



**HAL**  
open science

## Conjecture $n!$ et généralisations

Jean-Christophe Aval

► **To cite this version:**

Jean-Christophe Aval. Conjecture  $n!$  et généralisations. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2001. Français. NNT: . tel-00185056

**HAL Id: tel-00185056**

**<https://theses.hal.science/tel-00185056>**

Submitted on 5 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Jean-Christophe AVAL**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

---

## Conjecture $n!$ et généralisations

---

Soutenue le : 12 Décembre 2001

Après avis de :

**MM.** N. BERGERON, Professeur, York University, Toronto  
J.-Y. THIBON, Professeur, Université Marne-la-Vallée

**Rapporteurs**

Devant la commission d'examen formée de :

**M.** X. VIENNOT, Directeur de recherche, C.N.R.S.  
**Mlle** M. BOUSQUET-MÉLOU, Chargée de recherche, C.N.R.S.  
**MM.** F. BERGERON, Professeur, Université du Québec À Montréal  
N. BERGERON, Professeur, York University, Toronto  
H. COHEN, Professeur, Université Bordeaux 1  
L. HABSIEGER, Chargé de recherche, C.N.R.S.

**Président**  
**Rapporteuse**  
**Examineurs**



# Remerciements

Xavier Viennot a accepté de présider mon jury de soutenance : je tiens à le remercier vivement pour cet honneur et ce plaisir.

Mes remerciements s'adressent aussi particulièrement à mon directeur de thèse, Laurent Habsieger. Il a su, depuis mon DEA, me proposer des thèmes de recherche qui m'ont passionné et me faire profiter de ses conseils, de sa disponibilité et de son attention, tout en me laissant découvrir l'autonomie.

Nantel Bergeron et Jean-Yves Thibon m'ont fait l'honneur de rapporter avec beaucoup de soin le texte de mon mémoire de thèse. J'ai plaisir à leur exprimer ici toute ma gratitude.

Outre Nantel Bergeron, qui a manifesté très tôt de l'intérêt pour mes travaux, qui m'a invité à Toronto et avec qui une collaboration fructueuse est née, il m'est agréable de remercier les membres de mon jury de soutenance : Henri Cohen, grande figure des mathématiques bordelaises, Mireille Bousquet-Mélou, dont les cours et les exposés au LaBRI ont converti mes hésitations mathématiques en amour de la combinatoire, et enfin François Bergeron, qui m'a accueilli à Montréal et dont les conseils, savants et chaleureux, m'ont beaucoup apporté.

Parmi les mathématiciens rencontrés au hasard de ces trois années de travail et qui m'ont aidé à différents niveaux, je tiens à citer Adriano Garsia pour sa créativité et son énergie, Mike Zabrocki, Mark Haiman et Pierre Leroux.

En dehors des échanges mathématiques, de nombreuses personnes m'ont soutenu, conseillé, encouragé ou dépanné. Mes remerciements s'adressent en particulier à ma famille, Sabine M., Christophe D. (maître d'Emacs et de L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X), Stéphane V. (pour sa patience), David L., Olivier T., Mauricette J. et Joffrey D.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Énoncés et motivations . . . . .	9
1.1.1	La conjecture $n!$ . . . . .	9
1.1.2	L'anneau des fonctions symétriques . . . . .	13
1.1.3	Les polynômes de Macdonald . . . . .	17
1.1.4	Structure de $\mathcal{S}_n$ -module bigradué . . . . .	21
1.2	Présentation des différentes approches . . . . .	23
1.2.1	Principe d'expulsion . . . . .	24
1.2.2	Bases monomiales et idéaux annulateurs . . . . .	24
1.2.3	Approche récursive . . . . .	25
1.2.4	Généralisations . . . . .	25
1.2.5	Géométrie algébrique . . . . .	26
1.3	Organisation de la thèse . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Les harmoniques des orbites ; généralités et applications</b>	<b>29</b>
2.1	Généralités . . . . .	29
2.2	Application à $\mathbf{M}_\mu$ et borne supérieure . . . . .	33
2.3	Cas d'un alphabet . . . . .	37
2.3.1	Réduction aux polynômes de Garnir . . . . .	37
2.3.2	Borne supérieure pour la dimension . . . . .	40
2.4	Première preuve pour les équerres . . . . .	41
2.4.1	Principe d'expulsion . . . . .	42
2.4.2	Résultats polynomiaux . . . . .	44
2.4.3	Expulsion . . . . .	45
2.4.4	Cas des équerres généralisées . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Bases monomiales et idéaux annulateurs</b>	<b>49</b>
3.1	Principe . . . . .	49
3.1.1	Rappels sur les bases de Gröbner . . . . .	49

3.1.2	Utilisation des bases de Gröbner . . . . .	50
3.2	Opérateurs de sauts . . . . .	51
3.2.1	Présentation et résultats . . . . .	51
3.2.2	Application aux idéaux annulateurs . . . . .	58
3.3	Cas d'un alphabet . . . . .	59
3.3.1	Cas du Vandermonde . . . . .	59
3.3.2	Cas général : introduction et construction . . . . .	60
3.3.3	Indépendance linéaire . . . . .	63
3.3.4	Énumération . . . . .	63
3.3.5	Idéal annulateur et génération . . . . .	64
3.4	Cas des équerres . . . . .	68
3.4.1	Construction . . . . .	69
3.4.2	Énumération . . . . .	72
3.4.3	Preuve que la famille de polynômes engendre $\mathbf{M}_\mu$ et obtention de l'idéal annulateur . . . . .	72
3.4.4	Preuve de l'indépendance : exposition et réduction du problème . . . . .	79
3.4.5	Preuve de l'indépendance : la notion de complétude . . . . .	81
3.4.6	Preuve de l'indépendance : fin . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Approche récursive et partitions trouées</b> . . . . .	<b>89</b>
4.1	Présentation . . . . .	90
4.1.1	Définitions et conjectures . . . . .	90
4.1.2	Borne supérieure pour la dimension de $\mathbf{M}_{\mu/ij}$ . . . . .	92
4.2	Deux cas particuliers . . . . .	94
4.2.1	Cas de $\mu/00$ . . . . .	94
4.2.2	Cas des équerres . . . . .	95
4.3	Résolution en un alphabet . . . . .	96
4.3.1	Construction de la base . . . . .	96
4.3.2	Inclusion et énumération . . . . .	98
4.3.3	Indépendance . . . . .	99
4.3.4	Borne supérieure pour la dimension de $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$ . . . . .	100
4.3.5	Récurrence à quatre termes . . . . .	101
4.4	Idéal annulateur en un alphabet . . . . .	103
4.4.1	Présentation . . . . .	103
4.4.2	Inclusion . . . . .	104
4.4.3	Réduction . . . . .	106

<b>5</b>	<b>Généralisation : cas des diagrammes à plusieurs trous</b>	<b>111</b>
5.1	Présentation . . . . .	111
5.2	Cas d'une colonne trouée . . . . .	112
5.3	Une généralisation pour des partitions quelconques . . . . .	116
5.3.1	Introduction . . . . .	116
5.3.2	Applications des opérateurs de sauts . . . . .	117
5.3.3	La borne supérieure . . . . .	119
5.3.4	Cas d'un ensemble de variables . . . . .	123
5.4	Anti-ombre et dualité . . . . .	130
5.4.1	Présentation . . . . .	130
5.4.2	Borne supérieure . . . . .	131
5.4.3	Cas d'un alphabet . . . . .	133
5.4.4	Plusieurs grains . . . . .	134
<b>6</b>	<b>Liens et problèmes ouverts</b>	<b>137</b>
6.1	Descriptions explicites . . . . .	137
6.2	Généralisations . . . . .	140
<b>A</b>	<b>Rappels sur la représentation linéaire des groupes finis</b>	<b>143</b>
A.1	Généralités . . . . .	143
A.1.1	Représentation linéaire d'un groupe fini . . . . .	143
A.1.2	Caractères . . . . .	144
A.2	Cas du groupe symétrique . . . . .	146
<b>B</b>	<b>Action des opérateurs différentiels de Schur sur les déterminants de diagramme</b>	<b>149</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>157</b>
	<b>Table des notations</b>	<b>163</b>
	<b>Index</b>	<b>165</b>





# Chapitre 1

## Introduction

L'AMBITION de cette thèse est de présenter certains épisodes de l'histoire – toujours en marche – d'une question de combinatoire algébrique connue sous le nom de conjecture  $n!$ . Si la première, et pour l'instant unique, preuve de cette conjecture est principalement fondée sur la géométrie, nous nous focaliserons ici sur des approches mêlant, sous diverses proportions, algèbre et combinatoire. C'est en effet par elles que l'on peut le mieux essayer de saisir la grande beauté de cette question.

Le but de ce premier chapitre est, comme il se doit, de présenter et de motiver le problème. Un des attraits de la conjecture  $n!$  est qu'elle peut être introduite – proprement ! – en quelques lignes, ce que nous ferons. Puis nous replacerons cette question dans son cadre naturel, à savoir celui des fonctions symétriques, et plus particulièrement des polynômes de Macdonald. Ce sera l'occasion de mettre en valeur ses liens avec d'autres problèmes, de mathématiques bien sûr, mais aussi d'informatique ou de physique théorique. Nous nous attacherons enfin à retracer l'histoire des nombreuses approches de cette étude, avant d'exposer le plan de cette thèse.

### 1.1 Énoncés et motivations

#### 1.1.1 La conjecture $n!$

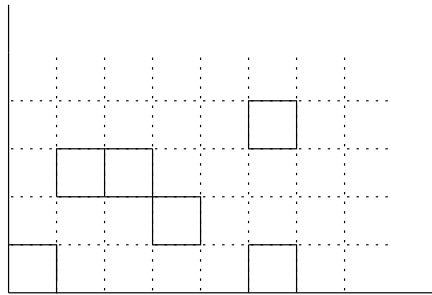
Commençons par les quelques définitions nécessaires à un exposé minimal de la problématique.

**Définition 1.1** *Un diagramme (du réseau carré) est une partie finie  $L = \{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\}$  de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ; le produit  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  est assimilé au quadrant positif du réseau carré et  $L$  est ainsi composé de  $n$  cases.*

Notons que nous n'exigeons pas a priori que toutes les cases du diagramme  $L$  soient distinctes. Les coordonnées  $p_i \geq 0$  et  $q_i \geq 0$  d'une case  $(p_i, q_i)$  indique respectivement la position de la ligne et de la colonne de la case dans le réseau carré, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5

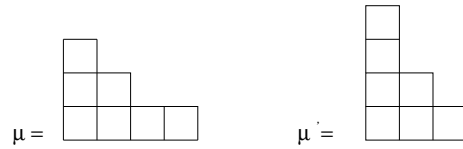
La figure suivante donne la représentation graphique du diagramme à 6 cases :  $L = \{(0, 0), (2, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 5), (3, 5)\}$ .



**Définition 1.2** Pour  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell > 0$ , nous dirons que  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell)$  est une partition de  $n$  si  $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_\ell$  vaut  $n$ . Sa longueur  $l(\mu)$  est le nombre  $\ell$  de ses parts. Nous associons alors à  $\mu$  son diagramme (de Ferrers)  $\{(i, j) ; 0 \leq i \leq \ell - 1, 0 \leq j \leq \mu_{i+1} - 1\}$  et nous utiliserons le même symbole  $\mu$  pour désigner la partition et son diagramme.

La partition dite conjuguée de  $\mu$ , notée  $\mu'$ , est la partition de  $n$  dont le diagramme de Ferrers est symétrique de celui de  $\mu$  par rapport à la diagonale principale. Nous noterons souvent  $\ell' = l(\mu') = \mu_1$  la longueur de la partition conjuguée.

Par exemple,  $\mu = (4, 2, 1)$  est une partition de  $n = 7$ . Sa partition conjuguée est  $\mu' = (3, 2, 1, 1)$  et son diagramme est constitué des cases  $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2), (0, 3)\}$ .



**Remarque 1.3** Il arrivera parfois que nous ordonnions les parts d'une partition, non en ordre croissant mais en ordre décroissant. Ceci n'est d'aucune conséquence, l'essentiel étant d'ordonner les parts. Nous utiliserons aussi une notation compacte en notant par exemple  $(1^3, 2^2)$  pour la partition  $(2, 2, 1, 1, 1)$ .

Nous nous permettrons également de parler de hauteur de la partition à la place de longueur, spécialement quand nous travaillerons sur les diagrammes de Ferrers,  $\ell$  étant la hauteur du diagramme. Il est bon de noter que vu les conventions, la plus haute ligne du diagramme porte l'indice  $\ell \perp 1$ .

**Définition 1.4** Afin d'ordonner les cases des diagrammes, nous utiliserons l'ordre lexicographique avec priorité à la seconde coordonnée, à savoir

$$(p_1, q_1) < (p_2, q_2) \iff q_1 < q_2 \text{ ou } [q_1 = q_2 \text{ et } p_1 < p_2]. \quad (1.1)$$

Soit maintenant  $\mathbb{Q}[X, Y] = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$  l'anneau des polynômes en  $2n$  variables à coefficients rationnels. A chaque diagramme  $L$ , on associe un polynôme  $\Delta_L \in \mathbb{Q}[X, Y]$  de la façon suivante.

**Définition 1.5** Soit  $L = \{(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_n, q_n)\}$  un diagramme du réseau carré. On lui associe le déterminant du diagramme, donné par la formule

$$\Delta_L(X, Y) = \det (x_i^{p_j} y_i^{q_j})_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (1.2)$$

Le déterminant  $\Delta_L(X, Y)$  est non nul seulement si  $L$  est constitué de  $n$  cases distinctes. Dans ce cas, c'est un polynôme bihomogène de degré  $|p| = p_1 + \dots + p_n$  en  $X$  et  $|q| = q_1 + \dots + q_n$  en  $Y$ . Afin d'associer par cette définition un unique déterminant au diagramme  $L$ , nous imposons d'ordonner ses cases selon l'ordre lexicographique défini en (1.1). Pour des raisons pratiques, nous étendrons parfois la notion de diagramme à une partie de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , étant entendu que dans ce cas  $\Delta_L = 0$  dès que  $L$  a une de ses cases en dehors de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

Dans le cas d'une partition  $\mu$ , le déterminant défini via (1.2) est noté  $\Delta_\mu$ . C'est en quelque sorte une généralisation du déterminant de Vandermonde

$\Delta(X)$  qui correspond au cas d'une partition ayant toutes ses parts égales à 1, i.e.  $\mu = (1^n)$ . Afin d'illustrer la définition de  $\Delta_\mu$ , nous donnons ci-dessous la forme de ce déterminant pour la partition  $(4, 2, 1)$  de la figure précédente :

$$\Delta_{(4,2,1)} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 & y_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & y_2 & x_2 y_2 & y_2^2 & y_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & y_3 & x_3 y_3 & y_3^2 & y_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & y_4 & x_4 y_4 & y_4^2 & y_4^3 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & y_5 & x_5 y_5 & y_5^2 & y_5^3 \\ 1 & x_6 & x_6^2 & y_6 & x_6 y_6 & y_6^2 & y_6^3 \\ 1 & x_7 & x_7^2 & y_7 & x_7 y_7 & y_7^2 & y_7^3 \end{vmatrix}.$$

Nous noterons respectivement  $\partial x_i$  et  $\partial y_i$  les opérateurs de dérivation  $\partial/\partial x_i$  et  $\partial/\partial y_i$ , et  $\partial X^{\mathbf{m}}$  pour  $\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}$  si  $\mathbf{m}$  est le vecteur  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$ . Nous utiliserons des parenthésages pour éviter toute confusion dans des expressions du type  $\partial(x_i^{\alpha_j} y_i^{\beta_j}) \Delta_L(X, Y)$ . Si  $P \in \mathbb{Q}[X, Y]$ , nous utiliserons la notation  $P(\partial) = P(\partial X, \partial Y)$  pour l'opérateur de dérivation obtenu en remplaçant les variables  $x_i$  et  $y_i$  respectivement par  $\partial x_i$  et  $\partial y_i$ .

**Définition 1.6** *Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{Q}[X, Y]$ , nous notons  $\mathcal{L}_\partial[P]$  l'espace vectoriel engendré par toutes les dérivées partielles de  $P$ , i.e.*

$$\mathcal{L}_\partial[P] = \mathbb{Q}[\partial X, \partial Y]P, \quad (1.3)$$

où pour un polynôme  $Q \in \mathbb{Q}[X, Y]$ ,  $Q(\partial X, \partial Y)$  est l'opérateur de dérivation obtenu en remplaçant dans  $Q$  les variables  $x_i$  et  $y_i$  respectivement par  $\partial x_i$  et  $\partial y_i$ . Plus généralement, pour un ensemble de polynômes  $\mathcal{P}$ , nous noterons  $\mathcal{L}_\partial[\mathcal{P}]$  l'espace engendré par les dérivées partielles des éléments de  $\mathcal{P}$ .

Nous associons alors à tout diagramme  $L$  un espace  $\mathbf{M}_L$  en posant

$$\mathbf{M}_L = \mathcal{L}_\partial[\Delta_L]. \quad (1.4)$$

Dans le cas d'une partition  $\mu$ , l'espace obtenu par la construction (1.4) est noté  $\mathbf{M}_\mu$ . Cela étant posé, nous pouvons maintenant énoncer la conjecture  $n!$ .

**Théorème 1.7 (conjecture  $n!$ )** *Pour toute partition  $\mu$  de l'entier  $n$ ,*

$$\dim \mathbf{M}_\mu = n!. \quad (1.5)$$

Cette conjecture a été énoncée pour la première fois par A. Garsia et M. Haiman, et, après de longues années de recherches nombreuses et variées,

vient d'être démontrée par ce dernier (cf. paragraphe 1.2.5). Elle est centrale dans le cadre de leur étude des polynômes de Macdonald (cf. [26, 27, 29]). Mais avant de pouvoir faire le lien entre la conjecture  $n!$  et les polynômes de Macdonald, il est nécessaire de préciser le cadre de l'anneau des fonctions symétriques.

### 1.1.2 L'anneau des fonctions symétriques

Nous nous plaçons dans l'anneau  $\mathbb{Q}[X] = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  des polynômes en  $n$  variables et à coefficients rationnels.

**Définition 1.8** *Le groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  par permutation des variables, à savoir que pour un polynôme  $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$  et une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ,*

$$\sigma.P(x_1, \dots, x_n) = P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \quad (1.6)$$

*et un polynôme est dit symétrique s'il est invariant sous cette action. Les polynômes symétriques forment un sous-anneau*

$$\Lambda_n = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]^{\mathcal{S}_n}. \quad (1.7)$$

De plus  $\Lambda_n$  est un anneau gradué : nous avons

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k \quad (1.8)$$

où  $\Lambda_n^k$  est l'ensemble des polynômes symétriques homogènes de degré  $k$ , plus le polynôme nul.

Pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , nous notons  $X^\alpha$  le monôme

$$X^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \quad (1.9)$$

**Définition 1.9** *Soit  $\lambda$  une partition de longueur  $\leq n$ . On complète avec des parts nulles pour écrire  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Le polynôme symétrique monomial  $m_\lambda$  est défini par la formule suivante*

$$m_\lambda(X) = \sum X^\alpha \quad (1.10)$$

*où la somme est prise sur toutes les permutations distinctes  $\alpha$  de  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .*

Le polynôme  $m_\lambda$  est clairement symétrique, et il est évident que les  $m_\lambda$  forment une base de  $\Lambda_n$  quand  $\lambda$  décrit toutes les partitions de longueur  $\leq n$ . Plus particulièrement, les  $m_\lambda$  tels que  $l(\lambda) \leq n$  et  $|\lambda| = k$  forment une base de  $\Lambda_n^k$ .

Dans la théorie des fonctions symétriques, le nombre de variables n'a en général pas d'importance, à condition qu'il soit assez grand, et il est souvent plus pratique de le considérer comme infini. Pour rendre cette notion précise, prenons  $m \geq n$  et considérons l'homomorphisme

$$\varphi_{m,n} : \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m] \xrightarrow{\perp} \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

qui envoie  $x_{n+1}, \dots, x_m$  sur zéro et laisse les autres variables inchangées. Par restriction à  $\Lambda_m$ , ceci donne un homomorphisme

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m \xrightarrow{\perp} \Lambda_n \tag{1.11}$$

dont l'action sur la base  $(m_\lambda)$  est aisément décrite : il envoie  $m_\lambda(x_1, \dots, x_m)$  sur  $m_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  si  $l(\lambda) \leq n$ , et sur zéro sinon. Il en découle que  $\rho_{m,n}$  est surjectif. Par restriction au degré  $k$ , on a des homomorphismes

$$\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \xrightarrow{\perp} \Lambda_n^k, \tag{1.12}$$

qui sont toujours surjectifs, et bijectifs pour  $m \geq n \geq k$ . Nous formons alors la limite inverse

$$\Lambda^k = \lim_{\leftarrow \perp} \Lambda_n^k \tag{1.13}$$

des anneaux  $\Lambda_n^k$  relativement aux homomorphismes  $\rho_{m,n}^k$  : un élément de  $\Lambda^k$  est par définition une suite  $f = (f_n)_{n \geq 0}$  où chaque  $f_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$  est un polynôme symétrique homogène de degré  $k$  en les variables  $x_1, \dots, x_n$  et  $f_m(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = f_n(x_1, \dots, x_n)$  dès que  $m \geq n$ . Comme  $\rho_{m,n}^k$  est un isomorphisme pour  $m \geq n \geq k$ , la projection

$$\rho_n^k : \Lambda^k \xrightarrow{\perp} \Lambda_n^k,$$

qui envoie  $f$  sur  $f_n$ , est un isomorphisme pour tout  $n \geq k$ . L'anneau  $\Lambda^k$  a donc une base constituée des *fonctions symétriques monomiales*  $m_\lambda$  (pour toute partition  $\lambda$  de  $k$ ) définies par

$$\rho_n^k(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \dots, x_n). \tag{1.14}$$

Posons alors

$$\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k, \tag{1.15}$$

de telle sorte que  $\Lambda$  est engendré par les  $m_\lambda$  pour toutes les partitions  $\lambda$ .

**Définition 1.10** *L'anneau  $\Lambda$  défini en (1.15) est appelé anneau des fonctions symétriques en les variables dénombrables  $x_1, x_2, \dots$ .*

**Remarque 1.11** Les éléments de  $\Lambda$  ne sont plus des polynômes : ce sont des séries formelles infinies de monômes. C'est pourquoi nous utilisons désormais la terminologie "fonctions symétriques".

Introduisons à présent les bases classiques de  $\Lambda$ . Commençons par la définition suivante dont les notations reprennent celles de [45].

**Définition 1.12** *Pour tout entier  $r \geq 1$ , la  $r$ -ième somme de puissances  $p_r(X)$  est définie par la formule*

$$p_r(X) = \sum x_i^r. \quad (1.16)$$

*Pour tout entier  $r \geq 0$ , la  $r$ -ième fonction symétrique élémentaire  $e_r(X)$  est la somme de tous les produits de  $r$  variables distinctes  $x_i$ , de telle sorte que  $e_0 = 1$  et pour  $r \geq 1$  :*

$$e_r(X) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}. \quad (1.17)$$

*Enfin, pour tout entier  $r \geq 0$ , la  $r$ -ième fonction symétrique homogène  $h_r(X)$  est la somme de tous les monômes de degré  $r$  en les variables  $x_i$ , c'est-à-dire :*

$$h_r(X) = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}. \quad (1.18)$$

*Nous définissons alors pour toute partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$*

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} \cdots p_{\lambda_k},$$

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdots e_{\lambda_k},$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdots h_{\lambda_k}.$$



L'importance de ces trois familles de polynômes vient en grande partie de la proposition suivante. Une preuve de ce résultat classique se trouve par exemple dans [45].

**Proposition 1.13** *Les familles  $p_\lambda$ ,  $e_\lambda$  et  $h_\lambda$  forment chacune une base de  $\Lambda$  lorsque  $\lambda$  décrit toutes les partitions. Si on impose de plus que  $|\lambda| = k$ , on obtient alors des bases de  $\Lambda^k$ .*

Il nous reste encore à introduire une dernière, mais fondamentale, base de l'anneau des fonctions symétriques : les fonctions de Schur. Nous nous contenterons ici de donner la définition de Jacobi [39] de ces fonctions, qui présente l'avantage d'être la plus simple à donner, mais l'inconvénient d'être fort peu explicite. Cette question de l'explicitation est résolue par le Théorème de Littlewood (cf. [47], Théorème 1.4.1), mais nous n'entrerons pas dans ces considérations.

La multiplication par le déterminant de Vandermonde

$$\Delta(X) = \det(x_i^{n \perp j}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \perp x_j)$$

réalise un isomorphisme, décalant le degré, entre polynômes symétriques et antisymétriques (i.e. les polynômes  $P \in \mathbb{Q}[X]$  tels que pour l'action définie en (1.6),  $\sigma.P = \epsilon(\sigma).P$ , où  $\epsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ ). De même que les fonctions symétriques monomiales donnent les bases les plus naturelles des fonctions symétriques, on obtient des bases de polynômes antisymétriques en antisymétrisant les monômes. Notons donc, si  $\mu$  est un  $n$ -uplet d'entiers naturels

$$a_\mu = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) X^{\sigma(\mu)} \quad (1.19)$$

où  $\sigma(\mu) = \mu_{\sigma(1)}, \dots, \mu_{\sigma(n)}$ . Ce polynôme est nul si  $\mu$  a deux composantes égales et reste inchangé, au signe près, si l'on permute les composantes de  $\mu$ . On peut donc se restreindre à des partitions strictement décroissantes. De telles partitions sont de la forme  $\mu = \lambda + \delta$ , où  $\lambda$  est encore une partition, et  $\delta = (n \perp 1, n \perp 2, \dots, 1, 0)$  la plus petite partition strictement décroissante.

En retour, on obtient des polynômes symétriques en divisant  $a_{\lambda+\delta}$  par le Vandermonde, qui n'est autre que  $a_\delta$ .

**Définition 1.14** *Le polynôme de Schur d'indice la partition  $\lambda$  est donnée par la formule suivante*

$$s_\lambda(X) = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+n \perp j})}{\det(x_i^{n \perp j})}. \quad (1.20)$$

Le résultat fondamental est donné par la proposition suivante (cf. par exemple [47], Proposition 1.2.1).

**Proposition 1.15** *Lorsque  $\lambda$  décrit l'ensemble des partitions de longueur  $\leq n$ , les polynômes de Schur  $s_\lambda$  forment une base de  $\Lambda_n$ .*

Observons maintenant ce qui se passe en augmentant le nombre de variables. Si  $m \geq n$ , il est clair que dès que  $n \geq l(\lambda)$ , nous avons avec les notations introduites en (1.11)

$$\rho_{n+1,n}(s_\lambda(x_1, \dots, x_{n+1})) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n).$$

Il en découle que pour chaque partition  $\lambda$  les polynômes  $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  avec  $n \perp \rightarrow \infty$  définissent une unique *fonction de Schur*  $s_\lambda \in \Lambda$ , homogène de degré  $|\lambda|$ . De la Proposition 1.15, on déduit alors que les  $s_\lambda$  forment une base de l'anneau  $\Lambda$ , et pour chaque  $k \geq 0$ , les  $s_\lambda$  telles que  $|\lambda| = k$  forment une base de  $\Lambda^k$ .

**Remarque 1.16** Observons que les fonctions symétriques élémentaires et homogènes sont des fonctions de Schur particulières. En effet

$$h_k = s_{(k)} \quad \text{et} \quad e_k = s_{(1^k)}.$$

### 1.1.3 Les polynômes de Macdonald

Les polynômes de Macdonald ( $P_\mu(x; q, t)$ ) forment une base de l'anneau des fonctions symétriques en les variables  $x = (x_1, x_2, \dots)$ , à coefficients dans le corps  $\mathbb{Q}(q, t)$  des fractions rationnelles en deux paramètres  $q$  et  $t$ . Ils furent introduits en 1988 par Macdonald ([46]) pour unifier les deux célèbres bases de l'algèbre des fonctions symétriques à savoir les polynômes de Hall-Littlewood et les polynômes de Jack (pour un exposé complet voir [45]). Il devint vite clair que la découverte des polynômes de Macdonald était fondamentale et aurait à coup sûr de nombreuses ramifications, en mathématiques bien sûr mais aussi en physique. Parmi les développements les plus frappants, citons des travaux ayant relié les polynômes de Macdonald, entre autres, à la théorie des représentations des groupes quantiques ([22]) et des algèbres de Hecke ([40]), au modèle de Calogero-Sutherland en physique des particules ([42]) et à des conjectures combinatoires sur les harmoniques diagonaux ([34]).

Le lien avec la conjecture  $n!$  vient du travail sur la conjecture de positivité de Macdonald. Pour mettre en évidence le lien entre conjecture  $n!$  et polynômes de Macdonald, précisons les notations utilisées dans [46]. Dans

cet article Macdonald établit l'existence et l'unicité d'une base de l'anneau des fonctions symétriques, caractérisée par les conditions suivantes

$$\begin{aligned} i) \quad P_\lambda &= s_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} \xi_{\lambda\mu}(q, t) s_\mu \\ ii) \quad \langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} &= 0 \quad \text{pour } \lambda \neq \mu \end{aligned} \quad (1.21)$$

où l'ordre partiel, dit *dominant*, défini sur l'ensemble des partitions est le suivant

$$\mu \leq \lambda \iff |\mu| = |\lambda| \quad \text{et } \forall i, \mu_1 + \dots + \mu_i \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_i. \quad (1.22)$$

Le produit scalaire apparaissant dans (1.21.ii) est défini sur les fonctions puissances par :

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda(q, t) \quad (1.23)$$

où

$$\delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } z_\lambda(q, t) = z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 \pm q^{\lambda_i}}{1 \pm t^{\lambda_i}} \quad (1.24)$$

avec

$$z_\lambda = \prod_{r \geq 1} (r^{m_r} \cdot m_r!) \quad (1.25)$$

si  $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$ . On peut interpréter  $z_\lambda$  comme l'ordre du centralisateur dans  $\mathcal{S}_n$  d'une permutation de type  $\lambda$ , i.e. d'une permutation ayant  $m_k$   $k$ -cycles.

Parmi de très nombreuses conjectures liées à ces polynômes de Macdonald, la conjecture  $n!$  est liée aux formes intégrales  $J_\mu(x; q, t)$  et aux coefficients de Kostka-Macdonald  $K_{\lambda\mu}(q, t)$  qui leur sont associés. Si nous notons  $(Q_\mu(x; q, t))$  la base duale de  $(P_\mu(x; q, t))$  relativement au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$ , il est clair d'après (1.21,ii) que

$$Q_\lambda(x; q, t) = d_\lambda(q, t) P_\lambda(x; q, t), \quad (1.26)$$

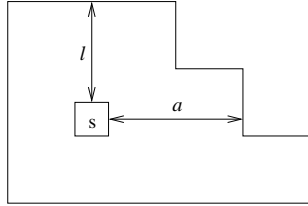
pour une certaine fonction rationnelle  $d_\lambda(q, t)$ . Il est prouvé dans [46] que

$$d_\lambda(q, t) = \frac{h_\lambda(q, t)}{h'_\lambda(q, t)}$$

avec

$$h_\lambda(q, t) = \prod_{s \in \lambda} (1 \pm q^{a_\lambda(s)} t^{l_\lambda(s)+1}) \quad , \quad h'_\lambda(q, t) = \prod_{s \in \lambda} (1 \pm q^{a_\lambda(s)+1} t^{l_\lambda(s)})$$

où  $s$  décrit toutes les cases du diagramme de Ferrers de  $\lambda$  et où  $a_\lambda(s)$  et  $l_\lambda(s)$  représente respectivement le *bras* et la *jambe* de  $s$ , comme visualisé sur la figure ci-dessous.



Le développement des polynômes de Macdonald en termes de fonctions de Schur donne des coefficients de transition  $K_{\lambda\mu}(q, t)$ , appelés coefficients de Macdonald-Kostka, dont nous allons maintenant donner la définition, en suivant l'article original [46].

Reprenons les notations de Macdonald et posons

$$\begin{aligned} J_\lambda(x; q, t) &= h_\lambda(q, t) P_\lambda(q, t) \\ &= h'_\lambda(q, t) Q_\lambda(q, t). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Soient  $S_\lambda(x)$  la base duale de  $s_\lambda(x)$  par rapport au produit scalaire défini par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} (1 \pm t^{\lambda_i})^{\pm 1}. \quad (1.28)$$

Macdonald définit alors les  $q, t$ -coefficients de Kostka ou coefficients de Kostka-Macdonald par :

$$J_\mu(x; q, t) = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu}(q, t) S_\lambda(x; t). \quad (1.29)$$

Par définition ce sont des fractions rationnelles en  $q$  et  $t$ , mais Macdonald a énoncé la conjecture suivante (MPK pour “Macdonald Positive Kostka”), dont la preuve vient d’être achevée par M. Haiman (cf. paragraphe 1.2.5).

**Théorème 1.17 (conjecture MPK)** *Les fonctions  $K_{\lambda\mu}(q, t)$  sont des polynômes à coefficients entiers positifs :*

$$K_{\lambda\mu}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]. \quad (1.30)$$

Pour  $q = 0$ , cette conjecture correspond au théorème de positivité des  $t$ -coefficients de Kostka, que nous allons rappeler, qui a de nombreuses et importantes applications en algèbre, en géométrie et en combinatoire.

Pour replacer ces considérations dans leur cadre naturel, il nous faut introduire la notion, fondamentale dans bien des études combinatoires, de tableau.

**Définition 1.18** *Un diagramme  $L$  étant donné, un tableau de forme  $L$  est la donnée d'une application  $T$  de  $L$  dans  $\mathbb{N}$ . Ceci revient à placer une étiquette  $m \in \mathbb{N}$  dans chaque case du diagramme. Si  $T(r, c) = m$ , nous dirons que  $(r, c)$  est la place de l'étiquette  $m$  dans le tableau  $T$ . Le poids du tableau  $T$  est défini comme son ensemble image, ordonné en décroissant (c'est donc une partition d'un entier positif).*

*Le tableau  $T$  est dit injectif si l'application de  $L$  dans  $\mathbb{N}$  est injective et à valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$ . L'ensemble des tableaux injectifs de forme  $L$  est noté  $\mathcal{IT}_L$ . Un tableau injectif  $T$  est dit croissant sur les lignes si  $T(r, c) < T(r', c)$  dès que  $r < r'$ . Nous définissons de la même manière les tableaux croissants sur les colonnes et un tableau est dit standard s'il est simultanément croissant sur les lignes et les colonnes. Un tableau est dit semi-standard ou tableau de Young s'il est croissant au sens large sur les lignes et au sens strict sur les colonnes. Nous noterons respectivement  $\mathcal{CI}_L$ ,  $\mathcal{RI}_L$ ,  $\mathcal{ST}_L$  et  $\mathcal{YT}_L$  l'ensemble des tableaux croissants sur les colonnes, croissants sur les lignes, standard et de Young de forme  $L$ .*

Voici un exemple de tableau standard de forme  $\mu = (4, 2, 1)$  :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & & & \\ \hline 4 & 7 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 6 \\ \hline \end{array} .$$

Rappelons que les nombres de Kostka sont définis par

$$s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} m_\mu. \quad (1.31)$$

Nous avons  $K_{\lambda\mu} = 0$  sauf si  $\mu \leq \lambda$  pour l'ordre (1.22) et  $K_{\lambda\lambda} = 1$ . Ces nombres se généralisent avec les polynômes de Kostka-Foulkes  $K_{\lambda\mu}(t)$  définis de la façon suivante :

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu}(t) P_\mu(x; t), \quad (1.32)$$

où  $P_\mu(x; t)$  sont les fonctions de Hall-Littlewood (définies de façon analogue à (1.21), mais en utilisant le produit scalaire (1.28) au lieu de (1.23)).

L'équation (1.32) est équivalente à

$$Q_\mu(x; t) = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu}(t) S_\lambda(x; t) \quad (1.33)$$

où  $Q_\mu(x; t)$  est la base duale de  $P_\mu(x; t)$  par rapport au produit scalaire défini en (1.28). Comme  $P_\mu(x; 1) = m_\mu$ , il découle de (1.31) et (1.32) que  $K_{\lambda\mu}(1) = K_{\lambda\mu}$ . Rappelons ici que  $K_{\lambda\mu}$  est le nombre de tableaux de Young de forme  $\lambda$  et de poids  $\mu$ . Foulkes a conjecturé et Lascoux et Schutzenberger ([43]) ont prouvé que  $K_{\lambda\mu}(t)$  est un polynôme en  $t$  à coefficients entiers positifs et plus précisément que

$$K_{\lambda\mu}(t) = \sum_T t^{c(T)} \quad (1.34)$$

où la somme est prise sur tous les tableaux de Young  $T$  de forme  $\lambda$  et de poids  $\mu$  et  $c(T)$  la charge du tableau  $T$  (la charge est une application entière définie sur l'ensemble des tableaux de Young).

Il nous faut maintenant faire le lien entre la conjecture MPK et la conjecture  $n!$ . Celui-ci vient de l'étude de la structure de  $\mathcal{S}_n$ -module bigradué de  $\mathbf{M}_\mu$ .

#### 1.1.4 Structure de $\mathcal{S}_n$ -module bigradué

Ce paragraphe utilise la théorie des représentations linéaires des groupes finis et en particulier les représentations du groupe symétrique. L'Annexe A rappelle brièvement toutes les définitions et les résultats nécessaires à notre étude.

Comme nous l'avons déjà dit, la conjecture  $n!$  apparut comme partie d'une conjecture plus forte impliquant la conjecture MPK. Cette conjecture, énoncée par A. Garsia et M. Haiman relie les coefficients de Kostka-Macdonald au caractère de  $\mathbf{M}_\mu$ , en tant que  $\mathcal{S}_n$ -module bigradué. Précisons l'action de  $\mathcal{S}_n$  considérée, dite diagonale.

**Définition 1.19** *L'action diagonale du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  sur la  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $\mathbb{Q}[X, Y]$  correspond à la permutation des variables. Elle est donnée par la formule :*

$$wx_i = x_{w(i)}, \quad wy_i = y_{w(i)}, \quad \forall w \in \mathcal{S}_n. \quad (1.35)$$

Soit  $L$  un diagramme du réseau carré. L'anneau

$$\mathbb{Q}[X, Y] = \bigoplus_{r,s} \mathbb{Q}[X, Y]_{r,s}$$

est bigradué selon le degré en  $X$  et en  $Y$ , et l'action diagonale de  $\mathcal{S}_n$  est compatible avec le bidegré. Il est clair que pour tout diagramme  $L$ ,  $\Delta_L$  est antisymétrique pour l'action diagonale de  $\mathcal{S}_n$ . Il est de plus bihomogène. Ceci implique que l'espace  $\mathbf{M}_L$  est  $\mathcal{S}_n$ -invariant et admet une décomposition bigraduée

$$\mathbf{M}_L = \bigoplus_{r,s} (\mathbf{M}_L)_{r,s} \quad (1.36)$$

en sous-espaces  $\mathcal{S}_n$ -invariants  $(\mathbf{M}_L)_{r,s} = \mathbf{M}_L \cap \mathbb{Q}[X, Y]_{r,s}$ .

La série de Hilbert bigraduée de  $\mathbf{M}_L$  est donnée par

$$H_L(q, t) = \sum_{r=0}^{|p|} \sum_{s=0}^{|q|} t^r q^s \dim(\mathbf{M}_L)_{r,s}, \quad (1.37)$$

et la caractéristique de Frobenius bigraduée de  $\mathbf{M}_L$  est la fonction symétrique donnée par la formule

$$F_L(x; q, t) = \mathcal{F}_{q,t}(\mathbf{M}_L) = \sum_{r=0}^{|p|} \sum_{s=0}^{|q|} t^r q^s \text{ch}(\chi_{(\mathbf{M}_L)_{r,s}}), \quad (1.38)$$

où  $\chi_{\mathbf{M}}$  est le caractère du module  $\mathbf{M}$  et  $\text{ch}$  la correspondance de Frobenius qui au caractère irréductible  $\chi^\lambda$  fait correspondre la fonction de Schur  $s_\lambda$ . Nous rappelons en annexe quelques éléments de la théorie des représentations linéaires de  $\mathcal{S}_n$  et nous renvoyons à [24], [38] et [51] pour des exposés détaillés.

Si nous notons

$$C_\mu(x; q, t) = F_\mu(x; q, t) \quad (1.39)$$

afin de retrouver les notations initiales de [26] et

$$\tilde{H}_\mu(x; q, t) = H_\mu(x; q, 1/t)t^{n(\mu)} \quad (1.40)$$

avec

$$H_\mu(x; q, t) = \sum_{\lambda} s_\lambda K_{\lambda\mu}(q, t), \quad (1.41)$$

et

$$n(\mu) = \sum_{i=1}^k (i \perp 1) \mu_i, \quad (1.42)$$

nous pouvons alors énoncer la conjecture fondamentale de A. Garsia et M. Haiman, établie par M. Haiman, qui interprète les coefficients de Kostka-Macdonald en termes de multiplicités bigraduées des caractères irréductibles de  $\mathbf{M}_\mu$ .

**Théorème 1.20 (conjecture  $C = \tilde{H}$ )** *Avec les notations précédentes,*

$$C_\mu(x; q, t) = \tilde{H}_\mu(x; q, t). \quad (1.43)$$

La conjecture  $C = \tilde{H}$  implique clairement la conjecture MPK. Elle implique aussi la conjecture  $n!$  qui n'est que la partie dimensionnelle de la conjecture  $C = \tilde{H}$ . En effet, Macdonald a prouvé dans [45] que

$$K_{\lambda\mu}(1, 1) = K_\lambda \quad (1.44)$$

où  $K_\lambda$  représente comme d'habitude le nombre de tableaux standard de forme  $\lambda$ . Nous savons aussi (cf. [47], Corollaire 1.6.8 ou l'Annexe A) que la dimension de la représentation irréductible de  $\mathcal{S}_n$  de caractère  $\chi^\lambda$  est  $K_\lambda$ . On déduit alors de cela que si (1.43) est vérifiée alors la dimension de  $\mathbf{M}_\mu$  est  $\sum_\lambda K_\lambda^2 = n!$ . Cette dernière égalité est une conséquence de la correspondance de Robinson-Schensted entre paires de tableaux standard de même forme  $\lambda$ , partition de  $n$ , et permutations  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  (cf. [50], [53]).

Nous voyons facilement que lorsque  $\mu = (1^n)$  ou  $\mu = (n)$ , le déterminant  $\Delta_\mu$  se réduit au déterminant de Vandermonde en  $X$  et  $Y$  respectivement. Dans ce cas, c'est un résultat classique (cf. [57]) que  $\dim \mathbf{M}_\mu = n!$ . Il est tout à fait surprenant que la conjecture  $n!$ , bien qu'apparemment élémentaire ait aussi longtemps résisté à toutes les tentatives visant à l'établir. De plus le fait, prouvé par M. Haiman via des techniques de géométrie algébrique, que la conjecture  $n!$  implique la conjecture  $C = \tilde{H}$  a conféré à la première une place centrale dans cette étude.

## 1.2 Présentation des différentes approches

Nous présentons ci-dessous certaines des approches utilisées dans l'étude de la conjecture  $n!$ . Il convient aussi de signaler la preuve de A. Garsia et M. Haiman [27] dans le cas des partitions à deux lignes utilisant la notion



d'algèbre de Gorenstein, la preuve de E. Allen [1] pour les équerres  $\mu = (A, 1^L)$  qui utilisent les algèbres de Rota, et les travaux de C. Dunkl et P. Hanlon [21] en termes d'opérateurs de Dunkl.

### 1.2.1 Principe d'expulsion

Le principe d'expulsion repose sur la théorie des harmoniques des orbites, développée par A. Garsia et M. Haiman [29]. Une partition  $\mu$  étant fixée, on lui associe une orbite  $[\rho_\mu]$  qui est un ensemble de  $n!$  points dans  $\mathbb{Q}^{2n}$ . On introduit alors  $J_{[\rho_\mu]}$  l'idéal de  $\mathbb{Q}[X, Y]$  constitué des polynômes qui sont nuls en tout point de  $[\rho_\mu]$ . On définit aussi  $\text{gr}J_{[\rho_\mu]}$ , idéal gradué engendré par les termes de plus haut degré de  $J_{[\rho_\mu]}$  et  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$ , espace des harmoniques de  $[\rho_\mu]$ , défini par  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]} = (\text{gr}J_{[\rho_\mu]})^\perp$  pour un certain produit scalaire. Il est simple de prouver que la dimension de  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  est  $n!$ . La première utilisation de cet espace vient de l'inclusion  $\mathbf{M}_\mu \subseteq \mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$ , qui implique  $\dim \mathbf{M}_\mu \leq n!$ . La conjecture  $n!$  revient alors à prouver que  $\mathbf{M}_\mu = \mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$ .

C'est l'objectif du principe d'expulsion. La première observation est que  $\mathbf{M}_\mu$  est un cône, i.e. l'ensemble des dérivées partielles d'un polynôme, à savoir  $\Delta_\mu$ , que l'on appelle son sommet. La question se transforme alors en la suivante : comment prouver que  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  est un cône ? Une réponse est donnée par le Theorem 4.2 de [29], dont la principale condition est que la série de Hilbert de  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  soit symétrique. Le but est alors de construire une base de  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  qui respecte cette condition de symétrie. Les techniques employées justifient le terme d'"expulsion" (cf. Chapitre 2) car il s'agit de placer correctement des étiquettes dans un tableau de forme  $\mu$ .

Cette approche s'est avérée très efficace dans le cas des équerres  $\mu = (a, 1^b)$  et la section 2.4 présente la preuve de A. Garsia et M. Haiman dans ce cas. Utilisant cette méthode, E. Reiner [48] a appliqué cette démarche dans le cas des équerres généralisées  $\mu = (a, 2, 1^b)$ , mais la complexité de sa preuve a jusqu'à présent été un frein à de nouvelles investigations dans cette voie.

### 1.2.2 Bases monomiales et idéaux annulateurs

Le but de cette approche est l'obtention de bases explicites de  $\mathbf{M}_\mu$ . Nous nous intéressons particulièrement aux bases de  $\mathbf{M}_\mu$  constituées de dérivées monomiales de  $\Delta_\mu$  car leur lien avec les idéaux annulateurs de  $\Delta_\mu$ , via les bases de Gröbner, incitent à une étude simultanée de la structure de  $\mathbf{M}_\mu$  et des polynômes  $P \in \mathbb{Q}[X, Y]$  tels que  $P(\partial)\Delta_\mu = 0$ . Dans cette optique, il est fondamental de bien comprendre l'action des opérateurs différentiels, et en

particulier des opérateurs symétriques, sur les déterminants de diagrammes  $\Delta_L$ . On appelle ces opérateurs “opérateurs de sauts” car leur action se traduit au niveau des diagrammes par des mouvements de cases. Cette étude (cf. [8],[9]) permet de trouver de grandes classes de polynômes symétriques qui annulent  $\Delta_\mu$ . Cette approche se veut une poursuite dans la voie combinatoire de N. Bergeron et A. Garsia [14], des travaux, plus géométriques de C. de Concini et C. Procesi [19] ou de T. Tanisaki [59]. Ceci permet dans certains cas d’obtenir des bases explicites monomiales de  $\mathbf{M}_\mu$ . Cette démarche s’est en particulier révélée fructueuse pour donner une nouvelle description du sous-espace de  $\mathbf{M}_\mu$  constitué des polynômes de degré en  $Y$  nul, et pour obtenir une base monomiale de  $\mathbf{M}_\mu$  dans le cas des équerres [4].

### 1.2.3 Approche récursive

La tentation d’approcher la conjecture  $n!$  de façon récursive a été dès le début très forte et a stimulé d’importantes investigations quant à la structure de  $\mathbf{M}_\mu$ . Les articles [10] et [12] sont révélateurs de cette démarche. Une approche combinatoire particulièrement intéressante utilise la notion de partition trouée. On appelle ainsi une partition  $\mu$  de  $n + 1$  dont on a retiré une case  $(i, j)$ , ce que l’on note  $\mu/ij$ . La case  $(i, j)$  est appelée le trou de  $\mu/ij$  et le principe est de faire se déplacer le trou dans le diagramme de Ferrers. Les opérateurs de sauts se montrent ici bien utiles. La conjecture centrale dans cette étude est une récurrence à quatre termes dont la partie non bigraduée assure que  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$  est un multiple de la représentation régulière à gauche, la multiplicité étant le cardinal de l’ombre de la case  $(i, j)$  dans  $\mu$ , i.e. le nombre de cases situées au sens large au nord-est de  $(i, j)$  dans  $\mu$ . L’intérêt de cette étude est sa grande richesse combinatoire, même dans le cas où l’on ne considère qu’un seul alphabet (cf. [5],[8]).

### 1.2.4 Généralisations

À partir des partitions trouées, il est naturel d’étudier plus généralement les espaces  $\mathbf{M}_L$ , pour des diagrammes  $L$  quelconques. La question qui se pose alors est :  $\mathbf{M}_L$  est-il toujours un multiple de la représentation régulière à gauche et en particulier sa dimension est-elle toujours un multiple  $n!$ ? La réponse est négative ; par exemple, pour  $L = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1)\}$ , la dimension de  $\mathbf{M}_L$  est 46, non divisible par  $3! = 6$ . Cependant ([11]), la réponse est positive pour les diagrammes de dimension 1. Mais alors comment faire dans le cas des partitions quelconques pour généraliser  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$  à des diagrammes avec  $k$  trous? Une réponse est apportée dans [7], où nous introduisons l’es-

pace  $\mathbf{M}_{ij}^k$  défini comme la somme de tous les espaces  $\mathbf{M}_L$  où  $L$  s'obtient à partir de  $\mu$ , partition de  $n+k$  en faisant  $k$  trous dans l'ombre de  $(i, j)$ . On obtient ainsi une généralisation de la conjecture  $n!$ , déjà partiellement résolue dans le cas du sous-espace en un alphabet. Les opérateurs de sauts se montrent ici aussi fort utiles. Il est certain qu'il reste dans ce domaine beaucoup à découvrir.

### 1.2.5 Géométrie algébrique

La conjecture  $n!$  est un problème de combinatoire algébrique. Il a suscité et suscite encore de nombreuses et intéressantes approches associant algèbre et combinatoire, mais force est de constater que la première preuve de la conjecture  $n!$ , obtenue par M. Haiman [36], utilise de façon cruciale des outils de géométrie algébrique. Auparavant, et en utilisant les mêmes techniques, M. Haiman avait déjà prouvé [35] que la conjecture  $n!$  impliquait la conjecture  $C = \tilde{H}$ , ce qui achève la preuve de la positivité des polynômes de Kostka-Macdonald. Exposons en quelques mots les grandes lignes de cette approche.

Soit  $R = \mathbb{C}[x, y]$  l'anneau des polynômes en deux variables à coefficients complexes. Par définition, les sous-schémas fermés de  $\mathbb{C}^2$  sont en correspondance biunivoque avec les idéaux  $I \subset R$ . Le sous-schéma  $S = V(I)$  est fini et seulement si  $R/I$  a une dimension de Krull nulle, i.e. une dimension finie comme espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . Dans ce cas, sa longueur est définie comme  $\dim_{\mathbb{C}} R/I$ .

Le schéma de Hilbert  $H_n = \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$  paramètre les sous-schémas fermés  $S \subset \mathbb{C}^2$  de longueur  $n$ , ou de façon équivalente les idéaux  $I$  de  $R$  tels que  $\dim_{\mathbb{C}} R/I = n$ . Un résultat fondamental est le théorème suivant, dû à Fogarty ([23]), et qui est particulier à  $\mathbb{C}^2$  et faux en dimension supérieure : le schéma de Hilbert  $H_n$  est une variété sur  $\mathbb{C}$  régulière, irréductible, de dimension  $2n$ .

L'exemple générique d'un sous-schéma fermé  $S \subset \mathbb{C}^2$  de longueur  $n$  correspond aux sous-schémas réduits composés de  $n$  points distincts. Un cas particulièrement intéressant pour notre étude est le cas des idéaux monomiaux. Si  $I \subset R$  est un idéal monomial alors les monômes standards  $x^p y^q \notin I$  forment une base de  $R/I$ . Si  $\dim_{\mathbb{C}} R/I = n$ , les biexposants  $(p, q)$  des monômes standard forment le diagramme  $\mu$  d'une partition de  $n$ , et réciproquement (on note  $I_\mu$  l'idéal ainsi associé à la partition  $\mu$ ).

Soit  $\mathbb{C}[X, Y] = \mathbb{C}[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]$  l'anneau des polynômes en  $2n$  variables, de telle sorte que  $\text{Spec } \mathbb{C}[X, Y] = (\mathbb{C}^2)^n$ . Le groupe symétrique  $S_n$  agit sur  $(\mathbb{C}^2)^n$  en permutant les coordonnées cartésiennes, ce qui correspond à l'action diagonale de  $S_n$  sur  $\mathbb{C}[X, Y]$ . On peut identifier  $\text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]^{S_n}$  avec

la variété  $S^n\mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^n/S_n$  des multiensembles (non ordonnés) de points de  $\mathbb{C}^2$ .

L'objet au centre de cette étude peut alors être défini comme le produit fibré réduit

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\perp} & (\mathbb{C}^2)^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n & \xrightarrow{\perp^\sigma} & S^n\mathbb{C}^2 \end{array}$$

où  $\sigma$  est le morphisme de Chow qui à un idéal fait correspondre le multiensemble de ses points avec leurs multiplicités. La variété  $X_n$  est appelée schéma de Hilbert iso-spectral. Une partie des grands résultats de M. Haiman, mettant en lumière les liens entre la conjecture  $n!$  et la géométrie de  $X_n$ , et l'intérêt de cette correspondance, peuvent alors être résumés ainsi (cf. [35, 36]) :

**Théorème 1.21** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- La conjecture  $n!$  est vérifiée pour la partition  $\mu$  ;
- Le schéma de Hilbert iso-spectral  $X_n$  est de Cohen-Macaulay dans un voisinage du point  $Q_\mu = (I_\mu, 0, \dots, 0)$ .

**Théorème 1.22** *Si  $X_n$  est de Cohen-Macaulay en  $Q_\mu$  alors la conjecture  $C = \tilde{H}$  est vraie pour  $\mu$ .*

**Théorème 1.23** *Le schéma de Hilbert iso-spectral  $X_n$  est de Cohen-Macaulay.*

En particulier, ces résultats impliquent les conjectures  $n!$ , MPK et  $C = \tilde{H}$ , et même s'ils ne permettent pas de pénétrer la structure combinatoire de  $\mathbf{M}_\mu$ , établissent définitivement de nombreuses assertions, jusque-là conjecturales.

### 1.3 Organisation de la thèse

La thèse est organisée en six chapitres. Le premier, consacré à l'introduction du problème s'achève avec cette section. Dans le second chapitre, nous exposons la théorie des harmoniques des orbites et ses applications à notre étude. Après une présentation assez brève de cette théorie, nous en voyons trois grandes applications : obtention d'une borne supérieure, première étude du sous-espace  $\mathbf{M}_\mu(X)$  de  $\mathbf{M}_\mu$  constitué des polynômes de degré en  $Y$  nul, et

première preuve dans le cas des équerres  $\mu = (a, 1^b)$ . Le chapitre suivant s'intéresse aux bases monomiales et aux idéaux annulateurs. Nous commençons par exposer le principe, dont un ressort est la notion de base de Gröbner, puis nous introduisons les outils fondamentaux de cette approche que sont les opérateurs de sauts (cf. paragraphe 1.2.2 ci-dessus), avant d'appliquer cela pour obtenir une nouvelle description de deux cas déjà cités : étude de  $\mathbf{M}_\mu(X)$  pour une partition quelconque et de  $\mathbf{M}_\mu$  pour une équerre. Le Chapitre 4 présente l'approche récursive et l'étude des espaces associés aux partitions trouées. Nous présentons en particulier la résolution de la récurrence à quatre termes en un alphabet et une base explicite de l'idéal annulateur en un alphabet. Le cinquième chapitre est consacré aux généralisations, i.e. aux cas des diagrammes à plusieurs trous. Après une présentation du problème et un rappel des résultats de [11] dans le cas de la colonne trouée, nous étudions l'espace  $\mathbf{M}_{ij}^k$ , déjà cité au paragraphe 1.2.4, avant de mentionner le problème "dual", lié à l'anti-ombre d'une case. Le sixième et dernier chapitre présente certaines problématiques liées à ces questions et tente d'exposer les problèmes ouverts et les prolongements possibles.

## Chapitre 2

# Les harmoniques des orbites ; généralités et applications

LA THÉORIE des harmoniques des orbites a été développée par A. Garsia et M. Haiman, et tous les résultats de ce chapitre leur sont dus (cf. [26], [29]). Elle sert de fondement à la conjecture  $n!$  et permet en outre d'intéressantes approches algébriques. Sans entrer dans tous les détails, nous donnerons ici les principaux ingrédients de cette étude, avant d'en présenter différentes applications. Le chapitre est composé de quatre sections. La première introduit le principe en toute généralité. La seconde l'utilise pour l'obtention de la borne supérieure de la dimension de  $\mathbf{M}_\mu$ . La troisième section est une première étude du sous-espace  $\mathbf{M}_\mu(X)$  constitué des polynômes de degré en  $Y$  nul. Enfin, la quatrième expose une première preuve de la conjecture  $n!$  dans le cas des équerres  $\mu = (1^A, L + 1)$ .

### 2.1 Généralités

Nous présentons ici quelques éléments de la théorie des harmoniques des orbites ayant des applications dans l'étude de la conjecture  $n!$ . Nous n'exposerons ici qu'une petite partie de ce domaine, nécessaire dans notre cadre, mais un exposé très détaillé est disponible dans [29].

Soit  $\mathbf{R} = \mathbb{Q}[X] = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_m]$  l'anneau des polynômes en les variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$  à coefficients rationnels. Dans cette section,  $X$  désigne un ensemble de variables différent de celui utilisé dans le Chapitre 1 (cf. Définition 1.5), mais dès la section suivante 2.2, nous spécialiserons  $X$  pour retrouver les notations classiques. Nous définissons un degré sur  $\mathbf{R}$  en posant

pour tout monôme  $X^{\mathbf{P}} = x_1^{p_1} \cdots x_m^{p_m}$ ,

$$d_w(X^{\mathbf{P}}) = \sum_{i=1}^m w_i p_i$$

où  $w_1, \dots, w_m$  sont des coefficients de pondération positifs. Pour tout polynôme  $P = \sum_p c_p X^{\mathbf{P}}$  et tout entier  $k$ , on définit

$$\pi_w^k P = \sum_{d_w(X^{\mathbf{P}})=k} c_p X^{\mathbf{P}}$$

et on l'appelle le composant  $w$ -homogène de degré  $k$ . Un sous-espace  $\mathbf{V}$  de  $\mathbf{R}$  est dit homogène (dans un contexte où le degré est fixé, nous n'indiquerons pas le préfixe  $w$ ) si pour tout entier  $k$  on a  $\pi_w^k \mathbf{V} \subset \mathbf{V}$ .

On définit de plus un produit scalaire sur  $\mathbf{R}$  en posant pour tous polynômes  $P, Q$  de  $\mathbf{R}$

$$\langle P, Q \rangle = L_0 P(\partial X) Q(X) \quad (2.1)$$

où  $P(\partial X)$  représente l'opérateur différentiel associé à  $P$  (cf. section 1.1), et  $L_0$  est l'opérateur qui à un polynôme fait correspondre sa valeur quand  $X = 0$  (i.e. son terme constant). Si  $A$  est une matrice  $m \times m$ , on peut faire agir  $A$  sur les vecteurs ligne de dimension  $m$  par multiplication à droite et poser pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbf{R}$

$$T_A P(X) = P(X.A). \quad (2.2)$$

Remarquons que si le poids  $w$  est invariant par permutation, cette action préserve le degré et le caractère homogène. On vérifie de plus aisément que si  $A$  est une matrice orthogonale, cette action préserve aussi le produit scalaire (2.1).

Comme deux monômes de degrés différents sont orthogonaux pour notre produit scalaire, on a nécessairement que des composants homogènes de degrés différents sont aussi orthogonaux. En particulier, le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de  $\mathbf{R}$  homogène est aussi homogène. Nous utiliserons le symbole  $\perp$  pour noter le supplémentaire orthogonal par rapport à notre produit scalaire défini en (2.1). Il est bon de noter que dans le cas de sous-espaces homogènes cette opération se comporte exactement comme le supplémentaire orthogonal dans un espace euclidien de dimension finie. Plus précisément, nous avons la

**Proposition 2.1** *Si  $\mathbf{V}$  est un sous espace  $w$ -homogène de  $\mathbf{R}$ , alors il en est de même pour  $\mathbf{V}^\perp$  et*

$$(\mathbf{V}^\perp)^\perp = \mathbf{V}. \quad (2.3)$$

*Si  $J \subset \mathbf{R}$  est un idéal alors*

$$J^\perp = \{P \in \mathbb{Q}[X] ; f(\partial X)P(X) = 0, \forall f \in J\}, \quad (2.4)$$

*donc en particulier  $J^\perp$  est stable par dérivation.*

*Preuve.* La première assertion et l'égalité (2.3) sont des conséquences immédiates des observations suivantes : premièrement  $\perp$  agit séparément sur chacune des composantes homogènes de  $\mathbf{R}$  et deuxièmement chaque composante homogène est de dimension finie. En ce qui concerne (2.4), nous notons que si  $P \in \mathbf{R}$  est orthogonal à  $J$  alors, comme  $J$  est un idéal, nous avons nécessairement que

$$L_0 \partial X^{\mathbf{p}} f(\partial X)P(X) = 0 \quad (\forall f \in J, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{N}^m).$$

Ceci implique que  $f(\partial X)P(X)$  est nul ainsi que toutes ses dérivées. Donc, d'après le théorème de Taylor, ce polynôme est nul, d'où (2.4). La dernière assertion en est une conséquence immédiate. ■

**Remarque 2.2** Notons que si  $J$  n'est pas un idéal homogène, l'ensemble décrit en (2.4) peut être réduit à  $\{0\}$  (par exemple lorsque  $J$  est l'idéal  $(X \perp a)$  pour tout  $a$  non nul). Donc (2.3) est faux si  $\mathbf{V}$  n'est pas homogène.

Maintenant soit  $J$  un idéal quelconque de  $\mathbf{R}$  et soit  $\mathbf{R}_J = \mathbf{R}/J$ . L'idéal gradué associé à  $J$  est par définition l'idéal engendré par les composantes homogènes dominantes des polynômes de  $J$ , c'est-à-dire :

$$\text{gr}J = (h(P) ; P \in J),$$

où pour chaque  $P$  dans  $J$ ,  $h(P)$  désigne la composante homogène de  $P$  de degré maximal. Ceci étant posé, l'anneau quotient  $\mathbf{R}/\text{gr}J$  est appelé version graduée de  $\mathbf{R}_J$  et noté  $\text{gr}\mathbf{R}_J$ .

Considérons maintenant un groupe  $G$  de matrices orthogonales. Dans notre contexte, nous pouvons supposer que les matrices de  $G$  ont des coefficients rationnels. Soit un point  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$  de  $\mathbb{Q}^m$ . Sa  $G$ -orbite est par définition l'ensemble

$$[\rho]_G = \{\rho A ; A \in G\}.$$



Nous définissons aussi

$$\mathbf{R}_{[\rho]_G} = \mathbf{R}/J_{[\rho]_G}$$

où

$$J_{[\rho]_G} = \{P \in \mathbf{R} ; P(x) = 0 \forall x \in [\rho]_G\}.$$

Nous pouvons voir  $\mathbf{R}_{[\rho]_G}$  comme l'anneau coordonné de  $[\rho]_G$  (vu comme une variété algébrique). Comme l'idéal  $J_{[\rho]_G}$  est clairement  $G$ -invariant sous l'action 2.2,  $G$  agit sur  $\mathbf{R}_{[\rho]_G}$ . En fait, il est simple de voir que la représentation correspondante est équivalente à l'action de  $G$  sur les classes à gauche du stabilisateur de  $\rho$ . En particulier, quand  $\rho$  est un point régulier (i.e. quand son stabilisateur est trivial), alors  $\mathbf{R}_{[\rho]_G}$  est simplement une version de la représentation régulière à gauche de  $G$ . Si, pour chaque  $A \in G$  l'action définie en (2.2) préserve le degré, nous pouvons associer à  $[\rho]_G$  deux autres  $G$ -modules. Ce sont  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho]_G}$  et son supplémentaire orthogonal

$$\mathbf{H}_{[\rho]_G} = (\text{gr}J_{[\rho]_G})^\perp. \quad (2.5)$$

Remarquons que si  $f(X)$  est un polynôme quelconque  $G$ -invariant, alors  $f(X) \perp f(\rho)$  appartient à  $J_{[\rho]_G}$  et donc si  $f(X)$  est homogène alors  $f(X)$  lui-même appartient à  $\text{gr}J_{[\rho]_G}$ . Ceci implique que tout élément  $P \in \mathbf{H}_{[\rho]_G}$  doit satisfaire l'équation différentielle

$$f(\partial X)P = 0.$$

Comme  $G$  est supposé composé de matrices orthogonales, le polynôme  $x_1^2 + \dots + x_m^2$  est  $G$ -invariant. Ainsi tous les éléments de  $\mathbf{H}_{[\rho]_G}$  doivent être des polynômes harmoniques, i.e. des polynômes annulés par le Laplacien :

$$\Delta = \sum_{i=1}^m \partial x_i^2.$$

Pour cette raison, nous les appelons les *harmoniques de l'orbite*  $[\rho]_G$ . Il est clair que  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho]_G}$  et  $\mathbf{H}_{[\rho]_G}$  sont équivalents en tant que modules gradués car les éléments de  $\mathbf{H}_{[\rho]_G}$  peuvent être pris comme représentants des classes de  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho]_G}$ . Plus important encore est le fait suivant, pour lequel une preuve, fort simple, se trouve dans [29].

**Proposition 2.3** *Les deux modules  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho]_G}$  et  $\mathbf{H}_{[\rho]_G}$  sont des versions graduées de  $\mathbf{R}_{[\rho]_G}$ .*

**Remarque 2.4** Une conséquence, très partielle de ce résultat est le fait que  $\mathbf{H}_{[\rho]_G}$  et  $\mathbf{R}_{[\rho]_G}$  sont de même dimension (i.e. le cardinal de l'orbite comme observé ci-dessus) et qu'il en est de même pour les composantes homogènes.

Nous allons maintenant voir comment le  $\mathcal{S}_n$ -module  $\mathbf{M}_\mu$  défini dans l'introduction (cf. Définition 1.6) peut être construit via ce mécanisme.

## 2.2 Application à $\mathbf{M}_\mu$ et borne supérieure

Nous commençons par introduire quelques nouveaux ingrédients. Soit  $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_\ell > 0)$  une partition de  $n$  ( $n = \mu_1 + \dots + \mu_\ell$ ) ayant  $\ell$  parts. Notons  $\ell' = \mu_1$  le nombre de parts de sa partition conjuguée  $\mu'$  et soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell-1}, \beta_0, \dots, \beta_{\ell'-1}$  des nombres rationnels distincts. Rappelons qu'un tableau injectif de forme  $\mu$  est une numérotation bijective des cases de  $\mu$  par les nombres  $\{1, \dots, n\}$ . L'ensemble de ces tableaux est noté  $\mathcal{IT}_\mu$ . Pour chaque tableau  $T \in \mathcal{IT}_\mu$  et pour  $l$  un élément de  $\{1, \dots, n\}$ , nous notons  $s_T(l) = (i_T(l), j_T(l))$  la case de  $T$  qui porte le numéro  $l$ . Nous associons alors à  $T$  un point  $\rho(T) = (a(T), b(T))$  dans  $\mathbb{Q}^{2n}$  en posant, pour tout  $l$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,

$$a_l(T) = \alpha_{i_T(l)} \quad , \quad b_l(T) = \beta_{j_T(l)}. \quad (2.6)$$

Il est peut-être utile de rappeler ici que conformément aux conventions exposées dans la Définition 1.2, les colonnes et les lignes sont numérotées à partir de zéro, et de donner un exemple. Si  $\mu = (3, 2)$  et

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 3 & \\ \hline 2 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

alors  $\rho(T) = (\alpha_0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_0)$ .

Notons que l'ensemble

$$\{\rho(T) ; T \in \mathcal{IT}_\mu\} \quad (2.7)$$

est composé de  $n!$  points distincts. En effet, comme les  $\alpha_i$  et les  $\beta_j$  sont supposés distincts, nous pouvons reconstruire la position de l'entrée  $l$  dans le tableau  $T$  en regardant les coordonnées  $a_l$  et  $b_l$  de  $\rho(T)$ . Notons aussi que l'ensemble en (2.7) est l'orbite d'un point quelconque de cet ensemble sous l'action diagonale de  $\mathcal{S}_n$ , définie en (1.35).

Nous pouvons ainsi construire des versions graduées de la représentation régulière à gauche de  $\mathcal{S}_n$  par le mécanisme décrit dans la section précédente. Dans ce cadre, nous prenons pour  $G$  le groupe des matrices de permutation agissant sur les vecteurs  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  par l'action diagonale de  $\mathcal{S}_n$ .

Le nombre de variables  $m$  est ici  $2n$  et  $\mathbf{R}$  est l'anneau des polynômes en  $2n$  variables

$$\mathbf{R} = \mathbb{Q}[X, Y] = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n].$$

En ce qui concerne le  $w$ -degré, nous remarquons que tout vecteur  $w = (w_1, \dots, w_{2n})$  qui donne un poids  $w_x$  aux  $n$  premières variables et un poids  $w_y$  aux  $n$  dernières est invariant sous l'action diagonale de  $\mathcal{S}_n$ . Nous utiliserons la notation  $[\rho_\mu]$  pour l'orbite définie en (2.7). Nous noterons  $\mathbf{R}_{[\rho_\mu]}$ ,  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho_\mu]}$  et  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  l'anneau coordonné, sa version graduée et l'espace des harmoniques correspondant. Nous nous dispensons de préciser le groupe  $G \simeq \mathcal{S}_n$  dans les notations car celui-ci restera fixé dans toute notre étude. Les définitions de ces espaces peuvent laisser penser qu'ils dépendent des choix des  $\alpha_i$  et des  $\beta_j$ . Il en est certainement ainsi pour l'anneau coordonné  $\mathbf{R}_{[\rho_\mu]}$ . Cependant, les deux résultats suivants suggèrent avec force que l'espace des harmoniques  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  ainsi que l'idéal  $\text{gr}J_{[\rho_\mu]}$  et l'anneau quotient  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho_\mu]}$  ne dépendent que du choix de  $\mu$ .

Le point de départ est le remarquable résultat suivant.

**Proposition 2.5** *Si  $(i, j)$  est une case à l'extérieur de la partition  $\mu$  alors pour tout  $s \in \{1, \dots, n\}$  le monôme  $x_s^i y_s^j$  appartient à l'idéal  $\text{gr}J_{[\rho_\mu]}$ . En particulier si un monôme  $X^p Y^q = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n}$  est non nul dans le quotient  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho_\mu]}$  alors toutes les paires  $(p_s, q_s)$  doivent être des biexposants de  $\mu$ , et tout polynôme de  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  doit être une combinaison linéaire de monômes satisfaisant la même condition.*

*Preuve.* Nous affirmons que le polynôme

$$f(X, Y) = \prod_{i'=0}^{i \perp 1} (x_s \perp \alpha_{i'}) \prod_{j'=0}^{j \perp 1} (y_s \perp \beta_{j'})$$

doit nécessairement s'annuler sur toute l'orbite  $[\rho_\mu]$ . En effet, si  $f$  ne s'annule pas en un point

$$(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$$

alors  $a_s$  ne peut prendre aucune des valeurs  $\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{i \perp 1}$ . Donc si  $T$  est un tableau injectif donnant  $(a, b)$  via la construction définie en (2.6), alors l'entrée  $s$  ne peut pas se trouver dans l'une des  $i$  premières lignes de  $T$ . De manière symétrique, l'entrée  $s$  ne peut pas se trouver dans les  $j$  premières colonnes de  $T$ . Ceci place alors l'entrée  $s$  à l'extérieur de  $\mu$ , ce qui est absurde. Nous concluons donc que  $f \in J_{[\rho_\mu]}$ . Par conséquent, sa composante homogène de degré maximal, à savoir  $x_s^i y_s^j$  appartient à  $\text{gr}J_{[\rho_\mu]}$ . C'est notre première assertion.

Nous en déduisons qu'un monôme  $X^{\mathbf{p}}Y^{\mathbf{q}} = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n}$  est dans  $\text{gr}J_{[\rho_\mu]}$  dès qu'il contient comme facteur un  $x_s^i y_s^j$ . Si un monôme n'est pas nul dans  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho_\mu]}$ , ceci force toutes les paires  $(p_s, q_s)$  à être à l'intérieur du diagramme de  $\mu$ . Mais ceci est équivalent à dire que toutes les paires  $(p_s, q_s)$  sont des biexposants de  $\mu$ . Finalement, en utilisant la Proposition 2.1 (équation (2.4)), nous en déduisons que tout polynôme  $P \in \mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  doit satisfaire les équations différentielles

$$\partial x_s^i \partial y_s^j P(X, Y) = 0.$$

Ainsi tout monôme qui contient comme facteur un  $x_s^i y_s^j$  a un coefficient nul dans  $P$ . La preuve est alors complète. ■

**Théorème 2.6** *Pour tout choix des  $\alpha_i$  et des  $\beta_j$  et tout  $w$ -degré diagonalement invariant, nous avons l'inclusion*

$$\mathbf{M}_\mu \subseteq \mathbf{H}_{[\rho_\mu]}. \quad (2.8)$$

*En particulier, nous en déduisons que pour toute partition  $\mu$  de  $n$ , l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\dim \mathbf{M}_\mu \leq n!. \quad (2.9)$$

*Preuve.* Comme  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  est, en tant que  $\mathcal{S}_n$ -module et pour tout choix de nos paramètres, une version de la représentation régulière à gauche de  $\mathcal{S}_n$ , cet espace doit contenir la représentation alternante avec une multiplicité égale à 1 (cf. [54], Corollaire 1, p. 18 ou l'Annexe A). Ceci signifie que  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  contient un polynôme  $\Delta(X, Y)$ , unique à une constante multiplicative près, qui est antisymétrique pour l'action diagonale. Un tel polynôme est nécessairement une combinaison de monômes  $X^{\mathbf{p}}Y^{\mathbf{q}} = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n}$  avec des paires  $(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)$  toutes distinctes. D'autre part, d'après la proposition précédente, ces paires doivent toutes être des biexposants de  $\mu$ . Comme  $\mu$  a en tout  $n$  cases, nous n'avons que  $n$  biexposants distincts. Ceci implique que  $\Delta(X, Y)$  est égal au produit d'une constante non nulle par le polynôme obtenu en antisymétrisant par action diagonale un monôme de tableau, i.e. un monôme tel que

$$m_T(X, Y) = \prod_{k=1}^n x_l^{i_T(k)} y_l^{j_T(k)}. \quad (2.10)$$

En d'autres termes  $\Delta(X, Y)$  doit être un multiple du polynôme  $\Delta_\mu(X, Y)$  défini en (1.5). Ceci implique que  $\Delta_\mu(X, Y)$  est lui-même dans  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$ . Comme,

d'après la Proposition 2.1,  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  est stable par dérivation, l'espace entier  $\mathbf{M}_\mu$  doit être contenu dans  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$ .

L'inéquation (2.9) est alors une conséquence immédiate de (2.8) et du fait que  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  est une version de la représentation régulière à gauche de  $\mathcal{S}_n$ , donc de dimension  $n!$ . ■

Nous en déduisons alors le corollaire suivant.

**Théorème 2.7** *La conjecture  $n!$  implique que pour tout choix d'un poids  $w$  supposé  $\mathcal{S}_n$ -invariant et toute spécialisation des  $\alpha_i$  et des  $\beta_j$ , nous avons les égalités suivantes*

$$\mathbf{M}_\mu = \mathbf{H}_{[\rho_\mu]}, \quad (2.11)$$

et

$$\text{gr}J_{[\rho_\mu]} = \mathcal{I}_\mu, \quad (2.12)$$

où  $\mathcal{I}_\mu$  est l'idéal des polynômes  $f(X, Y)$  qui annule  $\Delta_\mu$ , i.e.

$$\mathcal{I}_\mu = \{f \in \mathbf{R} ; f(\partial X, \partial Y)\Delta_\mu(X, Y) = 0\}. \quad (2.13)$$

En particulier,  $\mathbf{M}_\mu$  est une version bigraduée de la représentation régulière à gauche de  $\mathcal{S}_n$ .

*Preuve.* Nous avons uniquement besoin de vérifier (2.12). Pour cela, nous remarquons que, comme l'idéal  $\text{gr}J_{[\rho_\mu]}$  est homogène, nous pouvons appliquer la Proposition 2.1 et déduire de (2.11) que

$$\text{gr}J_{[\rho_\mu]} = (\mathbf{M}_\mu)^\perp. \quad (2.14)$$

Mais pour qu'un polynôme  $f(X, Y)$  soit orthogonal à  $\mathbf{M}_\mu$ , il faut et il suffit que pour tous  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  on ait

$$L_0 f(\partial X, \partial Y)\partial X^{\mathbf{p}}\partial Y^{\mathbf{q}}\Delta_\mu(X, Y) = 0.$$

Ceci implique que le polynôme  $f(X, Y)$  est nul en zéro ainsi que toutes ses dérivées. D'après le théorème de Taylor, ceci prouve que ce polynôme est identiquement nul. Réciproquement, tout élément de  $\mathcal{I}_\mu$  est évidemment orthogonal à  $\mathbf{M}_\mu$ . Ceci prouve (2.12). La dernière assertion est une conséquence immédiate de (2.11). ■

## 2.3 Cas d'un alphabet

Un diagramme du réseau carré  $L$  étant fixé, le cas d'un alphabet consiste à étudier le sous-espace de  $\mathbf{M}_L(X, Y)$  constitué des polynômes ne faisant apparaître qu'un alphabet, à savoir  $X$ . Autrement dit :

**Définition 2.8** *Nous notons  $\mathbf{M}_L(X) = \mathbf{M}_L(X, Y) \cap \mathbb{Q}[X]$  le sous-espace des polynômes de degré en  $Y$  nul.*

Nous abordons dans cette section l'étude de  $\mathbf{M}_\mu(X)$  ; elle sera complétée dans la section 3.3.

### 2.3.1 Réduction aux polynômes de Garnir

Étant donné que nous aurons à travailler dans  $\mathbb{Q}[X]$ ,  $\mathbb{Q}[X, Y]$  ou d'autres espaces semblables, il sera pratique d'utiliser la notation  $Z$  pour un sous-alphabet de  $(X, Y)$  (par exemple  $X$ ). Nous utiliserons cette notation dans tout le texte de la thèse. C'est ainsi que nous noterons  $\mathbb{Q}[Z]$  l'anneau des polynômes à coefficients rationnels en les variables  $Z$ . Pour un polynôme  $P \in \mathbb{Q}[Z]$ , nous désignerons par  $P(\partial) = P(\partial Z)$  l'opérateur différentiel obtenu en substituant  $\partial x_i$  et  $\partial y_i$  à la place des variables  $x_i$  et  $y_i$ , et par  $\mathcal{L}_\partial[P]$  l'espace engendré par toutes les dérivées partielles de  $P$ , ce qui généralise la Définition 1.6.

Soit maintenant  $A = (a_1, \dots, a_m)$  une partie ordonnée de  $\{1, \dots, n\}$ . Nous noterons  $\Delta(X_A)$  le déterminant de Vandermonde en le sous-alphabet  $X_A = (x_{a_1}, \dots, x_{a_m})$ , ou plus précisément vu que l'ordre compte :

$$\Delta(X_A) = \det (x_{a_i}^{j \pm 1})_{1 \leq i, j \leq n}. \quad (2.15)$$

Soit  $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_\ell)$  une partition de  $n$  et  $\mu' = (\mu'_1 \geq \dots \geq \mu'_{\ell'})$  sa partition conjuguée. Soit  $T$  un tableau injectif de forme  $\mu$  (cf. Définition 1.18). Notons  $C_1, \dots, C_{\ell'}$  les colonnes de  $T$  ordonnées de la gauche vers la droite. Avec ces notations, la colonne  $C_i$  est de hauteur  $\mu'_i$ . Dans chaque colonne de  $T$ , nous ordonnons les étiquettes dans  $C_i$  suivant leur ordre d'apparition de bas en haut.

**Définition 2.9** *Avec les notations précédentes, nous définissons le polynôme de Garnir relatif au tableau  $T$  par :*

$$\Delta_T(X) = \Delta(X_{C_1}) \cdots \Delta(X_{C_{\ell'}}). \quad (2.16)$$

Par exemple si  $\mu = (3, 3, 1)$  et  $T$  vaut

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline \end{array} \quad (2.17)$$

alors

$$\Delta_T(X) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_5 & x_5^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & x_6 \\ 1 & x_3 \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} 1 & x_7 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Ces polynômes furent introduits par Garnir ([24]) dans sa reconstruction de la représentation naturelle de Young. Notons, conformément à la Définition 1.18,  $\mathcal{CI}_\mu$  l'ensemble des tableaux injectifs et croissants sur les colonnes de forme  $\mu$ .

La proposition suivante permet en particulier d'obtenir le polynôme de Garnir d'un tableau comme dérivée monomiale de  $\Delta_\mu$ , et nous sera utile par la suite.

**Proposition 2.10** *Si nous associons au tableau  $T$  de forme le diagramme  $L$  un monôme  $Y_T$  dans  $\mathbb{Q}[Y]$  par la formule*

$$Y_T = \prod_{(r,c) \in L} y_{T(r,c)}^c, \quad (2.19)$$

alors nous avons

$$\partial Y_T \Delta_L(X, Y) = \pm \gamma_L \Delta_T(X) \quad (2.20)$$

où l'entier  $\gamma_L$  est défini par  $\gamma_L = \prod_{r,c \in L} c!$ .

*Preuve.* Esquissons la preuve de ce résultat très naturel. Vu que  $Y_t$  est du même degré en  $Y$  que  $\Delta_L$ , le polynôme  $\partial Y_T \Delta_L(X, Y)$  est dans  $\mathbb{Q}[X]$ . Comme les termes de  $\Delta_L$  sont :

$$\epsilon(\sigma) x_{\sigma_1}^{r_1} y_{\sigma_1}^{c_1} x_{\sigma_2}^{r_2} y_{\sigma_2}^{c_2} \cdots x_{\sigma_n}^{r_n} y_{\sigma_n}^{c_n}, \quad (2.21)$$

où  $\epsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ , les termes de  $\partial Y_T \Delta_L(X, Y)$  sont de la forme

$$\epsilon(\sigma) \gamma_L x_{\sigma_1}^{r_1} x_{\sigma_2}^{r_2} \cdots x_{\sigma_n}^{r_n},$$

avec  $\sigma_j = i \Leftrightarrow c_j = c_T(j)$ , d'où (2.20). ■

Le résultat central de ce paragraphe est le suivant ([26], Theorem 1.5).

**Proposition 2.11** *L'espace  $\mathbf{M}_\mu(X)$  est engendré par les dérivées partielles des polynômes de Garnir relatifs aux tableaux croissants sur les colonnes de forme  $\mu$ , ce que nous notons :*

$$\mathbf{M}_\mu(X) = \mathcal{L}_\partial[\Delta_T ; T \in \mathcal{CI}_\mu]. \quad (2.22)$$

*Preuve.* Nous associons à tout tableau injectif  $T$  un monôme en posant, de même qu'en (2.10) :

$$m_T(X, Y) = \prod_{k=1}^n x_k^{i_T(k)} y_k^{j_T(k)} \quad (2.23)$$

où  $(i_T(k), j_T(k))$  est la case de  $T$  où apparaît l'étiquette  $k$ . Le polynôme  $\Delta_\mu$  peut alors être obtenu par action diagonale de  $\mathcal{S}_n$  sur le monôme associé à un tableau  $T_0$  fixé, par exemple le tableau superstandard (rempli des étiquettes  $\{1, \dots, n\}$  de la gauche vers la droite et de bas en haut). Nous avons donc

$$\Delta_\mu = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \sigma m_{T_0}(X, Y) \quad (2.24)$$

avec  $\epsilon(\sigma)$  la signature de la permutation  $\sigma$ . Notons  $G_T$  le sous-groupe de  $\mathcal{S}_n$  constitué des permutations qui laissent les colonnes de  $T$  globalement invariantes. Introduisons  $N(T) = \sum_{\sigma \in G_T} \epsilon(\sigma) \sigma$  selon une notation de A. Young (cf. [61]). En groupant les termes de (2.24) selon les classes à gauche de  $G_{T_0}$ , nous avons

$$\Delta_\mu(X, Y) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n/N(T_0)} \epsilon(\tau) \prod_{k=1}^n y_k^{j_{T_0}(k)} \times N(T_0) \prod_{k=1}^n x_k^{i_{T_0}(k)} \quad (2.25)$$

où avec un (petit) abus de notation, nous avons noté  $\mathcal{S}_n/N(T_0)$  pour un système de représentants des classes modulo  $G_{T_0}$ . Il est alors facile de voir que l'expression  $N(T_0) \prod_{k=1}^n x_k^{i_{T_0}(k)}$  est tout simplement le polynôme de Garnir associé à  $T_0$ . À présent, pour un  $T \in \mathcal{CI}_\mu$  fixé, notons  $\tau(T)$  la permutation qui transforme  $\Delta_{T_0}$  en  $\Delta_T$ , et  $\epsilon(T)$  la signature de cette permutation. Alors en prenant pour  $\mathcal{S}_n/N(T_0)$  l'ensemble  $\{\tau(T) ; T \in \mathcal{CI}_\mu\}$ , nous simplifions (2.25) pour obtenir enfin :

$$\Delta_\mu(X, Y) = \sum_{T \in \mathcal{CI}_\mu} \epsilon(T) \prod_{k=1}^n y_k^{j_T(k)} \times \Delta_T(X). \quad (2.26)$$



Nous déduisons alors facilement de cette équation que tout polynôme dans  $\mathbf{M}_\mu(X) = \mathcal{L}_\partial[\Delta_\mu] \cap \mathbb{Q}[X]$  est nécessairement une combinaison linéaire de dérivées de polynômes de Garnir relatifs à des tableaux croissants sur les colonnes. ■

### 2.3.2 Borne supérieure pour la dimension

Conformément au paragraphe précédent, nous noterons  $Z$  un sous-alphabet de  $(X, Y)$ . Commençons par une définition importante.

**Définition 2.12** *Soit  $\mathbf{M}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{Q}[Z]$ . Nous définissons son idéal annulateur comme l'idéal  $\mathcal{I}_\mathbf{M}$  suivant*

$$\mathcal{I}_\mathbf{M} = \{P \in \mathbb{Q}[Z] ; \forall Q \in \mathbf{M}, P(\partial)Q = 0\}. \quad (2.27)$$

Lorsque  $P(\partial)Q = 0$ , nous dirons que  $P$  annule ou même "tue"  $Q$ .

Dans le cas  $M = \mathcal{L}_\partial[P]$ , nous noterons l'idéal annulateur simplement  $\mathcal{I}_P$  et dans le cas  $\mathbf{M}(X) = \mathbf{M}(X, Y) \cap \mathbb{Q}[X]$ , nous noterons  $\mathcal{I}_\mathbf{M}(X)$  pour  $\mathcal{I}_{\mathbf{M}(X)}$ .

Remarquons qu'une conséquence de la Proposition 2.1 est que pour  $\mathbf{M}$  un sous-espace homogène et stable par dérivation, nous avons

$$\mathbf{M} = \mathcal{I}_\mathbf{M}^\perp = \{P \in \mathbb{Q}[Z] ; \forall Q \in \mathcal{I}_\mathbf{M}, \langle P, Q \rangle = 0\}, \quad (2.28)$$

où le produit scalaire est celui introduit en (2.1).

Énonçons maintenant un lemme qui saura se montrer bien utile pour l'étude des idéaux annulateurs en un alphabet.

**Lemme 2.13** *Soit  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X, Y)$  un sous-espace de  $\mathbb{Q}[X, Y]$  et  $\mathbf{M}(X)$  son sous-espace composé des polynômes de degré en  $Y$  nul. Nous supposons que  $\mathbf{M}$  est stable par dérivation. Nous avons alors la relation suivante entre les idéaux annulateurs :*

$$\mathcal{I}_\mathbf{M}(X) = \mathcal{I}_\mathbf{M} \cap \mathbb{Q}[X]. \quad (2.29)$$

*Preuve.* L'inclusion  $\mathcal{I} \cap \mathbb{Q}[X] \subseteq \mathcal{I}(X)$  est immédiate. L'inclusion réciproque est obtenue de la façon suivante. Si  $P$  est un élément de  $\mathcal{I}(X)$  et  $Q$  un polynôme dans  $\mathbf{M}(X, Y)$ , on regarde les monômes de  $Q$  en  $Y$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}[X]$ . Ces coefficients sont des éléments de  $\mathbf{M}(X)$  car  $\mathbf{M}$  est supposé stable par dérivation. Donc ces coefficients sont tués par  $P$  et il en est ainsi pour  $Q$  lui-même. ■

L'objet principal de ce paragraphe est l'obtention du résultat suivant, où nous notons  $\mu! = \mu_1! \dots \mu_\ell!$ . Le lemme précédent permet une approche relativement simple de ce résultat.

**Proposition 2.14** *La dimension de  $\mathbf{M}_\mu(X) = \mathbf{M}_\mu(X, Y) \cap \mathbb{Q}[X]$  vérifie l'inégalité suivante*

$$\dim \mathbf{M}_\mu(X) \leq \frac{n!}{\mu!}. \quad (2.30)$$

*Preuve.* Reprenons les notations et la construction introduites dans la section 2.2, en particulier le processus (2.6) associant à tout tableau injectif  $T$  un point  $(a(T), b(T))$  dans  $\mathbb{Q}^{2n}$ , l'orbite ainsi engendrée étant notée  $[\rho_\mu]$ . Comme nous ne considérons que l'alphabet  $X$ , nous considérons la projection  $[\rho_\mu(X)]$  de  $[\rho_\mu]$  sur  $\mathbb{Q}^n$ , i.e. nous associons à tout tableau injectif  $T$  le point  $a(T)$ . Nous procédons de même que dans la section 2.1 en introduisant  $J_{[\rho_\mu(X)]}$  l'idéal annulateur de  $[\rho_\mu(X)]$  ainsi que  $\text{gr}J_{[\rho_\mu(X)]}$  et  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}(X) = (\text{gr}J_{[\rho_\mu(X)]})^\perp$ .

Il est immédiat de voir que deux tableaux injectifs donnent le même point si et seulement si ils ont les mêmes entrées sur chaque ligne. De ce fait le nombre de points de  $[\rho_\mu(X)]$  est le nombre de tableaux croissants sur les lignes, soit  $n!/\mu!$ . Ceci implique, comme observé à la Remarque 2.4 que la dimension de l'espace des harmoniques  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}(X)$  est précisément  $n!/\mu!$ . D'après l'équation (2.28), il ne reste plus alors qu'à prouver l'inclusion suivante :

$$\text{gr}J_{[\rho_\mu(X)]} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{M}_\mu}(X). \quad (2.31)$$

Observons tout d'abord qu'une conséquence du Théorème 2.6 est

$$\text{gr}J_{[\rho_\mu]} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{M}_\mu} = \mathcal{I}_{\Delta_\mu}. \quad (2.32)$$

Ensuite vu que l'espace  $\mathbf{M}_\mu$  est évidemment stable par dérivation, nous pouvons appliquer le Lemme 2.13, d'où :  $\mathcal{I}_{\mathbf{M}_\mu}(X) = \mathcal{I}_{\mathbf{M}_\mu} \cap \mathbb{Q}[X]$ .

Soit alors un polynôme  $P$  dans  $J_{[\rho_\mu]}(X)$ . Comme  $P \in \mathbb{Q}[X_n] \subseteq \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$ ,  $P$  est aussi dans l'idéal annulateur de l'orbite  $[\rho_\mu]$ . Nous en tirons alors

$$h(P) \in \mathcal{I}_{\mathbf{M}_\mu} \implies h(P) \in \mathcal{I}_{\mathbf{M}_\mu} \cap \mathbb{Q}[X_n] = \mathcal{I}_{\mathbf{M}_\mu}(X) \quad (2.33)$$

d'après (2.32). La preuve de (2.31), et donc de (2.30), est ainsi complète.  $\blacksquare$

## 2.4 Première preuve pour les équerres

Nous donnons ici la première preuve de la conjecture  $n!$  dans le cas des partitions en forme d'équerre, qui est due à A. Garsia et M. Haiman [26]. La preuve applique le principe dit d'"expulsion", que nous commençons par exposer dans sa généralité.

### 2.4.1 Principe d'expulsion

**Définition 2.15** *Un sous-espace vectoriel  $\mathbf{M}$  de  $\mathbb{Q}[Z]$ , où  $Z$  est un sous-alphabet de  $(X, Y)$  (et même ici un alphabet quelconque), est un cône s'il est égal à l'ensemble des dérivées partielles de l'un de ses éléments, soit avec la notation introduite en (1.3) :*

$$\mathbf{M} = \mathcal{L}_{\partial}[\Delta] \tag{2.34}$$

pour un élément  $\Delta$  de  $\mathbf{M}$  que l'on qualifera de sommet de  $\mathbf{M}$ . Celui-ci n'est pas unique, mais nous nous permettrons d'appeler "le" sommet un tel polynôme.

L'observation fondamentale est la suivante. Le Théorème 2.6 nous donne l'inclusion (2.8) :

$$\mathbf{M}_{\mu} \subseteq \mathbf{H}_{[\rho_{\mu}]}$$

où  $\mathbf{H}_{[\rho_{\mu}]}$  est l'ensemble des harmoniques associées à une orbite régulière  $[\rho_{\mu}]$  (cf. sections 2.1 et 2.2). Dans ce cas  $\mathbf{H}_{[\rho_{\mu}]}$  est de dimension  $n!$ . Si l'on arrive à prouver que  $\mathbf{H}_{[\rho_{\mu}]}$  est un cône dont le sommet est de même degré que  $\Delta_{\mu}$ , alors on obtient l'égalité dans (2.8) et par conséquent la conjecture  $n!$  pour la partition  $\mu$ .

La question devient alors principalement de montrer que l'espace des harmoniques  $\mathbf{H}_{[\rho_{\mu}]}$  est un cône. Mais comment déterminer si l'espace  $\mathbf{H}_{[\rho]}$  des harmoniques associé à une  $G$ -orbite  $[\rho]$  (nous reprenons les notations générales de la section 2.1) est un cône? Une réponse à cette question est fourni par le remarquable théorème suivant (cf. [29], Theorem 4.2) qui permet de plus de construire une base homogène pour  $\text{gr}\mathbf{J}_{[\rho]}$ .

**Théorème 2.16** *Soit  $a_1 < \dots < a_{|G|}$  un ordre total sur  $[\rho]$ . Supposons de plus que  $n_0 = \max\{\deg P ; P \in \mathbf{R}_{[\rho]}\}$  et que  $\mathcal{B} = \{\Phi_{a_i}\}_{1 \leq i \leq |G|}$  est un ensemble de polynômes vérifiant :*

- (i)  $\Phi_{a_i}(a_j) \begin{cases} = 0 & \text{si } j < i, \\ \neq 0 & \text{si } j = i. \end{cases}$
- (ii)  $|\{\Phi \in \mathcal{B} ; \deg \Phi = i\}| = |\{\Phi \in \mathcal{B} ; \deg \Phi = n_0 \perp i\}|, \forall 0 \leq i \leq n_0.$
- (iii)  $n_0 = \max\{\deg \Phi ; \Phi \in \mathcal{B}\}.$

Alors

1.  $\{h(\Phi) ; \Phi \in \mathcal{B}\}$  est une base de  $\text{gr}\mathbf{R}_{[\rho]}$  ;

2.  $\mathbf{H}_{[\rho]}$  est un cône.

Le nom *principe d'expulsion* est souvent attribué à ce théorème et les polynômes de la famille  $\mathcal{B}$  satisfaisant les hypothèses sont appelés polynômes d'expulsion. L'origine de ce nom sera justifiée dans la preuve au paragraphe 2.4.3.

**Principe 2.17** Si nous nous rappelons alors de la construction de  $\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$  et de l'inclusion (2.8), nous pouvons, comme le fait E. Reiner dans [48], détailler le plan des différents étapes visant à montrer la conjecture  $n!$  via le principe d'expulsion :

1. Imposer un ordre total  $<$  sur l'ensemble  $\mathcal{IT}_\mu$  des tableaux injectifs de forme  $\mu$ . Cet ordre peut bien sûr s'étendre à  $[\rho_\mu]$  en posant  $\rho(T_1) < \rho(T_2) \Leftrightarrow T_1 < T_2$ .
2. Définir un poids  $w : \mathcal{IT}_\mu \rightarrow \{t^r q^s ; r \geq 0, s \geq 0\}$  et poser

$$w_t(T) = r \quad \text{et} \quad w_q(T) = s \quad \text{quand} \quad w(T) = t^r q^s$$

et

$$w_{t,q}(T) = w_t(T) + w_q(T) \quad \text{et} \quad n_0(\mu) = \max\{w_{t,q}(T) ; T \in \mathcal{IT}_\mu\}.$$

Ce poids doit être symétrique, i.e.

$$|\{T \in \mathcal{IT}_\mu ; w_{t,q}(T) = i\}| = |\{T \in \mathcal{IT}_\mu ; w_{t,q}(T) = n_0(\mu) - i\}|, \quad (2.35)$$

pour tout  $0 \leq i \leq n_0(\mu)$ .

3. Construire pour chaque tableau  $T \in \mathcal{IT}_\mu$  un polynôme d'expulsion  $\Phi_T(X, Y)$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (i)  $\Phi_T(\rho(T')) \begin{cases} = 0 & \text{si } T' < T, \\ \neq 0 & \text{si } T' = T. \end{cases}$
- (ii)  $\deg_X(\Phi_T) = w_t(T) \quad \text{et} \quad \deg_Y(\Phi_T) = w_q(T)$ .

4. Vérifier que  $\max\{\deg \Phi ; \Phi \in \mathbf{H}_{[\rho_\mu]}\} = \deg \Delta_\mu = n_0(\mu)$ .

Nous allons d'ici la fin de cette section exposer la preuve de A. Garsia et M. Haiman établissant la conjecture  $n!$  pour les équerres via le principe d'expulsion.

### 2.4.2 Résultats polynomiaux

Avant d'entrer dans le cœur de l'expulsion, nous rappelons dans ce paragraphe des résultats qui sont des identités vérifiées par les polynômes de Macdonald et certaines de leurs dérivées. Nous donnons ces résultats sans preuve. Ces preuves, dans lesquelles manipulations algébriques et récurrence sont les maîtres mots, se trouvent en [26] et [46].

**Définition 2.18** Une partition  $\mu$  de  $n$  est appelée équerre si elle est de la forme  $(1^L, A+1)$  avec  $A$  et  $L$  des entiers tels que  $A+L+1 = n$ . Visuellement,  $\mu$  est composée d'une ligne et d'une colonne, d'où le terme d'équerre :

$$\mu = (5, 1^3) = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} .$$

La colonne est appelée jambe de  $\mu$  et la ligne son bras.

Conformément à (1.40), nous notons  $\tilde{H}_\mu(x; q, t)$  le polynôme de Macdonald renormalisé. Nous introduisons de plus  $\tilde{F}_\mu(q, t) = \partial_{p_1}^n \tilde{H}_\mu(x; q, t)$  où la dérivation par rapport à  $p_1$  est possible vu que le polynôme  $\tilde{H}_\mu(x; q, t)$  est symétrique et que les fonctions puissances  $p_i$  forment une base de l'algèbre  $\Lambda$  des fonctions symétriques (cf. Proposition 1.13).

Le premier résultat nécessaire à notre étude est le suivant.

**Proposition 2.19** Le polynôme  $\tilde{F}_{(1^L, A+1)}(q, t)$  a une composante de degré maximal bihomogène de degré  $\binom{L+1}{2}$  en  $t$  et  $\binom{A+1}{2}$  en  $q$ . De plus, ce polynôme est bisymétrique en  $t$  et  $q$ , i.e. nous avons :

$$t^{\binom{L+1}{2}} q^{\binom{A+1}{2}} \tilde{F}_{(1^L, A+1)}(1/q, 1/t) = \tilde{F}_{(1^L, A+1)}(q, t). \quad (2.36)$$

Un corollaire de l'identité (2.36) est que la spécialisation  $\tilde{F}_{(1^L, A+1)}(t, t)$  possède une suite de coefficients symétrique. Le but est ici d'obtenir la conjecture  $n!$  pour une équerre  $\mu = (1^L, A+1)$  via le principe d'expulsion. Plus précisément, nous voulons construire une base  $\mathcal{B}_{1^L, A+1}$  pour l'espace  $\mathbf{R}_{[\rho]}$  (avec  $[\rho] = [\rho_\mu]$ ) satisfaisant l'égalité suivante

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{1^L, A+1}} t^{\deg b} = \tilde{F}_{(1^L, A+1)}(t, t). \quad (2.37)$$



pour un entier  $j$ , c'est-à-dire en utilisant l'ordre lexicographique sur les permutations. L'idée de la construction de la base  $\mathcal{B}_{(1^L, a+1)}$  est de produire, pour chaque équerre étiquetée  $\pi$  un polynôme  $\Phi_\pi(X, Y)$  tel que

$$\Phi_\pi(a_{\pi'}, b_{\pi'}) = \begin{cases} = 0 & \text{si } \pi' < \pi, \\ = 1 & \text{si } \pi' = \pi. \end{cases} \quad (2.40)$$

Posons alors

$$\mathcal{B}_{(1^L, A+1)} = \{\Phi_\pi(X, Y)\}_\pi. \quad (2.41)$$

Il est clair que (2.40) assure l'indépendance linéaire de la famille  $\mathcal{B}_{(1^L, A+1)}$ . Pour satisfaire aussi la condition (2.37), nous allons construire  $\Phi_\pi(X, Y)$  de telle sorte que sa composante de plus haut degré soit homogène de degré  $\text{inv}(\mathcal{L}(\pi))$  en  $t$  et de degré  $\text{inv}(\mathcal{A}(\pi))$  en  $q$ . C'est justement afin de bien comprendre cette construction qu'intervient le vocabulaire d'"expulsion".

Commençons par remarquer que le facteur linéaire  $x_i \perp \alpha_j$  est différent de zéro en  $(a_\pi, b_\pi)$  si et seulement si  $i$  n'est pas dans la  $j$ -ième ligne de  $\pi$ . Nous exprimerons ceci en disant que  $x_i \perp \alpha_j$  expulse l'étiquette  $i$  en dehors de la ligne  $j$  de  $\mu$ . Nous allons construire notre polynôme  $\Phi_\pi(X, Y)$  comme un produit de facteurs linéaires qui poussent toutes les étiquettes à la place qu'elles occupent dans  $\pi$ . Nous entendons par là que  $(a_\pi, b_\pi)$  sera le premier point de l'orbite pour l'ordre introduit en (2.39) sur lequel aucun des facteurs, donc  $\Phi_\pi$  lui-même ne s'annule. Décrivons maintenant cette construction.

Soit  $i_0$  l'étiquette de  $\pi$  en place  $(0, 0)$  (dans le coin de  $\mu$ ). Notons  $L_{<i_0}$  et  $A_{<i_0}$  l'ensemble des étiquettes inférieures à  $i_0$  se trouvant respectivement dans la jambe et le bras de  $\pi$ . De la même façon nous définissons  $L_{>i_0}$  et  $A_{>i_0}$  comme l'ensemble des étiquettes supérieures à  $i_0$  se trouvant respectivement dans la jambe et le bras de  $\pi$ . La première étape consiste à expulser toutes les étiquettes de  $L_{<i_0}$  hors du bras (la ligne 0) et toutes les étiquettes de  $A_{>i_0}$  hors de la jambe (la colonne 0). Ceci est possible par utilisation du polynôme suivant

$$\psi(X, Y) = \prod_{i \in L_{<i_0}} (x_i \perp \alpha_0) \prod_{i \in A_{>i_0}} (y_i \perp \beta_0). \quad (2.42)$$

Il est alors facile de voir que si  $(a_{\pi'}, b_{\pi'})$  est le premier élément de l'orbite pour l'ordre (2.39) en lequel  $\psi$  ne s'annule pas, alors toutes les étiquettes dans  $L_{<i_0} \cup L_{>i_0}$  se placent en croissant de bas en haut dans la jambe de  $\pi'$  et toutes les étiquettes dans  $A_{<i_0} \cup A_{>i_0}$  se placent en croissant de la droite vers la gauche dans le bras de  $\pi'$ . Pour forcer les étiquettes à occuper la

bonne place, il faut procéder à de nouvelles expulsions. Nous allons illustrer ceci dans le cas d'un exemple, le raisonnement se généralisant sans problème. Prenons

$$\pi = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & & & & \\ \hline 5 & & & & \\ \hline 6 & 4 & 1 & 3 & 7 \\ \hline \end{array} .$$

Alors  $\psi = (x_2 \perp \alpha_0)(x_5 \perp \alpha_0)(y_7 \perp \beta_0)$  et le premier élément de l'orbite non annulé par  $\psi$  est

$$\pi' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & & & & \\ \hline 2 & & & & \\ \hline 6 & 7 & 4 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Nous pouvons alors expulser 5 de la ligne 2 par  $x_5 \perp \alpha_2$  et expulser 7 dans la colonne 4 via  $(y_7 \perp \beta_1)(y_7 \perp \beta_2)(y_7 \perp \beta_3)$ . Le premier point de l'orbite non annulé par le polynôme

$$\phi_1(X, Y) = \psi(X, Y)(x_5 \perp \alpha_2)(y_7 \perp \beta_1)(y_7 \perp \beta_2)(y_7 \perp \beta_3)$$

est associé à l'équerre étiquetée

$$\pi'' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & & & & \\ \hline 5 & & & & \\ \hline 6 & 4 & 3 & 1 & 7 \\ \hline \end{array} .$$

Enfin pour forcer 3 à prendre la place souhaitée, il suffit de l'expulser de la colonne 2. Ainsi  $\pi$  est la première équerre étiquetée en laquelle le polynôme

$$\phi_2(X, Y) = \phi_1(X, Y)(y_3 \perp \beta_2)$$

ne s'annule pas. Nous pouvons alors poser

$$\Phi(X, Y) = \frac{\phi_2(X, Y)}{\phi_2(a_\pi, b_\pi)} .$$

On observe alors aisément que dans le cas général une étiquette  $i$  dans le bras de  $\pi$  à la  $j$ -ième colonne peut être placée ici "de force" en expulsant de la  $j$ -ième colonne toutes les étiquettes supérieures à  $i$  qui sont à droite de  $i$  dans



$\pi$ . Ceci signifie justement que la contribution de l'étiquette  $i$  au degré en  $X$  de  $\Phi_\pi$  est égale au nombre d'inversions occasionnées par  $i$  dans le mot  $\mathcal{A}(\pi)$ . Un raisonnement semblable s'applique aux étiquettes de la jambe de  $\pi$ . Comme les degrés en  $X$  et en  $Y$  du polynôme  $\psi$  défini en (2.42) sont respectivement égaux aux nombres d'inversions causées par  $i_0$  dans  $\mathcal{L}(\pi)$  et  $\mathcal{A}(\pi)$ , nous en déduisons que la composante de degré maximal de  $\Phi_\pi(X, Y)$  est bihomogène de bidegré  $(\text{inv}(\mathcal{L}(\pi)), \text{inv}(\mathcal{A}(\pi)))$ . Ceci nous assure que notre base  $\mathcal{B}_{(1^L, A+1)}$  vérifie (2.37) et prouve ainsi la conjecture  $n!$  pour les équerres.

#### 2.4.4 Cas des équerres généralisées

Il est en théorie possible d'utiliser le principe d'expulsion pour prouver la conjecture  $n!$  dans le cas de partitions de forme quelconque. Cependant, la complexité des polynômes qui accomplissent les expulsions souhaitées augmente considérablement quand on considère des formes plus générales. Par exemple, lorsque l'on passe des équerres aux équerres généralisées, i.e. lorsque l'on rajoute à une équerre la case  $(1, 1)$ , on ne peut plus exécuter les expulsions via des produits de facteurs linéaires. E. Reiner [48] a découvert que dans ce cas certaines des expulsions doivent être réalisées par des fonctions de Schur drapeaux. Ceci lui a permis d'établir la conjecture  $n!$  dans le cas des équerres généralisées, mais la grande complexité de sa preuve a jusqu'à présent été un frein à de nouvelles investigations dans cette voie.

## Chapitre 3

# Bases monomiales et idéaux annulateurs

L'ÉTUDE de l'idéal annulateur  $\mathcal{I}_\mu$  de  $\mathbf{M}_\mu$  est très liée à celle des bases de  $\mathbf{M}_\mu$  composées de dérivées monomiales de  $\Delta_\mu$ . Ce chapitre, qui traite de ces questions, est composé de quatre sections. Après avoir, dans une première section, explicité ce lien, qui se fait par les bases de Gröbner de  $\mathcal{I}_\mu$ , nous introduirons, dans la suivante, les outils pratiques permettant l'étude des idéaux annulateurs, à savoir les opérateurs de sauts. Nous donnons enfin deux applications de ce principe : au cas de  $\mathbf{M}_\mu(X)$ , sous-espace des polynômes de degré nuls en  $Y$  dans la troisième section, et au cas des équerres dans la dernière section.

### 3.1 Principe

#### 3.1.1 Rappels sur les bases de Gröbner

Commençons par quelques rappels sur les bases de Gröbner, qui sont un ingrédient essentiel de cette démarche. Nous nous appuyons sur l'ouvrage de D. Cox, J. Little et D. O'Shea [20].

Plaçons-nous dans l'anneau  $\mathbf{R} = \mathbb{Q}[X] = \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$  des polynômes à coefficients rationnels.

**Définition 3.1** *Un ordre monomial sur  $\mathbf{R}$  est une relation  $>$  sur l'ensemble des monômes  $X^\alpha$  de  $\mathbf{R}$  (ou de façon équivalente sur l'ensemble des vecteurs exposants  $\alpha \in \mathbb{N}^m$ ) satisfaisant :*

(i)  $>$  est un ordre total ;

- (ii)  $>$  est compatible avec la multiplication, i.e. si  $X^\alpha > X^\beta$  alors pour tout monôme  $X^\gamma$ , nous avons  $X^\alpha X^\gamma = X^{\alpha+\gamma} > X^{\beta+\gamma} = X^\beta X^\gamma$  ;
- (iii)  $>$  est un bon ordre, i.e. tout ensemble non vide de monômes a un plus petit élément pour  $>$ .

Pour un ordre monomial  $>$  fixé, nous appellerons monôme dominant d'un polynôme non nul  $P \in \mathbf{R}$  le plus grand monôme apparaissant dans  $P$  relativement à  $>$ . Il sera noté  $LM(P)$ . Le coefficient du monôme dominant sera appelé coefficient dominant.

**Exemple 3.2** Soient  $X^\alpha$  et  $X^\beta$  deux monômes dans  $\mathbf{R}$ . Nous dirons que  $X^\alpha >_{\text{lex}} X^\beta$  si dans la différence  $\alpha \perp \beta \in \mathbb{Z}^m$  le premier terme non nul est positif. L'ordre lexicographique ainsi défini est un ordre monomial.

Nous dirons que  $X^\alpha >_{\text{invlex}} X^\beta$  si dans la différence  $\alpha \perp \beta \in \mathbb{Z}^m$  le dernier terme non nul est négatif. L'ordre lexicographique inverse ainsi défini est un ordre monomial.

Nous dirons que  $X^\alpha >_{\text{grevlex}} X^\beta$  si  $\sum_{i=1}^m \alpha_i > \sum_{i=1}^m \beta_i$ , ou si  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^m \beta_i$  et dans la différence  $\alpha \perp \beta \in \mathbb{Z}^m$  le dernier terme non nul est négatif. L'ordre lexicographique inverse gradué ainsi défini est un ordre monomial.

**Définition 3.3** Fixons un ordre monomial  $>$  sur  $\mathbf{R}$  et considérons un idéal  $I \subset \mathbf{R}$ . Une base de Gröbner de  $I$  (relative à  $>$ ) est un ensemble fini de polynômes  $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset I$  tel que pour tout polynôme non nul  $P \in \mathbf{R}$ ,  $LM(P)$  est divisible par l'un des  $LM(g_i)$  pour  $g_i \in G$ .

Une base de Gröbner est dite réduite si pour  $p, q \in G$ , aucun monôme apparaissant dans  $p$  n'est divisible par  $LM(q)$  et si le coefficient du monôme dominant de tout élément de  $G$  est 1.

Le résultat fondamental est le suivant (cf. par exemple [16]).

**Théorème 3.4** Fixons un ordre monomial  $>$ . Tout idéal  $I \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_m]$  possède une unique base de Gröbner réduite relative à l'ordre  $>$ .

### 3.1.2 Utilisation des bases de Gröbner

Le premier lien entre l'étude de l'espace  $\mathbf{M}_\mu$  et de son idéal annulateur  $\mathcal{I}_\mu$  vient de l'observation suivante : si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes de  $\mathbb{Q}[X, Y]$ , alors  $P(\partial)\Delta_\mu = Q(\partial)\Delta_\mu$  si et seulement si  $P \equiv Q$  modulo  $\mathcal{I}_\mu$ . Supposons maintenant que nous avons une bonne description de l'idéal  $\mathcal{I}_\mu$ .

**Principe 3.5** *Fixons un ordre monomial  $>$  et supposons que nous connaissons une base de Gröbner  $\mathcal{G}_\mu$  de  $\mathcal{I}_\mu$  relativement à cet ordre. Considérons  $\mathcal{M}_\mu$ , l'ensemble des monômes dominants de  $\mathcal{G}_\mu$ , et  $\mathcal{L}_\mu$  l'ensemble des monômes de  $\mathbb{Q}[X, Y]$  non divisibles par l'un des éléments de  $\mathcal{M}_\mu$ . Nous avons alors que :*

$$\tilde{\mathcal{B}}_\mu = \{M(\partial)\Delta_\mu ; M \in \mathcal{L}_\mu\} \quad (3.1)$$

*est une base de  $\mathbf{M}_\mu$ .*

*Preuve.* Commençons par vérifier que  $\tilde{\mathcal{B}}_\mu$  est génératrice de  $\mathbf{M}_\mu$ . Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe des monômes  $M$  tel que  $M(\partial)\Delta_\mu$  ne soit pas engendré par  $\tilde{\mathcal{B}}_\mu$ . Considérons  $M_0$  celui d'entre eux ayant le plus petit monôme dominant pour l'ordre  $>$ . Alors  $M_0$  est sûrement un élément de  $\langle \mathcal{M}_\mu \rangle$  (il n'est pas dans  $\mathcal{L}_\mu$ ). On peut alors le réduire modulo  $\mathcal{I}_\mu$  en monômes strictement plus petits, ce qui est absurde.

Vérifions maintenant que  $\tilde{\mathcal{B}}_\mu$  est linéairement indépendante. Raisonnons encore par l'absurde et supposons que l'on a une relation de dépendance linéaire liant les éléments de  $\tilde{\mathcal{B}}_\mu$ . Ceci revient à donner une relation de dépendance modulo  $\mathcal{I}_\mu$  des monômes de  $\mathcal{L}_\mu$ . Dans cette dernière relation, l'examen du monôme dominant permet de conclure : celui-ci doit être dans  $\mathcal{L}_\mu$  et dans  $\langle \mathcal{M}_\mu \rangle$ , ce qui est absurde. ■

**Remarque 3.6** Si la conjecture  $n!$  est vraie pour la partition  $\mu$ , alors on a l'égalité suivante :

$$\mathcal{I}_\mu = \text{gr } J_{[\rho_\mu]} \quad (3.2)$$

ce qui permet, en calculant le membre de droite de faire de nombreuses expérimentations sur ordinateur en utilisant un logiciel de calcul formel qui permet de faire des manipulations sur les idéaux (Macaulay ou Singular par exemple).

## 3.2 Opérateurs de sauts

### 3.2.1 Présentation et résultats

Dans ce paragraphe, nous allons décrire l'action de certains opérateurs de dérivation sur les polynômes  $\Delta_\mu$  et plus généralement sur les déterminants de diagrammes  $\Delta_L$ . Ceux-ci sont appelés opérateurs de sauts car leur action sur les polynômes se traduit au niveau des diagrammes par des mouvements de cases.

Une différence avec la Définition 1.12 est que nous éviterons l'utilisation de la notation  $p_r$  pour les sommes de puissances par crainte d'une possible confusion avec les biexposants et noterons :

$$P_r(X) = \sum x_i^r. \quad (3.3)$$

Pour des raisons de concision et de clarté, nous n'énoncerons les propositions suivantes que dans le cas d'opérateurs de sauts en  $X$ , mais il est bien évident que des résultats analogues sont valables pour les sauts en  $Y$ . La seule différence concerne les signes pouvant apparaître dans les formules. En effet le choix de l'ordre lexicographique (1.1) est fait de telle sorte que les formules et surtout les preuves sont plus simples dans le cas de sauts en  $X$ .

**Proposition 3.7** *Soit  $L$  un diagramme du réseau carré. Alors pour tout entier  $k \geq 1$  nous avons*

$$P_k(\partial X)\Delta_L(X, Y) = \sum_{i=1}^n \pm \epsilon(L, P_k(i; L)) \Delta_{P_k(i; L)}(X, Y) \quad (3.4)$$

où  $P_k(i; L)$  est le diagramme obtenu en remplaçant le  $i$ -ième biexposant  $(p_i, q_i)$  par  $(p_i \perp k, q_i)$  et le coefficient  $\epsilon(L, P_k(i; L))$  est un entier strictement positif. Le signe apparaissant dans (3.4) est la signature de la permutation qui réarrange la liste des cases obtenues selon l'ordre lexicographique introduit en (1.1).

*Preuve.* La preuve donnée ici est inspirée de celle de F. Bergeron et al. (cf. [10], Proposition I.1).

Si le diagramme  $L$  est formé des cases  $L = \{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\}$ , nous pouvons écrire, en développant la forme déterminantale de  $\Delta_L$  par rapport à la  $j$ -ième ligne :

$$\Delta_L(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_j^{p_i} y_j^{q_i} \cdot A_{i,j} \quad (3.5)$$

où  $A_{i,j}$  est le cofacteur d'indice  $(i, j)$ . En remarquant que ce cofacteur est un polynôme où n'apparaît pas la variable  $x_j$ , nous dérivons (3.5) et nous obtenons :

$$\partial x_j^k \Delta_L(X, Y) = \sum_{i=1}^n c_i^k x_j^{p_i \perp k} y_j^{q_i} \cdot A_{i,j} \quad (3.6)$$

où  $c_i^k = p_i(p_i \perp 1) \cdots (p_i \perp k + 1)$ . En sommant on en déduit alors

$$P_k(\partial X)\Delta_L(X, Y) = \sum_{i=1}^n c_i^k \sum_{j=1}^n x_j^{p_i \perp k} y_j^{q_i} \cdot A_{i,j}. \quad (3.7)$$

On obtient alors le résultat annoncé en reconnaissant dans (3.7) le développement de  $\Delta_{P_k(i;L)}$ . ■

**Remarque 3.8** Le diagramme  $P_k(i; L)$  est le diagramme obtenu en faisant “sauter” de  $k$  pas vers le bas la  $i$ -ième case de  $L$  : son biexposant  $(p_i, q_i)$  est remplacé par  $(p_i \perp k, q_i)$  ce qui correspond effectivement à  $k$  pas vers le bas. Les autres biexposants sont inchangés. Cette dualité entre soustractions sur l’ensemble des biexposants et mouvements des cases des diagrammes est utilisée constamment dans cette étude des opérateurs de sauts, explicitement ou implicitement. Notons à ce sujet que l’appellation opérateur de sauts renvoie simultanément à l’aspect algébrique (opérateur) et combinatoire (sauts) de cette action.

Notons aussi que comme  $\Delta_{L'} \neq 0$  seulement si le diagramme  $L'$  est constitué de  $n$  cases distinctes dans le quadrant positif, nous pouvons omettre dans (3.4) tous les termes sauf ceux relatifs à de tels diagrammes.

**Exemple 3.9** Si nous représentons les trous par des cases croisées, nous avons par exemple :

$$P_2(\partial)\Delta_{\begin{array}{c} \square \\ \square \\ \times \times \end{array}} = 2\Delta_{\begin{array}{c} \square \\ \times \\ \times \end{array}} \perp 6\Delta_{\begin{array}{c} \times \\ \square \\ \times \end{array}}.$$

**Remarque 3.10** D’après la Proposition 1.13, les sommes de puissances engendrent algébriquement l’anneau des polynômes symétriques. Or d’après la proposition précédente, toute somme de puissances de degré non nul tue  $\Delta_\mu$  pour toute partition  $\mu$ . Ceci implique que tout polynôme symétrique sans terme constant est dans l’idéal annulateur de  $\Delta_\mu$  pour toute partition  $\mu$ .

**Proposition 3.11** *Soit  $L$  un diagramme. Alors pour tout entier  $k \geq 1$  nous avons*

$$e_k(\partial X)\Delta_L(X, Y) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \epsilon(L, e_k(i_1, \dots, i_k; L))\Delta_{e_k(i_1, \dots, i_k; L)}(X, Y) \quad (3.8)$$

où  $e_k(i_1, \dots, i_k; L)$  est le diagramme obtenu en remplaçant les biexposants  $(p_{i_1}, q_{i_1}), \dots, (p_{i_k}, q_{i_k})$  par  $(p_{i_1} \perp 1, q_{i_1}), \dots, (p_{i_k} \perp 1, q_{i_k})$  et où le coefficient  $\epsilon(L, e_k(i_1, \dots, i_k; L))$  est un entier strictement positif.

*Preuve.* La preuve est sensiblement la même que celle de la proposition précédente. Nous écrivons

$$e_k(X) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} x_{j_1} \dots x_{j_k}. \quad (3.9)$$

Nous développons alors la forme déterminantale de  $\Delta_L$  par rapport aux lignes  $j_1, \dots, j_k$  pour obtenir l'expression suivante où  $\Delta_L^{i_1, \dots, i_k}$  représente le polynôme du diagramme du réseau carré relatif aux biexposants  $i_1, \dots, i_k$  de  $L$  et  $A_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k}$  le cofacteur :

$$\Delta_L = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \Delta_L^{i_1, \dots, i_k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) A_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k}. \quad (3.10)$$

Nous dérivons alors (3.10) pour obtenir

$$\begin{aligned} \partial(x_{j_1} \dots x_{j_k}) \Delta_L = & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (c_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k} \Delta_{e_k(i_1, \dots, i_k; L)}^{i_1, \dots, i_k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \\ & \times A_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

où  $c_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k}$  est un entier positif. En fait  $c_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k}$  est égal à  $p_{i_1} \dots p_{i_k}$  et ne dépend donc pas de  $j_1, \dots, j_k$ . Nous pouvons par conséquent omettre de noter  $j_1, \dots, j_k$  en indice. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} e_k(\partial X) \Delta_L = & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} (c_{i_1, \dots, i_k} \Delta_{e_k(i_1, \dots, i_k; L)}^{i_1, \dots, i_k}(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \\ & \times A_{i_1, \dots, i_k; j_1, \dots, j_k}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

En reconnaissant dans (3.12) le développement de  $\Delta_{e_k(i_1, \dots, i_k; L)}$ , nous obtenons finalement le résultat annoncé. Le signe apparaissant devant le coefficient  $\epsilon(e_k(i_1, \dots, i_k; L))$  est la signature de la permutation qui réordonne les biexposants obtenus dans l'ordre lexicographique (1.1). En fait cette permutation est toujours l'identité : chaque case reste dans sa colonne et aucune d'elles ne "saute" par-dessus une autre case, l'ordre est ainsi inchangé. Ceci justifie le choix de l'ordre (1.1). ■

### Exemple 3.12

$$e_2(\partial) \Delta_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \hline \end{array}} = 6 \Delta_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}} + 2 \Delta_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}}.$$

**Remarque 3.13** Une observation utile est le fait que dans les Propositions 3.7 and 3.11, le coefficient  $\epsilon(L, L')$  ne dépend que du diagramme original  $L$  et du diagramme final  $L'$ , mais pas de l'opérateur différentiel. Définissons alors clairement ce coefficient : si  $L = \{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\}$  et  $L' = \{(p'_1, q'_1), \dots, (p'_n, q'_n)\}$ ,  $\epsilon$  est donné par la formule suivante :

$$\epsilon(L, L') = \frac{\prod_{i=1}^n p_i! q_i!}{\prod_{i=1}^n p'_i! q'_i!}. \quad (3.13)$$

Ce coefficient est un entier strictement positif qui apparaît (au signe près) comme le coefficient de  $\Delta_{L'}$  dans l'expression de  $P(\partial X)\Delta_L$ , où  $P$  est une somme de puissances ou une fonction symétrique élémentaire ; nous verrons dans la proposition suivante que tel est le cas aussi pour les fonctions symétriques homogènes.

Une autre remarque importante est que l'on doit faire très attention lorsqu'on applique un produit d'opérateurs différentiels. En effet dans ce cas des multiplicités peuvent apparaître dans les formules. Soient  $P(\partial)$  et  $Q(\partial)$  deux opérateurs de dérivation tels que des formules comme (3.4) ou (3.8) soient vérifiées pour  $P(\partial)$  et  $Q(\partial)$  avec  $\epsilon$  donné par (3.13). Nous commençons par observer que  $\epsilon$  est multiplicatif, i.e.

$$\epsilon(L, L') = \epsilon(L, L'')\epsilon(L'', L'), \quad (3.14)$$

pour  $L, L''$  et  $L'$  trois diagrammes. Ainsi le coefficient de  $\Delta_{L'}$  dans le polynôme  $P(\partial)Q(\partial)\Delta_L$  est un multiple (au signe près pour les sommes de puissances) de  $\epsilon(L, L')$ . Cette multiplicité correspond au nombre de choix quant à l'ordre des différents sauts, c'est-à-dire le nombre de diagrammes  $L''$  tels que  $L''$  apparaît dans  $Q(\partial)\Delta_L$  et  $L'$  apparaît dans  $P(\partial)\Delta_{L''}$ . Cette multiplicité sera notée  $c_{P,Q}(L, L')$

Prenons un exemple : si on applique  $e_1(\partial X)e_1(\partial X)$  au déterminant du diagramme  $L = \{(1, 0), (1, 1)\}$ , nous obtenons un unique diagramme  $L' = \{(0, 0), (0, 1)\}$ , avec  $\epsilon(L, L') = 1$ , mais

$$e_1(\partial X)e_1(\partial X)\Delta_L = 2\Delta_{L'}. \quad (3.15)$$

La multiplicité 2 correspond au fait que l'on peut d'abord faire descendre la case (1, 0) et ensuite la case (1, 1) ou procéder dans l'ordre inverse.

Toutes ces observations sont cruciales pour bien comprendre la preuve de la prochaine proposition.

Pour énoncer la proposition suivante, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Pour un diagramme du réseau carré  $L$ , nous notons  $\bar{L}$



son complémentaire dans le quadrant positif (c'est bien sûr un ensemble infini). Nous ordonnons également  $\bar{L} = \{(\bar{p}_1, \bar{q}_1), (\bar{p}_2, \bar{q}_2), \dots\}$  selon l'ordre lexicographique (1.1).

**Proposition 3.14** *Soit  $L$  un diagramme. Alors pour tout entier  $k \geq 1$  nous avons*

$$h_k(\partial X)\Delta_L(X, Y) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \epsilon(L, h_k(i_1, \dots, i_k; L))\Delta_{h_k(i_1, \dots, i_k; L)}(X, Y) \quad (3.16)$$

où  $h_k(i_1, \dots, i_k; L)$  est le diagramme ayant le complémentaire défini de la façon suivante. Les biexposants  $(\bar{p}_{i_1}, \bar{q}_{i_1}), \dots, (\bar{p}_{i_k}, \bar{q}_{i_k})$  du complémentaire  $\bar{L}$  sont remplacés par  $(\bar{p}_{i_1} + 1, \bar{q}_{i_1}), \dots, (\bar{p}_{i_k} + 1, \bar{q}_{i_k})$  et les autres restent inchangés. Le coefficient  $\epsilon(L, h_k(i_1, \dots, i_k; L))$  est l'entier strictement positif donné par la formule (3.13).

*Preuve.* Nous allons prouver cette proposition par récurrence croissante sur  $k$ . Si  $k = 1$ , alors  $h_1 = e_1$  et le résultat est vrai attendu que déplacer une case d'un pas vers le bas est équivalent à déplacer un trou d'une case vers le haut. Supposons le résultat vrai jusqu'à  $k \perp 1$ . Nous utilisons alors le fait (cf. [45]) que  $h_k = h_{k \perp 1}e_1 \perp h_{k \perp 2}e_2 + \dots + (\perp 1)^k h_1 e_{k \perp 1} + (\perp 1)^{k+1} e_k$ .

Chaque terme  $e_l h_{k \perp l}$  pour  $1 \leq l \leq k$  donne une combinaison linéaire de déterminants  $\Delta_{L'}$ , dont les coefficients sont des multiples de  $\epsilon(L, L')$  d'après la Remarque 3.13. Le problème est de calculer la somme de tous ces coefficients afin d'obtenir le résultat de  $h_k(\partial X)\Delta_L$ .

Soit  $L'$  l'un des diagrammes créés par les opérateurs  $e_l h_{k \perp l}$ . Le coefficient de  $\Delta_{L'}$  dans  $e_l(\partial X)h_{k \perp l}(\partial X)$  est égal à  $c_{e_l, h_{k \perp l}}(L, L')\epsilon(L, L')$ . Dans cette preuve nous noterons  $c_{e_l, h_{k \perp l}}(L, L')$  simplement  $c_l(L, L')$ . La question est alors de calculer

$$\sum_{1 \leq l \leq k} (\perp 1)^{l+1} c_l(L, L'). \quad (3.17)$$

Soit  $k' \leq k$  le nombre de trous distincts bougeant entre  $L$  et  $L'$ , et  $d \leq k'$  le nombre d'entre eux qui ont au-dessous d'eux un trou qui bouge. Chacun de ces  $d$  trous doit bouger avec  $h_{k \perp l}(\partial X)$  car le trou au-dessous de lui ne peut monter par  $e_l(\partial X)$  que s'il a une case au-dessus de lui. Par conséquent le choix vient des  $k' \perp d$  autres trous qui peuvent ou monter avec  $h_{k \perp l}(\partial X)$  ou non : on en choisit alors  $k \perp l \perp d$  parmi eux pour monter avec  $h_{k \perp l}(\partial X)$ . On obtient alors

$$c_l(L, L') = \binom{k' \perp d}{k \perp l \perp d} = \binom{k' \perp d}{l \perp (k \perp k')}. \quad (3.18)$$



### 3.2.2 Application aux idéaux annulateurs

Une bonne compréhension de l'action des opérateurs de sauts est la première étape sur le chemin de l'étude des idéaux annulateurs des déterminants  $\Delta_L$ . Nous avons vu à la Remarque 3.10 que tout polynôme symétrique sans terme constant tue  $\Delta_\mu$  pour toute partition  $\mu$ , et plus généralement les polynômes symétriques fournissent de nombreux polynômes annulateurs même dans le cas où il y a des trous. Nous avons par exemple :

$$P_2(\partial)\Delta_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \square \\ \square \\ \hline \end{array}} = 0.$$

Décrivons maintenant comment obtenir des éléments de  $\mathcal{I}_L$  où  $L$  est un diagramme du réseau carré qui sont des fonctions symétriques *partielles*. Nous appellerons ainsi tout polynôme symétrique en un sous-alphabet de  $X_n$  ou  $Y_n$ . Nous noterons ici  $\mathcal{X}$  un sous-alphabet de  $X_n$ ,  $\mathcal{Y}$  le sous-alphabet de  $Y_n$  correspondant (i.e. avec les mêmes indices) et  $\mathcal{X}'$  et  $\mathcal{Y}'$  leurs sous-alphabets complémentaires. Nous noterons de plus à l'aide de  $|\mathcal{Z}|$  le cardinal d'un ensemble de variables  $\mathcal{Z}$ . Nous avons pour but d'obtenir une condition suffisante pour qu'un opérateur symétrique partiel tue le déterminant d'un diagramme donné. L'intérêt de la proposition suivante est qu'elle nous permet de travailler avec autant de variables que de cases, donc d'utiliser tout le matériel décrit au paragraphe (3.2.1).

**Principe 3.18** *Soit  $L$  un diagramme du réseau carré. Soit  $P(\partial\mathcal{X})$  un opérateur différentiel symétrique partiel en l'alphabet  $\mathcal{X}$  de cardinal  $|\mathcal{X}| = k$ . Supposons que  $P(\partial\mathcal{X})$  tue tous les  $\Delta_D$  lorsque  $D$  décrit une partie de  $L$  ayant  $k$  cases. Alors cet opérateur annule  $\Delta_L$ .*

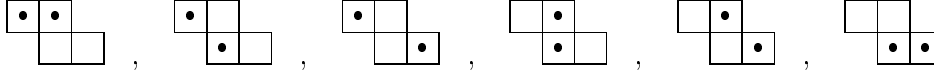
*Preuve.* Si  $\mathcal{X} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ , nous pouvons développer le déterminant du diagramme  $\Delta_L(X; Y)$  par rapport aux lignes  $i_1, i_2, \dots, i_k$  et nous obtenons :

$$\Delta_L(X_n; Y_n) = \sum_{D \subset L, |D|=k} \pm \Delta_D(\mathcal{X}; \mathcal{Y}) \Delta_{L \setminus D}(\mathcal{X}', \mathcal{Y}'), \quad (3.22)$$

où  $L \setminus D$  représente le diagramme constitué des cases de  $L$  qui ne sont pas dans  $D$ . Il est alors clair que si un opérateur tue tous les  $\Delta_D$  il tue aussi  $\Delta_L$ . ■

**Exemple 3.19** Par exemple soit  $L = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1)\}$  et choisissons  $\mathcal{X} \subseteq X = X_4$  tel que  $|\mathcal{X}| = 2$ . Nous avons que  $h_3(\mathcal{X}) \in \mathcal{I}_L$ , car pour toute partie  $D \subset L$  telle que  $|D| = 2$  la Proposition 3.14 nous donne que

$h_3(\partial\mathcal{X})\Delta_D(\mathcal{X};\mathcal{Y}) = 0$ . Nous visualisons cela sur la figure suivante où nous représentons toutes les parties  $D$  de  $L$  en plaçant deux  $\bullet$  de toutes les façons possibles dans  $L$ .



Le nombre maximal de cases de  $\overline{D}$  (cf Proposition 3.14) qui peuvent faire un pas vers le haut sans en rencontrer une autre est deux. Par exemple dans le premier dessin, il y a deux cases en-dessous des deux  $\bullet$ , donc si nous essayons de faire monter trois cases de  $\overline{D}$ , au moins deux vont fatalement se rencontrer. Donc  $h_3(\partial\mathcal{X})\Delta_D(\mathcal{X};\mathcal{Y}) = 0$ . En utilisant cette technique, nous vérifions facilement que  $h_r(\mathcal{X}) \in \mathcal{I}_L$  si  $r \geq 2$  pour  $|\mathcal{X}| = 1$ ,  $r \geq 3$  pour  $|\mathcal{X}| = 2$ ,  $r \geq 3$  pour  $|\mathcal{X}| = 3$  et  $r \geq 2$  pour  $|\mathcal{X}| = 4$ .

### 3.3 Cas d'un alphabet

#### 3.3.1 Cas du Vandermonde

Les résultats énoncés ici concernent le cas le plus simple de la conjecture  $n!$ , à savoir le cas de la partition en colonne :  $\mu = (1^n)$ . Dans ce cas en effet, le déterminant  $\Delta_\mu$  est simplement le déterminant de Vandermonde en  $X$ , noté  $\Delta(X)$  :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n \perp 1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n \perp 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n \perp 1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j \perp x_i).$$

Le fait que la dimension de  $\mathbf{M}_{(1^n)}$  est égale à  $n!$  est un résultat classique. Dès 1944, E. Artin [2] l'obtient en utilisant la théorie de Galois ; dans [57], R. Steinberg l'établit en l'englobant dans l'étude des groupes engendrés par des réflexions, et N. Bergeron et A. Garsia en donnent aussi une étude dans [14]. Nous voulons ici regrouper les résultats les plus importants et en donner une vision très simple et liée au Principe 3.5.

Commençons par introduire la base suivante, dite d'Artin :

$$\mathcal{B}_{(1^n)} = \{\partial X^{\mathbf{a}} \Delta(X) ; \forall i, 0 \leq a_i \leq i \perp 1\}. \quad (3.23)$$

Nous observons immédiatement que le cardinal de  $\mathcal{B}_{(1^n)}$  est  $n!$ . L'observation suivante est que l'indépendance linéaire vient simplement de l'examen des

monômes dominants des éléments de  $\mathcal{B}_{(1^n)}$ , lesquels sont tous distincts. En effet le monôme dominant de  $\partial X^a \Delta(X)$  pour l'ordre lexicographique inverse (cf. Exemple 3.2) correspond à la permutation de  $\mathcal{S}_n$  qui dans le développement de  $\Delta(X)$  donne à  $x_n$  l'exposant  $n \perp 1$ , à  $x_{n \perp 1}$  l'exposant  $n \perp 2$ , et ainsi de suite. C'est donc

$$x_n^{n \perp 1 \perp a_n} x_{n \perp 1}^{n \perp 2 \perp a_{n-1}} \dots x_2^{1 \perp a_2} x_1^0 \quad (3.24)$$

et tous ces monômes sont distincts.

Définissons maintenant l'idéal suivant

$$\tilde{\mathcal{I}}_{(1^n)} = \langle h_{n \perp r}(X'_{(r)}) ; 1 \leq r \leq n \rangle, \quad (3.25)$$

où  $X'_{(r)} = (x_n, \dots, x_{n \perp r})$ . Une application directe de la Proposition 3.14 et du Principe 3.18 nous donne que

$$\tilde{\mathcal{I}}_{(1^n)} \subseteq \mathcal{I}_{(1^n)}. \quad (3.26)$$

En effet si l'on considère  $r + 1$  cases, il y a alors  $n \perp r \perp 1$  trous au plus qui peuvent monter, mais pas  $n \perp r$  comme l'impose  $h_{n \perp r}(X'_{(r)})$ , d'où (3.26).

De plus on observe que le monôme dominant pour l'ordre lexicographique (pas inverse) de  $h_{n \perp r}(X'_{(r)})$  est  $x_{n \perp r}^{n \perp r}$  donc

$$\dim \mathbb{Q}[X]/\tilde{\mathcal{I}}_{(1^n)} \leq \prod_{r=0}^{n \perp 1} (n \perp r) = n! \quad (3.27)$$

et il y a égalité dans (3.27) si et seulement si la description de  $\tilde{\mathcal{I}}_{(1^n)}$  dans (3.25) donne une base de Gröbner de cet idéal. En effet, il y a inégalité stricte si et seulement si en construisant une base de Gröbner de  $\tilde{\mathcal{I}}_{(1^n)}$ , on rajoute des monômes dominants autres que les  $x_{n \perp r}^{n \perp r}$ .

En regroupant tous ces résultats, on obtient :

**Théorème 3.20** *La famille  $\mathcal{B}_{(1^n)}$  est une base de l'espace  $\mathbf{M}_{(1^n)}$  et nous avons l'égalité :*

$$\tilde{\mathcal{I}}_{(1^n)} = \mathcal{I}_{(1^n)}.$$

*Plus précisément l'équation (3.25) donne une base de Gröbner de  $\mathcal{I}_{(1^n)}$ .*

### 3.3.2 Cas général : introduction et construction

Nous étudions ici l'espace  $\mathbf{M}_\mu(X)$ , sous-espace de  $\mathbf{M}_\mu$  constitué des polynômes de degré nul en  $Y$ . Nous avons déjà obtenu, en utilisant les harmoniques des orbites, une borne supérieure pour la dimension de  $\mathbf{M}_\mu(X)$

(cf. Proposition 2.14 :  $\dim \mathbf{M}_\mu(X) \leq n!/\mu!$ ). Nous allons ici compléter cette étude en obtenant une description explicite d'une base de  $\mathbf{M}_\mu(X)$  et une base explicite de l'idéal annulateur  $\mathcal{I}_\mu(X)$ , ces deux objets étant reliés via les bases de Gröbner et le Principe 3.5.

Commençons par construire la famille  $\mathcal{B}_\mu(X)$  dont nous démontrerons qu'il s'agit d'une base de  $\mathbf{M}_\mu(X)$ . La première base de  $\mathbf{M}_\mu(X)$  a été construite dans [14] et [26]. La construction de cette base était récursive et son interprétation en termes de dérivées de  $\Delta_\mu$  non triviale. La construction d'une base directe et composée de dérivées monomiales de  $\Delta_\mu$  fut exposée par l'auteur dans [4]. Cette construction se fait à l'aide de "dessins", qui sont des représentations visuelles des monômes dont nous nous servirons à la section suivante dans le cas des équerres. Nous présentons ici une description en termes de tableaux standard de forme  $\mu$ , qui est une présentation différente de la base construite en [4]. Cette base est une généralisation de la base d'Artin introduite en (3.23) dans le cas du Vandermonde.

Nous commençons par associer à chaque étiquette  $j$  d'un tableau standard  $T$ , un entier positif de la façon suivante. Soit  $(r_j, c_j)$  la position de l'étiquette  $j$  dans  $T$ , et soit  $k$  la plus grande étiquette de  $T$ , telle que  $c_k = c_j + 1$  et  $k < j$ . Nous posons

$$\alpha(j) = \alpha_T(j) = r_j \perp r_k. \quad (3.28)$$

S'il n'y a pas de tel  $k$ , nous posons  $\alpha(j) = r_j + 1$ . Pour l'exemple ci-dessous, la valeur de  $\alpha(k)$  apparaît dans la case du tableau de droite correspondant à la position de  $k$  dans le tableau de gauche.

5				
4	8			
3	6			
1	2	7	9	10

3				
2	2			
1	2			
1	1	1	1	1

Il est clair que si  $T$  est l'unique tableau standard de forme la colonne  $(1^n)$  :

n
⋮
2
1

alors  $\alpha(j) = j$ .

Comme nous l'avons vu à la Proposition 2.11, l'ensemble des dérivées partielles des polynômes de Garnir associés à des tableaux croissants sur les colonnes,  $\mathcal{L}_\partial[\Delta_T(X) ; T \in \mathcal{CI}\mu]$  coïncide avec l'espace  $\mathbf{M}_\mu(X)$ . En utilisant cette caractérisation, nous allons maintenant construire une base pour  $\mathbf{M}_\mu(X)$ . Mais introduisons d'abord quelques notations.

Pour une partition  $\mu$  de  $n$ , notons  $\pi(\mu)$  l'ensemble des partitions de  $n \perp 1$  qui peuvent être obtenues à partir de  $\mu$  en lui enlevant un de ses coins. Pour  $\nu \in \pi(\mu)$ , nous notons  $\mu/\nu$  le coin par lequel  $\nu$  diffère de  $\mu$ . Numérotions  $\nu_1, \dots, \nu_k$ , les partitions dans l'ensemble  $\pi(\mu)$ , ordonnées par ordre croissant du numéro de la colonne du coin  $\mu/\nu_i$ . En d'autres termes, si  $(a_i, b_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sont les coordonnées respectives des cases  $\mu/\nu_i$ , alors  $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ . Tout tableau standard  $T$  de forme  $\mu$  est tel que l'étiquette  $n$  est placée dans un coin  $(a_j, b_j)$  de  $\mu$ . De plus, la valeur de  $\alpha_T(n)$  ne dépend que de la position de ce coin (et de la forme  $\mu$ ), car toutes les autres étiquettes de  $T$  sont inférieures. En notant  $\alpha_j$  la valeur de  $\alpha_T(n)$ , si  $n$  apparaît dans la case  $(a_j, b_j)$  de  $T$ , il est clair que

$$\alpha_j = a_j \perp a_{j+1}. \quad (3.29)$$

**Théorème 3.21** *Pour toute partition  $\mu$  de  $n$ , l'ensemble de polynômes*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu(X) = \{ \partial X^{\mathbf{m}} \Delta_T(X) ; T \in \mathcal{ST}\mu, \mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \\ \text{et } 0 \leq m_i < \alpha_T(i) \} \end{aligned} \quad (3.30)$$

*est une base de l'espace  $\mathbf{M}_\mu(X)$ .*

La fin de cette section est consacrée à la preuve de ce résultat.

**Remarque 3.22** Compte tenu de la Proposition 2.10, nous voyons qu'il est possible d'exprimer la base sous forme de dérivées monomiales de  $\Delta_\mu$ , et d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\mu(X) = \{ \partial X^{\mathbf{m}} \partial Y_T \Delta_\mu(X) ; T \in \mathcal{ST}\mu, \mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \\ \text{et } 0 \leq m_i < \alpha_T(i) \}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec un petit abus dû à la présence de constantes non nulles.

### 3.3.3 Indépendance linéaire

**Proposition 3.23** *La famille  $\mathcal{B}_\mu(X)$  est linéairement indépendante.*

*Preuve.* Nous commençons par prouver par récurrence que la famille  $\mathcal{B}_\mu(X)$  est indépendante, en supposant que c'est vrai pour les partitions ayant au plus  $n \perp 1$  cases. Comme précédemment, pour  $\nu_j \in \pi(\mu)$ , notons  $(a_j, b_j)$  le coin  $\mu/\nu_j$ , avec  $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ , et définissons

$$\mathbf{B}_j = \{ X^{\mathbf{m}} ; T \in \mathcal{ST}_\mu, \ 0 \leq m_i < \alpha_T(i), \ T(a_j, b_j) = n \}. \quad (3.32)$$

D'après (3.29), pour  $X^{\mathbf{m}} \in \mathbf{B}_j$ , le monôme dominant de  $\partial X^{\mathbf{m}} \Delta_T(X)$  (pour l'ordre lexicographique) est de la forme

$$x_n^{a_j \perp m_n} X^{\mathbf{p}} \quad (\text{avec } p_n = 0),$$

pour tout  $0 \leq m_n < a_j \perp a_{j+1}$ . Pour un  $k$  fixé avec  $a_{j+1} < k \leq a_j$ , notre hypothèse de récurrence nous donne que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j,k} = \{ \partial X^{\mathbf{m}} \Delta_T(X) ; T \in \mathcal{ST}_\mu, \ 0 \leq m_i < \alpha_T(i), \\ T(a_j, b_j) = n, \ m_n = a_j \perp k \}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

est indépendant car (pour l'ordre lexicographique), nous avons le développement suivant de  $\partial X^{\mathbf{m}} \Delta_T(X)$ :

$$\partial X^{\mathbf{m}} \Delta_T(X) = x_n^k \partial X^{\mathbf{p}} \Delta_{T'}(X) + \underbrace{\dots}_{\text{termes plus petits}} \quad (3.34)$$

où  $T'$  est la restriction de  $T$  à  $\nu_j$ . Il est alors clair que les ensembles  $\mathcal{B}_{j,k}$  sont mutuellement indépendants donc

$$\mathcal{B}_\mu = \bigcup_{j,k} \mathcal{B}_{j,k} \quad (3.35)$$

est indépendant. ■

### 3.3.4 Énumération

Vérifions ici que l'on a bien :

**Proposition 3.24** *Le cardinal de  $\mathcal{B}_\mu(X)$  est égal à  $n!/\mu!$ .*



*Preuve.* Nous allons montrer par récurrence que

$$|\mathcal{B}_\mu(X)| = \frac{n!}{\mu!}, \quad (3.36)$$

en supposant que (3.36) est vraie pour les partitions  $\nu_j \in \pi(\mu)$ . Par récurrence, il est clair que

$$|\mathcal{B}_{j,k}| = \frac{(n \pm 1)!}{\nu_j!}$$

où  $\mathcal{B}_{j,k}$  est défini en (3.33), d'où

$$|\mathcal{B}_\mu| = \sum_{i=1}^k \alpha_j \frac{(n \pm 1)!}{\nu_j!}.$$

L'équation (3.36) vient alors du fait que

$$n = \sum_{j=1}^k \alpha_j (a_j + 1),$$

car

$$a_j + 1 = \frac{\mu!}{\nu_j!}$$

est la longueur de la ligne de  $\mu$  dans laquelle se trouve le coin  $(a_j, b_j)$ . ■

**Remarque 3.25** Ceci achève, compte tenu de la Proposition 2.14, la preuve du Théorème 3.21. Le paragraphe suivant, via une étude de l'idéal annulateur, permet de compléter la preuve sans référence à la Proposition 2.14, qui utilise les techniques d'harmoniques des orbites.

### 3.3.5 Idéal annulateur et génération

Le but de ce paragraphe est principalement l'étude de l'idéal annulateur  $\mathcal{I}_\mu(X)$  de l'espace  $\mathbf{M}_\mu(X)$ . Cette étude a été menée dans [32], reprise dans [14] en adoptant une approche simplifiée de la construction de Tanisaki [59]. Nous présentons ici une description duale de celle de Tanisaki, comme exposée dans [8] et déduisons la description de Tanisaki par dualité. L'avantage de cette approche est d'être encore plus simple que celle de [14]. Nous profitons de plus ici de toute la puissance du Principe 3.18.

Soit  $\mu$  une partition fixée de  $n$ . Notons  $\mu' = (\mu'_1, \dots, \mu'_{\ell'})$  la partition conjuguée de  $\mu$ . Pour  $1 \leq k \leq n$ , nous définissons

$$\delta_k(\mu) = \mu'_1 + \mu'_2 + \dots + \mu'_k \quad (3.37)$$

avec la convention que  $\mu'_j = 0$  si  $j > \ell'$ .

**Théorème 3.26** *Pour  $\mu$  une partition de  $n$*

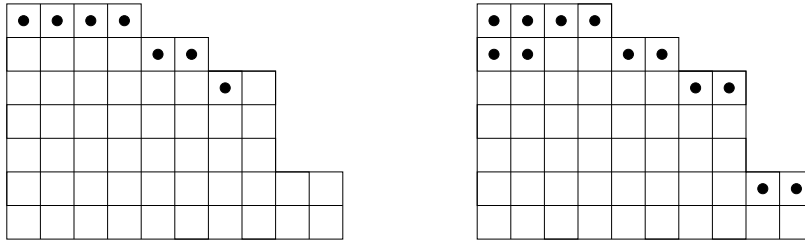
$$\mathcal{I}_\mu(X) = \langle h_r(\mathcal{X}) ; \mathcal{X} \subseteq X_n, |\mathcal{X}| = k, r > \delta_k(\mu) \perp k \rangle. \quad (3.38)$$

La preuve se fait en plusieurs étapes. Appelons  $\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X)$  l'idéal défini au membre de droite de (3.38).

**Proposition 3.27** *Nous avons l'inclusion*

$$\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X) \subseteq \mathcal{I}_\mu(X). \quad (3.39)$$

*Preuve.* Il nous faut montrer que tout polynôme  $h_r(\mathcal{X})$  avec  $\mathcal{X} \subseteq X_n$ ,  $|\mathcal{X}| = k$ ,  $r > \delta_k(\mu) \perp k$  annule tout polynôme de Garnir  $\Delta_T(X)$ . La preuve est rendue très simple grâce aux opérateurs de sauts et au Principe 3.18. En effet, considérons la partition  $\mu$  dans laquelle on choisit  $k$  cases (marquées d'une  $\bullet$  sur la figure suivante).



Les figures ci-dessus donnent les choix des cases fournissant le plus grand nombre de trous pouvant monter, que ce soit dans le cas  $k \leq \mu_1$  (dessin de gauche) ou  $k > \mu_1$  (dessin de droite). On constate que dans les deux cas,  $\delta_k(\mu) \perp k$  trous au plus peuvent monter. Donc  $h_r(\mathcal{X})$  annule  $\Delta_T(X)$ . ■

Afin d'énoncer la proposition suivante, reprenons les notations introduites en [14]. Soit une partition  $\mu$  et une ligne  $i$  du diagramme de Ferrers  $\mu$  ; pour cela  $i \leq \ell \perp 1$  où  $\ell$  est la hauteur (longueur) de  $\mu$ . Notons alors  $\mu^{(i)}$  la partition obtenue en enlevant du diagramme  $\mu$  le plus bas coin situé sur la ligne  $i$  ou au-dessus de celle-ci. Notons alors  $\mathbf{B}_\mu$  l'ensemble de monômes obtenus par la récurrence :

$$\mathbf{B}_\mu = \bigcup_{i=0}^{\ell \perp 1} x_n^i \mathbf{B}_{\mu^{(i)}} \quad (3.40)$$

avec la condition initiale que  $\mathbf{B}_\mu = \{1\}$  si  $\mu = (1)$ . Dans (3.40),  $x_n^i \mathbf{B}_{\mu^{(i)}}$  est l'ensemble des monômes obtenus en multipliant les éléments de  $\mathbf{B}_{\mu^{(i)}}$  par  $x_n^i$ .

**Proposition 3.28** *Nous pouvons réduire tout élément de  $\mathbb{Q}[X_n]$  comme combinaison linéaire de  $\mathbf{B}_\mu(X)$  modulo  $\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X)$ , donc en particulier :*

$$\dim \mathbb{Q}[X]/\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X) \leq n!/ \mu!. \quad (3.41)$$

*Preuve.* La preuve est ici plus simple que celle de la proposition analogue (Proposition 4.2) de [14], car l'utilisation de polynômes symétriques homogènes est plus adaptée que celle de polynômes symétriques élémentaires.

Nous voulons montrer que tout monôme  $X^{\mathbf{P}} = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}$  peut s'écrire

$$X^{\mathbf{P}} = \sum_{m_\mu \in \mathbf{B}_\mu} c_{m_\mu} m_\mu. \quad (3.42)$$

La preuve se fait par une double récurrence, croissante sur  $n$  puis décroissante sur  $p_n$ . Si  $n = 1$ , le résultat est trivial. Supposons-le vrai jusqu'à  $n \perp 1$  (appelons  $H_1$  cette hypothèse). Si  $p_n \geq \mu'_1$  alors  $x_n^{p_n} \equiv 0$  modulo  $\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X)$  car  $h_r(x_n) \in \tilde{\mathcal{I}}_\mu(X)$  dès que  $r > \delta_1(\mu) \perp 1 = \mu'_1 \perp 1$ .

Supposons alors le résultat vrai pour  $p_n \geq i$  (hypothèse  $H_2$ ) et considérons  $X^{\mathbf{P}} = x_1^{p_1} \cdots x_{n\perp 1}^{p_{n\perp 1}} x_n^{i\perp 1}$ . D'après  $H_1$ , on peut écrire ce monôme sous la forme

$$X^{\mathbf{P}} = x_n^{i\perp 1} \sum_{m_\mu \in \mathbf{B}_{\mu^{(i)}}} c_{m_\mu} m_\mu + \sum A(X_{n\perp 1}) x_n^{i\perp 1} h_r(\mathcal{X}) \quad (3.43)$$

où  $A(X_{n\perp 1})$  désigne un polynôme quelconque en  $X_{n\perp 1} = (x_1, \dots, x_{n\perp 1})$  et  $\mathcal{X}$  est tel que  $\mathcal{X} \subset X_{n\perp 1}$ ,  $|\mathcal{X}| = k$  et  $r > \delta_k(\mu^{(i)}) \perp k$ . Observons que

$$\delta_k(\mu^{(i)}) = \begin{cases} \delta_k(\mu) \perp 1 & \text{si } k \geq \mu_i, \\ \delta_k(\mu) & \text{si } k < \mu_i. \end{cases}$$

Si  $k < \mu_i$ , alors

$$r > \delta_k(\mu^{(i)}) \perp k = \delta_k(\mu) \perp k \implies h_r(\mathcal{X}) \in \tilde{\mathcal{I}}_\mu(X).$$

Si maintenant  $k \geq \mu_i$ , alors  $\delta_k(\mu^{(i)}) \perp k = \delta_k(\mu) \perp k \perp 1$  et il faut donc s'intéresser au cas  $r = \delta_k(\mu^{(i)}) \perp k + 1$ .

On utilise

$$h_r(\mathcal{X}) = h_r(\mathcal{X}, x_n) \perp x_n h_{r\perp 1}(\mathcal{X}, x_n) \quad (3.44)$$

pour réécrire le terme problématique de (3.43) sous la forme

$$A(X_{n \perp 1})x_n^{i \perp 1}h_r(\mathcal{X}) = A(X_{n \perp 1})x_n^{i \perp 1}h_r(\mathcal{X}, x_n) \perp A(X_{n \perp 1})x_n^i h_{r \perp 1}(\mathcal{X}, x_n). \quad (3.45)$$

D'après  $H_2$ , le second terme du membre de droite de (3.45) peut s'écrire modulo  $\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X)$  comme combinaison linéaire d'éléments de  $\mathbf{B}_\mu$ . Il nous reste à prouver que dans le premier terme du membre de droite de (3.45), le produit  $x_n^{i \perp 1}h_r(\mathcal{X}, x_n)$  est dans  $\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X)$ .

Pour cela, observons que si  $k \geq \mu'_i$  (ce qui implique  $\mu'_{k+1} < i$ ), alors

$$\delta_k(\mu^{(i)}) = \delta_k(\mu) \perp 1 = \delta_{k+1}(\mu) \perp \mu'_{k+1} \perp 1 > \delta_{k+1}(\mu) \perp i \perp 1,$$

donc

$$r + i \perp 1 = \delta_k(\mu^{(i)}) \perp k + 1 + i \perp 1 > \delta_{k+1}(\mu) \perp (k + 1). \quad (3.46)$$

De plus en itérant (3.44), on a

$$x_n^{i \perp 1}h_r(\mathcal{X}, x_n) = h_{r+i \perp 1}(\mathcal{X}, x_n) \perp \sum_{l=1}^{i \perp 1} h_{r+l}(\mathcal{X})x_n^{i \perp 1 \perp l} \quad (3.47)$$

Nous réglons finalement le cas des deux termes du membre de droite de (3.47)

- pour  $l > 0$ ,  $h_{r+l}(\mathcal{X}) \in \tilde{\mathcal{I}}_\mu(X)$  car  $r + l > r = \delta_k(\mu) \perp k$  ;
- $h_{r+i \perp 1}(\mathcal{X}, x_n) \in \tilde{\mathcal{I}}_\mu(X)$  car  $r + i \perp 1 > \delta_{k+1}(\mu) \perp (k + 1)$  d'après (3.46).

■

*Preuve* (du Théorème 3.26). Achéons maintenant la preuve du Théorème 3.26. L'inclusion (3.39), associée à

$$n!/\mu! = \dim \mathbb{Q}[X]/\mathcal{I}_\mu(X) \leq \dim \mathbb{Q}[X]/\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X) \leq n!/\mu!$$

implique l'égalité  $\tilde{\mathcal{I}}_\mu(X) = \mathcal{I}_\mu(X)$ , donc (3.38). ■

**Remarque 3.29** La preuve du Théorème 3.26 revient à la construction d'une base de Gröbner  $\mathcal{G}_\mu(X)$  pour  $\mathcal{I}_\mu(X)$  relativement à l'ordre lexicographique et à l'application du Principe 3.5. En effet, si l'on observe l'équation (3.44), on constate que l'on réduit modulo  $\mathcal{I}_\mu(X)$  le monôme dominant du terme de gauche en monômes plus petits pour l'ordre lexicographique. En effet soit  $Q \in \mathcal{I}_\mu(X)$ , on le réduit (à zéro car il est dans  $\mathcal{I}_\mu(X)$ ) via le procédé utilisé dans la preuve du Théorème 3.26. Ceci assure que son monôme dominant est divisible par le monôme dominant d'un des polynômes que nous manipulons (la base de Gröbner n'est pas explicitement construite).

**Remarque 3.30** Une application du Théorème 3.26 est l'assertion suivante :

$$\mu \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{M}_\mu(X) \subseteq \mathbf{M}_\lambda(X) \quad (3.48)$$

où l'ordre sur les partitions est l'ordre dominant, introduit en (1.22).

En effet :

$$\mu \leq \lambda \Rightarrow \delta_k(\mu) \geq \delta_k(\lambda) \Rightarrow \mathcal{I}_\mu(X) \supseteq \mathcal{I}_\lambda(X),$$

ce qui implique (3.48) en passant au quotient.

Faisons maintenant le lien avec la description de Tanisaki de  $\mathcal{I}_\mu(X)$ . Tanisaki [59], avec une preuve simplifiée dans [14], montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\mu(X) &= \langle e_r(\overline{\mathcal{X}}) ; \overline{\mathcal{X}} \subseteq X_n, |\overline{\mathcal{X}}| = \overline{k}, r > \overline{k} \perp (n \perp \delta_{n \perp \overline{k}}(\mu)) \rangle \\ &= \langle e_r(\overline{\mathcal{X}}) ; \overline{\mathcal{X}} \subseteq X_n, |\overline{\mathcal{X}}| = n \perp k, r > \delta_k(\mu) \perp k \rangle. \end{aligned} \quad (3.49)$$

À la lumière du lemme suivant, le Théorème 3.26 apparaît comme la description duale de celle de Tanisaki pour l'idéal  $\mathcal{I}_\mu(X)$ . Plus précisément, en utilisant l'idéal

$$\mathcal{I}_{1^n} = \langle e_r(X) : r > 0 \rangle = \langle h_r(X) ; r > 0 \rangle \subseteq \mathcal{I}_\mu(X), \quad (3.50)$$

nous avons :

**Lemme 3.31** Pour  $\mathcal{X} \subseteq X_n$  notons  $\overline{\mathcal{X}} = X_n \setminus \mathcal{X}$ , alors

$$h_r(\mathcal{X}) \equiv (\perp 1)^r e_r(\overline{\mathcal{X}}) \quad \text{mod } \mathcal{I}_{1^n}. \quad (3.51)$$

*Preuve.* Nous savons que  $e_r(\overline{\mathcal{X}})$  et  $h_r(\mathcal{X})$  sont les coefficients de  $t^r$  dans

$$E_{\overline{\mathcal{X}}}(t) = \prod_{i \in \overline{\mathcal{X}}} (1 + tx_i) \quad \text{et} \quad H_{\mathcal{X}}(t) = \prod_{i \in \mathcal{X}} \frac{1}{1 \perp tx_i}$$

respectivement. Comme  $\mathcal{X} \cup \overline{\mathcal{X}} = X$  est une union disjointe, nous avons que  $E_{\overline{\mathcal{X}}}(t)/H_{\mathcal{X}}(\perp t) = E_X(t) \equiv 1 \quad \text{mod } \mathcal{I}_{1^n}$ . Donc  $E_{\overline{\mathcal{X}}}(t) \equiv H_{\mathcal{X}}(\perp t) \quad \text{mod } \mathcal{I}_{1^n}$  et le résultat en découle. ■

### 3.4 Cas des équerres

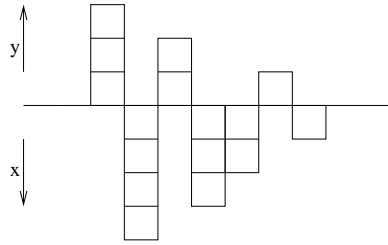
Reprenons le cas des équerres, déjà étudié dans la section 2.4, dont nous reprenons les notations. Soit donc  $\mu$  une partition de  $n$  dont le diagramme de Ferrers est une équerre, i.e.  $\mu = (A + 1, 1^L)$  avec  $A + L + 1 = n$ . Dans ce cas précis, nous allons obtenir une description explicite de l'idéal annulateur  $\mathcal{I}_\mu$  et construire une base pour  $\mathbf{M}_\mu$ , associée à une base de Gröbner de  $\mathcal{I}_\mu$ , en accord avec le principe exposé dans la section 3.1.

### 3.4.1 Construction

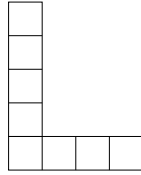
La construction se fait de la façon –très visuelle– suivante. Prenons un axe horizontal sur lequel on suppose qu'il y a  $A + L$  places.

**Définition 3.32** Une forme associée à la partition  $\mu$  est construite de la façon suivante : on choisit  $A$  places sur l'axe pour être les places des colonnes- $y$  et les  $L$  autres seront les places des colonnes- $x$ . Les  $A$  colonnes- $y$  comportent  $A, A - 1, \dots, 1$  cases au-dessus de l'axe et sont rangées par ordre de hauteur décroissante. Les  $L$  colonnes- $x$  comportent  $L, L - 1, \dots, 1$  cases au-dessous de l'axe et sont rangées par ordre de profondeur décroissante.

La figure suivante donne un exemple de forme



associée à la partition :  $\mu = (4, 1^4)$  de  $n = 8$ .



Nous allons maintenant placer des croix dans les colonnes et obtenir ainsi des dessins. Comme nous ne distinguerons pas deux dessins ayant le même nombre de croix dans chaque colonne, nous placerons les croix près de l'axe.

**Définition 3.33** Un dessin est constitué d'une forme dans laquelle sont placées des croix respectant les règles de répartition suivantes :

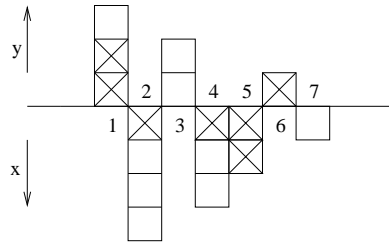
1. le nombre de croix dans une colonne- $x$  de profondeur  $p$  est un entier quelconque  $n_x$  avec  $0 \leq n_x \leq p$  ;
2. le nombre de croix dans les colonnes- $y$  dépend des croix- $x$ . Considérons une colonne- $y$  de hauteur  $h$ . Si elle n'a aucune colonne- $x$  à sa droite, alors le nombre de croix est un quelconque entier  $n_y$ ,  $0 \leq n_y \leq h$ .

Par contre, si la colonne- $y$  a au moins une colonne- $x$  à sa droite, on regarde la première (i.e. la plus grande) de ces colonnes qui soit unie. On appelle unie une colonne n'ayant que des cases blanches (zéro croix) ou que des cases croisées (le nombre de croix est égal à la profondeur de la colonne). Remarquons qu'il y a toujours une colonne unie, au moins celle de profondeur 1. Deux cas se présentent alors :

- si cette colonne- $x$  est toute blanche, on impose au moins une croix dans la colonne- $y$  ;
- si elle est toute croisée, on impose au moins une case blanche dans la colonne- $y$ .

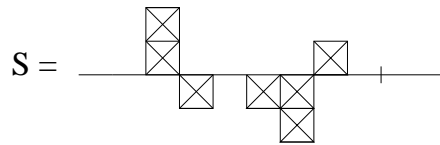
**Remarque 3.34** La famille de dessins que nous venons d'introduire est invariante sous l'opération qui intervertit les cases blanches et les cases croisées. Nous appellerons cet opérateur flip (il est différent du Flip introduit par A. Garsia et M. Haiman dans [26], que nous noterons avec une majuscule).

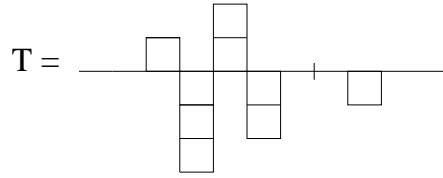
La figure suivante donne un exemple de dessin associé à la forme donnée ci-dessus ; est aussi représenté le système d'indice utilisé : chaque place porte un indice  $i$ , variant de 1 à  $n \perp 1$  de la gauche vers la droite.



Nous noterons  $\mathcal{D}$  l'ensemble des dessins construits via la Définition 3.33. L'intérêt (qui apparaîtra clairement plus tard) de ces dessins est qu'ils sont doubles : une partie croisée, que nous noterons usuellement  $S$  et une partie blanche, que nous noterons  $T$ .

Par exemple, pour le dessin précédent, nous avons :





De même que pour les dessins, nous noterons avec des symboles calligraphiques  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  les ensembles des  $S$  et  $T$  lorsque le dessin  $D$  décrit  $\mathcal{D}$  tout entier.

Après avoir défini les dessins, nous devons introduire les monômes et les opérateurs différentiels qui leur sont associés.

**Définition 3.35** *Le monôme associé à la partie croisée  $S$  d'un dessin est défini comme*

$$M_S(X, Y) = \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{n_x(i)} y_i^{n_y(i)} \quad (3.52)$$

où  $n_x(i)$  et  $n_y(i)$  désignent respectivement le nombre de cases- $x$  et - $y$  en place  $i$  dans  $S$ . Nous définissons de la même manière  $M_T$  et

$$\partial_D = \partial_S = M_S(\partial), \quad \partial_T = M_T(\partial) \quad (3.53)$$

les opérateurs de dérivation associés à  $S$  (nous le noterons souvent  $\partial_D$ ) et à  $T$ .

Dans le cas de l'exemple donné sur les trois dernières figures, nous avons :  $M_S = y_1^2 x_2 x_4 x_5^2 y_6$ ,  $M_T = y_1 x_2^3 y_3^2 x_4^2 x_7$  et  $\partial_D = \partial y_1^2 \partial x_2 \partial x_4 \partial x_5^2 \partial y_6$ .

Nous appliquons alors les opérateurs monomiaux à  $\Delta_\mu$ .

**Définition 3.36** *La famille  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mu$  de polynômes que nous considérons est alors définie de la façon suivante :*

$$\mathcal{B} = \{\partial_D \Delta_\mu ; D \in \mathcal{D}\}. \quad (3.54)$$

**Remarque 3.37** Une remarque importante est donnée par l'identité ci-dessous, valable pour tout dessin  $D = (S, T)$  :

$$\partial_S \partial_T \Delta_\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.55)$$

Ceci est une conséquence récursive de

$$\partial x_i^A \Delta_{(1^A, L+1)}(X, Y) = A! \Delta_{(1^{A-1}, L+1)}(X \setminus \{x_i\}, Y \setminus \{y_i\})$$

et

$$\partial y_i^L \Delta_{(1^A, L+1)}(X, Y) = L! \Delta_{(1^A, L)}(X \setminus \{x_i\}, Y \setminus \{y_i\}).$$



### 3.4.2 Énumération

Nous voulons ici vérifier que la famille  $\mathcal{B}$ , donc la famille de dessins  $\mathcal{D}$  a le bon cardinal, i.e. établir la proposition suivante.

**Proposition 3.38** *Le nombre de dessins  $D \in \mathcal{D}$  est égal à  $n!$ .*

*Preuve.* Comme le nombre de choix pour une colonne- $y$  ne dépend que de la forme du dessin (et non des croix- $x$ ), nous obtenons facilement l'égalité suivante, où  $k_1$  représente le nombre de colonnes- $y$  à droite de la dernière colonne- $x$  :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1+k_2=A} 2 \cdot 3 \cdots (k_1 + 1) \cdot (k_1 + 1) \cdots (k_1 + k_2) \cdot (L + 1)! \binom{k_2 + L + 1}{k_2} \\
&= L(L + 1)A! \sum_{k_2=0}^A \frac{(k_2 + L + 1)!}{k_2!} (A + 1 + k_2) \\
&= (L + 1)!A! \sum_{k_2=0}^A \binom{L + 1 + k_2}{L + 1} \binom{A + 1 + k_2}{1} \\
&= (L + 1)!A! \binom{A + L + 1}{L + 1} = (A + L + 1)!
\end{aligned}$$

grâce à la formule de Chu-Vandermonde ([18], p. 163). ■

### 3.4.3 Preuve que la famille de polynômes engendre $\mathbf{M}_\mu$ et obtention de l'idéal annulateur

Nous montrons ici que la famille  $\mathcal{B} = \{\partial_D \Delta_\mu\}_{D \in \mathcal{D}}$  engendre  $\mathbf{M}_\mu$ . Pour cela, nous étudions attentivement  $\mathcal{I}_\mu$ , l'idéal annulateur de  $\Delta_\mu$ .

#### 3.4.3.a Étude de $\mathcal{I}_\mu$

Pour  $P, Q$  deux polynômes, nous écrivons  $P \equiv Q$  si  $P(\partial)\Delta_\mu = Q(\partial)\Delta_\mu$ , i.e.  $P \perp Q \in \mathcal{I}_\mu$ . Nous notons, conformément à la Définition 1.12,  $h_k$  la  $k$ -ième fonction symétrique homogène. Nous noterons aussi  $\mathcal{X}$  une partie de l'alphabet  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathcal{Y}$  une partie de  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , et  $|\mathcal{X}|$  et  $|\mathcal{Y}|$  leurs cardinaux respectifs. Nous posons également  $\vec{\mathcal{X}} = \prod_{x \in \mathcal{X}} x$  et  $\vec{\mathcal{Y}} = \prod_{y \in \mathcal{Y}} y$ .

Le fait que  $P(\partial)\Delta_\mu = Q(\partial)\Delta_\mu$  équivaut à  $P \perp Q \in \mathcal{I}_\mu$  entraîne que montrer qu'une famille de dérivées de  $\Delta_\mu$  engendre  $\mathbf{M}_\mu$  passe par une bonne

connaissance de l'idéal annulateur  $\mathcal{I}_\mu$ . Nous établissons tout d'abord les propriétés suivantes.

**Proposition 3.39** *Nous avons :*

1. pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i y_i \equiv 0$  ;
2.  $\bar{\mathcal{X}} \equiv 0$  dès que  $|\mathcal{X}| > L$  ;
3.  $\bar{\mathcal{Y}} \equiv 0$  dès que  $|\mathcal{Y}| > A$  ;
4. pour tout polynôme symétrique homogène  $P$  de degré strictement positif,  $P \equiv 0$ .

*Preuve.* La quatrième assertion est claire d'après la Remarque 3.10.

Les autres proviennent d'une observation attentive de la forme déterminantale de  $\Delta_\mu$  quand  $\mu = (A+1, 1^L)$ . Prenons l'exemple suivant :  $\mu = (3, 1^4)$ , i.e.  $A = 2$  et  $L = 4$  alors :

$$\Delta_{(3,1^4)} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 & y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 & y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 & y_5 & y_5^2 \\ 1 & x_6 & x_6^2 & x_6^3 & x_6^4 & y_6 & y_6^2 \\ 1 & x_7 & x_7^2 & x_7^3 & x_7^4 & y_7 & y_7^2 \end{vmatrix} .$$

Nous constatons l'absence de terme  $x_i y_i$ , la présence de termes en  $x_i$  sur  $L = 4$  colonnes et de termes en  $y_i$  sur  $A = 2$  colonnes. Ceci implique les trois premiers points de la proposition dans ce cas particulier et il est aisé de voir que le cas général se traite de même. ■

Nous déduisons alors de ces quatre propriétés via de simples récurrences les propositions suivantes. Les preuves ne sont ici qu'esquissées. La raison en est donnée à la Remarque 3.44

**Proposition 3.40** *Si  $\mathcal{Y}$  est un sous-alphabet de  $Y_n$ ,*

$$h_k(\mathcal{Y}) \equiv 0 \tag{3.56}$$

dès que  $k > 0$  et  $k + |\mathcal{Y}| > n$ .

*Preuve.* Ceci est facilement prouvé par récurrence décroissante sur  $|\mathcal{Y}|$ . Nous avons en effet

$$h_k(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$$

pour tout  $k > 0$ , et pour tout  $y \notin \mathcal{Y}$  la relation suivante :

$$h_k(\mathcal{Y}, y) = h_k(\mathcal{Y}) + yh_{k \perp 1}(\mathcal{Y}, y).$$

■

**Proposition 3.41**

$$\bar{\mathcal{Y}}h_k(\mathcal{Y}') \equiv 0 \tag{3.57}$$

dès que  $k > 0$ ,  $k + |\mathcal{Y}| > A$  et  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}'$ .

*Preuve.* La preuve se fait par récurrence décroissante sur  $|\mathcal{Y}'|$ . ■

**Proposition 3.42**

$$h_k(\mathcal{Y})h_l(\mathcal{X}) \equiv 0 \tag{3.58}$$

dès que  $k > 0$ ,  $l > 0$ ,  $k + l + |\mathcal{Y}| + |\mathcal{X}| \geq 2n$  et  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  ou  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ .

*Preuve.* Nous ne montrons le résultat que lorsque  $k + |\mathcal{Y}| = n$  et  $l + |\mathcal{X}| = n$  (les autres cas sont des conséquences de la Proposition 3.40).

On procède alors par une récurrence initialisée par :

$$h_1(x_1, \dots, x_{n \perp 1})h_1(y_1, \dots, y_{n \perp 1}) \equiv 0$$

qui est une conséquence de la Proposition 3.40 et de  $x_n y_n \equiv 0$ . ■

**Proposition 3.43**

$$h_k(\mathcal{Y})h_l(\mathcal{X}) \equiv 0 \tag{3.59}$$

dès que  $k > 0$ ,  $l > 0$  et

- soit  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  et  $k + l + |\mathcal{Y}| > n$ ,
- soit  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  et  $k + l + |\mathcal{X}| > n$ .

*Preuve.* Elle se fait par récurrence croissante sur  $\alpha = 2n \perp (k + |\mathcal{Y}| + l + |\mathcal{X}|)$ .

Le cas  $\alpha \leq 0$  se réduit à la Proposition 3.42. Supposons alors le résultat vrai jusqu'à  $\alpha \perp 1$  et  $2n \perp (k + |\mathcal{Y}| + l + |\mathcal{X}|) = \alpha > 0$ . Par symétrie, nous considérons le cas  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  et  $k + l + |\mathcal{Y}| > n$ . Si  $l > 1$ , alors pour tout  $x_i \notin \mathcal{X}$ , nous écrivons :

$$\begin{aligned} h_k(\mathcal{Y})h_l(\mathcal{X}) &\equiv h_k(\mathcal{Y})h_l(\mathcal{X}, x_i) \perp x_i h_k(\mathcal{Y})h_{l \perp 1}(\mathcal{X}, x_i) \\ &\equiv h_k(\mathcal{Y})h_l(\mathcal{X}, x_i) \perp x_i h_k(\mathcal{Y}, y_i)h_{l \perp 1}(\mathcal{X}, x_i) \equiv 0 \end{aligned}$$

par récurrence.

Si  $l = 1$ , alors  $|\mathcal{Y}| + k \geq n$  et nous avons pour tout  $x_i \notin \mathcal{X}$ :

$$h_k(\mathcal{Y})h_1(\mathcal{X}) \equiv h_k(\mathcal{Y}, y_i)h_1(\mathcal{X}) \perp y_i h_{k \perp 1}(\mathcal{Y})h_1(\mathcal{X}, x_i).$$

Le premier terme est nul d'après la Proposition 3.40. On prouve alors que le second terme est également nul par récurrence décroissante sur  $|\mathcal{X}|$  (le résultat étant vrai pour  $n$ ), car  $n \perp k \leq |\mathcal{Y}| \leq |\mathcal{X}| \Rightarrow n \perp |\mathcal{X}| \leq k$ . ■

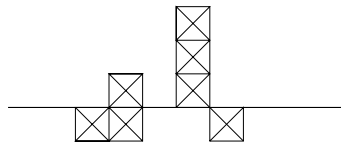
**Remarque 3.44** L'intérêt de ces preuves réside dans le fait qu'elles permettent d'obtenir l'appartenance à  $\mathcal{I}_\mu$  de tous les polynômes décrits dans les propositions précédentes, uniquement à partir des propriétés décrites à la Proposition 3.39. Ce sont les preuves originales que l'on trouve dans [4]. Cependant une meilleure connaissance des opérateurs de sauts transforme les propositions précédentes en applications (presque) immédiates des Propositions 3.11 et 3.14 et du Principe 3.18. Malgré tout cette approche reste utile afin d'obtenir, comme nous le verrons au Théorème 3.46 une description plus simple de l'idéal annulateur dans le cas des équerres.

### 3.4.3.b Application

Nous allons maintenant montrer que toute dérivée monomiale de  $\Delta_\mu$  est une combinaison linéaire de la famille  $\{\partial_D \Delta_\mu\}_{D \in \mathcal{D}}$ .

**Théorème 3.45** *La famille de polynômes  $\{\partial_D \Delta_\mu\}_{D \in \mathcal{D}}$  engendre l'espace  $\mathbf{M}_\mu$ .*

*Preuve.* Nous voulons réduire toute dérivée monomiale dans notre famille. Pour cela, nous commençons par associer tout monôme (de dérivation) à un *paquet de croix* de la même façon que nous avons fait correspondre les dessins et les monômes. Par exemple le paquet associé au monôme  $x_1 x_2 y_2 y_4^3 x_5$  est :



Considérons un paquet  $P$  qui n'est pas un dessin. Observons tout de suite que si notre monôme  $M$  associé au paquet  $P$  possède, comme celui ci-dessus un facteur  $x_i y_i$ , il tue  $\Delta_\mu$  et il n'y a rien à faire. Nous écartons ce cas et

regardons l'anomalie la plus à droite, i.e. la place de  $P$  la plus à droite qui empêche  $P$  d'être un dessin (nous qualifions cette place de coupable).

- Cas 1 : le paquet  $P$  ne peut pas être mis dans un ensemble de colonnes ordonnées (i.e. dans la forme d'un dessin). Ceci donne quatre sous-cas. Supposons que la colonne coupable soit une colonne- $y$ . Nous ne pouvons pas augmenter la taille de notre colonne- $y$  en plaçant une de plus à sa droite. Soit parce que chaque colonne- $y$  à sa gauche a une croix (cas 1a), ou parce qu'il n'y a pas de première colonne- $x$  unie blanche à droite (cas 1b). Si la colonne coupable est une colonne- $x$ , nous obtenons les cas 1c (chaque colonne- $x$  à gauche a au moins une croix) et 1d (il n'y a pas de première colonne- $y$  unie blanche à droite). Comme les règles ne sont pas invoquées ici, il y a symétrie entre  $x$  et  $y$ .
- Cas 2 : le paquet  $P$  peut être placé dans une forme mais les règles ne sont pas satisfaites. Soit pour les cases blanches (cas 2a), soit pour les croix (cas 2b).

Notre objectif est de montrer, en utilisant les propositions énoncées en (3.4.3.a) que le monôme associé à un paquet  $P$  peut être écrit modulo  $\mathcal{I}_\mu$  comme une combinaison linéaire de monômes strictement plus petits pour l'ordre *lexicographique inverse en deux alphabets* défini de la façon suivante

$$X^{\mathbf{p}}Y^{\mathbf{q}} > X^{\mathbf{p}'}Y^{\mathbf{q}'} \iff (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \perp (\mathbf{p}', \mathbf{q}') \in \mathbb{Z}_{(\perp)}^{2n} \quad (3.60)$$

où  $\mathbb{Z}_{(\perp)}^{2n}$  est l'ensemble des  $2n$ -uplets d'entiers dont la dernière composante non nulle est négative. Nous étudions chacun des cas décrits ci-dessus.

- Le cas 1b avec aucune colonne- $x$  à droite est résolu grâce à la Proposition 3.40, de même que le cas 1d avec aucune colonne- $y$  à droite.
- Les cas 1a et 1c sont symétriques et traitées par la Proposition 3.41 : nous notons que la hauteur de la  $h$ -ième colonne- $y$  est  $A \perp h + 1$ . Si elle comporte  $k + 1$  croix, il y a un problème si  $k + h > A$ . Mais alors il est réglé par la Proposition 3.41 : nous prenons  $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} = \{i_1 < \dots < i_h\}$ , les places des colonnes- $y$  à gauche de la colonne  $h$ , chacune d'entre elles ayant au moins une croix. Le monôme  $M$  associé à  $P$  est alors un multiple de

$$\bar{\mathcal{Y}}y_{i_h}^k \equiv \bar{\mathcal{Y}}(y_{i_h}^k \perp h_k(\mathcal{Y}))$$

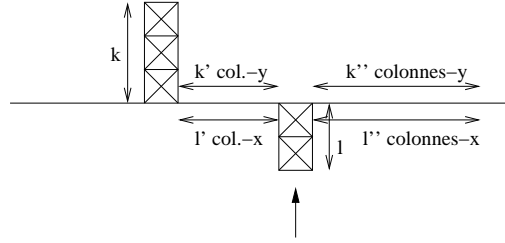
et tous les monômes apparaissant dans le développement du terme de droite sont pour l'ordre (3.60) plus petits que le monôme de gauche.

La compatibilité multiplicative des ordres monomiaux permet alors de conclure.

- Le cas 2a est réglé immédiatement en intervertissant les colonnes impliquées.

Les seuls cas qui restent sont maintenant les cas 1b (resp. 1d) avec une première colonne- $x$  (resp. - $y$ ) croisée et le cas 2b.

- Commençons par le cas 2b.



Nous constatons qu'il y a une anomalie si simultanément :

- $k = k' + k'' + 1$ ,
- $l = l'' + 1$ ,
- il y a une croix dans chacune des  $l'$  colonne- $x$  situées entre les deux colonnes représentées sur la figure.

Posons :

- $\mathcal{Y}$  l'ensemble des places à gauche de la colonne- $y$ , plus la place de la colonne- $y$ , plus les  $l'$  places des colonnes- $x$  entre la colonne- $y$  et la colonne- $x$  sur  $P$ , plus la place de la colonne- $x$  ;
- $\mathcal{X}$  l'ensemble des places à gauche de la colonne- $x$  plus la place de la colonne- $x$  elle-même ;
- $\mathcal{X}'$  l'ensemble des places des  $l'$  colonnes- $x$  entre la colonne- $y$  et la colonne- $x$  de  $P$ .

Nous serons capable d'exprimer le monôme correspondant à ce paquet  $P$  comme combinaison linéaire de monômes strictement plus petits par rapport à l'ordre lexicographique si nous établissons que

$$h_k(\mathcal{Y})h_l(\mathcal{X}) \equiv 0. \quad (3.61)$$

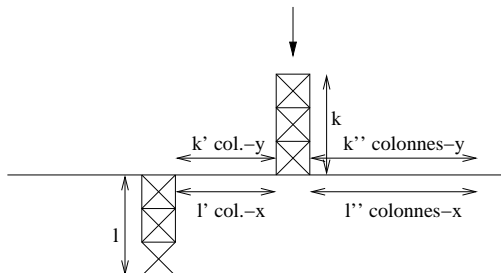
En effet le monôme dominant de  $\bar{\mathcal{X}}^l h_k(\mathcal{Y}) h_l(\mathcal{X})$  (pour l'ordre lexicographique), dans lequel nous enlevons les multiples de  $x_i y_i$  pour tout  $i$ , est un diviseur du monôme associé à  $P$ .

Nous voulons appliquer la Proposition 3.43 avec  $|\mathcal{Y}| = n \perp (k' + k'' + l'' + 1)$  et  $|\mathcal{X}| = n \perp (k'' + l'' + 1)$ . Nous avons  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  et nous calculons :

$$k + l + |\mathcal{Y}| \perp n = 1 > 0.$$

D'où (3.61) et la preuve est complète.

- Examinons maintenant le cas 1d avec une première colonne- $y$  unie croisée.



Dans ce cas une anomalie se produit si :

- $k = k'' + 1$ ,
- $l \geq l' + l'' + 2$ ,
- il y a une croix dans chacune des  $k'$  colonnes- $y$  situées entre les deux colonnes apparaissant sur la figure.

Nous procédons comme dans le cas précédent. Nous voulons encore utiliser la Proposition 3.43 pour montrer que

$$h_k(\mathcal{Y}) h_l(\mathcal{X}) \equiv 0 \tag{3.62}$$

avec  $\mathcal{Y}$  correspondant à toutes les places strictement à gauche de la colonne- $y$  sur le paquet  $P$  et  $\mathcal{X}$  correspondant à toutes les places jusqu'à la colonne- $x$ , plus les places des  $k'$  colonnes- $y$  situées entre la colonne- $x$  et la colonne- $y$ .

Nous voulons appliquer la Proposition 3.43 avec  $|\mathcal{X}| = n \perp (l' + k'' + l'' + 2)$  et  $|\mathcal{Y}| = n \perp (k'' + l'' + 1)$ . Nous avons bien  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$  et nous calculons :

$$k + l + |\mathcal{X}| \perp n \geq 1.$$

D'où (3.62) et ce cas est également réglé.

- Il suffit d'observer que le cas 1b avec une première colonne- $x$  unie croisée se traite comme le cas 2b.

La preuve du Théorème 3.45 est ainsi achevée. ■

### 3.4.3.c Conclusion : application à $\mathcal{I}_\mu$

Nous pouvons déduire de ce qui précède une base explicite pour l'idéal annulateur  $\mathcal{I}_\mu$  quand  $\mu$  est une équerre, car les quatre simples propriétés de la Proposition 3.39 se sont avérées suffisantes pour montrer que notre famille de polynômes est génératrice de  $\mathbf{M}_\mu$ .

**Théorème 3.46** *Si nous notons comme d'habitude  $\langle G \rangle$  l'idéal engendré par une partie  $G$ , alors pour une partition  $\mu$  de  $n$  en forme d'équerre,  $\mu = (A + 1, 1^L)$ , nous avons :*

$$\mathcal{I}_\mu = \left\langle \begin{array}{l} h_i(X_n), 1 \leq i \leq n ; h_i(Y_n), 1 \leq i \leq n ; \\ x_i y_i, 1 \leq i \leq n ; \bar{\mathcal{X}}, |\mathcal{X}| = L + 1 ; \bar{\mathcal{Y}}, |\mathcal{Y}| = A + 1 \end{array} \right\rangle. \quad (3.63)$$

*Preuve.* Notons  $I$  l'idéal défini dans le membre de droite de (3.63). Nous savons d'après la Proposition 3.39 que  $I \subset \mathcal{I}_\mu$ . Nous raisonnons par l'absurde et supposons que  $I \neq \mathcal{I}_\mu$ . Par conséquent il existe un polynôme  $Q$  dans  $\mathcal{I}_\mu \setminus I$ . D'après la preuve du Théorème 3.45, nous pouvons le décomposer sous la forme  $Q = S + R$ , où  $S$  est une combinaison linéaire d'éléments de notre famille et  $R$  un élément de  $I$ . En prenant les opérateurs de dérivation associés et en les appliquant à  $\Delta_\mu$ , on obtient  $S(\partial)\Delta_\mu = 0$ . Comme nous le verrons dans les paragraphes suivants (indépendance linéaire des éléments de  $\mathcal{B}$ : Théorème 3.48), ceci implique que  $S = 0$ , et  $P = Q \in I$ . ■

**Remarque 3.47** La preuve du Théorème 3.45 est équivalente à la construction d'une base de Gröbner  $\mathcal{G}_\mu$  pour  $\mathcal{I}_\mu$  quand  $\mu$  est une équerre et à l'application du Principe 3.5 : notre famille de monômes que l'on applique à  $\Delta_\mu$  pour obtenir  $\mathcal{B}$  correspond aux monômes qui ne sont divisibles par aucun des éléments de  $\mathcal{M}_\mu$ , ensemble des monômes dominants de  $\mathcal{G}_\mu$ . Tout se passe comme à la Remarque 3.29, la construction étant même plus explicite dans ce cas.

### 3.4.4 Preuve de l'indépendance : exposition et réduction du problème

Nous allons maintenant prouver l'indépendance linéaire de notre famille  $\mathcal{B}$ . En effet, même si le fait (cf. section 2.4) que la conjecture  $n!$  est vraie



entraîne que si notre famille est génératrice alors elle est également libre et c'est une base de  $\mathbf{M}_\mu$ , il est intéressant d'obtenir une preuve adaptée aux objets considérés et indépendante d'autres constructions. Le cheminement de la preuve est de plus intéressant en lui-même.

**Théorème 3.48** *La famille  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mu = \{\partial_D \Delta_\mu\}_{D \in \mathcal{D}}$  est linéairement indépendante. C'est donc une base de  $\mathbf{M}_\mu$ .*

La preuve est décomposée en plusieurs étapes et occupera toute la fin de cette section.

**Lemme 3.49**  *$S$  ou  $T$  détermine le dessin  $D$  dont il est tiré.*

*Preuve.* En effet, nous pouvons reconstruire la forme du dessin  $D$  à partir de  $S$  en procédant de la gauche vers la droite. La méthode est la suivante : s'il y a des croix à la place que l'on examine, on complète la colonne en respectant les tailles des colonnes successives. S'il n'y a pas de croix, on regarde les croix- $x$  à droite. Si on peut les placer dans une colonne de moins que celles qui nous restent à placer à droite, alors pour respecter la règle 2 de la Définition 3.33, on place une colonne- $x$  à la place vide considérée. Sinon on place une colonne- $y$ .

La méthode est la même pour  $T$  par invariance de la famille sous l'action de flip. ■

Nous pourrions donc manipuler indifféremment les dessins  $D$  ou leurs parties blanches  $T$  ou croisées  $S$ .

Un des intérêts de la famille de dessins  $D \in \mathcal{D}$  est qu'ils sont doubles : une partie croisée ( $S$ ) et une partie blanche ( $T$ ). Cet intérêt se matérialise dans la définition suivante, inspirée de la Remarque 3.37.

**Définition 3.50** *Soient  $D = (S, T)$  et  $D_1 = (S_1, T_1)$  deux dessins différents ; nous dirons que  $D_1$  est un fils de  $D$  si*

$$\partial_T \partial_{S_1} \Delta_\mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.64)$$

*Si l'on répète ce procédé, on obtient la notion de descendant. Nous noterons  $T + S_1$  l'addition place par place des cases de  $T$  (préalablement croisées) et de celles de  $S_1$ .*

Le point crucial de la preuve du Théorème 3.48 est le lemme suivant.

**Lemme 3.51** *Pour prouver l'indépendance linéaire de  $\mathcal{B}$ , il est suffisant de montrer qu'un dessin donné ne peut pas être son propre descendant, c'est-à-dire que le procédé de filiation ne fait pas de "boucle".*

*Preuve.* Supposons qu'il n'y a pas de boucle et qu'on a une relation de dépendance linéaire non triviale

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} c_S \partial_S \Delta_\mu = 0 \quad (3.65)$$

Nous prenons alors un  $S_0$  qui a un  $c_{S_0}$  non nul et qui n'a pas de fils ayant un coefficient  $c_S$  non nul. On applique alors  $\partial_{T_0}$  à (3.65) et d'après la Définition 3.50 et la Remarque 3.37, on obtient  $c_{S_0} = 0$ , ce qui est absurde. ■

Nous avons ainsi réduit le problème à prouver qu'il n'y a pas de boucle. Il est suffisant de montrer qu'un dessin est différent de tous ses descendants ayant la même forme que lui, i.e. les colonnes- $x$  aux mêmes places. Soit  $D = (S, T)$  un dessin et  $D' = (S', T')$  un descendant de  $D$  ayant la même forme. Nous voulons montrer que  $D \neq D'$ .

### 3.4.5 Preuve de l'indépendance : la notion de complétude

Pour expliquer cette notion de complétude, prenons  $D_1$  un dessin et  $D_2$  un de ses fils.

**Définition 3.52** *Nous définissons sur les places de  $D_2$  une notion de complétude (relative aussi à  $D_1$ ) de la façon suivante. Nous dirons que les  $k$  premières places de  $D_2$  sont complètes si les hauteurs des colonnes- $y$  de  $T_1 + S_2$  dans ces  $k$  places sont  $A, A \perp 1, A \perp 2, \dots$  (ordonnées en lisant de la gauche vers la droite) et si nous avons la même chose pour les colonnes- $x$ .*

Nous voudrions maintenant obtenir une caractérisation plus quantitative de la complétude. Pour cela nous devons introduire de nouvelles définitions.

Nous considérons les parties gauches des dessins  $D_1$  et  $D_2$  constituées des  $k \perp 1$  premières places. Les grandeurs définies ci-après ne sont relatives qu'à ces parties. Nous définissons  $w_x$  (resp.  $w_y$ ) comme le nombre de colonnes- $y$  (resp. - $x$ ) de  $D_1$  ayant été remplacées dans  $D_2$  par une colonne- $x$  (resp. - $y$ ) unie blanche. Nous définissons  $b_x$  (resp.  $b_y$ ) comme le nombre de colonnes- $x$  (resp. - $y$ ) unies croisées de  $D_1$  ayant été remplacées dans  $D_2$  par une colonne- $y$  (resp. - $x$ ). Nous introduisons alors :

$$d = w_x \perp w_y \quad \text{et} \quad d' = b_x \perp b_y. \quad (3.66)$$

Il est bon de noter que  $d$  et  $d'$  sont relatifs aux  $k \perp 1$  premières places.

Comme le problème est symétrique en  $x$  et  $y$  (du moment que l'on n'utilise pas les règles de construction), nous pouvons nous restreindre au cas où

on dérive par rapport à  $y_k$ , i.e. il y a une colonne- $y$  en place  $k$ . Le cas symétrique (en  $x$ ) a une caractérisation similaire, avec des signes opposés pour  $d$  et  $d'$ . Nous introduisons alors les notations suivantes :  $b_1$  (resp.  $b_2$ ) le nombre de cases blanches en place  $k$  dans  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) et  $c_1$  (resp.  $c_2$ ) le nombre de croix. La caractérisation peut alors être énoncée de la façon suivante.

**Caractérisation 3.53** *Soit  $D_1$  un dessin et  $D_2$  un de ses fils et supposons que les  $k \perp 1$  premières places de  $D_2$  sont complètes. Alors, la  $k$ -ième est complète si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. en place  $k$  dans  $D_1$  et  $D_2$  il y a une colonne- $y$  et  $b_2 = b_1 + d$  et  $c_2 = c_1 + d'$  (chacune de ces égalités impliquant l'autre) ;
2. en place  $k$ , il y a une colonne- $x$  croisée dans  $D_1$  (i.e.  $b_1 = 0$ ) et une colonne- $y$  dans  $D_2$ , et  $b_2 = d$  ;
3. en place  $k$ , il y a une colonne- $y$  dans  $D_1$  et une colonne- $x$  blanche dans  $D_2$  ( $c_2 = 0$ ), et  $c_1 = \perp d'$ .

*Preuve.* Pour prouver ce résultat, nous commençons par observer que la Proposition 3.39 interdit la présence simultanée de croix- $x$  et - $y$  : quand  $\mu$  est une équerre,  $\partial x_i \partial y_i \Delta_\mu = 0$ . Nous devons alors analyser les trois cas suivants selon les colonnes apparaissant en place  $k$  :

1.  $D_1$  et  $D_2$  ont une colonne- $y$  ;
2.  $D_1$  a une colonne- $x$  croisée et  $D_2$  une colonne- $y$  ;
3.  $D_1$  a une colonne- $y$  et  $D_2$  une colonne- $x$  blanche.

Nous traitons ces trois cas.

1. Cas 1 : si dans  $T_1 + S_2$  les hauteurs des colonne- $y$  aux  $k \perp 1$  premières places sont  $A, A \perp 1, \dots, A \perp l + 1$  et si notre colonne- $y$  est la  $h$ -ième de  $D_2$ , nous avons  $l = h \perp 1 + d$ . La hauteur de la colonne- $y$  de  $T_1 + S_2$  en place  $k$  est au plus  $A \perp l$ . Mais si nous observons que la hauteur de la  $h$ -ième colonne- $y$  de  $D_2$  est  $A \perp h + 1$ , nous obtenons :

$$b_1 + c_2 \leq A \perp l = A \perp h + 1 \perp d = b_2 + c_2 \perp d.$$

D'où l'inégalité

$$b_2 \geq b_1 + d \tag{3.67}$$

et nous observons que l'égalité dans (3.67) équivaut à la complétude. Comme  $b_2 + c_2 = b_1 + c_1 + d + d'$  par définition de  $d$  et  $d'$ , l'égalité  $c_2 = c_1 + d'$  est liée à la précédente.

2. Cas 2 : il se traite rigoureusement de même que le Cas 1.
3. Cas 3 : le raisonnement est semblable à celui du Cas 1. Si notre colonne- $y$  est la  $h$ -ième de  $D_1$  et si dans les  $k \perp 1$  premières places de  $T_1 + S_2$  les colonnes- $y$  ont pour hauteurs successives  $A, A \perp 1, \dots, A \perp l + 1$ , alors  $l = h \perp 1 \perp d'$ . Comme la hauteur de la colonne- $y$  en place  $k$  dans  $T_1 + S_2$  est au plus  $A \perp l$ , nous déduisons que  $c_1 \geq \perp d'$ , avec l'égalité correspondant à la complétude.

■

**Remarque 3.54** Si les  $k \perp 1$  premières places sont complètes mais pas la  $k$ -ième, nous observons que cela correspond à un accroissement du nombre de cases blanches dans  $D_2$  d'après les inégalités obtenues dans la preuve précédente.

Nous observons aussi que les Cas 2 et 3 ne peuvent pas se produire simultanément car nous ne pouvons pas avoir à la même place une colonne croisée dans  $D_1$  et une colonne blanche dans  $D_2$  puisqu'il y a au moins une case en chaque place de  $T_1 + S_2$ .

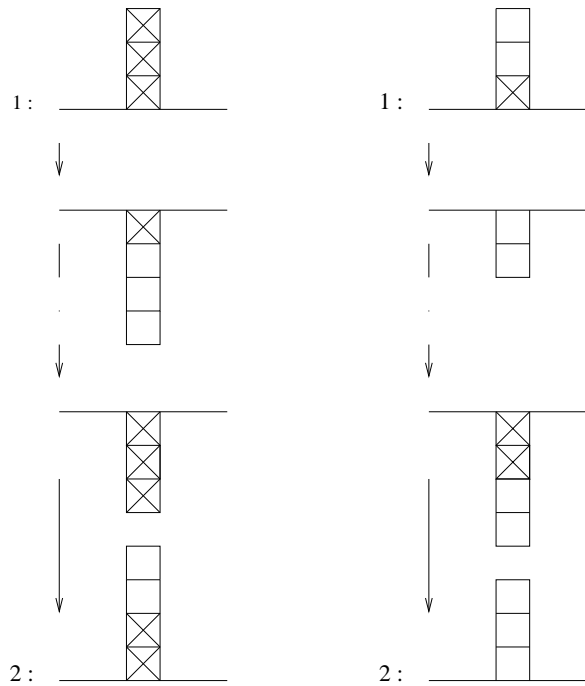
Avec cette caractérisation de la complétude, nous pouvons progresser dans la preuve du Théorème 3.48.

**Lemme 3.55** *Si l'on a complétude sur les  $k$  premières places le long de la chaîne entre  $D$  et  $D'$ , alors la somme des paramètres  $d$  le long de la chaîne entre  $D$  et  $D'$  est nulle, de même que celle des  $d'$  ( $d$  et  $d'$  relatifs cette fois aux  $k$  premières places).*

Pour des raisons pédagogiques, nous commençons par appliquer ce résultat et reportons sa démonstration après le Lemme 3.56.

**Lemme 3.56** *Si nous avons complétude sur les  $k$  premières places entre  $D$  et  $D'$ , alors ces deux dessins sont identiques sur les  $k$  premières places.*

*Preuve.* Nous utilisons le Lemme 3.55. En effet nous notons que si nous conservons une colonne- $x$  ou une colonne- $y$  en place  $k$  le long de la chaîne entre  $D$  et  $D'$ , le résultat est trivial car, d'après le Lemme 3.55, la somme des paramètres  $d$  est égal à zéro. Avec des notations évidentes nous avons alors :  $b' = b + \sum d = b$ . Maintenant si la forme change en place  $k$ , observons les deux cas possibles suivants (par symétrie nous ne considérons que les changements pour une colonne- $y$ ) :



où les flèches simples représentent une seule génération, les flèches pointillées éventuellement plusieurs générations, mais à forme fixée en place  $k$ .

Au vu de la Caractérisation 3.53, nous observons que nous avons dans les deux cas :  $b_2 = b_1 + d$ ,  $c_2 = c_1 + d'$ , comme si nous n'avions pas changé de forme ; la preuve de ceci est immédiate en regardant les  $d$  à gauche et les  $d'$  à droite.

D'après le Lemme 3.55, nous sommes maintenant capable de retirer la condition que la forme ne change pas au niveau des flèches pointillées. En effet, nous commençons par raisonner sur des chaîne du type ci-dessus, puis nous pouvons ignorer le changement de forme. Par itération, on obtient le résultat dans le cas général (analogie avec un chemin de Dick sur lequel on retire successivement les séquences  $\vee$  et  $\wedge$ ). ■

*Preuve* (du Lemme 3.55). Ceci se fait par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 1$ , le résultat est évident. Afin de prouver le résultat pour  $k$ , nous raisonnons par l'absurde et supposons par exemple  $\sum d > 0$ , i.e. d'après la formule (3.66) définissant  $d$ , que notre colonne (on la suppose  $-y$  en  $D$  et  $D'$ ) a changé de forme plus de fois par apparition d'une colonne- $x$  blanche que par apparition d'une colonne- $y$  blanche. Observons la sous-chaîne de la figure suivante.



paire ou paire) et une ligne sud-est est soit l'apparition d'une colonne- $y$  blanche ou la disparition d'une colonne- $y$  croisée. Les lignes pointillées sont placées de la façon suivante. La première est placée au dernier point d'ordonnée nulle. Puis nous avons clairement deux pas nord-est. Nous recommençons alors en prenant 2 comme nouvelle origine des ordonnées.

Supposons qu'entre  $D$  et  $D'$  il y a une seule ascension, i.e. une seule sous-chaîne 1-2-3-4. Si nous vérifions que  $d_0 + d_1 + d_2 > 0$ , où  $d_0$  est la somme des paramètres  $d$  avant l'ascension, alors comme  $\sum d = 0$  entre  $D$  et  $D'$ , nous avons nécessairement des  $d < 0$  après cette séquence, ce qui est impossible sans une disparition d'une colonne- $y$ . C'est ce que nous voulions montrer.

Montrons alors que  $d_0 + d_1 + d_2 > 0$ .

Soit  $b$  le nombre de cases blanches en place  $k$  dans  $D$  alors  $b_1 = b + d_0$ .  
Doù:

$$d_0 + d_1 + d_2 = d_0 + h'_1 \perp d'_1 = b_1 \perp b + h'_1 \perp d'_1 = h_1 + h'_1 \perp b. \quad (3.68)$$

Il est aisé de vérifier que  $h_1 + h'_1 \perp b > 0$ .

Il reste à observer que lorsqu'il y a plusieurs ascensions, le raisonnement précédent reste valide, en considérant la dernière ascension. En effet, il suffit, d'après ce qui précède de remplacer l'égalité  $b_1 = b + d_0$  par  $b_1 \leq b + d_0$ , ce qui ne change rien au résultat.

La preuve du Lemme 3.55 est presque complète. il ne reste plus qu'à observer que les symétries entre  $x$  et  $y$  et entre les cases croisées et blanches nous permettent de traiter sans d'autres développements les cas restants. ■

**Lemme 3.57** *S'il n'y a pas complétude totale le long de la chaîne entre  $D$  et  $D'$  alors  $D \neq D'$ , ce qui implique le Théorème 3.48.*

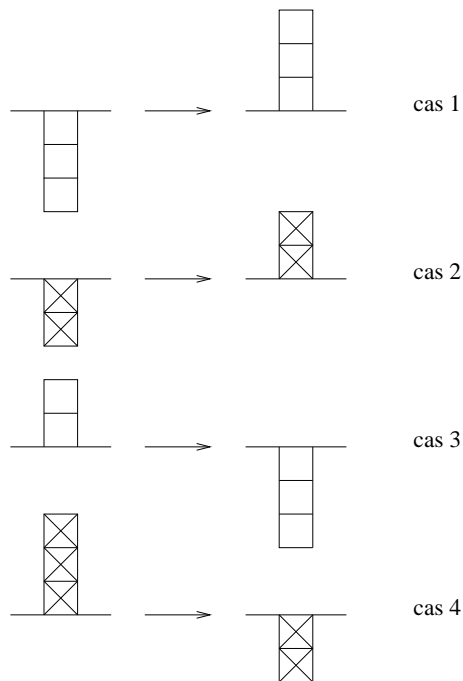
*Preuve.* C'est alors une conséquence facile de la Caractérisation 3.53, du Lemme 3.56 et de la Remarque 3.54. Il suffit de regarder la place la plus à gauche où la complétude n'est pas vérifiée :  $D'$  a plus de cases blanches (et moins de cases croisées) que  $D$  en cette place. ■

### 3.4.6 Preuve de l'indépendance : fin

*Preuve* (du Théorème 3.48, fin). Il suffit maintenant de montrer qu'il y a au moins une génération entre  $D$  et  $D'$  où la complétude n'est pas vérifiée. Nous allons même montrer que chaque génération est non complète.

Notons encore  $D_1 = (S_1, T_1)$  et  $D_2 = (S_2, T_2)$  deux dessins différents,  $D_2$  fils de  $D_1$ . Si  $D_1$  et  $D_2$  ont la même forme, le résultat est évident. Il reste alors à étudier le cas où  $D_1$  et  $D_2$  sont de forme différente. Nous raisonnons par l'absurde et supposons qu'il y a complétude.

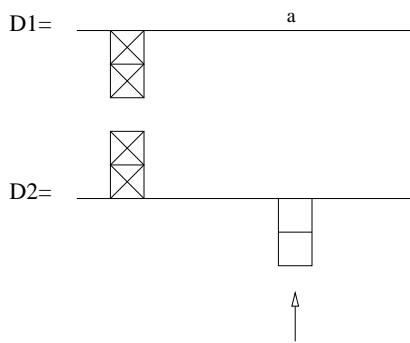
En regardant la place la plus à gauche où la forme change, nous pouvons considérer que la forme change en place 1. Les seuls cas où la non-complétude n'est pas triviale sont les suivants (remarquer qu'ici  $d = d' = 0$ ) :



L'utile remarque suivante nous permet de diviser par deux le nombre de cas à étudier :

**Remarque 3.58**  $D_2$  est un fils de  $D_1$  si et seulement si  $\text{flip}(D_1)$  est un fils de  $\text{flip}(D_2)$ . Nous nous restreignons alors aux Cas 2 et 4.

1. Cas 2 :

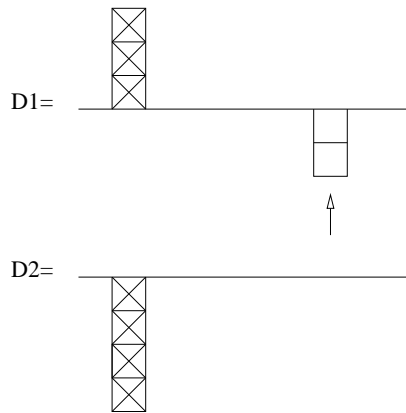




Si en place “a”(correspondant à la première colonne- $x$  unie croisée dans  $D_2$ ), il y a :

- une colonne- $x$  : nous commençons par vérifier qu’en chaque place à gauche de “a” nous avons  $d = 0$  ; puis nous montrons que la colonne- $x$  dans  $D_1$  est plus petite que celle de  $D_2$ , ce qui contredit  $b_2 = b_1 \perp d = b_1$ .
- une colonne- $y$  : nous montrons tout d’abord que dans chaque colonne- $x$  de  $T_1 + S_2$  il y a au moins une case provenant de  $D_1$  et une provenant de  $D_2$ . Ceci est absurde car il n’y a alors pas assez de colonnes- $x$ .

2. Cas 4:



Dans ce cas, si la première colonne- $x$  unie de  $D_1$  est la  $l$ -ième, nous observons que la colonne- $x$  à sa gauche a au moins une case blanche, donc a une contribution dans  $T_1 + S_2$ . Donc à gauche de cette place il y a déjà une colonne- $x$  de profondeur  $L \perp l + 1$  (il y a au moins  $l$  colonnes- $x$  dans  $T_1 + S_2$  à gauche). Ceci est absurde.

■

## Chapitre 4

# Approche récursive et partitions trouées

L'APPROCHE récursive de la conjecture  $n!$  que nous allons présenter vient de l'utilisation de partitions trouées  $\mu/ij$ , i.e. de diagrammes obtenus en enlevant au diagramme de Ferrers d'une partition  $\mu$  une case  $(i, j)$ , que l'on appelle alors "trou". La conjecture analogue de la conjecture  $n!$  assure que la dimension de l'espace  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$  associé à une partition trouée est un multiple de  $n!$ . Elle admet une forme plus précise, en termes de caractéristiques de Frobenius bigraduées. L'aspect récursif vient du déplacement que l'on veut faire subir au trou  $(i, j)$  sous l'action d'opérateurs de sauts. Ceci se traduit au niveau des caractéristiques de Frobenius par une récurrence à quatre termes. Celle-ci est conjecturale et renferme beaucoup d'information sur la nature combinatoire et sur la structure de  $\mathcal{S}_n$ -module bigradué de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$ . Ce chapitre est composé de quatre sections. La première expose les définitions et présente les conjectures. La seconde présente deux cas particuliers : le cas où  $(i, j) = (0, 0)$  et le cas des équerres. Les deux dernières résolvent plusieurs questions dans le cas du sous-espace en un alphabet  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X) = \mathbf{M}_{\mu/ij} \cap \mathbb{Q}[X]$  : la troisième établit la récurrence à quatre termes dans ce cas particulier, via la construction d'une base explicite de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$ , et la quatrième est consacrée à l'étude de l'idéal annulateur de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$ , pour lequel on obtient également une description explicite.

## 4.1 Présentation

### 4.1.1 Définitions et conjectures

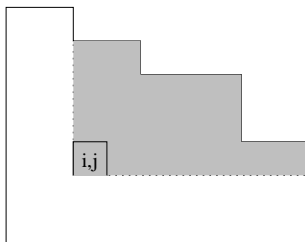
Nous introduisons ici le problème en suivant la présentation de [10].

**Définition 4.1** Si  $\mu$  est une partition de  $n + 1$ , nous noterons  $\mu/ij$  le diagramme obtenu en enlevant la case  $(i, j)$  du diagramme de Ferrers de  $\mu$ . Nous qualifierons  $\mu/ij$  de partition trouée et nous appellerons  $(i, j)$  son trou.

Nous appellerons ombre de la case  $(i, j)$  l'ensemble des cases situées au sens large au nord-est de  $(i, j)$ , i.e.

$$S_\mu(i, j) = \{(i', j') \in \mu ; i \leq i' \text{ et } j \leq j'\}. \quad (4.1)$$

Nous noterons  $s_\mu(i, j)$ , ou même  $s$  s'il n'y a pas ambiguïté, le cardinal de l'ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu$ , i.e. de la partie grisée dans la figure suivante.



Nous noterons  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$ , ou parfois  $\mathbf{M}_{ij}$ , l'espace associé au diagramme  $\mu/ij$ . Pour étudier cet espace, nous commençons par tirer de l'action des opérateurs de sauts (Propositions 3.7 et 3.11) l'utile corollaire suivant.

**Proposition 4.2** Pour toute partition  $\mu$  et toute case  $(i, j) \in \mu$ , nous avons

$$\begin{aligned} P_h(\partial X)P_k(\partial Y)\Delta_{\mu/ij} &= \pm e_h(\partial X)e_k(\partial Y)\Delta_{\mu/ij} \\ &= \pm D_X^h D_Y^k \Delta_{\mu/ij} =_{\text{cte}} \begin{cases} \Delta_{\mu/i+h, j+k} & \text{si } (i+h, j+k) \in \mu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

où nous notons  $D_X = \sum_{i=1}^n \partial x_i$  et  $D_Y = \sum_{i=1}^n \partial y_i$  et où le symbole  $=_{\text{cte}}$  désigne une égalité à une constante multiplicative non nulle près.

On en tire alors le résultat suivant

**Proposition 4.3** *Soit  $\mu$  une partition de  $n+1$ . Alors pour toutes cases  $(i, j)$  et  $(i+h, j+k)$  de  $\mu$ , nous avons :*

$$D_X^h D_Y^k \mathbf{M}_{\mu/ij} = \mathbf{M}_{\mu/i+h, j+k}. \quad (4.3)$$

*En particulier, les inclusions suivantes sont vérifiées :*

$$\mathbf{M}_{\mu/i'j'} \subseteq \mathbf{M}_{\mu/ij} \quad (4.4)$$

*pour toute case  $(i', j')$  dans l'ombre de  $(i, j)$ .*

La conjecture qui simultanément généralise et sert d'interprétation récursive à la conjecture  $n!$  est la suivante.

**Conjecture 4.4** *Pour toute partition  $\mu$  de  $n+1$  et toute case  $(i, j) \in \mu$ , l'espace  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$  vérifie :*

$$\dim \mathbf{M}_{\mu/ij} = s_\mu(i, j).n! \quad (4.5)$$

*où  $s_\mu(i, j)$  est le nombre de cases dans l'ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu$ .*

De même que la conjecture  $n!$  n'est que le pendant dimensionnel de la conjecture  $C = \tilde{H}$ , la Conjecture 4.4 admet comme forme plus précise l'énoncé suivant, qui décrit la structure de  $\mathcal{S}_n$ -module bigradué de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$ . Nous notons, conformément à (1.38) et (1.39),  $C_{\mu/ij}$  la caractéristique de Frobenius bigraduée de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$ . Nous considérons l'ensemble des partitions  $\nu$  obtenues à partir de  $\mu$  en ôtant l'un de ses coins. Nous noterons  $\nu \rightarrow \mu$  pour signifier que  $\nu$  obtenue en enlevant un coin à  $\mu$ . Rappelons de plus (cf. figure page 19) que  $a_\mu(s)$  et  $b_\mu(s)$  désignent respectivement le bras et la jambe de la case  $s$  dans le diagramme de Ferrers  $\mu$ , et introduisons :

$$c_{\mu\nu}(q, t) = \prod_{s \in \mathcal{R}_{\mu/\nu}} \frac{t^{l_\mu(s)} \perp q^{a_\mu(s)+1}}{t^{l_\mu(s)} \perp q^{a_\mu(s)}} \prod_{s \in \mathcal{C}_{\mu/\nu}} \frac{t^{l_\mu(s)+1} \perp q^{a_\mu(s)}}{t^{l_\mu(s)} \perp q^{a_\mu(s)}} \quad (4.6)$$

où  $\mathcal{R}_{\mu/\nu}$  (resp.  $\mathcal{C}_{\mu/\nu}$ ) représente l'ensemble des cases de  $\nu$  qui sont dans la même ligne (resp. colonne) que la case que nous devons retirer de  $\mu$  pour obtenir  $\nu$ .

**Conjecture 4.5** *Pour tout  $(i, j) \in \mu$ , nous avons*

$$C_{\mu/ij}(x; q, t) = \sum_{\rho \rightarrow \tau} c_{\tau\rho}(q, t) \tilde{H}_{\mu \perp \tau + \rho}(x; q, t) \quad (4.7)$$

*où  $\tau$  est le diagramme de Ferrers contenu dans l'ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu$  et le symbole  $\mu \perp \tau + \rho$  représente la partition obtenue en remplaçant  $\tau$  par  $\rho$  dans l'ombre de  $(i, j)$ .*

L'intérêt des partitions trouées est qu'elles fournissent une approche combinatoire des conjectures  $n!$  et  $C = \tilde{H}$ . Le résultat suivant révèle cette interprétation en termes de caractéristique de Frobenius bigraduée, donc au niveau de la structure fine de  $\mathcal{S}_n$ -module des espaces  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$ .

**Théorème 4.6** *La validité de la relation (4.7) pour toute case  $(i, j)$  est équivalente à :*

(i) *la récurrence à quatre termes*

$$C_{\mu/ij} = \frac{t^l \perp q^{a+1}}{t^l \perp q^a} C_{\mu/i,j+1} + \frac{t^{l+1} \perp q^a}{t^l \perp q^a} C_{\mu/i+1,j} \perp \frac{t^{l+1} \perp q^{a+1}}{t^l \perp q^a} C_{\mu/i+1,j+1} \quad (4.8)$$

où on a posé  $l = l_\mu(i, j)$  et  $a = a_\mu(i, j)$  ;

(ii) *la condition aux bords que les termes  $C_{\mu/i,j+1}$ ,  $C_{\mu/i+1,j}$  ou  $C_{\mu/i+1,j+1}$  sont nuls si les cases correspondantes  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j)$  ou  $(i+1, j+1)$  sortent du diagramme  $\mu$ , et sont égaux à  $\tilde{H}_{\mu/i,j+1}$ ,  $\tilde{H}_{\mu/i+1,j}$  ou  $\tilde{H}_{\mu/i+1,j+1}$  quand la case correspondante est un coin de  $\mu$ .*

Nous renvoyons à [10], Theorem I.1 pour une preuve (élémentaire) de ce théorème.

#### 4.1.2 Borne supérieure pour la dimension de $\mathbf{M}_{\mu/ij}$

La première information soutenant la Conjecture 4.4 est le résultat suivant.

**Théorème 4.7** *Pour toute partition  $\mu$  de  $n+1$  et toute case  $(i, j) \in \mu$ , nous avons*

$$\dim \mathbf{M}_{\mu/ij} \leq s_\mu(i, j) \cdot n!. \quad (4.9)$$

*De plus, si l'égalité est vérifiée,  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$  est alors la somme directe de  $s_\mu(i, j)$  représentations régulières à gauche de  $\mathcal{S}_n$ .*

*Preuve.* La preuve donnée ici est inspirée de celle de [10], Theorem 4.3.

Nous réutilisons le procédé défini en (2.6) qui à un tableau  $T$  de forme  $\mu$  associe un point  $\rho(T) = (a(T), b(T))$  dans  $\mathbb{Q}^{2m}$  où  $m = |\mu|$ . Ici nous avons  $|\mu| = n+1$  et nous n'utilisons que les tableaux injectifs de forme  $\mu$  tels que l'étiquette  $n+1$  soit placée dans l'ombre de la case  $(i, j)$ . Notons  $\mathcal{T}_{\mu/ij}$  l'ensemble de ces tableaux qui est clairement de cardinal  $s_\mu(i, j) \cdot n!$ . Considérons à présent  $[\rho_{\mu/ij}]$  qui est par définition l'ensemble des points de  $\mathbb{Q}^{2n}$  obtenu en ne gardant, pour tout tableau  $T$  de  $\mathcal{T}_{\mu/ij}$ , que les  $n$  premières

entrées de  $a(T)$  et les  $n$  premières entrées de  $b(T)$ . Notons que deux tableaux distincts dans  $\mathcal{T}_{\mu/ij}$  donnent des points distincts dans  $[\rho_{\mu/ij}]$  de telle sorte que cet ensemble est composé de  $s_{\mu}(i, j) \cdot n!$  points de  $\mathbb{Q}^{2n}$ .

Nous procédons alors de même que dans la section 2.2 et nous introduisons  $J_{[\rho_{\mu/ij}]}$ ,  $\text{gr}J_{[\rho_{\mu/ij}]}$  et  $\mathbf{H}_{[\rho_{\mu/ij}]}$  l'idéal annulateur dans  $\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$  de l'ensemble  $[\rho_{\mu/ij}]$ , l'idéal gradué associé et l'espace des harmoniques correspondant. Cet espace est un multiple de la représentation régulière à gauche et sa dimension est le cardinal de  $[\rho_{\mu/ij}]$ , à savoir :

$$\dim \mathbf{H}_{[\rho_{\mu/ij}]} = s_{\mu}(i, j) \cdot n!. \quad (4.10)$$

Il nous reste donc à montrer que

$$\mathbf{M}_{\mu/ij} \subseteq \mathbf{H}_{[\rho_{\mu/ij}]}. \quad (4.11)$$

Pour ceci, introduisons l'idéal suivant :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\partial x_{n+1}^i \partial y_{n+1}^j \Delta_{\mu}} \cap \mathbb{Q}[X_n, Y_n]. \quad (4.12)$$

**Lemme 4.8** *Nous avons l'égalité suivante :*

$$\mathcal{I}_{\Delta_{\mu/ij}} = \mathcal{I}. \quad (4.13)$$

*Preuve.* Si nous développons la forme déterminantale de  $\Delta_{\mu}$  (équation (1.2)) par rapport à la dernière ligne, nous pouvons écrire :

$$\Delta_{\mu}(X_{n+1}, Y_{n+1}) = \sum_{(i,j) \in \mu} \pm x_{n+1}^i y_{n+1}^j \Delta_{\mu/ij}(X_n, Y_n). \quad (4.14)$$

En dérivant (4.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial x_{n+1}^i \partial y_{n+1}^j \Delta_{\mu}(X_{n+1}, Y_{n+1}) &= \pm i! j! \Delta_{\mu/ij}(X_n, Y_n) \\ &+ \sum_{\substack{(i',j') \in \mu \setminus \{(i,j)\} \\ i' \geq i \text{ et } j' \geq j}} x_{n+1}^{i' \pm i} y_{n+1}^{j' \pm j} c_{i',j'} \Delta_{\mu/i'j'}(X_n, Y_n) \end{aligned} \quad (4.15)$$

où les  $c_{i',j'}$  sont des constantes rationnelles. On en déduit alors l'égalité (4.13) car :

- $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_{\Delta_{\mu/ij}}$  : soit  $P$  un polynôme dans  $\mathcal{I}$ . Ceci signifie que  $P$  tue le terme de gauche de (4.15). Il suffit alors de prendre  $x_{n+1} = 0$  et  $y_{n+1} = 0$  pour voir que  $P$  tue  $\Delta_{\mu/ij}(X_n, Y_n)$ . Donc  $P$  est dans  $\mathcal{I}_{\Delta_{\mu/ij}}$ .

- $\mathcal{I}_{\Delta_{\mu/ij}} \subseteq \mathcal{I}$ : soit  $P$  un polynôme dans  $\mathcal{I}_{\Delta_{\mu/ij}}$ . Par (4.3),  $P$  tue tous les termes de droite dans (4.15); donc il tue le terme de gauche. Ceci implique  $P \in \mathcal{I}$ .

**Lemme 4.9** *Nous avons l'inclusion*

$$\text{gr}J_{[\rho_{\mu/ij}]} \subseteq \mathcal{I}. \quad (4.16)$$

*Preuve.* Soit  $P \in \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$  un élément de l'idéal  $J_{[\rho_{\mu/ij}]}$ , et définissons le polynôme

$$Q(X_{n+1}, Y_{n+1}) = P(X_n, Y_n) \prod_{i'=0}^{i \perp 1} (x_{n+1} \perp \alpha_{i'}) \prod_{j'=0}^{j \perp 1} (y_{n+1} \perp \beta_{j'})$$

où nous reprenons les notations de (2.6). Le polynôme  $Q$  doit forcément s'annuler sur l'ensemble de l'orbite  $[\rho_{\mu}]$ . En effet,  $P$  s'annule sur  $[\rho_{\mu/ij}]$  et le produit des deux autres facteurs s'annulent sur le reste de  $[\rho_{\mu}]$ . Donc en prenant les composantes homogènes de plus haut degré :

$$h(Q) = x_{n+1}^i y_{n+1}^j h(P) \in \text{gr}J_{[\rho_{\mu}]}.$$

Ceci implique que  $x_{n+1}^i y_{n+1}^j h(P)$  tue  $\Delta_{\mu}$ , ce que l'on peut écrire sous la forme

$$h(P)(\partial) \partial x_{n+1}^i \partial y_{n+1}^j \Delta_{\mu} = 0. \quad (4.17)$$

On peut alors lire (4.17) ainsi :  $h(P) \in \mathcal{I}_{\partial x_{n+1}^i \partial y_{n+1}^j \Delta_{\mu}}$ . Vu que  $P$  est dans  $\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$  et d'après la Définition 4.12, nous en déduisons (4.16). ■

Il suffit alors de regrouper les Lemmes 4.8 et 4.9 et d'utiliser la Proposition 2.1 pour obtenir (4.11). Ceci achève la preuve du Théorème 4.7. ■

## 4.2 Deux cas particuliers

### 4.2.1 Cas de $\mu/00$

**Proposition 4.10 ([10], Lemma 1.1)** *Soit  $\mu$  une partition de  $n+1$  et  $\mathcal{P}$  une famille de polynômes de  $\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$ . Alors*

$$\mathcal{B}_{\mu} = \{b(\partial)\Delta_{\mu}(X_{n+1}, Y_{n+1}) ; b \in \mathcal{P}\} \quad (4.18)$$

est une base de  $\mathbf{M}_\mu$  si et seulement si

$$\mathcal{B}_{\mu/00} = \{b(\partial)\Delta_{\mu/00}(X_n, Y_n) ; b \in \mathcal{P}\} \quad (4.19)$$

est une base de  $\mathbf{M}_{\mu/00}$ . En particulier la Conjecture 4.4 est vraie pour  $\mu/00$  si et seulement si la conjecture  $n!$  est vraie pour  $\mu$ .

*Preuve.* En appliquant le Lemme 4.8 pour  $(i, j) = (0, 0)$ , nous avons que

$$\mathcal{I}_{\Delta_{\mu/00}} = \mathcal{I}_{\Delta_\mu} \cap \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$$

ce qui nous permet de conclure. ■

### 4.2.2 Cas des équerres

**Proposition 4.11** *La Conjecture 4.4 est vraie quand  $\mu$  est une équerre  $\mu = (A + 1, 1^L)$  et  $(i, j)$  une case quelconque de  $\mu$ .*

*Preuve.* La Proposition 4.10 nous permet de ne considérer que le cas où le trou ne se trouve pas en  $(0, 0)$ . Par symétrie, nous ne considérons que le cas où  $j > 0$ . Notons  $\nu$  la partition  $(A, 1^L)$  et  $\mathcal{M}_\nu$  l'ensemble de monômes construit dans la section 3.4 tel que

$$\mathcal{B}_\nu = \{b_\nu(\partial)\Delta_\nu ; b_\nu \in \mathcal{M}_\nu\} \quad (4.20)$$

est une base de  $\mathbf{M}_\nu$ . Nous allons montrer que

$$\mathcal{B}_{\mu/0j} = \{b_\nu(\partial)D_Y^h \Delta_{\mu/0j} ; b_\nu \in \mathcal{M}_\nu, 0 \leq h \leq A \perp j\} \quad (4.21)$$

est une base de  $\mathbf{M}_{\mu/0j}$ , ce qui prouve bien la Proposition 4.11 car  $s_\mu(0, j) = A \perp j + 1$ . D'après le Théorème 4.7, il suffit de montrer l'indépendance linéaire de la famille  $\mathcal{B}_{\mu/0j}$ . Raisonnons alors par l'absurde et supposons que nous ayons une relation de dépendance linéaire non triviale entre les éléments de  $\mathcal{B}_{\mu/0j}$  :

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mu/0j}} c_b \cdot b = 0. \quad (4.22)$$

Considérons  $h_0$  le plus petit entier entre 0 et  $A \perp j$  tel qu'il existe un  $c_b$  non nul relatif à un élément  $b = b_\nu(\partial)D_Y^{h_0} \Delta_{\mu/0j}$ . On applique alors à (4.22) l'opérateur  $D_Y^{A \perp j \perp h_0}$ . Comme

$$D_Y^{A \perp j \perp h_0} b_\nu(\partial)D_Y^h \Delta_{\mu/0j} =_{\text{cte}} \begin{cases} b_\nu(\partial)\Delta_\nu & \text{si } h = h_0, \\ 0 & \text{si } h > h_0, \end{cases}$$



on obtient une relation de dépendance linéaire entre les éléments de  $\mathcal{B}_\nu$ , ce qui est absurde. ■

**Remarque 4.12** Il est immédiat de voir que ce raisonnement s'applique dès que l'ombre de  $(i, j)$  est réduite à un bras ou une jambe.

### 4.3 Résolution en un alphabet

Nous allons maintenant étudier le sous-espace  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X) = \mathbf{M}_{\mu/ij} \cap \mathbb{Q}[X]$  et montrer que dans ce cas la construction explicite d'une base permet de démontrer la formule (4.8), ou plutôt la formule obtenue à partir de (4.8) en ne considérant qu'un seul alphabet, i.e. en prenant  $q = 0$ . Ce travail a été réalisé en collaboration avec F. Bergeron et N. Bergeron (cf. [5]).

#### 4.3.1 Construction de la base

Le résultat central de cette section est la construction d'une base explicite pour l'espace  $\mathbf{M}_{\mu/i,j}(X)$ , où  $\mu$  est une partition quelconque fixée de  $n + 1$ , et  $(i, j)$  une case quelconque du diagramme de Ferrers de  $\mu$ . Commençons par expliquer la construction de cette base, qui utilise l'étude de l'espace  $\mathbf{M}_\mu(X)$  faite au paragraphe 3.3.2, dont nous reprenons les notations. Nous nous servons particulièrement de la construction, via les tableaux standard, de la base  $\mathcal{B}_\mu(X)$  du Théorème 3.21.

Nous étendons tout d'abord la notion de *polynôme d'un tableau*, déjà vue dans l'étude des polynômes de Garnir (paragraphe 2.3.1) dans le cas de tableaux ayant pour forme une partition, à des tableaux de forme quelconque. Soit donc  $T$  un tableau injectif de forme un diagramme quelconque  $L$ . Notons  $C_1, \dots, C_k$  les colonnes de  $T$  ordonnées de la gauche vers la droite. Dans chaque colonne de  $T$ , nous ordonnons les étiquettes dans  $C_j$  suivant leur ordre d'apparition de bas en haut : les  $C_j$  sont donc des sous-alphabets ordonnés de  $X$ . Nous introduisons aussi pour tout  $1 \leq j \leq k$  le diagramme  $D_j$  qui est le diagramme colonne obtenu en remplaçant les coordonnées  $(i, j)$  des cases de la  $j$ -ième colonne de  $L$  par  $(i, 0)$ . Si  $C_j = \{a_1, \dots, a_h\}$  et  $D_j = \{(i_1, 0), \dots, (i_h, 0)\}$ , on a alors :

$$\Delta_{D_j}(X_{C_j}) = \det (x_{a_r}^{i_s})_{1 \leq r, s \leq h} \quad (4.23)$$

**Définition 4.13** Nous définissons alors le polynôme du tableau  $T$  par :

$$\Delta_T(X) = \Delta_{D_1}(X_{C_1}) \cdots \Delta_{D_k}(X_{C_k}). \quad (4.24)$$

Par exemple si  $T$  vaut

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & & \\ \hline & 3 & 4 \\ \hline 5 & & 2 \\ \hline \end{array} \quad (4.25)$$

alors

$$\Delta_T(X) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_5^2 \\ 1 & x_1^2 \end{pmatrix} \times x_3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Soit  $\{(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)\}$  l'ensemble des coins de  $\mu$  qui sont situés dans l'ombre de  $\mu$ , ordonnés par  $b_1 < \dots < b_m$ . Nous notons ici encore  $\alpha_l$  la valeur de  $\alpha_T(n+1)$  (cf. (3.28)) pour un tableau  $T$  de forme  $\mu$  ayant l'étiquette  $n+1$  dans le coin  $(a_l, b_l)$ .

Pour un tableau standard  $T$ , notons  $\mathbf{B}_T$  l'ensemble suivant :

$$\mathbf{B}_T = \{ X^{\mathbf{m}} ; 0 \leq m_s \leq \alpha_T(s) \}. \quad (4.27)$$

Pour  $\nu_l$  la partition de  $n$  obtenue à partir de  $\mu$  en enlevant le coin  $(a_l, b_l)$ , la base de l'espace  $\mathbf{M}_l = \mathbf{M}_{\nu_l}$ , décrite au paragraphe 3.3.2 s'écrit alors

$$\mathcal{B}_l = \{ \partial X^{\mathbf{m}} \Delta_T(X) ; T \in \mathcal{ST}_{\nu_l}, X^{\mathbf{m}} \in \mathbf{B}_T \}.$$

Si  $T$  est un tableau standard de forme  $\nu_l$ , et si on choisit un entier  $0 \leq u \leq a_l$ , nous noterons  $T \uparrow_{uv}$  le tableau de forme  $\mu/uv$  (avec  $v = b_l$ ), tel que :

$$T \uparrow_{uv}(r, c) = \begin{cases} T(r, c) & \text{si } c \neq v \text{ ou } r < u, \\ T(r \perp 1, c) & \text{si } c = v \text{ et } r > u. \end{cases} \quad (4.28)$$

Comme la case  $(u, v)$  n'est pas dans  $\mu/uv$ ,  $T \uparrow_{uv}$  n'a pas besoin d'être défini en  $(u, v)$ . En d'autres mots, le tableau  $T \uparrow_{uv}$  est obtenu à partir de  $T$  en décalant de une case vers le haut les cases situées dans la colonne  $v$  qui sont sur la ligne  $u$  ou au-dessus. Pour  $u$  et  $v$  comme précédemment, nous posons

$$\mathcal{A}_{uv} = \{ \partial X^{\mathbf{m}} \Delta_{T \uparrow_{u,v}}(X) ; X^{\mathbf{m}} \in \mathbf{B}_T, T \in \mathcal{ST}_{\nu_l} \}. \quad (4.29)$$

**Remarque 4.14** Il est important de noter que  $\mathcal{A}_{uv}$  dépend implicitement du choix d'un coin  $(a_l, b_l)$  de  $\mu$ , car  $v$  est égal à  $b_l$ . De plus, on remarque que  $\mathcal{A}_{a_l, b_l}$  est la base de  $\mathbf{M}_{\nu_l}(X)$  décrite dans le Théorème 3.21, ce qui implique que la famille  $\mathcal{A}_{a_l, b_l}$  est linéairement indépendante.

Définissons alors

$$\mathcal{B}_{\mu/ij}(X) = \bigcup_{l=1}^m \bigcup_{u=i}^{\min(i+\alpha_l+1, a_l)} \mathcal{A}_{u, b_l}. \quad (4.30)$$

Le résultat fondamental est le suivant.

**Théorème 4.15** *Pour  $\mu$  une partition de  $n+1$  et  $(i, j)$  une case de  $\mu$ , la famille  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$  est une base de l'espace  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$ .*

*Preuve.* La preuve du Théorème 4.15 est traitée dans les paragraphes suivants et est composée de différentes étapes. Pour commencer, dans le prochain paragraphe, nous allons montrer que tous les éléments de  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$  sont dans  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$  et calculer le cardinal de  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$  pour prouver qu'il est donné par la formule suivante :

$$d_{\mu/ij} = \frac{n!}{\mu!} \sum_{\substack{i' > i \\ \mu_{i'} > j}} \mu_{i'}. \quad (4.31)$$

Nous montrerons ensuite son indépendance, et dans un dernier paragraphe nous établirons que la dimension de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$  est inférieure ou égale à  $d_{\mu/ij}$ , de telle sorte que  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$  engendre cet espace, ce qui complètera la preuve. ■

### 4.3.2 Inclusion et énumération

#### 4.3.2.a Inclusion

Nous commençons par vérifier que tous les éléments de  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$  sont bien dans l'espace  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$ . Comme ce dernier est stable par dérivation, il suffit de montrer que tous les polynômes de tableaux introduits sont dans  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$ . Considérons donc un tableau  $T$ , ayant un trou dans l'ombre de  $(i, j)$ , i.e. en place  $(i', j')$  avec  $i' \geq i$  et  $j' \geq j$ . D'après (4.4),  $\Delta_{\mu/i'j'}$  appartient à  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$ . Il est aisé de voir que la Proposition 2.10 implique que  $\Delta_T$  est aussi dans  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$ .

#### 4.3.2.b Énumération

Montrons maintenant que le cardinal de  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$  est donné par (4.31). Le cardinal de  $\mathcal{A}_{u, b_l}$  est clairement

$$\frac{n!}{\mu!} \mu_{a_l+1+u+i} = \frac{n!}{\mu!} \mu_{a_l+1}, \quad (4.32)$$

ce cardinal valant bien sûr  $n!/\nu!$ . Supposons que l'union (4.30) est une union disjointe ; ceci sera une conséquence de l'indépendance linéaire. Comme chaque entier  $i'$  indexant la sommation dans (4.31) apparaît exactement une fois dans  $\{a_l + 1 \perp u + i ; 1 \leq l \leq m, i \leq u \leq \min(i + \alpha_l \perp 1, a_l)\}$ , nous avons alors :

$$|\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)| = d_{\mu/ij}. \quad (4.33)$$

### 4.3.3 Indépendance

Prouvons maintenant l'indépendance de la famille  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$ . L'action des opérateurs de sauts s'étend sans problème au cas des polynômes de tableaux vu que dans le cas d'un tableau  $T$  injectif, le polynôme  $\Delta_T$  est un produit de déterminants de diagrammes (de dimension 1) en des sous-alphabets disjoints.

Nous en déduisons que pour un tableau standard  $T$  de forme  $\nu_l$  (rappelons que  $\nu_l$  est obtenue à partir de  $\mu$  en enlevant le coin  $(a_l, b_l)$ ) et pour  $0 \leq u \leq a_l$ , nous avons

$$D_X \Delta_{T \uparrow_{u,v}}(X) =_{\text{cte}} \begin{cases} \Delta_{T \uparrow_{u+1,v}}(X) & \text{si } u < a_l, \\ 0 & \text{si } u = a_l, \end{cases} \quad (4.34)$$

avec  $v = b_l$ . Il s'ensuit alors, d'après la construction de  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$  que

**Lemme 4.16** *En utilisant les mêmes conventions que ci-dessus, nous avons*

$$D_X \mathcal{A}_{u,b_l} =_{\text{cte}} \begin{cases} \mathcal{A}_{u+1,b_l} & \text{si } u < a_l, \\ \{0\} & \text{si } u = a_l. \end{cases} \quad (4.35)$$

Comme  $\mathcal{A}_{a_l,b_l}$  et  $\mathcal{A}_{u,b_l}$  ont le même nombre d'éléments, nous déduisons de l'indépendance linéaire de  $\mathcal{A}_{a_l,b_l}$  et de (4.35) que chaque famille  $\mathcal{A}_{u,b_l}$  est linéairement indépendante. En appliquant l'opérateur  $D_X$  dans la Définition 4.30, nous vérifions facilement que

$$\mathcal{B}_{\mu/i+1,j}(X) = D_X \mathcal{B}_{\mu/i,j}(X). \quad (4.36)$$

Nous achevons alors la preuve par récurrence décroissante sur  $i$ , à  $j$  fixé. Pour initialiser la récurrence, nous remarquons que l'indépendance linéaire est triviale lorsque le trou  $(i, j)$  est situé sur le bord supérieur de  $\mu$  car dans ce cas, on retrouve la base  $\mathcal{B}_\nu(X)$ , où  $\nu$  est la partition obtenue en enlevant l'unique coin de  $\mu$  situé dans l'ombre de  $(i, j)$ .

Raisonnons par l'absurde en supposant que nous ayons une relation de dépendance linéaire entre les termes de  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$  :

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mu/ij}(X)} c_b b = 0. \quad (4.37)$$

Appliquons alors  $D_X$  à cette relation. D'après (4.36), nous obtenons une relation de dépendance entre les éléments de  $\mathcal{B}_{\mu/i+1,j}(X)$ , qui est libre par hypothèse de récurrence donc tous les coefficients des éléments de cette famille sont nuls. En revenant à (4.37), on obtient une relation de dépendance entre les termes de  $\mathcal{A}_{a_m, b_m}$  car  $D_X \mathcal{A}_{a_m, b_m} = \{0\}$  et

$$d_{\mu/i+1,j} + |\mathcal{A}_{a_m, b_m}| = \frac{n!}{\mu!} \sum_{\substack{i' > i+1 \\ \mu_{i'} > j}} \mu_{i'} + \frac{n!}{\mu!} \mu_{i+1} = d_{\mu/ij}.$$

Mais  $\mathcal{A}_{a_m, b_m}$  est bien sûr indépendante (cf. Remarque 4.14) donc tous les coefficients  $c_b$  dans (4.37) sont nuls ce qui achève la preuve de l'indépendance.

#### 4.3.4 Borne supérieure pour la dimension de $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$

Nous donnons maintenant une preuve de la borne supérieure pour la dimension de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$ , ce qui achèvera la preuve du Théorème 4.15.

**Théorème 4.17** *Pour  $\mu$  une partition de  $n + 1$ ,*

$$\dim \mathbf{M}_{\mu/ij}(X) \leq \frac{n!}{\mu!} \sum_{\substack{i' > i \\ \mu_{i'} > j}} \mu_{i'}. \quad (4.38)$$

*Preuve.* Nous allons déduire (4.38) du Théorème 4.7 et de sa preuve, dont nous reprenons les notations. En ne gardant que les  $n$  premières entrées de  $\rho(T)$ , pour tout tableau  $T \in \mathcal{T}_{\mu/ij}$ , nous obtenons un ensemble  $[\rho_{\mu/ij}(X)]$ , projection de  $[\rho_{\mu/ij}]$  sur  $\mathbb{Q}^n$ .

Nous procédons de même que dans le cas en deux alphabets en introduisant  $J_{[\rho_{\mu/ij}(X)]}$  l'idéal annulateur de  $[\rho_{\mu/ij}(X)]$  ainsi que  $\text{gr} J_{[\rho_{\mu/ij}(X)]}$  et  $\mathbf{H}_{[\rho_{\mu/ij}(X)]}(X) = (\text{gr} J_{[\rho_{\mu/ij}(X)]})^\perp$ .

Il est immédiat de voir que deux tableaux injectifs donnent le même point si et seulement si ils ont les mêmes entrées sur chaque ligne. De ce fait le nombre de points de  $[\rho_{\mu/ij}(X)]$  est le nombre de tableaux de  $\mathcal{T}_{\mu/ij}$  qui sont croissants sur les lignes, soit précisément  $d_{\mu/ij}$ . Ceci implique, comme observé à la Remarque 2.4 que la dimension de l'espace des harmoniques  $\mathbf{H}_{[\rho_{\mu/ij}(X)]}(X)$

est précisément  $d_{\mu/ij}$ . D'après l'équation (2.28), il ne reste plus alors qu'à prouver l'inclusion suivante :

$$\text{gr}J_{[\rho_{\mu/ij}(X)]} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\mu/ij}}(X). \quad (4.39)$$

Rappelons que nous avons obtenu  $\text{gr}J_{[\rho_{\mu/ij}]} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\mu/ij}} = \mathcal{I}_{\Delta_{\mu/ij}}$  dans la preuve du Théorème 4.7.

Ensuite vu que l'espace  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$  est évidemment stable par dérivation, nous pouvons appliquer le Lemme 2.13, d'où :  $\mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\mu/ij}}(X) = \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\mu/ij}} \cap \mathbb{Q}[X]$ .

Soit alors un polynôme  $P$  dans  $J_{\rho_{\mu/ij}}(X)$ . Comme  $P \in \mathbb{Q}[X_n] \subseteq \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$ ,  $P$  est aussi dans l'idéal annulateur de l'orbite  $[\rho_{\mu/ij}]$ . Nous en tirons alors

$$\text{gr}(P) \in \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\mu/ij}} \implies \text{gr}(P) \in \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\mu/ij}} \cap \mathbb{Q}[X_n] = \mathcal{I}_{\mathbf{M}_{\mu/ij}}(X) \quad (4.40)$$

d'après (4.11). La preuve de (4.39), et par conséquent de (4.38), est ainsi complète. ■

### 4.3.5 Récurrence à quatre termes

Avec la convention

$$0^r = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

la spécialisation de la Conjecture 4.5 aux sous-espaces des polynômes de degré en  $Y$  nul correspond à prendre  $q = 0$  dans la récurrence à quatre termes (4.8). Nous montrons ici que cette spécialisation est vérifiée, en donnant une interprétation explicite, en termes utilisant notre base  $\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$ , de la récurrence résultant de cette spécialisation.

**Théorème 4.18** *Si  $C_{\mu/i,j}^{(X)}$  représente la caractéristique de Frobenius graduée de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$  alors :*

- si  $a = 0$  et  $l > 0$ ,  $C_{\mu/i,j}^{(X)} = \frac{t^{l+1} \perp 1}{t^l \perp 1} C_{\mu/i,j+1}^{(X)}$  ;
- si  $a > 0$ ,  $C_{\mu/i,j}^{(X)} = C_{\mu/i,j+1}^{(X)} + t C_{\mu/i+1,j}^{(X)} \perp t C_{\mu/i+1,j+1}^{(X)}$ .
- si  $a = 0$  et  $l = 0$ ,  $C_{\mu/ij}^{(X)}$  est la caractéristique de Frobenius graduée de  $\mathbf{M}_{\nu}(X)$ , où  $\nu$  est la partition  $\mu/ij$ .

Ici (comme dans le Théorème 4.6)  $l$  et  $a$  représentent respectivement le bras et la jambe de la case  $(i, j)$  dans  $\mu$ . Si une des cases  $(i + 1, j)$ ,  $(i, j + 1)$  ou  $(i + 1, j + 1)$  se retrouve hors de  $\mu$ , alors le terme correspondant doit être pris égal à zéro.

*Preuve.* Chacune de ces assertions est prouvée en utilisant la base que nous avons construite. La troisième est une observation directe. La première correspond à un cas dans lequel il n'y a qu'un coin  $(a_m, b_m)$  dans l'ombre de  $(i, j)$ , avec  $b_m = j$ , et dans ce cas (4.30) peut être réécrit de la façon suivante :

$$\mathcal{B}_{\mu/ij}(X) = \bigcup_{u=0}^l \mathcal{A}_{i+u,j},$$

Aussi longtemps que  $(k + 1, j)$  est dans  $\mu$ , l'opérateur  $D_X$  est un isomorphisme de représentations entre les  $\mathcal{S}_n$ -modules homogènes  $\mathcal{A}_{k,j}$  et  $\mathcal{A}_{k+1,j}$  qui diminue le degré de 1. Ceci implique que

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{A}_{k,j}) = t \mathcal{F}_{q,t}(\mathcal{A}_{k+1,j})$$

où  $\mathcal{F}_{q,t}$  représente la caractéristique de Frobenius (cf. (1.38)). Nous en déduisons que, dans le premier cas,

$$\mathcal{B}_{\mu/ij}(X) = (1 + t + \dots + t^l) C_{\nu}^{(X)}$$

avec  $\mu/\nu = (a_m, b_m)$ . Ceci est clairement équivalent à la première assertion.

Pour le second cas, il y a quelques sous-cas suivant la place du trou. Ils sont tous traités de façon similaire et nous nous intéressons au plus général d'entre eux, à savoir :  $j = b_1$  et  $m > 1$ . Dans ce cas la base peut se scinder :

$$\mathcal{B}_{\mu/ij}(X) = \mathcal{B}_{\mu/i,j+1} \cup \bigcup_{u=i}^{i+\alpha_1+1} \mathcal{A}_{u,b_1}$$

et nous avons juste besoin de prouver que la caractéristique de Frobenius graduée du sous-espace vectoriel engendré par

$$\bigcup_{u=i}^{i+\alpha_1+1} \mathcal{A}_{u,b_1}$$

est donnée par

$$t (C_{\mu/i+1,j}^{(X)} \perp C_{\mu/i+1,j+1}^{(X)}). \quad (4.41)$$

Nous avons  $\mathcal{B}_{\mu/i+1,j+1} \subset \mathcal{B}_{\mu/i+1,j}$ , avec  $D_X \bigcup_{u=i}^{i+\alpha_1+1} \mathcal{A}_{u,b_1}$  le complément de  $\mathcal{B}_{\mu/i+1,j+1}$  dans  $\mathcal{B}_{\mu/i+1,j}$ . Sous les hypothèses de ce sous-cas, la caractéristique de Frobenius du sous-espace engendré par  $\bigcup_{u=i}^{i+\alpha_1+1} \mathcal{A}_{u,b_1}$  est par conséquent donnée par la formule (4.41). ■

## 4.4 Idéal annulateur en un alphabet

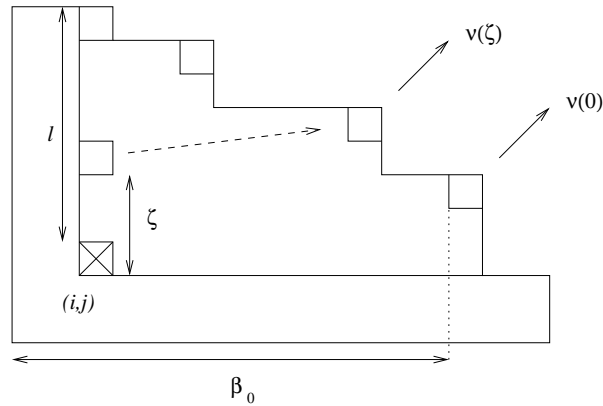
### 4.4.1 Présentation

Nous décrivons ici l'idéal annulateur  $\mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$  de l'espace  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$  pour  $\mu$  une partition quelconque de  $n + 1$  et  $(i, j)$  une de ses cases. Cette étude a été menée en collaboration avec N. Bergeron (cf. [8]).

Nous avons vu dans la section 3.3 que dans le cas d'une partition  $\mu$ , l'idéal  $\mathcal{I}_{\mu}(X)$  a deux descriptions duales : une en termes de fonctions symétriques élémentaires et une en termes de fonctions symétriques homogènes. L'idée centrale (Lemme 3.31) était que ces deux familles sont équivalentes modulo l'idéal  $\mathcal{I}_{(1^n)}$  des fonctions symétriques, qui est inclus dans  $\mathcal{I}_{\mu}(X)$  pour toute partition  $\mu$ . Dans le cas de partitions trouées, nous n'avons pas l'inclusion  $\mathcal{I}_{(1^n)} \subseteq \mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ . Par exemple, si  $(i, j) \in \mu$  n'est pas au sommet d'une colonne de  $\mu$  alors  $h_1(\partial X)\Delta_{\mu/ij}(X; Y) = \Delta_{\mu/i+1,j}(X; Y) \neq 0$ . Mais d'après la Proposition 3.14, on a en revanche :

$$h_r(X) \in \mathcal{I}_{\mu/ij}(X) \quad \forall r > 1 \tag{4.42}$$

car on ne peut pas faire monter deux trous (il n'y en a qu'un). Pour décrire  $\mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$  nous allons devoir utiliser les deux familles de fonctions symétriques.



Notons  $l$  le nombre de cases situées au-dessus de  $(i, j)$  dans  $\mu$ . Pour  $0 \leq \zeta \leq l$ , notons  $\nu(\zeta)$  la partition obtenue en enlevant à  $\mu$  son coin le plus à droite dans l'ombre de la case  $(i + \zeta, j)$ . Nous noterons  $(\alpha_{\zeta}, \beta_{\zeta})$  les coordonnées de ce coin. Nous sommes ici obligés de modifier les notations utilisées dans la section précédente. Pour faire le lien, notons que les coordonnées du coin de  $\mu$  le plus à droite dans l'ombre de  $(i, j)$  a pour coordon-



nées  $(a_m, b_m) = (\alpha_0, \beta_0)$  et la partition résultant de son ablation est notée  $\nu_m = \nu(0)$ .

Si  $(i, j)$  est au sommet d'une colonne de  $\mu$ , alors  $\alpha_0 = i$  et

$$h_1^{\beta_0 \perp j}(\partial Y)\Delta_{\mu/ij}(X, Y) = \Delta_{\mu/\alpha_0\beta_0}(X, Y) = \Delta_{\nu(0)}(X, Y).$$

Ainsi  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X) = \mathbf{M}_{\nu(0)}(X)$  et par conséquent  $\mathcal{I}_{\mu/ij}(X) = \mathcal{I}_{\nu(0)}(X)$ . Jusqu'à la fin de cette section, nous pouvons donc supposer que le trou  $(i, j)$  n'est pas situé au sommet d'une colonne de  $\mu$ .

Pour  $\mu$  une partition de  $n + 1$  notons, suivant les notations introduites en (3.37) :

$$J_\mu(X) = \langle h_r(\mathcal{X}) ; \mathcal{X} \subseteq X, |\mathcal{X}| = k, r > \delta_k(\mu) \perp k \rangle. \quad (4.43)$$

Comme ici  $|X| = n = |\mu| \perp 1$ , il est clair que  $1 \leq k \leq n$ , et en particulier  $h_1(X) \notin J_\mu$ . Nous remarquons que cet idéal est très ressemblant à la définition de l'idéal  $\mathcal{I}_\mu(X)$  du Théorème 3.26. Nous avons vu ci-dessus que les fonctions symétriques homogènes ne suffiront peut-être pas pour décrire l'idéal  $\mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ . Nous aurons aussi besoin de fonctions symétriques élémentaires. Posons

$$\begin{aligned} \widehat{J}_{\mu/ij}(X) = & \langle h_1(X)e_r(\overline{\mathcal{X}}) ; \overline{\mathcal{X}} \subseteq X, |\overline{\mathcal{X}}| = n \perp k, j < k \leq \beta_0, r = \delta_k(\mu) \perp k \rangle \\ & + \langle e_r(\overline{\mathcal{X}}) ; \overline{\mathcal{X}} \subseteq X, |\overline{\mathcal{X}}| = n \perp k, \beta_0 < k < \mu_1, r = \delta_k(\mu) \perp k \rangle. \end{aligned}$$

**Théorème 4.19** *En utilisant les notations définies ci-dessus et pour une partition  $\mu$  de  $n + 1$  et  $(i, j)$  une case de  $\mu$ , nous avons*

$$\mathcal{I}_{\mu/ij}(X) = J_\mu(X) + \langle h_1^{l+1}(X) \rangle + \widehat{J}_{\mu/ij}(X). \quad (4.44)$$

La fin de cette section est consacrée à la preuve de ce théorème. Notons  $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$  l'idéal défini à droite de l'équation (4.44).

#### 4.4.2 Inclusion

Nous commençons par montrer l'inclusion

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) \subseteq \mathcal{I}_{\mu/ij}(X), \quad (4.45)$$

en vérifiant que chaque élément de  $\widetilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$  est bien dans  $\mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ .

**Lemme 4.20** *Pour tout  $(i, j) \in \mu$ , nous avons  $J_\mu(X) \subseteq \mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ .*

*Preuve.* Il est clair d'après la définition que  $J_\mu(X) \subseteq \mathcal{I}_\mu(X_{n+1})$ . Développons  $\Delta_\mu(X_{n+1}, Y_{n+1})$  par rapport à la dernière ligne :

$$\Delta_\mu(X, x_{n+1}, Y, y_{n+1}) = \sum_{(i,j) \in \mu} \pm x_{n+1}^i y_{n+1}^j \Delta_{\mu/ij}(X, Y).$$

Pour tout polynôme  $P(X) \in J_\mu(X) \subseteq \mathcal{I}_\mu(X_{n+1})$  nous avons

$$0 = P(\partial X) \Delta_\mu(X, x_{n+1}, Y, y_{n+1}) = \sum_{(i,j) \in \mu} \pm x_{n+1}^i y_{n+1}^j P(\partial X) \Delta_{\mu/ij}(X, Y) \quad (4.46)$$

ce qui montre que  $P(\partial X) \Delta_{\mu/ij}(X, Y) = 0$  pour tout  $(i, j) \in \mu$ . ■

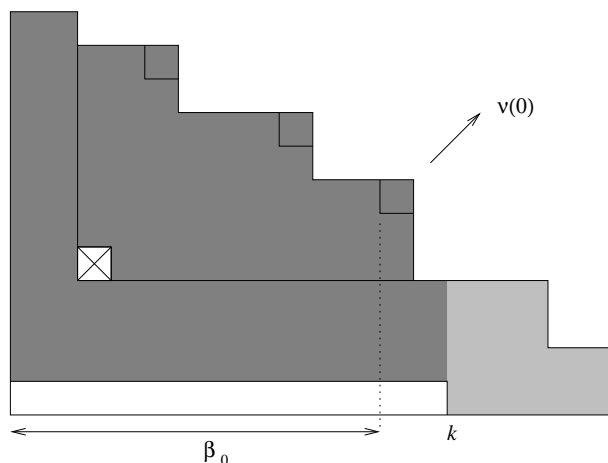
Pour montrer que  $h_1^{l+1}(X) \in \mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$  nous utilisons la Proposition 3.14. Dans  $\overline{\mu/ij}$ , la seule case qui peut monter sans en rencontrer une autre est la case  $(i, j)$ . Elle peut faire  $l$  pas vers le haut, mais pas plus. Le  $l + 1$ -ième pas la ferait sortir de  $\mu$ , donc rencontrer une autre case de  $\overline{\mu/ij}$ . Donc

$$h_1^{l+1}(\partial X) \Delta_{\mu/ij}(X, Y) = 0.$$

Maintenant, pour  $\beta_0 < k < \mu_1$  nous considérons  $e_r(\overline{\mathcal{X}})$ , où  $\overline{\mathcal{X}} \subseteq X$  est un sous-alphabet de cardinal  $|\overline{\mathcal{X}}| = n \perp k$  et  $r = \delta_k(\mu) \perp k$ . Nous allons vérifier que  $e_r(\overline{\mathcal{X}}) \in \mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ . Nous remarquons que s'il existe  $k$  tel que  $\beta_0 < k < \mu_1$ , alors  $(i, j)$  n'est pas sur la première ligne de  $\mu$ . Nous développons  $\Delta_{\mu/ij}(X, Y)$  comme dans (3.22) :

$$\Delta_{\mu/ij}(X, Y) = \sum_{\substack{D \subset \mu/ij, \\ |D| = n \perp k}} \pm \Delta_D(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{Y}}) \Delta_{\mu/ij \setminus D}(X \setminus D\overline{\mathcal{X}}, Y \setminus \overline{\mathcal{Y}}),$$

où  $\overline{\mathcal{Y}}$  est le sous-alphabet de  $Y_n$  ayant le même ensemble d'indice que  $\overline{\mathcal{X}}$ . En observant la figure ci-dessous, nous remarquons qu'il y a  $n \perp k$  cases au total dans les deux parties grises de  $\mu/ij$ . Dans la partie la plus foncée, il y a  $\delta_k(\mu) \perp k \perp 1$  cases de  $\mu/ij$ . D'après la Proposition 3.11, pour avoir  $e_r(\partial \overline{\mathcal{X}}) \Delta_D(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{Y}}) \neq 0$ , nous devons être capable de déplacer  $r = \delta_k(\mu) \perp k$  cases distinctes de  $D$  de un pas vers le bas. Comme on le voit sur la figure ci-dessous, le nombre maximal de cases qui peuvent descendre pour un tel  $D$  est  $\delta_k(\mu) \perp k \perp 1$ , donc  $e_r(\partial \overline{\mathcal{X}}) \Delta_{\mu/ij}(X, Y) = 0$  et  $e_r(\overline{\mathcal{X}}) \in \mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ .



Finalement, pour  $j < k \leq \beta_0$  et  $e_r(\overline{\mathcal{X}})$  comme ci-dessus, il ne nous reste qu'à régler le cas où  $(i, j)$  n'est pas dans la zone foncée. Ceci se produit seulement si  $i = 0$ . Rappelons-nous alors que  $h_1(\partial X)\Delta_{\mu/ij}(X, Y) = \Delta_{\mu/i+1, j}(X, Y)$  et par conséquent

$$e_r(\partial \overline{\mathcal{X}})h_1(\partial X)\Delta_{\mu/ij}(X, Y) = e_r(\partial \overline{\mathcal{X}})\Delta_{\mu/i+1, j}(X, Y) = 0.$$

Donc  $h_1(X)e_r(\overline{\mathcal{X}}) \in \mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ , ce qui achève la preuve de l'inclusion 4.45.

### 4.4.3 Réduction

Dans l'anneau  $\mathbb{Q}[X_n] = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  des polynômes en  $n$  variables, l'inclusion 4.45 implique que

$$\dim \left( \mathbb{Q}[X_n] / \mathcal{I}_{\mu/ij}(X) \right) \leq \dim \left( \mathbb{Q}[X_n] / \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) \right). \quad (4.47)$$

Nous présentons maintenant un algorithme de réduction, qui réduit, modulo l'idéal  $\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$ , tout élément de  $\mathbb{Q}[X_n]$  comme combinaison linéaire d'éléments d'une base de  $\mathbb{Q}[X_n] / \mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ . Ceci montrera que

$$\dim \left( \mathbb{Q}[X_n] / \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) \right) \leq \dim \left( \mathbb{Q}[X_n] / \mathcal{I}_{\mu/ij}(X) \right) \quad (4.48)$$

et conclura la preuve du Théorème 4.44.

Nous aurons besoin du résultat suivant.

**Proposition 4.21** *La famille*

$$\{h_\lambda(X)x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\cdots x_n^{\epsilon_n} ; 0 \leq \epsilon_i \leq i \perp 1\} \quad (4.49)$$

forme une base de  $\mathbb{Q}[X_n]$ , quand  $\lambda$  décrit l'ensemble des partitions dont les parts sont  $\leq n$ .

*Preuve.* Cet énoncé est un résultat classique de la théorie des invariants et il en existe de nombreuses preuves. Nous proposons ici une démonstration adaptée au contexte, celle de [14], Theorem 3.2. Nous montrons que tout polynôme  $P \in \mathbb{Q}[X]$  s'écrit, et ce de façon unique, sous la forme :

$$P(X) = \sum_{0 \leq \epsilon_i \leq i \perp 1} A_\epsilon X^\epsilon \quad (4.50)$$

où les  $A_\epsilon$  sont des polynômes symétriques.

• Commençons par l'existence d'une telle forme. Nous savons (Théorème 3.20) que la famille  $\{X^\epsilon ; 0 \leq \epsilon_i \leq i \perp 1\}$  est une base de  $\mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_{(1^n)}$  avec  $\mathcal{I}_{(1^n)}$  l'idéal engendré par les polynômes symétriques sans terme constant. Par conséquent  $P$  peut s'écrire

$$P(X) = \sum_{0 \leq \epsilon_i \leq i \perp 1} c_\epsilon X^\epsilon + \sum_{r=1}^n B_r(X) h_r(X)$$

où les  $c_\epsilon$  sont des nombres rationnels et les  $B_r(X)$  des éléments de  $\mathbb{Q}[X_n]$ . En appliquant cette décomposition à ces polynômes  $B_r(X)$  et en itérant, on obtient l'existence d'une écriture de  $P(X)$  sous la forme (4.50).

• Montrons maintenant l'unicité d'une telle écriture. La série génératrice des degrés de la famille (4.49) est donnée par la formule :

$$\sum_{0 \leq \epsilon_i \leq i \perp 1} q^{\sum \epsilon_i} \sum_{p_i \geq 0} q^{\sum i p_i} = \frac{1 \cdot (1+q) \cdots (1+q+\cdots+q^n)}{(1 \perp q) \cdot (1 \perp q^2) \cdots (1 \perp q^n)} = \frac{1}{(1 \perp q)^n}$$

qui est précisément la série de Hilbert de  $\mathbb{Q}[X_n]$ . Par conséquent, l'écriture (4.50) est bien unique. ■

**Remarque 4.22** Comme nous l'avons vu dans la preuve, nous pouvons remplacer les fonctions symétriques homogènes dans l'énoncé par toute base de l'anneau des fonctions symétriques.

Nous allons utiliser la famille (4.49) pour notre algorithme de réduction. En reprenant les notations introduites sur la figure page 103, notons  $\mathcal{B}_{\nu(\zeta)}$  une base de  $\mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_{\nu(\zeta)}(X)$ , par exemple selon la description donnée au Théorème 3.21. Nous posons alors

$$\mathcal{S}_{\mu/ij} = \bigcup_{\zeta=0}^l h_1^\zeta(X) \mathcal{B}_{\nu(\zeta)} \quad (4.51)$$

où  $h_1^\zeta(X)\mathcal{B}_{\nu(\zeta)} = \{h_1^\zeta(X)P(X) ; P(X) \in \mathcal{B}_{\nu(\zeta)}\}$ . Nous avons besoin des lemmes suivants.

**Lemme 4.23** *Pour  $0 \leq \zeta \leq l$ , nous avons*

$$h_1^\zeta(X)\mathcal{I}_{\nu(\zeta)}(X) \subseteq \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) + \langle h_1^{\zeta+1}(X) \rangle.$$

*Preuve.* Soit  $h_r(\mathcal{X})$  un générateur de  $\mathcal{I}_{\nu(\zeta)}(X)$  tel que  $|\mathcal{X}| = k$  et  $r > \delta_k(\nu(\zeta)) \perp k$ . Nous notons que

$$\delta_k(\nu(\zeta)) = \begin{cases} \delta_k(\mu) & \text{si } k \leq \beta_\zeta \\ \delta_k(\mu) \perp 1 & \text{si } k > \beta_\zeta. \end{cases}$$

Si  $k \leq \beta_\zeta$ , alors  $r > \delta_k(\nu(\zeta)) \perp k = \delta_k(\mu) \perp k$  et nous avons  $h_r(\mathcal{X}) \in J_\mu(X) \subseteq \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$ . De façon similaire, si  $k > \beta_\zeta$  et  $r > \delta_k(\nu(\zeta)) \perp k + 1 = \delta_k(\mu) \perp k$ , alors à nouveau  $h_r(\mathcal{X}) \in J_\mu(X) \subseteq \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$ . Il ne nous reste plus qu'à considérer le cas où  $k > \beta_\zeta$  et  $r = \delta_k(\mu) \perp k$ . Pour  $\zeta = 0$ , nous avons

$$\mathcal{I}_{(1^n)} = \langle h_r(X) ; r > 0 \rangle \subseteq \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) + \langle h_1(X) \rangle,$$

et nous pouvons utiliser le Lemme 3.31 et

$$h_r(\mathcal{X}) \equiv (\perp 1)^r e_r(\overline{\mathcal{X}}) \pmod{\left(\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) + \langle h_1(X) \rangle\right)},$$

où  $\overline{\mathcal{X}} = X \perp \mathcal{X}$ . Dans ce cas,  $e_r(\overline{\mathcal{X}}) \in \hat{J}_{\mu/ij}(X) \subseteq \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$  et donc  $h_r(\mathcal{X}) \in \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) + \langle h_1(X) \rangle$ . Pour  $\zeta > 0$ , à nouveau d'après le Lemme 3.31 nous avons  $h_r(\mathcal{X}) \equiv (\perp 1)^r e_r(\overline{\mathcal{X}}) \pmod{\mathcal{I}_{(1^n)}}$ . En particulier nous avons  $h_1^\zeta(X)h_r(\mathcal{X})$  congru à  $(\perp 1)^r h_1^\zeta(X)e_r(\overline{\mathcal{X}})$  modulo  $h_1^\zeta(X)\mathcal{I}_{(1^n)}$ . Comme  $h_1^\zeta(X)\mathcal{I}_{(1^n)}$  est inclus dans  $\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) + \langle h_1^{\zeta+1}(X) \rangle$ , nous avons

$$h_1^\zeta(X)h_r(\mathcal{X}) \equiv (\perp 1)^r h_1^\zeta(X)e_r(\overline{\mathcal{X}}) \pmod{\left(\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) + \langle h_1^{\zeta+1}(X) \rangle\right)}.$$

Dans ce cas,  $h_1(X)e_r(\overline{\mathcal{X}}) \in \hat{J}_{\mu/ij}(X) \subseteq \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$  et par conséquent le polynôme  $h_1^\zeta(X)h_r(\mathcal{X})$  est un élément de  $\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) + \langle h_1^{\zeta+1}(X) \rangle$ . ■

**Lemme 4.24** *Modulo  $\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$ , tout élément de la forme  $h_\lambda(X)x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n}$  avec  $0 \leq \epsilon_i \leq i \perp 1$  est une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{S}_{\mu/ij}$ .*

*Preuve.* Nous remarquons que  $\langle h_1^{l+1}(X), h_2(X), h_3(X), \dots \rangle \subseteq \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)$ . Donc

$$h_\lambda(X)x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2} \cdots x_n^{\epsilon_n} \equiv 0 \pmod{\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)}$$

Sauf si  $h_\lambda(X) = h_1^\zeta(X)$  pour  $0 \leq \zeta \leq l$ . On raisonne alors par récurrence décroissante sur  $\zeta$ , à partir de  $\zeta = l + 1$  jusqu'à  $\zeta = 0$ . Le résultat est vrai pour  $\zeta > l$  car  $h_1^{l+1}(X) \equiv 0 \pmod{\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)}$ . Pour  $\zeta \leq l$  on considère  $h_1^\zeta(X)x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\cdots x_n^{\epsilon_n}$ . D'après notre choix de  $\mathcal{B}_{\nu(\zeta)}$ , il existe un élément  $A$  dans l'espace vectoriel engendré par  $\mathcal{B}_{\nu(\zeta)}$  tel que  $x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\cdots x_n^{\epsilon_n} \equiv A \pmod{\mathcal{I}_{\nu(\zeta)}(X)}$ . Donc il y a un élément  $B \in \mathcal{I}_{\nu(\zeta)}(X)$  tel que

$$h_1^\zeta(X)x_1^{\epsilon_1}x_2^{\epsilon_2}\cdots x_n^{\epsilon_n} = h_1^\zeta(X)A + h_1^\zeta(X)B. \quad (4.52)$$

Ici  $h_1^\zeta(X)A$  est dans l'espace vectoriel engendré par  $h_1^\zeta(X)\mathcal{B}_{\nu(\zeta)} \subseteq \mathcal{S}_{\mu/ij}$ . D'après le Lemme 4.23,  $h_1^\zeta(X)B \in \tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X) + \langle h_1^{\zeta+1}(X) \rangle$ . Donc

$$h_1^\zeta(X)B \equiv h_1^{\zeta+1}C \pmod{\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)},$$

où  $C$  est un élément de  $\mathbb{Q}[X_n]$ . D'après notre hypothèse de récurrence, nous en déduisons que  $h_1^{\zeta+1}C$  est dans l'espace engendré par  $\mathcal{S}_{\mu/ij}$ . ■

Nous utilisons alors le Théorème 4.15 pour écrire :

$$\dim(\mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_{\mu/ij}(X)) = \dim(\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)) = \sum_{\zeta=0}^l |\mathcal{B}_{\nu(\zeta)}|. \quad (4.53)$$

Pour achever la preuve du Théorème 4.19 nous utilisons le Lemme 4.24 pour montrer que

$$\dim(\mathbb{Q}[X_n]/\tilde{\mathcal{I}}_{\mu/ij}(X)) \leq |\mathcal{S}_{\mu/ij}| = \sum_{\zeta=0}^l |\mathcal{B}_{\nu(\zeta)}|.$$

L'équation (4.48) est alors une conséquence de (4.53).

**Corollaire 4.25**  $\mathcal{S}_{\mu/ij}$  est une base  $\mathbb{Q}[X_n]/\mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$ .

**Remarque 4.26** Nous avons ici l'exact analogue de la Remarque 3.30, à savoir l'assertion suivante, qui est une conséquence immédiate de la description (4.44) de  $\mathcal{I}_{\mu/ij}(X)$  :

$$\mu \leq \lambda \quad \implies \quad \mathbf{M}_{\mu/ij}(X) \subseteq \mathbf{M}_{\lambda/ij}(X)$$

dès que la case  $(i, j)$  apparaît à la fois dans  $\lambda$  et  $\mu$ .



## Chapitre 5

# Généralisation : cas des diagrammes à plusieurs trous

LE TRAVAIL effectué sur les partitions trouées ouvre la voie de l'étude des espaces  $\mathbf{M}_L$  pour des diagrammes  $L$  autres que des partitions. Cependant, il apparaît que les choses ne se passent pas aussi bien dans le cas général, en particulier le module  $\mathbf{M}_L$  n'est pas toujours un multiple de la représentation régulière à gauche. Si certaines classes de diagrammes fournissent des espaces possédant une belle structure, il faut, dans le cas général, considérer des sommes d'espaces  $\mathbf{M}_L$  pour généraliser à  $k$  trous la conjecture  $n!$ . Le chapitre est composé de quatre sections. La première expose le problème. La seconde est consacrée aux diagrammes de dimension un, pour lesquels  $\mathbf{M}_L$  est toujours un multiple de la représentation régulière à gauche. La troisième présente une généralisation possible de la conjecture  $n!$  pour des partitions avec  $k$  trous ; il faut dans ce cas considérer des sommes d'espaces  $\mathbf{M}_L$ , où  $L$  s'obtient en faisant  $k$  trous dans l'ombre d'une case dans une partition  $\mu$  de  $n + k$ . Enfin la dernière section est consacrée à un problème dual de celui des partitions trouées, à savoir les diagrammes obtenus en rajoutant une case extérieure à un diagramme de Ferrers.

### 5.1 Présentation

Introduisons le problème en suivant [10] et [11], dont nous reprenons les notations et le vocabulaire. Soit  $L$  un diagramme quelconque du réseau carré et  $\mathbf{M}_L$  l'espace associé.

**Définition 5.1** *Le diagramme  $L$  possède la propriété MLRR (Multiple Left Regular Representation) si le module  $\mathbf{M}_L$  se décompose en une somme directe*



de représentations régulières à gauche. Nous avons en particulier dans ce cas :

$$\dim \mathbf{M}_L = m.n! \quad (5.1)$$

pour un entier  $m$ .

La conjecture (théorème)  $n!$  correspond à :  $\mu$  possède la propriété MLRR avec  $m = 1$ . Dans le cas des partitions trouées, la Conjecture 4.4 énonce que toute partition trouée possède la propriété MLRR avec  $m = s_\mu(i, j)$ , le cardinal de l'ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu$ . Il est alors tentant de conjecturer que tous les diagrammes du réseau carré possèdent cette propriété. Une telle conjecture est énoncée dans [10], mais peu après F. Bergeron a trouvé le contre-exemple suivant. Prenons

$$L = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1)\} = \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array}$$

Dans ce cas,

$$\Delta_L(X_3, Y_3) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1^2 y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3^3 y_3 \end{pmatrix}$$

et il est facile, en utilisant Maple par exemple, de calculer que  $\dim \mathbf{M}_L = 46$ , ce qui est incompatible avec (5.1).

## 5.2 Cas d'une colonne trouée

Nous étudions ici le cas des diagrammes  $L$  de dimension un. Ces travaux sont dus à F. Bergeron, A. Garsia et G. Tesler et nous n'exposons ici qu'une partie des résultats de leur article [11].

Nous considérons les diagrammes de la forme

$$L_{\mathbf{p}} = \{(p_1, 0), \dots, (p_n, 0)\} \quad (5.2)$$

où  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_n = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n ; p_1 > \dots > p_n \geq 0\}$ . Nous posons alors

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \det (x_i^{p_j})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (5.3)$$

ce qui est une généralisation du déterminant de Vandermonde :  $\Delta(X) = \det(x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n}$  correspond à  $\mathbf{p} = \delta = (n-1, \dots, 1, 0)$ . Nous noterons  $\mathbf{M}_{\mathbf{p}} = \mathcal{L}_{\delta}[\Delta_{\mathbf{p}}]$  le module associé à  $L_{\mathbf{p}}$ . Dans le cas du Vandermonde (Théorème 3.20), nous savons que le module  $\mathbf{M}_{\delta}$  est une version de la représentation régulière à gauche. Le but est de montrer le théorème suivant.

**Théorème 5.2** *Pour tout  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_n$ ,  $L_{\mathbf{p}}$  possède la propriété MLRR.*

Afin de prouver ce théorème, commençons par deux lemmes.

**Lemme 5.3** *Si  $A(X)$  est un polynôme symétrique homogène, alors*

$$A(\partial)\Delta(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) \neq 0$$

*si et seulement si*

$$A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) \neq 0$$

*et dans ce cas il existe un polynôme symétrique homogène  $B(X)$  tel que*

$$B(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) =_{\text{cte}} \Delta(X). \quad (5.4)$$

*Preuve.* Posons

$$f(X) = A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X).$$

Comme  $f$  est antisymétrique, il se factorise sous la forme  $f(X) = h(X)\Delta(X)$ , avec  $h(X)$  un polynôme symétrique homogène. Maintenant si  $f \neq 0$ , nous avons  $f(\partial)f(X) \neq 0$  donc :

$$0 \neq f(\partial)f(X) = h(\partial)\Delta(\partial)f(X) = h(\partial)\Delta(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) = h(\partial)g(X)$$

avec

$$g(X) = \Delta(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) \neq 0. \quad (5.5)$$

D'où

$$0 \neq g(\partial)g(X) = g(\partial)\Delta(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X).$$

En particulier, nous avons

$$g(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) \neq 0. \quad (5.6)$$

Remarquons que (5.5) implique que  $g(X)$  est symétrique et homogène de degré :

$$\deg(g) = |\mathbf{p}| \perp \deg(A) \perp \binom{n}{2},$$

$\binom{n}{2}$  étant le degré de  $\Delta(X)$ , avec  $|\mathbf{p}| = p_1 + \dots + p_n$ . Ceci nous donne

$$\deg\left(g(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X)\right) = |\mathbf{p}| \perp \deg(A) \perp \left(|\mathbf{p}| \perp \deg(A) \perp \binom{n}{2}\right) = \binom{n}{2}.$$

Comme  $g(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X)$  est antisymétrique, nous déduisons de (5.6) que

$$g(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) =_{\text{cte}} \Delta(X).$$

Nous pouvons donc prendre  $B(X) = g(X)$  dans (5.4) et notre preuve est complète. ■

Posons  $\mathcal{M}_{(1^n)} = \{X^\epsilon ; 0 \leq \epsilon_i \leq i \perp 1\}$  de telle sorte que (Théorème 3.20)  $\mathcal{B}_{(1^n)} = \{b(\partial)\Delta(X) ; b \in \mathcal{M}_{(1^n)}\}$  est une base de  $\mathbf{M}_{(1^n)}$ .

**Lemme 5.4** *Pour tout  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_n$ , posons*

$$J_{\mathbf{p}} = (A(X) ; A(X) \in \Lambda_n \text{ et } A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) = 0). \quad (5.7)$$

*Alors tout polynôme  $Q(X) \in \mathcal{L}_{\partial}[\Delta_{\mathbf{p}}]$  peut s'écrire, et de façon unique, sous la forme*

$$Q(X) = \sum_{b \in \mathcal{M}_{(1^n)}} A_b(\partial)b(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X), \quad (5.8)$$

*où les polynômes  $A_b(X)$  sont des éléments de  $\Lambda_n \cap J_{\mathbf{p}}^{\perp}$ , l'orthogonal étant relatif au produit scalaire (2.1).*

*Preuve.* Par hypothèse,  $Q(X)$  peut s'écrire  $Q(X) = P(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X)$  pour un (non unique)  $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ . Nous appliquons la Proposition 4.21 et nous écrivons :

$$P(X) = \sum_{b \in \mathcal{M}_{(1^n)}} b(X)A_b(X) \quad (5.9)$$

où les polynômes  $A_b$  sont symétriques. Pour chaque  $b \in \mathcal{M}_{(1^n)}$ , écrivons  $A_b = A_b^* + A_b^{\perp}$  où  $A_b^* \in J_{\mathbf{p}}$  et  $A_b^{\perp} \in J_{\mathbf{p}}^{\perp}$ . Ainsi

$$Q(X) = P(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) = \sum_{b \in \mathcal{M}_{(1^n)}} A_b^*(\partial)b(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) + \sum_{b \in \mathcal{M}_{(1^n)}} A_b^{\perp}(\partial)b(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X).$$

La première somme est nulle, et il nous reste la seconde, de la forme (5.8).

Pour prouver l'unicité d'une telle écriture, supposons que

$$\sum_{b \in \mathcal{M}_{(1^n)}} A_b(\partial)b(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) = 0, \quad (5.10)$$

avec  $A_b$  des polynômes symétriques dans  $J_{\mathbf{p}}^{\perp}$ . En regardant les composantes homogènes, nous pouvons supposer que les  $A_b$  sont homogènes et que tous les termes (non nuls) dans (5.10) sont de même degré. Choisissons un  $A_{b_0} \neq 0$  de degré minimal.

D'après le Lemme 5.3, il existe un polynôme  $B(X)$  tel que

$$B(\partial)A(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) = c_{b_0}\Delta(X)$$

pour une constante  $c_{b_0} \neq 0$ . En fait nous avons même :

$$B(\partial)A_b(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) = c_b\Delta(X) \quad (5.11)$$

pour tout  $b \in \mathcal{M}_{(1^n)}$  où  $c_b$  est une constante (éventuellement nulle). En effet, le terme de gauche de (5.11) est antisymétrique de degré au plus  $\binom{n}{2}$  : c'est donc le produit d'un scalaire par le déterminant de Vandermonde  $\Delta(X)$ . Appliquons alors  $B(\partial)$  à (5.10) : nous obtenons

$$0 = \sum_{b \in \mathcal{M}_{(1^n)}} B(\partial)A_b(\partial)b(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) = \sum_{b \in \mathcal{M}_{(1^n)}} c_b b(\partial)\Delta(X).$$

La famille  $\{b(\partial)\Delta(X) ; b \in \mathcal{M}_{(1^n)}\}$  étant linéairement indépendante, on aboutit à une contradiction. L'écriture est donc unique, ce qui complète la preuve. ■

*Preuve* (du Théorème 5.2, fin). Pour conclure, il suffit d'observer que le Lemme 5.4 implique que si  $\{A_1(X), \dots, A_N(X)\}$  est une base homogène des polynômes symétriques de  $J_{\mathbf{p}}^{\perp}$ , alors

$$\{A_i(\partial)b(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) ; i = 1, \dots, N, B \in \mathcal{M}_{(1^n)}\}$$

est une base de  $\mathbf{M}_{\mathbf{p}}$ . Ceci décompose  $\mathbf{M}_{\mathbf{p}}$  en  $N$  sous-espaces, le  $i$ -ième étant

$$\mathbf{M}_{\mathbf{p}}^i = \text{Vect}\{A_i(\partial)b(\partial)\Delta_{\mathbf{p}}(X) ; B \in \mathcal{M}_{(1^n)}\},$$

une version de la représentation régulière à gauche. ■

Dans [11], F. Bergeron, A. Garsia et G. Tesler obtiennent une description de la caractéristique de Frobenius graduée  $\mathcal{F}_t \mathbf{M}_{\mathbf{p}}$  en termes de séries de Hilbert d'espaces de fonctions de Schur gauches, dont nous allons brièvement rappeler la définition.

Dans l'anneau  $\Lambda$  des fonctions symétriques muni du produit scalaire tel que les fonctions de Schur forment une base orthonormale de  $\Lambda$ , toute fonction symétrique  $f$  est déterminée par ses produits scalaires avec les  $s_{\lambda}$  :

$$f = \sum_{\lambda} \langle f, s_{\lambda} \rangle s_{\lambda}. \quad (5.12)$$

**Définition 5.5** Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions. Définissons la fonction  $s_{\lambda/\mu}$  par les relations :

$$\langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle$$

pour toute partition  $\nu$ . Les  $s_{\lambda/\mu}$  sont appelées fonctions de Schur gauches.

On montre que  $s_{\lambda/\mu} = 0$  sauf si  $\mu \subseteq \lambda$  au sens ensembliste des diagrammes de Ferrers.

Observons de plus que tout  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_n$  s'écrit  $\mathbf{p} = \lambda + \delta$  où  $\lambda$  est une partition.

**Théorème 5.6**

$$\mathcal{F}_t \mathbf{M}_{\lambda+\delta} = \Xi_\lambda(t) \tilde{H}_{(1^n)}(x; q, t)$$

où  $\Xi_\lambda(t)$  est la série de Hilbert de l'espace vectoriel engendré par les fonctions de Schur gauches  $s_{\lambda/\mu}$  pour  $\mu \subseteq \lambda$ .

## 5.3 Une généralisation pour des partitions quelconques

### 5.3.1 Introduction

Le contre-exemple  $L = \{(1, 0), (0, 1), (2, 1)\}$  montre qu'on ne peut pas généraliser brutalement l'étude précédente à des diagrammes obtenus en enlevant  $k$  cases à un diagramme de Ferrers. Le but, suggéré par F. Bergeron, est ici de proposer une généralisation de la conjecture  $n!$  pour des diagrammes à  $k$  trous. L'espace que nous considérons est défini de la façon suivante. Soit  $\mu$  une partition de  $n + k$ . Cette partition est fixée et n'apparaît pas dans les notations suivantes.

**Définition 5.7** Soit  $\mathbf{M}_{i,j}^k$  l'espace vectoriel défini par la somme

$$\mathbf{M}_{i,j}^k = \mathbf{M}_{i,j}^k(X, Y) = \sum_{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)} \mathbf{M}_{\mu/\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}}, \quad (5.13)$$

où la somme est prise sur tous les  $k$ -uplets de  $k$  cases de  $\mu$ , toutes situées dans l'ombre de  $(i, j)$ .

La première observation est que grâce aux opérateurs de sauts (cf. la Proposition 3.7) nous avons  $\mathbf{M}_{\mu/ij} = \mathbf{M}_{i,j}^1$  (équation (5.14)). Ainsi cet espace  $\mathbf{M}_{i,j}^k$  est une généralisation possible de  $\mathbf{M}_{\mu/ij}$  si l'on veut faire  $k$  trous dans

un diagramme de Ferrers. L'objet de cette section est de mettre en évidence l'intérêt de l'espace  $\mathbf{M}_{i,j}^k$  et de donner une assise à la Conjecture 5.15 qui affirme que  $\dim \mathbf{M}_{i,j}^k = \binom{s}{k} n!$ .

Cette section est divisée en quatre paragraphes. Le second paragraphe donne des applications des opérateurs de sauts à notre problème, en particulier en vue d'une réduction de la somme (5.13). Le paragraphe suivant est consacré à la preuve d'une borne supérieure ( $\binom{s}{k} n!$ ) pour la dimension de  $\mathbf{M}_{i,j}^k$ ; nous conjecturons que cette borne supérieure donne effectivement la dimension de  $\mathbf{M}_{i,j}^k$ . Enfin dans le quatrième et dernier paragraphe, nous étudions  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X)$ , le sous-espace de  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X, Y)$  constitué des polynômes de degré en  $Y$  nul, pour lequel nous obtenons une base explicite en harmonie avec la Conjecture 5.15.

### 5.3.2 Applications des opérateurs de sauts

Nous renvoyons aux Propositions 3.7, 3.11, 3.14 et à la Remarque 3.16 qui contiennent les principaux résultats sur les opérateurs de sauts que nous utiliserons.

Les opérateurs de sauts trouvent ici une nouvelle application en permettant, dans deux cas particuliers, de réduire la somme (5.13) définissant  $\mathbf{M}_{i,j}^k$ . Dans le cas où  $k = 1$ , on obtient en effet facilement la proposition suivante.

**Proposition 5.8** *Soit  $\mu$  une partition de  $n + 1$ , on a alors*

$$\mathbf{M}_{i,j}^1 = \mathbf{M}_{\mu/i,j}. \quad (5.14)$$

*Preuve.* En effet pour tous entiers  $k$  et  $l$ , nous avons :

$$e_k(\partial X) e_l(\partial Y) \Delta_{\mu/i,j} = c \cdot \Delta_{\mu/i+k,j+l}, \quad (5.15)$$

avec  $c$  un entier relatif non nul. Ceci implique l'inclusion  $\mathbf{M}_{i,j}^1 \subseteq \mathbf{M}_{\mu/i,j}$ , et la réciproque est immédiate. ■

Dans le cas particulier de 2 trous, on obtient la proposition analogue suivante.

**Proposition 5.9** *Soit  $\mu$  une partition de  $n + 2$ , la somme (5.13) peut être réduite sous la forme :*

$$\mathbf{M}_{i,j}^2 = \mathbf{M}_{\mu/\{(i,j),(i,j+1)\}} + \mathbf{M}_{\mu/\{(i,j),(i+1,j)\}}. \quad (5.16)$$

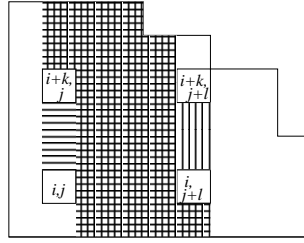
*Preuve.* Soient  $k$  et  $l$  des entiers strictement positifs. Nous utiliserons les notations (un peu) plus légères suivantes : pour deux cases  $c_1$  et  $c_2$ ,  $\epsilon_{c_1,c_2}^i =$

$\epsilon(\mu/\{(i, j), (i+1, j)\}, \mu/\{c_1, c_2\})$  et  $\epsilon_{c_1, c_2}^j = \epsilon(\mu/\{(i, j), (i, j+1)\}, \mu/\{c_1, c_2\})$ . En faisant attention aux différents signes qui apparaissent en appliquant les opérateurs de dérivation, nous obtenons alors les identités suivantes :

$$\begin{aligned} P_l(\partial Y)e_{k\perp 1}(\partial X)\Delta_{\mu/\{(i, j), (i+1, j)\}} &= P_l(\partial Y)(\epsilon_{(i, j), (i+k, j)}^i \Delta_{\mu/\{(i, j), (i+k, j)\}}) \\ &= (\perp 1)^{b+h} \epsilon_{(i+k, j), (i, j+l)}^i \Delta_{\mu/\{(i+k, j), (i, j+l)\}} \\ &\quad + (\perp 1)^{b+v+1} \epsilon_{(i, j), (i+k, j+l)}^i \Delta_{\mu/\{(i, j), (i+k, j+l)\}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

et

$$\begin{aligned} P_k(\partial X)e_{l\perp 1}(\partial Y)\Delta_{\mu/\{(i, j), (i, j+1)\}} &= P_k(\partial X)((\perp 1)^{b+h+1} \epsilon_{(i, j), (i, j+l)}^j \Delta_{\mu/\{(i, j), (i, j+l)\}}) \\ &= (\perp 1)^{b+h+1} ((\perp 1)^h \epsilon_{(i+k, j), (i, j+l)}^j \Delta_{\mu/\{(i+k, j), (i, j+l)\}} \\ &\quad + (\perp 1)^v \epsilon_{(i, j), (i+k, j+l)}^j \Delta_{\mu/\{(i, j), (i+k, j+l)\}}), \end{aligned} \quad (5.18)$$



où  $h$ ,  $v$  et  $b$  désignent respectivement les nombres de cases hachurées horizontalement, verticalement et quadrillées dans la figure ci-dessus (nous devons calculer la signature de la permutation qui réarrange les cases selon l'ordre lexicographique (1.1)).

En observant que le produit des signes des quatre coefficients dans (5.17) et (5.18) est  $(\perp 1)^{2(2b+2h+v+1)+1} = (\perp 1)$  nous avons que exactement trois des coefficients dans le système formé par (5.17) et (5.18) sont du même signe, donc  $\Delta_{\mu/\{(i, j), (i+k, j+l)\}}$  et  $\Delta_{\mu/\{(i+k, j), (i, j+l)\}}$  appartiennent à l'espace somme  $\mathbf{M}_{\mu/\{(i, j), (i, j+l)\}} + \mathbf{M}_{\mu/\{(i, j), (i+1, j)\}}$ .

Puis, d'après la Proposition 3.14, on peut déplacer simultanément deux trous par itération de  $h_2(X)$  et  $h_2(Y)$ . Ceci implique que pour tout couple de trous  $(c_1, c_2)$  dans l'ombre de  $(i, j)$  alors  $\Delta_{\mu/\{c_1, c_2\}} \in \mathbf{M}_{\mu/\{(i, j), (i, j+l)\}} + \mathbf{M}_{\mu/\{(i, j), (i+1, j)\}}$  d'où

$$\mathbf{M}_{i, j}^2 \subseteq \mathbf{M}_{\mu/\{(i, j), (i, j+l)\}} + \mathbf{M}_{\mu/\{(i, j), (i+1, j)\}}, \quad (5.19)$$

la réciproque étant triviale. ■

**Remarque 5.10** La question de la généralisation des deux résultats précédents (Propositions 5.8 et 5.9) pour  $k \geq 3$  se pose naturellement. Est-il suffisant de ne prendre que les diagrammes tels que les  $k$  trous forment une partition d'origine  $(i, j)$ ? La réponse est négative. Par exemple il est facile de vérifier (grâce à l'ordinateur et Maple) que quand  $\mu = (3, 2)$ ,

$$\Delta_{\mu/\{(0,0),(1,0),(0,2)\}} \notin \mathbf{M}_{\mu/\{(0,0),(1,0),(0,1)\}} + \mathbf{M}_{\mu/\{(0,0),(0,1),(0,2)\}}. \quad (5.20)$$

### 5.3.3 La borne supérieure

#### 5.3.3.a Étude de l'idéal annulateur

Le but de cet alinéa est de prouver la proposition suivante.

**Proposition 5.11** *L'idéal annulateur  $\mathcal{I}_{i,j}^k$  de  $\mathbf{M}_{i,j}^k$  est donné par*

$$\mathcal{I}_{i,j}^k = \bigcap_{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)} \mathcal{I}_{\partial x_{n+1}^{a_1} \partial y_{n+1}^{b_1} \dots \partial x_{n+k}^{a_k} \partial y_{n+k}^{b_k} \Delta_{\mu}} \cap \mathbb{Q}[X_n, Y_n] \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}, \quad (5.21)$$

où l'intersection est prise sur tous les  $k$ -uplets  $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$  de cases différentes dans l'ombre de  $(i, j)$ , que l'on suppose ordonnées selon l'ordre lexicographique.

*Preuve.* Soit  $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$   $k$  cases dans  $S_{\mu}(i, j)$ , l'ombre de  $(i, j)$  dans le diagramme de Ferrers de  $\mu$ . En développant  $\Delta_{\mu}$  par rapport aux  $k$  dernières lignes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu}(X_{n+k}, Y_{n+k}) = & \sum_{(a'_1, b'_1), \dots, (a'_k, b'_k)} \pm \Delta_{\{(a'_1, b'_1), \dots, (a'_k, b'_k)\}}(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) \\ & \times \Delta_{\mu/\{(a'_1, b'_1), \dots, (a'_k, b'_k)\}}(X_n, Y_n), \end{aligned} \quad (5.22)$$

où  $\bar{X}_n = \{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\}$  et  $\bar{Y}_n = \{y_{n+1}, \dots, y_{n+k}\}$ . Ainsi on en tire :

$$\partial(x_{n+1}^{a_1} y_{n+1}^{b_1} \dots x_{n+k}^{a_k} y_{n+k}^{b_k}) \Delta_{\mu}(X_{n+k}, Y_{n+k}) = c \Delta_{\mu/\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}}(X_n, Y_n) + C \quad (5.23)$$

où  $c$  est un entier relatif (différent de zéro) et  $C$  une combinaison linéaire à coefficients dans l'anneau  $\mathbb{Q}[x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}]$  de polynômes  $\Delta_{\mu/\{(a'_1, b'_1), \dots, (a'_k, b'_k)\}}(X_n, Y_n)$ , avec :

$$\forall 1 \leq l \leq k, \quad (a'_l, b'_l) \in S_{\mu}(i, j). \quad (5.24)$$



En effet  $\Delta_{\{(a'_1, b'_1), \dots, (a'_k, b'_k)\}}(\overline{X}_n, \overline{Y}_n)$  n'est pas tué par l'opérateur différentiel  $\partial(x_{n+1}^{a_1} y_{n+1}^{b_1} \cdots x_{n+k}^{a_k} y_{n+k}^{b_k})$  seulement s'il existe une permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_k$ , le groupe symétrique sur  $k$  éléments, telle que

$$(a'_{\sigma(l)}, b'_{\sigma(l)}) \in S_\mu(a_l, b_l), \quad \forall 1 \leq l \leq k. \quad (5.25)$$

Ceci est une conséquence de la définition de  $\Delta_{\{(a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2), \dots, (a'_k, b'_k)\}}$  :

$$\Delta_{\{(a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2), \dots, (a'_k, b'_k)\}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sgn}(\sigma) x_{n+1}^{a'_{\sigma(1)}} y_{n+1}^{b'_{\sigma(1)}} x_{n+2}^{a'_{\sigma(2)}} y_{n+2}^{b'_{\sigma(2)}} \cdots x_{n+k}^{a'_{\sigma(k)}} y_{n+k}^{b'_{\sigma(k)}}.$$

En dérivant par  $\partial(x_{n+1}^{a_1} y_{n+1}^{b_1} \cdots x_{n+k}^{a_k} y_{n+k}^{b_k})$ , nous obtenons (5.25). Pour tout  $1 \leq l \leq k$ , nous avons  $S_\mu(a_l, b_l) \subseteq S_\mu(i, j)$ . Par conséquent  $(a'_{\sigma(l)}, b'_{\sigma(l)}) \in S_\mu(i, j)$ ,  $\forall 1 \leq l \leq k$ . Comme  $\sigma$  est une permutation, ceci établit (5.24).

Afin d'illustrer l'équation (5.23), nous donnons l'exemple suivant :  $\mu = (3, 2)$ ,  $n = 3$ ,  $k = 2$ ,  $(a_1, b_1) = (0, 0)$ ,  $(a_2, b_2) = (1, 0)$ , alors

$$\begin{aligned} \partial(x_4^0 y_4^0 x_5^1 y_5^0) \Delta_\mu(X_5, Y_5) &= \Delta_{\mu/\{(0,0)(1,0)\}}(X_3, Y_3) + y_5 \Delta_{\mu/\{(0,0)(1,1)\}}(X_3, Y_3) \\ &\quad \perp y_4 \Delta_{\mu/\{(1,0)(0,1)\}}(X_3, Y_3) \\ &\quad + (\perp x_4 y_5 + x_4 y_4) \Delta_{\mu/\{(1,0)(1,1)\}}(X_3, Y_3) \\ &\quad \perp y_4^2 \Delta_{\mu/\{(1,0)(0,2)\}}(X_3, Y_3) + y_4 y_5 \Delta_{\mu/\{(0,1)(1,1)\}}(X_3, Y_3) \\ &\quad \perp y_4^2 y_5 \Delta_{\mu/\{(1,1)(0,2)\}}(X_3, Y_3). \end{aligned}$$

On en déduit alors l'égalité annoncée car :

- $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_{i,j}^k$  : soit  $P$  un polynôme dans  $\mathcal{I}$ . Comme  $P$  tue le terme de droite de (5.23), il tue le terme constant dans  $\mathbb{Q}[\overline{X}_n, \overline{Y}_n]$  du terme de gauche qui est justement  $\Delta_{\mu/\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}}(X_n, Y_n)$ . Donc  $P$  est dans  $\mathcal{I}_{i,j}^k$ .
- $\mathcal{I}_{i,j}^k \subseteq \mathcal{I}$  : soit  $P$  un polynôme dans  $\mathcal{I}_{i,j}^k$ . Par (5.24),  $P$  tue tous les termes de droite dans (5.23) ; donc il tue le terme de gauche. Ceci implique  $P \in \mathcal{I}$ .

■

### 5.3.3.b Ensemble de points et idéaux annulateurs

Le raisonnement est celui de [7], section 3.2, inspiré de [10], Theorem 4.2. Soit  $\mu$  une partition de  $n + k$  et  $(i, j) \in \mu$ . Nous reprenons le procédé défini en (2.6) associant à un tableau injectif  $T$  de forme  $\mu$  un point

$\rho(T) = (a(T), b(T))$  dans  $\mathbb{Q}^{2(n+k)}$ . L'ensemble de tous les points  $\rho(T)$  pour  $T$  décrivant l'ensemble des tableaux injectifs de forme  $\mu$  est noté  $[\rho]$ ; par injectivité de (2.6), son cardinal est  $(n+k)!$ .

En ne conservant que les  $n$  premières entrées de  $a(T)$  et de  $b(T)$ , nous avons un point  $\rho^k(T)$  dans  $\mathbb{Q}^{2n}$ . L'ensemble des points ainsi défini, pour  $T$  décrivant l'ensemble des tableaux injectifs ayant les étiquettes  $n+1, \dots, n+k$  dans l'ombre de  $(i, j)$ , est noté  $[\rho^k]$ . Comme deux tableaux  $T$  et  $T'$  donnent le même point si et seulement si les étiquettes  $\{1, \dots, n\}$  occupent la même place dans  $T$  et  $T'$ , nous avons une bijection

$$\begin{array}{l} \mathcal{T}_{i,j}^k \xrightarrow{\perp} [\rho^k] \\ T \xrightarrow{\perp} \rho^k(T) \end{array} \quad (5.26)$$

où  $\mathcal{T}_{i,j}^k$  est l'ensemble des tableaux de forme  $\mu$  ayant  $n$  étiquettes  $\{1, \dots, n\}$  et  $k$  cases blanches (sans étiquette), ces dernières étant situées dans l'ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu$ . Rappelons que nous notons  $s$  le cardinal de l'ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu$ . Le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{T}_{i,j}^k$  est alors  $\binom{s}{k} n!$  et donc par bijectivité de (5.26), l'ensemble  $[\rho^k]$  est composé de  $\binom{s}{k} n!$  points. Nous introduisons alors  $J_{[\rho^k]}$ , l'idéal des polynômes qui sont nuls sur tout l'ensemble  $[\rho^k]$ , puis l'idéal  $\mathcal{I}^k = \text{gr} J_{[\rho^k]}$  et l'espace des harmoniques  $\mathbf{H}^k = (\mathcal{I}^k)^\perp$  où le produit scalaire est défini en (2.1).

La première information, conséquence de la Remarque 2.4 et de  $||[\rho^k]|| = \binom{s}{k} n!$  est donnée par l'équation suivante :

$$\dim \mathbf{H}^k = \binom{s}{k} n!. \quad (5.27)$$

Nous voulons maintenant maintenant prouver que

$$\mathbf{M}_{i,j}^k \subseteq \mathbf{H}^k \quad (5.28)$$

et d'après la Proposition 2.1, ceci est équivalent à prouver que  $\mathcal{I}^k \subseteq \mathcal{I}$ .

### 5.3.3.c Inclusion

Le but de cet alinéa est de prouver l'inclusion suivante.

**Proposition 5.12** *Nous avons l'inclusion :*

$$\mathcal{I}^k \subseteq \mathcal{I}. \quad (5.29)$$

*Preuve.* Soit  $P$  un polynôme dans  $J_{[\rho^k]}$ . Nous considérons le polynôme

$$Q(X_{n+k}, Y_{n+k}) = P(X_n, Y_n) \times \prod_{i'=0}^{i \perp 1} (x_{n+1} \pm \alpha_{i'}) \cdots \prod_{i'=0}^{i \perp 1} (x_{n+k} \pm \alpha_{i'}) \\ \times \prod_{j'=0}^{j \perp 1} (y_{n+1} \pm \alpha_{j'}) \cdots \prod_{j'=0}^{j \perp 1} (y_{n+k} \pm \alpha_{j'}). \quad (5.30)$$

Nous voulons vérifier que ce polynôme est un élément de  $J_{[\rho]}$ . Prenons un point quelconque  $(a, b) = (a(T), b(T))$  dans  $[\rho]$ . Si sa projection sur  $\mathbb{Q}^{2n}$  (obtenue en gardant les  $n$  premières entrées de  $a$  et  $b$ ) est dans  $[\rho^k]$  alors  $Q(a, b) = 0$  à cause de  $P$ . Sinon, le tableau  $T$  doit avoir au moins une entrée entre  $n+1$  et  $n+k$  dans le complémentaire de l'ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu$ , i.e. soit dans les  $i$  premières lignes soit dans les  $j$  premières colonnes et nous avons à nouveau  $Q(a, b) = 0$ .

Ainsi  $Q \in J_{[\rho]}$ , ce qui implique d'après le Théorème 2.6 :  $h(Q) \in \mathcal{I}_{\Delta_\mu}$ . En considérant le terme de plus haut degré, nous en déduisons :

$$h(P) \in \mathcal{I}_{\partial x_{n+1}^{i+1} \partial y_{n+1}^{j+1} \cdots \partial x_{n+k}^{i+1} \partial y_{n+k}^{j+1} \Delta_\mu}.$$

Pour tout ensemble de  $k$  cases  $\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$  dans l'ombre de  $(i, j)$ , nous observons que  $\forall r, 1 \leq r \leq k, a_r \geq i$  and  $b_r \geq j$ . D'où l'on déduit que  $h(P)$  est dans  $\mathcal{I}$ , ce qu'il fallait démontrer. ■

### 5.3.3.d Conclusion

Le résultat principal est alors une conséquence des derniers paragraphes.

**Théorème 5.13** *Si  $\mu$  est une partition de  $n+k$  et  $s$  le cardinal de l'ombre de la case  $(i, j)$ , alors nous avons :*

$$\dim \mathbf{M}_{i,j}^k \leq \binom{s}{k} n!. \quad (5.31)$$

**Remarque 5.14** Si l'on se rappelle la preuve du Théorème 2.6, nous observons que le raisonnement précédent a la conséquence suivante. Si l'égalité est vérifiée dans le Théorème 5.13, alors  $\mathbf{M}_{i,j}^k$  se décompose comme  $\binom{s}{k}$  fois la représentation régulière à gauche.

Les expérimentations numériques (menées grâce à Maple) sur de petits exemples montrent que l'égalité doit être vérifiée en (5.31). De plus le fait que la construction précédente donne la bonne borne supérieure dans le cas d'un seul ensemble de variables (cf. la section suivante) nous conduisent à formuler la conjecture suivante.

**Conjecture 5.15** *Avec les notations du théorème précédent :*

$$\dim \mathbf{M}_{i,j}^k = \binom{s}{k} n!. \quad (5.32)$$

**Remarque 5.16** Quand  $k = 1$ , cette conjecture se réduit à la Conjecture 4.4 et quand  $s = k$  ou  $k = 0$  à la conjecture  $n!$ .

L'idée de considérer des sommes de modules  $\mathbf{M}_L$  est due à F. Bergeron qui a donné de la Conjecture 5.15 la forme plus précise suivante (cf. [15]) en termes de caractéristiques de Frobenius bigraduées.

**Conjecture 5.17** *Si  $\pi$  est la partition de  $s$  correspondant à l'ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu$  alors la caractéristique de Frobenius bigraduée de  $\mathbf{M}_{i,j}^k$  est donnée par la formule suivante*

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathbf{M}_{i,j}^k) = \sum_{\substack{\nu \subseteq \pi \\ |\nu|=s-k}} c_{\mu\nu}^k(q, t) \tilde{H}_{\mu \perp \pi + \nu}(x; q, t) \quad (5.33)$$

où  $\mu \perp \pi + \nu$  est la partition obtenue en remplaçant  $\pi$  par  $\nu$  dans  $\mu$  et les coefficients  $c_{\mu\nu}^k(q, t)$  sont les fractions rationnelles apparaissant dans la formule de Pieri-Macdonald

$$h_k^\perp \tilde{H}_\mu(x; q, t) = \sum_{\substack{\nu \subseteq \mu \\ |\nu|=n}} c_{\mu\nu}^k(q, t) \tilde{H}_\nu(x; q, t)$$

avec  $h_k^\perp$  l'opérateur dual de la multiplication par  $h_k$ , la dualité étant entendue par rapport au produit scalaire usuel sur  $\Lambda$ , i.e. celui faisant des fonctions de Schur une base orthonormale.

### 5.3.4 Cas d'un ensemble de variables

Le but de ce paragraphe est d'obtenir une base explicite, en harmonie avec la Conjecture 5.15, pour  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X)$ , le sous-espace de  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X, Y)$  constitué des éléments de degré nul en  $Y$ .

#### 5.3.4.a Construction

Rappelons brièvement (cf. section 3.3) que pour une partition  $\mu$  de  $n$ , l'espace  $\mathbf{M}_\mu(X) = \mathbf{M}_\mu \cap \mathbb{Q}[X_n]$  est de dimension  $n!/\mu!$  et nous notons  $\mathcal{M}_\mu(X)$  un ensemble de monômes (cf. Remarque 3.22) tel que

$$\{M(\partial)\Delta_\mu(X, Y) ; M \in \mathcal{M}_\mu(X)\}$$

soit une base de  $\mathbf{M}_\mu(X)$ .

Maintenant soit  $\mu$  une partition de  $n + k$  et  $(i, j)$  notre case de référence. On choisit alors, dans le diagramme de Ferrers  $\mu$ ,  $k$  cases que l'on marque d'un cercle.

**Définition 5.18** *Une case cerclée est dite droite si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

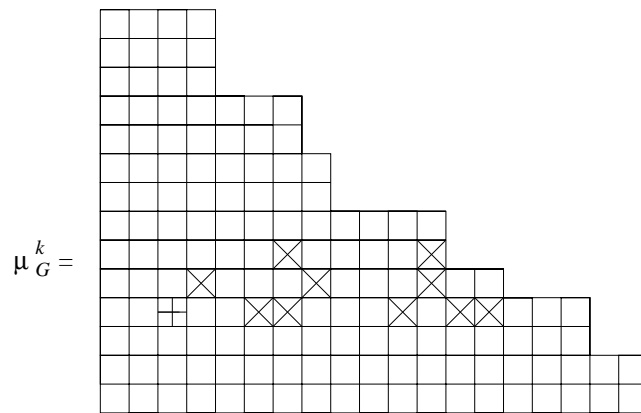
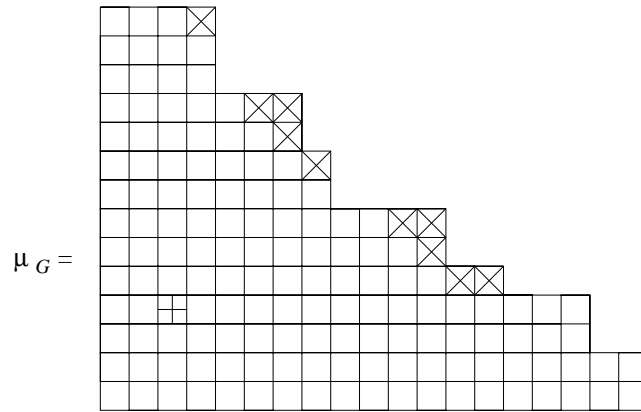
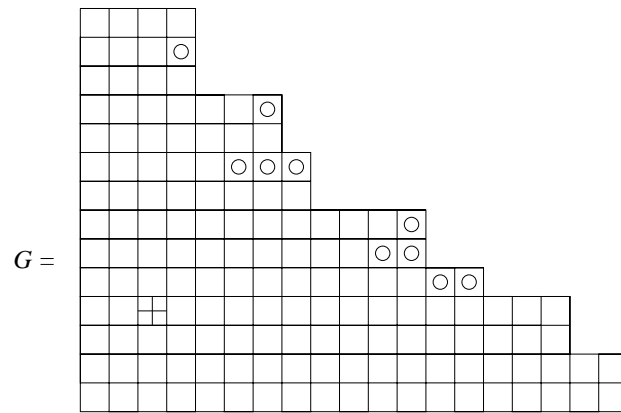
- elle est dans l'ombre de la case  $(i, j)$  ;
- elle a sur sa droite soit une case cerclée soit une case à l'extérieur de  $\mu$ .

*Un diagramme gauche est un objet obtenu en choisissant, dans le diagramme de Ferrers  $\mu$ ,  $k$  cases cerclées droites. Nous noterons  $\mathcal{G}_\mu^k$  l'ensemble de ces diagrammes gauches.*

Nous allons maintenant associer à chaque diagramme gauche  $G$  deux autres objets : une partition  $\mu_G$  et un diagramme avec  $k$  trous dans l'ombre de  $(i, j)$  noté  $\mu_G^k$ . La figure de la page 125 donne un exemple de diagramme gauche  $G$  et illustre la construction détaillée ci-après en donnant la partition  $\mu_G$  et le diagramme à trous  $\mu_G^k$  associés à  $G$ . Dans cette figure les cases droites choisies dans  $G$  sont représentées avec un cercle, dans la case  $(i, j)$  apparaît un signe + et les trous dans  $\mu_G^k$  sont représentés comme d'habitude par des croix ( $\times$ ). Dans cet exemple  $n = 142$  et  $k = 10$ .

À un diagramme gauche  $G$  dans  $\mathcal{G}_\mu^k$  nous commençons par associer  $\mu_G$ , la partition de  $n$  obtenue en poussant jusqu'en haut du diagramme de Ferrers les cases cerclées, puis en les retirant (se reporter à la figure).

Nous définissons aussi un diagramme  $\mu_G^k$  comportant  $k$  trous en procédant de la façon suivante. Nous considérons les colonnes de  $G$  où une case cerclée apparaît. Dans notre exemple, il y a 8 telles colonnes. Pour une colonne  $j' \geq j$  où une case cerclée apparaît, nous notons  $h(j')$  le nombre de places dans cette colonne sous la case cerclée la plus basse (dans cette colonne) où nous aurions pu placer une case cerclée droite. Dans notre exemple, nous avons :  $h(3) = 1$ ,  $h(5) = 0$ ,  $h(6) = 0$ ,  $h(7) = 1$ ,  $\dots$ ,  $h(13) = 0$ . Ensuite pour chacune de ces colonnes  $j'$  ayant une case cerclée, nous opérons comme suit. Notons  $(c(j'), j')$ ,  $(c(j') + a_1, j')$ ,  $\dots$ ,  $(c(j') + a_d, j')$  les positions des cases cerclées dans la colonne  $j'$  de  $G$ , avec  $(c(j'), j')$  la position de la plus basse,  $a_0 < a_1 < \dots < a_d$ , et  $d + 1$  le nombre de cases cerclées dans la colonne  $j'$ . On place alors des trous dans les cases  $(i + h(j'), j')$ ,  $(i + h(j') + a_1, j')$ ,  $\dots$ ,  $(i + h(j') + a_d, j')$  de  $\mu$ . En faisant cela pour toutes les colonnes



de  $\mu$ , on obtient  $\mu_G^k$ . Cette construction est illustrée par la figure de la page 125.

L'idée cruciale est alors d'appliquer les monômes relatifs à  $\mu_G$  au déterminant associé à  $\mu_G^k$ . Énonçons alors le résultat principal de cette section.

**Théorème 5.19** *Avec les notations précédentes*

$$\mathcal{B}_{i,j}^k(X) = \{M(\partial)\Delta_{\mu_G^k} ; M \in \mathcal{M}_{\mu_G}(X), G \in \mathcal{G}_\mu^k\} \quad (5.34)$$

*est une base de l'espace vectoriel  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X)$ .*

**Remarque 5.20** Il est aisé de voir que la famille définie en (5.34) coïncide avec la construction (4.30) dans le cas d'un seul trou. Le fait d'avoir plusieurs trous rend, dans le cas de  $\mathcal{B}_{i,j}^k(X)$ , l'utilisation de tableaux standard très difficile.

Nous allons maintenant consacrer la fin de cette section à prouver ce théorème. Pour cela, nous commencerons par obtenir une borne supérieure pour la dimension de  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X)$  (de façon analogue au Théorème 4.7), puis nous vérifierons que le cardinal de  $\mathcal{B}_{i,j}^k(X)$  coïncide avec cette borne supérieure, et enfin nous prouverons que  $\mathcal{B}_{i,j}^k(X)$  est linéairement indépendante.

### 5.3.4.b Borne supérieure

**Définition 5.21** *Nous noterons  $\mathcal{T}_{i,j}^k(X)$  l'ensemble des tableaux  $T$  de forme  $\mu$  vérifiant les conditions suivantes :*

- $T$  comporte  $k$  cases blanches (ou  $k$  trous), dépourvues d'entrées ;
- ces  $k$  cases sont droites ;
- les  $n$  autres cases sont occupées de façon bijective par les  $n$  entrées  $\{1, \dots, n\}$  ;
- ces  $n$  entrées sont rangées en croissant sur les lignes.

De façon alternative, on peut aussi voir  $\mathcal{T}_{i,j}^k(X)$  comme l'ensemble des tableaux injectifs, croissants sur les lignes de forme l'un des diagrammes gauches  $G$  de  $\mathcal{G}_\mu^k$ .

La prochaine proposition donne une borne supérieure pour la dimension de  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X)$ , analogue en un alphabet du Théorème 5.13.

**Proposition 5.22** *La dimension de  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X)$  satisfait l'inégalité suivante :*

$$\dim \mathbf{M}_{i,j}^k(X) \leq |\mathcal{T}_{i,j}^k(X)|. \quad (5.35)$$

*Preuve.* De la Proposition 5.11 et du Lemme 2.13 appliqué à  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X, Y)$ , qui est évidemment stable par dérivation, nous déduisons que l'idéal annulateur  $\mathcal{I}_{i,j}^k(X)$  de  $\mathbf{M}_{i,j}^k(X)$  vérifie :

$$\mathcal{I}_{i,j}^k(X) = \mathcal{I}_{i,j}^k \cap \mathbb{Q}[X_n] = \mathcal{I} \cap \mathbb{Q}[X_n].$$

Nous considérons alors la projection de  $[\rho^k]$  sur  $\mathbb{Q}^n$ , i.e. nous associons à chaque tableau  $T$  de forme  $\mu$  privée de  $k$  cases dans l'ombre de  $(i, j)$  ayant  $n$  entrées  $\{1, \dots, n\}$  le point  $a_{|n}(T)$  en respectant le mécanisme décrit en 5.26. Notons  $[\rho^k(X)]$  cet ensemble de points et  $J_{[\rho^k]}(X)$  son idéal annulateur dans  $\mathbb{Q}[X_n]$ . D'après la définition de  $a_{|n}(T)$ , il est clair que deux tableaux donnent le même point si et seulement si ils possèdent sur chaque ligne le même nombre de trous et les mêmes entrées. Par conséquent, il suffit d'associer un point  $a_{|n}(T)$  à chaque tableau  $T$  dans  $\mathcal{T}_{i,j}^k(X)$ . Dans ce cas l'application  $T \mapsto a_{|n}(T)$  est bijective et le nombre de points dans  $\rho^k(X)$  est justement  $|\mathcal{T}_{i,j}^k(X)|$ , qui est donc aussi la dimension de  $\text{gr}(J_{[\rho^k]}(X))^\perp$  (c'est l'exact analogue de (5.27)).

Il reste alors à prouver l'inclusion suivante pour achever de justifier la Proposition 5.22:

$$\text{gr}(J_{[\rho^k]}(X)) \subseteq \mathcal{I}_{i,j}^k(X). \quad (5.36)$$

Soit  $P$  un polynôme de  $J_{[\rho^k]}(X)$ . Comme  $P \in \mathbb{Q}[X_n] \subset \mathbb{Q}[X_n, Y_n]$ ,  $P$  est aussi dans l'idéal annulateur de  $[\rho^k]$ , donc  $\text{gr}(P) \in \mathcal{I}_{i,j}^k$  et ainsi  $\text{gr}(P) \in \mathcal{I}_{i,j}^k \cap \mathbb{Q}[X_n] = \mathcal{I}_{i,j}^k(X)$ . Nous en tirons  $\text{gr}(J_{[\rho^k]}(X)) \subseteq \mathcal{I}_{i,j}^k(X)$  et l'équation (5.35) est maintenant une conséquence de la Proposition 2.1. ■

#### 5.3.4.c Calcul du cardinal

Nous voulons ici prouver que :

**Proposition 5.23** *Nous avons l'égalité suivante*

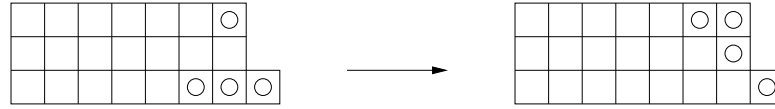
$$|\mathcal{B}_{i,j}^k(X)| = |\mathcal{T}_{i,j}^k(X)|. \quad (5.37)$$

*Preuve.* Notons à nouveau  $\ell$  la hauteur de la partition  $\mu$ . Pour un diagramme gauche  $G$  fixé dans  $\mathcal{G}_\mu^k$ , le nombre d'éléments qui lui sont associés dans  $\mathcal{B}_{i,j}^k(X)$  est égal à  $\frac{n!}{r_1! \dots r_\ell!}$  où les  $r_t$  sont les longueurs des lignes de  $\mu_G$



en raison de la Proposition 3.24 et de (5.34). D'après la Définition 5.21 le nombre d'éléments dans  $\mathcal{T}_{i,j}^k(X)$  associés à  $G$  est  $\frac{n!}{s_1! \cdots s_\ell!}$  où les  $s_\ell$  sont les longueurs des lignes de  $G$ .

Il est par conséquent suffisant de montrer que l'ensemble des longueurs des lignes ne changent pas quand on fait monter les cases cerclées (i.e. quand on passe de  $G$  à  $\mu_G$ ). Regardons par exemple les lignes 9, 10 et 11 de l'exemple précédent (figure page 125).



Nous observons que les longueurs des lignes sont 5, 7, 6 avant la transformation et 7, 6, 5 après. Ainsi l'ensemble des longueurs est inchangé. Il est aisé de voir que c'est toujours le cas. ■

#### 5.3.4.d Indépendance

Nous achevons ici la preuve du Théorème 5.19 en prouvant l'indépendance linéaire de l'ensemble  $\mathcal{B}_{i,j}^k(X)$ .

Nous définissons la profondeur d'un trou comme le nombre de cases (différentes de trous) qui se trouvent au-dessus de ce trou. Nous considérons les  $k$ -uplets des profondeurs des  $k$  trous de  $\mu_G^k : (d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k)$ . La clé de la preuve est le résultat suivant :

**Lemme 5.24** *Les  $k$ -uplets  $(d_1, d_2, \dots, d_k)$  sont tous distincts.*

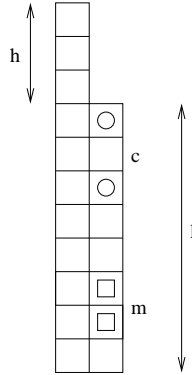
*Preuve.* Nous voulons prouver que la profondeur des trous augmentent de la droite vers la gauche et de haut en bas à l'intérieur d'une même colonne, et que deux diagrammes gauches distincts  $G$  et  $G'$  de  $\mathcal{G}_\mu^k$  donnent deux  $k$ -uplets de profondeurs distincts. Nous regardons les cases cerclées de la droite vers la gauche, puis de haut en bas.

Nous nous référons à la figure suivante qui représente les cases au-dessus de la ligne  $i$  de deux colonnes consécutives, étant donné qu'on les examine les unes après les autres de la droite vers la gauche. Dans ce dessin,

- $c$  représente le nombre de cases cerclées dans la colonne que nous examinons ;
- $m$  est le nombre de positions où il serait possible de placer une case cerclée droite en-dessous de la case cerclée inférieure de cette colonne (ces cases sont marquées d'un carré) ;

- $l$  est la hauteur de cette colonne (nous nous contentons des cases situées au-dessus de la  $i$ -ième ligne);
- $l + h$  est la hauteur de la prochaine colonne (i.e. la première à gauche).

Nous voulons prouver que si nous plaçons une case cerclée droite dans cette colonne, la profondeur du trou associé sera au moins égal à celles des trous précédents, et que sa position est non ambiguë si cette profondeur est donnée.



La profondeur du trou associé à la case cerclée inférieure est  $p = l \perp c \perp m$ . La plus grande profondeur qui puisse être obtenue dans cette colonne est  $l \perp c$  si  $m = 0$  et  $l \perp c \perp 1$  si  $m > 0$ . Dans la colonne suivante la profondeur la plus faible est (cela correspond à placer un cercle au sommet de cette colonne):  $l + h \perp 1 \perp c \perp h + 1 = l \perp c$ . Donc la profondeur des trous augmente bien dans l'ordre annoncé et il n'y a pas ambiguë pour la position de la prochaine case cerclée si la profondeur suivante est donnée. ■

**Proposition 5.25** *L'ensemble de polynômes  $\mathcal{B}_{i,j}^k(X)$  défini dans le Théorème 5.19 est linéairement indépendant. Donc en particulier, l'égalité est vérifiée dans la Proposition 5.22.*

*Preuve.* Le raisonnement se fait par l'absurde. Supposons que nous avons une relation de dépendance linéaire non triviale entre les éléments de  $\mathcal{B}_{i,j}^k(X)$ . Nous considérons alors le plus grand (par rapport à l'ordre lexicographique)  $k$ -uplet de profondeur qui apparaît dans cette relation:  $(d_1^0, d_2^0, \dots, d_k^0)$ . Ce  $k$ -uplet est relatif à un diagramme gauche  $G^0$ . Nous appliquons alors l'opérateur différentiel suivant:  $h_k(\partial)^{d_1^0} . h_{k \perp 1}(\partial)^{d_2^0 \perp d_1^0} \dots h_1(\partial)^{d_k^0 \perp d_{k-1}^0}$  à la relation de dépendance.

Nous utilisons la Proposition 3.14. Elle implique que par définition de  $G^0$ , cet opérateur tue tous les termes sauf ceux relatifs à  $G^0$ . Ces termes

donnent alors des polynômes dans  $B = \{M(\partial)\Delta_{\mu_{G^0}} : M \in \mathcal{M}_{\mu_{G^0}}(X)\}$ . Ceux-ci sont indépendants car  $B$  est une base de  $\mathbf{M}_{\mu_{G^0}}(X)$ . Nous obtenons ainsi la contradiction souhaitée.

Les preuves de la Proposition 5.25 et par conséquent du Théorème 5.19 sont maintenant complètes. ■

## 5.4 Anti-ombre et dualité

### 5.4.1 Présentation

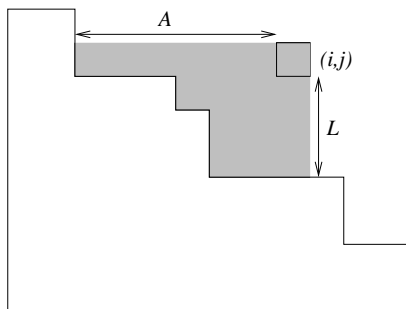
Nous présentons ici une étude introduite dans [11] par F. Bergeron, A. Garsia et G. Tesler.

**Définition 5.26** Si  $\mu$  est une partition de  $n + 1$  et  $(i, j)$  une case située à l'extérieur de  $\mu$ , nous notons  $\mu + [ij]$  le diagramme obtenu en rajoutant à  $\mu$  la case  $(i, j)$ . Nous qualifions  $\mu + [ij]$  de partition grainée et appelons  $(i, j)$  son grain.

Nous montrons dans cette section la grande analogie existant entre  $\mathbf{M}_{\mu/[ij]}$  et  $\mathbf{M}_{\mu+[ij]}$ . Notons  $\mu^\perp$  l'ensemble des cases du réseau carré situées à l'extérieur de  $\mu$  et définissons l'anti-ombre de  $(i, j)$  comme :

$$AS_\mu(i, j) = \{(i', j') \in \mu^\perp ; i' \leq i \text{ et } j' \leq j\}. \quad (5.38)$$

Nous noterons  $as_\mu(i, j)$  son cardinal, ou simplement  $a$  si aucune confusion n'est possible. La figure suivante illustre la notion d'anti-ombre (partie grisée), ainsi que celle d'anti-bras ( $A$ ) et d'anti-jambe ( $L$ ).



**Proposition 5.27** Pour toute partition  $\mu$  de  $n \perp 1$  et  $(i, j) \in \mu^\perp$ , nous avons

$$D_X^h D_Y^k \Delta_{\mu+[i,j]}(X, Y) =_{\text{cte}} \begin{cases} \Delta_{\mu+[i \perp h, j \perp k]}(X, Y) & \text{si } (i \perp h, j \perp k) \in \mu^\perp \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition 5.28** *Avec les notations précédentes et si  $(i \perp h, j \perp k) \in \mu^\perp$ , alors*

$$D_X^h D_Y^k \mathbf{M}_{\mu+[i,j]} = \mathbf{M}_{\mu+[i \perp h, j \perp k]}.$$

*En particulier, nous avons l'inclusion*

$$\mathbf{M}_{\mu+[i',j']} \subseteq \mathbf{M}_{\mu+[i,j]} \quad (5.39)$$

*pour toute case  $(i', j')$  dans l'anti-ombre de  $(i, j)$ .*

L'analogie de la Conjecture 4.4 est la suivante.

**Conjecture 5.29** *Pour toute partition  $\mu$  de  $n \perp 1$  et toute case  $(i, j) \in \mu^\perp$ , l'espace  $\mathbf{M}_{\mu+[ij]}$  vérifie :*

$$\dim \mathbf{M}_{\mu+[ij]} = \alpha_\mu(i, j).n! \quad (5.40)$$

*où  $\alpha_\mu(i, j)$  est le nombre de cases dans l'anti-ombre de  $(i, j)$  dans  $\mu^\perp$ .*

Elle admet une forme plus précise, en termes de caractéristique de Frobenius bigraduée (cf. [11], Conjecture 5.2), qui est équivalente à la récurrence à quatre termes suivante.

**Conjecture 5.30** *La caractéristique de Frobenius bigraduée de  $\mathbf{M}_{\mu+[i,j]}$ , notée  $C_{\mu+[i,j]}$  est caractérisée par*

*(i) la récurrence à quatre termes*

$$C_{\mu+[i,j]} = \frac{t^L \perp q^{A+1}}{t^L \perp q^A} C_{\mu+[i,j \perp 1]} + \frac{t^{L+1} \perp q^A}{t^L \perp q^A} C_{\mu+[i \perp 1, j]} \perp \frac{t^{L+1} \perp q^{A+1}}{t^L \perp q^A} C_{\mu+[i \perp 1, j \perp 1]} \quad (5.41)$$

*(ii) avec la condition aux bords que les termes  $C_{\mu+[i,j \perp 1]}$ ,  $C_{\mu+[i \perp 1, j]}$  ou  $C_{\mu+[i \perp 1, j \perp 1]}$  sont nuls si les cases correspondantes  $(i, j \perp 1)$ ,  $(i \perp 1, j)$  ou  $(i \perp 1, j \perp 1)$  pénètrent le diagramme  $\mu$ , et sont égaux à  $\tilde{H}_{\mu+[i,j \perp 1]}$ ,  $\tilde{H}_{\mu+[i \perp 1, j]}$  ou  $\tilde{H}_{\mu+[i \perp 1, j \perp 1]}$  quand le diagramme considéré est une partition.*

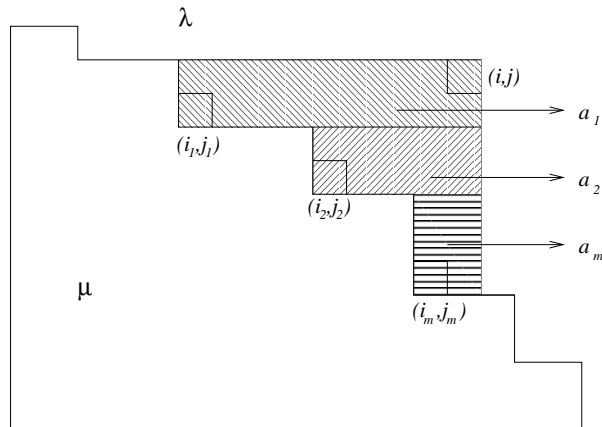
### 5.4.2 Borne supérieure

Nous voulons ici obtenir la première information supportant la Conjecture 5.29 :

**Théorème 5.31** *Pour toute partition  $\mu$  de  $n \perp 1$  et toute case  $(i, j) \in \mu^\perp$ , nous avons :*

$$\dim \mathbf{M}_{\mu+[ij]} \leq \alpha_\mu(i, j).n!. \quad (5.42)$$

*Preuve.* La preuve, semblable à celle du Théorème 4.7, ne sera pas totalement détaillée. Nous utilisons les notations de la figure ci-dessous. Si  $a$  désigne le cardinal de l'anti-ombre, nous notons  $\lambda$  la partition de  $n + a \perp 1$  telle que  $\mu \subseteq \lambda$  et  $(i, j) \in \lambda$ . Nous posons  $m$  le nombre de *coins extérieurs* de  $\mu$  dans l'anti-ombre de  $(i, j)$  (i.e. le nombre de cases  $c \in AS_\mu(i, j)$  telles que  $\mu + [c]$  est une partition). Leurs coordonnées sont notées  $(i_h, j_h)$  pour  $1 \leq h \leq m$ . Nous noterons de plus  $a_h$  le nombre de cases dans le rectangle  $S_\lambda(i_h, j_h) \setminus S_\lambda(i_{h+1}, j_{h+1})$ , avec la convention que  $S_\lambda(i_0, j_0)$  est vide. Avec cette convention, nous avons :  $a_1 + \dots + a_m = a$ .



Notons alors  $[\rho_\lambda]$  l'ensemble de points  $\rho(T) = (a(T), b(T))$  de  $\mathbb{Q}^{2(n+a)}$  obtenu en appliquant le procédé (2.6) à l'ensemble  $\mathcal{IT}_\lambda$  des tableaux injectifs de forme  $\lambda$ . On introduit comme d'habitude l'idéal annulateur associé  $J_{[\rho_\lambda]}$ .

Considérons maintenant l'ensemble  $\mathcal{T}_{\mu+[ij]}$ , sous-ensemble de  $\mathcal{IT}_\lambda$  constitué des tableaux tels que les étiquettes  $n + 1, \dots, n + a \perp 1$  soient dans  $AS_\mu(i, j)$ . L'ensemble de points de  $\mathbb{Q}^{2n}$  obtenu en associant à un tableau  $T$  de  $\mathcal{T}_{\mu+[ij]}$  les  $n$  premières entrées de  $a(T)$  et de  $b(T)$  est noté  $[\rho_{\mu+[ij]}]$ . Son cardinal est  $a.n!$ . Nous introduisons alors  $J_{[\rho_{\mu+[ij]}]}$  son idéal annulateur et  $\mathbf{H}_{[\rho_{\mu+[ij]}]} = (\text{gr } J_{[\rho_{\mu+[ij]}]})^\perp$  son espace d'harmoniques associé. Nous avons

$$\dim \mathbf{H}_{[\rho_{\mu+[ij]}]} = a.n!$$

et il s'agit donc de prouver que

$$\text{gr } J_{[\rho_{\mu+[ij]}]} \subseteq \mathcal{I}_{\Delta_{\mu+[ij]}}. \quad (5.43)$$

Soit donc  $P(X_n, Y_n) \in J_{[\rho_{\mu+[ij]}}]$ . Nous considérons le polynôme

$$Q(X_{n+a\perp 1}, Y_{n+a\perp 1}) = \prod_{h=1}^m \prod_{s=p(h)}^{q(h)} \prod_{i'=0}^{i_h\perp 1} (x_s \perp \alpha_{i'}) \prod_{j'=0}^{j_h\perp 1} (y_s \perp \beta_{i'})$$

où  $p$  et  $q$  sont définis par :  $p(1) = n + 1$ ,  $q(1) = n + a_1 \perp 1$  et pour  $h \geq 2$ ,  $p(h) = q(h \perp 1) + 1$  et  $q(h) = p(h) + a_h \perp 1$ . Il est clair que  $Q$  annule toute l'orbite  $[\rho_\lambda]$ , donc  $h(Q)$  est un élément de  $\mathcal{I}_{\Delta_\lambda}$ . Par conséquent  $h(P)$  tue

$$\left( \prod_{h=1}^m \prod_{s=p(h)}^{q(h)} \partial x_s^{i_h} y_s^{j_h} \right) \Delta_\lambda. \quad (5.44)$$

En observant que  $\Delta_{\mu+[ij]}$  est le coefficient dans  $\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$  de l'un des monômes dans  $\mathbb{Q}[X_{n+a\perp 1} \setminus X_n, Y_{n+a\perp 1} \setminus Y_n]$  du polynôme (5.44), on en tire que  $h(P)$  tue  $\Delta_{\mu+[ij]}$ , donc (5.43). ■

### 5.4.3 Cas d'un alphabet

Compte tenu des deux paragraphes précédents, tout se passe aussi bien pour  $\mathbf{M}_{\mu+[ij]}(X)$  que pour  $\mathbf{M}_{\mu/ij}(X)$  à la section 4.3. En particulier, il est possible de construire une base explicite de  $\mathbf{M}_{\mu+[ij]}(X)$ , analogue de (4.30), qui permet d'obtenir la spécialisation de la récurrence à quatre termes (Conjecture 5.30) en un alphabet.

Nous reprenons les notations de la figure page 132 et posons  $\nu_h^{(+)} = \mu + [i_h, j_h]$  la partition obtenue en rajoutant à  $\mu$  le coin extérieur  $(i_h, j_h)$ . Pour un tableau  $T$  de forme  $\nu_h^{(+)}$  et une case  $(u, v)$  de  $AS_\mu(i, j)$  telle que  $v = j_h$ , nous notons  $T \uparrow_{u,v}^{(+)}$  le tableau obtenu en plaçant la case  $(i_h, j_h)$  de  $T$  en place  $(u, v)$ . Par analogie avec (4.29), nous définissons

$$\mathcal{A}_{uv}^{(+)} = \{ \partial X^{\mathbf{m}} \Delta_{T \uparrow_{u,v}^{(+)}}(X) ; X^{\mathbf{m}} \in \mathbf{B}_T, T \in \mathcal{ST}_{\nu_h^{(+)}} \}.$$

En posant  $\gamma_h = i_{h\perp 1} \perp i_h$  avec la convention que  $i_0 = i + 1$ , nous avons le Théorème suivant, exact analogue du Théorème 4.15.

**Théorème 5.32** *Pour  $\mu$  une partition de  $n \perp 1$  et  $(i, j)$  une case de  $\mu^\perp$ , la famille  $\mathcal{B}_{\mu+[ij]}(X)$  définie par*

$$\mathcal{B}_{\mu+[ij]}(X) = \bigcup_{h=1}^m \bigcup_{u=i\perp\gamma_h+1}^i \mathcal{A}_{u,j_h}^{(+)}. \quad (5.45)$$

*est une base de l'espace  $\mathbf{M}_{\mu+[ij]}(X)$ .*

*Preuve.* C'est, compte tenu des deux paragraphes précédents, la même que celle du Théorème 4.15. ■

Cette description de  $\mathcal{B}_{\mu+[ij]}(X)$  permet d'obtenir la spécialisation suivante de la Conjecture 5.30.

**Théorème 5.33** *Si  $C_{\mu+[ij]}^{(X)}$  représente la caractéristique de Frobenius graduée de  $\mathbf{M}_{\mu+[ij]}(X)$  alors :*

- si  $A = 0$  et  $L > 0$ ,  $C_{\mu+[ij]}^{(X)} = \frac{t^{L+1} \perp 1}{t^L \perp 1} C_{\mu+[i,j \perp 1]}^{(X)}$  ;
- si  $A > 0$ ,  $C_{\mu+[ij]}^{(X)} = C_{\mu+[i,j \perp 1]}^{(X)} + t C_{\mu+[i \perp 1,j]}^{(X)} \perp t C_{\mu+[i \perp 1,j \perp 1]}^{(X)}$ .
- si  $A = 0$  et  $L = 0$ ,  $C_{\mu+[ij]}^{(X)}$  est la caractéristique de Frobenius graduée de  $\mathbf{M}_{\nu}(X)$ , où  $\nu$  est la partition  $\mu + [ij]$ .

Si une des cases  $(i \perp 1, j)$ ,  $(i, j \perp 1)$  ou  $(i \perp 1, j \perp 1)$  se retrouve dans le diagramme  $\mu$ , alors le terme correspondant doit être pris égal à zéro.

#### 5.4.4 Plusieurs grains

Achevons cette section par un bref exposé de la situation rencontrée quand on place plusieurs grains dans l'anti-ombre.

**Définition 5.34** *Si  $\mu$  est une partition de  $n \perp k$  et  $(i, j)$  une case de  $\mu^\perp$ , nous définissons*

$$\mathbf{M}_{i,j}^{k(+)} = \sum_{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)} \mathbf{M}_{\mu + \{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}}, \quad (5.46)$$

où la somme est prise sur tous les  $k$ -uplets de  $k$  cases de  $\mu^\perp$ , toutes situées dans l'anti-ombre de  $(i, j)$ .

Nous avons l'énoncé suivant, analogue du Théorème 5.13.

**Théorème 5.35** *Si  $\mu$  est une partition de  $n \perp k$  et  $a$  le cardinal de l'anti-ombre de la case  $(i, j)$ , alors nous avons :*

$$\dim \mathbf{M}_{i,j}^{k(+)} \leq \binom{a}{k} n!. \quad (5.47)$$

Il est alors naturel de conjecturer que l'égalité est vraie dans (5.47). Dans le cas en un alphabet, il est possible de construire une base explicite de  $\mathbf{M}_{i,j}^{k(+)}(X)$ . La construction est semblable à celle présentée dans la section 5.3.4. Nous ne l'expliciterons pas, renvoyant simplement à la section 5.3.4 et à la figure de la page suivante. Cette construction fait intervenir des *diagrammes droits*, analogues des diagrammes gauches, dans lesquels les cases cerclées sont *gauches*, i.e. dans  $AS_\mu(i, j)$  et ayant à leur gauche soit une case cerclée soit une case de  $\mu$ . On note  $\mathcal{D}_\mu^k$  l'ensemble de ces diagrammes droits. On associe alors à un diagramme droit  $D$  une partition  $\mu_D$  et un diagramme à  $k$  grains  $\mu_D^k$ . Ces deux objets sont obtenus comme dans le cas des trous, en raisonnant dans la partition  $\rho$ , qui correspond à l'anti-ombre  $AS_\mu(i, j)$ , vue à l'envers. Ceci est illustré sur la figure de la page suivante.

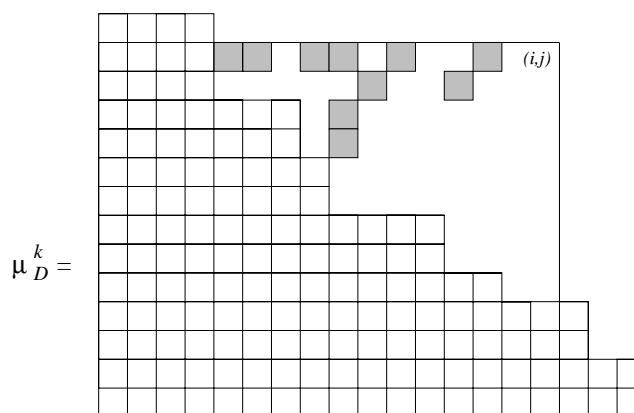
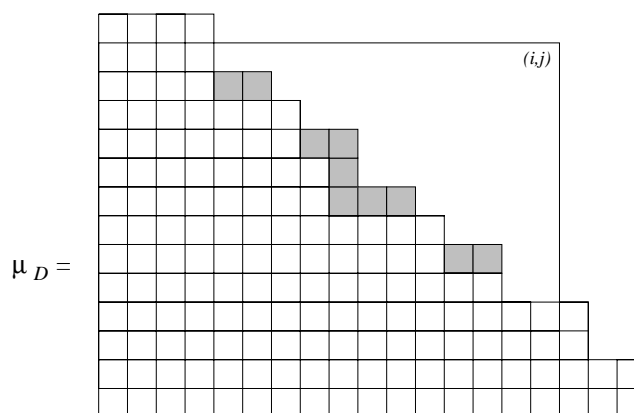
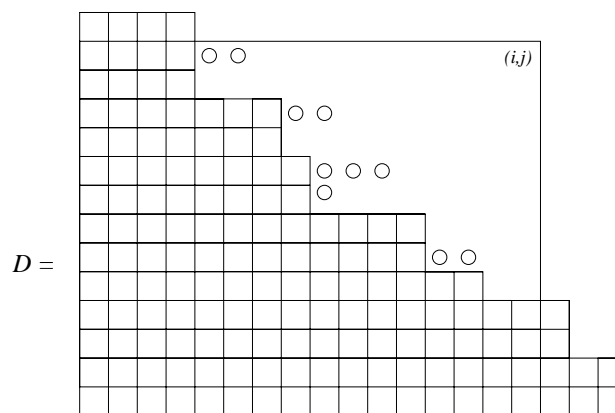
Maintenant, si nous notons comme d'habitude  $\mathcal{M}(\nu)$  l'ensemble des monômes fournissant une base monomiale de  $\mathbf{M}_\nu(X)$ , nous avons le résultat suivant, analogue du Théorème 5.19.

**Théorème 5.36** *Avec les notations précédentes, la famille*

$$\mathcal{B}_{i,j}^{k(+)}(X) = \{M(\partial)\Delta_{\mu_D^k} ; M \in \mathcal{M}_{\mu_D}(X), D \in \mathcal{D}_\mu^k\} \quad (5.48)$$

*est une base de l'espace vectoriel  $\mathbf{M}_{i,j}^{k(+)}(X)$ .*





## Chapitre 6

# Liens et problèmes ouverts

L'HISTOIRE ne s'arrête pas avec la preuve de M. Haiman [36] qui établit définitivement la conjecture  $n!$ . En effet, malgré cette remarquable avancée, de nombreux problèmes subsistent encore, que nous présentons brièvement dans ce chapitre. Celui-ci est composé de deux sections : la première s'intéresse aux problèmes d'explicitations (de bases, d'idéaux annulateurs, ...) que ne résout pas l'approche géométrique, et la seconde est consacrée aux généralisations de la conjecture  $n!$ , notamment celles introduites au Chapitre 5 : étude des espaces  $\mathbf{M}_L$  dans le cas de diagrammes  $L$  quelconques.

### 6.1 Descriptions explicites

Si la preuve de M. Haiman établit la véracité de la conjecture  $n!$  et la positivité des polynômes de Kostka-Macdonald, une approche combinatoire explicite de la question reste à fournir. En effet l'approche géométrique ne permet pas, d'une part de construire de famille linéairement indépendante de cardinal  $n!$ , et d'autre part de formuler de véritable analogue à la formule explicite (1.34) de A. Lascoux et M.-P. Schützenberger, qui interprète les polynômes de Kostka-Foulkes à l'aide de la charge des tableaux de Young.

**Problème 6.1** *Obtenir une base explicite du module  $\mathbf{M}_\mu$ , dans le cas général, fournissant une interprétation purement combinatoire des polynômes  $K_{\lambda\mu}(q, t)$ .*

Un problème connexe à ce dernier est celui de l'étude des idéaux annulateurs  $\mathcal{I}_\mu$  des déterminants  $\Delta_\mu$ . En effet, comme vu au Chapitre 3, une bonne connaissance de ces idéaux annulateurs, et en particulier de leurs bases de Gröbner devrait permettre de progresser dans la connaissance de la structure

des espaces  $\mathbf{M}_\mu$ . Si une meilleure compréhension de l'action des opérateurs différentiels symétriques (opérateurs de sauts) nous a permis de progresser dans l'étude des idéaux annulateurs, le problème général reste ouvert.

**Problème 6.2** *Donner une description explicite de l'idéal  $\mathcal{I}_\mu$  permettant de construire une base de  $\mathbf{M}_\mu$ .*

Parmi les grands problèmes de combinatoire algébrique se trouve aussi la question des harmoniques diagonaux.

**Définition 6.3** *Un polynôme  $f$  de  $\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$  est dit diagonalement harmonique s'il est annulé par tous les opérateurs différentiels invariants sous l'action diagonale (1.35) de  $\mathcal{S}_n$ .*

Nous déduisons du théorème de Weyl [60] sur les invariants diagonaux de  $\mathbb{Q}[X_n, Y_n]$ , que le polynôme  $f$  est diagonalement harmonique si et seulement si

$$p_{h,k}(\partial X, \partial Y)f = \sum_i \partial x_i^h \partial y_i^k f = 0, \quad \forall 1 \leq h+k \leq n.$$

L'espace vectoriel des polynômes diagonalement harmoniques est noté  $\mathbf{DH}_n$ . Une première remarque intéressante est la suivante : comme tous les déterminants  $\Delta_\mu$  sont diagonalement harmoniques d'après la Remarque 3.10, nous avons, pour toute partition  $\mu$  de  $n$ , l'inclusion :

$$M_\mu \subset \mathbf{DH}_n.$$

Dans l'étude de l'espace  $\mathbf{DH}_n$ , la conjecture centrale, que l'on peut voir comme un analogue de la conjecture  $n!$ , est la suivante :

**Conjecture 6.4 (conjecture  $(n+1)^{n+1}$ )** *La dimension de  $\mathbf{DH}_n$  est donnée par*

$$\dim \mathbf{DH}_n = (n+1)^{n+1}.$$

Cette conjecture vient d'être récemment établie par M. Haiman (cf. [37]), en utilisant une nouvelle fois des techniques de géométrie algébrique, et plus précisément une nouvelle étude des schémas de Hilbert. Cependant, la combinatoire de  $\mathbf{DH}_n$  reste à développer, en particulier le fait conjectural qu'une base de  $\mathbf{DH}_n$  est indicée simplement par les fonctions de parking (cf. [34]).

Parmi ces problèmes d'études combinatoires liées aux polynômes de Macdonald, il convient enfin de citer les travaux concernant l'opérateur  $\nabla$ . Il est défini de la façon suivante :

$$\nabla \tilde{H}_\mu = T_\mu \tilde{H}_\mu \tag{6.1}$$

où  $\tilde{H}_\mu$  représente le renormalisé de la forme intégrale des polynômes de Macdonald, défini en (1.40) et

$$T_\mu = t^{n(\mu)} q^{n(\mu')}$$

avec

$$n(\mu) = \sum_{i=1}^{\ell} (i \perp 1) \mu_i.$$

Il a été introduit par F. Bergeron et A. Garsia dans le but d'obtenir grâce à lui des formules très simples dont la suivante est un exemple frappant.

**Conjecture 6.5** *La caractéristique de Frobenius bigraduée de  $\mathbf{DH}_n$  est donnée par la formule*

$$\mathcal{F}_{q,t}(\mathbf{DH}_n) = \nabla e_n. \quad (6.2)$$

Dans [13], où de nombreuses propriétés et conjectures concernant  $\nabla$  sont énoncées, est proposée la généralisation suivante de la Conjecture 6.5.

**Conjecture 6.6** *Pour toutes partitions  $\lambda$  et  $\mu$ , et tout entier positif  $m$ , nous avons*

$$(\perp 1)^{\iota(\lambda')} \langle \nabla^m s_\lambda, s_\mu \rangle \in \mathbb{N}[q, t] \quad (6.3)$$

où le produit scalaire est défini pour toutes partitions  $\rho, \sigma$  par

$$\langle p_\rho, p_\sigma \rangle = \begin{cases} z_\rho & \text{si } \rho = \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et le signe dans (6.3) est donné par

$$\iota(\lambda) = \binom{l(\lambda)}{2} + \sum_{\lambda_i < (i \perp 1)} (i \perp 1 \perp \lambda_i). \quad (6.4)$$

Signalons que l'expression (6.4) a été obtenue par M. Bousquet-Mélou. La Conjecture 6.5 apparaît comme la spécialisation de la Conjecture 6.6 au cas particulier où  $\mu = (1^n)$ . Ce cas particulier, qui raffine la conjecture  $(n+1)^{n \perp 1}$ , vient d'être établi par M. Haiman ([37]), mais le cas général est toujours un problème ouvert.

## 6.2 Généralisations

L'étude des généralisations de la conjecture  $n!$ , que ce soit le cas des partitions trouées  $\mu/ij$  (Chapitre 4), ou celui des modules  $M_{i,j}^k$  (Chapitre 5), constitue un champ d'investigation où les questions ouvertes sont encore nombreuses. Les Conjectures 4.4 et 5.15 en particulier sont pour l'instant irrésolues.

Mais sûrement plus ouverte encore est l'étude des modules  $\mathbf{M}_L$  pour des diagrammes  $L$  quelconques. Si le cas des diagrammes de dimension un est réglé par le Théorème 5.2, et si les Conjectures 4.4 et 5.29 proposent des énoncés précis dans le cas des partitions trouées et grainées, le cas général reste mystérieux.

**Problème 6.7** *Déterminer les diagrammes  $L$  possédant la propriété MLRR.*

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un diagramme  $L$  vérifie la propriété MLRR constitue un objectif relativement ambitieux. Une première étape consiste en la description de grandes classes de diagrammes possédant cette propriété. Dans cette optique, d'intéressantes conjectures se trouvent dans l'article [11] de F. Bergeron, A. Garsia et G. Tesler. Parmi celles-ci, citons la très jolie conjecture suivante, dite "de rotation".

Soit  $L$  un diagramme inclus dans le rectangle  $a \times b$  :  $L \in B_{a,b}$  où :

$$B_{a,b} = \{(i, j) ; 0 \leq i < a, 0 \leq j < b\}.$$

Définissons le complémentaire de la rotation de  $L$  dans  $B_{a,b}$  par

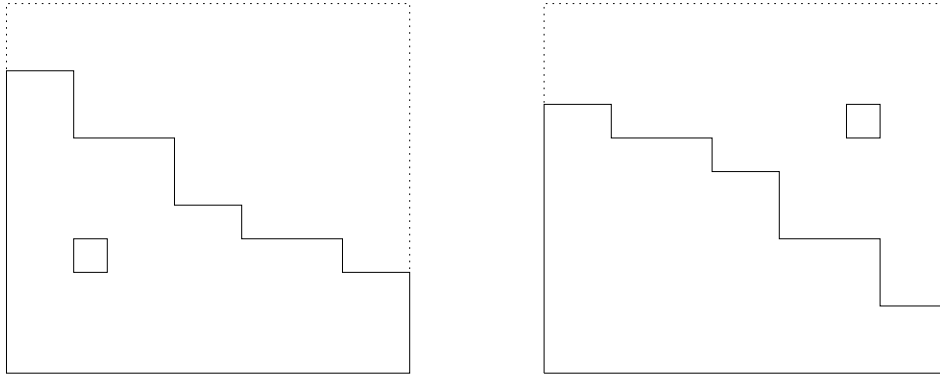
$$R_{a,b}(L) = \{(i, j) \in B_{a,b} ; (a \perp 1 \perp i, b \perp 1 \perp j) \notin L\}. \quad (6.5)$$

Remarquons que  $|L| + |R_{a,b}(L)| = ab$ . La conjecture est alors la suivante.

**Conjecture 6.8 (conjecture de rotation)** *Soit  $L$  un diagramme inclus dans  $B_{a,b}$  et  $L^* = R_{a,b}(L)$ . Si  $L$  possède la propriété MLRR, il en est alors de même pour  $L^*$  et dans ce cas :*

$$\dim \mathbf{M}_L = k |L|! \quad \text{si et seulement si} \quad \dim \mathbf{M}_{L^*} = k |L^*|!.$$

Le lien entre les partitions trouées (Conjecture 4.4) et partitions grainées (Conjecture 5.29) est bien sûr une illustration de cette conjecture, comme le montre la figure suivante. Celle-ci représente une partition trouée  $L$  incluse dans le rectangle  $B_{11,12}$  et le diagramme  $R_{11,12}(L)$ .



Une information supportant la conjecture de rotation est formulée par la proposition suivante.

**Proposition 6.9** *Si nous notons  $L^* = R_{a,b}(L)$ ,  $n = |L|$  et  $n^* = |L^*|$ , nous avons l'équivalence suivante :*

$$e_k(X_n) \text{ tue } \Delta_L \iff h_k(X_{n^*}) \text{ tue } \Delta_{L^*}. \quad (6.6)$$

*Preuve.* Elle est une conséquence immédiate des Propositions 3.11 et 3.14 et de l'observation suivante : les cases de  $L$  sont les trous de  $L^*$ . ■

**Remarque 6.10** Il est clair que la formule (6.6) s'étend aux cas des opérateurs en  $Y$  ou en  $(X, Y)$  et au cas des opérateurs différentiels partiellement symétriques (cf. Principe 3.18).

Pour finir, montrons-nous optimistes et désirons obtenir une description de la structure du module  $\mathbf{M}_L$ , même pour des diagrammes ne possédant pas la propriété MLRR.

**Problème 6.11** *Déterminer, pour tout diagramme du réseau carré  $L$ , la structure du module  $\mathbf{M}_L$ .*



## Annexe A

# Rappels sur la représentation linéaire des groupes finis

Nous rappelons ici les éléments de théorie de la représentation linéaire des groupes finis nécessaires à l'étude de la structure des espaces  $\mathbf{M}_L$  associés aux diagrammes du réseau carré. Cette annexe se compose de deux sections : la première présente des généralités et la seconde donne les grands résultats dans le cas du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$ . La présentation donnée ici est inspirée de [54] pour la première section et de [47], [51] pour la seconde, auxquels on se reportera pour un traitement plus complet de la question.

### A.1 Généralités

#### A.1.1 Représentation linéaire d'un groupe fini

Considérons un espace vectoriel  $\mathbf{V}$  (de dimension finie) sur le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Nous notons  $GL(\mathbf{V})$  le groupe des isomorphismes de  $\mathbf{V}$ , que l'on assimile à l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille  $\dim \mathbf{V}$ .

**Définition A.1** *Soit un groupe  $G$  fini. Une représentation linéaire de  $G$  dans  $\mathbf{V}$  est un homomorphisme  $\rho$  du groupe  $G$  dans le groupe  $GL(\mathbf{V})$ , i.e. une application de  $G$  dans  $GL(\mathbf{V})$  tel que pour tous  $s, t \in G$  :*

$$\rho(s, t) = \rho(s)\rho(t). \quad (\text{A.1})$$

La formule (A.1) implique en particulier que  $\rho(1_G) = \text{Id}_{\mathbf{V}}$  et  $\rho(s^{\perp 1}) = \rho(s)^{\perp 1}$ .



Lorsque  $\rho$  est donné, on dit que  $\mathbf{V}$  est un *espace de représentation* de  $G$ , voire une *représentation* de  $G$ . La dimension de  $\mathbf{V}$  est appelée *degré* de la représentation.

Deux représentations  $\rho : G \rightarrow \mathbf{V}$  et  $\rho' : G \rightarrow \mathbf{V}'$  seront dites *semblables* ou *isomorphes* s'il existe un isomorphisme linéaire  $\tau : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}'$  tel que pour tout  $s \in G$ ,

$$\tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau.$$

**Exemple A.2** Présentons un exemple fondamental dans notre cadre. Considérons un espace vectoriel possédant une base indexée par les éléments  $t$  de  $G$ , ie :  $(e_t)_{t \in G}$ . Considérons maintenant pour  $s$  dans  $G$  l'application linéaire qui transforme  $e_t$  en  $e_{st}$ . Il est clair que l'application linéaire ainsi définie est un isomorphisme de  $\mathbf{V}$  et que l'on obtient une représentation linéaire appelée la *représentation régulière (à gauche)* de  $G$ . En particulier, son degré est égal à l'ordre  $|G|$  de  $G$ .

**Définition A.3** On dit que le sous-espace  $\mathbf{W}$  de  $\mathbf{V}$  est stable pour la représentation  $\rho$  de  $G$  si

$$\forall s \in G, x \in \mathbf{W} \implies \rho(s)(x) \in \mathbf{W}. \quad (\text{A.2})$$

La restriction de  $\rho(s)$  à  $\mathbf{W}$  est un élément de  $GL(\mathbf{W})$  pour tout  $s$  dans  $G$  et on définit ainsi une sous-représentation de  $\mathbf{V}$ . Si  $\mathbf{V}$  s'écrit  $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}'$  avec  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{W}'$  des sous-représentations de  $\mathbf{V}$ , on dit que la représentation  $\mathbf{V}$  est somme directe des représentations  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{W}'$ .

On dira qu'une représentation  $\mathbf{V}$  est *irréductible* si elle n'admet pas de sous-espace stable autre que  $\{0\}$  et  $\mathbf{V}$ . Le théorème suivant montre toute l'importance des représentations irréductibles.

**Théorème A.4** Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

### A.1.2 Caractères

**Définition A.5** Soit une représentation linéaire  $\rho : G \rightarrow GL(\mathbf{V})$  du groupe fini  $G$ . Pour tout  $s \in G$ , posons :

$$\chi_\rho(s) = \text{Tr} \rho(s) \quad (\text{A.3})$$

où  $\text{Tr} \tau$  est la trace de l'endomorphisme  $\tau$ . La fonction à valeurs complexes  $\chi_\rho$  ainsi définie est appelée *caractère* de la représentation  $\rho$ .

Nous verrons plus loin que le caractère caractérise la représentation linéaire. Commençons par observer les propriétés suivantes.

**Proposition A.6** *Si  $\chi$  est le caractère d'une représentation  $\rho$  de degré  $d$ , on a :*

- (i)  $\chi(1_G) = d$ ;
- (ii)  $\forall s \in G, \chi(s^{\perp 1}) = \overline{\chi(s)}$ ;
- (iii)  $\forall s, t \in G, \chi(tst^{\perp 1}) = \chi(s)$ .

*Notons aussi que si  $\rho$  est somme directe de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de caractères respectifs  $\chi_1$  et  $\chi_2$ , alors*

- (iv)  $\chi = \chi_1 + \chi_2$ .

Intéressons-nous maintenant aux relations d'orthogonalité des caractères par rapport au produit scalaire suivant, défini pour  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$(\varphi|\psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\varphi(s)} \psi(s). \quad (\text{A.4})$$

**Théorème A.7** *Soient  $\chi$  et  $\chi'$  deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, nous avons*

$$(\chi|\chi) = 1 \quad \text{et} \quad (\chi|\chi') = 0. \quad (\text{A.5})$$

De (A.5), on déduit le théorème suivant.

**Théorème A.8** *Soit  $\mathbf{V}$  une représentation linéaire de  $G$ , de caractère  $\varphi$  et supposons  $\mathbf{V}$  décomposé en somme directe de représentations irréductibles :*

$$\mathbf{V} = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{W}_i.$$

*Alors, si  $\mathbf{W}$  est une représentation irréductible de caractère  $\chi$ , sa multiplicité dans  $\mathbf{V}$ , i.e. le nombre de  $\mathbf{W}_i$  isomorphes à  $\mathbf{W}$  est égal à  $(\varphi|\chi)$ .*

**Corollaire A.9** *Deux représentations de même caractère sont isomorphes.*

**Exemple A.10** Dans le cas de la représentation régulière (cf. Exemple A.2), pour tout  $s \in G \setminus \{1_G\}$ ,  $st \neq t$  donc tous les termes diagonaux de la matrice de  $\rho(s)$  sont nuls. Le caractère  $\phi$  de la représentation régulière est donc donné par :

$$\phi(s) = \begin{cases} |G| & \text{si } s = 1_G, \\ 0 & \text{si } s \neq 1_G. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

On en déduit alors la proposition suivante.

**Proposition A.11** *Chaque représentation irréductible est contenue dans la représentation régulière un nombre de fois égale à son degré.*

Il est évident d'après le (iii) de la Proposition A.6 que toute représentation linéaire de  $G$  est constante sur les classes de conjugaison de  $G$ . Le théorème suivant complète cette assertion.

**Théorème A.12** *Le nombre de représentations irréductibles de  $G$  (à isomorphisme près) est égal au nombre de classes de conjugaison de  $G$ .*

## A.2 Cas du groupe symétrique

Une conséquence du Théorème A.12 est que le nombre de représentations irréductibles du groupe symétrique  $\mathcal{S}_n$  est égal au nombre de partitions  $\lambda$  de  $n$ . En effet deux permutations  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $\mathcal{S}_n$  sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type de décomposition en cycles, i.e. le même nombre  $c_i$  de  $i$ -cycles pour tout  $i$ . Notons que  $\sum_{i=1}^n ic_i = n$ . La classe de conjugaison est ainsi déterminée par la partition  $\lambda(\sigma) = 1^{c_1}, \dots, n^{c_n}$  de  $n$ . On s'attend donc à avoir des caractères irréductibles indexés par les partitions de  $n$ , ce que nous allons effectivement obtenir.

Introduisons alors sur l'anneau  $\Lambda$  des fonctions symétriques (cf. section 1.1.2) le produit scalaire défini par :

$$(s_\lambda | s_\mu) = \delta_{\lambda\mu} \quad (\text{A.7})$$

où  $\delta_{\lambda\mu}$  vaut comme d'habitude 1 si  $\lambda = \mu$  et 0 sinon.

On note  $R^n$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les caractères irréductibles de  $\mathcal{S}_n$  et on définit l'*application caractéristique*  $\text{ch} : R^n \rightarrow \Lambda^n \otimes \mathbb{C}$  en posant, si  $\varphi \in R^n$  :

$$\text{ch}(\varphi) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varphi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)} = \sum_{|\lambda|=n} z_\lambda^{\perp 1} \varphi_\lambda p_\lambda, \quad (\text{A.8})$$

où  $\varphi_\lambda$  désigne la valeur de  $\varphi$  sur la classe de conjugaison de  $\mathcal{S}_n$  définie par  $\lambda$ . L'entier  $z_\lambda$  (cf. équation (1.25)) apparaît ici en tant que cardinal du centralisateur d'un élément de la classe de conjugaison de  $\mathcal{S}_n$  associée à la partition  $\lambda$  (pour l'action de  $\mathcal{S}_n$  sur lui-même par conjugaison).

**Théorème A.13 (Formule des caractères de Frobenius)** *L'application caractéristique réalise une homothétie de  $R^n$  sur  $\Lambda^n$ . Les caractères irréductibles de  $\mathcal{S}_n$  sont les images réciproques  $\chi^\lambda$  par ch des fonctions de Schur  $s_\lambda$ ,  $\lambda$  décrivant l'ensemble des partitions de  $n$ . De plus, leurs valeurs  $\chi_\mu^\lambda$  sur les différentes classes de conjugaison de  $\mathcal{S}_n$  sont égales aux coefficients des sommes de puissances dans la base des fonctions de Schur : pour toute partition  $\mu$  de taille  $n$ ,*

$$p_\mu = \sum_{|\lambda|=n} \chi_\mu^\lambda s_\lambda. \quad (\text{A.9})$$

On déduit de la formule (A.9) que

$$\chi^\lambda(\text{Id}) = (s_\lambda | p_1^n) = K_\lambda,$$

la dernière égalité étant une conséquence des formules de Pieri ([47], Corollaire 1.2.9) d'où le corollaire suivant.

**Corollaire A.14** *Le degré de la représentation irréductible de  $\mathcal{S}_n$  de caractère  $\chi^\lambda$  est égal au nombre  $K_\lambda$  de tableaux standard de forme  $\lambda$ .*



## Annexe B

# Action des opérateurs différentiels de Schur sur les déterminants de diagramme

Nous allons prouver le Théorème 3.17 en utilisant la Proposition 3.11 et une adaptation de l'involution définie dans [49]. Pour commencer, nous observons que le Théorème 3.17 et la Proposition 3.11 sont compatibles. En effet nous avons  $e_k = s_{1^k}$  et les tableaux de forme  $(1^k)$  correspondent aux suites  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Maintenant, posons  $l$  le nombre de colonnes de  $\lambda'$  et développons la formule déterminantale de la fonction de Schur

$$s_\lambda(X) = \det(e_{\lambda'_i + j \perp i}(X)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_l} \text{sgn}(\sigma) e_{\sigma(\lambda' + \delta_i) \perp \delta_i} \quad (\text{B.1})$$

où  $\text{sgn}(\sigma)$  désigne ici la signature de la permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . De plus,  $\delta_l = (l \perp 1, l \perp 2, \dots, 1, 0)$  et  $e_{\alpha_i} = 0$  dès que  $\alpha_i < 0$ . Si nous avons  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  une suite d'entiers, nous posons  $e_\alpha = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \dots e_{\alpha_l}$ . Il est important de respecter l'ordre des facteurs, car celui-ci aura une incidence par la suite. Comme noté ci-dessus, dans le cas  $l = 1$ , la Proposition 3.11 peut être réécrite sous la forme

$$e_{\alpha_1}(\partial X) \Delta_L(X, Y) = \sum_{T_1 \in \mathcal{YT}_{(1^{\alpha_1})}} \epsilon(L, \partial_{T_1}(L)) \tau(\partial_{T_1}(L)) \Delta_{\partial_{T_1}(L)}(X, Y), \quad (\text{B.2})$$

où  $\mathcal{YT}_{(1^{\alpha_1})}$  est l'ensemble des tableaux croissants strictement sur la colonne de hauteur  $\alpha_1$  et de poids inclus dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ici  $\theta(T_1, L) = \tau(\partial_{T_1}(L))$ .

Supposons maintenant que  $l = 2$ . Nous utilisons (B.2) avec  $e_{\alpha_2}(\partial_X)$  et appliquons  $e_{\alpha_1}(\partial_X)$  des deux cotés. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} e_{\alpha}(\partial_X)\Delta_L(X, Y) &= e_{\alpha_1}(\partial_X)e_{\alpha_2}(\partial_X)\Delta_L(X, Y) \\ &= \sum_{T_2 \in \mathcal{YT}_{(1^{\alpha_2})}} \epsilon(L, \partial_{T_2}(L))\tau(\partial_{T_2}(L))e_{\alpha_1}(\partial_X)\Delta_{\partial_{T_2}(L)}(X, Y) \\ &= \sum_{T_1 \in \mathcal{YT}_{(1^{\alpha_1})}} \sum_{T_2 \in \mathcal{YT}_{(1^{\alpha_2})}} \epsilon(L, \partial_{T_1}\partial_{T_2}(L))\tau(\partial_{T_2}(L))\tau(\partial_{T_1}\partial_{T_2}(L))\Delta_{\partial_{T_1}\partial_{T_2}(L)}(X, Y) \end{aligned}$$

Définissons alors

$$\mathcal{CT}_{\alpha} = \mathcal{CT}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l} \quad (\text{B.3})$$

l'ensemble des  $l$ -uplets de colonnes  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_l)$  où  $T_i \in \mathcal{YT}_{(1^{\alpha_i})}$ . Nous pouvons représenter  $\mathbf{T}$  comme un tableau  $L_{\alpha} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  où  $L_{\alpha}$  est le diagramme  $\{(i, j) ; 0 \leq i \leq \alpha_{j+1} \perp 1, 0 \leq j \leq l \perp 1\}$  et  $\mathbf{T}$  est strictement croissant en remontant chaque colonne. Observons que  $\mathbf{T}$  ne suit aucune condition sur les lignes et en particulier sa forme  $\alpha$  n'est pas nécessairement une partition. Ceci étant posé, nous pouvons simplifier l'expression précédente et écrire que pour  $l = 2$  :

$$e_{\alpha}(\partial_X)\Delta_L(X, Y) = \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{\alpha}} \epsilon(L, \partial_{\mathbf{T}}(L))\theta(\mathbf{T}, L)\Delta_{\partial_{\mathbf{T}}(L)}(X, Y), \quad (\text{B.4})$$

où  $\partial_{\mathbf{T}}(L) = \partial_{T_1}\partial_{T_2} \cdots \partial_{T_l}(L)$  est le diagramme obtenu à partir de  $L$  en remplaçant les biexposants  $(p_i, q_i)$  par  $(p_i \perp |\mathbf{T}^{\perp 1}(i)|, q_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et

$$\theta(\mathbf{T}, L) = \tau(\partial_{\mathbf{T}}(L)) \cdots \tau(\partial_{T_{l-1}}\partial_{T_l}(L))\tau(\partial_{T_l}(L)). \quad (\text{B.5})$$

Il est clair par récurrence que la formule (B.5) se généralise à  $l \geq 2$ . Nous devons également remarquer que si l'un des  $\alpha_i$  est strictement négatif, alors la somme (B.4) doit être nulle.

Nous pouvons alors commencer le calcul de l'opérateur (B.1) en utilisant (B.4) :

$$\begin{aligned} S_{\lambda}(\partial_X)\Delta_L(X, Y) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_l} \text{sgn}(\sigma)e_{\sigma(\lambda' + \delta_l) \perp \delta_l}(\partial_X)\Delta_L(X, Y) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_l} \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{\sigma(\lambda' + \delta_l) - \delta_l}} \text{sgn}(\sigma)\epsilon(L, \partial_{\mathbf{T}}(L))\theta(\mathbf{T}, L)\Delta_{\partial_{\mathbf{T}}(L)}(X, Y). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$





mot  $\widehat{w}_{\mathbf{T}}$  certaines parenthèses seront appariées et d'autres non. Dans notre exemple,  $\widehat{w}_{\mathbf{T}} = ( ) ) ( )$ , les deux premières parenthèses sont appariées, ainsi que les deux dernières ; les deux du milieu ne sont par contre pas appariées. Le sous-mot de tout  $\widehat{w}_{\mathbf{T}}$  constitué des parenthèses non appariées doit être de la forme  $) \cdots ) ( \cdots ($ .

**Proposition B.1** [49, Proposition 5] *Un tableau  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_l) \in \mathcal{CT}_{\alpha}$  est un tableau de Young strictement croissant sur les lignes,  $\mathbf{T} \in \mathcal{YT}_{\lambda}$ , si et seulement si il n'y a pas de parenthèses droites non appariées dans  $\widehat{w}_{T_i, T_{i+1}}$  pour tout  $1 \leq i \leq l-1$ .*

Remarquons ici que si  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l)$  n'est pas une partition, c'est-à-dire  $\alpha_i < \alpha_{i+1}$  pour un  $1 \leq i \leq l-1$ , alors nécessairement  $\widehat{w}_{T_i, T_{i+1}}$  contient plus de parenthèses droites que de parenthèses gauches et certaines d'entre elles ne pourront être appariées, donc aucun des tableaux  $\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{\alpha}$  ne peut être un tableau de Young strictement croissant sur les colonnes.

Reprenons la construction de notre involution similaire à celle de [49] pour  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2)$ . Posons

$$A = \mathcal{CT}_{(\lambda'_1, \lambda'_2)} \cup \mathcal{CT}_{(\lambda'_2-1, \lambda'_1+1)}.$$

L'involution est une application  $\Psi: A \rightarrow A$  définie de la façon suivante. Prenons un  $\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{(\alpha_1, \alpha_2)} \subset A$  et considérons  $\widehat{w}_{\mathbf{T}}$ . Le sous-mot des parenthèses non appariées contient  $r \geq 0$  parenthèses droites suivies de  $l \geq 0$  parenthèses gauches. Nous avons de plus que  $l - r = \alpha_1 - \alpha_2$ .

- Si  $r = 0$ , alors  $\mathbf{T} \in \mathcal{T}_{\lambda} \subset \mathcal{CT}_{\lambda'}$  et nous définissons  $\Psi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ .
- Si  $l \geq r > 0$ , alors  $\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{\lambda'} \setminus \mathcal{YT}_{\lambda}$  et nous définissons  $\Psi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}' \in \mathcal{CT}_{(\lambda'_2-1, \lambda'_1+1)}$ , l'unique tableau tel que  $w_{\mathbf{T}'} = w_{\mathbf{T}}$  et  $\widehat{w}_{\mathbf{T}'}$  est obtenu à partir de  $\widehat{w}_{\mathbf{T}}$  en remplaçant les  $l - r + 1$  parenthèses gauches non appariées les plus à gauche par des parenthèses droites.
- Si  $r > l$ , alors  $\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{(\lambda'_2-1, \lambda'_1+1)}$  et nous définissons  $\Psi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}' \in \mathcal{CT}_{\lambda'} \setminus \mathcal{YT}_{\lambda}$ , l'unique tableau tel que  $w_{\mathbf{T}'} = w_{\mathbf{T}}$  et  $\widehat{w}_{\mathbf{T}'}$  est obtenu à partir de  $\widehat{w}_{\mathbf{T}}$  en remplaçant les  $r - l + 1$  parenthèses droites non appariées les plus à droite par des parenthèses gauches.

Maintenant dans le cas général,  $l \geq 2$ , posons

$$A = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}_l} \mathcal{CT}_{\sigma(\lambda' + \delta_l) - \delta_l}.$$

Pour  $\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{\alpha} \subset A$ , le vecteur  $\alpha$  caractérise complètement la permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_l$  tel que  $\alpha = \sigma(\lambda' + \delta_l) - \delta_l$ . En particulier  $\alpha$  est une partition si et

seulement si  $\sigma = Id$ . Nous lisons les lignes de  $\mathbf{T}$  de la gauche vers la droite et de bas en haut. Nous trouvons ainsi le premier couple de cases du réseau carré  $(i, j)$  et  $(i + 1, j)$  tel que

$$T(i, j) > T(i + 1, j) \quad \text{ou} \quad [(i, j) \notin L_\alpha \text{ et } (i + 1, j) \in L_\alpha].$$

- S'il n'y a pas de tel couple, alors nécessairement  $\mathbf{T} \in \mathcal{YT}_\lambda \subset \mathcal{CT}_{\lambda'}$  et nous définissons  $\Psi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$ .
- Si nous trouvons un tel couple, alors  $\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_\alpha \subset A \setminus \mathcal{YT}_\lambda$ . Nous définissons  $\Psi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}' \in \mathcal{CT}_\beta \subset A \setminus \mathcal{YT}_\lambda$  où  $\mathbf{T}'$  est obtenu à partir de  $\mathbf{T}$  en appliquant la procédure ci-dessus aux deux colonnes  $T_{i+1}, T_{i+2}$ . Par construction, si  $\alpha = \sigma(\lambda' + \delta_l) \perp \delta_l$ , alors  $\beta = \sigma t_i(\lambda' + \delta_l) \perp \delta_l$ , où nous notons  $t_i$  la transposition  $(i, i + 1)$ .

Le fait que  $\Psi$  définit bien une involution est traitée dans plusieurs articles, notamment dans [49], section 3. Donnons un exemple concret. Pour

$$\mathbf{T} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & & \\ \hline 6 & 10 & \\ \hline 5 & 8 & 9 \\ \hline 4 & 7 & 3 \\ \hline \end{array}, \text{ nous avons } \Psi(\mathbf{T}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & & 10 \\ \hline 6 & & 9 \\ \hline 5 & & 7 \\ \hline 4 & 8 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Le couple  $(0, 1)$  et  $(0, 2)$  est le premier où  $T(0, 1) > T(0, 2)$ . Nous appliquons alors l'involution aux deux dernières colonnes. Nous avons ici  $w_{T_2, T_3} = 378910$  et  $\hat{w}_{T_2, T_3} = )(($ . Il y a donc  $r = 1$  parenthèse droite non appariée suivie de  $l = 2$  parenthèses gauches non appariées. Nous devons changer  $l \perp r + 1 = 2$  parenthèses non appariées gauches en parenthèses droites. D'où  $\hat{w}_{T'_2, T'_3} = ))(($ . Ceci déplace les étiquettes 7 et 10 de la deuxième dans la troisième colonne.

*Preuve* (du Théorème 3.17). Nous revenons au calcul de (B.6) en utilisant la notation introduite :

$$S_\lambda(\partial X)\Delta_L(X, Y) = \sum_{\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{\sigma(\lambda' + \delta_l) - \delta_l} \subset A} \text{sgn}(\sigma)\epsilon(L, \partial_{\mathbf{T}}(L))\theta(\mathbf{T}, L)\Delta_{\partial_{\mathbf{T}}(L)}(X, Y).$$

L'involution construite ci-dessus associe le terme dans la somme correspondant à  $\mathbf{T} \in \mathcal{CT}_{\sigma(\lambda' + \delta_l) \perp \delta_l} \subset A \setminus \mathcal{YT}_\lambda$  avec celui correspondant à  $\mathbf{T}' \in \mathcal{CT}_{\sigma t_i(\lambda' + \delta_l) \perp \delta_l} \subset A \setminus \mathcal{YT}_\lambda$ . Il est clair que  $\text{sgn}(\sigma) = \perp \text{sgn}(\sigma t_i)$  et  $\partial_{\mathbf{T}}(L) = \partial_{\mathbf{T}'}(L)$  car les deux tableaux  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$  ont le même ensemble d'étiquettes,

d'où en particulier :  $\epsilon(L, \partial_{\mathbf{T}}(L)) = \epsilon(L, \partial_{\mathbf{T}'}(L))$  . Il suffit alors de montrer que

$$\theta(\mathbf{T}, L) = \theta(\mathbf{T}', L) \quad (\text{B.7})$$

pour obtenir le Théorème 3.17. En effet, à ce moment-là, tous les termes de  $A \setminus \mathcal{Y}\mathcal{T}_\lambda$  vont s'annuler et il ne reste que les termes de  $\mathcal{T}_\lambda$  avec le bon coefficient.

Pour établir (B.7) nous devons montrer que si  $\epsilon'(\mathbf{T}, L)$  est non nul, alors  $\epsilon'(\mathbf{T}', L)$  est non nul ; dans ce cas ils sont alors nécessairement tous les deux égaux à 1. De (B.5) on tire

$$\theta(\mathbf{T}, L) = \theta((T_1, T_2, \dots, T_l), L) = \tau(\partial_{\mathbf{T}}(L)) \cdots \tau(\partial_{T_{l-1}} \partial_{T_l}(L)) \tau(\partial_{T_l}(L)).$$

De façon analogue,  $\theta(\mathbf{T}', L) = \theta((T_1, T_2, \dots, T'_{i+1}, T'_{i+2}, \dots, T_l), L)$  pour un  $0 \leq i \leq l-1$ . Si  $\theta(\mathbf{T}, L) \neq 0$ , alors  $\tau(\partial_{T_k} \cdots \partial_{T_l}(L)) = 1$  pour tout  $1 \leq k \leq l$ . Pour  $1 \leq k \leq i+1$ , nous avons clairement :

$$\tau(\partial_{T_k} \cdots \partial_{T_{i+1}} \partial_{T_{i+2}} \cdots \partial_{T_l}(L)) = \tau(\partial_{T_k} \cdots \partial_{T'_{i+1}} \partial_{T'_{i+2}} \cdots \partial_{T_l}(L)).$$

Pour  $i+3 \leq k \leq l$ , les termes correspondant dans  $\theta(\mathbf{T}, L)$  et  $\theta(\mathbf{T}', L)$  sont les mêmes. Posons  $\tilde{L} = \partial_{T_{i+3}} \cdots \partial_{T_{l-1}} \partial_{T_l}(L)$ , pour prouver l'égalité (B.7), il suffit de montrer maintenant que

$$\tau(\partial_{T_{i+2}}(\tilde{L})) = 1 \quad \text{et} \quad \tau(\partial_{T_{i+1}} \partial_{T_{i+2}}(\tilde{L})) = 1 \quad \implies \quad \tau(\partial_{T'_{i+2}}(\tilde{L})) = 1 \quad (\text{B.8})$$

pour tout  $\tilde{L}$  tel que  $\tau(\tilde{L}) = 1$ .

Soit  $\beta = \sigma t_i(\lambda' + \delta_l) \perp \delta_l$ , la forme de  $\mathbf{T}$ . Supposons que  $\tau(\partial_{T'_{i+2}}(\tilde{L})) = 0$ . Ceci implique qu'il y a une étiquette  $1 \leq k = \mathbf{T}'(i+2, j) \leq n$  telle que  $(p_k, q_k) \in \tilde{L}$  et  $(p_{k \perp 1}, q_{k \perp 1}) = (p_k \perp 1, q_k) \in \tilde{L}$ , mais  $k \perp 1 \neq \mathbf{T}'(i+2, j \perp 1)$  n'est pas une étiquette de  $T'_{i+2}$  (on explicite ainsi la condition de collision des cases). Maintenant comme  $\tau(\partial_{T_{i+1}} \partial_{T_{i+2}}(\tilde{L})) = 1$  nous avons nécessairement que  $k$  et  $k \perp 1$  sont des étiquettes de  $T_{i+1}, T_{i+2}$ . Ceci implique que  $k \perp 1$  est une étiquette de  $T'_{i+1}$ . Ceci implique aussi que  $k$  n'est pas une étiquette de  $T'_{i+1}$  car on ne peut pas avoir deux étiquettes  $k$  et une seule  $k \perp 1$  puisque sinon  $\tau(\partial_{T_{i+1}} \partial_{T_{i+2}}(\tilde{L})) = 0$ . Ceci entraîne que  $k \perp 1$  et  $k$  sont des lettres de  $w_{T'_{i+1} T'_{i+2}}$  de multiplicité un, que  $k \perp 1$  est dans la colonne  $T'_{i+1}$  et que  $k$  est dans la colonne  $T'_{i+2}$ . Elles sont donc consécutives dans le mot  $w_{T'_{i+1} T'_{i+2}}$  et sont appariées dans  $\hat{w}_{T'_{i+1} T'_{i+2}}$ . Ceci implique alors que

$T_{i+2}$  dans  $\Psi(\mathbf{T}') = \mathbf{T}$  contient l'étiquette  $k$  mais pas  $k \perp 1$  et par conséquent  $\tau(\partial_{T_{i+2}}(\tilde{L})) = 0$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. La preuve est ainsi complète. ■

**Remarque B.2** Étant donné un diagramme  $L$  et un tableau strictement croissant sur les lignes  $T \in \mathcal{YT}_\lambda$ , nous avons que  $\theta(T, L) = 1$  précisément quand on peut déplacer les cases de  $L$  d'un pas vers le bas, en lisant  $T$  colonne par colonne, de la droite vers la gauche, sans collision de cases.

**Corollaire B.3** Pour  $h_k(X) = s_{(k)}(X)$ , nous avons

$$h_k(\partial X) \Delta_L(X, Y) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} \epsilon(L, \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(L)) \theta((i_1, \dots, i_k), L) \Delta_{\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k}(L)}(X, Y).$$

Le Corollaire B.3 est équivalent à la Proposition 3.14. En effet, la seule façon d'avoir que  $\theta((i_1, \dots, i_k), L) \neq 0$  correspond à des cases  $i_1, \dots, i_k$  qui descendent dans des trous. On peut voir cela comme des trous qui montent.



# Bibliographie

- [1] E. Allen, *The decomposition of a bigraded left regular representation of the diagonal action of  $S_n$* , J. Combin. Theory Ser. A, **71** (1995), 97–111.
- [2] E. Artin, *Galois Theory*, Notre Dame Mathematical Lectures, **2** (1944), Notre Dame, IN.
- [3] J.-C. Aval, *Bases explicites et conjecture  $n!$* , in Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Proceedings of FPSAC'00, Moscow, June 2000), Springer-Verlag, 103–112.
- [4] J.-C. Aval, *Monomial bases related to the  $n!$  conjecture*, Discrete Math., **224** (2000), 15–35.
- [5] J.-C. Aval, F. Bergeron, N. Bergeron, *Lattice diagram polynomials in one set of variables*, à paraître dans Adv. Appl. Math.
- [6] J.-C. Aval, *On certain spaces of lattice diagram polynomials*, Actes du Colloque LaCIM2000, Montréal, Septembre 2000, éditions du LaCIM (No 27), 43–51.
- [7] J.-C. Aval, *On certain spaces of lattice diagram determinants*, à paraître dans Discrete Math.
- [8] J.-C. Aval, N. Bergeron, *Vanishing ideals of lattice diagram polynomials*, à paraître dans J. of Combin. Theory Ser. A.
- [9] J.-C. Aval, N. Bergeron, *Schur partial derivative operator on Lattice diagram determinants*, soumis (ArXive: math.CO/0111246).
- [10] F. Bergeron, N. Bergeron, A. Garsia, M. Haiman, G. Tesler, *Lattice Diagram Polynomials and Extended Pieri Rules*, Adv. Math., **142** (1999), 244–334.

- [11] F. Bergeron, A. M. Garsia, G. Tesler, *Multiple left regular representations associated with alternants of the symmetric Groups*, preprint.
- [12] F. Bergeron, A. Garsia, *Science fiction and Macdonald polynomials*, in “Algebraic Methods and  $q$ -Special Functions” (L. Vinet and R. Floreanini, Eds.), CRM Proceedings & Lectures Notes **22**, American Mathematical Society, 1999.
- [13] F. Bergeron, A. Garsia, M. Haiman, G. Tesler, *Identities and positivity conjectures for some remarkable operators in the theory of symmetric functions*, Asian J. Math., (6) **3** (1999), 1–58.
- [14] N. Bergeron, A. Garsia, *On certain spaces of harmonic polynomials*, Contemp. Math., **138** (1992), 51–86.
- [15] F. Bergeron, *Spaces of Lattice Diagram Polynomials*, en préparation.
- [16] T. Becker, V. Weispfenning, *Gröbner Bases*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [17] C. Chang, *Geometric interpretation of the Macdonald polynomials and the  $n!$  conjecture*, Ph. D. thesis, University of California, San Diego, 1998.
- [18] L. Comtet, *Analyse Combinatoire*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
- [19] C. de Concini, C. Procesi, *Symmetric Functions, Conjugacy Classes and the Flag Variety*, Invent. Math., **64** (1981), 203–219.
- [20] D. Cox, J. Little, D. O’Shea, *Using Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **185**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [21] C. Dunkl, P. Hanlon, *Integrals of Polynomials associated with Tableaux and the Garsia-Haiman Conjecture*, à paraître dans Mathematische Zeitschrift.
- [22] P. I. Etingof, A. A. Kirillov Jr, *Macdonald Polynomials and representations of quantum groups*, Math. Res. Lett., **1(3)** (1994), 279–296.
- [23] J. Fogarty, *Algebraic families on an algebraic surface*, Amer. J. Math, **90** (1968), 511–521.
- [24] H. Garnir, *Théorie de la représentation linéaire des groupes symétriques*, Mémoires de la Soc. Royale de Liège, (4), 10 (1950).

- [25] A. Garsia, *Recent progress on the Macdonald  $q, t$ -Kostka conjecture*, Actes du 4<sup>e</sup> Colloque sur les Séries Formelles et Combinatoire Algébrique, U.Q.A.M., Pub. L.A.C.I.M. Montréal, (1992) 249–255.
- [26] A. Garsia, M. Haiman, *Some natural bigraded  $\mathcal{S}_n$ -modules and  $q, t$ -Kostka coefficients*, Elec. J. Combin. **3**, No 2 (1996) [Paper 24, 60 pp.].
- [27] A. M. Garsia, M. Haiman, *A graded representation model for Macdonald's polynomials*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **90** (1993), 3607–3610.
- [28] A. Garsia, M. Haiman, *Factorizations of Pieri rules for Macdonald polynomials*, Discrete Math., **139** (1995), 219–256.
- [29] A. Garsia, M. Haiman, *Orbit Harmonics and Graded Representations*, à paraître aux éditions du Lacim.
- [30] A. M. Garsia, J. Remmel, *Plethystic formulas and positivity for  $q, t$ -Kostka polynomials*, Mathematical Essays in Honor of Gian-Carlo Rota (Cambridge, MA, 1996), Birkhäuser Boston, Boston, MA (1998), 245–262.
- [31] A. M. Garsia, G. Tesler, *Plethystic formulas for Macdonald  $q, t$ -Kostka coefficients*, Adv. Math., **123** (1996), 144–222.
- [32] A. Garsia, C. Procesi, *On certain graded  $\mathcal{S}_n$ -modules and the  $q$ -Kostka polynomials*, Adv. Math., **94** (1992), 82–138.
- [33] A. Garsia, M. Zabrocki, *Polynomiality of the  $q, t$ -Kostka revisited*, à paraître dans un volume dédié à la mémoire de G. C. Rota édité par Domenico Senato U. of Basilicata.
- [34] M. Haiman, *Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants*, J. Algebraic Combin., **3(1)** (1994), 17–76.
- [35] M. Haiman, *Macdonald polynomials and geometry*, in New Perspectives in geometric combinatorics, volume 38 of MSRI Publications (1999), 207–254.
- [36] M. Haiman, *Hilbert schemes, Polygraphs, and the Macdonald Positivity Conjecture*, preprint.
- [37] M. Haiman, *Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane*, en préparation.



- [38] G. D. James, *The representation theory of symmetric group*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1981).
- [39] C. Jacobi, *De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum*, J. de Crelle, **22** (1841), 360–371.
- [40] A. N. Kirillov, M. Noumi, *Affine Hecke Algebras and raising operators for Macdonald Polynomials*, Duke Math. J., **93** (1998), 1–39.
- [41] F. Knop, *Integrality of two variable Kostka functions*, J. Reine Angew. Math., **482** (1997), 177–189.
- [42] L. Lapointe, L. Vinet, *Operator construction of the Jack and Macdonald symmetric polynomials*, in Special functions and differential operators (Madras, 1997), 271–279, Allied Publ., New Delhi, 1998.
- [43] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, *Sur une conjecture de H. O. Foulkes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **286A** (1978), 323–324.
- [44] A. Lascoux, M.-P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, Quad. Ric. Sci. C.N.R., **109** (1981), 129–156.
- [45] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, Second Edition*, Clarendon Press, Oxford, England (1995).
- [46] I. G. Macdonald, *A new class of symmetric functions*, Actes du 20<sup>e</sup> Séminaire Lotharingien, Publ. I.R.M.A. Strasbourg (1988), 131–171.
- [47] L. Manivel, *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, Collection Cours Spécialisés de la SMF, numéro 3, 1998.
- [48] E. Reiner, *A Proof of the  $n!$  Conjecture for Generalized Hooks*, J. Combin. Theory Ser. A, **75** (1996), 1–22.
- [49] J. B. Remmel, M. Shimozono, *A simple proof of the Littlewood-Richardson rule and applications*, Discrete Math., **193, 1-3** (1998), 257–266.
- [50] G. de Robinson, *On representations of the symmetric group*, Amer. J. Math., **60** (1938), 745–760.
- [51] B. Sagan, *The symmetric group*, Wadsworth and Brooks/Cole, Belmont, California, 1991.

- [52] S. Sahi, *Interpolation, integrality, and a generalization of Macdonald's polynomials*, Internat. Math. Res. Notices, **10** (1996), 457–471.
- [53] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canad. J. Math., **13** (1961), 179–191.
- [54] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris (1967).
- [55] W. Specht, *Die irreduciblen Darstellungen der Symmetrischen Gruppen*, Math. Zeitschrift, **39** (1935), 696–711.
- [56] R. Stanley, *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*, Adv. Math., **77** (1989), 76–117.
- [57] R. Steinberg, *Differential equations invariant under finite reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **112** (1964), 392–400.
- [58] J. Stembridge, *Some particular entries of the two-parameter Kotska matrix*, Proc. Amer. Math. Soc., **121** (1994), 367–373.
- [59] T. Tanisaki, *Defining ideals of the closure of conjugacy classes and representations of the Weyl groups*, Tohoku Math. J., **34** (1982), 575–585.
- [60] H. Weyl, *The Classical Groups. Their Invariants and Representations*, Princeton Univ. Press, N.J., 1946.
- [61] A. Young, *On quantitative substitutional analysis (sixth paper)*, The collected papers of A. Young, University of Toronto Press (1977), 434–435.



# Table des notations

$\perp$ , 30	$d_\lambda(q, t)$ , 18	$\mathbf{H}_{[\rho]_G}$ , 32
$a_\lambda(s)$ , 19	$d_{\mu/ij}$ , 98	$\mathbf{H}_{[\rho_\mu]}$ , 34
$as_\mu(i, j)$ , 130	$d_w(X^{\mathbf{P}})$ , 30	$H_L(q, t)$ , 22
$\mathcal{A}_{uv}$ , 97	$\mathcal{D}_\mu^k$ , 135	$\tilde{H}_\mu(x; q, t)$ , 22
$\mathcal{B}_{i,j}^k(X)$ , 126	$\mathcal{D}_n$ , 112	$H_n = \text{Hilb}^n(\mathbb{C}^2)$ , 26
$\mathcal{B}_{\mu/ij}(X)$ , 98	$\mathbf{DH}_n$ , 138	$\text{inv}(W)$ , 45
$\mathbf{B}_T$ , 97	$D_X, D_Y$ , 90	$\mathcal{I}^k$ , 121
$\chi_\rho$ , 144	$e_\lambda$ , 15	$\mathcal{I}_{i,j}^k$ , 119
$c_{\mu\nu}(q, t)$ , 91	$e_r$ , 15	$\mathcal{I}_{i,j}^k(X)$ , 127
$c_{\mu\nu}^k(q, t)$ , 123	$\mathcal{F}_{q,t}(\mathbf{M})$ , 22	$\mathcal{I}_\mu$ , 36
ch, 146	$F_L(x; q, t)$ , 22	$\mathcal{I}_{\mathbf{M}}$ , 40
$\mathcal{CI}_L$ , 20	gr $J$ , 31	$\mathcal{I}_{\mathbf{M}}(X)$ , 40
$\mathcal{CT}_\alpha$ , 150	gr $\mathbf{R}_J$ , 31	$\mathcal{I}_P$ , 40
$C_\mu(x; q, t)$ , 22	$\mathcal{G}_\mu^k$ , 124	$\mathcal{IT}_L$ , 20
$\partial x_i$ , 12	$\text{GL}(\mathbf{V})$ , 143	$J_\lambda(x; q, t)$ , 19
$\partial y_i$ , 12	$h(P)$ , 31	$J_{[\rho]_G}$ , 32
$\delta_{\lambda\mu}$ , 18	$h_k^\perp$ , 123	$K_{\lambda\mu}$ , 20
$\Delta_L(X, Y)$ , 11	$h_\lambda$ , 15	$K_{\lambda\mu}(t)$ , 20
$\Delta_\mu(X, Y)$ , 11	$h_\lambda(q, t), h'_\lambda(q, t)$ , 19	$K_{\lambda\mu}(q, t)$ , 19
$\Delta_{\mathbf{p}}$ , 112	$h_r$ , 15	$\Lambda_n$ , 13
$\Delta_T(X)$ , 37, 96	$\mathbf{H}^k$ , 121	$\Lambda_n^k$ , 13

$\Lambda$ , 14	$\mathbf{M}_{i,j}^{k(+)}$ , 134	$\mathbf{R}_J$ , 31
$\Lambda^k$ , 14	$\mathbf{M}_L$ , 12	$\mathbf{R}_{[\rho]_G}$ , 32
$\ell, \ell'$ , 10	$\mathbf{M}_L(X)$ , 37	$\mathbf{R}_{[\rho_\mu]}$ , 34
$l(\mu)$ , 10	$\mathbf{M}_\mu$ , 12	$R_{a,b}(L)$ , 140
$l_\lambda(s)$ , 19	$\mathbf{M}_p$ , 112	$s_\lambda$ , 16
$\mathcal{L}_\partial[P]$ , 12	$\nabla$ , 138	$s_\mu(i, j)$ , 90
$\mathcal{L}_\partial[\mathcal{P}]$ , 12	$n(\mu)$ , 139	$s_{\mu/\nu}$ , 116
$L_0$ , 30	$p_\lambda$ , 15	$\mathcal{S}_n$ , 13
$L_p$ , 112	$p_r$ , 15	$\mathcal{ST}_L$ , 20
$LM(P)$ , 50	$P(\partial)$ , 12	$S_\mu(i, j)$ , 90
$\mu^\perp$ , 130	$P_\mu(x; t)$ , 21	$\mathcal{T}_{i,j}^k$ , 121
$\mu + [ij]$ , 130	$P_\mu(x; q, t)$ , 17	$\mathcal{T}_{i,j}^k(X)$ , 126
$\mu/ij$ , 90	$P_r$ , 52	$\mathcal{T}_{\mu+[ij]}$ , 132
$\mu_D$ , 135	$\mathbb{Q}[X, Y]$ , 11	$T \uparrow_{uv}$ , 97
$\mu_D^k$ , 135	$Q_\lambda(x; q, t)$ , 18	$T_\mu$ , 139
$\mu_G$ , 124	$[\rho]_G$ , 31	$\text{Tr}$ , 144
$\mu_G^k$ , 124	$[\rho^k]$ , 121	$X_n$ , 27
$m_\lambda$ , 13	$[\rho^k(X)]$ , 127	$\mathcal{YT}_L$ , 20
$m_T(X, Y)$ , 35	$[\rho_\mu]$ , 34	$Y_T$ , 38
$\mathcal{M}_\mu(X)$ , 123	$\mathcal{RI}_L$ , 20	$z_\lambda$ , 18
$\mathbf{M}_{i,j}^k$ , 116	$\mathbf{R}$ , 29	$z_\lambda(q, t)$ , 18

# Index

## A

annulateur  
     idéal, 36, 40, 49  
     polynôme, 40  
 anti-bras, 130  
 anti-jambe, 130  
 anti-ombre, 130  
 Artin, base de, 59

## B

bras, 19, 44

## C

cône, 42  
 caractère d'une représentation, 144  
 case, 9  
 Cohen-Macaulay, variété de, 27  
 coin extérieur, 132  
 conjecture  
      $(n+1)^{n-1}$ , 138  
      $C = \hat{H}$ , 23  
     de rotation, 140  
      $n!$ , 12  
     MPK, 19

## D

déterminant d'un diagramme, 11  
 dessin, 69  
     complétude d'un, 81  
     descendant d'un, 80  
     fils d'un, 80  
     forme d'un, 69  
     monôme associé à un, 71  
 diagonale, action, 21  
 diagramme, 9

dominant, monôme, 50  
 dominant, ordre, 18  
 droit, diagramme, 135  
 droite, case, 124

## E

équerre, 41, 68  
     étiquetée, 45  
     généralisée, 48  
 espace associé à un diagramme, 12  
 étiquette, 20  
 expulsion  
     polynômes de, 43  
     principe de, 24, 42, 43

## F

Ferrers, diagramme de, 10  
 flip, 70  
 fonction symétrique, 15  
     élémentaire, 15, 53  
     homogène, 15, 56  
     monomiale, 14  
     partielle, 58  
 Frobenius  
     caractéristique de, 22, 146  
     formule des caractères de, 147

## G

géométrie algébrique, 26  
 Garnir, polynômes de, 37  
 gauche  
     case, 135  
     diagramme, 124  
 Gröbner, base de, 49, 50, 67, 79  
     réduite, 50

grain, 130

## H

harmonique

- d'une orbite, 32
- diagonal, 138

Hilbert

- série de, 22
- schéma de, 26

## I

inversion, 45

## J

jambe, 44

## K

- Kostka, nombres de, 20
- Kostka-Foulkes, polynômes de, 20
- Kostka-Macdonald, polynômes de, 18, 19

## M

- Macdonald, polynômes de, 17
- MLRR, propriété, 111
- monomiale, base, 49

## O

- ombre, 90
- opérateurs de dérivation, 12
- orbite, 31
- ordre lexicographique de  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , 11
- ordre monomial, 49
  - lexicographique, 50
  - lexicographique inverse, 50
  - en deux alphabets, 76
  - gradué, 50

## P

- parenthésage, 151
- partition, 10
  - conjuguée, 10
  - grainée, 130

- longueur d'une, 10
- trouée, 90

## R

- réseau carré, 9
- représentation
  - de  $\mathcal{S}_n$ , 146
  - degré d'une, 144
  - espace de, 144
  - irréductible, 144
  - linéaire, 21, 143
  - régulière, 32, 144
  - semblable, 144

## S

- sauts, opérateur de, 51, 53
- Schur
  - fonction de, 17
    - gauche, 116
  - opérateur différentiel de, 57, 149
  - polynôme de, 16
- somme de puissances, 15, 52
- sommet d'un cône, 42
- symétrique, polynôme, 13
  - monomial, 13

## T

- tableau, 20
  - de Young, 20
  - injectif, 20
  - poids d'un, 20
  - polynôme d'un, 96
  - standard, 20, 23
  - superstandard, 39
- Tanisaki, idéal de, 68
- trou, 90

## U

- unie, colonne, 70

## V

- Vandermonde, déterminant de, 11, 16, 59