Sur l'approximation des coubures des courbes planes et des surfaces lisses de $\mathbb{E}^3$.

Fabrice ORGERET

16 septembre 2007

Remerciements

Tout d'abord, je remercie vivement Jean-Marie Morvan qui a accepté de diriger mes recherches pendant ces quatre années de thèse. Ses conseils bienveillants et son expérience m'ont beaucoup apporté. Je remercie également sincèrement Vincent Borrelli, qui a co-encadré toutes mes recherches, pour ses conseils fructueux et sa disponibilité. Bien qu'ils aient eu des visions un peu différentes sur la manière dont il fallait traiter le sujet, cela m'a permis d'avoir des points de vue plus variés et de faire une synthèse plus personnelle.
Je remercie aussi tout particulièrement Michel Boyom et Fernand Pelletier pour l'honneur qu'ils me font d'avoir accepté de rapporter mes travaux.
Je remercie également Georges Zafindratafa et Raphaelle Chaine pour avoir fait partie de mon jury.
Leurs remarques sur mes travaux m'ont donné des pistes pour généraliser les résultats de cette thèse à des structures plus complexes comme les sous-variétés riemaniennes de dimension supérieures à 3, les espaces feuilletés.
J'ai eu beaucoup de plaisir à travailler à l'Institut Camille Jordan. Je remercie toutes les personnes qui y travaillent et particulièrement l'équipe de géométrie : Stéphane Lamy, Alexis Tchoudem, Damien Gayet.
Et bien sûr, je remercie les six thésards avec qui j'ai commencé ma thèse et qui ont contribué à mettre une bonne ambiance dans le bureau 111a : Nicolas Chevrot, Antoine Flattot, Ewan Delanoy, Pierre Bousquet, Christophe Jaloux et Lucas Fresse.

Table des matières

Introduction

Le but de cette thèse est l'étude de l'approximation des courbures en un point d'une sous-variété lisse. Les sous-variétés que nous étudierions seront soit des courbes planes, soit des surfaces de $\mathbb{E}^3$, l'espace euclidien de dimension 3. Pour approcher la courbure en un point de la sous-variété, on utilisera le *défaut angulaire*, qui dépend à la fois de la sous-variété et d'approximations linéaires de celle-ci que l'on appelera *maillage* . Dans le cadre des surfaces de $\mathbb{E}^3$, on a longtemps cru qu'il suffisait de normaliser le défaut angulaire pour obtenir une approximation de la courbure de Gauss en un point d'une surface. Dans un article publié en 2003 ([9]), il a été prouvé que le défaut angulaire normalisé approche une quantité extrinsèque qui est un polynôme homogène de degré 2 dont les variables sont les courbures principales et dont les coefficients dépendent du nombre de points du maillage. Nous donnerons ici un majorant de l'erreur entre ce polynôme homogène et le défaut angulaire normalisé. Ce majorant dépend du jet d'ordre 1 des courbures de la sous-variété, de l'*épaisseur*, du nombre de points du maillage et surtout de sa taille. Pour certaines *familles de maillages réguliers*, nous donnerons une majoration de l'erreur entre le défaut angulaire normalisé et ce polynôme homogène en $O(\rho)$ lorsque la taille des maillages est en $O(\rho)$.

0.1 Rappels de résultats antérieurs

0.1.1 Cas des courbes

Soit Γ une courbe lisse et P, P_1, P_2 trois points de Γ. On note $k(P)$ la courbure de Γ en P, $\eta_i = |\overrightarrow{PP}_i|$ $(i = 1, 2)$, $\gamma = \angle(\overrightarrow{PP}_1, \overrightarrow{PP}_2)$, $\overline{\eta} = \dfrac{\eta_1 + \eta_2}{2}$. On a le résultat suivant :

– si $\eta_1 = \eta_2 = \eta$:

$$\frac{\pi - \gamma}{\eta} = k(P) + o(\eta),$$

– si $\eta_1 \neq \eta_2$:
$$\frac{\pi-\gamma}{\overline{\eta}} = k(P) + o(1).$$

0.1.2 Cas des surfaces

Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{E}^3$ une surface régulière de classe C^2.

Cas discret

Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n > 2)$ et $P, P_1, \ldots P_n$, $n+1$ points de Σ. Pour $i = 1, \ldots n$, on note $\eta_i = |\overrightarrow{PP}_i|$ et $\gamma_i = \angle(\overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1})$. On définit deux courbures discrètes :

– on note :
$$k_d = \frac{2\pi - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i}{A},$$
où
$$A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Aire}(\mathrm{PP_iP_{i+1}}),$$
est la moyenne des aires des triangles PP_iP_{i+1},

– on note :
$$\tilde{k}_d = \frac{2\pi - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i}{S_n},$$
où
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\sin\gamma_i}\left(\eta_i\eta_{i+1} - \frac{1}{2}\cos\gamma_i(\eta_i^2 + \eta_{i+1}^2)\right),$$
est le *module* du maillage.

Cas lisse

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :
$$\kappa_1(x) = -2\cos^2 x - \cos x + 3, \qquad \kappa_2(x) = \cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}.$$
Notons k_M et k_m les courbures principales de Σ en P. Un polynôme homogène de degré 2 en k_M et k_m va fréquemment intervenir dans la partie qui concerne les surfaces :
$$k(k_M, k_m) = \frac{n}{8\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\left(\kappa_1(\frac{2\pi}{n})k_M k_m + \kappa_2(\frac{2\pi}{n})(k_M^2 + k_m^2)\right).$$

Pour simplifier, on notera k à la place de $k(k_M, k_m)$.

Un résultat de convergence utilisant k_d.

Le résultat suivant se trouve dans [9] : soit

$$\pi : \Sigma \to T_P\Sigma,$$

la projection orthogonale sur le plan tangent en un point P de la surface. On suppose que pour tout $i = 1, \dots n$, le point P vérifie les deux conditions ci-dessous :

1. $|\overrightarrow{P\pi(P_i)}| = \eta$,
2. $\angle(\overrightarrow{P\pi(P_i)}, \overrightarrow{P\pi(P_{i+1})}) = \dfrac{2\pi}{n}$.

Alors, on a pour tout $n \neq 4$:

$$k_d = k + \epsilon(\eta),$$

où $\epsilon(\eta)$ tend vers 0 lorsque η tend vers 0. Une des motivations de cette thèse va être de donner un majorant de l'erreur $|k_d - k|$.

Un résultat d'approximation utilisant $\tilde{k}_d$.

Le résultat suivant se trouve dans [9] : soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 2)$. Soit Σ une surface régulière de classe C^2 et P un point de Σ. On cherche à approximer la courbure de Gauss K de Σ en P. On définit une suite de maillages autour de P,

$$(P, P_1(m), \dots, P_n(m))_{m\in\mathbb{N}},$$

tels que pour tout $i = 1, \dots n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P_i(m) \in \Sigma.$$

On suppose que :

1. Il existe deux constantes $\gamma_{\min}$ et $\gamma_{\max}$ telles que $\forall i$, $\forall m$, on a :
$$0 < \gamma_{\min} \leq \gamma_{m_i} \leq \gamma_{\max},$$
où
$$\gamma_{m_i} = \angle(\overrightarrow{PP}_i(m), \overrightarrow{PP}_{i+1}(m)),$$
2. il existe $d_1 > 0$ et $d_2 > 0$ tels que $\forall m$, on a :
$$d_1 \leq \frac{\sup_i \eta_{m_i}}{\inf_i \eta_{m_i}} \leq d_2,$$
où
$$\eta_{m_i} = |\overrightarrow{PP}_i(m)|.$$

Alors, il existe une constante $\mathcal{C} > 0$ telle que :

$$\limsup_m \left|\tilde{k}_d(m) - K\right| \leq \frac{n\mathcal{C}}{2\sin\gamma_{\min}} \left((k_M - k_m)^2 + |k_M^2 - k_m^2|\right),$$

où k_M et k_m sont les courbures principales de Σ en P,

$$\tilde{k}_d(m) = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^n \gamma_{m_i}}{S_{m_n}},$$

et

$$S_{m_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\sin\gamma_{m_i}} \left(\eta_{m_i}\eta_{m_{i+1}} - \frac{\cos\gamma_{m_i}}{2}(\eta_{m_i}^2 + \eta_{m_{i+1}}^2)\right),$$

est le *module* du maillage $(P, P_1(m), \ldots, P_n(m))$.

0.2 Résumé des principaux résultats de cette thèse

Le cadre géométrique de cette thèse est le plan euclidien $\mathbb{E}^2$ pour le premier chapitre et l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ pour les chapitres suivants.

0.2.1 Courbes

Chapitre 1

Il est bien connu que l'on peut approcher la courbure $k_\Gamma(P)$ en un point P d'une courbe lisse Γ en utilisant deux points $P_1, P_2 \in \Gamma$ proches de P et le défaut angulaire :

$$\pi - \angle(\overrightarrow{PP}_1, \overrightarrow{PP}_2).$$

Nous allons donner une majoration de l'erreur lorsqu'on approche la courbure lisse $k_\Gamma(P)$ de la courbe Γ en P par la courbure discrète $k_d^\Gamma(P)$ (voir la Définition 1) définie à l'aide de P, P_1 et P_2. Plus précisément, nous montrons en (1.1) l'inégalité :

$$\left|k_d^\Gamma(P) - k_\Gamma(P)\right| \leq 2\Omega_\Gamma(P)^3 \left(\frac{k_{\max}^3}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Gamma(P)\right)\eta_{\max}, \qquad (1)$$

où

$$\eta_{\max} = \max(|\overrightarrow{PP}_1|, |\overrightarrow{PP}_2|),$$

et les autres quantités qui interviennent dépendent du jet d'ordre 1 de la courbure de Γ ($k_{\max}$, $k'_{\max}$) ou de la géométrie de la courbe (voir la Définition 3).

0.2.2 Surfaces

Nous utilisons le Chapitre 1 pour obtenir des majorations du même type mais dans le cadre des surfaces. Soit Σ une surface régulière de classe C^2 au moins. Nous cherchons à obtenir des informations sur les courbures principales de Σ au point P. Nos estimateurs discrets sont des maillages $\{(P, P_1, \ldots, P_n)\} \subseteq \Sigma^{n+1}$ qui sont des approximations linéaires par morceaux de la surface (voir la Définition 6).

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous cherchons à approcher la courbure de Gauss K de la surface Σ au point P. Nous donnons sous certaines hypothèses (voir le Corollaire (2.4)) une estimation d'erreur de la forme :

$$\left|\tilde{k}_d - K\right| \leq \frac{Mk_{\max}^2}{\Theta|S_n|}\eta_{\max}^2, \tag{2}$$

où

$$\eta_{\max} = \max_{i=1}^{n} |\overrightarrow{PP}_i|,$$

$$\Theta = \min_{i=1}^{n} |\sin \angle(\overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1})|,$$

$$\tilde{k}_d = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n} \angle(\overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1})}{S_n},$$

où S_n est le *module* du maillage (voir la Définition 5) qui ne dépend que des points $(P, P_1, \ldots, P_n)$. La constante $k_{\max} > 0$ dépend des courbures de la surface en P et $M > 0$ dépend du jet d'ordre 1 des courbures de la surface en P, de l'entier n et d'autres paramètres liés au maillage et à la surface. Nous donnons explicitement un majorant de l'erreur (voir 2.3).

Chapitre 3

Nous donnons (sous certaines hypothèses) la majoration (3.3) de la valeur absolue de la différence entre la courbure discrète en un point P de la surface, k_d et k :

$$|k_d - k| \leq N(\eta_{\max}, k_{\max}, k'_{\max}, \Omega_\Sigma(P), \Theta, \sigma, \Delta, \Lambda, n), \tag{3}$$

où

$$k_d = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n} \angle(\overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1})}{A},$$

et

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Aire(PP_iP_{i+1})},$$

est la moyenne des aires des triangles PP_iP_{i+1}. La fonction $N(\ldots)$ dépend de la taille $\eta_{\max}$ du maillage, du 1-jet des fonctions courbures et d'autres paramètres liés au maillage et à la surface. Malheureusement, la fonction $N(\ldots)$ ne tend pas forcément vers 0 lorsque les points $P_1, \ldots, P_n$ tendent vers P en restant sur la surface Σ. L'objectif du chapitre suivant va être de donner un moyen d'éviter ce phénomène.

Chapitre 4

Nous considérons des familles de maillages $\mathcal{M}_n(\rho)_{\rho>0}$, telles que, pour tout $\rho > 0$, on a :

- pour tout $i = 1, \ldots n$, on a :

$$P_i(\rho) \in \Sigma,$$

- les points $P_i(\rho)$ dépendent d'une paramétrisation conforme f de la surface, ils sont donc définis de manière extrinsèque.

Dans ce chapitre, la manière dont les points $P_i(\rho)$ tendent vers P permet de remplacer la fonction $N(\ldots)$ par $N_1(f)\rho + N_2(f)\rho^2$, où les nouveaux coefficients $N_1(f) > 0$ et $N_2(f) > 0$ ne dépendent plus de la taille des maillages $\mathcal{M}_n(\rho)$. Pour décrire la manière de tendre vers P, on utilise un plongement conforme de la surface

$$f : \mathcal{U} \to \Sigma,$$

où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (Voir la Définition 10 pour plus de détails). On obtient la majoration (4.1) :

$$|k_d(\rho) - k| \leq N_1(f)\rho + N_2(f)\rho^2, \tag{4}$$

où $k_d(\rho)$ est la famille de courbures discrètes associées à la famille $\mathcal{M}_n(\rho)_{\rho>0}$. En particulier, lorsqu'on fait tendre $\rho \to 0$, on a :

$$\lim_{\rho \to 0} k_d(\rho) = k.$$

Un corollaire important de ce théorème est le cas particulier de certaines familles de 6-maillages réguliers $\mathcal{M}_6(\rho)_{\rho>0}$ autour d'un point P de la surface. On obtient alors le "développement limité" 4.2 :

$$k_d(\rho) = 2K + O(\rho), \tag{5}$$

où K est la courbure de Gauss de Σ en P. Dans un article récent ([104]), un résultat similaire a été obtenu par Xu mais la preuve utilise un logiciel de calcul formel.

Conclusion

L'objectif de cette thèse était d'approximer les courbures en un point d'une sous-variété. Nous nous sommes limités au cas des courbes planes et des surfaces lisses de $\mathbb{E}^3$, l'espace euclidien de dimension 3. Si Γ est une courbe plane régulière, nous approchons la courbure en un point de Γ en utilisant une V-ligne (voir la Définition 1). La majoration que nous donnons dans le cas des courbes va être utile pour approcher les courbures en un point P d'une surface lisse $\Sigma \subseteq \mathbb{E}^3$. Nous avons utilisé des maillages autour de P,

$$\mathcal{M}_n = (P, P_1, \ldots, P_n) \subseteq \Sigma^{n+1}.$$

Nous avons associé à $\mathcal{M}_n$ deux courbures discrètes, l'une k_d, définie à l'aide de l'aire de $\mathcal{M}_n$, approche k qui est un polynôme homogène de degré 2 dont les variables sont les courbures principales de Σ en P. L'autre courbure discrète $\tilde{k}_d$, définie à l'aide du *module* de $\mathcal{M}_n$, approche la courbure de Gauss K de Σ en P. Nous pouvons remarquer que lorsque $n = 6$, k se réduit à $2K$. D'où l'importance des 6-maillages. Si les points P_i tendent de manière quelquonque vers le point P, nos approximations peuvent être "très mauvaises". Pour avoir de bonnes estimations de k et notamment des résultats de convergence, nous avons décrit comment les points du maillage doivent tendre vers P en utilisant certaines *familles de maillages réguliers* autour de P.

Prolongements

Il semble naturel de considérer d'autres normalisations du défaut angulaire, c'est à dire d'autres courbures discrètes et nous cherchons vers quoi elles peuvent tendre lorsque la taille des maillages tend vers 0. Plus précisément, nous allons construire des familles de maillages autour de P qui généralisent les *familles de maillages réguliers*. Pour chaque famille, nous allons essayer de faire correspondre une manière de tendre vers le point P, une courbure discrète (qui pourra être différente de k_d et $\tilde{k}_d$) et un polynôme homogène de degré 2 en k_M et k_m (qui pourra être distinct de k).

Chapitre 1

Approximation de la courbure des courbes planes

1.1 Introduction

L'estimation des courbures est un problème qui concerne de nombreux domaines des mathématiques appliquées. Mais la littérature sur ce sujet comporte surtout des résultats de convergence et se préocuppe moins en général de la précision de l'approximation.
Dans ce chapitre nous donnons une majoration de l'erreur commise lorsqu'on approche la courbure en un point d'une large classe de courbes planes. L'expression du majorant comporte à la fois des quantités locales et des quantités globales.

1.2 Cadre général

1.2.1 Courbes lisses

Dans toute la suite on appelera *courbe lisse* Γ toute sous-variété orientée, de classe C^2 au moins, connexe, compacte et plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^2$ orienté. Une telle courbe pourra être définie de différentes façons.

1. Comme la courbe Γ est régulière, elle admet une paramétrisation ξ par l'abscisse curviligne s. On note $t = \xi'$ le vecteur unitaire tangent à la courbe. On peut donc définir la courbure algébrique de Γ en tout point $\xi(s)$ en posant $\frac{dt}{ds} = k_{\mathrm{alg}}(s)n$ où (t, n) est un repère orthonormé direct de $\mathbb{E}^2$.
2. On pourra également définir une fonction

$$F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$$

de classe C^2 au moins de rang 1 en tout point dont l'une des composantes connexes de 0 est Γ.

1.2.2 Notion de V-ligne

DÉFINITION **1** *1. On appelle V-ligne un triplet $V = (P, P_1, P_2)$ de $(\mathbb{E}^2)^3$. La réalisation géométrique $\mathcal{V}$ de V est la ligne polygonale formée par les deux segments P_1P et PP_2.*

2. Si $V = (P, P_1, P_2)$ est une V-ligne on note η_1 (resp. η_2) la distance euclidienne entre P et P_1 (resp. entre P et P_2). On pose :

$$\bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}.$$

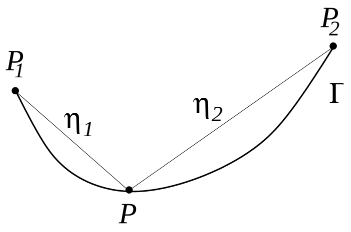
3. Le défaut angulaire en P de V est :

$$\frac{\pi - \gamma}{\overline{\eta}},$$

où $\gamma = \angle(PP_1, PP_2) \in [0, \pi[$.
On notera $k_d^\Gamma(P) = \dfrac{\pi - \gamma}{\overline{\eta}}$.

1.2.3 Courbes supportées par une V-ligne

DÉFINITION **2** *Si $\Gamma \subset \mathbb{E}^2$ est une courbe lisse passant par P, P_1, P_2 et d'extrémités P_1, et P_2, on dit que Γ est supportée par V.*



Une courbe Γ et son support une V-ligne.

On peut approcher la courbure d'une courbe lisse par le défaut angulaire de V-ligne qui la supporte :

PROPOSITION **1** *Soit Γ une courbe lisse et $V = (P, P_1, P_2)$ une V-ligne qui supporte Γ. Le défaut angulaire en P de V approche la courbure $k(P)$ de Γ en P :*

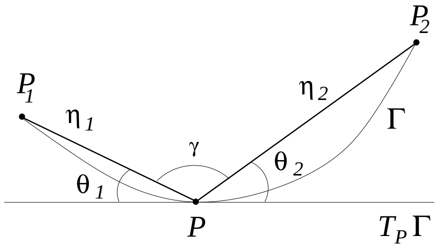
– *Si $\eta_1 = \eta_2 = \eta$:*

$$\frac{\pi - \gamma}{\eta} = k(P) + o(\eta),$$

– *Si* $\eta_1 \neq \eta_2$ *:*

$$\frac{\pi - \gamma}{\overline{\eta}} = k(P) + o(1).$$

Preuve de la proposition 1. –



– On suppose que

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta.$$

Effectuons un développemment limité à l'ordre 2 :

$$\theta_1 = \frac{k(P)}{2}\eta_1 - \frac{\alpha\eta_1^2}{6} + o(\eta_1^2),$$

$$\theta_2 = \frac{k(P)}{2}\eta_2 + \frac{\alpha\eta_2^2}{6} + o(\eta_2^2).$$

Puisque $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, on déduit que :

$$\theta_1 + \theta_2 = k(P)\eta + o(\eta^2).$$

D'autre part, on a

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi - \gamma,$$

d'où le résultat.

– Si $\eta_1 \neq \eta_2$,
effectuons encore un développemet limité à l'ordre 1. On a :

$$\theta_1 = \frac{k(P)}{2}\eta_1 + \eta_1\epsilon_1(\eta_1),$$

$$\theta_2 = \frac{k(P)}{2}\eta_2 + \eta_2\epsilon_2(\eta_2),$$

où $\epsilon_i(\eta_i) \to 0$, quand $\eta_i \to 0$.
On en déduit que :

$$\theta_1 + \theta_2 = k(P)\overline{\eta} + \eta_1\epsilon_1(\eta_1) + \eta_2\epsilon_2(\eta_2),$$

$$\theta_1 + \theta_2 = k(P)\overline{\eta} + \epsilon(\eta_{\max}),$$

où $\eta_{\max} = \max(\eta_1, \eta_2)$ et $\epsilon(\eta) \to 0$ quand $\eta \to 0$.

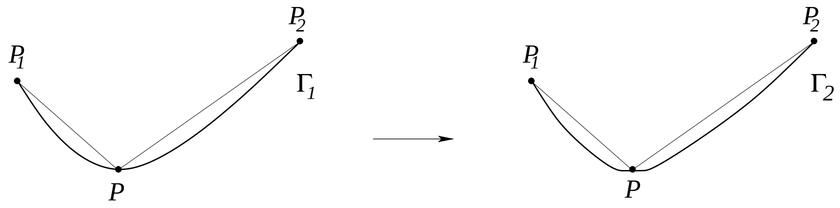
Il est important de remarquer que le résultat de convergence est plus faible lorsque $\eta_1 \neq \eta_2$, que lorsque $\eta_1 = \eta_2$ $\square$

1.3 Un théorème d'approximation

Le résultat de la proposition 1 est un résultat de convergence. Notre but à présent est d'obtenir une majoration de l'erreur faite en approximant la courbure en un point P d'une courbe lisse par le défaut angulaire en P d'une V-ligne qui la supporte. Nous utiliserons dans cette majoration trois invariants.

- $k_{\max} = \max_s |k(s)|$,
- $k'_{\max} = \max_s |k'(s)|$,
- le coefficient de rappel que nous définirons au paragraphe suivant.

La présence de $k'_{\max}$ peut sembler étrange dans un premier temps, mais ceci se comprend bien dans le cas des points de courbure nulle : Quelque soit la courbe Γ_1 passant par P_1, P, P_2 il est toujours possible de faire localement une légère perturbation C^0 autour de P telle que la courbe résultante Γ_2 contienne toujours V mais ait une courbure nulle en P. On illustre ceci dans la figure suivante.



On remarque que $k_{\max}$ ne varie pas beaucoup. En revanche, la dérivée de la fonction courbure k' varie beaucoup, en général :

$$k'_{\max}(\Gamma_2) = \sup_{\Gamma_2} |k'(s_2)| \gg k'_{\max}(\Gamma_1) = \sup_{\Gamma_1} |k'(s_1)|.$$

Ceci montre que si l'on veut avoir un résultat de comparaison entre les courbures $k_d^\Gamma(P)$ and $k(P)$, il est naturel de tenir compte non seulement de la fonction courbure mais de son 1-jet.

DÉFINITION **3** *Le coefficient de rappel de* Γ *en* P *est la quantité*

$$\Omega_\Gamma(P) = \sup\{\frac{1}{\cos\angle(\overrightarrow{PM}, t)}, M \in \Gamma, t \in T_M\Gamma\} \in [1, \infty].$$

On donne des exemples de courbes avec leur coefficient de rappel :

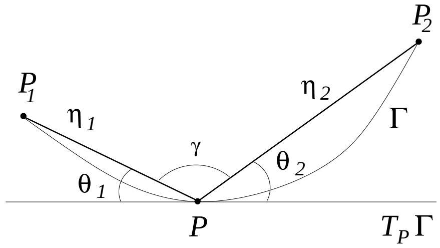
Droite $\Omega_\Gamma(P) = 1$ *Parabole* $\Omega_\Gamma(P) = \frac{3}{\sqrt{8}}$ *Courbe* $\Omega_\Gamma(P) < +\infty$ *Cercle* $\Omega_\Gamma(P) = \infty$.

1.4 Enoncé du Théorème principal

Ce théorème donne une majoration de la différence $|k(P) - k_d^\Gamma(P)|$ en fonction de $\Omega_\Gamma(P)$, $\eta_{\max}$, $k_{\max}$ et $k'_{\max}$.

THÉORÈME **1** *Soit $V = (P, P_1, P_2)$ une V-ligne de $\mathbb{E}^2$, $k_d^\Gamma(P)$ sa courbure discrète en P et Γ une courbe de $\mathbb{E}^2$ supportée par V.*
Alors on a :

$$\left|k_\Gamma(P) - k_d^\Gamma(P)\right| \leq 2\Omega_\Gamma(P)^3 \left(\frac{k_{\max}^3}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Gamma(P)\right)\eta_{\max}. \quad (1.1)$$



1.5 Preuve du théorème 1

On supposera que $\Omega_\Gamma(P) < +\infty$ car sinon le résultat est trivial. Remarquons que $\Omega_\Gamma(P) < +\infty$ si et seulement si pour tout $(\eta, \theta) \in \Gamma$ on a :

$$-\sin\theta F_x(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta) + \cos\theta F_y(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta) = 0.$$

1.5.1 Existence d'une bijection $\eta \to \theta$ de classe C^2.

LEMME **1** *Soit Γ une courbe lisse. Soit*

$$F : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$$

une application de classe C^3 définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $(0,0) \in \mathcal{U}$. définissant implicitement Γ.

Si $F(0,0)=0$, $F_x(0,0)=0$ *et* $F_y(0,0)\neq 0$,
alors il existe un voisinage connexe $\mathcal{V}$ *de* $(0,0)$ *tel que la fonction*

$$\widetilde{\Phi}:\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

définie pour tout $(\eta,\theta)\in\mathcal{V}$ *par :*

$$\widetilde{\Phi}(\eta,\theta)=\begin{cases}\dfrac{F(\eta\cos\theta,\eta\sin\theta)}{\eta} & si\ \eta\neq 0,\\ \cos\theta F_x(0,0)+\sin\theta F_y(0,0) & si\ \eta=0\end{cases}$$

vérifie pour tout $(\eta,\theta)\in\mathcal{V}$ *:*

$$(\eta\cos\theta,\eta\sin\theta)\in\Gamma\Leftrightarrow\widetilde{\Phi}(\eta,\theta)=0.$$

De plus on a $\dfrac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\theta}(0,0)\neq 0.$

Preuve du lemme 1. – Soit

$$c:R^\star\times[0,2\pi[\to\mathbb{R}^2$$

l'application définie par

$$c(\eta,\theta)=(\eta\cos\theta,\eta\sin\theta)$$

On pose $\mathcal{V}=\overline{c^{-1}(\mathcal{U})}$.
Soit

$$\widetilde{\Phi}:\mathcal{V}\to\mathbb{R},$$

l'application définie par :

$$\widetilde{\Phi}(\eta,\theta)=\begin{cases}\dfrac{F(\eta\cos\theta,\eta\sin\theta)}{\eta} & \text{si } \eta\neq 0,\\ \cos\theta F_x(0,0)+\sin\theta F_y(0,0) & \text{si } \eta=0.\end{cases}$$

Il est clair que $\widetilde{\Phi}$ est de classe C^2 en tout point $(\eta,\theta)\in\mathcal{V}$ tel que $\eta\neq 0$.
Nous allons montrer que $\widetilde{\Phi}$ est de classe C^2 en $(0,\theta)$.
Fixons θ. Puisque F est de classe C^3, on peut écrire le développement de Taylor à l'ordre 3 de la fonction

$$\widetilde{F}:\eta\to F(\eta\cos\theta,\eta\sin\theta).$$

On obtient :

$$\widetilde{F}(\eta)=\eta\frac{d\widetilde{F}}{d\eta}(0)+\frac{\eta^2}{2}\frac{d^2\widetilde{F}}{d\eta^2}(0)+\frac{\eta^3}{6}\frac{d^3\widetilde{F}}{d\eta^3}(0)+o(\eta^3),$$

avec
$$\frac{d\widetilde{F}}{d\eta}(0) = (\cos\theta F_x(0,0) + \sin\theta F_y(0,0)).$$
On a donc pour $\eta \neq 0$:
$$\widetilde{\Phi}(\eta,\theta) = \widetilde{\Phi}(0,\theta) + \frac{\eta}{2}\frac{d^2\widetilde{F}}{d\eta^2}(0) + \frac{\eta^2}{6}\frac{d^3\widetilde{F}}{d\eta^3}(0) + o(\eta^2).$$

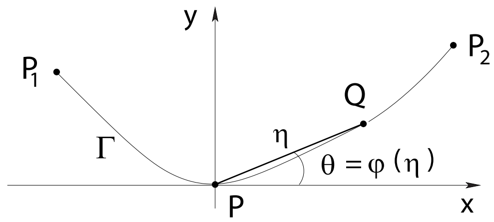
Il est facile d'en déduire que $\widetilde{\Phi}$ est de classe C^2.
D'autre part, il est clair que :
$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\theta}(0,0) = F_y(0,0) \neq 0.$$

$\square$

Proposition **2** *Soit* Γ *une courbe lisse. Soit*
$$F : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$$
une application de classe C^3 *définie sur un ouvert* $\mathcal{U}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *tel que* $(0,0) \in \mathcal{U}$*. définissant implicitement* Γ*.*
On suppose que pour tout (η,θ) *tel que* $(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta) \in \Gamma$*, on a :*
$$-\sin\theta F_x(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta) + \cos\theta F_y(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta) \neq 0.$$
Alors il existe une bijection de classe C^2
$$\varphi : I = [-\eta_1, \eta_2] \to \varphi(I)$$
telle que :

1. $\varphi(0) = 0$,
2. *pour tout* $\eta \in I$*, on a :*
$$(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta) \in \Gamma \Leftrightarrow \theta = \varphi(\eta).$$

On obtient ainsi une nouvelle paramétrisation de la courbe
$$\widetilde{\xi} : I \to \xi(I) \subseteq \mathbb{E}^2,$$
où $\widetilde{\xi}$ *est défini pour tout* $\eta \in I$ *par :*
$$\widetilde{\xi}(\eta) = (\eta\cos\varphi(\eta), \eta\sin\varphi(\eta)).$$



Preuve de la proposition 2. –
Considérons l'application

$$\widetilde{\Phi} : \mathcal{V} \to \mathbb{R},$$

définie dans le lemme 1 par :

$$\widetilde{\Phi}(\eta,\theta) = \begin{cases} \dfrac{F(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta)}{\eta} & \text{si } \eta \neq 0, \\ \cos\theta F_x(0,0) + \sin\theta F_y(0,0) & \text{si } \eta = 0. \end{cases}$$

D'après le lemme 1, $\widetilde{\Phi}$ est de classe C^2. Définissons la fonction

$$\tilde{F} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^2$$

en posant pour tout $(\eta,\theta) \in \mathcal{V}$,

$$\tilde{F}(\eta,\theta) = (\eta, \widetilde{\Phi}(\eta,\theta)).$$

La fonction $\tilde{F}$ est de classe C^2 sur $\mathcal{V}$. Nous allons montrer que $\tilde{F}$ est une bijection de classe C^2 de $\mathcal{V}$ sur son image.

1. On a pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$:

   $$D\tilde{F}(\eta,\theta)(h,k) = \left(h, D_1\widetilde{\Phi}(\eta,\theta)h + D_2\widetilde{\Phi}(\eta,\theta)k\right),$$

   avec

   $$D_2\widetilde{\Phi}(\eta,\theta) = -\sin\theta F_x(\eta\cos\theta,\eta\sin\theta) + \cos\theta F_y(\eta\cos\theta,\eta\sin\theta).$$

   Le jacobien de $\tilde{F}$ au point (η,θ) vaut :

   $$\begin{vmatrix} 1 & D_1\widetilde{\Phi}(\eta,\theta) \\ 0 & -\sin\theta F_x + \cos\theta F_y \end{vmatrix} = -\sin\theta F_x + \cos\theta F_y \neq 0$$

   Donc quitte à restreindre $\mathcal{V}$, on peut supposer que $D\tilde{F}(\eta,\theta)$ est un isomorphisme pour tout $(\eta,\theta) \in \mathcal{V}$.

2. Pour prouver que $\tilde{F}$ est injective, nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

LEMME **2** *Soit $x \in \mathcal{V}$, $y = \tilde{F}(x)$ et $z \in \tilde{F}(\mathcal{V})$. Alors il existe un chemin $\tilde{\lambda} : [0,1] \to \mathcal{V}$, de classe C^1, d'origine $x = \tilde{\lambda}(0)$, qui relève le segment $\lambda : [0,1] \to \tilde{F}(\mathcal{V})$ défini par $\lambda(t) = (1-t)y + tz$.*

Preuve du lemme 2. – Soit A l'ensemble des $a \in [0,1]$ tels que $\lambda|_{[0,a[}$ se relève selon un chemin $[0,a[\to \mathcal{V}$ de classe C^1 et d'origine x. Montrons que A n'est pas vide. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de x dont l'image par $\tilde{F}$ est un voisinage ouvert V de y. Ainsi $\lambda^{-1}(V)$ contient un intervalle $[0,s[$ et $(\tilde{F}|U)^{-1} \circ \lambda$ est de classe C^1, vaut x pour $t = 0$ et relève $\lambda|_{[0,s[}$. Soit $a, a^{'} \in A$ et $a < a^{'}$. Puisque $[0,1]$ est un connexe, le relèvement de $\lambda|_{[0,a^{'}[}$ coincide sur $[0,a[$ avec celui de $\lambda|_{[0,a[}$. Soit β la borne supérieure de A. Montrons que $\beta \in A$. Avec une notation évidente, $\tilde{F} \circ \tilde{\lambda}(t) = \lambda(t)$ pour $0 \le t < \beta$, donc $D\tilde{F}(\tilde{\lambda}(t)) \circ \tilde{\lambda}^{'}(t) = \lambda^{'}(t)$. On a :

$$\|\tilde{\lambda}^{'}(t)\| \le M \|D\tilde{F}(\eta,\theta)^{-1}\|_{\tilde{F}(\mathcal{V})},$$

où M est une borne supérieure des $\|\lambda^{'}(t)\|, 0 \le t \le 1$. Si t_n est une suite croissante de nombres tendant vers λ, le théorème des accroissements finis entraîne

$$\|\tilde{\lambda}(t_p) - \tilde{\lambda}(t_q)\| \le M \|D\tilde{F}(\eta,\theta)^{-1}\|_{\tilde{F}(\mathcal{V})} |t_p - t_q|.$$

La suite $\tilde{\lambda}(t_n)$ est donc de Cauchy et elle converge vers un point $b \in \mathcal{V}$. La continuité de $\tilde{F}$ entraine que $\tilde{F}(b) = \lim \tilde{F} \circ \tilde{\lambda}(t_n) = \lim \lambda(t_n) = \lambda(\beta)$ et $\tilde{\lambda}(\beta)$ est bien défini. Montrons par l'absurde, que $\beta = 1$: Il existe un voisinage ouvert $U^{'}$ de $\tilde{\lambda}(\beta)$ dont l'image par $\tilde{F}$ est un voisinage ouvert $V^{'}$ de $\lambda(\beta)$. Puisque $\beta < 1$, $\lambda^{-1}(V^{'})$ contient un intervalle ouvert $I =]\beta - \epsilon, \beta + \epsilon[$. Définissons $\sigma : I \to \mathcal{V}$ par $(\tilde{F}|_{U^{'}})^{-1} \circ \lambda$, puis posons $\tilde{\lambda}_1(t) = \tilde{\lambda}(t)$ si $0 \le t \le \beta$, $\tilde{\lambda}_1(t) = \sigma(t)$ si $\beta \le t < \beta + \epsilon$. Evidemment $\tilde{\lambda}_1$ est de classe C^1, $\tilde{\lambda}_1(0) = x$ et $\tilde{\lambda}_1$ relève $\lambda|_{[0,\beta+\epsilon[}$. Ce qui contredit la définition de β. □

LEMME **3** *Un lacet λ de $\tilde{F}(\mathcal{V})$ d'origine $y = \tilde{F}(x)$, où $x \in \mathcal{V}$ se relève suivant un lacet $\tilde{\lambda}$ de $\mathcal{V}$ d'origine (et d'extrémité) x. En particulier $\tilde{F}$ est injective.*

Preuve du lemme 3. – Quitte à effectuer une translation, on peut supposer $y = 0$.
Soit $Z = \{0 \le t \le 1\} \times \{0 \le s \le 1\}$. Nous allons montrer que $\psi : Z \to \tilde{F}(\mathcal{V})$, définie par $\psi(t,s) = s\lambda(t)$, admet un relèvement $\tilde{\psi} : Z \to \mathcal{V}$ tel que $\tilde{\psi}(t,0) = x$ pour $0 \le t \le 1$, $\tilde{\psi}(0,1) =$

$\tilde{\psi}(1,1) = x$. Le lemme en résultera en prenant $\tilde{\lambda}(t) = \tilde{\psi}(t,1)$. D'après le lemme précédent et par unicité du relèvement, chaque segment $s_{\in[0,1]} \to s\lambda(t)$ possède un relèvement unique $\tilde{\psi}_t(s)$ tel que $\tilde{\psi}_t(0) = x$. Posons $\tilde{\psi}(t,s) = \tilde{\psi}_t(s)$. Il suffit de montrer que pour chaque $s \in [0,1]$, $t \to \tilde{\psi}(t,s)$ est un lacet d'origine x. Pour cela, considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des $a \in [0,1]$ tels que, pour $0 \leq s \leq a$, $t \to \tilde{\psi}(t,s)$ possède les propriétés voulues. Montrons par l'absurde que $\beta^{'} = \sup \mathcal{A} = 1$. Chaque point $\tilde{\psi}(t,\beta^{'})$ est contenu dans un voisinage ouvert U_t, dont l'image par $\tilde{F}$ est un voisinage ouvert V_t de $\tilde{F}(\tilde{\psi}(t,\beta^{'})) = \psi(t,\beta^{'}) = \beta^{'}\lambda(t)$. Puisque $[0,1]$ est compact, un nombre fini de ces V_t recouvre l'image de $t \to \beta^{'}\lambda(t)$. Soit $V^{'}$ leur réunion et $U^{'}$ la réunion des U_t correspondants. Puisque $\beta^{'} < 1$, $V^{'}$ contient l'image d'un lacet $t \to (\beta^{'} + \epsilon)\lambda(t)$ pour un $\epsilon > 0$. Alors $t \to (\tilde{F}|_{U^{'}})^{-1} \circ \psi(t,\beta^{'} + \epsilon)$ relève ce lacet, c'est lui-même un lacet d'origine x, et l'unicité du relèvement montre qu'il n'est autre que $\tilde{\psi}(t,\beta^{'} + \epsilon)$. D'où la contradiction.
Montrons que $\tilde{F}$ est injective :
Si x et $x^{'}$ sont deux points de $\mathcal{V}$ de même image $y = \tilde{F}(x) = \tilde{F}(x^{'})$, l'image par $\tilde{F}$ du segment qui les joint est un lacet $\tilde{\lambda}$ d'origine y. Par unicité du relèvement, ce lacet se relève en un lacet unique d'origine x. Comme ce relèvement doit être aussi le segment $xx^{'}$, c'est que $x = x^{'}$, $\tilde{F}$ est donc injective. □

D'après ce qui précède, $\tilde{F}$ est une bijection de classe C^2 de $\mathcal{V}$ sur son image.
L'application inverse $\tilde{F}^{-1}$ est de la forme $\tilde{F}^{-1}(\eta,w) = (\eta, \tilde{F}_1(\eta,w))$.
D'autre part pour tout $(\eta,\theta) \in \mathcal{V}$, on a :

$$\widetilde{\Phi}(\eta,\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \tilde{F}_1(\eta,0).$$

On pose alors $\varphi(\eta) = \tilde{F}_1(\eta,0)$.
L'application $\varphi : I = [-\eta_1,\eta_2] \to \varphi(I)$ est de classe C^2 puisque $\tilde{F}$ est de classe C^2 et son jacobien ne s'annule pas sur $\mathcal{V}$. De plus φ vérifie :

$$\widetilde{\Phi}(\eta,\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \varphi(\eta).$$

En utilisant le lemme 1, on en déduit que :
$(\eta\cos\theta, \eta\sin\theta) \in \Gamma \Leftrightarrow \theta = \varphi(\eta)$, d'où le point 2).
Le fait que $\widetilde{\Phi}(0,0) = 0$ prouve qu'à priori on a $\varphi(0) = k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. En faisant tendre $\mathcal{V}$ vers le point $(0,0)$ et en utilisant l'unicité de φ on voit que $k = 0$ et donc que $\varphi(0) = 0$. D'où le point 1). □

1.5.2 Equation différentielle vérifiée par la fonction φ

LEMME **4** *φ vérifie l'équation différentielle suivante sur l'intervalle I :*

$$(EDO) \quad \begin{cases} \widetilde{k}_{alg}(\eta)(1+\eta^2\varphi'^2(\eta))^{\frac{3}{2}} = 2\varphi'(\eta) + \eta^2\varphi'^3(\eta) + \eta\varphi''(\eta), \\ \varphi'(0) = \dfrac{k(P)}{2}. \end{cases}$$

Preuve du lemme 4. – On utilise la paramétrisation $\widetilde{\xi} : \eta \to (\eta\cos\varphi(\eta), \eta\sin\varphi(\eta))$.
Il est classique que la courbure algébrique s'exprime par la formule :

$$k_{\mathrm{alg}}(\eta) = \frac{U(\eta)}{\|\xi'(\eta)\|^3},$$

où $U(\eta) = 2\varphi'(\eta) + \eta^2\varphi'^3(\eta) + \eta\varphi''(\eta)$ et $\|\xi^{'}(\eta)\|^3 = (1+\eta^2\varphi'^2(\eta))^{\frac{3}{2}}$.
On en déduit que φ vérifie l'équation différentielle

$$(EDO) \quad \begin{cases} k_{alg}(\eta)(1+\eta^2\varphi'^2(\eta))^{\frac{3}{2}} = 2\varphi'(\eta) + \eta^2\varphi'^3(\eta) + \eta\varphi''(\eta), \\ \varphi'(0) = \dfrac{k(P)}{2}. \end{cases}$$

□

1.5.3 Expression explicite de $\varphi^{'}$ en fonction de la courbure algébrique

PROPOSITION **3** *L'application*

$$\varphi : I = [-\eta_1, \eta_2] \to \varphi(I)$$

est une bijection de classe C^2 de I sur son image.
De plus, pour tout $\eta \in I$, on a :

$$\varphi^{'}(\eta) = \frac{\displaystyle\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt}{\sqrt{1-\eta^2\left(\displaystyle\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt\right)^2}},$$

où

$$s(\eta) = \int_0^\eta |\frac{\partial\tilde{\xi}}{\partial\eta}(t)|dt$$

et $\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta) = k_{\mathrm{alg}}(s(\eta))$ est la courbure algébrique de Γ au point $\widetilde{\xi}(\eta)$.

Preuve de la proposition 3. – On résoud l'équation différentielle vérifiée par φ donnée dans le lemme 4. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette équation différentielle possède une unique solution φ. Pour tout $\eta \in I = [-\eta_1, \eta_2]$, on pose :

$$u(\eta) = \eta \int_0^1 t\widetilde{k}_{\text{alg}}(\eta t)dt.$$

Un calcul très simple montre qu'il existe $\epsilon_1 > 0$ et $\epsilon_2 > 0$, suffisamment petits tels que pour tout $\eta \in]-\epsilon_1, \epsilon_2[\subseteq [-\eta_1, \eta_2]$, la fonction

$$g :]-\epsilon_1, \epsilon_2[\to \mathbb{R},$$

définie par :

$$g(\eta) = \frac{\displaystyle\int_0^1 t\widetilde{k}_{\text{alg}}(\eta t)dt}{\sqrt{1-u^2(\eta)}},$$

est de classe C^1 et pour tout $\eta \in]-\epsilon_1, \epsilon_2[$, on a :

$$g^{'}(\eta) = (1-u^2)^{-\frac{3}{2}} \left[\int_0^1 t^2 \frac{\partial \widetilde{k}_{\text{alg}}}{\partial \eta}(\eta t)dt + \eta \left(\int_0^1 t\widetilde{k}_{\text{alg}}(\eta t)dt \right)^3 \right].$$

Donc g vérifie l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]-\epsilon_1, \epsilon_2[$:

$$\begin{cases} \tilde{k}_{alg}(\eta)(1+\eta^2 g'^2(\eta))^{\frac{3}{2}} = 2g(\eta) + \eta^2 g^3(\eta) + \eta g'(\eta), \\ g(0) = \dfrac{k(P)}{2}. \end{cases}$$

Considérons l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \tilde{k}_{alg}(\eta)(1+\eta^2 y'^2(\eta))^{\frac{3}{2}} = 2y(\eta) + \eta^2 y^3(\eta) + \eta y'(\eta), \\ y(0) = \dfrac{k(P)}{2}. \end{cases}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'elle admet une unique solution sur $]-\eta_1, 0[$ et une unique solution sur $]0, \eta_2[$. On en déduit que pour tout $\eta \in]-\epsilon_1, \epsilon_2[$, on a :

$$g(\eta) = \varphi^{'}(\eta).$$

Montrons par l'absurde que l'on peut étendre la fonction g à tout l'intervalle $[-\eta_1, \eta_2]$. Sinon, on aurait pour $i = 1, 2$:

$$u^2(\epsilon_i) = 1,$$

ce qui entraîne
$$\lim_{\eta\to\epsilon_i} g(\eta) = \lim_{\eta\to\epsilon_i} \varphi^{'}(\eta) = \infty.$$
On aurait donc :
$$\lim_{\eta\to\epsilon_i} \left(1+\eta^2\varphi'^2(\eta)\right)^{\frac{1}{2}} = \infty.$$
D'autre part en utilisant le produit scalaire
$$< \frac{\tilde{\xi}(\eta)}{|\tilde{\xi}(\eta)|}, \frac{\tilde{\xi}'(\eta)}{|\tilde{\xi}'(\eta)|} >,$$
on montre que :
$$\cos\angle(\overrightarrow{PM}, t) = \frac{1}{1+\eta^2\varphi'^2(\eta)}.$$
En résumé
$$\lim_{\eta\to\epsilon} \varphi^{'}(\eta) = \infty,$$
implique que
$$\Omega_\Gamma(P) = \infty,$$
ce qui est contraire à notre hypothèse de départ. On en déduit que pour tout $\eta \in [-\eta_1, \eta_2]$, on a :
$$\varphi^{'}(\eta) = \frac{\displaystyle\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt}{\sqrt{1-\eta^2\left(\displaystyle\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt\right)^2}}.$$

□

1.5.4 Majoration de la borne supérieure de $|\varphi''|$

LEMME **5** *Pour tout $\eta \in I$, on a :*

- $|\varphi'(\eta)| \le \frac{1}{2}\Omega_\Gamma(P)k_{\max}$,
- $|\varphi''(\eta)| \le \Omega_\Gamma(P)^3\left(\frac{k_{\max}^3}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Gamma(P)\right)$.

Preuve du lemme 5. – Pour tout $\eta \in I$, on a vu que :
$$\left|\frac{\partial\widetilde{\xi}}{\partial\eta}(\eta)\right|^2 = 1+\eta^2\varphi'^2(\eta).$$

Par conséquent
$$\frac{\partial s}{\partial \eta}(\eta) = (1+\eta^2\varphi'^2(\eta))^{\frac{1}{2}} > 0.$$
Puisque $u = \dfrac{\eta\varphi'}{(1+\eta^2\varphi'^2)^{\frac{1}{2}}}$, il est facile de vérifier que
$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2(\eta)}} = (1+\eta^2\varphi'^2(\eta))^{\frac{1}{2}}.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}
\varphi'(\eta) &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2(\eta)}}\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt \\
&= \frac{\partial s}{\partial \eta}(\eta)\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt \\
&= \frac{1}{\frac{\partial \eta}{\partial s}(s(\eta))}\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt \\
&= \frac{1}{\cos\angle(\overrightarrow{PM}, t)}\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt,
\end{aligned}$$
où on a noté $M = \widetilde{\xi}(\eta)$ et t le vecteur tangent unitaire à la courbe au point M.
On a :
$$|\varphi'(\eta)| \leq \Omega_\Gamma(P)k_{\max}\int_0^1 tdt,$$
et finalement
$$|\varphi'(\eta)| \leq \frac{1}{2}\Omega_\Gamma(P)k_{\max}.$$
Il reste à traiter la dérivée seconde de φ.
$$\begin{aligned}
\varphi''(\eta) &= (1-u^2)^{-\frac{3}{2}}\left[\int_0^1 t^2\frac{\partial\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}}{\partial\eta}(\eta t)dt + \eta\left(\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt\right)^3\right] \\
&= \left(\frac{\partial s}{\partial \eta}(\eta)\right)^3\left[\int_0^1 t^2\frac{\partial\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}}{\partial\eta}(\eta t)dt + \eta\left(\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt\right)^3\right].
\end{aligned}$$
Puisque
$$\frac{\partial\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}}{\partial\eta} = \frac{\partial s}{\partial \eta}(\eta)\cdot\frac{\partial k_{\mathrm{alg}}}{\partial s}(s(\eta)),$$
on obtient
$$\varphi''(\eta) = \left(\frac{\partial s}{\partial \eta}(\eta)\right)^3\eta\left[\int_0^1 t\widetilde{k}_{\mathrm{alg}}(\eta t)dt\right]^3 + \left(\frac{\partial s}{\partial \eta}(\eta)\right)^4\left[\int_0^1 t^2\frac{\partial k_{\mathrm{alg}}}{\partial s}(s(\eta t))dt\right].$$
Pour terminer la majoration, on aura besoin du lemme ci-dessous :

Lemme **6** *Soit $M \in \Gamma$, $M \neq P$ et $t \in T_M\Gamma$ unitaire.*
On a :

$$\left|\frac{\partial \eta}{\partial s}(s)\right| = \cos \angle(\overrightarrow{PM}, t),$$

$$\left|\frac{\partial s}{\partial \eta}(\eta)\right| \leq \Omega_\Gamma(P).$$

Preuve du lemme 6. –
On a :

$$\frac{\partial \|\overrightarrow{PM}\|}{\partial s} = \frac{\partial \sqrt{<\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM}>}}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \|\overrightarrow{PM}\|}{\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{<\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PM}>}} 2 < \overrightarrow{PM}, \frac{\partial \overrightarrow{PM}}{\partial s} >,$$

$$\frac{\partial \|\overrightarrow{PM}\|}{\partial s} = < \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}, t > .$$

Pour finir la preuve, il suffit de remarquer que :

$$\left|\frac{\partial \|\overrightarrow{PM}\|}{\partial s}\right| = \left|\frac{\partial \eta}{\partial s}(s)\right| \text{ et } \left|< \frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|}, t >\right| = \cos \angle(\overrightarrow{PM}, t). \qquad \square$$

1.5.5 Fin de la preuve du Théorème 1

On va majorer $\varphi : I = [-\eta_1, \eta_2] \to \varphi(I)$ sur I. On suppose que l'on est dans la configuration de la figure ci-dessous, c'est à dire que $\varphi(-\eta_1) \leq 0$ et $\varphi(\eta_2) \geq 0$ (les autres cas se démontrent de manière similaire). On a :

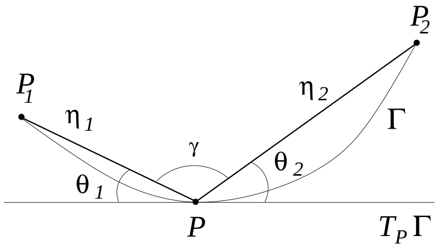
$$\varphi(-\eta_1) = -|\theta_1|,$$

et

$$\varphi(\eta_2) = |\theta_2|.$$

En utilisant la figure ci-dessous, on voit que l'on a :

$$\pi - \gamma = |\theta_1| + |\theta_2|.$$



On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange sur $I = [-\eta_1, \eta_2]$: on a pour

$\eta \in I$:

$$\left|\varphi(\eta) - \frac{k(P)}{2}\eta\right| \leq \frac{1}{2}\eta^2 \sup_I |\varphi''(\eta)|$$

On en déduit facilement que :

$$\begin{aligned} |\pi - \gamma - k(P)\bar{\eta}| &\leq \frac{1}{2}\eta_1^2 \sup_{I_1} |\varphi''(\eta)| + \frac{1}{2}\eta_2^2 \sup_{I_2} |\varphi''(\eta)| \\ &\leq \eta_{\max}^2 \sup_I |\varphi''(\eta)|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left|k_d^\Gamma(P) - k(P)\right| \leq 2\eta_{\max} \sup_I |\varphi''(\eta)|,$$

puisque $\eta_{\max} \leq 2\bar{\eta}$.
On utilise le lemme 6 pour finir la majoration.

1.6 Illustrations

On a la majoration $\left|k(P) - k_d^\Gamma(P)\right| \leq e(\Gamma, V)$, avec

$$e(\Gamma, V) = 2\Omega_\Gamma(P)^3 \left(\frac{k_{\max}^3}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Gamma(P)\right)\eta_{\max}$$

L'étude des variations des erreurs relatives

$$\epsilon_r = \frac{\left|k(P) - k_d^\Gamma(P)\right|}{k_d^\Gamma(P)}, \quad e_r = \frac{e(\Gamma, V)}{k_d^\Gamma(P)} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{e(\Gamma)}{|k(P) - k_d^\Gamma(P)|}$$

montre que ces erreurs ne dépendent pas de $\eta_{\max}$ mais seulement de l'angle au point P.
Lorsque l'angle en P se rapproche de π, l'erreur relative δ est meilleure pour les cercles que pour les paraboles.

1.6.1 Cercles

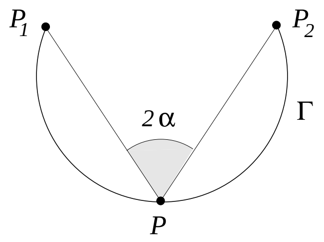
On note 2α l'angle de $V = (P, P_1, P_2)$ en P et Γ l'arc de cercle passant par P_1, P et P_2 (voir la figure ci-dessous, à gauche). On a :

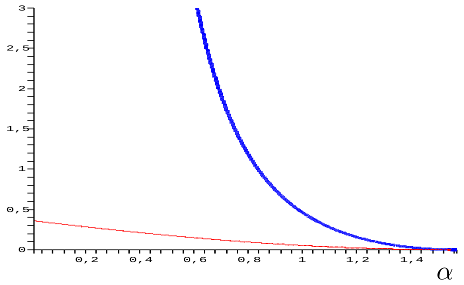
$$\Omega_\Gamma(P) = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad k_{\max} = \frac{2\cos\alpha}{\eta_{\max}} = k(P) \quad \text{et} \quad k_d^\Gamma(P) = \frac{\pi - 2\alpha}{\eta_{\max}}.$$

On a les expressions suivantes des erreur relatives :

$$\epsilon_r(\alpha) = \frac{|\pi - 2\alpha - 2\cos\alpha|}{\pi - 2\alpha} \quad \text{et} \quad e_r(\alpha) = \frac{\cot^3\alpha}{\frac{\pi}{2} - \alpha}.$$

L'erreur $\epsilon_r(\alpha)$ est majorée par $e_r(\alpha)$.





Erreurs relatives $\epsilon_r(\alpha)$ et $e_r(\alpha)$ (respectivement en traits fins et épais)

Pour α proche de 0, $e_r(\alpha)$ tend vers l'infini tandis que l'erreur relative $\epsilon_r(\alpha)$ reste bornée. On remarque également que la courbure discrète k_d un mauvais comportement pour α petit. En effet k_d tend vers la valeur $\pi/\eta_{\max}$ lorsque α tend vers 0.
La courbure discrète donne la courbure réelle à une erreur $\epsilon_r(\alpha)$ près. Le tableau ci-dessous donne les valeurs de l'erreur $e_r(\alpha)$ en fonction de α :

$e_r(\alpha)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
α	0.836...	1.268...	1.471...	1.539...	1.560...	1.567...	1.569...

Plus l'angle en P se rapproche de π, plus la majoration est précise.

1.6.2 Paraboles

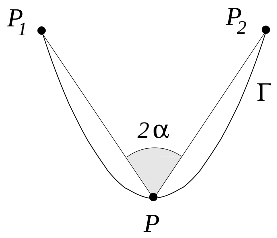
Soit $V = (P, P_1, P_2)$ une V-ligne symétrique et Γ un arc de parabole ayant pour support V (voir la figure ci-dessous). Après quelques calculs qui ne présentent pas de difficultés, on trouve :

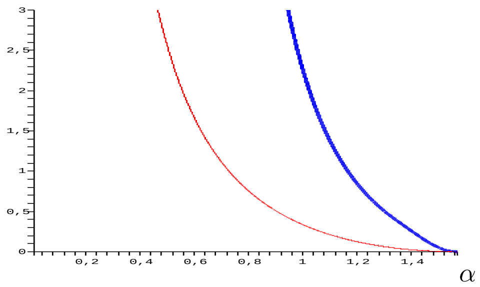
$$\Omega_\Gamma(P) = \begin{cases} 3/\sqrt{8} & \text{si } \alpha \leq \alpha_0 \\ \dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{\sqrt{1+4\cot^2\alpha}}{1+2\cot^2\alpha} & \text{si } \alpha \geq \alpha_0 \end{cases}$$

où $\alpha_0 = \arctan(\sqrt{2}) = 0.95531...$ On a également :
$k_{\max} = k(P) = 2\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\dfrac{1}{\eta_{\max}}$ et

$$k'_{\max} = \begin{cases} \dfrac{125\cos^2\alpha}{18\sqrt{5}\sin^4\alpha}\dfrac{1}{\eta_{\max}^2} & \text{if } \alpha \leq \alpha_1 \\ \dfrac{24\sin\alpha\cos^3\alpha}{(1+3\cos^2\alpha)^3}\dfrac{1}{\eta_{\max}^2} & \text{si } \alpha \geq \alpha_1 \end{cases}$$

avec $\alpha_1 = \arctan(2\sqrt{5}) = 1.350808...$ Il est facile d'en déduire les expressions de $\epsilon_r(\alpha)$, $e_r(\alpha)$ et $\delta(\alpha)$.





Erreurs relatives $\epsilon_r(\alpha)$ et $e_r(\alpha)$ (respectivement traits fins et épais)

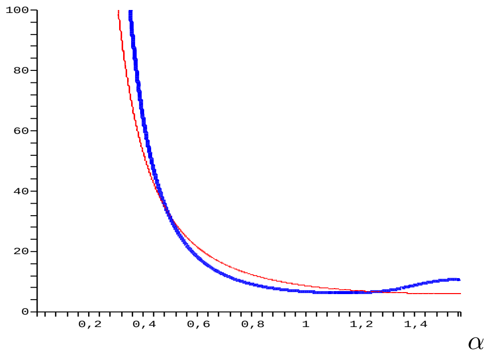
Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $e_r(\alpha)$ en fonction de α :

$e_r(\alpha)$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
α	1.157...	1.461...	1.537...	1.560...	1.567...	1.569...	1.5704...

Ici encore la précision est d'autant meilleure que l'angle en P se rapproche de π.

1.6.3 Cercles vs paraboles

La figure ci-dessous représente les graphes de la fonction $\delta(\alpha)$ pour le cercle et la parabole :



Fonctions δ pour le cercle (trait fin) et la parabole (trait epais)

Pour le cercle et la parabole, δ est petit(≤ 20) pour des valeurs de α plus grandes que 0.6. Par contre l'erreur δ explose lorsque α tend vers 0. La quantité $\delta(\alpha)$ converge lorsque α tend vers $\pi/2$, la valeur limite étant 6 pour le cercle et $\dfrac{54}{5}$ pour la parabole. Pour $0.48909... \leq \alpha \leq 1.25732...$ la majoration $e(\Gamma, V)$ est meilleure pour la parabole que pour le cercle. En effet pour ces valeurs de α, le facteur de rappel est assez petit pour compenser le terme supplémentaire faisant intervenir la dérivée de la courbure qui apparait dans le cas de la parabole.

Chapitre 2

Approximations des courbures des surfaces-I

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons donné des estimations d'erreurs entre une courbure lisse en un point d'une courbe et une courbure discrète. Dans toute la suite, nous allons chercher à obtenir des résultats du même type mais dans le cadre des surfaces de $\mathbb{E}^3$. Etant donné un maillage de $\mathbb{E}^3$ que peut on dire des courbures des surfaces qui passent par les sommets de ce maillage ? Cette question est très générale et on ne pourra pas donner des indications très précises sur les courbures de la surface, mais si le maillage est suffisamment proche de la surface en un sens que nous préciserons, alors, il se trouve que nous pouvons donner des informations assez précises sur les courbures des surfaces passant par les sommets du maillage. Un moyen de restreindre l'ensemble des surfaces que nous voulons étudier est de faire une approximation *à priori* sur les bornes supérieures des courbures normales ainsi que leurs dérivées. Avec ces restrictions et une hypothèse sur le facteur de rappel en un point P de la surface (voir la définition ci-dessous) nous allons pouvoir énoncer un résultat de majoration sur la différence entre le défaut angulaire en P du maillage et une fonction polynomiale particulière des courbures principales en P de la surface Σ. (Théorème 2). Nous en déduirons une estimation d'erreur de la courbure de Gauss de Σ en P en utilisant la courbure discrète $\tilde{k}_d$:

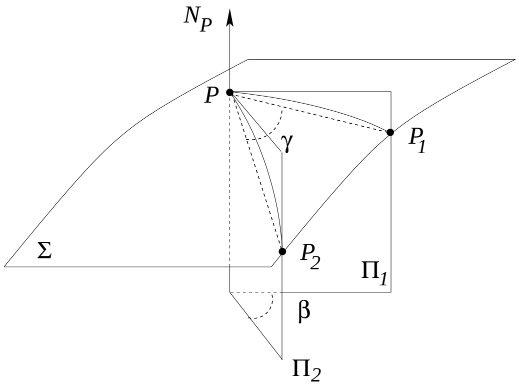
$$\left|\tilde{k}_d - K\right| \leq \frac{M k_{\max}^2}{\Theta |S_n|} \eta_{\max}^2, \tag{2.1}$$

où S_n est le module du maillage et M est une constante strictement positive dépendant du coefficient de rappel $\Omega_\Sigma(P)$, du jet d'ordre 1 des courbures de la surface en P, de n et de l'épaisseur Θ.

2.2 Définitions et notations

2.2.1 Notations

On désigne par P, P_1, P_2 trois points d'une surface Σ, par N_P la normale unitaire de Σ en P, par Π_1 (resp. Π_2) le plan $P + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{PP}_1, \mathrm{N_P})$ (resp. $P + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{PP}_2, \mathrm{N_P})$), par β l'angle entre Π_1 et Π_2 et par γ l'angle de P_1PP_2 (voir la figure ci-dessous).



Soit k_1 (resp. k_2) la fonction courbure le long de la courbe $\Gamma_1 = \Sigma \cap \Pi_1$ (resp. $\Gamma_2 = \Sigma \cap \Pi_2$) et dans la direction de la courbe et soit k_1' (resp. k_2') la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne. On pose :

$$k_{\max} = \max\{\sup_{\Gamma_1} |k_1|, \sup_{\Gamma_2} |k_2|\} \quad \text{et} \quad k'_{\max} = \max\{\sup_{\Gamma_1} |k'_1|, \sup_{\Gamma_2} |k'_2|\}.$$

On désigne par η_i la distance (usuelle) dans $\mathbb{R}^3$ entre P et P_i et on pose :

$$\eta_{\max} = \max\{\eta_1, \eta_2\}, \quad \eta_{\min} = \min\{\eta_1, \eta_2\}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}}.$$

2.2.2 Définitions

DÉFINITION **4** *1. Soit $\Gamma_1 = \Sigma \cap \Pi_1$ et $\Gamma_2 = \Sigma \cap \Pi_2$ deux courbes définies comme précédemment. On pose :*

$$\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P) = \max\{\Omega_{\Gamma_1}(P), \Omega_{\Gamma_2}(P)\},$$

où $\Omega_{\Gamma_1}(P)$ et $\Omega_{\Gamma_2}(P)$ sont les coefficients de rappels de Γ_1 et Γ_2 (définis au chapitre précédent).

2. Le coefficient de rappel de la surface au point P est le nombre réel

$$\Omega_\Sigma(P) = \sup \Omega_\Gamma(P),$$

le maximum étant pris sur toutes les courbes Γ qui s'écrivent sous la forme $\Gamma = \Sigma \cap \Pi$ où Π décrit l'ensemble des plans normaux à la surface Σ passant par P.

On suppose désormais la donnée d'un *n-maillage* M_n de $\mathbb{E}^3$ c'est à dire un $(n+1)$-uplet de points distincts $(n > 2)$ $(P, P_1, ..., P_n) \in (\mathbb{R}^3)^{n+1}$. La réalisation géométrique de M_n, est la réunion dans $\mathbb{R}^3$ des n triangles Euclidiens P_iPP_{i+1}. On le note $\mathcal{M}_n$.

DÉFINITION **5** *1. On appelle un n-maillage M_n de $\mathbb{E}^3$ $(n > 2)$ tout $(n+1)$-uplet de points distincts $(P, P_1, ..., P_n) \in (\mathbb{R}^3)^{n+1}$.*

2. La réalisation géométrique de M_n, est la réunion dans $\mathbb{R}^3$ des n triangles Euclidiens P_iPP_{i+1}. On la note $\mathcal{M}_n$.

3. L'épaisseur Θ du maillage M_n est le nombre réel

$$\Theta = \min_{i=1}^{n} |\sin \gamma_i|,$$

où $\gamma_i = \angle(\overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1})$.

4. Le module du maillage M_n est le nombre réel

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4 \sin \gamma_i} \left(\eta_i \eta_{i+1} - \frac{\cos \gamma_i}{2} (\eta_i^2 + \eta_{i+1}^2) \right),$$

où $\eta_i = |\overrightarrow{PP}_i|$ et $\gamma_i = \angle(\overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1})$,

5. la courbure discrète normalisée par le module est :

$$\tilde{k}_d = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i}{S_n},$$

où S_n est le module du maillage.

DÉFINITION **6** *On dit que $\mathcal{M}_n = (P, P_1, ..., P_n)$ est une approximation linéaire par morceaux de Σ autour du point P si :*

1. $P \in \Sigma$ et $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $P_i \in \Sigma$.

2. La restriction $\pi_{|\mathcal{M}_n} : \mathcal{M}_n \to T_P\Sigma$ est un homéomorphisme sur son image.

2.3 Enoncé du Théorème Principal

THÉORÈME **2** *Soit Σ une surface régulière de $\mathbb{E}^3$ de classe C^2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{M}_n = (P, P_1, \ldots, P_n)$ une approximation linéaire par morceaux de Σ. Pour tout $i = 1, \ldots n$, on note Π_i le plan passant par P, P_i et contenant le vecteur normal en P à la surface. On suppose que :*

- *Les courbes $\Gamma_i = \Sigma \cap \Pi_i$, $i = 1, \ldots, n$ sont des courbes lisses,*
- *$k_{\max}\eta_{\max}\Omega_\Sigma(P) < \pi$,*
- *l'épaisseur Θ du maillage est > 0.*

Alors il existe des fonctions A_n, B_n et C_n polynômiales et homogènes de degré 2 en $\eta_1, \ldots, \eta_n$ (qui ne dépendent que de la configuration du n-maillage par rapport à la surface) telles que :

$$\left| \left(2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\right) - \left(A_n K + B_n k_M^2 + C_n k_m^2\right) \right| \leq M_1 \eta_{\max}^3 + M_2 \eta_{\max}^4, \tag{2.2}$$

M_1 et M_2 étant des constantes dépendant du coefficient de rappel $\Omega_\Sigma(P)$, du jet d'ordre 1 des courbures de la surface en P, de l'entier n et de l'épaisseur Θ.

Remarque

1. Dans ce théorème toutes les notations sont des généralisations évidentes des anciennes notations sauf pour K, k_M et k_m qui désignent respectivement la courbure de Gauss, la plus grande et la plus petite courbure principale. De plus $k_{\max}$ désigne la borne supérieure $sup_\Sigma(|k_M|, |k_m|)$ et $\Omega_\Sigma(P)$ le maximum de $\Omega_\Gamma(P)$ sur toutes les courbes $\Gamma = \Pi \cap \Sigma$ où Π est le plan contenant la normale de Σ en P.
2. Les valeurs des constantes M_1 et M_2 définies dans le théorème 2 sont définies comme suit :
$$C = \frac{1}{2}\Omega_\Sigma(P)^3 \left(\frac{k_{\max}^3}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Sigma(P)\right),$$
$$\Xi_1 = g_1(\frac{1}{2}\Omega_\Sigma(P)k_{\max}\eta_{\max}),$$
où g_1 est définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $\tan\theta = \theta + \theta^2 g_1(\theta)$,
$$\Xi_2 = g_2(\frac{1}{2}\Omega_\Sigma(P)k_{\max}\eta_{\max}),$$
où g_2 est définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :
$$\frac{1}{\cos(\theta)} = 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{\theta^3}{2}g_2(\theta),$$

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{n}{\Theta} k_{\max} \left(C + \frac{1}{4} \Omega_\Sigma^2(P) \Xi_1 k_{\max}^2 \right) \\
&\quad + \frac{n}{\Theta} (1 + \frac{\pi}{8\Omega_\Sigma(P)}) \left(C k_{\max} + \frac{1}{8} \Omega_\Sigma^3(P) \Xi_2 k_{\max}^3 \right), \\
M_2 &= \frac{n\pi^2}{16} \Omega_\Sigma^4(P) \left(1 + \frac{3}{\Theta} \right)^2 k_{\max}^4 + \frac{n}{\Theta} \left(C + \frac{1}{4} \Omega_\Sigma^2(P) \Xi_1 k_{\max}^2 \right)^2 \\
&\quad + \frac{n}{\Theta} C^2 (1 + \frac{\pi}{8\Omega_\Sigma(P)}).
\end{aligned}
$$

3. Le théorème 2 est plus théorique que pratique puisque A_n, B_n et C_n dépendent à la fois des données du n-maillage (qui sont supposées connues) et des données de la surface (qui ne sont pas connues).

On déduit de ce théorème les deux corollaires suivant :

Corollaire **1** *Soit Σ une surface régulière de $\mathbb{E}^3$ de classe C^2.*
Soit $\mathcal{M}_n = (P, P_1, \ldots, P_n)$ une approximation linéaire par morceaux de Σ.
Pour tout $i = 1, \ldots n$, on note Π_i le plan passant par P, P_i et contenant le vecteur normal en P à la surface.
On suppose que :

- *Les courbes $\Gamma_i = \Sigma \cap \Pi_i$, $i = 1, \ldots, n$ sont des courbes lisses,*
- *$k_{\max} \eta_{\max} \Omega_\Sigma(P) < \pi$,*
- *l'épaisseur Θ du maillage est > 0.*

Alors on a :

$$
\begin{aligned}
|2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i - S_n K| &\leq \frac{n}{2\Theta} \left((k_M - k_m)^2 + |k_M^2 - k_m^2| \right) \eta_{\max}^2 \\
&+ M_1 \eta_{\max}^3 + M_2 \eta_{\max}^4,
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

où S_n est le module du maillage.

Corollaire **2** *Soit Σ une surface régulière de $\mathbb{E}^3$ de classe C^2.*
Soit $\mathcal{M}_n = (P, P_1, \ldots, P_n)$ une approximation linéaire par morceaux de Σ.
Pour tout $i = 1, \ldots n$, on note Π_i le plan passant par P, P_i et contenant le vecteur normal en P à la surface.
On suppose que :

- *Les courbes $\Gamma_i = \Sigma \cap \Pi_i$, $i = 1, \ldots, n$ sont des courbes lisses,*
- *$k_{\max} \eta_{\max} \Omega_\Sigma(P) < \pi$,*
- *l'épaisseur Θ du maillage est > 0,*
- *le module S_n du maillage est non nul.*

Alors, on a :

$$\left|\tilde{k}_d - K\right| \leq \frac{Mk^2_{\max}}{\Theta|S_n|}\eta^2_{\max}, \tag{2.4}$$

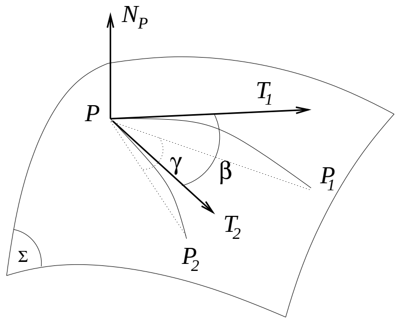
où S_n est le module du maillage et M est une constante strictement positive dépendant du coefficient de rappel $\Omega_\Sigma(P)$, du jet d'ordre 1 des courbures de la surface en P, de n et de l'épaisseur Θ.

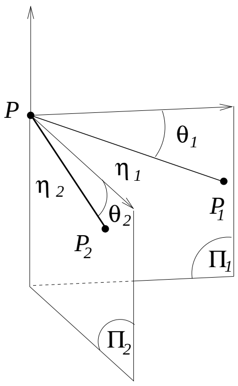
2.4 Preuve du théorème 2

Nous donnons d'abord un lemme calculatoire très simple :

Lemme **7** *Dans la situation décrite par les figures ci-dessus, on a :*

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\beta + \sin\theta_1\sin\theta_2\\ \sin^2\gamma &= \cos^2\theta_1\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2\sin^2\theta_1 - 2\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\beta +\\ &\quad \cos^2\theta_1\cos^2\theta_2\sin^2\beta.\end{aligned}$$





Preuve du lemme 7. – Il suffit de calculer le produit scalaire $< \overrightarrow{PP}_1, \overrightarrow{PP}_2 >$ pour avoir la première formule et le carré de la norme du produit vectoriel $\|\overrightarrow{PP}_1 \wedge \overrightarrow{PP}_2\|^2$ pour la deuxième. $\square$

2.4.1 Lemme principal d'estimation

Le lemme 8 donne une estimation de la différence des deux angles β et γ en fonction des courbures de la surface Σ, la configuration des trois points $\{P_1, P, P_2\}$ et le coefficient de rappel $\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)$.

Lemme **8** *Soit Σ une surface régulière de $\mathbb{E}^3$ de classe C^2 et $\{P_1, P, P_2\} \subset \Sigma$.*

On suppose que :

- *Les courbes $\Gamma_i = \Sigma \cap \Pi_i$, $i = 1, 2$ sont des courbes lisses,*
- $k_{\max}\eta_{\max}\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P) < \pi$,

– $|\sin\gamma| > 0$.

Alors,

$$\left|(\beta-\gamma) - \left(\frac{1}{4\sin(\gamma)}k_1k_2\eta_1\eta_2 - \frac{1}{8}\cot(\gamma)(k_1^2\eta_1^2 + k_2^2\eta_2^2)\right)\right| \leq C_1\eta_{\max}^3 + C_2\eta_{\max}^4,$$

avec :

$$C = \frac{1}{2}\Omega_\Sigma(P)^3\left(\frac{k_{\max}^3}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Sigma(P)\right),$$

$$\Xi_1 = g_1(\frac{1}{2}\Omega_\Sigma(P)k_{\max}\eta_{\max}),$$

où g_1 est définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $\tan\theta = \theta + \theta^2 g_1(\theta)$,

$$\Xi_2 = g_2(\frac{1}{2}\Omega_\Sigma(P)k_{\max}\eta_{\max}),$$

où g_2 est définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par :

$$\frac{1}{\cos(\theta)} = 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{\theta^3}{2}g_2(\theta),$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\Theta}k_{\max}\left(C + \frac{1}{4}\Omega_\Sigma^2(P)\Xi_1 k_{\max}^2\right)\\
&\quad + \frac{1}{\Theta}(1 + \frac{\pi}{8\Omega_\Sigma(P)})\left(Ck_{\max} + \frac{1}{8}\Omega_\Sigma^3(P)\Xi_2 k_{\max}^3\right),\\
C_2 &= \frac{\pi^2}{16}\Omega_\Sigma^4(P)\left(1 + \frac{3}{\Theta}\right)^2 k_{\max}^4 + \frac{1}{\Theta}\left(C + \frac{1}{4}\Omega_\Sigma^2(P)\Xi_1 k_{\max}^2\right)^2\\
&\quad + \frac{1}{\Theta}C^2(1 + \frac{\pi}{8\Omega_\Sigma(P)}).
\end{aligned}$$

2.4.2 Preuve du lemme 8

Nous donnons la preuve du lemme 8 en quatre étapes.

2.4.3 Etape 1

Soit

$$\beta - \gamma = \frac{\cos\beta - \cos\gamma}{-\sin\gamma} + \int_\gamma^\beta (\beta - t)\cos t dt,$$

le développement de Taylor-Laplace de la fonction cosinus entre γ et β. A l'aide du lemme préparatoire on en déduit :

$$\frac{\cos\beta - \cos\gamma}{-\sin\gamma} = -l_1\cot\gamma + l_2\frac{1}{\sin\gamma},$$

avec,

$$l_1 = \frac{1}{\cos\theta_1 \cos\theta_2} - 1, \quad l_2 = \tan\theta_1 \tan\theta_2.$$

Ainsi la différence $\beta - \gamma$ peut s'écrire :

$$\beta - \gamma = -l_1 \cot\gamma + l_2 \frac{1}{\sin\gamma} + \int_\gamma^\beta (\beta - t)\cos t dt.$$

On a :

$$l_1 = \frac{1}{8}(k_1^2\eta_1^2 + k_2^2\eta_2^2) + O(\eta_{\max}^3), \quad l_2 = \frac{1}{4}k_1k_2\eta_1\eta_2 + O(\eta_{\max}^3),$$

et,

$$\int_\gamma^\beta (\beta - t)\cos t dt = O(\eta_{\max}^4).$$

La preuve se ramène alors à trouver une borne supérieure explicite de la forme $C_1\eta_{\max}^3 + C_2\eta_{\max}^4$ à la place du $O(\eta_{\max}^3)$.

2.4.4 Etape 2

Le but de cette partie est de montrer que :

$$\left|\int_\gamma^\beta (\beta - t)\cos t dt\right| \leq \frac{\pi^2}{16}\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}^4(P)\left(1 + \frac{3}{\sin\gamma}\right)^2 k_{\max}^4 \eta_{\max}^4.$$

On observe d'abord que β est dans $[0, \pi[$ puisqu'il s'agit d'un angle entre deux plans(non orientés) et que $\gamma \in [0, \pi[$ également. Ainsi :

$$|\beta - \gamma| \leq \pi,$$

et on a la formule ci-dessous :

$$|\beta - \gamma| \leq \frac{\pi}{2}\left(|\cos\beta - \cos\gamma| + |\sin\beta - \sin\gamma|\right).$$

En effet :

$$\begin{aligned} |\cos\beta - \cos\gamma| + |\sin\beta - \sin\gamma| &= 2|\cos(\tfrac{\beta+\gamma}{2})\sin(\tfrac{\beta-\gamma}{2})| \\ &\quad +2|\sin(\tfrac{\beta+\gamma}{2})\sin(\tfrac{\beta-\gamma}{2})|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |\cos\beta - \cos\gamma| &+ |\sin\beta - \sin\gamma| \\ &\geq 2|\sin(\tfrac{\beta-\gamma}{2})|\left(|\cos(\tfrac{\beta+\gamma}{2})| + |\sin(\tfrac{\beta+\gamma}{2})|\right). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|\cos(\frac{\beta+\gamma}{2})| + |\sin(\frac{\beta+\gamma}{2})| \geq 1.$$

Par suite,

$$|\cos\beta - \cos\gamma| + |\sin\beta - \sin\gamma| \geq 2|\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})| \geq 2\frac{2}{\pi}\left|\frac{\beta-\gamma}{2}\right|,$$

puisque $\left|\frac{\beta-\gamma}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2}$.
En utilisant le lemme 7, il est facile de voir que :

$$|\cos\beta - \cos\gamma| \leq 2\sin^2\theta_{\max} \quad \text{et} \quad |\sin^2\beta - \sin^2\gamma| \leq 6\sin^2\theta_{\max},$$

où $\theta_{\max} = \max\{|\theta_1|, |\theta_2|\}$.
La dernière inégalité implique que :

$$|\sin\beta - \sin\gamma| \leq \frac{6}{\sin\beta + \sin\gamma}\sin^2\theta_{\max} \leq \frac{6}{\sin\gamma}\sin^2\theta_{\max}.$$

Par conséquent, on a :

$$|\beta-\gamma| \leq \pi\left(1+\frac{3}{\sin\gamma}\right)\theta_{\max}^2 \leq \frac{\pi}{4}\Omega^2_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)\left(1+\frac{3}{\sin\gamma}\right)k^2_{\max}\eta^2_{\max}.$$

Finalement,

$$\begin{array}{rcl} |\int_\gamma^\beta(\beta-t)\cos t dt| & \leq & \int_\gamma^\beta|\beta-t|dt \\ & \leq & |\beta-\gamma|^2 \leq \frac{\pi^2}{16}\Omega^4_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)(1+\frac{3}{\sin\gamma})^2k^4_{\max}\eta^4_{\max}, \end{array}$$

comme annoncé plus haut.

2.4.5 Etape 3

Dans cette partie on montre que :

$$\begin{array}{rcl} |l_2 - \frac{1}{4}k_1k_2\eta_1\eta_2| & \leq & k_{\max}(C+\frac{1}{4}\Omega^2_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)\Xi_1k^2_{\max})\eta^3_{\max} \\ & & +(C+\frac{1}{4}\Omega^2_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)\Xi_1k^2_{\max})^2\eta^4_{\max}, \end{array}$$

où

$$C = 2\Omega_\Gamma(P)^3\left(\frac{k^3_{\max}}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Gamma(P)\right)\eta_{\max},$$

et

$$\Xi_1 = g_1(\frac{1}{2}\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)k_{\max}\eta_{\max}),$$

avec g_1 défini sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par :

$$\tan\theta = \theta + \theta^2 g_1(\theta).$$

Puisque

$$\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P) k_{\max}\eta_{\max} < \pi,$$

on a :

$$\Xi_1 < +\infty.$$

On rappelle que $l_2 = \tan\theta_1 \tan\theta_2$. Le développement de Taylor-Laplace de $\tan\theta$ est :

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \theta + \int_0^\theta (\theta - t)\tan''(t)dt.\\ &= \theta + \theta^2 \int_0^1 (1-u)\tan''(\theta u)du.\end{aligned}$$

On a par conséquent :

$$g_1(\theta) = \int_0^1 (1-u)\tan''(\theta u)du.$$

On pose : $e(\theta) = \theta - \frac{k}{2}\eta$.
Ainsi, on a :

$$\tan\theta = \frac{k}{2}\eta + e(\theta) + g_1(\theta).$$

D'après

$$l_2 = \tan\theta_1\tan\theta_2 = \left(\frac{1}{2}\eta_1 k_2 + e(\theta_1) + \theta_1^2 g_1(\theta_1)\right)\left(\frac{1}{2}\eta_2 k_2 + e(\theta_2) + \theta_2^2 g_1(\theta_2)\right),$$

on en déduit que :

$$l_2 - \frac{1}{4}k_1 k_2 \eta_1\eta_2 = E_{l_2},$$

où,

$$\begin{aligned}E_{l_2} &= \tfrac{1}{2}\eta_1 k_1\left(e(\theta_2) + \theta_2^2 g_1(\theta_2)\right) + \tfrac{1}{2}\eta_2 k_2\left(e(\theta_1) + \theta_1^2 g_1(\theta_1)\right)\\ &\quad + \left(e(\theta_1) + \theta_1^2 g_1(\theta_1)\right)\left(e(\theta_2) + \theta_2^2 g_1(\theta_2)\right).\end{aligned}$$

D'après les résultats du chapitre 1, on a :

$$|e(\theta)| \le C\eta_{\max}^2.$$

Puisque $g_1(\theta)$ est une fonction impaire croissante,

$$|g_1(\theta)| \le g_1(\theta_{\max}).$$

On obtient finalement :

$$|E_{l_2}| \le k_{\max}\left(C + \frac{1}{4}\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}^2(P)\Xi_1 k_{\max}^2\right)\eta_{\max}^3 + \left(C + \frac{1}{4}\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}^2(P)\Xi_1 k_{\max}^2\right)^2\eta_{\max}^4.$$

2.4.6 Etape 4

En utilisant des techniques similaires à celles de l'étape précédente, un calcul un peu fastidieux montre que :

$$\begin{aligned}|l_1 - \tfrac{1}{8}(k_1\eta_1^2 + k_2^2\eta_2^2)| \quad &\leq \quad (1 + \frac{1}{8}\eta_{\max}k_{\max})((Ck_{\max} + \frac{1}{8}\Omega^3_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)\Xi_2 k^3_{\max})\eta^3_{\max} \\ &\quad +C^2\eta^4_{\max}),\end{aligned}$$

où

$$C = 2\Omega_\Gamma(P)^3\left(\frac{k^3_{\max}}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Gamma(P)\right)\eta_{\max},$$

est la constante qui apparait dans le théorème 1 sur les courbes, Ξ_2 désigne $g_2(\frac{1}{2}\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)k_{\max}\eta_{\max})$ avec g_2 définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par :

$$\frac{1}{\cos(\theta)} = 1 + \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{\theta^3}{2}g_2(\theta).$$

Puisque

$$\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)k_{\max}\eta_{\max} < \pi,$$

on a également

$$\Xi_2 < +\infty.$$

En additionnant les majorations précédentes, on obtient :

$$\left|(\beta-\gamma) - \left(\frac{1}{4\sin(\gamma)}k_1k_2\eta_1\eta_2 - \frac{1}{8}\cot(\gamma)(k_1^2\eta_1^2 + k_2^2\eta_2^2)\right)\right| \leq C_1\eta^3_{\max} + C_2\eta^4_{\max},$$

avec,

$$\begin{aligned}C_1 \quad &= \quad \frac{1}{|\sin\gamma|}k_{\max}\left(C + \frac{1}{4}\Omega^2_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)\Xi_1 k^2_{\max}\right) \\ &\quad +|\cot\gamma|(1 + \frac{\pi}{8\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)})\left(Ck_{\max} + \frac{1}{8}\Omega^3_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)\Xi_2 k^3_{\max}\right), \\ C_2 \quad &= \quad \frac{\pi^2}{16}\Omega^4_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)\left(1 + \frac{3}{|\sin\gamma|}\right)^2 k^4_{\max} + \frac{1}{|\sin\gamma|}\left(C + \frac{1}{4}\Omega^2_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)\Xi_1 k^2_{\max}\right)^2 \\ &\quad +|\cot\gamma|C^2(1 + \frac{\pi}{8\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)}),\end{aligned}$$

où on a posé :

$$C = \frac{1}{2}\Omega_{\Gamma_1,\Gamma_2}(P)^3\left(\frac{k^3_{\max}}{8}\eta_{\max} + \frac{k'_{\max}}{3}\Omega_\Gamma(P)\right).$$

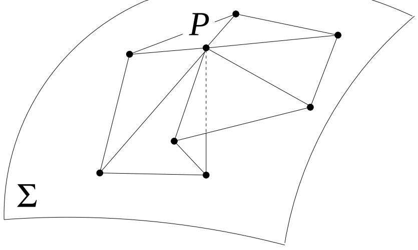
On déduit facilement le Théorème 2 en utilisant le lemme 8 pour chaque triangle P_iPP_{i+1}. Néammoins il y a dans le cas des surfaces une légère simplification car $\sum_{i=1}^n \beta_i$ est remplacé par 2π. L'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi,$$

est vérifiée car $\mathcal{M}_n$ est une approximation par morceaux de Σ et donc, par définition, la projection orthogonale :

$$\pi : \mathcal{M}_n \longrightarrow T_P\Sigma,$$

est 1-1 linéaire par morceaux sur son image. L'image ci-dessous montre un cas où π n'est pas 1-1 (et donc $\mathcal{M}_n$ n'est pas une approximation par morceaux de Σ) et on a évidement $\sum_{i=1}^n \beta_i \neq 2\pi$ (On rappelle que



$0 \leq \beta_i < \pi$).
Les Constantes M_1 et M_2 qui apparaissent dans le Théorème 2 ont les expressions suivantes :

$$M_1 = nC_1 \quad \text{and} \quad M_2 = n\widetilde{C}_2$$

où C_1 est la constante qui apparait dans le lemme principal d'estimation et $\widetilde{C}_2$ a la même expression que C_2 mais où $\sin\gamma$ est remplacé par l'épaisseur $\Theta = \min_{i\in\{1,\dots,n\}} |\sin\gamma_i|$. □

2.5 Preuve du corollaire 1

On suppose que le plan Π_i normal à la surface contenant les points P et Π_i est défini par l'angle ϑ_i. On pose $c_i = \cos\vartheta_i$, et $s_i = \sin\vartheta_i$. Après quelques calculs, on obtient :

$$A_n = \frac{1}{4\sin\gamma_i}\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i\eta_{i+1}(c_i^2 s_{i+1}^2 + s_i^2 c_{i+1}^2) - \cos\gamma_i(\eta_i^2 c_i^2 s_i^2 + \eta_{i+1}^2 c_{i+1}^2 s_{i+1}^2)\right),$$

$$B_n = \frac{1}{4\sin\gamma_i}\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i\eta_{i+1}c_i^2c_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\cos\gamma_i(\eta_i^2 c_i^4 + \eta_{i+1}^2 c_{i+1}^4)\right),$$

$$C_n = \frac{1}{4\sin\gamma_i}\sum_{i=1}^{n}\left(\eta_i\eta_{i+1}s_i^2 s_{i+1}^2 - \frac{1}{2}\cos\gamma_i(\eta_i^2 s_i^4 + \eta_{i+1}^2 s_{i+1}^4)\right).$$

Il est facile de voir que l'on a :

$$S_n = A_n + B_n + C_n.$$

D'où :

$$|A_nK+B_nk_M^2+C_nk_m^2-S_nK| \leq \frac{|B_n+C_n|}{2}(k_M-k_m)^2+\frac{|B_n-C_n|}{2}|k_M^2-k_m^2|.$$

Pour finir la majoration, on utilise les inégalités suivantes :

$$|B_n| \leq \frac{n}{2\Theta}\eta_{\max}^2$$

et

$$|C_n| \leq \frac{n}{2\Theta}\eta_{\max}^2.$$

□

2.6 Preuve du corollaire 2

D'après le corollaire 1, on a :

$$\begin{aligned}|(2\pi - \textstyle\sum_{i=1}^n \gamma_i) - S_nK| \quad &\leq \quad \frac{n}{2\Theta}\left((k_M-k_m)^2 + |k_M^2 - k_m^2|\right)\eta_{\max}^2 \\ &\quad +M_1\eta_{\max}^3 + M_2\eta_{\max}^4,\end{aligned}$$

avec

$$S_n = A_n + B_n + C_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\sin\gamma_i}\left(\eta_i\eta_{i+1} - \frac{\cos\gamma_i}{2}(\eta_i^2+\eta_{i+1}^2)\right).$$

On en déduit que :

$$\left|\left(2\pi - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right) - S_nK\right| \leq \frac{n}{2\Theta}6k_{\max}^2\eta_{\max}^2\left(M_1\eta_{\max} + M_2\eta_{\max}^2\right).$$

En divisant par $|S_n|$, on en déduit le résultat. □

Chapitre 3

Approximations des courbures des surfaces-II

3.1 Introduction

Soit Σ une surface régulière de classe C^2 au moins et P un point de Σ. Dans la chapitre précédent, on a donné sous certaines hypothèses, la majoration suivante entre la courbure discrète $\tilde{k}_d$ et la courbure de Gauss de Σ en P :

$$\left|\tilde{k}_d - K\right| \leq \frac{Mk_{\max}^2}{\Theta|S_n|}\eta_{\max}^2, \tag{3.1}$$

où S_n est le module du maillage et M est une constante strictement positive dépendant du coefficient de rappel $\Omega_\Sigma(P)$, du jet d'ordre 1 des courbures de la surface en P, de n et de l'épaisseur Θ. Dans ce chapitre, nous allons donner une majoration qui fait intervenir une autre courbure discrète k_d :

$$|k_d - k| \leq N(\eta_{\max}, k_{\max}, k'_{\max}, \Omega_\Sigma(P), \Theta, \sigma, \Delta, \Lambda, n), \tag{3.2}$$

où k est un polynôme homogène en les courbures de la surfaces, $N(\ldots)$ est une fonction qui dépend du 1-jet des fonctions courbures, du coefficient de rappel $\Omega_\Sigma(P)$ et des données du n-maillages (comme l'épaisseur Θ, le déplacement Δ, la déformation en longueur Λ, $\eta_{\max}$, le nombre de points n du maillage et σ). Cette nouvelle inégalité diffère de la précédente sur deux points fondamentaux :

- on a fait apparaître un polynôme homogène de degré 2 en les courbures principales dont les coefficients ne dépendent que de l'entier n;
- en revanche, la fonction $N(\ldots)$ n'a pas de limite nulle en général et peut même tendre vers l'infini ;

- nous aurons intéret à écrire $N = N_1\eta_{\max} + N_2\eta_{\max}^2$, où N_1 et N_2 sont des fonctions dépendant des mêmes variables que la fonction $N(\ldots)$. Il faudra prendre garde qu'en général N_1 et N_2 ne tendent pas vers 0 avec $\eta_{\max}$.

On verra l'intérêt de cette nouvelle majoration dans le chapitre suivant lorsque nous traiterons le cas des paramétrisation conformes.

3.2 Définitions et notations

DÉFINITION **7** *1. Le déplacement d'un n-maillage $\mathcal{M}_n = (P, P_1, \ldots, P_n)$ est le nombre*

$$\Delta = \frac{\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |\overrightarrow{PP}_{i+1} + \overrightarrow{PP}_{i-1} - 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i|}{\eta_{\max}^2}.$$

2. La déformation en longueur de $\mathcal{M}_n$ est :

$$\Lambda = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{\eta_{\max}^2},$$

on pose :

$$\sigma = \frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}}.$$

Pour tout maillage $\mathcal{M}_n = (P, P_1, \ldots, P_n)$, on notera :

- $A = \dfrac{\mathrm{Aire}(\mathcal{M}_\mathrm{n})}{n}$,
- $k_d = \dfrac{2\pi - \sum_{i=1}^n \gamma_i}{A}$, où $\gamma_i = \angle(\overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1})$,
- on notera : $k = \dfrac{n}{8\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\left(\kappa_1(\dfrac{2\pi}{n})K + \kappa_2(\dfrac{2\pi}{n})(k_M^2 + k_m^2)\right)$, où k_M et k_m désignent les courbures principales de la surface en P,

$$\kappa_1(x) = -2\cos^2 x - \cos x + 3, \qquad \kappa_2(x) = \cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}.$$

3.3 Enoncé du Théorème principal

THÉORÈME **3** *Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{E}^3$ une surface régulière de classe C^2.*
Soit $\mathcal{M}_n = (P, P_1, \ldots, P_n)$ un n-maillage $(n \neq 4, n > 2)$ qui est une approximation linéaire par morceaux de Σ.
Pour tout $i = 1, \ldots n$, on note Π_i le plan passant par P, P_i et contenant le vecteur normal en P à la surface.
On suppose que :

– *Pour tout* $i = 1 \ldots n$, *les courbes* $\Gamma_i = \Sigma \cap \Pi_i$ *sont des courbes lisses,*
– $k_{\max}\eta_{\max}\Omega_\Sigma(P) < \pi$,
– *l'épaisseur* Θ *du maillage est* > 0.

Alors, on a :

$$|k_d - k| \leq N(\eta_{\max}, k_{\max}, k'_{\max}, \Omega_\Sigma(P), \Theta, \sigma, \Delta, \Lambda, n), \qquad (3.3)$$

où $N(\ldots)$ *est une fonction qui dépend du 1-jet des fonctions courbures, du coefficient de rappel* $\Omega_\Sigma(P)$ *et des données du n-maillages (comme l'épaisseur* Θ*, le déplacement* Δ*, la déformation en longueur* Λ*,* $\eta_{\max}$*,* n *et* σ*).*

Si $n = 4$ le résultat fait intervenir la torsion géodésique de la surface Σ au point P.

3.4 Preuve du Théorème 3

3.4.1 Déplacement et déformation en longueur

Le déplacement donne une borne supérieure de la variation de l'aire des triangles.

Fait 1. – $|\mathrm{Aire}(\mathrm{P_iPP_{i+1}}) - \mathrm{Aire}(\mathrm{P_{i-1}PP_i})| \leq \frac{1}{2}\Delta\eta_{\max}^3$.

Preuve. – Soit $V_i = \overrightarrow{PP}i + 1 + \overrightarrow{PP}_{i-1} - 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{PP}_i \wedge \overrightarrow{PP}i+1 & = & \overrightarrow{PP}_i \wedge (-\overrightarrow{PP}_{i-1} + 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i + V_i) \\ & = & \overrightarrow{PP}_{i-1} \wedge \overrightarrow{PP}_i + \overrightarrow{PP}_i \wedge V_i. \end{array}$$

Par suite,

$$\Big| \|\overrightarrow{PP}_i \wedge \overrightarrow{PP}_{i+1}\| - \|\overrightarrow{PP}_{i-1} \wedge \overrightarrow{PP}_i\| \Big| \leq \|\overrightarrow{PP}_i\|\|V_i\| \leq \Delta\eta_{\max}^3.$$

□

Fait 2. – $|A - \mathrm{Aire}(\mathrm{P_iPP_{i+1}})| \leq \dfrac{\mathrm{n}-1}{4}\Delta\eta_{\max}^3$.

Preuve. – Pour tout entier $n \geq 3$, majorons

$$D(n) = |nA - n\mathrm{Aire}(\mathrm{P_iPP_{i+1}})|.$$

On a pour tout entier $n \geq 3$:

$$\begin{array}{rcl} D(n) & \leq & \sum_{k=1}^{n-1} |\mathrm{Aire}(\mathrm{P_{i+k}PP_{i+k+1}}) - \mathrm{Aire}(\mathrm{P_iPP_{i+1}})| \\ & \leq & \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} |\mathrm{Aire}(\mathrm{P_{i+j+1}PP_{i+j+2}}) - \mathrm{Aire}(\mathrm{P_{i+j}PP_{i+j+1}})| \\ & \leq & \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{1}{2}\Delta\eta_{\max}^3 \\ & \leq & \frac{n(n-1)}{4}\Delta\eta_{\max}^3. \end{array}$$

On a utilisé implicitement la n-périodicité des P_i pour $i \in \mathbb{N}$, (par exemple $P_{n+1} = P_1$). $\square$

Fait 3. – $\left|\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{\mathrm{Aire(P_iPP_{i+1})}}\right| \leq (n-1)\dfrac{\sigma^4\Delta}{\Theta^2}\dfrac{1}{\eta_{\max}}$.

Preuve. – Pour simplifier on pose : $A_i = \mathrm{Aire(P_iPP_{i+1})} = \frac{1}{2}\eta_\mathrm{i}\eta_\mathrm{i+1}\sin\gamma_\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{A} - \frac{1}{A_i}\right| &= \left|\frac{A - A_i}{AA_i}\right| \\ &\leq \frac{n-1}{4}\Delta\eta_{\max}^3\frac{1}{AA_i} \\ &\leq (n-1)\Delta\eta_{\max}^3\frac{1}{\Theta^2\eta_{\min}^4}.\end{aligned}$$

Puisque $\eta_{\min} = \dfrac{1}{\sigma}\eta_{\max}$, on obtient le résultat souhaité. $\square$

La déformation en longueur donne une borne supérieure de la variation en longueur des arêtes.

Fait 4. – $|\eta_i - \bar{\eta}| \leq \Lambda\eta_{\max}^2$.

La preuve est immédiate, puisque $\bar{\eta} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\eta_i$. Le déplacement et la déformation en longueur permettent de contrôler la variation des angles des triangles.

Fait 5. – $|\sin\gamma_i - \sin\gamma_{i-1}| \leq (\Delta + 4\Lambda)\eta_{\max} + 2\Lambda^2\eta_{\max}^2$.

Preuve. – Soit $\Lambda_i = \dfrac{\eta_i - \eta_{\max}}{\eta_{\max}^2}$. On a $|\Lambda_i| \leq \Lambda$. D'après

$$\eta_i = \eta_{\max} + \Lambda_i\eta_{\max}^2,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}\eta_i\eta_{i+1}\sin\gamma_i - \eta_{i-1}\eta_i\sin\gamma_{i-1} &= (\sin\gamma_i - \sin\gamma_{i-1})\eta_{\max}^2 \\ &\quad -(\Lambda_{i-1}\eta_i + \Lambda_i\eta_{i-1})\sin\gamma_{i-1}\eta_{\max}^2 \\ &\quad +(\Lambda_i\eta_{i+1} + \Lambda_{i+1}\eta_i)\sin\gamma_i\eta_{\max}^2 \\ &\quad +(\Lambda_{i-1}\Lambda_i\sin\gamma_{i-1} - \Lambda_i\Lambda_{i+1}\sin\gamma_i)\eta_{\max}^4.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left|\eta_{\max}^2(\sin\gamma_i - \sin\gamma_{i-1})\right| \leq |\eta_i\eta_{i+1}\sin\gamma_i - \eta_{i-1}\eta_i\sin\gamma_{i-1}| + 4\Lambda\eta_{\max}^3 + 2\Lambda^2\eta_{\max}^4.$$

D'après le fait 1, on a :

$$|\eta_i\eta_{i+1}\sin\gamma_i - \eta_{i-1}\eta_i\sin\gamma_{i-1}| \le \Delta\eta_{\max}^3.$$

□

Fait 6. – $|\cos\gamma_i - \cos\gamma_{i-1}| \le \left(2 + \dfrac{2\sigma}{\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right|}\right)\Lambda\eta_{\max} + \dfrac{2\sigma\Delta}{\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right|}\eta_{\max}^2.$

Preuve. – Comme plus haut, on pose $V_i = \overrightarrow{PP}_{i+1} + \overrightarrow{PP}_{i-1} - 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i$. On a :

$$\begin{array}{rcl} 2\cos(\frac{2\pi}{n}) < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i-1} > & = & < \overrightarrow{PP}_{i+1} + \overrightarrow{PP}_{i-1}, \overrightarrow{PP}_{i-1} > \\ & & - < V_i, \overrightarrow{PP}_{i-1} > \\ & = & < \overrightarrow{PP}_{i+1}, \overrightarrow{PP}_{i-1} > + \eta_{i-1}^2 \\ & & - < V_i, \overrightarrow{PP}_{i-1} > . \end{array}$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} 2\cos(\frac{2\pi}{n})(< \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i-1} > & - & < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1} >) \\ & = & \eta_{i-1}^2 - \eta_{i+1}^2 + < V_i, \overrightarrow{PP}_{i+1} - \overrightarrow{PP}_{i-1} > \end{array}$$

et,

$$2\eta_i\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right| |\eta_{i-1}\cos\gamma_{i-1} - \eta_{i+1}\cos\gamma_i| \le |\eta_{i-1}^2 - \eta_{i+1}^2| + 2\Delta\eta_{max}^3.$$

Mais,

$$|\eta_{i-1}^2 - \eta_{i+1}^2| = |\eta_{i-1} - \eta_{i+1}||\eta_{i-1} + \eta_{i+1}| \le 2\Lambda\eta_{\max}^3.$$

Puisque $\eta_i \ge \eta_{\min} = \dfrac{1}{\sigma}\eta_{\max}$, on obtient :

$$|\eta_{i-1}\cos\gamma_{i-1} - \eta_{i+1}\cos\gamma_i| \le \frac{2\sigma\Lambda}{\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right|}\eta_{\max}^2 + \frac{2\sigma\Delta}{\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right|}\eta_{\max}^3.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{array}{rcl} \eta_{\max}(\cos\gamma_i - \cos\gamma_{i-1}) & = & (\eta_{\max} - \eta_{i+1})\cos\gamma_i - (\eta_{\max} - \eta_{i-1})\cos\gamma_{i-1} \\ & + & \eta_{i+1}\cos\gamma_i - \eta_{i-1}\cos\gamma_{i-1}. \end{array}$$

Donc,

$$\begin{array}{rcl} \eta_{\max}|\cos\gamma_i - \cos\gamma_{i-1}| & \le & |\eta_{\max} - \eta_{i+1}| + |\eta_{\max} - \eta_{i-1}| \\ & + & |\eta_{i-1}\cos\gamma_{i-1} - \eta_{i+1}\cos\gamma_i|. \end{array}$$

Par suite,

$$|\cos\gamma_i - \cos\gamma_{i-1}| \le 2\Lambda\eta_{\max} + \frac{2\sigma\Lambda}{\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right|}\eta_{\max} + \frac{2\sigma\Delta}{\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right|}\eta_{\max}^2.$$

$\square$

Fait 7. – $|\gamma_i - \gamma_{i-1}| \leq F_1\eta_{\max} + F_2\eta_{\max}^2$ *avec,*

$$F_1 = \frac{\pi}{2}\left(6\Lambda + \frac{2\sigma\Lambda}{\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right|} + \Delta\right) \quad et \quad F_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2\sigma\Delta}{\left|\cos(\frac{2\pi}{n})\right|} + 2\Lambda^2\right).$$

Preuve. – On a (voir étape 2 de la preuve du théorème principal d'estimation)

$$|\gamma_i - \gamma_{i-1}| \leq \frac{\pi}{2}\left(|\cos\gamma_i - \cos\gamma_{i-1}| + |\sin\gamma_i - \sin\gamma_{i-1}|\right).$$

$\square$

Fait 8. – *Soit* $\bar{\gamma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i$, *on a :*

$$|\bar{\gamma} - \gamma_i| \leq \frac{n-1}{2}F_1\eta_{\max} + \frac{n-1}{2}F_2\eta_{\max}^2.$$

Preuve. – Puisque,

$$|\gamma_{i+k} - \gamma_i| \leq kF_1\eta_{\max} + kF_2\eta_{\max}^2,$$

on a :

$$n|\bar{\gamma} - \gamma_i| \leq \left|\sum_{k=1}^{n-1}(\gamma_{i+k} - \gamma_i)\right| \leq \frac{n(n-1)}{2}(F_1\eta_{\max} + F_2\eta_{\max}^2).$$

$\square$

Fait 9. – $\left|\frac{2\pi}{n} - \bar{\gamma}\right| \leq \frac{\pi}{4}\Omega_\Sigma^2(P)k_{\max}^2\left(1 + \frac{3}{\Theta}\right)\eta_{\max}^2.$

Preuve. – On a vu dans la preuve du théorème principal d'estimation que (étape 2) :

$$|\beta_i - \gamma_i| \leq \frac{\pi}{4}\Omega_\Sigma^2(P)k_{\max}^2\left(1 + \frac{3}{\sin\gamma_i}\right)\eta_{\max}^2.$$

Donc,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\right| \leq n\frac{\pi}{4}\Omega_\Sigma^2(P)k_{\max}^2\left(1 + \frac{3}{\Theta}\right)\eta_{\max}^2.$$

$\square$

Fait 10. – *On a :*

$$\left|\gamma_i - \frac{2\pi}{n}\right| \leq \frac{n-1}{2}F_1\eta_{\max} + \left(\frac{\pi}{4}\Omega_\Sigma^2(P)k_{\max}^2\left(1 + \frac{3}{\Theta}\right) + \frac{n-1}{2}F_2\right)\eta_{\max}^2$$

$$\left|\beta_i - \frac{2\pi}{n}\right| \leq \frac{n-1}{2}F_1\eta_{\max} + \left(\frac{2\pi}{4}\Omega^2_\Sigma(P)k^2_{\max}\left(1+\frac{3}{\Theta}\right) + \frac{n-1}{2}F_2\right)\eta^2_{\max}.$$

Pour simplifier on écrit :

$$\begin{aligned}\left|\beta_i - \frac{2\pi}{n}\right| &\leq F_3\eta_{\max} + F_4\eta^2_{\max}\\ \left|\gamma_i - \frac{2\pi}{n}\right| &\leq F_3\eta_{\max} + F_5\eta^2_{\max}.\end{aligned}$$

Preuve. – Il suffit d'observer que :

$$\left|\gamma_i - \frac{2\pi}{n}\right| \leq |\gamma_i - \bar{\gamma}| + \left|\bar{\gamma} - \frac{2\pi}{n}\right|,$$

et,

$$\left|\beta_i - \frac{2\pi}{n}\right| \leq |\beta_i - \gamma_i| + \left|\gamma_i - \frac{2\pi}{n}\right|.$$

□

3.4.2 Simplification à l'aide du défaut angulaire moyen

On rappelle que l'on a :

$$\beta_i - \gamma_i = \delta_i + O(\eta^3_{\max}),$$

avec,

$$\delta_i = \frac{1}{4\sin(\gamma_i)}k_ik_{i+1}\eta_i\eta_{i+1} - \frac{1}{8}\cot(\gamma_i)(k_i^2\eta_i^2 + k_{i+1}^2\eta_{i+1}^2).$$

Ainsi pour une approximation linéaire par morceaux :

$$2\pi - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i = \sum_{i=1}^{n}\delta_i + O(\eta^3_{\max}),$$

et la seule difficulté est de simplifier la quantité $\sum_{i=1}^n \delta_i$.

DÉFINITION 8 *Le défaut angulaire moyen d'un n-maillage de Σ au triangle P_iPP_{i+1} est la quantité :*

$$\mu_i = \frac{1}{8A}\left(k_ik_{i+1} - \cos(\frac{2\pi}{n})k_i^2\right)\bar{\eta}^4.$$

Lemme **9** *Soit M_n un n-maillage alors, on a :*

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\delta_i-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right|\leq D_1\eta_{\max}^3+D_2\eta_{\max}^4,$$

où D_1 et D_2 dépendent du 1-jet des fonctions courbures, du facteur de rappel $\Omega_\Sigma(P)$ et des données du n-maillage (les expressions précises sont données dans la preuve).

Preuve du lemme 8. – D'après le lemme principal d'estimation (lemme 6), on a :

$$\begin{array}{rl}|\delta_i & - \quad \frac{1}{4\eta_i\eta_{i+1}\sin\gamma_i}(k_ik_{i+1}\eta_i^2\eta_{i+1}^2-\frac{1}{2}\cos\gamma_i\eta_i\eta_{i+1}(k_i^2\eta_i^2+k_{i+1}^2\eta_{i+1}^2))| \\ & \leq \quad C_1\eta_{\max}^3+C_2\eta_{\max}^4.\end{array}$$

On remarque que :

$$\left|k_ik_{i+1}\eta_i^2\eta_{i+1}^2-\frac{1}{2}\cos\gamma_i\eta_i\eta_{i+1}(k_i^2\eta_i^2+k_{i+1}^2\eta_{i+1}^2)\right|\leq 2k_{\max}^2\eta_{\max}^4.$$

Par suite , d'après le fait 3 on a :

$$\begin{array}{rl}|\delta_i & - \quad \frac{1}{8A}(k_ik_{i+1}\eta_i^2\eta_{i+1}^2-\frac{1}{2}\cos\gamma_i\eta_i\eta_{i+1}(k_i^2\eta_i^2+k_{i+1}^2\eta_{i+1}^2))| \\ & \leq \quad (C_1+C_3)\eta_{\max}^3+C_2\eta_{\max}^4,\end{array}$$

avec,

$$C_3=\frac{2(n-1)k_{\max}^2\sigma^4\Delta}{\Theta^2}.$$

Puisque,

$$\cos\gamma_i=\frac{<\overrightarrow{PP}_i,\overrightarrow{PP}_{i+1}>}{\eta_i\eta_{i+1}},$$

on obtient :

$$\begin{array}{rl}|\delta_i & - \quad \frac{1}{8A}(k_ik_{i+1}\eta_i^2\eta_{i+1}^2-\frac{1}{2}<\overrightarrow{PP}_i,\overrightarrow{PP}_{i+1}>(k_i^2\eta_i^2+k_{i+1}^2\eta_{i+1}^2))| \\ & \leq \quad (C_1+C_3)\eta_{\max}^3+C_2\eta_{\max}^4.\end{array}$$

Soit,

$$S=\sum_{i=1}^{n}<\overrightarrow{PP}_i,\overrightarrow{PP}_{i+1}>(k_i^2\eta_i^2+k_{i+1}^2\eta_{i+1}^2).$$

On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1} > k_i^2\eta_i^2 + \sum_{i=1}^{n} < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1} > k_{i+1}^2\eta_{i+1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i+1} > k_i^2\eta_i^2 + \sum_{i=1}^{n} < \overrightarrow{PP}_{i-1}, \overrightarrow{PP}_{i} > k_i^2\eta_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i-1} + \overrightarrow{PP}_{i+1} > k_i^2\eta_i^2. \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i-1} + \overrightarrow{PP}_{i+1} > &= < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i-1} + \overrightarrow{PP}_{i+1} - 2\cos(\tfrac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i > \\ &+ 2\cos(\tfrac{2\pi}{n}) < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_i >, \end{aligned}$$

avec,

$$\left| < \overrightarrow{PP}_i, \overrightarrow{PP}_{i-1} + \overrightarrow{PP}_{i+1} - 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i > \right| \leq \Delta\eta_{\max}^3.$$

Par conséquent,

$$\left| S - \sum_{i=1}^{n} 2\cos(\frac{2\pi}{n})\eta_i^4 \right| \leq n\Delta k_{\max}^2 \eta_{\max}^5,$$

et,

$$\begin{aligned} |\textstyle\sum_{i=1}^n \delta_i &- \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{8A}(k_i k_{i+1}\eta_i^2\eta_{i+1}^2 - \cos(\frac{2\pi}{n})k_i^2\eta_i^4)| \\ &\leq nC_1 + C_3 + C_4)\eta_{\max}^3 + nC_2\eta_{\max}^4, \end{aligned}$$

avec,

$$C_4 = \frac{n}{8}\frac{\sigma^2\Delta}{\Theta}k_{\max}^2.$$

D'après le fait 4,

$$|\eta_i - \bar{\eta}| \leq \Lambda\eta_{\max}^2,$$

donc,

$$|\eta_i^2 - \bar{\eta}^2| \leq 2\Lambda\eta_{\max}^3 \quad \text{et} \quad |\eta_i^4 - \bar{\eta}^4| \leq 4\Lambda\eta_{\max}^5.$$

D'après,

$$(\eta_i^2 - \bar{\eta}^2)(\eta_{i+1}^2 + \bar{\eta}^2) = \eta_i^2\eta_{i+1}^2 - \bar{\eta}^4 + (\eta_i^2 - \eta_{i+1}^2)\bar{\eta}^2,$$

on en déduit que :

$$|\eta_i^2\eta_{i+1}^2 - \bar{\eta}^4| \leq 4\Lambda\eta_{\max}^5 + 2\Lambda\eta_{\max}^5 = 6\Lambda\eta_{\max}^5.$$

Par suite, on a :

$$\left| \left(k_i k_{i+1} \eta_i^2 \eta_{i+1}^2 - \cos(\frac{2\pi}{n}) k_i^2 \eta_i^4 \right) - 8A\mu_i \right| \leq 12\Lambda k_{\max}^2 \eta_{\max}^5.$$

Ainsi,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{8A} \left(k_i k_{i+1} \eta_i^2 \eta_{i+1}^2 - \cos(\frac{2\pi}{n}) k_i^2 \eta_i^4 \right) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \right| \leq C_5 \eta_{\max}^3,$$

avec,

$$C_5 = \frac{3n\sigma^2 k_{\max}^2 \Lambda}{\Theta}.$$

Finalement,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \delta_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \right| \leq D_1 \eta_{\max}^3 + D_2 \eta_{\max}^4,$$

avec $D_1 = nC_1 + C_3 + C_4 + C_5$ et $D_2 = nC_2$. □

3.4.3 Lemme de réduction

On désigne par v_m et v_M les deux vecteurs unitaires de $T_P\Sigma$ parallèles aux directions principales et $v_\phi = \cos\phi v_M + \sin\phi v_m$. La courbure dans la direction v_ϕ a l'expression suivante :

$$k(\phi) = k_M \cos^2\phi + k_m \sin^2\phi.$$

Soit ϕ tel que $k_1 = k(\phi)$, alors on a $k_i = k(\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j + \phi)$. On pose :

$$R(\phi + \frac{2i\pi}{n}) = k(\phi + \frac{2i\pi}{n}) k(\phi + \frac{2(i+1)\pi}{n}) - \cos(\frac{2\pi}{n}) k^2(\phi + \frac{2i\pi}{n}).$$

Le but de ce chapitre est de prouver le lemme de réduction.

Lemme **10** *On a :*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \mu_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{8A} R(\phi + \frac{2i\pi}{n}) \bar{\eta}^4 \right| \leq Q_1 \eta_{\max}^3 + Q_2 \eta_{\max}^4,$$

où Q_1 et Q_1 dépendent du 1-jet des fonctions courbures, du facteur de rappel $\Omega_\Sigma(P)$ et des données du n-maillage (les expressions précises sont données dans la preuve).

Preuve du lemme 10. – On désigne par ϕ_i l' angle $\phi + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j$, d'après la prop 10, si $i \geq 1$,

$$\left|\phi_i - \frac{2(i-1)\pi}{n} - \phi\right| \leq (i-1)F_3\eta_{\max} + (i-1)F_4\eta_{\max}^2,$$

et,

$$\begin{aligned}
\left|\cos^2\phi_i - \cos^2(\frac{2(i-1)\pi}{n} + \phi)\right| &\leq 2(i-1)\left(F_3\eta_{\max} + F_4\eta_{\max}^2\right), \\
\left|\sin^2\phi_i - \sin^2(\frac{2(i-1)\pi}{n} + \phi)\right| &\leq 2(i-1)\left(F_3\eta_{\max} + F_4\eta_{\max}^2\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\left|k_i - k(\frac{2(i-1)\pi}{n} + \phi)\right| \leq 4(i-1)k_{\max}\left(F_3\eta_{\max} + F_4\eta_{\max}^2\right).$$

Pour simplifier, on pose : $\dfrac{2(i-1)\pi}{n} + \phi = \phi_i$. On a :

$$\begin{aligned}
(k_i - k(\phi_i))(k_j + k(\phi_j)) &= k_ik_j - k(\phi_i)k(\phi_j) \\
&\quad + k_ik(\phi_j) - k_jk(\phi_i).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|k_ik_j - k(\phi_i)k(\phi_j)| &\leq |k_i - k(\phi_i)|\,|k_j + k(\phi_j)| \\
&\quad + |k_jk(\phi_i) - k_ik(\phi_j)| \\
&\leq 4(i-1)k_{\max}\left(F_3\eta_{\max} + F_4\eta_{\max}^2\right)2k_{\max} \\
&\quad + k_{\max}4(i-1)k_{\max}\left(F_3\eta_{\max} + F_4\eta_{\max}^2\right) \\
&\leq 12(i-1)k_{\max}^2\left(F_3\eta_{\max} + F_4\eta_{\max}^2\right).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
|(k_ik_{i+1} &- \cos(\tfrac{2\pi}{n})k_i^2) - R(\phi + \tfrac{2(i-1)\pi}{n})| \\
&\leq 24(n-1)k_{\max}^2\left(F_3\eta_{\max} + F_4\eta_{\max}^2\right),
\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
|\textstyle\sum_{i=1}^n \mu_i &- \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{8A}R(\phi + \frac{2i\pi}{n})\bar{\eta}^4| \\
&\leq \tfrac{3(n-1)nk_{\max}^2}{A}(F_3\eta_{\max} + F_4\eta_{\max}^2)\bar{\eta}^4.
\end{aligned}$$

Puisque,

$$\frac{\bar{\eta}^4}{A} \leq \frac{\bar{\eta}^4}{\frac{1}{2}\Theta\eta_{\min}^2} \leq \frac{2\sigma^2\eta_{\max}^2}{\Theta},$$

on a :

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu_i - \sum_{i=1}^n \frac{1}{8A}R(\phi + \frac{2i\pi}{n})\bar{\eta}^4\right| \leq \frac{6(n-1)n\sigma^2k_{\max}^2}{\Theta}\left(F_3\eta_{\max}^3 + F_4\eta_{\max}^4\right).$$

Par suite on a le lemme 10 avec,

$$Q_1 = \frac{6(n-1)n\sigma^2 k_{\max}^2}{\Theta} F_3 \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{6(n-1)n\sigma^2 k_{\max}^2}{\Theta} F_4.$$

□

Sommations trigonométriques

L'inégalité ci-dessous résume ce que nous avons obtenu plus loin :

$$\left| \left(2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \right) - \frac{\bar{\eta}^4}{8A} \sum_{i=1}^{n} R(\phi + \frac{2i\pi}{n}) \right| \leq (D_1+Q_1)\eta_{\max}^3 + (D_2+Q_2)\eta_{\max}^4.$$

Il s'avère que l'on peut remplacer le facteur $\dfrac{\bar{\eta}^4}{8A}$ par $\dfrac{A}{2\sin^2(\frac{2\pi}{n})}$. De manière plus précise :

LEMME **11** *On a :*

$$\left| \left(2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \right) - \frac{A}{2\sin^2(\frac{2\pi}{n})} \sum_{i=1}^{n} R(\phi + \frac{2i\pi}{n}) \right| \leq \bar{N}_1 \eta_{\max}^3 + \bar{N}_2 \eta_{\max}^4.$$

(les expressions précises pour $\bar{N}_1$ et $\bar{N}_2$ sont données dans la preuve).

Preuve du lemme 11. – En effet, d'après le fait 10 on a :

$$\begin{aligned} |\sin\gamma_i - \sin(\frac{2\pi}{n})| &= 2|\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{n} - \gamma_i}{2}\right)||\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{n} + \gamma_i}{2}\right)| \\ &\leq \left|\frac{2\pi}{n} - \gamma_i\right| \\ &\leq F_3\eta_{\max} + F_5\eta_{\max}^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\eta_i\eta_{i+1}\sin\gamma_i - \bar{\eta}^2\sin(\frac{2\pi}{n})| &\leq \left|\eta_i\eta_{i+1}\sin\gamma_i - \bar{\eta}^2\sin(\gamma_i)\right| \\ &\quad + \left|\bar{\eta}^2\sin(\gamma_i) - \bar{\eta}^2\sin(\frac{2\pi}{n})\right| \\ &\leq \left|\eta_i\eta_{i+1} - \bar{\eta}^2\right| + \left|\sin(\gamma_i) - \sin(\frac{2\pi}{n})\right|\bar{\eta}^2 \\ &\leq (2\Lambda + F_3)\eta_{\max}^3 + F_5\eta_{\max}^4. \end{aligned}$$

Mais,

$$\begin{aligned} n|\bar{\eta}^2\sin(\frac{2\pi}{n}) - 2A| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\bar{\eta}^2\sin(\frac{2\pi}{n}) - \eta_i\eta_{i+1}\sin\gamma_i\right| \\ &\leq n(2\Lambda + F_3)\eta_{\max}^3 + nF_5\eta_{\max}^4. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left|\left(\bar{\eta}^2\sin(\frac{2\pi}{n})\right)^2-4A^2\right|\leq 2\eta_{\max}^2((2\Lambda+F_3)\eta_{\max}^3+F_5\eta_{\max}^4).$$

Ainsi,

$$\left|\bar{\eta}^4-\frac{4A^2}{\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\right|=\left|\frac{\bar{\eta}^4\sin^2(\frac{2\pi}{n})-4A^2}{\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\right|\leq\frac{4\Lambda+2F_3}{\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\eta_{\max}^5+\frac{2F_5}{\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\eta_{\max}^6,$$

et,

$$\left|\frac{\bar{\eta}^4}{8A}-\frac{A}{2\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\right|\leq\frac{\sigma^2(4\Lambda+2F_3)}{8\frac{1}{2}\Theta\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\eta_{\max}^3+\frac{2\sigma^2F_5}{8\frac{1}{2}\Theta\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\eta_{\max}^4.$$

Finalement,

$$\left|\frac{\bar{\eta}^4}{8A}R(\phi+\frac{2i\pi}{n})-\frac{A}{2\sin^2(\frac{2\pi}{n})}R(\phi+\frac{2i\pi}{n})\right|\leq D_3\eta_{\max}^3+D_4\eta_{\max}^4,$$

où,

$$D_3=\frac{\sigma^2k_{\max}^2(4\Lambda+2F_3)}{2\Theta\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\quad\text{et}\quad D_4=\frac{\sigma^2k_{\max}^2F_5}{\Theta\sin^2(\frac{2\pi}{n})}$$

puisque,

$$\left|R(\phi+\frac{2i\pi}{n})\right|\leq 2k_{\max}^2.$$

Par suite on a le lemme 11 avec $\bar{N}_1=D_1+nD_3+Q_1$ et $\bar{N}_2=D_2+nD_4+Q_2$. $\square$ Dans la suite de cette session on va calculer la somme trigonométrique

$$\sum_{i=1}^{n}R(\phi+\frac{2i\pi}{n}).$$

Cette somme peut se simplifier puisqu'il est facile d'évaluer $\sum_{i=1}^{n}\Upsilon(\phi+\frac{2i\pi}{n})$ lorsque Υ est un polynôme trigonométrique

$$\Upsilon(\phi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{deg(\Upsilon)}a_j\cos(j\phi)+b_j\sin(j\phi).$$

En effet le développement en série de Fourier de cette expression est fini, on a donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\Upsilon(\phi+\frac{2i\pi}{n})=n\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{kn\leq deg(\Upsilon)}a_{kn}\cos(kn\phi)+b_{kn}\sin(kn\phi)\right)$$

(ici a_k et b_k désignent les coefficients de Fourier de Υ). En particulier, si $n > deg(\Upsilon)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \Upsilon(\phi + \frac{2i\pi}{n}) = \frac{na_0}{2} = \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Upsilon(\phi)d\phi.$$

Dans notre cas, c'est à dire lorsque $\Upsilon = R$, $deg(R) = 4$ et ainsi, pour un n-maillage avec $n > 4$ il suffit d'évaluer le terme $a_0(R) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\phi)d\phi$ afin d'obtenir la valeur de la somme. On remarque que dans le développement de Fourier de R il n'y a pas de coefficient d'indice impair, ainsi le terme en a_0 fournit aussi la valeur de la somme pour $n = 3$. Ainsi on a :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} R(\phi + \frac{2i\pi}{n}) & = & \dfrac{na_0(R)}{2} \qquad \text{si } n \neq 4, n > 2, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{4} R(\phi + \frac{2i\pi}{n}) & = & 2a_0(R) + 4a_4(R)\cos 4\phi + 4b_4(R)\sin 4\phi. \end{array}$$

où les quantités $a_k(R)$, $b_k(R)$ désignent les coefficients de Fourier de R. Un calcul direct montre que :

$$\frac{a_0(R)}{2} = \frac{1}{4}\left(\kappa_1(\frac{2\pi}{n})K + \kappa_2(\frac{2\pi}{n})(k_m^2 + k_M^2)\right),$$

où,

$$\begin{array}{rcl} \kappa_1(x) & = & -2\cos^2 x - \cos x + 3 \\ \kappa_2(x) & = & \cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2}. \end{array}$$

Un autre calcul donne :

$$\begin{array}{l} 4a_4(R) = \dfrac{1}{8}K - \dfrac{1}{16}(k_M^2 + k_m^2) \\ b_4(R) = 0. \end{array}$$

Pour résumer, si $n \neq 4$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |\frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i}{A} & - & \frac{n}{8\sin^2(\frac{2\pi}{n})}(\kappa_1(\frac{2\pi}{n})K + \kappa_2(\frac{2\pi}{n})(k_m^2 + k_M^2))| \\ & \leq & N_1\eta_{\max} + N_2\eta_{\max}^2 = N, \end{array}$$

et si $n = 4$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |\frac{2\pi - \sum_{i=1}^{4}\gamma_i}{A} & - & \frac{1}{2}[(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\phi)K + (\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\phi)(k_m^2 + k_M^2)]| \\ & \leq & N_1\eta_{\max} + N_2\eta_{\max}^2 = N, \end{array}$$

avec,

$$N_1 = \frac{2\sigma \bar{N}_1}{\Theta} \quad \text{et} \quad N_2 = \frac{2\sigma \bar{N}_2}{\Theta}.$$

L'expression ci-dessus pour $n = 4$ peut se simplifier puisque :

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\phi\right) K + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4\phi\right)(k_m^2 + k_M^2) = K + (k_M - k_m)^2 \sin^2\phi \cos^2\phi.$$

On remarque que $(k_M - k_m)^2 \sin^2\phi\cos^2\phi$ est le carré de la torsion géodesique $\tau_g(\phi)$ dans la direction v_ϕ.
Ainsi, pour un 4-maillage, on a :

$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{2\pi - \sum_{i=1}^4 \gamma_i}{A}\right. & - & 2(K + \tau_g^2(\phi))| \\ & \leq & N_1 \eta_{\max} + N_2 \eta_{\max}^2. \end{array}$$

Remarque. – Il est facile de voir qu'avec deux maillages, un n_1-maillage et un n_2-maillage avec $n_1 \neq n_2$, $n_1 \neq 4$, $n_2 \neq 4$ il est possible de donner une estimation des courbures principales.

3.5 Exemple générique

Lorsque Σ est un paraboloide $z = \dfrac{k_M x^2 + k_m y^2}{2}$ on a vu dans le chapitre sur les courbes que le coefficient $\Omega_\Sigma(P)$ est toujours inférieur à $\dfrac{3}{\sqrt{8}}$.
On posera donc dans tout ce qui suit :
$\Omega = \Omega_\Sigma(P) = \dfrac{3}{\sqrt{8}}$,
$k_{\max} = \max(|k_M|, |k_m|)$.

3.5.1 Données liées au maillage

$\eta_{\max} = \max_{i=1}^{n} |\overrightarrow{PP}_i|$, $\Theta = \min_{i=1}^{n} |\sin(\gamma_i)|$,
$\Delta = \dfrac{1}{\eta_{\max}^2} \max_{i=1}^{n} |\overrightarrow{PP}_{i+1} + \overrightarrow{PP}_{i-1} - 2\cos(\dfrac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i|$,
$\Lambda = \dfrac{1}{\eta_{\max}^2}(\eta_{\max} - \eta_{\min})$,
$\sigma = \dfrac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}}$.

3.5.2 Coefficients liés à l'erreur

On a besoin de 2 fonctions :
$g_1(x) = \dfrac{\tan(x) - x}{x^2}$,
$g_2(x) = \dfrac{2}{x^3}\left(\dfrac{1}{\cos x} - (1 + \dfrac{x^2}{2})\right)$,
On pose :
$\Xi_1 = g_1(\frac{1}{2}\Omega k_{\max}\eta_{\max})$,
$\Xi_2 = g_2(\frac{1}{2}\Omega k_{\max}\eta_{\max})$.
On a alors :
$F_1 = \dfrac{\pi}{2}(6\Lambda + \dfrac{\sigma\Lambda}{|\cos(\frac{2\pi}{n})|} + \Delta)$,
$F_2 = \dfrac{\pi}{2}(\dfrac{2\sigma\Delta}{|\cos(\frac{2\pi}{n})|} + 2\Lambda^2)$,
$F_3 = \dfrac{n-1}{2}F_1$,
$F_4 = \dfrac{\pi}{4}k_{\max}^2\Omega(1 + \dfrac{3}{\Theta}) + \dfrac{n-1}{2}F_2$,
$F_5 = \dfrac{\pi}{2}k_{\max}^2\Omega(1 + \dfrac{3}{\Theta}) + \dfrac{n-1}{2}F_2$,
$C = \dfrac{1}{2}\Omega^3\left(\dfrac{k_{\max}^3}{8}\eta_{\max} + \dfrac{k'_{\max}}{3}\Omega\right)$,
$C_1 = \dfrac{1}{\Theta}k_{\max}\left(C + \dfrac{1}{4}\Omega^2\Xi_1 k_{\max}^2\right) + \dfrac{1}{\Theta}\left(1 + \dfrac{\pi}{8\Omega}\right)\left(Ck_{\max} + \dfrac{1}{8}\Omega^3\Xi_2 k_{\max}^3\right)$,
$C_2 = \dfrac{\pi^2}{16}k_{\max}^4\Omega^4\left(1 + \dfrac{3}{\Theta}\right)^2 + \dfrac{1}{\Theta}\left(C + \dfrac{1}{4}\Omega^2\Xi_1 k_{\max}^2\right)^2 + \dfrac{1}{\Theta}C^2\left(1 + \dfrac{\pi}{8\Omega}\right)$,
$C_3 = \dfrac{(n-1)k_{\max}^2\sigma^3\Delta}{4\Theta}$,
$C_4 = \dfrac{nk_{\max}^2\sigma^2\Delta}{4\Theta}$,
$C_5 = \dfrac{5nk_{\max}^2\sigma^2\Lambda}{2\Theta}$,
$Q_1 = \dfrac{8n(n-1)\sigma^2 k_{\max}^2}{\Theta}F_3$,
$Q_2 = \dfrac{8n(n-1)\sigma^2 k_{\max}^2}{\Theta}F_4$,
$M_1 = nC_1$,
$M_2 = nC_2$,
$D_1 = M_1 + C_3 + C_4 + C_5$,
$D_2 = M_2$,

$$D_3 = \frac{\sigma^2 k_{\max}^2 (2\Lambda + F_3)}{2\Theta \sin^2(\frac{2\pi}{n})},$$
$$D_4 = \frac{\sigma^2 k_{\max}^2 F_5}{2\Theta \sin^2(\frac{2\pi}{n})},$$
$$\bar{N}_1 = D_1 + nD_3 + Q_1,$$
$$\bar{N}_2 = D_2 + nD_4 + Q_2,$$
$$N_1 = \frac{2\sigma^2 \bar{N}_1}{\Theta},$$
$$N_2 = \frac{2\sigma^2 \bar{N}_2}{\Theta}.$$

3.6 Illustrations

On pose :

- $k_d = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^n \gamma_i}{A}$,
- $k = \frac{n}{8\sin^2(\frac{2\pi}{n})} \left(\kappa_1(\frac{2\pi}{n})K + \kappa_2(\frac{2\pi}{n})(k_m^2 + k_M^2)\right)$.

On note :

$$\epsilon = |k_d - k| \quad \text{et} \quad e = N_1 \eta_{\max} + N_2 \eta_{\max}^2,$$

qui désignent respectivement l'erreur réelle et notre majoration de l'erreur (donnée dans le théorème 3).

3.6.1 Exemple où Λ et Δ ne sont pas bornées

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de $\mathbb{E}^3$ et R_θ la rotation d'angle θ autour de l'axe engendré par le vecteur e_3. Soit Σ la sphère unitée centrée en $(0,0,1)$, $P = (0,0,0)$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et P_1 le point $(\sin 2\alpha, 0, 1 + \cos 2\alpha)$. On a :

$$P_1 \in \Sigma,$$

et lorsque $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, on a :

$$P_1 \to P.$$

Pour tout $k \in \{2, ..., n\}$, on note $P_k = R_\theta(P_1)$ avec $\theta = \frac{2(k-1)\pi}{n}$. On prend $n = 6$, et on considère le 6-maillage suivant :

$$\mathcal{M}_6'(\alpha) = (P, P_1, P_2', P_3, P_4', P_5, P_6')$$

où pour tout $i = 1, \ldots 6$, le point P_i' est obtenu à partir du point P_i de la manière suivante : on note

$$\pi : \Sigma \to T_P\Sigma,$$

la projection orthogonale de Σ sur le plan tangent en P à Σ. Soit

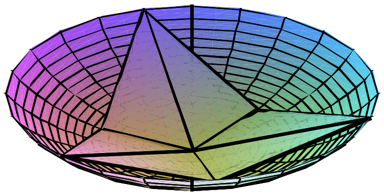
$$I_i \in T_P\Sigma,$$

le point défini par :

$$\overrightarrow{PI}_i = \frac{1}{2}\overrightarrow{P\pi(P_i)}.$$

On pose alors :

$$P_i' = \pi^{-1}(I_i) \in \Sigma.$$



6-maillage

On a :

$$\sigma = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{2 - 2\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^4\alpha}}},$$

$$\Theta^2 = 1 - \frac{\left(3\cos^2\alpha - \cos^4\alpha - 2\cos^2\alpha\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^4\alpha}\right)^2}{8\cos^2\alpha\,(1 - \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^4\alpha})}$$

$$\Delta = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \left(4\cos^2\alpha - 1 + \sqrt{1 - \cos^2\alpha\sin^2\alpha}\right)^2}}{4\cos^2\alpha},$$

$$\Lambda = \frac{2\cos\alpha - \sqrt{2 - 2\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^4\alpha}}}{4\cos^2(\alpha)}$$

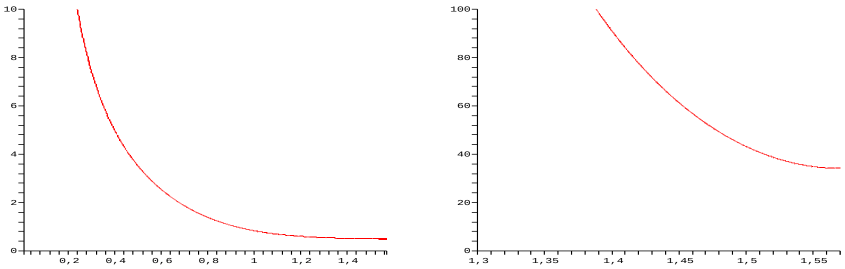
On remarque que $\eta_{max} = 2\cos\alpha$, par conséquent $\eta_{max} \to 0$ quand $\alpha \to \frac{\pi}{2}$. Pour α proche de $\frac{\pi}{2}$ l'épaisseur est bornée puisque $\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D'autre part, on a :

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \sigma = 2, \quad \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \Lambda = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \Delta = \infty.$$

Les quantités Δ et Λ ne sont pas bornées.
Dans cet exemple, la courbure discrète ne converge pas vers k. En effet, on a :

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} k_d(\alpha) = \frac{3}{2} \quad \text{mais} \quad k = 2 \quad \text{donc} \quad \lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \epsilon(\alpha) = \frac{1}{2}.$$

On donne les graphes des fonctions $\epsilon(\alpha)$ et $e(\alpha)$: Il est remarquable que e converge vers une quantité finie quand α tend vers $\frac{\pi}{2}$.



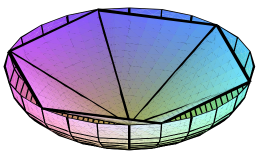
Fonctions $\epsilon(\alpha)$ et $e(\alpha)$ pour $\mathcal{M}'_6(\alpha)$

3.6.2 Exemple où la courbure discrète est non bornée

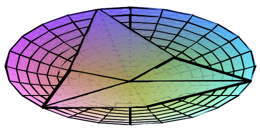
Il est facile de trouver une suite de n-maillages sur la sphère unité ayant une épaisseur minorée et tels que la courbure discrète associée tende vers $-\infty$ quand η_{max} tend vers 0. Soit

$$p_{2i} = (\rho \cos\theta_{2i}, \rho \sin\theta_{2i}),, \quad p_{2i+1} = (\rho^2 \cos\theta_{2i+1}, \rho^2 \sin\theta_{2i+1})$$

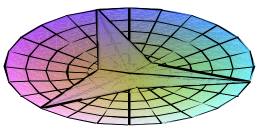
avec $\theta_i = \frac{2(i-1)\pi}{n}$, $\rho \in]0,1]$. On pose $P_i = f(p_i)$ pour $i \in \{1,..,n\}$ où $f(\rho,\theta) = 1 - \sqrt{1-\rho^2}$ est la fonction hauteur en coordonnées polaires. Avec des notations évidentes, on désigne par $(\mathcal{M}_n(\rho))_{\rho>0}$ la famille de n-maillage $(P, P_1, ..., P_n)$.



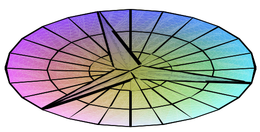
$\rho = 1$



$\rho = \frac{1}{2}$



$\rho = \frac{1}{4}$



$\rho = \frac{1}{8}$

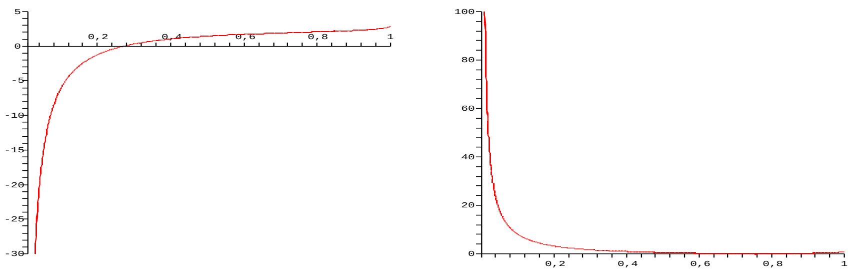
Maillages $\mathcal{M}_6(\rho)$

Comme précédemment, on a :

$$\sigma = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-\rho^2}}}{\sqrt{2-2\sqrt{1-\rho^4}}}, \quad \Lambda = \frac{\sqrt{2-2\sqrt{1-\rho^2}} - \sqrt{2-2\sqrt{1-\rho^4}}}{2-2\sqrt{1-\rho^2}}$$

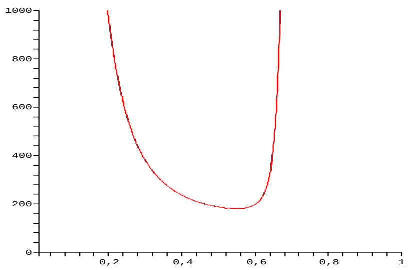
$$\Delta = \frac{\sqrt{\rho^2(1-\rho)^2 + \left(1-2\sqrt{1-\rho^2}+\sqrt{1-\rho^4}\right)^2}}{2-2\sqrt{1-\rho^2}}$$

Les quantités σ, Λ et Δ tendent vers l'infini quand ρ tend vers zéro. La courbure discrète k_d tend vers $-\infty$ alors que k vaut 2. (l'épaisseur est minorée par $\frac{\sqrt{3}}{2}$).



Courbure discrète $k_d(\rho)$ et fonction $\epsilon(\rho)$

Le mauvais comportement de l'erreur e pour $\rho \geq 0.6$ provient du facteur de rappel $\Omega(\rho) = \frac{1}{\rho}\sqrt{\rho^2 - \left(1-\sqrt{1-\rho^2}\right)^2}$ qui croît de manière très rapide lorsque ρ se rapproche de 1.



Fonction $e(\rho)$

Chapitre 4

Cas des paramétrisations conformes

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent dont nous gardons les notations, nous avons obtenu la majoration 3.2 :

$$|k_d - k| \leq N(\eta_{\max}, k_{\max}, k^{'}_{\max}, \Omega_\Sigma(P), \Theta, \sigma, \Delta, \Lambda, n),$$

où $N(\ldots)$ est une fonction qui dépend du 1-jet des fonctions courbures, du coefficient de rappel $\Omega_\Sigma(P)$ et des données du n-maillages (comme l'épaisseur Θ, le déplacement Δ, la déformation en longueur Λ, $\eta_{\max}$, n et σ). La fonction N peut s'écrire sous la forme $N = N_1\eta_{\max} + N_2\eta^2_{\max}$, où les fonctions N_1 et N_2 dépendent des mêmes variables que N. Nous avons vu dans le paragraphe 3.6 que ces quantités peuvent tendre vers l'infini ou ne pas avoir de limite lorsque $\eta_{\max} \to 0$. Ceci motive ce nouveau chapitre. Nous restreignons maintenant notre étude aux surfaces définies par un paramétrage conforme. Ceci permet de mettre en évidence des familles de maillages dont les fonctions N_1 et N_2 sont majorées par des quantités qui ne dépendent pas de $\eta_{\max}$. Si nous faisons tendre les points $P_1, \ldots, P_n$ vers le point P en restant sur la surface Σ de manière quelquonque, notre majorant de la différence entre la courbure discrète et la courbure lisse peut tendre vers l'infini. Dans ce chapitre, nous donnons une manière de faire tendre ces points vers P en restant sur la surface Σ qui permet d'éviter ce désagrément.

4.2 Définitions et notations

DÉFINITION **9** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $(0,0) \in \mathcal{U}$ et f une paramétrisation d'une surface $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$,*

$$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subseteq \mathbb{E}^3.$$

Soit $(u,v) \in \mathcal{U}$ et $P = f(u,v) \in \Sigma$. On dit que f est conforme en P si il existe $\lambda_{\text{conf}}(P) > 0$ tel que pour tout $x, y \in T_P\Sigma$, on a :

$$< df_P(x), df_P(y) >= \lambda^2_{\text{conf}}(P) < x, y > .$$

4.2.1 Familles de maillages réguliers

La définition suivante dépend d'un choix d'une paramétrisation de la surface.

DÉFINITION **10** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une paramétrisation d'une surface $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$,*

$$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subseteq \mathbb{E}^3,$$

et

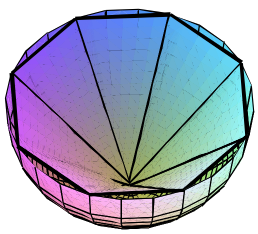
$$(\mathcal{M}_n(\rho)))_{\rho>0} = ((P, P_1(\rho), \ldots, P_n(\rho)))_{\rho>0}$$

une famille d'approximations linéaires par morceaux de Σ. On dit que $(\mathcal{M}_n(\rho))_{\rho>0}$ est une famille de maillages réguliers sous la paramétrisation f si il existe $(u,v) \in \mathcal{U}$ tel que :

- *$P = f(u,v)$,*
- *pour tout $i = 1 \ldots n$, pour tout $\rho > 0$, on a :*

$$P_i(\rho) = f(u + \rho\cos(\frac{2i\pi}{n}), v + \rho\sin(\frac{2i\pi}{n})).$$

L'image ci-dessous montre un 8-maillage régulier autour du sommet P d'un paraboloide dans un cas particulier (si on projette ce maillage sur le plan tangent en P au paraboloide, on obtient un 8-gone régulier.)



8-maillage régulier.

4.2.2 Notations

Soit
$$(\mathcal{M}_n(\rho)))_{\rho>0} = ((P, P_1(\rho), \ldots, P_n(\rho)))_{\rho>0}$$
une famille de maillages réguliers. Pour tout $i = 1, \ldots n$, et pour tout $\rho > 0$, on note :

- $\Pi_i(\rho)$ le plan $P + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{PP}_{\mathrm{i}}(\rho), \mathrm{N_P})$.
- $\Gamma_i(\rho)$ la courbe $\Gamma_i(\rho) = \Sigma \cap \Pi_i(\rho)$,
- $\Omega_\Sigma(P) = \max_{i=1}^{n} \sup_{\rho>0} \sup_{M\in\Gamma_i(\rho)} \{\frac{1}{\cos\angle(\overrightarrow{PM}, t)}, t$ est la tangente en M à la courbe $\Gamma_i(\rho), \}$
- $k_{\max} = \max_{i=1}^{n} \sup_{\rho>0} \sup_{\Gamma_i(\rho)} |k_i(\rho)|$, où $k_i(\rho)$ est la fonction courbure le long de la courbe $\Gamma_i(\rho)$,
- $k'_{\max} = \max_{i=1}^{n} \sup_{\rho>0} \sup_{\Gamma_i(\rho)} |k'_i(\rho)|$, où $k'_i(\rho)$ est la dérivée de la fonction courbure par rapport à l'abscisse curviligne le long de la courbe $\Gamma_i(\rho)$,
- $\eta_{\max}(\rho) = \max_{i=1}^{n} |\overrightarrow{PP}_i(\rho)|$,
- $\eta_{\min}(\rho) = \min_{i=1}^{n} |\overrightarrow{PP}_i(\rho)|$,
- $\Theta(\rho) = \min_{i=1}^{n} |\sin\gamma_i(\rho)|$, où
$$\gamma_i(\rho) = \angle(\overrightarrow{PP}_i(\rho), \overrightarrow{PP}_{i+1}(\rho)),$$
- $\Delta(\rho) = \dfrac{\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |\overrightarrow{PP}_{i+1}(\rho) + \overrightarrow{PP}_{i-1}(\rho) - 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i(\rho)|}{\eta^2_{\max}(\rho)}$,
- $\Lambda(\rho) = \dfrac{\eta_{\max}(\rho) - \eta_{\min}(\rho)}{\eta^2_{\max}(\rho)}$,
- $\sigma(\rho) = \dfrac{\eta_{\max}(\rho)}{\eta_{\min}(\rho)}$.

On notera également :

- $\|df\|$ la norme infinie de l'application f,
- $\|d^2 f\|$ la norme infinie de la Hessienne de l'application f,
- $k = \dfrac{n}{8\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\left(\kappa_1(\frac{2\pi}{n})K + \kappa_2(\frac{2\pi}{n})(k_M^2 + k_m^2)\right)$, où
$$\kappa_1(x) = -2\cos^2 x - \cos x + 3, \qquad \kappa_2(x) = \cos^2 x - \frac{3}{2}\cos x + \frac{1}{2},$$
- pour tout $\rho > 0$, on pose :
$$k_d(\rho) = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\rho)}{A(\rho)},$$

où
$$A(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{Aire}(\mathrm{PP_i}(\rho)\mathrm{P_{i+1}}(\rho))}{n},$$
est la moyenne des aires des triangles $PP_i(\rho)P_{i+1}(\rho)$.

4.3 Enoncé du Théorème principal

Théorème **4** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit*
$$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subseteq \mathbb{E}^3,$$
et
$$(\mathcal{M}_n(\rho)))_{\rho>0} = ((P, P_1(\rho), \ldots, P_n(\rho)))_{\rho>0}$$
une famille de maillages réguliers sous la paramétrisation f ($n > 2$ et $n \neq 4$). Pour tout $i = 1, \ldots n$, et pour tout $\rho > 0$, on note $\Pi_i(\rho)$ le plan passant par P, $P_i(\rho)$ et contenant le vecteur normal en P à la surface. On suppose que :

1. *l'application f est un plongement conforme en P, de classe C^2 au moins,*
2. *pour tout $i = 1 \ldots n$, pour tout $\rho > 0$, les courbes $\Gamma_i(\rho) = \Sigma \cap \Pi_i(\rho)$ sont des courbes lisses,*
3. *pour tout $\rho > 0$, on a :*
$$k_{\max}\eta_{\max}(\rho)\Omega_\Sigma(P) < \pi,$$
4. *il existe une constante $\Theta_0 > 0$ telle que pour tout $\rho > 0$, on a :*
$$\Theta(\rho) \geq \Theta_0.$$

Alors, on a pour tout $\rho > 0$:
$$|k_d(\rho) - k| \leq N_1(f)\rho + N_2(f)\rho^2, \tag{4.1}$$
où les nombres $N_1(f) > 0$ et $N_2(f) > 0$ ne dépendent que de $\|df\|$, $\|d(f^{-1})\|$, $\|d^2 f\|$, $k_{\max}$, $k'_{\max}$, Θ_0, $\Omega_\Sigma(P)$ et n.

Il se trouve que le cas $n = 6$ est particulièrement remarquable.

Corollaire **3** *Soit $\mathcal{M}_6(\rho)_{\rho>0}$ une famille de 6-maillages réguliers. Alors sous les hypothèses du théorème 4, on a :*
$$\frac{2\pi - \sum_{i=1}^{6} \gamma_i(\rho)}{A(\rho)} = 2K + O(\rho). \tag{4.2}$$

On peut remarquer que ce résultat est une généralisation d'un résultat déjà connu qui affirme que sous certaines hypothèses (voir [9]), on a :

$$2\pi - \sum_{i=1}^{6} \gamma_i = \frac{\mathrm{Aire}(\mathcal{M}_6)}{3} K + o(\eta^2).$$

4.4 Preuve du Théorème 4

En utilisant le théorème 3, on peut montrer que pour tout $\rho > 0$, on a :

$$|k_d(\rho) - k| \leq N_1(\rho)\eta_{\max}(\rho) + N_2(\rho)\eta_{\max}^2(\rho),$$

où $N_1(\rho)$ et $N_2(\rho)$ sont des réels strictement positifs qui dépendent du 1-jet des fonctions courbures, du coefficient de rappel $\Omega_\Sigma(P)(\rho)$ et des données du n-maillages (comme l'épaisseur $\Theta(\rho)$, le déplacement $\Delta(\rho)$, la déformation en longueur $\Lambda(\rho)$, $\eta_{\max}(\rho)$, n et $\sigma(\rho)$). Les seules quantités qui interviennent dans les majorations et qui peuvent tendre vers l'infini sont $\Lambda(\rho)$, $\Delta(\rho)$ et $\sigma(\rho)$. Dans le lemme 12, nous allons montrer que dans le cas d'une famille de maillages réguliers, on a pour tout $\rho > 0$:

- $\sigma(\rho) \leq \|df\|\|d(f^{-1})\|$,
- $\Delta(\rho) \leq 2\|d(f^{-1})\|^2\|d^2f\|$,
- $\Lambda(\rho) \leq \|d^2f\|\|d(f^{-1})\|^2$.

On en déduit qu'il existe $\bar{N}_1(f) > 0$ et $\bar{N}_2(f) > 0$ qui ne dépendent que de $\|df\|$, $\|d(f^{-1})\|$, $\|d^2f\|$, $k_{\max}$, $k'_{\max}$, Θ_0, $\Omega_\Sigma(P)$ et n tels que, pour tout $\rho > 0$, on a :

$$N_1(\rho) \leq \bar{N}_1(f),$$

et

$$N_2(\rho) \leq \bar{N}_2(f).$$

Lemme **12** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit une paramétrisation d'une surface $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$,*

$$f : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma \subseteq \mathbb{E}^3,$$

et

$$(\mathcal{M}_n(\rho)))_{\rho>0} = ((P, P_1(\rho), \ldots, P_n(\rho)))_{\rho>0}$$

une famille de maillages réguliers sous la paramétrisation f. Alors, on a :

- $\sigma(\rho) \leq \|df\|\|d(f^{-1})\|$,
- $\Delta(\rho) \leq 2\|d(f^{-1})\|^2\|d^2f\|$,
- $\Lambda(\rho) \leq \|d^2f\|\|d(f^{-1})\|^2$.

4.4.1 Preuve du lemme 12

Pour simplifier, on écrira P_i à la place de $P_i(\rho)$, $\eta_{\max}$ à la place de $\eta_{\max}(\rho)$, Λ à la place de $\Lambda(\rho)$, σ à la place de $\sigma(\rho)$, Δ à la place de $\Delta(\rho), \ldots$ On note $\mathcal{P}$ le n-gone régulier tel que :

- $f(p) = P$,
- pour tout $i = 1 \ldots n$, on a :

$$f(p_i) = P_i.$$

Puisque $\mathcal{P}$ est un n-gone régulier toutes les distances $|\overrightarrow{PP}_i|$ sont les mêmes, on les désignent par ρ. On a :

$$|\overrightarrow{PP}_i| = |f(p_i) - f(p)| \leq \|df\||p - p_i| = \rho\|df\|.$$

En particulier :

$$\eta_{\max} \leq \rho\|df\|.$$

De manière similaire,

$$|\overrightarrow{PP}_i| = |f^{-1}(P_i) - f^{-1}(P)| \leq \|d(f^{-1})\||P - P_i| = \eta_i\|d(f^{-1})\|$$

et en particulier,

$$\rho \leq \eta_{\min}\|d(f^{-1})\|.$$

Par suite,

$$1 \leq \sigma = \frac{\eta_{\max}}{\eta_{\min}} \leq \|df\|\|d(f^{-1})\|.$$

On est maintenant en mesure de contrôler le déplacement. A l'aide du développement de Taylor-Lagrange on obtient (notations évidentes) :

$$\|\overrightarrow{PP}_i - df_P(\overrightarrow{pp}_i)\| \leq \frac{1}{2}\|d^2 f\|\rho^2.$$

Soit $d_i = \left|\overrightarrow{PP}_{i+1} + \overrightarrow{PP}_{i-1} - 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i\right|$, on a

$$\begin{aligned} d_i &= \left|\overrightarrow{PP}_{i+1} + \overrightarrow{PP}_{i-1} - 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{PP}_i - df_P(\overrightarrow{pp}_{i+1} + \overrightarrow{pp}_{i-1} - 2\cos(\frac{2\pi}{n})\overrightarrow{pp}_i)\right| \\ &\leq |\overrightarrow{PP}_{i+1} - df_P(\overrightarrow{pp}_{i+1})| + |\overrightarrow{PP}_{i-1} - df_P(\overrightarrow{PP}_{i-1})| + 2|\overrightarrow{PP}_i - df_P(\overrightarrow{pp}_i)| \\ &\leq 2\|d^2 f\|\rho^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$d_i \leq 2\|d^2 f\|\frac{\rho^2}{\eta_{\max}^2}.$$

Puisque,

$$\rho \leq \eta_{\min}\|d(f^{-1})\| \leq \eta_{\max}\|d(f^{-1})\|,$$

on obtient :

$$\Delta \leq 2\|d(f^{-1})\|^2\|d^2 f\|.$$

En remplaçant ρ par $r\rho$ avec $r > 0$, on en déduit que :

$$\sigma \leq \|df\|\|d(f^{-1})\|,$$

et

$$\Delta \leq 2\|d(f^{-1})\|^2\|d^2 f\|.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\eta_{\max}(\rho) - \eta_{\min}(\rho) &= |\overrightarrow{PP}_{i_{\max}}| - |df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\max}})| + |df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\max}})| - |df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\min}})| \\
&\quad + |df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\min}})| - |\overrightarrow{PP}_{i_{\min}}| \\
&\leq |\overrightarrow{PP}_{i_{\max}} - df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\max}})| + |df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\max}})| - |df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\min}})| \\
&\quad + |df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\min}}) - \overrightarrow{pp}_{i_{\min}}|.
\end{aligned}$$

Puisque f est conforme en P, on a :

$$|df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\max}})| = |df_P(\overrightarrow{pp}_{i_{\min}})|.$$

Ainsi,

$$\eta_{\max} - \eta_{\min} \leq \|d^2 f\|\rho^2.$$

Puisque $\rho \leq \eta_{\max}\|d(f^{-1})\|$, on a finalement :

$$\Lambda = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{\eta_{\max}^2} \leq \|d^2 f\|\|d(f^{-1})\|^2.$$

En changeant ρ en $r\rho$ ($r > 0$) on obtient :

$$\Lambda \leq \|d^2 f\|\|d(f^{-1})\|^2.$$

□

4.5 Fin de la preuve du théorème 4

On a obtenu sous les hypothèses du théorème 4 pour tout $\rho > 0$:

$$|k_d(\rho) - k| \leq \bar{N}_1(f)\eta_{\max}(\rho) + \bar{N}_2(f)\eta_{\max}^2(\rho),$$

où les nombres $\bar{N}_1(f) > 0$ et $\bar{N}_2(f) > 0$ ne dépendent que de $\|df\|$, $\|d(f^{-1})\|$, $\|d^2 f\|$, $k_{\max}$, $k'_{\max}$, Θ_0, $\Omega_\Sigma(P)$ et n. Si $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_n)$ est un n-gone régulier centré en p et tel que pour tout $i = 1, \ldots n$, on a :
- $|\overrightarrow{pp}_i| = \rho$,
- $f(p) = P$,
- $f(p_i) = P_i(\rho)$.

Alors, on a pour tout $i = 1, \dots n$, et pour tout $\rho > 0$:

$$|\overrightarrow{PP}_i(\rho)| = |f(p_i) - f(p)| \leq \|df\||p - p_i| = \rho\|df\|.$$

En particulier :

$$\eta_{\max} \leq \rho\|df\|.$$

On en déduit que sous les hypothèses du théorème 4, on a :

$$|k_d(\rho) - k| \leq N_1(f)\rho + N_2(f)\rho^2,$$

où

$$k_d(\rho) = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^n \gamma_i(\rho)}{A(\rho)},$$

$$k = \frac{n}{8\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\left(\kappa_1(\frac{2\pi}{n})K + \kappa_2(\frac{2\pi}{n})(k_M^2 + k_m^2)\right),$$

$N_1(f) = \|df\|\bar{N}_1(f)$ et $N_2(f) = \|df\|^2\bar{N}_2(f)$. □

4.6 Illustrations

4.6.1 Notations

La courbure discrète de $\mathcal{M}_n$ en P s'écrit :

$$k_d = \frac{2\pi - \sum_{i=1}^n \gamma_i}{A},$$

On pose :

$$k = \frac{n}{8\sin^2(\frac{2\pi}{n})}\left(\kappa_1(\frac{2\pi}{n})K + \kappa_2(\frac{2\pi}{n})(k_m^2 + k_M^2)\right).$$

On note :

$$\epsilon = |k_d - k| \quad \text{et} \quad e = N_1\eta_{\max} + N_2\eta_{\max}^2,$$

qui désignent respectivement l'erreur réelle et notre majoration de l'erreur (donnée dans le théorème 3).

4.6.2 Approximations sur $\mathbb{S}^2$

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale de $\mathbb{E}^3$ et R_θ la rotation d'angle θ autour de l'axe engendré par le vecteur e_3. Soit Σ la sphère unitée centrée en $(0, 0, 1)$, $P = (0, 0, 0)$, $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et P_1 le point $(\sin 2\alpha, 0, 1 + \cos 2\alpha)$. On a :

$$P_1 \in \Sigma,$$

et lorsque $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, on a :

$$P_1 \to P.$$

Pour tout $k \in \{2, ..., n\}$, on note $P_k = R_\theta(P_1)$ avec $\theta = \frac{2(k-1)\pi}{n}$. Il est facile de voir que $M_n(\alpha) = (P, P_1, ..., P_n)$ est une approximation linéaire de Σ. Le maillage $(M_n(\alpha), f)$ où $f : T_P\Sigma \to \Sigma$ est la fonction hauteur est un maillage paramétré. On donne un exemple avec $n = 3$. On a :

$$\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha)\sqrt{3\cos^2(\alpha)+1}, \quad \sigma = 1, \quad \Lambda = 0, \quad \Delta = \frac{3}{2}, \quad \eta_{\max} = 2\cos\alpha.$$

Puisque σ, Λ et Δ sont bornés (en fait constants) et $e(\alpha)$ tend vers 0 et donc $k_d(\alpha)$ va en fait converger vers k.
Pour la sphère unité, on a :

$$\Omega_\Sigma(P) = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad k_{\max} = 1, \quad k'_{\max} = 0, \quad k = 3.$$

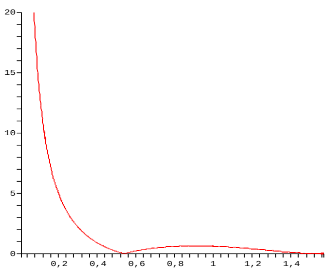
La condition $\Omega_\Sigma(P)k_{max}\eta_{max} \leq \pi$ est équivalente $\alpha \geq \alpha_c$ avec $\alpha_c = \arctan\frac{2}{\pi} = 0.56691....$ On a :

$$\Xi_1 = \tan^3\alpha\left(\tan(\cot\alpha) - \cot\alpha\right), \quad \Xi_2 = \tan^4\alpha\left(\frac{1}{\cos(\cot\alpha)} - 1 - \frac{1}{2}\cot^2\alpha\right)$$

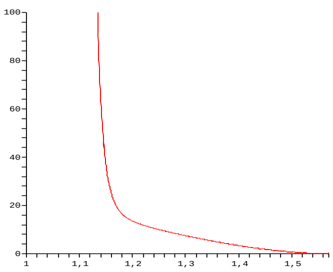
Finalement le fonction d'erreur ϵ vaut :

$$\epsilon(\alpha) = \left|\frac{2\pi - 3\arccos(\frac{3}{2}\cos^2\alpha - \frac{1}{2})}{\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{3\cos^2(\alpha)+1}} - 3\right|$$

On donne le graphe de la fonction $e(\alpha)$ sur la figure ci-dessous, à droite.

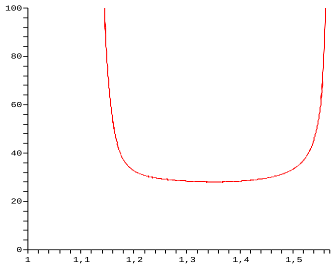


Fonction $\epsilon(\alpha)$



Fonction $e(\alpha)$

On remarque que le quotient $\delta(\alpha) = e(\alpha)/\epsilon(\alpha)$ ne "varie pas beaucoup" lorsque α est dans un intervalle "assez large".



Fonction $\delta(\alpha) = e(\alpha)/\epsilon(\alpha)$

Conclusion et perspectives

L'objectif de ce travail était d'approcher les courbures des courbes planes et des surfaces de l'espace euclidien de dimension 3. Pour cela, nous avons utilisé des approximations linéaires des courbes planes (les *V-lignes*) et des surfaces (les maillages autour d'un point). Dans le plan euclidien, le défaut angulaire normalisé est une approximation de la courbure algébrique de la courbe. Dans l'espace euclidien, nous savions que le défaut angulaire approchait une quantité extrinsèque qui dépend des courbures principales en un point de la surface. Nous avons donné des majorations de l'erreur commise. Pour les courbes, notre majorant de l'erreur tend vers 0 lorsque la taille de la V-ligne tend vers 0. Par contre, pour les surfaces, notre majorant de l'erreur peut tendre vers l'infini lorsque la taille du maillage tend vers 0. Pour empêcher ce phénomène, nous avons utilisé une classe particulière de maillages. Dans des travaux futurs, on pourrait explorer les pistes suivantes :

- Comment sont affectés les coefficients du polynôme homogène de degré 2 en les courbures principales lorsqu'on tend vers un point de la surface en utilisant d'autres familles de maillages ? Pour les 6-maillages, on peut relier nos travaux à un résultat récent de Xu qui utilise une classe à priori plus large de familles de 6-maillages (voir l'article [104] pour plus de détails ;
- une branche importante dans laquelle nos approximations pourraient être utilisées est l'étude des surfaces développables lisses, c'est à dire les surfaces dont la courbure de Gauss en tout point vaut 0. On peut ainsi comprendre un résultat de la thèse de B. Thibert ([98]) qui montre que la notion discrète de développabilité (le défaut angulaire est nul en tout point) et la notion lisse de développabilité (la courbure de Gauss est nulle en tout point) ne coïncident pas forcément.

Bibliographie

[1] ALBOUL, L. VAN DAMME, R. *Polyhedral metrics in surface reconstruction*
In : Mullineux, G (ed)
The mathematics of Surfaces VI, pp 171-200, Oxford, 1996

[2] ALBOUL, L. *Optimizing triangulated polyhedral surfaces with self-intersection*
In : Wilson, M. J., Martin, R. R. (ed)
Mathematics of Surfaces, LNCS 2768, pp 48-72, 2003

[3] ALBOUL, L. ECHEVERRIA, G. AND RODRIGUES, M. *Discrete curvatures and Gauss maps for polyhedral surfaces*
EWCG 2005, Eindhoven, Marc 9-11, 2005

[4] AHLFORS, L.V. SARIO, L. *Riemann Surfaces*
Princeton University Press
Princeton,NJ (1960)

[5] ALT, H. GODO, M. *Computing the Fréchet distance betwee two polygonal curves*
Int. J. Comput. Geom. Appl. **5** (1995), 75-91
Princeton,NJ (1960)

[6] AMENTA,N. BERN M. *Surface reconstruction by Voronoi filtering* Discrete Comput. Geom. 22 (1999) 481-504.

[7] AMENTA,N. BERN M. KAMVYSSELIS M. *A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm* Siggraph '98. (1998) 415-421.

[8] BANCHOFF,T.F. *Critical points and curvature for embedded polyhedra* J. Differential Geom. 1 (1967) 245-256.

[9] V.BORRELLI F.CAZAL JM.MORVAN *On the angular defect of triangulations and the pointwise approximation of curvatures* Computer Aided Geometric Design 20 (2003) 319-341.

[10] V.BORRELLI F. ORGERET *Error term in pointwise approximation of the curvature of a curve*, preprint.

[11] A. H. Barr, M. Desbrun, M. Meyer and P. Schröder *Discrete differential geometry operator for triangulated 2-manifold* Proc. VisMath 2002, Berlin.

[12] C. R. Calladine *Gaussian curvature and shell structures* The mathematics of surfaces, Clarendon Press, Oxford, 1986, 179-196.

[13] M. Daniel, J.-L. Maltret *Curvature and applications : a survey* preprint 2003.

[14] D. S. Meek, D. J. Walton *On surface normal and Gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface* Computer Aided Geometric Design 17 (2000), 521-543.

[15] G. Xu *Convergence analysis of a discretization scheme for Gaussian curvature over triangular surfaces* Computer Aided Geometric Design 23 (2006), 193-207.

[16] Bennis, C. Vézien J.M. Igésias, G. *Piecewise surface flattening for non distored texture mapping* Computer graphics, vol 25, Nř4, pp237-246 (1991).

[17] Berger, M. Gostiaux, B. *Géométrie différentielle : Variété, courbes et surfaces* Second edition, Presses Universitaires de France, Paris (1992).

[18] Boissonnat, J.D. *Diagrammes de Voronoi, triangulations et surfaces* Cours de DEA (Novembre 2001).

[19] Boissonnat, J.D. Cazals F. *Smooth surface reconstruction via natural neighbor interpolation of distance function* Proc 16th Annu. ACM sympos Comput. Geom. (2000) pp223-232.

[20] Boix, E. *Approximations linéaires des surfaces de* $\mathbb{R}^3$ *et applications* Thèse Univ. Lyon I (1995).

[21] Borouchaki H. *Simplification de maillage basé sur la distance de Hausdorff* C.R. Acad. Sci., t. 329 Sŕie I (2000) 319-341.

[22] Borouchaki H. Hecht F. and Frey P.J. *Mesh gradation control* Int. j. numer. methods eng., 43(6), (1998) 1143-1165.

[23] Brehm, U. and Kunnen, W. *Smooth approximation of polyhedral surfaces with respect to curvature mesure*
Global differential geometry, pp 64-68, 1979

[24] BROECKER, L. AND KUPPE, M. *Integral geometry of tame sets* Preprint, Math. dept., Westfalische Wilhems-Universitat, Munster, Germany, 2000

[25] L. CAFFARELLI L. NIRENBERG J. SPRUCK *The Dirichlet Problem for the Degenerate Monge-Ampere Equation* Revista Matematica Iberoamericana 2 Nř1,2(1986) 19-27

[26] G. CARLSSON A. ZOMORODIAN *Computing persistent homology* Proc. 20th Ann. Sympos. Comput. Geom., (1986) 347-356

[27] L. CHEEGER J. MULLER W. SCHRADER R *On the curvature of piecewise flat spaces* Comm. Math. Phys. 92(1984)

[28] CHEW L.P. *Garanteed-Quality Triangular Meshes.* Technical report TR-89-983, Department of Computer Science, Cornell University (1989)

[29] CHEW L.P. *Garanteed-Quality mesh generation for curved surfaces* 9th Annual Computational Geometry, 5/93/CA, USA

[30] CIARLET P.G. *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation* Masson (1990)

[31] CINTRACT B. *Courbures lisses et discrètes* Mémoire de DEA de mathématiques, université lyon I (1998)

[32] COHEN-STEINER D. MORVAN J.M. *Restricted Delaunay Triangulations and Normal Cycles* SOCG'03 (2003)

[33] COHEN-STEINER D. MORVAN J.M. *Approximation of Normal Cycles* Rapport de recherche INRIA N 4723 (fevrier 2003)

[34] COHEN J. VARSHNEY A. MANOCHA D. TURK G. WEBER H. AGARWAL P. BROOKS F. AND WRIGHT W. *Simplification envelopes* Coput. Graphics, Proc. Siggraph'96 (1996) 119-128

[35] COHEN J. OLANO M. AND MANOCHA D. *Appearance-preserving simplification* Coput. Graphics, Proc. Siggraph'98 (1998) 115-122

[36] COHEN-STEINER D. EDELSBRUNNER H. AND HARER J. *Stability of persistence diagrams* Proc. 21st Ann. Sympos. Comput. Geom (2005)

[37] D. COHEN-STEINER AND H. EDELSBRUNNER *Inequalities for the Curvature of Curves and Surfaces* Proc. 20st Ann. Sympos. on Comput. Geom. 2005, xx-yy.

[38] CSKNY, P. WALLACE, A.M. *Computation of local differential parameters on irregular meshes* Cipolla, R. Martin R. (Eds), Mathematics of surfaces (2000)

[39] Do Carmo, M.P. *Differential geometry of curves and surfaces* Prentice-Hall

[40] Desbrun, M. Meyer, M. Schroder, A. Barr, A.H. *Discrete Differential geometry operators in nd* submitted (2000) http ://citeseer.nj.nec.com/desbrun00discrete.html

[41] Desbrun, M. Meyer, M. Alliez, P. *Intrinsec Parametrizations of surfaces meshes* eurographics (2002) http ://citeseer.nj.nec.com/desbrun00discrete.html

[42] Dyn, N. et al *Optimizing 3D triangulations using discrete curvature analysis* In : Lyche, T and Schumacher, L.L. (eds) Mathematical methods in CAGD, pp 1-12, Vanderbilt University Press, 2001.

[43] Edelsbrunner H., Letscher D. and Zomorodian A. *Topological persistence and simplification* Discrete comput. Geom. **28** (2002), 511-533

[44] Fary,I. *sur la courbure d'une coubre gauche faisant un noeud* Bulletin de la S.M.F. tome 77 (1949) 128-138

[45] Federer, H. *Curvature measures* Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959) 418-491

[46] Frey, P.J. and Borouchaki H. *Surface meshing using a geometric error estimate* Int. Jour. numer. methods engng. (2003)

[47] Frey, P.J. and Alauzet F. *Estimateures d'erreur géométrique et métriques anisotropes pour l'adaptation du maillage, Partie I : aspects théoriques* Rapport de recherche INRIA (2003)

[48] Frey, P.J. and Borouchaki H. *Geometric surface Mesh Optimization* Computing and visualisation in Science,1, 113-121 (1998)

[49] Frey, P.J. and Borouchaki H. *Surface mesh quality evaluation* Int. j. numer. methods eng.,45, 101-108 (1999)

[50] Frey, P.J. and George P.L. *Mesh génération : application to finite elements* Hermès Science Publ., Paris, 816p (2000)

[51] Fu,L. *Convergence of curvatures in secant approximations* Journal of Differential Geometry (1993) 177-190

[52] Fuchs, D. Tabachnikov S. *More on Parperfolding* Amer. Math. Monthly 106 (1999), Nř1 27-35

[53] Gratier, J.P. Guillier B. *Compatibility constraints on folded and faulted strata and calculation of total displacement using computational restoration (UNFOLD)*
Journal of structural geology, Vol 15, Nř3-5, 391-402, 1993

[54] Gray, A. *Tubes-second edition*
Progress in Maths-Birkhauser (2004)

[55] Gregory J.A. *Smooth interpolation without twist constraints*
R.E. Barnhill and R.F. Riesenfed (Eds)
Computer Aided Geometric Design, Academic Press,(1974) 71-87

[56] Hamman, B. *Curvature approximation for triangulated surfaces*
Computing Suppl 8 (1993) 139-153

[57] Haraux, A. *How to differentiate the projection on a convex set in Hilbert space. Some application to variational equalities*
J. Math. Soc. Japan 29 Nř24 (1977) 615-631

[58] Hartman, P. Wintner, A. *On the fundamental equations of differential geometry*
Amer. Jour. Math., 72 (1950) 757-774

[59] Hartman, P. Wintner, A. *On the asymptotic curves of a surface*
Amer. Jour. Math., 73 (1951) 149-172

[60] Hartman, P. Nirenberg, L. *On the spherical image maps whose Jacobians do not change sign*
Amer. Jour. Math., 81 (1959) 901-920

[61] Hausdorff, F. *Set Theory*
Chelsea, 1978 (translated from the German).

[62] Huffman, D.A. *Curvatures and creases : a primer on paper*
IEEE Transactions on computers, C-25 Nř10 (1976) 1010-1019

[63] Kreyszig, E. *Differential geometry*
Dover (ed)

[64] Kuhnel, W. *Differential geometry. Curves-Surfaces-Manifolds*
Amer Math Society, 2002

[65] J. Lafontaine *Mesure de courbure des varietes lisses et des polyedres*
Seminaire BOURBAKI 664 38eme annee(1985-86) 241-256

[66] Léger, M. Morvan, J.M. Rakotoarisoa H. *Inversion of 3D structural geometry using geological least-square criteria*
Geophysical Journal International (1995), vol 121, 63-81

[67] Léger, M. Thibault M. Gratier J.P. Morvan *A least-square method for multisurface unfolding*
Journal of Structural geology (1997), vol 19, 735-743

[68] Léger, M. Thibault M. Gratier J.P. Morvan *An inverse method for determining three dimensional fault with thread criterion : Application to strike slip and thrust faults*
Journal of Structural geology 18 (1996), vol 19, 1127-1138

[69] Lelong-Ferrand, J. *géométrie différentielle*
Masson (ed)

[70] Levoy, M. Turk, G. *Zippered Polygon Meshes from Range Images*
Siggraph '94 Proceedings (1994)

[71] Levy, B. Petijean, S. Ray N., Maillot, J. *Least square conformal maps for automatic texture atlas generation*
Siggraph 2002

[72] Lowekamp, B. Rheingans, P., and Yoo, T.S. *Exploring surface characteristics with interactive Gaussian images : a case study*
Proc. of the conference on Visualization '02, 2002, pp 553-556

[73] Maltret, J-L., and Daniel M. *Discrete curvatures and apliactions : a survey. Research report LSIS-02-04, March 202*
Research report LSIS-02-004, March 2002

[74] Massey, W.S. *Surfaces of Gaussian curvature zero in euclidean 3-space*
Tohoku Math J. 14 (1962), 73-79

[75] Meyer, M., Desbrun, M., Schroder, P. and Barr, A.H. *Discrete differential-geometry operators for tri-annulated* 2-*manifold*
In : Hege, H.-Ch., and Pohltier, K. (eds.) Visualization and Mathematics III, pp 35-59, Springer-Verlag, 2003

[76] Millnor, J. *Morse theory*
Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1963)

[77] Millnor, J. *Euler characteristic and finitely additive steiner measure*
Collected Papers, volume I : Geometry, Publish or Perish, Houston, texas (1994)

[78] Morgan, F. *Geometric mesure theory*
Acad. Press, INC 1987

[79] Morvan, J.-M., Thibert, B *Smooth surface and triangular mesh : Comparison of the area, the normals and the unfolding.*
ACN Symposium on Solid Modeling and Applications (2001).

[80] Morvan, J.-M., Thibert, B *On the approximation of a smooth surface with a triangulated mesh*

Computational Geometry Theory and Application (2002), vol 23/3 pp 337-352.

[81] MORVAN, J.-M., THIBERT, B *Smooth surface and triangular mesh : Comparison of the area, the normals and the unfolding.* ACN Symposium on Solid Modeling and Applications (2001).

[82] MORVAN, J.-M., THIBERT, B *On the Approximation of the Normal Vector Field of a Smooth Surface with the Normal of a triangulated Mesh*
Rapport de recherche INRIA N 4476 (juin 2002).

[83] MORVAN, J.-M., THIBERT, B *Unfolding of surfaces*
Rapport de recherche INRIA N 4615 (novembre 2002).

[84] MORVAN J.M. THIBERT B. GRATIER J.P. *A direct method for modelizing developable strata : Application to Ventura Bay(California)*
Journal of Structural geology (2005)

[85] MUNKRESS J.R. *Elements of Algebraic Topology*
Addison-Wesley, Redwood City, California (1984)

[86] RAMSEY, J.G. *Folding and fracturing of rocks*
Imperial college of science and technology, London

[87] POSTNIKOV, M. *Géométrie différentielle*
Leçons de géométrie-Editions Mir (1990)

[88] SAMSON, P. *Equilibrage de structures géologiques 3D dans le cadre du projet Gocad*
Thèse (1996)

[89] SANTALO, L. *Integral Geometry and Geometric Probability*
Addison-Wesley, 1996, reprinted by Cambridge Univ. Press, England, 2004

[90] A. SHEFFER E. DE STURLER *Parametrization of faceted surfaces for Meshing using angle-based flattening*
Engineering with Computers, 17 (3), 326-337, 2001.

[91] SHEWCHUK J.R. *Delaunay Refinement Algorithm for Triangular Mesh Generation*
(2001)

[92] SHYUICHI, T. NOBUKO, T. *Singularities of ruled surfaces in* $\mathbb{R}^3$
Marh. Proc. Cambridge Philos. Soc. 130 (2001), Nř1, 1-11

[93] SPIVAK, M. *A comprehensive introduction to differential geometry* Vol III Second edition, Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., (1979)

[94] Steiner, J. *Gesammelte Werke* Prussian Academy of Sciences, 1881, reprinted by Chelsea, New-York, 1971

[95] Stroustrup, B. *Le langage C++*
édition spéciale, Campus Press, France 2001

[96] Tabachnikov, S. *The tale of geometric inequality*
MASS colloquium lecture, 1999

[97] Taubin G. *Curve and surface smoothing without shrinkage*
Proc. 5th Int. Conf. on Computer Vision, 852-857 (1995).

[98] Thibert, B. *Sur l'approximation gómétrique des surfaces lisses. Applications en géologie structurale.* Thèse Univ Lyon I (2003)

[99] R. Van Damme L. Abdoul *Tight triangulations*
Mathematical methods for curves and surfaces
eds M. Daehlen, L. Lyche and L.L. Schumaker, Vanderbilt Univ. Press, Nashville, Tennessee, 517-526, 1995

[100] Wessel, P. Smith, W.H.F. *GMT*
http ://gmt.soest.hawaii.edu/

[101] Wolter, F. E. *Cut locus and medial axis in global shape interrogation and representation*
MIT Design Laboratory Memorandum 92-2 and MIT Sea Grant report (1992)

[102] Walton D.J. and Meek D.S. *A triangular G^1 patch from boudary curves*
Comput. Aided Design, 28(2), 113-123 (1995).

[103] Z. Xu G.Xu J.Sun *Convergence analysis of discrete differential geometry operators over surfaces*
Preprint submitted to Elsevier science

[104] G. Xu *Convergence analysis of discrete differential geometry operators over surfaces*
Comput. Aided Design, 23, 193-207 (2006).