)$ has a canonical dimension which is strictly lower than that of all other operators in the same representation, made out of other fields. Thus, by power counting, the polynomials in the scalar fields can only mix between themselves under renormalization. That is, for any homogeneous polynomial $\mathcal{P}_A$ of degree n in the traceless symmetric representation, one has

$$\mathcal{C}\big[\mathcal{P}_A\big(\omega(\varphi)\big) \cdot \Gamma\big] = \sum_B \gamma_A{}^B \big[\mathcal{P}_B\big(\omega(\varphi)\big) \cdot \Gamma\big] \tag{A.373}$$

Then, the Slavnov–Taylor identities imply

$$\mathcal{C}\big[\Delta_A\big(c, \omega(\varphi)\big) \cdot \Gamma\big] = \sum_B \gamma_A{}^B \big[\Delta_B\big(c, \omega(\varphi)\big) \cdot \Gamma\big] + \cdots \tag{A.374}$$

where the dots stand for possible $\mathcal{S}_{(Q)|\Gamma}$-invariant corrections. However, in the shadow-Landau gauge, $\Delta_A(c, \omega(\varphi))$ cannot appear in the right hand side because such term would break the ghost Ward identities. One thus gets the result that $\gamma_A{}^B = 0$

$$\mathcal{C}\big[\mathcal{P}_A\big(\omega(\varphi)\big) \cdot \Gamma\big] = 0 \tag{A.375}$$

Upon decomposition of this equation in function of the five independent supersymmetry parameters, one then gets the finiteness proof for each invariant polynomial $\mathcal{P}(\phi) \equiv \mathcal{P}(\phi^i, \phi^j, \phi^k, \cdots)$ in the traceless symmetric representation of the R-symmetry group, namely

$$\mathcal{C}\big[\mathcal{P}(\phi) \cdot \Gamma\big] = 0 \tag{A.376}$$

Having proved that all 1/2 BPS primary operators have zero anomalous dimension, the Q-symmetry implies that all the operators generated from them, by applying $\mathcal{N} = 4$

super-Poincaré generators, have also vanishing anomalous dimensions. It follows that all the operators of the 1/2 BPS multiplets are protected operators.

It is worth considering as an example the simplest case of Tr $\omega(\varphi)^2$. One has

$$
\begin{aligned}
Q\mathrm{Tr}\,\Big(\omega(\varphi)c-\frac{1}{3}c^3\Big) &= \mathrm{Tr}\,\omega(\varphi)^2 \qquad\quad s\,Q\mathrm{Tr}\,\Big(\omega(\varphi)c-\frac{1}{3}c^3\Big)=0\\
s\,\mathrm{Tr}\,\Big(\omega(\varphi)c-\frac{1}{3}c^3\Big) &= \mathrm{Tr}\,\Big(\mu\big(\omega(\varphi)-c^2\big)-[\Omega,\omega(\varphi)]c\Big)
\end{aligned}
\tag{A.377}
$$

Following [108], one couples these operators to the theory by adding source terms to the effective action Σ

$$
u\mathrm{Tr}\,\Big(\omega(\varphi)c-\frac{1}{3}c^3\Big)+u^{(s)}\mathrm{Tr}\,\Big(\mu\big(\omega(\varphi)-c^2\big)-[\Omega,\omega(\varphi)]c\Big)+u^{(Q)}\mathrm{Tr}\,\omega(\varphi)^2 \tag{A.378}
$$

This action satisfies the Slavnov–Taylor identities associated to the s and Q symmetries, provided that the sources $u^\bullet$ transform as follows

$$
\begin{aligned}
s\,u^{(Q)} &= 0 \qquad & Qu^{(Q)} &= u\\
s\,u^{(s)} &= u \qquad & Qu^{(s)} &= 0\\
s\,u\ &= 0 \qquad & Qu\ &= 0
\end{aligned}
\tag{A.379}
$$

It is easy to check by inspection that the introduction of these new sources cannot introduce any potential anomaly for the Slavnov–Taylor identities. In the shadow-Landau gauge, the ghost Ward identities remain valid, with an additional dependence in the sources $u^\bullet$ [27]

$$
\begin{aligned}
&\int\Big(\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\mu}-\Big[\bar\mu,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta b}\Big]+u^{(s)}\frac{\delta^L\Gamma}{\delta c^{(Q)}}-(-1)^a[\varphi^{(Qs)}{}_a,\varphi^a]+[\Omega^{(Qs)},\Omega]+[\mu^{(Q)},c]\Big)=0\\
&\int\Bigg(\frac{\delta^L\Gamma}{\delta c}+\Big[\bar c,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta b}\Big]-\Big[\bar\mu,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\bar\Omega}\Big]+(-1)^a\Big[\varphi^{(Qs)}{}_a,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\varphi^{(s)}{}_a}\Big]-\Big[\Omega^{(Qs)},\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\Omega^{(s)}}\Big]\\
&\qquad+u\frac{\delta^L\Gamma}{\delta c^{(Q)}}+u^{(s)}\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\mu^{(Q)}}+[\varphi^{(Q)}{}_a,\varphi^a]+[\Omega^{(Q)},\Omega]+[c^{(Q)},c]+[\mu^{(Q)},\mu]\Bigg)=0\\
&\int\Bigg(\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\Omega}-\Big[\bar\Omega,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta b}\Big]+\Big[\bar\mu,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\bar c}\Big]-\Big[c,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\mu}\Big]-(-1)^a\Big[\varphi^{(Qs)}{}_a,\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\varphi^{(Q)}{}_a}\Big]\\
&\qquad+\Big[\Omega^{(Qs)},\frac{\delta^L\Gamma}{\delta\Omega^{(Q)}}\Big]+\Big[\mu^{(Q)},\frac{\delta^L\Gamma}{\delta c^{(Q)}}\Big]+[\varphi^{(s)}{}_a,\varphi^a]+[\Omega^{(s)},\Omega]\Bigg)=0
\end{aligned}
\tag{A.380}
$$

[27] For invariant polynomials $\mathcal{P}$ of rank higher than 2, one has to introduce further sources in order to restore the ghost Ward identities [69]. But we can always carry out this with a finite number of such sources.

The most general $u^\bullet$ dependent counter term which satisfies both Slavnov–Taylor identities is

$$u^{(Q)}\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\Delta^{(0,3)}_{[\frac{3}{2}]} + u\Delta^{(0,3)}_{[\frac{3}{2}]} + u^{(s)}\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\Delta^{(0,3)}_{[\frac{3}{2}]} \tag{A.381}$$

where $\Delta^{(0,3)}_{[\frac{3}{2}]}$ must be a local functional of ghost and shadow number $(0,3)$, canonical dimension $\frac{3}{2}$, which verifies

$$\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\Delta^{(0,3)}_{[\frac{3}{2}]} = 0 \tag{A.382}$$

$\Delta^{(0,3)}_{[\frac{3}{2}]}$ is also a scalar under the action of the symmetry group $SU(2)_+ \times SU(2) \times U(1)$.

These constraints imply that $\Delta^{(0,3)}_{[\frac{3}{2}]}$ is proportional to $\mathrm{Tr}\,\big(\omega(\varphi)c - \frac{1}{3}c^3\big)$. Thus the three insertions that we have introduced can only be multiplicatively renormalized, having the same anomalous dimension. Moreover, the ghost Ward identities forbid the introduction of any invariant counter term including the shadow field c, if it is not trough a derivative term dc or particular combinations of c and the other fields that do not appear in the insertion $\mathrm{Tr}\,\big(\omega(\varphi)c - \frac{1}{3}c^3\big)$. This gives the result that

$$\mathcal{C}\,\big[\mathrm{Tr}\;\omega(\varphi)^2\,\cdot\Gamma\big] = 0 \tag{A.383}$$

Finally, owing to the factorization property we obtain that all the 20 operators that constitute the traceless symmetric tensor representation of rank two in $SO(5,1)$ are protected operators

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr}\,\big(\Phi^2\big)\,,\ \mathrm{Tr}\,\big(\Phi L\big)\,,\ \mathrm{Tr}\,\big(\Phi\bar\Phi + \frac{1}{2}L^2\big)\,,\ \mathrm{Tr}\,\big(\bar\Phi L\big)\,,\ \mathrm{Tr}\,\big(\bar\Phi^2\big)\,,\\ \mathrm{Tr}\,\big(\Phi h_I\big)\,,\ \mathrm{Tr}\,\big(L h_I\big)\,,\ \mathrm{Tr}\,\big(\bar\Phi h_I\big)\,,\ \mathrm{Tr}\,\big(\delta_{IJ}\Phi\bar\Phi + \frac{1}{2}h_I h_J\big)\end{gathered} \tag{A.384}$$

This constitutes the simplest example of (A.376), for $\mathcal{P}(\phi) \equiv \mathrm{Tr}\,\big(\phi^i\phi_j - \frac{1}{6}\delta^i_j\phi_k\phi^k\big)$.

A.5.6 Cancellation of the β function

We now give an improved version of the proof given in [104], that the β function is zero to all order in the perturbative $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills theory.

The proof of the cancellation of the β function is a corollary of the three following propositions

- The β function is zero at first order (A.385)
- $$\mathcal{C}\,\Big[\int \mathcal{L}^0_4\cdot\Gamma\Big] = \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\big[\Psi^{(1)}\cdot\Gamma\big] \tag{A.386}$$
- $$\frac{\partial\Gamma}{\partial g} + \frac{2}{g^3}a(g)\,\Big[\int \mathcal{L}^0_4\cdot\Gamma\Big] = \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\big[\Psi^{(2)}\cdot\Gamma\big] \tag{A.387}$$

where $\mathbf{\Psi}^{(\xi)}$ are integrated insertions of ghost number -1 and shadow number 0. Moreover,

$$a(g) = 1 + \sum_{\mathbb{N}*} a_n\, g^{2n} \tag{A.388}$$

is a function of the coupling constant g that accounts for the possible radiative corrections to the classical equation

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial g} + \frac{2}{g^3} \int \mathcal{L}_4^0 = 0 \tag{A.389}$$

The key part of of the proof follows from the equation

$$\Big[\mathcal{C}, \frac{\partial}{\partial g}\Big]\mathscr{F} = -\frac{\partial \beta}{\partial g}\,\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial g} - \mathcal{S}_{(s)|\mathscr{F}}\mathcal{S}_{(Q)|\mathscr{F}} \int \Big(\sum_a \frac{\partial \gamma^a}{\partial g}\,\varphi^a \varphi^{(Q_s)}{}_a + \frac{\partial \gamma^{(A)}}{\partial g} \mathrm{Tr}\ \bar{\mu} \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b} \Big) \tag{A.390}$$

If one equates $\mathscr{F}$ to the 1PI generating functional Γ, one obtains, as a direct consequence of (A.349), (A.386) and (A.387), that

$$\frac{\partial}{\partial g}\Big(\beta\,\frac{2}{g^3} a(g)\Big)\ \big[\int \mathcal{L}_4^0 \cdot \Gamma\big] = \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\big[\mathbf{\Psi}^{(3)} \cdot \Gamma\big] \tag{A.391}$$

Since $\big[\int \mathcal{L}_4^0 \cdot \Gamma\big] \neq 0$ belongs to the cohomology of $\mathcal{S}_{(s)|\Gamma}$, the right-hand side and left-hand side of this equation must be zero. This implies

$$\frac{\partial}{\partial g}\Big(\beta\,\frac{2}{g^3} a(g)\Big) = 0 \tag{A.392}$$

This equation can be expanded in power of g, $\beta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_{(n)}\, g^{2n+1}$. It gives

$$\beta_{(n)} = -\sum_{p=1}^{n-1} a_{n-p}\,\beta_{(p)} \ \propto \beta_{(1)}, \qquad n \geqslant 2 \tag{A.393}$$

Using then the proposition (A.385), that is $\beta_{(1)} = 0$, one obtains that the β function is zero at all orders in perturbation theory.

Let us now demonstrate the basic ingredients (A.386,A.387) of the proof that the β function vanishes to all orders.

The cancellation of the one-loop β function (A.385) is a well-established result in perturbation theory.

The proposition (A.387) is a straightforward consequence of the property that the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills action has only one physical parameter, namely the coupling constant g. The Slavnov–Taylor operators commute with the derivation with respect to g, and thus

$$\mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial g} = \mathcal{S}_{(Q)|\Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial g} = 0 \tag{A.394}$$

Starting from the classical equation (A.389), the quantum action principle implies that differentiation of the 1PI generating functional with respect to the coupling constant g amounts to the insertion of an integrated local functional of ghost and shadow number zero, which satisfies all the global linear symmetries of the theory, and which is invariant under the action of the two linearized Slavnov–Taylor operators $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ and $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ (see [104] for more details). The only such functional in the cohomology of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ is the classical action $\int \mathcal{L}_4^0$, what establishes the result (A.387).

The only non-trivial point for proving the vanishing of the β function is thus the demonstration of (A.386), which we now show, in the shadow-Landau gauge.

Cocycles and descent equations for the lagrangian density

To prove (A.386), we will use the fact that the lagrangian density is uniquely linked to a protected operator by descent equations, involving the equivariant part of the Q symmetry.

Because $\mathcal{L}_4^0$ and Ch_4^0 (A.335,A.336) are supersymmetric invariant only modulo a boundary term, the algebraic Poincaré lemma predicts series of cocycles, which are linked to $\mathcal{L}_4^0$ and Ch_4^0 by descent equations, as follows :

$$\begin{aligned}
\delta^{Susy}\mathcal{L}_4^0 + d\mathcal{L}_3^1 &= 0 & \delta^{Susy}Ch_4^0 + dCh_3^1 &= 0 \\
\delta^{Susy}\mathcal{L}_3^1 + d\mathcal{L}_2^2 &= \varpi i_\varepsilon \mathcal{L}_4^0 & \delta^{Susy}Ch_3^1 + dCh_2^2 &= \varpi i_\varepsilon Ch_4^0 \\
\delta^{Susy}\mathcal{L}_2^2 + d\mathcal{L}_1^3 &= \varpi i_\varepsilon \mathcal{L}_3^1 & \delta^{Susy}Ch_2^2 + dCh_1^3 &= \varpi i_\varepsilon Ch_3^1 \\
\delta^{Susy}\mathcal{L}_1^3 + d\mathcal{L}_0^4 &= \varpi i_\varepsilon \mathcal{L}_2^2 & \delta^{Susy}Ch_1^3 + dCh_0^4 &= \varpi i_\varepsilon Ch_2^2 \\
\delta^{Susy}\mathcal{L}_0^4 &= \varpi i_\varepsilon \mathcal{L}_1^3 & \delta^{Susy}Ch_0^4 &= \varpi i_\varepsilon Ch_1^3
\end{aligned} \tag{A.395}$$

Using the grading properties of the shadow number and the form degree, we conveniently define

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\equiv \mathcal{L}_4^0 + \mathcal{L}_3^1 + \mathcal{L}_2^2 + \mathcal{L}_1^3 + \mathcal{L}_0^4 \\
Ch &\equiv Ch_4^0 + Ch_3^1 + Ch_2^2 + Ch_1^3 + Ch_0^4
\end{aligned} \tag{A.396}$$

The descent equations can then be written in a unified way

$$(d + \delta^{Susy} - \varpi i_\varepsilon)\mathcal{L} = 0 \qquad (d + \delta^{Susy} - \varpi i_\varepsilon)Ch = 0 \tag{A.397}$$

Note that on gauge-invariant polynomials in the physical fields, δ^{Susy} can be identified to $s + Q$, in such way that the differential $(d + \delta^{Susy} - \varpi i_\varepsilon)$ is nilpotent on them. Since $\mathcal{L}_4^0$ and Ch_4^0 are the unique solutions of the first equation in (A.395), one obtains that $\mathcal{L}$ and

Ch are the only non-trivial solutions of the descent equations, that is, the only ones that cannot be written as $(d+\delta^{Susy}-\varpi i_\varepsilon)\,\Xi$. In fact Ch^0_4 and $\mathcal{L}^0_4$ are the unique non-trivial solutions of Eq. (A.395), even when δ^{Susy} is restricted to six supersymmetry parameters ($\upsilon_I=0$).

The expression of the cocycles Ch^s_{4-s} can be simply obtained, by changing F into the extended curvature (A.5.2) in the topological term $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ FF$, owing to the horizontality equation that expresses s and Q. Therefore :

$$Ch=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\Big(F+\varpi\Psi+\omega\bar\Psi+g(\varepsilon)\eta+g(J_I\varepsilon)\chi^I+\varpi^2\Phi+\varpi\omega L+(\omega^2+|\varepsilon|^2)\bar\Phi\Big)^2 \quad \text{(A.398)}$$

As for determining the explicit form of $\mathcal{L}^s_{4-s}$ for $s\geqslant 1$, we found no other way than doing a brute force computation, starting from $\mathcal{L}^0_4$ in Eq. (A.335). In this way, one gets, in a step by step computation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1_3=\mathrm{Tr}\,\Big(&\varpi\big(\Psi{}_\wedge F+J_I(\bar\chi^I T-\bar\Psi[\Phi,h^I])\big)\\
&+\omega\big(\bar\Psi{}_\wedge F+J_I(-\eta d_Ah^I+\chi_I T+\Psi[\bar\Phi,h^I]-\bar\Psi[L,h^I])\big)\\
&+J_I{}_\wedge i_\varepsilon F\chi^I+i_\varepsilon\star\chi_I H^I+\varepsilon_{IJK}g(\varepsilon)J^I\chi^J H^K\\
&+(i_{J^I\varepsilon}\star\eta-i_\varepsilon\star\chi^I)\Big(\frac{1}{2}\varepsilon_{IJK}[h^J,h^K]+[L,h_I]\Big)\\
&+\star\bar\Psi i_\varepsilon T-i_\varepsilon(\bar\Psi\star d_AL)+i_\varepsilon(J_I{}_\wedge\bar\Psi){}_\wedge d_Ah^I\\
&+i_\varepsilon\star\bar\eta[\bar\Phi,L]-i_{J_I\varepsilon}\star\bar\eta[\bar\Phi,h^I]+i_\varepsilon\star\eta[\Phi,\bar\Phi]+i_\varepsilon(\Psi\star d_A\bar\Phi)-g(\varepsilon)\Psi d_A\bar\Phi\Big)\end{aligned} \quad \text{(A.399)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2_2=\mathrm{Tr}\,\Big(&\varpi^2\big(\Phi F+\frac{1}{2}\Psi\Psi\big)+\varpi\omega\big(LF+\Psi\bar\Psi+J_I(h^I[\Phi,\bar\Phi]-\eta\bar\chi^I)\big)\\
&+\omega^2\big(\bar\Phi F+\frac{1}{2}\bar\Psi\bar\Psi+J_I(L[\bar\Phi,h^I]-\eta\chi^I)\big)+\varpi\big(g(J_I\varepsilon)\Psi\chi^I+i_\varepsilon J_I{}_\wedge\bar\Psi\bar\chi^I-g(\varepsilon)\Phi d_A\bar\Phi\big)\\
&+\omega\big(-g(J_I\varepsilon)\bar\Phi d_Ah^I+J_Ii_\varepsilon\bar\Psi\chi^I-2\eta(g(\varepsilon)\bar\Psi)^--g(\varepsilon)Ld_A\bar\Phi\big)\\
&+\frac{1}{2}g(J_I\varepsilon)g(J_J\varepsilon)\bar\Phi[h^I,h^J]+\star g(\varepsilon)g(J_I\varepsilon)L[\bar\Phi,h^I]+\frac{1}{2}|\varepsilon|^2\bar\Psi\bar\Psi-J_Ii_\varepsilon\bar\Psi i_{J^I\varepsilon}\bar\Psi\Big)\end{aligned} \quad \text{(A.400)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^3_1=\mathrm{Tr}\,\Big(&\varpi^3\Phi\Psi+\varpi^2\omega(L\Psi+\Phi\bar\Psi)+\varpi\omega^2(L\bar\Psi+\bar\Phi\Psi)+\omega^3\bar\Phi\bar\Psi\\
&+\varpi^2g(J_I\varepsilon)\Phi\chi^I+\varpi\omega g(J_I\varepsilon)(L\chi^I-\bar\Phi\bar\chi^I)\\
&+\omega^2g(\varepsilon)\bar\Phi\eta+\omega\bar\Phi g(J_I\varepsilon)i_{J^I\varepsilon}\bar\Psi\Big)\end{aligned} \quad \text{(A.401)}$$

$$\mathcal{L}_0^4 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\Big(\big(\varpi^2\Phi + \varpi\omega L + \omega^2\bar\Phi\big)^2 + \omega^2|\varepsilon|^2\bar\Phi^2\Big) \tag{A.402}$$

Finiteness property for the classical action $\int \mathcal{L}_4^0$

The last cocycle $\mathcal{L}_0^4$ is a linear combination of protected operators associated to the second Chern class Tr $\omega(\varphi)^2$. Therefore, its anomalous dimension is zero. We now show that this implies that its ascendant $\mathcal{L}_4^0$ is also protected modulo a d variation, which is the non-trivial condition (A.386) for proving the vanishing of the β function, which we now rewrite

$$\mathcal{C}\ \Big[\int \mathcal{L}_4^0\cdot\Gamma\Big] = \mathcal{S}_{(s)|\Gamma}\Big[\int \Upsilon_4^{(-1,0)}\cdot\Gamma\Big] \tag{A.403}$$

It is worth going into the details of the proof of this identity.

To define one insertion of the lagrangian density $\mathcal{L}_4^0$ and its descendants $\mathcal{L}_{4-p}^p$ in a way that preserves the Slavnov–Taylor identities, one introduces sources for each term $\mathcal{L}_{4-p}^p$ and defines the effective action

$$\Sigma \to \Sigma[u] \equiv \Sigma + \int\sum_p u_p^{-p}\mathcal{L}_{4-p}^p \tag{A.404}$$

This effective action verifies the Slavnov–Taylor identities, provided that the sources u_p^{-p} are s-invariant and

$$Qu_p^{-p} = -du_{p-1}^{1-p} + \varpi i_\varepsilon u_{p+1}^{-1-p} \tag{A.405}$$

Using the extended form $u \equiv \sum_p u_p^{-p}$, one has

$$(d + Q - \varpi i_\varepsilon)u = 0 \tag{A.406}$$

Let us define as Δ_{4-p}^p the local counterterms that might occur for the renormalization of the operators $\mathcal{L}_{4-p}^p$. The question is that of determining the most general invariant counterterm for the effective action $\int\sum_p u_p^{-p}\Delta_{4-p}^p$, which is linear in the u_p^{-p}. It ought to be invariant under $SU(2)_+\times SU(2)\times U(1)$ and to obey the Slavnov–Taylor identities :

$$\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\int\sum_p u_p^{-p}\Delta_{4-p}^p = 0 \qquad \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\int\sum_p u_p^{-p}\Delta_{4-p}^p = 0 \tag{A.407}$$

If we call $\Delta \equiv \sum_p \Delta_{4-p}^p$, one must have

$$(d + \mathcal{S}_{(s)|\Sigma} + \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma} - \varpi i_\varepsilon)\Delta = 0 \tag{A.408}$$

Since the cohomology of $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$ modulo d can be identified with the gauge-invariant polynomials in the physical fields, Δ must be the sum of a gauge-invariant polynomial in the physical fields and of a $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$-exact term $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\Upsilon$, where Υ is an arbitrary extended form in the fields and the sources of ghost number -1. Because $\mathcal{L}$ and Ch generate the only non-trivial elements of the cohomology of $d + \delta^{Susy} - \varpi i_\varepsilon$ in the set of gauge-invariant polynomials in the physical fields, Δ must be of the form

$$\Delta = z_1\mathcal{L} + z_2 Ch + (d + \delta^{Susy} - \varpi i_\varepsilon)\,\Xi + \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\Upsilon \tag{A.409}$$

Ξ is an arbitrary gauge-invariant extended form in the physical fields of total degree 3 and canonical dimension $\frac{7}{2}$.

We have seen in the previous section that $\mathcal{L}^4_0$ is a protected operator, and therefore, $\mathcal{C}\left[\mathcal{L}^4_0 \cdot \Gamma\right] = 0$. Thus, all invariant counterterms that might be generated in perturbation theory have to be such that

$$\Delta^4_0 = 0 \tag{A.410}$$

and therefore

$$z_1\mathcal{L}^4_0 + z_2 Ch^4_0 + \delta^{Susy}\,\Xi^3_0 - \varpi i_\varepsilon\,\Xi^2_1 = 0 \tag{A.411}$$

Each term in this expansion must separately vanish. Indeed, $\mathcal{L}^4_0$ and Ch^4_0 are not δ^{Susy}-exact and

$$Ch^4_0 - \mathcal{L}^4_0 = i_\varepsilon\, g(\varepsilon)\bar{\Phi}\big(\mathring{\omega}^2\Phi + \mathring{\omega}\omega L + \frac{1}{2}(\omega^2 + |\varepsilon|^2)\bar{\Phi}\big) \tag{A.412}$$

cannot be written as a contraction with respect to the vector $\mathring{\omega}\varepsilon$ of a 1-form that is analytic in $\mathring{\omega}$.

It follows that the most general functional (A.409) which has vanishing component of shadow number four, must have a component of zero shadow number of the following form

$$\Delta^0_4 = d\,\Xi^0_3 + \mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\Upsilon_4^{(-1,0)} \tag{A.413}$$

This is precisely the result (A.403) that we wanted to prove.

A.5.7 Conclusion

A great improvement due to the introduction of the shadow fields is that one has two separated and consistent Slavnov–Taylor identities corresponding respectively to gauge and supersymmetry invariance. This enables one to establish the cancellation of the anomalous dimension of some operators, considering them as insertions in any Green functions of physical observables, which are not restricted to be supersymmetric scalars.

As for the physics, it is now defined to be the cohomology of $\mathcal{S}_{(s)|\Gamma}$ rather than the cohomology of $\mathcal{S}_{(Q)|\Gamma}$, and its supersymmetry covariance is easy to check.

Aspects of the superconformal invariance of the $\mathcal{N}=4$ theory can be checked at any given finite order in perturbation theory, for any type of ultraviolet regularization. In this paper we have proved the cancellation of the β function and the finiteness of the $1/2$ BPS operators. The method can certainly be extended to other features of superconformal invariance.

A.6 Prescription de renormalisation

L. Baulieu et G. Bossard,

« Supersymmetric renormalization prescription in $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills theory »

Phys. Lett. B **643**, 294 (2006) `hep-th/0609189`.

L'absence de régulateur préservant à la fois l'invariance de jauge et la supersymétrie constitue un obstacle au calcul des fonctions de corrélation aux grands ordres de la théorie des perturbations. Nous définissons dans cette publication une prescription de calcul cohérente et manifestement supersymétrique pour les théories de Yang–Mills, qui considère les insertions d'opérateurs locaux. Cette prescription est établie en faisant intervenir les identités de Slavnov–Taylor cohérentes pour l'invariance de jauge et la supersymétrie [A.4].

Nous nous sommes restreints dans cet article au cas de la théorie de Yang–Mills maximalement supersymétrique, celui-ci étant le plus problématique et la généralisation de la procédure aux autres théories supersymétriques étant évidente. Nous expliquons la nécessité d'introduire un certain nombre de sources non physiques afin de passer outre au problème de la non existence de représentation de la supersymétrie maximale qui ne fasse pas intervenir les équations du mouvement. Nous établissons que dans le cas où on ne considère que des opérateurs composites BPS, ou de dimension canonique strictement inférieure à quatre, il est possible d'intégrer les fantômes de Faddeev–Popov ainsi que les champs d'ombre μ et $\bar{\mu}$ sans introduire de correction. Nous justifions ainsi la prescription proposée par Stöckinger et al. pour le calcul des fonctions de corrélation de champs, à l'aide d'un régulateur préservant l'invariance de jauge. Cependant le calcul de fonctions de corrélation d'opérateurs composites généraux nécessite la considération du formalisme complet, incluant les fantômes et les champs d'ombre.

Supersymmetric renormalization prescription in $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills theory

abstract

Using the shadow dependent decoupled Slavnov–Taylor identities associated to gauge invariance and supersymmetry, we discuss the renormalization of $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills theory and of its coupling to gauge-invariant operators. We specify the method for the determination of non-supersymmetric counterterms that are needed to maintain supersymmetry.

A.6.1 Introduction

non-linear aspects of supersymmetry and the non-existence of a supersymmetry-preserving regulator make the renormalization of supersymmetric theories a subtle task. Whichever is the choice of regularization, we expect non-supersymmetric counterterms for maintaining supersymmetry at the renormalized level. A very effective regularization of UV divergences of super-Yang–Mills theories, called dimensional reduction, was introduced quite early by Siegel [109]. Whether this regularization holds true at all orders in perturbation theory was questioned in [110]. With suitable improvements, its compatibility with the quantum action principle was shown in [111]. In fact, this regularization cannot preserve supersymmetry beyond 3-loop order [112], which implies the introduction of non-supersymmetric counterterms for 4-loop computations. As another complication, the renormalisable Lorentz covariant gauge conditions (Landau–Feynman-type gauges) break supersymmetry. This breaking of a global symmetry is analogous to that of the Lorentz invariance by axial or Coulomb gauges for the ordinary Yang–Mills theories, but it is more intricate, because supersymmetry is realized non-linearly. This question was addressed by Dixon [99, 100], who completed the ordinary BRST symmetry transformations for gauge invariance by adding supersymmetry transformations, whose supersymmetry parameter is a commuting constant spinor. The "enlarged BRST symmetry" determines a Slavnov–Taylor identity. It was shown, in a series of papers by Stöckinger et al., that this process allows the determination, order by order in perturbation theory, of non-invariant counterterms [113] that restore supersymmetry covariance of Green functions in the $\mathcal{N} = 1$ models [114]. The unusual feature that occurs is that Feynman rules depend on the parameter of supersymmetry, but it is advocated that observables do not depend on it. This method has a conceptual backlash. To define the "enlarged BRST symmetry", Dixon changed the transformation law of the Faddeev–Popov ghost (to achieve nilpotency of the "enlarged BRST transformations"). But then, the BRST equation of the Faddeev–Popov ghost loses its geometrical meaning. Moreover, observables are not defined as they should be, from the cohomology of the BRST differential, since, in this case, they would be reduced to supersymmetry scalars. They must be introduced as gauge-invariant functionals of physical fields, which are well-defined classically, but are sources of confusion at the quantum level, because of their possible mixing with non-gauge-invariant operators. In fact, the previous methods are sufficient to define certain rules for practical perturbative computations, but the way they are obtained lacks the important feature of relying on a well-funded algebraic construction ; this is independent of the regularization scheme, and clearly distinguishes gauge invariance and supersymmetry.

In recent papers, we indicated the possibility of disentangling these two invariances, for defining the quantum theory, with independent Slavnov–Taylor identities [A.4]. We introduced new fields, which we called shadows, not to confuse them with the usual Faddeev–Popov ghosts. The advantage of doing so is as follows. The obtained pair of differential operators allows to define the two Slavnov–Taylor operators that characterize the gauge-fixed BRST-invariant supersymmetric quantum field theory, while the Faddeev–Popov ghost keeps the same geometrical interpretation as in the ordinary Yang–Mills theory. Observables are defined by the cohomology of the BRST differential Slavnov–Taylor operator and their supersymmetry covariance is controlled at the quantum level by the other Slavnov–Taylor operator for supersymmetry. This will allow for an unambiguous perturbative renormalization of supersymmetric gauge theories.

The shadow fields are assembled into BRST doublets, and they do not affect the physical sector. The quantum field theory has an internal bigrading, the ordinary ghost number and the new shadow number. The commuting supersymmetry parameter is understood as an ordinary gauge parameter for the quantum field theory. Having both Slavnov–Taylor identities for gauge invariance and supersymmetry is a safe starting point to define perturbative theory. The latter depends on more fields, which add up more Feynman diagrams. If we consider physical composite operators that mix through renormalization with BRST-exact operators, we have in principle to consider the whole set of fields in order to compute the supersymmetry-restoring non-invariant counterterms. For certain "simple" Green functions, which cannot mix with BRST-exact composite operators, there exists gauges in which some of the additional fields can be integrated out, in a way that justifies the work of Stöckinger et al. in the $\mathcal{N}=1$ theories. By doing this elimination, we lose the geometrical meaning, but we may gain in computational simplicity.[28] In $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills in the conformal phase, the observables are classically correlation functions of gauge-invariant observables. The aim of this paper is to explain their quantum definition and the general methodology that is needed to non-ambiguously compute non-invariant counterterms in order to maintain supersymmetry. In fact, our results apply to all supersymmetric theories.

A.6.2 Supersymmetry Slavnov–Taylor identities

Action and symmetries

The physical fields of $\mathcal{N}=4$ super-Yang–Mills in $3+1$ dimensions are the gauge field A_μ the $SU(4)$-Majorana spinor λ, and the six scalar fields ϕ^i in the vector representation of $SO(6)\sim SU(4)$. They are all in the adjoint representation of a compact gauge group that we will suppose simple. The classical action is uniquely determined by $Spin(3,1)\times SU(4)$, supersymmetry and gauge invariance. It reads

$$S\equiv\int d^4x\mathrm{Tr}\,\Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2}D_\mu\phi^i D^\mu\phi_i+\frac{i}{2}\big(\overline{\lambda}\not{D}\lambda\big)-\frac{1}{2}\big(\overline{\lambda}[\phi,\lambda]\big)-\frac{1}{4}[\phi^i,\phi^j][\phi_i,\phi_j]\Big) \tag{A.414}$$

with $\phi\equiv\phi^i\tau_i$ and the supersymmetry transformations δ^{Susy} [29]

$$\delta^{Susy}A_\mu=i\big(\overline{\epsilon}\gamma_\mu\lambda\big)\qquad \delta^{Susy}\phi^i=-\big(\overline{\epsilon}\tau^i\lambda\big)\qquad \delta^{Susy}\lambda=\big(\not{F}+i\not{D}\phi+\frac{1}{2}[\phi,\phi]\big)\epsilon \tag{A.415}$$

Out of δ^{Susy}, we can build an operator Q that also acts on the Faddeev–Popov field Ω and new shadow fields c, μ [A.4]. Q acts on all the physical fields as $Q=\delta^{Susy}-\delta^{\mathrm{gauge}}(c)$, and we have

$$Qc=(\overline{\epsilon}[\phi-i\not{A}]\epsilon)-c^2\quad Q\Omega=-\mu-[c,\Omega]\quad Q\mu=-[(\overline{\epsilon}\phi\epsilon),\Omega]+i(\overline{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)D_\mu\Omega-[c,\mu] \tag{A.416}$$

The BRST operator s is nothing but a gauge transformation of parameter Ω on all physical fields, and we have

$$s\,\Omega=-\Omega^2\qquad s\,c=\mu\qquad s\,\mu=0 \tag{A.417}$$

[28] We do not exclude the possibility of also reducing the set of fields in the general case, including observables that mix with BRST-exact operators through renormalization, but further investigations are needed in order to establish this statement.

[29] The parameter ϵ is a commuting spinor, so that ${\delta^{Susy}}^2\approx\delta^{\mathrm{gauge}}(\overline{\epsilon}[\phi-i\not{A}]\epsilon)-i(\overline{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)\partial_\mu$, where $\approx$ stands for the equality modulo equations of motion.

To define a BRST-exact supersymmetric gauge-fixing, we introduce the trivial quartet $\bar\mu$, $\bar c$, $\bar\Omega$, b, with

$$\begin{array}{llll} s\,\bar\mu = \bar c & s\,\bar c = 0 & s\,\bar\Omega = b & s\,b = 0 \\ Q\bar\mu = \bar\Omega & Q\bar c = -b & Q\bar\Omega = -i(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\partial_\mu\bar\mu & Qb = i(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\partial_\mu\bar c \end{array} \tag{A.418}$$

On all fields, we have $s^2 = 0,\ Q^2 \approx -i(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\partial_\mu,\ \{\,s\,,Q\} = 0$. We have the following class of renormalisable supersymmetric $s\,Q$-exact gauge-fixing action[30]

$$-\,s\,Q\int d^4x\mathrm{Tr}\,\left(\bar\mu\partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}\bar\mu b\right) \tag{A.419}$$

By introducing sources associated to the non-linear s, Q and $s\,Q$ transformations of fields, we get the following ϵ-dependent action, which initiates a BRST-invariant supersymmetric perturbation theory[31]

$$\begin{aligned} \Sigma \equiv \frac{1}{g^2}S - \int d^4x\mathrm{Tr}\,\Big(& b\partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}b^2 - \bar c\partial^\mu\big(D_\mu c + i(\bar\epsilon\gamma_\mu\lambda)\big) - \frac{i\alpha}{2}(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\bar c\partial_\mu\bar c \\ & + \bar\Omega\partial^\mu D_\mu\Omega - \bar\mu\partial^\mu\big(D_\mu\mu + [D_\mu\Omega, c] - i(\bar\epsilon\gamma_\mu[\Omega,\lambda])\big)\Big) \\ + \int d^4x\mathrm{Tr}\,\Big(& A^{(s)}_\mu D^\mu\Omega + \overline{\lambda}^{(s)}[\Omega,\lambda] - \phi^{(s)}_i[\Omega,\phi^i] + A^{(Q)}_\mu QA^\mu - \overline{\lambda}^{(Q)}Q\lambda + \phi^{(Q)}_i Q\phi^i \\ & + A^{(Qs)}_\mu\,s\,QA^\mu - \overline{\lambda}^{(Qs)}\,s\,Q\lambda + \phi^{(Qs)}_i\,s\,Q\phi^i + \Omega^{(s)}\Omega^2 - \Omega^{(Q)}Q\Omega - \Omega^{(Qs)}\,s\,Q\Omega \\ & - c^{(Q)}Qc + \mu^{(Q)}Q\mu + \frac{g^2}{2}(\overline{\lambda}^{(Q)} - [\overline{\lambda}^{(Qs)},\Omega])M(\lambda^{(Q)} - [\lambda^{(Qs)},\Omega])\Big) \end{aligned} \tag{A.420}$$

Because of the s and Q invariance, the action is invariant under both Slavnov–Taylor identities defined in [A.4], which are associated respectively to gauge and supersymmetry

[30] Note that power counting forbids a gluino dependence for the argument of the $s\,Q$-exact term, and that Q is nilpotent on all the functionals that do not depend on the gluinos.

[31] M is the 32×32 matrix $M \equiv \epsilon\bar\epsilon - \frac{1}{2}(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\gamma_\mu - \frac{1}{2}(\bar\epsilon\tau_i\epsilon)\tau^i$. It occurs because Q^2 is a pure derivative only modulo equations of motion. The dimension of A_μ, λ, ϕ^i, Ω, $\bar\Omega$, b, μ, $\bar\mu$, c and $\bar c$ are respectively 1, $\frac{3}{2}$, 1, 0, 2, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}$. Their ghost and shadow numbers are respectively $(0,0)$, $(0,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(0,1)$ and $(0,-1)$.

invariance, $\mathcal{S}_{(s)}(\Sigma) = \mathcal{S}_{(Q)}(\Sigma) = 0$. The supersymmetry Slavnov–Taylor operator is[32]

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) \equiv \int d^4x \mathrm{Tr}\, \biggl(&\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta A^\mu}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta A^{(Q)}_\mu} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \lambda}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \overline{\lambda}^{(Q)}} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \phi^i}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \phi^{(Q)}_i} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta c}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta c^{(Q)}} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \mu}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \mu^{(Q)}} \\ &+ \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \Omega}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(Q)}} - A^{(s)}_\mu \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta A^{(Qs)}_\mu} + \overline{\lambda}^{(s)}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \overline{\lambda}^{(Qs)}} - \phi^{(s)}_i \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \phi^{(Qs)}_i} + \Omega^{(s)}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(Qs)}} - b\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{c}} + \bar{\Omega}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\mu}} \\ &-i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)\Bigl(-\partial_\mu A^{(Qs)}_\nu \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta A^{(s)}_\nu} + \partial_\mu \overline{\lambda}^{(Qs)}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \overline{\lambda}^{(s)}} - \partial_\mu \phi^{(Qs)}_i \frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \phi^{(s)}_i} + \partial_\mu \Omega^{(Qs)}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \Omega^{(s)}} - \partial_\mu \bar{c}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta b} + \partial_\mu \bar{\mu}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \bar{\Omega}} \\ &+ A^{(Q)}_\nu \partial_\mu A^\nu + \overline{\lambda}^{(Q)}\partial_\mu \lambda + \phi^{(Q)}_i \partial_\mu \phi^i + \Omega^{(Q)}\partial_\mu \Omega + c^{(Q)}\partial_\mu c + \mu^{(Q)}\partial_\mu \mu \Bigr) \biggr) \end{aligned} \tag{A.421}$$

Physical observables

The physical observables in the $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills in the conformal phase are Green functions of local operators in the cohomology of the BRST linearized Slavnov–Taylor operator $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$. From this definition, the latter are independent of the gauge parameters of the action, including ϵ. Classically, they are represented by gauge-invariant polynomials of the physical fields [A.4][115]. We introduce classical sources u for all these operators. We must generalize the supersymmetry Slavnov–Taylor identity for the extended local action that depends on these sources. Since the supersymmetry algebra does not close off-shell, other sources v, coupled to unphysical $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}$-exact operators, must also be introduced. We define the following field and source combinations φ^*

$$\begin{aligned} &A^*_\mu \equiv A^{(Q)}_\mu - \partial_\mu \bar{c} - [A^{(Qs)}_\mu - \partial_\mu \bar{\mu}, \Omega] \qquad && c^* \equiv c^{(Q)} - [\mu^{(Q)}, \Omega] \\ &\phi^*_i \equiv \phi^{(Q)}_i - [\phi^{(Qs)}_i, \Omega] && \lambda^* \equiv \lambda^{(Q)} - [\lambda^{(Qs)}, \Omega] \end{aligned} \tag{A.422}$$

They verify $\mathcal{S}_{(s)|\Sigma}\varphi^* = -[\Omega, \varphi^*]$. The set of local operators coupled to the v's is nothing but the set of all possible gauge-invariant polynomials in the physical fields and all the φ^*'s . These operators have ghost number zero, and their shadow number is negative, in contrast with the physical gauge-invariant operators, which have shadow number zero.

[32] The linearized Slavnov–Taylor operator $\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}$ [A.4] verifies ${\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}}^2 = -i(\bar{\epsilon}\gamma^\mu\epsilon)\partial_\mu$, which solves in practice the fact that Q^2 is a pure derivative only modulo equations of motion.

The relevant action is thus $\Sigma[u,v] \equiv \Sigma + \Upsilon[u,v]$, with

$$
\begin{aligned}
\Upsilon[u,v] \equiv \int d^4x \Big(& u_{ij}\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \phi^i\phi^j + u_i^\alpha \mathrm{Tr}\ \phi^i\lambda_\alpha + u_{ijk}\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\ \phi^i\phi^j\phi^k \\
& + {}^{\mathrm{K}}u_{ij}^\mu \mathrm{Tr}\ \big(i\phi^{[i}D_\mu\phi^{j]} + \frac{1}{8}\overline{\lambda}\gamma_\mu\tau^{ij}\lambda\big) + {}^{\mathrm{K}}u_i^{\mu\nu}\mathrm{Tr}\ \big(F_{\mu\nu}\phi^i - \frac{1}{2}\overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu}\tau^i\lambda\big) + {}^{\mathrm{K}}u_\mu^5\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \overline{\lambda}\gamma_5\gamma^\mu\lambda \\
& + {}^{\mathrm{C}}u_{ijk}\mathrm{Tr}\ \big(\frac{1}{3}\phi^{[i}\phi^j\phi^{k]} + \frac{1}{8}\overline{\lambda}\tau^{ijk}\lambda\big) + {}^{\mathrm{C}}u_{ij}^\mu \mathrm{Tr}\ \big(i\phi^{[i}D_\mu\phi^{j]} - \frac{1}{4}\overline{\lambda}\gamma_\mu\tau^{ij}\lambda\big) \\
& + {}^{\mathrm{C}}u_i^{\mu\nu}\mathrm{Tr}\ \big(F_{\mu\nu}\phi^i + \frac{1}{4}\overline{\lambda}\gamma_{\mu\nu}\tau^i\lambda\big) + u_{ij}^\alpha \mathrm{Tr}\ \phi^i\phi^j\lambda_\alpha + iu_i^{\mu\,\alpha}\mathrm{Tr}\ D_\mu\phi^i\lambda_\alpha + u^{\mu\nu\,\alpha}\mathrm{Tr}\ F_{\mu\nu}\lambda_\alpha + \cdots \\
& + v_i^\alpha \mathrm{Tr}\ \phi^i\lambda_\alpha^* + v^{\alpha\beta}\mathrm{Tr}\ \lambda_\alpha\lambda_\beta^* + v_i^\mu \mathrm{Tr}\ \phi^i A_\mu^* + v_{ij}\mathrm{Tr}\ \phi^i\phi^{*\,j} + iv_i^{\mu\,\alpha}\mathrm{Tr}\ D_\mu\phi^i\lambda_\alpha^* \\
& + {}^0v_i^\alpha \mathrm{Tr}\ \lambda_\alpha\phi^{*\,i} + iv^{\mu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\ D_\mu\lambda_\alpha\lambda_\beta^* + iv_{ij}^\mu \mathrm{Tr}\ D_\mu\phi^i\phi^{*\,j} + i\,{}^{-1}v_i^{\mu\alpha}\mathrm{Tr}\ D_\mu\lambda_\alpha\phi^{*\,i} + \cdots \Big)
\end{aligned}
\tag{A.423}
$$

Here, the $\cdots$ stand for all other analogous operators.

The Slavnov–Taylor operator $\mathcal{S}_{(Q)}$ can be generalized into a new one, $\mathcal{S}_{(Q)}^{\mathrm{op}}$, by addition of terms that are linear in the functional derivatives with respect to the sources u and v. In this way, the action $\Sigma[u,v]$ verifies $\mathcal{S}_{(Q)}^{\mathrm{op}}(\Sigma[u,v]) = 0$, with

$$
\mathcal{S}_{(Q)}^{\mathrm{op}}(\Sigma[u,v]) = \mathcal{S}_{(Q)}(\Sigma) + \mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}^{\mathrm{op}}\Upsilon + \int d^4x \mathrm{Tr}\ \left(\frac{\delta^R\Upsilon}{\delta A^\mu}\frac{\delta^L\Upsilon}{\delta A_\mu^*} + \frac{\delta^R\Upsilon}{\delta\lambda}\frac{\delta^L\Upsilon}{\delta\overline{\lambda}^*} + \frac{\delta^R\Upsilon}{\delta\phi^i}\frac{\delta^L\Upsilon}{\delta\phi_i^*}\right) \tag{A.424}
$$

It is easy to see that if we were to compute $\mathcal{S}_{(Q)}(\Sigma[u,v])$ without taking into account the transformations of the sources u and v, the breaking of the Slavnov–Taylor identity would be a local functional linear in the set of gauge-invariant local polynomials in the physical fields, A_μ^*, c^*, ϕ_i^* and λ^*. Therefore it is possible to define the transformation of the sources u and v in such way that $\Sigma[u,v]$ verifies the Slavnov–Taylor identity.

Simplest examples for the transformation laws of the u's are for instance

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}^{\mathrm{op}}u_{ij} &= -i[\gamma^\mu\tau_{\{i\epsilon}]_\alpha\partial_\mu u_{j\}}^\alpha + \partial_\mu\partial^\mu v_{\{ij\}} + 2u_{\{i|k}v_{j\}}{}^k + 2u_{\{i}^\alpha v_{j\}\alpha} - i\partial_\mu(u_{\{i|k}v_{j\}}^{\mu\ k} + u_{\{i}^\alpha v_{j\}\alpha}^\mu) \\
\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}^{\mathrm{op}}u_i^\alpha &= [\overline{\epsilon}\tau^j]^\alpha\big(u_{ij} - i\partial_\mu({}^{\mathrm{K}}u_{ij}^\mu + {}^{\mathrm{C}}u_{ij}^\mu)\big) - 2i[\overline{\epsilon}\gamma_\mu]^\alpha\partial_\nu({}^{\mathrm{K}}u_i^{\mu\nu} + {}^{\mathrm{C}}u_i^{\mu\nu}) + i[\gamma^\mu]_\beta{}^\alpha\partial_\mu v_i^\beta \\
&\quad - u_{ij}\,{}^0v^{j\alpha} - u_j^\alpha v_i{}^j + u_i^\beta v^\alpha{}_\beta + u^{\alpha\beta}v_{i\beta} + i\partial_\mu(u_{ij}\,{}^{-1}v^{j\mu\alpha} - u_i^\beta v_\beta^{\mu\alpha})
\end{aligned}
\tag{A.425}
$$

These transformations are quite complicated in their most general expression. However, for many practical computations of non-supersymmetric local counterterms, we can consider them at $v=0$. We define $Qu \equiv \big(\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}^{\mathrm{op}}u\big)_{|v=0}$. By using $\delta^{\mathcal{S}usy}\Upsilon[u] + \Upsilon[Qu] = 0$ we can in fact conveniently compute Qu. Notice that Q is not nilpotent on the sources, but we have the result that $\Upsilon[Q^2u]$ is a linear functional of the equation of motion of the fermion λ.

In [A.4,A.5], we showed the absence of anomaly and the stability of the $\mathcal{N}=4$ action Σ under renormalization. Thus, the complete theory involving shadows and ghosts can be renormalized, in any given regularization scheme, so that supersymmetry and gauge invariance are preserved at any given finite order. It is a straightforward and precisely defined process to compute all observables, provided that a complete set of sources has been introduced. This lengthy process cannot be avoided because, there exists no regulator that preserves both gauge invariance and supersymmetry. We must keep in mind that renormalization generally mixes physical observables with BRST-exact operators, and a careful analysis must be done [116].

A.6.3 Enforcement of supersymmetry

We now turn to the problem of determining non-invariant counterterms, which are necessary to ensure supersymmetry at the quantum level. We will use the notation of [113] for the 1PI correlation functions, an example of which is

$$\left\langle A^a_\mu(p)\lambda^b_\alpha(k)\phi^{(Q)\,c}_i\right\rangle \equiv \int d^4x d^4y\ e^{i(px+ky)}\ \frac{\delta^L\ \delta^L\ \delta^L\ \Gamma}{\delta\phi^{(Q)\,c\,i}(0)\delta\overline{\lambda}^{b\,\alpha}(y)\delta A^{a\,\mu}(x)} \tag{A.426}$$

All fields and sources are set equal to zero after the differentiation. Latin letters a, b, ... label the index of the gauge Lie algebra. In this section we focus on the case of observables that do not mix with non-gauge-invariant operators. The following subsection explains how computations are simplified in this case.

Loop cancellations

We can first eliminate by Gaussian integration the Faddeev–Popov ghosts Ω, $\bar\Omega$ against the shadows $\bar\mu$, μ for computing some observables, in our class of linear gauges.

The antighost Ward identities of [A.4] determine the following dependence of the 1PI generating functional Γ in the fields $\bar\mu$, $\bar\Omega$, $\bar c$ and b

$$\begin{aligned}\Gamma[\cdots,\bar\mu,\bar c,\bar\Omega,b,A^{(s)}_\mu,A^{(Q)}_\mu,A^{(Qs)}_\mu] &= \Gamma[\cdots,0,0,0,0,A^{(s)}_\mu-\partial_\mu\bar\Omega,A^{(Q)}_\mu+\partial_\mu\bar c,A^{(Qs)}_\mu+\partial_\mu\bar\mu] \\ &\quad -\int d^4x\mathrm{Tr}\,\Big(b\partial^\mu A_\mu+\frac{\alpha}{2}b^2-\frac{i\alpha}{2}(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\bar c\partial_\mu\bar c\Big)\end{aligned} \tag{A.427}$$

where the $\cdots$ stand for the dependence on all other fields and sources. Consider the generating functional of 1PI correlation functions of the subset of fields $\varphi_{\rm sub}$ made of the physical fields, the shadow c, $\bar c$ and the sources associated to the Q variations of these fields. The pair of Q-doublets Ω, μ and $\bar{\mu}$, $\bar{\Omega}$ only appear in the Feynman diagrams through propagators and interactions defined by the following part of the action

$$\int d^4x \mathrm{Tr}\, \left(\partial^\mu \bar{\Omega} D_\mu \Omega - \partial^\mu \bar{\mu} D_\mu \mu\right) \tag{A.428}$$

Feynman rules show that the fields Ω, $\bar{\Omega}$, μ and $\bar{\mu}$ exactly compensate in closed loops of opposite contributions at least at the regularized level. The following Ward identities imply that this property is maintained after renormalization

$$\begin{gathered}\left\langle \bar{\mu}^a(p)\mu^b\right\rangle + \left\langle \bar{\Omega}^a(p)\Omega^c\right\rangle\left\langle \Omega_c^{(Q)}(p)\mu^b\right\rangle = 0\\ \left\langle \bar{\mu}^a(p)A_\mu^b(k)\mu^c\right\rangle + \left\langle \bar{\Omega}^a(p)A_\mu^b(k)\Omega^d\right\rangle\left\langle \Omega_d^{(Q)}(p+k)\mu^c\right\rangle = 0\end{gathered} \tag{A.429}$$

$\Omega^{(Q)}$ is the source of the operator $\mu + [\Omega, c]$. Thus, the term linear in μ of the insertion of $[\Omega, c]$ in Γ must be zero. It follows that $\left\langle \Omega_c^{(Q)}(p)\mu^b\right\rangle = \delta_c^b$, at any given finite order of perturbation theory. The only superficially divergent 1PI Green functions depending on Ω, $\bar{\Omega}$, μ and $\bar{\mu}$ that must be considered are $\left\langle \bar{\mu}^a(p)\mu^b\right\rangle = -\left\langle \bar{\Omega}^a(p)\Omega^b\right\rangle$ and $\left\langle \bar{\mu}^a(p)A_\mu^b(k)\mu^c\right\rangle = -\left\langle \bar{\Omega}^a(p)A_\mu^b(k)\Omega^c\right\rangle$. We can thus integrate out these fields in all correlation functions of the fields φ_{sub}.

After this elimination, the supersymmetry Slavnov–Taylor identity is sufficient to constrain the 1PI Green functions of the fields φ_{sub} to the same values as they would have in the complete procedure without the ab-initio elimination of Ω, $\bar{\Omega}$, μ and $\bar{\mu}$. In fact, the most general local functional, which satisfies the supersymmetry Slavnov–Taylor identity and only depends on the fields φ_{sub} and on the sources of their Q transformations, is the restriction of the most general local functional that satisfies all the Ward identities of the theory when all the other fields and sources are set equal to zero. This justifies the heuristic argument, that the Ward identity of supersymmetry implies that of gauge invariance because supersymmetry transformations close modulo gauge transformations. Thus, to compute correlation functions of fields φ_{sub}, we can use the simplified action

$$\begin{aligned}\Sigma^{\text{sub}} \equiv \frac{1}{g^2}S + Q\int d^4x \mathrm{Tr}\, \left(\bar{c}\partial^\mu A_\mu + \frac{\alpha}{2}\bar{c}b\right)\\ + \int d^4x \mathrm{Tr}\, \left(A_\mu^{(Q)}QA^\mu - \overline{\lambda}^{(Q)}Q\lambda + \phi_i^{(Q)}Q\phi^i - c^{(Q)}Qc + \frac{g^2}{2}\overline{\lambda}^{(Q)}M\lambda^{(Q)}\right)\end{aligned} \tag{A.430}$$

The ambiguities of the quantum theory are fixed by the antighost Ward identities for $\bar{c}$

and b, and the following simplified supersymmetry Slavnov–Taylor identity

$$\mathcal{S}_{(Q)}(\mathscr{F}) \equiv \int d^4x \mathrm{Tr}\,\Big(\frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta A^\mu}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta A_\mu^{(Q)}} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \lambda}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \overline{\lambda}^{(Q)}} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta \phi^i}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta \phi_i^{(Q)}} + \frac{\delta^R \mathscr{F}}{\delta c}\frac{\delta^L \mathscr{F}}{\delta c^{(Q)}} \\ - i(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\Big(A_\nu^{(Q)}\partial_\mu A^\nu + \overline{\lambda}^{(Q)}\partial_\mu\lambda + \phi_i^{(Q)}\partial_\mu\phi^i + c^{(Q)}\partial_\mu c\Big) - b\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta\bar c} + i(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\partial_\mu\bar c\frac{\delta^L\mathscr{F}}{\delta b}\Big) \tag{A.431}$$

This identity is analogous to that in [99, 100, 114]. However, we now understand that c is not the Faddeev–Popov ghost, and observables must be defined in the enlarged theory.

This simplified process with less fields can be applied also for computing 1PI correlation functions with insertions of certain physical composite operators (we call them "simple" operators), as long as these operators do not mix through renormalization with BRST-exact operators (which would imply computing insertions of operators depending on other fields than the φ_{sub}). In practice, these "simple" operators are classically defined as the gauge-invariant polynomials in the physical fields that are in representations of $Spin(3,1)\times SU(4)$ in which there exist no BRST-exact operators of the same canonical dimensions that depend on the antighost $\bar\mu$, $\bar\Omega$ and $\bar c$ only through their derivatives. Examples of "simple" operators are the physical observable of canonical dimension $[\mathcal{O}] < 4$ and the BPS primary operators.

Renormalization of the action

Computing the counterterms of the restricted theory is the standard recursive process. We assume that the theory has been renormalized at a given order of perturbation theory, say n, by using the best available regularization, namely dimensional reduction, and renormalization conditions such that the supersymmetry Slavnov–Taylor identity and the so-called antighost Ward identities are satisfied. Within this scheme, finite gauge-invariant, but not supersymmetric, counterterms must occur after a certain order of perturbation theory. At a given order n, the action is thus of the following form

$$\Sigma^\flat = \frac{1}{g^2}\int d^4x \mathrm{Tr}\,\Big(-\frac14 F^\flat_{\mu\nu}F^{\flat\,\mu\nu} - D^\flat_\mu\phi^{\flat\,i}D^{\flat\,\mu}\phi^\flat_i + \frac{i}{2}\big(\overline{\lambda}^\flat \not{D}^\flat\lambda^\flat\big) \\ - \frac{g_1}{2}\big(\overline{\lambda}^\flat[\phi^\flat,\lambda^\flat]\big) - \frac{g_2}{4}[\phi^{\flat\,i},\phi^{\flat\,j}][\phi^\flat_i,\phi^\flat_j] + h_1\phi^{\flat\,\{i}\phi^{\flat\,j\}}\phi^\flat_{\{i}\phi^\flat_{j\}} + h_2\phi^{\flat\,i}\phi^\flat_i\phi^{\flat\,j}\phi^\flat_j\Big) \\ + \int d^4x\Big(g_3\mathrm{Tr}\,\phi^{\flat\,\{i}\phi^{\flat\,j\}}\mathrm{Tr}\,\phi^\flat_{\{i}\phi^\flat_{j\}} + h_3\mathrm{Tr}\,\phi^{\flat\,i}\phi^\flat_i\mathrm{Tr}\,\phi^{\flat\,j}\phi^\flat_j\Big) \\ + \int d^4x \mathrm{Tr}\,\Big(-b^\flat\partial^\mu A^\flat_\mu - \frac{\alpha^\flat}{2}{b^\flat}^2 + \bar c^\flat\partial^\mu\big(D^\flat_\mu c^\flat + i\mathrm{y}_1(\bar\epsilon\gamma_\mu\lambda^\flat)\big) + \mathrm{y}_2\frac{i\alpha^\flat}{2}(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\bar c^\flat\partial_\mu\bar c^\flat\Big)$$

$$+\int d^4x \mathrm{Tr}\,\Big(A^{(Q)\flat}_\mu\big(i\mathrm{x}_1(\bar\epsilon\gamma^\mu\lambda^\flat)+D^{\flat\,\mu}c^\flat\big)-\phi^{(Q)\,\flat}_i\big(\mathrm{x}_2(\bar\epsilon\tau^i\lambda^\flat)+[c^\flat,\phi^{\flat\,i}]\big)$$
$$+\overline{\lambda}^{(Q)\,\flat}\big(-\big[\mathrm{x}_3\not{F}^\flat+i\mathrm{x}_4\not{D}^\flat\phi^\flat+\frac{\mathrm{x}_5}{2}[\phi^\flat,\phi^\flat]+h_4\phi^{\flat\,i}\phi^\flat_i\big]\epsilon+[c^\flat,\lambda^\flat]\big)$$
$$+c^{(Q)\,\flat}\big(-\mathrm{x}_6(\bar\epsilon\phi^\flat\epsilon)+i\mathrm{x}_7(\bar\epsilon\not{A}^\flat\epsilon)+c^{\flat 2}\big)+\frac{g^2}{2}\overline{\lambda}^{(Q)\,\flat}N\lambda^{(Q)\,\flat}\Big)\quad\text{(A.432)}$$

The finiteness property of $\mathcal{N}=4$ implies that the coupling constant is not renormalized. In this expression, the index $\flat$ on top of a field φ indicates its multiplicative renormalization by an infinite factor $\sqrt{Z_\varphi}$, which is a Taylor series of order n in the coupling constant g^2. The sources $\varphi^{(Q)}$ are renormalized by the inverse factor $1/\sqrt{Z_\varphi}$ as a result of BRST Slavnov–Taylor identities for gauge invariance. The parameters g_I, h_I, x_I, y_I and the 32×32 symmetric matrix N (quadratic in ϵ)[33] are finite power series in g^2 of order n, which have been fined-tuned to enforce supersymmetry. In the simplest case of the $SU(2)$ gauge group, the parameters h_I are redundant and can be set to zero. This action permits us to perturbatively compute the renormalized 1PI generating functional Γ_n of the φ_{sub} at order n, such that the Slavnov–Taylor identity of supersymmetry is verified at this order. To obtain the action (A.432) at the following order $n+1$, we then use the minimal subtraction scheme with dimensional reduction, which defines the infinite factors Z_φ at order $n+1$. They yield as an intermediary result the "minimally" renormalized 1PI generating functional $\Gamma^{\text{min}}_{n+1}=\sum_{p=0}^n\Gamma_{(p)}+\Gamma^{\text{min}}_{(n+1)}$. The supersymmetry Slavnov–Taylor identity is possibly broken at $n+1$ order, as follows[34]

$$\mathcal{S}_{(Q)}(\Gamma^{\text{min}}_{n+1})=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\big(\Gamma_{(p)},\Gamma_{(n+1-p)}\big)+\mathcal{S}_{(Q)|\Sigma}\Gamma^{\text{min}}_{(n+1)}+\mathcal{O}(g^{2n+4})\quad\text{(A.433)}$$

Any given term in the right-hand side of Eq. (A.433) may be non-local, but the sum of these terms is a local functional of fields and sources, as is warranted by the quantum action principle. There is no supersymmetry anomaly [100][A.4] and the consistency relation $\mathcal{S}_{(Q)|\Gamma}\mathcal{S}_{(Q)}(\Gamma)=0$ implies the existence of the local functional $\Sigma^{\text{corr}}_{(n+1)}$ such that $\mathcal{S}_{(Q)}(\Gamma^{\text{min}}_{n+1}+\Sigma^{\text{corr}}_{(n+1)})=\mathcal{O}(g^{2n+4})$. Thus the component of order $n+1$ of the parameters

[33] N can be parametrized by five parameters as follows

$$N\equiv \mathrm{a}_1(\bar\epsilon\gamma^\mu\epsilon)\gamma_\mu+\mathrm{a}_2(\bar\epsilon\tau^i\epsilon)\tau_i+6\mathrm{a}_3(\bar\epsilon\gamma^{\mu\nu}\tau^{ijk}\epsilon)\gamma_{\mu\nu}\tau_{ijk}+2\mathrm{a}_4(\bar\epsilon\gamma_5\gamma^\mu\tau^{ij}\epsilon)\gamma_5\gamma_\mu\tau_{ij}+\mathrm{a}_5(\bar\epsilon\gamma_5\tau^i\epsilon)\gamma_5\tau_i$$

[34] $\big(\mathscr{F},\overline{\mathcal{G}}\big)$ is the antibracket

$$\int d^4x\mathrm{Tr}\,\Big(\frac{\delta^R\mathscr{F}}{\delta A^\mu}\frac{\delta^L\overline{\mathcal{G}}}{\delta A^{(Q)}_\mu}+\frac{\delta^R\mathscr{F}}{\delta\lambda}\frac{\delta^L\overline{\mathcal{G}}}{\delta\overline{\lambda}^{(Q)}}+\frac{\delta^R\mathscr{F}}{\delta\phi^i}\frac{\delta^L\overline{\mathcal{G}}}{\delta\phi^{(Q)}_i}+\frac{\delta^R\mathscr{F}}{\delta c}\frac{\delta^L\overline{\mathcal{G}}}{\delta c^{(Q)}}-\frac{\delta^R\mathscr{F}}{\delta A^{(Q)}_\mu}\frac{\delta^L\overline{\mathcal{G}}}{\delta A^\mu}+\frac{\delta^R\mathscr{F}}{\delta\lambda^{(Q)}}\frac{\delta^L\overline{\mathcal{G}}}{\delta\overline{\lambda}}-\frac{\delta^R\mathscr{F}}{\delta\phi^{(Q)}_i}\frac{\delta^L\overline{\mathcal{G}}}{\delta\phi^i}-\frac{\delta^R\mathscr{F}}{\delta c^{(Q)}}\frac{\delta^L\overline{\mathcal{G}}}{\delta c}\Big)$$

g_I, h_I, x_I, y_I and the matrix N can be modified in such a way that the resulting 1PI generating functional Γ_{n+1} satisfies the supersymmetry Slavnov–Taylor identity at order $n+1$.

The fine-tuning at order $n+1$ will be achieved if a large enough number of relations between 1PI Green functions are satisfied. They are obtained by suitable differentiations of the supersymmetry Slavnov–Taylor identity. The number of ambiguities removed by the Slavnov–Taylor identity is finite and corresponds to that of parameters of the action. Thus the relations between the 1PI Green functions only have to be implemented on their renormalization conditions. These relations must be expanded on Lorentz and gauge group invariant tensors.

The antighost Ward identities fix the ambiguities on the Green functions that contain the antishadow $\bar{c}$ and the b field. The identities

$$\begin{aligned} \big\langle \bar{c}^a(p)\lambda^b_\alpha\big\rangle &= -ip^\mu\big\langle A^{(Q)\,a}_\mu(p)\lambda^b_\alpha\big\rangle \\ \big\langle \bar{c}^a(p)\bar{c}^b\big\rangle &= \alpha(\bar{\epsilon}\not{p}\epsilon)\delta^{ab} - ip^\mu\big\langle A^{(Q)\,a}_\mu(p)\bar{c}^b\big\rangle + ip^\mu\big\langle A^{(Q)\,b}_\mu(-p)\bar{c}^a\big\rangle \end{aligned} \tag{A.434}$$

permit to compute the value of y_1 in function of x_1, and y_2 at the $n+1$ order.

We first use the components of the Slavnov–Taylor identity that expresses the closure of the supersymmetry algebra at the quantum level.[35]

$$\begin{aligned} \big\langle A^{(Q)\,a}_\mu(p)\overline{\lambda}^{\alpha\,c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\alpha\,c}(p)A^b_\nu\big\rangle + \big\langle A^{(Q)\,a}_\mu(p)c^c\big\rangle\big\langle c^{(Q)}_c(p)A^b_\nu\big\rangle + (\bar{\epsilon}\not{p}\epsilon)\delta^{ab}\eta_{\mu\nu} \\ + \big\langle A^b_\nu(-p)A^c_\sigma\big\rangle\big\langle A^{(Q)\,\sigma}_c(-p)A^{(Q)\,a}_\mu\big\rangle = 0 \end{aligned} \tag{A.435}$$

$$\big\langle c^{(Q)\,a}(p)A^c_\mu\big\rangle\big\langle A^{(Q)\,\mu}_c(p)\lambda^b_\alpha\big\rangle + \big\langle c^{(Q)\,a}(p)\phi^c_i\big\rangle\big\langle\phi^{(Q)\,i}_c(p)\lambda^b_\alpha\big\rangle + \big\langle\lambda^b_\alpha(-p)\overline{\lambda}^{\beta\,c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\,c}(-p)c^{(Q)\,a}\big\rangle = 0$$

$$\big\langle A^{(Q)\,a}_\mu(p)\overline{\lambda}^{\alpha\,c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\alpha\,c}(p)\phi^b_i\big\rangle + \big\langle A^{(Q)\,a}_\mu(p)c^c\big\rangle\big\langle c^{(Q)}_c(p)\phi^b_i\big\rangle + \big\langle\phi^b_i(-p)\phi^c_j\big\rangle\big\langle\phi^{(Q)\,j}_c(-p)A^{(Q)\,a}_\mu\big\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} &\big\langle\phi^{(Q)\,c}_k(p)\overline{\lambda}^{\alpha\,d}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\alpha\,d}(p)\phi^a_i(k)\phi^b_j\big\rangle + \big\langle\phi^{(Q)\,c}_k(p)\phi^a_i(k)c^d\big\rangle\big\langle c^{(Q)}_d(p+k)\phi^b_j\big\rangle \\ &+ \big\langle\phi^{(Q)\,c}_k(p)\phi^b_j(-p-k)c^d\big\rangle\big\langle c^{(Q)}_d(-k)\phi^a_i\big\rangle + \big\langle\phi^a_i(k)\phi^b_j(-p-k)A^d_\mu\big\rangle\big\langle A^{(Q)\,\mu}_d(-k)\phi^{(Q)\,c}_k\big\rangle = 0 \end{aligned}$$

These identities imply that the quantities x_I are functions of only two independent parameters. In turn, both parameters are determined from the following Slavnov–Taylor identities, which express the supersymmetry covariance of physical Green functions

$$\big\langle A^a_\mu(p)A^c_\nu\big\rangle\big\langle A^{(Q)\,\nu}_c(p)\lambda^b_\alpha\big\rangle + \big\langle\lambda^b_\alpha(-p)\overline{\lambda}^{\beta\,c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\,c}(-p)A^a_\mu\big\rangle = 0$$

[35] Repeated indices are summed.

$$\begin{gathered}\big\langle\phi^a_i(p)\phi^b_j(k)A^d_\mu\big\rangle\big\langle A^{(Q)\,\mu}_d(p+k)\lambda^c_\alpha\big\rangle+\big\langle\lambda^c_\alpha(-p-k)\overline{\lambda}^{\beta\,d}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\,d}(-p-k)\phi^a_i(p)\phi^b_j\big\rangle\\+\big\langle\lambda^c_\alpha(-p-k)\phi^a_i(p)\overline{\lambda}^{\beta\,d}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\,d}(-k)\phi^b_j\big\rangle+\big\langle\lambda^c_\alpha(-p-k)\phi^b_j(k)\overline{\lambda}^{\beta\,d}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\,d}(-p)\phi^a_i\big\rangle=0\end{gathered}\tag{A.436}$$

$$\begin{gathered}\big\langle\phi^{a_1}_{i_1}(p_1)\phi^{a_2}_{i_2}(p_2)\phi^{a_3}_{i_3}(p_3)\phi^c_j\big\rangle\big\langle\phi^{(Q)\,j}_c(p_1+p_2+p_3)\lambda^b_\alpha\big\rangle\\+\sum_{r\in\mathbb{Z}_3}\big\langle\lambda^b_\alpha(-p_1-p_2-p_3)\phi^{a_{1+r}}_{i_{1+r}}(p_{1+r})\phi^{a_{2+r}}_{i_{2+r}}(p_{2+r})\overline{\lambda}^{\beta\,c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\,c}(-p_{3+r})\phi^{a_{3+r}}_{i_{3+r}}\big\rangle\\+\sum_{r\in\mathbb{Z}_3}\big\langle\lambda^b_\alpha(-p_1-p_2-p_3)\phi^{a_{3+r}}_{i_{3+r}}(p_{3+r})\overline{\lambda}^{\beta\,c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\,c}(-p_{1+r}-p_{2+r})\phi^{a_{1+r}}_{i_{1+r}}(p_{1+r})\phi^{a_{2+r}}_{i_{2+r}}\big\rangle\\+\big\langle\lambda^b_\alpha(-p_1-p_2-p_3)\overline{\lambda}^{\beta\,c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\,c}(-p_1-p_2-p_3)\phi^{a_1}_{i_1}(p_1)\phi^{a_2}_{i_2}(p_2)\phi^{a_3}_{i_3}\big\rangle=0\end{gathered}$$

It remains to determine the matrix N, which is related to the term quadratic in the sources. This can be done using the identity

$$\begin{gathered}\big\langle\lambda^b_\beta(-p)\overline{\lambda}^{\gamma\,c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\gamma\,c}(-p)\overline{\lambda}^{(Q)\,\alpha\,a}\big\rangle+\big\langle\overline{\lambda}^{(Q)\,\alpha\,a}(p)A^c_\mu\big\rangle\big\langle A^{(Q)\,\mu}_c(p)\lambda^b_\beta\big\rangle\\+\big\langle\overline{\lambda}^{(Q)\,\alpha\,a}(p)\phi^c_i\big\rangle\big\langle\phi^{(Q)\,i}_c(p)\lambda^b_\beta\big\rangle+(\overline{\epsilon}\not{p}\epsilon)\delta^{ab}\delta^\alpha_\beta=0\end{gathered}\tag{A.437}$$

Renormalization of observables

We must also renormalize the part of the action that is linear in the sources u of the observables. Supersymmetry predicts that all observables contained in a given supermultiplet must have the same anomalous dimension, or, more generally, they must have the same mixing matrix with the observables of another supermultiplet. As for the ordinary Green functions, non-supersymmetric counterterms must be perturbatively computed for enforcing the Ward identities. The method of the preceding section can be generalized. We decompose each source into irreducible representations of $Spin(3,1)\times SU(4)$ and writes the most general gauge-invariant functional linear in the sources.

$$\begin{gathered}\Upsilon^\flat[u,v]=\int d^4x\Big(Z^{\mathrm{K}}\,u^i{}_i\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\;\phi^{\flat\,j}\phi^\flat_j+Z^{\mathrm{C}}\,u_{ij}\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\;\big(\phi^{\flat\,i}\phi^{\flat\,j}-\frac{1}{6}\delta^{ij}\phi^{\flat\,k}\phi^\flat_k\big)+Z^{\mathrm{K}}_1\,\overline{u}_i\tau^i\mathrm{Tr}\;\phi^\flat\lambda^\flat\\+Z^{\mathrm{C}}_1\,u^\alpha_i\mathrm{Tr}\;\big(\phi^{\flat\,i}\lambda^\flat-\frac{1}{6}\tau^i\phi^\flat\lambda^\flat\big)+Z^{\mathrm{K}}_2\,u_{[ijk]}\mathrm{Tr}\;\phi^{\flat\,i}[\phi^{\flat\,j},\phi^{\flat\,k}]+Z^{\mathrm{KC}}_2\,u_{[ijk]}\mathrm{Tr}\;\big(\frac{1}{3}\phi^{\flat\,i}\phi^{\flat\,j}\phi^{\flat k}+\frac{1}{8}\overline{\lambda}^\flat\tau^{ijk}\lambda^\flat\big)\\+Z^{\mathrm{CK}}_2\;{}^{\mathrm{C}}u_{ijk}\mathrm{Tr}\;\phi^{\flat\,i}[\phi^{\flat\,j},\phi^{\flat\,k}]+Z^{\mathrm{C}}_2\;{}^{\mathrm{C}}u_{ijk}\mathrm{Tr}\;\big(\frac{1}{3}\phi^{\flat\,i}\phi^{\flat\,j}\phi^{\flat\,k}+\frac{1}{8}\overline{\lambda}^\flat\tau^{ijk}\lambda^\flat\big)+\cdots\Big)\end{gathered}\tag{A.438}$$

There is an ambiguity corresponding to each one of the renormalization factors $Z^\bullet_I$, to be fixed by the supersymmetry Slavnov–Taylor identity. At a given order, we first perturbatively compute the infinite part of the renormalization factors. Then the finite part of the renormalization factors must be adjusted, as for ordinary Green functions.

Consider as the simplest cases the Konishi operator $\mathcal{O}^{\mathrm{K}} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \phi^i\phi_i$ and the $\frac{1}{2}$ BPS operator $\mathcal{O}^{ij}_{\mathrm{C}} \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ (\phi^i\phi^j - 1/6\,\delta^{ij}\phi^k\phi_k)$. The renormalization factors of the first two components of the associated supermultiplets are related because of the Ward identity

$$[\bar\epsilon \not p \tau^j]^\alpha \big\langle u_{ij}(p)\phi^a_k(k)\phi^b_l\big\rangle + \big\langle u^\alpha_i(p)\phi^a_k(k)\overline{\lambda}^{\beta\, c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\, c}(p+k)\phi^b_l\big\rangle + \big\langle u^\alpha_i(p)\phi^b_l(-p-k)\overline{\lambda}^{\beta\, c}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\, c}(-k)\phi^a_k\big\rangle = 0 \quad \text{(A.439)}$$

A less simple example, for which there could be non-supersymmetric couterterms with a mixing-matrix, is for the cubic operator Tr $\phi^i[\phi^j,\phi^k]$ of the Konishi multiplet. The global symmetries and power counting allow this operator to mix with Tr $\left(\frac{1}{3}\phi^{[i}\phi^j\phi^{k]} + \frac{1}{8}\overline{\lambda}\tau^{ijk}\lambda\right)$ of the $\frac{1}{2}$ BPS multiplet associated to $\mathcal{O}^{ij}_{\mathrm{C}}$. Both following identities

$$\begin{aligned}&3[\bar\epsilon\tau^{klm}\tau_j]^\alpha\big\langle u_{klm}(-p_1-p_2-p_3)\phi^{a_1}_{i_1}(p_1)\phi^{a_2}_{i_2}(p_2)\phi^{a_3}_{i_3}\big\rangle \\ &\qquad + 3[\bar\epsilon\tau_j\tau^{klm}]^\alpha\big\langle {}^{\mathrm{C}}u_{klm}(-p_1-p_2-p_3)\phi^{a_1}_{i_1}(p_1)\phi^{a_2}_{i_2}(p_2)\phi^{a_3}_{i_3}\big\rangle \\ &+ \sum_{r\in\mathbb{Z}_3}\big\langle u^\alpha_j(-p_1-p_2-p_3)\phi^{a_{3+r}}_{i_{3+r}}(p_{3+r})\overline{\lambda}^{\beta\, b}\big\rangle\big\langle\lambda^{(Q)}_{\beta\, b}(-p_{1+r}-p_{2+r})\phi^{a_{1+r}}_{i_{1+r}}(p_{1+r})\phi^{a_{2+r}}_{i_{2+r}}\big\rangle = 0\end{aligned} \quad \text{(A.440)}$$

$$\begin{aligned}&3[\bar\epsilon\tau^{jkl}\tau_i]^\gamma\big\langle u_{jkl}(p)\lambda^a_\alpha(k)\lambda^b_\beta\big\rangle + 3[\bar\epsilon\tau_i\tau^{jkl}]^\gamma\big\langle {}^{\mathrm{C}}u_{jkl}(p)\lambda^a_\alpha(k)\lambda^b_\beta\big\rangle \\ &+ \Big(\big\langle u^\gamma_i(p)\lambda^a_\alpha(k)\phi^c_j\big\rangle\big\langle\phi^{(Q)\,j}_c(p+k)\lambda^b_\beta\big\rangle - \big\langle u^\gamma_i(p)\lambda^b_\beta(-p-k)\phi^c_j\big\rangle\big\langle\phi^{(Q)\,j}_c(-k)\lambda^a_\alpha\big\rangle\Big)_{|[\tau^{jkl}]_{\alpha\beta}} = 0\end{aligned}$$

permit us to determine perturbatively the renormalization factors of these operators in function of those of $\mathcal{O}^{\mathrm{K}}$ and $\mathcal{O}^{ij}_{\mathrm{C}}$.

In fact, the renormalization factors of all the other components of the supermultiplet containing $\mathcal{O}^{\mathrm{K}}$ and $\mathcal{O}^{ij}_{\mathrm{C}}$ can be perturbatively computed as a function of those of the operators $\mathcal{O}^{\mathrm{K}}$ and $\mathcal{O}^{ij}_{\mathrm{C}}$.

Contact terms

After computing the renormalization of one insertion of "simple" physical operators in all Green function of fields φ_{sub}, we may want to compute their multicorrelators. The renormalization of these correlation functions possibly involves the addition of contact terms. Such conterterms cannot be generated in the minimal scheme prescription. However, dimensional reduction breaks supersymmetry, and we expect that finite contact-counterterms must be added to the action, for restoring supersymmetry. To compute these possible counterterms, we write the more general $Spin(3,1)\times SU(4)$-invariant action that depends only on the sources u, in a polynomial way

$$\Xi[u] = \frac{1}{2}\int d^4x \Big(\mathrm{z}_1 u^i{}_i u^j{}_j + \mathrm{z}_2 u^{ij} u_{ij} - i\mathrm{z}_3 \overline{u}_i \partial\!\!\!/ u^i - i\mathrm{z}_4 \overline{u}_i \tau^{ij} \partial\!\!\!/ u_j + \mathrm{z}_5 u^{[ijk]} \partial^\mu \partial_\mu u_{[ijk]} + \mathrm{z}_6 u^{\{ijk\}} \partial^\mu \partial_\mu u_{\{ijk\}} + \mathrm{z}_7 u_j{}^{ji} \partial^\mu \partial_\mu u^k{}_{ki} + \mathrm{z}_8 u^\mu_{ij} \partial^\nu \partial_\nu u^{ij}_\mu + \cdots \Big) \quad (A.441)$$

The values of renormalization factors $\mathrm{z_I}$ can then be computed, by imposing the supersymmetry Slavnov–Taylor identity, order by order in perturbation theory. As before, it is sufficient to enforce some identities between relevant correlation functions. The simplest identity

$$[p\!\!\!/ \tau_l \epsilon]_\alpha \big\langle u^{kl}(p) u^{ij} \big\rangle + [\overline{\epsilon} \tau^{\{i}]^\beta \big\langle u^{j\}}_\beta (p) u^k_\alpha \big\rangle = 0 \quad (A.442)$$

constrains z_3 and z_4 as functions of z_1 and z_2, and so on. In practice, we have to define renormalization conditions for each one of the classes of superficially divergent correlation functions that are not related by the supersymmetry Slavnov–Taylor identity. Within a given class, the renormalization conditions of all correlation functions are related by supersymmetry Slavnov–Taylor identities. The non-invariant contact counterterms can then be perturbatively computed by perturbatively enforcing these renormalization conditions.

A.7 Yang–Mills supersymétrique en dix dimensions

L. Baulieu, N. Berkovits, G. Bossard et A. Martin,

« Ten-dimensional super-Yang–Mills with nine off-shell supersymmetries »

à paraître dans Phys. Lett. B, `0705.2002 [hep-th]`.

N. Berkovits a établi en [117], qu'il était possible de construire une représentation de neuf des seize charges de supersymétrie de la théorie de Yang–Mills supersymétrique en dix dimensions, en introduisant sept champs scalaires auxiliaires G_a. Il introduisit pour ce faire des spineurs v_a à valeur dans la représentation fondamentale d'un $SO(7)$, qui vérifient les équations non linéaires en fonction des paramètres de supersymétrie ϵ

$$\bar{v}_a \hat{\Gamma}_\mu \epsilon = \bar{v}_a \; \hat{\Gamma}_\mu v_b - \delta_{ab} \, \bar{\epsilon} \, \hat{\Gamma}_\mu \epsilon = 0 \tag{A.443}$$

On explique dans cette publication, que l'invariance de la théorie par rapport à un sous super-groupe du super-groupe de super-Poincaré se restreignant à neuf charges de supersymétrie implique une restriction de l'invariance manifeste de la théorie à un sous groupe de $SO(1,9)$ qui admet une représentation de dimension sept dans la décomposition de la représentation de Majorana–Weyl. Il s'avère que le sous groupe maximal de $SO(1,9)$ qui admet une telle représentation est donné par $SO(1,1) \times Spin(7)$, où l'inclusion de $Spin(7)$ dans $SO(8)$ correspond à l'inclusion intervenant dans le twist de la théorie supersymétrique en dimension huit. Cette restriction de la covariance permet de définir des variables tordues en dix dimensions, qui correspondent à la décomposition des représentations pour la réduction explicite de l'espace, en le produit d'un espace de Minkowski bidimensionnel et d'un espace euclidien huit dimensionnel, suivie de la décomposition associée à la procédure de torsion en huit dimensions. Les scalaires G_a ainsi que les spineur v_a se transforment dans la représentation vectorielle de $Spin(7)$. On démontre alors que la solution générale aux contraintes sur les spineurs v_a impliquent la restriction des générateurs de supersymétrie à une charge vectorielle (spineur de $Spin(7)$) et une charge scalaire. Cette formulation de la théorie de Yang–Mills supersymétrique en dix dimensions s'avère être « l'oxydation » de la formulation tordue de la théorie en huit dimensions.

On montre que la formulation tordue de la théorie peut être déduite de la définition d'une courbure étendue, correspondant à une version « oxydée » de la courbure définie en dimension huit [A.1]. On construit une formulation dans le super-espace tordu de la théorie en fonction de neuf variables de Grassmann se décomposant en un scalaire et un spineur de $Spin(7)$. Les contraintes définissant le superchamp de jauge s'avèrent être données par une version tordue de la contrainte usuelle

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} + 2\gamma^m_{\alpha\beta}\mathcal{D}_m = 0 \tag{A.444}$$

ajoutée à la contrainte que le commutateur de la dérivée covariante dans la direction graduée impaire vectorielle ∇_a avec la dérivée covariante le long d'une direction de l'espace huit dimensionnel D_a, a une composante antisymétrique autoduale nulle

$$[\nabla_a, D_b] - [\nabla_b, D_a] + \frac{1}{3}\Omega_{ab}{}^{cd}[\nabla_c, D_d] = 0 \tag{A.445}$$

Cette dernière contrainte permet de réduire au huitième les composantes indépendantes de la solution générale de la première, de manière à ce que le multiplet transverse qu'elles décrivent puisse être détordu en fonction de représentations de $Spin(9,1)$. On montre que la solution générale de ces contraintes correspond à la formulation tordue de la théorie définie dans cet article. On a été en mesure d'écrire l'action de la théorie en fonction des superchamps, en utilisant le fait que celle-ci est $s\delta$-exacte en composantes. Cette définition de l'action présente quelques similitudes avec le formalisme dans les super-espaces harmoniques.

Notons qu'il a récemment été découvert que les contraintes de N. Berkovits sur les spineurs v_a admettent une solution non linéaire en fonction d'un spineur complexe non pur, qui permet de définir une représentation fonctionnelle de la supersymétrie maximale covariante par rapport à $Spin(9,1)$ [118]. Cette représentation de la supersymétrie est cependant de nature inusuelle, puisque les transformations de supersymétrie ne sont pas linéaires dans le spineur pair paramètre de supersymétrie, mais sont seulement des fonctions homogènes de ce dernier.

Ten-dimensional super-Yang–Mills with nine off-shell supersymmetries

abstract

After adding 7 auxiliary scalars to the d=10 super-Yang–Mills action, 9 of the 16 supersymmetries close off-shell. In this paper, these 9 supersymmetry generators are related by dimensional reduction to scalar and vector topological symmetry in $\mathcal{N}$=2 d=8 twisted super-Yang–Mills. Furthermore, a gauge-invariant superspace action is constructed for d=10 super-Yang–Mills where the superfields depend on 9 anticommuting θ variables.

A.7.1 Introduction

The off-shell field content of 10-dimensional super-Yang–Mills theory has an excess of seven fermionic degrees of freedom as compared to the number of gauge invariant bosonic degrees of freedom. To balance this mismatching, it was proposed in [117] to add to the supersymmetry transformation laws a set of seven auxiliary scalar fields G_a, together with a $\sum_a G_a^2$ term in the action. In order for the algebra to close off-shell, the parameters associated with the supersymmetry transformations must obey some identities. However, there is no linear solution to these identities, and thus no conventional supersymmetric formulation which permits the algebra to completely close.

It has been demonstrated in [117] that it is impossible to construct more than nine consistent solutions of these identities. Thus, only nine supersymmetry generators can generate an algebra that closes off-shell. These nine supersymmetry generators in ten-dimensional super-Yang–Mills are related to the octonionic division algebra in the same manner that the supersymmetry generators in three-, four-, and six-dimensional super-Yang–Mills are related to the real, complex, and quaternionic division algebras. However, the non-associativity of octonions makes the ten-dimensional supersymmetry algebra more complicated than in the other dimensions.

On the other hand, the $\mathcal{N} = 2$ twisted 8-dimensional super-Yang–Mills theory, which is a particular dimensional reduction of the 10-dimensional theory, has been determined in [A.1] by the invariance under a subalgebra of the maximal Yang–Mills supersymmetry. This subalgebra is small enough to close independently of equations of motion with a finite set of auxiliary fields, and yet is large enough to determine the Yang–Mills supersymmetric theory. It is also made of nine generators. The latter can be geometrically understood and constructed as scalar and vector topological Yang–Mills symmetries. This 8-dimensional topological symmetry can be built independently of the notion of supersymmetry, but, surprisingly, the latter symmetry with 16 generators can be fully recovered at the end of the construction.

The aim of this paper is to make a bridge between the results of [117] and [A.1]. We will find that in 10-dimensional flat space with Lorentz group $SO(1,9)$ reduced to $SO(1,1)\times Spin(7)$, the supersymmetry algebra can be twisted such that the 10-dimensional super-Yang–Mills theory is determined by a supersymmetry algebra with 9 generators, which is related by dimensional reduction to the twisted $\mathcal{N}=2$ 8-dimensional super-Yang–Mills theory. Reciprocally, the extended curvature equation of the $\mathcal{N}=2$ 8-dimensional supersymmetric theory can be "oxidized" into an analogous 10-dimensional equation that determines the supersymmetry algebra and 10-dimensional super-Yang–Mills action. We argue that the largest symmetry group that can preserve an off-shell subalgebra of supersymmetry is $SO(1,1)\times Spin(7)$, and we obtain the most general $SO(1,1)\times Spin(7)$ covariant solution of the identities defined in [117]. The supersymmetry algebra that we derive is exactly the one obtained by the twist operation.

We then define a superspace involving nine Grassmann θ variables such that the off-shell supersymmetry subalgebra acts in a manifest way on the super-Yang–Mills superfields. Using these off-shell superfields, a superspace action is constructed which reproduces the ten-dimensional super-Yang–Mills action including the seven auxiliary scalar fields G_a. Although this superspace action is manifestly invariant under only a $Spin(7)\times SO(1,1)$ subgroup of $SO(9,1)$, it is manifestly invariant under nine supersymmetries as well as gauge transformations. This can be compared with the light-cone superspace action for ten-dimensional super-Yang–Mills which is manifestly invariant under eight supersymmetries and an $SO(8)\times SO(1,1)$ (or $U(4)\times SO(1,1)$) subgroup of $SO(9,1)$, but is not manifestly invariant under gauge transformations.

A.7.2 Ten dimensional super-Yang–Mills with auxiliary fields

The Poincaré supersymmetric Yang–Mills theory in ten dimensional Minkowski space contains a gauge field A_μ ($\mu=1,\cdots 10$) and a sixteen-component Majorana–Weyl spinor Ψ, with values in the Lie algebra of some gauge group. In order to balance the gauge-invariant off-shell degrees of freedom, one can introduce a set of scalar fields G_a ($a=1,\cdots 7$) which count for the 7 missing bosonic degrees of freedom [117]. The Lagrangian is given by

$$\mathcal{L} = \mathrm{Tr}\ \{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}(\bar{\Psi}\hat{\Gamma}^{\mu}D_{\mu}\Psi) + 8G_aG_a\} \tag{A.446}$$

where $\hat{\Gamma}^{\mu}$ are the ten-dimensional gamma matrices. As shown in [117], the action (A.446) is invariant under the following supersymmetry transformations, which depend on the ordinary Majorana–Weyl parameter ϵ and on seven other spinor parameters v_a

$$\begin{aligned} \delta A_{\mu} &= i\bar{\epsilon}\hat{\Gamma}_{\mu}\Psi \\ \delta\Psi &= \hat{\Gamma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\epsilon + 4G_a v_a \qquad (A.447) \\ \delta G_a &= -\frac{i}{4}\bar{v}_a\hat{\Gamma}^{\mu}D_{\mu}\Psi \qquad (A.448) \end{aligned}$$

The commuting spinor parameters v_a must be constrained as follows

$$\bar{v}_a\hat{\Gamma}_{\mu}\epsilon = \bar{v}_a\ \hat{\Gamma}_{\mu}v_b - \delta_{ab}\bar{\epsilon}\hat{\Gamma}_{\mu}\epsilon = 0 \tag{A.449}$$

The transformations (A.447) generate a closed algebra modulo gauge transformations and equations of motion

$$\{\delta,\hat{\delta}\} \approx -2i\bar{\epsilon}\hat{\Gamma}^{\mu}\hat{\epsilon}\,\partial_{\mu} - 2i\delta^{\mathrm{gauge}}(\bar{\epsilon}\hat{\Gamma}^{\mu}A_{\mu}\hat{\epsilon}) \tag{A.450}$$

and close independently of equations of motion when

$$(\hat{\epsilon},\hat{v_a}) \tag{A.451}$$

is some linear combination of $(\hat{\Gamma}^{\mu\nu}\epsilon,\hat{\Gamma}^{\mu\nu}v_a)$. To recover conventional supersymmetry transformations, one must have a solution for v in (A.449) that is linear in ϵ. This in turn will give a realisation of (A.450) which, thanks to (A.451), will effectively hold off-shell.

Using octonionic notations and light-cone coordinates, a solution was found for the v's and ϵ in [117] that preserves nine supersymmetries. This solution is only covariant under $SO(1,1)\times Spin(7) \subset SO(1,9)$. In fact, in order to define the v's as linear combinations of ϵ, we must reduce the covariance to a subgroup H that admits a 7-dimensional representation. Moreover, since the maximal sub-algebra that can be closed off-shell contains 9 supersymmetry generators, the Majorana–Weyl spinor representation of $Spin(1,9)$ must decompose into $\mathbf{7}+\mathbf{9}$ of H. The biggest subgroup of $SO(1,9)$ that satisfies these criteria is $SO(1,1)\times Spin(7)$.

Light-cone variables

The choice of light-cone variables implies a reduction of the Lorentz group as

$$SO(1,9) \rightarrow SO(8)\times SO(1,1) \tag{A.452}$$

where the spinor $\Psi \in \mathbf{16}_+$ of $SO(1,9)$ decomposes into one chiral and one antichiral spinor of $Spin(8)$, $\Psi \to \lambda_1 \oplus \lambda_2 \in \mathbf{8}_+^{-1} \oplus \mathbf{8}_-^{1}$, as well as $\epsilon \to \epsilon_1 \oplus \epsilon_2$ and $v_a \to v_{a1} \oplus v_{a2}$. The connection $A_\mu \in \mathbf{10}$ of $SO(1,9)$ decomposes according to $A_\mu \to A_i \oplus A_+ \oplus A_- \in \mathbf{8_v^0} \oplus \mathbf{1^2} \oplus \mathbf{1^{-2}}$ of $SO(8)\times SO(1,1)$, where the superscripts denote the eigenvalue associated with the $SO(1,1)$ factor and $A_\pm = A_0 \pm A_9$.

We can consider a gamma matrix algebra of $Cl(1,9)$ in terms of gamma matrices of $Cl(0,8)$

$$\begin{aligned}
\hat\Gamma_0 &= (i\sigma_2)\otimes\Gamma_9 \\
\hat\Gamma_i &= \sigma_2\otimes\Gamma_i \qquad (i=1\dots 8) \\
\hat\Gamma_9 &= \sigma_1\otimes 1
\end{aligned} \tag{A.453}$$

and $\hat\Gamma_{11}\Psi = \sigma_3\otimes 1\,\Psi = \Psi$. These matrices obey $[\hat\Gamma_\mu,\hat\Gamma_\nu] = 2\,\eta_{\mu\nu}$, with the metric $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,+1,\dots,+1)$ and $[\Gamma_i,\Gamma_j] = 2\,\delta_{ij}$. The decomposition $SO(1,9)\to SO(8)\times SO(1,1)$ is performed by taking $A_\pm = A_0 \pm A_9$ and by projecting Ψ to $\hat\Gamma_+\Psi \to \lambda_2$ and $\hat\Gamma_-\Psi\to\lambda_1$, with $\Gamma_9\lambda_1 = \lambda_1$ and $\Gamma_9\lambda_2 = -\lambda_2$.

The transformations laws (A.447) read

$$\begin{aligned}
\delta A_i &= -i\bar\epsilon\Gamma_i\lambda \\
\delta A_+ &= -2\bar\epsilon_2\lambda_2 \\
\delta A_- &= 2\bar\epsilon_1\lambda_1 \\
\delta\lambda_1 &= (F_{ij}\Gamma_{ij} + \frac{1}{2}F_{+-})\epsilon_1 + iF_{i-}\Gamma_i\epsilon_2 + 4G_a v_{a1} \\
\delta\lambda_2 &= (F_{ij}\Gamma_{ij} - \frac{1}{2}F_{+-})\epsilon_2 - iF_{i+}\Gamma_i\epsilon_1 + 4G_a v_{a2} \\
\delta G_a &= \frac{i}{4}\bar v_a\Gamma_i D_i\lambda + \frac{1}{4}\bar v_{a1}D_+\lambda_1 - \frac{1}{4}\bar v_{a2}D_-\lambda_2
\end{aligned} \tag{A.454}$$

together with the constraints

$$\bar v_a\Gamma_i\epsilon = \bar v_{a1}\epsilon_1 = \bar v_{a2}\epsilon_2 = 0 \tag{A.455}$$

$$\bar v_{a1}v_{b1} = \delta_{ab}\bar\epsilon_1\epsilon_1 \qquad \bar v_a\Gamma_i v_b = \delta_{ab}\bar\epsilon\Gamma_i\epsilon \qquad \bar v_{a2}v_{b2} = \delta_{ab}\bar\epsilon_2\epsilon_2$$

The Lagrangian is given by

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = Tr\Big(&-\frac{1}{4}(F^{ij})(F_{ij}) - \frac{1}{4}(F^{i+})(F_{i+}) - \frac{1}{4}(F^{i-})(F_{i-}) - \frac{1}{8}(F^{+-})(F_{+-}) \\
&-\frac{i}{2}\bar\lambda\Gamma_i D_i\lambda - \frac{1}{2}\bar\lambda_1 D_+\lambda_1 + \frac{1}{2}\bar\lambda_2 D_-\lambda_2 + 8(G_a)^2\Big).
\end{aligned} \tag{A.456}$$

Twisted variables

In [117], the light-cone projections ϵ_1 and ϵ_2 of the spinor parameter are expressed in terms of octonions and the imaginary components of ϵ_1 are set to zero, that is ϵ_1 is taken real. Formally, the reality constraint on the supersymmetry parameter ϵ_1 implies the decomposition of the corresponding representation $\mathbf{8}_+ \rightarrow \mathbf{1} \oplus \mathbf{7}$ associated to the inclusion $Spin(7) \subset Spin(8)$[36]

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \in \mathbf{8}_+ &\rightarrow \mathbf{1} \oplus \mathbf{7} \\ \epsilon_2 \in \mathbf{8}_- &\rightarrow \quad \mathbf{8} \end{aligned} \tag{A.457}$$

where $\mathbf{1}$,$\mathbf{7}$ and $\mathbf{8}$ define the scalar, vectorial respectively spinorial representations of $Spin(7)$. The reality constraint is then equivalent to retaining just the singlet part of ϵ_1, isolating 9 supersymmetries.

For expressing the decomposition $SO(8) \rightarrow Spin(7)$, it is convenient to introduce projectors onto the irreducible representations of $Spin(7)$. In order to do so, we use the spinor ζ scalar of $Spin(7)$. We take it chiral and of norm 1 and define

$$(4!)\bar{\zeta}\Gamma_{ijkl}\zeta \equiv \Omega_{ijkl} \quad \text{with} \quad \bar{\zeta}\zeta = 1, \tag{A.458}$$

where Ω_{ijkl} stands for the octonionic $Spin(7)$ invariant 4-form. It can be used to construct orthogonal projectors to decompose the adjoint representation $\mathbf{28}$ of $Spin(8)$ into the irreducible $Spin(7)$ ones $\mathbf{21} \oplus \mathbf{7}$

$$\begin{aligned} P^{+\ kl}_{ij} &\equiv \frac{3}{4}(\delta^{kl}_{ij} + \frac{1}{6}\Omega^{kl}_{ij}) \\ P^{-\ kl}_{ij} &\equiv \frac{1}{4}(\delta^{kl}_{ij} - \frac{1}{2}\Omega^{kl}_{ij}) \end{aligned} \tag{A.459}$$

The supersymmetry parameter can then be expressed as

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \bar{\omega}\zeta + \Gamma_{ij}\nu^{ij}\zeta \\ \epsilon_2 &= i\Gamma_i\varepsilon^i\zeta \end{aligned} \tag{A.460}$$

where $\nu_{ij} = P^{-\ kl}_{ij}\nu_{kl}$. This provides us with a decomposition of the supersymmetry generators as an antiselfdual tensorial charge δ_{ij}, a scalar charge δ_0 and a vectorial charge δ_i, of which we will retain just the scalar and vectorial ones.

[36] A discussion of various solutions of (A.449) can be found in [119] together with their invariance groups. In particular, a solution is presented preserving nine supersymmetries, but with a reduction of $SO(1,9) \rightarrow G_2 \times SO(1,1)$.

Decoupling and resolution of the constraints

In terms of $Spin(7)$ representations, the relations (A.455) together with the explicit expression for the supersymmetry paramaters (A.460) read

$$\bar{v}_1^{ij}(\bar{\omega}+\nu^{kl}\Gamma_{kl})\zeta=0,\quad \bar{v}_1^{ij}\Gamma_m i\varepsilon^k\Gamma_k\zeta+\bar{v}_2^{ij}\Gamma_m(\bar{\omega}+\nu^{kl}\Gamma_{kl})\zeta=0,\quad \bar{v}_2^{ij}i\varepsilon^k\Gamma_k\zeta=0 \tag{A.461}$$
$$\bar{v}_{1ij}v_1^{kl}=8P^{-}_{ij}{}^{kl}(\bar{\omega}^2+2|\nu|^2),\ \ \bar{v}_{ij}\Gamma_m v^{kl}=16iP^{-}_{ij}{}^{kl}(\bar{\omega}\varepsilon_m+4\varepsilon^n\nu_{mn}),\ \ \bar{v}_{2ij}v_2^{kl}=-8P^{-}_{ij}{}^{kl}|\varepsilon|^2$$

In order to find the most general covariant solution for v_{ij} that is linear in the supersymmetry parameters, we consider

$$\begin{aligned} v_1^{ij} &= a\bar{\omega}\Gamma^{ij}\zeta+e\nu^{ij}\zeta+f\nu_{kl}\Gamma^{ijkl}\zeta\\ v_2^{ij} &= b\varepsilon^k\Gamma_k\Gamma^{ij}\zeta+c\varepsilon^{[i}\Gamma^{j]-}\zeta \end{aligned} \tag{A.462}$$

from which we can show, remembering that all terms, but $\bar{\zeta}\zeta$ and $\bar{\zeta}\Gamma_{ijkl}\zeta$, vanish, that (A.461) is verified for the solution $\nu^{ij}=0$, $a=-ib=2$ and $c=0$, that is

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \bar{\omega}\zeta & v_1^{ij} &= 2\bar{\omega}\Gamma^{ij}\zeta\\ \epsilon_2 &= i\Gamma_i\varepsilon^i\zeta & v_2^{ij} &= 2i\varepsilon^k\Gamma_k\Gamma^{ij}\zeta \end{aligned}$$

As expected, this solution provides us with a set of nine components parameterized by $\bar{\omega}$ and ε^i, which form the maximal set of supersymmetry generators that can generate an off-shell algebra.

The fields of the theory decompose according to

$$\begin{aligned} \lambda_1\in\mathbf{8}_+ &\rightarrow \mathbf{1}\oplus\mathbf{7}\\ \lambda_2\in\mathbf{8}_-,\ A_i\in\mathbf{8_v} &\rightarrow \quad\mathbf{8} \end{aligned} \tag{A.463}$$

and G_a is reexpressed in terms of $G^{-}_{ij}\in\mathbf{7}$ as $G_{8a}=G_a$ and $G_{ab}=C_{ab}{}^cG_c$, where $C_{ab}{}^c$ are the structure constants of the imaginary octonions. One has explicitly

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \eta\zeta+\Gamma_{ij}\chi^{ij}\zeta\\ \lambda_2 &= i\Gamma_i\psi^i\zeta \end{aligned} \tag{A.464}$$

and

$$\begin{aligned} \eta &= \bar{\zeta}\lambda_1\\ \chi_{ij} &= -\frac{1}{2}\bar{\zeta}\Gamma_{ij}\lambda_1\\ \psi_i &= -i\bar{\zeta}\Gamma_i\lambda_2 \end{aligned} \tag{A.465}$$

where $\chi_{ij} = P^{-\ kl}_{ij}\chi_{kl}$. The supersymmetry transformations are now generated by

$$\delta^{Susy} = \bar{\omega}\delta_0 + \varepsilon^i\delta_i \tag{A.466}$$

We display here the resulting transformation laws in a form which is more convenient with respect to the approach related to theories of cohomological type (called BRSTQFTs in the terminology of [16, 122]) of the next section. That is, we redefine $G_{ij} \to G_{ij} - P^{-kl}_{ij}F_{kl}$ and redefine some of the fields by scale factors to get

$$\begin{aligned}
\delta_0 A_i &= \psi_i \\
\delta_0 A_+ &= 0 \\
\delta_0 A_- &= \eta \\
\delta_0 \psi_i &= -F_{i+} \\
\delta_0 \eta &= F_{+-} \\
\delta_0 \chi_{ij} &= G_{ij} \\
\delta_0 G_{ij} &= D_+\chi_{ij}
\end{aligned} \tag{A.467}$$

$$\begin{aligned}
\delta_i A_j &= -\delta_{ij}\eta - \chi_{ij} \\
\delta_i A_+ &= -\psi_i \\
\delta_i A_- &= 0 \\
\delta_i \psi_j &= F_{ij} + G_{ij} + \delta_{ij}F_{+-} \\
\delta_i \eta &= F_{i-} \\
\delta_k \chi_{ij} &= 8P^{-\ l}_{ijk}F_{l-} \\
\delta_k G_{ij} &= D_k\chi_{ij} - 8P^{-\ l}_{ijk}(D_l\eta - D_-\psi_l)
\end{aligned} \tag{A.468}$$

The algebra closes independently of the equations of motion as

$$\begin{aligned}
\delta_0^2 &= \partial_+ + \delta^{\text{gauge}}(A_+) \\
\delta_{\{i}\delta_{j\}} &= \delta_{ij}(\partial_- + \delta^{\text{gauge}}(A_-)) \\
\{\delta_0, \delta_i\} &= \partial_i + \delta^{\text{gauge}}(A_i)
\end{aligned} \tag{A.469}$$

and the action becomes

$$\begin{aligned}
S = \int_M d^{10}x \,\mathrm{Tr}\, \Big(&\frac{1}{2}G^{ij}(F_{ij} + \frac{1}{4}G_{ij}) - \chi^{ij}(D_i\psi_j + \frac{1}{8}D_+\chi_{ij}) + \eta D_i\psi^i + \\
&+(F^i{}_-)(F_{i+}) - \psi^i D_-\psi_i + (F_{+-})^2 - \eta D_+\eta\Big).
\end{aligned} \tag{A.470}$$

The formal dimensional reduction on the "Minkowski torus" consists trivially here to neglect the non-zero modes of the operators $\partial_\pm$. Doing so we recover the eight-dimensional cohomological action and its twisted supersymmetry algebra, obtained in [A.1] by twisting the eight-dimensional theory. In the next section, we discuss this link to eight-dimensional cohomological theory in more details.

A.7.3 Link with eight-dimensional Yang–Mills BRSTQFT

In this section, we will directly obtain the light-cone twisted subalgebra of 10-dimensional super-Yang–Mills of the last section. It will close off-shell by construction and will be inspired by the analogous known subalgebra of maximal twisted[37] supersymmetry in 8 dimensions.

The eight-dimensional algebra has been built [A.1] from the scalar and vector topological symmetries with $9 = 1 + 8$ generators that can be algebraically constructed. These 9 generators build a maximally closed and consistent sector of the twisted $\mathcal{N} = 2$, $d = 8$ Yang–Mills supersymmetry. Invariance under this subalgebra completely determines the Yang–Mills supersymmetric action. The full on-shell supersymmetry is recovered in this way and one can then interpret the invariance of the action under the 7 additional supercharges as accidental.

The 8-dimensional BRSTQFT formula

The nine 8-dimensional supersymmetry generators can be encoded in a graded differential operator Q which depends on nine twisted supersymmetry parameters consisting of one scalar $\bar{\omega}$ and one eight-dimensional vector ε.

Using the notation of [A.1], Q satisfies the horizontality condition in eight dimensions

$$\begin{aligned}\hat{F}_8 &\equiv (d + Q - \bar{\omega} i_\varepsilon)(A + c) + (A + c)^2 \\ &= F + \bar{\omega}\psi + \delta(\epsilon)\eta + i_\varepsilon\chi + \bar{\omega}^2\Phi + |\varepsilon|^2\bar{\Phi}.\end{aligned} \tag{A.471}$$

In Eq. (A.471), all fields are forms taking values in the Lie algebra of the gauge group. For example, $A = A_i dx^i$ is the Yang–Mills connection where $i = 1$ to 8, Φ and $\bar{\Phi}$ are scalars, and $F = dA + AA$ is a two-form. Furthermore, $\Psi = \Psi_i dx^i$ is a 1-form, $\chi = \frac{1}{2}\chi_{ij} dx^i dx^j$ is an antiselfdual 2-form with seven independent components, and η is a scalar field where $(\Psi_i, \chi_{ij}, \eta)$ are twisted Fermi spinors. Moreover, d is the usual exterior

[37] Here, the word twist means the mapping between forms and spinors that is allowed reducing the $SO(8)$ covariance down to $Spin(7)$ [16, 122].

differential $d = \partial_i dx^i$, i_v is the contraction operator along the vector v, $i_\varepsilon dx^i = \varepsilon^i$, and $\delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon^i \delta_{ij} dx^j$.

Finally, the anticommuting scalar field c is a shadow field. It plays an important role by closing the supersymmetry without field-dependent gauge transformations in the right-hand-side of commutators, and, eventually, for quantizing the theory [A.4]. There is no need at this stage to introduce a Faddeev–Popov ghost. Note that all fields and operators have a grading that is the sum of shadow number and ordinary form degree.

The closure of Q is ensured by the Bianchi identity, which also determines the action of the symmetry on the fields on the right-hand-side of Eq. (A.471). By expanding the equation

$$\begin{aligned}&(d + Q - \bar\omega i_\varepsilon)(F + \bar\omega\psi + \delta(\epsilon)\eta + i_\varepsilon\chi + \bar\omega^2\Phi + |\varepsilon|^2\bar\Phi)\\ &+[A + c,\, F + \bar\omega\psi + \delta(\epsilon)\eta + i_\varepsilon\chi + \bar\omega^2\Phi + |\varepsilon|^2\bar\Phi] = 0,\end{aligned} \tag{A.472}$$

one finds that the action of the operator Q on the fields can be decomposed into a gauge transformation with parameter c and a supersymmetry transformation $\delta^{\mathcal{S}usy}$ with 9 twisted parameters $\bar\omega$ and ε as

$$Q = \delta^{\mathcal{S}usy} - \delta^{\mathrm{gauge}}(c) = \bar\omega\delta_0 + \varepsilon^i\delta_i - \delta^{\mathrm{gauge}}(c). \tag{A.473}$$

The off-shell closure of $\delta^{\mathcal{S}usy}$ follows from the identity $Q^2 = \bar\omega\mathcal{L}_\varepsilon$. Notice that no gauge transformation is involved in this equation.

Light-cone 10-dimensional equation

We may understand Eq. (A.471) as a light-cone projection of an analogous equation in 10 dimensions. In order to determine the subalgebra of the 10-dimensional theory, we "oxidize" this equation by introducing light-cone modes (∂_+,∂_-) and redefining $(\Phi, \bar\Phi) \to (A_+, A_-)$ in such a way that

$$Spin(7) \times \mathbb{R}^*_+ \cong Spin(7) \times SO(1,1) \subset SO(8) \times SO(1,1) \subset SO(1,9). \tag{A.474}$$

In this way, we can interpret the scalar fields in the right-hand-side of Eq. (A.471) as elements of a connexion in 10 dimensions. They can be carried to the left-hand-side of the horizontality condition (A.471), which thus appears as the dimensional reduction of the 10-dimensional condition

$$\begin{aligned}\hat F_{10} &\equiv (d + Q - \bar\omega i_\varepsilon - \bar\omega^2 i_+ - |\varepsilon|^2 i_-)(A + c) + (A + c)^2\\ &= F + \bar\omega(\psi + \eta dx^-) + (\delta(\epsilon)\eta + i_\varepsilon\chi + i_\varepsilon\psi\, dx^+).\end{aligned} \tag{A.475}$$

Eq. (A.475) has the Bianchi identity

$$\begin{aligned}(d+Q-\bar{\omega}i_\varepsilon-\bar{\omega}^2 i_+-|\varepsilon|^2 i_-)(F+\bar{\omega}(\psi+\eta dx^-)+(\delta(\epsilon)\eta+i_\varepsilon\chi+i_\varepsilon\psi\, dx^+))\\ +[A+c,F+\bar{\omega}(\psi+\eta dx^-)+(\delta(\epsilon)\eta+i_\varepsilon\chi+i_\varepsilon\psi\, dx^+)]=0,\end{aligned} \tag{A.476}$$

which insures that $(d+Q-\bar{\omega}i_\varepsilon-\bar{\omega}^2 i_+-|\varepsilon|^2 i_-)^2=0$.

By expansion according to the various gradings, we obtain 10-dimensional transformation laws for all fields, which exactly reproduce those described earlier and determined by a mere twist of supersymmetry transformations. The self-dual 2 form auxiliary fields G_{ij} with seven degrees of freedom is now introduced here in the standard TQFT way, by solving the degenerate equations $\delta_0\chi_{ij}+\delta_i\Psi_j+\cdots=0$. As a consequence of the Bianchi identity, the algebra of generators δ_0 and δ_i closes independently of any equations of motion, as expressed in the preceding section. Let us stress again the relevance of the shadow c for supressing field dependent gauge transformations in the commutators of supersymmetries.

The 10-dimensional action (assuming no higher-derivative terms) is completely determined from the Q-invariance with the nine parameters $\bar{\omega}$ and ε_i. As in [A.1], one can show that the most general Q-invariant expression, which is independent of ε_i and contains no higher order derivative terms, can be written either as a δ_0-exact or as a δ_i-exact functional up to a topological term

$$\begin{aligned}S&=\delta_0\mathbf{Z}^{(-1)}-\frac{1}{8}\int_M d^{10}x\,\mathrm{Tr}\left(\Omega^{ijkl}F_{ij}F_{kl}\right)\\ &=\varepsilon^i\delta_i\mathbf{Z}^{(+1)}+\frac{1}{8}\int_M d^{10}x\,\mathrm{Tr}\left(\Omega^{ijkl}F_{ij}F_{kl}\right)\end{aligned} \tag{A.477}$$

where $\mathbf{Z}^{(-1)}$ and $\mathbf{Z}^{(+1)}$ are completely fixed respectively by the δ_i and δ_0 symmetries, i.e. $\delta_i\mathbf{Z}^{(-1)}=\delta_0\mathbf{Z}^{(+1)}=0$.

As will be shown in the following section, this matches the Lagrangian obtained by twist in (A.470). We have thus obtained an off-shell formulation of ten-dimensional super-Yang–Mills from the eight-dimensional Yang–Mills BRSTQFT.

A.7.4 Toward a twisted superspace formulation

The fact that we are able to obtain a subalgebra that closes without the use of the equations of motion suggests that there should exist an off-shell superspace formulation of ten dimensional super-Yang–Mills. Since there are nine off-shell supersymmetry generators, it is natural to define a superspace with nine anticommuting variables. Let us define the reduced superspace with vector coordinates θ^i (spinor representations of $Spin(7)$) and scalar coordinate θ. We define superspace derivatives

$$\hat{\nabla} = \frac{\partial}{\partial\theta} - \theta\partial_+, \qquad \hat{\nabla}_i = \frac{\partial}{\partial\theta^i} - \theta\partial_i - \theta_i\partial_-,$$
$$\partial_+, \qquad \partial_-, \qquad \partial_i, \tag{A.478}$$

which obey

$$\hat{\nabla}^2 = -\partial_+, \qquad \hat{\nabla}_{\{i}\hat{\nabla}_{j\}} = -\delta_{ij}\partial_-, \qquad \{\hat{\nabla}, \hat{\nabla}_i\} = -\partial_i, \tag{A.479}$$

with all other commutators equal to zero. For each of the superspace derivatives, we introduce a corresponding gauge connection superfield and define the covariant superderivatives

$$\nabla = \hat{\nabla} + \mathbb{C}, \qquad \nabla_i = \hat{\nabla}_i + \mathbf{\Gamma}_i,$$
$$\mathcal{D}_+ = \partial_+ + \mathbb{A}_+, \qquad \mathcal{D}_- = \partial_- + \mathbb{A}_-, \qquad \mathcal{D}_i = \partial_i + \mathbb{A}_i. \tag{A.480}$$

To reduce the number of degrees of freedom, one needs to constrain the supercurvature associated to the connection superfields. The usual $SO(9,1)$-covariant constraint for $\mathcal{N}=1$ $D=10$ super-Yang–Mills superfields is $\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} + 2\gamma^m_{\alpha\beta}\mathcal{D}_m = 0$, which puts the superfields on-shell. However, in the reduced superspace, the analogous constraints are

$$\nabla^2 + \mathcal{D}_+ = 0, \qquad \{\nabla_i, \nabla_j\} + 2\delta_{ij}\mathcal{D}_- = 0,$$
$$\{\nabla, \nabla_i\} + \mathcal{D}_i = 0, \tag{A.481}$$

It is remarkable that the resolution of these constaints no longer imply the equations of motion, in contrast with the case of the full superspace constraints, that can only be written on-shell.

As usual, the commutator of a fermionic covariant derivative and a bosonic covariant derivative gives a fermionic gauge-covariant superfield. The Bianchi identities imply that the symmetric part of $[\nabla_i, \mathcal{D}_j]$ is proportional to δ_{ij}. In order to obtain the right supermultiplet we furthermore impose the constraint that the antisymmetric part of $[\nabla_i, \mathcal{D}_j]$ is antiselfdual

$$P^{+kl}_{ij}[\nabla_k, \mathcal{D}_l] = 0 \tag{A.482}$$

We therefore define the gauge-covariant superfields $\mathbf{\Psi}_i$, $\boldsymbol{\eta}$ and $\boldsymbol{\chi}_{ij} = P^{-kl}_{ij}\boldsymbol{\chi}_{kl}$ that correspond to the commutators

$$[\nabla, \mathcal{D}_i] \equiv \mathbf{\Psi}_i = -[\nabla_i, \mathcal{D}_+], \quad [\nabla, \mathcal{D}_-] \equiv \boldsymbol{\eta}, \quad [\nabla, \mathcal{D}_+] = 0,$$
$$[\nabla_i, \mathcal{D}_-] = 0, \quad [\nabla_i, \mathcal{D}_j] = -\delta_{ij}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\chi}_{ij}. \tag{A.483}$$

The constraints and their Bianchi identities imply that $\boldsymbol{\Psi}$, $\boldsymbol{\eta}$ and $\boldsymbol{\chi}$ satisfy

$$\nabla_{\{i}\boldsymbol{\Psi}_{j\}} + \delta_{ij}\nabla\boldsymbol{\eta} = 0, \qquad \nabla_k\boldsymbol{\chi}_{ij} + 8\, P^{-\ \ l}_{ijk}\nabla_l\boldsymbol{\eta} = 0. \tag{A.484}$$

Furthermore, the commutators of bosonic covariant derivative give the superderivative of these fermionic superfields as

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_-] &\equiv \mathbb{F}_{i-} = \nabla_i\boldsymbol{\eta}, \qquad & [\mathcal{D}_-, \mathcal{D}_+] &\equiv \mathbb{F}_{-+} = \nabla\boldsymbol{\eta}, \\ [\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_+] &\equiv \mathbb{F}_{i+} = \nabla\boldsymbol{\Psi}_i, \qquad & [\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j] &\equiv \mathbb{F}_{ij} = \nabla\boldsymbol{\chi}_{ij} - \nabla_{[i}\boldsymbol{\Psi}_{j]}. \end{aligned} \tag{A.485}$$

The superfields $\mathbb{C}$ and $\boldsymbol{\Gamma}_i$ have expansion of the form

$$\mathbb{C} = c + \theta^i c_i + \cdots \qquad \boldsymbol{\Gamma}_i = \gamma_i + \theta^j\gamma_{ij} + \cdots \tag{A.486}$$

The transformation laws are such that, c can be identified as the shadow of [A.4] and $\gamma_i\kappa^i$ as an analogous field introduced in [A.1], in the context of the topological vector symmetry, for κ a constant vector field.

In order to concretely realize the abstract algebra defined by the above equations, one must determine the action of δ_0 and δ_i on all components of $\mathbb{C}$ and $\boldsymbol{\Gamma}_i$, which satisfy the relevant commutation relations. We have checked this non trivial property, both in component formalism and directly in superfield formalism (see section 4.4), and prove thereby that the above constraints that hold off-shell can be solved and that the solution corresponds to the supermultiplet of ten dimensional super-Yang–Mills in its twisted formulation.

A.7.5 Super-Yang–Mills action in superspace

To write a superspace action in terms of these constrained superfields, first note that the component action of (A.470) can be written as a δ_0-exact functional as long as we neglect instantons

$$S = \delta_0 \mathbf{Z}^{(-1)} \tag{A.487}$$

with $\mathbf{Z}^{(-1)}$ completely fixed by the δ_i symmetry, i.e. $\delta_i\mathbf{Z}^{(-1)} = 0$ where

$$\mathbf{Z}^{(-1)} = \int_M d^{10}x \,\mathrm{Tr}\,\Big(\frac{1}{2}\chi^{ij}(F_{ij} + \frac{1}{4}G_{ij}) + F_{-i}\psi^i + \eta F_{+-}\Big) \tag{A.488}$$

Moreover, defining $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^i\delta_i$, the action can be expressed as a $\delta_0\delta(\varepsilon)$-exact term as

$$S = \delta_0\delta(\varepsilon)\int_M d^{10}x\, \frac{1}{|\varepsilon|^2}\mathscr{F} \tag{A.489}$$

with

$$\mathscr{F} = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}\,\varepsilon_i\Omega^{ijkl}(A_jF_{kl} - \frac{2}{3}A_jA_kA_l) + \varepsilon_i(-\delta^{ij}\eta - \chi^{ij})\psi_j\right). \tag{A.490}$$

Note that $\mathscr{F}$ is completely constrained by the condition that its $\delta(\varepsilon)$ variation is independent of ε.

This situation is reminiscent of the case of harmonic superspace [120, 121] where harmonic coordinates allow the construction of manifestly supersymmetric actions using a reduced superspace. In this case, one does not have harmonic variables but one can nevertheless write the above action in reduced superspace as

$$S = \int_M d^{10}x\,\nabla\nabla_i\,\mathbf{K}^i \equiv \int_M d^{10}x \int d\theta d\theta_i\,\mathbf{K}^i \tag{A.491}$$

where

$$\mathbf{K}^i = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{4}\,\Omega^{ijkl}(\mathbb{A}_j\mathbb{F}_{kl} - \frac{2}{3}\mathbb{A}_j\mathbb{A}_k\mathbb{A}_l) - (\delta^{ij}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\chi}^{ij})\boldsymbol{\Psi}_j\right). \tag{A.492}$$

Since the $\delta(\varepsilon)$ variation of $\frac{1}{|\varepsilon|^2}\mathscr{F}$ is independent of ε, one learns that

$$\nabla_i\mathbf{K}_j + \nabla_j\mathbf{K}_i = \delta_{ij}f + \frac{\partial}{\partial x^\mu}h^\mu_{ij} \tag{A.493}$$

for some f and h^μ_{ij}. Using (A.493), it is straightforward to show that (A.491) is independent of θ and θ^i and is therefore invariant under all nine supersymmetries.

Annexe B

Formulaire

B.1 L'algèbre de Clifford sur l'espace euclidien de dimension huit

On définit les générateurs de l'algèbre de Clifford dans l'espace euclidien huit dimensionnel comme suit

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2\delta_{\mu\nu} \\ \gamma_9 &\equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6\gamma_7\gamma_8 \end{aligned} \tag{B.1}$$

ainsi que les éléments

$$\gamma_{\mu\nu\cdots\rho} \equiv \frac{1}{n!}\gamma_{[\mu}\gamma_\nu\cdots\gamma_{\rho]} \tag{B.2}$$

Un spineur pair général vérifie l'identité de Fierz suivante

$$\begin{aligned} \zeta\bar{\zeta} = {} & \frac{1}{16}(\bar{\zeta}\zeta) + \frac{1}{16}(\bar{\zeta}\gamma^\mu\zeta)\gamma_\mu - \frac{1}{8}(\bar{\zeta}\gamma^{\mu\nu}\zeta)\gamma_{\mu\nu} - \frac{3}{8}(\bar{\zeta}\gamma^{\mu\nu\sigma}\zeta)\gamma_{\mu\nu\sigma} + \frac{3}{2}(\bar{\zeta}\gamma^{\mu\nu\sigma\rho}\zeta)\gamma_{\mu\nu\sigma\rho} \\ & + \frac{3}{8}(\bar{\zeta}\gamma_9\gamma^{\mu\nu\sigma}\zeta)\gamma_9\gamma_{\mu\nu\sigma} - \frac{1}{8}(\bar{\zeta}\gamma_9\gamma^{\mu\nu}\zeta)\gamma_9\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{16}(\bar{\zeta}\gamma_9\gamma^\mu\zeta)\gamma_9\gamma_\mu + \frac{1}{16}(\bar{\zeta}\gamma_9\zeta)\gamma_9 \end{aligned} \tag{B.3}$$

On donne quelques formules utiles

$$
\begin{aligned}
\gamma_\sigma \gamma^{\mu\nu} &= \delta_\sigma^{[\mu} \gamma^{\nu]} + 3\gamma_\sigma{}^{\mu\nu} \\
\gamma_\mu \gamma^{\nu\sigma\rho} &= \delta_\mu^{[\nu} \gamma^{\sigma\rho]} + 4\gamma_\mu{}^{\nu\sigma\rho} \\
\gamma_\kappa \gamma^{\mu\nu\rho\sigma} &= 2\mathscr{P}^{+_9}{}^{\mu\nu\sigma\rho}{}_{\kappa\alpha\beta\gamma} \gamma^{\alpha\beta\gamma} \\
\gamma_{\mu\nu} \gamma^{\sigma\rho} &= 2\delta_{[\nu}^{[\sigma} \gamma_{\mu]}{}^{\rho]} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}^{\sigma\rho} + 6\gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho} \\
\gamma_{\mu\nu} \gamma^{\sigma\rho\kappa} &= 3\delta_{[\nu}^{[\sigma} \gamma_{\mu]}{}^{\rho\kappa]} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}^{[\sigma\rho} \gamma^{\kappa]} - \frac{1}{2}\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho\kappa\alpha\beta\gamma} \gamma_9 \gamma_{\alpha\beta\gamma} \\
\gamma_{\mu\nu} \gamma^{\sigma\rho\kappa\lambda} &= 4\delta_{[\nu}^{[\sigma} \gamma_{\mu]}{}^{\rho\kappa\lambda]} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}^{[\sigma\rho} \gamma^{\kappa\lambda]} - \frac{1}{2}\frac{1}{4!}\varepsilon^{\sigma\rho\kappa\lambda}{}_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_9 \gamma^{\alpha\beta} \\
\gamma_{\mu\nu\sigma\rho} \gamma^{\kappa\lambda\theta\tau} &= \frac{1}{12}\mathscr{P}^{+_9}{}_{\mu\nu\sigma\rho}{}^{\kappa\lambda\theta\tau} + \frac{2}{3}\mathscr{P}^{+_9}{}_{\mu\nu\sigma\rho}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} \delta_{[\alpha\beta\gamma}^{[\kappa\lambda\theta} \gamma_{\delta]}{}^{\tau]} + \delta_{[\mu\nu}^{[\kappa\lambda} \gamma_{\sigma\rho]}{}^{\theta\tau]}
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

avec $\mathscr{P}^{\pm_9}{}_{\mu\nu\sigma\rho}{}^{\kappa\lambda\theta\tau} \equiv \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu\sigma\rho}^{\kappa\lambda\theta\tau} \pm \frac{1}{2}\frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}{}^{\kappa\lambda\theta\tau}\gamma_9$

$$
\begin{aligned}
\gamma_\kappa \gamma^\mu \gamma^\kappa &= -6\gamma^\mu \\
\gamma_\kappa \gamma^{\mu\nu} \gamma^\kappa &= 4\gamma^{\mu\nu} \\
\gamma_\kappa \gamma^{\mu\nu\sigma} \gamma^\kappa &= -2\gamma^{\mu\nu\sigma} \\
\gamma_\kappa \gamma^{\mu\nu\sigma\rho} \gamma^\kappa &= 0 \\
\gamma_{[\mu} \gamma^{\sigma\rho\kappa\lambda} \gamma_{\nu]} &= 2\mathscr{P}^{-_9}{}^{\sigma\rho\kappa\lambda}{}_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

B.2 L'algèbre de la 4-forme octonionique

La représentation adjointe de $SO(8)$ se décompose en deux représentations irréductibles de $Spin(7)$ qu'on peut définir à l'aide des deux projecteurs suivants

$$
\begin{aligned}
P^-{}_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho} &\equiv \frac{1}{4}\left(\delta_{\mu\nu}^{\sigma\rho} - \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\right) \\
P^+{}_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho} &\equiv \frac{3}{4}\left(\delta_{\mu\nu}^{\sigma\rho} + \frac{1}{6}\Omega_{\mu\nu}{}^{\sigma\rho}\right)
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

En utilisant la formule [123]

$$
\Omega_{\mu\nu\sigma\rho}\Omega^{\kappa\lambda\theta\rho} = 6\delta_{\mu\nu\sigma}^{\kappa\lambda\theta} - 9\Omega_{[\mu\nu}{}^{[\kappa\lambda}\delta_{\sigma]}^{\theta]}
\tag{B.7}
$$

on montre que

$$
\begin{aligned}
P^-{}_{\sigma\rho\{\mu}{}^{\theta} P^-{}_{\nu\}\theta}{}^{\kappa\lambda} &= \frac{1}{8}\delta_{\mu\nu} P^-{}_{\sigma\rho}{}^{\kappa\lambda} \\
\left(\delta_{\mu\nu}^{\{\theta|\tau} + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}{}^{\{\theta|\tau}\right) P^{-\sigma\}\rho\kappa}{}_{\tau} &= -\delta^{\theta[\sigma} P^-{}_{\mu\nu}{}^{\rho]\kappa} \\
\left(\delta_{\sigma\rho}^{[\mu|\theta} + \frac{1}{2}\Omega_{\sigma\rho}{}^{[\mu|\theta}\right) P^{-\,\kappa\lambda|\nu]}{}_{\theta} &= \frac{1}{4}\delta^{[\mu}_{[\sigma}\Omega_{\rho]}{}^{\nu]\kappa\lambda} + \frac{1}{4}\Omega_{\mu\nu[\sigma}{}^{[\kappa}\delta^{\lambda]}_{\rho]} \\
\frac{1}{2}\Omega^{\mu\nu}{}_{\theta\tau}\left(P^-{}_{\sigma\rho}{}^{\theta\eta} P^{-\,\tau}{}_{\eta\kappa\lambda}\right) &= P^-{}_{\sigma\rho}{}^{[\mu|\eta} P^{-\,\nu]}{}_{\eta\kappa\lambda} \\
\frac{1}{2}\Omega^{\mu\nu}{}_{\theta\tau}\left(P^-{}_{\sigma\rho}{}^{\theta\eta} P^{+\,\tau}{}_{\eta\kappa\lambda}\right) &= -3\, P^-{}_{\sigma\rho}{}^{[\mu|\eta} P^{+\,\nu]}{}_{\eta\kappa\lambda}
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

Certaines de ces équations peuvent être interprétées en construisant des isomorphismes de représentation de $Spin(7)$ à partir de la représentation octonionique de l'algèbre de Clifford en sept dimensions. En effet les matrices γ_a et γ_{ab} étant alors réelles et antisymétriques, elles définissent respectivement un isomorphisme de la représentation vectorielle dans la représentation anti-autoduale et un isomorphisme de la représentation adjointe $\mathfrak{so}(7)$ dans la représentation autoduale. La première et les deux dernières équations de (B.8) dérivent ainsi directement des identités $\gamma_a\gamma_b = \delta_{ab} + 2\gamma_{ab}$ et $[\gamma_{ab}, \gamma^c] = \delta^c_b\gamma_a - \delta^c_a\gamma_b$.

B.3 Annexes de la publication annexée A.1

B.3.1 $\delta_{\mathfrak{k}}$ invariance of the gauge function in Ω background

In this appendix, we show that the $\delta_{\mathfrak{k}}$ operator (A.116) constrains correctly the more general gauge function exactly renormalizable in four dimensions. The gauge function contains, a priori, terms involving the two vectors υ and $\bar{\upsilon}$. We will assume that the gauge function does not depend of the derivatives of υ and $\bar{\upsilon}$. These vectors have respectively ghost number 2 and -2. We can decompose the gauge function of total ghost number -1 into a sum over the terms of field's ghost number $2i-1$.

$$\boldsymbol{\Psi} = \sum_i \boldsymbol{\Psi}_i \tag{B.9}$$

In exactly the same way $\delta_{\mathfrak{k}}$ decomposes into $\delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1$ and the equation $\delta_{\mathfrak{k}}\boldsymbol{\Psi} = 0$ decomposes into

$$\delta_1\boldsymbol{\Psi}_{i-1} + \delta_0\boldsymbol{\Psi}_i + \delta_{-1}\boldsymbol{\Psi}_{i+1} = 0 \quad ,\forall i \tag{B.10}$$

Since we are interested in the equivariant part of the action, we have not considered the fields $c, \bar{c}$ and b. The possible gauge functions of given field's ghost number are

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}_{-1} &= \int_M \operatorname{Tr}\,\Big(\mathfrak{a}_{-1} i_v \chi \star d_A \bar{\Phi} + \mathfrak{b}_{-1} \star \eta \mathscr{L}_v \bar{\Phi}\Big) \\
\boldsymbol{\Psi}_0 &= \int_M \operatorname{Tr}\,\Big(\mathfrak{a}_0 \chi \star T + \mathfrak{b}_0 \chi \star F + \mathfrak{c}_0 \Psi \star d_A \bar{\Phi} + \mathfrak{d}_0 \star \eta [\Phi, \bar{\Phi}] \\
&\qquad + \mathfrak{a}'_0 i_{\bar{v}} \chi \star i_v T + \bar{\mathfrak{a}}'_0 i_v \chi \star i_{\bar{v}} T + \mathfrak{b}'_0 i_{\bar{v}} \chi \star i_v \big(F + \beta \star CF\big) \\
&\qquad\quad + \bar{\mathfrak{b}}'_0 i_v \chi \star i_{\bar{v}} \big(F + \bar{\beta} \star CF\big) + \mathfrak{c}'_0 \star i_{\bar{v}} \Psi \mathscr{L}_v \bar{\Phi} + \bar{\mathfrak{c}}'_0 \star i_v \Psi \mathscr{L}_{\bar{v}} \bar{\Phi} \\
&\qquad\qquad + \mathfrak{d}'_0 \star \eta i_{\bar{v}} i_v T + \mathfrak{e}'_0 \star \eta i_{\bar{v}} i_v \big(F + \gamma \star CF\big) + \mathfrak{f}'_0 \star i_{\bar{v}} i_v \chi [\Phi, \bar{\Phi}]\Big) \\
\boldsymbol{\Psi}_1 &= \int_M \operatorname{Tr}\,\Big(\mathfrak{a}_1 i_{\bar{v}} T \star \Psi + \mathfrak{b}_1 i_{\bar{v}} \big(F + \alpha \star CF\big) \star \Psi + \mathfrak{c}_1 i_{\bar{v}} \chi \star d_A \Phi \\
&\qquad\qquad + \mathfrak{d}_1 \star \eta \mathscr{L}_{\bar{v}} \Phi + \mathfrak{e}_1 \star i_{\bar{v}} \Psi [\Phi, \bar{\Phi}] \\
&\qquad + |\bar{v}|^2 \Big(\mathfrak{a}'_1 i_v T \star \Psi + \mathfrak{b}'_1 i_v \big(F + \alpha' \star CF\big) \star \Psi \\
&\qquad\qquad + \mathfrak{c}'_1 i_v \chi \star d_A \Phi + \mathfrak{d}'_1 \star \eta \mathscr{L}_v \Phi + \mathfrak{e}'_1 \star i_v \Psi [\Phi, \bar{\Phi}]\Big)\Big) \\
\boldsymbol{\Psi}_2 &= \int_M \operatorname{Tr}\,\Big(\mathfrak{a}_2 |\bar{v}|^2 \Psi \star d_A \Phi + \mathfrak{b}_2 \star i_{\bar{v}} \Psi \mathscr{L}_{\bar{v}} \Phi + |\bar{v}|^2 \star \big(\mathfrak{c}_2 i_{\bar{v}} \Psi \mathscr{L}_v \Phi + \bar{\mathfrak{c}}_2 i_v \Psi \mathscr{L}_{\bar{v}} \Phi\big)\Big)
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

where the parameters could be arbitrary functions of $(v \cdot \bar{v})$. In this computation, we use the fact that v and $\bar{v}$ are two commuting Killing vectors, the fact that κ is covariantly constant and, as a matter of fact, we must add to these requirements that these three vectors are linearly independent, that the three 2-form $g(v)_\wedge g(\bar{v})$, $g(\kappa)_\wedge g(v)$ and $g(\kappa)_\wedge g(\bar{v})$, are not selfdual, as well as the condition that $(\kappa \cdot v)$ is not zero. The easiest way to verify $\delta_{\mathfrak{k}} \boldsymbol{\Psi} = 0$ is to begin by the term of higher degree in order to constrain the parameters before to compute the more complex terms of lower degree. $\delta_{-1} \boldsymbol{\Psi}_{-1} = 0$ does not give any informations, but $\delta_1 \boldsymbol{\Psi}_2 = 0$ constrains $\mathfrak{a}_2$ to be zero. $\delta_1 \boldsymbol{\Psi}_1 + \delta_0 \boldsymbol{\Psi}_2 = 0$ then establishes that $\boldsymbol{\Psi}_2$ is null, and that $\mathfrak{b}_1$ and $\mathfrak{d}_1$ are the only two non zero parameters of $\boldsymbol{\Psi}_1$ and must be opposite. Next $\delta_0 \boldsymbol{\Psi}_{-1} + \delta_{-1} \boldsymbol{\Psi}_0 = 0$ gives $\mathfrak{a}_{-1}$, $\bar{\mathfrak{c}}'_0$ and $\mathfrak{f}'_0$ to be zero and constrains $\mathfrak{b}_{-1}$, $\mathfrak{c}_0$ and $\mathfrak{d}_0$ to be equal. The most relevant equation is $\delta_1 \boldsymbol{\Psi}_0 + \delta_1 \boldsymbol{\Psi}_0 = 0$, which gives $\mathfrak{a}'_0 = \bar{\mathfrak{a}}'_0 = \mathfrak{b}'_0 = \bar{\mathfrak{b}}'_0 = \mathfrak{c}'_0 = \mathfrak{d}_0 = 0$ and constrains all the other parameters. But, let us look at a residual term more closely. After all the coefficients have been constrained up to a global factor, which leaves us with the expression

$$\delta_1 \mathbf{\Psi}_0 + \delta_0 \mathbf{\Psi}_1 = \int_M \frac{\mathfrak{b}_0}{2} g(\kappa)_\wedge C_\wedge i_{\bar{v}} \mathrm{Tr}\, \big(F_\wedge F\big) \tag{B.12}$$

which seems to be non zero at first sight. Since the manifold on which the theory is defined admits a covariantly constant vector field, it must decompose into $\mathbb{R} \times N$ in the simply connected case[1] ; as a matter of fact it is only in this case that the term (B.12) can be shown to vanish. The embeddings of $\mathbb{R}$ into M can be realized by the flow of κ, which is defined by

$$\frac{d}{dt}\, \phi_{\kappa,t}(p) = \kappa_{|\phi_{\kappa,t}(p)} \tag{B.13}$$

This defines a global function t on M, for which the flow equation can be written $dt = g(\kappa)$. Therefore $g(\kappa)$ is d-exact and we can use this property to derive[2]

$$\int_M g(\kappa)_\wedge C_\wedge i_{\bar{v}} \mathrm{Tr}\, \big(F_\wedge F\big) = \int_M \big((\kappa \cdot \bar{v})C + t\mathcal{L}_{\bar{v}} C\big)_\wedge \mathrm{Tr}\, \big(F_\wedge F\big) \tag{B.14}$$

In order for this term to be null, $(\kappa \cdot \bar{v})$ must be constant for a gauge fiber bundle of trivial second Chern class, and zero otherwise, and $dg(\bar{v})$ must be selfdual in order for $\mathcal{L}_{\bar{v}}$ to leave C invariant. That is why we have not assumed from the start that $(\kappa \cdot \bar{v})$ vanishes. These requirements are a bit strong , because they impose $\bar{v}$ to be zero in four dimensions. Nevertheless the case studied by Nekrasov [49, 124] falls into this restricted class. As a matter of fact, by construction, $\bar{v}$ does not contribute to topological amplitudes. To finish the computation, note that the last constraint, confirms what has already been given by the others. Therefore we obtain the well constrained gauge function up to a global scale factor

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi} = \int_M \mathrm{Tr}\, \bigg(\frac{2}{n}\chi \star T + \chi \star F + \Psi \star \Big(d_A\bar{\Phi} - i_{\bar{v}} F\Big) \\ + \star\eta\Big([\Phi, \bar{\Phi}] + \mathscr{L}_v \bar{\Phi} - \mathscr{L}_{\bar{v}} \Phi + i_{\bar{v}} i_v F\Big)\bigg) \end{aligned} \tag{B.15}$$

and we have obtained the $\delta_{\mathfrak{t}}$-exact gauge function (A.121).

---

[1] See page 155.

[2] Note that in order for the integration by parts to be valid, F vanish fast enough when $t \to \infty$ in such a way as to compensate.

B.3.2 Ω background in euclidean space

In the case of a flat space, we can write explicitly the form of the Killing vectors as generators of $\mathfrak{so}(n)$ elements. We give here the explicit form of the supersymmetric action in the eight dimensional case. We use the scalar Φ and $\bar{\Phi}$ used in the twisted version, as well as the matrix $\Omega_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\big(dg(v)\big)_{\mu\nu}$ and $\overline{\Omega}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\big(dg(\bar{v})\big)_{\mu\nu}$. With these definitions the Ω background action can be expanded as follows :

$$\begin{aligned} S = \ S_0 \ &+ \overline{\Omega}^{\mu}{}_{\nu}\overline{S}_{1\,\mu}{}^{\nu} \ + \ \Omega^{\mu}{}_{\nu}S_{1\,\mu}{}^{\nu} \\ &+ \Omega^{\mu}{}_{\sigma}\Omega^{\nu}{}_{\rho}S_{2\,\mu\nu}{}^{\sigma\rho} + \Omega^{\mu}{}_{\sigma}\overline{\Omega}^{\nu}{}_{\rho}S^{(1,1)\sigma\rho}_{2\,\mu\nu} + \overline{\Omega}^{\mu}{}_{\sigma}\overline{\Omega}^{\nu}{}_{\rho}\overline{S}_{2\,\mu\nu}{}^{\sigma\rho} \\ &+ \overline{\Omega}^{\mu}{}_{\sigma}\overline{\Omega}^{\nu}{}_{\rho}\Omega^{\kappa}{}_{\lambda}\overline{S}_{3\,\mu\nu\kappa}{}^{\sigma\rho\lambda} + \Omega^{\mu}{}_{\sigma}\Omega^{\nu}{}_{\rho}\overline{\Omega}^{\kappa}{}_{\lambda}S_{3\,\mu\nu\kappa}{}^{\sigma\rho\lambda} \\ &+ \Omega^{\mu}{}_{\sigma}\overline{\Omega}^{\nu}{}_{\rho}\Omega^{\kappa}{}_{\theta}\overline{\Omega}^{\lambda}{}_{\tau}S_{4\,\mu\nu\kappa\lambda}{}^{\sigma\rho\theta\tau} \end{aligned} \tag{B.16}$$

with the definitions

$$\begin{aligned} S_0 &\equiv \int_M d^8x \mathrm{Tr}\, \Big(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\bar{\Phi}D^\mu\Phi - \frac{i}{2}\lambda^\alpha \not{D}_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}\lambda_{\dot{\alpha}}\not{D}^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_\alpha \\ &\qquad + \frac{1}{2}[\Phi,\bar{\Phi}]^2 + \lambda_{\dot{\alpha}}[\bar{\Phi},\lambda^{\dot{\alpha}}] - \frac{1}{2}\lambda^\alpha[\Phi,\lambda_\alpha] \Big) \\ \overline{S}_{1\,\mu}{}^{\nu} &\equiv \int_M d^8x \Big(x^\nu \mathrm{Tr}\, \big(F_{\mu\sigma}D^\sigma\Phi + [\Phi,\bar{\Phi}]D_\mu\Phi - \lambda_{\dot{\alpha}}D_\mu\lambda^{\dot{\alpha}}\big) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\big(\lambda_{\dot{\alpha}}\gamma_\mu{}^{\nu\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\lambda^{\dot{\beta}}\big)\Big) \\ S_{1\,\mu}{}^{\nu} &\equiv \int_M d^8x \Big(x^\nu \mathrm{Tr}\, \big(F_{\mu\sigma}D^\sigma\bar{\Phi} - [\Phi,\bar{\Phi}]D_\mu\bar{\Phi} + \frac{1}{2}\lambda^\alpha D_\mu\lambda_\alpha\big) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\big(\lambda^\alpha\gamma_\mu{}^{\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta}\lambda_\beta\big)\Big) \\ S_{2\,\mu\nu}{}^{\sigma\rho} &\equiv \frac{1}{2}\int_M d^8x\ x^\sigma x^\rho\, \mathrm{Tr}\,\big(D_\mu\bar{\Phi}D_\nu\bar{\Phi}\big) \\ S^{(1,1)\sigma\rho}_{2\,\mu\nu} &\equiv \int_M d^8x\ x^\sigma x^\rho\, \mathrm{Tr}\,\big(F_\mu{}^\kappa F_{\nu\kappa} + F_{\mu\nu}[\Phi,\bar{\Phi}] - D_\mu\bar{\Phi}D_\nu\Phi\big) \\ \overline{S}_{2\,\mu\nu}{}^{\sigma\rho} &\equiv \frac{1}{2}\int_M d^8x\ x^\sigma x^\rho\, \mathrm{Tr}\,\big(D_\mu\Phi D_\nu\Phi\big) \\ \overline{S}_{3\,\mu\nu\kappa}{}^{\sigma\rho\lambda} &\equiv \int_M d^8x\ x^\sigma x^\rho x^\lambda\, \mathrm{Tr}\,\big(F_{\kappa\mu}D_\nu\Phi\big) \\ S_{3\,\mu\nu\kappa}{}^{\sigma\rho\lambda} &\equiv \int_M d^8x\ x^\sigma x^\rho x^\lambda\, \mathrm{Tr}\,\big(F_{\kappa\mu}D_\nu\bar{\Phi}\big) \\ S_{4\,\mu\nu\kappa\lambda}{}^{\sigma\rho\theta\tau} &\equiv \frac{1}{2}\int_M d^8x\ x^\sigma x^\rho x^\theta x^\tau\, \mathrm{Tr}\,\big(F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}\big) \end{aligned} \tag{B.17}$$

B.4 Elimination des doublets triviaux

Dans la publication annexée $A.4$ nous avons utilisé plusieurs fois le résultat suivant sur l'élimination des doublets triviaux en cohomologie. L'action de l'opérateur de Slavnov–Taylor considéré sur une fonctionnelle $\mathscr{F}$ se décompose en la somme de l'action d'une différentielle ς sur $\mathscr{F}$ et de l'anticrochet avec l'action Σ, $\big(\Sigma, \mathscr{F}\big)$, qu'on note $\Sigma_* \mathscr{F}$. ς agit seulement sur un sous ensemble de champs, et sa cohomologie est triviale dans le complexe engendré par ces derniers. On définit N l'opérateur qui compte le degré d'une fonctionnelle homogène dans ces champs et on suppose l'existence d'une homotopie trivialisante k, vérifiant $\{\varsigma, k\} = N$ et $[N, k] = 0$. L'action Σ se décompose en ses vecteurs propres de N comme $\Sigma = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^{(n)}$. L'anticrochet est défini de telle sorte que $k\Sigma^{(0)} = 0$. On peut montrer à partir de ces hypothèses que la cohomologie de l'opérateur de Slavnov–Taylor $\Sigma_* + \varsigma$ est isomorphe à la cohomologie de $\Sigma_*^{(0)}$ dans le sous-complexe annulé par N.

Si on décompose l'équation de nilpotence de l'opérateur de Slavnov–Taylor sur les valeurs propres de N, on obtient que l'opérateur $\Sigma_*^{(0)} + \varsigma$ est nilpotent et que $\Delta\Sigma \equiv \Sigma - \Sigma^{(0)}$ vérifie l'équation de courbure nulle

$$(\Sigma_*^{(0)} + \varsigma)\Delta\Sigma + \frac{1}{2}\big(\Delta\Sigma, \Delta\Sigma\big) = 0 \tag{B.18}$$

dont la solution générale est similaire à une forme de Maurer–Cartan

$$\Sigma_* + \varsigma = e^{-V_*}(\Sigma_*^{(0)} + \varsigma)e^{V_*} \tag{B.19}$$

Nous allons montrer cette équation par récurrence, comme on résoudrait l'équation de Maurer–Cartan. Pour ce faire, notons que k définit une homotopie trivialisante de $\Sigma_*^{(0)} + \varsigma$ sur les vecteurs propres de N de valeurs propres strictement positives. La décomposition de (B.18) sur les valeurs propres de N donne au premier ordre

$$(\Sigma_*^{(0)} + \varsigma)\Sigma^{(1)} = 0 \tag{B.20}$$

qui implique que $\Sigma^{(1)} = (\Sigma_*^{(0)} + \varsigma)k\Sigma^{(1)}$ et donc que

$$\Sigma_* = e^{-(k\Sigma^{(1)})_*}(\Sigma_*^{(0)} + \varsigma)e^{(k\Sigma^{(1)})_*} + \mathcal{O}(2) \tag{B.21}$$

où $\mathcal{O}(n)$ dénote des opérateurs de valeurs propres de N supérieures ou égales à n. La nilpotence de $\Sigma_* + \varsigma$ implique celle de $e^{V_*}(\Sigma_* + \varsigma)e^{-V_*}$ quelque soit V. Supposons que (B.19) soit vérifiée à l'ordre $n-1$,

$$e^{V_*^{(n-1)}}(\Sigma_* + \varsigma)e^{-V_*^{(n-1)}} = \Sigma_*^{(0)} + \varsigma + \Delta\Sigma_*^{(n)} \tag{B.22}$$

alors la nilpotence de $e^{V_*^{(n-1)}}(\Sigma_* + \varsigma)e^{-V_*^{(n-1)}}$ implique à l'ordre n que

$$(\Sigma_*^{(0)} + \varsigma)\Delta\Sigma^{(n)} = \mathcal{O}(n+1) \tag{B.23}$$

et donc que l'équation (B.19) est valable à l'ordre $n+1$

$$\Sigma_* + \varsigma = e^{-(V^{(n-1)}+\frac{k}{n}\Delta\Sigma^{(n)})_*}(\Sigma_*^{(0)} + \varsigma)e^{(V^{(n-1)}+\frac{k}{n}\Delta\Sigma^{(n)})_*} + \mathcal{O}(n+1) \tag{B.24}$$

L'équation (B.19) implique trivialement qu'à toute fonctionnelle $\mathscr{F}$ invariante sous $\Sigma_* + \varsigma$ correspond une fonctionnelle $e^{V_*}\mathscr{F}$ invariante sous $\Sigma_*^{(0)} + \varsigma$ et que la trivialité de $\mathscr{F} = (\Sigma_* + \varsigma)\mathbf{\Psi}$ est équivalente à celle de $e^{V_*}\mathscr{F} = (\Sigma_*^{(0)} + \varsigma)e^{V_*}\mathbf{\Psi}$. La restriction de la cohomologie de $\Sigma_*^{(0)} + \varsigma$ à la cohomologie de $\Sigma_*^{(0)}$ dans le sous complexe annulé par N découle directement de l'existence de l'homotopie trivialisante k.

Notons que si ces cohomologies sont isomorphes, les représentants de la cohomologie de $\Sigma_* + \varsigma$ dépendent des champs appartenant à des doublets triviaux. Cette dépendance peut être calculée sans connaître explicitement la fonctionnelle V, en calculant récursivement les termes nécessaires à l'invariance de la fonctionnelle considérée sous l'action de $\Sigma_* + \varsigma$.

Bibliographie

[1] A. Armoni, M. Shifman et G. Veneziano, « From super-Yang–Mills theory to QCD : Planar equivalence and its implications » [hep-th/0403071].

[2] K. Konishi, « The magnetic monopoles seventy-five years later » [hep-th/0702102].

[3] M. Shifman et A. Yung, « Supersymmetric solitons and how they help us understand non-abelian gauge theories » [hep-th/0703267].

[4] E. D'Hoker et D. Z. Freedman, « Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence » [hep-th/0201253].

[5] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri et Y. Oz, « Large N field theories, string theory and gravity » Phys. Rept. **323**, 183 (2000) [hep-th/9905111].

[6] V. N. Gribov, « Quantization of non-abelian gauge theories » Nucl. Phys. B **139**, 1 (1978).

[7] I. M. Singer, « Some remarks on the Gribov ambiguity » Commun. Math. Phys. **60**, 7 (1978).

[8] E. Witten, « Topological quantum field theory » Commun. Math. Phys. **117**, 353 (1988).

[9] M. F. Atiyah et L. Jeffrey, « Topological lagrangians and cohomology » J. Geom. Phys. **7**, 119 (1990).

[10] E. Witten, « Supersymmetric Yang–Mills theory on a four manifold » J. Math. Phys. **35**, 5101 (1994) [hep-th/9403195].

[11] L. Baulieu and I. M. Singer, « Topological Yang–Mills symmetry » Nucl. Phys. Proc. Suppl. **5B**, 12 (1988).

[12] S. Donaldson, « Polynomial invariants for smooth four-manifolds » Topology **29** (1990) 257 ;
S. Donaldson et P. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press (1990).

[13] E. Frenkel, A. Losev et N. Nekrasov, « Instantons beyond topological theory. I » [hep-th/0610149].

[14] J. P. Yamron, « Topological actions from twisted supersymmetric theories » Phys. Lett. B **213**, 325 (1988).

[15] J. M. F. Labastida and C. Lozano, « Mathai–Quillen formulation of twisted $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric gauge theories in four dimensions » Nucl. Phys. B **502**, 741 (1997) [hep-th/9702106].

[16] L. Baulieu, H. Kanno and I. M. Singer, « Special quantum field theories in eight and other dimensions » Commun. Math. Phys. **194**, 149 (1998) [hep-th/9704167].

[17] S. R. Coleman and J. Mandula, « All possible symmetries of the S matrix » Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

[18] Steven Weinberg, *The quantum theory of fields, Volume I, Foundations*, section 5.9, Cambridge University press (1996).

[19] Hermann Nicolai, « A possible constructive approach to (super-Φ^3)$_4$ in four-dimensions (1). Euclidean formulation of the model » Nucl. Phys. B **140**, 294 (1978).

[20] Dominic D. Joyce, *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford University press (2000).

[21] E. Cremmer, « Dimensional reduction in field theory and hidden symmetries in extended supergravity » *Trieste school, Supergravity '81*, Cambridge University Press (1982).

[22] Peter Van Nieuwenhuizen et Andrew Waldron, « A continuous Wick rotation for spinor fields and supersymmetry in euclidean space » [hep-th/9611043].

[23] BS Acharya, JM Figuera-O'Farrill, B Spence et M O'Loughlin, « Euclidean D-branes and higher-dimensional gauge theory » Nucl. Phys. B **514**, 583 (1998) [hep-th/9707118].

[24] V. Mathai et D. Quillen, « Superconnections, Thom Classes, and Equivariant Differential Forms » Topology **25**, 85 (1986).

[25] M.F. Atiyah et I.M. Singer, « The index of elliptic operators I » Ann. Math. **87**, 485–530 (1968) ;
M.F. Atiyah et I.M. Singer, « The index of elliptic operators III » Ann. Math. **87**, 546–604 (1968).

[26] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, et Yu. I. Manin, « Construction of instantons » Phys. Lett. A **65**, 185 (1978).

[27] S. K. Donaldson et R. P. Thomas, « Gauge theory in higher dimensions » *The geometric universe, science, geometry, and the work of Roger Penrose*, 25-29, Oxford University Press (1998).

[28] Dominic D. Joyce, « Compact 8-manifolds with holonomy $Spin(7)$ » Invent. Math. **123**, (1996) 507.

[29] Dominic D. Joyce, « A new construction of compact 8-manifolds with holonomy $Spin(7)$ » J. Diff. Geom. **53**, (1999) 89-130 [math/9910002].

[30] T. Kugo and P. K. Townsend, « Supersymmetry And The Division Algebras » Nucl. Phys. B **221**, 357 (1983).

[31] N. Berkovits, « A Ten-dimensional super-Yang–Mills action with off-shell supersymmetry » Phys. Lett. B **318**, 104 (1993) [hep-th/9308128].

[32] M. Berger, « Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affines et des variétés riemanniennes » Bulletin de la société de Mathématique de France **83**, 279 (1955)

[33] S. Cordes, G. W. Moore and S. Ramgoolam, « Lectures on $2D$ Yang–Mills theory, equivariant cohomology and topological field theories » Nucl. Phys. Proc. Suppl. **41**, 184 (1995) [hep-th/9411210].

[34] W. Kondracki et J.S. Rogulski, « On the stratificatrion of orbit space for the action of automorphisms on connections » Diss. Math. **250**, 1 (1986)

[35] Witold Kondracki et Pawel Sadowski, « Geometric structure on the orbit space of gauge connections » J. Geom. Phys. **3**, 421 (1986).

[36] A. Heil, A. Kersch, N. Papadopoulos, B. Reinfenhäuser et F. Scheck, « Structure of the space of reducible connections for Yang–Mills theories » J. Geom. Phys. **7**, 489 (1990).

[37] S. Shadchin, « On certain aspects of string theory / gauge theory correspondence » [hep-th/0502180].

[38] Richard S. Palais, *Foundations of global non-linear analysis*, W. A. Benjamin, Inc. (1968).

[39] G. Dell'Antonio et D. Zwanziger, « Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon » Commun. Math. Phys. **138**, 291 (1991).

[40] S. V. Shabanov, « Geometry of the physical phase space in quantum gauge systems » Phys. Rept. **326**, 1 (2000) [hep-th/0002043].

[41] A. S. Schwarz, « Instantons and fermions in the field of instanton » Commun. Math. Phys. **64**, 233 (1979).

[42] O. Babelon et C. M. Viallet, « The geometrical interpretation of the Faddeev–Popov determinant » Phys. Lett. B **85**, 246 (1979).

[43] R. Stora, F. Thuillier et J. C. Wallet, « Algebraic structure of cohomological field theory models and equivariant cohomology »

[44] C. M. Becchi, S. Giusto et C. Imbimbo, « Gauge dependence in topological gauge theories » Phys. Lett. B **393**, 342 (1997) `[hep-th/9611113]`.

[45] O. Piguet et S. P. Sorella, *Algebraic renormalization : Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*, Lect. Notes Phys. **M28**, 1 (1995).

[46] M. Blau and G. Thompson, « $\mathcal{N} = 2$ topological gauge theory, the Euler characteristic of moduli spaces, and the Casson invariant » Commun. Math. Phys. **152**, 41 (1993) `[hep-th/9112012]` ;
M. Blau and G. Thompson, « Topological gauge theories from supersymmetric quantum mechanics on spaces of connections » Int. J. Mod. Phys. A **8**, 573 (1993) `[hep-th/9112064]`.

[47] R. Dijkgraaf et G. W. Moore, « Balanced topological field theories » Commun. Math. Phys. **185**, 411 (1997) `[hep-th/9608169]`.

[48] Nikita Nekrasov et Andrei Okounkov, « Seiberg–Witten theory and random partitions » `[hep-th/0306238]`.

[49] Nikita Nekrasov, « Seiberg–Witten prepotential from instanton counting » `[hep-th/0206161]`.

[50] R. Thomas, « A holomorphic Casson invariant for Calabi–Yau 3-folds and bundles on $K3$ fibrations » JDG **54**, 367-438 (2000) `[math/9806111]`.

[51] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov et R. Pandharipande, « Gromov–Witten theory and Donaldson–Thomas theory » `[math/0312059]`, `[math/0406092]`.

[52] J. de Boer, A. Naqvi et A. Shomer, « The topological G_2 string » `[hep-th/0506211]` ;
J. de Boer, P. de Medeiros, S. El-Showk et A. Sinkovics, « Open G_2 Strings » `[hep-th/0611080]` ;
J. de Boer, P. de Medeiros, S. El-Showk et A. Sinkovics, « G_2 Hitchin functionals at one loop » `0706.3119 [hep-th]`.

[53] C. Vafa et E. Witten, « A Strong coupling test of S duality » Nucl. Phys. B **431**, 3 (1994) [hep-th/9408074].

[54] B. Geyer et D. Mulsch, « $\mathcal{N}_T = 4$ equivariant extension of the $3D$ topological model of Blau and Thompson » Nucl. Phys. B **616**, 476 (2001) [hep-th/0108042] ;
B. Geyer et D. Mulsch, « Twisted $\mathcal{N} = 8$, $D = 2$ super Yang–Mills theory as example of a Hodge type cohomological theory » Phys. Lett. B **518**, 181 (2001) [hep-th/0108058].

[55] Laurent Baulieu et Alessandro Tanzini, « Topological gravity versus supergravity on manifolds with special holonomy » JHEP **0203**, 015 (2002) [hep-th/0201109].

[56] P. de Medeiros and B. J. Spence, « Four-dimensional topological Einstein–Maxwell gravity » Class. Quant. Grav. **20**, 2075 (2003) [hep-th/0209115].

[57] B. de Wit, « Formulations of $\mathcal{N} = 2$ supergravity theories » *Europhysics study conference on unification of the fundamental interactions, Erice, Sicily, Mar 17-24*, Print-80-0427 Amsterdam (1980).

[58] M. de Roo, J. W. van Holten, B. de Wit et A. Van Proeyen, « Chiral superfields in $\mathcal{N} = 2$ supergravity » Nucl. Phys. B **173**, 175 (1980) ;
B. de Wit, R. Philippe et A. Van Proeyen, « The improved tensor multiplet in $\mathcal{N} = 2$ supergravity » Nucl. Phys. B **219**, 143 (1983).

[59] P. Breitenlohner et M. F. Sohnius, « An almost simple off-shell version of $SU(2)$ Poincaré supergravity » Nucl. Phys. B **178**, 151 (1981).

[60] L. Baulieu et M. P. Bellon, « p-forms and supergravity : gauge symmetries in curved space » Nucl. Phys. B **266**, 75 (1986).

[61] P. L. White, « Analysis of the superconformal cohomology structure of $\mathcal{N} = 4$ super-Yang–Mills » Class. Quant. Grav. **9**, 413 (1992).

[62] V. K. Dobrev et V. B. Petkova, « All positive energy unitary irreducible representations of extended conformal supersymmetry » Phys. Lett. B **162**, 127 (1985).

[63] M. Blau et G. Thompson, « Euclidean SYM theories by time reduction and special holonomy manifolds » Phys. Lett. B **415**, 242 (1997) [hep-th/9706225].

[64] L. Baulieu, « Gravitational topological quantum field theory versus $\mathcal{N} = 2\, D = 8$ supergravity » JHEP **0404**, 044 (2004) [hep-th/0304221].

[65] D. Birmingham, M. Rakowski et G. Thompson, « Renormalization of topological field theory » Nucl. Phys. B **329**, 83 (1990).

[66] O. Piguet, « On the role of vector supersymmetry in topological field theory » [hep-th/9502033].

[67] F. Gieres, J. Grimstrup, T. Pisar and M. Schweda, « Vector supersymmetry in topological field theories » JHEP **0006**, 018 (2000) [hep-th/0002167].

[68] V. E. R. Lemes, M. S. Sarandy, S. P. Sorella, A. Tanzini et O. S. Ventura, « The action of $\mathcal{N} = 4$ super Yang–Mills from a chiral primary operator » JHEP **0101**, 016 (2001) [hep-th/0011001].

[69] N. Maggiore et A. Tanzini, « Protected operators in $\mathcal{N} = 2, 4$ supersymmetric theories » Nucl. Phys. B **613**, 34 (2001) [hep-th/0105005].

[70] F. Fucito, A. Tanzini, L. C. Q. Vilar, O. S. Ventura, C. A. G. Sasaki et S. P. Sorella, « Algebraic renormalization : Perturbative twisted considerations on topological Yang–Mills theory and on $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theories » [hep-th/9707209] ;
A. Tanzini, O. S. Ventura, L. C. Q. Vilar and S. P. Sorella, « BRST cohomology of $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills theory in four dimensions » J. Phys. G **26**, 1117 (2000) [hep-th/9811191] ;
V. E. R. Lemes, N. Maggiore, M. S. Sarandy, S. P. Sorella, A. Tanzini et O. S. Ventura, « Nonrenormalization theorems for $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills » [hep-th/0012197] ;
R. Flume, « Some remarks on $\mathcal{N} = 2$ extended supersymmetric Yang–Mills theories and Seiberg-Witten duality » [hep-th/9702192] ;
K. Ulker, « $\mathcal{N} = 2$ super Yang Mills action and BRST cohomology » Mod. Phys. Lett. A **19**, 713 (2004) [hep-th/0307279] ;
K. Ulker, « $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills action as a BRST-exact term, topological Yang–Mills and instantons » Phys. Rev. D **68**, 085005 (2003) [hep-th/0304154].

[71] L. Baulieu et J. Thierry-Mieg, « Algebraic structure of quantum gravity and the classification of the gravitational anomalies » Phys. Lett. B **145**, 53 (1984).

[72] L. Baulieu et M. Bellon, « A simple algebraic construction of the symmetries of supergravity » Phys. Lett. B **161**, 96 (1985).

[73] F. Langouche, T. Schucker et R. Stora, « Gravitational anomalies of the Adler–Bardeen type » Phys. Lett. B **145**, 342 (1984).

[74] G. De Rham, « Sur la réducibilité d'un espace de Riemann » Commentarii Mathematici Helvetici **26**, 328 (1952).

[75] L. Baulieu et C. Laroche, « On generalized self-duality equations towards supersymmetric quantum field theories of forms » Mod. Phys. Lett. A **13**, 1115 (1998) [hep-th/9801014].

[76] S. Ouvry, R. Stora et P. van Baal, « On the algebraic characterization of Witten's topological Yang–Mills theory » Phys. Lett. B **220**, 159 (1989).

[77] L. Baulieu, P. A. Grassi et D. Zwanziger, « Gauge and topological symmetries in the bulk quantization of gauge theories » Nucl. Phys. B **597**, 583 (2001) [hep-th/0006036].

[78] Steven Weinberg, *Gravitation and cosmology*, John Wiley (1972).

[79] D. Mulsch et B. Geyer, « Cohomological extension of $Spin(7)$-invariant super-Yang–Mills theory in eight dimensions » Nucl. Phys. B **684**, 351 (2004) [hep-th/0310275].

[80] N. Nekrasov et A. Okounkov, « Seiberg–Witten theory and random partitions » [hep-th/0306238].

[81] D. Bellisai, F. Fucito, A. Tanzini et G. Travaglini, « Instanton calculus, topological field theories and $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills theories » JHEP **0007**, 017 (2000) [hep-th/0003272] ;

R. Flume, R. Poghossian et H. Storch, « The Seiberg–Witten prepotential and the Euler class of the reduced moduli space of instantons » Mod. Phys. Lett. A **17**, 327 (2002) [hep-th/0112211].

[82] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1992).

[83] U. Bruzzo, F. Fucito, J. F. Morales et A. Tanzini, « Multi-instanton calculus and equivariant cohomology » JHEP **0305**, 054 (2003) [hep-th/0211108].

[84] R. Flume et R. Poghossian, « An algorithm for the microscopic evaluation of the coefficients of the Seiberg–Witten prepotential » Int. J. Mod. Phys. A **18**, 2541 (2003) [hep-th/0208176].

[85] U. Bruzzo and F. Fucito, « Superlocalization formulas and supersymmetric Yang–Mills theories » Nucl. Phys. B **678**, 638 (2004) [math-ph/0310036].

[86] R. Flume, F. Fucito, J. F. Morales et R. Poghossian, « Matone's relation in the presence of gravitational couplings » JHEP **0404**, 008 (2004) [hep-th/0403057].

[87] R. Dijkgraaf, J. S. Park et B. J. Schroers, « $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang–Mills theory on a Kähler surface » [hep-th/9801066].

[88] D. Mulsch et B. Geyer, « G_2 invariant 7D Euclidean super-Yang–Mills theory as a higher-dimensional analogue of the 3D super-BF theory » Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **1**, 185 (2004) [hep-th/0310237].

[89] P. Wang, « A Suggestion for Modification of Vafa–Witten Theory » Phys. Lett. B **378**, 147 (1996) [hep-th/9512021].

[90] N. Dorey, V. V. Khoze et M. P. Mattis, « Multi-instanton calculus in $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric gauge theory. II : Coupling to matter » Phys. Rev. D **54**, 7832 (1996) [hep-th/9607202].

[91] N. Marcus, « The other topological twisting of $\mathcal{N} = 4$ Yang–Mills » Nucl. Phys. B **452**, 331 (1995) [hep-th/9506002] ;
M. Blau et G. Thompson, « Aspects of $\mathcal{N}_T \geqslant 2$ topological gauge theories and D-branes » Nucl. Phys. B **492**, 545 (1997) [hep-th/9612143].

[92] J. M. F. Labastida and C. Lozano, "Duality in twisted $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric gauge theories in four dimensions," Nucl. Phys. B **537**, 203 (1999) [hep-th/9806032] ;
M. Jinzenji and T. Sasaki, "$\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang–Mills theory on orbifold-$T^4/\mathbb{Z}_2$," Mod. Phys. Lett. A **16**, 411 (2001) [hep-th/0012242], JHEP **0112**, 002 (2001) [hep-th/0109159].

[93] A. Johansen, « Twisting of $\mathcal{N} = 1$ SUSY gauge theories and heterotic topological theories » Int. J. Mod. Phys. A **10**, 4325 (1995) [hep-th/9403017].

[94] M. Marino, « The geometry of supersymmetric gauge theories in four dimensions » Ph. D. Thesis, [hep-th/9701128].

[95] L. Baulieu et A. Tanzini, « Topological symmetry of forms, $\mathcal{N} = 1$ supersymmetry and S-duality on special manifolds » [hep-th/0412014].

[96] O. Piguet et K. Sibold, « Renormalization of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrical Yang–Mills theories » Nucl. Phys. B **196**, 428, 447 et **197**, 257, 272 (1982) ;
O. Piguet et K. Sibold, *Renormalized supersymmetry. The perturbation theory of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric theories in flat space-time*, Progress in Physics **12** (1986).

[97] S. Ferrara, L. Girardello, O. Piguet et R. Stora, « The nonpolynomial structure of supersymmetric chiral anomalies » Phys. Lett. B **157**, 179 (1985).

[98] J. W. Juer et D. Storey, « Nonlinear renormalization in superfield gauge theories » Phys. Lett. B **119**, 125 (1982).

[99] J. A. Dixon, « Supersymmetry is full of holes » Class. Quant. Grav. **7**, 1511 (1990).

[100] P. L. White, « An analysis of the cohomology structure of super-Yang–Mills coupled to matter » Class. Quant. Grav. **9**, 1663 (1992).

[101] N. Maggiore, « Algebraic renormalization of $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills theories coupled to matter » Int. J. Mod. Phys. A **10**, 3781 (1995) `[hep-th/9501057]` ;
N. Maggiore, O. Piguet et S. Wolf, « Algebraic renormalization of $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge theories » Nucl. Phys. B **458**, 403 (1996) `[hep-th/9507045]`.

[102] G. Barnich et M. Henneaux, « Renormalization of gauge invariant operators and anomalies in Yang–Mills theory » Phys. Rev. Lett. **72**, 1588 (1994) `[hep-th/9312206]`.

[103] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press (1992).

[104] V. E. R. Lemes, M. S. Sarandy, S. P. Sorella, O. S. Ventura et L. C. Q. Vilar, « An algebraic criterion for the ultraviolet finiteness of quantum field theories » J. Phys. A **34**, 9485 (2001) `[hep-th/0103110]`.

[105] S. Mandelstam, « Light cone superspace and the ultraviolet finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ model » Nucl. Phys. B **213**, 149 (1983) ;
P. S. Howe, K. S. Stelle et P. K. Townsend, « Miraculous ultraviolet cancellations in supersymmetry made manifest » Nucl. Phys. B **236**, 125 (1984) ;
L. Brink, O. Lindgren et B. E. W. Nilsson, « The ultraviolet finiteness of the $\mathcal{N} = 4$ Yang–Mills theory » Phys. Lett. B **123**, 323 (1983).

[106] M. F. Sohnius and P. C. West, « Conformal invariance in $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric Yang–Mills theory » Phys. Lett. B **100**, 245 (1981).

[107] J. M. Maldacena, « The large N limit of superconformal field theories and supergravity » Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) et Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999) `[hep-th/9711200]` ;
E. Witten, « Anti-de Sitter space and holography » Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253 (1998) `[hep-th/9802150]`.

[108] A. Blasi, V. E. R. Lemes, N. Maggiore, S. P. Sorella, A. Tanzini, O. S. Ventura et L. C. Q. Vilar, « Perturbative beta function of $\mathcal{N} = 2$ super-Yang–Mills theories » JHEP **0005**, 039 (2000) `[hep-th/0004048]`.

[109] W. Siegel, « Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction » Phys. Lett. B **84**, 193 (1979).

[110] W. Siegel, « Inconsistency of supersymmetric dimensional regularization » Phys. Lett. B **94**, 37 (1980) ;

L. V. Avdeev, S. G. Gorishnii, A. Y. Kamenshchik et S. A. Larin, « Four loop beta function in the Wess–Zumino model » Phys. Lett. B **117**, 321 (1982).

[111] D. Stöckinger, « Regularization by dimensional reduction : Consistency, quantum action principle, and supersymmetry » JHEP **0503**, 076 (2005) `[hep-ph/0503129]`.

[112] L. V. Avdeev, G. A. Chochia et A. A. Vladimirov, « On the scope of supersymmetric dimensional regularization » Phys. Lett. B **105**, 272 (1981) ;
D. Stöckinger, « Regularization of supersymmetric theories : Recent progress » `[hep-ph/0602005]`.

[113] C. Becchi, « The renormalization content of Slavnov–Taylor identities » *50 years of Yang–Mills theory*, 168-185, World Scientific (2005).

[114] W. Hollik, E. Kraus et D. Stöckinger, « Renormalization and symmetry conditions in supersymmetric QED » Eur. Phys. J. C **11**, 365 (1999) `[hep-ph/9907393]` ;
W. Hollik et D. Stöckinger, « Regularization and supersymmetry-restoring counterterms in supersymmetric QCD » Eur. Phys. J. C **20**, 105 (2001) `[hep-ph/0103009]` ;
I. Fischer, W. Hollik, M. Roth et D. Stöckinger, « Restoration of supersymmetric Slavnov–Taylor and Ward identities in presence of soft and spontaneous symmetry breaking » Phys. Rev. D **69**, 015004 (2004) `[hep-ph/0310191]`.

[115] M. Henneaux, « Remarks on the renormalization of gauge-invariant operators in Yang–Mills theory » Phys. Lett. B **313**, 35 (1993) `[hep-th/9306101]`.

[116] H. Kluberg–Stern et J. B. Zuber, « Ward identities and some clues to the renormalization of gauge -invariant operators » Phys. Rev. D **12**, 467 (1975) ;
H. Kluberg–Stern et J. B. Zuber, « Renormalization of nonabelian gauge theories in a background field gauge. 2. Gauge-invariant operators » Phys. Rev. D **12**, 3159 (1975) ;
S. D. Joglekar et B. W. Lee, « General theory of renormalization of gauge-invariant operators » Annals Phys. **97**, 160 (1976).

[117] N. Berkovits, « A ten-dimensional super-Yang–Mills action with off-shell supersymmetry » Phys. Lett. B **318** 104 (1993), `[hep-th/9308128]`.

[118] V. Alexandrov, D. Krotov, A. Losev et V. Lysov, « Materializing superghosts » `0707.1906 [hep-th]`.

[119] J. M. Evans, « Supersymmetry algebras and Lorentz invariance for $d = 10$ super-Yang–Mills » Phys. Lett. B **334**, 105 (1994) `[hep-th/9404190]`.

[120] A. S. Galperin, E. A. Ivanov, V. I. Ogievetsky et E. S. Sokatchev, *Harmonic superspace*, Cambridge University Press (2001).

[121] E. Nissimov, S. Pacheva et S. Solomon, « Off-shell superspace $d = 10$ super-Yang–Mills from covariantly quantized Green–Schwarz superstring » , Nucl. Phys. B **317** (1989) 344 ;

E. Nissimov, S. Pacheva et S. Solomon, « Action principle for overdetermined systems of nonlinear field equations » Int. J. Mod. Phys. A **4**, 737 (1989).

[122] L. Baulieu et P. West, « Six-dimensional TQFT's and twisted supersymmetry » Phys. Lett. B **436**, 97 (1998) [hep-th/9805200].

[123] Adel Bilal, Jean-Pierre Derendinger et Konstadinos Stetsos, « (Weak) G_2 holonomy from self-duality, flux and supersymmetry » Nucl. Phys. B **628**, 112 (2002) [hep-th/0111274].

[124] T. Eguchi et H. Kanno, « Topological strings and Nekrasov's formulas » JHEP **0312**, 006 (2003) [hep-th/0310235].