

Propriétés d'ubiquité en analyse multifractale et séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Arnaud Durand

Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
Université Paris 12 – Val de Marne

Thèse présentée pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 12
et effectuée sous la direction du Professeur Stéphane Jaffard

Problèmes étudiés

Problème initial : séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

- ▶ Définition d'un modèle de corrélations entre coefficients d'ondelettes
- ▶ Modèle retenu : modèle d'arbre de Markov caché
- ▶ Étude des propriétés de régularité globale et ponctuelle des trajectoires

Problèmes étudiés

Problème initial : séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

- ▶ Définition d'un modèle de corrélations entre coefficients d'ondelettes
- ▶ Modèle retenu : modèle d'arbre de Markov caché
- ▶ Étude des propriétés de régularité globale et ponctuelle des trajectoires

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

- ▶ Applications à la théorie métrique de l'approximation diophantienne
- ▶ Applications à l'analyse multifractale de certains processus

Problèmes étudiés

Problème initial : séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

- ▶ Définition d'un modèle de corrélations entre coefficients d'ondelettes
- ▶ Modèle retenu : modèle d'arbre de Markov caché
- ▶ Étude des propriétés de régularité globale et ponctuelle des trajectoires

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

- ▶ Applications à la théorie métrique de l'approximation diophantienne
- ▶ Applications à l'analyse multifractale de certains processus

Ensembles à grande intersection et ubiquité hétérogène

Problèmes étudiés

Problème initial : séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

- ▶ Définition d'un modèle de corrélations entre coefficients d'ondelettes
- ▶ Modèle retenu : modèle d'arbre de Markov caché
- ▶ Étude des propriétés de régularité globale et ponctuelle des trajectoires

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

- ▶ Applications à la théorie métrique de l'approximation diophantienne
- ▶ Applications à l'analyse multifractale de certains processus

Ensembles à grande intersection et ubiquité hétérogène

Fractals aléatoires basés sur une chaîne de Markov indexée par un arbre

- ▶ Applications : processus de percolation fractale de B. Mandelbrot,...

Plan de l'exposé

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

Fractals aléatoires basés sur une chaîne de Markov indexée par un arbre

Séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Prolongements envisageables

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

Ensembles à grande intersection

Ubiquité homogène

Applications à la théorie métrique de l'approximation diophantienne

Fractals aléatoires basés sur une chaîne de Markov indexée par un arbre

Séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Prolongements envisageables

Classes $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ de K. Falconer

Définition (K. Falconer, 1994)

Pour tout $s \in]0, d]$, la classe $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ des **ensembles à grande intersection de dimension supérieure à s** est la collection des ensembles F qui sont des G_δ de \mathbb{R}^d et qui vérifient, pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de similitudes de \mathbb{R}^d ,

$$\dim \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n(F) \geq s.$$

Théorème (K. Falconer, 1994)

Pour tout $s \in]0, d]$, la classe $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ est stable par intersection dénombrable et par toutes les applications bilipschitziennes de \mathbb{R}^d .

Caractérisation des classes $\mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$

Notation

Pour tout réel $t > 0$ et tout ensemble $F \subset \mathbb{R}^d$, posons

$$\mathcal{M}_\infty^t(F) = \inf_{\substack{F \subset \bigcup_p \lambda_p \\ |\lambda_p| < 1}} \sum_{p=0}^{\infty} |\lambda_p|^t,$$

où chaque λ_p est, soit l'ensemble vide, soit un cube dyadique.

Proposition (K. Falconer, 1994)

Soient $s \in]0, d]$ et F un G_δ de \mathbb{R}^d . Alors, $F \in \mathcal{G}^s(\mathbb{R}^d)$ ssi pour tout réel $t \in]0, s[$ et tout ouvert U de \mathbb{R}^d ,

$$\mathcal{M}_\infty^t(F \cap U) = \mathcal{M}_\infty^t(U).$$

Un premier exemple en approximation diophantienne

Définition

Pour tout $\tau > 0$, l'ensemble des **réels τ -approchables par des rationnels** est

$$J_\tau = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\tau} \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right. \right\}.$$

Théorème (Dirichlet)

Pour tout réel $\tau \leq 2$, on a $J_\tau = \mathbb{R}$.

Théorème (Jarník, 1929 ; Besicovitch, 1934)

Pour tout réel $\tau > 2$, on a $\dim J_\tau = 2/\tau$.

Théorème (K. Falconer, 1994)

Pour tout réel $\tau > 2$, on a $J_\tau \in \mathcal{G}^{2/\tau}(\mathbb{R})$.

Jauges et mesures de Hausdorff

Définition

Une fonction $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une **jauge** si

- ▶ g est croissante au voisinage de 0 et vérifie $\lim_{0+} g = g(0) = 0$;
- ▶ $r \mapsto g(r)/r^d$ est décroissante et strictement positive sur un voisinage à droite strict de 0.

Deux jauges g et \bar{g} étant fixées, on écrit $\bar{g} \prec g$ si $\lim_{r \downarrow 0} \uparrow \frac{\bar{g}(r)}{g(r)} = \infty$.

Définition

Pour toute jauge g et tout ensemble $F \subset \mathbb{R}^d$, la **g -mesure de Hausdorff de F** est

$$\mathcal{H}^g(F) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \uparrow \inf_{\substack{F \subset \bigcup_p E_p \\ |E_p| < \varepsilon}} \sum_{p=0}^{\infty} g(|E_p|).$$

Classes $G^g(V)$

Notation

Pour toute jauge g , notons ε_g le supremum des réels $\varepsilon \in]0, 1]$ tels que g croît sur $[0, \varepsilon]$ et $r \mapsto g(r)/r^d$ décroît sur $]0, \varepsilon]$, puis posons

$$\forall F \subset \mathbb{R}^d \quad \mathcal{M}_\infty^g(F) = \inf_{\substack{F \subset \bigcup_p \lambda_p \\ |\lambda_p| < \varepsilon_g}} \sum_{p=0}^{\infty} g(|\lambda_p|),$$

où chaque λ_p est, soit l'ensemble vide, soit un cube dyadique.

Définition

Soient g une jauge et V un ouvert non vide de \mathbb{R}^d . La classe $G^g(V)$ des **ensembles à grande intersection dans V relativement à g** est la collection des sous-ensembles F de \mathbb{R}^d qui sont des G_δ et qui vérifient

$$\mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(F \cap U) = \mathcal{M}_\infty^{\bar{g}}(U)$$

pour toute jauge \bar{g} telle que $\bar{g} \prec g$ et tout ouvert $U \subset V$.

Classes $G^g(V)$ **Théorème**

Soient g une jauge et V un ouvert non vide de \mathbb{R}^d . Alors

1. la classe $G^g(V)$ est stable par intersection dénombrable ;
2. pour toute application bilipschitzienne $f : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ et tout ensemble $F \in G^g(f(V))$, on a $f^{-1}(F) \in G^g(V)$;
3. tout ensemble $F \in G^g(V)$ vérifie $\mathcal{H}^{\bar{g}}(F) = \infty$ pour toute jauge \bar{g} telle que $\bar{g} \prec g$. En particulier,

$$\dim F \geq s_g = \sup \{s \in]0, d[\mid r^s \prec g(r)\}.$$

Corollaire

Pour toute jauge g vérifiant $s_g > 0$, on a $G^g(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G}^{s_g}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème d'ubiquité homogène

Soit $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ vérifiant

$$\sup_{i \in I} r_i < \infty \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \#\{i \in I \mid \|x_i\| < m \text{ et } r_i > 1/m\} < \infty.$$

Considérons l'ensemble

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\}.$$

Théorème d'ubiquité homogène

Soit $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ vérifiant

$$\sup_{i \in I} r_i < \infty \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \#\{i \in I \mid \|x_i\| < m \text{ et } r_i > 1/m\} < \infty.$$

Considérons l'ensemble

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\}.$$

Théorème

Soient g une jauge et V un ouvert non vide de \mathbb{R}^d . On suppose que pour Lebesgue-presque tout point $x \in V$, il existe une infinité de $i \in I$ tels que

$$\|x - x_i\| < g(r_i)^{1/d}.$$

Alors, l'ensemble F appartient à la classe $G^g(V)$.

Théorème d'ubiquité homogène

Soit $(x_i, r_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{R}^d \times]0, \infty[$ vérifiant

$$\sup_{i \in I} r_i < \infty \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \#\{i \in I \mid \|x_i\| < m \text{ et } r_i > 1/m\} < \infty.$$

Considérons l'ensemble

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\}.$$

Théorème

Soient g une jauge et V un ouvert non vide de \mathbb{R}^d . On suppose que pour Lebesgue-presque tout point $x \in V$, il existe une infinité de $i \in I$ tels que

$$\|x - x_i\| < g(r_i)^{1/d}.$$

Alors, l'ensemble F appartient à la classe $G^g(V)$.

Remarques

- ▶ Pour toute jauge \bar{g} vérifiant $\bar{g} \prec g$, on a $\mathcal{H}^{\bar{g}}(F) = \infty$.
- ▶ Le **principe de transfert de masse** de V. Beresnevich et S. Velani (2006) montre qu'en fait $\mathcal{H}^g(F) = \infty$.

Approximation diophantienne simultanée homogène

Rappel

Pour tout réel $\tau > 2$, l'ensemble

$$J_\tau = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\tau} \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$$

est de dimension $2/\tau$ et appartient à la classe $\mathcal{G}^{2/\tau}(\mathbb{R})$.

Approximation diophantienne simultanée homogène

Théorème

Pour toute suite décroissante $\psi = (\psi(q))_{q \in \mathbb{N}^*}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0, notons

$$K_{d,\psi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \left\| x - \frac{p}{q} \right\| < \psi(q) \text{ pour une infinité de } (p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^* \right\}.$$

Alors, pour toute jauge g et tout ouvert non vide V de \mathbb{R}^d ,

$$\begin{cases} \sum_q g(\psi(q))q^d = \infty & \implies & \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V) \\ \sum_q g(\psi(q))q^d < \infty & \implies & \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = 0 \end{cases}$$

et

$$\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \iff K_{d,\psi} \in G^g(V).$$

Remarque

La partie de ce résultat qui concerne les mesures de Hausdorff contient le théorème de Khintchine (1926) et le théorème de Jarník (1931).

Preuve

- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty \implies \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = 0$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty \implies K_{d,\psi} \notin G^g(V)$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \implies K_{d,\psi} \in G^g(V)$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \implies \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$

On observe que

$$K_{d,\psi} = \mathbb{Z}^d + \limsup_{q \rightarrow \infty} \bigcup_{p \in \{0, \dots, q-1\}^d} B\left(\frac{p}{q}, \psi(q)\right)$$

et que, pour $\varepsilon > 0$ et q_0 assez grand,

$$\mathcal{H}_\varepsilon^g \left(\limsup_{q \rightarrow \infty} \bigcup_{p \in \{0, \dots, q-1\}^d} B\left(\frac{p}{q}, \psi(q)\right) \right) \leq 2^d \sum_{q=q_0}^{\infty} g(\psi(q))q^d \xrightarrow{q_0 \rightarrow \infty} 0.$$

Il en résulte que $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi}) = 0$.

Preuve

- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty \quad \implies \quad \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = 0$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty \quad \implies \quad K_{d,\psi} \notin G^g(V)$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \quad \implies \quad K_{d,\psi} \in G^g(V)$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \quad \implies \quad \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$

Il existe une jauge \bar{g} vérifiant $\bar{g} \prec g$ et $\sum_q \bar{g}(\psi(q))q^d < \infty$. Alors $\mathcal{H}^{\bar{g}}(K_{d,\psi}) = 0$, de sorte que $K_{d,\psi}$ ne peut appartenir à $G^g(V)$.

Preuve

- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty \quad \implies \quad \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = 0$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty \quad \implies \quad K_{d,\psi} \notin G^g(V)$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \quad \implies \quad K_{d,\psi} \in G^g(V)$
- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \quad \implies \quad \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$

Théorème (Khintchine, cas de divergence, 1926)

Si $\sum_q \psi(q)^d q^d = \infty$, alors $K_{d,\psi}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans \mathbb{R}^d .

D'après le théorème de Khintchine, pour Lebesgue-presque tout point $x \in V$, il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left\| x - \frac{p}{q} \right\| < g(\psi(q))^{1/d}.$$

Le théorème d'ubiquité implique alors que $K_{d,\psi}$ appartient à la classe $G^g(V)$.

Preuve

- ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty \quad \implies \quad \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = 0$
 - ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d < \infty \quad \implies \quad K_{d,\psi} \notin G^g(V)$
 - ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \quad \implies \quad K_{d,\psi} \in G^g(V)$
 - ▶ $\sum_q g(\psi(q))q^d = \infty \quad \implies \quad \mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \mathcal{H}^g(V)$
-
- ▶ Si $g(r) \prec r^d$, il existe une jauge \underline{g} vérifiant $g \prec \underline{g}$ et $\sum_q \underline{g}(\psi(q))q^d = \infty$. Alors $K_{d,\psi} \in G^{\underline{g}}(V)$, de sorte que $\mathcal{H}^g(K_{d,\psi} \cap V) = \infty = \mathcal{H}^g(V)$.
 - ▶ Si $g(r) \not\prec r^d$, la mesure \mathcal{H}^g coïncide à une constante multiplicative près avec la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R}^d et le résultat découle du théorème de Khintchine.

Théorème (Khintchine, cas de divergence, 1926)

Si $\sum_q \psi(q)^d q^d = \infty$, alors $K_{d,\psi}$ est de mesure de Lebesgue pleine dans \mathbb{R}^d .

Autres applications à l'approximation diophantienne

La méthode précédente s'applique aussi aux ensembles intervenant dans les problèmes suivants :

- ▶ Approximation diophantienne simultanée inhomogène
- ▶ Approximation diophantienne avec restrictions
- ▶ Étude des nombres de Liouville
- ▶ Approximation par des nombres algébriques
 - ▶ Application à la classification de Koksma des réels transcendants.

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

Fractals aléatoires basés sur une chaîne de Markov indexée par un arbre

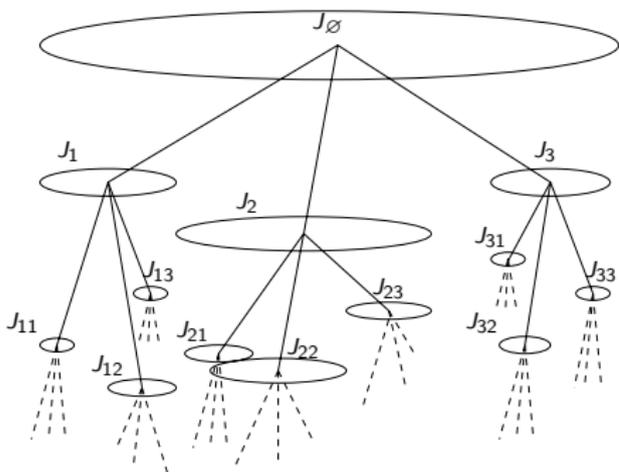
Cadre général

Application au processus de percolation fractale

Séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Prolongements envisageables

Compacts indexés par un arbre n -aire



Pour $n \geq 2$, l'arbre n -aire est

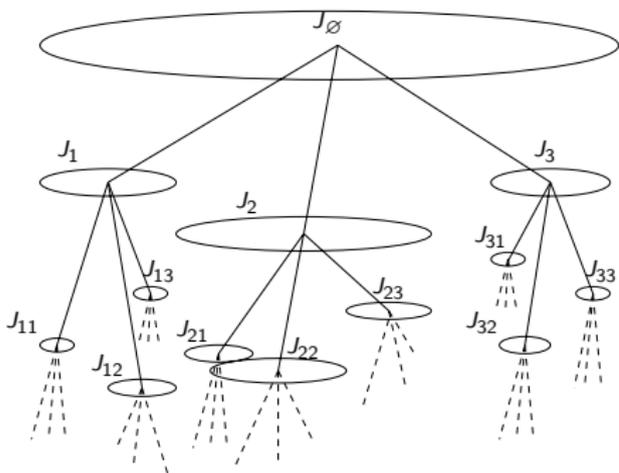
$$\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} \{1, \dots, n\}^j.$$

La génération d'un $u \in \mathcal{U}$ est notée $\langle u \rangle$. On considère une famille $(J_u)_{u \in \mathcal{U}}$ de compacts aléatoires de \mathbb{R}^d telle que :

- ▶ J_{u_1}, \dots, J_{u_n} sont inclus dans J_u et d'intérieurs disjoints ;
- ▶ $\inf_u \frac{\mathcal{L}^d(\text{int } J_u)}{|J_u|^d} > 0$;
- ▶ les $\left(\frac{|J_{u_1}|}{|J_u|}, \dots, \frac{|J_{u_n}|}{|J_u|} \right)$ sont indépendants et ont pour loi $\mu_{\langle u \rangle}$,

où μ_0, μ_1, \dots sont des mesures de probabilité sur $[\underline{\beta}, \bar{\beta}]^n$, avec $0 < \underline{\beta} \leq \bar{\beta} < 1$.

Compacts indexés par un arbre n -aire



Pour toute suite $\zeta = (\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ dans $\{1, \dots, n\}$,

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} J_{\zeta_1 \dots \zeta_j} = \{x_{\zeta}\}.$$

Alors, l'ensemble

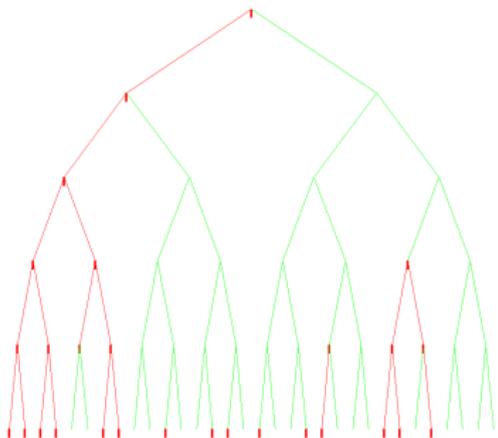
$$K = \bigcup_{\zeta} \{x_{\zeta}\}$$

est un compact aléatoire de \mathbb{R}^d .

Théorème (Y.-Y. Liu, Z.-Y. Wen, J. Wu, 2004)

La dimension de Hausdorff de K prend presque sûrement une valeur unique qu'il est possible de déterminer en fonction des mesures μ_0, μ_1, \dots

Chaîne de Markov indexée par un arbre n -aire



On considère une chaîne de Markov inhomogène $(X_u)_{u \in \mathcal{U}}$ à espace d'états $\{0, 1\}$ telle que :

- ▶ presque sûrement, $X_\emptyset = 1$;
- ▶ pour tout $u \in \mathcal{U}$,
conditionnellement aux états X_v ,
pour v n'étant pas un descendant
de u , les états X_{u1}, \dots, X_{un} sont
tirés selon la loi $\nu_{X_u, \langle u \rangle}$,

où $(\nu_{t,j})_{t \in \{0,1\}, j \in \mathbb{N}}$ est une famille de mesures de probabilité sur $\{0, 1\}^n$.

Notons Z l'ensemble des suites $\zeta = (\zeta_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ dans $\{1, \dots, n\}$ telles que

$$\forall j \text{ assez grand} \quad X_{\zeta_1 \dots \zeta_j} = 1$$

puis considérons

$$\Theta = \bigcup_{\zeta \in Z} \{x_\zeta\} \subset K.$$

Loi de la dimension de Θ

Pour simplifier, supposons que $\nu_{1,j}(\{(0, \dots, 0)\}) < 1$. Notons

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \alpha_{s,j} = \int_{\{0,1\}^n} \int_{[\underline{\beta}, \bar{\beta}]^n} \sum_{k=1}^n \ell_k^s x_k \mu_j(d\ell) \nu_{1,j}(dx).$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'équation $\alpha_{s,0} \cdot \dots \cdot \alpha_{s,j} = 1$ admet une unique solution d_j .
Posons

$$d_* = \liminf_{j \rightarrow \infty} d_j.$$

Théorème

- ▶ Si $d_* < 0$, alors Θ est presque sûrement vide.
- ▶ Sinon, presque sûrement, $\dim \Theta \in \{-\infty, 0, d_*\}$.
- ▶ On dispose d'une expression de la loi de $\dim \Theta$ faisant intervenir une famille de processus de Galton-Watson en environnement variable.
- ▶ On dispose de conditions nécessaires et de conditions suffisantes sur μ_j et $\nu_{t,j}$ pour avoir $\mathbb{P}(\Theta = \emptyset) = 1$, $\mathbb{P}(\dim \Theta = d_*) = 1$, etc.

Processus de percolation fractale de B. Mandelbrot

J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_2	J_3
J_{14}	J_{15}	J_{16}		
J_{17}	J_{18}	J_{19}		
J_4			J_5	J_6
J_7			J_8	J_9

Construction

On choisit un entier $c \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$.

- ▶ On part du carré $[0, 1]^2$,
- ▶ on conserve chaque carré $[\frac{k_1}{c}, \frac{k_1+1}{c}] \times [\frac{k_2}{c}, \frac{k_2+1}{c}]$, pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, c-1\}^2$, avec probabilité p , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Processus de percolation fractale de B. Mandelbrot



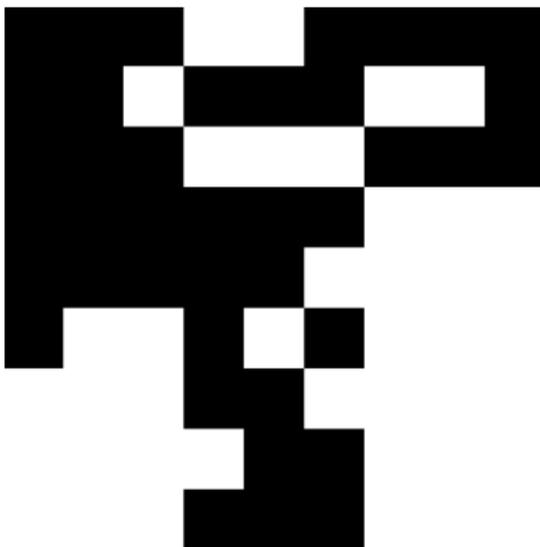
Construction

On choisit un entier $c \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$.

- ▶ On part du carré $[0, 1]^2$,
- ▶ on conserve chaque carré $[\frac{k_1}{c}, \frac{k_1+1}{c}] \times [\frac{k_2}{c}, \frac{k_2+1}{c}]$, pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, c-1\}^2$, avec probabilité p , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $c = 3$, $p = 0.7$.

Processus de percolation fractale de B. Mandelbrot



Construction

On choisit un entier $c \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$.

- ▶ On part du carré $[0, 1]^2$,
- ▶ on conserve chaque carré $[\frac{k_1}{c}, \frac{k_1+1}{c}] \times [\frac{k_2}{c}, \frac{k_2+1}{c}]$, pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, c-1\}^2$, avec probabilité p , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $c = 3$, $p = 0.7$.

Processus de percolation fractale de B. Mandelbrot



Construction

On choisit un entier $c \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$.

- ▶ On part du carré $[0, 1]^2$,
- ▶ on conserve chaque carré $[\frac{k_1}{c}, \frac{k_1+1}{c}] \times [\frac{k_2}{c}, \frac{k_2+1}{c}]$, pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, c-1\}^2$, avec probabilité p , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $c = 3$, $p = 0.7$.

Processus de percolation fractale de B. Mandelbrot



Construction

On choisit un entier $c \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$.

- ▶ On part du carré $[0, 1]^2$,
- ▶ on conserve chaque carré $[\frac{k_1}{c}, \frac{k_1+1}{c}] \times [\frac{k_2}{c}, \frac{k_2+1}{c}]$, pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, c-1\}^2$, avec probabilité p , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $c = 3$, $p = 0.7$.

Processus de percolation fractale de B. Mandelbrot



Construction

On choisit un entier $c \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$.

- ▶ On part du carré $[0, 1]^2$,
- ▶ on conserve chaque carré $\left[\frac{k_1}{c}, \frac{k_1+1}{c}\right] \times \left[\frac{k_2}{c}, \frac{k_2+1}{c}\right]$, pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, c-1\}^2$, avec probabilité p , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $c = 3$, $p = 0.7$.

Processus de percolation fractale de B. Mandelbrot



Construction

On choisit un entier $c \geq 2$ et un réel $p \in]0, 1[$.

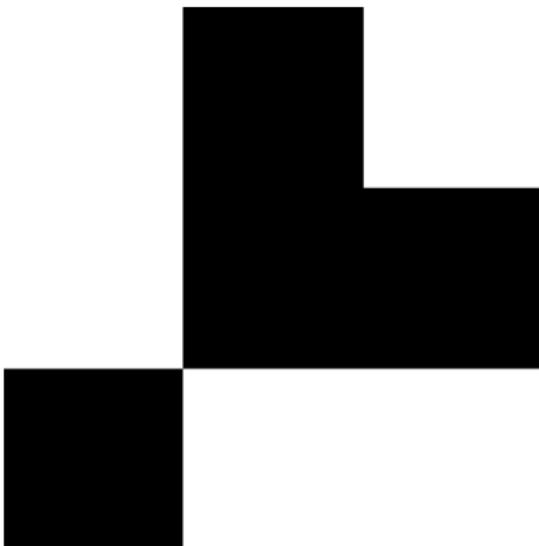
- ▶ On part du carré $[0, 1]^2$,
- ▶ on conserve chaque carré $[\frac{k_1}{c}, \frac{k_1+1}{c}] \times [\frac{k_2}{c}, \frac{k_2+1}{c}]$, pour $(k_1, k_2) \in \{0, \dots, c-1\}^2$, avec probabilité p , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $c = 3$, $p = 0.7$.

Théorème (J. Chayes, L. Chayes, R. Durrett, 1988)

- ▶ *L'ensemble restant est non vide avec probabilité non nulle ssi $p > 1/c^2$.*
- ▶ *Conditionnellement au fait que l'ensemble restant est non vide, sa dimension de Hausdorff vaut presque sûrement $2 + \log_c p$.*

Généralisation du processus de percolation fractale



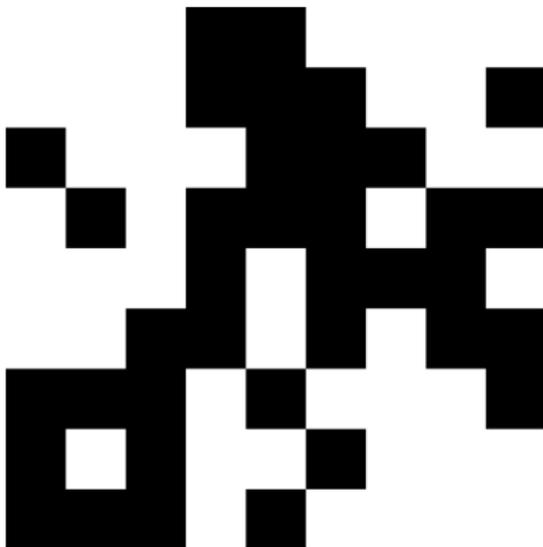
Construction

On choisit un entier $c \geq 2$, ainsi que $p_0, p_1, \dots \in]0, 1]$ et $q_1, q_2, \dots \in [0, 1]$.

- ▶ On part du cube $[0, 1]^d$,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c$ avec probabilité p_0 , indépendamment des autres,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube noir avec probabilité p_1 , indépendamment des autres,
- ▶ on noircit chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube blanc avec probabilité q_1 , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $d = 2$, $c = 3$.

Généralisation du processus de percolation fractale



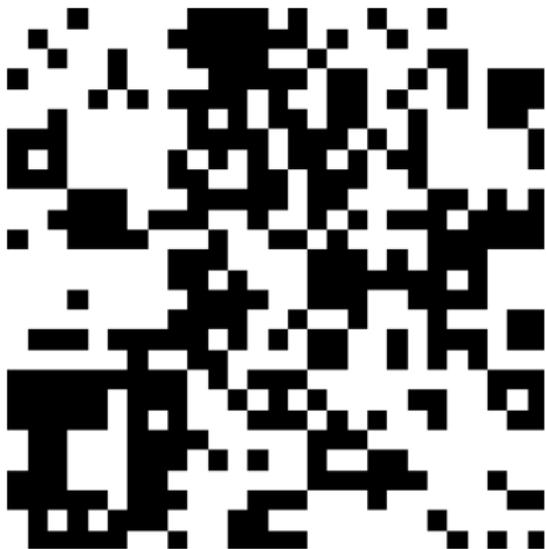
Construction

On choisit un entier $c \geq 2$, ainsi que $p_0, p_1, \dots \in]0, 1]$ et $q_1, q_2, \dots \in [0, 1]$.

- ▶ On part du cube $[0, 1]^d$,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c$ avec probabilité p_0 , indépendamment des autres,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube noir avec probabilité p_1 , indépendamment des autres,
- ▶ on noircit chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube blanc avec probabilité q_1 , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $d = 2$, $c = 3$.

Généralisation du processus de percolation fractale



Construction

On choisit un entier $c \geq 2$, ainsi que $p_0, p_1, \dots \in]0, 1]$ et $q_1, q_2, \dots \in [0, 1]$.

- ▶ On part du cube $[0, 1]^d$,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c$ avec probabilité p_0 , indépendamment des autres,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube noir avec probabilité p_1 , indépendamment des autres,
- ▶ on noircit chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube blanc avec probabilité q_1 , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $d = 2$, $c = 3$.

Généralisation du processus de percolation fractale



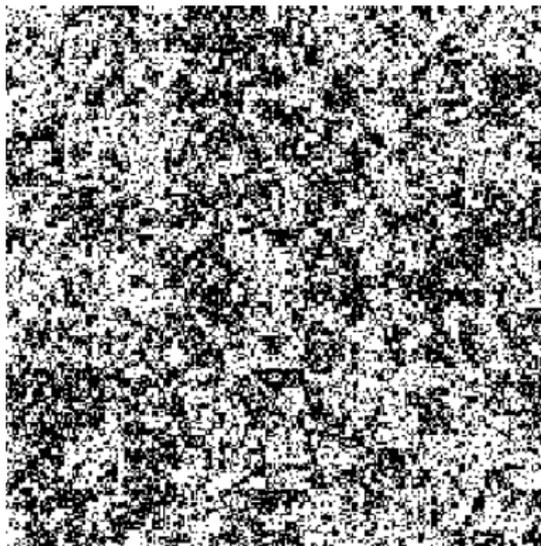
Construction

On choisit un entier $c \geq 2$, ainsi que $p_0, p_1, \dots \in]0, 1]$ et $q_1, q_2, \dots \in [0, 1]$.

- ▶ On part du cube $[0, 1]^d$,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c$ avec probabilité p_0 , indépendamment des autres,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube noir avec probabilité p_1 , indépendamment des autres,
- ▶ on noircit chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube blanc avec probabilité q_1 , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $d = 2$, $c = 3$.

Généralisation du processus de percolation fractale



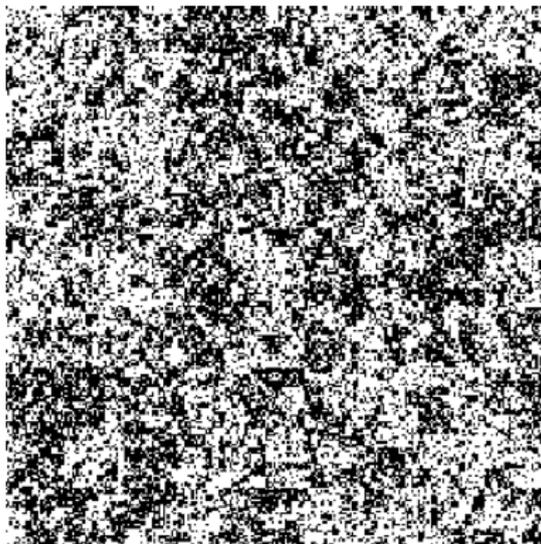
Construction

On choisit un entier $c \geq 2$, ainsi que $p_0, p_1, \dots \in]0, 1]$ et $q_1, q_2, \dots \in [0, 1]$.

- ▶ On part du cube $[0, 1]^d$,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c$ avec probabilité p_0 , indépendamment des autres,
- ▶ on conserve chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube noir avec probabilité p_1 , indépendamment des autres,
- ▶ on noircit chaque sous-cube de côté $1/c^2$ d'un cube blanc avec probabilité q_1 , indépendamment des autres,
- ▶ etc.

Exemple : $d = 2$, $c = 3$.

Généralisation du processus de percolation fractale



Avec le formalisme général

- ▶ Les mesures donnant les rapports de contraction à chaque échelle sont $\mu_j = \delta_{1/c}^{\otimes c^d}$.
- ▶ Les probabilités de transition de la chaîne de Markov sont

$$\begin{cases} \nu_{0,j} = (q_j \delta_1 + (1 - q_j) \delta_0)^{\otimes c^d} \\ \nu_{1,j} = (p_j \delta_1 + (1 - p_j) \delta_0)^{\otimes c^d} \end{cases}$$

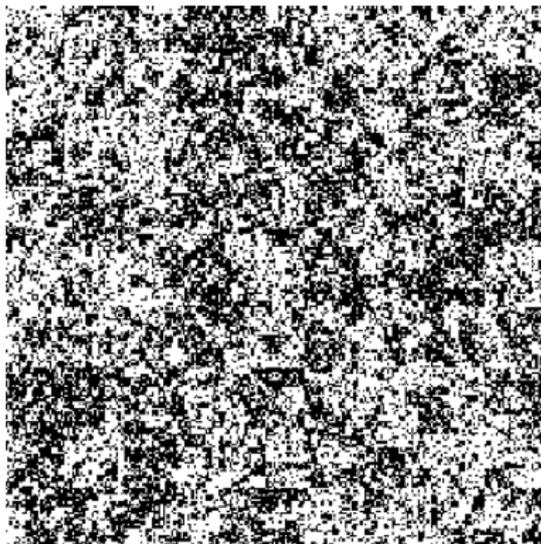
- ▶ Ainsi, pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $j \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{s,j} = c^{(d-s)j} p_j.$$

- ▶ Finalement,

$$d_* = d + \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log_c (p_0 \cdot \dots \cdot p_j)$$

Généralisation du processus de percolation fractale



Théorème

Posons

$$d_* = d + \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log_c(p_0 \cdot \dots \cdot p_j).$$

- ▶ Si $d_* < 0$, alors l'ensemble restant est presque sûrement vide.
- ▶ Sinon, sa dimension appartient presque sûrement à $\{-\infty, 0, d_*\}$.
- ▶ Si $d_* > 0$ et si

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c^{dj} q_j}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^{dk} p_{j+1} \dots p_{j+k}}} = \infty,$$

alors sa dimension vaut presque sûrement d_* .

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

Fractals aléatoires basés sur une chaîne de Markov indexée par un arbre

Séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Modèle d'arbre de Markov caché

Étude de la régularité des trajectoires

Prolongements envisageables

Modèle d'arbre de Markov caché

- ▶ Introduit par M. Crouse, R. Nowak et R. Baraniuk en 1998.
- ▶ En dimension 1, on considère une chaîne de Markov inhomogène indexée par l'arbre binaire et à espace d'états $\{0, 1\}$, dont les probabilités de transition sont

$$\nu_{0,j} = (q_j \delta_1 + (1 - q_j) \delta_0)^{\otimes 2} \quad \text{et} \quad \nu_{1,j} = (p_j \delta_1 + (1 - p_j) \delta_0)^{\otimes 2},$$

avec $p_j, q_j \in [0, 1]$ pour tout entier $j \geq 0$.

- ▶ Conditionnellement à la chaîne de Markov, les coefficients d'ondelette sont indépendants et le coefficient indexé par un intervalle dyadique λ donné suit une loi gaussienne de grande (resp. petite) variance si la chaîne attribue l'état 1 (resp. 0) au sommet de l'arbre qui correspond à λ .

Modèle d'arbre de Markov caché

- ▶ Introduit par M. Crouse, R. Nowak et R. Baraniuk en 1998.
- ▶ En dimension 1, on considère une chaîne de Markov inhomogène indexée par l'arbre binaire et à espace d'états $\{0, 1\}$, dont les probabilités de transition sont

$$\nu_{0,j} = (q_j \delta_1 + (1 - q_j) \delta_0)^{\otimes 2} \quad \text{et} \quad \nu_{1,j} = (p_j \delta_1 + (1 - p_j) \delta_0)^{\otimes 2},$$

avec $p_j, q_j \in [0, 1]$ pour tout entier $j \geq 0$.

- ▶ Conditionnellement à la chaîne de Markov, les coefficients d'ondelette sont indépendants et le coefficient indexé par un intervalle dyadique λ donné suit une loi gaussienne de grande (resp. petite) variance si la chaîne attribue l'état 1 (resp. 0) au sommet de l'arbre qui correspond à λ .
- ▶ Rend compte de la propagation des grands/petits coefficients d'ondelette au travers des échelles.
 - ▶ En accord avec la forme des histogrammes des coefficients d'ondelette.
 - ▶ Utilisé particulièrement pour le débruitage et la détection de contours (image) ou de transitoires (son).

Modèle étudié

Base d'ondelettes sur le cercle

Notons $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle unité, $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ la surjection canonique et ψ une ondelette dans la classe de Schwartz. Pour tout intervalle dyadique $\lambda = s(2^{-j}(k + [0, 1[)))$, avec $j = \langle \lambda \rangle \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$, notons ψ_λ la fonction de \mathbb{T} qui correspond naturellement à la fonction 1-périodique

$$x \mapsto \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi(2^j(x - m) - k).$$

Alors, les fonctions $2^{\langle \lambda \rangle/2} \psi_\lambda$ et la fonction constante égale à 1 forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

Modèle étudié

Chaîne de Markov

On considère une chaîne de Markov inhomogène $(X_u)_{u \in \mathcal{U}}$ indexée par l'arbre binaire \mathcal{U} et à espace d'états $\{0, 1\}$, dont les probabilités de transition sont

$$\nu_{0,j} = (q_j \delta_1 + (1 - q_j) \delta_0)^{\otimes 2} \quad \text{et} \quad \nu_{1,j} = (p_j \delta_1 + (1 - p_j) \delta_0)^{\otimes 2}.$$

Pour simplifier, on suppose que $X_\emptyset = 1$ p.s. et que $p_j > 0$ pour tout j .

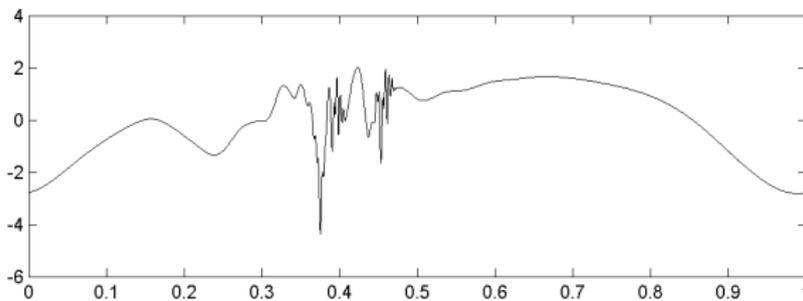
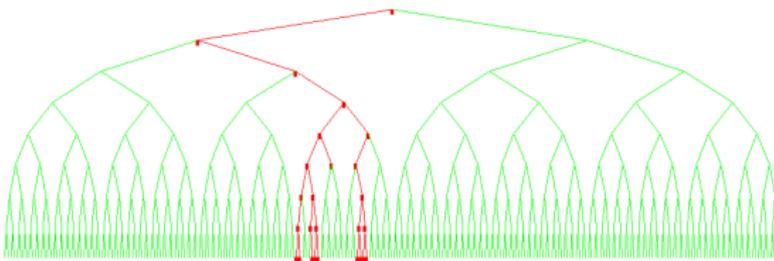
Processus considéré

Pour $\alpha \in]0, \infty[$, on considère le processus défini sur le cercle \mathbb{T} par

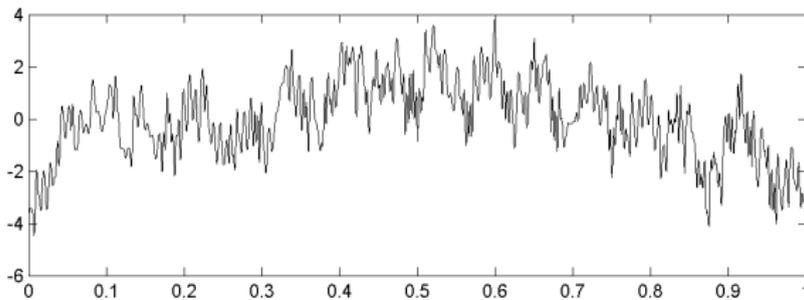
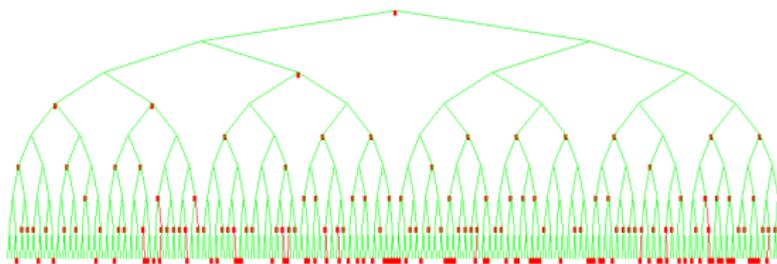
$$R = \sum_{\lambda} 2^{-\alpha \langle \lambda \rangle} \mathbb{1}_{\{X_{u_\lambda} = 1\}} \psi_\lambda.$$

où u_λ est le sommet de l'arbre binaire qui correspond à l'intervalle dyadique λ .

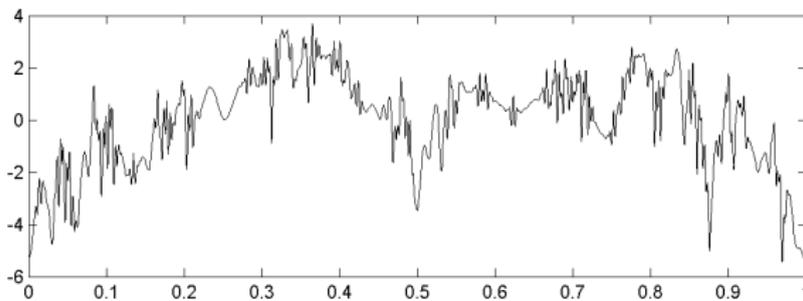
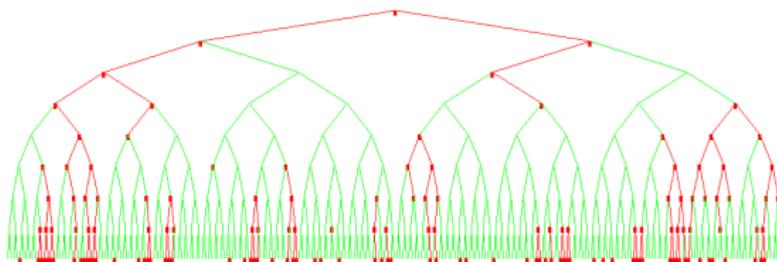
Propagation des coefficients d'ondelette non nuls



Apparition de coefficients d'ondelette non nuls



Apparition et propagation des coefficients d'ondelette non nuls



Régularité globale

$$R = \sum_{\lambda} 2^{-\alpha \langle \lambda \rangle} \mathbb{1}_{\{X_{u_\lambda} = 1\}} \psi_{\lambda}.$$

Proposition

Presque sûrement, $R \in C^\alpha(\mathbb{T})$.

Régularité ponctuelle

Ensembles de singularités

Pour tout $h \in [0, \infty]$, notons

$$E_h = \{x \in \mathbb{T} \mid h_R(x) = h\}.$$

Autres notations

Convenons que $q_{-1} = 1$ et posons

$$d_* = 1 + \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \log_2(p_0 \cdots p_j) \quad \text{et} \quad \delta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j q_{j-1}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k p_j \cdots p_{j+k-1}}} \in [0, \infty].$$

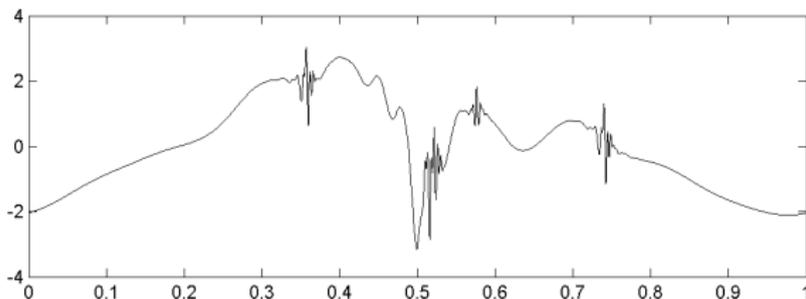
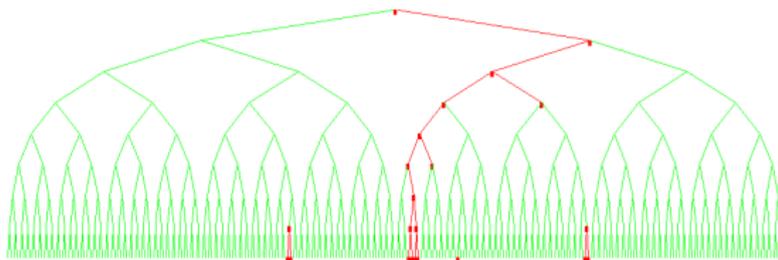
On suppose que $d_* < 1$.

Remarque :

- ▶ Ces paramètres sont ceux qui interviennent dans l'étude de la percolation fractale généralisée avec $d = 1$ et $c = 2$.
- ▶ On observe que $\delta > 0 \implies d_* \geq 0$.

Comportement monofractal

Supposons que $\sum_j 2^j q_j < \infty$.



Comportement monofractal

Théorème

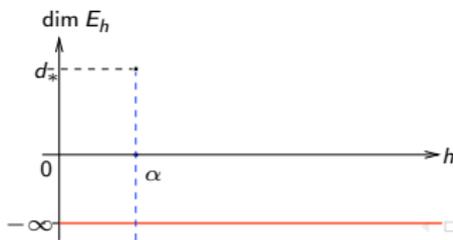
Supposons que $\sum_j 2^j q_j < \infty$.

- ▶ Si $\delta = 0$, alors presque sûrement, $R \in C^\infty(\mathbb{T})$.
- ▶ Sinon, presque sûrement,

$$\begin{cases} \dim E_\alpha \in \{-\infty, 0, d_*\} \\ \dim E_\infty = 1 \\ \dim E_h = -\infty \end{cases} \quad \text{pour tout } h \in [0, \alpha[\cup]\alpha, \infty[.$$

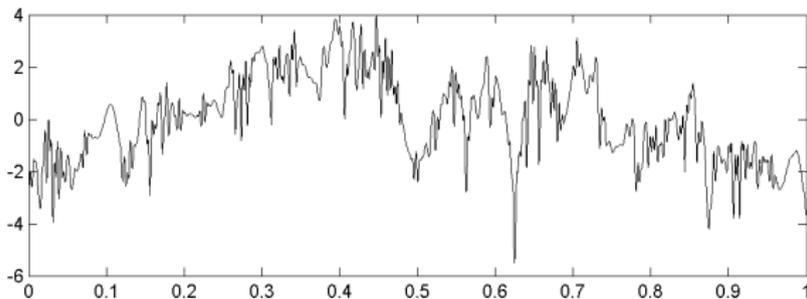
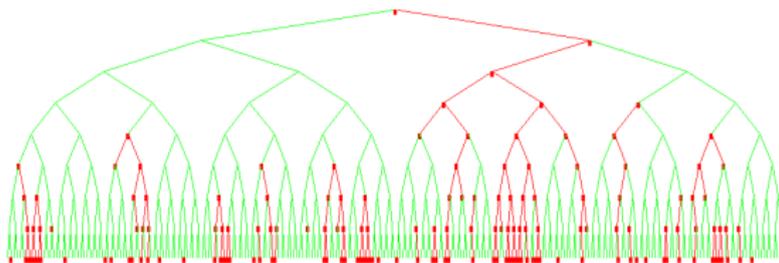
De plus, $d_* \geq 0$ et :

$$\begin{cases} d_* = 0 \implies 0 < \mathbb{P}(\dim E_\alpha = -\infty) = 1 - \mathbb{P}(\dim E_\alpha = 0) < 1 \\ d_* > 0 \implies \begin{cases} 0 < \mathbb{P}(\dim E_\alpha = -\infty) < 1 \\ 0 \leq \mathbb{P}(\dim E_\alpha = 0) < 1 \\ 0 < \mathbb{P}(\dim E_\alpha = d_*) < 1. \end{cases} \end{cases}$$



Comportement multifractal

Supposons que $\sum_j 2^j q_j = \infty$.



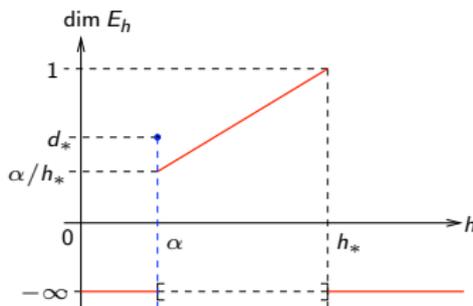
Comportement multifractal

Théorème

Supposons $\sum_j 2^j q_j = \infty$ et notons $h_* = \inf\{h > 0 \mid \sum_j 2^{(1-\alpha/h)j} q_j = \infty\} \geq \alpha$.

- ▶ Presque sûrement, $\dim E_h = \begin{cases} h/h_* & \text{si } h \in]\alpha, h_*] \\ -\infty & \text{si } h \in [0, \alpha[\cup]h_*, \infty[. \end{cases}$
- ▶ En outre,
 - ▶ si $\alpha/h_* \geq d_*$, alors presque sûrement, $\dim E_\alpha = \alpha/h_*$;
 - ▶ sinon, presque sûrement, $\dim E_\alpha \in \{\alpha/h_*, d_*\}$ et

$$\begin{cases} \mathbb{P}(\dim E_\alpha = d_*) = 1 & \text{si } \delta = \infty \\ \mathbb{P}(\dim E_\alpha = d_*) \in]0, 1[& \text{sinon.} \end{cases}$$



Comportement multifractal

Proposition

Le processus R admet une singularité oscillante en chaque point de $\bigcup_{\alpha < h < \infty} E_h$.

Définition

Pour toute jauge g , la classe $G^g(\mathbb{T})$ est la collection des parties F de \mathbb{T} vérifiant $\phi^{-1}(F) \in G^g(\mathbb{R})$.

Proposition

Si h_* est fini, presque sûrement, pour tout $h \in [\alpha, h_*[$, on a

$$\{x \in \mathbb{T} \mid h_R(x) \leq h\} \in G^{r^{h/h_*}}(\mathbb{T}).$$

Aperçu de la preuve pour $h_* < \infty$

Notons U l'ensemble des sommets $u \neq \emptyset$ de l'arbre binaire dont l'état vaut 1 et dont l'état du père vaut 0. Pour tout sommet u , posons

$$x_u = s \left(\sum_{j=1}^{\langle u \rangle} (u_j - 1) 2^{-j} \right).$$

Notons Θ l'image par s de l'ensemble obtenu dans le processus de percolation fractale généralisée pour $d = 1$ et $c = 2$ et, pour tout réel $a > \alpha$, posons

$$L_a = \{x \in \mathbb{T} \mid d(x, x_u) < 2^{-\alpha \langle u \rangle / a} \text{ pour une infinité de } u \in U\}.$$

Aperçu de la preuve pour $h_* < \infty$

Notons U l'ensemble des sommets $u \neq \emptyset$ de l'arbre binaire dont l'état vaut 1 et dont l'état du père vaut 0. Pour tout sommet u , posons

$$x_u = s \left(\sum_{j=1}^{\langle u \rangle} (u_j - 1) 2^{-j} \right).$$

Notons Θ l'image par s de l'ensemble obtenu dans le processus de percolation fractale généralisée pour $d = 1$ et $c = 2$ et, pour tout réel $a > \alpha$, posons

$$L_a = \{x \in \mathbb{T} \mid d(x, x_u) < 2^{-\alpha \langle u \rangle / a} \text{ pour une infinité de } u \in U\}.$$

Lemme

Presque sûrement,

- ▶ pour tout $h \in [0, \alpha[\cup]h_*, \infty]$, l'ensemble E_h est vide ;
- ▶ pour tout $h \in [\alpha, h_*]$, $\tilde{E}_h = \Theta \cup \bigcap_{a>h} L_a$ et $E_h = (\tilde{E}_h \setminus \Theta) \setminus \bigcup_{\alpha < a < h} L_a$;
- ▶ pour tout $h \in [\alpha, h_*]$ et tout $a > h$, l'ensemble L_a appartient à la classe $G^{h/h_*}(\mathbb{T})$ (grâce au théorème d'ubiquité).

Ensembles à grande intersection et ubiquité homogène

Fractals aléatoires basés sur une chaîne de Markov indexée par un arbre

Séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Prolongements envisageables

Prolongements envisageables

- ▶ Ubiquité pour l'approximation par des sous-espaces affines : on remplace l'ensemble

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\}$$

par l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, P_i) < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\},$$

où $(P_i)_{i \in I}$ est une famille fixée de sous-espaces affines de \mathbb{R}^d de même dimension.

- ▶ Applications à la théorie métrique de l'approximation diophantienne
- ▶ Applications à la théorie des systèmes dynamiques

Prolongements envisageables

- ▶ Ubiquité pour l'approximation par des sous-espaces affines : on remplace l'ensemble

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\}$$

par l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, P_i) < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\},$$

où $(P_i)_{i \in I}$ est une famille fixée de sous-espaces affines de \mathbb{R}^d de même dimension.

- ▶ Applications à la théorie métrique de l'approximation diophantienne
 - ▶ Applications à la théorie des systèmes dynamiques
- ▶ Diverses généralisations du modèle de séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés

Prolongements envisageables

- ▶ Ubiquité pour l'approximation par des sous-espaces affines : on remplace l'ensemble

$$F = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - x_i\| < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\}$$

par l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, P_i) < r_i \text{ pour une infinité de } i \in I\},$$

où $(P_i)_{i \in I}$ est une famille fixée de sous-espaces affines de \mathbb{R}^d de même dimension.

- ▶ Applications à la théorie métrique de l'approximation diophantienne
- ▶ Applications à la théorie des systèmes dynamiques
- ▶ Diverses généralisations du modèle de séries aléatoires d'ondelettes à coefficients corrélés
- ▶ Estimations de paramètres liés au modèle pour des cas particuliers de probabilités de transition