



HAL
open science

Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact-impact.

Chokri Zammali

► **To cite this version:**

Chokri Zammali. Contribution à la modélisation mécanique et numérique des problèmes de contact-impact.. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2005. Français. NNT: . tel-00186569

HAL Id: tel-00186569

<https://theses.hal.science/tel-00186569>

Submitted on 9 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contribution à la modélisation mécanique et numérique des
problèmes de contact-impact

Chokri ZAMMALI

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude et mes remerciements à Hachmi Ben Dhia, mon directeur de thèse, avec qui j'ai eu un réel plaisir à travailler. Je le remercie particulièrement pour sa disponibilité, ses conseils et la qualité de son encadrement.

Cette thèse a été co-financée par le ministère tunisien de l'enseignement supérieur et par la direction de recherche d'EDF. Je tiens à saluer leur soutien financier.

Ce travail a été mené, à la fois, au laboratoire de mécanique (MSS-MAT) de L'École Centrale Paris et au département Analyses mécaniques et Acoustique (AMA) de la division R&D d'EDF. Je tiens à remercier chacun de leurs membres. Je remercie particulièrement François Voltaire, Patrick Massin, Sophie Lamarche et l'équipe Aster pour la confiance qu'ils m'ont témoignée.

Je tiens à remercier vivement Pierre Alart et Michel Jean qui ont consacré du temps à l'examen de ce travail et accepté d'en être les rapporteurs.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Michel Potier-Ferry qui a accepté de présider la soutenance de ma thèse.

Mes sincères remerciements s'adressent également à Denis Aubry et à Patrick Massin pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Enfin, je remercie tous les membres de l'équipe Structure du laboratoire MSS-MAT et de l'équipe T62 du département AMA pour leur bonne humeur.

Table des matières

1	Formalismes et schémas d'intégration du contact en dynamique. Un bref état de l'art	11
1.1	Formalismes et schémas d'intégration temporelle	12
1.1.1	Formalismes en mécanique du contact	12
1.1.2	Schémas d'intégration temporelle	18
1.2	Méthodes numériques pour le contact en dynamique	19
1.2.1	Un problème de référence: impact de deux barres	19
1.2.2	Formalisme du contact par pénalisation et intégration en temps	20
1.2.3	Formalisme lagrangien du contact et intégration en temps	27
1.3	Conclusion	36
2	Contact entre solides: du local au global	37
2.1	Position du problème et notations	38
2.2	Cinématique des grandes transformations	39
2.3	Équations d'équilibre	42
2.3.1	Équations locales d'équilibre	42
2.3.2	Principe des Travaux Virtuels	43
2.4	Loi de comportement	44
2.5	Interactions de contact	45
2.5.1	Paramétrisation et repères locaux	45
2.5.2	Appariement	47
2.5.3	Condition de non interpénétration et vitesses relatives	48
2.5.4	Principe de l'action et de la réaction	49
2.5.5	Lois de contact et de frottement	49
2.6	Formes locales équivalentes des lois de contact et de frottement	52
2.6.1	Premières écritures équivalentes	52
2.6.2	Deuxièmes écritures équivalentes	53
2.6.3	Formulation lagrangienne du problème dynamique de contact frottant	56
2.7	Formulation stabilisée: unification des formalismes lagrangiens	58
2.8	Conclusion	60

3	Formulation hybride faible-forte pour les problèmes d'impact et discrétisations	61
3.1	Formulation hybride faible-forte continue	62
3.1.1	Limites du modèle de Signorini en dynamique	62
3.1.2	Lois de contact de Signorini-Moreau	62
3.1.3	Écriture en équations des lois de Signorini-Moreau	65
3.1.4	Formulation faible-forte du problème de contact dynamique	66
3.1.5	Prise en compte du frottement	68
3.1.6	Résultats de conservation	70
3.2	Approximations et résolution numériques	73
3.2.1	Formulation semi-discrétisée du problème de contact dynamique	73
3.2.2	Discrétisations en espace	75
3.2.3	Discrétisation du terme de stabilisation	81
3.3	Stratégie de résolution	82
3.4	Conclusion	85
4	Approches multi-échelles pour les problèmes de contact	87
4.1	Modèle d'interface multi-niveau	88
4.1.1	Motivation	88
4.1.2	Modèle géométrique des interfaces	88
4.1.3	Équations locales du modèle d'interface multi-niveau	90
4.1.4	Formulation faible-forte du problème de contact multi-niveau	91
4.1.5	Premiers résultats numériques	92
4.2	L'approche Arlequin pour les problèmes de contact	94
4.2.1	Nécessité des approches multi-échelles	94
4.2.2	Aperçu sur la méthode Arlequin	95
4.2.3	L'approche Arlequin en dynamique	96
4.2.4	L'approche Arlequin pour les problèmes de contact en dynamique	100
4.2.5	Discrétisations du problème modèle	102
4.2.6	Stratégie de résolution	102
4.2.7	Conservation de l'énergie avec l'approche Arlequin	103
4.3	Conclusion	105
5	Exemples numériques	107
5.1	Stabilisation: quel intérêt?	108
5.1.1	Contact de Hertz	108
5.1.2	Patin frottant en dynamique	110
5.1.3	Patch-test de Taylor	111
5.2	Formulation en vitesse	111
5.2.1	Impact entre barres	113
5.2.2	Impact d'un cylindre sur un bloc rigide	115

5.2.3	Impact de Taylor	117
5.3	Multi-échelle	121
5.3.1	Modèle multi-niveau	121
5.3.2	Modélisation par l'approche Arlequin	121
5.4	Exemples industriels	123
5.4.1	Grappe de commande	124
5.4.2	Crayon de combustible et grille de maintien : une première perspective	124
5.4.3	Intérêt de l'approche Arlequin en présence de hautes fréquences	124
5.5	Conclusion	129

Introduction

Les phénomènes de contact-impact sont omniprésents dans le vécu quotidien de chacun, mais également dans divers secteurs du génie civil ou industriel. Ils se manifestent, par exemple, lors de la marche, du roulage des véhicules, des interactions des sols et des fondations, des séismes, des procédés de mise en forme, des joints de grains ou encore des crashes des véhicules etc...

Pour leur calcul, les problèmes de contact-impact présentent plusieurs difficultés inhérentes à leurs caractères non-linéaires, irréguliers et multi-échelles, rendant leur résolution analytique souvent impossible et celle numérique ardue. La communauté des chercheurs et des ingénieurs mécaniciens s'est intéressée de manière intense à la résolution de ce type de problèmes durant les dernières décennies. Pour des solutions analytiques ou semi-analytiques, on pourra consulter l'ouvrage de Johnson [67] pour le contact en statique ou quasi-statique, et celui de Goldsmith [55] pour l'impact. L'impossibilité de calculer analytiquement des solutions aux problèmes de contact-impact, d'une part et le développement de méthodes et d'outils numériques, d'autre part, ont conduit au calcul approché de ces problèmes. Une littérature abondante a été consacrée aux formulations, analyses, approximations et résolutions numériques des problèmes de contact en statique ou quasi-statique, et ce depuis le début des années 70. Pour une couverture large mais non exhaustive, nous renvoyons à l'ouvrage récent de Wriggers [106]. Pour les problèmes de contact en dynamique, nous renvoyons à [74] pour une bibliographie numérique récente sur le sujet. Nous renvoyons également aux travaux de Moreau, Jean et leurs collaborateurs (e.g. [83, 65, 110, 64, 84, 103, 85]) pour des éclairages sur les aspects irréguliers inhérents à la mécanique du contact en dynamique.

Ce travail s'inscrit comme contribution au calcul numérique des problèmes de contact-impact entre solides déformables en grandes transformations. Il entre dans le cadre d'une collaboration entre le laboratoire MSS-Mat de l'École Centrale Paris et le département Analyses Mécaniques

et Acoustique (AMA) de la division recherche et développement d'EDF¹ (Clamart). Il poursuit des travaux de collaboration antérieurs, développés dans un cadre quasi-statique [80, 50].

Une première motivation industrielle de ce travail est le calcul d'assemblages combustibles d'une cuve de réacteur nucléaire. Pour ce système, les sollicitations extérieures, dues au fluide caloporteur, induisent des chocs au sein des liaisons entre les crayons combustibles et les grilles de maintien (figure 1). Ces chocs (localisés en temps et en espace) constituent une source d'endommagement pour les assemblages. Une seconde motivation est liée à la descente de la grappe de commande. La très haute exigence de sûreté des installations nucléaires rend impérative la connaissance précise de certains champs mécaniques, particulièrement des forces de contact.

Ce document se compose de cinq chapitres. Le premier comporte un bref état de l'art des méthodes numériques dédiées au traitement des problèmes de contact en dynamique. Ces méthodes correspondent au croisement des formalismes de la mécanique du contact et des schémas d'intégration en temps dont nous rappelons quelques éléments. Les différentes méthodes, développées durant cette thèse dans *Code_Aster*², sont analysées à la lumière d'un cas académique d'impact de deux barres.

Le second chapitre propose de nouvelles écritures en "équations" des lois locales de contact permettant de dériver une formulation lagrangienne continue, qualifiée de stabilisée, généralisant celles lagrangienne classique et (quasi-) lagrangienne augmentée. La nouvelle formulation offre ainsi un cadre pour unifier les implémentations numériques des méthodes lagrangiennes exactes.

Dans la première partie du chapitre 3, en suivant en essence les travaux de Moreau et Jean, nous proposons une formulation continue hybride faible-forte, adaptée aux problèmes d'impact. Elle dérive d'une écriture (équivalente) en "équations" des lois de Signorini-Moreau, moyennant l'introduction de champs de signes de type level-sets, définis sur la zone potentielle de contact. Les lois de frottement de Coulomb sont également écrites en "équations" et sont intégrées dans la même formulation. Un intérêt particulier de cette formulation est que, par discrétisations, elle permet d'assurer le respect des conditions cinématiques de contact en placements et en vitesses relatifs, à la fois. Dans une deuxième partie du chapitre 3, des éléments de contact-impact sont dérivés à partir de la formulation continue. Nous utilisons une variante du θ -schéma pour la discrétisation en temps. La discrétisation en espace est faite par le biais de la méthode des

1. Électricité de France.

2. Code éléments finis thermo-mécanique d'EDF

éléments finis et d'une méthode de collocation. La première sert pour approcher les champs primaux et duaux et la deuxième pour approcher les champs de signes (irréguliers en temps et en espace). Un algorithme mixant des stratégies de points fixes et une méthode de type Newton généralisée est utilisé pour la résolution numérique des problèmes discrets.

L'aspect multi-échelle (en espace) des problèmes de contact-impact est abordé dans le chapitre 4. Nous proposons, tout particulièrement, un modèle d'interface multi-niveau permettant de rendre compte des comportements locaux et globaux des interfaces de contact. Ce modèle présente un intérêt numérique particulier pour la résolution des problèmes de chocs, traités par des formulations classiques. L'application de la méthode Arlequin [17] aux problèmes multi-échelles de contact est présentée dans une seconde partie. La possibilité qu'offre cette méthode pour traiter des phénomènes locaux (hautes fréquences) dans les zones critiques d'impact et des phénomènes globaux (modes d'ébranlement) loin de la zone critique, et ce sans piégeages d'ondes, est l'un des points marquants de ce chapitre.

Le dernier chapitre est dédié à des applications numériques académiques et aux premières applications industrielles. Une partie des développements informatiques des formulations proposées a été intégrée, dans le cadre de cette thèse, dans *Code_Aster*.

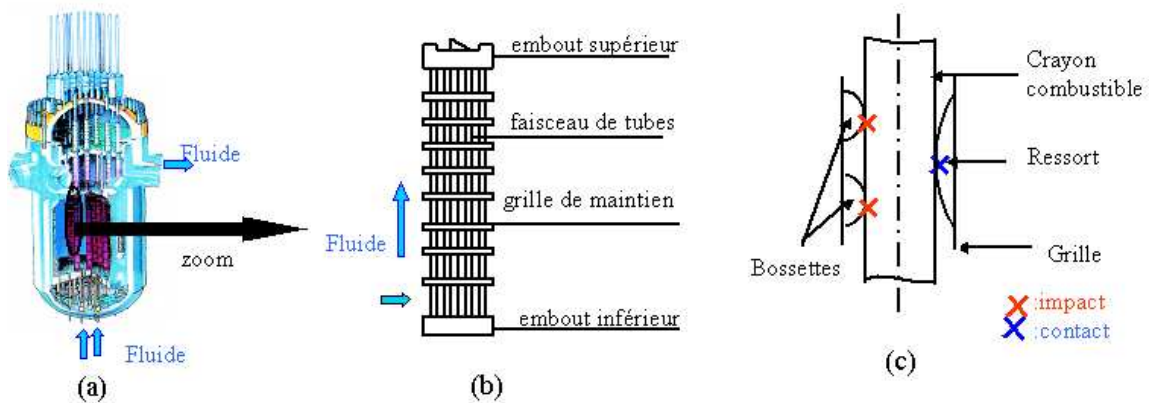


FIG. 1 – (a) Cuve nucléaire (b) Assemblage combustible (c) Crayon combustible

Chapitre 1

Formalismes et schémas d'intégration du contact en dynamique. Un bref état de l'art

Sommaire

1.1	Formalismes et schémas d'intégration temporelle	12
1.1.1	Formalismes en mécanique du contact	12
1.1.2	Schémas d'intégration temporelle	18
1.2	Méthodes numériques pour le contact en dynamique	19
1.2.1	Un problème de référence : impact de deux barres	19
1.2.2	Formalisme du contact par pénalisation et intégration en temps	20
1.2.3	Formalisme lagrangien du contact et intégration en temps	27
1.3	Conclusion	36

Les méthodes numériques dédiées au traitement des problèmes de contact en dynamique ont fait l'objet de très nombreuses publications (e.g. [69, 112, 10, 74]). La bibliographie sur le sujet a été d'autant plus abondante que plusieurs formalismes de ces problèmes ont été croisés avec une grande variété de schémas numériques d'intégration en temps : chaque croisement donnant lieu à une méthode particulière.

Dans ce chapitre, nous en balayons les plus courantes. Nous les analysons en vue de situer nos contributions.

Afin de ne pas alourdir notre exposé, nous avons choisi de présenter dans une première partie les formalismes classiques sur la base d'un problème de contact statique et sans frottement. Les croisements de schémas d'intégration en temps avec les formalismes sont listés, testés et analysés à la lumière d'un exemple simple : celui de l'impact de deux barres élastiques.

1.1 Formalismes et schémas d'intégration temporelle

1.1.1 Formalismes en mécanique du contact

Nous considérons un solide déformable \mathcal{B} , occupant l'adhérence d'un ouvert Ω de R^d ($d = 2$ ou 3), susceptible de rentrer en contact avec un obstacle \mathcal{O} au niveau d'une surface potentielle de contact Γ_c (voir figure 1.1).

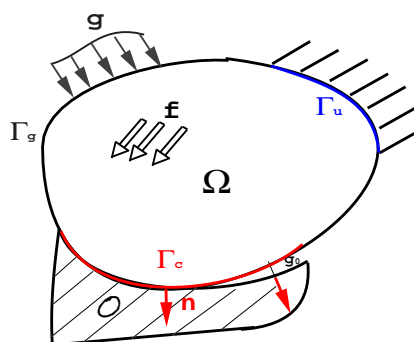


FIG. 1.1 – Problème-modèle de contact

En supposant que le solide est élastique, suivant la loi de Hooke et évoluant en petites perturbations, les équations locales d'équilibre du solide en statique, la loi de comportement, les

équations de compatibilité et les conditions aux limites s'écrivent comme suit :

$$\operatorname{div}\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1)$$

$$\sigma = \mathcal{R} : \varepsilon \quad (1.2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (1.3)$$

$$\sigma \cdot n = g \quad \text{sur } \Gamma_g \quad (1.4)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (1.5)$$

où σ est le tenseur des contraintes, ε est le tenseur des déformations linéarisées, \mathcal{R} est le tenseur des raideurs élastiques vérifiant les propriétés classiques, u est le champ des déplacements, f est la densité d'efforts volumiques et g est la densité d'efforts surfaciques données.

A ce système, il faut rajouter les lois de contact sur Γ_c . Pour cela, nous notons d_n la distance orientée de la surface potentielle de contact à l'obstacle. Observons qu'en HPP (hypothèses des petites perturbations), nous avons :

$$d_n = u \cdot n - g_0 \quad (1.6)$$

où n est la normale intérieure à l'obstacle et g_0 est le jeu initial entre le solide et l'obstacle (voir figure 1.1).

La formulation aux déplacements faible du problème mécanique décrit ci-dessus, en supposant que le contact n'est pas actif ($\sigma \cdot n = 0$, sur Γ_c), est la suivante :

Problème 1

Trouver $u \in \mathcal{CA}$;

$$J(u) = \min_{w \in \mathcal{CA}} J(w) \quad (1.7)$$

où \mathcal{CA} est l'espace des déplacements cinématiquement admissibles et où :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v)$$

avec

$$a(u,v) = \int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) d\Omega$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_g} g \cdot v d\Gamma$$

On sait que ce problème admet une solution unique. Comme l'énergie potentielle J est Gâteaux-différentiable et que \mathcal{CA} est un espace de Hilbert (cf. e.g. [1]), nous savons que cette solution satisfait l'identité dite d'Euler. Plus précisément, le problème 1 est équivalent au suivant :

Problème 2

Trouver $u \in \mathcal{CA}$; $\forall w \in \mathcal{CA}$

$$D_u J(u).w = a(u, w) - l(w) = 0 \quad (1.8)$$

où $D_u J$ désigne la dérivée au sens Gâteaux de J .

En tenant compte à présent du contact unilatéral exact, le problème 1 devient :

Problème 3

Trouver $u \in \mathcal{CA} \cap K_u$;

$$J(u) = \min_{w \in \mathcal{CA} \cap K_u} J(w) \quad (1.9)$$

où

$$K_u = \{w ; d_n(w) \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\} \quad (1.10)$$

A cause de la contrainte unilatérale ($d_n(w) \leq 0$), nous ne pouvons plus utiliser l'identité d'Euler. Nous pouvons relâcher la contrainte d'unilatéralité pour en tenir compte dans l'énergie. Ceci nous ramène au problème suivant :

Problème 4

Trouver $u \in \mathcal{CA}$;

$$J(u) = \min_{w \in \mathcal{CA}} [J(w) + I_{K_u}(w)] \quad (1.11)$$

où I_{K_u} est la fonctionnelle caractéristique de K_u définie par :

$$\begin{aligned} I_{K_u}(w) &= 0 \quad \text{si } w \in K_u \\ I_{K_u}(w) &= +\infty \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

Mais nous ne pouvons toujours pas utiliser l'identité d'Euler pour caractériser la solution du problème 4 et ce à cause de l'irrégularité de I_{K_u} . Cette fonctionnelle n'est pas Gâteaux-différentiable. Elle est sous-différentiable (cf. e.g. [48, 41]) et nous pouvons écrire le problème 4 sous forme d'inéquations (et non d'équations) variationnelles comme suit [47] :

Problème 5

Trouver $u \in \mathcal{CA} \cap K_u$; $\forall w \in \mathcal{CA} \cap K_u$

$$a(u, w - u) - l(w - u) \geq 0 \quad (1.12)$$

Ce système se prête mal à la résolution numérique. Des formalismes approchés et d'autres exacts ont été développés. Nous allons rappeler brièvement les plus classiques d'entre eux.

Formalisme par pénalisation

L'écriture (Problème 4) du problème de contact rajoute en fait une "pénalité" infinie à l'énergie dès qu'un champ virtuel w ne respecte pas la contrainte de non intrepénétration. Le formalisme par pénalisation (ou la méthode de pénalisation) classique consiste à lisser (ou régulariser) I_{K_u} . Ceci se fait simplement en introduisant la fonctionnelle de pénalisation :

$$j_\kappa(w) = \int_{\Gamma_c} \frac{\kappa}{2} [(d_n(w))^+]^2 d\Gamma \quad (1.13)$$

où κ est un réel strictement positif, appelé paramètre de pénalisation et où $(\cdot)^+$ désigne la partie positive de (\cdot) .

Le problème pénalisé s'écrit alors :

Problème 6

Trouver $u_\kappa \in \mathcal{CA}$;

$$J_\kappa(u_\kappa) = \min_{w \in \mathcal{CA}} J_\kappa(w) \quad (1.14)$$

où

$$J_\kappa(w) = J(w) + j_\kappa(w)$$

avec j_κ définie par (1.13).

Il s'agit d'un problème d'optimisation d'une fonctionnelle Gâteaux-différentiable sur un espace de Hilbert. Nous pouvons donc utiliser l'identité d'Euler pour caractériser la solution. En outre, pour tout κ , le problème 6 est bien posé et la solution approchée u_κ tend vers u (solution du problème 3), selon la norme associée à \mathcal{CA} , lorsque κ tend vers l'infini (e.g. [54]).

La limite pratique majeure de la méthode de pénalisation est liée à la difficulté du choix du paramètre de pénalisation. Un paramètre relativement grand détériore le conditionnement du problème. Un paramètre relativement petit génère des interpénétrations non recevables entre les deux solides. Signalons enfin qu'il existe d'autres types de régularisation que par pénalisation (e.g. [106]).

Formalismes lagrangiens

Il existe trois types de formalismes lagrangiens.

Formalisme purement lagrangien Il consiste à introduire un multiplicateur de Lagrange permettant de contrôler la contrainte $d_n(u) \leq 0$. La méthode de Lagrange transforme la contrainte sur le champ de déplacement en une contrainte sur le multiplicateur (cf. [48]).

Le problème 3 est équivalent au problème suivant :

Problème 7

Trouver $(u, \lambda) \in \mathcal{CA} \times K_\lambda$;

$$L(u, \lambda) = \sup_{\mu \in K_\lambda} \inf_{w \in \mathcal{CA}} L(w, \mu) \quad (1.15)$$

où

$$K_\lambda = \{\mu \in \mathcal{H}; \quad \mu \leq 0 \quad (\text{au sens de la dualité})\} \quad (1.16)$$

$$\mathcal{H} = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \quad (1.17)$$

$$L(w, \mu) = J(w) - \langle \mu, d_n(w) \rangle \quad (1.18)$$

avec \langle , \rangle référant au crochet de dualité entre l'espace des multiplicateurs de Lagrange \mathcal{H} et l'espace des traces des déplacements normaux sur Γ_c .

Observons que le formalisme lagrangien mène à un problème de recherche de point-selle dans lequel les multiplicateurs sont unilatéralement contraints (les déplacements ne l'étant plus).

L'écriture de la stationnarité du lagrangien en la solution (u, λ) ne mène pas, de ce fait, à des équations variationnelles, mais à des inéquations variationnelles comme dans le problème 5.

Formalisme lagrangien augmenté L'avantage essentiel du formalisme lagrangien augmenté classique [92, 61] par rapport à celui lagrangien rappelé ci-dessus, est qu'il mène à l'optimisation d'un lagrangien régulier et sans contraintes d'inégalités sur les multiplicateurs [49, 3] (cf. aussi [97, 93] pour un formalisme proche).

Le problème de contact s'écrit en effet :

Problème 8

Trouver $(u, \lambda) \in \mathcal{CA} \times \mathcal{H}$;

$$L(u, \lambda) = \sup_{\mu \in \mathcal{H}} \inf_{w \in \mathcal{CA}} L_\rho(w, \mu) \quad (1.19)$$

où le lagrangien augmenté L_ρ s'écrit formellement comme suit :

$$L_\rho(w, \mu) = J(w) - \frac{1}{2\rho} \|\mu\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2\rho} \|(\mu - \rho d_n(w))^- \|_{\mathcal{H}}^2$$

où $(.)^-$ désigne la partie négative de $(.)$ et où ρ est un paramètre strictement positif dont le choix en pratique n'est pas renseigné.

Formalisme lagrangien perturbé Du point de vue numérique, les formalismes purement lagrangien et lagrangien augmenté donnent lieu à des matrices tangentes non définies positives, exigeant de ce fait des solveurs appropriés. Le formalisme lagrangien perturbé permet de pallier cette difficulté numérique. Il consiste à perturber la solution du lagrangien par un terme renforçant sa coercivité par rapport au multiplicateur de Lagrange [100, 68, 69].

Le problème à résoudre est le suivant :

Problème 9

Trouver $(u_\epsilon, \lambda_\epsilon) \in \mathcal{CA} \times K_\lambda$;

$$L(u_\epsilon, \lambda_\epsilon) = \sup_{\mu \in K_\lambda} \inf_{w \in \mathcal{CA}} L_\epsilon(w, \mu) \quad (1.20)$$

où

$$L_\epsilon(w, \mu) = J(w) - \frac{\epsilon}{2} \|\mu\|_{\mathcal{H}}^2$$

et où ϵ est un paramètre strictement positif, arbitrairement petit.

Remarquons que, contrairement au formalisme lagrangien augmenté où il n'y a pas de contraintes, ce formalisme conserve la contrainte sur le multiplicateur comme l'exige le formalisme purement lagrangien. La solution donnée par cette méthode est approchée. Elle tend vers la solution exacte lorsque ϵ tend vers 0 [100].

Remarque 1.1

Les formalismes présentés peuvent (quasiment) être étendus aux lois de frottement. Nous renvoyons particulièrement au travail d'Alart et Curnier [3] pour le formalisme quasi-lagrangien augmenté.

Ces formalismes mènent selon que l'on utilise la technique de pénalisation ou celle du multiplicateur de Lagrange aux problèmes types suivant :

- Formalisme par pénalisation

$$F_{int}(u) + F_c(u) = F_{ext} \quad (1.21)$$

- Formalisme lagrangien

$$F_{int}(u) + F_c(u, \lambda) = F_{ext} \quad (1.22)$$

$$L_c(u, \lambda) = 0 \quad (\text{lois de contact}) \quad (1.23)$$

où F_{int} , F_c et F_{ext} désignent respectivement les vecteurs associés aux efforts intérieurs, de contact et extérieurs, et où λ et L_c représentent le multiplicateur de contact et les lois de contact.

Jusqu'à présent, nous avons négligé le terme d'inertie pour nous focaliser sur les formalismes de la mécanique du contact. Dans la section suivante, nous nous intéressons à l'aspect dynamique des problèmes de contact en focalisant sur les différents croisements opérés dans la littérature entre les formalismes rappelés ci-dessus et les schémas d'intégration en temps, en vue de résolution numérique des problèmes de contact en dynamique.

1.1.2 Schémas d'intégration temporelle

En dynamique linéaire, les notions de schémas d'intégration en temps explicites et implicites sont très répandues (e.g. [9]). Les premiers sont souvent utilisés pour la résolution des problèmes

à hautes fréquences et les seconds pour ceux à basses fréquences. L'approche explicite découple les inconnues du problème discret, mais nécessite un contrôle du pas de temps par le pas d'espace en fonction des vitesses des ondes, pour éviter l'explosion de la solution numérique. Les schémas explicites sont pour cette raison dits conditionnellement stables. Les schémas implicites sont inconditionnellement stables, mais nécessitant la résolution coûteuse de systèmes où les inconnues sont couplées.

En dynamique non linéaire, les mêmes notions sont également utilisées moyennant quelques précautions [9]. Ainsi, les schémas explicites ne sont pas bien adaptés aux problèmes dynamiques avec des comportements élastoplastiques des matériaux constituants [100]. En effet, l'utilisation d'éléments finis d'ordres élevés pour intégrer ces comportements, conduit à des matrices de masse non condensables. L'approche implicite est plus adaptée à ce genre de problème avec des choix de pas de temps relativement petits. En ce qui concerne les problèmes de contact/impact, après avoir choisi le formalisme de contact, l'intégration de la dynamique peut être faite d'une manière totalement implicite ou explicite ou mixte.

Dans la partie suivante, nous discutons à travers un exemple académique, les performances des méthodes numériques du contact en dynamique, obtenues par croisement des formalismes et des schémas en temps. Les résultats numériques ont été obtenus par implémentation de ces formalismes/schémas dans *Code_Aster*.

1.2 Méthodes numériques pour le contact en dynamique

1.2.1 Un problème de référence : impact de deux barres

Il s'agit de l'impact de deux barres déformables dans le sens longitudinal (figure 1.2). Le contact et la séparation sont analysés du point de vue de la propagation des ondes longitudinales.

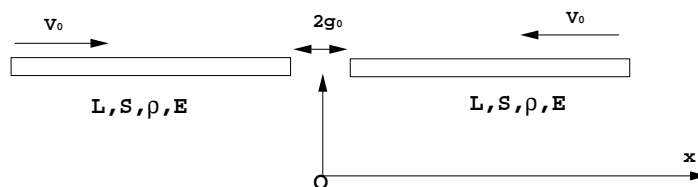


FIG. 1.2 – Données du problème d'impact de deux barres

La figure 1.3 présente la solution analytique de l'impact de deux barres déformables identiques, soumises à deux vitesses initiales v_0 , opposées et de normes égales. Nous y montrons les champs de déplacements, vitesses et contraintes axiales au niveau des points potentiels de contact. Les expressions des instants de contact t_c , de séparation t_s , de la contrainte axiale σ et de la force de contact f_c sont données par :

$$t_c = \frac{g_0}{v_0} \quad (1.24)$$

$$t_s = \frac{g_0}{v_0} + 2L\sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (1.25)$$

$$\sigma = \frac{f_c}{S} = v_0\sqrt{\rho E} \quad (1.26)$$

où $2g_0$, L et S désignent, respectivement, le jeu initial, la longueur et la section des deux barres, et où E et ρ désignent le module de Young et la densité volumique, respectivement; le module de Poisson ν étant égal à zéro.

Pour plus de détails, nous renvoyons à l'annexe 1. (cf. aussi [53])

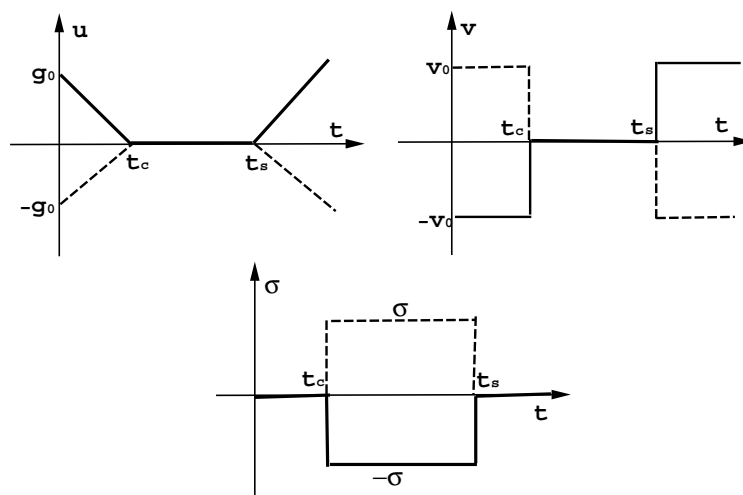


FIG. 1.3 – Solution analytique de l'impact de deux barres

1.2.2 Formalisme du contact par pénalisation et intégration en temps

Nous présentons, pour la clarté, le cas le plus élémentaire d'une modélisation par pénalisation. Il s'agit de modéliser localement le contact par la réaction d'un ressort linéaire de raideur κ . La force de contact F_c s'exprime en fonction de la déformation du ressort $(d_n)^+$ comme suit :

$$F_c = -\kappa(d_n)^+ \quad (1.27)$$

où κ est le paramètre de pénalisation (paramètre positif) et où $(.)^+$ est la partie positive de $(.)$.

Après avoir modélisé le contact par la méthode de pénalisation, l'intégration temporelle de la dynamique en présence du contact peut se faire de manière explicite ou implicite. Dans ce qui suit, nous notons par M la matrice de masse et par u , v et a les vecteurs de déplacement, vitesse et accélération, respectivement.

Pénalisation et intégration explicite

Cette approche est la plus simple à mettre en œuvre dans un code de calcul (e.g. [57, 56, 72]). Elle repose i) sur une approximation des forces de contact par le modèle (1.27) et ii) sur une discrétisation explicite de l'équation d'équilibre comme suit :

$$Ma^k = F_{ext}^k - F_{int}^k - F_c^k \quad (1.28)$$

$$v^k = v^{k-1} + \frac{\Delta t}{2} [a^{k-1} + a^k] \quad (1.29)$$

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t v^k + \frac{\Delta t^2}{2} a^k \quad (1.30)$$

$$u^0 = u_0 \quad \text{et} \quad v^0 = v_0 \quad (1.31)$$

où Δt est le pas de temps et où k se réfère à l'instant de discrétisation t_k . Dans (1.31) u_0 et v_0 désignent les données initiales. Dans l'équation (1.28), les forces de contact, intérieures et extérieures sont connues à l'instant t_k .

Le schéma des différences centrées (1.29) et (1.30) est le schéma le plus utilisé pour ce type de discrétisation, et ce, pour des raisons de précision (précis au second ordre en dynamique linéaire [51]). En dynamique linéaire, son pas de temps Δt doit vérifier une condition de stabilité (ou CFL), nous supposons qu'en présence du contact cette condition doit également être vérifiée. Belytschko et Neal ont montré dans [11] que le pas de temps critique dépend également du paramètre de pénalisation donnant ainsi plus de restriction sur le choix de Δt .

$$\Delta t \leq \Delta t_{cont} < \Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (1.32)$$

où ω_{max} est la pulsation propre maximale du modèle numérique et Δt_{cont} est le pas de temps critique dépendant du paramètre de pénalisation [11].

Afin de bénéficier du cadre explicite de la discrétisation, une forme condensée de la matrice de masse doit être utilisée. Ce choix permet un calcul plus rapide de la solution, d'une part, de tenir compte de la propagation à l'échelle de l'élément, d'autre part; étant donné que les informations aux noeuds sont découplées les unes des autres.

Remarque 1.2

En présence du frottement, la discrétisation totalement explicite risque d'induire des instabilités numériques dues aux fortes non-linéarités du frottement [87]. Pour conserver les avantages de l'approche sus-mentionnée, on peut utiliser une approche semi-explicite : approximation explicite des forces de contact et implicite des forces de frottement [87].

Algorithme de résolution L'algorithme de résolution des équations de l'approche par pénalisation avec intégration explicite est donné par la figure 1.4.

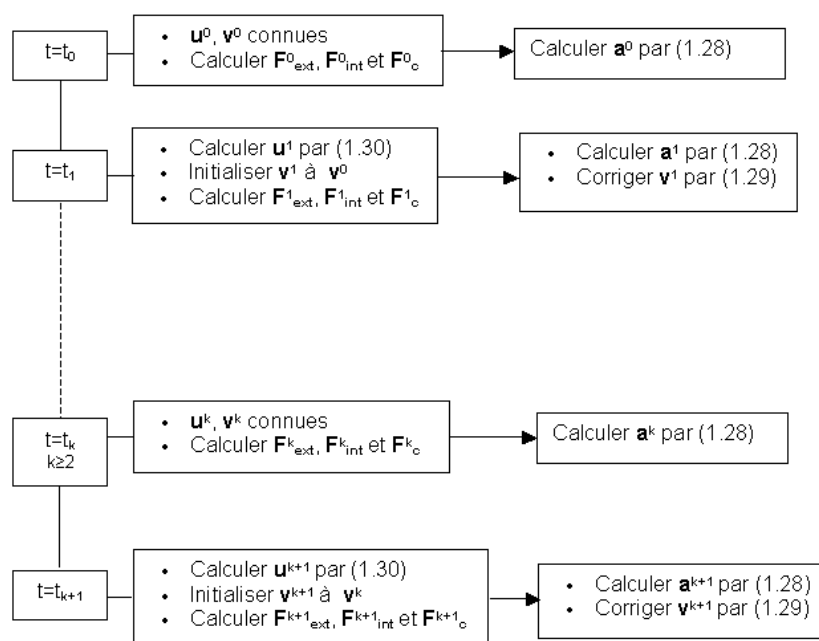


FIG. 1.4 – Algorithme de l'approche pénalisation/explicite

Observons que la matrice de masse est une matrice condensée, que les forces de contact s'expriment (vectoriellement) par :

$$F_c^k = -\kappa(d_n^k)^+$$

et que les statuts des points de contact sont déterminés à partir d'une phase de prédiction, dans

laquelle on ne tient pas compte des nouveaux statuts de contact. La correction (tenant compte du contact) permet de calculer le vrai déplacement.

Analyse des résultats numériques Nous présentons sur la figure 1.5 les champs de déplacement, vitesse, accélération et pression de contact d'un point de la barre potentiellement en contact, donnés par l'approche par pénalisation et une intégration explicite par le schéma des différences centrées. Ces résultats sont cohérents avec les résultats obtenus par Carpenter et al. [38]. L'énergie totale E_t dans les deux barres, représentée sur la figure 1.6, décroît pendant la phase de contact parce que le contact est traité par pénalisation.

Notons que pour respecter la non-interpénétration matérielle, le paramètre de pénalisation doit être relativement grand. Un tel choix contraint le choix du pas de temps qui doit être relativement petit pour satisfaire la condition de stabilité (cf. e.g. [11]).

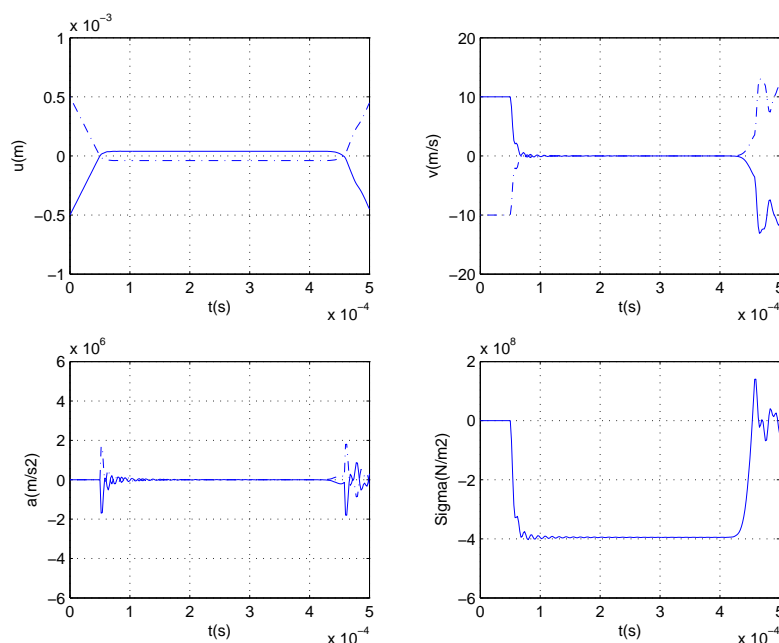


FIG. 1.5 – Impact de deux barres par l'approche pénalisation/explicite

Remarque 1.3

La pénalisation des lois de contact peut être non-linéaire et faire intervenir de l'amortissement

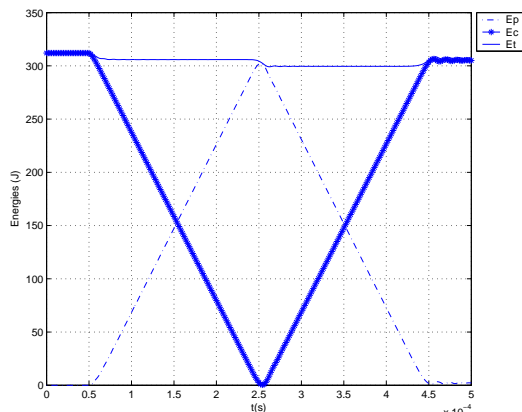


FIG. 1.6 – Énergies par l'approche pénalisation/explicite

mécanique permettant, ainsi, de représenter des lois expérimentales [87].

Pénalisation et intégration implicite

Pour la méthode de pénalisation, l'intégration implicite est intéressante parce qu'elle permet de traiter "proprement" les non linéarités des lois de contact et de frottement, moyennant l'enrichissement de la matrice tangente (cf. e.g. [6]). Par ailleurs, il est connu en dynamique linéaire que les schémas implicites sont inconditionnellement stables et introduisent (dans le cas de Newmark) une dissipation numérique contrôlable [9]. Certains auteurs comme Laursen [75, 40] et Armero [4, 5] ont utilisé cette méthode, tout en modifiant l'intégration implicite afin de conserver l'énergie totale et les quantités de mouvements linéaire et angulaire, en présence de contact dynamique.

Algorithme de résolution Les équations et l'algorithme associés à cette méthode sont donnés par (1.33)-(1.36) et par la figure 1.7, respectivement.

$$M a^{k+1} + F_{int}^{k+1} + F_c^{k+1} = F_{ext}^{k+1} \quad (1.33)$$

$$v^{k+1} = v^k + \Delta t \left[(1 - \gamma) a^k + \gamma a^{k+1} \right] \quad (1.34)$$

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t v^k + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) a^k + 2\beta a^{k+1} \right] \quad (1.35)$$

$$u^0 = u_0 \quad \text{et} \quad v^0 = v_0 \quad (1.36)$$

où β et γ sont les paramètres de Newmark vérifiant la condition de stabilité (en linéaire) $\gamma \geq 0.5$ et $\beta \geq \frac{(\gamma+0.5)^2}{4}$ [51], et où u_0 et v_0 sont le déplacement et la vitesse à l'instant initial.

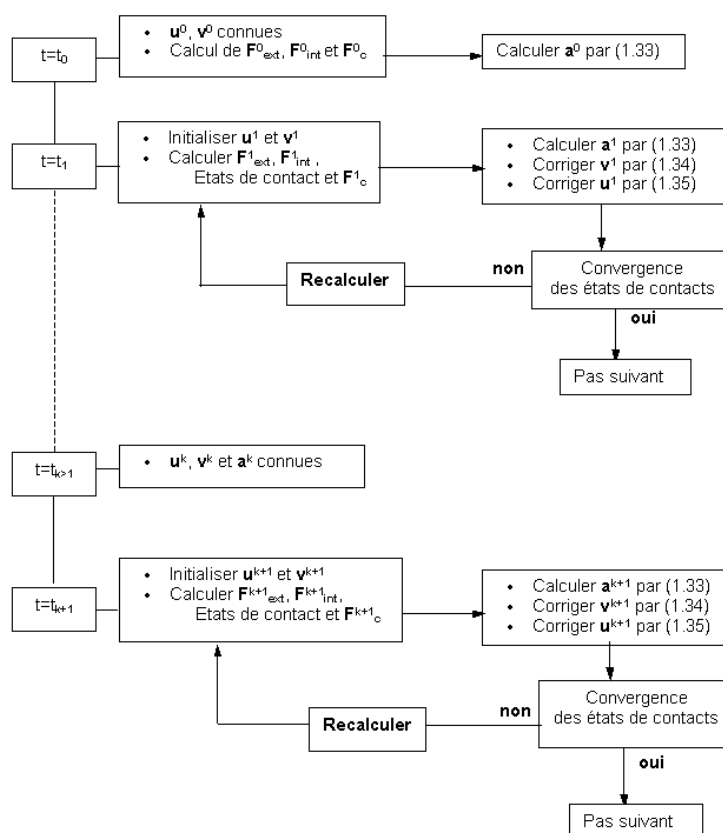


FIG. 1.7 – Algorithme de l'approche pénalisation/implicite

Analyse des résultats numériques Les résultats obtenus par cette approche (figure 1.8) montrent que les placements des extrémités des deux barres ne respectent pas la condition de non-interpénétration. Les courbes de vitesse, accélération et pression de contact, montrent des oscillations numériques pendant la phase de contact. L'amplitude de ces oscillations est fortement dépendante des choix des paramètres numériques, à savoir celui pénalisant les pénétrations et ceux du schéma de Newmark contrôlant l'amortissement numérique. L'énergie totale E_t dans les deux barres ne se conserve pas à cause de la pénalisation d'une part, de la dissipation numérique introduite par le schéma de Newmark, d'autre part (voir figure 1.9).

Le choix "optimal" du paramètre de pénalisation fait partie des points auxquels la méthode est sensible : une très grande valeur de ce paramètre peut perturber le conditionnement de la matrice de rigidité tangente, car elle est alimentée par des termes de pénalisation.

Remarque 1.4

Nous pouvons utiliser des modèles de pénalisation non-linéaires comme les modèles à simple ou double compliances [15, 16] (figure 1.10). Ces modèles permettent d'adoucir le changement brutal de la pente des lois de contact.

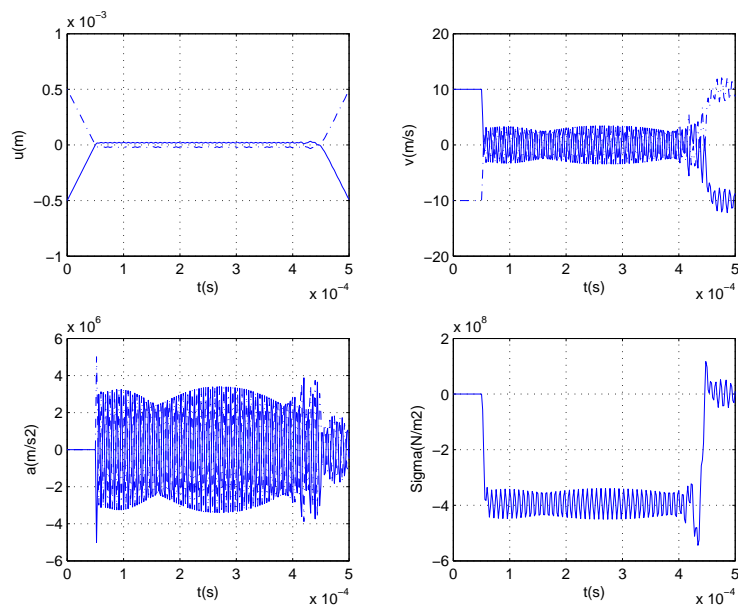


FIG. 1.8 – Impact de deux barres par l'approche pénalisation/implicite

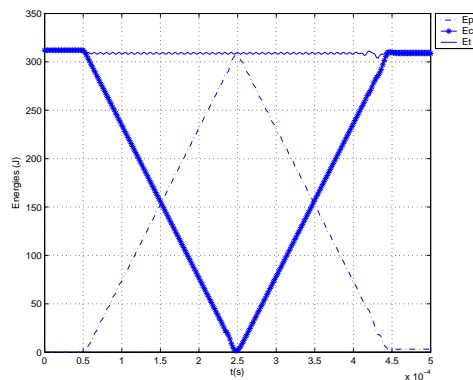


FIG. 1.9 – Énergies par l'approche pénalisation/implicite

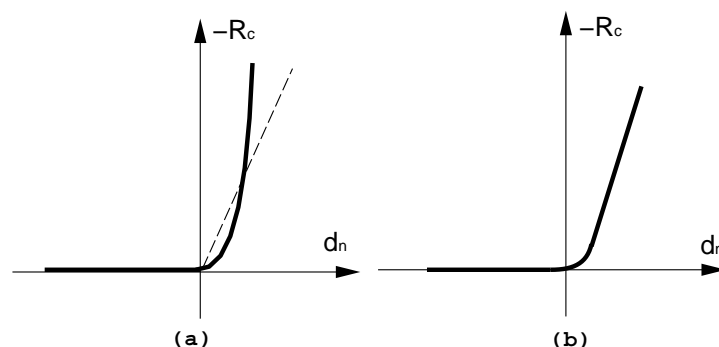


FIG. 1.10 – Modèles à simple (a) et double (b) compliance

Remarque 1.5

L'intégration implicite peut être faite à l'aide de la famille de schémas de HHT [62], généralisant celle de Newmark [86]. Ces schémas permettent tout particulièrement d'améliorer le filtrage des hautes fréquences.

1.2.3 Formalisme lagrangien du contact et intégration en temps

Les formalismes lagrangiens des problèmes de contact, rappelés précédemment dans un cadre statique, peuvent aussi être utilisés dans un cadre dynamique. Tout comme pour le formalisme par pénalisation, les schémas d'intégration en temps peuvent être soit explicites, soit implicites, voire "mixtes" (ou semi-explicites). Décrivons ces différentes approches.

Formalisme lagrangien et intégration semi-explicite

Ce type d'approche consiste à adopter une approximation semi-explicite de l'équation d'équilibre moyennant une intégration par un schéma des différences centrées, par exemple. Le caractère semi-explicite est lié aux traitements implicites des forces de contact et explicites des forces intérieures. Ce choix est intéressant car les conditions de contact sont respectées en temps et en espace via l'usage de multiplicateurs de Lagrange en chacun des instants du calcul. (cf. e.g. [38, 95, 35]). Le frottement est également traité de manière exacte, en suivant l'évolution dynamique du système mécanique : il n'y a pas de déphasage entre les forces de contact/frottement et les transformations des solides en contact.

Algorithme de résolution Les équations et l'algorithme associés à cette approche sont donnés par (1.37)-(1.41) et par la figure 1.11, respectivement.

$$M a^{k+1} + (A_c^{k+1})^T \lambda^{k+1} = -F_{int}^k + F_{ext}^{k+1} \quad (1.37)$$

$$A_c^{k+1} u^{k+1} + C^{k+1} \lambda^{k+1} = E^{k+1} \quad (\text{lois de contact}) \quad (1.38)$$

$$v^{k+1} = v^k + \frac{\Delta t}{2} [a^k + a^{k+1}] \quad (1.39)$$

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t v^{k+1} + \frac{\Delta t^2}{2} a^{k+1} \quad (1.40)$$

$$u^0 = u_0 \quad \text{et} \quad v^0 = v_0 \quad (1.41)$$

où A_c^{k+1} , C^{k+1} et E^{k+1} sont des matrices/vecteurs de contact et λ^{k+1} est le multiplicateur de contact.

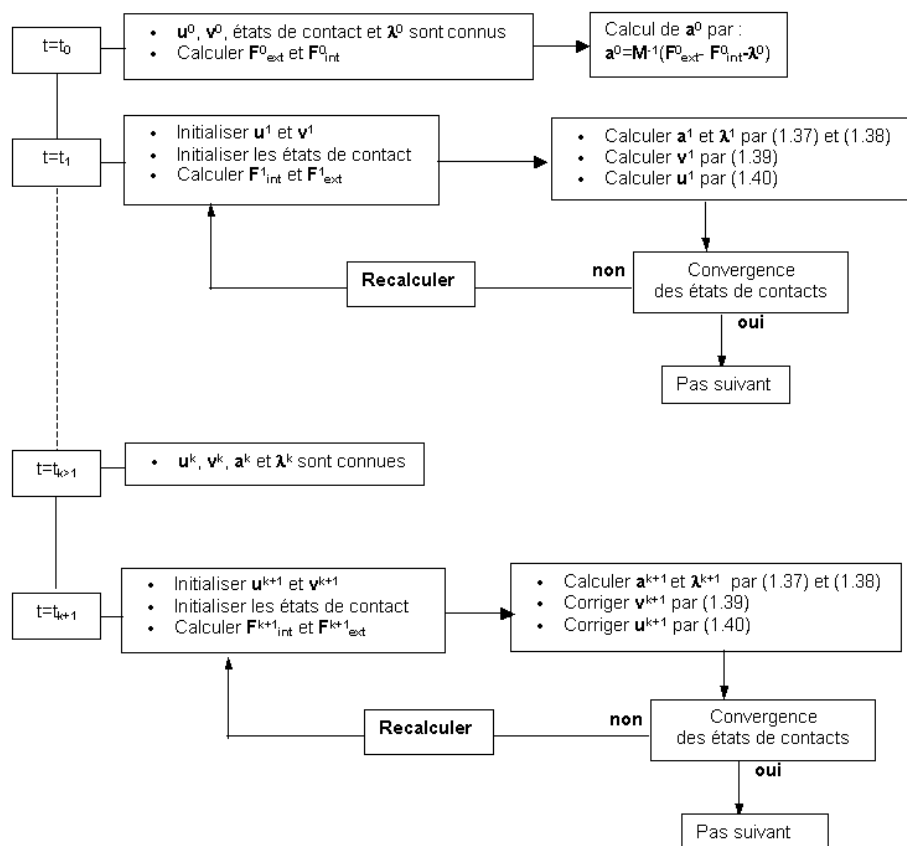
Observons qu'en pratique, le système (1.37)-(1.41) est résolu (à contacts fixés) à l'aide d'une méthode de Gauss par bloc dans laquelle la matrice de masse est condensée sur la diagonale. C'est par cette condensation que l'on peut continuer à évoquer un caractère explicite du schéma.

Analyse des résultats numériques L'application de l'algorithme (figure 1.11) à l'exemple d'impact de deux barres déformables donne les résultats illustrés par la figure 1.12 où nous présentons les champs de déplacement, vitesse, accélération et densité de forces de contact au niveau de deux points potentiellement en contact.

En analysant ces résultats, nous remarquons que :

- i) le contact est respecté exactement,
- ii) au moment du choc, les sauts des vitesses et des accélérations normales des points en contact effectif sont différents de zéro. En revanche ils sont égaux à zéro aux autres instants de contact.

Observons que, pendant la phase de vol libre qui suit le décollement, les champs de vitesses, accélérations et densité de forces de contact oscillent autour de leurs valeurs moyennes. Par ailleurs, l'énergie totale dans les deux barres est constante par intervalle de temps (figure 1.13). A cause de l'approximation explicite des forces intérieures, on détecte de faibles oscillations de l'énergie de déformation E_p et de l'énergie cinétique E_c induisant de légères oscillations de l'énergie totale E_t . Les résultats que nous donnons ici sont en accord avec ceux obtenus par Carpenter et al. [38] et Sha et al. [95].

FIG. 1.11 – *Algorithme de l'approche lagrangienne/semi-explicite*

Formalisme lagrangien et intégration implicite

Dans ce type d'approche, on traite le contact de manière exacte et on utilise les schémas de Newmark/HHT pour l'intégration temporelle. Cette méthode est très utilisée (e.g. [63, 8, 102, 74, 103]), parce qu'elle permet, en particulier, d'intégrer "proprement" les non-linéarités de frottement et de l'élastoplasticité, d'une part, d'introduire de l'amortissement numérique (contrôlé), d'autre part. Elle est utilisée et améliorée par plusieurs auteurs (e.g. [63, 103]). Nous commençons par l'analyse de la variante la plus classique (Lagrange/Newmark). Nous décrivons, ensuite, les améliorations proposées dans la littérature.

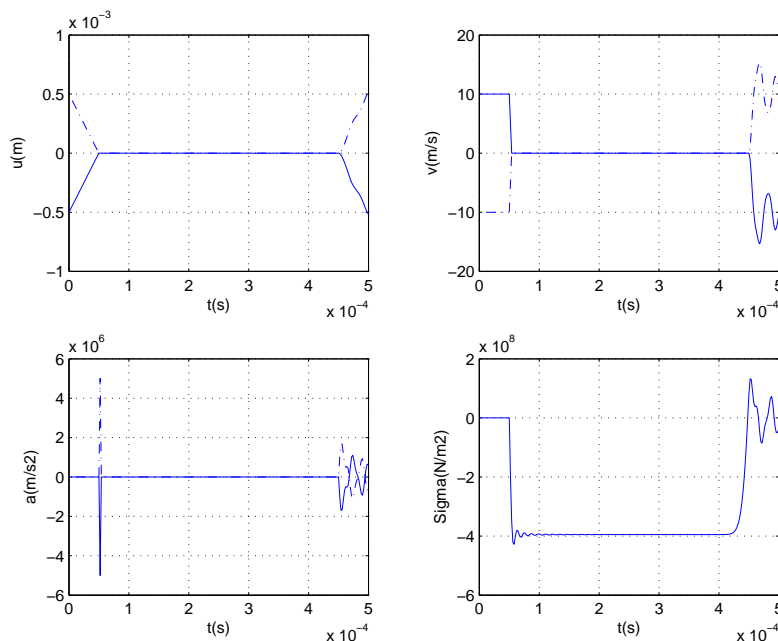


FIG. 1.12 – Impact de deux barres par l'approche lagrangienne/semi-explicite

Algorithme de résolution Les équations et l'algorithme associés à cette méthode sont donnés par (1.42)-(1.46) et par la figure 1.14, respectivement.

$$M a^{k+1} + F_{int}^{k+1} + (A_c^{k+1})^T \lambda^{k+1} = F_{ext}^{k+1} \quad (1.42)$$

$$A_c^{k+1} u^{k+1} + C^{k+1} \lambda^{k+1} = E^{k+1} \quad (\text{lois de contact}) \quad (1.43)$$

$$v^{k+1} = v^k + \Delta t [(1 - \gamma) a^k + \gamma a^{k+1}] \quad (1.44)$$

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t v^k + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta) a^k + 2\beta a^{k+1}] \quad (1.45)$$

$$u^0 = u_0 \quad \text{et} \quad v^0 = v_0 \quad (1.46)$$

où λ^{k+1} , A_c^{k+1} , C^{k+1} et E^{k+1} sont le multiplicateur de contact et des matrices/vecteurs de contact, respectivement à l'instant de calcul t_{k+1} , et où β et γ sont les paramètres de Newmark.

Analyse des résultats numériques L'application de l'algorithme (figure 1.14) à l'exemple d'impact des deux barres donne les résultats représentés sur la figure 1.15. Nous y constatons que la condition de non interpénétration est respectée. Toutefois, en comparant ces résultats aux solutions analytiques de l'impact de deux barres élastiques, nous constatons l'apparition, au moment du choc, d'oscillations numériques importantes sur les champs de vitesses, densité de forces de contact et les accélérations au niveau de la zone de contact. Observons que l'usage d'un

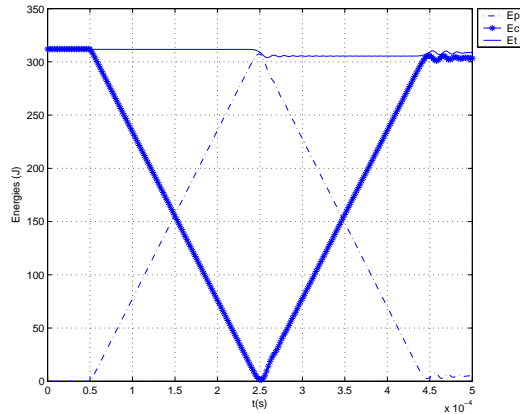


FIG. 1.13 – Énergies par l'approche lagrangienne/semi-explicite

schéma de Newmark amortissant permet de filtrer une partie des hautes fréquences. Néanmoins, cet amortissement modifie les modes à basses fréquences. Pour remédier à cette carence, on peut utiliser des schémas HHT dont l'avantage par rapport aux schémas de Newmark est de filtrer les hautes fréquences sans dégrader les modes à basses fréquences.

L'énergie totale E_t dans les deux barres est représentée sur la figure 1.16. Nous constatons que l'énergie totale se conserve dans le cas d'une discrétisation sans amortissement numérique, alors qu'elle décroît dès lors qu'on introduit de la dissipation numérique.

Origine des oscillations Revenons sur les oscillations numériques (non-physiques). Elles sont engendrées par les discontinuités en temps des champs de vitesses (liées à l'usage d'une méthode lagrangienne pour traiter le contact) et l'utilisation d'un schéma d'ordre élevé en temps, adapté à l'approximation des fonctions régulières en temps (hypothèses de validité des développements de Taylor). La précision de tels schémas devient pénalisante en présence d'impacts. Elle accentue les oscillations. Ce constat se confirme en comparant ces résultats à ceux obtenus par la méthode de pénalisation où les oscillations sont moins importantes pour la même intégration implicite.

Par ailleurs, en utilisant des schémas classiques d'intégration en temps (type Newmark) et en contrôlant la non-interpénétration par une méthode de Lagrange, on constate que les sauts des champs de vitesses et accélérations aux points de contact effectif ne sont pas nuls. Pour mieux comprendre ce qui se passe numériquement (cf. [102]), considérons l'exemple d'impact entre deux points de contact, exemple auquel nous appliquons la méthode lagrangienne avec

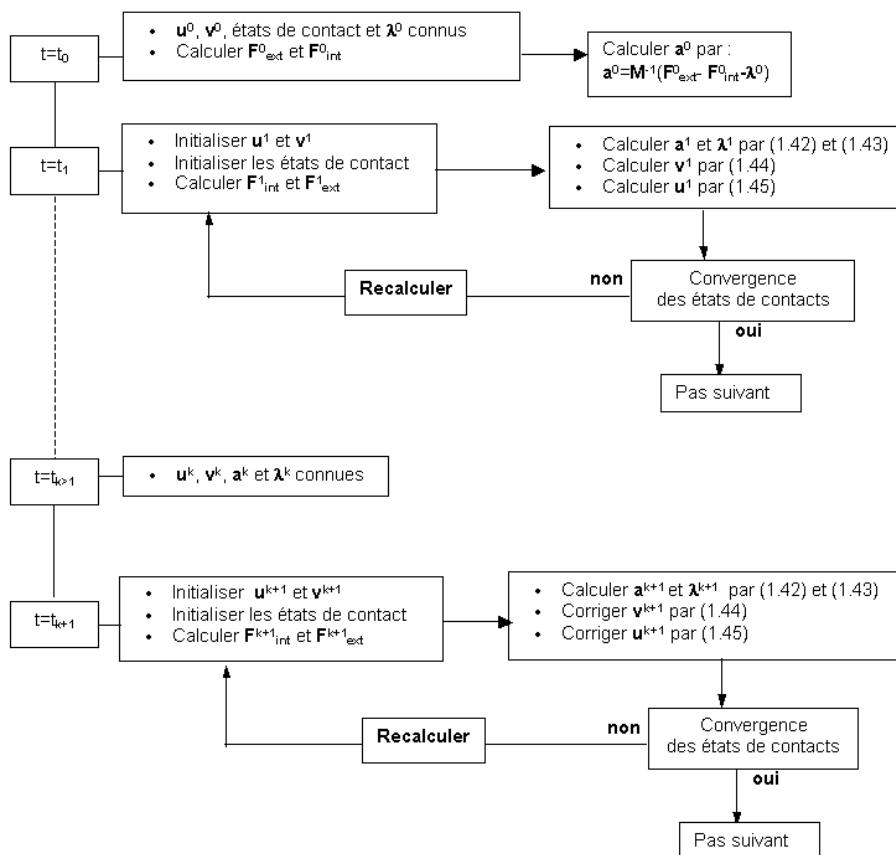


FIG. 1.14 – *Algorithme de l'approche lagrangienne/implicite*

une intégration en temps par la famille des schémas de Newmark. Nous supposons que les deux points sont soumis aux conditions initiales suivantes : (où p^1 et p^2 désignent les positions initiales des deux points)

$$p^1 + u_1^0 = p^2 + u_2^0 = 0 \quad (1.47)$$

$$v_1^0 = v_0 \quad \text{et} \quad v_2^0 = 0 \quad (1.48)$$

$$a_1^0 = a_2^0 = 0 \quad (1.49)$$

L'algorithme précédent (figure 1.14) impose à l'instant suivant *via* le multiplicateur de contact λ l'égalité suivante :

$$(p^1 + u_1^1).n = (p^2 + u_2^1).n \quad (1.50)$$

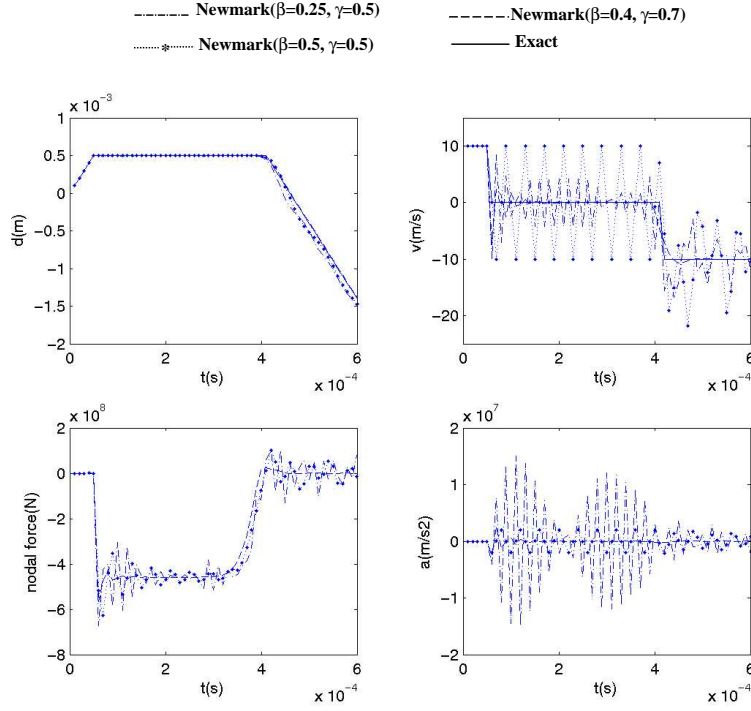


FIG. 1.15 – Impact de deux barres par l'approche lagrangienne/implicite

Soit, en l'exprimant en fonction des quantités connues à l'instant initial :

$$\begin{aligned} (p^1 + u_1^0) \cdot n + \Delta t v_1^0 \cdot n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) a_1^0 + 2\beta a_1^1 \right] \cdot n = \\ (p^2 + u_2^0) \cdot n + \Delta t v_2^0 \cdot n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) a_2^0 + 2\beta a_2^1 \right] \cdot n \end{aligned} \quad (1.51)$$

En tenant compte des conditions initiales, nous obtenons (pour $\beta > 0$):

$$(a_2^1 - a_1^1) \cdot n = \frac{1}{\beta \Delta t} v_0 \cdot n \quad (1.52)$$

La relation entre les vitesses et les accélérations donne (pour $\beta > 0$):

$$(v_2^1 - v_1^1) \cdot n = \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) v_0 \cdot n \quad (1.53)$$

Les relations (1.52) et (1.53) montrent que les sauts des champs de vitesses et d'accélérations normales (numériques) ne sont pas nuls au moment du choc. Ils dépendent des paramètres de

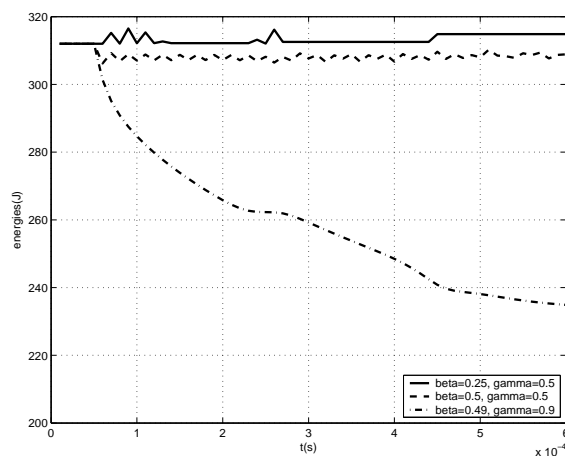


FIG. 1.16 – Énergie totale par l'approche lagrangienne/implicite

Newmark (β, γ) et du pas de temps Δt . Plus précisément, le saut d'accélération est inversement proportionnel au pas de temps, ce qui explique l'apparition d'un saut numérique au moment du choc (figure 1.15) et le saut des vitesses est directement proportionnel au saut des vitesses initiales.

Améliorations proposées dans la littérature de l'approche lagrangienne/implicite

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la modélisation lagrangienne du contact avec une intégration implicite (e.g. [63, 74]...). Ils l'ont analysée et ont proposé des modifications pour améliorer ses performances numériques. Nous décrivons dans la suite les modifications classiques.

Modifications des schémas de Newmark Hughes et al. [63] ont proposé de corriger *a posteriori* les vitesses, accélérations et force de contact de la zone potentielle de contact par une analyse locale de propagation d'ondes de façon à satisfaire la compatibilité des vitesses et des accélérations. Ce faisant, les oscillations des champs obtenues par utilisation du schéma de Newmark disparaissent. La modification concerne chaque couple de points candidats au contact et se fait par étape selon qu'ils sont en phase de contact ou de séparation. Cette méthode introduit implicitement une échelle de temps liée à la célérité des ondes dans les solides; ce qui impose l'adaptation du pas de temps pour obtenir des résultats précis [82]. Par ailleurs, les modifications proposées ont été testées sur des cas où les noeuds de contact sont en vis-à-vis et dans le cas de contact sans frottement et en petites déformations.

Bathe et Chaudhary [39] ont proposé l'utilisation d'un schéma de Newmark, avec le choix particulier $\beta = \gamma = 0.5$. Ceci permet d'avoir, dans le cas d'impact de deux masses ponctuelles, des sauts de vitesses normales nuls. Toutefois, dans le cas de l'impact de deux barres, les champs des vitesses restent oscillants.

Taylor et Papadopoulos [102] ont proposé de corriger le schéma de Newmark par l'ajout de deux multiplicateurs assurant d'une manière exacte la nullité des sauts des vitesses et des accélérations normales pendant la phase de contact. Ces conditions sont relâchées au moment de la séparation, ce qui revient à utiliser le schéma classique de Newmark. Cette correction permet de contrôler les sauts des vitesses et des accélérations normales à la fois et ainsi de supprimer les oscillations. Etant donné que cette méthode introduit de nouvelles inconnues, elle alourdit la résolution du problème numérique, surtout en tridimensionnel.

Algorithmes numériques conservant l'énergie et les quantités de mouvements

En suivant les travaux de Simo et al. [99], Laursen et al. [75] et Armero et al. [4] ont proposé des schémas d'intégration en temps des problèmes de contact-impact conservant l'énergie, les quantités de mouvement linéaire et angulaire du système mécanique.

Nous vérifions, dans le chapitre 3, que l'énergie totale d'un système de solides déformables, soumis à des actions de contact en dynamique (en absence de forces extérieures), se conserve quand la condition appelée de persistance est vérifiée [75]. Dans le cadre continu, cela ne pose pas de problème particulier, du fait que la condition de contact persistant dérive "naturellement" de la condition de complémentarité des conditions de contact. En revanche, après discrétisation temporelle, cette condition n'est plus assurée. Pour l'assurer en discret, Laursen et al. [75] et Armero et al. [4] ont proposé les remèdes suivants :

- En introduisant des multiplicateurs de Lagrange assurant la condition de persistance aux instants particuliers $k + \frac{1}{2}$, Laursen et al. [75] arrivent à conserver l'énergie et à supprimer les oscillations, mais la condition de non-interpénétration n'est plus satisfaite à tous les instants. En effet, le multiplicateur de contact n'est actif qu'aux instants $k + \frac{1}{2}$ et le gap n'est pas contrôlé aux instants de calcul $k + 1$.
- Armero et al. [4] ont utilisé la même démarche, mais en pénalisant la condition de persistance. La conservation de l'énergie est assurée par le choix d'une pénalisation en fonction du champ de "gap dynamique". Cependant, la condition de non-interpénétration n'est pas satisfaite car le "gap réel" n'est pas contrôlé.

Dans des travaux ultérieurs, Laursen et ses collaborateurs [76, 79] ont proposé de suivre la même démarche de conservation, mais cette fois-ci en contrôlant les placements et en corrigeant les vitesses pour assurer la conservation. La correction des vitesses est basée sur une approche discrète. Deux limitations se présentent: i) la méthode n'est pas applicable systématiquement avec les méthodes lagrangiennes (classique ou augmentée) et ii) l'approche discrète de la correction des vitesses pourrait ne pas être applicable dans les cas de maillages incompatibles.

Formulations en vitesse Michel Jean et ses collaborateurs (cf. e.g. [65, 64, 110, 103]) ont proposé de résoudre le problème d'impact en vitesse comme variable primale et en percussion comme variable duale aux lieux des déplacements et des forces de chocs. Cette approche est plus adaptée au problème d'impact parce qu'elle permet de réduire l'ordre du système différentiel et d'utiliser en conséquence un schéma d'ordre moins élevé, en l'occurrence des variantes de la θ -méthode. Les lois de contact sont écrites d'une manière discrète en fonction des vitesses. Cette approche donne de bons résultats. En particulier, les oscillations disparaissent pendant la phase de contact. Toutefois, à cause de l'ordre du θ -schéma (ordre 1) on récupère de la dispersion numérique.

1.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les différents formalismes et schémas d'intégration temporelle utilisés en mécanique du contact (en régime dynamique). Nous avons testé et analysé différentes méthodes numériques obtenues par croisement des formalismes et des schémas en temps sur un cas académique d'impact de deux barres élastiques. L'étude bibliographique menée dans ce chapitre nous conduit à favoriser les choix suivants :

1. les formalismes lagrangiens
2. l'intégration temporelle implicite ou mixte.

Dans le chapitre suivant nous nous intéressons aux formulations lagrangiennes continues des problèmes de contact en grandes transformations.

Chapitre 2

Contact entre solides : du local au global

Sommaire

2.1	Position du problème et notations	38
2.2	Cinématique des grandes transformations	39
2.3	Équations d'équilibre	42
2.3.1	Équations locales d'équilibre	42
2.3.2	Principe des Travaux Virtuels	43
2.4	Loi de comportement	44
2.5	Interactions de contact	45
2.5.1	Paramétrisation et repères locaux	45
2.5.2	Appariement	47
2.5.3	Condition de non interpénétration et vitesses relatives	48
2.5.4	Principe de l'action et de la réaction	49
2.5.5	Lois de contact et de frottement	49
2.6	Formes locales équivalentes des lois de contact et de frottement	52
2.6.1	Premières écritures équivalentes	52
2.6.2	Deuxièmes écritures équivalentes	53
2.6.3	Formulation lagrangienne du problème dynamique de contact frottant	56
2.7	Formulation stabilisée: unification des formalismes lagrangiens	58
2.8	Conclusion	60

Ce chapitre est scindé en deux parties. La première présente le cadre général classique [19, 106, 74] du problème de contact frottant, en dynamique et en grandes transformations, entre solides déformables. La deuxième montre comment nous dérivons la formulation lagrangienne "stabilisée" généralisant les formulations classiques moyennant une écriture en équations des lois de contact et de frottement et l'introduction de champs de signes (de type Level-Sets [13]) inconnus. Ce point constitue, à notre connaissance, l'une des originalités de ce travail de thèse [34].

2.1 Position du problème et notations

Nous considérons le problème de contact entre deux solides S^1 et S^2 , occupant dans leur configuration initiale l'adhérence des domaines Ω_0^1 et Ω_0^2 de R^d ($d = 2,3$) et, dans leur configuration actuelle, l'adhérence des domaines Ω_t^1 et Ω_t^2 . L'espace R^d est muni d'un repère orthonormé direct (O, e_1, \dots, e_d) (voir figure 2.1).

Notons, pour $(i = 1,2)$, Γ^i et γ^i les frontières des domaines Ω_0^i et Ω_t^i , respectivement.

Nous supposons que ces frontières sont suffisamment régulières et que chacune d'elles est décomposée en trois parties disjointes, notées Γ_u^i , Γ_g^i et Γ_c^i telles que :

$$\Gamma^i = \overline{\Gamma}_u^i \cup \overline{\Gamma}_g^i \cup \overline{\Gamma}_c^i \quad (2.1)$$

Ces trois parties sont définies de la façon suivante :

- Γ_u^i est la partie de Γ^i où un déplacement \overline{u}^i est imposé. Dans la plupart des cas, nous supposons que cette partie est encastrée ($\overline{u}^i = 0$); le cas de la condition de Dirichlet non homogène ne posant pas de problème particulier.
- Γ_g^i est la partie sur laquelle des densités de forces surfaciques g^i (supposées connues) sont appliquées.
- Γ_c^i est la partie potentielle de contact.

γ_u^i , γ_g^i et γ_c^i sont les transformées de Γ_u^i , Γ_g^i et Γ_c^i dans la configuration actuelle.

Notons également par n_0^i et n_t^i les normales unitaires aux frontières Γ^i et γ^i , extérieures aux domaines Ω_0^i et Ω_t^i , respectivement.

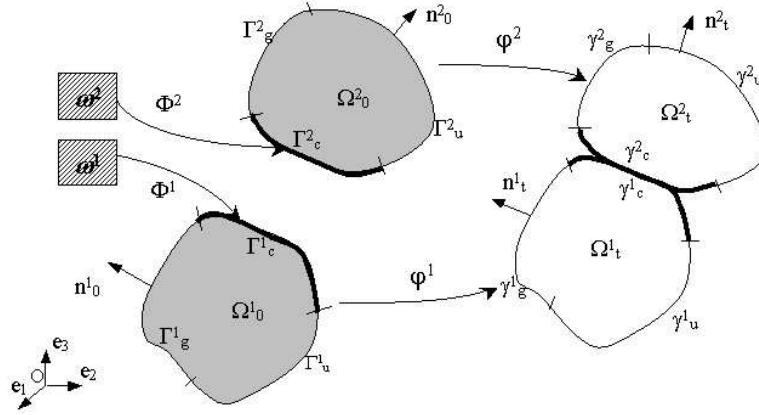


FIG. 2.1 – Problème mécanique et notations

Par ailleurs, afin de décrire la cinématique des deux solides et d'écrire des équations d'équilibre, nous introduisons les notations suivantes :

- i : l'indice valant 1 ou 2.
- p^i et x^i : champs positions d'un point matériel dans la configuration initiale et actuelle, respectivement.
- σ^i, Π^i et S^i : tenseur des contraintes de Cauchy, premier et deuxième tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff, respectivement.
- ρ^i_0 et ρ^i_t : masses volumiques du solide S^i dans les deux configurations.
- f^i_v : densité de forces volumiques dans Ω^i_t .
- $I = [t_0, t_f]$ l'intervalle de temps durant lequel nous étudions la dynamique du système mécanique.

2.2 Cinématique des grandes transformations

Dans ce paragraphe, nous présentons les différentes grandeurs cinématiques permettant la description de solides déformables, en transformations finies. Par ailleurs, en adoptant la description lagrangienne (matérielle) du mouvement, nous rappelons les expressions des tenseurs classiques de déformations et de contraintes.

Le champ de déplacement du solide S^i est noté u^i et s'écrit :

$$u^i(p^i, t) = x^i(p^i, t) - p^i, \quad \text{pour } (p^i, t) \in \Omega^i_0 \times I \quad (2.2)$$

La vitesse et l'accélération (lagrangiennes) de la particule p^i s'obtiennent à partir de dérivations partielles par rapport au temps du champ de déplacement. Ainsi [10] :

$$v^i(p^i, t) = \frac{\partial u^i(p^i, t)}{\partial t} = \frac{\partial x^i(p^i, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$a^i(p^i, t) = \frac{\partial^2 u^i(p^i, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x^i(p^i, t)}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

La transformation du solide S^i de sa configuration initiale à sa configuration actuelle est décrite par l'application φ^i définie par :

$$\begin{aligned} \varphi^i : \Omega_0^i \times I &\longrightarrow \Omega_t^i \\ (p^i, t) &\longmapsto x^i(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

En supposant que ces transformations sont régulières, la transformation des surfaces de contact peut être écrite comme suit :

$$\varphi^i(\Gamma_c^i, t) = \gamma_c^i \quad (2.6)$$

Nous supposons également l'existence de cartes régulières, notées Φ^i , décrivant les surfaces de contact Γ_c^i . Elles sont définies de la manière suivante (e.g. [19]) :

- **Cas d=3**

$$\begin{aligned} \Phi^i : \omega^i &\longrightarrow R^3 \\ (\xi^1, \xi^2) &\longmapsto \Phi^i(\xi^1, \xi^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

où ω^i est, par exemple, le carré de référence unité $\omega^i = [0,1] \times [0,1]$.

- **Cas d=2**

$$\begin{aligned} \Phi^i : \omega^i &\longrightarrow R^2 \\ \xi &\longmapsto \Phi^i(\xi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dans ce cas, ω^i est un élément de référence de R , par exemple $[0,1]$.

Le gradient de déformation, noté F^i , est défini par :

$$F^i = \nabla_p \varphi^i = \nabla_p u^i + I_d \quad (2.9)$$

où I_d est l'identité de R^d et ∇_p est le gradient par rapport à la variable de la configuration initiale p .

L'introduction de ce tenseur permet d'écrire la transformation d'un vecteur élémentaire dp^i de la configuration initiale en un vecteur dx^i de la configuration actuelle (cf. e.g. [52]) :

$$dx^i = F^i dp^i \quad (2.10)$$

Le tenseur de déformation de Green-Lagrange est défini par :

$$E^i = \frac{1}{2} \left[(F^i)^T F^i - I_d \right] = \frac{1}{2} \left[\nabla_p u^i + (\nabla_p u^i)^T + (\nabla_p u^i)^T \nabla_p u^i \right] \quad (2.11)$$

où $(.)^T$ est l'opérateur de transposition.

L'expression du tenseur de déformation E se décompose en une partie linéaire et une autre non linéaire par rapport à u . Celle linéaire définit le tenseur des déformations linéarisées ε^i utilisé dans le cas des petites perturbations :

$$\varepsilon^i = \frac{1}{2} \left[\nabla_p u^i + (\nabla_p u^i)^T \right] \quad (2.12)$$

Nous notons par J^i le jacobien de la transformation φ^i :

$$J^i(p^i, t) = \det(\nabla_p \varphi(p^i, t)), \quad \text{pour } (p^i, t) \in \Omega_0^i \times I \quad (2.13)$$

L'hypothèse d'impenétabilité de la matière entre les deux solides impose que :

$$J^i(p^i, t) > 0, \quad \text{pour } (p^i, t) \in \Omega_0^i \times I \quad (2.14)$$

Moyennant l'introduction du jacobien, la transformation d'un élément de volume $d\Omega_0^i$ de la configuration de référence en un élément de volume $d\Omega_t^i$ de la configuration courante s'écrit :

$$d\Omega_t^i = J^i d\Omega_0^i \quad (2.15)$$

Quant au transport d'un élément de surface dS_0^i de la configuration initiale, orienté selon n_0^i , en un élément de surface dS_t^i de la configuration actuelle, orienté selon n_t^i , il s'écrit comme suit [52] :

$$n_t^i dS_t^i = J^i (F^i)^{-T} n_0^i dS_0^i \quad (2.16)$$

2.3 Équations d'équilibre

L'équilibre est écrit d'abord sous sa forme locale (ou forte), ensuite d'une manière "équivalente" sous sa forme globale (ou faible).

2.3.1 Équations locales d'équilibre

Les équations locales (classiques) d'équilibre s'écrivent (dans la configuration actuelle) comme suit [52] :

$$\operatorname{div} \sigma^i(x^i, t) + f_v^i(x^i, t) = \rho_t^i a^i(x^i, t), \quad \text{pour } (x^i, t) \in \Omega_t^i \times I \quad (2.17)$$

$$\sigma^i = (\sigma^i)^T \quad (2.18)$$

Nous supposons dans la suite, pour alléger la présentation, que les forces volumiques f_v^i sont nulles.

Les conditions aux limites sur les surfaces γ_u^i , γ_g^i et γ_c^i s'écrivent comme suit :

$$x^i = \bar{x}^i, \quad \text{sur } \gamma_u^i \times I \quad (2.19)$$

$$\sigma^i n_t^i = g^i, \quad \text{sur } \gamma_g^i \times I \quad (2.20)$$

$$\sigma^i n_t^i = r^i, \quad \text{sur } \gamma_c^i \times I \quad (2.21)$$

où r^i est la densité courante des efforts de contact et de frottement entre les deux solides. Nous supposons, dans la suite, que $\bar{x}^i = p^i$ (condition d'encastrement) et $g^i = 0$.

Étant donné que nous nous intéressons au problème dynamique, nous supposons que les conditions initiales sont les suivantes :

$$x^i(0) = x_0^i \quad (2.22)$$

$$\dot{x}^i(0) = v_0^i \quad (2.23)$$

Le choix de la description lagrangienne préconise l'écriture des équations locales d'équilibre dans la configuration initiale. Moyennant l'introduction du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff Π^i , défini par :

$$\Pi^i = J^i \sigma^i (F^i)^{-T} \quad (2.24)$$

elles s'écrivent comme suit (e.g. [90]) :

$$\text{Div}\Pi^i(p^i, t) = \rho_0^i a^i(p^i, t) \quad , \quad \text{pour } (p^i, t) \in \Omega_t^i \times I \quad (2.25)$$

$$\Pi^i(F^i)^T = F^i(\Pi^i)^T \quad (2.26)$$

avec les conditions aux limites :

$$u^i = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_u^i \times I \quad (2.27)$$

$$\Pi^i n_0^i = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_g^i \times I \quad (2.28)$$

$$\Pi^i n_0^i = R^i \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c^i \times I \quad (2.29)$$

et les conditions initiales :

$$u^i(., 0) = u_0^i(.) \quad , \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (2.30)$$

$$v^i(., 0) = v_0^i(.) \quad , \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (2.31)$$

Dans (2.29), R^i est la densité des efforts nominaux dus aux interactions de contact et de frottement entre les deux solides, rapportée à la configuration initiale. Elle est liée à r^i , son représentant dans la configuration actuelle, par l'équation de transport suivante :

$$R^i dS_0^i = r^i dS_t^i \quad (2.32)$$

Afin de manipuler des tenseurs symétriques, on introduit, en général, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, noté S^i et défini par :

$$S^i = J^i(F^i)^{-1} \sigma^i(F^i)^{-T} = (F^i)^{-1} \Pi^i \quad (2.33)$$

Il servira comme tenseur des contraintes dans les prochaines écritures; tout particulièrement, celle des équations globales (ou faibles) d'équilibre, traduisant le Principe des Travaux Virtuels (PTV).

2.3.2 Principe des Travaux Virtuels

Les équations locales d'équilibre sont écrites de manière "équivalente" sous forme globale ou Principe des Travaux Virtuels (PTV). Pour ce faire, nous introduisons l'espace des déplacements cinématiquement admissibles, noté \mathcal{CA}^i et défini par :

$$\mathcal{CA}^i = \{w^i, \text{ suffisamment réguliers sur } \Omega_0^i ; w^i = 0 \quad \text{sur } \Gamma_u^i\} \quad (2.34)$$

Le PTV s'obtient par i) multiplication des équations locales (2.25) par un déplacement virtuel $w^i \in \mathcal{CA}^i$, ii) intégration sur tout le domaine, iii) application de la formule de Green et iv) usage des conditions aux limites (2.27)-(2.29). Le PTV s'écrit, ainsi, dans la configuration initiale, comme suit :

$$\forall w^i \in \mathcal{CA}^i \text{ et pour tout temps } t \text{ dans } I$$

$$\mathbf{G}_{dyn}^i(u^i, w^i) + \mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) = \mathbf{G}_c^i(R^i, w^i) \quad (2.35)$$

où :

$$\mathbf{G}_{dyn}^i(u^i, w^i) = \int_{\Omega_0^i} \rho_0^i a^i \cdot w^i d\Omega \quad (2.36)$$

$$\mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) = \int_{\Omega_0^i} Tr \left[F^i(u^i) S^i \nabla_p(w^i)^T \right] d\Omega \quad (2.37)$$

$$\mathbf{G}_c^i(R^i, w^i) = \int_{\Gamma_c^i} R^i \cdot w^i d\Gamma \quad (2.38)$$

où Tr est l'opérateur trace et où nous avons utilisé la relation (2.33).

Observons que les champs recherchés dépendent du temps et que nous omettons d'y faire référence pour alléger l'écriture.

La formulation faible précédente servira comme formulation de base. Nous la complétons dans la suite par la loi de comportement des matériaux constituant les deux solides et le modèle d'interaction entre eux.

2.4 Loi de comportement

Bien qu'on simule des comportements élastoplastiques en grandes déformations (intégrés dans *Code_Aster*), nous nous limitons ici à la présentation d'une loi de comportement des matériaux hyperélastiques (élastiques non linéaires) qui s'écrit (e.g. [10]) :

$$\Pi^i = \rho_0^i \frac{\partial W^i(F^i)}{\partial F^i} \quad (2.39)$$

où W^i est une densité massique d'énergie interne locale définie sur le solide S^i .

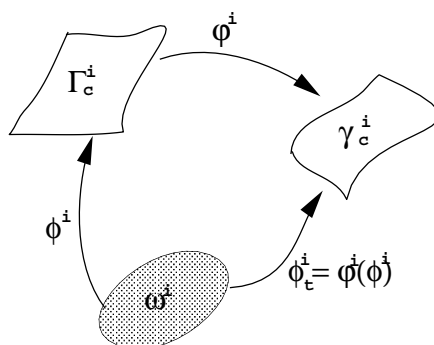


FIG. 2.2 – Paramétrisation des surfaces de contact

2.5 Interactions de contact

2.5.1 Paramétrisation et repères locaux

Nous avons supposé précédemment que les surfaces potentielles de contact Γ_c^1 et Γ_c^2 sont décrites par des cartes Φ^1 et Φ^2 (suffisamment régulières) telles que :

$$\Phi^i(\omega^i) = \Gamma_c^i \quad (2.40)$$

où ω^i est un élément de référence de R^{d-1} .

Les surfaces γ_c^1 et γ_c^2 sont aussi, et de ce fait, décrites par des cartes Φ_t^i définies par (voir figure 2.2) :

$$\Phi_t^i = \varphi^i \circ \Phi^i \quad (2.41)$$

ce qui permet d'écrire pour tout point x^i de γ_c^i et pour tout temps t :

- **Cas d=3**

$$x^i(t) = \varphi^i(p^i, t) = \varphi^i(\Phi^i(\xi^1, \xi^2), t) \quad (2.42)$$

où $(\xi^1, \xi^2) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

- **Cas d=2**

$$x^i(t) = \varphi^i(\Phi^i(\xi), t) \quad (2.43)$$

où $\xi \in [0, 1]$.

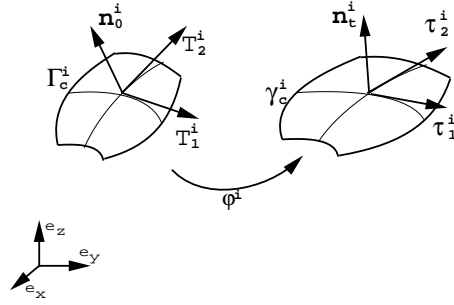


FIG. 2.3 – Repères locaux

Les vecteurs du repère local sont définis à partir des cartes décrites précédemment. Les vecteurs tangents des deux configurations sont notés T_α^i et τ_α^i ($\alpha = 1,2$) en 3D (figure 2.3) et T^i et τ^i en 2D. Ils sont définis comme suit :

- **Cas $d=3$**

$$T_\alpha^i = \frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi^\alpha} \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.44)$$

$$\tau_\alpha^i = \frac{\partial \Phi_t^i}{\partial \xi^\alpha} = F^i(\Phi^i) T_\alpha^i \quad , \quad \text{sur } \gamma_c \times I \quad (2.45)$$

- **Cas $d=2$**

$$T^i = \frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi} \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.46)$$

$$\tau^i = \frac{\partial \Phi_t^i}{\partial \xi} = F^i(\Phi^i) T^i \quad , \quad \text{sur } \gamma_c \times I \quad (2.47)$$

La définition des vecteurs tangents permet de construire naturellement les vecteurs normaux dans les configurations initiale et actuelle.

- **Cas $d=3$**

$$n_0^i = \frac{T_1^i \wedge T_2^i}{\|T_1^i \wedge T_2^i\|} \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.48)$$

$$n_t^i = \frac{\tau_1^i \wedge \tau_2^i}{\|\tau_1^i \wedge \tau_2^i\|} \quad \text{sur } \gamma_c \times I \quad (2.49)$$

- **Cas $d=2$**

$$n_0^i = \frac{e_3 \wedge T^i}{\|T^i\|} \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.50)$$

$$n_t^i = \frac{e_3 \wedge \tau^i}{\|\tau^i\|} \quad \text{sur } \gamma_c \times I \quad (2.51)$$

où \wedge représente le produit vectoriel classique.

2.5.2 Appariement

Pour écrire les lois de contact, nous avons besoin, tout d'abord, de former, par une méthode d'appariement, les couples de points qui sont susceptibles de rentrer en contact. Nous décrivons brièvement le principe de la méthode et nous renvoyons à [80] pour plus de détails.

Considérons un couple de points candidats au contact. Ce couple est défini sur la configuration initiale par (p^1, \bar{p}^1) et sur la configuration actuelle par (x^1, \bar{x}^1) ou sur la configuration de référence par $(\xi^1, \bar{\xi}^1)$. Les points p^1 , x^1 et ξ^1 appartiennent aux surfaces Γ_c^1 , γ_c^1 et ω^1 . Les points \bar{p}^1 , \bar{x}^1 et $\bar{\xi}^1$ sont leurs vis-à-vis sur Γ_c^2 , γ_c^2 et ω^2 par des applications d'appariements. Le choix que nous venons de faire fait de la surface Γ_c^1 surface "esclave" de référence et de la surface Γ_c^2 , l'image de Γ_c^1 par l'application d'appariement, la surface "maître" de référence.

Les applications d'appariement peuvent être construites suivant deux approches :

- la première est fondée sur la notion de proximité (figure 2.4(a)). Le problème mathématique issu de cette approche consiste à minimiser une distance sous contrainte [70]. Cette approche peut présenter un problème de non-unicité (e.g. [80]).
- La deuxième est fondée sur la notion de direction de recherche admissible (figure 2.4(b)). Elle corrige entre autres le problème de non-unicité sus-mentionné. Son principe est de chercher les points candidats au contact suivant une direction admissible (définie au préalable) qui est généralement celle du champ de vitesse [22].

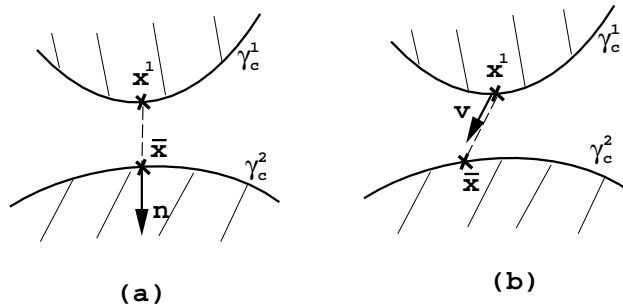


FIG. 2.4 – Applications d'appariement

2.5.3 Condition de non interpénétration et vitesses relatives

Ce paragraphe donne la condition de non-interpénétration matérielle entre deux solides, essentielle pour l'écriture des lois de contact, et définit la vitesse relative entre deux solides indispensable, pour l'écriture des lois de frottement.

La condition de non-interpénétration est une condition cinématique interdisant toute interpénétration matérielle des deux solides S^1 et S^2 . Elle s'écrit en fonction de la position relative entre deux points appariés, donnée par :

$$d = x^1(t) - \bar{x}^1(t) = \varphi^1(p^1, t) - \varphi^2(\bar{p}^1(t), t) \quad (2.52)$$

En désignant par n la normale à Γ_c^2 , intérieure au solide S^2 au point \bar{x}^1 , i.e.,

$$n = -n_t^2(\bar{x}^1, t) \quad (2.53)$$

et en décomposant d sur la base locale :

$$d = d_n n + d_\tau \quad (2.54)$$

la condition de non-interpénétration se traduit alors par :

$$d_n = d \cdot n = (x^1(t) - \bar{x}^1(t)) \cdot n \leq 0 \quad (2.55)$$

Nous définissons maintenant la vitesse relative entre deux points appariés, elle est donnée par :

$$v_r(x^1, t) = v^1(x^1) - [v^2(\bar{x}^1(t)) + d_n \dot{n}] = \dot{d}_n n + \tau_\alpha^2 \dot{\xi}_\alpha \quad (2.56)$$

L'équation précédente s'obtient à partir d'une dérivation par rapport au temps de l'équation suivante :

$$d_n n = (\varphi^1(p^1, t) - \varphi^2(\bar{p}^1(t), t)) \quad (2.57)$$

qui reste vraie pour des choix judicieux des surfaces potentielles de contact et pour un appariement par proximité (figure 2.4(a)).

La vitesse de glissement, notée v_τ , est la partie tangentielle de v_r quand les deux points sont en contact effectif ($d_n = 0$).

$$v_\tau(x^1, t) = (v_r(x^1, t))_\tau = (v^1(x^1) - v^2(\bar{x}^1(t)))_\tau = \dot{\bar{\xi}}_\alpha \tau_\alpha^2 \quad (2.58)$$

Pour plus de détails, nous renvoyons à [70].

2.5.4 Principe de l'action et de la réaction

Le principe de l'action et de réaction s'écrit dans la configuration actuelle comme suit [19] :

$$r^1(x^1, t) dS_t^1 + r^2(\bar{x}^1(t), t) dS_t^2 = 0 \quad , \quad \text{pour } (x^1, t) \in \gamma_c^1 \times I \quad (2.59)$$

ou aussi dans la configuration initiale :

$$R^1(p^1, t) dS_0^1 + R^2(\bar{p}^1, t) dS_0^2 = 0 \quad , \quad \text{pour } (p^1, t) \in \Gamma_c^1 \times I \quad (2.60)$$

En absence de contact, l'action et la réaction sont identiquement nulles.

2.5.5 Lois de contact et de frottement

Dans ce paragraphe, nous présentons les lois locales de contact et de frottement qui régissent l'interaction entre les deux solides S^1 et S^2 sur leurs surfaces potentielles de contact Γ_c^1 et Γ_c^2 . Pour ce faire, nous introduisons, tout d'abord, les notations suivantes :

$$\Gamma_c = \Gamma_c^1, \quad \gamma_c = \gamma_c^1, \quad \bar{p} = \bar{p}^1, \quad \bar{x} = \bar{x}^1, \quad R(p, t) = R^1(p^1, t) \quad (2.61)$$

Ensuite, nous décomposons la densité des réactions de contact R en une partie normale et une partie tangentielle :

$$R(p, t) = \lambda(p, t) \cdot n + R_\tau(p, t) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.62)$$

λ est la densité nominale normale de force de contact et R_τ est la densité nominale des forces de frottement.

Lois de Signorini

Les lois de Signorini [96] sont les lois de contact unilatéral, appelées aussi, conditions de Kuhn-Tucker. Elles s'écrivent comme suit :

$$d_n(p,t) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.63)$$

$$\lambda(p,t) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.64)$$

$$\lambda(p,t)d_n(p,t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.65)$$

La première équation des lois de contact traduit la non-interpénétration matérielle, la deuxième renseigne sur la nature des forces normales de contact qui sont compressives et la dernière est une équation dite d'exclusion ou de complémentarité. Les lois de Signorini sont résumées sur le graphe suivant :

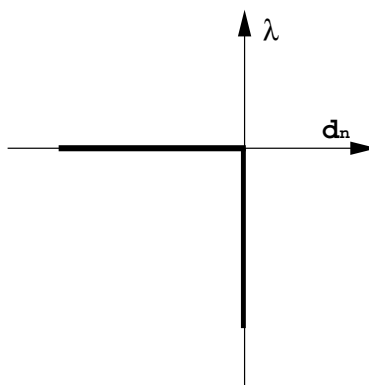


FIG. 2.5 – Lois de Signorini

Lois de Coulomb

Les lois de frottement choisies dans ce travail sont celles de Coulomb (cf. e.g. [69, 59]). Elles s'écrivent de la manière suivante :

$$\|R_\tau\| \leq \mu|\lambda| \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.66)$$

$$\text{si } \|R_\tau\| = \mu|\lambda| \quad \text{alors } \exists \alpha \geq 0 \quad ; \quad v_\tau = -\alpha R_\tau \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.67)$$

$$\text{si } \|R_\tau\| < \mu|\lambda| \quad \text{alors } v_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.68)$$

où μ est le coefficient de frottement de Coulomb et v_τ est le champ (objectif) des vitesses relatives tangentielles entre deux points appariés, définie par (2.58).

Aux lois (2.66)-(2.68), il convient d'ajouter une quatrième, imposant la nullité des forces de frottement dans le cas de non contact (e.g. [28]). Elle est l'équivalent de l'équation de complémentarité pour le contact unilatéral :

$$d_n R_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.69)$$

Avec cette condition et dans le cas de non contact $d_n < 0$, c'est toute la réaction de contact qui est nulle et non seulement sa partie normale (imposée par $d_n \lambda = 0$).

Les lois de frottement de Coulomb sont illustrées sur le graphe suivant :

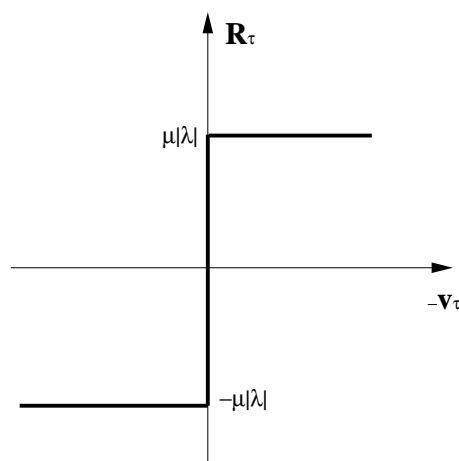


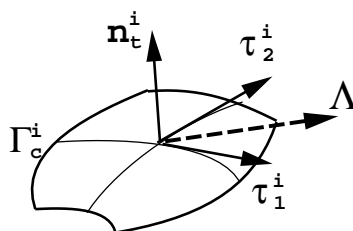
FIG. 2.6 – Lois de frottement de Coulomb

Remarque 2.1

Le seuil de frottement $\mu|\lambda|$ dépend de la densité nominale normale de contact λ . Ceci engendre le caractère non associatif des lois de Coulomb. Pour le critère de Tresca, ce seuil est constant.

Les lois locales de contact et de frottement sont données jusqu'à présent sous forme d'inéquations. Elles ne se prêtent pas aisément à des formulations faibles.

Nous nous intéressons à présent à l'élaboration de formulations lagrangiennes stabilisées. Elles reposent sur deux ingrédients essentiels. Le premier consiste à écrire les lois de contact/frottement sous forme d'équations (et non d'inéquations) [14, 31, 32] et le second à introduire des inconnues de type champs de signes [13] ou Level-Sets, comme champs inconnus du problème. Ces deux points sont détaillés dans ce qui suit.

FIG. 2.7 – *Semi-multiplicateur de frottement*

2.6 Formes locales équivalentes des lois de contact et de frottement

Afin que les lois de contact et de frottement soient écrites sous forme variationnelle comme celles des équations d'équilibre, de nouvelles écritures sous formes d'équations et non d'inéquations, ont été développées.

2.6.1 Premières écritures équivalentes

Les lois de contact de Signorini s'écrivent d'une manière équivalente sous la forme classique suivante (à la base de l'algorithme dit d'Uzawa) :

$$\lambda - P_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.70)$$

où P_{R^-} est la projection sur le demi-axe des réels négatifs et ρ_n est un réel strictement positif.

Le frottement s'écrit également d'une manière équivalente comme suit [14] :

$$R_\tau = \mu \lambda \Lambda \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.71)$$

$$\Lambda = P_{B(0,1)}(\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.72)$$

où Λ est un semi-multiplicateur (vectoriel) de frottement (figure 2.7), $P_{B(0,1)}$ est la projection orthogonale sur la boule unité $B(0,1)$ et ρ_τ est un réel strictement positif.

2.6.2 Deuxièmes écritures équivalentes

Pour pouvoir les exploiter numériquement, les écritures précédentes sont écrites de manière équivalente sous de nouvelles formes équivalentes [31, 32, 30].

Nous commençons par les lois de contact unilatéral et donnons un résultat dans lequel il est important d'observer que deux paramètres ρ_n et h_n sont utilisés :

Proposition 2.1

Les lois de Signorini sont équivalentes aux lois suivantes

$$\lambda - S_u(\lambda - h_n d_n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.73)$$

$$S_u = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.74)$$

où h_n et ρ_n sont deux réels tels que le premier est différent de zéro et le deuxième est strictement positif.

Démonstration. Pour arriver aux équations précédentes des lois de contact unilatéral (2.73)-(2.74), nous partons directement des lois de Signorini (2.63)-(2.65).

Décomposons la surface potentielle de contact Γ_c en une surface de contact effectif Γ_c^{eff} et une autre libre. Ainsi, les lois de contact s'écrivent sur chaque zone (et pour tout $t \in I$) comme suit :

$$\text{sur } \Gamma_c^{eff}(t), \quad d_n = 0 \quad \text{et} \quad \lambda \leq 0 \quad (2.75)$$

$$\text{sur } \Gamma_c \setminus \Gamma_c^{eff}(t), \quad d_n < 0 \quad \text{et} \quad \lambda = 0 \quad (2.76)$$

Introduisons maintenant un champ S_u , défini sur $\Gamma_c \times I$ par :

$$S_u = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (\rho_n > 0) \quad (2.77)$$

où 1_{R^-} désigne la fonction indicatrice de R^- .

Ce champ est appelé "champ de signe". Il est de type "Level-Set" [94] et relève l'inconnue géométrique Γ_c^{eff} [13].

Ainsi, moyennant l'introduction du champ inconnu S_u , les conditions locales alternatives (2.75)-(2.76) s'écrivent maintenant sous forme d'équations :

$$S_u d_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.78)$$

$$(1 - S_u)\lambda = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.79)$$

Observons que (2.78) et (2.79) représentent deux conditions aux limites. La première est de type Dirichlet, alors que la seconde est de type Neumann. On peut les regrouper en une seule, moyennant une homogénéisation par un paramètre non nul, noté ici, h_n . Ceci donne :

$$S_u d_n + (1 - S_u) \frac{\lambda}{h_n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.80)$$

ou encore :

$$\lambda = S_u (\lambda - h_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.81)$$

$$\text{avec } S_u = 1_{R^-} (\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.82)$$

Ceci achève la preuve de la proposition puisque pour l'obtention des lois de Signorini (2.70) à partir de (2.73)-(2.74) il suffit de prendre $\rho_n = h_n > 0$. \square

En suivant une démarche analogue à celle que l'on vient de développer pour les lois de contact unilatéral de Signorini, nous pouvons établir un résultat similaire pour les lois de frottement de Coulomb [32] :

Proposition 2.2

Les lois de frottement de Coulomb sont équivalentes à :

$$R_\tau = \mu \lambda \Lambda \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.83)$$

$$(1 - S_u)\Lambda + S_u \left[\Lambda - \left[S_f (\Lambda + h_1^\tau v_\tau) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.84)$$

$$S_u = 1_{R^-} (\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.85)$$

$$S_f = 1_{B(0,1)} (\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.86)$$

où ρ_n , ρ_τ et h_2^τ sont des réels strictement positifs et h_1^τ est un réel non nul.

Démonstration. Nous pouvons démontrer que les lois de frottement de Coulomb (2.66)-(2.69) sont équivalentes aux équations suivantes (cf. [27])

$$R_\tau = \mu\lambda\Lambda \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.87)$$

$$\Lambda = P_{B(0,1)}(\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.88)$$

$$d_n R_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.89)$$

Par partition évolutive de la surface potentielle de contact, nous avons :

$$d_n < 0 \quad \text{et} \quad \Lambda = 0 \quad , \quad \text{sur } (\Gamma_c \setminus \Gamma_c^{eff}) \times I \quad (2.90)$$

$$d_n = 0 \quad \text{et} \quad v_\tau = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c^{eff,adh} \times I \quad (2.91)$$

$$d_n = 0 \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{v_\tau}{\|v_\tau\|} \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c^{eff,gli} \times I \quad (2.92)$$

où $\Gamma_c^{eff,adh}$ et $\Gamma_c^{eff,gli}$ sont les parties effectives de contact adhérentes et glissantes, respectivement, à l'instant t .

La dernière équation (2.92) donne aussi, après avoir introduit un paramètre d'homogénéisation h_2^τ strictement positif:

$$\frac{\Lambda}{\|\Lambda\|} = \frac{v_\tau}{\|v_\tau\|} = \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \quad \text{sur } \Gamma_c^{eff,gli} \times I \quad (2.93)$$

En introduisant le "Champ de Signe" S_f , défini par :

$$S_f = 1_{B(0,1)}(\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.94)$$

où ρ_τ est un paramètre strictement positif,

les équations précédentes (2.90)-(2.92) s'écrivent (en se servant du champ S_u) :

$$(1 - S_u)\Lambda = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.95)$$

$$S_u S_f v_\tau = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.96)$$

$$S_u(1 - S_f) \left[\Lambda - \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.97)$$

La deuxième et la troisième équation (2.96)-(2.97) peuvent être écrite en une seule, après une multiplication de la deuxième par un paramètre d'homogénéisation, réel non nul, h_1^τ et soustraction des deux équations. Ceci donne :

$$S_u \left[\Lambda - \left[S_f(\Lambda + h_1^\tau v_\tau) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.98)$$

ou encore, en ajoutant la première équation (2.95) :

$$(1 - S_u)\Lambda + S_u \left[\Lambda - \left[S_f(\Lambda + h_1^\tau v_\tau) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.99)$$

$$\text{avec } S_u = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{et} \quad S_f = 1_{B(0,1)}(\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.100)$$

Ceci achève la démonstration de la proposition puisqu'il est clair qu'on peut remonter aux lois de Coulomb (2.87)-(2.89) (et donc aux lois de Coulomb classiques) à partir de (2.83)-(2.86). \square

2.6.3 Formulation lagrangienne du problème dynamique de contact frottant

Une fois les lois de contact et de frottement écrites sous forme d'égalités et non d'inégalités, nous pouvons aisément les mettre sous forme faible. Ceci nous donne une première écriture du problème dynamique du contact frottant, donnée en proposition [29].

Proposition 2.3

Le problème dynamique de contact frottant s'écrit (formellement) comme suit.

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (u^i, \lambda, \Lambda; S_u, S_f) \quad ; \quad \forall (w^i, \lambda^*, \Lambda^*) \\ & \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(u^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) = \int_{\Gamma_c} S_u \lambda [[w_n]] d\Gamma + \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} S_u \mu \lambda \left[S_f \Lambda + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] [[w_\tau]] d\Gamma \\ & - \frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} \left[\lambda - S_u (\lambda - h_n d_n) \right] \lambda^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u \left(\frac{S_f}{h_1^\tau} + \frac{1 - S_f}{h_2^\tau} \right) \left[\Lambda - \left[S_f(\Lambda + h_1^\tau v_\tau) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] \Lambda^* d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \Lambda \Lambda^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$S_u = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.104)$$

$$S_f = 1_{B(0,1)}(\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.105)$$

où ρ_n , ρ_τ et h_2^τ sont des réels strictement positifs, et où h_n et h_1^τ sont des réels différents de zéro.

Démonstration. Rappelons que le (PTV) s'écrit comme suit (cf. (2.35))

$$\mathbf{G}_{dyn}^i(u^i, w^i) + \mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) = \mathbf{G}_c^i(R^i, w^i) \quad , i = 1, 2 \quad (2.106)$$

où les expressions \mathbf{G}_{dyn}^i , \mathbf{G}_{int}^i et \mathbf{G}_c^i sont données par (2.36), (2.37) et (2.38), respectivement.

En faisant maintenant la somme sur i de (2.106), en utilisant le principe de l'action et de la réaction et en nous servant des notations (2.61), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(u^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) = \int_{\Gamma_c} R[[w]] d\Gamma \quad (2.107)$$

où $[[w]]$ est le champ saut, donné par :

$$[[w]] = w^1(p) - w^2(\bar{p}) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (2.108)$$

Notons que :

$$R = \lambda n + \mu \lambda \Lambda \quad \text{si } d_n = 0 \quad (2.109)$$

$$R = 0 \quad \text{si } d_n < 0 \quad (2.110)$$

donc

$$R = S_u [\lambda n + \mu \lambda \Lambda] \quad (2.111)$$

$$S_u = 1_{R^-} (\lambda - \rho_n d_n) \quad (2.112)$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(u^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) = \int_{\Gamma_c} S_u \lambda [[w_n]] d\Gamma + \int_{\Gamma_c} S_u \mu \lambda \Lambda [[w_\tau]] d\Gamma \quad (2.113)$$

sachant que :

$$\text{Pour } S_f = 1 \quad , \quad \Lambda = S_f \Lambda \quad \text{car } \Lambda \in B(0,1) \quad (2.114)$$

$$\text{Pour } S_f = 0 \quad , \quad \Lambda = \frac{v_\tau}{\|v_\tau\|} = \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \quad (h_2^\tau > 0) \quad (2.115)$$

ou encore, après avoir regroupé (2.114) et (2.115) :

$$\Lambda = S_f \Lambda + (1 - S_f) \left(\frac{v_\tau}{\|v_\tau\|} \right) = S_f \Lambda + (1 - S_f) \left[\frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \quad (2.116)$$

le PTV s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(u^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) &= \int_{\Gamma_c} S_u \lambda [[w_n]] d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_c} S_u \mu \lambda \left[S_f \Lambda + (1 - S_f) \left[\frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] [[w_\tau]] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.117)$$

Remarque 2.2

On choisit $\frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|}$ au lieu de $\frac{v_\tau}{\|v_\tau\|}$ pour assurer la symétrie de la matrice tangente issue du mode glissant du frottement ($S_u = 1$ et $S_f = 0$).

Nous écrivons maintenant les lois de contact et de frottement sous forme faibles. Pour tout champs virtuels λ^* et Λ^* on a :

$$-\frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} \left[\lambda - S_u (\lambda - h_n d_n) \right] \lambda^* d\Gamma = 0 \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u \left(\frac{S_f}{h_1^\tau} + \frac{1 - S_f}{h_2^\tau} \right) \left[\Lambda - \left[S_f (\Lambda + h_1^\tau v_\tau) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] \Lambda^* d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \Lambda \Lambda^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.119)$$

Nous gardons les équations reliant les champs de signes inconnus S_u et S_f aux autres champs mécaniques inconnus du problème sous leurs formes fortes, soit :

$$S_u = 1_{R^-} (\lambda - \rho_n d_n) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.120)$$

$$S_f = 1_{B(0,1)} (\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.121)$$

La preuve de la proposition est ainsi achevée. \square

2.7 Formulation stabilisée: unification des formalismes lagrangiens

Dans le problème (2.101)-(2.105), et dans le cas d'un contact effectif ($S_u = 1$) avec frottement adhérent ($S_f = 1$), les équations (2.102)-(2.103) assurent, de manière faible, le fait que $d_n = 0$ et $v_\tau = 0$. On peut donc rajouter au PTV (2.101), dans tous les cas de figures, sans modifier son écriture continue, les termes "nuls" suivants :

$$\int_{\Gamma_c} S_u \kappa_n d_n [[w_n]] d\Gamma \quad \text{où } \kappa_n \geq 0 \quad (2.122)$$

$$\int_{\Gamma_c} S_u S_f \mu \lambda \kappa_\tau v_\tau [[w_\tau]] d\Gamma \quad \text{où } \kappa_\tau \geq 0 \quad (2.123)$$

Remarque 2.3

les paramètres κ_n et κ_τ sont choisis de la sorte afin de renforcer l'ellipticité de l'énergie interne dans les cadres statique et quasi-statique. Par ailleurs, les termes ajoutés sont de type "pénalisation". Leurs intérêts seront discutés dans le chapitre des exemples numériques (chapitre 5).

Le problème dynamique de contact frottant s'écrit alors comme suit.

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (u^i, \lambda, \Lambda; S_u, S_f) \quad ; \quad \forall (w^i, \lambda^*, \Lambda^*) \\ & \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(u^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(u^i, w^i) = \int_{\Gamma_c} S_u (\lambda - \kappa_n d_n) [[w_n]] d\Gamma + \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} S_u \mu \lambda \left[S_f (\Lambda + \kappa_\tau v_\tau) + (1 - S_f) \left[\frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] [[w_\tau]] d\Gamma \\ & - \frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} \left[\lambda - S_u (\lambda - h_n d_n) \right] \lambda^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u \left(\frac{S_f}{h_1^\tau} + \frac{1 - S_f}{h_2^\tau} \right) \left[\Lambda - \left[S_f (\Lambda + h_1^\tau v_\tau) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] \Lambda^* d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \Lambda \Lambda^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$S_u = 1_{R^-} (\lambda - \rho_n d_n) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.127)$$

$$S_f = 1_{B(0,1)} (\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (2.128)$$

Nous qualifions ce formalisme de lagrangien stabilisé [30, 34, 29].

Proposition 2.4

La formulation stabilisée (2.124)-(2.128) généralise la formulation lagrangienne classique [69, 106] et lagrangienne augmentée [3, 97, 91, 93].

Démonstration. Elle est immédiate : dans le cas où $\kappa_n = 0$ et $\kappa_\tau = 0$, on retrouve la formulation lagrangienne classique. Dans le cas où $\kappa_n = h_n = \rho_n > 0$ et $\kappa_\tau = \rho_\tau = h_1^\tau = h_2^\tau > 0$ on retrouve "naturellement" la méthode (quasi-)lagrangienne augmentée. \square

La nouvelle formulation (2.124)-(2.128) unifie deux méthodes pour le contact, facilitant ainsi leur codage informatique. L'utilisateur (d'un code éléments finis) peut passer d'une méthode à une autre, par simple choix de paramètres, selon les besoins de modélisations ou de résolutions numériques. Par exemple, dans le cas d'un contact (sans frottement, pour la clarté) en statique et en présence de mouvement de corps rigide, il est intéressant d'ajouter la stabilisation ($\kappa_n > 0$) pour éviter le recours à des solveurs pour matrices singulières (cf. [34]).

En outre, le formalisme lagrangien stabilisé permet de couvrir aisément le formalisme par pénalisation.

Remarquons enfin que dans le même esprit, on peut obtenir le formalisme lagrangien perturbé [100, 68] en choisissant $\kappa_n = 0$ (cas de contact sans frottement) et en ajoutant à (2.125) le terme de perturbation suivant :

$$\int_{\Gamma_c} S_u \epsilon \lambda \lambda^* d\Gamma \quad (2.129)$$

où ϵ est un paramètre positif arbitrairement petit que l'on peut choisir égal à $\frac{1}{h_n}$.

2.8 Conclusion

À partir des écritures équivalentes en équations des lois de contact, moyennant l'introduction de champs de signe, nous avons proposé un formalisme lagrangien stabilisé pour les problèmes de contact généralisant ceux lagrangien classique et lagrangien augmenté, clarifiant l'intérêt des paramètres dits d'augmentation et unifiant les implémentations numériques. Dans le chapitre suivant, nous nous intéressons aux aspects dynamiques des problèmes de contact. Nous proposons, en particulier, une formulation hybride faible-forte adaptée aux problèmes d'impact. Cette formulation suit dans ses grandes lignes la démarche de J.-J. Moreau et M. Jean (e.g. [83, 64]).

Chapitre 3

Formulation hybride faible-forte pour les problèmes d'impact et discrétisations

Sommaire

3.1	Formulation hybride faible-forte continue	62
3.1.1	Limites du modèle de Signorini en dynamique	62
3.1.2	Lois de contact de Signorini-Moreau	62
3.1.3	Écriture en équations des lois de Signorini-Moreau	65
3.1.4	Formulation faible-forte du problème de contact dynamique	66
3.1.5	Prise en compte du frottement	68
3.1.6	Résultats de conservation	70
3.2	Approximations et résolution numériques	73
3.2.1	Formulation semi-discrétisée du problème de contact dynamique	73
3.2.2	Discrétisations en espace	75
3.2.3	Discrétisation du terme de stabilisation	81
3.3	Stratégie de résolution	82
3.4	Conclusion	85

Dans ce chapitre, en optant pour le modèle de Signorini-Moreau [83, 65, 84, 64, 85], comme modèle de contact en dynamique et en l'écrivant en équations, moyennant l'introduction de deux champs de signes [13], nous proposons une formulation lagrangienne en vitesse faible-forte, permettant de dériver des éléments de contact-impact respectant les conditions cinématiques de contact (placements et vitesses) [30]. Nous vérifions, en particulier, que cette formulation continue conserve l'énergie totale et les quantités de mouvements linéaire et angulaire.

3.1 Formulation hybride faible-forte continue

3.1.1 Limites du modèle de Signorini en dynamique

Le modèle de Signorini, couramment utilisé en contact statique, n'est pas très adapté aux problèmes de contact-impact (cf. e.g. [36, 63]) et ce pour au moins deux raisons :

- Il ne contrôle que les placements des points d'interface de contact. En plus, les champs contrôlés sont irréguliers en temps.
- Il est associé à des équations d'équilibre (locales ou globales) d'ordre deux en temps.

Étant donnée l'irrégularité en temps des champs de déplacement des points de contact, l'intégration temporelle par des schémas classiques de la formulation dérivant du modèle de Signorini génère des oscillations parasites aux moments des chocs. Ces oscillations s'accroissent d'autant plus que l'ordre du schéma est élevé (e.g. [64]).

Pour remédier aux carences sus-mentionnées, nous proposons i) d'utiliser le modèle de Moreau [85] qui consiste à contrôler, à la fois, les placements et les vitesses des points en contact potentiel et ii) de dériver une formulation en vitesse d'ordre un par rapport au temps [30].

3.1.2 Lois de contact de Signorini-Moreau

Rappelons ici que les lois de contact de Signorini s'écrivent comme suit :

$$d_n \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (3.1)$$

$$\lambda \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (3.2)$$

$$\lambda d_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (3.3)$$

Rappelons également que d_n est la distance signée entre un point de $\varphi(\Gamma_c, t)|_{t \in I}$ et le point qui lui est associé par l'application d'appariement (cf. section 2.5.2 du chapitre 2).

J.J. Moreau [83] a donné à ces lois une écriture différente en dynamique. Cette écriture est celle qui suit :

Pour tout temps $t \in I$ et tout point p de Γ_c , nous avons l'alternative suivante :

$$\lambda(p,t) = 0 \quad \text{si} \quad d_n(p,t) < 0 \quad (3.4)$$

$$[[v_n(p,t)]] \leq 0, \quad \lambda(p,t) \leq 0 \quad \text{et} \quad \lambda(p,t)[[v_n(p,t)]] = 0 \quad \text{si} \quad d_n(p,t) \geq 0 \quad (3.5)$$

où

$$[[v_n(p,t)]] = \left(v^1(p,t) - v^2(\bar{p},t) \right) \cdot n(\bar{p},t) \quad (3.6)$$

v^1 et v^2 désignent les champs des vitesses lagrangiennes des solides S^1 et S^2 , respectivement et \bar{p} le point de Γ_c^2 , apparié au point p de Γ_c , à l'instant t . Observons qu'aux instants t_i d'irrégularité c'est à la détermination à droite de t_i ($(t_i)^+$) qu'il est fait référence dans les lois ci-dessus.

La pertinence du modèle de Moreau est éclairée par le résultat qui suit : (où nous supposons que l'appariement est constant au cours du temps)

Proposition 3.1

Si à un instant initial t_0 , on respecte les conditions de Signorini alors pour tout $t > t_0$ les conditions de Signorini (3.1)-(3.3) et de Moreau (3.4)-(3.5) sont équivalentes.

Démonstration. Supposons qu'à l'instant initial t_0 et pour tout $p \in \Gamma_c$ on a $d_n(p,t_0) \leq 0$, $\lambda(p,t_0) \leq 0$ et $d_n(p,t_0)\lambda(p,t_0) = 0$. Montrons l'équivalence entre les deux modèles, pour tout $t > t_0$.

■ Implication 1 : du modèle de Moreau au modèle de Signorini

Les déplacements sur l'interface Γ_c s'écrivent en fonction des vitesses, comme suit :

$$u^1(p,t) = u^1(p,t_0) + \int_{t_0}^t v^1(p,s) ds \quad \text{pour} \quad (p,t) \quad \text{dans} \quad \Gamma_c \times I \quad (3.7)$$

Il en est de même pour le point \bar{p} , apparié à p et nous avons :

$$u^2(\bar{p},t) = u^2(\bar{p},t_0) + \int_{t_0}^t v^2(\bar{p},s) ds \quad (3.8)$$

Par différence et projection sur la normale n , définie par (2.53), nous obtenons également :

$$d_n(p,t) = d_n(p,t_0) + \int_{t_0}^t [[v_n(p,s)]] ds \quad \text{pour } (p,t) \text{ dans } \Gamma_c \times I \quad (3.9)$$

Deux cas se présentent :

- si $d_n(p,t) < 0$ alors le modèle de Moreau impose que $\lambda(p,t) = 0$ (équation (3.4)). Ainsi les lois de Signorini sont respectées.
- si $d_n(p,t) \geq 0$ alors le modèle de Moreau impose que $[[v_n(p,t)]] \leq 0$, $\lambda(p,t) \leq 0$. Or, on a supposé que $d_n(p,t_0) \leq 0$, donc on obtient par l'équation (3.9), $d_n(p,t) \leq 0$ et plus précisément $d_n(p,t) = 0$. On a donc $d_n(p,t) = 0$ et $\lambda(p,t) \leq 0$. Ainsi, les lois des signorini sont respectées.

Dans les deux cas on a démontré l'implication du modèle de Moreau au modèle de Signorini.

■ *Implication 2 : du modèle de Signorini au modèle de Moreau*

Discutons les deux cas suivants :

- si $d_n(p,t) < 0$ alors le modèle de Signorini impose que $\lambda(p,t) = 0$. Ainsi, le modèle de Moreau est respecté.
- si $d_n(p,t) \geq 0$ alors le modèle de Signorini impose que $d_n(p,t) = 0$ et $\lambda(p,t) \leq 0$. et puisque [70] :

$$\dot{d}_n(p,t) = [[v_n(p,t)]] + d_n(p,t)n \cdot \frac{dn}{dt} \quad (3.10)$$

où

$$\dot{d}_n = \frac{d(d_n)}{dt} \quad (3.11)$$

Donc $[[v_n(p,t)]] = 0$.

On a finalement $[[v_n(p,t)]] = 0$ et $\lambda(p,t) \leq 0$ donc les conditions de Moreau sont vérifiées.

Dans les deux cas, on a démontré la réciproque. □

3.1.3 Écriture en équations des lois de Signorini-Moreau

Les conditions de Signorini-Moreau font intervenir des inéquations. Nous proposons de les écrire sous forme d'équations, moyennant l'introduction de deux champs de signes définis sur la zone potentielle de contact Γ_c . Ces champs de signes utilisés dans [13] s'apparentent à des level-sets [94].

Pour cela nous établissons le résultat suivant :

Proposition 3.2

Les lois de Signorini-Moreau, définies par (3.4)-(3.5) sont équivalentes aux systèmes suivants :

Pour $t = t_0$:

$$\lambda = S_u(\lambda - h_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.12)$$

$$S_u = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.13)$$

Pour $t > t_0$:

$$\lambda = S_u S_v(\lambda - h_n [[v_n]]) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (3.14)$$

$$S_u = 1_{R^-}(-d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (3.15)$$

$$S_v = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n [[v_n]]) \quad \text{sur } \Gamma_c \times I \quad (3.16)$$

où h_n est un paramètre non nul et ρ_n est un paramètre strictement positif.

Démonstration. Le passage des inéquations aux équations se démontre de la même manière que dans le chapitre 2 (section 2.6.2).

Concernant la réciproque, nous considérons, pour tout t et p , les cas suivants :

Pour $t = t_0$:

- si $\lambda - \rho_n d_n > 0$ donc $S_u = 0$ et $\lambda = 0$ (d'après (3.13) et (3.12)). Ainsi, $d_n < 0$ et $\lambda = 0$.
- si $\lambda - \rho_n d_n \leq 0$ donc $S_u = 1$ et $d_n = 0$ (d'après (3.13) et (3.12)). Ainsi, $d_n = 0$ et $\lambda \leq 0$.

Pour $t > t_0$, deux cas se présentent :

- si $d_n < 0$ alors $S_u = 0$ (par (3.15)) et $\lambda = 0$ (d'après (3.14)). Observons que, dans ce cas, $[[v_n]]$ n'est pas contraint.
- si $d_n \geq 0$ donc $S_u = 1$. Distinguons les deux cas suivant :

- si $\lambda - \rho_n[[v_n]] > 0$ alors $S_v = 0$ (par (3.16)) et $\lambda = 0$ (par (3.14)). Nous déduisons de (3.16) que $-[[v_n]] > 0$ ou encore $[[v_n]] < 0$. On a ainsi $\lambda \leq 0$, $[[v_n]] \leq 0$ et $\lambda[[v_n]] = 0$.
- si maintenant $\lambda - \rho_n[[v_n]] \leq 0$ alors $S_v = 1$ (par (3.16)) et $[[v_n]] = 0$ (par (3.14)). Nous déduisons de (3.16) que $\lambda \leq 0$. On a ainsi $\lambda \leq 0$, $[[v_n]] \leq 0$ et $\lambda[[v_n]] = 0$.

Ce qui achève la preuve de la réciproque. □

3.1.4 Formulation faible-forte du problème de contact dynamique

Étant donné que le contact est écrit en vitesse, nous écrivons aussi l'équilibre en vitesse suivant en cela Moreau et Jean (e.g. [64, 85]), en utilisant le Principe des Puissances Virtuelles (PPV). Ce principe s'écrit comme suit :

Pour tout w^i , champ de vitesse admissible, (et pour tout temps $t \in \mathbb{I}$)

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(v^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(v^i, w^i) - \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda [[w_n]] d\Gamma = 0 \quad (3.17)$$

où

$$\mathbf{G}_{dyn}^i(v^i, w^i) = \int_{\Omega_0^i} \rho_0^i \dot{v}^i \cdot w^i d\Omega \quad (3.18)$$

$$\mathbf{G}_{int}^i(v^i, w^i) = \int_{\Omega_0^i} Tr \left[\bar{\Pi}^i(v^i) \nabla_p(w^i)^T \right] d\Omega \quad (3.19)$$

avec $\bar{\Pi}^i(v^i) = \Pi^i(u^i)$ et S_u et S_v définis par (3.15) et (3.16). Observons que nous négligeons le frottement dans (3.17).

En écrivant maintenant les lois de contact sous forme faible tout en gardant S_u et S_v sous forme forte et en rajoutant le PPV et l'équation reliant le champ des déplacements à celui des vitesses,

nous obtenons le problème suivant, pour tout $t > t_0$ (cf. e.g. [30]) :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (v^i, u^i, \lambda; S_u, S_v) \in \mathcal{CA}_v^i \times \mathcal{CA}_u^i \times \mathcal{H} \times (L^\infty(\Gamma_c))^2 \quad ; \forall (w^i, \lambda^*) \in \mathcal{CA}_v^i \times H \\ \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(v^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(v^i, w^i) - \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda [[w_n]] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$-\frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} (\lambda - S_u S_v (\lambda - h_n [[v_n]])) \lambda^* d\Gamma = 0 \quad (3.21)$$

$$u^i(., t) = u^i(., t_0) + \int_{t_0}^t v^i(., s) ds \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (3.22)$$

$$S_u = 1_{R^-}(-d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.23)$$

$$S_v = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n [[v_n]]) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.24)$$

$$u^i(., t_0) = u_0^i(.) \quad \text{et} \quad v^i(., t_0) = v_0^i(.) \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (3.25)$$

où \mathcal{CA}_v^i , \mathcal{CA}_u^i et \mathcal{H} sont les espaces cinématiquement admissibles des champs de vitesses, de déplacement et des multiplicateurs de contact, respectivement, et où h_n est un réel non nul et ρ_n est un réel strictement positif.

Il s'agit d'une formulation continue, hybride, sans contraintes, écrite en vitesses. Ses inconnues sont les vitesses, les déplacements, les multiplicateurs de contact et les champs de signes.

Remarque 3.1

Comme dans les régimes statique et quasi-statique, cette formulation, de type lagrangienne classique, peut être stabilisée par un terme de la forme suivante [30, 34] :

$$\int_{\Gamma_c} \kappa_n S_u S_v [[v_n]] [[w_n]] d\Gamma \quad (3.26)$$

Toutefois l'intérêt pratique de cette stabilisation ne nous semble pas clair dans le régime dynamique, vu que les mouvements de corps rigides font partie intégrante de la dynamique du système.

Formulation pénalisée en vitesse

Dans la littérature, et comme nous l'avons rappelé au premier chapitre, il est fréquent que le contact en dynamique soit traité en utilisant la méthode de pénalisation (cf. e.g. [75, 4]). Pour le modèle de Signorini-Moreau développé ici, la formulation pénalisée est la suivante, pour tout

$t > t_0$:

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (v^i, u^i; S_u, S_v) \in \mathcal{CA}_v^i \times \mathcal{CA}_u^i \times (L^\infty(\Gamma_c))^2; \quad \forall w^i \in \mathcal{CA}_v^i \\ \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(v^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(v^i, w^i) - \int_{\Gamma_c} S_u S_v \kappa_v [[v_n]] [[w_n]] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$u^i(., t) = u^i(., t_0) + \int_{t_0}^t v^i(., s) ds \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (3.28)$$

$$S_u = 1_{R^-}(-d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.29)$$

$$S_v = 1_{R^-}(-[[v_n]]) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.30)$$

$$u^i(., t_0) = u_0^i(.) \quad \text{et} \quad v^i(., t_0) = v_0^i(.) \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (3.31)$$

où κ_v est un paramètre de pénalisation (strictement positif et arbitrairement grand).

3.1.5 Prise en compte du frottement

Les phénomènes de frottement font intervenir les vitesses relatives tangentielles au niveau de Γ_c . Ainsi, la formulation proposée est parfaitement adaptée à l'intégration de ces phénomènes. Rappelons les lois de frottement de Coulomb écrites sous forme d'équations sur $\Gamma_c \times \mathbb{I}$, moyennant l'introduction de deux champs de signes S_u et S_f , définis sur $\Gamma_c \times \mathbb{I}$:

$$R_\tau = \mu \lambda \Lambda \quad (3.32)$$

$$(1 - S_u)\Lambda + S_u \left[\Lambda - [S_f(\Lambda + h_1^\tau v_\tau) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|}] \right] = 0 \quad (3.33)$$

$$S_u = 1_{R^-}(-d_n) \quad (3.34)$$

$$S_f = 1_{B(0,1)}(\Lambda + \rho_\tau v_\tau) \quad (3.35)$$

où h_1^τ est un réel non nul, h_2^τ et ρ_τ sont des réels strictement positifs.

En tenant compte des puissances virtuelles développées par les efforts de frottement, le problème

dynamique de contact frottant s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (v^i, u^i, \lambda, \Lambda; S_u, S_v, S_f) &\in \mathcal{CA}_v^i \times \mathcal{CA}_u^i \times \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times (L^\infty(\Gamma_c))^3 \quad ; \\ \forall (w^i, \lambda^*, \Lambda^*) &\in \mathcal{CA}_v^i \times \mathcal{H} \times \mathcal{H} \end{aligned}$$

- *Principe des Puissances Virtuelles*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{dyn}^i(v^i, w^i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_{int}^i(v^i, w^i) - \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda [[w_n]] d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u \left[S_f \Lambda + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] [[w_\tau]] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

- *Lois de Signorini-Moreau faibles*

$$-\frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} \left[\lambda - S_u S_v (\lambda - h_n [[v_n]]) \right] \lambda^* d\Gamma = 0 \quad (3.37)$$

- *Lois de Coulomb faibles*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u \left(\frac{S_f}{h_1^\tau} + \frac{1 - S_f}{h_2^\tau} \right) \left[\Lambda - \left[S_f (\Lambda + h_1^\tau v_\tau) + (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} \right] \right] \Lambda^* d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_c} (1 - S_u) \Lambda \Lambda^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

- *Relation déplacement-vitesse*

$$u^i(., t) = u^i(., t_0) + \int_{t_0}^t v^i(., s) ds \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (3.39)$$

- *Champs de signes*

$$S_u - 1_{R^-}(-d_n) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.40)$$

$$S_v - 1_{R^-}(\lambda - \rho_n [[v_n]]) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.41)$$

$$S_f - 1_{B(0,1)}(\Lambda + \rho_\tau v_\tau) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.42)$$

- *Conditions initiales*

$$u^i(., t_0) = u_0^i(.) \quad \text{et} \quad v^i(., t_0) = v_0^i(.) \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (3.43)$$

où \mathcal{H} désigne l'espace des champs semi-multiplicateurs de frottement Λ .

Le terme de frottement dans (3.36) dépend implicitement de S_v parce que λ en dépend dans les lois de contact (3.37).

La formulation du problème dynamique de contact frottant (3.36)-(3.43) peut être stabilisée par

la même procédure que précédemment. En effet, dans le cas où $S_u S_f = 1$ (i.e. contact adhérent), $v_\tau = 0$, on peut ajouter au PPV, défini par (3.36), le terme suivant :

$$- \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u S_f \kappa_\tau v_\tau [[w_\tau]] d\Gamma_c \quad (3.44)$$

où κ_τ est un paramètre positif.

La formulation précédente est originale car c'est une formulation continue généralisant les formulations lagrangiennes classique et augmentée. Par ailleurs, les lois de contact-impact, écrites d'une manière équivalente sous forme d'équations, respectent exactement les conditions de Signorini-Moreau. Les non-linéarités de contact sont figées dans les champs de signes, définis d'une manière forte (locale). De ce fait, la formulation proposée est de nature faible-forte.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la formulation développée est lagrangienne. D'autres formulations de la littérature le sont [97, 3, 93]. Trois points sont à souligner. Le premier est que notre formulation est continue et permet de ce fait de parcourir et d'analyser la chaîne des approximations numériques. La seconde est qu'elle est écrite en terme des champs des vitesses, évitant ainsi un "forçage" d'une condition dite de persistance (e.g. [75], [4]). Enfin, elle relève les inégalités inhérentes à la mécanique du contact par des champs inconnus, clarifiant ainsi les difficultés liées aux phénomènes de contact pour en simplifier le traitement numérique.

3.1.6 Résultats de conservation

En nous plaçant dans le cadre du contact dynamique sans frottement, nous allons montrer que pour les solutions du problème défini par (3.20)-(3.25), l'énergie ainsi que les quantités de mouvements linéaire et angulaire sont conservées au cours du temps. Ces propriétés servent comme guides pour l'élaboration de "bons" schémas numériques d'intégration en temps.

L'énergie totale du système mécanique considéré est définie comme la somme des énergies cinétiques et potentielles des deux solides. Soit :

$$E = \sum_i \left(\int_{\Omega^i} \frac{1}{2} \rho_0^i (v^i)^2 d\Omega + \int_{\Omega^i} W^i d\Omega \right) \quad (3.45)$$

où W^i est la densité locale d'énergie de déformation du solide S^i .

En dérivant par rapport au temps l'équation (3.45), nous obtenons :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_i \left(\int_{\Omega^i} \rho_0^i \dot{v}^i \cdot v^i d\Omega + \int_{\Omega^i} \text{Tr}(\Pi^i(u^i) \cdot (\nabla(v^i))^T) d\Omega \right) \quad (3.46)$$

En utilisant le Principe des Puissances Virtuelles (3.20) et le fait que $\Pi^i(u^i) = \overline{\Pi}^i(v^i)$ nous obtenons :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda [[v_n]] d\Gamma \quad (3.47)$$

La conservation de l'énergie est ainsi assurée dès lors que l'on traite exactement le contact en dynamique; ce que nous faisons dans (3.21).

En tenant compte des phénomènes de frottement (de Coulomb), l'énergie se conserve en mode d'adhérence ($S_u S_v = 1$ et $S_f = 1$) et décroît en mode de glissement ($S_u S_v = 1$ et $S_f = 0$). En effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} = \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda [[v_n]] d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u S_f \Lambda v_\tau d\Gamma + \\ \int_{\Gamma_c} \mu \lambda S_u (1 - S_f) \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} v_\tau d\Gamma \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dans le cas où $S_u S_v = 1$ et $S_f = 1$, on a, d'après (3.37) et (3.38), $[[v_n]] = 0$ et $v_\tau = 0$, respectivement. Donc $\frac{\partial E}{\partial t} = 0$, ce qui établit la conservation de l'énergie.

Dans le cas où $S_u S_v = 1$ et $S_f = 0$, on a, d'après (3.37) et (3.38), $[[v_n]] = 0$ et $\Lambda = \frac{\Lambda + h_2^\tau v_\tau}{\|\Lambda + h_2^\tau v_\tau\|} = \frac{v_\tau}{\|v_\tau\|}$. Donc $\frac{\partial E}{\partial t} = \int_{\Gamma_c} \mu \lambda \|v_\tau\| d\Gamma$. Or pour un contact effectif, λ est négatif, donc l'énergie totale décroît.

Conservation de la quantité de mouvement linéaire

En supposant que $\Gamma_u^i = \emptyset$, alors la quantité de mouvement linéaire est conservée. En effet, cette quantité est définie par :

$$L = \sum_i \int_{\Omega^i} \rho_0^i v^i d\Omega \quad (3.49)$$

Soit, à présent, η un vecteur constant arbitraire dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$. De l'équation (3.49) on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial t} \cdot \eta = \sum_i \int_{\Omega^i} \rho_0^i \dot{v}^i \cdot \eta d\Omega \quad (3.50)$$

D'après le PPV (3.20), nous obtenons l'égalité suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial t} \cdot \eta = - \sum_i \int_{\Omega^i} \bar{\Pi}^i \cdot (\nabla \eta) d\Omega + \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda [[\eta]] \cdot n d\Gamma \quad (3.51)$$

Comme $\nabla(\eta) = 0$ et $[[\eta]] = 0$ car η est un vecteur constant, nous trouvons :

$$\frac{\partial L}{\partial t} \cdot \eta = 0 \quad ; \quad \forall \eta \quad (3.52)$$

d'où la propriété de conservation de la quantité de mouvement linéaire.

Conservation de la quantité de mouvement angulaire

En supposant que $\Gamma_u^i = \emptyset$ et qu'en cas de contact effectif la distance d définie par (2.52) est nulle (ceci est une hypothèse relative au choix de la surface potentielle cible ou maître), la quantité de mouvement angulaire est conservée au cours du temps. Cette quantité est définie par :

$$J = \sum_i \int_{\Omega^i} \rho_0^i \varphi^i \wedge v^i d\Omega \quad (3.53)$$

où $\varphi^i = x^i(t)$ (voir chapitre 2) et \wedge désigne un produit vectoriel classique.

On établit cette conservation. En procédant de la même manière que précédemment, soit η un vecteur constant arbitraire dans $\Omega^1 \cup \Omega^2$. L'équation (3.53) devient par dérivation :

$$\frac{\partial J}{\partial t} \cdot \eta = \sum_i \int_{\Omega^i} \rho_0^i (\varphi^i \wedge \dot{v}^i) \cdot \eta d\Omega = \sum_i \int_{\Omega^i} \rho_0^i \dot{v}^i \cdot (\eta \wedge \varphi^i) d\Omega \quad (3.54)$$

D'après le PPV (3.20), on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial t} \cdot \eta = - \sum_i \int_{\Omega^i} \bar{\Pi}^i : \nabla (\eta \wedge \varphi^i) d\Omega + \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda n \cdot (\eta \wedge [[\varphi]]) d\Gamma \quad (3.55)$$

ou encore, en utilisant des propriétés du calcul tensoriel :

$$\frac{\partial J}{\partial t} \cdot \eta = - \sum_i \int_{\Omega^i} \bar{\Pi}^i \nabla (\varphi^i)^T : \bar{\eta} d\Omega + \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda \eta \cdot ([[\varphi]]) \wedge n d\Gamma_c \quad (3.56)$$

où $\bar{\eta}$ est la matrice anti-symétrique définie par $\bar{\eta}x = \eta \wedge x$.

Comme la trace d'un produit d'une matrice symétrique par une matrice anti-symétrique est nulle, on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial t} \cdot \eta = \int_{\Gamma_c} S_u S_v \lambda \eta \cdot ([[\varphi]] \wedge n) d\Gamma_c \quad (3.57)$$

Deux cas se présentent :

- Si $S_u S_v = 0$ alors la quantité de mouvement J se conserve naturellement.
- Si $S_u S_v = 1$ alors le contact est effectif et ainsi $[[\varphi]] = 0$, d'où la conservation de la quantité de mouvement angulaire.

3.2 Approximations et résolution numériques

Dans cette section, nous abordons la discrétisation de la formulation continue en vitesse (3.20)-(3.25) et précisons la stratégie utilisée pour la résolution des problèmes discrets.

Nous commençons par la discrétisation temporelle puis nous détaillons les différentes étapes de la discrétisation en espace permettant de dériver les éléments de contact-impact. Nous commentons particulièrement l'intégration numérique des termes de contact.

3.2.1 Formulation semi-discrétisée du problème de contact dynamique

La formulation continue du problème de contact dynamique est écrite en vitesse. De ce fait, elle est d'ordre un en temps et demande un schéma d'ordre un pour l'approximation du terme d'inertie.

Considérons tout d'abord l'intervalle de temps $I = [t_0, t_f]$ comme une collection de sous-intervalles de temps, i.e., $I = \bigcup_{k=0}^N [t_k, t_{k+1}]$. Notons par $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ le pas de temps de discrétisation et par $(\cdot)^k$ l'approximation du champ (\cdot) à l'instant $t = t_k$.

Nous commençons la discrétisation temporelle de la formulation continue du problème de contact sans frottement par une approche totalement implicite. Nous discutons plus loin d'autres types de discrétisations permettant de diminuer le temps de calcul demandé par une approche totalement implicite.

Supposons que les dérivées des champs de vitesses et les déplacements soient calculées à l'instant t_{k+1} comme suit :

$$\dot{v}^{k+1} = \frac{v^{k+1} - v^k}{\Delta t_k} \quad (3.58)$$

$$u^{k+1} = u^k + \Delta t_k [(1 - \theta)v^k + \theta v^{k+1}] \quad (3.59)$$

où θ est un paramètre réel, non contraint pour le moment.

Supposons, à présent que les champs v^k et u^k sont connus, le problème semi-discret que nous cherchons à résoudre à l'instant t_{k+1} , est le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (v^{k+1}, \lambda^{k+1}; u^{k+1}, S_u^{k+1}, S_v^{k+1}) \in \mathcal{CA}_v \times \mathcal{H} \times \mathcal{CA}_u \times (L^\infty(\Gamma_c))^2; \forall (w, \lambda) \in \mathcal{CA}_v \times \mathcal{H} \\ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \rho_0^i \frac{(v^i)^{k+1} - (v^i)^k}{\Delta t_k} \cdot w^i + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} Tr \left[(\bar{\Pi}^i)^{k+1} (\nabla_p(w^i))^T \right] \\ - \int_{\Gamma_c} S_u^{k+1} S_v^{k+1} \lambda^{k+1} [[w_n]] = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$-\frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} \left[\lambda^{k+1} - S_u^{k+1} S_v^{k+1} (\lambda^{k+1} - h_n [[v_n]]^{k+1}) \right] \lambda^* = 0 \quad (3.61)$$

$$(u^i)^{k+1} = (u^i)^k + \Delta t_k [(1 - \theta)(v^i)^k + \theta (v^i)^{k+1}] \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (3.62)$$

$$S_u^{k+1} - 1_{R^-}(-d_n^{k+1}) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.63)$$

$$S_v^{k+1} - 1_{R^-}(\lambda^{k+1} - \rho_n [[v_n]]^{k+1}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.64)$$

où h_n est un paramètre non nul et ρ_n un autre paramètre strictement positif.

Le paramètre θ est à présent un réel vérifiant une condition de stabilité en linéaire ($0 \leq \theta$ et $|1 - \theta| \leq \frac{2}{\Delta t_k \omega_{max}}$ où ω_{max} est la pulsation maximale du système dynamique, voir annexe 2).

Par souci de simplification, notons Δt_k par Δt . En choisissant $\theta = 1$, nous retrouvons la discrétisation par le schéma d'Euler totalement implicite.

La dépendance du vecteur normal n par rapport au temps n'est pas discutée à ce stade. Nous reviendrons sur cet aspect (non-linéarité géométrique) au moment où nous décrirons notre stratégie de résolution.

Formulation en vitesse semi-explicite

La résolution (par une méthode de type Newton) des problèmes semi-discrets, définis à tout instant t_{k+1} par (3.60)-(3.64), nécessite le calcul et la factorisation des matrices de rigidités tangentes dynamiques dès que la paramètre θ est différent de zéro (caractère implicite du schéma). Le coût de ces calculs et de ces factorisations peut être très élevé, même si en implicite l'on peut se permettre d'utiliser de "grands" pas de temps. Pour accélérer la résolution, on peut utiliser une intégration semi-explicite inspirée du travail de Carpenter [38] : les efforts de contact sont traités d'une manière implicite pour assurer exactement les liaisons unilatérales et les efforts internes sont traités explicitement. Pour bénéficier de l'intérêt des formulations explicites, la matrice de masse doit être condensée. Le problème totalement implicite (3.60)-(3.64) devient :

$$\text{Trouver } (v^{k+1}, \lambda^{k+1}; u^{k+1}, S_u^{k+1}, S_v^{k+1}) \in \mathcal{CA}_v \times \mathcal{H} \times \mathcal{CA}_u \times (L^\infty(\Gamma_c))^2; \forall (w, \lambda^*) \in (\mathcal{CA}_v, \mathcal{H})$$

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \rho_0^i \frac{(v^i)^{k+1} - (v^i)^k}{\Delta t} \cdot w^i - \int_{\Gamma_c} S_u^{k+1} S_v^{k+1} \lambda^{k+1} [[w_n]] = - \sum_{i=1}^2 (\mathbf{G}_{int}^i)^k \quad (3.65)$$

$$- \frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} \left[\lambda^{k+1} - S_u^{k+1} S_v^{k+1} (\lambda^{k+1} - h_n [[v_n]]^{k+1}) \right] \lambda^* = 0 \quad (3.66)$$

$$(u^i)^{k+1} = (u^i)^k + \Delta t [(1 - \theta)(v^i)^k + \theta(v^i)^{k+1}] \quad \text{dans } \Omega_0^i \quad (3.67)$$

$$S_u^{k+1} - 1_{R^-} (-d_n^{k+1}) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.68)$$

$$S_v^{k+1} - 1_{R^-} (\lambda^{k+1} - \rho_n [[v_n]]^{k+1}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.69)$$

Observons toutefois que même en condensant la matrice de masse, les matrices tangentes dérivées d'une discrétisation éléments finis du problème défini par (3.65)-(3.69) ne sont ni diagonales ni définies positives. Un solveur de type complément de Schur doit être utilisé pour exploiter la possibilité de condensation de la matrice de masse.

3.2.2 Discrétisations en espace

Les équation (3.63) et (3.64) montrent que les champs de signes S_u et S_v sont très irréguliers. Ils ne se prêtent donc pas à une approximation par la méthode des éléments finis. Pour cela, nous proposons d'utiliser la méthode des éléments finis pour approcher les champs v^{k+1} , u^{k+1} et λ^{k+1} (ainsi que Λ^{k+1} en considérant le frottement) et une méthode de collocation (points finis) pour l'approximation des champs S_u^{k+1} , S_v^{k+1} (ainsi que S_f^{k+1} en cas de prise en compte des phénomènes de frottement). Détaillons ces aspects, en omettant la référence à la discrétisation en temps pour simplifier l'écriture.

Approximation éléments finis

Maillage Pour approcher les inconnues primales u et v de la formulation variationnelle, nous commençons par le maillage des deux solides dans leur configuration initiale $\bar{\Omega}_0^1$ et $\bar{\Omega}_0^2$. On suppose que ces derniers sont suffisamment réguliers pour que l'on puisse les approcher par deux domaines polygonaux en $2D$ et polyédriques en $3D$. Dans la suite, nous notons ces domaines, approchant les vrais domaines, Ω_h^1 et Ω_h^2 .

A chaque domaine Ω_h^i est associée une triangulation $\mathcal{T}_{h_u^i}$ dans le sens où :

$$\Omega_h^i = \bigcup_{j=0}^{N_e^i} K_j^i \quad (3.70)$$

où N_e^i est le nombre d'éléments de la triangulation $\mathcal{T}_{h_u^i}$ et où h_u^i est le pas de cette triangulation défini par :

$$h_u^i = \text{Max}\{\text{diam}(K_j^i), 1 \leq j \leq N_e^i\} \quad i = 1,2 \quad (3.71)$$

Pour le maillage de Γ_c^h se pose une alternative :

- Soit un maillage hérité de la trace géométrique de $\mathcal{T}_{h_u^1}$ (figure 3.1(a))
- Soit un maillage indépendant de $\mathcal{T}_{h_u^1}$, ayant son propre pas (figure 3.1(b)).

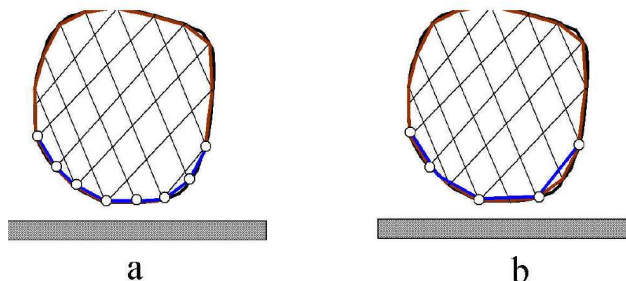


FIG. 3.1 – Maillages de la surface de contact

Dans les deux cas, on note \mathcal{TC}_{h_c} la triangulation de Γ_c^h , i.e.,

$$\Gamma_c^h = \bigcup_{j=0}^{N_c} e_j \quad (3.72)$$

où N_c est le nombre d'éléments de \mathcal{TC}_{h_c} .

Le pas de cette triangulation, noté h_c , est défini par :

$$h_c = \text{Max}\{\text{diam}(e_j), 1 \leq j \leq N_c\} \quad (3.73)$$

Nous supposons pour la suite que les triangulations $(\mathcal{T}_{h_i})_{1 \leq i \leq 2}$ et \mathcal{TC}_{h_c} sont régulières au sens classique du terme (cf. Ciarlet [90]).

Remarque 3.2

Après discrétisations des surfaces de contact, les normales des surfaces cibles, essentielles pour l'appariement et ainsi pour le calcul des champs de type $[[v_n]]$, peuvent présenter des discontinuités aux niveaux de noeuds (en 2D) ou d'arêtes de contact en 3D. Ces discontinuités peuvent générer des problèmes numériques, surtout en présence de frottement [71]. Pour atténuer ces pathologies numériques, des techniques ont été proposées dans la littérature :

- *lissage des surfaces de contact. Cette technique peut devenir coûteuse dans le cas de grandes transformations.*
- *régularisation des champs des repères locaux par moyennation "continue" entre les différents champs aux noeuds du maillage de l'interface maîtresse et reconstruction des champs des repères locaux par usage des fonctions de base éléments finis définies sur la surface maîtresse de contact [37, 80].*

Espaces d'approximation Le caractère mixte (hybride) de la formulation continue contraint le choix des espaces de discrétisation des champs primaux (déplacements et vitesses) et des champs duaux (multiplicateurs de contact et semi-multiplicateurs de frottement) *via* la condition *Inf-Sup* [58, 44, 7]. En adoptant la démarche suivie par Ben Dhia et al., qui est justifiée par des considérations de stabilité établie dans [44, 7, 37], nous utilisons la trace de l'espace d'approximation des champs primaux pour approcher les champs duaux (même si d'autres choix sont possibles (e.g. [7])).

Espace d'approximation des champs primaux Nous notons par \mathcal{CA}_h^i le sous-espace de \mathcal{CA}_u^i permettant d'approcher les champs primaux admissibles. Il est défini comme suit :

$$\mathcal{CA}_h^i(\Omega^i) = \{w^i \in (C(\overline{\Omega}^i))^d ; w_{|K_j^i}^i \in (\mathbb{P}_q(K_j^i))^d, 1 \leq j \leq N_e^i \text{ et } w_{|\Gamma_u}^i = 0\} \quad (3.74)$$

où $C(\overline{\Omega}^i)$ et \mathbb{P}_q désignent l'espace des champs continus dans Ω^i et l'espace des polynômes de degré q , respectivement. Pour la clarté de la présentation, nous considérons des éléments linéaires en champs primaux ($q = 1$).

Notons $(w_{L_l}^i)_{\substack{1 \leq l \leq N_t^i \\ l=1,d}}$ la base de cet espace vectoriel (de dimension finie). Elle s'écrit comme suit :

$$w_{L_l}^i = w_L^i e_l \quad (3.75)$$

où $(e_l)_{1 \leq l \leq d}$ est la base canonique de R^d , ($d = 2$ ou 3) et w_L^i sont des fonctions de base (éléments finis) scalaires classiques.

Les champs de déplacements et de vitesses vecteurs de \mathcal{CA}_h^i s'écrivent dans cette base comme suit :

$$u_h^i = \sum_{l,L} u_{L_l}^i w_L^i e_l \quad (3.76)$$

$$v_h^i = \sum_{l,L} v_{L_l}^i w_L^i e_l \quad (3.77)$$

Espace d'approximation des champs duaux Nous considérons la démarche suivie par Ben Dhia et Zarroug [37]. Dans le cas où les surfaces de contact sont planes, le choix de la trace de \mathcal{CA}_h^1 sur Γ_c^h comme espace d'approximation des champs duaux est justifié par [12, 44, 7, 105]. Cependant, dans le cas où ces surfaces sont gauches, nous gardons le même type d'approximation mais en lissant les champs des bases locales et en considérant des champs discrets du multiplicateur de contact et du semi-multiplicateur de frottement linéaires par éléments et continus sur toute l'interface Γ_c (cf. [80] pour plus amples développements).

L'espace de discrétisation du multiplicateur scalaire de contact est noté \mathcal{H}_h et défini par :

$$\mathcal{H}_h(\Gamma_c) = \{\lambda^* \in C(\overline{\Gamma}_c) ; \lambda_{|e_j}^* \in \mathbb{P}_1(e_j), 1 \leq j \leq N_c^i\} \quad (3.78)$$

Le champ vecteur de semi-multiplicateur discret de frottement Λ_h se décompose sur la base locale covariante g_α (eventuellement lissée comme suggéré précédemment) de la manière suivante :

$$\Lambda_h = \sum_{\alpha=1}^{d-1} \Lambda_{\alpha h} g_\alpha \quad \text{avec} \quad \Lambda_{\alpha h} \in \mathcal{H}_h(\Gamma_c) \quad (3.79)$$

De ce fait, on construit l'espace d'approximation du semi-multiplicateur vectoriel de frottement comme suit :

$$\mathcal{H}_h(\Gamma_c) = \left\{ \mu_h = \sum_{\alpha=1}^{d-1} \mu_{\alpha h} g_\alpha ; \mu_{\alpha h} \in \mathcal{H}_h(\Gamma_c), 1 \leq \alpha \leq d-1 \right\} \quad (3.80)$$

Les champs de multiplicateurs de contact et de frottement discrets sont développés dans leurs bases $(\psi_m)_{1 \leq m \leq N_c}$ et $(\psi_m \cdot g_\alpha)_{\substack{1 \leq m \leq N_c \\ \alpha=1,d}}$ respectives comme suit :

$$\lambda_h = \sum_{m=1}^{N_c} \lambda_m \psi_m \quad (3.81)$$

$$\Lambda_h = \sum_{m,\alpha} \Lambda_m^\alpha \psi_m g_\alpha \quad (3.82)$$

Après discrétisations des champs de déplacements, vitesses et multiplicateurs de contact, il reste à approcher les champs de signe S_u et S_v (ainsi que S_f en cas de prise en compte des frottements) définis localement et intervenant dans les différents termes de contact dans la formulation semi-discrétisée (3.60)-(3.64), par une méthode de collocation.

Collocation

La méthode de collocation consiste à approcher les champs de signes (irréguliers), en une collection de points de Γ_c^h [30].

Notons pour cela $(p_j)_{1 \leq j \leq N_{pc}}$ une collection finie de points de Γ_c^h , $(S_u^j)_{j=1, N_{pc}}^{k+1}$ et $(S_v^j)_{j=1, N_{pc}}^{k+1}$ les valeurs des champs S_u et S_v aux points $(p_j)_{j=1, N_{pc}}$ et à l'instant $k+1$. En cas de prise en compte des phénomènes de frottement, nous approchons également S_f de la même manière.

Remarque 3.3

Les points de collocation peuvent a priori être choisis de différentes manières. Nous pouvons

ainsi considérer les sommets des éléments du maillage de Γ_c^h , les points de Gauss ou les points de Simpson. Il a toutefois été montré numériquement (en s'appuyant sur des résultats de stabilité) que le choix de ces points doit être fondé sur une partition de l'interface de contact assurant une intégration précise des termes de contact présents dans le problème (cf. [37]).

Problèmes discrets

La combinaison de la méthode des différences finies en temps et des méthodes des éléments finis et de collocation en espace donne ainsi lieu aux problèmes suivants à résoudre, à chaque balise de temps t_{k+1} .

En supposant que les champs u^k et v^k (ainsi qu'éventuellement des champs de type variables internes en cas de comportement anélastique) connus, les problèmes discrets de contact dynamique (sans frottement) peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (v_h^{k+1}, \lambda_h^{k+1}; u_h^{k+1}, (S_u^j)^{k+1}, (S_v^j)^{k+1}) \in \mathcal{CA}_h \times \mathcal{H}_h \times \mathcal{CA}_h \times \{0,1\}^{2N_{pc}}; \forall (w_{L_l}, \psi_m) \\ & (\mathbf{G}_{dyn})_h^{k+1} + (\mathbf{G}_{int})_h^{k+1} - \sum_{j=1}^{N_{pc}} \omega_j (S_u^j)^{k+1} (S_v^j)^{k+1} \lambda_h^{k+1}(p_j) [[w_{L_l}, n]](p_j) = 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$-\frac{1}{h_n} \sum_{j=1}^{N_{pc}} \omega_j \left[\lambda_h^{k+1}(p_j) - (S_u^j)^{k+1} (S_v^j)^{k+1} (\lambda_h^{k+1}(p_j) - h_n [[v_n]]_h^{k+1}(p_j)) \right] \psi_m(p_j) = 0 \quad (3.84)$$

$$(u^i)_h^{k+1} = (u^i)_h^k + [(1-\theta)\Delta t (v^i)_h^k + \theta\Delta t (v^i)_h^{k+1}] \quad \forall i = 1, 2 \quad (3.85)$$

$$(S_u^j)^{k+1} = 1_{R^-}(- (d_n)_h^{k+1}(p_j)) \quad \forall j = 1, N_{pc} \quad (3.86)$$

$$(S_v^j)^{k+1} = 1_{R^-}(\lambda_h^{k+1}(p_j) - \rho_n [[v_n]]_h^{k+1}(p_j)) \quad \forall j = 1, N_{pc} \quad (3.87)$$

où ψ_m et (w_{L_l}) sont les éléments de la base de H_h et de \mathcal{CA}_h ,

$$(\mathbf{G}_{dyn})_h^{k+1} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} \rho_0^i \frac{(v^i)_h^{k+1} - (v^i)_h^k}{\Delta t} \cdot w_{L_l}^i d\Omega \quad (3.88)$$

$$(\mathbf{G}_{int})_h^{k+1} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_0^i} Tr \left[(\bar{\Pi}^i)_h^{k+1} (\nabla_p (w_{L_l}^i))^T \right] d\Omega \quad (3.89)$$

$$(v^i)_h^{k+1} = \sum_{l,L} (v_{L_l}^i)^{k+1} w_L^i e_l \quad (i = 1, 2) \quad (3.90)$$

$$\lambda_h^{k+1} = \sum_{m=1}^{N_c} \lambda_m^{k+1} \psi_m \quad (3.91)$$

et où ω_j représente le poids affecté au point de collocation p_j (pour $j = 1, \dots, N_{pc}$). Ces poids sont

rattachés dans ce travail aux poids de formules d'intégrations numériques utilisant les points de collocation p_j comme points d'intégration numérique des termes de contact.

3.2.3 Discrétisation du terme de stabilisation

Revenons maintenant à la discrétisation du terme de stabilisation $\int_{\Gamma_c} \kappa_1 S_u S_v [[v_n]] [[w_n]] d\Gamma$ pour la formulation en vitesse ou bien $\int_{\Gamma_c} \kappa_2 S_u d_n [[w_n]] d\Gamma$ pour la formulation en déplacement, avec κ_1 et κ_2 deux paramètres réels positifs.

Étant donné que les deux termes de stabilisation nécessitent le même type d'approximation EF-collocation, nous ne développons que la discrétisation du second terme [34].

Rappelons que le terme de stabilisation s'ajoute aux travaux virtuels des efforts de contact $\int_{\Gamma_c} S_u \lambda [[w_n]] d\Gamma$. Notons alors que le premier ne fait intervenir que des champs primaux alors que le second fait intervenir le produit d'un champ primal par un autre dual.

Dans le cas où les traces des champs de déplacements sur l'interface de contact et le champ de multiplicateur de Lagrange sont approchés par des éléments finis polynômiaux (par morceaux) de même degré, le terme de stabilisation discrète augmente les travaux virtuels des forces de contact d'une quantité qui ne perturbe pas la solution discrète du problème de contact.

En revanche, lorsque le multiplicateur de contact discret est dans un espace E.F. de degré strictement inférieur à celui des champs de traces des déplacements discrets sur l'interface de contact (cf. e.g. [7] pour des exemples), le terme de stabilisation perturbe la solution du problème de contact sans augmentation. Il est en effet aisé de se convaincre que, dans le cas où le champ discret λ_h est constant par élément e_c de Γ_c^h , l'écriture du contact effectif n'impose alors que :

$$\int_{e_c} d_{nh} d\Gamma = 0 \quad \forall e_c \in \Gamma_c^h \quad (3.92)$$

soit une non interpénétration nulle en moyenne sur e_c .

Afin que la stabilisation reste cohérente avec le problème lagrangien discret, il faut modifier le terme de stabilisation. Nous proposons de le faire en remplaçant le terme $\int_{\Gamma_c^h} d_{nh} [[w_{nh}]] d\Gamma$ par :

$$\int_{\Gamma_c^h} P_{|\mathcal{H}_h}(d_{nh}) [[w_{nh}]] d\Gamma \quad (3.93)$$

où $P_{\mathcal{H}_h}$ est un opérateur de projection des traces de champs de déplacement sur Γ_c^h sur l'espace \mathcal{H}_h des multiplicateurs de contact. Nous évaluerons cette correction sur la base de tests numériques (chapitre 5).

3.3 Stratégie de résolution

Le problème discret (3.83)-(3.87) est fortement non-linéaire. Ses non-linéarités sont liées à :

- l'appariement des points qui sont susceptibles de rentrer en contact
- la méconnaissance des statuts de contact/frottement en dynamique
- la non-linéarité de seuil de frottement (modèle de Coulomb)
- la loi de comportement du matériau considéré
- les grandes transformations

Ces non-linéarités sont résolues par un algorithme mixant des stratégies de points fixes et une méthode de module tangent (Newton généralisé (cf. [2, 45])).

Rappelons qu'il existe d'autres stratégies de résolution autre que celle retenue dans ce travail. Elles se fondent sur le principe de la linéarisation (généralisée à cause des irrégularités). Les matrices tangentes sont alors non symétriques (en présence de frottement). Ces méthodes permettent toutefois de recouvrir (pour certains comportements) les performances des méthodes de Newton dès que les statuts de contact sont stabilisés (cf. e.g. [101, 77, 108, 68, 88, 109]).

La stratégie choisie a l'avantage de "découpler" les différentes non-linéarités, en donnant la possibilité de les traiter une par une. On y gère des matrices tangentes symétriques (si la loi de comportement des matériaux constituants ne les dissymétrise pas!).

L'algorithme est illustré par l'organigramme de la figure 3.2.

Nous supposons qu'avant chaque boucle de point fixe, les inconnues ont été initialisées à des valeurs judicieusement choisies.

Notons que l'algorithme (figure 3.2) n'est déclaré convergent que lorsque toutes les boucles de points fixes et l'algorithme de Newton ont convergé successivement.

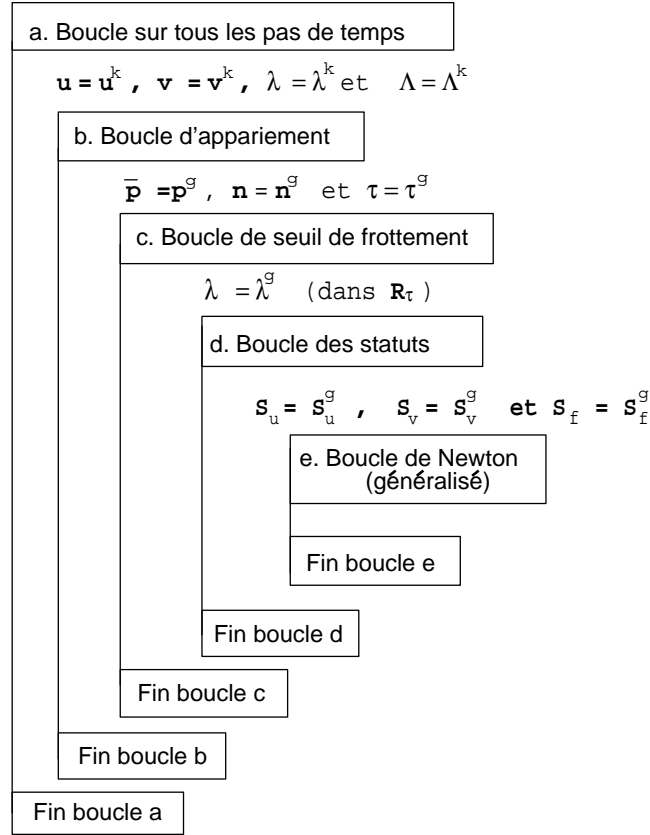


FIG. 3.2 – Algorithme de résolution

Décrivons succinctement chaque boucle. Pour plus de détails sur certains aspects, nous renvoyons aux références [19] et [80].

Boucle a : Boucle sur les pas de temps:

Elle permet l'évolution du temps d'un pas à un autre. Pour déterminer les inconnues à l'instant de calcul $k + 1$, nous supposons qu'elles sont connues à l'instant t_k .

Boucle b : Boucle sur la géométrie/appariement:

Cette boucle permet la recherche des normales, des vecteurs tangents (lissés pour certains cas) et des points appariés du contact. Nous suivons la démarche de [80] :

$$n(x^1) = n(p^1 + u^1(\bar{p}^1)) \approx n(p^1 + u_j^1(\bar{p}^1)) \quad (3.94)$$

où j est l'indice de la dernière itération d'appariement.

Boucle c: Boucle sur le seuil de frottement:

Dans cette boucle, nous traitons la non-linéarité due au seuil de frottement. Par gel du seuil de frottement, le critère de Coulomb est géré (numériquement) comme une succession de critères de Tresca et, en conséquence, la matrice de rigidité tangente de frottement devient symétrique (cf. e.g. [42]).

Boucle d: Boucle sur les champs de signes:

Elle permet de traiter la non-linéarité liée à la méconnaissance des statuts du contact/frottement en dynamique. Nous résolvons cette non-linéarité par une stratégie itérative apparentée à la méthode des contraintes actives [46]. Elle consiste à initialiser puis ajuster (par des tests) les statuts de contact/impact/frottement aux points d'intégration numériques des termes de contact, soit par point, soit par paquet de points. Notons que les trois types de statuts peuvent être traités ensemble dans une même boucle ou séparément.

Boucle e: Boucle de module tangent:

Dans cette boucle, nous traitons les non-linéarités engendrées par la projection sur la boule unité, et éventuellement par la loi de comportement du matériau. Pour ce faire, nous utilisons le module tangent qui est une extension de la méthode de Newton se fondant sur la notion de sous-différentielle [41].

Remarque 3.4

En cas de difficultés de convergence du module tangent (dues à de fortes hétérogénéités de frottement), un module θ -tangent ($\theta \in [0,1]$) [81] peut être utilisé. Dans ce cas, la matrice tangente est modifiée pour en tenir compte [23]. Cette famille de méthode permet de retrouver les méthodes de linéarisation classique comme celle du module sécant ($\theta = 0$) et du module tangent ($\theta = 1$). Notons que le paramètre θ du module θ -tangent n'a aucun lien avec celui de θ -schéma de l'intégration temporelle.

Après linéarisation par module tangent, on est amené à la résolution de systèmes linéaires du type suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K} + \mathcal{A}_u + \mathcal{B}_u & \mathcal{C}^T & \mathcal{B}^T \\ \mathcal{C} & \mathcal{C}\mathcal{C} & 0 \\ \mathcal{B} & 0 & \mathcal{B}\mathcal{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathcal{V}_h \\ \delta\lambda_h \\ \delta\Lambda_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

où

- \mathcal{K} désigne la matrice tangente de rigidité dynamique,
- \mathcal{A}_u , \mathcal{C} et \mathcal{CC} sont les matrices de rigidités contact,
- \mathcal{B}_u , \mathcal{B} et \mathcal{BB} sont les matrices de rigidités frottement,
- $\delta\mathcal{V}_h$, $\delta\lambda_h$ et $\delta\Lambda_h$ représentent les incréments de la solution hybride du problème discret,
- L_i sont les vecteurs résidus à l’itération du module tangent (et de celles amont de points fixes).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, en suivant les travaux de Moreau, Jean et leurs collaborateurs (e.g. [83, 65, 103, 64, 84, 85]) nous avons opté pour le modèle de Signorini-Moreau comme modèle de contact en dynamique. Après l’avoir écrit d’une manière équivalente sous forme d’équations, nous avons élaboré une formulation hybride faible/forte adaptée aux problèmes d’impact. Nous avons présenté la discrétisation de cette formulation où nous avons discuté la discrétisation du terme de stabilisation. Une stratégie de résolution basée sur le principe de points fixes a été également proposée. Dans le chapitre suivant, nous nous focalisons sur les aspects multi-échelles des problèmes de contact-impact.

Chapitre 4

Approches multi-échelles pour les problèmes de contact

Sommaire

4.1	Modèle d'interface multi-niveau	88
4.1.1	Motivation	88
4.1.2	Modèle géométrique des interfaces	88
4.1.3	Équations locales du modèle d'interface multi-niveau	90
4.1.4	Formulation faible-forte du problème de contact multi-niveau	91
4.1.5	Premiers résultats numériques	92
4.2	L'approche Arlequin pour les problèmes de contact	94
4.2.1	Nécessité des approches multi-échelles	94
4.2.2	Aperçu sur la méthode Arlequin	95
4.2.3	L'approche Arlequin en dynamique	96
4.2.4	L'approche Arlequin pour les problèmes de contact en dynamique	100
4.2.5	Discrétisations du problème modèle	102
4.2.6	Stratégie de résolution	102
4.2.7	Conservation de l'énergie avec l'approche Arlequin	103
4.3	Conclusion	105

Les problèmes de contact-impact sont généralement multi-échelles en espace et en temps. Ce caractère multi-échelle émane du fait que :

- i.* les surfaces de contact comportent, à des échelles microscopiques, des aspérités [69] dont l'expression peut être masquée par les modèles macroscopiques.
- ii.* les zones de contact sont souvent localisées.
- iii.* l'impact excite localement des phénomènes hautes fréquences dont la prise en compte est importante pour l'analyse fine de la zone impactée.

Dans ce chapitre, nous nous limitons aux aspects multi-échelles en espace (présence d'aspérités et localisation en espace des zones de contact). Dans une première partie, nous proposons un modèle d'interface multi-niveau [26], permettant une prise en compte des comportements locaux et globaux des interfaces de contact. Nous montrons tout particulièrement l'intérêt de ce modèle pour les problèmes de contact en dynamique. Dans une deuxième partie, nous montrons comment la méthode Arlequin [17] peut être utilisée comme outil numérique pour traiter des aspects multi-échelles/multi-modèles des problèmes de contact en dynamique.

4.1 Modèle d'interface multi-niveau

4.1.1 Motivation

Les lois de Signorini [96] sont des lois macroscopiques moyennant les phénomènes micro-physiques d'interfaces. Elles induisent des irrégularités des champs mécaniques non cohérentes avec l'intégration temporelle par des schémas classiques en temps (présence d'oscillations aux moments des chocs [36]). Cette limite peut être palliée en utilisant des lois d'interfaces "plus physiques", de type compliance. Néanmoins, la modélisation numérique du contact unilatéral par ces lois ne permet pas de maîtriser les interpénétrations macroscopiques et peut rendre les problèmes discrétisés tangents très mal conditionnés [15].

Afin de tenter de profiter des avantages numériques du modèle de Signorini et des vertus de modélisation par les lois de compliances, nous proposons un modèle d'interface multi-niveau, formellement introduit dans [20] et développé dans [26].

4.1.2 Modèle géométrique des interfaces

Les surfaces réelles de contact ne sont pas parfaitement lisses. Elles présentent, à des échelles microscopiques, des aspérités dont la prise en compte dans les modèles de contact peut être

importante [87] (voir figure 4.1). La taille moyenne des aspérités dépend de la nature du matériau. Par exemple, elle est de l'ordre de quelques micro-mètre pour les matériaux métalliques usuels.

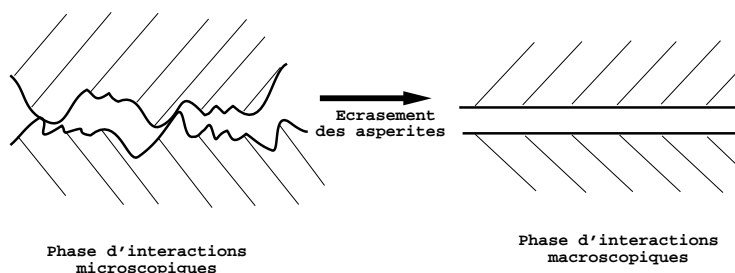


FIG. 4.1 – Phases d'interactions micro-macro

La surface potentielle de contact d'un solide déformable peut ainsi être modélisée par une couche d'aspérités et un substrat (figure 4.2) (cf. e.g. [87]). Le solide est considéré en contact parfait quand le substrat est atteint après écrasement de toutes les aspérités pendant la phase de contact. Le comportement local de ces aspérités peut être considéré comme élastique ou élastoplastique [87]. Dans ce travail, nous supposons qu'il est élastique, donné par une relation de type compliance.

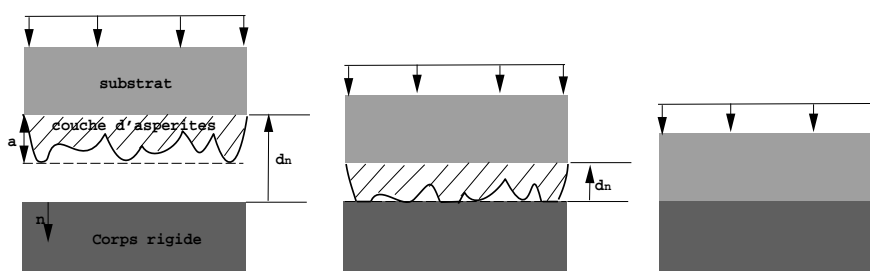


FIG. 4.2 – Modélisation géométrique des interfaces de contact

Afin de tenir compte des comportements locaux des aspérités et globaux des substrats, à la fois, nous proposons un modèle d'interface multi-niveau, obtenu par superposition au modèle "macroscopique" de Signorini pouvant représenter le modèle de contact du substrat, d'un modèle "microscopique" reproduisant (expérimentalement) l'action normale microscopique des aspérités d'interface. Ce modèle, de type "local/global", est représenté par le graphe de la figure 4.3 :

Les paramètres a et d_n de ce modèle représentent, respectivement, une taille caractéristique des aspérités et la distance signée entre deux substrats. Les champs P_n et λ sont les densités de contact associées aux modèles local et global, respectivement.

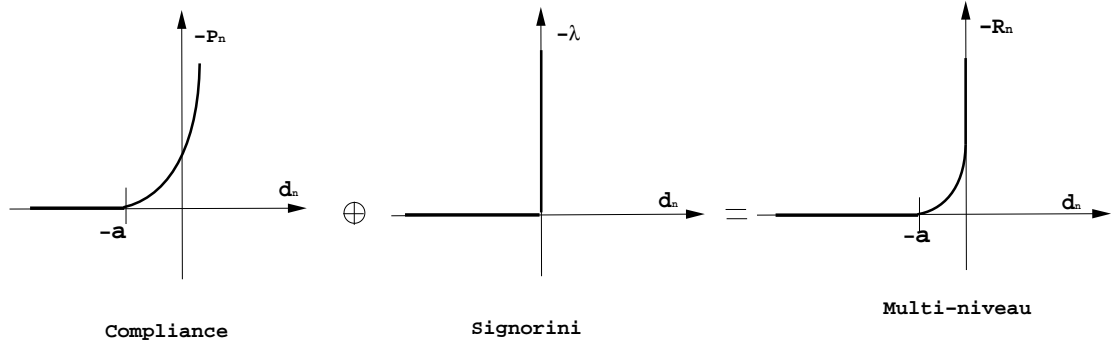


FIG. 4.3 – Modèle d'interface multi-niveau

Observons que la superposition du modèle macroscopique revient à "remplacer" la partie raide du modèle de compliance (celle qui pose des difficultés d'identification expérimentale et des problèmes numériques, à la fois) par celui de Signorini. C'est d'ailleurs sous cet angle pratique que le modèle développé ici nous semble être le plus intéressant.

4.1.3 Équations locales du modèle d'interface multi-niveau

Les équations locales du modèle dépendent des différentes phases du contact. En l'occurrence :

- si $d_n < -a$ alors les surfaces potentielles de contact sont libres
- si $d_n \geq -a$ alors les aspérités en vis-à-vis sont actives
- si $d_n \geq 0$ alors les substrats rentrent aussi en contact et imposent $d_n = 0$

Plus précisément, la densité totale des efforts normaux de contact R_n est écrite comme la somme d'une densité d'efforts rendant compte de la compliance de l'interface de contact et d'une autre densité, multiplicateur de Lagrange, soit :

$$R_n = P_n + \lambda \quad (4.1)$$

où :

$$P_n = -S_a \kappa_n (d_n + a)^{m_n} \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (\kappa_n > 0) \quad (4.2)$$

$$S_a = 1_{R^+}(d_n + a) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (4.3)$$

et où :

$$\lambda = S_\lambda (\lambda - h_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (h_n \neq 0) \quad (4.4)$$

$$S_\lambda = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (\rho_n > 0) \quad (4.5)$$

avec κ_n , a et m_n des paramètres numériques ou identifiés expérimentalement [87, 69]. Remarquons que dans le cas où $m_n = 1$, on retrouve le modèle de pénalisation linéaire qui, rappelons-le, n'est pas un modèle de compliances pour les interfaces métalliques.

Les champs de signes S_a et S_λ définis par (4.3) et (4.5), respectivement, permettent de caractériser les trois phases de l'approche des interfaces. En effet :

- si $S_a = 0$ (et forcément $S_\lambda = 0$) alors $R_n = 0$. La surface de contact est ainsi libre;
- si $S_a = 1$ et $S_\lambda = 0$ alors $R_n = P_n$ et le contact est traité par un modèle de compliances;
- si $S_\lambda = 1$ (et forcément $S_a = 1$), la densité d'efforts de contact P_n est corrigée par une pression liée au modèle de Signorini.

Remarque 4.1

Notons que du point de vue numérique, si a est choisi égal à zéro alors le modèle multi-niveau de contact se ramène au modèle classique de Signorini.

Le modèle proposé est numériquement adapté aux problèmes de contact en dynamique. En effet, la phase de compliance permet d'adoucir les chocs et d'absorber, en conséquence, une partie des oscillations numériques des champs mécaniques, tel que celui des vitesses. En outre, nous pouvons dans cette même phase tenir compte de phénomènes d'amortissement. Le terme de compliance s'écrit alors comme suit :

$$P_n = -S_a \kappa_n (d_n + a)^{m_n} - S_a c_n (d_n + a)^{m'_n} [[v_n]] \quad (4.6)$$

où c_n , m'_n sont des nouveaux paramètres du modèle d'interfaces et où $[[v_n]]$ est le champ saut des vitesses normales, au sens de la définition (2.108).

Remarque 4.2

En dynamique, le relâchement des conditions de contact dépend de la nature (élastique ou plastique) du comportement des aspérités pendant la phase de décollement. Si l'on suppose que ce comportement est élastique, c'est le modèle de compliance qui active le relâchement, sinon c'est le modèle macroscopique qui l'assure.

4.1.4 Formulation faible-forte du problème de contact multi-niveau

Nous donnons la formulation faible de l'équilibre d'un solide déformable en contact-impact avec un solide rigide. Le modèle "micro-macro" de contact (4.1)-(4.5) est également écrit de manière

faible. Les équations reliant les champs de déplacement u et le multiplicateur λ aux champs de signes irréguliers S_a et S_λ sont en revanche écrites de manière forte. Cela donne le problème suivant :

Trouver $(u, \lambda; S_a, S_\lambda)$ tels que, pour tout (w, λ^*) ,

$$\mathbf{G}_{dyn}(u, w) + \mathbf{G}_{int}(u, w) - \int_{\Gamma_c} \left[-S_a \kappa_n (d_n + a)^m + S_\lambda \lambda \right] w_n d\Gamma = \mathbf{G}_{ext}(w) \quad (4.7)$$

$$-\frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} \left[\lambda - S_\lambda (\lambda - h_n d_n) \right] \lambda^* d\Gamma = 0 \quad (4.8)$$

$$S_a = 1_{R^+}(d_n + a) \quad \text{sur } \Gamma_c \times \mathbf{I} \quad (4.9)$$

$$S_\lambda = 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) \quad \text{sur } \Gamma_c \times \mathbf{I} \quad (4.10)$$

où h_n est un paramètre non nul, ρ_n est un paramètre strictement positif et où, dans le cadre d'élasticité linéaire :

$$\mathbf{G}_{dyn}(u, w) = \int_{\Omega} \rho \ddot{u} \cdot w d\Omega \quad (4.11)$$

$$\mathbf{G}_{int}(u, w) = \int_{\Omega} Tr \left[\sigma(u) \epsilon(w) \right] d\Omega \quad (4.12)$$

$$\mathbf{G}_{ext}(w) = \int_{\Omega} f \cdot w d\Omega \quad (4.13)$$

Ce problème est mixte. Sa différence essentielle par rapport aux problèmes rencontrés dans les chapitres 2 et 3 se situe dans le rajout du terme de compliance au système d'équilibre (4.7). Concernant le champ de signe S_a , son introduction est rattachée essentiellement à un choix algorithmique.

4.1.5 Premiers résultats numériques

L'intérêt numérique de la formulation proposée est illustré par deux exemples de problèmes de contact ; le premier en régime quasi-statique et le second en dynamique. Nous montrons, à travers le premier exemple, l'évolution "régulière" des lois de contact. Dans le deuxième exemple, nous mettons l'accent sur l'apport du modèle d'interface multi-niveau à la réduction des oscillations numériques des champs dynamiques aux niveaux des surfaces de contact. Les résultats obtenus sont comparés à d'autres obtenus par le modèle purement macroscopique de Signorini.

Description des exemples

Le premier exemple représente l'écrasement, sur un bloc quasi-rigide, d'un bloc élastique modélisé, au niveau de la surface de contact, par un substrat et une couche d'aspérités de taille "moyenne" de $500 \mu\text{m}$ (figure 4.4(a)). Le deuxième exemple illustre l'impact sur un bloc rigide d'une barre élastique soumise à une vitesse initiale, présentant des aspérités de même taille moyenne que dans l'exemple précédent (figure 4.4(b)).

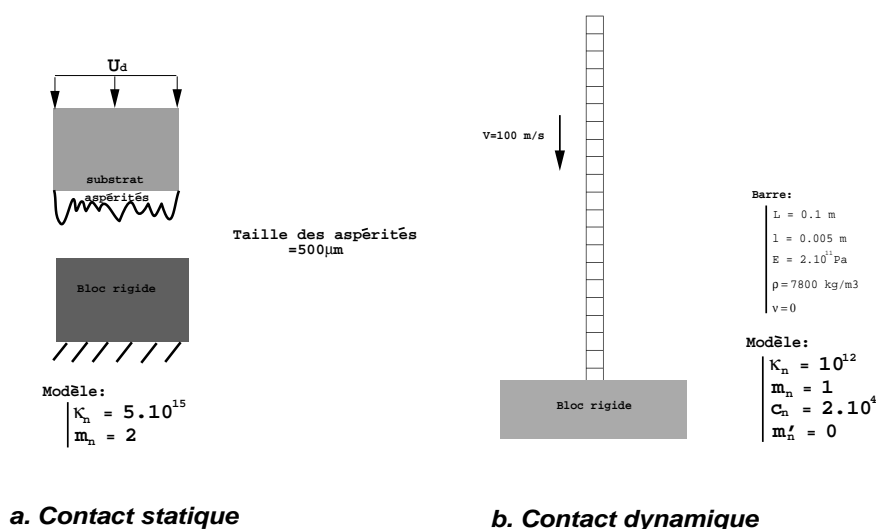


FIG. 4.4 – Définition des exemples

Résultats numériques

Les résultats numériques sont donnés sur les figures 4.5 et 4.6. Nous y présentons les évolutions au cours du "temps" du déplacement imposé u_d , du déplacement d'un point de contact u_c et des contraintes de contact en ce point, données par utilisation du modèle de Signorini et du modèle multi-niveau. La figure 4.5 montre des évolutions plus régulières des champs de déplacements et des contraintes (au niveau de la surface de contact) donnés par le modèle multi-niveau.

La figure 4.6 montre bien l'intérêt numérique de ce type de modèle en contact dynamique. En effet, les oscillations des vitesses obtenues par une résolution du problème de contact utilisant le modèle multi-niveau sont significativement atténuées par rapport à une résolution par les lois classiques de Signorini. La phase de pénalisation introduite à l'échelle des aspérités a permis d'adoucir le choc et de retrouver un comportement global plus régulier.

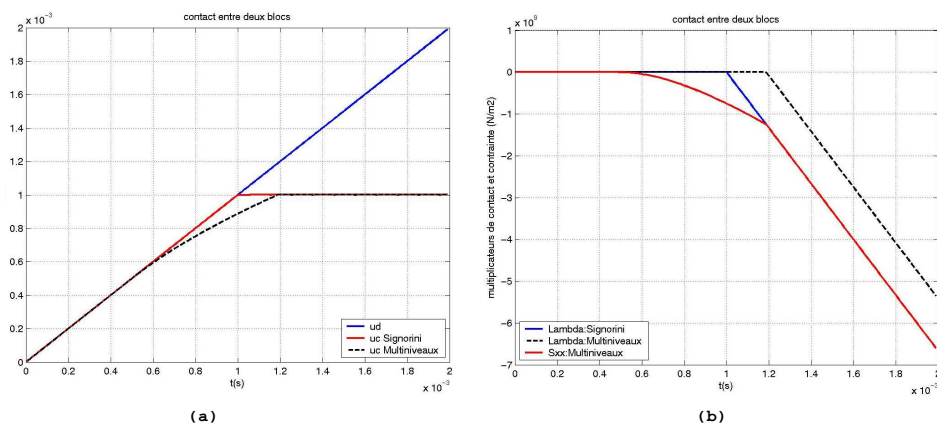


FIG. 4.5 – Contact quasi-statique entre deux blocs

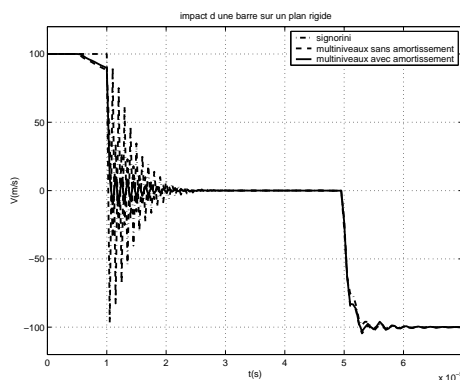


FIG. 4.6 – Impact d'une barre sur un bloc rigide

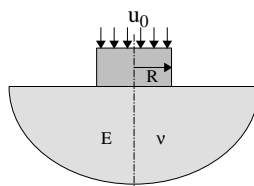
Ces premiers résultats numériques témoignent de l'apport du modèle multi-niveau proposé. Nous consacrons la deuxième partie de ce chapitre à l'utilisation de la méthode Arlequin comme outil d'analyse multi-échelles des problèmes d'impact.

4.2 L'approche Arlequin pour les problèmes de contact

4.2.1 Nécessité des approches multi-échelles

En mécanique du contact, on est souvent confronté à des problèmes où le contact est très localisé (indentation (figure 4.7), fissuration, impact...). Ce type de localisation génère de fortes concentrations, voire des singularités de contraintes et/ou de réponses fortement chargées en fréquences que les modèles grossiers ne peuvent capter. Afin d'avoir plus de précision sur la

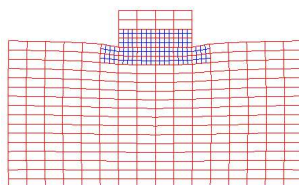
solution numérique au voisinage de ces zones, on peut utiliser les méthodes adaptatives en espace (voire en temps), basées sur des estimateurs d'erreurs (e.g. [66, 107, 78]). Néanmoins, ces méthodes peuvent nécessiter des remaillages lourds d'un état à un autre, rendant la résolution numérique très coûteuse en temps de conception. Par ailleurs, elles utilisent un mono-modèle dont le comportement est le même pendant la procédure d'adaptativité. Une alternative à ces méthodes est la méthode Arlequin [17, 18, 25]. Cette méthode multi-échelles offre un cadre convenable pour la superposition (sans remaillage) de modèles différents au sein d'une même structure. Dans ce qui suit, nous présentons brièvement les ingrédients de cette approche pour l'appliquer ensuite aux problèmes multi-échelles de contact en dynamique.

FIG. 4.7 – *Indentation*

4.2.2 Aperçu sur la méthode Arlequin

La méthode Arlequin est une méthode de superposition de modèles permettant d'utiliser des modèles différents au sein d'une même structure. Le cadre Arlequin permet trois types d'opérations de modélisation :

- *Zoom* : Un modèle fin est superposé à un modèle grossier existant, et ce pour raffiner la solution aux voisinages des zones critiques. Ce type d'opération est pratique pour les problèmes de contact (cf. figure 4.8)

FIG. 4.8 – *Opération de zooming*

-*Jonction* : Ce type d'opération permet de raccorder deux modèles (de finesse et de comportements différents), se recouvrant partiellement (figure 4.9). Une telle modélisation s'applique à des structures élancées, comme les crayons combustibles, les grappes de commande et les tuyauteries. Elle permet, tout particulièrement, de réduire le nombre total de degrés de liberté, tout en opérant le raffinement approprié là où il est nécessaire.

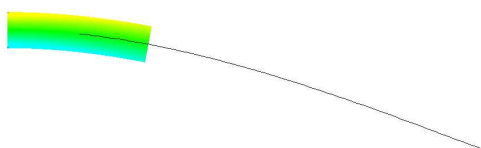


FIG. 4.9 – Opération de jonction

-*Substitution* : Cette opération consiste à superposer pour substituer localement à un modèle grossier existant un modèle plus fin. Une telle opération est utile pour introduire avec une grande flexibilité un défaut (fissure par exemple) dans un modèle sain (figure 4.10). Nous l'utilisons ici pour les problèmes de contact-impact [32, 33].

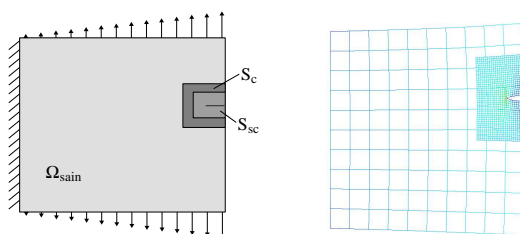


FIG. 4.10 – Opération de substitution

4.2.3 L'approche Arlequin en dynamique

Pour établir la formulation de la méthode Arlequin en dynamique, nous considérons un problème modèle en élasticité linéaire. Pour un solide déformable élastique \mathcal{B} (figure 4.11), occupant l'adhérence d'un ouvert Ω de R^d ($d = 2$, pour simplifier la présentation), ce problème s'écrit : (pour tout $t \in I$, en reprenant les notations du chapitre 2)

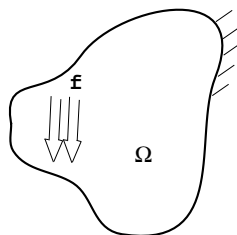


FIG. 4.11 – Solide en 2D

Trouver $u \in \mathcal{CA}(\Omega)$ tel que pour tout $w \in \mathcal{CA}(\Omega)$

$$\mathbf{G}_{dyn}(u,w) + \mathbf{G}_{int}(u,w) = \mathbf{G}_{ext}(w) \quad (4.14)$$

où $\mathcal{CA}(\Omega)$ est l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles (à l'instant t) et où \mathbf{G}_{dyn} , \mathbf{G}_{int} et \mathbf{G}_{ext} représentent les travaux des forces d'inertie, forces intérieures et forces extérieures, respectivement, au même instant t .

Supposons, maintenant, que suite à des chargements, les champs mécaniques d'une partie S du domaine Ω subissent des variations importantes (figure 4.12). Afin de capter ces variations, nous suivons les différentes étapes de l'approche Arlequin :

- dupliquer les champs mécaniques dans la zone S ,
- répartir les énergies dans la zone de superposition S entre les différents états.
- coupler les deux états dans la zone S ou dans une sous-zone S_c de S (figure 4.12).

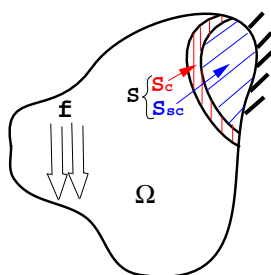


FIG. 4.12 – Superposition de modèles et raccord

Le couplage entre les différents modèles peut être fait par des approches pénalisées ou lagrangiennes.

Il a été démontré dans [24] que dans le cas où les liaisons Arlequin sont traitées par des multiplicateurs de Lagrange, il est important de considérer des liaisons de type H^1 plutôt que des liaisons de type L^2 , car ces dernières induisent, dans certains cas (pas de discrétisation très petit), de mauvais conditionnements (voir [50] et [25]). Un autre éclairage récent sur ces aspects peut être consulté dans [21].

Le problème modèle précédent (4.14) s'écrit, en tenant compte des différents composants de l'approche Arlequin et en considérant un raccord en déplacement *via* des multiplicateurs de Lagrange, comme suit (où les exposants g et l réfèrent aux grandeurs globales et locales, respectivement) :

$$\text{Trouver } (u^g, u^l, \Upsilon) \in \mathcal{CA}(\Omega) \times \mathcal{CA}(S) \times \mathcal{M} \quad ; \text{ tels que pour tout } (w^g, w^l, \Upsilon^*) \text{ admissibles}$$

$$\mathbf{G}_{dyn}(u^g, u^l, w^g, w^l; \alpha) + \mathbf{G}_{int}(u^g, u^l, w^g, w^l; \beta) + \mathbf{G}_{ari}(\Upsilon, w^g, w^l) = \mathbf{G}_{ext}(w^g; \gamma) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{G}_{ari}(\Upsilon^*, u^g, u^l) = 0 \quad (4.16)$$

avec

$$\mathbf{G}_{dyn}(u^g, u^l, w^g, w^l; \alpha) = \int_{\Omega} \alpha \rho^g \ddot{u}^g \cdot w^g d\Omega + \int_S (1 - \alpha) \rho^l \ddot{u}^l \cdot w^l dS$$

$$\mathbf{G}_{int}(u^g, u^l, w^g, w^l; \beta) = \int_{\Omega} \beta Tr[\sigma^g(u^g) \epsilon^g(w^g)] d\Omega + \int_S (1 - \beta) Tr[\sigma^l(u^l) \epsilon^l(w^l)] dS$$

$$\mathbf{G}_{ext}(w^g; \gamma) = \int_{\Omega} \gamma f \cdot w^g d\Omega + \int_{\Omega} (1 - \gamma) f \cdot w^l dS$$

$$\mathbf{G}_{ari}(\Upsilon, w^g, w^l) = (\Upsilon, w^g - w^l)_{S_c} \quad ((\cdot, \cdot)_S \text{ produit scalaire } H^1(S) \text{ ou tout produit équivalent})$$

où α , β et γ sont des fonctions de pondération des énergies qui vérifient les conditions suivantes :

$$\alpha = \beta = \gamma = 1 \quad \text{dans } \Omega \setminus S \quad (4.17)$$

$$0 < \alpha, \beta, \gamma < 1 \quad \text{dans } S \quad (4.18)$$

Les espace $\mathcal{CA}(\Omega)$, $\mathcal{CA}(S)$ et \mathcal{M} sont définis par :

$$\mathcal{CA}(\Omega) = (H^1(\Omega))^2 \quad (4.19)$$

$$\mathcal{CA}(S) = (H^1(S))^2 \quad (4.20)$$

$$\mathcal{M} = (H^1(S_c))^2 \quad (4.21)$$

La loi de comportement du modèle fin peut être différente de celle du modèle grossier. Elle s'écrit, dans le cadre d'élasticité linéaire, comme suit :

$$\sigma^l = \mathbf{R}^l \epsilon^l(u^l) \quad (4.22)$$

Rappelons que dans le cadre statique et dans le cas où $\beta = \gamma \geq \alpha_0 > 0$, la solution du problème Arlequin u^a existe et est unique (cf. [24]). En continu, elle est donnée (sous certaines hypothèses simples à satisfaire) par :

$$u^a = u^g \quad \text{dans } \Omega \setminus S_{sc} \quad (S_{sc} = S \setminus S_c) \quad (4.23)$$

$$u^g = u^l \quad \text{dans } S_c \quad (4.24)$$

$$u^a = \beta u^g + (1 - \beta)u^l \quad \text{dans } S_{sc} \quad (4.25)$$

Nous renvoyons à [50, 25, 21] pour des résultats sur la consistance et la pertinence de la méthode.

Ici, nous donnons un résultat de conservation d'énergie.

Proposition 4.1

Le couplage par l'approche Arlequin permet de conserver l'énergie totale du système mécanique.

Démonstration. Considérons le cadre continu en temps et en espace. Nous supposons que les forces extérieures sont nulles. L'énergie totale Arlequin est définie par :

$$E_t = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \alpha \rho^g (v^g)^2 d\Omega + \int_S \frac{1}{2} (1 - \alpha) \rho^l (v^l)^2 dS + \int_{\Omega} \beta W^g d\Omega + \int_S (1 - \beta) W^l dS \quad (4.26)$$

où v^g et v^l sont les champs de vitesses appartenant (à tout instant t) aux espaces $\mathcal{CA}(\Omega)$ et $\mathcal{CA}(S)$ et où W^g et W^l sont les densités locales d'énergies de déformations (élastiques) globale et locale, respectivement.

En dérivant par rapport au temps (4.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_t}{\partial t} = & \int_{\Omega} \alpha \rho^g \ddot{u}^g \cdot v^g d\Omega + \int_S (1 - \alpha) \rho^l \ddot{u}^l \cdot v^l dS + \int_{\Omega} \beta \text{Tr}(\sigma^g(u^g) \epsilon^g(v^g)) d\Omega + \\ & \int_S (1 - \beta) \text{Tr}(\sigma^l(u^l) \epsilon^l(v^l)) dS \end{aligned} \quad (4.27)$$

D'après le PTV (4.15), l'équation (4.27) se réduit à :

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} = -(\Upsilon, v^g - v^l)_{S_c} \quad (4.28)$$

or, les liaisons Arlequin imposent :

$$(\Upsilon^*, u^g - u^l)_{S_c} = 0 \quad \forall \Upsilon^* \quad (4.29)$$

ou encore, par dérivation par rapport au temps (Υ^* ne dépend pas du temps):

$$(\Upsilon^*, v^g - v^l)_{S_c} = 0 \quad \forall \Upsilon^* \quad (4.30)$$

Et particulièrement, pour $\Upsilon^* = \Upsilon$, on obtient :

$$(\Upsilon, v^g - v^l)_{S_c} = 0 \quad (4.31)$$

Ce qui assure (d'après (4.28)) la conservation de l'énergie totale.

Observons cependant que le passage de (4.29) à (4.30) n'est pas assuré en discret en temps. Nous retrouvons ainsi des problématiques, classiques pour les raccords surfaciques en dynamique (e.g. [43]). \square

4.2.4 L'approche Arlequin pour les problèmes de contact en dynamique

Dans ce paragraphe, nous appliquons la méthode Arlequin au problème de contact/impact. Pour ce faire, nous supposons qu'un solide déformable \mathcal{B} rentre en contact avec un solide rigide. La zone potentielle de contact du solide \mathcal{B} est notée Γ_c . Au voisinage de cette interface, nous superposons au modèle qualifié de global, défini dans le domaine Ω , occupé par \mathcal{B} , un modèle local dans S , choisi tel que Γ_c fasse partie de la frontière de S (figure 4.13).

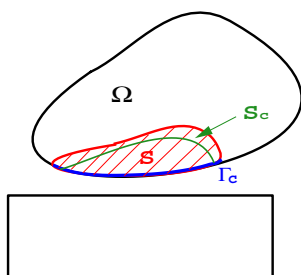


FIG. 4.13 – *Sous-domaine de superposition au niveau de l'interface de contact*

Par souci de clarté, nous commençons par rappeler la formulation (purement lagrangienne, en déplacement) du problème de contact/impact sans frottement et sans superposition Arlequin. Elle consiste à : (cf. chapitre 2)

Trouver $(u, \lambda; S_u)$ tels que pour tout (w, λ^*)

$$\mathbf{G}_{dyn}(u, w) + \mathbf{G}_{int}(u, w) + \mathbf{G}_{cont}(\lambda, w) = \mathbf{G}_{ext}(w) \quad (4.32)$$

$$\mathbf{G}_{cont}^{faible}(u, \lambda, \lambda^*) = 0 \quad (4.33)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{cont}(\lambda, w) &= - \int_{\Gamma_c} S_u \lambda w_n d\Gamma \\ \mathbf{G}_{cont}^{faible}(u, \lambda, \lambda^*) &= - \frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} [\lambda - S_u(\lambda - h_n d_n)] \lambda^* d\Gamma \quad (h_n \neq 0) \\ S_u &= 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n) \quad (\rho_n > 0) \end{aligned} \quad (4.34)$$

En introduisant les fonctions de pondération α , β et γ , définies par (4.17) et (4.18) et en suivant les étapes de la méthode Arlequin, nous obtenons la formulation suivante :

Trouver $(u^g, u^l, \lambda, \Upsilon; S_u)$ tels que $\forall (w^g, w^l, \lambda^*, \Upsilon^*)$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{dyn}(u^g, u^l, w^g, w^l; \alpha) + \mathbf{G}_{int}(u^g, u^l, w^g, w^l; \beta) + \mathbf{G}_{cont}(\lambda, w^l) \\ + \mathbf{G}_{ari}(\Upsilon, w^g, w^l) = \mathbf{G}_{ext}(w^g; \gamma) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{G}_{cont}^{faible}(u^l, \lambda, \lambda^*) = 0 \quad (4.36)$$

$$\mathbf{G}_{ari}(\Upsilon^*, u^g, u^l) = 0 \quad (4.37)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{dyn}(u^g, u^l, w^g, w^l; \alpha) &= \int_{\Omega} \alpha \rho^g \ddot{u}^g \cdot w^g d\Omega + \int_S (1 - \alpha) \rho^l \ddot{u}^l \cdot w^l dS \\ \mathbf{G}_{int}(u^g, u^l, w^g, w^l; \beta) &= \int_{\Omega} \beta Tr[\sigma^g(u^g) \epsilon^g(w^g)] d\Omega + \int_S (1 - \beta) Tr[\sigma^l(u^l) \epsilon^l(w^l)] dS \\ \mathbf{G}_{cont}(\lambda, w^l) &= - \int_{\Gamma_c} S_u \lambda w_n^l d\Gamma \\ \mathbf{G}_{ari}(\Upsilon, w^g, w^l) &= (\Upsilon, w^g - w^l)_{S_c} \\ \mathbf{G}_{ext}(w^g; \gamma) &= \int_{\Omega} \gamma f \cdot w^g d\Omega + \int_S (1 - \gamma) f \cdot w^l dS \\ \mathbf{G}_{cont}^{faible}(u^l, \lambda, \lambda^*) &= - \frac{1}{h_n} \int_{\Gamma_c} [\lambda - S_u(\lambda - h_n d_n^l)] \lambda^* d\Gamma \quad (h_n \neq 0) \\ S_u &= 1_{R^-}(\lambda - \rho_n d_n^l) \quad (\rho_n > 0) \end{aligned}$$

Nous observons que les interactions de contact sont entièrement prises en compte par le modèle local.

4.2.5 Discrétisations du problème modèle

Dans cette section, nous présentons la discrétisation en espace et en temps du problème modèle (4.35)-(4.37) et nous décrivons succinctement la stratégie de résolution du problème numérique.

Discrétisation en espace

La discrétisation en espace du problème (4.35)-(4.37) se fait en suivant la démarche décrite dans le chapitre 3. On suppose que le solide (élastique) est polygonal et qu'il est muni d'une triangulation notée \mathcal{T}_{h_g} permettant la construction du champ discret grossier u_h^g , défini sur Ω . Nous notons par $\mathcal{CA}_{h_g}(\Omega)$ l'espace éléments finis associé à la triangulation \mathcal{T}_{h_g} de pas h_g . Nous supposons, par ailleurs, qu'à la zone S est associée une triangulation \mathcal{T}_{h_l} de pas $h_l \neq h_g$. L'espace éléments finis qui lui est associé est noté $\mathcal{CA}_{h_l}(S)$.

Le multiplicateur de contact λ_h appartient à l'espace $\mathcal{H}_h(\Gamma_c)$ et le multiplicateur du raccord Arlequin Υ_h appartient à l'espace médiateur \mathcal{M}_h , défini par :

$$\mathcal{M}_h = (\mathcal{CA}_{h_g})|_{S_c} \quad \text{ou} \quad \mathcal{M}_h = (\mathcal{CA}_{h_l})|_{S_c} \quad (4.38)$$

Discrétisation en temps

La formulation semi-discrète en espace est discrétisée en temps par la famille des schémas de Newmark. L'intégration en temps dans Ω ou S peut être réalisée selon deux schémas différents. Afin de focaliser sur l'aspect multi-échelle en espace, nous considérons un pas de temps fixe dans les deux domaines Ω et S . Dans ce qui suit, nous indexons par k les valeurs des champs aux instants t_k .

4.2.6 Stratégie de résolution

Étant donné que l'on considère un problème de contact sans frottement, en élasticité linéarisée, la seule non-linéarité à traiter est celle d'unilatéralité. Pour résoudre le problème non-linéaire précédent (discret en temps et en espace), nous utilisons un algorithme reposant sur la même stratégie que celle développée dans le chapitre 3.

Le problème discret en espace et en temps admet la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } & ((u_h^g)^{k+1}, (u_h^l)^{k+1}, \lambda_h^{k+1}, \Upsilon_h^{k+1}; (S_u^j)^{k+1}) \quad ; \text{ pour tout } (w_h^g, w_h^l, \lambda_h^*, \Upsilon_h^*) \\ & \mathbf{G}_{dyn}^{k+1}((u_h^g)^{k+1}, (u_h^l)^{k+1}, w_h^g, w_h^l; \alpha) + \mathbf{G}_{int}^{k+1}((u_h^g)^{k+1}, (u_h^l)^{k+1}, w_h^g, w_h^l; \beta) + \\ & \mathbf{G}_{cont}^{k+1}(\lambda_h^{k+1}, w_h^l) + \mathbf{G}_{arl}^{k+1}(\Upsilon_h^{k+1}, w_h^g, w_h^l) = \mathbf{G}_{ext}(w_h^g, \gamma) \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{G}_{cont, faible}^{k+1}((u_h^l)^{k+1}, \lambda_h^{k+1}, \lambda_h^*) = 0 \quad (4.40)$$

$$\mathbf{G}_{arl}^{k+1}(\Upsilon_h^*, (u_h^g)^{k+1}, (u_h^l)^{k+1}) = 0 \quad (4.41)$$

$$(S_u^j)^{k+1} = 1_{R^-}(\lambda_h^{k+1}(p_j) - \rho_n(d_n^l)_h^{k+1}(p_j)) \quad (4.42)$$

où $(p_j)_{1 \leq j \leq N_{pc}}$ est une collection finie de points de Γ_c^h .

À l'itération de contact n ($S_u = S_u^{ic}$ donné), on résout le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_{dyn}^g & 0 & \mathcal{A}_g^T & 0 \\ 0 & \mathcal{K}_{dyn}^l & \mathcal{A}_l^T & (\mathcal{A}_c^{ic})^T \\ \mathcal{A}_g & \mathcal{A}_l & \mathcal{A}\mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_c^{ic} & 0 & \mathcal{C}^{ic} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathcal{U}_h^g)^{ic} \\ (\mathcal{U}_h^l)^{ic} \\ \Upsilon_h^{ic} \\ \lambda_h^{ic} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1^{ic} \\ L_2^{ic} \\ L_3^{ic} \\ L_4^{ic} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

où :

- \mathcal{K}_{dyn}^g et \mathcal{K}_{dyn}^l désignent les matrices de rigidité dynamique à l'état de contact ic ,
- \mathcal{A}_c^{ic} et \mathcal{C}^{ic} sont les matrices de contact à l'itération ic ,
- \mathcal{A}_g , \mathcal{A}_l et $\mathcal{A}\mathcal{A}$ sont les matrices de l'approche Arlequin à l'itération ic ,
- \mathcal{U}_h^g , \mathcal{U}_h^l , Υ_h et λ_h représentent la solution (doublement) mixte du problème,
- L_i^{ic} sont les vecteurs résidus à l'itération de contact ic .

Observons qu'afin d'alléger les notations, nous avons omis de mentionner la référence au temps discret ($k + 1$).

4.2.7 Conservation de l'énergie avec l'approche Arlequin

Nous étudions, ici, l'effet du raccord Arlequin sur la conservation de l'énergie totale discrète, sans prendre en compte des efforts de contact. Pour ce faire, nous considérons deux solides raccordés par l'approche Arlequin (figure 4.14). Nous intégrons la dynamique dans chaque solide par le schéma conservatif de Newmark (Trapèses : $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.5$) et nous analysons l'évolution de l'énergie totale en présence du couplage Arlequin.

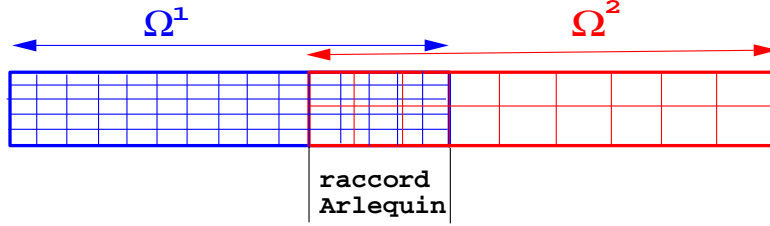


FIG. 4.14 – Raccord par l'approche Arlequin

Les équations discrètes de la dynamique dans chaque domaine sont :

$$M_g a_g^{k+1} + K_g u_g^{k+1} + A_g^T \Upsilon^{k+1} = 0 \quad (4.44)$$

$$M_l a_l^{k+1} + K_l u_l^{k+1} + A_l^T \Upsilon^{k+1} = 0 \quad (4.45)$$

$$A_g u_g^{k+1} + A_l u_l^{k+1} = 0 \quad (4.46)$$

où M_i et K_i ($i = g, l$) sont des matrices de masses et de rigidités (pondérées) de chaque solide et A_i sont les matrices du couplage Arlequin.

L'énergie à l'instant t_k est définie par :

$$E^k = \sum_{i=l,g} \frac{1}{2} (v_i^k)^T M_i v_i^k + \sum_{i=l,g} \frac{1}{2} (u_i^k)^T K_i u_i^k \quad (4.47)$$

Pour étudier la conservation de l'énergie en temps discret, on calcule $\frac{E^{k+1} - E^k}{\Delta t}$, soit :

$$\frac{E^{k+1} - E^k}{\Delta t} = \sum_i \frac{(v_i^{k+1} + v_i^k)^T}{2} M_i \frac{(v_i^{k+1} - v_i^k)}{\Delta t} + \sum_i \frac{(u_i^{k+1} - u_i^k)^T}{\Delta t} K_i \frac{(u_i^{k+1} + u_i^k)}{2} \quad (4.48)$$

La variante "conservative" du schéma de Newmark donne les relations suivantes :

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \Delta t v_i^k + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{a_i^k + a_i^{k+1}}{2} \quad (4.49)$$

$$v_i^{k+1} = v_i^k + \Delta t \frac{a_i^k + a_i^{k+1}}{2} \quad (4.50)$$

En notant par $x^{k+1/2}$ la somme $\frac{x^k + x^{k+1}}{2}$, l'équation (4.48) devient :

$$\frac{E^{k+1} - E^k}{\Delta t} = \sum_i (v_i^{k+1/2})^T M_i a_i^{k+1/2} + \sum_i (v_i^{k+1/2})^T K_i u_i^{k+1/2} \quad (4.51)$$

En utilisant les équations (4.44) et (4.45), L'équation (4.51) devient :

$$\frac{E^{k+1} - E^k}{\Delta t} = - \sum_i (v_i^{k+1/2})^T A_i^T \Upsilon^{k+1/2} \quad (4.52)$$

$$= - \sum_i (\Upsilon^{k+1/2})^T A_i v_i^{k+1/2} \quad (4.53)$$

En exprimant $v_i^{k+1/2}$ en fonction de u_i^k et u_i^{k+1} , nous obtenons :

$$\frac{E^{k+1} - E^k}{\Delta t} = - \sum_i (\Upsilon^{k+1/2})^T A_i \frac{(u_i^{k+1} - u_i^k)}{\Delta t} \quad (4.54)$$

L'équation (4.46) aux instants k et $k + 1$ donne :

$$\sum_i A_i u_i^{k+1} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_i A_i u_i^k = 0 \quad (4.55)$$

D'où la propriété de conservation de l'énergie.

Remarque 4.3

Le raccord en vitesse permet d'assurer immédiatement la conservation car $v_i^{k+1/2} = \frac{(v_i^k + v_i^{k+1})}{2}$.

Illustration numérique

Nous considérons un exemple d'une barre en traction-compression posée dans le domaine $\Omega =]0,5[$ et modélisée par deux modèles, l'un fin dans $\Omega_1 =]0,3[$ et l'autre grossier dans $\Omega_2 =]2,5[$, raccordés par l'approche Arlequin sur $S =]2,3[$. La barre est soumise à un déplacement initial différent de zéro. La dynamique est intégrée par la variante conservative de la famille des schémas de Newmark. Nous visualisons la "déformée" de la barre pour quelques instants de calcul (figure 4.15) et nous représentons l'énergie totale dans la barre au cours du temps (figure 4.16). Nous remarquons que le raccord Arlequin conserve l'énergie.

4.3 Conclusion

Un modèle d'interface multi-niveau permettant de prendre en compte des comportements locaux des aspérités et globaux des substrats a été proposé. La méthode Arlequin a été également appliquée aux problèmes multi-échelles de contact-impact, montrant la possibilité de "zoomer" les zones critiques de contact-impact et de mixer des modèles et des schémas différents au sein d'une même zone d'une structure soumise à des efforts de contact/impact.

Dans le dernier chapitre nous donnons des illustrations numériques des différents apports, développés dans les chapitres précédents.

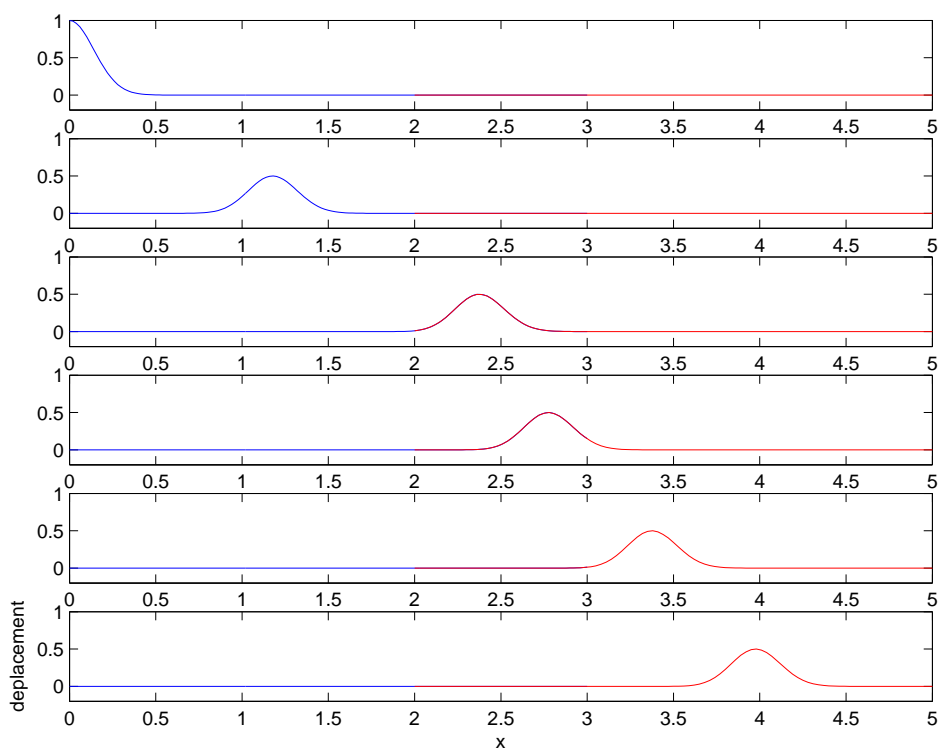


FIG. 4.15 – "Déformée" de la barre pour quelques instants de calcul

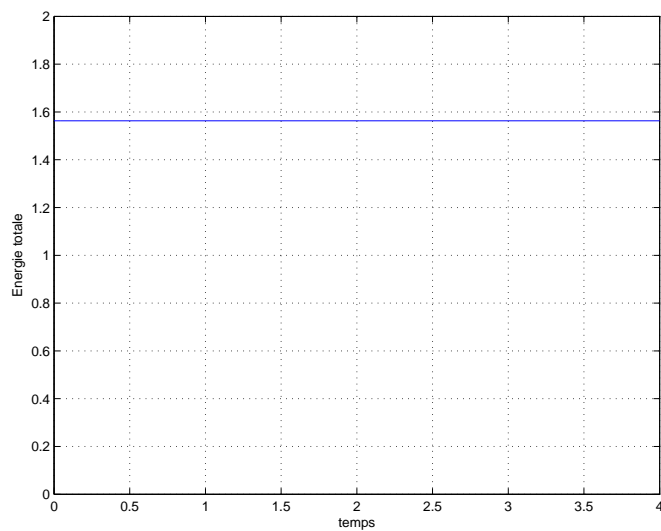


FIG. 4.16 – Énergie totale dans la barre

Chapitre 5

Exemples numériques

Sommaire

5.1	Stabilisation: quel intérêt?	108
5.1.1	Contact de Hertz	108
5.1.2	Patin frottant en dynamique	110
5.1.3	Patch-test de Taylor	111
5.2	Formulation en vitesse	111
5.2.1	Impact entre barres	113
5.2.2	Impact d'un cylindre sur un bloc rigide	115
5.2.3	Impact de Taylor	117
5.3	Multi-échelle	121
5.3.1	Modèle multi-niveau	121
5.3.2	Modélisation par l'approche Arlequin	121
5.4	Exemples industriels	123
5.4.1	Grappe de commande	124
5.4.2	Crayon de combustible et grille de maintien : une première perspective	124
5.4.3	Intérêt de l'approche Arlequin en présence de hautes fréquences	124
5.5	Conclusion	129

Les formulations développées dans les chapitres 2, 3 et 4, ainsi que les méthodes, schémas d'approximations et algorithmes proposés, ont été implémentés dans *Code_Aster* (Code éléments finis thermomécanique d'EDF).

Ce chapitre vise à témoigner de la pertinence des nouveaux composants que nous avons introduits dans le cadre de cette thèse, et ce à travers des tests numériques académiques ou industriels.

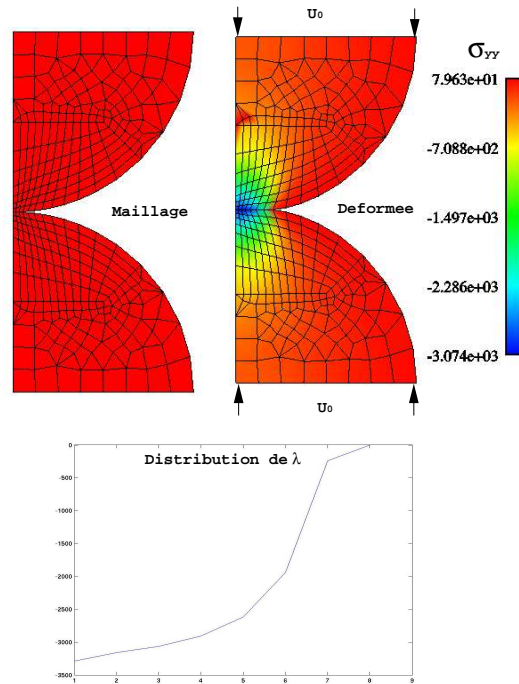
Dans une première partie, nous nous intéressons à la formulation lagrangienne stabilisée des problèmes de contact [34]. Nous étudions en particulier l'intérêt du terme de stabilisation (ou d'augmentation) ainsi que l'influence de son mode de discrétisation sur les résultats numériques. La deuxième partie est consacrée à la formulation continue en vitesse et à ses variantes. Les résultats issus de cette formulation sont comparés à d'autres obtenus par des formulations classiques (programmées également dans *Code_Aster*, durant cette thèse) [36, 30, 31, 32]. L'aspect multi-échelle est abordé dans une partie à part [26, 32, 33]. Nous y présentons, tout particulièrement, les vertus numériques du modèle d'interface multi-niveau et de l'approche Arlequin dans le traitement des problèmes de contact-impact.

5.1 Stabilisation: quel intérêt?

Rappelons que la formulation lagrangienne stabilisée permet de généraliser les formulations lagrangiennes classique et augmentée. Nous étudions, ici, l'influence des différents paramètres de cette formulation, notamment celui de stabilisation (ou augmentation) sur les performances de l'algorithmique de contact, d'une part et sur la consistance de la solution numérique, d'autre part. Pour ce faire, nous considérons trois exemples : le contact de Hertz [60], le patin frottant en dynamique et le patch-test dit de Taylor. Le premier évaluera la sensibilité de la convergence de l'algorithme aux différents paramètres. Le deuxième jugera de l'intérêt de la stabilisation pour les problèmes de contact en dynamique. Le troisième servira pour étudier l'influence de la stabilisation sur la consistance de la solution numérique.

5.1.1 Contact de Hertz

Nous considérons le contact sans frottement en statique entre deux demi-sphères modélisées en axisymétrique. Les deux demi-sphères sont identiques et supposées être constituées d'un même matériau élastique de module de Young $E = 20000\text{MPa}$ et de coefficient de poisson $\nu = 0.3$. Deux déplacements imposés, égaux et opposés, sont appliqués sur les deux faces planes des deux

FIG. 5.1 – *Contact de Hertz*

demi-sphères de valeurs variant de 0 à U_0 sur 10 pas de charges. Vu l'hypothèse d'axi-symétrie, seuls deux quarts de disques sont maillés. Le maillage comporte 410 noeuds, 30 éléments TRIA3, 324 éléments QUAD4 et 93 éléments SEG2 (interface de contact). Les éléments de contact sont intégrés aux noeuds des éléments SEG2 de la zone potentielle de contact.

Nous donnons sur la figure 5.1 les déformées des deux quarts de disques ainsi que les densités normales des forces de contact obtenues par une approche purement lagrangienne ($\kappa_n = 0$). Par ailleurs, nous étudions l'influence du paramètre d'augmentation κ_n sur le nombre d'itérations (de Newton) supplémentaires par rapport à celui obtenu par une approche purement lagrangienne.

κ_n	$[0 - 10^{11}]$	$5 \cdot 10^{11}$	$6 \cdot 10^{11}$	10^{12}
it. supp.	0	5	8	11

TAB. 5.1 – *Variation du nombre d'itérations en fonction de κ_n .*

Nous remarquons que pour ce problème (ne nécessitant aucune stabilisation), l'ajout d'une stabilisation ($\kappa_n > 0$) ne peut que détériorer les performances du cas sans stabilisation. Les paramètres h_n et ρ_n (cf. section 2.7) n'ont pas d'influence dans ce cas.

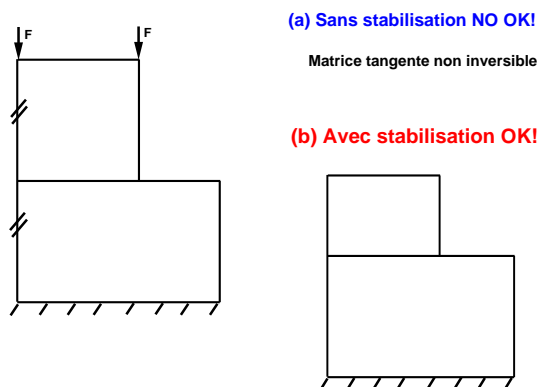


FIG. 5.2 – Intérêt de la stabilisation

Remarque 5.1

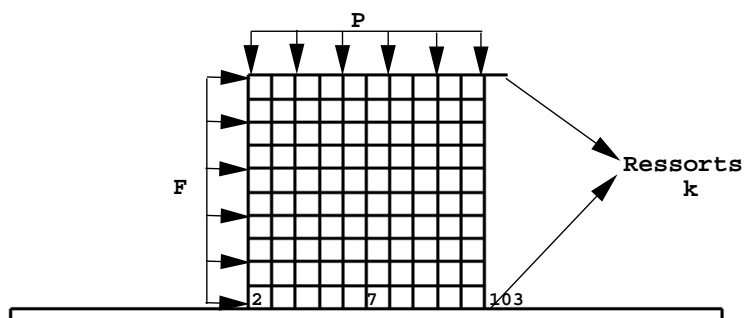
Dans le cas où les deux quarts de disques sont soumis à des forces à la place des déplacements, la formulation purement lagrangienne donne une matrice tangente non inversible, à cause des mouvements de corps rigides. Le terme de stabilisation permet, dans ce cas, de stabiliser la formulation purement lagrangienne. Ainsi, la matrice tangente du système devient inversible. L'intérêt de la stabilisation est illustré sur un autre exemple représentant l'écrasement de deux blocs (figure 5.2).

5.1.2 Patin frottant en dynamique

Ce cas test permet de juger l'intérêt de la stabilisation en régime dynamique. Le système étudié comporte un bloc déformable (en déformation plane), relié à un ressort de maintien suivant la direction du mouvement, en contact frottant sur un bloc rigide (cf. figure 5.3).

Le patin, de côté $c = 1 \text{ m}$, est constitué d'un matériau élastique de module de Young $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, de coefficient de poisson $\nu = 0$ et de densité $\rho = 7800 \text{ Kg.m}^{-3}$. Il est maillé par 100 éléments QUAD4. Sa zone de contact (choisie comme surface esclave) est maillée par 10 éléments SEG2. Le ressort de maintien est modélisé dans *Code_Aster* par un élément discret de raideur $8 \cdot 10^5 \text{ N/m}$. La loi de frottement est celle de Coulomb avec un coefficient de frottement $\mu = 0.3$.

Nous visualisons sur la figure 5.4 l'évolution des champs de déplacement, vitesse, densité de forces

FIG. 5.3 – *Patin frottant en dynamique*

de contact et semi-multiplicateur de frottement en quelques points d'intégration numérique de la zones de contact (qui sont dans notre cas des noeuds du maillage de la zone de contact indiqués sur la figure 5.3). Les résultats présentés sont obtenus par une formulation purement lagrangienne. Les mêmes résultats peuvent être obtenus par une formulation lagrangienne stabilisée.

Étant donné que la matrice de rigidité dynamique du système est inversible, le terme de stabilisation n'a aucun intérêt en régime dynamique.

5.1.3 Patch-test de Taylor

Il s'agit d'un problème de contact sans frottement (en statique) entre deux blocs maillés de manière incompatible avec des éléments finis bilinéaires QUAD4 (cf. figure 5.5). Nous approchons les déplacements par des éléments finis de type Q_1 (ils sont P_1 sur l'interface de contact) et les multiplicateurs de contact par des éléments finis de type P_0 . Nous avons calculé la solution sans et avec stabilisation. Nous constatons que le terme de stabilisation perturbe la solution numérique du problème sans stabilisation (cf. figure 5.5).

5.2 Formulation en vitesse

La formulation proposée est testée sur plusieurs exemples : l'impact entre barres, l'impact d'un cylindre ou d'une bille sur un bloc rigide et l'impact de la barre de Taylor. Nous testons également, différentes variantes de la formulation proposée : approche lagrangienne ou pénalisée et intégration totalement implicite ou semi-implicite.

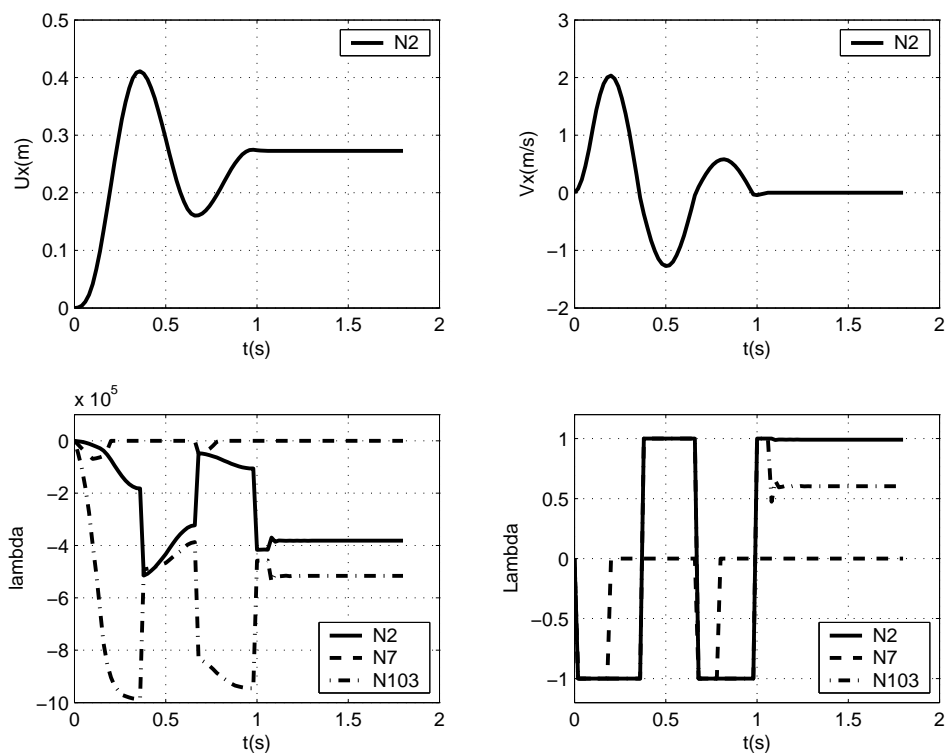


FIG. 5.4 – Champs de déplacement, vitesse, multiplicateur de contact et semi-multiplicateur de frottement en quelques points de la zone de contact

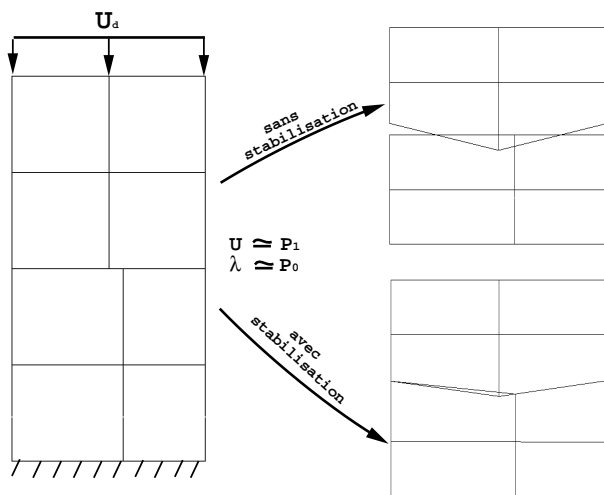


FIG. 5.5 – Patch-test de Taylor sans et avec stabilisation

5.2.1 Impact entre barres

Nous considérons, d'abord, le cas académique d'impact entre deux barres élastiques déjà vu au premier chapitre. Les deux barres sont supposées être libre-libre, soumises à deux vitesses initiales égales et de sens opposés. Le jeu initial entre les deux barres est de 1 *mm* et les vitesses initiales sont égales à 10 *m/s*. Les propriétés mécaniques et géométriques des deux barres sont les suivantes :

- Longueur=1 *m*
- Section=0.04 *m*²
- Densité=7800 *kg/m*³
- Module de Young $E = 2 \cdot 10^{11}$ *Pa*
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.

Les deux barres sont maillées par des éléments HEXA 8. Les densités normales de contact sont approchées par des éléments bilinéaires.

Nous présentons sur la figure 5.6 les champs de déplacement, vitesse et densité de contact d'un point de la surface de contact, obtenus par la formulation en vitesse. Ces résultats sont comparés à ceux donnés par des formulations en déplacement dont la dynamique est intégrée par un schéma de Newmark avec $\beta = 0.3025$ et $\gamma = 0.6$ (donc dissipatif). Le pas de temps est de $\Delta t = 10^{-5}$ *s* et le paramètre θ est choisi égal à 1.

Afin de réduire l'amortissement numérique induit par le θ -schéma, d'ordre 1 pendant la phase de décollement, nous prenons θ égale à 0.5 Les résultats sont donnés sur la figure 5.7 [73].

Autres variantes de la formulation en vitesse

Le même test (impact de deux barres) est simulé avec la variante pénalisée de la formulation en vitesse avec une intégration temporelle implicite (figure 5.8). Nous retrouvons des résultats proches de ceux obtenus par la formulation en vitesse. Observons tout particulièrement que le champ de vitesse du point en contact potentiel ne présente pas d'oscillations numériques parasites. Le résultat est d'autant plus proche de la solution donnée par une formulation lagrangienne que le paramètre de pénalisation est relativement grand. Dans notre cas il est égal à $5 \cdot 10^9$.

Nous avons également testé l'intégration semi-implicite de la formulation lagrangienne en vitesse (forces de contact implicites et forces intérieures explicites). Les résultats sont donnés sur la figure

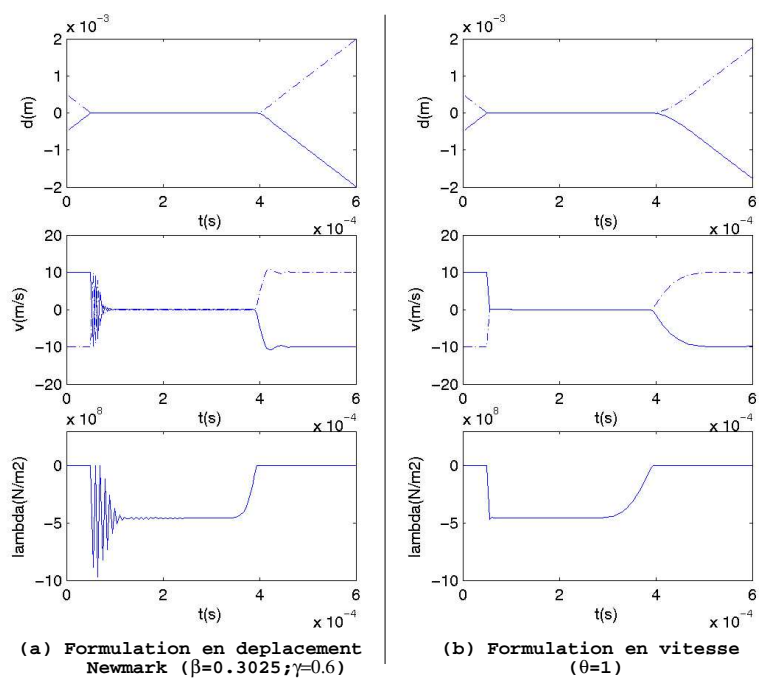


FIG. 5.6 – Impact de deux barres

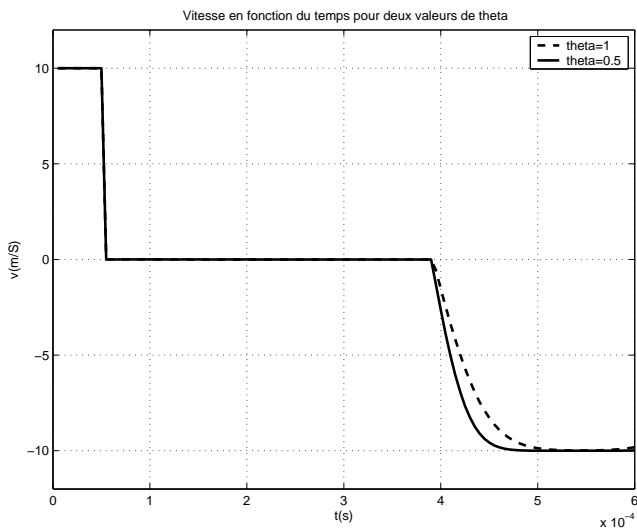
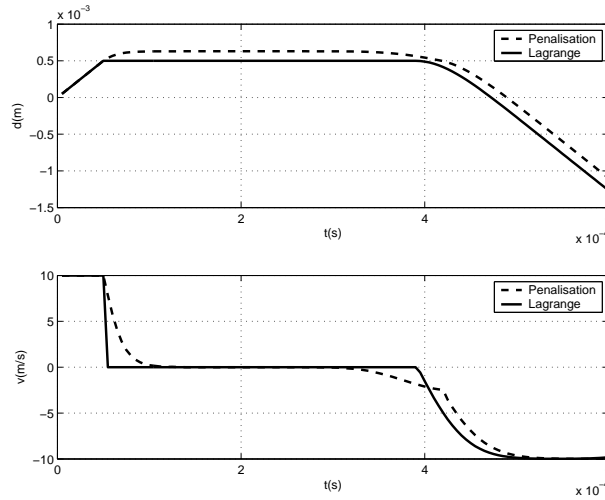


FIG. 5.7 – Influence du paramètre θ sur l'intégration temporelle

FIG. 5.8 – *Approche pénalisée de la formulation en vitesse*

5.9. Ce type de discrétisation conserve les propriétés d'intégration en temps de la formulation en vitesse pendant la phase de contact (absence d'oscillations numériques) mais les modifie légèrement pendant la phase de de vol libre qui suit le décollement.

5.2.2 Impact d'un cylindre sur un bloc rigide

Cet exemple permet de valider la formulation proposée sur un cas où la zone effective de contact est variable pendant la phase d'impact. Il s'agit de l'impact d'un cylindre élastique (en déformation plane) sur un bloc rigide (traité, par exemple dans [103]). Les données matérielles et géométriques du cylindre sont les suivantes :

- Rayon=0.03 m
- Densité=7800 kg/m^3
- Module de Young $E = 2 \cdot 10^{11} Pa$
- Coefficient de Poisson $\nu = 0$.

Distant par rapport au bloc rigide d'un jeu initial de $0.01m$, le cylindre est soumis à une vitesse initiale de $500m/s$. Les deux solides et leurs surfaces potentielles de contact sont maillés par des QUAD4 et des SEG2, respectivement. Le contact est intégré aux noeuds de la zone de contact du cylindre. Le pas de temps est de $10^{-6}s$. Les résultats obtenus par notre approche avec $\theta = 1$ (partie droite de la figure 5.10) et par la formulation en déplacement avec des paramètres de Newmark $\beta = 0.4$ et $\gamma = 0.7$ (partie gauche de la figure 5.10) sont comparés. Nous présentons,

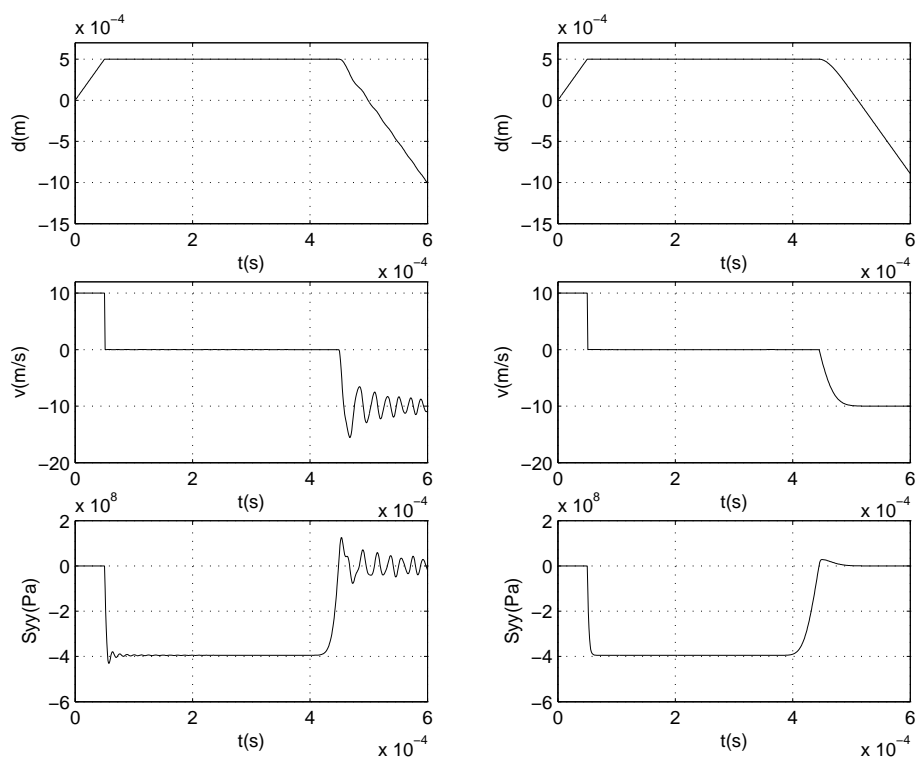


FIG. 5.9 – Résultats des discrétisations semi-implicite (à gauche) et implicite (à droite) de la formulation en vitesse

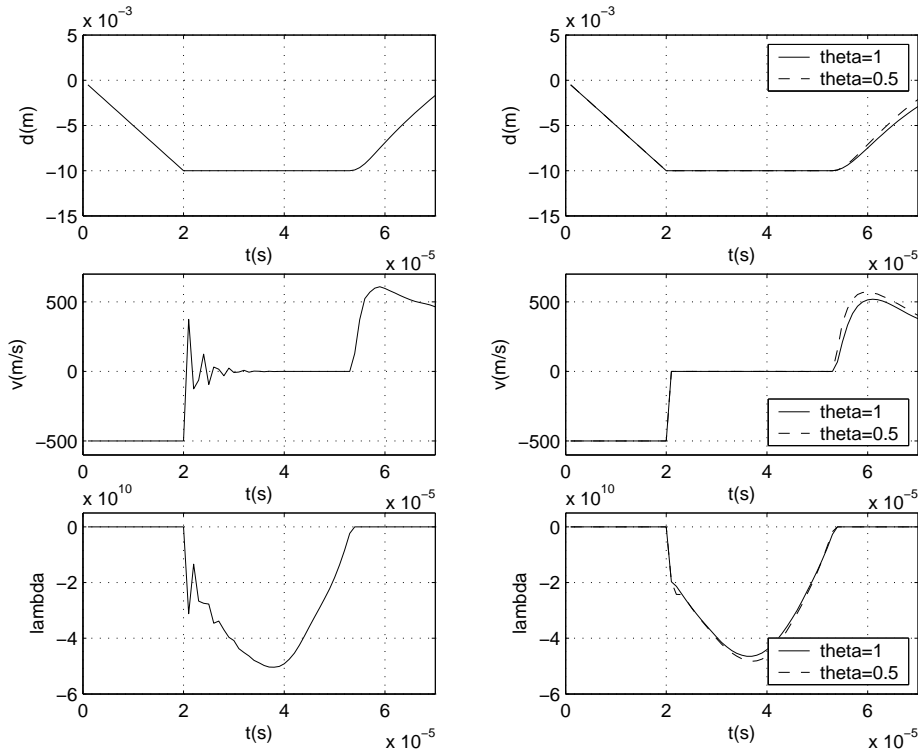


FIG. 5.10 – Impact d'un cylindre sur un plan rigide

tout particulièrement, les champs de déplacement, vitesse et densité normale de contact du point le plus bas du cylindre. Les déformées du cylindre avant, pendant et après la phase de contact ainsi que les contraintes de von-Mises dans le cylindre sont présentées sur la figure 5.11.

5.2.3 Impact de Taylor

Cet exemple permet de tester la formulation en vitesse sur des solides présentant des comportements élastoplastiques [98] et soumis à des forces de frottement. Il s'agit de l'impact dit de Taylor d'une barre en déformation plane sur un plan rigide. La barre est soumise à une vitesse initiale $v_0 = 227 \text{ m s}^{-1}$. Ses propriétés sont :

- Longueur = $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
- Largeur = $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- Densité = 8930 kg/m^3
- Module de Young $E = 1.17 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.35$

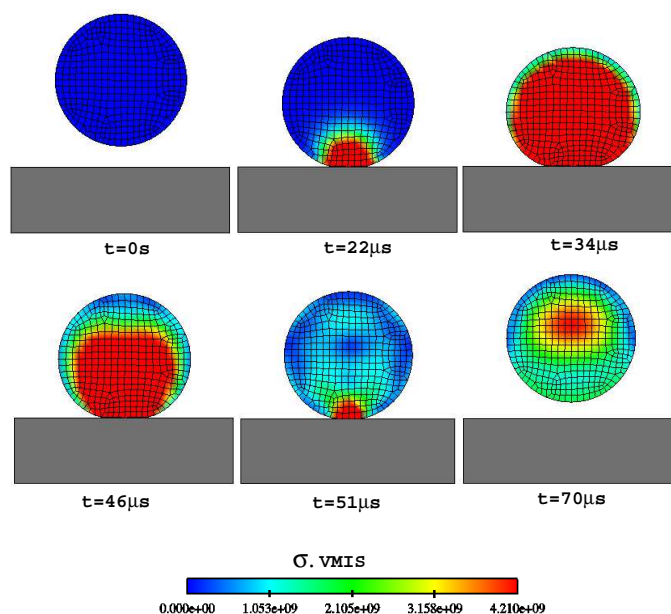


FIG. 5.11 – Déformées et contraintes de von-Misès dans le cylindre

- Limite d'élasticité $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$, et pente de la droite du comportement plastique est $E_t = 100 \text{ MPa}$.

Pour le cas avec frottement, nous considérons un coefficient de frottement $\mu = 0.25$. La dynamique est intégrée par la formulation en vitesse et par la formulation classique en déplacement avec des paramètres de Newmark $\beta = 0.4$ et $\gamma = 0.7$ (donnant un schéma dissipatif).

Les champs de déplacement, vitesse et multiplicateur de contact au pied de la barre du cas sans frottement sont donnés sur la figure 5.13. Pour le cas avec frottement, nous présentons sur la figure 5.15 l'évolution au cours du temps du semi-multiplicateur du frottement en quelques points de la zone de contact. La déformée et les contraintes de von-Misès dans la barre, calculées en des instants choisis, sont données sur les figures 5.12 (sans frottement) et 5.14 (avec frottement). Nous remarquons que les champs de déplacements, vitesses au niveau de la zone de contact respectent bien les conditions du contact persistant et que la pression de contact obtenue par notre formulation est plus régulière que celle obtenue par la formulation en déplacement et une intégration en temps par le schéma de Newmark.

Les trois derniers exemples illustrent bien l'intérêt de la formulation en vitesse dans l'intégration d'une dynamique en présence d'impacts. L'avantage de cette formulation par rapport aux formu-

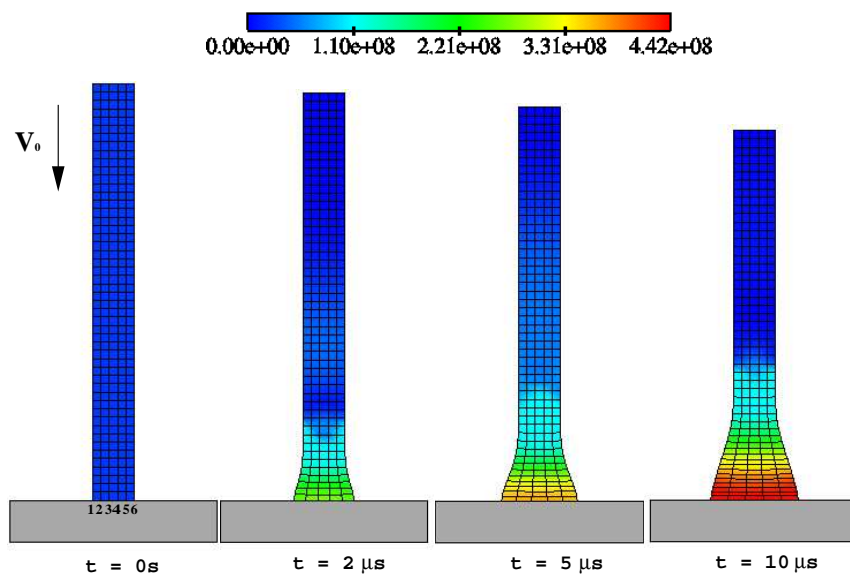


FIG. 5.12 – *Impact de la barre de Taylor (sans frottement) : déformées et iso-valeurs de von-Mises*

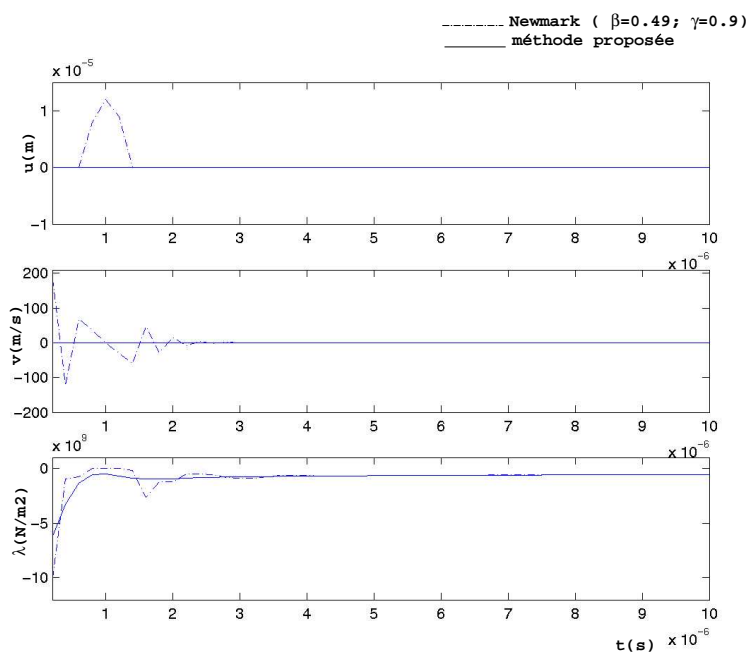


FIG. 5.13 – *Impact de la barre de Taylor (sans frottement) : Valeurs au pied de la barre du déplacement, vitesse et pression de contact en fonction du temps*

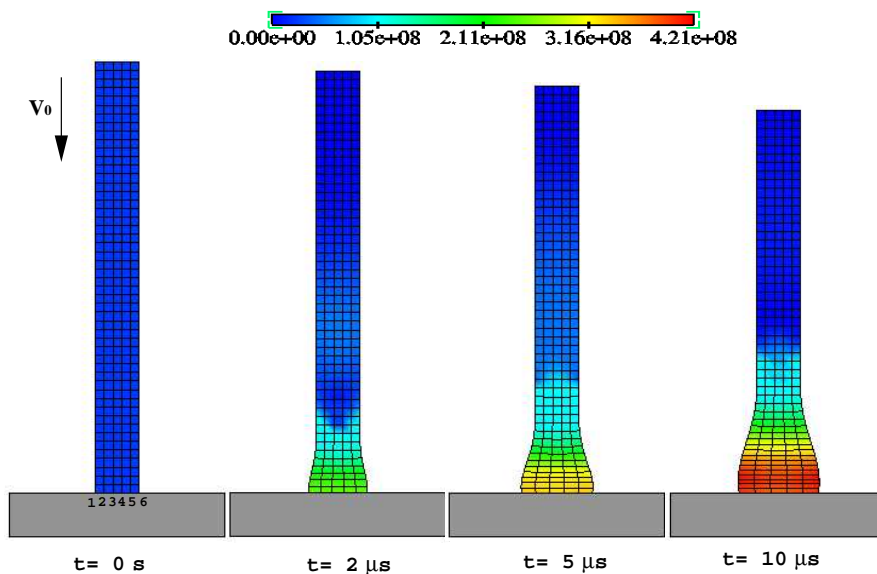


FIG. 5.14 – Impact de la barre de Taylor (avec frottement) : déformées et contraintes de von-Misès

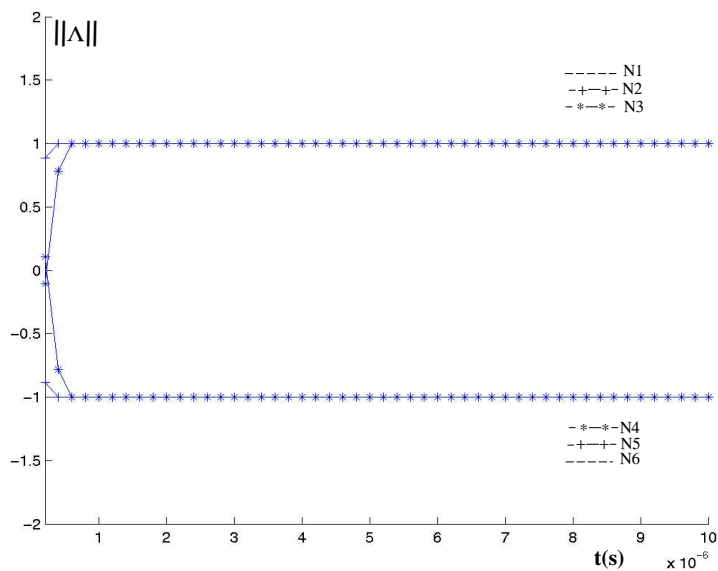


FIG. 5.15 – Impact de la barre de Taylor (avec frottement) : Valeurs du semi-multiplicateurs de frottement Λ aux points de contact en fonction du temps

lutions classiques est que les champs mécaniques au niveau de la zone de contact ne présentent plus d'oscillations numériques (non physiques) pendant la phase d'impact et ce sans recours à des traitements *a posteriori* des résultats numériques.

5.3 Multi-échelle

Cette section est consacrée à l'illustration de l'intérêt de la prise en compte de l'aspect multi-échelle dans les problèmes de contact-impact. Deux points sont éclairés : le modèle d'interface multi-niveau et l'approche Arlequin en dynamique.

5.3.1 Modèle multi-niveau

Dans ce paragraphe, nous revenons sur le modèle d'interface multi-niveau. Nous considérons l'impact d'une bille (en déformation axi-symétrique et de même propriétés mécaniques que le cylindre, présenté précédemment) sur un plan rigide (figure 5.16). A travers cet exemple, nous montrons l'apport du modèle proposé à l'intégration d'une dynamique en présence d'impacts. Les résultats donnés par ce modèle sont comparés à ceux donnés par le modèle de Signorini (figure 5.17).

Les paramètres du modèle d'interface (pour une taille d'aspérités de $1mm$) sont :

- $m_n = 2$
- $\kappa_n = 5 \cdot 10^{13}$
- $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6} s$
- $c_n = 0$

5.3.2 Modélisation par l'approche Arlequin

Pour illustrer l'intérêt de l'approche Arlequin dans le traitement des problèmes de contact en dynamique, nous reconsidérons l'exemple de l'impact de Taylor.

Nous avons vu que les champs mécaniques au voisinage de la zone de contact de la barre de Taylor subissent de fortes variations. Les maillages grossiers ne permettent pas tous seuls de capter ces variations (figure 5.18 (a)). Nous optons pour une modélisation par l'approche Arlequin. Nous superposons un modèle fin, au voisinage de la zone de contact, à un modèle grossier. Les deux modèles sont raccordés par l'approche Arlequin "loin" des zones critiques (le poids est mis

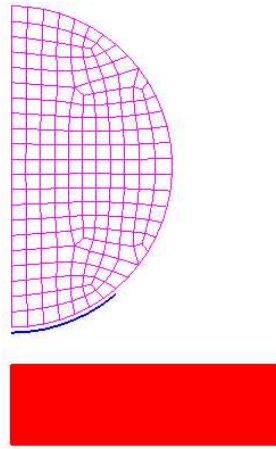


FIG. 5.16 – Impact d'une bille en axi-symétrique sur un bloc rigide

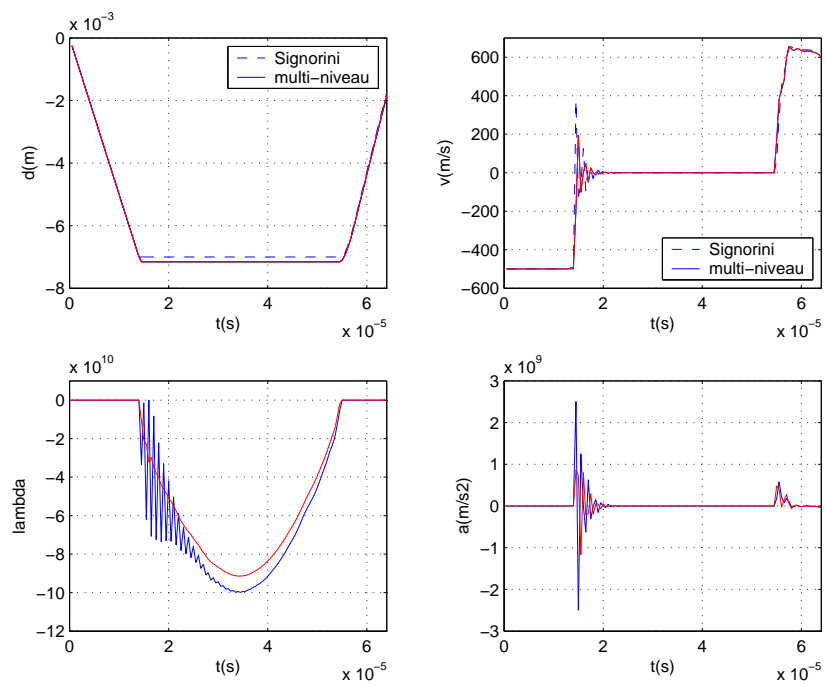


FIG. 5.17 – Résultats de l'impact d'une bille par un modèle d'interface multi-niveau

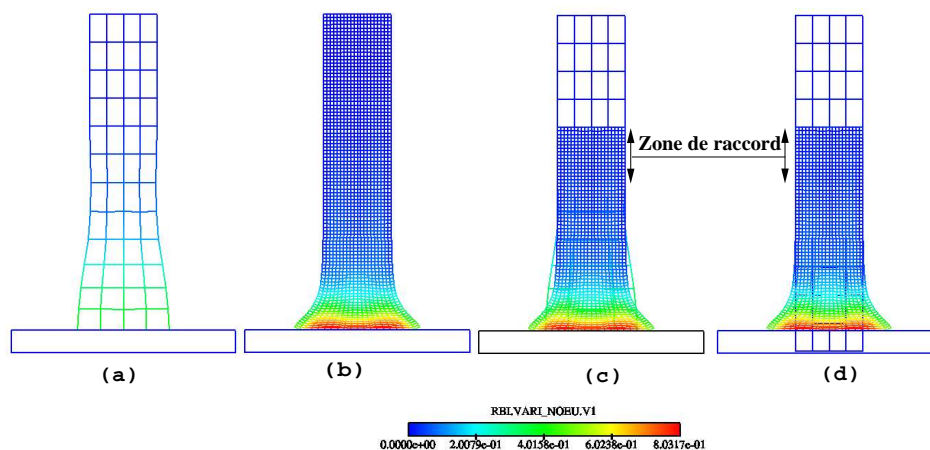


FIG. 5.18 – déformation plastique cumulée

sur le modèle local fin). Nous permettons aux deux modèles précédents, soit des comportements similaires (élastoplastiques) (figure 5.18 (c)) ou des comportements différents : comportement élastoplastique pour le modèle fin et comportement élastique pour le modèle grossier (figure 5.18 (d)). Nous avons le choix d'imposer le contact soit aux deux modèles soit uniquement au modèle fin (choix le plus intéressant, en pratique).

Les résultats obtenus par ces modélisations (déformation plastique cumulée) sont comparés à ceux obtenus par une modélisation mono-modèle élastoplastique par un maillage grossier (figure 5.18 (a)) et un maillage fin (figure 5.18 (b)) dans toute la barre.

La modélisation par l'approche Arlequin (figure 5.18 (c) et (d)) donne les mêmes résultats qu'une modélisation mono-modèle élastoplastique sur un maillage fin dans toute la barre. Un de ses avantages est qu'elle permet de réduire le nombre total des DDL, tout en permettant une très grande flexibilité de modélisation : on peut ici imaginer que le modèle élastique numérique pré-existait à l'impact. On réduit ainsi non seulement le temps machine, mais surtout le temps homme.

5.4 Exemples industriels

Après les tests académiques, nous nous intéressons aux exemples industriels. Nous considérons deux cas qui ont motivés le lancement de cette thèse. Il s'agit de la descente des grappes dans les tubes guides et le contact-impact au sein des liaisons entre les crayons de combustibles et les

grilles de maintien.

5.4.1 Grappe de commande

Ce cas industriel permet d'étudier les phénomènes de contact-impact lors d'une descente d'une grappe de commande dans un tube guide (figure 5.19). Les formulations classiques programmées dans *Code_Aster* présentent des oscillations numériques importantes des champs de vitesses et des forces de contact. L'utilisation de la formulation en vitesse permet de les filtrer, donnant ainsi des informations plus stables pour l'évaluation de l'usure de ces composants industriels. A titre d'illustration, nous visualisons des champs mécaniques en quelques points des zones potentielles de contact d'une grappe de commande (figure 5.20).

5.4.2 Crayon de combustible et grille de maintien : une première perspective

Dans cette problématique, les phénomènes de contact-impact se manifestent au niveau des liaisons entre un crayon de combustible et les grilles de maintien. Étant donné le caractère multi-échelle en espace et en temps de ce problème, nous avons utilisé deux modèles éléments finis différents. Localement, au voisinage d'une grille de maintien, nous avons utilisé une modélisation EF 3D. Loin de cette zone critique, nous avons utilisé une modélisation par éléments finis de poutre de Timoschenko. Les deux modèles ont été raccordés, par un raccord surfacique 3D-poutre [89]. Des chargements périodiques ont été appliqués aux crayons. Nous analysons l'évolution des champs cinématiques en quelques points du maillage 3D en contact potentiel, donnés par les formulations en déplacement et la formulation en vitesse. Ces résultats sont représentés sur la figure 5.21.

Contrairement à la formulation en déplacement, celle en vitesse donne des champs de vitesses sur la zone de contact sans oscillations numériques.

Pour ce cas industriel important; même si nous n'avons pas complètement exploité les résultats numériques, il nous semble que le raccord "volumique", inhérent à la méthode Arlequin, devrait permettre d'éviter le piégeage des ondes de hautes fréquences dans la zone impactée. Ce point est éclairé dans la dernière section qui suit.

5.4.3 Intérêt de l'approche Arlequin en présence de hautes fréquences

Les problèmes de vibrations sous contact génèrent des réponses très riches en fréquences (H.F.). L'utilisation des raccords classiques (aux niveaux des interfaces) font piéger les hautes fréquences

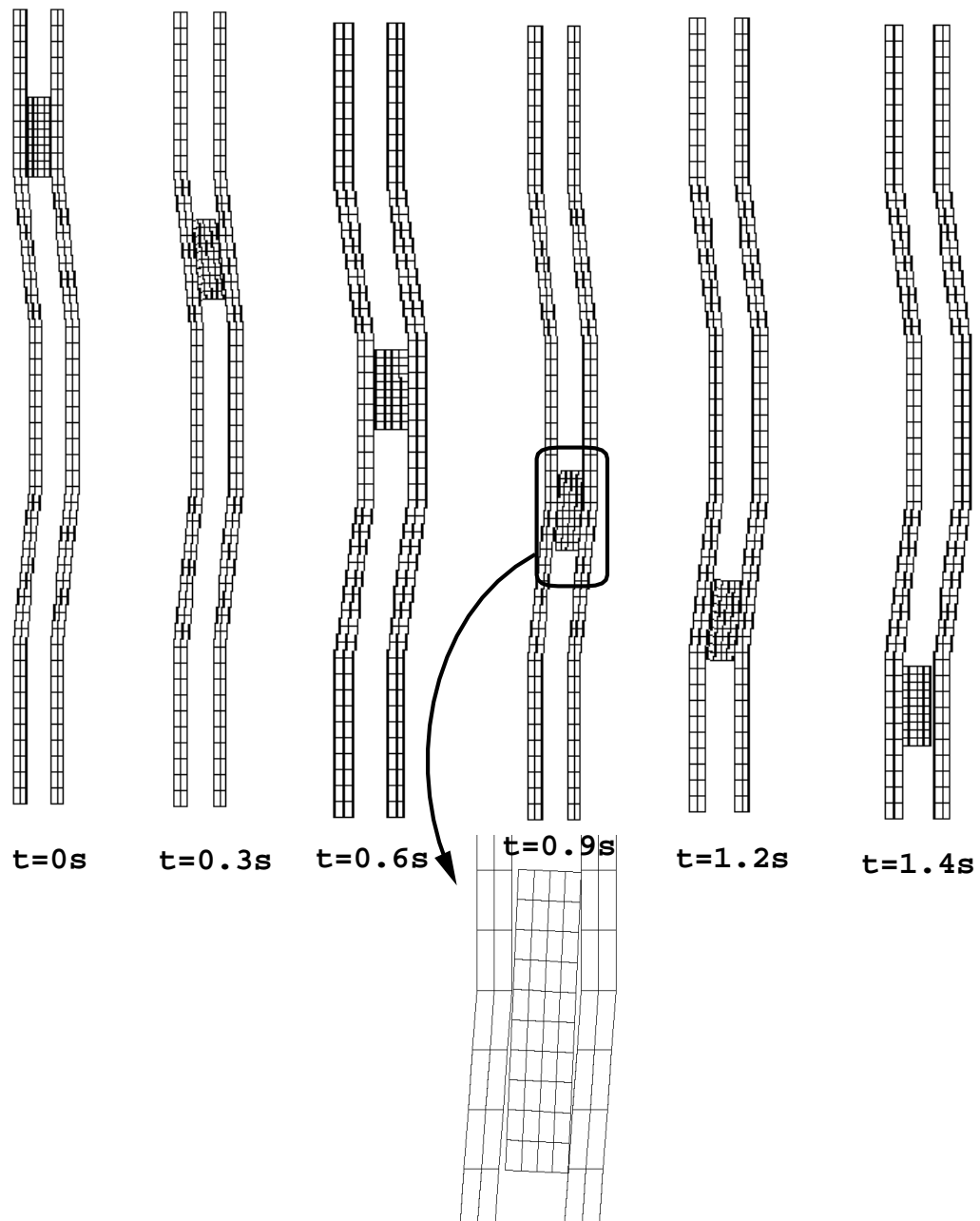


FIG. 5.19 – *Déscente d'une grappe de commande dans un tube guide : déformées des instants choisis*

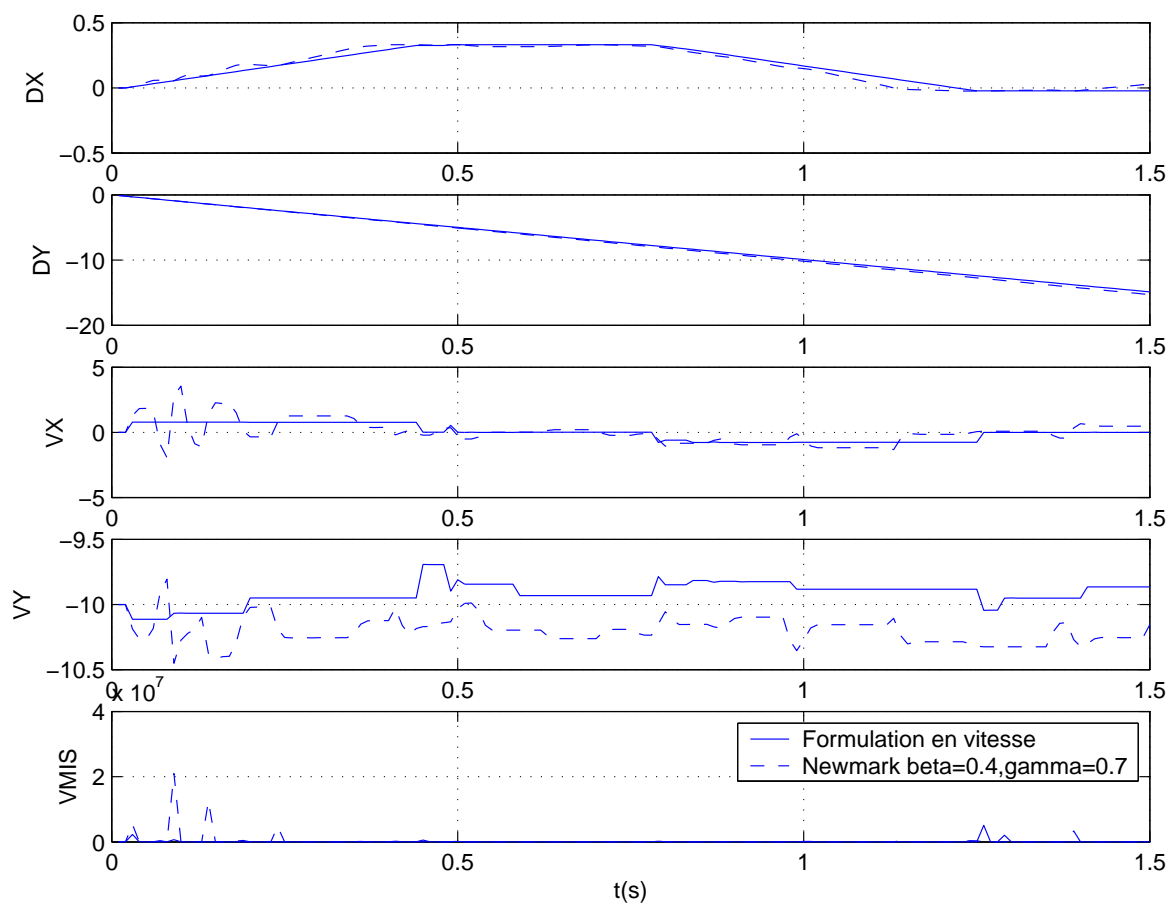


FIG. 5.20 – Valeurs des champs de déplacements, vitesses et contraintes de von-Misès en une extrémité de la grappe en fonction du temps

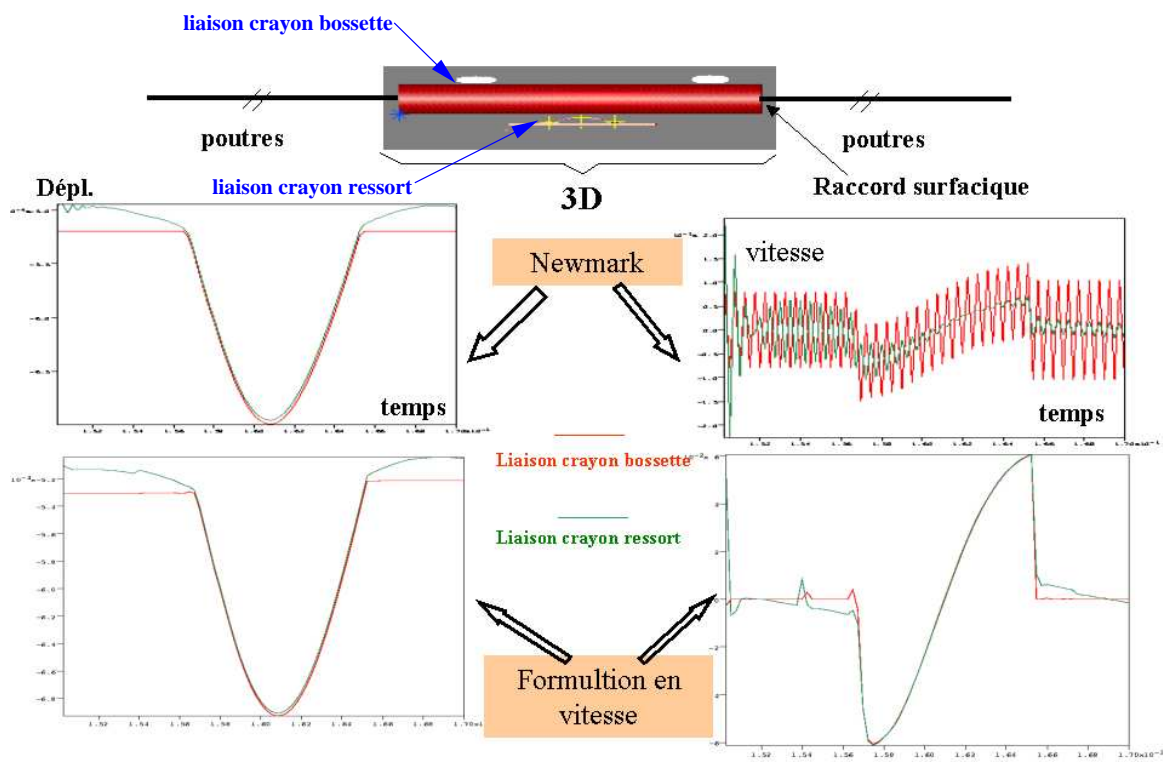


FIG. 5.21 – Crayon de combustible et liaisons de maintien

dans les modèles fins modifiants ainsi la solution aux voisinages des zones impactées. Pour illustrer ce phénomène, nous considérons un problème modèle d'une barre (figure 22.a) soumise à une de ses extrémités à une excitation riche en hautes fréquences (cf. [104, 111]). Au voisinage de cette zone, on utilise un modèle fin (pour capter les H.F.) raccordé plus loin à un modèle grossier. Nous représentons les résultats obtenus par une approche classique reposant sur un raccord surfacique (raccord ponctuel dans notre cas). Ces résultats montrent les limites de ces approches. En effet, en utilisant un raccord surfacique, les H.F. sont piégées dans le modèle fin (figure 5.22 (c)). En revanche, grâce à un raccord Arlequin (en "volume"), offrant la possibilité de "tuer" les hautes fréquences lors de la transmission en volume (figure 5.22 (b)), les H.F. sont filtrées après avoir parcouru le modèle fin. Dans le cas présent, nous avons utilisé (dans la zone de raccord) un schéma HHT et ailleurs un schéma de Newmark conservatif pour ne pas filtrer les basses fréquences. Les résultats (figure 5.22 (d)) montrent une transmission "propre" de l'information du modèle fin au modèle grossier.

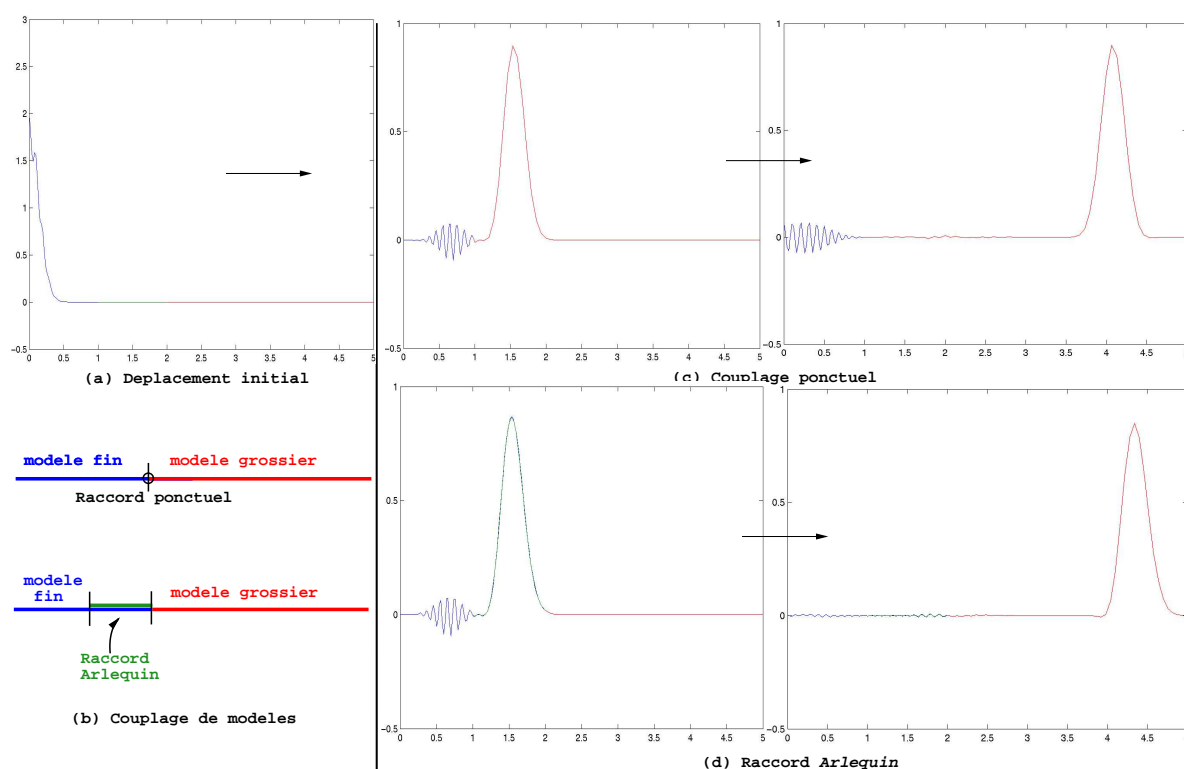


FIG. 5.22 – Intérêt du raccord Arlequin en présence de H.F.

5.5 Conclusion

Les exemples numériques présentés dans ce chapitre nous semblent éclairer la pertinence des différents points introduits dans le cadre de ce travail (et répondant à l'exigence de qualité dans *Code_Aster*). D'autres exemples et applications industrielles utilisant les formulations proposées ont été réalisés ou sont en cours de réalisation.

Conclusions et perspectives

Ce document est une contribution au calcul numérique des problèmes de contact-impact. Nous y avons abordé les points qui suivent.

1. À partir d'une écriture en "équations" des lois locales de contact, une formulation lagrangienne stabilisée pour les problèmes de contact a été dérivée. Cette formulation permet de généraliser les formulations lagrangienne classique et lagrangienne augmentée, clarifiant ainsi l'intérêt des paramètres d'augmentation et unifiant les implémentations numériques.
2. Une formulation continue, hybride, faible-forte, inspirée des travaux de Moreau et Jean et adaptée aux problèmes d'impact, a été proposée. Elle repose sur une écriture en "équations" des lois de Signorini-Moreau, moyennant l'usage de champs de signes. La dérivation des éléments de contact-impact a permis de pallier les difficultés d'intégration en temps/espace des formulations classiques.
3. Une famille de modèles de contact multi-niveau de type local/global, fondée sur la superposition d'un modèle de Signorini à un modèle de compliance, a été introduite. Les premiers tests numériques montrent que ce modèle permet une certaine approche de la réalité physique du contact, tout en atténuant significativement des écueils numériques de type oscillations parasites ou mauvais conditionnement.
4. L'approche Arlequin a été appliquée aux problèmes multi-échelles (en espace) de contact en dynamique. La flexibilité de cette approche et ses intérêts par rapport aux approches utilisant des raccords surfaciques ont été étayés. Citons par exemple son avantage à faire transiter des ondes entre modèles/échelles différents, sans piéger l'énergie au niveau des modèles/échelles fins par réflexions parasites, cet aspect étant important pour la simulation numérique des structures sous impacts.

D'autres points, non abordés dans ce document, apparaissent comme des perspectives. Nous mentionnons tout particulièrement :

- i.* la prise en compte de l'aspect multi-échelle en temps dans le traitement des problèmes d'impact : utilisation (dans le cadre Arlequin) de schémas d'ordre peu élevé aux voisinages des zones d'impact et d'autres d'ordre supérieur loin de ces zones critiques, évitant la dispersion numérique.
- ii.* l'usage de méthodes de type PML pour un traitement avancé des transmissions sans réflexions, dans le cadre Arlequin.
- iii.* l'extension des développements réalisés jusqu'à présent entre les solides 2-D ou 3-D à des problèmes de contact-impact entre structures hétérogènes. Ce point constitue l'un des objectifs d'une thèse en cours.

Annexe 1

Impact de deux barres

Dans cette annexe, nous détaillons le calcul de la solution analytique du problème d'impact entre deux barres élastiques et identiques, soumises à deux vitesses initiales opposées en sens et égales en modules. La résolution est faite par une approche se fondant sur la propagation des ondes.

Étant donnée la symétrie du problème considéré, nous résolvons le problème de l'impact d'une seule barre sur un plan rigide (figure 5.23).

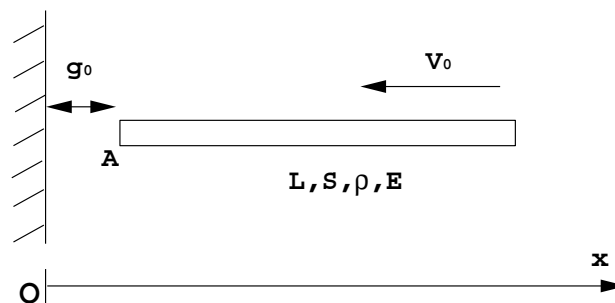


FIG. 5.23 – Impact d'une barre sur un plan rigide

Nous procédons la résolution de ce problème par étape :

- Etape 1 : vol libre: toute la barre est soumise à une vitesse v_0 .
- Etape 2 : la barre est en contact persistant.
- Etape 3 : la barre décolle. Elle n'est plus en contact.

Soit l'équation du mouvement d'une poutre en traction-compression, soumise à une force f localisée au point A.

$$\rho S \ddot{u} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t) \quad (5.1)$$

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$. La transformée de Laplace de la réponse est donnée par (cf. [53]) :

$$u(x,p) = F(p) \left[\frac{c}{pES} \frac{\cosh \frac{p}{c}(L-x)}{\sinh \frac{pL}{c}} \right] \quad (5.2)$$

où c est la vitesse de propagation des ondes de compression, donnée par :

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (5.3)$$

En particulier, la vitesse du point A est donnée en transformée de Laplace par :

$$\ell(\dot{u}(0,t)) = F(p) \frac{c}{ES} \coth \frac{pL}{c} \quad (5.4)$$

En posant $\tau = \frac{2L}{c}$, on obtient :

$$\ell(\dot{u}(0,t)) = F(p) \frac{c}{ES} \frac{1 + e^{-\tau p}}{1 - e^{-\tau p}} \quad (5.5)$$

En faisant un développement limité de $\frac{1}{1 - e^{-\tau p}}$, nous obtenons :

$$\ell(\dot{u}(0,t)) = F(p) \frac{c}{ES} (1 + e^{-\tau p}) (1 + e^{-\tau p} + e^{-2\tau p} + \dots) \quad (5.6)$$

La transformée de Laplace inverse donne :

$$\dot{u}(0,t) = \frac{c}{ES} (f(t) + 2f(t - \tau) + 2f(t - 2\tau) + \dots) \quad (5.7)$$

Si l'on considère le problème de la réponse à $f(t)$ d'une poutre en mouvement uniforme $-v_0$ à l'instant initial, on a :

$$\dot{u}(0,t) = -v_0 + \frac{c}{ES} (f(t) + 2f(t - \tau) + 2f(t - 2\tau) + \dots) \quad (5.8)$$

Ecrire le choc en A sur la paroi rigide revient à imposer $\dot{u}(0,t) = 0$ aussi longtemps que la poutre reste en contact avec la paroi, c'est à dire que la force $f(t)$ reste positive :

- Pour $0 < t < \tau$

$$\dot{u}(0,t) = -v_0 + \frac{c}{ES}f(t) = 0 \quad \text{donc} \quad f(t) = \frac{ESv_0}{c} > 0 \quad (5.9)$$

- Pour $\tau < t < 2\tau$

$$\dot{u}(0,t) = -v_0 + \frac{c}{ES}(f(t) + 2\frac{ESv_0}{c}) = 0 \quad \text{donc} \quad f(t) = -\frac{ESv_0}{c} < 0 \quad (5.10)$$

Dans le premier intervalle, la poutre reste en contact. Dans le deuxième intervalle, il ne peut pas y avoir contact car la force est négative. Dans ce cas $f(t) = 0$ et $\dot{u}(0,t) = -v_0$.

La vitesse en un point d'abscisse x est donnée par :

$$\dot{u}(x,t) = -v_0 + \frac{c}{ES}(f(t - \tau_1) + f(t - \tau + \tau_1) + f(t - \tau - \tau_1) + f(t - 2\tau + \tau_1)...) \quad (5.11)$$

où $\tau_1 = \frac{x}{c}$.

Dans l'intervalle $[0, 2\tau]$ on :

$$f(t) = \frac{ES}{c}v_0[Y(t) - Y(t - \tau)] \quad (5.12)$$

où Y est la fonction échelon.

On a donc :

$$\dot{u}(x,t) = v_0 \left[-1 + Y(t - \tau_1) - Y(t - \tau + \tau_1) \right] \quad (5.13)$$

Donc, dans l'intervalle $[\tau, 2\tau]$, $\dot{u}(x,t) = v_0$; ce qui revient à dire que la poutre, après le choc, est animée d'un mouvement uniforme de translation. Il ne peut donc pas y avoir de second choc et la formule est valable pour $t \geq 2\tau$.

la solution (déplacement u , vitesse v et force de choc f_c) au niveau du point de contact A est donnée sur la figure 5.24.

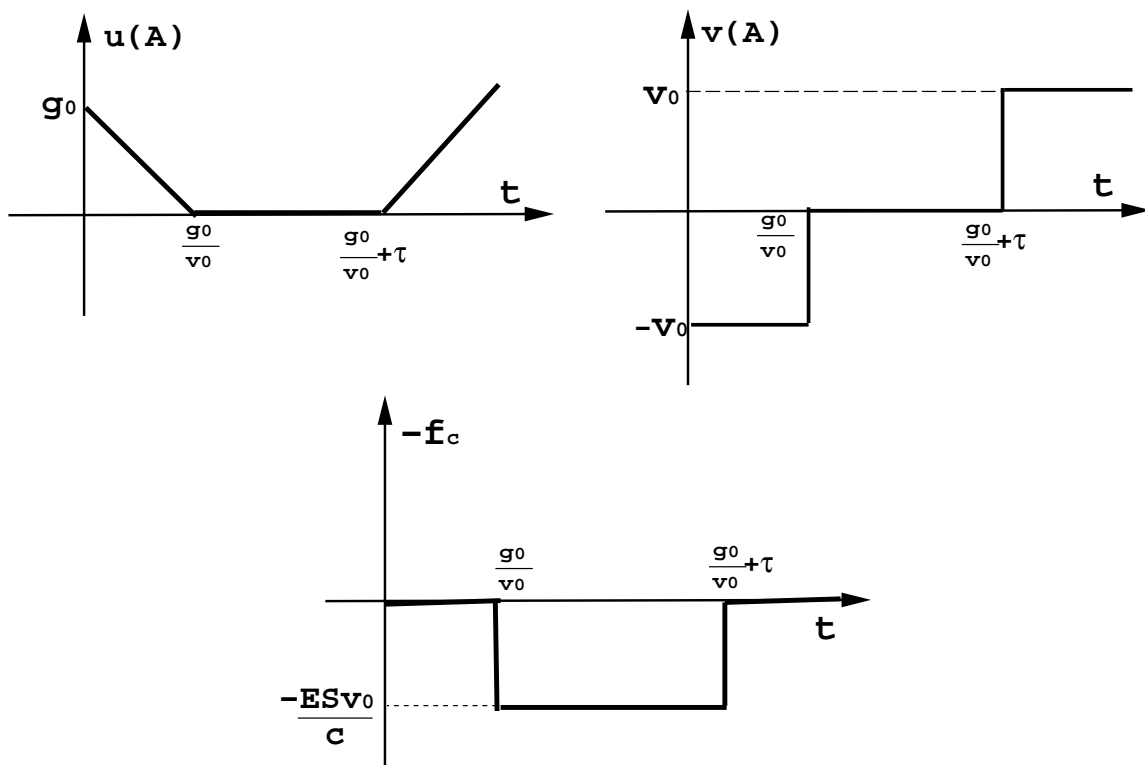


FIG. 5.24 – Déplacement, vitesse et force de contact au point A

Annexe 2

Stabilité du θ -schéma

Nous étudions ici la stabilité d'une variante du θ -schéma sur la base d'un système masse-ressort. Ce schéma nous a servi pour intégrer la dynamique en présence de contact.

Ecrire l'équation discrète de la dynamique; puis utiliser le θ -schéma donne :

$$ma^{k+1} + kx^{k+1} = 0 \quad (5.14)$$

$$x^{k+1} = x^k + \Delta t(1 - \theta)v^k + \Delta t\theta v^{k+1} \quad (5.15)$$

$$v^{k+1} = v^k + \Delta ta^{k+1} \quad (5.16)$$

$$x^0, v^0 \text{ sont connues et } a^0 \text{ calculé par (5.14)} \quad (5.17)$$

On a donc à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 + \theta\Omega^2 & 0 \\ 1 & -\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{k+1} \\ \Delta tv^{k+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^k \\ \Delta tv^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

où

$$\Omega^2 = \omega^2 \Delta t^2 \quad (5.19)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (5.20)$$

En posant $z = (x, \Delta tv)^T$ et en notant A la première matrice et $-B$ la deuxième matrice de l'équation (5.18) :

$$Az^{k+1} - Bz^k = 0 \quad (5.21)$$

ou encore

$$z^{k+1} = Hz^k \quad (5.22)$$

avec

$$H = A^{-1}B = \frac{1}{1 + \theta\Omega^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\Omega^2 & 1 - (1 - \theta)\Omega^2 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Les valeurs propres de la matrice H sont les racines du polynôme caractéristique suivant :

$$\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - (\operatorname{tr}H)\lambda + \det H \quad (5.24)$$

avec

$$\operatorname{tr}H = \frac{2 - (1 - \theta)\Omega^2}{1 + \theta\Omega^2} \quad (5.25)$$

$$\det H = \frac{1}{1 + \theta\Omega^2} \quad (5.26)$$

Pour assurer la stabilité du système précédent (5.18), il faut que le discriminant de l'équation (5.24) soit négatif (racines conjuguées) et que les modules des racines soient inférieurs à l'unité. Soit, respectivement :

$$|1 - \theta|\Omega \leq 2 \quad (5.27)$$

$$\theta \geq 0 \quad (5.28)$$

Les deux dernières équations sont appelées conditions de stabilité du schéma considéré, appelée dans ce document θ -schéma.

Remarquons que pour $\theta = 1$ le schéma est inconditionnellement stable.

Bibliographie

- [1] Adams R.A. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [2] Alart P. Méthode de newton généralisée en mécanique du contact. *J. Math. Pures Appl.*, 76:83–108, 1997.
- [3] Alart P., Curnier A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 9:353–375, 1991.
- [4] Armero F., Petocz E. Formulation and analysis of conserving algorithms for dynamic contact-impact problems. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 158:269–300, 1998.
- [5] Armero F., Petocz E. A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 179:151–178, 1999.
- [6] Aubry D., Vailhen C., Dressler B., Lucas D. Non-linear dynamic analysis of frictional contact between shells structures. *DYMAT München, Germany, octobre 10-11*, 1995.
- [7] Bathe K.J., Brezzi F. Stability of finite element mixed interpolation for contact problems. *Rend. Mat. Acc. Lincei*, 12(9):167–183, 2001.
- [8] Bathe K.J., Chaudhary A. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 21:65–88, 1985.
- [9] Belytschko T., Bathe K.J., Hughes T.J.R. *Computational Methods for Transient Analysis: Computational Methods in Mechanics; Mechanics and Mathematical Methods*. North-Holland, 1983.
- [10] Belytschko T., Moran B., Liu W.K. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons Inc, 2000.
- [11] Belytschko T., Neal M.O. Contact impact by pinball algorithm with penalty and lagrangian methods. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 31:547–572, 1991.
- [12] Ben Belgacem F. The mortar finite element method with lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 84:173–197, 1999.
- [13] Ben Dhia H. Modelling and solution by penalty duality method of unilateral contact problems. *Calcul des structures et intelligence artificielle*, 2:1–18, 1988.
- [14] Ben Dhia H. Modelling and numerical approach of contact and dry friction in simulation of sheet metal forming. In *WCCM2*, pages 779–782, 1990.
- [15] Ben Dhia H. Plaques en grandes transformations élastiques sous contact hyperélastique. *Colloque national en calcul des structures, 20-23 Mai*, I:465–470, 1997.

- [16] Ben Dhia H. Hyperelastic contact models with application to constrained large transformations plate problems. *Proc. fourth WCCM, Buenos Aires, Argentina, 29 Jun.- 2 Jul.*, 1998.
- [17] Ben Dhia H. Problèmes multi-échelles: la méthode arlequin. *C.R.Acad.Sc Série II*, 326:899–904, 1998.
- [18] Ben Dhia H. Numerical modelling of multiscale mechanical problems: the arlequin method. *ECCM'99 CD-ROM, München, Germany, August 31 -September 3*, 1999.
- [19] Ben Dhia H. Cours mécanique numérique 3ème année 2001/2002. *ECP*, 2001.
- [20] Ben Dhia H. Aspects géométriques numériques micro-macro des interfaces. In *Textes des contributions à la Journée thématique CSMA : Modèles et Lois d'Interface pour le Contact*, LMA-Marseille, 2003.
- [21] Ben Dhia H. Arlequin method: Practical impacts of the mathematical analysis. In Jaoua et al., editor, *TAMTAM05*, pages 301–308, ENIT-Tunis, 2005.
- [22] Ben Dhia H., Durville D. Calembour: An implicit method based on enriched kinematical thin plate model for sheet metal forming simulation. *J. of Materials Processing Technology*, 50:70–80, 1995.
- [23] Ben Dhia H., Massin P., Tardieu N., Zarroug M. Différents algorithmes pour des problèmes de contact frottement 2d et 3d en grands déplacements. *5ème Colloque national en calcul des structures, 15-18 Mai*, II:1081–1088, 2001.
- [24] Ben Dhia H., Rateau G. Mathematical analysis of the arlequin method. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser.*, 332:649–654, 2001.
- [25] Ben Dhia H., Rateau G. The arlequin method as a flexible engineering design tool. *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, 62:1442–1462, 2005.
- [26] Ben Dhia H., Torkhani M., Zammali C. Modèle d'interface multi-niveau pour les problèmes de contact. *7ème Colloque national en calcul des structures, 17-20 Mai*, 2005.
- [27] Ben Dhia H., Vautier I. Une formulation pour traiter le contact frottement en 3d dans le *code_aster*. *Rapport EDF HI-75/99/007/A*, 1999.
- [28] Ben Dhia H., Vautier I., Zarroug M. Problèmes de contact frottant en grandes transformations: du continu au discret. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 9:243–261, 2000.
- [29] Ben Dhia H., Zammali C. (*en préparation*).
- [30] Ben Dhia H., Zammali C. Level-sets and arlequin framework for dynamic contact. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13(5-7):403–414, 2004.
- [31] Ben Dhia H., Zammali C. Level-sets and mixed approaches for dynamic contact problems. In *ICTAM04*, Warsaw (Poland), September 15-22, 2004, 2004.
- [32] Ben Dhia H., Zammali C. A velocity and level-sets-based approach of dynamic contact problems with applications. In *WCCM VI*, Beijing (China), September 5-10, 2004.
- [33] Ben Dhia H., Zammali C. Multiscale analysis of impacted structures. In Ramm et al., editor, *the fifth international conference on computation of shell and spatial structures*, Slazburg (Austria), June 1-4, 2005.

- [34] Ben Dhia H., Zammali C. Une approche lagrangienne stabilisée pour les problèmes de contact. *7ème Colloque national en calcul des structures, 17-20 Mai, 2005.*
- [35] Ben Dhia H., Zammali C., Lamarche S. Formulation hybride du contact en dynamique et éléments bibliographiques. *Rapport EDF HI-62/02/030/A, 2002.*
- [36] Ben Dhia H., Zammali C., Voltaire F., Lamarche S. Modèles et schémas mixtes pour le contact en dynamique. *6ème Colloque national en calcul des structures, 20-23 Mai, II:385-392, 2003.*
- [37] Ben Dhia H., Zarroug M. Hybrid frictional contact particles-in elements. *Revue Européenne des Éléments Finis, 9:417-430, 2002.*
- [38] Carpenter N.J., Taylor R.L., Katona M.G. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *Int. J. Numer. Meth. Engng., 32:103-128, 1991.*
- [39] Chaudhary A., Bathe K.J. A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. *Computer & structures, 4(4):855-873, 1986.*
- [40] Chawla V., Laursen T.A. Energy consistent algorithms for frictional contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng, 42:799-827, 1998.*
- [41] Clarke F.H. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* Wiley, New York, 1983.
- [42] Cocu M. Existence of solutions of signorini problems with friction. *Int. J. Eng. Sci., 22:567-575, 1984.*
- [43] Combescure A., Gravouil A. A numerical scheme to couple subdomains with different time-steps for predominantly linear transient analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 191:1129-1157, 2002.*
- [44] Coorevits P., Hild P., Lhalouani K., Sassi T. Mixed finite element methods for unilateral problems: convergence analysis and numerical studies. *Mathematics of Computation, 71(237):1-25, 2000.*
- [45] Curnier A., Alart P. A generalized newton method for contact problems with friction. *J. Méc. Théor. Appl., 7:67-82, 1988.*
- [46] Dumont G. Algorithme de contraintes actives et contact unilatéral sans frottement. *Revue européenne des éléments finis, 4(1):55-73, 1995.*
- [47] Duvaut G., Lions J.L. *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, 1972.
- [48] Ekeland I., Temam R. *Convex analysis and variational problems.* North Holland, Amsterdam, 1976.
- [49] Fortin M., Glowinski R. *Les méthodes de Lagrangien augmentés.* Dunod, Paris, 1982.
- [50] Rateau G. *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles - applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées.* PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2003.
- [51] Géradin M., Rixen D. *Mechanical Vibrations: Theory and Applications to Structural Dynamics.* J. Wiley & Sons, New York, 1997.
- [52] Germain P. *Cours de mécanique des milieux continus.* Masson, 1975.
- [53] Gibert R.J. *Vibrations des structures: Interactions avec les fluides, sources d'excitation aléatoires.* Eyrolles, 1988.

- [54] Glowinski R., Lions J.L., Tremolieres R. *Analyse Numérique des inéquations variationnelles*. Dunod, Paris, 1976.
- [55] Goldsmith W. *Impact*. Cambridge University Press, 1960.
- [56] Hallquist J.O. Nike2d: A vectorized implicit, f.e code *Report UCID-19677*, University of California, 1986.
- [57] Hallquist J.O., Goudreau G.L., Benson D.J. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations. *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 51:107–137, 1985.
- [58] Haslinger J., Hlaváček I. Contact between elastic bodies -1. continuous problems. *Aplikace Matematiky*, 25:324–347, 1980.
- [59] He Q.C., Curnier A. Anisotropic dry friction between two orthotropic surfaces undergoing large displacement. *Eur.J.Mech., A/Solids*, 12(5):631–666, 1993.
- [60] Hertz H. Uber die berührung fester elastischer koerper (on the contact of elastic solids). *J. reine und angewandte Mathematik*, 92:156–171, 1882.
- [61] Hestenes M. Multiplier and gradient method. *J. Opt. Theorie and applications*, 4:303–320, 1969.
- [62] Hilber H.M., Hughes T.J.R., Taylor R.L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earth. Engrg. Struc. Dyna.*, 5:283–292, 1977.
- [63] Hughes T.J.R., Taylor R.L., Sackman J.L., Curnier A., Kanok-Nukulchai W. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 8:249–276, 1976.
- [64] Jean M. The non smooth contact dynamics method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 177:235–257, 1999.
- [65] Jean M., Moreau J.J. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. In Curnier A., editor, *Proc. Contact Mechanics Int. Symp.*, pages 31–48, 1992.
- [66] Jhonson C., Hansbo P. Adaptive finite element methods in computational mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 101:143–181, 1991.
- [67] Johnson K. L. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, U.K., 1987.
- [68] Ju J.W., Taylor R.L. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of nonlinear frictional contact problems. *Journal de mécanique théorique et appliquée, Special issu*, 1-7(1):1–14, 1988.
- [69] Kikuchi N., Oden J.T. Contact problems in elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods. *SIAM, Philadelphia*, 1988.
- [70] Klarbring A. Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization. *Eur.J.Mech., A/Solids*, 14(2):237–253, 1995.
- [71] Krstulovic-Opera L., Wriggers P., Korelec J. Symbolically generated 3d smooth polynomial frictional contact element based on the quadratic bézier surfaces. *Barcelone, ECCOMAS*, 2000.
- [72] Kulak R.F. Adaptive contact elements for three-dimensional explicit transient analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 72:125–151, 1989.

- [73] Lamarche S., Voltaire F., Ben Dhia H., Zammali C. Validation of contact-impact approaches for fem software. In Soize et al., editor, *the Sixth European Conference on Structural Dynamics (Eurodyn05)*, Paris (France), September 04-07, 2005.
- [74] Laursen T.A. *Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.
- [75] Laursen T.A., Chawla V. Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 40:863–886, 1997.
- [76] Laursen T.A., Love G.R. Improved implicit integrators for transient impact problems— geometric admissibility within the conserving framework. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 53:245–274, 2002.
- [77] Laursen T.A., Simo J.C. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibodies, large deformation frictional contact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 36:3451–3485, 1993.
- [78] Oden J.T. Lee C.Y. A posteriori error estimation of $h-p$ finite element approximations of frictional contact problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 113:11–45, 1994.
- [79] Love G.R., Laursen T.A. Improved implicit integrators for transient impact problems— dynamic frictional dissipation within an admissible conserving framework. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 192:2223–2248, 2003.
- [80] Zarroug M. *Eléments mixtes de contact frottant en grandes transformations et applications*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2002.
- [81] Massin P., Ben Dhia H. 2-d and 3-d algorithms for frictional problems with small displacements. *Barcelone, ECCOMAS*, 2000.
- [82] Millard A. Méthodes numériques en dynamique avec contact. *rapport CEA/DMT/LAMS*, 1998.
- [83] Moreau J.J. Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics. *In non smooth mechanics and application CISM courses and lectures*, 302:1–82, 1988.
- [84] Moreau J.J. Numerical aspects of the sweeping process. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 177:329–349, 1999.
- [85] Moreau J.J. Contact and friction in the dynamics of rigid body system. *Revue européenne des éléments finis*, 9:9–28, 2000.
- [86] Newmark N.M. A method of computation for structural dynamics. *ASCE J. of the Engineering Mechanics Division*, 85:67–94, 1959.
- [87] Oden J.T., Martins J.A.C. Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 52:527–634, 1985.
- [88] Parisch H. A consistent tangent stiffness matrix for three dimensional non-linear contact analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 28:1803–1812, 1989.
- [89] Pellet J. Raccord 3d-poutre. *Manuel de référence Code_Aster R3.03.03-A*, 1995.
- [90] Ciarlet P.G. *Mathematical Elasticity, Volume I: Three -Dimensional Elasticity*. North Holland, Amsterdam, 1988.

- [91] Pietrzak G., Curnier A. Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented lagrangian treatment. *Compu. Meth. Appl. Mech. Engin.*, 177:351–381, 1999.
- [92] Powell B.T. *A method for nonlinear constraints in minimization problems*. In Optimisation, R. Fletcher (eds), Academic Press, London, 1964.
- [93] Saxé G.D., Feng Z.Q. New inequality and functional for contact and friction : the implicit standard material approach. *Int. J. Mech. Strc. Eng.*, 9:301–325, 1991.
- [94] Sethian J.A. *Level-Set methods envolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision and materials science*. Cambridge University Press, 1996.
- [95] Sha D., Tamma K.K., Li M. Robust explicit computational developments and solution strategies for impact problems involving friction. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 39:721–739, 1996.
- [96] Signorini A. Sopra alcune questioni di elastostatica. *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.
- [97] Simo J.C., Laursen T.A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computer & structures*, 42:97–116, 1992.
- [98] Simo J.C., Miehe C. Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 98:41–104, 1992.
- [99] Simo J.C., Tarnow N., Wong K. K. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 100:63–116, 1998.
- [100] Simo J.C., Wriggers P., Taylor R.L. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*, 50:163–180, 1985.
- [101] Laursen T.A. *Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems Using Finite Elements*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1992.
- [102] Taylor R.L., Papadopoulos P. On the finite element method for dynamic contact/impact problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 36:2123–2140, 1993.
- [103] Vola D., Pratt E., Jean M., Raous M. Consistent time discretisation for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques. *Revue européenne des éléments finis*, 7(1-3):149–162, 1998.
- [104] Wagner G.J., Liu W.K. Coupling of atomistic and continuum simulations using a bridging scale decomposition. *J. of Computational Physics*, 190:249–274, 2003.
- [105] Wohlmuth B. *Discretization methods and iterative solvers on domain decomposition*. Springer, 2001.
- [106] Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. J. Wiley & Sons, New York, 2002.
- [107] Wriggers P., Scherif O. Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems. *Mathl. Comput. Modelling*, 28(4-8):437–447, 1998.
- [108] Wriggers P., Simo J.C. A note on tangent stiffness for fully non-linear contact problems. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 1:199–203, 1985.
- [109] Wriggers P., Van T. vu, Stein E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers & Structures*, 37:319–331, 1990.

- [110] Wronski M., Jean M. Some computational aspects of structural dynamics problems with frictional contact. In Raous et al., editor, *CMIS*, 1992.
- [111] Xiao S.P., Belytschko T. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Compu. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 193:1645–1669, 2004.
- [112] Zhong Z.H. *Finite element procedure for Contact-Impact Problems*. Oxford University Press, 1993.