



**HAL**  
open science

# Influence des fluctuations sur l'échantillonnage et la quantification dans le système visuel

Cédric Duchêne

► **To cite this version:**

Cédric Duchêne. Influence des fluctuations sur l'échantillonnage et la quantification dans le système visuel. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2007. Français. NNT : . tel-00184839

**HAL Id: tel-00184839**

**<https://theses.hal.science/tel-00184839>**

Submitted on 2 Nov 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

N° attribué par la bibliothèque

---

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

**Spécialité : « Signal Image Parole et Télécom »**

préparée au Laboratoire des Images et des Signaux de Grenoble

dans le cadre de l'École Doctorale « **Electronique , Electrotechnique, Automatique,  
Traitement du Signal** »

présentée et soutenue publiquement

par

**Cédric DUCHENE**

le 19/07/07

Titre :

**INFLUENCE DES FLUCTUATIONS SUR L'ÉCHANTILLONNAGE ET LA  
QUANTIFICATION DANS LE SYSTÈME VISUEL**

**Directeurs de thèse : Pierre O. AMBLARD et Steeve ZOZOR**

**JURY**

Monsieur	Jeanny Hérault	Président
Monsieur	Jean-Marie Bilbault	Rapporteur
Monsieur	Olivier Michel	Rapporteur
Monsieur	David Rousseau	Examineur
Monsieur	Pierre-Olivier Amblard	Directeur de thèse
Monsieur	Steeve Zozor	Co-directeur de thèse



---

## Remerciements

---

**J**E tiens sincèrement à remercier toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce manuscrit de thèse. Merci à Jean-Marie Bilbault d'avoir présidé le jury lors de la soutenance. Merci à Olivier Michel pour avoir accepté d'être un des rapporteurs. Je remercie David Rousseau pour sa lecture attentive du manuscrit, ainsi que Jeanny Hérault, qui malheureusement, n'a pu assister à la soutenance.

Pierre-Olivier, évidemment merci de m'avoir fait confiance et de m'avoir encouragé tout au long de ce périple. Steeve, honnêtement, sans toi cette thèse ne serait pas ce qu'elle est. Merci et excuse moi de t'avoir fait revivre ces moments de stress de la période durant laquelle c'est toi qui allais soutenir . . .

Un grand merci à Jani, Tito, Tony, Jérémy, Julien et Mathieu, mes "colocataires"<sup>1</sup> pour l'ambiance relativement détendue (parfois un peu trop peut être) qui régnait dans nos bureaux. Je remercie également Barbara, Benoît, Caro, Cédric, Grégorêt, Jérôme, Jocelyn, Matthieu, Max, Nicolas, . . . ces personnes<sup>2</sup> avec lesquelles j'ai passé de très agréables moments au laboratoire (et souvent à l'extérieur). J'en profite également pour remercier l'ensemble des membres de l'ancien LIS.

Merci à toute l'équipe pédagogique de l'IUT 1 GEII de m'avoir réellement faciliter la vie durant cette période où je cumulais à la fois la rédaction et les enseignements.

Merci à toutes ces personnes qui ont un quelconque lien avec le karaté grenoblois . . .

Enfin je remercie toutes ces personnes<sup>3</sup>, familles et/ou amis qui m'ont supporté (évidemment dans les deux sens du terme) pendant ces quatre années (et un peu plus pour certaines) : Alice, Aurélien, Bernadette, Carine, Céline, Christine, Elvire, Guillaume, Gwen, Hugo, Jérémy, Jojo, Julien, Ludo, Maman, Manon, Marion, Momo, Nadir, Nordine, Papa, Pascal, Patrick, Philippe, Romain, Sonia, Vincent, Virginie . . . merci à tous et pardon pour ceux que j'ai lamentablement oublié.

---

<sup>1</sup>NA : ordre chronologique

<sup>2</sup>NA : ordre alphabétique, l'ordre chronologique aurait peut être été malvenu pour certain . . .

<sup>3</sup>NA : *Ibid.*



<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 La vision, les neurones, et leurs particularités</b>	<b>3</b>
1.1 Description biologique du système visuel . . . . .	5
1.1.1 L'optique de l'œil . . . . .	6
1.1.1.1 Les muscles oculomoteurs . . . . .	6
1.1.1.2 La cornée, l'iris, et le cristallin . . . . .	7
1.1.2 La rétine et les voies de conduction . . . . .	7
1.1.2.1 La couche des photorécepteurs . . . . .	8
1.1.2.2 La couche plexiforme externe - Triade synaptique . . . . .	11
1.1.2.3 La couche plexiforme interne et les voies de conduction . . . . .	12
1.1.3 Le cerveau visuel . . . . .	13
1.2 Le bruit dans les neurones du système visuel . . . . .	14
1.2.1 Mouvements oculaires ou perturbations extrinsèques . . . . .	14
1.2.1.1 Déplacements macroscopiques et fonctionnels - la saccade et la poursuite . . . . .	15
1.2.1.2 Fixation – Dérive, tremblement et micro-saccade . . . . .	16
1.2.1.3 Fonctionnalités des mouvements microscopiques et aléatoires de l'œil . . . . .	17
1.2.2 Perturbations intrinsèques – Le bruit du code neuronal . . . . .	19
1.2.2.1 Variabilité et fiabilité du code neuronal . . . . .	19
1.2.2.2 Modélisation de l'irrégularité des réponses neuronales . . . . .	21
1.3 Modélisation de rétine : nécessité de non-linéarités . . . . .	23
1.3.1 Modèle de la couche plexiforme externe . . . . .	24
1.3.1.1 Filtre spatio-temporel . . . . .	24
1.3.1.2 Loi de compression non-linéaire des photorécepteurs . . . . .	25
1.3.2 Modèle de la couche plexiforme interne . . . . .	26
1.3.2.1 Non-linéarités des liaisons synaptiques chimiques . . . . .	26
1.3.2.2 Non-linéarité pour la génération des potentiels d'action . . . . .	27
1.3.2.3 Traitement non linéaire et adaptatif de la voie magnocellulaire . . . . .	28
1.4 Influences du bruit et des non-linéarités sur la vision . . . . .	29
1.4.1 De la résonance stochastique aux systèmes améliorés par le bruit . . . . .	30
1.4.2 Amélioration par le bruit dans les neurones . . . . .	31
<b>2 Influence des micro-mouvements sur l'échantillonnage rétinien</b>	<b>37</b>
2.1 Positionnement du problème . . . . .	40
2.1.1 Description des modèles . . . . .	41
2.1.1.1 Modèle à grille régulière . . . . .	43
2.1.1.2 Modèle à grille aléatoire . . . . .	43
2.1.2 Caractérisation par la cohérence . . . . .	44
2.1.2.1 Cohérence du système $\mathcal{H}_e$ . . . . .	46

2.1.2.2	Cohérence du système $\mathcal{H}_a$ . . . . .	47
2.2	Grille régulière : l'œil comme une caméra numérique vibrante . . . . .	47
2.2.1	Comportement de la cohérence . . . . .	49
2.2.1.1	Analyse de la cohérence $\mathcal{C}_e$ . . . . .	49
2.2.1.2	Fonction de cohérence $\mathcal{C}_a$ . . . . .	51
2.2.2	Fluctuations uniformes sur une ligne de photorécepteurs de $\mathcal{H}_e$ . . . . .	52
2.2.3	Fluctuations uniformes sur une ligne de photorécepteurs de $\mathcal{H}_a$ . . . . .	54
2.2.4	Pour d'autres types de fluctuations . . . . .	61
2.2.4.1	Pour des fluctuations laplaciennes . . . . .	61
2.2.4.2	Pour des fluctuations gaussiennes . . . . .	62
2.2.5	Pour d'autres réponses impulsionnelles . . . . .	65
2.3	Grille aléatoire : plus proche d'un modèle biologique . . . . .	69
2.3.1	Modèle du bruit de grille - définition et propriétés . . . . .	71
2.3.2	Influence de la forme de la densité du bruit de grille . . . . .	72
2.3.3	Influence de la puissance du bruit de grille . . . . .	77
2.4	Discussions et perspectives . . . . .	80
2.4.1	Comment améliorer la validité du modèle? . . . . .	81
2.4.2	Comment augmenter la pertinence de la mesure? . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Quantification stochastique et détection dans le système visuel</b> . . . . .	<b>83</b>
3.1	Quantifieurs et réseaux de neurones . . . . .	86
3.1.1	Définitions et généralités sur les quantifieurs . . . . .	86
3.1.1.1	Quantifieur uniforme . . . . .	87
3.1.1.2	Quantification à haute résolution et approche <i>compander</i> . . . . .	88
3.1.1.3	Quantification vectorielle . . . . .	90
3.1.2	Parallèle avec les réseaux de neurones à seuil . . . . .	91
3.1.2.1	Un modèle de réseau de neurones formels . . . . .	91
3.1.2.2	Des représentations neuronales de quantifieurs . . . . .	92
3.2	Quantification optimale pour la détection . . . . .	95
3.2.1	Détection - Solutions optimales et sous-optimales . . . . .	96
3.2.2	Les quantifieurs-détecteurs optimaux . . . . .	98
3.2.2.1	Quantifieurs-détecteurs maximisant une $f$ -divergence . . . . .	99
3.2.2.2	Quantifieurs-détecteurs asymptotiques . . . . .	100
3.2.3	Performances des quantifieurs en détection . . . . .	101
3.2.3.1	Probabilité d'erreur de détection d'un quantifieur déterministe . . . . .	101
3.2.3.2	Performances de détection des quantifieurs optimaux . . . . .	102
3.3	Détection par quantifieurs stochastiques . . . . .	103
3.3.1	Description des quantifieurs stochastiques . . . . .	104
3.3.1.1	Quantifieurs uniformes/adaptés stochastiques . . . . .	105
3.3.1.2	Quantifieurs stochastiques variants et invariants dans le temps . . . . .	105
3.3.1.3	Représentation réseau des quantifieurs stochastiques . . . . .	105
3.3.2	Probabilité d'erreur de détection des quantifieurs stochastiques . . . . .	107
3.3.2.1	Probabilité d'erreur d'un quantifieur variant stochastique . . . . .	107
3.3.2.2	Probabilité d'erreur d'un quantifieur invariant stochastique . . . . .	108
3.3.3	Détection de constantes par quantifieur stochastique . . . . .	110
3.3.3.1	Quantifieurs centrés <i>versus</i> quantifieurs décentrés . . . . .	110
3.3.3.2	Quantifieurs invariants <i>versus</i> quantifieurs variants . . . . .	113
3.3.3.3	Quantifieurs stochastiques <i>versus</i> quantifieurs optimaux . . . . .	115

3.3.3.4	Quantifieurs stochastiques adaptés <i>versus</i> quantifieurs optimaux . . . . .	117
3.3.4	Influences des différents paramètres . . . . .	119
3.3.4.1	La densité de probabilité du bruit de seuils . . . . .	119
3.3.4.2	Le seuil de détection $\eta$ . . . . .	121
3.3.4.3	La taille $M$ du quantifieur . . . . .	124
3.3.4.4	La densité de probabilité du bruit de canal . . . . .	126
3.4	Retour sur les neurones du système visuel . . . . .	126
<b>Conclusion</b>		<b>131</b>
<b>Annexes</b>		<b>133</b>
<b>A Fonctions de Lambert</b>		<b>135</b>
A.1	Définitions et propriétés . . . . .	135
A.2	Calcul de $\sigma^m$ pour des fluctuations uniformes sur une grille régulière sans filtrage . . . . .	136
<b>B Fluctuations uniformes - filtrage par une porte sur une grille régulière</b>		<b>137</b>
B.1	Calcul du numérateur $N_a$ de la cohérence $\mathcal{C}_a$ . . . . .	137
B.2	Etude des variations de la cohérence $\mathcal{C}_a$ . . . . .	140
B.2.1	Étude des variations de $\mathcal{C}_a$ pour $ u_0  \leq \alpha_0$ . . . . .	140
B.2.2	Étude des variations de $\mathcal{C}_a$ pour $ u_0  > \alpha_0$ . . . . .	143
<b>C Fluctuations laplaciennes et gaussiennes - cas non filtré et filtré</b>		<b>145</b>
C.1	Préliminaires . . . . .	145
C.2	Pour des micro-mouvements laplaciens . . . . .	145
C.2.1	Cohérence non filtrée . . . . .	146
C.2.2	Cohérence filtrée . . . . .	146
C.3	Pour des micro-mouvements gaussiens . . . . .	147
C.3.1	Cohérence non filtrée . . . . .	148
C.3.2	Cohérence filtrée . . . . .	148
<b>D Paramètres de seuils et de niveaux des quantifieurs optimaux</b>		<b>151</b>
D.1	Quantifieurs optimaux asymptotiques . . . . .	151
D.1.1	Optimisation pour la divergence de Chernoff . . . . .	151
D.1.2	Optimisation pour la $J$ -divergence . . . . .	152
D.1.3	Exemples pour un bruit de canal laplacien et gaussien . . . . .	153
D.2	Quantifieurs optimaux maximisant une $f$ -divergence . . . . .	154
<b>Index</b>		<b>157</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>166</b>





**L**E TRAITEMENT du signal est la discipline qui développe et étudie les techniques de traitement, d'analyse, et d'interprétation des signaux. Parce qu'elles s'appliquent à toutes les étapes d'une chaîne d'acquisition, d'analyse, de transfert et de restitution des données, les techniques du traitement du signal trouvent des applications dans de nombreux domaines technologiques : télécommunications, télédétections, sismiques, acoustiques sous-marine, imageries, vidéos, etc. Évidemment, le traitement d'un signal effectué dépend du but poursuivi. En particulier, les notions de signal et de bruit sont subjectives, puisque celles-ci dépendent de ce qui intéresse l'utilisateur. Ainsi, les techniques classiques (souvent linéaires) de traitement du signal visent à éliminer la composante "bruitée" contenue au même titre que la composante utile dans le signal à traiter. La linéarité est souvent une donnée incontournable de ce genre de traitement, où soit le système, soit la technique sont linéaires.

D'autres méthodes, plus récentes, ont une approche différente en exploitant les mécanismes étranges et souvent contre intuitifs des non-linéarités. En effet, dans certains systèmes dynamiques non-linéaires, la composante bruit et la composante signal peuvent coopérer afin de produire une amélioration de transmission ou du traitement du signal utile. Un des premiers phénomènes de ce type, reconnu depuis près de 30 ans par la communauté physicienne, est la résonance stochastique. Via la non linéarité du système, bruit et signal cohérent interagissent. Dans le cas de la résonance stochastique, cette interaction engendre une synchronisation entre le temps caractéristique du signal et le temps caractéristique du système excité par le bruit seul. Le terme de résonance apparaît en raison de cette synchronisation. Quant au terme stochastique, celui-ci est connoté par le temps caractéristique du système qui est fonction du niveau du bruit d'entrée. Dans ce cas précis, l'interaction entre le signal et le bruit est coopérative, de sorte que le bruit amplifie l'effet du signal. Cette interaction se caractérise par la possibilité d'accroître le rapport signal sur bruit en sortie du système. Le bruit ne peut donc plus être vu comme une nuisance, mais peut véritablement être bénéfique au signal. On parle alors de traitement du signal favorisé par le bruit.

Issue de la physique, la discipline du traitement du signal se révèle bien utile pour l'étude et la compréhension des signaux et procédés naturels. Cette discipline apporte un grand nombre d'outils formels et conceptuels caractérisant les relations entrées/sorties de ces systèmes. A ce titre, les neurones biologiques constituent des systèmes d'études naturellement non-linéaires, capables de remarquables performances de traitement de l'information. En particulier le système visuel, composé de centaines de millions de neurones est un bel exemple de traitement du signal réalisé par la nature. Ce traitement comporte aussi bien des aspects spatiaux que temporels, continus qu'échantillonnés. De plus, tout neurone constituant le système visuel est intrinsèquement bruité. Différentes études [43, 94, 112] tendent à montrer que les traitements réalisés au sein des réseaux de neurones biologiques exploitent le bruit et les non-linéarités pour favoriser (voir améliorer) les processus de traitements de l'information. Cette thèse s'articule autour de cette thématique ; elle tente de mettre à jour des liens entre des opérations de traitement du signal susceptibles d'apparaître au sein du système visuel et les facteurs aléatoires qui y sont sous-jacents.

Nous consacrons le premier chapitre de ce manuscrit à la présentation de l'œil humain. Cet organe, en partie constitué de neurones, réalise un traitement sophistiqué de l'information. A partir d'observations

fondées sur des travaux antérieurs, nous exposons différentes opérations de traitement réalisées par le système visuel. Tout au long de ce chapitre nous insistons sur les caractéristiques des grandeurs aléatoires et des neurones que nous considérons par la suite.

Parmi les traitements auxquels nous nous sommes intéressés dans cette thèse, on trouve la question de l'échantillonnage. La plupart des systèmes numériques travaillent à échantillonnage régulier. Les travaux de Shannon donnent la condition garantissant un échantillonnage sans perte lorsque les échantillons sont prélevés à intervalles réguliers. Néanmoins, les yeux de l'homme, et certainement les yeux de toutes espèces animales n'entrent pas dans cette catégorie de système. En particulier chez l'homme, les photorécepteurs sont déposés de manière très irrégulière sur la rétine. La concentration des photorécepteurs est très dense dans la fovéa, et très éparse en périphérie. De plus, l'œil de l'homme est continuellement soumis à des vibrations aléatoires hautes et moyennes fréquences. Quelques études [72, 73, 90] montrent qu'un système d'acquisition optique à échantillonnage régulier combiné à un système mécanique assurant ses vibrations, améliore la résolution du capteur et facilite les traitements d'images réalisés en aval de celui-ci. Peut-on quantifier à l'aide d'outils du traitement du signal les avantages et les inconvénients de la technique d'acquisition retenue par la nature au niveau de l'œil humain, ce système d'échantillonnage irrégulier et soumis à des fluctuations aléatoires? Nous abordons cette question dans le chapitre 2, à l'aide de modèles simples de rétine, pour des fluctuations de diverses natures et autour d'une mesure particulière : l'inter-corrélation.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à un problème classique du traitement du signal : le test d'hypothèse binaire en milieu bruité. Ce problème possède de nombreux enjeux technologiques (radar, sonar, télécommunication, etc ...) et a donc fait l'objet d'une multitude de travaux par la communauté du traitement du signal. Ce thème est également récurrent dans les systèmes naturels tel que le processus visuel. Ainsi nous abordons la question de la détection binaire dans les premières couches de neurones du système visuel. En particulier, nous voulons caractériser quelle est l'influence du bruit interne sur les performances de détection des réseaux de neurones biologiques. Le modèle de neurone artificiel utilisé pour réaliser cette étude est le neurone à seuil. Ce choix est justifié par le fait que les réseaux à seuils possèdent des comportements étranges en présence de bruit : ils sont capables d'améliorer leurs performances lorsque du bruit est ajouté sur leurs seuils [154]. De plus, organisé en réseau, un ensemble de neurones à seuils peut constituer un simple quantifieur. Les quantifieurs sont également des systèmes non-linéaires où le bruit peut être un élément bénéfique, se manifestant par exemple par l'effet de *dithering* [20, 21, 53, 130, 161]. Enfin, pour prendre en compte le bruit interne observé dans les réseaux de neurones biologiques, nous proposons de réaliser l'étude du chapitre 3 autour de quantifieurs stochastiques, des quantifieurs dont les seuils sont soumis à des fluctuations aléatoires.

---

## La vision, les neurones, et leurs particularités

---

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Description biologique du système visuel . . . . .</b>	<b>5</b>
1.1.1	L'optique de l'œil . . . . .	6
1.1.1.1	Les muscles oculomoteurs . . . . .	6
1.1.1.2	La cornée, l'iris, et le cristallin . . . . .	7
1.1.2	La rétine et les voies de conduction . . . . .	7
1.1.2.1	La couche des photorécepteurs . . . . .	8
1.1.2.2	La couche plexiforme externe - Triade synaptique . . . . .	11
1.1.2.3	La couche plexiforme interne et les voies de conduction . . . . .	12
1.1.3	Le cerveau visuel . . . . .	13
<b>1.2</b>	<b>Le bruit dans les neurones du système visuel . . . . .</b>	<b>14</b>
1.2.1	Mouvements oculaires ou perturbations extrinsèques . . . . .	14
1.2.1.1	Déplacements macroscopiques et fonctionnels - la saccade et la poursuite	15
1.2.1.2	Fixation – Dérive, tremblement et micro-saccade . . . . .	16
1.2.1.3	Fonctionnalités des mouvements microscopiques et aléatoires de l'œil .	17
1.2.2	Perturbations intrinsèques – Le bruit du code neuronal . . . . .	19
1.2.2.1	Variabilité et fiabilité du code neuronal . . . . .	19
1.2.2.2	Modélisation de l'irrégularité des réponses neuronales . . . . .	21
<b>1.3</b>	<b>Modélisation de rétine : nécessité de non-linéarités . . . . .</b>	<b>23</b>
1.3.1	Modèle de la couche plexiforme externe . . . . .	24
1.3.1.1	Filtre spatio-temporel . . . . .	24
1.3.1.2	Loi de compression non-linéaire des photorécepteurs . . . . .	25
1.3.2	Modèle de la couche plexiforme interne . . . . .	26
1.3.2.1	Non-linéarités des liaisons synaptiques chimiques . . . . .	26
1.3.2.2	Non-linéarité pour la génération des potentiels d'action . . . . .	27
1.3.2.3	Traitement non linéaire et adaptatif de la voie magnocellulaire . . . . .	28
<b>1.4</b>	<b>Influences du bruit et des non-linéarités sur la vision . . . . .</b>	<b>29</b>
1.4.1	De la résonance stochastique aux systèmes améliorés par le bruit . . . . .	30
1.4.2	Amélioration par le bruit dans les neurones . . . . .	31

---



*Toute la conduite de notre vie dépend de nos sens, entre lesquels celui de la vue étant le plus universel et le plus noble. Il n’y a point de doute que les inventions qui servent à augmenter sa puissance ne soient des plus utiles qui puissent être.*

R. Descartes, La dioptrique, 1633

**D**E NOMBREUX types de systèmes visuels existent dans la nature. Les yeux les plus simples sont assimilables à de simples capteurs optiques, c’est par exemple le cas des fleurs qui s’orientent naturellement en direction du soleil. Néanmoins, certaines espèces vivantes possèdent des yeux “formateurs d’images” qui sont évidemment bien plus compliqués. Un tel système visuel est réalisé à partir de capteurs de lumière couplés à un cerveau performant capable de construire, à partir des autres capacités cognitives de l’être vivant, des représentations élaborées de son environnement. En comparaison avec d’autres espèces animales [54], le capteur visuel de l’humain n’est pas le plus simple ni le plus compliqué des vertébrés. Par contre, cet œil est couplé avec le cerveau le plus performant des espèces vivantes, et la moitié de ce cerveau est associé au traitement visuel. De plus, l’œil humain n’est pas qu’un simple capteur de lumière, celui-ci est constitué de neurones qui réalisent déjà à ce stade un traitement sophistiqué de l’information. Comment est réalisé ce traitement, et en quoi consiste-t-il ? Nous profitons de ce chapitre introductif pour apporter des éléments de réponses à cette question fondés sur des travaux antérieurs, ainsi que pour poser les jalons des deux thèmes que nous abordons dans les chapitres deux et trois, le cœur de ce travail de thèse.

Le premier chapitre se décompose en quatre parties. Dans un premier temps, nous effectuons une description biologique du système visuel. La littérature traitant de ce sujet est aussi vaste que le sujet est complexe. C’est pourquoi, nous détaillons en particulier la présentation de la rétine, la répartition particulière des photorécepteurs, et les éléments formant les deux principales voies formatrices d’images, c’est-à-dire sur quelques ingrédients justifiant les travaux des deux prochains chapitres. Dans une deuxième partie, nous dressons deux grandes catégories de ce qui peut être considérés comme des nuisances dans le traitement de l’information visuelle - les aléas dûs au bruit. En effet, nous prenons le soin de décrire les différentes catégories de mouvements non-intentionnels et aléatoires des yeux, ainsi que de décrire comment se manifeste la variabilité neuronale assimilée à du bruit au sein des neurones biologiques. Nous verrons dans une troisième partie que le système visuel présente la particularité d’être un système non-linéaire et adaptif. Nous insistons beaucoup sur la non-linéarité “effet de seuil” présent au sein des neurones biologiques, puisque celle-ci constitue un point de départ du chapitre trois. Enfin, nous abordons dans une quatrième section la description de systèmes non-linéaires où le bruit (interne ou externe) peut coopérer de manière bénéfique avec les signaux cohérents pour en améliorer leurs traitements afin de présenter les problématiques traitées dans la suite du manuscrit.

## 1.1 Description biologique du système visuel

La vision de l’homme est si naturelle que ce dernier a tendance à oublier qu’elle est le résultat de processus cérébraux complexes. En effet, pour “voir”, de multiples étapes de traitements sont réalisées en parallèle au niveau du cortex visuel. En amont, comme pour les autres systèmes sensoriels de l’homme, le système visuel englobe un organe périphérique, l’œil, chargé de former une image et de la faire se propager le long des voies de conduction jusqu’au cortex visuel. Cet œil n’est pas un simple capteur de lumière, c’est en fait un véritable centre nerveux. Nous verrons qu’en mettant en forme la stimulation lumineuse, celui-ci réalise déjà un pré-traitement qui facilite le fonctionnement des centres nerveux situés en aval. Afin de comprendre en quoi consiste ce pré-traitement de l’information, nous commençons tout d’abord par décrire la composition de l’œil.

### 1.1.1 L'optique de l'œil

L'homme peut percevoir avec une sensibilité équivalente en plein soleil (vision photopique) ou sous la lumière de la pleine lune (vision mésopique<sup>1</sup>), soit avec une intensité lumineuse 10000 fois moindre. La lumière visible, pour l'homme, correspond aux rayonnements électromagnétiques dont les longueurs d'ondes sont situées entre 390 nm (les ultraviolets) et 700 nm (les infrarouges). C'est en partie grâce aux yeux, les organes anatomiques sensibles à ces longueurs d'ondes que l'homme peut obtenir des informations lumineuses sur son environnement. Comme le montre la figure 1.1, l'œil est composé de trois couches. On

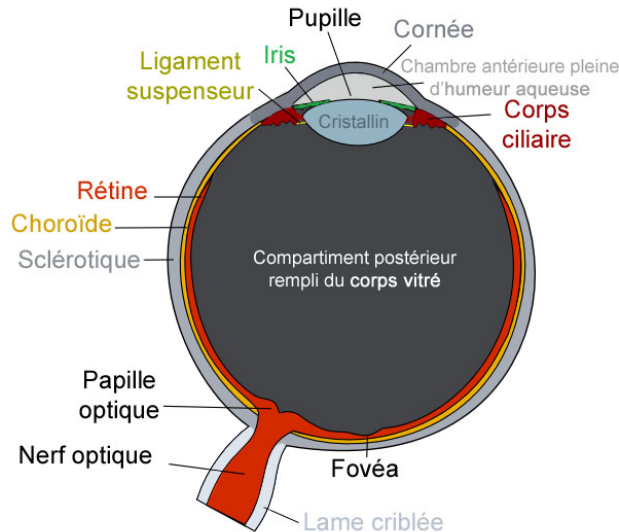


FIG. 1.1 – Schéma anatomique de l'œil humain.

trouve d'abord la couche externe, composée de la sclérotique et de la cornée, puis la couche intermédiaire, formée par l'iris, le cristallin, le corps ciliaire et la choroïde, et enfin la couche interne, qui est essentiellement constituée par la rétine. La suite de l'exposé présente rapidement les différentes parties de l'œil évoquée ci-dessus. La description suit le même chemin que celui emprunté par la lumière en pénétrant l'œil. Nous nous attachons en particulier à développer plus en détail la constitution et le fonctionnement de la rétine. Mais tout d'abord nous présentons rapidement les différents muscles de l'œil permettant de diriger le regard dans différentes directions.

#### 1.1.1.1 Les muscles oculomoteurs

Chaque globe oculaire est équipé de trois paires de muscles externes qui le maintiennent en position dans son orbite, et orientent le regard dans n'importe quelle direction. Ces six muscles garantissent également la convergence des yeux pour des courtes, moyennes, et longues distances. On distingue sur la figure 1.2 les trois paires de muscles : 4 muscles droits qui sont attachés sur les cotés du globe oculaire, et 2 muscles obliques qui sont respectivement fixés sur le dessous et le dessus de l'œil.

Contrairement au principe de fonctionnement des muscles antagonistes, contraction et relâchement de deux muscles opposés, les muscles moteurs de l'œil sont en perpétuelles tensions. En permanence, les yeux sont en mouvement et se meuvent de différentes façons qui seront décrites dans la partie 1.2.2. Nous verrons dans cette partie que les déplacements des yeux sont à la fois organisés et aléatoires. Nous nous intéressons à caractériser quelle est l'influence de cette composante aléatoire sur les performances du système visuel dans le chapitre 2.

<sup>1</sup>La vision scotopique correspond à niveau d'éclairage d'une nuit sans lune.

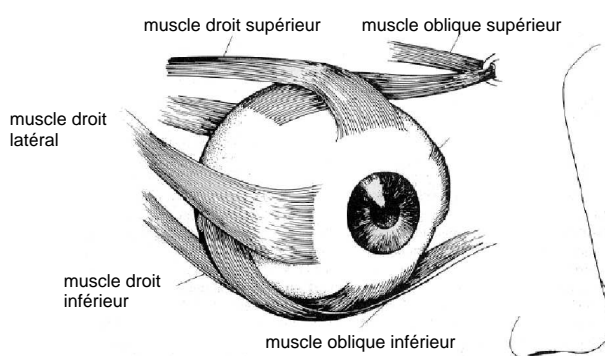


FIG. 1.2 – Les muscles moteurs de l’œil humain. Illustration modifiée de [143].

### 1.1.1.2 La cornée, l’iris, et le cristallin

La quantité de lumière, traversant la cornée puis l’humeur aqueuse, est limitée par l’iris, muscle annulaire opaque formant la pupille. Par analogie avec un appareil photographique, la pupille représenterait alors l’obturateur. Quand la lumière est vive, l’iris se contracte, ce qui diminue l’intensité lumineuse qui vient frapper le centre de la rétine, et inversement. La surface de l’iris varie dans un rapport de un à seize. La contraction et la dilatation de l’iris est un réflexe physiologique pour adapter la vision à la luminosité ambiante. De plus, l’iris se contracte également lorsque les yeux convergent en direction d’un objet proche. Ces différents asservissements de la pupille par l’intermédiaire de l’iris sont réalisés par le pretectum [18], et garantissent un niveau d’éclaircissement constant sur la fovéa, le prolongement de l’axe optique de l’œil.

Le cristallin permet la mise au point<sup>2</sup> d’images nettes sur la rétine d’objets situés à distance variant de 25 cm à 400 m environ. Chez l’homme, l’accommodation de l’œil à la distance s’opère non pas par des déplacements du cristallin, mais par des modifications de sa forme. Non déformé, le cristallin permet la vision de loin. Un ligament, la zonule de Zinn, le relie au muscle ciliaire qui, en se contractant pour la vision de près, le déforme et modifie ainsi son pouvoir de convergence. Le pilotage du muscle ciliaire est lui aussi assuré par le pretectum [18].

La première partie de l’œil consiste donc à créer une image nette sur la rétine des différents objets du monde qui nous entoure.

### 1.1.2 La rétine et les voies de conduction

La rétine est une pellicule mince et elliptique, de  $300\mu\text{m}$  d’épaisseur et de 50mm de rayon, formée de plusieurs centaines de millions de neurones connectés entre eux. Elle est située au fond de chaque œil sur les pigments épithélium, et couvre les trois quarts du globe oculaire. La rétine est une excroissance du cerveau qui est reliée à ce dernier par le nerf optique. C’est une structure neuronale très particulière du système nerveux central<sup>3</sup> (SNC) dans le sens où, sa surface, observable par rétinoscopie, est la seule partie du cerveau qui soit visible par une méthode non-invasive.

La vision prend naissance sur la rétine puisque celle-ci transforme l’image lumineuse focalisée par la pupille et le cristallin en séquences de *potentiels d’action* qui se propagent le long du nerf optique jusqu’au cortex visuel. La majeure partie du traitement réalisé par la rétine est analogique. En effet, les cellules qui réalisent ce traitement sont à *potentiels gradué*, c’est-à-dire que ce sont des cellules dans lesquelles l’information lumineuse est portée par l’amplitude des réponses neuronales. Ce traitement, est assuré par

<sup>2</sup>Néanmoins, la région de l’œil où la déviation des rayons lumineux est la plus importante est la face antérieure de la cornée.

<sup>3</sup>Le système nerveux central (ou névraxe) est la partie du système nerveux entourée par les méninges et isolée biochimiquement du reste de l’organisme par la barrière hémato-encéphalique.



5 couches successives de neurones, depuis la couche des neurones sensibles à la lumière, les photorécepteurs jusqu'à la couche des cellules ganglionnaires, dont le rassemblement des axones forment le nerf optique (voir figure 1.3). Il est à noter que la lumière provenant du cristallin pénètre la rétine par la dernière couche (5), et traverse 4 couches intermédiaires, occasionnant de légères déviations et "déformations" des rayons lumineux, avant d'activer les photorécepteurs de la première couche.

Cet arrangement un peu paradoxal trouve aux moins deux explications physiologiques plausibles. La première est que le pigment photosensible contenu dans les photorécepteurs doit être en contact avec la couche épithélium (voir figure 1.3) parce que celle-ci lui fournit un apport continu en rétine, un dérivé de la vitamine A sensible à la lumière. La seconde explication est que la pigmentation foncée de la couche épithélium empêche les photons non absorbés d'être réfléchis à nouveau vers les photorécepteurs, ce qui créerait ainsi une lumière parasite brouillant l'image.

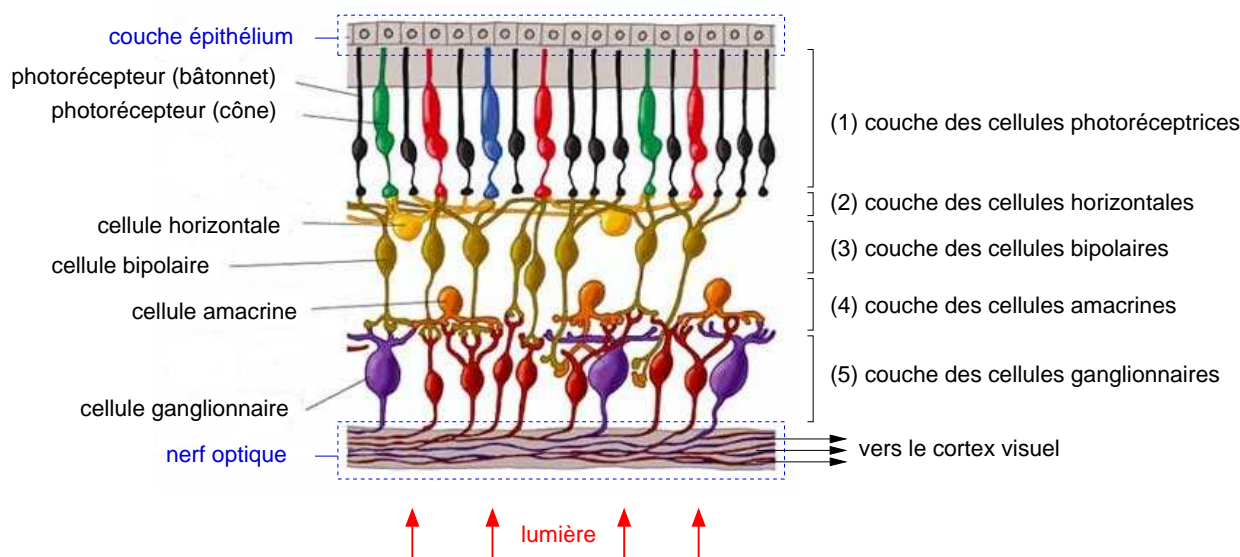


FIG. 1.3 – Organisation axiale des 5 couches de neurones de la rétine. La lumière est représentée par les flèches en bas de la figure. Celle-ci traverse 4 couches de neurones avant d'exciter la couche des photorécepteurs. Illustration modifiée à partir de [83].

Au sein des 5 couches de la rétine existent des interactions entre cellules de différentes couches mais également entre les cellules d'une même couche. Ces interactions sont assurées par des liaisons synaptiques qui peuvent être de natures chimiques ou électriques :

- les synapses chimiques assurent une liaison entre les cellules de deux couches différentes.
- les synapses électriques ou *gap junction* en anglais, établissent une communication entre cellules d'une même couche<sup>4</sup>. Les voisinages d'interaction des cellules de chaque couche varient beaucoup sur la surface de la rétine.

### 1.1.2.1 La couche des photorécepteurs

On compte environ 120 millions de photorécepteurs sur la rétine, répartis en 2 familles distinctes, les cônes et les bâtonnets . La distinction porte sur la structure et la fonction de ces deux types de photorécepteurs :

<sup>4</sup>D'après [83], il existe également des liaisons électriques entre certaines cellules amacrines et bipolaires (deux couches différentes).

1. Les bâtonnets, de forme allongée, doivent leur nom à cette caractéristique. Ils représentent 95 % de la population de neurones présentes dans la première couches de la rétine. Tous les bâtonnets se logent à la périphérie de la rétine et sont ainsi absents de la fovéa. Ils ont une très grande sensibilité à la lumière, d'où leur capacité à percevoir de très faibles lueurs la nuit. En contrepartie, les bâtonnets sont saturés lors d'un éclairage photopique. D'autrepart, ils ne permettent pas une perception précise des détails. Etant donné que les bâtonnets sont disposés sur le pourtour de la rétine, la vision nocturne est une vision périphérique.
2. Les cônes sont les photorécepteurs présents sur un disque de 6 mm de diamètre au centre de la rétine, et plus particulièrement sur la fovéa de 1.5 mm de diamètre. On en compte en moyenne entre 5 à 7 millions. On peut distinguer trois types de cônes différents selon la gamme de longueur d'onde à laquelle ils sont le plus sensible :
  - les cônes S (5 à 10 %) pour la bande des bleus,
  - les cônes M (30 à 35 %) pour la bande des verts,
  - les cônes L (60 %) pour la bande des rouges.
 Leur sensibilité à la lumière est assez faible, mais la concentration des cônes sur la région fovéal garantie une appréciation des détails et des couleurs très importante dans cette zone.

La figure 1.4 donne la courbe d'absorption des 4 types de photorécepteurs en fonction de la longueur d'onde. Les courbes ont toutes la même forme, c'est la position sur l'axe des longueurs d'ondes qui varie

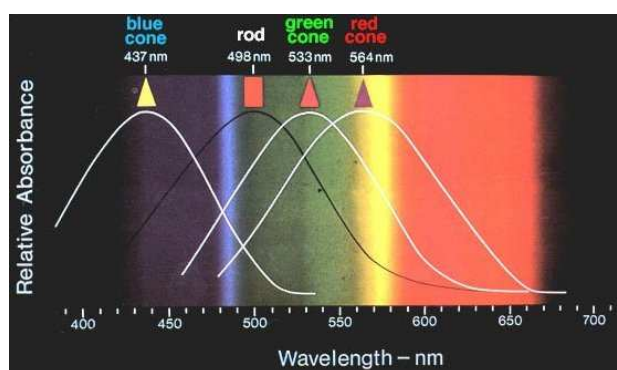


FIG. 1.4 – Sensibilité moyenne des trois types de cônes et des bâtonnets aux différentes longueurs d'ondes. Illustration tirée de [83].

d'un type de photorécepteurs à un autre. On remarque que les courbes se chevauchent les unes sur les autres. Ainsi, différents types de cônes réagissent à une même longueur d'onde. De plus, on observe que ces courbes ne sont pas réparties uniformément sur le domaine spectral visible. Les courbes d'absorption relatives des cônes rouges et verts sont assez proches alors que la courbe des cônes bleus est plus éloignée des deux autres. Si la répartition des courbes de sensibilité des trois cônes était uniforme (courbe des cônes rouges centrée autour de 630 nm) alors l'homme serait sensible au domaine des infra-rouges.

La courbe de sensibilité des bâtonnets est pratiquement centrée au milieu du spectre visible, entre la courbe de sensibilité des cônes bleus et verts. Les bâtonnets sont très peu sensibles aux longueurs d'ondes proche du domaine du rouge. Comme les bâtonnets sont les seuls photorécepteurs actifs en vision nocturne, on comprend à la vue du spectre de sensibilité pourquoi l'homme ne perçoit pas les couleurs la nuit.

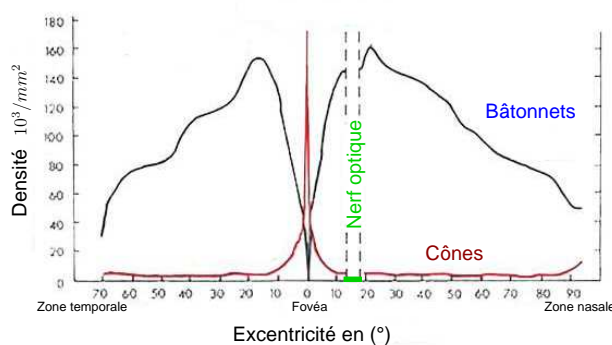


FIG. 1.5 – Densité des photorécepteurs (cônes et bâtonnets) de la rétine en fonction de l'excentricité. Illustration modifiée de [83].

La figure 1.5 donne la répartition de la densité des photorécepteurs (cônes et bâtonnets) en fonction de l'excentricité qui s'exprime en degré<sup>5</sup>. Le maximum de densité des cônes est atteint dans la fovéa, alors que celui des bâtonnets est situé à environ 20°. La zone située entre 10° et 20° d'excentricité du côté nasal ne comporte pas du tout de photorécepteurs, c'est la tâche aveugle, point de départ du nerf optique.

Sur la figure 1.6, on peut distinguer quelques courbes iso-densité des cônes d'une rétine humaine. Cette figure illustre le fait que la majeure partie des cônes est condensée dans la fovéa. Ainsi, on remarque que les propriétés de la rétine varient fortement avec l'excentricité, puisque plus on s'éloigne de la fovéa et plus, le nombre de photorécepteurs baisse, provoquant ainsi une baisse de l'acuité visuelle. De plus on a vu que le type des photorécepteurs varie avec l'excentricité. Néanmoins, l'homme n'est pas de manière consciente sensible à ces caractéristiques.

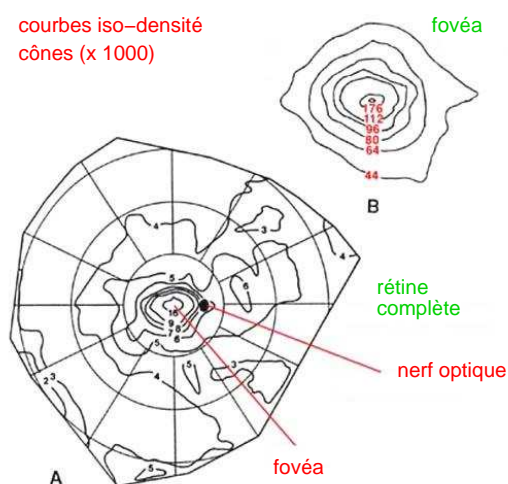


FIG. 1.6 – Carte iso-densité des cônes de la rétine. Illustration modifiée de [83].

Sur la fovéa, les cônes sont disposés de manière plus ou moins régulière [71, 133] selon une maille hexagonale centrée. Plus l'excentricité augmente et plus la dispersion des photorécepteurs est importante. La distribution de chaque type de cônes est de plus complètement irrégulière sur une rétine quelconque.

<sup>5</sup>L'excentricité se mesure par un angle correspondant à la taille d'un objet vu à une distance donnée. 1° degré d'excentricité ou 1° d'angle visuel est équivalent à la taille du pouce à bout de bras, soit environ 1 cm vu à 57 cm. Rapporté sur la rétine, 1° d'angle visuel est égal à 0.3 mm environ.

Le nombre de cônes et leurs proportions varient considérablement d'un individu à un autre. Par exemple, dans [138], les auteurs montrent que le rapport du nombre de cônes L au nombre de cônes M dans la fovéa est compris entre 0.3 et 3. Toutes ces caractéristiques aléatoires liées à la distribution des photorécepteurs rétiniens constituent le second point de départ de la problématique traitée dans le chapitre 2. Dans ce chapitre nous analysons quel est l'effet des saccades aléatoires de l'œil sur les informations provenant de la première couche de neurones d'une rétine artificielle simple dont les photorécepteurs sont dans un premier temps répartis uniformément sur une grille puis dans un second temps aléatoirement. Ce que nous entendons par grille que nous notons  $\mathcal{G}$ , est simplement le résultat d'un dépliage de rétine sur un plan muni d'un repère  $(O, x, y)$  dont l'origine  $O$  est centrée au point central de la fovéa. Ainsi chaque photorécepteur peut être localisé géographiquement sur cette grille puisqu'il possède deux coordonnées spatiales  $\mathbf{x} = [x, y]^T$  qui correspondent à la position de son centre sur le repère  $(O, x, y)$ .

### 1.1.2.2 La couche plexiforme externe - Triade synaptique

L'information lumineuse captée par les photorécepteurs, est diffusée par ces derniers jusqu'aux synapses des cellules horizontales et bipolaires, formant la couche plexiforme externe. Cette information électrique est de nature analogique ou graduée.

Les connexions synaptiques entre les cellules nerveuses de la couche plexiforme externe et les photorécepteurs sont définies par l'intermédiaire des champs récepteurs. A chaque cellule bipolaire ou horizontale correspond un ou plusieurs cônes ou bâtonnets occupant une certaine surface de la rétine : c'est cette surface qui définit le champ récepteur de la cellule en question<sup>6</sup>. Évidemment, les champs récepteurs sont très variables sur la surface de la rétine. Ils sont très petits au centre, où ils peuvent ne correspondre qu'à un seul cône ; et ils sont de plus en plus vastes vers la périphérie, où aux extrémités, ils peuvent regrouper plusieurs centaines de bâtonnets.

Dans la couche plexiforme externe, les cellules horizontales assurent une liaison transverse entre les cellules photoréceptrices, alors que les cellules bipolaires sont chargées de transmettre les informations vers la dernière couche de la rétine. Les cellules horizontales interagissent également sur les cellules bipolaires. L'ensemble de connexion entre ces trois types de cellules forment la triade synaptique.

Comme le décrit la figure 1.7, dans la région fovéale, la fonction de cette triade synaptique permet par exemple de rehausser les contours de l'image frappant les cônes. En effet, sur cet exemple, un créneau lumineux (L) est capté par une rangée de photorécepteurs (cônes). Les connexions synaptiques entre ces photorécepteurs réalisent un lissage du signal lumineux (L). Le signal obtenu est noté (C). Le même type de traitement est assuré par la couche des cellules horizontales formant le signal (H). La différence entre les signaux (C) et (H) correspond au signal des cellules bipolaires. Ce signal est caractérisé par une forte amplitude en face des zones où le créneau de lumière (L) varie beaucoup (fronts montant et descendant). C'est donc un rehaussement des contours.

Au niveau de la fovéa, chaque cône est connecté à deux cellules bipolaires (dites "naines"), chacune de type différent. On distingue ainsi les cellules bipolaires ON et OFF assurant la transmission des variations positives et négatives (relatives à une excitation/inhibition du champs récepteur) du traitement réalisé par la triade synaptique.

En périphérie, les connexions synaptiques sont légèrement différentes. Les cellules bipolaires (dites "diffuses") sont reliées à soit plusieurs cônes, soit plusieurs bâtonnets. La transmission des variations positives et négatives des contours est cette fois assurée par un jeu d'excitation/inhibition des cellules amacrines par les informations provenant des cellules bipolaires [51].

<sup>6</sup>Cette définition est conservée pour toute cellule nerveuse composant les autres couches de la rétine.

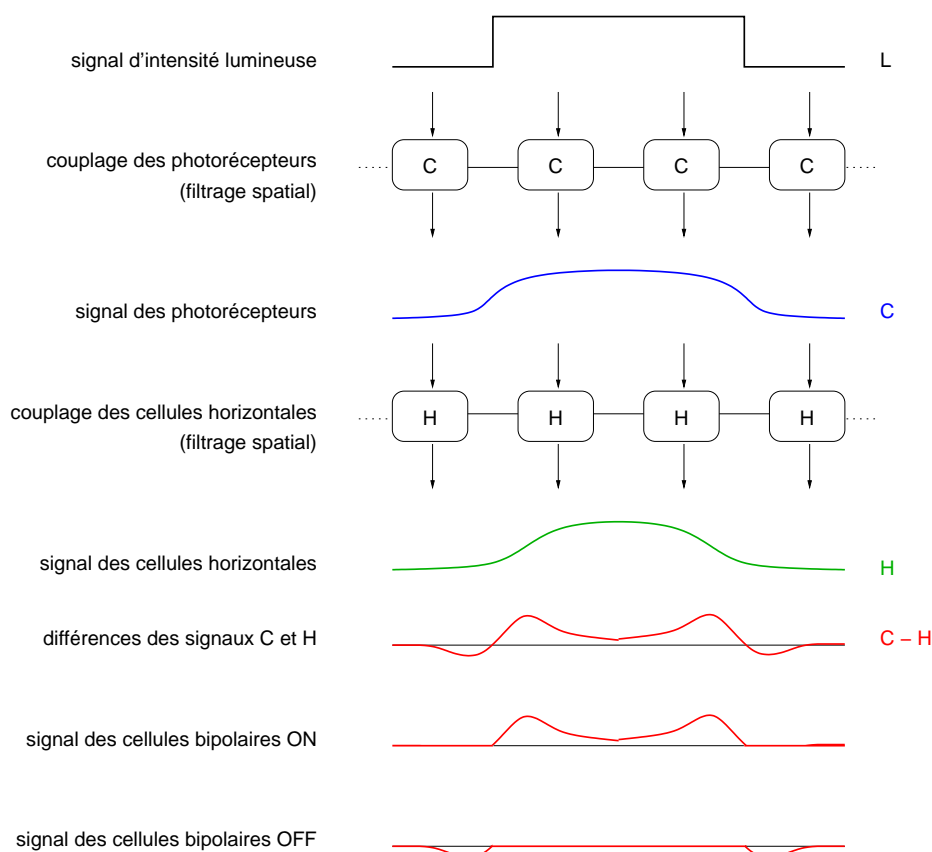


FIG. 1.7 – *Illustration fonctionnelle de la triade synaptique dans la zone fovéale de la rétine. Les connexions synaptiques entre les neurones de la couche des cellules réceptrices et horizontales réalisent un lissage (spatial) du signal lumineux L. Les cellules bipolaires codent la différence entre le signal des cônes C et celui des cellules horizontales H. Cette différence permet d'augmenter les contrastes des contours du signal lumineux. Les cellules bipolaires décomposent le signal en deux. La partie positive pour les bipolaires de type ON et la partie négative pour les cellules OFF. Illustration tirée de [2].*

### 1.1.2.3 La couche plexiforme interne et les voies de conduction

La couche plexiforme interne est composée des cellules ganglionnaires, dont les axones forment les fibres du nerf optique, et des cellules amacrines, très diversifiées et encore mal connues. Cette couche assure la liaison, par le biais du nerf optique, entre les cellules bipolaires et le reste du système nerveux central (SNC), et plus particulièrement jusqu'au relais des corps géniculés latéraux (CGL). C'est dans cette couche que les informations analogiques des couches précédentes sont codées sous forme d'impulsions neuronales ou potentiels d'action.

La rétine humaine contient entre 9 et 11 types de cellules ganglionnaires [102]. Selon les cellules cibles du CGL qui sont visées, on en distingue deux types principaux :

- Les cellules ganglionnaires naines : En sortie, elles sont connectées aux petites cellules du CGL et forment ainsi la voie parvocellulaire; tandis qu'en entrée elles sont reliées aux cellules bipolaires naines. Par conséquent, leur champ récepteur est étroit, elles sont beaucoup plus nombreuses au centre de la rétine, et elles sont très sensibles à la couleur. La sensibilité spatiale de ces cellules est élevée, alors que leur sensibilité temporelle est faible. Les réponses de ces cellules sont persistantes ou maintenues, et sont de type X, c'est-à-dire avec des canaux ON, augmentation du nombre de

potentiels d'action traduisant une excitation du champ récepteur, ou OFF, diminution du nombre de potentiels d'action correspondant à une inhibition (voir tableau 1.1).

- Les cellules ganglionnaires parasols : Leurs axones sont reliés aux grandes cellules composant le CGL assurant la voie magnocellulaire. Leurs dendrites collectent les informations de plusieurs cellules bipolaires diffuses. Elles sont donc placées autour du centre de la rétine et en périphérie. Leurs réponses peuvent être de type X ou Y, c'est-à-dire réagissant à l'établissement comme à l'arrêt d'une stimulation du champ récepteur. La sensibilité spatiale de ces cellules est faible, alors que leur sensibilité temporelle est élevée. Temporellement, leurs réponses sont éphémères (voir tableau 1.1).

Caractéristiques	Cellules naines	Cellules parasols
Proportions	75 à 90 %	10 à 25 %
Localisation	Surtout au centre	Péricentre/Périphérie
Réponses	ON ou OFF	ON, OFF, et souvent ON/OFF
Sensibilité	Chromatique (> 60%)	Luminance (contrastés)
Latence	Courte (20 ms)	Longue (50 ms)
Vitesse	Lente (20 m/s)	Rapide (40 m/s)
Champ récepteur	Étroit (1 cône à la fovéa)	Large (100 cellules ou plus en périphérie)
Résolution spatiale	Elevée	Faible
Résolution temporelle	Faible	Elevée
Détection de mouvement	Faible	Bonne
Connexions	Voie parvocellulaire	Voie magnocellulaire

TAB. 1.1 – *Caractéristiques des deux types de cellules ganglionnaires. Tableau tiré de [51].*

Les propriétés des autres types de cellules ganglionnaires (nettement moins nombreuses) sont encore bien mal connues. Ces cellules forment une troisième voie, la voie koniocellulaire qui semblerait transporter de l'information sur la luminance absolue.

La fonctionnalité de la couche plexiforme interne au sein d'une rétine est de sélectionner, d'extraire et de compresser les informations pertinentes de la scène visuelle provenant de la couche plexiforme externe. En effet, dans une rétine humaine on compte environ 120 millions de photorécepteurs et 1 million de fibres dans le nerf optique. Les fibres du nerf optique sont donc de 100 fois moins nombreuses que les photorécepteurs. Outre la mise en forme des signaux sous forme de potentiels d'actions, il est évident qu'une sélection pertinente d'éléments représentatifs de l'image soit réalisée dans la couche plexiforme interne.

Dans la partie 1.3.2, nous présentons un modèle de couche plexiforme interne simulant le fonctionnement de la voie parvocellulaire des photorécepteurs jusqu'aux potentiels d'actions émis par les cellules ganglionnaires.

### 1.1.3 Le cerveau visuel

Le cortex visuel est une zone située à l'arrière du cerveau, le lobe occipital. Il est constitué de 6 couches numérotées de I à VI selon le degré de profondeur. Les informations des voies parvocellulaires et magnocellulaires provenant des deux hémirétines gauches (ou droites) se rassemblent sans pour autant fusionner et se dirigent vers le CGL gauche (respectivement droit). Ces informations sont par la suite acheminées sur l'aire primaire V1. A ce stade, on constate que la surface fovéale de la rétine est reliée à plus de la moitié de la zone V1, alors que le champ visuel périphérique, plus grand, n'est relié qu'à l'autre

moitié. Ceci explique en partie<sup>7</sup> les caractéristiques liées à la dégradation de l'acuité visuelle dès que l'on s'écarte des conditions de vision centrale.

Les aires du cortex visuel autre que V1 sont les aires dites associatives. Leurs fonctionnalités ne sont pas à ce jour totalement percées par les experts. Nous arrêtons donc ici, la description biologique du système visuel de l'homme.

Schématiquement, la vision de l'homme repose sur une organisation particulière d'un très grand nombre de cellules, ou de neurones, formant 5 réseaux inter-connectés entre eux. Le traitement assuré par un neurone seul paraît complexe, désorganisé et bruité. Par opposition, alors que ponctuellement, les signaux sont bruités, une fois réunis en réseau, les cellules neuronales assurent un traitement de l'information très performant. Néanmoins, les réponses de ces réseaux ne sont pas toujours reproductibles, et présentent également un caractère aléatoire. La partie suivante est consacrée à la présentation des deux niveaux de bruits (intrinsèque et extrinsèque) du système visuel que nous considérons dans les prochains chapitres.

## 1.2 Le bruit dans les neurones du système visuel

La majeure partie des neurones du système nerveux communiquent par séquences de signaux stéréotypés, des trains d'impulsion ou de potentiels d'action, de nature complexe et très variable. Ces séquences représentent à la fois la dynamique intrinsèque du neurone et les caractéristiques temporelles du stimulus. Il est souvent très difficile d'extraire de ces séquences d'impulsions la part liée au stimulus de la part provenant du fonctionnement interne du neurone.

De plus, la réponse neuronale face à un même stimulus varie beaucoup d'un essai à un autre [32, 129, 149]. Les sources de cette variabilité sont multiples, et peuvent dépendre par exemple du niveau d'attention et d'excitation du sujet ou des processus biophysiques de génération des potentiels d'action. La complexité et la variabilité des réponses neuronales ne permettent pas de décrire et de prévoir de manière déterministe l'émission d'un potentiel d'action. Cette remarque est particulièrement vérifiée pour les neurones de la couche ganglionnaire du système visuel (neurones à potentiels d'action). Néanmoins, même en amont de cette couche, les réponses des cellules à potentiels gradué comportent également des caractéristiques aléatoires provenant par exemple de l'ouverture et de la fermeture des canaux ioniques membranaires, et bien sûr de l'activité des neurones voisins.

Toujours en amont de la rétine, une autre source d'aléa est directement appliquée sur la couche des photorécepteurs. Le système oculo-moteur agit de telle façon que l'œil est en perpétuel mouvement. La nature et la fonctionnalité de ces mouvements ne sont pas toujours bien déterminées, mais il est reconnu que la plupart de ces mouvements sont inconscients et désorganisés, et par conséquent peuvent être considérés comme aléatoires.

Dans cette section, nous présentons la nature des deux types de bruits justifiant les modèles utilisés dans les chapitres 2 et 3. Nous distinguons les bruits qui entrent dans le système visuel par la rétine lorsque l'œil est soumis à des déplacements involontaires, du bruit qui est généré à l'intérieur du système visuel lors du traitement neuronal.

### 1.2.1 Mouvements oculaires ou perturbations extrinsèques

Les six muscles oculomoteurs de chaque œil (voir 1.1.1.1) assurent les déplacements incessants du regard. Le regard n'est jamais fixe et se dirige différemment selon la tâche visuelle que l'homme est en train de réaliser. On distingue deux types de déplacements qui peuvent être conjonctifs, lorsque les yeux se meuvent ensemble dans la même direction, ou disjonctifs dans le cas contraire. Cette distinction porte à la fois sur l'amplitude et la fonctionnalité perceptive des mouvements visuels. Ainsi, on différencie les

---

<sup>7</sup>Il faut également tenir compte du fait que la majeure partie des cônes est concentrée dans la région fovéale.

déplacements macroscopiques ou fonctionnels, qui apparaissent lors d'une phase d'exploration (saccades) ou de suivi de cible (poursuite), des déplacements microscopiques qui ont lieu lors d'une phase de fixation du regard. En effet, même lorsque le regard porte sur un point fixe d'une scène, les yeux se déplacent aléatoirement autour du point d'attention. Bien que quelques théories existent, la fonctionnalité perceptive de ces mouvements microscopiques n'est à ce jour pas encore déterminée. Dans cette partie, nous décrivons les deux grandes catégories de mouvements oculaires afin de présenter leur caractère aléatoire qui représente la seconde clef de voute, avec l'échantillonnage irrégulier de la rétine, de la problématique traitée dans le chapitre 2.

### 1.2.1.1 Déplacements macroscopiques et fonctionnels - la saccade et la poursuite

Les mouvements fonctionnels sont parfois qualifiés de mouvements macroscopiques du fait de leurs amplitudes qui sont nettement plus importantes que les amplitudes des mouvements oculaires microscopiques présentés en 1.2.1.2. On distingue deux types de mouvements oculaires fonctionnels : la saccade et la poursuite. Ces deux types de déplacements des yeux peuvent être tout aussi bien conjonctifs que disjonctifs, et, le plus souvent être une combinaison des deux.

**La saccade oculaire :** C'est un mouvement brusque et simultané des deux yeux. Sa durée est en général comprise entre 50 et 150 ms, et sa vitesse est très élevée<sup>8</sup> :  $800^\circ/\text{s}$ . La génération de la saccade provient de l'activité du colliculus supérieur (zone particulière du système nerveux central). Les saccades sont assez imprécises, dans [85] on relève que l'erreur de positionnement est d'environ 30-50 % de la taille du trajet. Étrangement, la précision des saccades augmente avec l'amplitude de celles-ci. La variabilité de l'erreur de déplacements est plus importante pour les saccades de moins de  $30^\circ$ . Souvent une saccade est immédiatement suivie d'une légère correction par glissement ou par une autre saccade afin de corriger la position du regard lorsque l'objectif n'a pas été atteint.

Les saccades sont utilisées pour l'exploration spatiale, et peuvent être créées volontairement et/ou inconsciemment à n'importe quel moment et sur n'importe quelle cible par un observateur. La saccade apparaît en particulier lors de changements de point de fixation, ou lors d'un recadrage de l'image au centre de la fovéa. De plus, observer quelque chose revient, au niveau des mouvements oculaires, à fixer le regard en plusieurs endroits bien précis et dans un ordre particulier. Entre deux saccades l'œil passe par des points de fixation qui représente des points clefs de l'objet [166]. La figure 1.8 présente les enregistrements

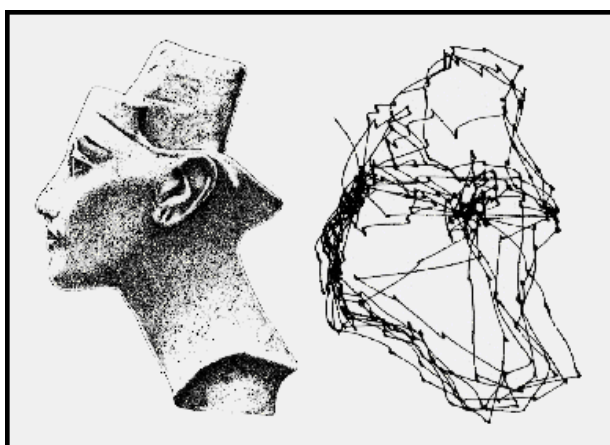


FIG. 1.8 – Enregistrements des saccades oculaires lors d'une observation libre, d'une durée de 2 minutes. Illustration tirée de : [166].

<sup>8</sup>La saccade oculaire est le mouvement le plus rapide qu'un être humain puisse réaliser.



de saccades oculaires d'un individu effectuant une observation libre d'une durée de 2 minutes. Cette figure illustre bien que certaines zones de l'image comme les yeux, la bouche et les oreilles de l'image de gauche sont plus observées et constituent donc des points d'intérêts. Yarbus [166] a également mis en évidence que les points d'intérêts d'une image varient considérablement avec la tâche que doit réaliser l'individu expérimenté.

**La poursuite oculaire :** La poursuite oculaire est la deuxième forme des mouvements macroscopiques. Une poursuite oculaire se produit lorsque les yeux continuent à fixer de manière conjointe un point d'une image qui se déplace sur les rétines. Ce mouvement oculaire a lieu lorsque la cible est en mouvement, et/ou, lorsque l'observateur se déplace. La poursuite oculaire est un mouvement lent, et ne peut être initié volontairement en l'absence de déplacement sur la rétine.

Nous venons de souligner que les yeux se déplacent de différentes façons selon la tâche à accomplir [54, 166]. Il y a deux types de mouvements réflexes de grandes amplitudes. Lorsqu'il s'agit de suivre une cible, le déplacement est régulier et continu, c'est la poursuite oculaire. Lorsque l'oeil est en phase d'exploration, le regard se pose en des points précis par petits bonds rapides, c'est l'exploration par saccade. Les saccades ne sont que très partiellement reproductibles, et c'est la principale raison pour laquelle nous considérons que ce type de macro-mouvements est de nature aléatoire.

### 1.2.1.2 Fixation – Dérive, tremblement et micro-saccade

Les yeux ne sont pas uniquement soumis aux mouvements macroscopiques fonctionnels (saccades et poursuites) décrits précédemment. Même lorsque l'œil est fixé sur un point d'intérêt, on peut mesurer avec plus ou moins de précision des mouvements involontaires de très faibles amplitudes (microscopiques) du globe oculaire. Ces mouvements sont au nombre de trois : la dérive, le tremblement, et la micro-saccade, et sont représentés sur la figure 1.9. Cette figure illustre que durant une période de fixation, les yeux se

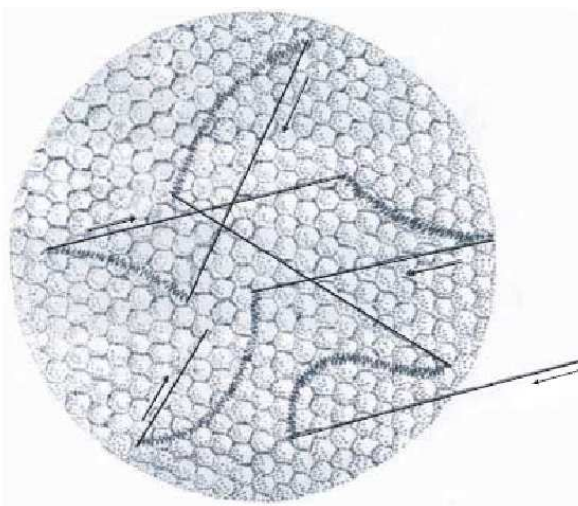


FIG. 1.9 – *Reproduction des mouvements microscopiques de l'œil. Les tremblements (hautes fréquences) se superposent sur les courbes de dérives. Les micro-saccades sont représentées par les déplacements rectilignes dont le sens est indiqué par une flèche. Le fond de l'image représente la maille quasi hexagonale d'un morceau circulaire de fovéa de 0.05 mm de diamètre. Illustration tirée de : [101].*

meuvent successivement par une phase composée d'une dérive et de tremblements simultanés, puis par une phase ne comportant qu'une seule micro-saccade. Les caractéristiques des micro-mouvements décrits

ci-après sont tirées de [101] :

- la dérive : La dérive (*drift* en anglais) est un déplacement oculaire lent et irrégulier décrivant des arcs de cercle (voir figure 1.9). L'amplitude d'une dérive varie entre 2 et 15 minutes d'angle. En moyenne le trajet réalisé par une dérive est équivalent à la longueur d'une douzaine de cônes alignés. La durée moyenne d'une dérive oculaire est inférieure à 1 seconde, et peut varier entre 0.2 et 6.7 seconde. Quant à la vitesse d'une dérive, celle-ci est assez faible, et vaut en moyenne 6 min/s.
- le tremblement : Le tremblement (*tremor* en anglais) est un mouvement périodique de haute fréquence, indépendant d'un œil à l'autre. Ce mouvement se superpose à la dérive (voir figure 1.9). Son amplitude est très faible, entre 20 et 40 secondes d'angle. Cette dimension équivaut au diamètre d'un cône dans la fovéa. C'est le plus petit mouvement réalisé par l'œil. Sa fréquence varie entre 70 et 90 Hz.
- la micro-saccade : Une micro-saccade est un mouvement très rapide qui apparaît entre deux séquences de dérive-tremblements de l'œil, et qui s'effectue de manière conjonctive. Sur la figure 1.9, chacune des micro-saccades est représentées par une trajectoire rectiligne munie d'une flèche indiquant le sens du déplacement. L'amplitude moyenne des micro-saccades est plus importante que celle des dérives. D'après [101], il apparaît en moyenne une à deux micro-saccades par seconde dont les amplitudes sont comprises entre 5 et 120 minutes d'angles. La vitesse d'une micro-saccade est évidemment très grande, des mesures ont montré que celle-ci varie entre 6 et 120 °/s.

L'origine de tous ces micro-mouvements est encore incertaine. Certains scientifiques prétendent que les dérives et les tremblements pourraient provenir de la variabilité du code neuronal commandant les muscles oculomoteurs [40]. Cette hypothèse permet d'expliquer pourquoi les dérives et les tremblements s'effectuent de manière simultanée. Dans [151], Sparks montre que les micro-saccades comme les saccades sont générées par l'activité neuronale du colliculus supérieur. Quelque soit l'origine des micro-mouvements de l'œil, on ne peut pas remettre en cause leur caractère aléatoire. En effet, l'amplitude de la dérive ainsi que la durée et le parcours varie énormément d'une réalisation à une autre. Il en est de même quant à la fréquence des tremblements qui se superposent aux déplacements oculaires occasionnés par la dérive. Les micro-saccades présentent également des attributs stochastiques dans leurs directions et amplitudes. De plus, les micro-mouvements ne semblent pas indépendants entre eux. Par exemple, Yarbus [166] montre qu'il existe une corrélation entre micro-saccades et dérives. Il montre en particulier que les micro-saccades corrigent les mouvements de dérives de l'œil en ramenant le point de fixation au centre de la fovéa.

### 1.2.1.3 Fonctionnalités des mouvements microscopiques et aléatoires de l'œil

Nous avons présenté dans les sections précédentes les deux grandes classes de mouvements oculaires : les mouvements macroscopiques et microscopiques. En ce qui concerne les mouvements de la première catégorie, la plupart des scientifiques sont d'accord sur leur utilité. Par exemple, les secousses oculaires sont nécessaires pour visionner tout le champ visuel avec précision. En effet, la vision fovéale n'est que de 2 minutes d'arc et le champ total, incluant la vision périphérique, est large de 210 degrés. Pour avoir un aperçu correct de ce champ, il est donc nécessaire de déplacer les différentes plages des zones d'intérêts sur la fovea. De même, lorsque la zone d'intérêt est en mouvement, l'œil fonctionne en mode poursuite pour garantir une projection nette et précise de cette zone sur la fovéa.

Par contre, la justification de l'existence et de l'utilité des micro-mouvements de l'œil lors d'une fixation est beaucoup plus délicate, et le rôle des micro-saccades durant une phase de fixation du regard a été sujet à débat pendant plus de trente ans. En effet, entre 1960 et 1970, deux thèses s'opposent quant à l'utilité des

micro-saccades dans la perception visuelle. Ditchburn soutient que les micro-saccades ont un rôle essentiel dans la vision normale. Steinman [86, 152], affirme le contraire, et voit les micro-saccades comme un tic nerveux, puisqu'il a montré que l'homme était capable de contrôler les micro-saccades et de conserver une perception normale. Plus tard, Ditchburn dans [33] répond que ces propos ne peuvent être remis en question puisque lorsque les micro-saccades sont contrôlées, la vision sort de son cadre naturel. De nos jours, on distingue deux grandes tendances qui soutient que les micro-mouvements sont nécessaires à la vision même si de nombreuses questions ne sont pas encore éclairées.

**Maintenance d'une excitation non uniforme sur les photorécepteurs :** La théorie communément acceptée, consiste à concevoir les micro-mouvements de l'œil comme un processus de rafraîchissement du flux de photons provenant d'une image fixe sur la rétine. En effet, d'un point de vue fonctionnel (voir 1.3.1.1), le premier étage de la vision se comporte comme un filtre passe-haut à la fois sur la composante temporelle et sur les composantes spatiales de la scène. Ainsi, une excitation constante des photorécepteurs engendre un évanouissement de la vision étant donné qu'aucune information ne traverse la couche plexiforme externe. Ce phénomène peut être également mis en évidence expérimentalement à l'aide d'un appareil de stabilisation d'images rétinienne [54, 136, 166]. Le plus évolué de ces dispositifs expérimentales est constitué d'un appareil de mesure optique ou magnétique chargé d'envoyer les valeurs des micro-déplacements oculaires à un système d'asservissement de position. Ce dernier permet de maintenir la même image rétinienne sur une des deux rétines pendant l'expérience. Cette expérience permet de mettre en évidence que lorsque l'image observée se déplace à l'identique que les mouvements aléatoires de l'œil, alors la vision s'amenuise jusqu'à disparaître totalement. Les mouvements microscopiques des yeux sont donc indispensables durant une fixation pour empêcher la cessation de perception causée par une stimulation uniforme des photorécepteurs.

On montre dans [33, 45] que l'amplitude des dérives et des tremblements est suffisante pour maintenir la vision dans la fovéa, puisque les champs récepteurs des cônes y sont très faibles, et que les micro-saccades sont nécessaires pour assurer la vision dans la région périphérique, là où les champs récepteurs des bâtonnets sont importants.

**Accentuation des réponses neuronales :** A partir des années 1990, les progrès en techniques et méthodes d'enregistrements d'activité neuronale ont permis de développer un nouvel axe de recherche. L'objectif de cette vague de travaux est de comprendre les propriétés neurophysiologiques de l'activité neuronale du système visuel induite par les micro-mouvements. Des expériences ont été menées sur différents types de neurones composant le système visuel de macaques, sur la rétine [55], dans les corps geniculés latéraux [100, 128], ou dans la zone primaire V1 [57, 99]. Le déroulement de ces expériences est le suivant : les sujets, des singes, sont entraînés pour observer un point lumineux fixe sur fond blanc sans bouger la tête ni les yeux. L'activité électrique d'un neurone en particulier est enregistrée lorsqu'un stimulus statique est placé dans le champ récepteur du neurone, et lorsque aucune stimulation n'est ajoutée dans le champ récepteur. Les résultats montrent que l'activité du neurone augmente lorsque le stimulus est présent, et que l'activité du neurone reste constante sans stimulus. Les conclusions de ces expériences sont que : les micro-mouvements induisent une augmentation de l'activité neuronale qui peut se manifester par une excitation ou une inhibition. De plus, cette augmentation est de nature visuelle plutôt que motrice, puisque même sans stimulus, les yeux des macaques sont soumis aux fluctuations aléatoires des micro-mouvements. Néanmoins, d'autres chercheurs [91, 148] ont également observé qu'en l'absence de stimulus les micro-saccades conduisent à une forte activité dans la zone visuelle primaire V1.

Finalement, on peut résumer cette partie par le fait que les micro-mouvements ne permettent pas simplement de maintenir l'objet d'intérêt au centre de la fovéa, mais aussi de prévenir de l'adaptation neuronale du système visuel en "rafraîchissant" les images rétiniennes. De nombreuses études montrent que les micro-mouvements, en plus d'être nécessaires à la vision, permettent également d'améliorer le traitement neuronal en accentuant les réponses.

Dans le chapitre 2 nous montrons à l'aide de modèles de rétines simples, que des fluctuations aléatoires couplées à une distribution irrégulière de photorécepteurs permettent de favoriser le traitement de l'information. Cette étude permet ainsi de développer une nouvelle approche concernant la justification des micro-mouvements. Les travaux sur la modélisation des macro-mouvements [48, 131] et micro-mouvements [36, 37, 38] montrent que la distribution des intervalles entre deux micro-saccades est exponentielle. De ce point de vue, la génération des micro-saccades est plutôt un processus de Poisson. D'autres travaux sont orientés vers une modélisation des micro-saccades par un mouvement Brownien fractionnaire [37]. Engbert a par exemple montré que les micro-saccades possèdent deux échelles de temps différentes. Néanmoins, afin de simplifier les études du chapitre 2, nous modélisons les mouvements aléatoires des yeux par un processus aléatoire dont la fonction d'auto-corrélation est une exponentielle décroissante.

Le bruit généré par les mouvements aléatoires des yeux n'est pas le seul phénomène aléatoire de la vision. Il est possible que le bruit "accumulé" au niveau des photorécepteurs se propage le long des voies de conduction, mais il a été également montré expérimentalement qu'une excitation identique au niveau d'un neurone ne provoque pas toujours la même réponse. Cette variabilité de la réponse neuronale peut être expliquée par un bruit ambiant présent au sein des cellules. Ce bruit ambiant, qui provoque des perturbations intrinsèques au réseau est discuté dans la partie suivante.

### 1.2.2 Perturbations intrinsèques – Le bruit du code neuronal

A l'aide d'observations réalisées sur des neurones biologiques, nous exposons dans un premier temps le phénomène de la variabilité du code neuronal, cette variabilité qui est assimilée à du bruit. Nous présentons dans un deuxième temps comment ce bruit est modélisé dans différents modèles de neurones, et notamment dans un modèle de neurones simples que nous utilisons dans le chapitre 3 traitant du problème de détection dans le système visuel par des quantifieurs stochastiques.

#### 1.2.2.1 Variabilité et fiabilité du code neuronal

Les neurones communiquent par le biais de courtes impulsions électriques appelées potentiels d'action. *In vivo*, ces impulsions sont déchargées de manière très irrégulière<sup>9</sup>. La colonne de gauche et celle de droite de la figure 1.10 présentent deux expériences différentes illustrant la variabilité de la réponse neuronale d'un neurone du système visuel de la mouche. Le stimulus est pour chaque expérience, une image composée de 10 barres de dimensions variables, qui se déplace devant le champ visuel de la mouche à vitesse constante pour la colonne de gauche - A, et à vitesse variable mais identique d'un essai à un autre pour la colonne de droite - A'. Les panneaux B et B' donnent les trains d'impulsion obtenus à chaque essai, 50 au total d'une durée d'une seconde, en réponse au stimulus A et A'. Entre deux essais successifs, une période de repos de 20 secondes est imposée, assurant ainsi que le neurone retombe dans un état d'excitation identique avant chaque épreuve. Les panneaux C et C' sont des estimations du taux d'émission de potentiels d'action par intervalle de 3 ms pour les deux différentes stimulations.

On remarque d'une part que les 50 séquences du panneaux B sont toutes différentes d'un essai à un autre, et que d'autre part le taux d'émission est quasiment constant. Dans ce cas, la variabilité de la réponse neuronale est flagrante puisque le stimulus est toujours le même et que les conditions expérimentales sont similaires. On montre également par expérience que le taux d'émission de potentiels d'action est très corrélé avec la vitesse de déplacement du stimulus. Ces observations, relevées pour de nombreuses cellules neuronales, ont donné naissance à une des deux théories traduisant le fonctionnement du code neuronal. Le point de vue traditionnel [16, 32, 119, 129] considère que les neurones codent l'information dans la *fréquence*

<sup>9</sup>De récents travaux [16] tendent à montrer qu'il existe des activités synchrones (et donc régulières) dans de nombreuses régions du cerveau. La synchronisation des potentiels d'action de différents neurones est de l'ordre de la milliseconde [11, 109, 116, 127].

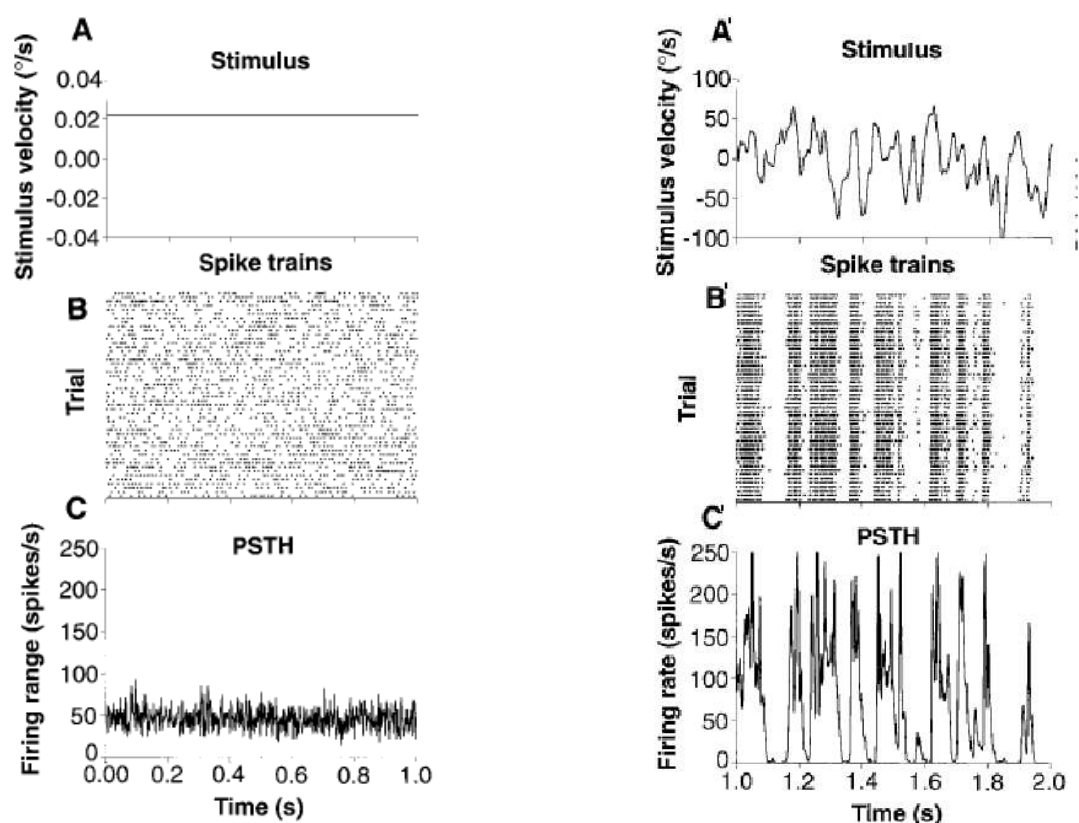


FIG. 1.10 – Variabilité et fiabilité de la réponse neuronale d'une cellule du système visuel de la mouche. Une image se déplace à vitesse constante (A) et variable (A') devant le champ visuel de la cellule. Les 50 trains d'impulsion obtenus pour (A) et (A') sont respectivement tracés en (B) et (B'), où un potentiel d'action est représenté par un point. Chaque enregistrement dure 1 s, et 20 s s'écoulent avant de ré-itérer une expérience. Les graphiques (C) et (C') donnent respectivement une estimation du taux d'émission de potentiels d'action par intervalle de temps de 3 ms face au stimulus (A) et face au stimulus (A'). Illustration modifiée à partir de [139].

“moyenne” de décharge des potentiels d'action. En d'autres termes, d'après cette théorie, le temps précis d'apparition d'une impulsion n'est pas porteur d'information, il n'est que la réalisation d'un bruit.

La variabilité des réponses du panneau B' est plus faible, on observe de surcroît une reproductibilité dans les enregistrements. On parle alors de fiabilité de la réponse neuronale. De plus, on voit que le stimulus B' module le taux d'émission de potentiels d'action rapidement et sur une grande plage de variation. Ces deux observations sont les fondements de l'autre théorie (plus récente) concernant le code neuronal [16, 32, 119, 129]. Celle-ci considère que le temps précis des impulsions est porteur d'information, puisque les trains d'impulsion sont irréguliers mais *reproductibles*.

De plus, l'irrégularité des réponses neuronales n'est observable que pour des neurones *in vivo*. En effet, *in vitro* un neurone biologique répond de manière très régulière à une stimulation constante (voir figure 1.11). Une hypothèse pourrait être que le bruit intrinsèque au neurone est faible (identique *in vitro* et *in vivo*), et que c'est l'environnement du neurone, c'est-à-dire les neurones voisins, qui casse cette régularité en le faisant tirer de manière irrégulière. Nous considérons que cette influence de la part du voisinage est aléatoire, et que c'est la principale source de bruit intrinsèque au réseau de neurone.

Nous avons souligné que deux points de vue s'opposent sur la question : comment les neurones codent-ils l'information ? Quelque soit la théorie retenue, ce qui nous importe c'est que dans les deux cas, les

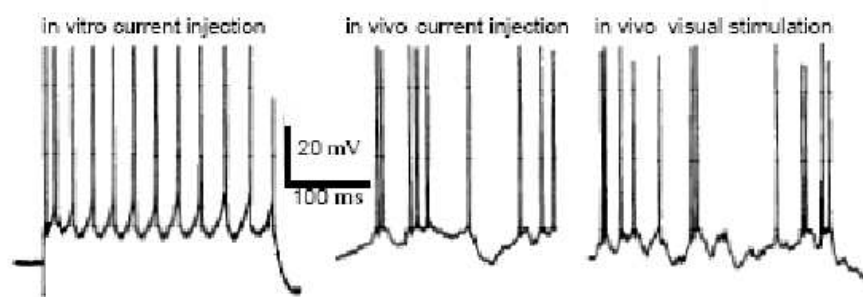


FIG. 1.11 – Enregistrements inter-cellulaires de neurones de chat de la zone V1. Le panneau de gauche est la réponse d'un neurone d'une préparation *in vitro* à un courant constant. Le panneau central et celui de droite donnent la réponse d'un neurone *in vivo* répondant à une stimulation constante (centre) ou à une image qui se déplace à vitesse constante. Illustration tirée de [32].

réponses neuronales ne peuvent être considérées purement déterministes. En effet, les réponses de neurones à différentes excitations sont toujours entachées de bruit. Nous considérerons dans les prochains chapitres que ce bruit provient principalement de l'activité du réseau de neurones. La suite de cette partie est consacrée à la présentation de différentes méthodes permettant de considérer la variabilité neuronale dans des réseaux de neurones.

### 1.2.2.2 Modélisation de l'irrégularité des réponses neuronales

Il y a deux approches différentes en modélisation biologique [16], l'approche biophysique et l'approche computationnelle<sup>10</sup>. Nous présentons dans cette section deux modèles de neurones formels issus de l'approche computationnelle sur lesquels peuvent se rattacher les réseaux de neurones à seuils plus simples que nous utilisons dans le chapitre 3.

Bien qu'idéalisé, le modèle impulsionnel reproduit assez fidèlement les caractéristiques aléatoires du code neuronal observées dans la section précédente [16]. Par contre, le modèle fréquentiel ne permet pas d'expliquer le phénomène de déclenchement régulier de potentiels d'actions relevé sur des neurones *in vitro*. Enfin, le dernier modèle, le neurone à seuil, est un cas particulier du neurone impulsionnel. Ce modèle n'est certes pas très représentatif du "calcul" réalisé au sein d'un neurone biologique mais permet néanmoins de part sa simplicité d'obtenir des résultats dans des problèmes complexes comme celui abordé dans le chapitre 3 ou en 1.4.1.

**Le modèle fréquentiel :** Ce modèle trouve son inspiration dans la théorie du code neuronal supportant l'idée que la fréquence de décharge porte l'information. Ainsi, l'occurrence d'un potentiel d'action à un moment précis n'est que la réalisation d'un bruit indépendant. Souvent, on considère un train de potentiels d'action comme la trajectoire d'un processus de Poisson non-homogène. A chaque instant, le neurone a une certaine probabilité de décharger, qui est indépendante entre deux instants distincts. L'information pertinente est alors cette probabilité instantanée, encore appelée fréquence instantanée.

**Le modèle impulsionnel ou "intègre-et-tire" :** L'objet d'un modèle impulsionnel est de décrire et de reproduire la série d'impulsions générées par un neurone réel. On compte parmi ces modèles [16, 47, 122] : le modèle de Lapicque, l'intègre-et-tire à conductance, l'intègre-et-tire quadratique etc ... La figure 1.12 représente le fonctionnement d'un neurone à impulsion. Souvent, ce neurone formel porte le nom de modèle

<sup>10</sup>de *computare* : calculer en latin. Voir [16].

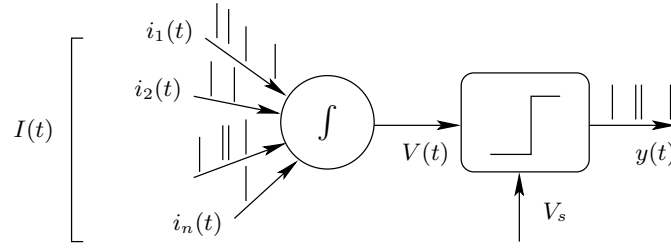


FIG. 1.12 – *Modèle de neurone impulsif.* L'entrée  $I(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t)$  symbolise l'ensemble des courants synaptiques. Le potentiel membranaire interne au neurone est noté  $V(t)$ . La génération du potentiel d'action est assurée par un système non-linéaire à seuil :  $V_s$ . La séquence d'impulsions de sortie est notée  $y(t)$ .

intègre-et-tire, puisque son fonctionnement se décompose en deux actions différentes : le traitement des entrées synaptiques ou la phase d'intégration (constante de temps lente) et l'émission du potentiel d'action (constante de temps beaucoup plus rapide). Ce modèle est donc régité de manière séquentielle et obéit au deux étapes ci dessous :

1. Phase d'intégration : La phase d'intégration traduit l'évolution instantanée du potentiel membranaire. Pour le modèle de l'intégrateur à fuite l'évolution du potentiel membranaire  $V(t)$  est donnée par l'équation différentielle scalaire suivante :

$$C \frac{dV(t)}{dt} = -g_l(V(t) - V_0) + I(t) \quad (1.1)$$

dans laquelle intervient : la contribution électrique de tous les courants pré-synaptiques  $I(t) = \sum_{k=1}^n i_k(t)$ , la capacité membranaire  $C$ , le potentiel de repos de la membrane  $V_0$ , et la conductance de fuite  $g_l$ .

2. Émission du potentiel d'action : L'émission du potentiel d'action sur la sortie  $y(t)$  est un mécanisme non-linéaire à seuil qui génère l'impulsion stéréotypée (par exemple une impulsion de Dirac) lorsque le potentiel  $V(t)$  dépasse le seuil  $V_s$ , et ré-initialise  $V(t)$  à sa valeur de d'initialisation  $V_r$  qui peut être différente de la valeur de repos  $V_0$  :

$$\begin{cases} y(t) = \delta(t - t') & \text{et } V(t) = V_r & \text{si } V(t) \geq V_s \\ y(t) = 0 & \text{et } V(t) \text{ suit (1.1)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.2)$$

On rappelle que ce modèle n'est pas issu de la biophysique, c'est plutôt un modèle de calcul. Néanmoins, celui-ci trouve son inspiration dans la modélisation électrique du neurone du modèle de Hodgkin-Huxley. De plus, on peut améliorer la modélisation en considérant que la conductance de fuite  $g_l$  soit variable dans le temps, et en appliquant un temps de relaxation  $\tau_r$  avant la génération d'un nouveau potentiel d'action. De même, il est possible de compléter le modèle en utilisant un modèle de potentiel d'action plus spécifique.

**Le modèle à seuil :** Le modèle de neurone à seuil est un cas particulier du modèle de neurone à impulsion. En effet, un neurone à seuil est un neurone à impulsion dont la capacité membranaire est nulle ( $C = 0$ ). Dans ce cas, à partir de (1.1), la relation entrée sortie du neurone est donnée par :

$$V(t) = \frac{1}{g_l} I(t) + V_0 \quad (1.3)$$

La première couche d'un modèle de neurone à seuil est donc une simple transformation linéaire des contributions électriques des entrées  $I(t)$ . La deuxième partie du neurone n'est pas modifiée, elle est toujours

assignée à la génération du potentiel d'action. Comme nous l'avons déjà souligné auparavant, un potentiel d'action est un message stéréotypé, et souvent on le modélise par une impulsion de Dirac.

Nous verrons dans la partie 1.4 que des réseaux bâtis à partir de neurones de ce type possèdent des propriétés de traitement de l'information très particulières. C'est pourquoi nous utilisons ce modèle de neurone dans le chapitre 3. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes de détection visuels traités par des neurones soumis à du bruit. Ce bruit est une manière de reproduire la variabilité des réponses neuronales que nous avons décrite auparavant. De plus, le fait que les neurones utilisés soient de simples seuils nous permet de réaliser des comparaisons avec la théorie des quantifieur-détecteurs.

Nous terminons cette partie en soulignant que les performances du système visuel humain sont impressionnantes, alors que celui-ci fonctionne pourtant en environnement bruité, et par conséquent dans des conditions qui ne paraissent pas optimales. En effet, nous avons décrit deux grandeurs aléatoires qui agissent sur la vision. Une de ces grandeurs est extrinsèque, c'est celle qui provient des déplacements aléatoires des yeux. Par opposition, l'autre grandeur stochastique, est celle qui est générée par le fonctionnement des neurones, qui est donc intrinsèque. Malgré ces deux perturbations stochastiques, la vision humaine reste performante dans de nombreuses situations. Citons par exemple, la capacité de l'homme à voir dans des conditions diurnes ou nocturnes. Cet exemple introduit une des facultés des plus remarquables du système visuel qui est son adaptabilité. Le chapitre qui suit, présente deux mécanismes d'adaptations du système visuel. Nous verrons qu'en plus d'être adaptatif, le système visuel comporte également des non-linéarités.

### 1.3 Modélisation de rétine : nécessité de non-linéarités

L'étude de systèmes complexes, comme la vision, peut se simplifier en travaillant à partir de modèles reproduisant à divers degrés de fiabilité la "réalité". De ce fait, on trouve plusieurs modèles de la vision humaine. La plupart de ces modèles sont d'inspirations biologiques. En 1965, Rodieck [132] avance que la réponse jusqu'au nerf optique peut être modélisée de façon linéaire par rapport aux réponses des photorécepteurs. De nos jours, les spécialistes s'accordent pour préciser que cette affirmation est vraie uniquement pour de très faibles variations de l'entrée, et uniquement pour les informations transportées par la voie parvocellulaire. En effet, il est reconnu que la modélisation du système visuel par des méthodes purement linéaires ne peuvent traduire et expliquer complètement les observations relevées sur le système visuel humain (notamment celles relevées au niveau de la voie magnocellulaire). Par conséquent, les modèles de vision actuels présentent des aspects dynamiques et non-linéaires permettant d'expliquer et de reproduire les deux principaux phénomènes d'adaptation du système visuel : l'adaptation à la luminance et l'adaptation au contraste.

Nous exposons deux modèles, issus d'une approche neuro-physiologique, caractérisant les deux couches plexiformes de la rétine. Chacune des deux couches ayant ses propres particularités, chacun des deux modèles comportent des non-linéarités différentes. Le premier modèle simule le fonctionnement de la couche plexiforme externe à l'aide de filtres spatio-temporels linéaires. Le modèle se rapproche des performances visuelles humaines réelles en lui ajoutant des non-linéarités traduisant l'état d'adaptation des photorécepteurs.

La même démarche est utilisée pour le développement du second modèle qui simule le fonctionnement de la voie parvocellulaire depuis la couche des photorécepteurs jusqu'à la génération des potentiels d'action propagés par les cellules ganglionnaires. Nous verrons que la modélisation est différente mais que la fonctionnalité de la couche plexiforme externe reste identique à celle du modèle précédent. Le lien entre les deux couches plexiformes est assuré par des synapses chimiques qui sont modélisées par une non-linéarité. De plus, la génération des potentiels d'action en sortie de la couche plexiforme interne est également réalisée à l'aide d'une non-linéarité. Enfin, nous verrons également que la voie magnocellulaire est par nature non linéaire.



### 1.3.1 Modèle de la couche plexiforme externe

En étudiant les propriétés électriques de la triade synaptique (voir 1.1.2.2), Beaudot [7] propose un modèle *linéaire* représentant le fonctionnement de la couche plexiforme externe (photorécepteurs, cellules horizontales et cellules bipolaires). Comme sur une rétine biologique, ce modèle réalise un filtrage spatio-temporel de la scène projetée sur les photorécepteurs. Ce filtre permet principalement de blanchir le spectre de l'image visualisée.

#### 1.3.1.1 Filtre spatio-temporel

Le filtrage réalisée par l'ensemble des photorécepteurs ou par l'ensemble des cellules horizontales est de nature passe-bas à la fois sur les composantes spatiales et sur la composante temporelle. Le modèle de fonction de transfert proposé par Beaudot dans [7] est donc identique pour une ligne de photorécepteurs  $F_c$  et pour une ligne de cellules horizontales  $F_h$ .

$$F_{c,h}(f_k, f_t) = \frac{1}{1 + \beta_{c,h} + 2\alpha_{c,h} [1 - \cos(2\pi f_k)] + j2\pi f_t \tau_{c,h}} \quad (1.4)$$

Dans l'équation (1.4),  $f_k$  et  $f_t$  représentent respectivement la fréquence spatiale<sup>11</sup> et la fréquence temporelle du flux lumineux stimulant les photorécepteurs. Les coefficients  $\alpha_{c,h}$ ,  $\beta_{c,h}$ ,  $\tau_{c,h}$  sont des paramètres de neurones et de synapses des photorécepteurs (indice  $c$ ) et des cellules horizontales (indice  $h$ ) (voir [7] pour plus de détails). La fonction de transfert globale  $F_b$  de la couche plexiforme externe, c'est-à-dire entre les photorécepteurs et la sortie des cellules bipolaires, est obtenue par une combinaison des deux fonctions de transfert  $F_c$  et  $F_h$  selon l'expression suivante :

$$F_b = F_c(1 - F_h)$$

Comme le décrit l'exemple de la la figure 1.13, le filtre  $F_b$  est de nature passe-bande, puisque les basses et hautes fréquences spatiales et temporelle sont atténuées. Néanmoins, les effets sur les fréquences spatiales sont relativement différents selon le contenu temporel de la scène visualisée. Pour une scène statique ( $f_t = 0$ ), le gabarit du filtre  $F_b$  est plutôt passe-haut pour les fréquences spatiales, alors que pour une scène dynamique ( $f_t \neq 0$ ) le filtre devient passe-bas. Par conséquent, lors de la présentation brusque d'une image sur le modèle de rétine, la fonction de transfert  $F_b$  est passe-bas, ce qui signifie que l'image est analysée dans son ensemble (puisque les très hautes fréquences ne contiennent que très peu d'information). Puis au cours du temps, la fonction de transfert  $F_b$  évolue vers un mode passe-haut de manière à faire ressortir les détails de l'image (voir [65]).

De plus, comme le souligne Beaudot, ce modèle garantit que le pré-traitement rétinien réalisé par la couche plexiforme externe d'une image dite naturelle correspond à un blanchiment spectral (voir figure 1.14). En effet, le gabarit de la fonction de transfert  $F_b$  permet de compenser la décroissance du spectre d'une scène naturelle (voir [63, 137]) de manière à ce que le produit des deux spectres soit relativement plat dans la bande de fréquence spatiale utile (voir figure 1.14). De ce pré-traitement rétinien résulte donc un blanchiment spectral fort utile pour les opérations ultérieurs au niveau du cortex [65]. Cette observation est en accord avec les travaux d'Atick [4, 5], qui soutient que la rétine réalise une décorrélation de l'image projetée sur les photorécepteurs afin de réduire la redondance de l'information qui est envoyée vers le cortex [6].

Pour que ce modèle possède les mêmes capacités d'adaptation à la luminosité que le système visuel humain, il est nécessaire de lui ajouter des caractéristiques dynamiques et non-linéaires. Ces propriétés sont incorporées dans la fonction de transduction des photorécepteurs.

<sup>11</sup>Pour simplifier la description, on ne considère qu'une seule dimension spatiale.

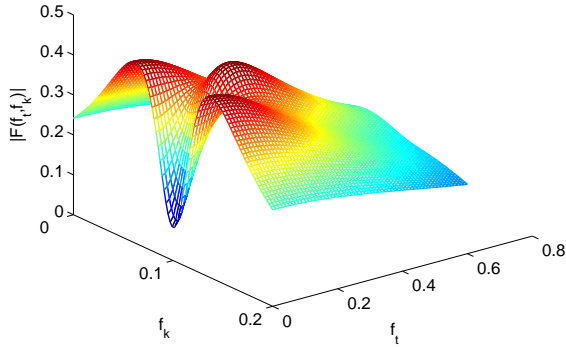


FIG. 1.13 – Fonction de transfert  $F_b$  du modèle spatio-temporel de Beaudot de la couche plexiforme externe. Les fréquences spatiales et temporelles sont respectivement notées  $f_k$  et  $f_t$ . Les paramètres du modèle sont :  $\alpha_c = 2$ ,  $\beta_c = 0.1$ ,  $\tau_c = 1$  et  $\alpha_h = 10$ ,  $\beta_h = 0.1$ ,  $\tau_h = 1$  (voir [7]).

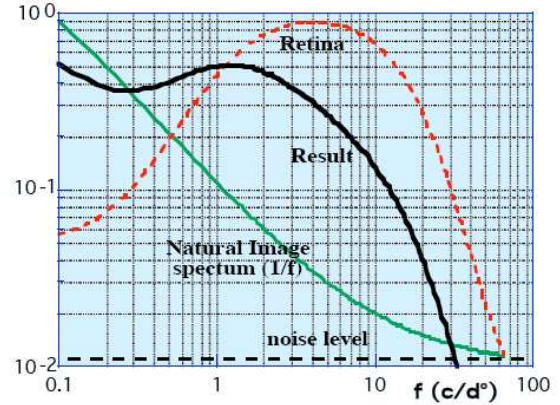


FIG. 1.14 – Illustration de la compensation du spectre d'une scène naturelle par le filtrage de la couche plexiforme externe. Le résultat du produit des deux courbes "Retina" et "Natural Image" est relativement plat dans la plage de fréquence comprise entre 0.1 et 1  $c/d^\circ$ .

### 1.3.1.2 Loi de compression non-linéaire des photorécepteurs

Des études neurologiques [34, 115, 142, 158] ont montré que le fonctionnement des photorécepteurs est caractérisé par deux phénomènes.

Le premier concerne la capacité des photorécepteurs à s'adapter aux différents niveaux de luminosité. En effet, on sait que chaque photorécepteur ajuste sa sensibilité en centrant sa dynamique de sortie autour de la luminance ambiante présente dans son champ récepteur. Dans [7], Beaudot soutient que l'adaptation est réalisée par la boucle de retour des cellules horizontales sur les photorécepteurs. L'information de correction apportée par les cellules horizontales correspond à la valeur moyenne de l'intensité lumineuse de la scène perçue par le photorécepteur. Beaudot explique de cette manière comment le système visuel est capable de s'adapter aux scènes allant du domaine photopique au domaine scotopique.

La deuxième particularité des photorécepteurs de la rétine concerne leur caractère non linéaire. En effet, en plus de la capacité d'adaptation, la fonction de transduction des cônes doit être modélisée par une loi non linéaire pour expliquer les effets de saturations des photorécepteurs. Même si le caractère non linéaire n'est pas remis en question, la loi qui le régit fait l'objet de beaucoup de discussions dans la communauté des neurosciences. D'une manière générale, cette loi est assimilée à l'équation de Michaëlis-Menten. Dans ce manuscrit, nous considérons la forme la plus simple de cette loi, et décrivons la caractéristique de transfert  $f_c$  des cônes par la loi de Naka-Rushton. En notant  $I$  l'intensité lumineuse de la scène frappant un cône, et  $V$  le potentiel électrique de transduction, la relation entrée sortie du photorécepteur est donnée par :

$$V = f_c(I, I_0) = \frac{I}{I + I_0} \quad (1.5)$$

où  $I_0$  représente l'état d'adaptation du cône provenant de la couche des cellules horizontales.

La figure 1.15 représente l'évolution de la caractéristique de transduction d'un cône pour 5 valeurs d'adaptation  $I_0$ . On remarque que la sensibilité du photorécepteur n'est pas la même selon le niveau d'intensité  $I$ . En effet, pour une valeur donnée de  $I_0$ , la variation de potentiels  $\Delta V$  correspondant à une variation  $\Delta I$  n'est pas proportionnelle. En échelle logarithmique, on remarque que la courbe est déplacée suivant la valeur de  $I_0$ , et que la caractéristique est d'allure linéaire autour de  $I_0$ . Pour une valeur de  $I_0$ , la

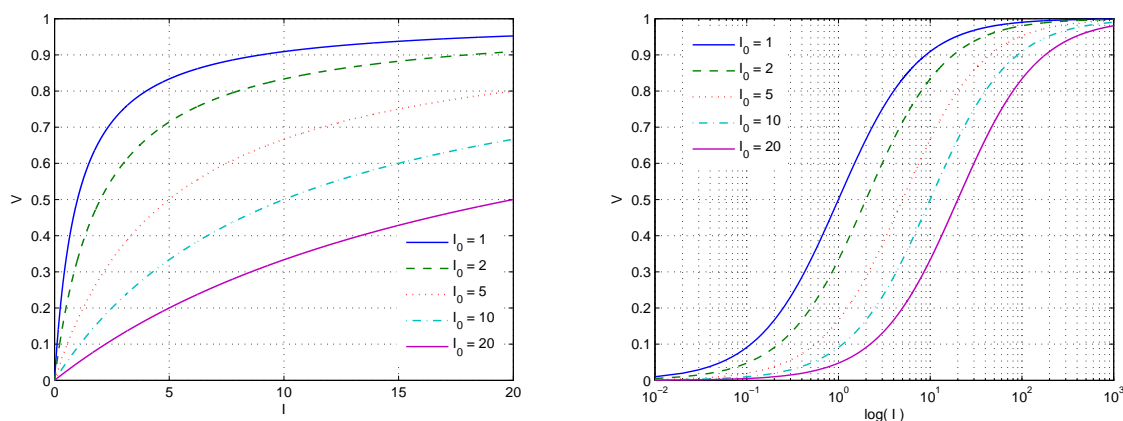


FIG. 1.15 – Fonction de transduction (1.5) d'un cône tracée pour 5 niveaux d'adaptation  $I_0$  différents. Le tracé est en échelle linéaire sur la gauche et en échelle logarithmique sur la droite.

fonction de transduction  $f_c$  réalise la compression de la gamme de luminosité d'entrée dans l'intervalle  $[0; 1]$ . Lorsque  $I = I_0$ , le potentiel de sortie  $V$  est toujours égal à  $1/2$ , c'est-à-dire le milieu de sa plage de variation. Avec ce modèle de photo-transduction, les cônes fonctionnent donc à dynamique de sortie maximale.

Nous venons de présenter un modèle décrivant le fonctionnement de la couche plexiforme externe. Pour que celui-ci puisse expliquer et reproduire les caractéristiques visuelles de l'œil humain, nous avons introduit une non-linéarité traduisant le fonctionnement réel des photorécepteurs. Dans la suite du manuscrit, nous présentons un autre modèle qui cette fois, explique le fonctionnement de la couche plexiforme interne.

### 1.3.2 Modèle de la couche plexiforme interne

On distingue deux voies de conductions différentes au sortir de la couche plexiforme interne jusqu'à un corps géniculé latéral (CGL), la voie parvocellulaire et la voie magnocellulaire. Très schématiquement, on considère que la voie parvocellulaire contient les informations de formes de la scène alors que la voie magnocellulaire regroupe les informations liées aux mouvements. Rappelons que ces informations sont codées sous formes de potentiels d'action, et que la transformation des informations graduées sortant des cellules bipolaires est principalement réalisée par les cellules ganglionnaires<sup>12</sup>.

#### 1.3.2.1 Non-linéarités des liaisons synaptiques chimiques

Dans [165], les auteurs donnent un modèle de rétine artificielle capable de convertir l'information visuelle en potentiels d'action. Ce modèle puise également son inspiration de la physiologie, et simule en particulier le fonctionnement de la voie parvocellulaire. Contrairement au modèle décrit en 1.3.1, celui-ci est construit sous forme de réseau de neurones artificiels.

Le modèle de neurone retenu est une approximation linéaire du neurone de type intègre-et-tire (voir 1.2.2). Les auteurs font l'hypothèse que les neurones sont ponctuels, c'est-à-dire que le potentiel membranaire de chaque neurone dépend uniquement du temps, et est donc identique sur toute la membrane. Dans ce modèle de neurone, les variations du potentiel membranaire sont à la fois fonctions du courant d'entrée, et des différentes conductances d'excitation, d'inhibition, et de fuites des différents canaux ioniques du neurone. Ce modèle de neurone est aussi bien utilisé pour simuler le fonctionnement de neurones biologiques à *potentiels gradué* que le fonctionnement de neurones à *potentiels d'action*.

<sup>12</sup>Certaines cellules amacrines génèrent également des potentiels d'action.

Les neurones sont connectés entre eux au sein d'une même couche par des liaisons synaptiques de natures électriques. Le modèle de couplage électrique retenu est un filtre passe-bas spatio-temporel. Une approximation à l'aide d'un filtre à variables spatiales et temporelles séparables est utilisée afin de rendre les calculs plus rapides.

La modélisation des synapses chimiques, les synapses qui assurent une liaison fonctionnelle entre neurones de couches différentes, est réalisée par une non-linéarité statique paramétrée par  $\eta \in [0, 1]$  et définie par :

$$g_\eta(V) = \begin{cases} \eta + \frac{\eta V}{\eta - V} & \text{si } V < 0 \\ \eta + \frac{1 - \eta V}{(1 - \eta) - V} & \text{si } V > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

dans laquelle  $V$  représente le potentiel pré-synaptique et  $g_\eta$  la conductance post-synaptique (normalisée).

La figure 1.16 représente l'évolution de la caractéristique de transfert d'une synapse chimique pour 5 valeurs du paramètre  $\eta$ . On remarque que les caractéristiques définies par (1.6) peuvent être considérées comme étant linéaire pour  $V$  variant entre  $-\eta$  et  $1 - \eta$ . La largeur de la plage de fonctionnement linéaire de (1.6) ne dépend pas du paramètre  $\eta$ . Si le potentiel pré-synaptique  $V$  est supérieur à  $1 - \eta$ , la synapse devient saturée. A l'inverse, si le potentiel  $V$  est inférieur à  $-\eta$ , la synapse est sans réaction puisque la conductance est pratiquement nulle. Il est intéressant d'observer que pour  $\eta = 0$ , la caractéristique de transfert a la même allure que celle des photorécepteurs décrite par (1.5). En effet, les fonctions définies par (1.6) et paramétrées par  $\eta$  forment la famille des équations de Michaëlis-Menten. Or la loi de Michaëlis-Menten est identique à la loi de Naka-Rushton pour  $\eta = 0$ . Le point de fonctionnement de la synapse est défini par la valeur de la conductance  $g_\eta(V)$  pour  $V = 0$ . Avec la loi (1.6), le point de fonctionnement est égal à  $\eta$ .

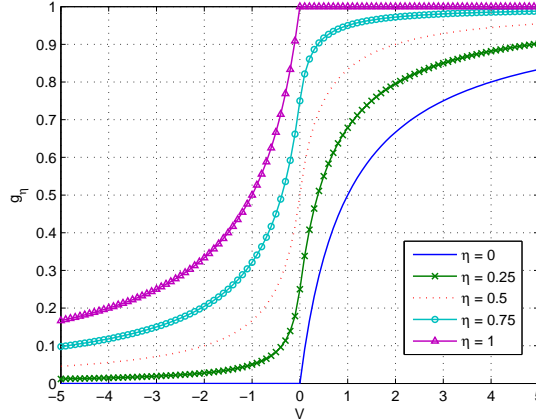


FIG. 1.16 – Caractéristique de transfert (1.6) d'une synapse chimique pour 5 valeurs de  $\eta$  différentes.

Comme nous l'avons souligné, la loi (1.6) possède une plage de fonctionnement approximativement linéaire. Dans le modèle de rétine proposé dans [165], les connections synaptiques chimiques des trois couches récepteurs, horizontales, et bipolaires fonctionnent dans cette plage linéaire. Par contre, la communication entre le réseau des cellules bipolaires et les cellules ganglionnaires n'est pas uniquement réalisée dans cette zone.

### 1.3.2.2 Non-linéarité pour la génération des potentiels d'action

Dans le modèle de rétine de [165], l'évolution du potentiel membranaire  $V$  est donnée par la même loi dans un neurone à potentiel gradué (couche plexiforme externe) ou dans un neurone à potentiel

d'action (couche ganglionnaire). La distinction entre ces deux types de neurones artificiels se trouve dans la transmission du potentiel membranaire aux autres neurones. Pour un neurone à potentiel gradué le potentiel  $V$  agit directement sur les synapses des neurones voisins. Pour un neurone à potentiel d'action, le potentiel membranaire  $V$  est au préalable mis en forme par un étage composé d'une non linéarité simple : la comparaison à un seuil. En effet, la transmission d'un potentiel d'action s'effectue en trois étapes distinctes :

1. comparaison du potentiel membranaire  $V$  à un seuil,
2. si le seuil précédent est franchi, alors un potentiel d'action est émis et le potentiel membranaire  $V$  retombe et est maintenu à zéro,
3. une fois le temps de réfraction  $\tau_R$  écoulé, le potentiel membranaire  $V$  suit à nouveau une équation d'évolution imposée par ses entrées.

Le modèle de rétine de [165] est suffisamment fin pour reproduire assez fidèlement le fonctionnement de la voie parvocellulaire. En revanche, il est bien plus difficile de simuler le fonctionnement de la deuxième voie rétino-géniculée, la voie magnocellulaire, puisque les cellules qui la composent ne réagissent pas toutes linéairement aux stimuli d'entrée.

### 1.3.2.3 Traitement non linéaire et adaptatif de la voie magnocellulaire

La voie magnocellulaire est principalement constituée des cellules ganglionnaires parasols  $Y$ . Le champ récepteur de ces cellules n'est pas linéaire. La figure 1.17 illustre le résultat d'expérience réalisée en 1966 par Enroth-Cugell et Robson [39] montrant quelle est la différence entre les réponses des cellules ganglionnaires naines  $X$  (voie parvocellulaire) et parasols  $Y$  (voie magnocellulaire).

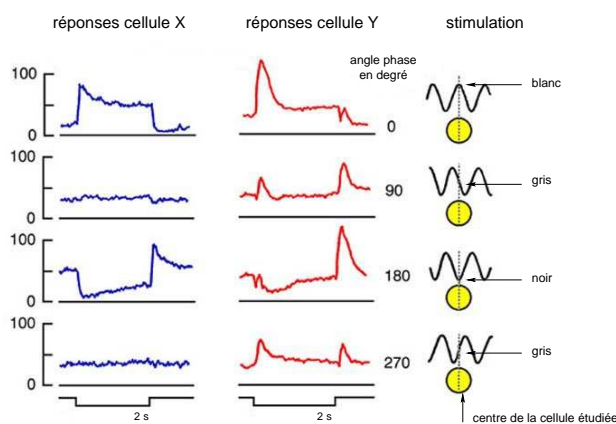


FIG. 1.17 – Illustration de la linéarité et de la non-linéarité des champs récepteurs de cellules ganglionnaires  $X$  et  $Y$ . Illustration modifiée de [83] à partir d'une expérience de [39].

L'expérience consiste à mesurer le taux d'émissions de potentiels d'action générés par des cellules ganglionnaires naines  $X$  et parasols  $Y$  pour quatre stimuli différents qui sont présentés devant leurs champs récepteurs. Les stimuli utilisés sont des images uniquement composées de bandes de gris dont le profil est donné par un sinus. La fréquence spatiale de chaque stimuli est identique pour chaque expérience. Seule la position du stimulus avec le centre du champ récepteur varie d'une expérience à une autre occasionnant ainsi une variation de phase spatiale. La durée de l'application du stimulus est de deux secondes.

Pour les cellules  $X$ , lorsque le motif est placé de telle sorte que la transition du blanc au noir (ligne 2) ou du noir au blanc (ligne 4) ait lieu au centre du champ récepteur alors la réponse est plate. Il y a une complète compensation entre les barres de lumières qui excitent le champ récepteur de la cellule et les

barres qui l'inhibent. De plus, on réalise que si nous effectuons la somme des réponses des lignes 2 et 4 et la somme des réponses des lignes 1 et 3<sup>13</sup> alors on constate que les deux réponses résultantes sont pratiquement identiques. Cette expérience illustre bien le caractère linéaire du champ récepteur d'une cellule ganglionnaire de type *X*. En revanche, on remarque que ce n'est pas le cas pour les cellules ganglionnaires de type *Y*. De plus aucune position de stimulus ne permet d'avoir une réponse plate. Les champs récepteurs des cellules ganglionnaires de type *Y* ne sont donc pas linéaires.

Les non-linéarités présentées à la fois dans le processus de génération des potentiels d'actions et dans les synapses chimiques sont certainement à l'origine du phénomène d'adaptation au contraste constaté dans [117, 146, 159], et statistiquement indépendant de l'adaptation à la luminosité [96]. En effet, les cellules ganglionnaires adaptent leurs réponses aux fluctuations d'amplitudes autour de la moyenne de l'intensité lumineuse ; c'est le contrôle de gain au contraste ou l'adaptation au contraste. D'après [167], ce phénomène prend naissance à la fois dans le mécanisme de transmission synaptique et dans le traitement interne des cellules ganglionnaires lié à la génération des potentiels d'action.

Nous venons de décrire qu'il est nécessaire d'incorporer à plusieurs étages des non-linéarités dans les modèles de vision pour que ceux-ci puissent être capable de simuler les performances visuelles humaines. Récemment, Henning et *al.* [62] ont créé un modèle de rétine simulant à la fois la voie parvocellulaire et la voie magnocellulaire. Leur modèle est également constitué de plusieurs couches de neurones où chacun d'eux est représenté par des équations différentielles non linéaires. La liste des non-linéarités que nous avons établie n'est bien évidemment pas exhaustive. On peut encore citer comme exemple de phénomène non linéaire du système visuel la perception de la couleur. En effet, d'après les expériences de MacAdam [95], la vision des couleurs est également un phénomène non linéaire et adaptatif puisque celui-ci dépend de l'état d'adaptation du système visuel. Ces deux caractéristiques ne peuvent s'expliquer uniquement à l'aide de la fonction de transduction non linéaire des cônes présentée en 1.3.1.2. Dans [2], Alleyson propose un modèle chromatique à trois couches ayant des caractéristiques très proches des résultats des expériences de seuil de discrimination de couleur de MacAdam. Dans ces trois couches on retrouve la loi d'adaptation à la luminosité des photorécepteurs mais également une loi de compression similaire à (1.16) implantée au niveau des cellules ganglionnaires.

Nous avons présenté dans les parties 1.2 et 1.3 que le système visuel possède à la fois des propriétés non linéaires et stochastiques. Dans de nombreux systèmes, dès que ces deux grandeurs coexistent ou cohabitent, on peut alors y observer des effets d'amélioration ou de favorisation de traitements du signal par le bruit. C'est par exemple le cas des systèmes non linéaires présentant de la résonance stochastique. Néanmoins, comme nous allons le présenter dans la partie suivante, de nombreux phénomènes ayant les mêmes caractéristiques existent sans pour autant que la résonance stochastique au sens strict ne soit impliquée. On présente dans la partie qui suit une brève description de ces phénomènes présents dans les systèmes neuronaux, et par extension au processus visuel.

## 1.4 Influences du bruit et des non-linéarités sur la vision

Généralement, lorsqu'un signal cohérent évolue avec du bruit dans un système linéaire, le bruit est perçu comme une nuisance et dégrade les propriétés du signal cohérent. Néanmoins, il est maintenant reconnu par la communauté de traitement du signal [43, 49, 110, 134, 168] que dans certains systèmes non linéaires, il peut exister une interaction bénéfique entre le bruit et les signaux d'intérêts<sup>14</sup>. Or, dans la partie 1.3,

<sup>13</sup>C'est-à-dire dans les deux cas pour une entrée qui est équivalente à un stimulus totalement gris.

<sup>14</sup>Souvent, ces phénomènes d'interactions bénéfiques entre bruit et signal portent le nom de résonance stochastique. Ce terme est néanmoins réducteur puisque son utilisation est appropriée uniquement dans le cas où le bruit permet la synchronisation entre le temps caractéristique du système (par exemple, le taux de transition dans un système bistable) et le temps caractéristique du signal (par exemple, la période pour un signal périodique). Nous préférons décrire ces phénomènes par un terme plus générique faisant abstraction de la forme des signaux, et en précisant la mesure utilisée. Ainsi, nous décrivons des

nous avons souligné que le système visuel comporte à de nombreux étages des non-linéarités, et dans la partie 1.2, nous avons fait état des deux principales sources de bruit dans les neurones du système visuel. Le système visuel est donc composé des deux ingrédients nécessaires à l'apparition de tels phénomènes. De plus, ces phénomènes d'amélioration du traitement de l'information ne sont pas rares dans les organismes biologiques, et sont également observés dans des modèles formels de neurones. A notre sens, ces arguments peuvent justifier les deux études réalisées dans le chapitre 2 et le chapitre 3.

Dans cette partie, nous commençons par décrire brièvement le phénomène de la résonance stochastique, en insistant sur les différentes mesures à partir desquelles on peut montrer une amélioration par le bruit. Dans un second temps, nous décrivons dans un cadre plus général, que le bruit peut avoir des effets bénéfiques sur le traitement réalisé par un réseau de neurones biologiques ou formels.

### 1.4.1 De la résonance stochastique aux systèmes améliorés par le bruit

Depuis sa découverte [9, 10] au début des années 80, la résonance stochastique connaît un grand intérêt de la part de différentes communautés scientifiques comme celles de la physique, du signal, ou de la biologie. A l'origine, c'est dans la volonté d'expliquer pourquoi le climat terrestre est composé de successions d'ères glaciaires puis tempérées que Benzi *et al.* [9, 10] ont découvert ce phénomène. Cette découverte s'appuie sur deux observations. Premièrement, Benzi *et al.* ont remarqué que l'excentricité de l'orbite terrestre subit à la fois des variations périodiques et aléatoires. La deuxième observation révèle que les variations de nature périodiques sont de faibles amplitudes, et qu'elles ne peuvent expliquer à elles seules l'alternance climatique. Benzi *et al.* en ont conclu que le bruit provoque une amplification suffisante des oscillations périodiques assurant ainsi une synchronisation entre l'alternance climatique et la période des variations orbitales.

A partir de ce point de départ, l'étude de la résonance stochastique s'est développée autour de la transmission d'un signal périodique par certains systèmes dynamiques non linéaires bistables (par exemple les puits de potentiels bistables). Progressivement, le phénomène a été mis en évidence dans différentes applications de ce type, incluant des circuits électroniques, des lasers, la résonance paramagnétique électronique, des composants supraconducteurs [43, 163].

Le phénomène de résonance stochastique a été par la suite observé et étudié dans des classes plus larges de systèmes non linéaires, comme par exemple les systèmes à potentiels périodiques, les systèmes à comportement chaotiques [25, 42, 76, 87, 104, 160] ou les systèmes à saturations [49, 134]. La définition de la résonance stochastique a également été élargie à d'autres situations où le bruit peut favoriser le traitement d'un signal utile. Le *dithering* qui est utilisé lors de la conversion analogique-numérique (ou la quantification) d'un signal [20, 21, 53, 161] en est un exemple. Il consiste à ajouter du bruit à l'entrée d'un quantifieur pour blanchir l'erreur de quantification et ainsi améliorer le rapport signal/bruit dans la plage de fréquence du signal utile. Aujourd'hui, la résonance stochastique est un des nombreux phénomènes non linéaires qui désignent des effets de traitement du signal favorisé par le bruit. Ces phénomènes non linéaires peuvent revêtir diverses formes selon le bruit, le signal utile, le système non linéaire, et la mesure de performance [134]. Souvent, c'est en définissant un rapport signal sur bruit local qui est amplifié pour une (ou plusieurs) valeur(s) de puissance de bruit que ces phénomènes sont mis en évidence [43, 49]. Néanmoins, dans d'autres situations, des mesures comme un coefficient d'inter-corrélation [27], un déphasage entrée/sortie [35], un taux d'information [61], la capacité de canal [22, 49] ou l'entropie de Shannon [75, 114] sont plus adaptées.

De plus, l'effet d'amélioration par le bruit n'est pas restreint à des systèmes isolés. Plusieurs études montrent des effets bénéfiques du bruit dans des associations (en séries ou en parallèles) de systèmes non linéaires [106, 111, 135, 154, 155]. Évidemment, comme les neurones sont souvent assimilés à des non-linéarités naturelles, de nombreuses études exposent des phénomènes d'améliorations de traitements par

---

phénomènes d'amélioration de cohérence par le bruit dans le chapitre 2, et des améliorations de détection par le bruit dans le chapitre 3.

le bruit. La partie suivante, présente quelques résultats ressortant de ces études. Le lecteur est invité à se tourner vers [112] pour une revue plus complète.

### 1.4.2 Amélioration par le bruit dans les neurones

Une des premières observations de l'existence de résonance stochastique biologique a été relevée dans [94]. Dans cet article, les auteurs montrent la très forte ressemblance qu'il existe entre l'histogramme des intervalles de temps entre deux potentiels d'action d'un neurone biologique stimulé périodiquement, et la distribution du temps de résidence d'une particule excitée périodiquement dans un système bistable. On trouve dans [43, 112] deux revues des travaux qui ont permis de mettre en évidence que le déclenchement de potentiels d'action d'un neurone biologique stimulé périodiquement présente de la résonance stochastique.

D'autres recherches ont été menées sur les éventuels effets bénéfiques du bruit au sein de différents modèles de neurones formels, et dans des associations en réseaux de ceux-ci.

**Transmission neuronale dans un neurone à seuil :** Les premières études sur la résonance stochastique dans des neurones formels ont été réalisées sur la transmission d'un stimulus périodique par un neurone simple à seuil [49]. Dans ce cas de figure, le neurone est réduit à un système à seuil dont l'entrée est composée à la fois d'un signal subliminal (sous le seuil) et d'un bruit additif. L'amélioration de la transmission est mise en évidence par une mesure (par exemple rapport signal sur bruit) qui est maximum pour une certaine puissance de bruit d'entrée. D'autres travaux montrent également que l'amélioration de la transmission n'est pas uniquement propre à des stimuli périodiques.

**Transmission neuronale dans un neurone à saturation :** Dans sa thèse [23, 134], Rousseau montre qu'il existe également un effet de résonance stochastique autour de la zone de saturation d'un neurone formel dont la caractéristique de transfert est rappelée ci dessous :

$$f(t) = g[I(t)] = \begin{cases} \frac{1/T_r}{1 - (\tau_m/T_r) \ln[1 - I_{th}/I(t)]} & \text{si } I(t) \geq I_{th} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans le modèle (1.7), la sortie  $f(t)$  représente le taux d'émission instantané de potentiels d'action, et l'entrée  $I(t)$  correspond à l'intégration de la contribution électrique des messages afférents le neurone. La constante  $I_{th}$  représente le courant de seuil dont l'ordre de grandeur est d'environ 0.1 nA,  $\tau_m$  la constante de temps de la membrane et  $T_r$  la période réfractaire du neurone.

Rousseau a étudié les performances de transmission du modèle (1.7) dans deux configurations différentes. Dans la première configuration, l'entrée  $I(t)$  du modèle (1.7) est composée d'un courant électrique sinusoïdal et d'une composante aléatoire gaussienne. Les performances de transmission sont alors mesurées par un rapport signal sur bruit. La figure 1.18-A donne l'évolution de cette mesure de performance en fonction de l'écart-type du bruit pour quatre jeux de paramètres différents. Les quatre courbes obtenues présentent toutes un maximum pour un écart-type non nul, symbolisant un effet de résonance stochastique autour de sa zone de saturation.

Pour la deuxième configuration, le courant  $I(t)$  qui est appliqué à l'entrée du modèle est un signal apériodique auquel est ajouté du bruit gaussien. Cette fois les performances de transmission sont évaluées par l'inter-corrélation entrée sortie. Cette grandeur est tracée en fonction de l'écart-type du bruit sur la figure 1.18-B. Là encore, chaque courbe présente un maximum. Ceci illustre que l'amélioration de la transmission d'un neurone (1.7) par le bruit existe même si le stimulus d'entrée n'est pas périodique.

**Transmission neuronale dans un neurone intègre-et-tire :** Plusieurs études montrent que les neurones impulsifs ou intègre-et-tire (voir partie 1.2.2) peuvent être le siège de résonance stochastique,



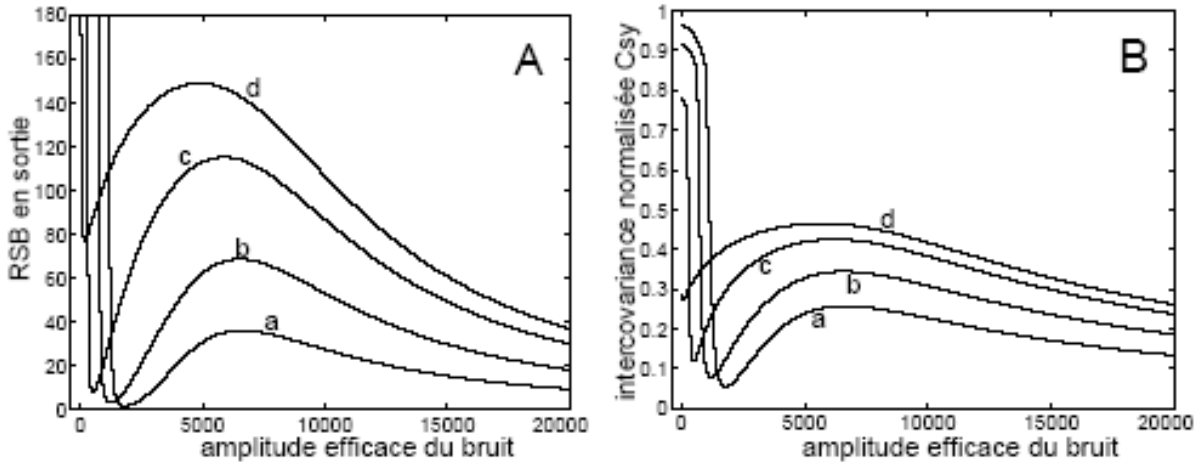


FIG. 1.18 – Illustration de la résonance stochastique dans la zone de saturation d'un neurone formel (1.7) pour une entrée périodique (panneau A) et apériodique (panneau B). Illustrations tirés de [134].

et plus généralement être capable de favoriser la transmission d'une information par le bruit [43, 49, 122]. Par exemple dans [49], Godivier montre que la transmission d'un train de potentiels d'action périodique peut être favorisée par un processus de Poisson générant des trains d'impulsion parasites qui est ajouté à l'entrée du neurone. On rappelle que dans ce type de neurone, l'évolution du potentiel membranaire  $V(t)$  est donnée par l'équation (1.1). Le courant synaptique  $I(t)$  est donné par :

$$I(t) = s(t) + \eta(t) = \sum_n \delta(t - nT_s) + \sum_k \delta(t - t_k) \quad (1.8)$$

où  $T_s$  représente la période du train d'impulsion du signal cohérent, et où les instants aléatoires  $t_k$  sont distribués selon un processus de Poisson. A partir d'une mesure fondée sur un rapport signal sur bruit, Godivier observe un effet de résonance stochastique (voir figure 1.19) dans un modèle de neurones impulsionnels.

Dans [49], Godivier montre également que cet effet d'amélioration est maintenu pour un neurone à entrées cohérentes multiples, et pour du bruit parasite non ponctuel.

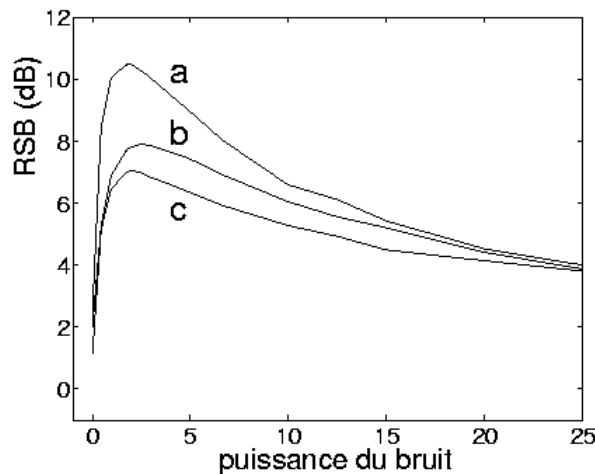


FIG. 1.19 – Illustration de la résonance stochastique dans un neurone impulsionnel favorisant la transmission d'un train impulsion périodique. Illustration tiré de [49].

**Transmission neuronale par un réseau de neurones à seuils :** Un autre type de résonance stochastique, la résonance stochastique supraliminaire a été observé dans des réseaux parallèles de comparateurs à seuils [69, 134, 154, 155, 156]. En anglais, ce phénomène porte le nom de *suprathreshold stochastic resonance*. Le préfixe “supra” est ajouté pour contraster avec le phénomène de résonance stochastique “subli”minaire tel que nous l’avons exposé précédemment. En effet, généralement dans les applications de transmissions neuronales, les signaux cohérents sont d’amplitudes trop faibles pour activer le neurone. Le bruit aidant, la transmission est possible par “résonance stochastique”. Par opposition, les études menées au sein des réseaux de comparateurs à seuils sont réalisées avec un signal utile d’amplitude suffisante pour franchir au minimum un seuil, et donc de garantir au minimum l’activation d’un neurone.

La figure 1.20 donne l’architecture de ce type de réseau. L’exemple est un réseau constitué de  $N$  comparateurs à seuil  $\theta_i$ . L’entrée et la sortie du réseau sont respectivement notées  $x(t)$  et  $y(t)$ . Les comparateurs sont de simples neurones à seuil (voir 1.2.2). Ils reçoivent en entrée la somme du signal  $x(t)$  et d’un bruit blanc  $\eta_i(t)$  d’écart-type  $\sigma$ . Tous les bruits  $\eta_i(t)$  sont mutuellement indépendants et identiquement distribués. La sortie  $y_i(t)$  du comparateur  $\theta_i$  est toujours nulle sauf lorsque la somme  $x(t) + \eta_i(t)$  à l’instant  $t$  est supérieure au seuil  $\theta_i$  où la sortie  $y_i(t)$  prend la valeur 1. Ainsi, le signal de sortie du réseau  $y(t)$  est un entier compris entre 0 et  $N$ .

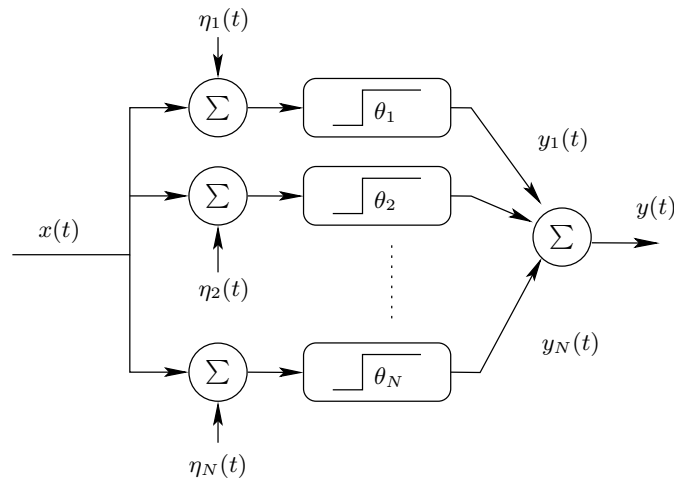


FIG. 1.20 – Réseau de  $N$  comparateurs à seuils  $\theta_i$ . La même entrée  $x(t)$  est appliquée sur chaque comparateur  $\theta_i$ , à laquelle est également ajouté un bruit blanc gaussien  $\eta_i(t)$  d’écart-type  $\sigma$ . Tous les bruits  $\eta_i(t)$  sont mutuellement indépendant et identiquement distribués. La sortie du réseau  $y(t)$  est la somme des  $N$  comparateurs  $\theta_i$ .

La figure 1.21 donne une illustration qualitative du phénomène d’amélioration de la transmission par un réseau de neurone à seuils. Pour réaliser cette figure, nous avons appliqué à l’entrée d’un réseau de 100 neurones un signal périodique  $x(t)$  sinusoïdal. Dans ce réseau, tous les seuils sont nuls :  $\theta_i = 0$ . La figure donne pour quatre niveaux de bruit différents l’évolution du signal de sortie  $y(t)$ .

Lorsque  $\sigma = 0$ , le signal  $y(t)$  est égale à 1 sur les alternances positives de l’entrée  $x(t)$ , et nul pour les alternances négatives. Le signal de sortie  $y(t)$  est dans ce cas binaire, l’information sur la dynamique de l’amplitude de  $x(t)$  est perdue dans la transmission. Par contre, en augmentant progressivement le niveau de bruit, il est possible de récupérer en sortie du réseau un signal de plus en plus semblable à celui appliqué en entrée. C’est par exemple le cas sur la figure 1.21 pour  $\sigma = 1$ , où l’on peut espérer retrouver en sortie l’allure du signal  $x(t)$  en éliminant les fluctuations aléatoires hautes fréquences du signal  $y(t)$  (pour  $\sigma = 1$ ) par un simple filtre passe bas. Enfin, lorsque le niveau de bruit est trop important, celui perturbe complètement la transmission, la sortie du réseau devient alors incohérente vis-à-vis de l’entrée (pour  $\sigma = 5$ ).

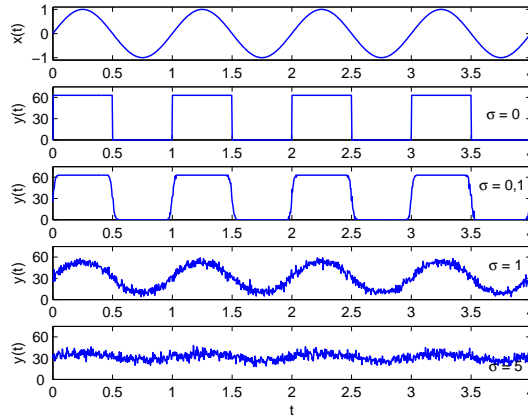


FIG. 1.21 – Illustration de la résonance stochastique supraliminaire dans un réseau de 100 neurones à seuils identiques  $\theta_i = 0$ , pour une entrée sinusoïdale  $x(t) = \sin(2\pi t)$ , et pour différentes valeurs d'écart-type  $\sigma$ . La meilleure transmission du signal  $x(t)$  à travers le réseau est obtenue pour  $\sigma = 1$ . Dans ce cas, les bruits  $\eta_i(t)$  favorisent la transmission de  $x(t)$ .

En quoi la présence des bruits  $\eta_i(t)$  dans les réseaux à seuils peut améliorer la transmission d'un signal cohérent  $x(t)$ ? Puisque la résonance stochastique supraliminaire n'apparaît pas lorsque  $N$  est égal à 1, la réponse à cette question consiste souvent à décrire les bruits  $\eta_i(t)$  comme des grandeurs apportant de la diversité au traitement réalisé par le réseau. Schématiquement, les sorties  $y_i(t)$  des comparateurs sont des “portions” de l'entrée  $x(t)$ . Les bruits  $\eta_i(t)$  permettent aux comparateurs de scruter différemment à chaque instant le signal  $x(t)$ . Le signal  $y(t)$ , image de  $x(t)$ , est reconstruit à partir de ces différentes versions  $y_i(t)$ . C'est aussi pour cette raison que plus la taille du réseau est importante, et plus il est possible d'améliorer le traitement neuronal réalisé par le réseau.

Au delà de cette approche qualitative, des résultats plus théoriques sur la résonance stochastique supraliminaire dans les réseaux à seuils ont pu être mis en évidence dans [3, 69, 134, 154, 155, 156]. Les démonstrations sont souvent obtenus par des simulations numériques fondées soit sur le calcul d'un rapport signal sur bruit, ou de l'information mutuelle entrée/sortie lorsqu'il s'agit de tester la capacité de transmission du réseau, soit sur le calcul de la probabilité d'erreur lorsque le réseau est dédié à un problème de détection. C'est également avec sur cette structure de réseau que nous développons l'étude du chapitre 3.

**Amélioration par le bruit de la perception visuelle :** La perception visuelle n'est pas un système à fonctionnement linéaire. La non-linéarité est souvent traduite par un seuil absolu de perception soumis à des fluctuations aléatoires. Ces observations ont donné lieu à de nombreuses études [28, 29, 67, 81, 120, 147, 150, 164] relevant des améliorations à différents niveaux de la perception humaine par du bruit interne ou externe. Par exemple, dans [81, 162] les auteurs montrent empiriquement que des fluctuations aléatoires améliorent la détection de faibles signaux visuels autour du seuil de perception absolu. De plus, Henning *et al.* montre que le bruit permet d'améliorer l'acuité visuelle spatiale [64] (le phénomène d'hyperacuité). L'article [112] présente une revue assez complète des différentes études et approches qui ont été réalisées sur la résonance stochastique dans les systèmes sensoriels.

La non-linéarité de certains systèmes, comme les neurones artificiels par exemple, garantit un fonctionnement correct dans du bruit ambiant. Souvent, lorsqu'il est possible de régler le niveau du bruit, alors les performances du neurone, ou celles du réseau, peuvent atteindre un maximum. En transposant ces observations aux systèmes biologiques, et plus particulièrement au système visuel, on en conclut d'une part que malgré la présence de “nuisances” tels que la variabilité de la réponse neuronale ou celle des

micro-mouvements, la vision reste efficace, et que d'autre part, la vision tire profit du bruit interne et externe qui est présent dans son processus de création. Comme nous l'avons souligné dans le paragraphe précédent, cette théorie se confirme par plusieurs observations pratiques au niveau de la perception. Enfin, nous terminerons ce chapitre en soulignant que plusieurs travaux suggèrent que les capacités d'adaptation des systèmes sensoriels, comme celui de la vision, sont en partie issues du bruit interne de fonctionnement [59, 77, 82, 153].

Tout au long de chapitre, nous avons dressé une description du système visuel en présentant les éléments sur lesquels nous nous appuyons dans les deux prochains chapitres. Ainsi, nous avons observé que les photorécepteurs ne sont pas disposés régulièrement sur la couche épithélium de la rétine. L'échantillonnage des images observées par la rétine n'est pas régulier, et l'implantation des récepteurs varient beaucoup d'un individu à autre. Cette première source d'aléas est combinée par la suite avec celle des micro-mouvements. Nous rappelons en effet que le regard se promène de manière incessante et aléatoire sur les points d'intérêts d'une scène. Dans le prochain chapitre, nous nous intéressons à caractériser quel peut être l'avantage à coupler dans un même système, un échantillonnage irrégulier et des micro-mouvements, c'est-à-dire deux sources différentes de "bruit". Nous verrons, que ce type de systèmes exhibe également des comportements du type amélioration d'un traitement par le bruit. Ceci nous permet d'apporter un nouvel angle de vue sur la justification des micro-mouvements des yeux.



---

Influence des micro-mouvements sur l'échantillonnage rétinien

---

**Sommaire**

---

<b>2.1</b>	<b>Positionnement du problème</b>	<b>40</b>
2.1.1	Description des modèles	41
2.1.1.1	Modèle à grille régulière	43
2.1.1.2	Modèle à grille aléatoire	43
2.1.2	Caractérisation par la cohérence	44
2.1.2.1	Cohérence du système $\mathcal{H}_e$	46
2.1.2.2	Cohérence du système $\mathcal{H}_a$	47
<b>2.2</b>	<b>Grille régulière : l'œil comme une caméra numérique vibrante</b>	<b>47</b>
2.2.1	Comportement de la cohérence	49
2.2.1.1	Analyse de la cohérence $\mathcal{C}_e$	49
2.2.1.2	Fonction de cohérence $\mathcal{C}_a$	51
2.2.2	Fluctuations uniformes sur une ligne de photorécepteurs de $\mathcal{H}_e$	52
2.2.3	Fluctuations uniformes sur une ligne de photorécepteurs de $\mathcal{H}_a$	54
2.2.4	Pour d'autres types de fluctuations	61
2.2.4.1	Pour des fluctuations laplaciennes	61
2.2.4.2	Pour des fluctuations gaussiennes	62
2.2.5	Pour d'autres réponses impulsionnelles	65
<b>2.3</b>	<b>Grille aléatoire : plus proche d'un modèle biologique</b>	<b>69</b>
2.3.1	Modèle du bruit de grille - définition et propriétés	71
2.3.2	Influence de la forme de la densité du bruit de grille	72
2.3.3	Influence de la puissance du bruit de grille	77
<b>2.4</b>	<b>Discussions et perspectives</b>	<b>80</b>
2.4.1	Comment améliorer la validité du modèle?	81
2.4.2	Comment augmenter la pertinence de la mesure?	81

---



*Our eyes continually move even while we fix our gaze on an object. Although these fixational eye movements have a magnitude that should make them visible to us, we are unaware of them. If fixational eye movements are counteracted, our perception fades completely as a result of neural adaptation.*

S. Martinez-Conde, S. L. Macknik and D. H. Hubel, 2000

**M**ALGRÉ la multitude des travaux réalisés sur la compréhension du processus visuel, il reste toujours des questions en suspens. Autant la plupart des chercheurs s'accordent entre eux quant aux intérêts des mouvements oculaires macroscopiques tels que les saccades et les poursuites (voir 1.2.1.1), autant on constate de nombreuses contradictions quant à la justification des mouvements microscopiques tels que les micro-saccades, les dérives et les tremblements (voir 1.2.1.3). Dans le chapitre 1, nous avons décrit comment les micro-mouvements permettent à l'homme de voir en continu une scène fixe. La première justification des micro-mouvements semble se trouver dans le fait qu'elles rendent insensible le système visuel à l'adaptation neuronale. Cependant, il semble étrange qu'en 20 millions d'années d'évolution, l'homme n'est pas comblé une telle "lacune" visuelle, et qu'il ait conservé une faculté consommatrice d'énergie (les micro-mouvements) pour assurer le fonctionnement de son système de vision.

L'échantillonnage particulier de la rétine est à notre sens un autre point "intrigant". Rappelons tout d'abord que pour un même individu, la disposition des photorécepteurs est différente de l'œil droit à l'œil gauche, et que les chances de trouver deux rétines exactement identiques chez deux individus différents sont infimes. Pourquoi les photorécepteurs sont-ils disposés de manière irrégulière sur une rétine, et quel est l'effet de cet arrangement au niveau de l'échantillonnage rétinien ?

D'une manière générale, l'échantillonnage a été étudié sous différentes formes depuis la publication des travaux de Shannon<sup>1</sup> [144]. D'abord on trouve l'échantillonnage régulier ou périodique, le plus connu et le plus utilisé, qui peut s'appliquer dans des cadres théoriques différents à condition qu'ils soient suffisamment précisés [78, 89, 97, 108]. Néanmoins, de cette méthode il est impossible de s'affranchir complètement du phénomène de repliement spectral. A partir des années 60, plusieurs techniques d'échantillonnage aléatoire ont été étudiées [12, 13, 103, 145]. Ces techniques d'échantillonnage aléatoire sont très liées à la théorie des processus ponctuels [14]. Lorsque l'échantillonnage est fondé sur des processus ponctuels, tels que les processus de Poisson, alors celui-ci est sans repliement spectral.

L'échantillonnage irrégulier effectué par la rétine possède peut-être cette propriété. Néanmoins, rappelons que l'acquisition d'images par les yeux de l'homme est soumise aux micro-mouvements. Les études traitant des acquisitions d'images perturbées par des fluctuations [145], tel que le *jitter*, démontrent que cette procédure d'acquisition crée nécessairement du repliement spectral<sup>2</sup>. Par contre, les travaux [72, 73, 90] montrent que le fait de combiner un système d'acquisition optique à un système mécanique assurant des vibrations, permet d'améliorer à la fois la résolution du capteur ainsi que de faciliter les traitements d'images en aval de celui-ci. De plus, dans [92, 93], les auteurs mettent en relation la psychophysique et la physiologie de la rétine pour mettre en relief le fait que les micro-mouvements des yeux permettent d'adapter la densité de répartition des cônes à la scène observée, et ainsi d'améliorer la perception visuelle humaine.

Alors, existe-t-il un lien entre l'échantillonnage particulier de la rétine et les fluctuations aléatoires de l'œil ? Nous tenterons à l'aide de modèles simples de rétine, et avec un regard de traicteur de signaux, d'exposer quelques mécanismes liés à la vision saccadée et apporter quelques explications supplémentaires.

<sup>1</sup>Pour Black [15, p.41] c'est Cauchy qui le premier a étudié l'échantillonnage de signaux à bande limitée, alors que pour Higgins [68] la paternité revient à Borel.

<sup>2</sup>La comparaison entre micro-mouvements et *jitter* n'est pas totalement justifiée puisque la rétine ne se déforme pas lorsque l'œil se déplace.



Nous nous attacherons plus particulièrement à caractériser le traitement d'information réalisé par le couplage rétinien et micro-mouvements en fonction de la puissance des fluctuations dans deux modèles différents, un modèle régulier et un modèle aléatoire. Dans la deuxième et la troisième partie nous allons mettre en évidence que des phénomènes d'amélioration de performance via le bruit prennent effet au sein des modèles étudiés. Enfin nous discuterons de la possibilité d'étendre ces conclusions au traitement visuel primaire dans une quatrième et dernière partie.

## 2.1 Positionnement du problème

Sachant que notre environnement évolue au quotidien, il n'est pas restrictif de considérer que les images observées aient un caractère aléatoire. Ainsi, on peut caractériser les images que nous observons à l'aide de champs aléatoires notés  $S(x, y)$ , de densité de probabilité  $f_S$ , où  $x, y \in \mathbb{R}$  sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée de l'image. Pour simplifier l'étude qui suit, nous considérons que les images sont des champs aléatoires statiques<sup>3</sup>, centrées, homogènes et isotropes. La notation  $S(\mathbf{x})$ , où  $\mathbf{x} = [x, y]^T$  décrit le vecteur position, nous permet de manipuler des écritures de taille réduite. Tout élément de la famille des images considérées est une fonction de variables réelles décrite par :

$$\begin{aligned} S &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto S(x, y) \end{aligned}$$

D'après [4, 5, 63, 137], les images naturelles possèdent une densité spectrale de puissance  $\Gamma_S(\mathbf{f})$  ayant une décroissance en  $1/||\mathbf{f}||^{2+\eta}$  où  $\mathbf{f} = [f_x, f_y]^T$  est le vecteur de fréquences spatiales de  $S$ , et  $\eta$  un nombre positif faible. Les développements qui suivent dans le chapitre sont fondés sur les fonctions d'auto-corrélation. A notre connaissance, il n'y a pas d'écriture simple de fonction d'auto-corrélation traduisant le spectre de puissance d'une image naturelle. Nous allons approcher les propriétés spectrales des images naturelles à partir du modèle de scène suivant [50, 141] :

$$\Gamma_S(\mathbf{f}) = \frac{2\pi\beta\sigma_S^2}{\left(\beta^2 + 4\pi^2 \mathbf{f}^T \mathbf{f}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.1)$$

où  $\Gamma_S$  représente la densité spectrale de puissance d'une image  $S$ ,  $\beta > 0$  est le facteur de largeur de bande et  $\sigma_S^2$  la puissance. Par transformée de Fourier inverse, l'expression de la fonction d'auto-corrélation en  $\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T$  est égale à :

$$\gamma_S(\mathbf{u}) = \mathbb{E}[S(\mathbf{x})S(\mathbf{x} - \mathbf{u})] = \sigma_S^2 e^{-\beta(\mathbf{u}^T \mathbf{u})^{1/2}} \quad (2.2)$$

Dans le modèle de scène définis par (2.1), l'exposant de la norme euclidienne de  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}^T \mathbf{f} = ||\mathbf{f}||^2$  est  $3/2$ . La densité spectrale de puissance (2.1) possède donc une décroissance en  $1/||\mathbf{f}||^3$ . Or, dans la littérature traitant des images naturelles, la valeur du coefficient  $\eta$  varie en général entre  $[-0, 5; 0, 5]$ . En utilisant le modèle d'image (2.1), nous traitons dans ce chapitre des images qui ne peuvent pas être considérées comme totalement naturelles. En effet, la densité spectrale de puissance de ces images décroît un peu trop vite pour entrer dans la catégorie des images naturelles. Néanmoins, à partir de ce modèle, nous pourrions établir quelques résultats théoriques intéressants qui justifient le recours à cette simplification.

La figure 2.1 illustre le comportement de la fonction d'auto-corrélation de l'équivalent à une seule dimension du modèle (2.1). Dans ce cas, la fonction d'auto-corrélation prend la forme laplacienne, son expression est donnée par :

$$\Gamma_S(f) = \frac{2\sigma_S^2\beta}{(\beta^2 + 2\pi f)^2} \xleftrightarrow{\text{TF}} \gamma_S(u) = \sigma_S^2 e^{-\beta|u|} \quad (2.3)$$

<sup>3</sup>C'est-à-dire que nous considérons que les images n'évoluent pas au cours du temps, ou du moins sur une période de temps assez longue.

Plus le coefficient  $\beta$  augmente et plus la fonction d'auto-corrélation est étroite et concentrée en zéro. L'expression (2.3) nous sera particulièrement utile dans la suite du chapitre, lorsque nous étudierons en

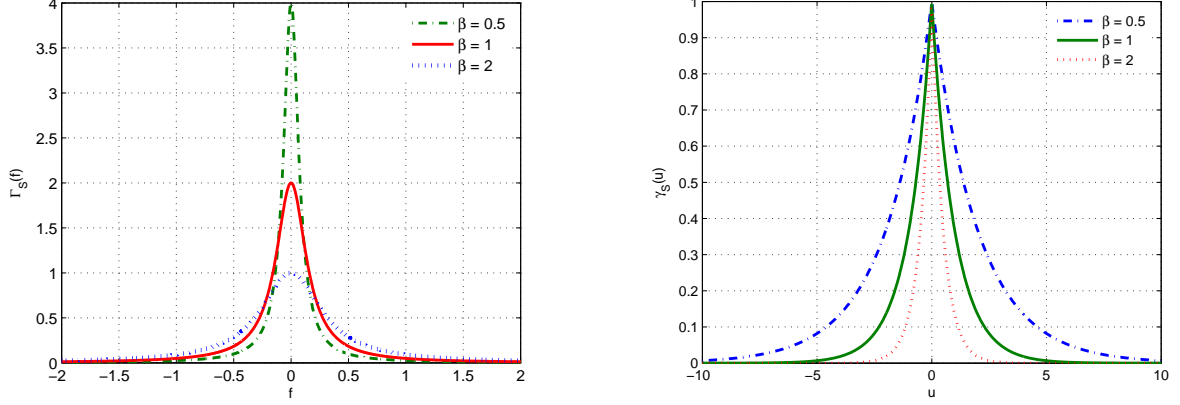


FIG. 2.1 – *Densité spectrale de puissance (gauche) et fonction d'auto-corrélation (droite) du modèle d'une scène 1D défini par (2.3) pour  $\sigma_S = 1$ . Plus le coefficient  $\beta$  augmente, et plus il y a de puissance dans les hautes fréquences, et par conséquent moins dans les basses fréquences.*

particulier l'influence des micro-mouvements sur une ligne de photo-récepteur de la rétine.

### 2.1.1 Description des modèles

L'environnement perçu par l'homme est composé de trois dimensions spatiales et d'une dimension temporelle. Pourtant, les rétines humaines sont tapissées d'une seule couche de photorécepteurs. A chaque instant, c'est à partir de deux images à deux dimensions spatiales, qu'une représentation de l'environnement est créée<sup>4</sup>. Le flot de photons percutant les photorécepteurs est continu. Les images rétinienne ont la particularité d'être continues en temps, elles restent néanmoins discrètes sur le plan spatial. Ce caractère discret leur provient de la nature même de leur mode d'acquisition, acquisition assurée par un nombre finis de photorécepteurs répartis sur une grille  $\mathcal{G}$  (voir 1.1.2.1). Nous supposons que les grilles de photorécepteurs de chaque rétine sont identiques. Si  $\mathbf{x}_n = [x_n, y_n]^T$  est la position sur la grille  $\mathcal{G}$  d'un photorécepteur quelconque indicé par  $n$ , alors mathématiquement l'image rétinienne  $S_e$  est décrite par :

$$\begin{aligned} S_e : \mathcal{G} \times \mathbb{R}^+ &\longmapsto \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_n, t) &\longmapsto S_e(\mathbf{x}_n, t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La première couche du processus de vision tel que nous le considérerons dans ce chapitre est représenté sur la figure 2.2. Cette figure inclut les deux fonctions d'échantillonnage  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$ , décrites plus loin, lorsqu'elles sont soumises aux micro-mouvements symbolisés par un processus aléatoire bi-dimensionnel  $\boldsymbol{\xi}(t) = [\xi_x(t), \xi_y(t)]^T$ , centré, de matrice de covariance identité, et donc de composantes décorréliées entre elles. La puissance des fluctuations est reportée dans la grandeur scalaire positive  $\sigma^2$ . Pour simplifier l'étude, nous faisons l'hypothèse que les vecteurs  $\boldsymbol{\xi}(t)$  sont indépendants et identiquement distribués, et que la densité de probabilité  $f_{\boldsymbol{\xi}}$  des fluctuations n'est pas fonction du temps  $t$ .

Même si on dénombre quatre types différents de capteurs (cônes et bâtonnets), nous allons restreindre l'étude en considérant une rétine dans laquelle on ne compte qu'une seule variété de photorécepteurs. Deux types d'échantillonnage  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  seront traités par la suite :

<sup>4</sup>La sensation de perspective provient de la vision binoculaire qui s'explique par le décalage entre les deux yeux.

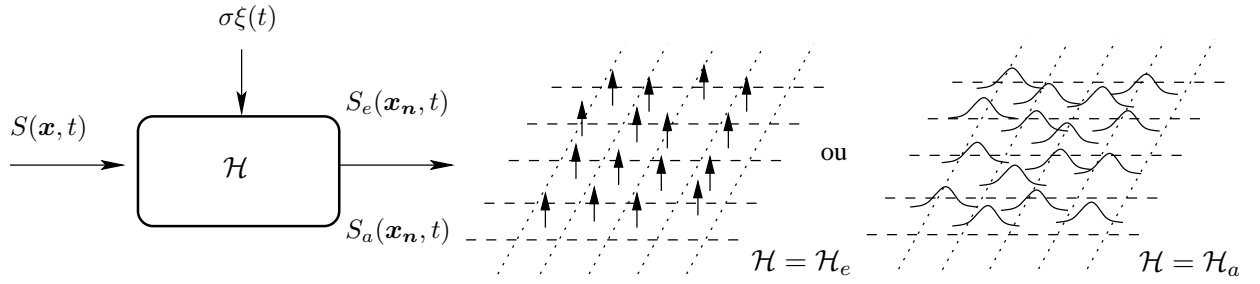


FIG. 2.2 – Représentation système des modèles d'échantillonnage  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$ . L'image observée  $S$  est appliquée à l'entrée du système  $\mathcal{H}$  qui peut être soit  $\mathcal{H}_e$  pour lequel les réponses impulsionnelles des photorécepteurs sont des Diracs, soit  $\mathcal{H}_a$  dans lequel les photorécepteurs effectuent un filtrage spatial des échantillons reçus. Selon le système d'échantillonnage, l'image de sortie est notée soit  $S_e$  soit  $S_a$ .

- Le cas où les photorécepteurs sont idéaux, et transmettent aux couches supérieures de la rétine l'information sans la modifier. Dans ce cas précis, la réponse impulsionnelle des photorécepteurs est une distribution de Dirac. Cet échantillonnage est noté  $\mathcal{H}_e$  et est représenté sur la figure 2.2. Sous ces conditions, la valeur de l'image échantillonnée  $S_e$  par le  $n^{\text{ième}}$  photorécepteur positionné aux coordonnées  $\mathbf{x}_n$  à l'instant  $t$  se note :

$$\begin{aligned} S_e(\mathbf{x}_n, t) &= \mathcal{H}_e(S(\mathbf{x}), t) \\ &= S(\mathbf{x}_n + \sigma\xi(t)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

- Pour le second cas, la réponse impulsionnelle des photorécepteurs n'est pas idéale. En effet, nous avons décrit dans la section 1.1 que les différentes cellules neuronales d'une rétine biologique, comme les cônes ou les bâtonnets, possèdent un champ récepteur. Nous assimilons ce champ récepteur à différentes zones d'excitation et/ou inhibition, qui dans ce cas ne se réduisent pas à un seul point. Dès qu'un stimuli entre dans cette zone de réaction, le neurone active sa sortie. Le signal de sortie ne provient plus d'un seul point  $\mathbf{x}$  de  $S$ , mais d'un voisinage autour de celui-ci. En supposant que les différents points de ce voisinage ne stimulent pas identiquement le photorécepteur, on peut considérer l'existence d'un filtrage spatial pour tout photorécepteur de la grille  $\mathcal{G}$ . En théorie, le filtrage est de nature spatio-temporel. Mais, pour simplifier l'étude, nous nous placerons dans un cadre où la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  reste identique à chaque instant  $t$ . Nous considérerons également que la fonction  $a(\cdot)$  est symétrique par rapport à l'origine :

$$a(\mathbf{x}) = a(-\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

Cet échantillonnage, illustré également sur la figure 2.2, est symbolisé par la notation  $\mathcal{H}_a$ , l'expression de la sortie a pour expression :

$$\begin{aligned} S_a(\mathbf{x}_n, t) &= \mathcal{H}_a(S(\mathbf{x}), t) = \int_{\mathbb{R}^2} S(\mathbf{x}_n + \sigma\xi(t) - \boldsymbol{\tau}) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} S(\mathbf{x}_n + \sigma\xi(t) + \boldsymbol{\tau}) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Le passage à la deuxième ligne de (2.6) utilise la propriété de symétrie par rapport à l'origine de la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$ . Le système d'échantillonnage  $\mathcal{H}_a$  est totalement équivalent à  $\mathcal{H}_e$  pour une grille  $\mathcal{G}$  donnée lorsque la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  est égale à une distribution de Dirac :

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{H}_e \iff a(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

L'étude de l'influence des fluctuations sur le système d'échantillonnage irrégulier de l'œil est par la suite découpée en deux parties dans lesquelles les deux hypothèses de filtrage ou de non filtrage  $\mathcal{H}_a$  et  $\mathcal{H}_e$  des photorécepteurs seront incluses. Premièrement, lorsque la répartition des photorécepteurs est réalisée sur une grille  $\mathcal{G}$  régulière. Puis, dans un deuxième temps lorsque la grille  $\mathcal{G}$  est irrégulière, conséquence d'un tirage aléatoire.

### 2.1.1.1 Modèle à grille régulière

Le modèle fondé sur une grille  $\mathcal{G}_r$  régulière peut être comparé à un système d'acquisition d'image numérique, par exemple une caméra CCD. Comme nous ne traitons que le cas où les photorécepteurs sont identiques, le problème consistant à positionner régulièrement les cellules sur une grille, est identique au problème de pavage du plan par une seule variété de tesselles définies au sens de la géométrie discrète. Dans [24], il est prouvé qu'il n'existe que trois tesselles régulières pouvant résoudre le problème du pavage du plan. La figure 2.3 illustre les trois solutions possibles, le pavage carré, le pavage hexagonal et le pavage triangulaire.

Dans un cadre régulier, les positions des photorécepteurs sont totalement connues, car ils sont placés au barycentre de la tesselle auquel ils sont associés. La zone réceptive du photorécepteur est une région autour du point central de la tesselle. Cette région est la zone où le filtrage par la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  est réalisé.

Bien que la tesselle hexagonale domine les milieux naturels, nous ne considérerons que le cas de la grille carrée de pas d'échantillonnage  $\Delta$ .

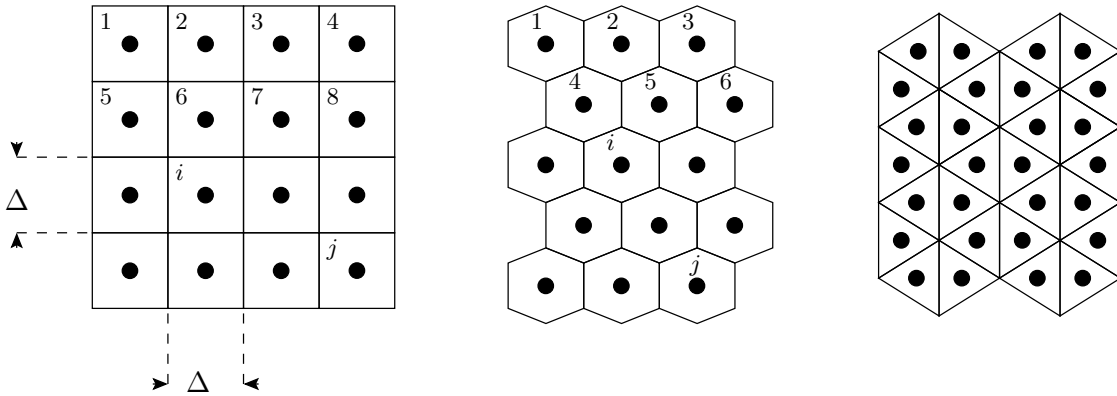


FIG. 2.3 – Les trois pavages réguliers du plan à base de tesselle carrée, hexagonale et triangulaire.

### 2.1.1.2 Modèle à grille aléatoire

On considérera cette fois que la grille  $\mathcal{G}$  n'est plus régulière, et que la densité de probabilité de répartition des photorécepteurs est connue. Pour distinguer les expressions issues d'une grille irrégulière de celles provenant d'une grille régulière, les expressions porteront l'indice  $i$ , ainsi une grille irrégulière se note  $\mathcal{G}_i$ . Sur une telle grille, la possibilité de localiser simplement un photorécepteur à partir de la position d'un autre en fonction des pas d'échantillonnage est perdue. En effet, par définition, le pas d'échantillonnage d'une grille irrégulière en abscisse comme en ordonnée n'est pas constant. En revanche, il est toujours possible de localiser de façon relative la position  $\mathbf{x}_n^i$  du  $n^{\text{ième}}$  photorécepteur vis-à-vis de la position  $\mathbf{x}_n^r$  du photorécepteur correspondant sur une grille carré régulière (voir figure 2.4), et dans ce cas :

$$\mathbf{x}_n^i = \mathbf{x}_n^r + \sigma_\epsilon \epsilon_n \quad (2.8)$$

où  $\epsilon_n = [\epsilon_x(n), \epsilon_y(n)]^T$ , vecteur aléatoire réel, centré, de matrice de corrélation identité, et de densité  $f_{\epsilon_n}$ , représente l'écart de position du  $n^{\text{ième}}$  récepteur de la grille irrégulière à celui de la grille régulière. Le scalaire  $\sigma_\epsilon$ , écart-type de chaque composante du vecteur  $\sigma_\epsilon \epsilon_n$ , permet de régler le degré d'irrégularité de la grille. On supposera que tous les  $\epsilon_n$  sont indépendants des fluctuations  $\xi(t)$ . Chaque point d'une image échantillonnée selon  $\mathcal{H}_e$  à partir d'une grille irrégulière a pour expression :

$$\begin{aligned} S_e(\mathbf{x}_n^i, t) &= S_e(\mathbf{x}_n^r + \sigma_\epsilon \epsilon_n, t) \\ &= S(\mathbf{x}_n^r + \sigma_\epsilon \epsilon_n + \sigma \xi(t)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

et selon le mode d'échantillonnage  $\mathcal{H}_a$ , on obtient :

$$\begin{aligned} S_a(\mathbf{x}_n^i, t) &= S_a(\mathbf{x}_n^r + \sigma_\epsilon \epsilon_n, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} S(\mathbf{x}_n^r + \sigma_\epsilon \epsilon_n + \sigma \xi(t) + \tau) a(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.10)$$

Lorsque toutes les densités  $f_{\epsilon_n}$  sont identiques et égales à une distribution de Dirac positionnées en zéro, la grille irrégulière  $\mathcal{G}_i$  est de structure régulière.

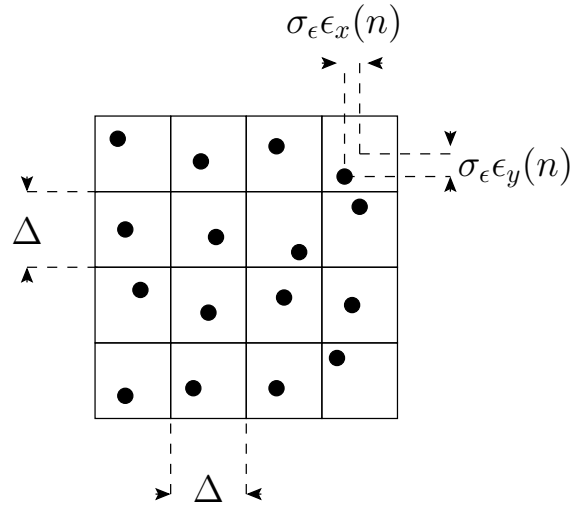


FIG. 2.4 – Illustration d'une grille irrégulière. La position d'un photorécepteur sur cette grille peut être donnée à partir des coordonnées d'un pavage régulier.

### 2.1.2 Caractérisation par la cohérence

La problématique de ce chapitre est de montrer qu'il existe au sein des modèles de rétines exposés précédemment un phénomène d'amélioration de performance par les micro-mouvements aléatoires comparable au phénomène de résonance stochastique présent dans certains systèmes non-linéaires (voir section 1.4). On rappelle que les motivations sont que d'une part, l'ensemble du traitement rétinien comporte des non-linéarités, et que d'autre part l'œil est soumis aux micro-mouvements de nature aléatoire.

Pour montrer qu'une amélioration par le bruit existe, il faut au préalable définir l'expression avec laquelle les performances vont être mesurées. Nous avons donné en 1.4.1 les principales mesures qui ont été utilisées pour mettre en évidence des effets d'amélioration de performance par le bruit : rapport signal-sur-bruit local, capacité de canal, information de Fisher etc ... L'information mutuelle est une mesure bien adaptée pour caractériser le transfert d'information entre l'entrée  $S$  et la sortie  $S_e$  ou  $S_a$  des systèmes  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$ . En effet, celle-ci permet de prendre en compte l'information contenue à tous les ordres statistiques sur

les photorécepteurs. En ce sens, c'est une mesure de transfert d'information globale. Néanmoins, avec cette mesure, les calculs sont rapidement très lourds et compliqués. Les expressions de l'information mutuelle que nous avons obtenues restent trop complexes pour être exploitées et ne sont pas présentées dans ce manuscrit.

La mesure de performances choisie pour ce chapitre est simplement fondée sur les statistiques d'ordre deux : l'inter-corrélation entrée-sortie. Contrairement à l'information mutuelle, cette grandeur est déterminée entre un point  $\mathbf{x}$  de l'image  $S$  et un photorécepteur  $n$  de la grille  $\mathcal{G}$ . L'inter-corrélation est alors une mesure locale, puisque celle-ci est propre à un seul photorécepteur. L'inter-corrélation fournit une indication sur le degré de ressemblance entre le point  $S(\mathbf{x})$  et le point obtenu par le photorécepteur  $n$  en  $\mathbf{x}_n$  de la rétine. La figure 2.5 est une illustration graphique à une seule dimension de ce propos. Les inter-corrélations  $\gamma_{SS_e}$  et  $\gamma_{SS_a}$ , représentées par les doubles flèches sont calculées à deux instants différents  $t_1$  et  $t_2$  pour les systèmes  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$ .

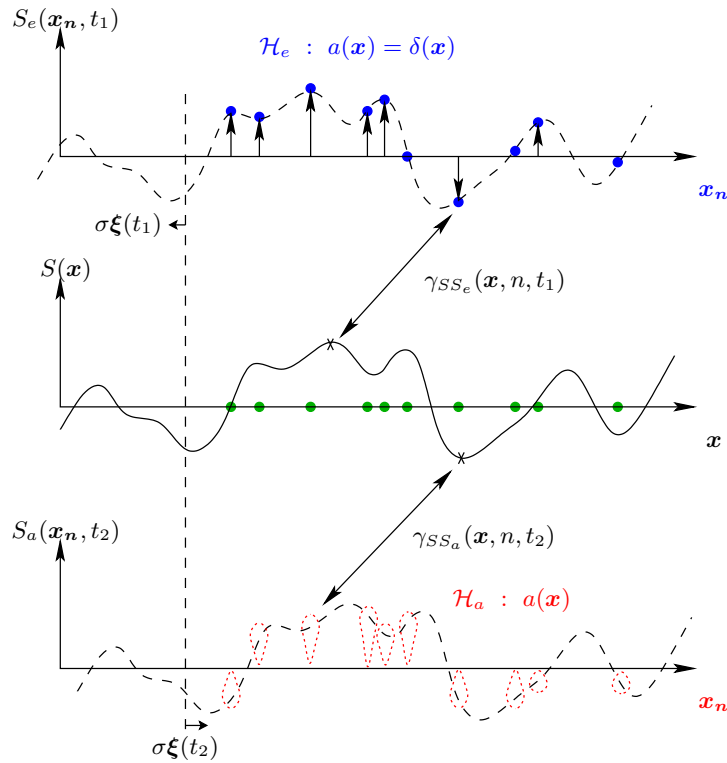


FIG. 2.5 – Illustration graphique à une seule dimension de l'inter-corrélation entre un point de l'image  $S(x)$  et un photorécepteur de  $\mathcal{H}_e$  et un de  $\mathcal{H}_a$  à deux instants différents.

Pour effectuer des comparaisons de performances entre les systèmes  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$ , les calculs sont fondés sur une mesure relative que nous appellerons cohérence [19, 58] qui est un coefficient de corrélation. Cette grandeur est normalisée puisqu'elle est définie par le rapport de l'inter-corrélation par la racine carrée du produit des deux variances des deux termes aléatoires intervenant dans le calcul de l'inter-corrélation. L'expression générale de la fonction de cohérence de deux processus aléatoires  $X$  et  $Y$  aux "positions" ou "dates"  $x, y$  est définie par :

$$C_{XY}(x, y) = \frac{\gamma_{XY}(x, y)}{[\gamma_X(0) \gamma_Y(0)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.11)$$

où  $\gamma_{XY}(x, y) = E_{X,Y}[X(x)Y(y)]$  est par définition la fonction d'inter-corrélation des processus  $X$  et  $Y$  au positions  $x$  et  $y$ , et où  $\gamma_X(0)$  et  $\gamma_Y(0)$  sont respectivement les variances des processus  $X$  et  $Y$ . D'après

l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la cohérence est comprise dans l'intervalle  $[-1; 1]$ . Or, une cohérence égale à  $-1$  apporte autant "d'information" sur la corrélation que lorsqu'elle est égale à  $1$ . Par conséquent, la grandeur sur laquelle nous nous concentrons est la valeur absolue de la cohérence  $|\mathcal{C}_{XY}(x, y)| \in [0; 1]$ .

Les images en sorties des systèmes  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  sont différentes. Les expressions de cohérence qui en découlent le sont également. Pour que les expressions soient les plus générales possibles, les calculs sont réalisés sur une grille de photorécepteurs  $\mathcal{G}_i$  aléatoire. Le cas particulier de la grille régulière est obtenu en posant  $f_{\epsilon_n}(\epsilon) = \delta(\epsilon)$ .

### 2.1.2.1 Cohérence du système $\mathcal{H}_e$

L'inter-corrélation  $\gamma_{SS_e}$  entre  $S$  et  $S_e$  est une fonction de trois variables. D'après (2.4), les images  $S_e$  sont variables dans le temps ; le temps est donc une des variables de la fonction d'inter-corrélation. Les deux autres sont spatiales. Soit  $\mathbf{x}$  la position d'un point quelconque de l'image  $S$ , et  $\mathbf{x}_n^i$  la position du  $n^{\text{ième}}$  photorécepteur sur la grille aléatoire  $\mathcal{G}_i$ . Par définition l'expression de l'inter-corrélation est :

$$\gamma_{SS_e}^i(\mathbf{x}, n, t) = \mathbb{E}[S(\mathbf{x})S_e(\mathbf{x}_n^i, t)] \quad (2.12)$$

Dans (2.12), l'espérance mathématique est à calculer avec la densité de probabilité conjointe de  $S$ ,  $\epsilon_n^i$  et  $\xi$ . Comme ces grandeurs aléatoires sont mutuellement indépendantes, la densité conjointe  $f_{S, \epsilon_n, \xi}$  est égale au produit des densités marginales  $f_S$ ,  $f_{\epsilon_n}$  et  $f_\xi$ . De (2.9), l'expression de l'inter-corrélation devient :

$$\begin{aligned} \gamma_{SS_e}^i(\mathbf{x}, n, t) &= \mathbb{E}_{\xi, \epsilon_n^i} [\gamma_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^i - \sigma\xi(t))] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \gamma_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^r - \sigma_\epsilon \mathbf{k} - \sigma\mathbf{v}) f_\xi(\mathbf{v}) f_{\epsilon_n}(\mathbf{k}) d\mathbf{v} d\mathbf{k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \gamma_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^r - \mathbf{k} - \mathbf{v}) f_{\sigma\xi}(\mathbf{v}) f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}(\mathbf{k}) d\mathbf{v} d\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.13)$$

et on remarque que l'inter-corrélation  $\gamma_{SS_e}^i$  est la convolution de  $\gamma_S$  par  $f_{\sigma\xi}$  et par  $f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}$  :

$$f_{\sigma\xi}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sigma^2} f_\xi\left(\frac{\mathbf{v}}{\sigma}\right) \quad \text{et} \quad f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} f_{\epsilon_n}\left(\frac{\mathbf{k}}{\sigma_\epsilon}\right)$$

D'après (2.11), et en supposant que les images  $S$  et  $S_e$  soient centrées, l'expression de la cohérence du système  $\mathcal{H}_e$  est définie par :

$$\mathcal{C}_e^i(\mathbf{x}, n, t) = \frac{\gamma_{SS_e}^i(\mathbf{x}, n, t)}{(\mathbb{E}[S(\mathbf{x})^2] \mathbb{E}[S_e(\mathbf{x}_n^i, t)^2])^{\frac{1}{2}}} \quad (2.14)$$

Le premier terme du dénominateur de (2.14) est égal à  $\sigma_S^2$ . Le calcul du deuxième terme, la variance de l'image échantillonnée  $S_e$ , se déduit simplement de sa définition et à partir de (2.2) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_e(\mathbf{x}_n^i, t)^2] &= \mathbb{E}_{\xi, \epsilon_n, S} [S(\mathbf{x}_n^r + \sigma_\epsilon \epsilon_n + \sigma\xi(t))^2] \\ &= \mathbb{E}_{\xi, \epsilon_n} [\gamma_S(\mathbf{0})] = \sigma_S^2 \end{aligned}$$

Le dénominateur de l'expression (2.14) vaut par conséquent  $\sigma_S^2$ , et finalement l'expression de la cohérence de  $\mathcal{H}_e$  devient :

$$\mathcal{C}_e^i(\mathbf{x}, n, t) = \frac{1}{\sigma_S^2} \gamma_{SS_e}^i(\mathbf{x}, n, t) \quad (2.15)$$

La normalisation de l'inter-corrélation dans l'expression de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  se manifeste simplement par la pondération d'un facteur égal à la puissance de l'image observée. On rappelle que la grandeur d'intérêt pour la suite de l'étude est la valeur absolue de (2.15).

### 2.1.2.2 Cohérence du système $\mathcal{H}_a$

L'expression générale de l'inter-corrélation entrée-sortie d'un échantillonnage  $\mathcal{H}_a$  est à partir de (2.6) et de sa définition :

$$\begin{aligned}
\gamma_{SS_a}^i(\mathbf{x}, n, t) &= \mathbb{E}[S(\mathbf{x})S_a(\mathbf{x}_n^i, t)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_{\xi, \epsilon_n} [\gamma_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^r - \sigma_\epsilon \epsilon_n - \sigma \boldsymbol{\xi}(t) - \boldsymbol{\tau})] a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \gamma_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^r - \sigma_\epsilon \mathbf{k} - \sigma \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}) f_\xi(\mathbf{v}) a(\boldsymbol{\tau}) f_{\epsilon_n}(\mathbf{k}) d\mathbf{v} d\boldsymbol{\tau} d\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Pour établir l'expression de la cohérence du système d'échantillonnage  $\mathcal{H}_a$ , il est également nécessaire de calculer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_a(\mathbf{x}_n^i, t)^2] &= \mathbb{E}_{\xi, \epsilon_n, S} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^2} S(\mathbf{x}_n^r + \sigma_\epsilon \epsilon_n + \sigma \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\tau}) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \right)^2 \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \gamma_S(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\lambda}) a(\boldsymbol{\lambda}) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\lambda} d\boldsymbol{\tau} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_S(\boldsymbol{\tau}) \gamma_a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}
\end{aligned}$$

où  $\gamma_a(\boldsymbol{\tau}) = \int_{\mathbb{R}^2} a(\boldsymbol{\lambda}) a(\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}$  est la fonction d'auto-corrélation de la réponse impulsionnelle d'un photorécepteur. Pour le système  $\mathcal{H}_a$ , la fonction de cohérence s'obtient donc par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_a^i(\mathbf{x}, n, t) &= \frac{\gamma_{SS_a}^i(\mathbf{x}, n, t)}{(\mathbb{E}[S(\mathbf{x})^2] \mathbb{E}[S_a(\mathbf{x}_n^i, t)^2])^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\gamma_{SS_a}^i(\mathbf{x}, n, t)}{\left( \sigma_S^2 \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_S(\boldsymbol{\tau}) \gamma_a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

La prise en compte d'un champ récepteur des photorécepteurs induit par leur réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  se traduit par la normalisation de  $\gamma_{SS_a}$  par  $\sigma_S [\int_{\mathbb{R}^2} \gamma_S(\boldsymbol{\tau}) \gamma_a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}]^{1/2}$ , et par le "filtrage" de  $\mathcal{C}_e^i$  par  $a(\cdot)$ .

Dans cette partie nous avons introduit et décrit les deux modèles  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  de rétine, ainsi que la mesure (la valeur absolue de la cohérence) avec laquelle l'amélioration des performances va être étudiée par la suite. Nous avons également présenté deux types de grilles, les grilles régulières  $\mathcal{G}_r$  ou irrégulières  $\mathcal{G}_i$  de photorécepteurs. La grille régulière est par principe un cas particulier d'une grille irrégulière. Dans la prochaine partie, l'étude est concentrée uniquement sur ce cas particulier. Les systèmes d'échantillonnage  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  munis d'une grille régulière et soumis à des fluctuations de natures diverses sont analysés pour révéler qu'un effet bénéfique est apporté par les fluctuations.

## 2.2 Grille régulière : l'œil comme une caméra numérique vibrante

Considérons un point particulier  $\mathbf{x}$  de l'image  $S$ . En le positionnant sur le repère issu de la grille régulière  $\mathcal{G}_r$  on peut alors écrire :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n^r + \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ , avec  $\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T \in \mathbb{R}^2$  et  $\mathbf{x}_n^r \in \mathcal{G}_r$ . Pour alléger les notations, tout au long de cette partie nous omettrons volontairement l'indice  $r$  de la position des photorécepteurs indiquant que la grille est régulière, et ainsi :  $\mathbf{x}_n^r = \mathbf{x}_n$ . Comme la grille est régulière, les expressions des fonctions d'inter-corrélation  $\gamma_{SS_e}$  et  $\gamma_{SS_a}$  découlent de (2.13) et de (2.16) en posant simplement  $f_{\epsilon_n}(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k})$ . On montre alors que pour le système  $\mathcal{H}_e$  muni d'une grille régulière :

$$\gamma_{SS_e}(\mathbf{x}, n, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \sigma \mathbf{v}) f_\xi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \tag{2.18}$$



et pour le système  $\mathcal{H}_a$ ,

$$\gamma_{SS_a}(\mathbf{x}, n, t) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \gamma_S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \sigma \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}) f_\xi(\mathbf{v}) a(\boldsymbol{\tau}) d\mathbf{v} d\boldsymbol{\tau} \quad (2.19)$$

En raison de l'homogénéité de  $S$ , les inter-corrélations des deux dernières expressions ne dépendent pas directement du vecteur de position  $\mathbf{x}$  ni du vecteur de position  $\mathbf{x}_n$  du photorécepteur d'intérêt, mais simplement de leur différence  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_n$ . Le calcul des inter-corrélations est réalisé à une date  $t$ . Puisque les micro-mouvements  $\boldsymbol{\xi}(t)$  sont indépendants et identiquement distribués dans le temps, les inter-corrélations ne sont pas fonction temps  $t$ . Par contre, la valeur de  $\sigma$  intervient explicitement dans les calculs. Elle joue un rôle de facteur d'échelle dans les produits de convolution des inter-corrélations (voir équation (2.13)). Ainsi, on peut écrire pour  $\mathcal{H}_e$  :

$$\gamma_{SS_e}(\mathbf{u}, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_S(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v}) f_\xi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.20)$$

A partir de (2.15), et en posant :

$$\mathcal{C}_S(\mathbf{u}) = \frac{\gamma_S(\mathbf{u})}{\sigma_S^2} \quad (2.21)$$

l'expression de la cohérence de  $\mathcal{H}_e$  sur une grille régulière  $\mathcal{G}_r$  devient :

$$\mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v}) f_\xi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \mathbf{v}) f_{\sigma\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.22)$$

Bien que les problèmes soient différents, l'expression de la cohérence  $\mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma)$  définie par (2.22) est à un facteur de normalisation près analogue à celle de l'auto-corrélation dans [145] d'un signal échantillonné périodiquement et soumis à du *jitter*, où  $f_\xi$  correspondrait à la densité de probabilité de l'écart entre deux récepteurs :

$$\mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma) = \mathcal{C}_S * f_{\sigma\xi}(\mathbf{u}) \quad \text{où} \quad f_{\sigma\xi}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sigma^2} f_\xi\left(\frac{\mathbf{u}}{\sigma}\right)$$

La différence majeure entre les deux applications est que dans le modèle de l'échantillonnage régulier plus *jitter*, les positions de chaque récepteurs sont aléatoires, alors que dans le modèle de la rétine, les micro-mouvements déplacent en bloc l'ensemble des photorécepteurs sans que les positions relatives entre photorécepteurs changent. Malgré cela les expressions sont quasiment identiques. On peut l'expliquer par le fait que l'auto-corrélation, tout comme la cohérence  $\mathcal{C}_e$  sont des mesures locales. En effet, la cohérence  $\mathcal{C}_e$  ne fait intervenir qu'un seul photorécepteur, dont la position absolue est aléatoire. Le calcul de l'auto-corrélation est fondé sur la position de deux récepteurs. Néanmoins, c'est la densité de probabilité de la différence entre les positions des deux récepteurs qui apparaît dans l'expression de l'auto-corrélation. Donc dans le calcul de l'auto-corrélation, il n'y a qu'une seule grandeur aléatoire propre aux fluctuations (supposées indépendantes et identiquement distribuées), et c'est pourquoi les expressions sont identiques. Dans [145], Shapiro&Silverman caractérisent les propriétés d'estimation de densités spectrales à partir d'un échantillonnage régulier soumis au *jitter*, et concluent que cette méthode ne permet pas de s'affranchir du repliement spectral. Bien que les grandeurs d'intérêt dans les deux études soient similaires, on ne peut pas tirer les mêmes conclusions sur le modèle régulier de rétine de cette partie. De plus, rappelons que nous cherchons plutôt à étudier les effets des fluctuations en terme de transmission de données et pas en terme d'estimation spectrale.

Pour le système  $\mathcal{H}_a$  l'expression de l'inter-corrélation exprimée en fonction du vecteur distance  $\mathbf{u}$  et de la puissance des fluctuations  $\sigma$  est donnée par :

$$\gamma_{SS_a}(\mathbf{u}, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \gamma_S(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}) f_\xi(\mathbf{v}) a(\boldsymbol{\tau}) d\mathbf{v} d\boldsymbol{\tau} \quad (2.23)$$

Au niveau de l'inter-corrélation, seule la couche de convolution supplémentaire imposée par  $a(\cdot)$  distingue (2.20) de (2.23). Il vient alors :

$$\gamma_{SS_a}(\mathbf{u}, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma_{SS_e}(\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}, \sigma) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \quad (2.24)$$

En s'appuyant sur (2.17), la cohérence filtrée de l'échantillonnage  $\mathcal{H}_a$  sur grille régulière a pour expression :

$$\mathcal{C}_a(\mathbf{u}, \sigma) = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_e(\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}, \sigma) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}}{\left( \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\boldsymbol{\tau}) \gamma_a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.25)$$

La prise en compte d'un champ réceptif des photorécepteurs sur  $\mathcal{H}_a$  se traduit par le filtrage de  $\mathcal{C}_e$  par la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$ , et d'une pondération de valeur  $[\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\boldsymbol{\tau}) \gamma_a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}]^{-1/2}$ .

### 2.2.1 Comportement de la cohérence

Nous rappelons que la mesure qui nous intéresse dans ce chapitre est la valeur absolue de la cohérence. Pour des images  $S$  de fonction d'auto-corrélation  $\gamma_S(\mathbf{u}) = \sigma_S^2 e^{-\beta(\mathbf{u}^T \mathbf{u})^{1/2}}$  (voir (2.2)), la fonction de cohérence  $\mathcal{C}_e$  devient :

$$\mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^2} f_\xi(\mathbf{v}) e^{-\beta[(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v})^T (\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v})]^{1/2}} d\mathbf{v} \quad (2.26)$$

Ce modèle d'image garantit que la cohérence  $\mathcal{C}_e$  est positive ou nulle, et dans ce cas  $|\mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma)| = \mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma)$ . Si les réponses impulsionnelles  $a(\cdot)$  sont positives, alors la cohérence  $\mathcal{C}_a$  l'est également. On veut montrer que les fluctuations peuvent, sous certaines conditions à déterminer, apporter un bénéfice sur la cohérence (en valeur absolue) des modèles  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  lorsque la grille est régulière. Sans faire d'autres hypothèses sur les fluctuations  $\xi$ , on peut obtenir quelques résultats généraux sur le comportement de  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma$ .

#### 2.2.1.1 Analyse de la cohérence $\mathcal{C}_e$

**Fonction de cohérence  $\mathcal{C}_e$  aux valeurs limites :** Sans fluctuation, pour  $\sigma = 0$ , la cohérence  $\mathcal{C}_e$  est égale à l'auto-corrélation normalisée  $\mathcal{C}_S$  de l'image, en effet :

$$\mathcal{C}_e(\mathbf{u}, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\mathbf{u}) f_\xi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \mathcal{C}_S(\mathbf{u}) \quad (2.27)$$

D'après (2.1), l'auto-corrélation  $\mathcal{C}_S(\mathbf{u})$  du modèle d'image retenu pour l'étude possède la propriété d'être positive ou nulle, et est par définition maximale en zéro :  $0 \leq \mathcal{C}_S(\mathbf{u}) \leq \mathcal{C}_S(0) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ .

Lorsque  $\sigma \rightarrow \infty$ , d'après le théorème de convergence dominée, la limite de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  peut s'écrire selon :

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_\xi(\mathbf{v}) \mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^2} f_\xi(\mathbf{v}) \left[ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v}) \right] d\mathbf{v}$$

car il existe  $\kappa \leq \beta$ , réel et positif, tel que  $\mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v})$  soit toujours bornée supérieurement par :

$$\mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v}) \leq e^{-\kappa[(\mathbf{u} - \mathbf{v})^T (\mathbf{u} - \mathbf{v})]^{1/2}} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^+, \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| e^{-\kappa[\mathbf{u}^T \mathbf{u}]^{1/2}} \right| d\mathbf{u} < \infty$$

Or, l'auto-corrélation  $\mathcal{C}_S(\mathbf{u})$  de l'image tend vers zéro lorsque la norme euclidienne  $\|\mathbf{u}\|$  tend vers l'infini. Dans ce cas, la limite de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  est donc :  $\mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \infty) = 0$ .

**Dérivée de la fonction de cohérence  $\mathcal{C}_e$  :** Pour déterminer l'expression de la dérivée partielle de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  par rapport à  $\sigma$ , définissons au préalable la fonction  $h$ , le carré de la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{u} - \sigma\mathbf{v}$ , qui est par définition égal à :

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma) = \|\mathbf{u} - \sigma\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - \sigma\mathbf{v})^T(\mathbf{u} - \sigma\mathbf{v})$$

et dont la dérivée partielle en  $\sigma$  a pour expression :

$$\frac{\partial h(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma)}{\partial \sigma} = 2\mathbf{v}^T(\sigma\mathbf{v} - \mathbf{u}) \quad (2.28)$$

En insérant (2.28) dans le développement du calcul de la dérivée partielle de  $\mathcal{C}_e$ , on aboutit à la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma)}{\partial \sigma} = -\beta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f_{\xi}(\mathbf{v})}{h^{1/2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma)} [\mathbf{v}^T(\sigma\mathbf{v} - \mathbf{u})] e^{-\beta h^{1/2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \sigma)} d\mathbf{v} \quad (2.29)$$

Pour la valeur particulière  $\mathbf{u} = 0$ , l'évaluation de la fonction  $h$  donne  $h(\mathbf{0}, \mathbf{v}, \sigma) = \sigma^2\|\mathbf{v}\|^2$ , c'est-à-dire, le carré de la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{v}$  multiplié par  $\sigma^2$ . La dérivée partielle de la cohérence en  $\mathbf{u} = 0$  a donc comme expression :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\mathbf{u}=0} = -\beta \int_{\mathbb{R}^2} f_{\xi}(\mathbf{v}) \|\mathbf{v}\| e^{-\beta\sigma\|\mathbf{v}\|} d\mathbf{v} \quad (2.30)$$

L'intégrande de (2.30) est strictement positif, la dérivée est donc négative, et la cohérence évaluée en  $\mathbf{u} = 0$  est forcément une fonction décroissante de  $\sigma$ .

Pour des valeurs de  $\mathbf{u}$  non nulle en  $\sigma = 0$ , la dérivée partielle de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  est toujours nulle. En effet, puisque les fluctuations  $\xi$  sont de moyenne nulle, nous avons :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} &= \beta \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\beta\|\mathbf{u}\|}}{\|\mathbf{u}\|} f_{\xi}(\mathbf{v}) \mathbf{u}^T \mathbf{v} d\mathbf{v} \\ &= \frac{\beta e^{-\beta\|\mathbf{u}\|}}{\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u}^T \mathbb{E}[\xi] = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pour les vecteurs  $\mathbf{u}$  non nuls, la courbe de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  en fonction de  $\sigma$  possède une tangente horizontale en zéro.

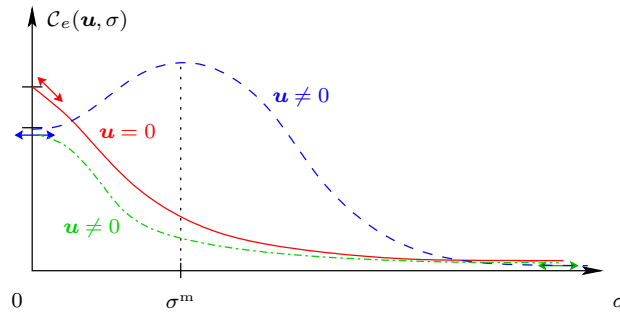


FIG. 2.6 – Illustration de l'éventuel effet de l'amélioration de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  par les micro-mouvements pour  $\mathbf{u} \neq 0$ , et de la dégradation des performances en  $\mathbf{u} = 0$ .

La figure 2.6 résume ces résultats propres au modèle  $\mathcal{H}_e$  à grille régulière auquel sont présentées des images dont l'auto-corrélation est donnée par (2.2). Pour  $\mathbf{u} = 0$ , la cohérence  $\mathcal{C}_e$  décroît de façon monotone de  $\mathcal{C}_S(0) > 0$  à zéro, et dans ce cas, les fluctuations ne font que dégrader les performances. Ce point particulier trouve une explication de nature physique. En effet, l'auto-corrélation d'un signal quelconque est maximale en zéro. Par conséquent, la corrélation entre l'échantillon obtenu en  $\mathbf{x}_n$  et le signal  $S$  observé

en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n + \mathbf{u}$  est maximale lorsque l'éloignement (distance spatiale  $\mathbf{u}$ ) entre les deux valeurs est nulle. Le photorécepteur positionné en  $\mathbf{x}_n$  ne trouvera pas d'information supplémentaire se rapportant au point  $\mathbf{x}$  dans le voisinage de  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ . Autrement dit, c'est sans fluctuation, donc pour  $\sigma = 0$ , que le photorécepteur en  $\mathbf{x}_n$  est le mieux placé pour scruter la scène qui se déroule en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ .

Par contre, pour  $\mathbf{u} \neq 0$ , la tangente à l'origine est horizontale. De plus, nous avons montré que  $\mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \infty) = 0$ . Il est alors possible qu'un effet d'amélioration de la cohérence par le bruit puisse exister dans ce cas. Comme le montre la figure 2.6, cette amélioration se caractériserait par le fait que  $\mathcal{C}_e$  possède un maximum pour une valeur particulière de  $\sigma = \sigma^m$ . Néanmoins rien ne garantit ce comportement, comme il se peut que le maximum ne soit pas unique ou que la cohérence soit monotone décroissante.

### 2.2.1.2 Fonction de cohérence $\mathcal{C}_a$

A partir de (2.25) et en s'appuyant sur l'étude menée pour  $\mathcal{C}_e$ , on peut également obtenir quelques résultats sur le comportement de  $\mathcal{C}_a$  en présence de micro-mouvements. Quelque soit la nature de la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$ , il est facile de montrer que :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_a(\mathbf{u}, \infty) &\propto \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_e(\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}, \infty) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = 0 \\ \left. \frac{\partial \mathcal{C}_a(\mathbf{u}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} &\propto \int_{\mathbb{R}^2} \left. \frac{\partial \mathcal{C}_e(\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = 0 \end{aligned}$$

Tout comme  $\mathcal{C}_e$ , la fonction de cohérence  $\mathcal{C}_a$  devient nulle lorsque la puissance des fluctuations devient importante. On voit également que la tangente à l'origine de  $\mathcal{C}_a$  est horizontale. Néanmoins, la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  conditionne le signe de  $\mathcal{C}_a(\mathbf{u}, 0)$  et celui de la dérivée partielle de  $\mathcal{C}_a$  en  $\sigma$  pour une distance  $\mathbf{u} = 0$  :

$$\mathcal{C}_a(\mathbf{u}, 0) \propto \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \quad (2.32)$$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{C}_a(\mathbf{u}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\mathbf{u}=0} \propto \int_{\mathbb{R}^2} \left. \frac{\partial \mathcal{C}_e(\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\mathbf{u}=0} a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \quad (2.33)$$

Or, la réponse impulsionnelle représente le champ récepteur de la cellule. Comme on s'intéresse à  $|\mathcal{C}_a(\mathbf{u}, \sigma)|$ , le cas où le champ récepteur est complètement excitateur  $a(\cdot) > 0$  et le cas où le champ récepteur est complètement inhibiteur  $a(\cdot) < 0$  sont symétriques.

Si la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  est toujours positive ou nulle, alors les conclusions obtenues par l'analyse de  $\mathcal{C}_e$  sont également valables pour la cohérence  $\mathcal{C}_a$ . En effet, dans ce cas d'après (2.32),  $\mathcal{C}_a(\mathbf{u}, 0)$  est toujours positive ou nulle. D'après (2.33), la dérivée de  $\mathcal{C}_a$  par rapport à  $\sigma$ , et évaluée en  $\mathbf{u} = 0$  est strictement négative, et il est également facile d'établir que  $\mathcal{C}_a(0, 0) \geq 0$ . Dans le cas contraire, si la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  est strictement négative, alors les signes des grandeurs de l'explication précédente changent, mais les conclusions restent les mêmes puisque l'on considère la valeur absolue de  $\mathcal{C}_a$ .

Généralement, le comportement du champ récepteur d'une cellule peut être différent en son centre et aux extrémités. Dans ce cas, la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  peut être positive ou négative sur différentes régions excitatrices ou inhibitrices de la tesselle du photorécepteur. Ce cas est trop complexe pour être envisagé dans un cadre général et sera étudié en détail par la suite pour une réponse impulsionnelle particulière.

Les conclusions sont vérifiées quelle que soit la loi de probabilité des fluctuations  $f_\xi$ . Néanmoins pour donner les conditions dans lesquelles l'effet d'amélioration est possible il faut étudier les variations de  $\partial \mathcal{C}_e(\mathbf{u}, \sigma) / \partial \sigma$  définie par (2.29) qui dans un cadre général ne peut apporter plus d'information. Pour aller plus loin dans l'étude, nous traiterons plusieurs exemples avec des densités de probabilité de fluctuations différentes.

Dans un premier temps, les fluctuations seront régies par une loi uniforme, puis une loi gaussienne et une loi laplacienne. Le cas du système  $\mathcal{H}_a$  est traité en considérant que la réponse impulsionnelle des

photorécepteurs est une porte strictement positive. L'influence de la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  sur la cohérence  $\mathcal{C}_a$  sera également testée en prenant comme modèle de réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  un "chapeau mexicain".

Cependant, l'étude dans un cadre bi-dimensionnel est trop compliquée. Pour la simplifier, les calculs seront menés avec les modèles  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  à une seule dimension spatiale. Cette simplification est équivalente à ne considérer qu'une seule rangée de photorécepteurs d'une rétine à grille régulière, et dans laquelle aucun lien d'interaction n'existe entre les photorécepteurs d'une ligne avec ceux d'une colonne. Les expressions des cohérences des fonctions d'échantillonnage  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  sur une grille régulière uni-dimensionnelle sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_e(u, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}} f_{\xi}(v) e^{-\beta|u-\sigma v|} dv \\ &= e^{-\beta u} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\sigma}} f_{\xi}(v) e^{\beta\sigma v} dv + e^{\beta u} \int_{\frac{u}{\sigma}}^{\infty} f_{\xi}(v) e^{-\beta\sigma v} dv \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma) = \frac{\int_{\mathbb{R}} a(v-u) \mathcal{C}_e(v, \sigma) dv}{\left[ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}_S(v) \gamma_a(v) dv \right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mathcal{N}_a(u, \sigma)}{\mathcal{D}_a} \quad (2.35)$$

### 2.2.2 Fluctuations uniformes sur une ligne de photorécepteurs de $\mathcal{H}_e$

La densité de probabilité des fluctuations est une loi uniforme de variance unitaire, définie par  $f_{\xi}(u) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$  sur  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$  et 0 ailleurs. Avec cette densité de probabilité, et à partir de l'équation (2.35), la cohérence  $\mathcal{C}_e$  peut s'écrire par :

$$\begin{aligned} - \text{Pour } |u| \leq \sqrt{3}\sigma : \quad \mathcal{C}_e(u, \sigma) &= \frac{1 - \cosh(\beta u) e^{-\sqrt{3}\beta\sigma}}{\sqrt{3}\beta\sigma} \\ - \text{Pour } |u| > \sqrt{3}\sigma : \quad \mathcal{C}_e(u, \sigma) &= \frac{e^{-\beta|u|} \sinh(\sqrt{3}\beta\sigma)}{\sqrt{3}\beta\sigma} \end{aligned}$$

Le coefficient  $\beta$  est un facteur d'échelle dans les deux dernières expressions. Si on introduit les variables normalisées :

$$u_0 = \beta u \quad \text{et} \quad \sigma_0 = \sqrt{3}\beta\sigma \quad (2.36)$$

alors la cohérence, fonction de ces nouvelles variables a pour expression :

$$\mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0) = \begin{cases} \frac{e^{-|u_0|} \sinh(\sigma_0)}{\sigma_0} & \text{si } \sigma_0 \leq |u_0| \\ \frac{1 - \cosh(u_0) e^{-\sigma_0}}{\sigma_0} & \text{si } \sigma_0 > |u_0| \end{cases} \quad (2.37)$$

L'expression de la dérivée partielle de  $\mathcal{C}_e$  en  $\sigma_0$  et en un point particulier  $u_0$  est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0)}{\partial \sigma_0} = \begin{cases} \frac{e^{-|u_0|} \cosh(\sigma_0)}{\sigma_0^2} (\sigma_0 - \tanh(\sigma_0)) & \text{si } \sigma_0 \leq |u_0| \\ \frac{1}{\sigma_0^2} [\cosh(u_0)(1 + \sigma_0)e^{-\sigma_0} - 1] & \text{si } \sigma_0 > |u_0| \end{cases} \quad (2.38)$$

On retrouve le comportement de décroissance monotone de  $\mathcal{C}_e$  décrit dans un cadre général par (2.29) lorsque  $u_0 = 0$ . Pour des valeurs de  $u_0 \neq 0$  on observe que :

- Dans la mesure où  $\tanh(\sigma_0) < \sigma_0$  pour  $\sigma_0 > 0$ , la dérivée  $\partial \mathcal{C}_e / \partial \sigma$  est strictement positive sur l'intervalle  $\sigma_0 \in ]0; |u_0|]$ .

- Pour des fluctuations de puissances très élevées :  $\sigma_0 \rightarrow +\infty$ , en s'appuyant sur le fait que  $\sigma_0 e^{-\sigma_0} \rightarrow 0$ , on vérifie que la cohérence devient nulle.

Les deux précédentes remarques impliquent l'existence d'au moins un maximum de  $\mathcal{C}_e$  pour  $\sigma_0 \in ]|u_0|; +\infty[$  lorsque  $u_0$  est non nulle.

Sur cet exemple élémentaire, grâce aux propriétés des fonctions de Lambert (voir annexe A), il est possible de prouver théoriquement que le maximum est unique et de déterminer la puissance de fluctuation optimale  $\sigma_0^m$ . On peut ainsi montrer que la valeur de  $\sigma_0^m$  est définie par la fonction de Lambert de branche secondaire  $W_{-1}$  :

$$\sigma_0^m = - \left[ 1 + W_{-1} \left( - \frac{e^{-1}}{\cosh(u_0)} \right) \right] \quad (2.39)$$

Le résultat (2.39) est tracé sur la figure 2.7. La courbe passe par zéro à l'origine, en effet, pour  $u_0 = 0$ , la valeur optimale  $\sigma^m = 0$  car  $W_{-1}(e^{-1}) = -1$ . Ce résultat est en accord avec les conclusions générales résumées sur la figure 2.6 et l'explication physique donnée précédemment en se plaçant sous ces conditions. Lorsque la distance normalisée  $u_0$  augmente, alors  $\cosh(u_0)$  augmente également, ce qui entraîne que  $W_{-1} \left( \frac{e^{-1}}{\cosh(u_0)} \right)$  tend à diminuer, et que finalement  $\sigma^m$  augmente. Il y a donc une action directe entre la distance  $u_0$  et la puissance optimale des fluctuations  $\sigma_0^m$ . Pour améliorer l'information apportée par le  $n^{\text{ème}}$  échantillon représentant la scène en  $x_n + u_0$  lorsque la distance  $u_0$  augmente, il est nécessaire d'apporter de plus en plus d'énergie au système moteur des fluctuations afin que le  $n^{\text{ème}}$  photorécepteur scrute de plus en plus la scène visualisée.

La caractéristique  $\sigma^m = f(u_0)$  tracée sur la figure 2.7 est quasi-linéaire. Pour des fluctuations uniformes la relation entre puissance de fluctuations optimale et distance d'inter-corrélation peut être approchée par une droite de pente proche de 1.25 en grandeur normalisée.

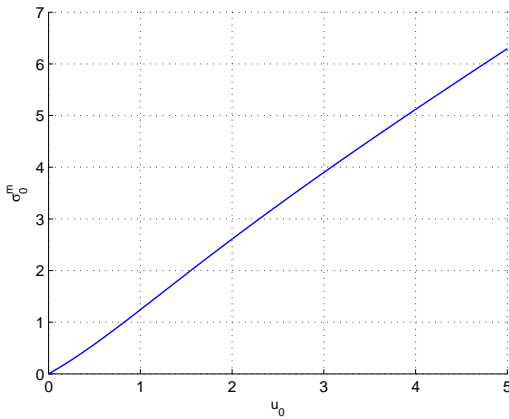


FIG. 2.7 – Evolution de  $\sigma_0^m$  en fonction de la distance d'inter-corrélation normalisée  $u_0$ .

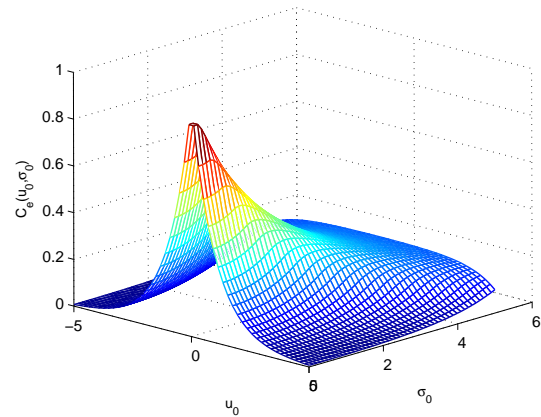


FIG. 2.8 – Cohérence en fonction de  $\sigma_0$  et de  $u_0$  dans le cas uniforme.

La figure 2.8 représente la cohérence définie par (2.37) en fonction des valeurs normalisées de distance  $u_0$  et de variance  $\sigma_0$ . Cette courbe admet un plan de symétrie pour  $u_0 = 0$ . La figure 2.9 donne plusieurs coupes de la nappe précédente pour différentes valeurs de  $u_0$ . Pour toutes les distances d'inter-corrélation  $u_0$  données, on remarque effectivement que la cohérence  $\mathcal{C}_e$  commence par augmenter dans un premier temps en fonction de  $\sigma_0$ , pour atteindre un maximum en  $\sigma_0^m(u_0)$ , et finalement tendre vers 0 lorsque  $\sigma_0$  devient très grand. Il y a bien un effet d'amélioration de la cohérence autour d'un photorécepteur de  $\mathcal{H}_e$  pour une grille régulière lorsque les fluctuations sont uniformes. Pour  $\sigma = \sigma_0^m$ , la cohérence  $\mathcal{C}_e$  est maximale.

En supposant qu'il existe un système d'asservissement de la puissance des fluctuations au sein du système visuel, on peut considérer alors qu'il exercerait un contrôle optimal stochastique de la cohérence des photorécepteurs.

La figure 2.10 donne la cohérence optimale  $\mathcal{C}_e^m$  obtenue pour  $\sigma_0^m$  donné par (2.39) en fonction  $u_0$ . Cette courbe est strictement décroissante. La valeur de la cohérence  $\mathcal{C}_e(0, 0)$  est bien égale à 1. La figure 2.10 met bien en évidence que la cohérence d'un récepteur éloigné de  $u_0$  ne peut être supérieure à celle du récepteur placé en  $x$ , et ce malgré l'effet de contrôle optimal stochastique des fluctuations.

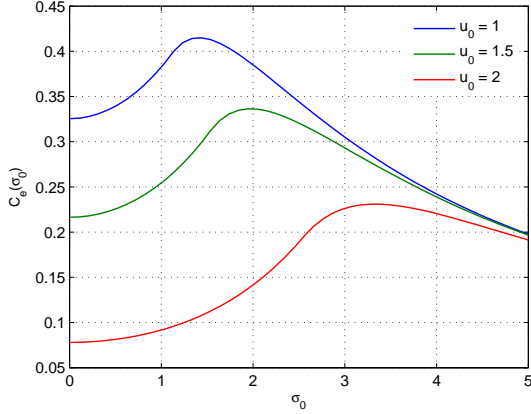


FIG. 2.9 – Cohérence en fonction de  $\sigma_0$  pour trois valeurs particulières de  $u_0$  dans le cas uniforme.

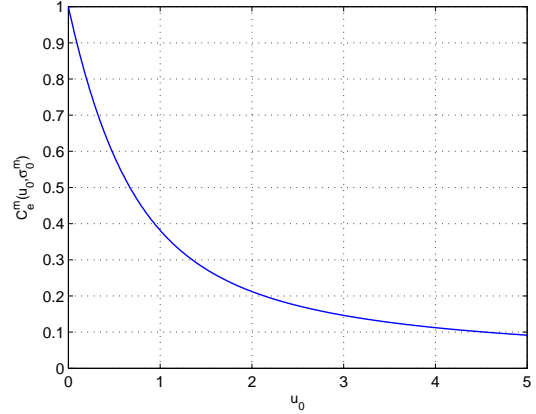


FIG. 2.10 – Cohérence optimale  $\mathcal{C}_e^m$  en fonction de la distance d'inter-corrélation normalisée  $u_0$ .

### 2.2.3 Fluctuations uniformes sur une ligne de photorécepteurs de $\mathcal{H}_a$

A partir d'un exemple simple, nous venons d'introduire l'hypothèse d'un contrôle optimal stochastique de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  sur le modèle de rétine  $\mathcal{H}_e$  par des fluctuations aléatoires uniformes. Nous allons à présent évaluer sous quelles conditions ce contrôle stochastique peut opérer sur le modèle  $\mathcal{H}_a$ . Le modèle  $\mathcal{H}_a$  se différencie du modèle  $\mathcal{H}_e$  par la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  qui représente le champ récepteur d'une cellule. Dans cette partie, nous allons considérer que le filtrage spatial  $a(\cdot)$  n'est qu'une simple étape de moyennage locale autour du photorécepteur (champ récepteur excitateur). Ainsi, nous prendrons comme réponse impulsionnelle :

$$a(x) = \begin{cases} 1/2\alpha & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.40)$$

où  $\alpha \geq 0$ , représente la largeur de l'impulsion  $a(\cdot)$ , et qui par conséquent, modélise l'étendue du champ récepteur. Si l'on se concentre sur le cas où  $f_\xi(u) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$  sur  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$  et 0 ailleurs, les résultats précédents du cas sans filtrage  $\mathcal{H}_e$  peuvent être ré-utilisés. Tout comme pour le cas non filtré  $\mathcal{H}_e$ , les calculs sont développés à partir des notations normalisées  $u_0, \sigma_0$ , ainsi que  $\alpha_0 = \beta\alpha$ .

Calculons d'abord l'expression du dénominateur de  $\mathcal{C}_a$ . De (2.40) et du produit de convolution de  $a(\cdot)$  par elle-même, on déduit que  $\gamma_a(v) = (2\alpha - |v|)/4\alpha^2$ . En insérant cette expression dans (2.35) et en utilisant l'expression de l'auto-corrélation du modèle des scènes observées pour l'étude on aboutit finalement à :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a &= \frac{1}{\sigma_S} \left[ \int_{\mathbb{R}} \gamma_S(v) \gamma_a(v) dv \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^{2\alpha} e^{-\beta v} (2\alpha - v) dv \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(2\alpha_0 - 1 + e^{-2\alpha_0})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\alpha_0} \end{aligned} \quad (2.41)$$

On vérifie que le dénominateur  $\mathcal{D}_a$  n'est pas fonction du type de fluctuations appliqués sur l'échantillonnage, il dépend uniquement de la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  et du paramètre  $\beta$  caractérisant la scène  $S$ .

À présent, nous allons établir l'expression du numérateur de  $\mathcal{C}_a$ . L'hypothèse de filtrage uniforme  $a(\cdot)$  des photorécepteurs simplifie le calcul, et  $\mathcal{N}_a$  se déduit de :

$$\mathcal{N}_a(u, \sigma) = \frac{1}{2\alpha} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} \mathcal{C}_e(v, \sigma) dv$$

où la cohérence  $\mathcal{C}_e$  est donnée par (2.37). En plus d'être fonction de la distance spatiale  $u_0$  ainsi que de la puissance normalisée des fluctuations  $\sigma_0$ , la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est également une fonction du paramètre de filtrage  $\alpha_0$ . Les détails des calculs sont placés en annexe B.1. En définissant au préalable les trois domaines :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0) &= [0; |u_0| - \alpha_0[ \\ \mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0) &= [|u_0| - \alpha_0; |u_0| + \alpha_0[ \\ \mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0) &= [|u_0| + \alpha_0; +\infty[ \end{aligned}$$

alors la cohérence  $\mathcal{C}_a$  du cas filtré devient :

– si  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0)$

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 - e^{-\alpha_0} \cosh(u_0) \sinh(\sigma_0)}{\alpha_0 \sigma_0 \mathcal{D}_a} & \text{si } |u_0| \leq \alpha_0 \\ \frac{e^{-|u_0|} \sinh(\alpha_0) \sinh(\sigma_0)}{\alpha_0 \sigma_0 \mathcal{D}_a} & \text{si } |u_0| > \alpha_0 \end{cases} \quad (2.42)$$

– si  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{\alpha_0 - |u_0| + \sigma_0 - e^{-\alpha_0 - |u_0|} \sinh(\sigma_0) - \sinh(\alpha_0 - |u_0|) e^{-\sigma_0}}{2\alpha_0 \sigma_0 \mathcal{D}_a} \quad (2.43)$$

– si  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{\alpha_0 - \cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) e^{-\sigma_0}}{\alpha_0 \sigma_0 \mathcal{D}_a} \quad (2.44)$$

La cohérence  $\mathcal{C}_a$  est une fonction de trois paramètres. Le paramètre ayant le plus d'intérêt pour l'étude est la puissance des fluctuations  $\sigma_0$ . Ainsi, la nappe de la figure 2.11, montre comment varie la cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $u_0$  et de  $\sigma_0$  pour  $\alpha_0$  fixée. La figure 2.12 décrit le comportement de  $\mathcal{C}_a$  pour  $\alpha_0$  et  $\sigma_0$  variants à  $u_0$  fixée. La figure 2.11 a la même allure que la nappe obtenue pour le cas non filtré  $\mathcal{H}_e$ . Cependant, si on observe, sur la figure 2.13 quelques coupes de cette nappe pour différentes valeurs de  $u_0$  et pour la même valeur de  $\alpha_0$ , on constate que contrairement au cas non filtré  $\mathcal{H}_e$ , les traces de  $\mathcal{H}_a$  ne présentent pas toutes un maximum. La figure 2.14 présente l'étude sous un autre aspect. Elle donne les valeurs de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\alpha_0$  pour une distance  $u_0$  fixée. Les coupes de  $\mathcal{C}_a$  pour  $u_0$  fixée possèdent un maximum en fonction de  $\sigma_0$  lorsque  $\alpha_0$  appartient à une plage de valeur à déterminer. La figure 2.14 montre également que  $\alpha_0$  croissant le phénomène s'atténue jusqu'à disparition.

Même pour un filtrage très simple des photorécepteurs, le cas  $\mathcal{H}_a$  est bien plus complexe que le cas  $\mathcal{H}_e$  où la réponse impulsionnelle est un Dirac. En effet pour  $\mathcal{H}_a$ , l'hypothèse de contrôle optimal stochastique apparaît sous certaines conditions qui restent à déterminer. Le détail de l'analyse de  $\mathcal{C}_a$  sur tous les domaines de définition  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$  est reporté en annexe B.2. Les conclusions suivantes en sont issues :



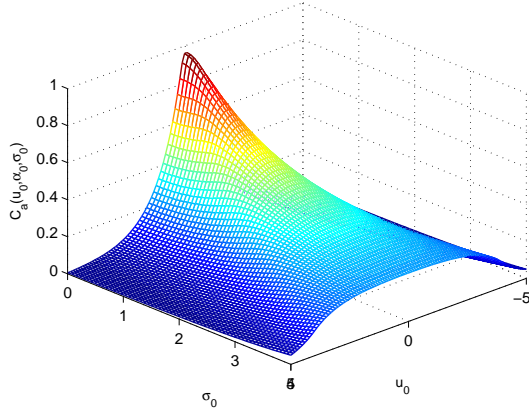


FIG. 2.11 – Cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $u_0$  dans le cas uniforme et filtré par la porte a de largeur  $\alpha_0 = 0.2$ .

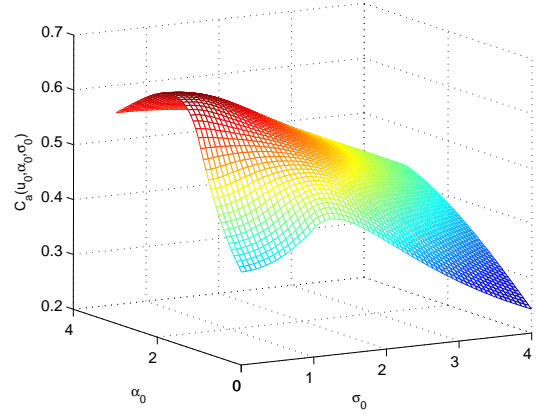


FIG. 2.12 – Cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $\alpha_0$  dans le cas uniforme pour une distance d'inter-corrélation  $u_0 = 1$ .

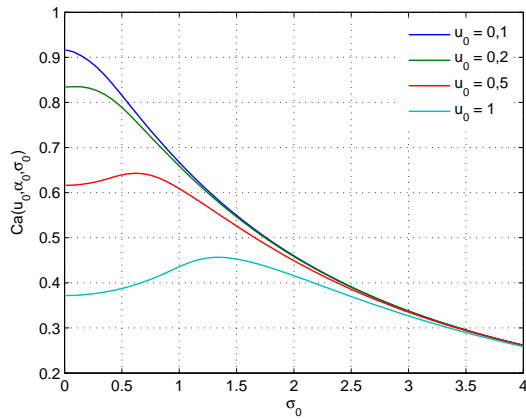


FIG. 2.13 – Cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  pour  $\alpha_0 = 0,2$  dans le cas uniforme et filtré. La distance d'inter-corrélation normalisée  $u_0$  vaut respectivement  $u_0 = \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}$ .

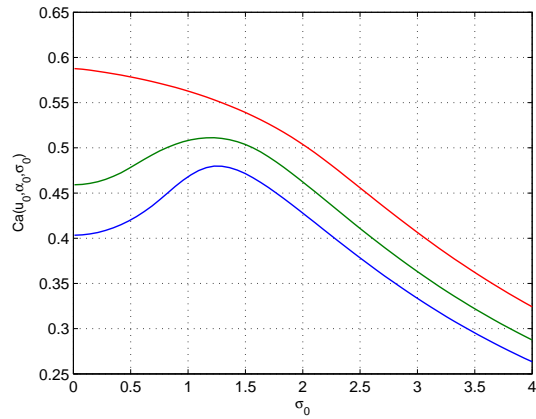


FIG. 2.14 – Cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  pour  $u_0 = 1$  dans le cas uniforme et filtré. Les largeurs de la porte a de filtrage sont respectivement  $\alpha_0 = \{0.25, 0.5, 1.01\}$ .

**Si  $|\mathbf{u}_0| \leq \alpha_0$**

Dans  $\mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0)$ ,  $\mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$ , et  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$ , la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est strictement décroissante quelque soit la puissance des fluctuations  $\sigma_0$ . Nous interprétons ceci par l'illustration de la figure 2.15 qui montre que dans ce cas la cohérence ne peut être améliorée par les fluctuations. En effet, la cohérence est toujours calculée dans le champs visuel  $\alpha_0$  du capteur. Comme le point d'intérêt  $x$  est placé dans ce champs visuel  $\alpha_0$ , les fluctuations ont tendance à dégrader le traitement.

**Si  $|\mathbf{u}_0| > \alpha_0$**

La cohérence  $\mathcal{C}_a$  est croissante sur  $\mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0)$ . La valeur de  $\mathcal{C}_a$  pour  $\sigma_0 = 0$  est positive, la limite de  $\mathcal{C}_a$  pour  $\sigma_0 \rightarrow \infty$  est nulle, il est certain que la cohérence  $\mathcal{C}_a$  présente un (ou plusieurs) maximum

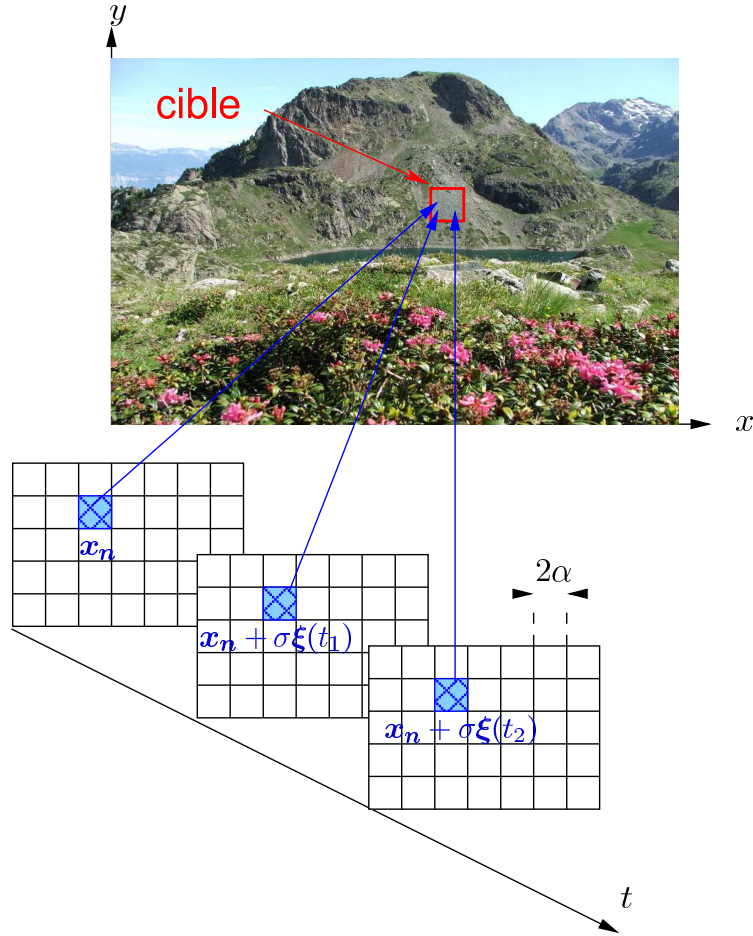


FIG. 2.15 – Illustration du phénomène de dégradation de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  des photorécepteurs d'une grille régulière. La rétine se déplace dans l'espace au cours du temps. La cohérence entre le photorécepteur d'intérêt et la cible symbolisée par le cadre en pointillé de largeur  $2\alpha$  est dégradée par les micro-mouvements, car toutes les informations concernant la cible sont déjà présentes dans le champs visuel du photorécepteur à l'instant  $t_0$ .

sur  $\mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$ , et/ou  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$ . On montre en annexe B.2 que si la condition :

$$\frac{\cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) e^{-|u_0| - \alpha_0}}{\alpha_0} (|u_0| + \alpha_0 + 1) - 1 > 0 \quad (2.45)$$

est vérifiée, alors la cohérence filtrée  $\mathcal{C}_a(u_0, \sigma_0)$  possède un maximum unique sur  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$  :

$$\sigma_0^m = - \left[ 1 + W_{-1} \left( -\frac{e^{-1}}{C} \right) \right] \quad (2.46)$$

où  $C = \cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) / \alpha_0$ . Lorsque  $\alpha_0 \rightarrow 0$ , le filtre des photorécepteurs tend à devenir une distribution de Dirac, et les systèmes  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  deviennent équivalents. On vérifie ici pour  $\alpha_0 \rightarrow 0$  que  $C / \alpha_0 \rightarrow 0 = \cosh(u_0)$ , et que les formules (2.39) et (2.46) sont équivalentes.

Lorsque la condition (2.45) n'est pas remplie, alors sur tout l'intervalle  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$ , la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est décroissante. Le maximum apparaît pour une valeur de  $\sigma_0$  appartenant à  $\mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$ , et hormis par une méthode numérique, il est difficile de déterminer explicitement pour quelle valeur de  $\sigma_0$  le pic sera présent.

La figure 2.16 représente comment varie  $\sigma_0^m$  en fonction de la distance d'inter-corrélation normalisée  $u_0$  pour différentes valeurs de  $\alpha_0$ . Ces courbes sont obtenues numériquement pour une taille de porte  $\alpha_0$  fixée,

en recherchant pour une distance  $u_0$  la valeur de  $\sigma_0$  qui permet d'obtenir le maximum de cohérence  $\mathcal{C}_a$ . Lorsque  $\alpha_0$  tend vers zéro, on reconnaît le caractère quasi-linéaire du lien entre  $\sigma_0^m$  et  $u_0$  déjà observé en 2.1.2. Ce caractère linéaire se perd lorsque les valeurs de  $\alpha_0$  augmentent. Par rapport à l'étude du cas précédent ( $|u_0| \leq \alpha_0$ ),  $\sigma_0^m = 0$  pour des distances d'inter-corrélation  $u_0$  inférieures à la largeur de la porte. On remarque aussi que la pente des courbes augmente avec le coefficient  $\alpha_0$ . Plus la largeur de filtre  $\alpha_0$  est grande, et plus, lorsque la distance  $u_0$  augmente, il est nécessaire de donner de la puissance aux micro-mouvements pour que le photorécepteur travaille à cohérence  $\mathcal{C}_a$  maximale.

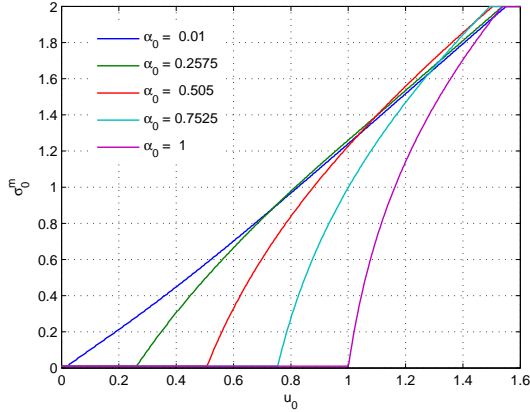


FIG. 2.16 – *Ecart-type optimal  $\sigma_0^m$  en fonction de la distance d'inter-corrélation normalisée  $u_0$  pour différentes valeurs de  $\alpha_0$ .*

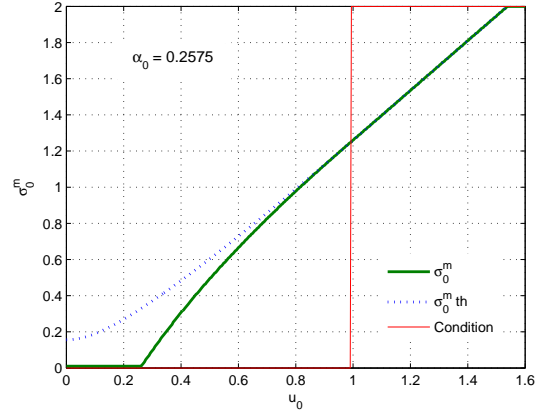


FIG. 2.17 – *Illustration de la validité de la relation théorique (2.46) entre  $\sigma_0^m$  et  $u_0$ . La courbe théorique (pointillé) rejoint la courbe pratique après que la condition (2.45) (rouge) soit vérifiée.*

La figure 2.17 illustre la validité de la relation théorique (2.46) qui est vérifiée lorsque la condition (2.45) est vraie. Les courbes sont tracées pour une largeur de porte fixée. La courbe en trait continu est obtenue par la même procédure numérique que pour les courbes de la figure 2.16. La courbe en pointillé est tracée à partir de la relation (2.46). La condition est également représentée en trait plein sur la figure, elle est vérifiée pour  $u_0 \geq 1$ . Pour toutes les valeurs de  $u_0$  où la condition est vraie la courbe théorique et la courbe pratique se superposent. Lorsque la condition n'est pas vérifiée l'équation (2.46) devient une approximation qui n'est pas valable pour des faibles distances  $u_0$ .

La courbe tracée sur la figure 2.18 représente comment varie  $\sigma_0^m$  en fonction de la taille de la porte  $\alpha_0$  pour une distance d'inter-corrélation normalisée  $u_0 = 1$ . Cette caractéristique est composée de trois zones fonctions de la valeur de  $\alpha$ . Nous appelons troisième zone, la partie de la courbe pour laquelle  $\alpha_0 > 1$ . Dans cette zone, les valeurs de  $\sigma_0^m$  sont nulles, et il n'y a pas d'effet d'amélioration par le bruit. La première zone correspond environ à  $0 < \alpha_0 < 0.33$ . Ici, la courbe est légèrement croissante et l'effet d'amélioration de la cohérence existe. Le lien entre puissance de fluctuations et largeur de fenêtre est alors le suivant. Plus la taille du filtre augmente, et plus il est nécessaire d'agiter le modèle de rétine  $\mathcal{H}_a$  pour que les photorécepteurs le composant fonctionnent à cohérence maximale. Mais l'effet de l'amélioration par le bruit existe également dans la deuxième zone définie pour  $0.33 < \alpha_0 < 1$ . Néanmoins, sur cette portion de courbe,  $\sigma_0^m$  diminue lorsque  $\alpha_0$  augmente. Cette décroissance illustre que l'effet d'amélioration par le bruit disparaît rapidement puisque les conditions d'apparition du phénomène sont de plus en plus critiques ( $\alpha_0 \approx |u_0|$ ).

La figure 2.19 donne l'évolution de  $\mathcal{C}_a^m$ , c'est-à-dire la valeur de la cohérence en  $\sigma_0^m$  pour  $u_0 = 1$ . On remarque que pour une distance fixe, le maximum de la cohérence décroît avec la taille de la fenêtre. Les effets de la taille et du type de fenêtre seront analysés en détail dans la partie 2.2.5.

Enfin, la figure 2.20 illustre le principe d'amélioration de la cohérence. Contrairement à la figure 2.15,

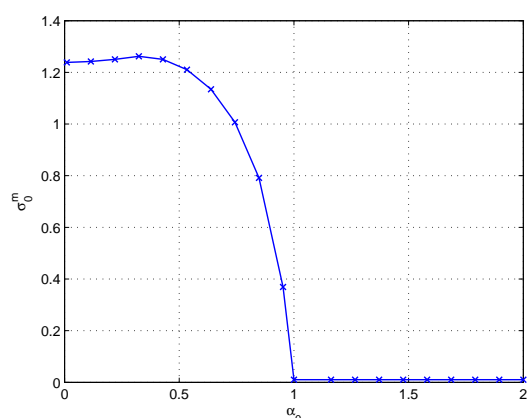


FIG. 2.18 – *Ecart-type optimal  $\sigma_0^m$  en fonction de la taille de la porte  $\alpha_0$  pour une distance d'inter-corrélation normalisée  $u_0 = 1$ .*

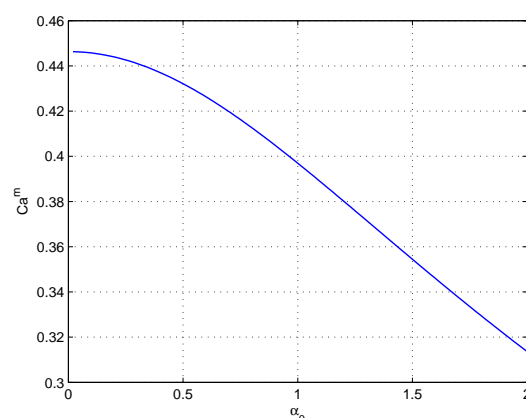


FIG. 2.19 – *Cohérence maximale  $C_a^m$  en fonction  $\alpha_0$ , la taille du filtre, et pour  $u_0 = 1$ .*

la cohérence n'est plus seulement calculée dans un cadre limité par le champs visuel du capteur. Ainsi, les fluctuations en déplaçant les photorécepteurs peuvent améliorer localement le traitement visuel, c'est pourquoi on peut le qualifier de contrôle optimal stochastique.

En pratique, vis-à-vis d'un point de l'image  $S$ , un photorécepteur est soit dans le cas  $|u_0| \leq \alpha_0$ , sans amélioration possible de la cohérence, ou soit dans le cas  $|u_0| > \alpha_0$ , où la cohérence atteint un maximum pour  $\sigma_0^m$ . Par conséquent, par rapport à l'image  $S$  complète, le photorécepteur est simultanément en situation d'amélioration de la cohérence pour une zone de l'image donnée, et en détérioration de la cohérence pour la zone comprise dans son champs visuel. Comme la cohérence est une mesure locale parce qu'elle est propre à un photorécepteur, et également parce qu'elle est relative à un seul point de l'image  $S$ , il est impossible de quantifier le degré d'amélioration et celui de détérioration apportés par les fluctuations. Néanmoins, on vient de montrer qu'il existe un effet d'amélioration de la cohérence des photorécepteurs par les fluctuations dans les modèles  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  lorsque les grilles sont régulières, et lorsque les fluctuations sont de nature uniforme. Cet effet est toujours vérifié pour  $\mathcal{H}_e$ , alors que sur  $\mathcal{H}_a$  celui peut ne pas apparaître. Sur  $\mathcal{H}_a$ , les conditions de réalisation du phénomène dépendent principalement des paramètres de la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  des photorécepteurs.

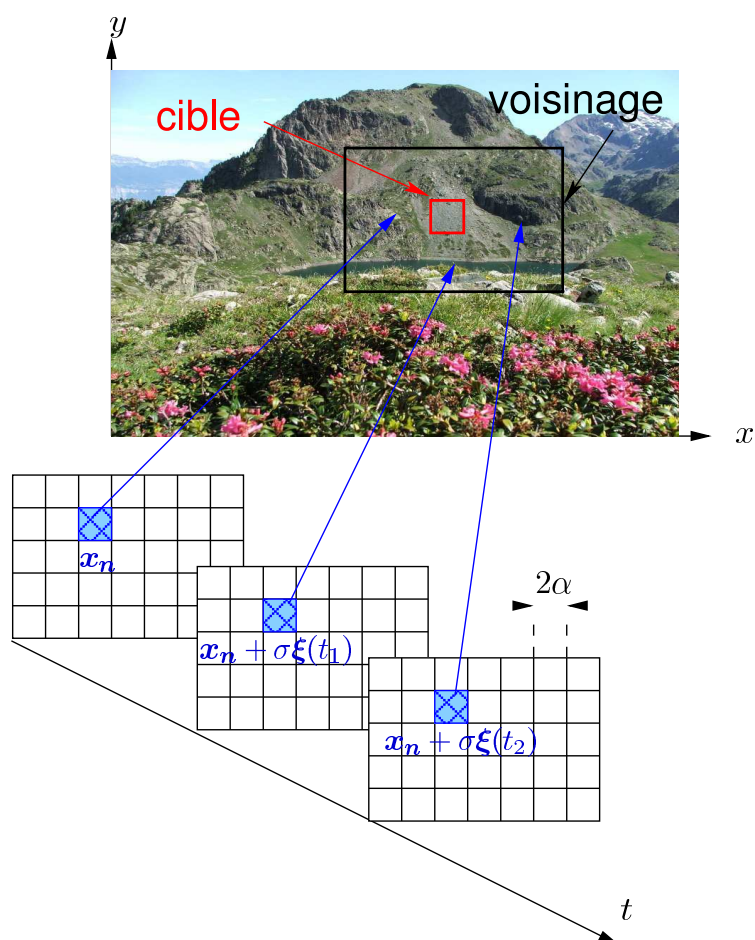


FIG. 2.20 – Illustration du phénomène d'amélioration de la cohérence d'un photorécepteur. Il y a un apport d'information supplémentaire sur la cible (cadre pointillé), lorsque à partir des micro-mouvements le photorécepteur puise de l'information dans le voisinage (cadre trait plein) de celle-ci. La cohérence entre le photorécepteur d'intérêt et la cible symbolisée par le cadre rouge peut être améliorée par les micro-mouvements. Le contrôle stochastique est optimal pour une certaine puissance de fluctuations  $\sigma_0^m$ .

### 2.2.4 Pour d'autres types de fluctuations

L'effet de contrôle optimal stochastique de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_a$  présenté sur une grille régulière  $\mathcal{G}_r$ , est-il seulement vérifié pour des fluctuations uniformes ? Le cas général présenté en 2.2.1 ne permet de répondre à cette question, nous allons présenter quelques résultats théoriques obtenus lorsque les fluctuations  $\xi(t)$  sont supposées laplaciennes et lorsqu'elles sont de nature gaussienne. Par rapport aux deux sections précédentes, ces densités ne sont plus à support borné. Même à variance finie, les réalisations du bruit peuvent prendre des valeurs très importantes. L'évaluation de  $\mathcal{C}_a$  est faite dans le même contexte que précédemment. En considérant que la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  est toujours définie par (2.40), alors la valeur du dénominateur  $\mathcal{D}_a$  est identique au cas uniforme. Les détails des calculs sont reportés en annexe C et les cohérences seront exprimées par des variables normalisées définies par les expressions suivantes :

$$\sigma_0 = \beta\sigma/\sqrt{2} \quad \text{et} \quad u_0 = \beta u \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \alpha\beta \quad (2.47)$$

#### 2.2.4.1 Pour des fluctuations laplaciennes

Pour des micro-mouvements centrés, de variance unité, et de densité de probabilité laplacienne définie par  $f_\xi(u) = \frac{e^{-\sqrt{2}|u|}}{\sqrt{2}}$ , la cohérence sur  $\mathcal{H}_e$  sans filtrage spatial s'écrit :

$$\mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0) = \frac{\sigma_0 e^{-|u_0|/\sigma_0} - e^{-|u_0|}}{\sigma_0^2 - 1} \quad (2.48)$$

La cohérence en fonction de  $u_0$  et de  $\sigma_0$  est tracée sur la figure 2.21. Quelques coupes sont représentées sur la figure 2.22, et comme précédemment pour le cas uniforme, la cohérence  $\mathcal{C}_e$  présente un maximum en  $\sigma_0^m(u_0)$  pour une valeur non nulle de  $u_0$ .

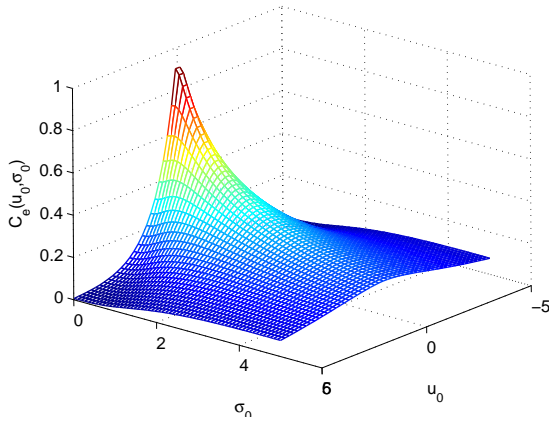


FIG. 2.21 – Cohérence  $\mathcal{C}_e$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $u_0$  dans le cas laplacien.

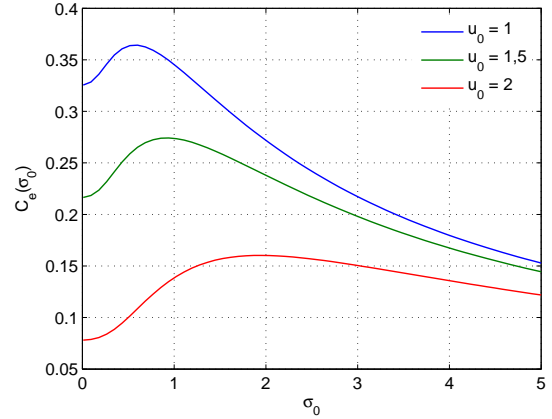


FIG. 2.22 – Cohérence  $\mathcal{C}_e$  en fonction de  $\sigma_0$  dans le cas laplacien pour trois valeurs de  $u_0$ .

L'expression de la cohérence sur  $\mathcal{H}_a$  dans le cas filtré par une porte est un peu plus compliquée, elle est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{\sigma_0^2 \sinh(\alpha_0/\sigma_0) e^{-|u_0|/\sigma_0} - \sinh(\alpha_0) e^{-|u_0|}}{\alpha_0(\sigma_0^2 - 1)\mathcal{D}_a} \quad \text{pour} \quad |u_0| \geq \alpha_0 \\ \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{\sigma_0^2 - \sigma_0^2 e^{-\alpha_0/\sigma_0} \cosh(u_0/\sigma_0) - 1 + e^{-\alpha_0} \cosh(u_0)}{\alpha_0(\sigma_0^2 - 1)\mathcal{D}_a} \quad \text{pour} \quad |u_0| < \alpha_0 \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Les figures 2.23 et 2.24 représentent respectivement les cohérences  $\mathcal{C}_a$  donnée par (2.49) lorsque la taille de la porte  $\alpha_0$  est fixe et lorsque la distance  $u_0$  est donnée.

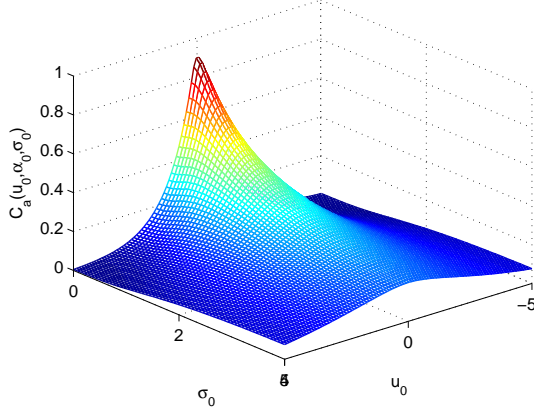


FIG. 2.23 – Cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $u_0$  dans le cas laplacien et filtré par la porte de largeur  $\alpha_0 = 0.5$ .

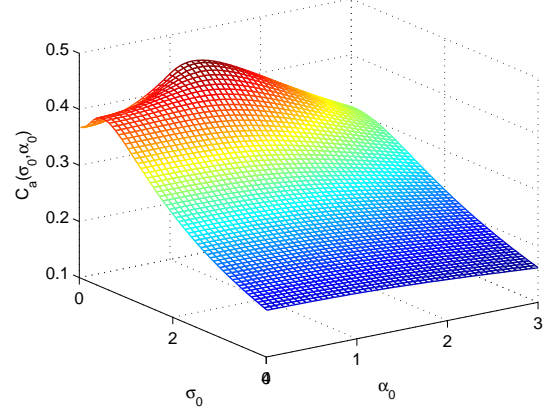


FIG. 2.24 – Cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $\alpha_0$  dans le cas laplacien pour une distance d'inter-corrélation  $u_0$ .

#### 2.2.4.2 Pour des fluctuations gaussiennes

La densité gaussienne de variance unitaire est définie par  $f_\xi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$ . Le calcul de la cohérence non filtrée  $\mathcal{C}_e$  après normalisation a alors pour expression :

$$\mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0^2}}{2} \left[ e^{-u_0} \operatorname{erfc} \left( \sigma_0 - \frac{u_0}{2\sigma_0} \right) + e^{u_0} \operatorname{erfc} \left( \sigma_0 + \frac{u_0}{2\sigma_0} \right) \right] \quad (2.50)$$

où  $\operatorname{erfc}$  est la fonction d'erreur complémentaire définie par :

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

En convoluant la cohérence (2.50) par la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  l'écriture analytique de  $\mathcal{C}_a$  est donnée par :

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0^2}}{4\alpha_0 D_a} (I_1 + I_{-1}) + \frac{1}{2\alpha_0} \left[ \operatorname{erfc} \left( -\frac{\alpha_0 + u_0}{2\sigma_0} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha_0 - u_0}{2\sigma_0 D_a} \right) \right] \quad (2.51)$$

où

$$I_\epsilon = \epsilon \left[ e^{\epsilon(\alpha_0 - u_0)} \operatorname{erfc} \left( \sigma_0 + \epsilon \frac{\alpha_0 - u_0}{2\sigma_0} \right) - e^{-\epsilon(\alpha_0 + u_0)} \operatorname{erfc} \left( \sigma_0 - \epsilon \frac{\alpha_0 + u_0}{2\sigma_0} \right) \right] \text{ où } \epsilon = \pm 1$$

Les quatre figures 2.25, 2.26, 2.27 et 2.28 illustrent le comportement des cohérences  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_a$  pour des fluctuations gaussiennes.

Les études des fonctions de cohérences  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_a$  pour des fluctuations autre que de type uniforme sont plus délicates. Nous n'avons pas d'expression analytique permettant de montrer l'existence de maxima de ces fonctions de cohérence. Cependant, d'après les tracés numériques de  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_a$ , on peut avancer que l'effet de contrôle optimal stochastique est bien présent dans le cas laplacien et gaussien. Bien sûr, on ne peut pas à partir de ces quelques exemples, affirmer que quelque soit le type de fluctuation la cohérence se trouve toujours maximisée. Néanmoins, les valeurs de puissances  $\sigma_0^2$  pour lesquelles l'effet d'amélioration de la cohérence est maximale sont identiques pour des fluctuations gaussiennes et laplaciennes. Que ce soit

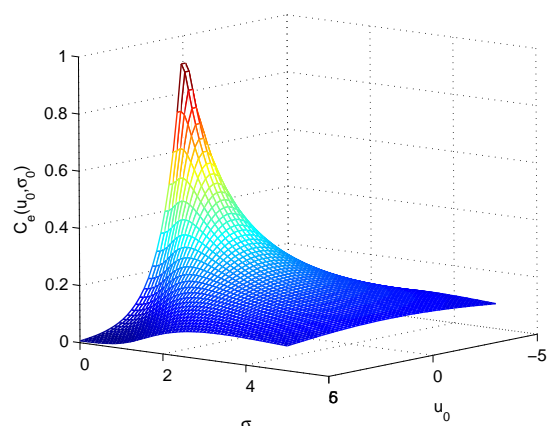


FIG. 2.25 – Cohérence  $C_e$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $u_0$  dans le cas gaussien.

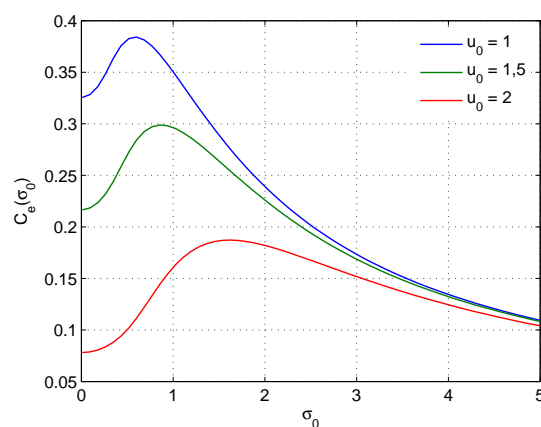


FIG. 2.26 – Cohérence  $C_e$  en fonction de  $\sigma_0$  dans le cas gaussien pour trois valeurs de  $u_0$ .

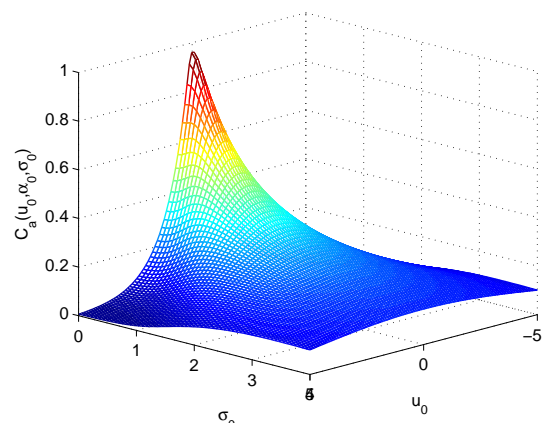


FIG. 2.27 – Cohérence  $C_a$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $u_0$  dans le cas gaussien et filtré par la porte de largeur  $\alpha_0 = 0.5$ .

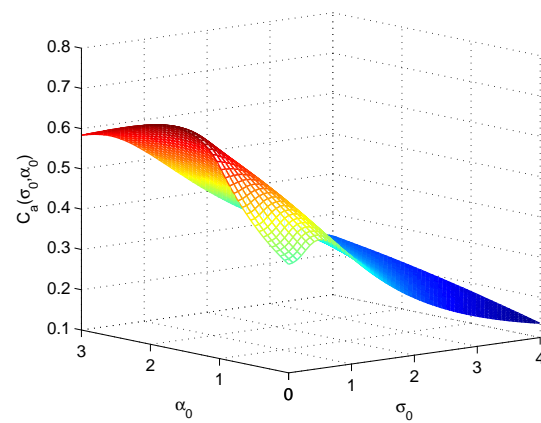


FIG. 2.28 – Cohérence  $C_a$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $\alpha_0$  dans le cas gaussien pour une distance d'inter-corrélation  $u_0$ .

pour des fluctuations uniformes, laplaciennes (gauche figure 2.29) ou gaussiennes (centre figure 2.29), les traces de la cohérence  $C_a$  apparaissent avec un maximum uniquement lorsque la condition  $|u_0| > \alpha_0$  est remplie.

L'effet d'amélioration par le bruit de la cohérence  $C_a$  dépend principalement du type de fenêtrage exercé sur les échantillons de l'image. Il semble que dans le cas d'un simple moyennage, le caractère "résonant" d'un photorécepteur se vérifie par la condition  $|u_0| > \alpha_0$ .

Le panneau de droite de la figure 2.29 présente les différences relatives entre les valeurs de la cohérence filtrée par une porte pour des fluctuations laplaciennes et des fluctuations gaussiennes pour quatre distances d'inter-corrélation  $u_0$ . Ces différences existent, mais sont relativement faibles. En effet, l'écart le plus important est relevé pour  $u_0 = 0.1$  et vaut au maximum 0.08. Les régions pour lesquelles les courbes sont positives montrent que la cohérence est (sous ces conditions) plus importante pour des fluctuations laplaciennes que des fluctuations gaussiennes. Les courbes tracées pour les distances  $u_0 = 0.5$  et  $u_0 = 1$  possèdent toutes deux un minimum à valeur négative. Pour ces deux valeurs de distances l'effet d'amélioration est vérifié pour les deux types de fluctuations. Dans ce cas les fluctuations gaussiennes permettent à la cohérence d'at-



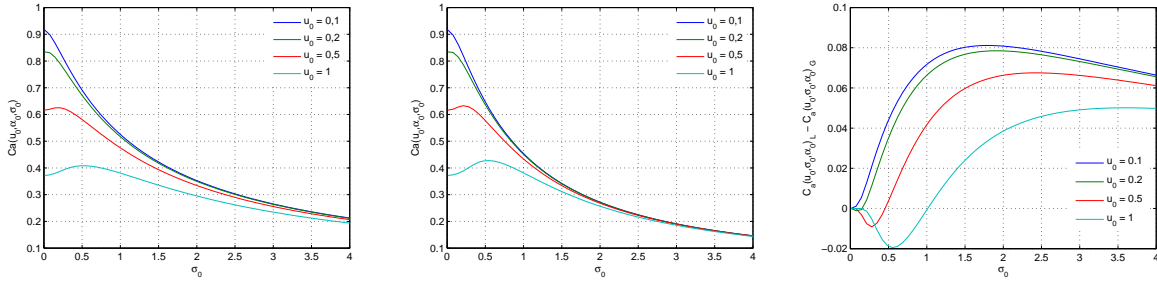


FIG. 2.29 – Cohérence filtré par une porte  $C_a$  en fonction de  $\sigma_0$  dans le cas laplacien (gauche) et le cas gaussien (centre). A droite, différence des cohérences  $C_a$  pour des fluctuations laplaciennes et gaussiennes en fonction de  $\sigma_0$ . La largeur de la porte est  $\alpha_0 = 0.2$ . La distance d'inter-corrélation normalisée  $u_0$  vaut respectivement  $u_0 = \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}$ .

teindre un maximum à valeur supérieure à celui obtenu pour des fluctuations laplaciennes. Sur ces courbes on devine également le comportement à forte puissance de la cohérence. Plus la puissance des fluctuations est importante, et plus les écarts entre les cohérences obtenues sous des fluctuations laplaciennes et gaussiennes sont faibles. Néanmoins, vu le peu de différences que présentent les courbes de cohérences pour des fluctuations gaussiennes et laplaciennes, nous en concluons que l'effet de contrôle optimal stochastique est assez robuste à la forme des densités de probabilité des fluctuations.

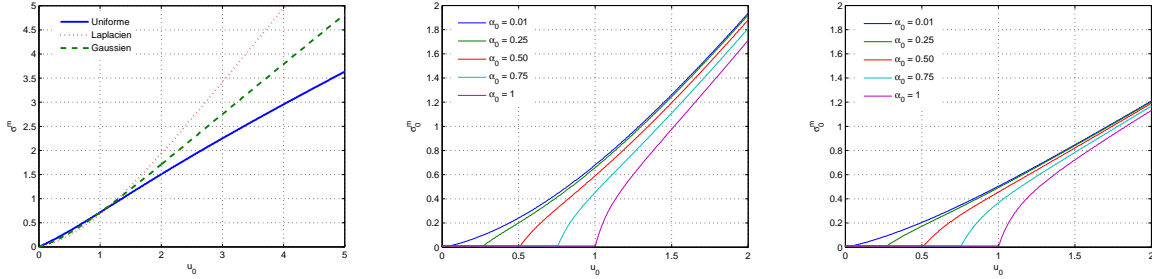


FIG. 2.30 – Gauche - Comparaison de la valeur de la puissance optimale  $\sigma^m$  (non normalisée) en fonction de  $u_0$  pour des fluctuations de densité uniforme, laplacienne et gaussienne dans un cas non filtré. Centre et Droite - Comparaison de la valeur de la puissance optimale  $\sigma_0^m$  (normalisée) en fonction de  $u_0$  pour des fluctuations de densité laplacienne (centre) et gaussienne (droite) dans le cas filtré des portes de différentes largeurs  $\alpha_0$ .

La puissance optimale  $\sigma^m$  (sans normalisation (2.36) et (2.47) et pour  $\beta = 1$  afin de comparer des quantités comparables) qui permet de maximiser la cohérence  $C_e$  pour des fluctuations uniformes, laplacienne et gaussiennes en fonction de  $u_0$  est tracée sur la gauche de la figure 2.30. Même si la “pente” est différente (voir figure 2.7), l'évolution de  $\sigma^m$  en fonction de la distance  $u_0$  du cas uniforme est quasi-linéaire. Par contre, les courbes gaussiennes et laplaciennes sont convexes. Ainsi, la courbe du cas uniforme est placée au dessus des deux autres pour  $u_0 \leq 1.2$ . Pour garantir l'effet de contrôle optimal de la cohérence à faibles distances  $u_0$ , les fluctuations de nature uniforme nécessitent plus de puissances que les fluctuations gaussiennes ou laplaciennes. Néanmoins, pour de faibles distances  $u_0$ , les trois courbes sont relativement proches. Cette tendance s'inverse pour des distances  $u_0$  supérieures à 1.5. Dans ce cas, à performances équivalentes, le modèle  $\mathcal{H}_e$  soumis à des fluctuations uniformes est moins gourmand en énergie que lorsque les fluctuations sont gaussiennes, qui est moins gourmand en énergie que pour des fluctuations laplaciennes.

Les réseaux de courbes au centre et à droite de la figure 2.30 donnent  $\sigma_0^m$  en fonction  $u_0$  pour différentes tailles  $\alpha_0$  de filtres (portes) pour des fluctuations laplaciennes et gaussiennes respectivement. Empirique-

ment, on remarque qu'il est nécessaire d'avoir  $u_0 > \alpha_0$  pour que  $\sigma_0^m$  ne soit pas nul, et que ainsi il y ait existence d'un maximum de la cohérence lorsque les fluctuations sont gaussiennes ou laplaciennes. Enfin, pour toutes les valeurs de  $\alpha_0$  testées, les valeurs de puissances optimales  $\sigma_0^m$  dans le cas gaussien sont toujours inférieures à celles obtenues pour des fluctuations laplaciennes.

La partie qui suit est consacrée à l'étude de l'influence du type de filtrage réalisé par les photorécepteurs de  $\mathcal{H}_a$  sur grille régulière. Dans la section 2.2.1, on a montré que lorsque la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  est toujours positive alors la cohérence  $\mathcal{C}_a$  possède sans fluctuation les mêmes propriétés que  $\mathcal{C}_e$ . L'étude pour une réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  négative n'apporte pas plus d'information car il suffit de prendre la même définition de la cohérence au signe près pour établir une symétrie dans les expressions. C'est donc l'influence de réponses impulsionnelles à la fois positive et négative (excitatrice et inhibitrice) sur différentes régions de la tesselle qui va être analysée.

### 2.2.5 Pour d'autres réponses impulsionnelles

On veut tester dans cette partie quelle est l'influence de la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  sur la valeur absolue de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  d'un photorécepteur d'une grille régulière. Les fonctions que nous utilisons sont celles qui sont couramment utilisées pour représenter le comportement d'un champ récepteur d'une cellule neuronale [32]. En particulier, nous traitons le cas où le centre de la cellule est excitateur, et où le contour est inhibiteur. Dans les parties précédentes, la cohérence  $\mathcal{C}_a$  était toujours positive, et nous avons donc  $|\mathcal{C}_a| = \mathcal{C}_a$ . Dans ce cas, la réponse impulsionnelle possède des régions où elle est négative, par conséquent nous donnerons toujours les résultats en valeur absolue. Pour s'affranchir du terme de contraction/dilatation provenant du coefficient  $\beta$ , la réponse impulsionnelle est directement exprimée en fonction d'un coefficient normalisé  $\alpha_0 = \beta\alpha$ . Ainsi, la définition de la réponse impulsionnelle, de paramètre  $\alpha_0$  utilisée dans cette section est la suivante :

$$a_{\alpha_0}(x) = \frac{2}{\pi^{1/4}\sqrt{3\alpha_0}} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha_0^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha_0^2}} \quad (2.52)$$

Plusieurs tracés de (2.52) sont regroupés sur la figure 2.31. On reconnaît l'allure du "chapeau mexicain"

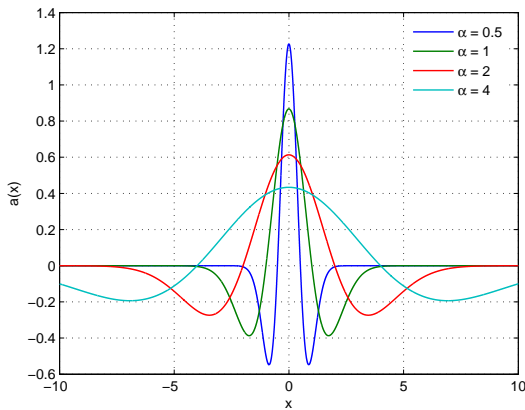


FIG. 2.31 – Réponse impulsionnelle  $a_{\alpha_0}$  pour quatre valeurs de  $\alpha_0 = \{0.5 ; 1 ; 2 ; 4\}$ .

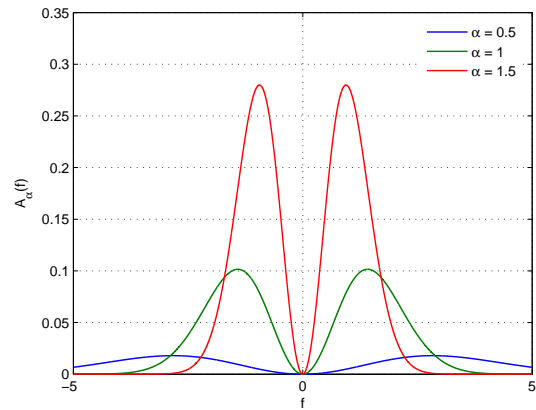


FIG. 2.32 – Module de la fonction de transfert  $A_{\alpha_0}(f)$  d'un photorécepteur pour trois valeurs de  $\alpha_0 = \{0.5 ; 1 ; 1.5\}$ .

de paramètre  $\alpha_0 > 0$  utilisée dans la théorie des ondelettes continues<sup>5</sup>. D'après cette théorie, une ondelette mère doit satisfaire la condition d'admissibilité définie par  $\int_{\mathbb{R}} a_{\alpha_0}(x)dx = 0$ . Par conséquent, quelque soit la

<sup>5</sup>C'est la dérivée seconde d'une densité de probabilité gaussienne de variance  $\alpha_0^2$ .

valeur du paramètre  $\alpha_0$ , la réponse impulsionnelle définie par (2.52) est de moyenne nulle. Le filtrage effectué par un photorécepteur, représenté sur la figure 2.32, est de nature passe bande. La valeur du coefficient  $\alpha_0$  règle la fréquence centrale ainsi que la sélectivité du filtre. Plus la valeur de  $\alpha_0$  est élevée, et plus le filtre est sélectif. La fréquence centrale est inversement proportionnelle à  $\alpha_0$  puisque pour les fréquences positives on peut montrer qu'elle est donnée par  $f_c = \sqrt{2}/\alpha_0$ . On vérifie ainsi que plus  $\alpha_0$  augmente et plus le filtre se concentre sur les basses fréquences, sans toutefois laisser passer le continu.

D'après (2.35), la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est le produit de convolution de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  par la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$ . Il y a trois paramètres ayant une importance significative sur la valeur de la cohérence  $\mathcal{C}_a$ . La distance  $u_0$  et la puissance des fluctuations  $\sigma_0$  qui modifient la cohérence  $\mathcal{C}_e$ , et le paramètre  $\alpha_0$  qui change l'étalement de la réponse impulsionnelle ou la largeur de bande. On rappelle que l'expression de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de ces trois grandeurs a pour expression :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_a(u_0, \sigma_0, \alpha_0) &= \frac{1}{\mathcal{D}_a(\alpha_0)} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}_e(u_0 - \tau, \sigma_0) a_{\alpha_0}(\tau) d\tau \\ \mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}_S(u_0 - v) f_{\sigma_0 \xi}(v) dv\end{aligned}$$

Pour des fluctuations uniformes, laplaciennes et gaussiennes, les expressions de  $\mathcal{C}_e$  ont des écritures analytiques, mais ces fonctions ne sont pas simples à intégrer. Pour les réponses impulsionnelles données par (2.52), le produit de convolution (2.53) lorsque les densités de probabilité de  $\xi(t)$  sont uniformes, laplaciennes et gaussiennes reste sous forme intégrale. Néanmoins, quelles que soient les fluctuations,  $\mathcal{C}_a$  peut toujours être calculée par une procédure d'intégration numérique.

Trois nappes de la valeur absolue de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  pour des fluctuations uniformes sont présentées sur la figure 2.33 où l'expression de  $\mathcal{C}_e$  est donnée par (2.37). Comme nous l'avons observé précédemment,

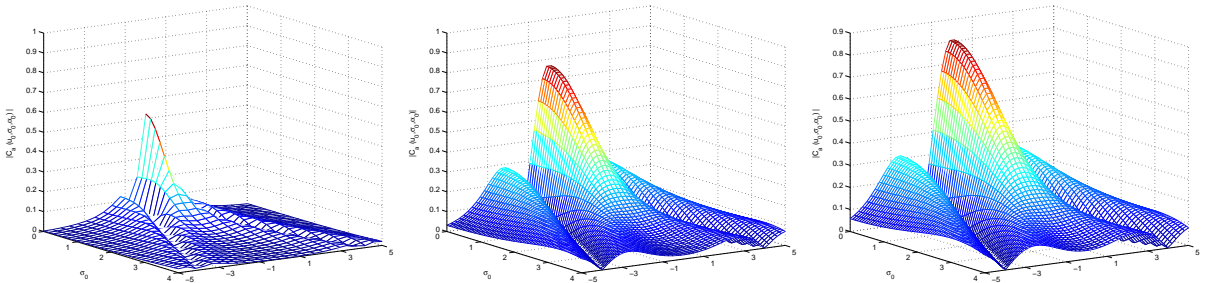


FIG. 2.33 – Valeur absolue de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $u_0$  lorsque les fluctuations sont uniformes et que la réponse impulsionnelle est un “chapeau mexicain” de coefficient  $\alpha_0 = \{0.4; 1; 1.2\}$ .

les courbes admettent un plan de symétrie passant en  $u_0 = 0$  et perpendiculaire à l'axe  $u_0$ . En effet, la convolution conserve les symétries, et la fonction  $\mathcal{C}_S$  est une fonction symétrique. Si la densité de probabilité  $f_\xi$ , et la réponse impulsionnelle  $a_{\alpha_0}$  le sont également, la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est obligatoirement symétrique par rapport à  $u_0 = 0$ . Par rapport aux différents cas que nous avons observés avec une porte, lorsque la réponse impulsionnelle présentent des zones excitatrices et des zones inhibitrices, il y a des “lobes secondaires” dans les tracés des nappes de la valeur absolue de la cohérence. Ces lobes secondaires correspondent aux valeurs de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  qui sont négatives. Avec une réponse impulsionnelle donnée par (2.52), le maximum de chaque lobe secondaire est unique et est obtenu pour  $\sigma = 0$ .

Par définition, la cohérence est en valeur absolue toujours inférieure ou égale à un. La valeur à l'origine  $\mathcal{C}_a(0, 0, \alpha_0)$  est la valeur maximale que peut atteindre la cohérence  $\mathcal{C}_a$ . Plus la valeur de  $\alpha_0$  est élevée et

plus cette valeur tend vers un. On peut le vérifier en écrivant :

$$\mathcal{C}_a(0, 0, \alpha_0) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}_S(\tau) a_{\alpha_0}(\tau) d\tau}{\left[ \sigma_S \int_{\mathbb{R}} \mathcal{C}_S(\tau) \gamma_{a_{\alpha_0}}(\tau) d\tau \right]^{1/2}} = \frac{\int_{\mathbb{R}} \Gamma_S(f) A_{\alpha_0}(f) df}{\left[ \sigma_S \int_{\mathbb{R}} \Gamma_S(f) |A_{\alpha_0}(f)|^2 df \right]^{1/2}} \quad (2.53)$$

où la deuxième égalité est obtenue dans le domaine fréquentiel par le théorème de conservation d'énergie de Plancherel. En définissant un produit scalaire, de noyau  $\Gamma_S$ , tel que le produit de la fonction  $A_{\alpha_0}(f)$  par la fonction unité soit égale à :

$$\langle A_{\alpha_0} | 1 \rangle_{\Gamma_S} = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_S(f) A_{\alpha_0}(f) df$$

alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer que :

$$|\mathcal{C}_a(0, 0, \alpha_0)| = \frac{|\langle A_{\alpha_0} | 1 \rangle_{\Gamma_S}|}{\|1\|_{\Gamma_S} \|A_{\alpha_0}\|_{\Gamma_S}} \leq 1 \quad (2.54)$$

car la norme de la fonction unité fondée sur le produit scalaire de noyau  $\Gamma_S$  est  $\|1\|_{\Gamma_S} = \sigma_S$ . L'égalité est atteinte uniquement lorsque les fonctions  $A$  et  $1$  sont proportionnelles. Ceci explique pourquoi la cohérence  $\mathcal{C}_a(0, 0, \alpha_0)$  à l'origine augmente lorsque  $\alpha_0$  augmente, car plus  $\alpha_0$  est grand et plus la fonction  $A_{\alpha_0}$  tend vers une constante.

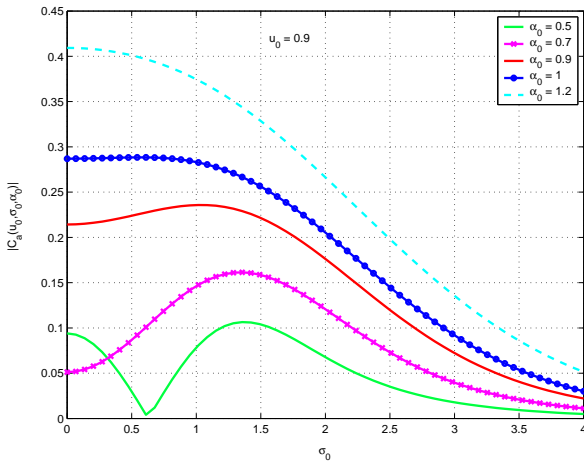


FIG. 2.34 – Valeur absolue de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  à  $u_0 = 0.9$  lorsque les fluctuations sont uniformes et pour plusieurs réponses impulsionnelles de type “chapeau mexicain” de coefficient  $\alpha_0$ .

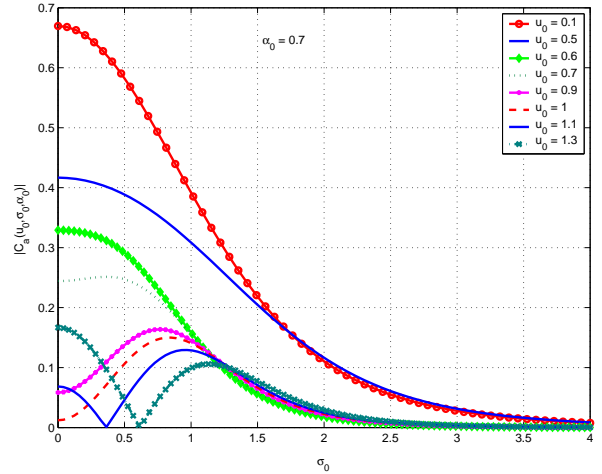


FIG. 2.35 – Valeur absolue de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  en fonction de  $\sigma_0$  pour différentes valeurs de  $u_0$  lorsque les fluctuations sont uniformes et pour une réponse impulsionnelle de type “chapeau mexicain” de coefficient  $\alpha_0 = 0.7$ .

La figure 2.34 montre comment varie la cohérence  $\mathcal{C}_a$  en valeur absolue à une distance d'inter-corrélation  $u_0$  fixée pour différents paramètres  $\alpha_0$ . La figure 2.35 présente différentes coupes de  $\mathcal{C}_a$  à  $\alpha_0$  fixée. Sur les deux figures, on constate que certaines courbes sont monotones décroissantes. C'est le cas où il n'y a pas d'amélioration de la cohérence par les micro-mouvements. Les autres courbes possèdent un ou deux maxima, et le bruit peut avoir un rôle bénéfique sur la cohérence d'un photorécepteur. Si une courbe ne présente qu'un seul maximum alors on peut considérer que la cohérence est améliorée. En revanche, nous devons réaliser une distinction sur les phénomènes observés dans le cas où il y a deux maxima. Cette distinction porte sur la position du maximum global. Dans le cas où le maximum global est positionné en  $\sigma_0 = \sigma_0^m$ , alors le phénomène d'amélioration de la cohérence par les micro-mouvements est identique aux cas précédents.

Dans le cas où le maximum global est placé en  $\sigma_0 = 0$ , alors l'amélioration devient un phénomène local. La cohérence est améliorée pour un certain niveau de bruit, mais pourrait être maximale sans aucun bruit. La condition  $|u_0| > \alpha_0$  vérifiée théoriquement dans la partie 2.2.3 pour une porte et des fluctuations uniformes<sup>6</sup> est toujours nécessaire mais n'est plus suffisante pour garantir que l'amélioration de la cohérence par le bruit soit un phénomène global.

L'effet de fluctuations autres que celles de nature uniforme est représentée sur la figure 2.36. Pour toutes ces courbes, la réponse impulsionnelle  $a_{\alpha_0}(\cdot)$  est identique, et le coefficient du filtre vaut  $\alpha_0 = 0.7$ . La cohérence est tracée pour trois distances  $u_0$  différentes lorsque les fluctuations sont uniformes, gaussiennes et laplaciennes. Afin de pouvoir faire des comparaisons entre les courbes, celles-ci sont tracées en fonction de  $\sigma$  sans les normalisations (2.36) et (2.47), et pour  $\beta = 1$ .

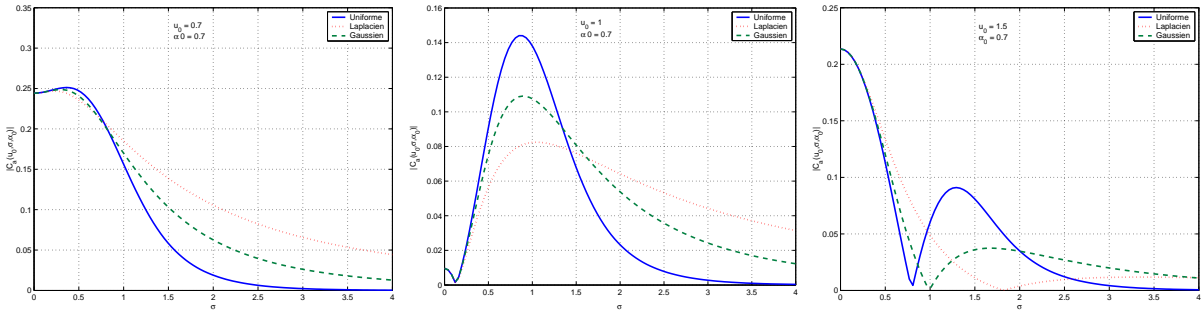


FIG. 2.36 – Cohérence  $C_a$  en fonction de  $\sigma$  pour des fluctuations uniformes, laplaciennes et gaussiennes, et pour une réponse impulsionnelle “chapeau mexicain” de coefficient  $\alpha_0 = 1$ , et pour trois valeurs de  $u_0 = \{0.7, 1, 1.5\}$ . Le coefficient  $\beta$  est égal à 1.

Sur la figure de gauche, pour  $u_0 = 0.7$ , on voit que quelque soient les fluctuations les courbes possèdent toutes un seul maximum, et que la position de ce maximum est différente dans chaque cas. Le pic de cohérence le plus marqué est celui correspondant au cas uniforme. C’est aussi celui qui demande le plus de puissance pour apparaître par comparaison avec des fluctuations gaussiennes et laplaciennes. Plus la puissance  $\sigma^2$  augmente et plus les différences entre les courbes sont accentuées. On observe sur le panneau central que le maximum global est obtenu pour une puissance de fluctuations non nulle. On observe également une accentuation des différences entre les courbes pour de faibles valeurs de puissance  $\sigma^2$  lorsque la distance d’inter-corrélation  $u_0$  augmente. La courbe obtenue pour des fluctuations laplaciennes est plus tassée que celles tracées pour des fluctuations uniformes ou gaussiennes. On vérifie également que les valeurs de la puissance optimale dans chaque cas sont différentes. Enfin, sur la figure de droite, pour chaque courbe, le maximum global de la cohérence est obtenu pour  $\sigma = 0$ . Pour des fluctuations laplaciennes, le maximum local est assez difficile à localiser alors que les maxima locaux pour les fluctuations gaussiennes et uniformes sont bien visibles. Dans tous les cas, nous avons observé empiriquement que la condition  $|u_0| \geq \alpha_0$  est nécessaire pour qu’apparaisse un maximum local.

La figure 2.37 donne la puissance optimale non normalisée  $\sigma^m$  en fonction de  $u_0$  pour différentes réponses impulsionnelles “chapeau mexicain” de coefficient  $\alpha_0$ . Les trois réseaux de courbes sont obtenus pour des coefficients  $\alpha_0$  identiques, et les fluctuations sont successivement de densité uniforme, laplacienne et gaussienne. Premièrement, on remarque que les ordres de grandeurs des courbes pour  $\alpha_0$  proche de zéro sont similaires aux ordres de grandeurs des courbes obtenues lorsque le filtre des photorécepteurs est une porte. Les fluctuations uniformes permettent un contrôle optimale de la cohérence  $C_a$  avec une puissance plus faible que pour des fluctuations laplaciennes ou gaussiennes. Les fluctuations laplaciennes sont encore plus gourmandes en énergie que les fluctuations gaussiennes. Comme pour un filtrage par une

<sup>6</sup>On rappelle que cette condition a également été vérifié empiriquement dans la partie 2.2.4 pour d’autres types de fluctuations.

porte, la condition distance/taille de filtre est visible sur les différentes courbes. En effet, on constate que la puissance optimale  $\sigma^m$  est non nulle uniquement lorsque  $|u_0| > 1.2\alpha_0$ . De même que pour le filtrage par une porte, la caractéristique  $(\sigma^m; u_0)$  peut être assimilée à une droite dès que la distance  $u_0$  est suffisamment élevée. Une approximation linéaire peut également être réalisée pour les valeurs de  $u_0$  faibles et donc proches de la condition de réalisation de contrôle optimale.

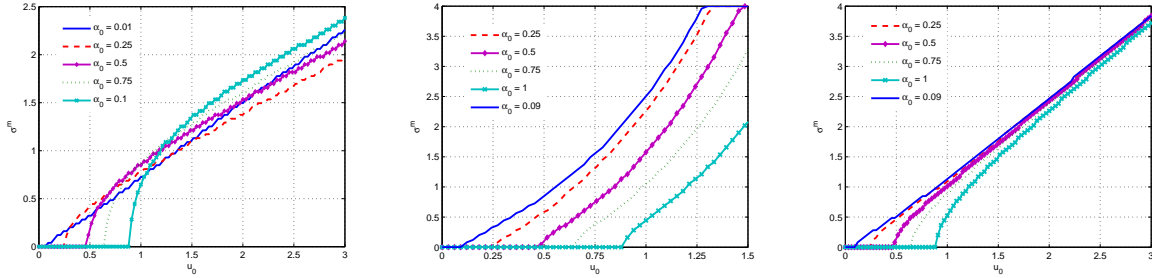


FIG. 2.37 – Comparaison de la valeur de la puissance optimale  $\sigma_0^m$  en fonction de  $u_0$  pour des fluctuations de densités uniformes (gauche), laplacienne (centre) et gaussienne (droite) lorsque la réponse impulsionnelle des photorécepteurs est un “chapeau mexicain” de coefficient  $\alpha_0$ .

Dans cette partie, on a montré que la cohérence calculée pour un photorécepteur appartenant à une grille régulière  $\mathcal{G}_r$  est fonction des fluctuations aléatoires qui déplacent la grille. Selon la puissance de ces fluctuations, la cohérence peut être augmentée ou dégradée pour une distance d’inter-corrélation fixée. L’effet d’amélioration de la cohérence a été étudié pour trois types différents de fluctuations lorsque les photorécepteurs sont idéaux ( $\mathcal{H}_e$ ) et lorsque les photorécepteurs filtrent les observations ( $\mathcal{H}_a$ ). Dans les trois cas, à une distance donnée  $u_0$  correspond parfois une puissance de fluctuations idéale  $\sigma^m(u_0)$  qui assure l’amélioration des performances. La suite est consacrée à l’étude de la cohérence d’un photorécepteur d’une grille irrégulière  $\mathcal{G}_i$ . On rappelle que le modèle de grille irrégulière est présenté en 2.1.1. Comme pour cette partie, les systèmes d’échantillonnage  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  seront testés pour des fluctuations de natures différentes. La grande différence de l’étude qui caractérise la suite est la présence d’un nouvel aléas : le bruit de grille qui détermine la structure de  $\mathcal{G}_i$ .

## 2.3 Grille aléatoire : plus proche d'un modèle biologique

L’objectif de cette partie est d’établir le lien entre l’irrégularité d’une grille portée par une grandeur aléatoire, le bruit de grille, et les micro-mouvements, eux aussi de nature aléatoire. Pour atteindre cet objectif, plusieurs comparaisons entre grille régulière et grille irrégulière vont être commentées à partir de la mesure présentée en 2.1.2 : la cohérence. Tout d’abord, rappelons que le modèle à grille irrégulière est plus proche du modèle d’une rétine naturelle que le modèle à grille régulière. En effet, comme le présente la partie 1.1, les photorécepteurs de la rétine sont répartis non régulièrement. Dans un cadre général, et par conséquent sur une grille aléatoire  $\mathcal{G}_i$ , les fonctions de cohérences bi-dimensionnelle sont données par (2.14) pour le système d’échantillonnage  $\mathcal{H}_e$ , et par (2.17) pour le système  $\mathcal{H}_a$ . Ces expressions sont des fonctions de la position  $\mathbf{x}$  et de  $n$  l’indice du photorécepteur. Comme pour la grille régulière, en s’intéressant au point  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n^r + \mathbf{u}$  de l’image  $S$ , les expressions de cohérence deviennent des fonctions de la distance  $\mathbf{u}$  et de la puissance des fluctuations  $\sigma$ . Le bruit de grille  $\epsilon_n$  a une influence certaine sur les fonctions de cohérence. C’est pourquoi, la variance  $\sigma_\epsilon^2$  apparaît également comme une variable des fonctions de cohérences  $\mathcal{C}_e^i$  et  $\mathcal{C}_a^i$  dans cette partie.

**Sans filtrage spatial :  $\mathcal{H}_e$**  L'aléa apporté par le bruit de grille se manifeste par une couche de convolution supplémentaire dans l'expression de la cohérence par rapport à une grille régulière. La cohérence est obtenue par la double convolution de l'auto-corrélation normalisée  $\mathcal{C}_S$  avec les densités de probabilité de répartition des photorécepteurs  $f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}$  de variance  $\sigma_\epsilon^2$  et de celle des fluctuations  $f_{\sigma\xi}$  de variance  $\sigma^2$  :

$$\mathcal{C}_e^i(\mathbf{u}, \sigma, \sigma_\epsilon, n) = \mathcal{C}_S * f_{\sigma\xi} * f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}(\mathbf{u}) \quad (2.55)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \sigma_\epsilon \mathbf{k} - \sigma \mathbf{v}) f_\xi(\mathbf{v}) f_{\epsilon_n}(\mathbf{k}) d\mathbf{v} d\mathbf{k} \quad (2.56)$$

où les densités de probabilité des variables  $\sigma\xi$  et  $\sigma_\epsilon \epsilon_n$  sont données par :

$$f_{\sigma\xi}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sigma^2} f_\xi\left(\frac{\mathbf{v}}{\sigma}\right) \quad \text{et} \quad f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} f_{\epsilon_n}\left(\frac{\mathbf{k}}{\sigma_\epsilon}\right)$$

Sur une grille irrégulière, on peut également interpréter les deux bruits comme un processus aléatoire spatio-temporel noté  $\zeta(n, t) = \sigma_\epsilon \epsilon_n + \sigma \xi(t)$ , à valeur dans  $\mathbb{R}^2$ , dont la densité de probabilité a comme expression :

$$f_\zeta(\mathbf{r}, \sigma, \sigma_\epsilon, n) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}(\mathbf{r} - \mathbf{v}) f_{\sigma\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^2} f_{\sigma\xi}(\mathbf{r} - \mathbf{v}) f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.57)$$

Il existe donc plusieurs écritures pour exprimer la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  sur une grille irrégulière. En reprenant les résultats de la grille régulière, on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_e^i(\mathbf{u}, \sigma, \sigma_\epsilon, n) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_e^r(\mathbf{u} - \sigma_\epsilon \mathbf{v}, \sigma) f_{\epsilon_n}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \\ \mathcal{C}_e^r(\mathbf{u}, \sigma) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_s(\mathbf{u} - \sigma \mathbf{v}) f_\xi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \end{cases} \quad (2.58)$$

et selon l'autre vision, en combinant les micro-mouvements temporels aux fluctuations de grille dans un seul bruit spatio-temporel  $\zeta$  défini par (2.57), la cohérence devient :

$$\mathcal{C}_e^i(\mathbf{u}, \sigma, \sigma_\epsilon, n) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \mathbf{w}) f_\zeta(\mathbf{w}, \sigma, \sigma_\epsilon, n) d\mathbf{w} \quad (2.59)$$

On peut rapprocher la première écriture (2.58) avec l'expression de la cohérence  $\mathcal{C}_a^r$  sur une grille régulière  $\mathcal{G}_r$  donnée par (2.25). A condition que la densité de probabilité  $f_{\epsilon_n}$  soit égale à la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$ , alors à un facteur de normalisation près, les expressions  $\mathcal{C}_e^i$  et  $\mathcal{C}_a^r$  sont identiques. La seconde écriture est quant à elle proche de l'expression  $\mathcal{C}_e^r$  mais où cette fois, l'expression de la densité de probabilité  $f_\zeta$  du bruit spatio-temporel vient remplacer celle des fluctuations  $f_\xi$ .

A *priori*, contrairement à une grille régulière où tous les photorécepteurs sont identiques, la cohérence sur une grille irrégulière est différente d'un photorécepteur à un autre. Pour rétablir l'homogénéité des fonctions de cohérence sur une grille irrégulière, c'est-à-dire qu'elles soient toutes identiques et indépendantes de  $n$ , il est nécessaire que les densités de probabilité  $f_{\epsilon_n}$  soient les mêmes pour toute la grille des photorécepteurs.

**Avec filtrage spatial :  $\mathcal{H}_a$**  La relation (2.25) montre que lorsque la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  des photorécepteurs d'une grille régulière  $\mathcal{G}_r$  est non idéale (différente d'une distribution de Dirac) alors la cohérence  $\mathcal{C}_a$  comporte une convolution supplémentaire dans son expression. D'après (2.15) et (2.17), on peut montrer que cette propriété reste valable lorsque la grille est irrégulière. En fonction des grandeurs d'intérêts, la fonction de cohérence  $\mathcal{C}_a^i$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_a^i(\mathbf{u}, \sigma, \sigma_\epsilon, n) &= \mathcal{C}_S * a * f_{\sigma\xi} * f_{\sigma_\epsilon \epsilon_n}(\mathbf{u}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\mathbf{u} - \boldsymbol{\tau} - \sigma_\epsilon \mathbf{r} - \sigma \mathbf{v}) a(\boldsymbol{\tau}) f_\xi(\mathbf{v}) f_{\epsilon_n}(\mathbf{r}) d\boldsymbol{\tau} d\mathbf{v} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.60)$$

qui n'est autre que trois couches de convolutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_a^i(\mathbf{u}, \sigma, \sigma_\epsilon, n) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_a^r(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \sigma) f_{\epsilon_n}(v) d\mathbf{v} \\ \mathcal{C}_a^r(\mathbf{v}, \sigma) = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_e^r(\mathbf{v} - \boldsymbol{\tau}, \sigma) a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}}{\left( \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\boldsymbol{\tau}) \gamma_a(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}} \\ \mathcal{C}_e^r(\mathbf{v}, \sigma) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_S(\mathbf{v} - \sigma \mathbf{w}) f_\xi(\mathbf{w}) d\mathbf{w} \end{array} \right. \quad (2.61)$$

On vient de rappeler la relation entre l'expression de la cohérence établie sur un modèle à grille régulière et de mettre en évidence les liens avec la cohérence d'un modèle à grille irrégulière. Sur le système  $\mathcal{H}_e$ , en effectuant le produit de convolution de la cohérence régulière  $\mathcal{C}_e^r$  par la densité de probabilité  $f_{\epsilon_n}$ , on aboutit à la fonction de cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  du  $n^{\text{ième}}$  photorécepteur de  $\mathcal{G}_i$ . La procédure est identique pour obtenir l'expression de  $\mathcal{C}_a^i$  à partir de  $\mathcal{C}_a^r$ . De plus, nous avons vu que réaliser la convolution d'une fonction de cohérence  $\mathcal{C}_e$  par une réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  tout en appliquant un coefficient de normalisation, permet d'obtenir une fonction de cohérence  $\mathcal{C}_a$ . Par conséquent, les quelques exemples traités sur une grille régulière (à une seule dimension) constituent des briques d'études pour l'analyse de la cohérence sur une grille irrégulière (à une dimension également). D'autre part, par définition une densité de probabilité  $f_\epsilon$  est toujours positive et sommée à 1. On peut donc faire les mêmes conclusions que celles obtenues sur  $\mathcal{C}_e^i$  obtenues sur  $\mathcal{C}_e^r$  dans le cas général sur une grille régulière (voir partie 2.2.1) en s'appuyant sur le regroupement en noyaux de convolution des densités  $f_\xi$  et  $f_\epsilon$ , car une fois regroupé le noyau conserve la propriété de positivité. De même, les conclusions générales établies pour  $\mathcal{C}_a^r$  ne dépendant principalement que du type de réponse impulsionnelle sont également vérifiées pour  $\mathcal{C}_a^i$ .

Néanmoins, la couche de convolution supplémentaire dans les expressions des cohérences  $\mathcal{C}_e^i$  et  $\mathcal{C}_a^i$  ne simplifie par leur étude. Les analyses qui suivent sont donc également réalisées sur des modèles  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  mono-dimensionnel où cette fois la grille est aléatoire. Pour alléger les notations, nous omettrons volontairement l'indice  $n$  du photorécepteur dans les expressions. De même, les calculs sont menés avec les variables normalisées déjà présentées pour s'affranchir du coefficient  $\beta$  de l'auto-corrélation de l'image. L'étude sur grille aléatoire est réalisée à partir d'un modèle de bruit de grille qui est présenté en 2.3.1. Ce modèle possède un paramètre déterminant la forme de la densité du bruit de grille. Les cohérences  $\mathcal{C}_e^i$  et  $\mathcal{C}_a^i$  sont étudiées pour plusieurs valeurs de ce paramètre de forme en 2.3.2. La puissance  $\sigma_\epsilon^2$  du bruit de grille est également un élément ayant une influence sur les fonctions de cohérences. L'influence de  $\sigma_\epsilon^2$  est analysée en 2.3.3.

### 2.3.1 Modèle du bruit de grille - définition et propriétés

Afin que l'étude qui suit ait un minimum de sens physique, nous considérons que la densité du bruit de grille est à support borné. La taille de ce support est limitée à la tesselle du photorécepteur que nous noterons  $T \in \left[-\frac{\Delta}{2}; \frac{\Delta}{2}\right]$  en une seule dimension. Cette restriction garantit que l'ensemble des photorécepteurs appartienne à une rétine de taille finie. Le modèle de bruit de grille utilisé dans cette partie est inspiré des densités de loi en Beta. Une loi en Beta est d'ordinaire paramétrée par deux coefficients, qui lorsqu'ils sont différents, assurent que la loi est asymétrique. Nous choisissons de restreindre l'étude aux densités symétriques. Ainsi, le modèle de densité de bruit de grille que nous retenons est caractérisé par un seul paramètre,  $B > 0$ , le facteur de forme, qui modifie également le support de la loi de façon à ce que la variance soit toujours égale à un, et est défini par :

$$f_\epsilon(v) = \mathcal{B}(B) \left(1 - \frac{v^2}{b^2}\right)^{B-1} \mathbb{1}_{[-b, b]}(v) \quad (2.62)$$



où  $[-b, b]$  représente la fonction indicatrice de l'intervalle  $[-b; b]$  avec  $b = \sqrt{2B + 1}$ . Le coefficient de normalisation  $\mathcal{B}(B)$  dépend du facteur de forme, son expression est donnée par :

$$\mathcal{B}(B) = \frac{\Gamma(2B)}{2^{2B-1} b \Gamma^2(B)} = \frac{\Gamma(B + \frac{1}{2})}{b\sqrt{\pi} \Gamma(B)}$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma telle que  $\Gamma(B) = \int_0^\infty e^{-t} t^{B-1} dt$ . Avec le modèle (2.62), pour  $B = 1$ , le bruit de grille est de densité uniforme. Plus le coefficient  $B$  augmente et plus la densité de probabilité s'étale puisque le support  $[-b; b]$  s'allonge. Lorsque  $B$  tend vers l'infini, la densité de probabilité  $f_\epsilon$  définie par (2.62) tend à devenir la distribution normale centrée réduite. La figure 2.38 donne trois exemples de densité  $f_\epsilon$  pour trois valeurs de coefficients  $B$ .

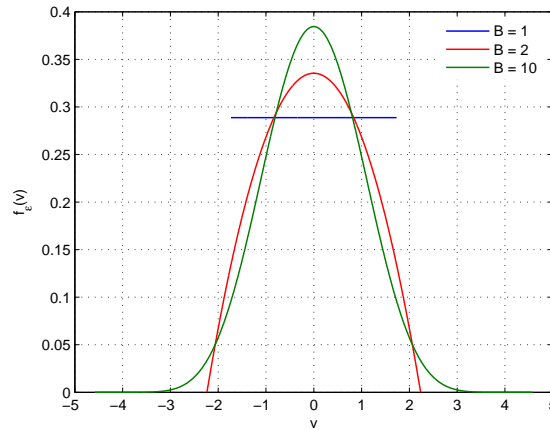


FIG. 2.38 – Trois densités de probabilité du modèle de bruit de grille  $f_\epsilon(v)$  pour  $B = \{1; 2; 10\}$ .

La densité de probabilité de  $f_\epsilon$  définie par (2.62) est toujours à variance unité. Or, dans les expressions des cohérences  $\mathcal{C}_e^i$  et  $\mathcal{C}_a^i$ , c'est la densité  $f_{\sigma_\epsilon \epsilon}$  de la variable aléatoire  $\sigma_\epsilon \epsilon$  qui intervient dans les calculs. Comme la variable aléatoire  $\epsilon$  appartient à  $[-b; b]$ , la variable aléatoire  $\sigma_\epsilon \epsilon$  est tirée sur  $[-b\sigma_\epsilon; b\sigma_\epsilon]$ . Si la tesselle d'un photorécepteur est au plus de taille  $[-\frac{\Delta}{2}; \frac{\Delta}{2}]$ , alors pour que le modèle conserve le sens physique que nous avons énoncé au début de cette partie, il faut que :

$$\sigma_\epsilon \sqrt{2B + 1} \leq \frac{\Delta}{2} \quad (2.63)$$

Le paragraphe suivant est consacré à l'étude de l'influence de  $B$ , pour une puissance de fluctuation de bruit de grille  $\sigma_\epsilon^2$  donnée. Afin de pouvoir réaliser une étude de dynamique suffisante, nous nous placerons dans un cas où  $\Delta$  est relativement grand<sup>7</sup> par rapport au couple  $(\sigma_\epsilon, B)$  pour que (2.63) soit toujours vérifiée.

Même si dans les cas  $B = 1$  et  $B \rightarrow \infty$ , il est possible de trouver une écriture analytique pour les fonctions de cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  et  $\mathcal{C}_a^i$ , les évaluations des fonctions de cohérences sur grille irrégulière sont réalisées par des procédures d'intégration numérique en reprenant les résultats des cohérences  $\mathcal{C}_e^r$  et  $\mathcal{C}_a^r$  de la partie consacrée aux grilles régulières.

### 2.3.2 Influence de la forme de la densité du bruit de grille

A partir des résultats de la partie 2.2, nous étudions ici quelle est l'influence du facteur de forme  $B$  sur les fonctions de cohérences  $\mathcal{C}_e^i$  et  $\mathcal{C}_a^i$  pour des micro-mouvements de nature uniforme, laplacienne, et gaussienne.

<sup>7</sup>Notons que  $\Delta$  n'est pas exprimé dans une unité de mesure particulière.

La figure 2.39 présente pour trois types différents de bruits de grille de puissance équivalente les nappes de cohérence  $C_e^i$  en fonction de  $\sigma_0$  et de  $u_0$ . Les bruits de grilles testés sont successivement le bruit uniforme  $B = 1$ , le bruit de paramètre de forme  $B = 2$ , et le bruit de paramètre de forme  $B = 10$  dont les densités sont présentées sur la figure 2.38. La figure est organisée comme une matrice où chaque ligne donne la cohérence  $C_e^i$  pour les trois valeurs de  $B$  données à fluctuations  $\xi(t)$  de même nature. La première ligne est obtenue pour des fluctuations uniformes, la seconde pour des fluctuations laplaciennes, et la troisième pour des fluctuations gaussiennes.

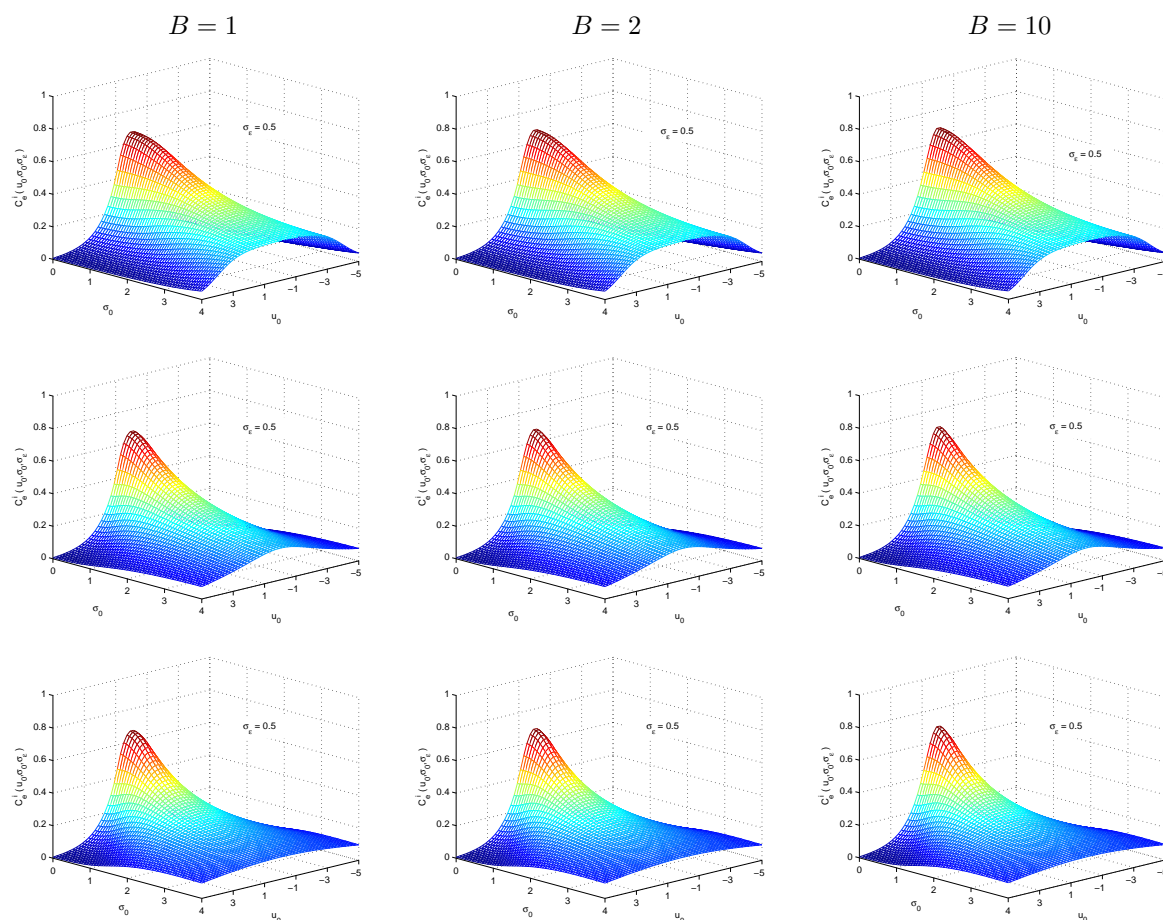


FIG. 2.39 – Influence du paramètre de forme  $B$  sur les fonctions de cohérences  $C_e^i$  pour des fluctuations uniformes (ligne haute), laplaciennes (ligne centrale) et gaussiennes (ligne basse). De gauche à droite, le paramètre  $B$  prend successivement la valeur  $B = \{1; 2; 10\}$ , la valeur  $\sigma_\epsilon$  est fixée à 0.5.

Les résultats de la colonne de gauche, obtenus pour  $f_\epsilon$  uniforme, sont similaires aux résultats obtenus pour  $C_a^r$  lorsque les photorécepteurs réalisent un filtrage par une porte. En effet, la densité de probabilité du bruit de grille  $\mathcal{G}_i$  et la réponse impulsionnelle des photorécepteurs  $a(\cdot)$  sur grille régulière ont dans ce cas précis la même forme et le même signe. Or, d'après la partie 2.2, l'effet d'amélioration de la cohérence par les micro-mouvements est toujours vérifié sur une grille régulière tant que la condition  $|u_0| \geq \alpha_0$ , et ce quelque soit le filtre  $a(\cdot)$  utilisé. Ici, la densité de probabilité du bruit de grille  $f_\epsilon$  réalise au même titre que la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  un filtrage spatial des échantillons provenant de la scène autour des photorécepteurs. Ainsi, l'irrégularité de la grille peut être une cause de non réalisation du contrôle optimal présenté précédemment selon la distance  $u_0$  vis-à-vis de  $\sigma_\epsilon$ .

Néanmoins, la forme de la densité de probabilité du bruit de grille a peu d'influence sur les fonctions de cohérence  $C_e^i$  présentées sur la figure 2.39. Les valeurs à l'origine ne sont pratiquement pas modifiées quand

$B$  augmente. Le comportement des nappes  $\mathcal{C}_e^i$  pour de grandes valeurs de  $u_0$  ou de  $\sigma_0$  ne varie pas beaucoup avec le coefficient  $B$ . On peut justifier ces observations par le fait que lorsque la puissance  $\sigma_\epsilon^2$  est proche de zéro, la densité de probabilité  $f_\epsilon$  tend vers une distribution de Dirac puisque le support de la densité est de plus en plus réduit. Sous cette condition, il est quasi certain que les réalisations de la variable aléatoire  $\epsilon$  soient nulles. Ainsi, la structure de la grille  $\mathcal{G}_i$  se rapproche de plus en plus d'une structure régulière, et les cohérences  $\mathcal{C}_e^i$  et  $\mathcal{C}_a^i$  ne sont plus fonction du paramètre de  $B$ . En effet, quand  $\sigma_\epsilon \rightarrow 0$ , on a  $f_\epsilon \rightarrow \delta$ , et :

$$\begin{cases} \lim_{\sigma_\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_e^i(u_0, \sigma_0, \sigma_\epsilon) &= \mathcal{C}_e^r(u_0, \sigma_0) \\ \lim_{\sigma_\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}_a^i(u_0, \sigma_0, \sigma_\epsilon, \alpha_0) &= \mathcal{C}_a^r(u_0, \sigma_0, \alpha_0) \end{cases}$$

La figure 2.40, présente la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  (lorsque les fluctuations sont uniformes) pour une puissance de bruit de grille augmenté d'un facteur de 10 par rapport à la figure précédente. L'influence du facteur de forme sur la fonction de cohérence est cette fois visible par rapport à la figure 2.39.

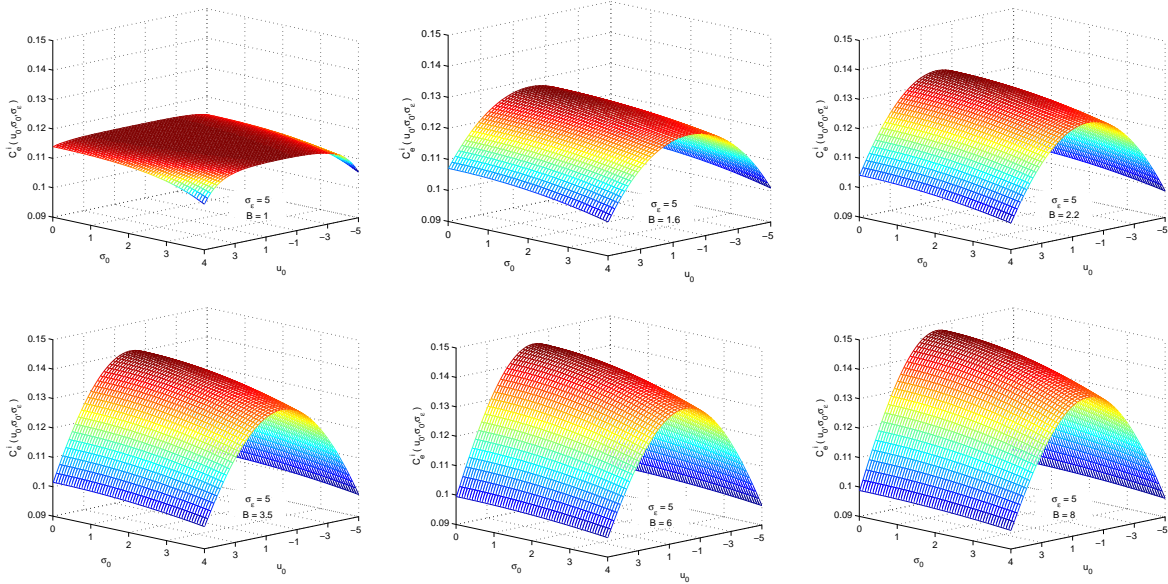


FIG. 2.40 – Influence du paramètre de forme  $B$  sur les fonctions de cohérences  $\mathcal{C}_e^i$  pour des fluctuations uniformes. De gauche à droite, et de bas en haut, le paramètre  $B$  prend successivement la valeur  $B = \{1; 1.6; 2.2; 3.5; 6; 8\}$ , la valeur  $\sigma_\epsilon$  est fixée à 5.

On observe que les nappes de cohérences deviennent de plus en plus “arrondies” au fur et à mesure que le facteur de forme augmente. Pour  $B = 1$ , la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  est pratiquement plate pour toute la plage de valeurs de  $\sigma_0$  et de  $u_0$  testée. Dans ce cas précis, les performances sont relativement faible (proche de  $\mathcal{C}_e^i \approx 0,115$ ). En contrepartie, les performances sont pratiquement identiques pour toutes les distances  $u_0$  et pour toutes les valeurs de puissance de micro-mouvements  $\sigma_0^2$ . Or, on peut transposer la notion de distance d’inter-corrélation au numéro de photorécepteur en supposant que la densité de probabilité du bruit de grille  $f_\epsilon$  soit identique pour toute la grille. On s’aperçoit de cette manière que dans ce modèle, tous les photorécepteurs fonctionnent à cohérence faible, mais surtout à cohérence identique pour chaque point de l’image  $S$ , et ce quelle que soit la puissance des fluctuations. C’est un système qui peut être rapproché d’une stratégie de détection minimax, dans le sens où il fonctionne toujours à performance équivalente quels que soient les réglages.

Soulignons que l’allure de ces nappes peut être obtenue par les résultats relatifs aux grilles régulières. En effet, comme nous l’avons montré, la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  est proportionnelle à une cohérence  $\mathcal{C}_a^r$  pour laquelle

la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  est donnée par la densité de probabilité du bruit de grille :

$$\mathcal{C}_e^i(u_0, \sigma_0, \sigma_\epsilon) = K(\sigma_\epsilon) \mathcal{C}_a^r(u_0, \sigma_0, \sigma_\epsilon)$$

Néanmoins, sous cette hypothèse, la cohérence  $\mathcal{C}_a^r$  est toujours supérieure à la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$ . En effet, le coefficient de proportionnalité  $K(\sigma_\epsilon)$  est forcément inférieur à 1 lorsque la réponse impulsionnelle est équivalente à une densité de probabilité. Ceci explique pourquoi les valeurs de cohérences  $\mathcal{C}_e^i$  sont nettement plus faibles que les valeurs de cohérences  $\mathcal{C}_a^r$  lorsque  $\sigma_\epsilon$  augmente. Évidemment, le raisonnement inverse, celui d'étudier la cohérence d'une grille irrégulière à partir d'une grille régulière est possible uniquement pour des réponses impulsionnelles  $a(\cdot)$  strictement positive.

D'autre part, d'après (2.59), nous avons montré que l'on pouvait considérer les fluctuations aléatoires des micro-mouvements et l'irrégularité de la grille comme un seul et même bruit spatio-temporel que nous avons noté  $\zeta$ . De cette manière nous pouvons apporter une explication supplémentaire aux différentes observations faites sur grille irrégulière. Même si les densités de probabilité de  $\xi$  et  $\epsilon$  sont différentes, puisque  $\xi$  et  $\epsilon$  sont indépendants la puissance du bruit spatio-temporel  $\zeta$  est la somme des puissances du bruit temporel et du bruit spatial  $\sigma_\zeta^2 = \sigma^2 + \sigma_\epsilon^2$ . Si la grille est régulière, alors  $\sigma_\epsilon^2 = 0$ , et les tracés des courbes de cohérences en fonction de  $\sigma$  ou de  $\sigma_\zeta$  sont identiques. Par contre pour  $\sigma_\epsilon \neq 0$ , les tracés de la cohérence d'un photorécepteur d'une grille irrégulière sont équivalents<sup>8</sup> aux queues des courbes de cohérence tracées sur grille régulière comme le montre la figure 2.41. Si la valeur de  $\sigma_\epsilon$  est trop importante, alors le décalage est tel que la courbe de cohérence en fonction de la puissance  $\sigma_\zeta$  soit uniquement décroissante. Cette interprétation justifie d'une part les faibles valeurs de cohérences lorsque  $\sigma_\epsilon$  est important, et d'autre part que la cohérence ne peut être améliorée dans ce cas (parce que la puissance du bruit global est trop grande).

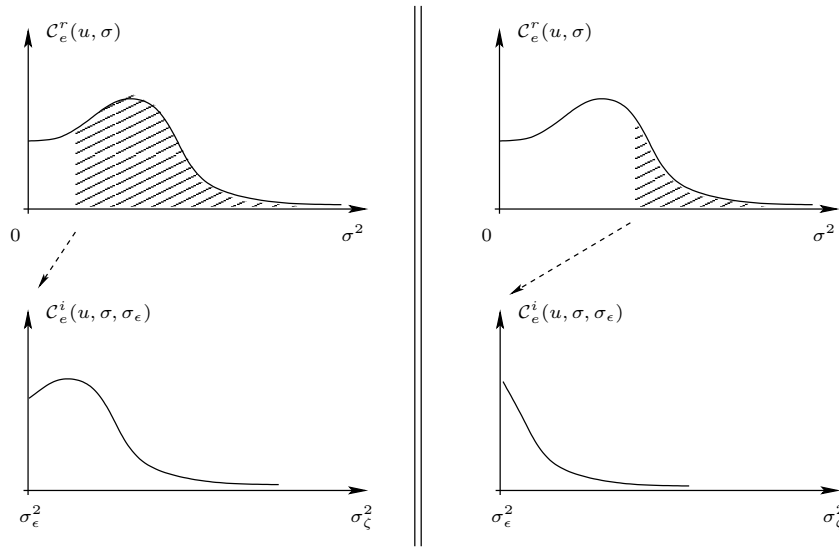


FIG. 2.41 – Illustration de l'effet du bruit spatio-temporel  $\zeta$  de variance  $\sigma_\zeta^2$  sur la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  d'une grille irrégulière. Lorsque le bruit de grille est de puissance non nulle, alors le tracé de la cohérence en fonction de l'écart-type  $\sigma_\zeta$  du bruit global est décalé de  $\sigma_\epsilon$ . A gauche la valeur de  $\sigma_\epsilon$  est suffisamment faible pour que l'effet d'amélioration de la cohérence puisse se réaliser. Ce n'est pas le cas sur l'illustration en bas à droite.

<sup>8</sup>Cette remarque est vérifiée seulement si les densités de probabilité des fluctuations et du bruit de grille sont de même nature (par exemple toutes les deux gaussiennes). Si ce n'est pas le cas, alors les queues des courbes sont unifiées, mais l'interprétation reste identique.

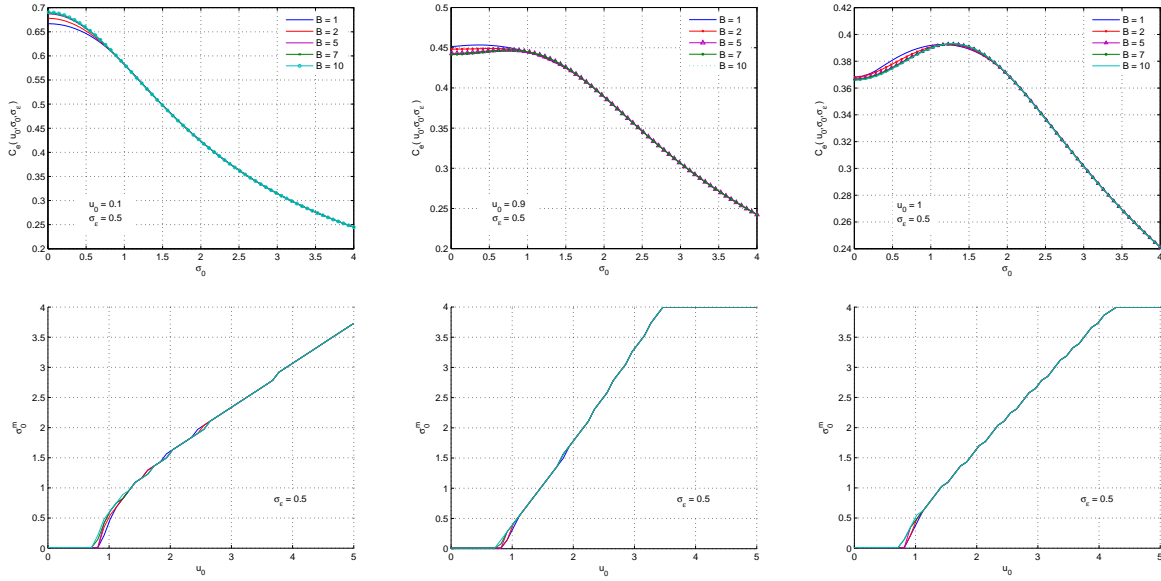


FIG. 2.42 – Ligne 1 - Cohérence  $C_e^i$  en fonction de  $\sigma_0$  pour différents bruit de grille de facteur de forme  $B$  pour trois valeurs différentes de  $u_0 = \{0.1; 0.9; 1\}$  (gauche à droite) pour des fluctuations uniformes. Ligne 2 - Evolution de la puissance optimale de fluctuation  $\sigma_0^m$  en fonction de  $u_0$  pour différentes valeurs du facteur de forme  $B$  lorsque les fluctuations sont uniformes (gauche), laplacienne (centre), et gaussienne (droite).

Les coupes de cohérences à  $u_0$  fixée, diminuent avec  $\sigma_0$ . Ce comportement s'accroît avec la valeur du facteur de forme. Il n'y a donc pas de contrôle optimal stochastique de la cohérence par les micro-mouvements sur  $\mathcal{G}_i$  possible lorsque la puissance du bruit de grille est élevé. En revanche, la première ligne de la figure 2.42 présente des coupes de la fonction de cohérence pour différents bruits de grille de faible puissance lorsque les micro-mouvements sont uniformes. Les courbes de la figure de gauche montrent qu'il n'y a pas d'amélioration de  $C_e^i$  possible pour  $u_0$  faible et pour un facteur de forme  $B$  variant de 1 à 10. La figure de droite, pour  $u_0 = 1$ , montre des courbes possédant chacune un maximum atteint pour la même valeurs de  $\sigma_0$ . Toutes les courbes de la figure du milieu possèdent également un maximum, ce maximum apparaît par contre pour une puissance de micro-mouvements différentes selon le facteur de forme de la densité.

La deuxième ligne de la figure 2.42 donne la puissance optimale  $\sigma^m$  (sans normalisation et  $\beta = 1$ ) de micro-mouvements de densités de probabilité uniforme (gauche), laplacienne (centre) et gaussienne (droite) en fonction de la distance d'inter-corrélation  $u_0$ . Dans les trois cas, on observe que tant que la distance d'inter-corrélation est inférieure à un seuil, la puissance optimale est nulle. Au delà de ce seuil, le lien entre  $\sigma^m$  et  $u_0$  est quasi-linéaire pour les micro-mouvements laplaciens et gaussiens, alors que pour des fluctuations uniformes l'approximation linéaire de la caractéristique  $(\sigma^m, u_0)$  doit être réalisée pour une valeur de  $u_0$  plus importante. D'après ces trois graphiques, on confirme que l'influence du coefficient  $B$  sur  $\sigma^m$  n'est pas très significative pour une puissance de bruit de grille faible.

Les observations réalisées sur la cohérence  $C_e^i$  sont extrapolables à la cohérence  $C_a^i$  en se fondant sur les conclusions établies sur grille régulière. Or, le paramètre de forme  $B$  de la densité de probabilité du bruit de grille n'a pratiquement pas d'influence sur la cohérence  $C_e^i$  lorsque la puissance de bruit de grille est faible. En revanche, pour des puissances  $\sigma_e^2$  plus importante, le facteur de forme modifie de manière significative les cohérences  $C_e^i$ . Cependant, ces modifications sont notables uniquement lorsque  $B$  n'est pas trop important. Pour une puissance de bruit de grille faible, l'effet de contrôle optimal stochastique a été

observé dans la plage de valeurs  $u_0$  et  $\sigma_0$  commune à toutes les simulations, alors que ce n'est pas le cas pour une puissance de bruit de grille plus importante d'un facteur 10. Enfin, pour un bruit de grille de densité uniforme et d'écart-type  $\sigma_\epsilon = 5$ , la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  est pratiquement constante, mais de valeur faible.

L'étude des variations de la puissance du bruit de grille  $\sigma^m$  pour une forme de densité  $B$  donnée est l'objet du paragraphe suivant.

### 2.3.3 Influence de la puissance du bruit de grille

Le paramètre de variance  $\sigma_\epsilon^2$  est un facteur qui a beaucoup d'influence sur les cohérences des photorécepteurs d'une grille irrégulière. En effet, la puissance du bruit de grille représente le degré d'irrégularité de la grille. Lorsque  $\sigma_\epsilon$  augmente la grille devient de plus en plus perturbée. Pour que l'étude qui suit ait un sens physique, nous devons vérifier la condition (2.63). En fixant la valeur de la dimension de la tesselle  $\Delta$  et celle de la forme de la densité du bruit de grille  $B$ , la condition (2.63) devient :

$$0 \leq \sigma_\epsilon \leq \frac{\Delta}{2\sqrt{2B+1}}$$

Les résultats présentés par la suite sont réalisés pour une valeur de  $\Delta$  suffisamment grande pour que la condition évoquée ci-dessus soit toujours vérifiée.

La première ligne de la figure 2.43 permet d'observer le comportement de la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  sur une grille irrégulière dont le facteur de forme du bruit de grille est  $B = 2$ . Les micro-mouvements sont de densité de probabilité uniforme. Les courbes sont tracées pour des valeurs de  $u_0 \neq 0$ . On peut considérer que les courbes de  $\mathcal{C}_e^i$  tracées pour  $\sigma_\epsilon \approx 0$ , soit la cohérence  $\mathcal{C}_e^r$  obtenue sur grille régulière, et donc servir de référence pour effectuer des comparaisons entre cohérences sur grille régulière et irrégulière. A l'aide de ces trois graphiques, nous pouvons observer deux phénomènes :

- Le premier est l'existence du contrôle optimal stochastique de la cohérence, lorsque la distance d'inter-corrélation  $u_0$  augmente. Pour  $u_0$  faible, figure de gauche, la cohérence décroît en fonction de  $\sigma_0$  lorsque la valeur de  $\sigma_\epsilon$  augmente, c'est-à-dire au fur et à mesure que la grille devient de plus en plus irrégulière. Sur la figure centrale, on voit le maximum caractéristique de contrôle optimal stochastique de la cohérence<sup>9</sup> sur les courbes tracées pour  $\sigma_\epsilon = \{0.001; 0.14\}$ . Enfin, le graphique de droite, donne également 6 valeurs de  $\sigma_\epsilon$  pour lesquelles lorsque  $u_0 = 1$ , le contrôle optimal a lieu. De façon empirique, on peut retrouver la condition d'apparition de maximum dans les courbes des fonctions de cohérences. En effet, en s'appuyant sur la condition  $|u_0| \geq \alpha_0$  de la grille régulière, et en posant  $\sigma_\epsilon = 2\sqrt{3}\alpha = 2\alpha_0$ , on vérifie que la condition de réalisation du contrôle optimal stochastique sur grille irrégulière est donnée par  $\sigma_\epsilon \leq |u_0|/2$ .
- Le second point à examiner est le comportement des courbes de cohérences pour de faibles puissances de micro-mouvements. Le graphique central de la première ligne de la figure 2.43 montre que pour  $u_0 = 0.5$ , la cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  peut être plus importante que la cohérence  $\mathcal{C}_e^r$  pour  $\sigma_0 \leq 0.45$ . En effet, pour  $\sigma_\epsilon = \{0.1; 0.28; 0.42\}$ , les courbes de cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  sont placées au dessus de la courbe obtenue pour  $\sigma_\epsilon = 0.01$ . On rappelle que cette dernière est une approximation de la courbe de cohérence d'une grille régulière obtenue dans les mêmes conditions. La figure de droite de la première ligne, confirme le fait que pour des grilles irrégulières, la cohérence lorsque la puissance des micro-mouvements n'est pas trop importante est supérieure à la cohérence sur une grille régulière. En effet, toutes les courbes pour  $\sigma_\epsilon > 0.001$  passent au dessus de la courbe pour  $\sigma_\epsilon = 0.001$ . Néanmoins, cette propriété est vérifiée jusqu'à un certain degré d'irrégularité de la grille. Par exemple, sur la figure de droite, la

<sup>9</sup>La courbe pour  $\sigma_\epsilon = 0,001$  du graphique de gauche possède également un maximum, qui est cependant moins bien visible à l'oeil nu.

courbe de cohérence pour  $\sigma_\epsilon = 1$  est placée au dessous de celle obtenue pour  $\sigma_\epsilon = 0.85$ . De plus, on observe que sur le graphique central de la première ligne, les deux courbes de cohérences pour  $\sigma_\epsilon = \{0.57; 0.71\}$  sont toujours inférieures à la courbe correspondant à la grille régulière.

**Il y donc existence d'un phénomène que l'on peut qualifier : d'amélioration de la cohérence par irrégularité de la grille.** On peut encore expliquer ce phénomène à l'aide de la modélisation du bruit de grille et des micro-mouvements par un bruit spatio-temporel (voir figure 2.41). Si le bruit de grille est trop fort, alors les micro-mouvements ne peuvent que faire diminuer la valeur de la cohérence d'un photorécepteur. En revanche, si le bruit de grille est plus faible, alors les micro-mouvements peuvent améliorer la cohérence. De plus cette amélioration est nécessairement obtenue pour un niveau de fluctuation plus faible.

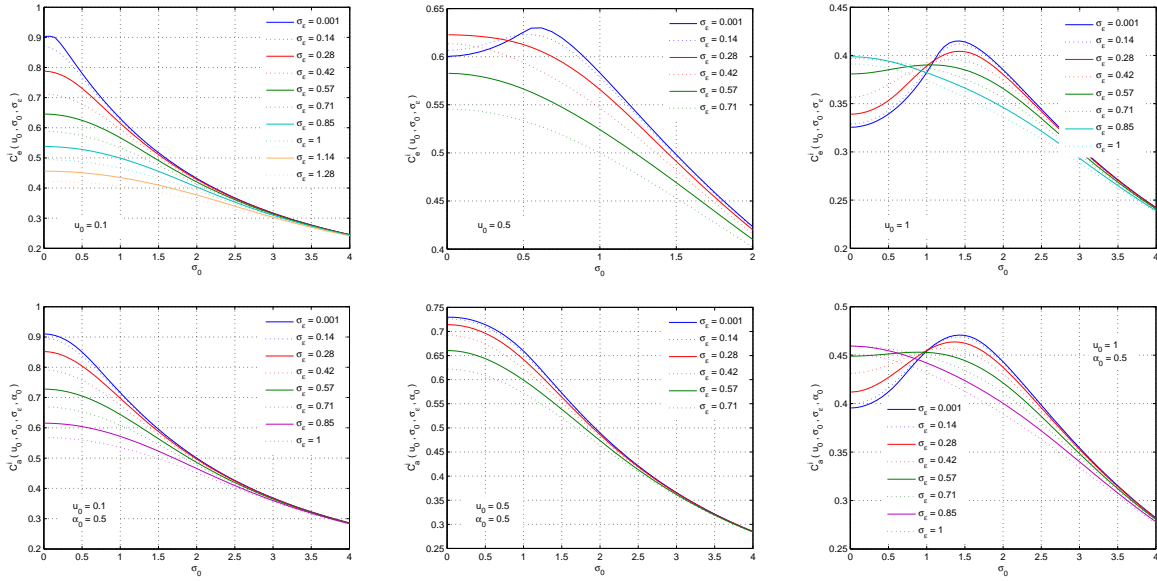


FIG. 2.43 – Ligne 1 - Cohérence  $C_e^i$  en fonction de  $\sigma_0$  pour différentes puissances de bruit de grille de facteur de forme 2 pour trois valeurs différentes de  $u_0 = \{0.1; 0.9; 1\}$  (gauche à droite) lorsque les fluctuations sont uniformes. Ligne 2 - Idem pour  $C_a^i$  avec comme réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  une porte de largeur  $\alpha_0 = 0.5$ .

La deuxième ligne de la figure 2.43 présente les courbes de cohérences lorsque la réponse impulsionnelle de chaque photorécepteur est une porte de largeur  $\alpha_0 = 0.5$ . La condition de réalisation du contrôle optimal stochastique ne peut plus se résumer à l'expression  $\sigma_\epsilon \leq \frac{|u_0|}{2}$ . En effet, les courbes de cohérence de la figure centrale de la seconde ligne sont monotones décroissantes. Néanmoins le phénomène existe toujours puisque sur la figure de droite on observe des courbes possédant un maximum. Malheureusement, la condition d'apparition du maximum ne peut être étudiée d'une manière générale. De même, le phénomène d'amélioration de la cohérence par irrégularité de la grille n'est pas visible sur le graphique central de la seconde ligne, alors qu'il apparaît sur le graphique de droite de la même ligne. Là encore, l'étude des conditions de réalisations de ce phénomène doit être soumis aux cas par cas.

Le phénomène d'amélioration de la cohérence par irrégularité de la grille mis en évidence précédemment est également illustré sur la figure 2.44. Chaque graphique présente l'évolution de la cohérence  $C_e^i$  en fonction de l'écart-type des micro-mouvements  $\sigma_0$  de densité uniforme et de l'écart-type du bruit de grille  $\sigma_\epsilon$  également de nature uniforme pour six valeurs de  $u_0$ . Pour tous les graphiques de la figure 2.44, le point à l'origine est la valeur de la cohérence sur grille régulière obtenue sans micro-mouvement.

Le premier graphique est obtenu pour une distance d'inter-corrélation  $u_0$  nulle. On vérifie que la

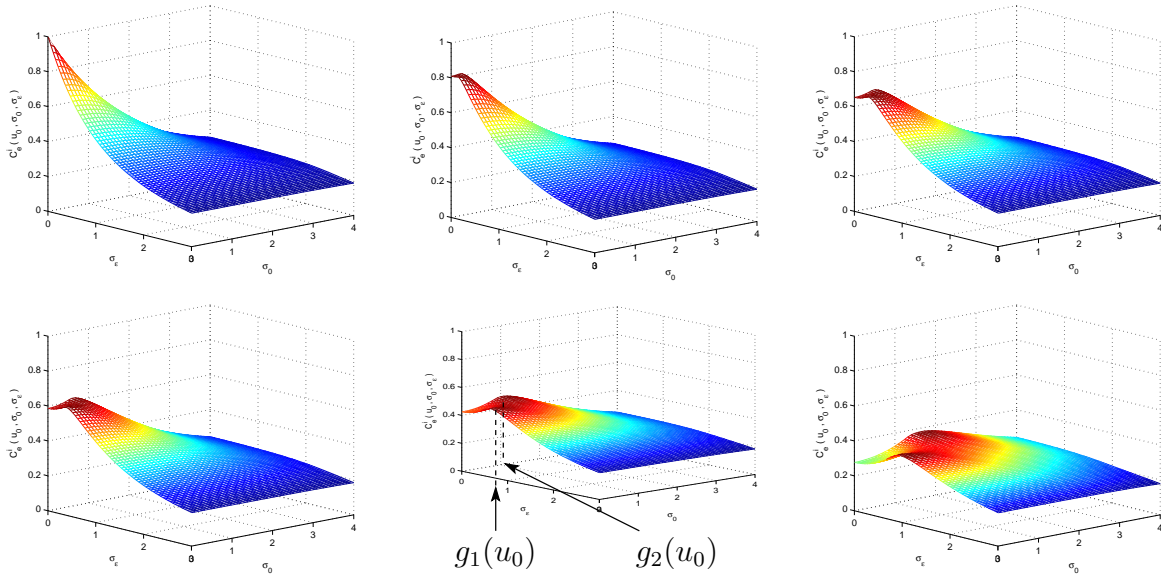


FIG. 2.44 – Cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  en fonction de  $\sigma_0$  et  $\sigma_\epsilon$  pour un bruit de grille uniforme (facteur de forme 1) lorsque les fluctuations sont uniformes pour six valeurs de  $u_0 = \{0; 0.21; 0.42; 0.64; 0.85; 1.28\}$ .

cohérence est égale à un pour  $\sigma_0 = \sigma_\epsilon = 0$ . La cohérence  $\mathcal{C}_e^i$  pour  $u_0 = 0$  diminue avec  $\sigma_0$  et  $\sigma_\epsilon$ . Le phénomène d'amélioration de la cohérence par l'irrégularité de la grille n'existe pas pour cette distance  $u_0$ . La deuxième nappe est tracée pour  $u_0 = 0.21$ . La valeur à l'origine est pratiquement égale à 0.8. Pour de très faibles valeurs de  $\sigma_\epsilon$ , la cohérence augmente en fonction de  $\sigma_0$  et dépasse la valeur à l'origine. L'amélioration de la cohérence par l'irrégularité de la grille existe donc pour cette valeur de  $u_0$ . On remarque que plus  $u_0$  augmente, et plus la plage de valeurs de  $\sigma_\epsilon$  pour laquelle la cohérence est supérieure à la valeur à l'origine s'agrandit. Au delà de cette plage de valeurs de  $\sigma_\epsilon$ , la cohérence ne fait que décroître lorsque la puissance des micro-mouvements augmente.

Toutes les nappes de la figure 2.44 sont symétriques par rapport au plan  $\sigma_\epsilon = \sigma_0$  étant donné que les deux densités de probabilité  $f_\xi$  et  $f_\epsilon$  sont de même nature. Le maximum de la fonction de cohérence est donc atteint à la fois pour  $\sigma_0 = 0$  et pour une valeur de  $\sigma_\epsilon = g_1(u_0)$ , où  $g_1$  est une fonction de  $u_0$ , et également pour  $\sigma_\epsilon = 0$  et pour  $\sigma_0 = g_2(u_0)$ , où  $g_2 = g_1$  (voir figure pour  $u_0 = 0.85$ ). Sous ces conditions, le modèle à grille régulière et soumis à des micro-mouvements de puissance  $\sigma_0^m$ , et le modèle à grille irrégulière sans micro-mouvements fonctionnent à cohérence maximale pour  $u_0 \neq 0$ .

Par contre, comme le montre la figure 2.45, en gardant la même nature de bruit de grille et en imposant aux micro-mouvements d'être laplacien ou gaussien, alors, on voit que le modèle à grille irrégulière possède des performances supérieures au modèle régulier soumis aux mêmes fluctuations. En effet les nappes du cas laplacien et du cas gaussien possèdent cette fois un seul maximum. Celui ci est atteint sans fluctuation pour le modèle irrégulier dont la puissance du bruit de grille est proche de un. Par conséquent, les coupes à  $\sigma_\epsilon \geq 1$  et en fonction de  $\sigma_0$  sont positionnées au dessus de la coupe correspondant à la grille régulière. Sous ces conditions, les performances en termes de cohérence d'une grille irrégulière sont supérieures aux performances d'une grille régulière soumis ou non aux micro-mouvements.

Dans cette partie, on a montré quel est le lien entre la cohérence d'un modèle de rétine à grille irrégulière avec la cohérence d'un modèle à grille régulière. Lorsque la distinction entre grille régulière et grille irrégulière se fait par la définition d'un bruit de grille, alors ce lien est simplement une couche de convolution entre la fonction cohérence de la grille régulière par la densité de probabilité du bruit de grille de la grille irrégulière. A l'aide des résultats obtenues sur grille régulière, on a pu mettre en évidence



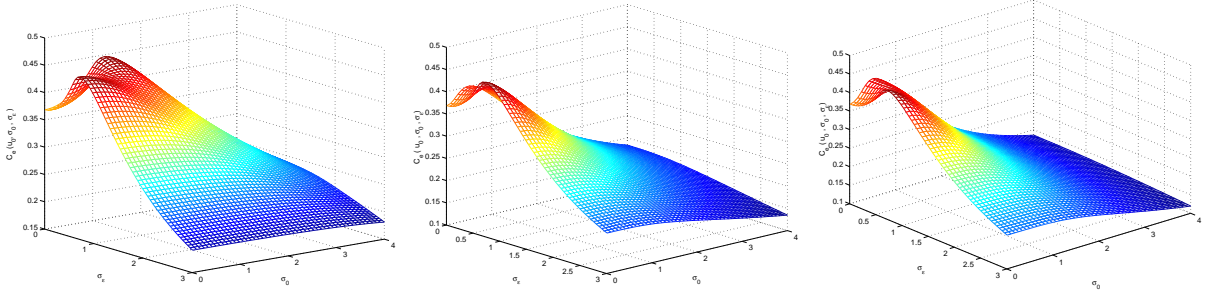


FIG. 2.45 – Cohérence  $C_e^i$  en fonction de  $\sigma_0$  et  $\sigma_\epsilon$  pour  $u_0 = 1, 5$ , lorsque le bruit de grille est uniforme (facteur de forme  $B = 1$ ), et pour des micro-mouvements de densité uniforme (gauche), laplacienne (centre), et gaussienne (droite).

deux phénomènes présents dans le modèle à grille régulière que l'on peut facilement interpréter avec une modélisation par un bruit spatio-temporel.

Le premier existe sur grille régulière, c'est le contrôle optimal stochastique de la cohérence par les micro-mouvements. **On a montré que le contrôle optimal stochastique est peu sensible à la forme de la densité du bruit de grille, et que la variance  $\sigma_\epsilon$  a une grande influence sur la réalisation du phénomène.**

Le deuxième point souligné dans cette partie et qui est propre au modèle fondé sur  $\mathcal{G}_i$  est l'amélioration de la cohérence via le bruit de grille. Ce phénomène repose sur le fait que les performances du modèle à grille irrégulière, soumis à des micro-mouvements, peuvent être supérieures aux performances du modèle à grille régulière. **Nous avons observé qu'un peu d'irrégularité sur la grille pouvait faciliter l'apparition d'une amélioration de la cohérence.** En effet, si  $\sigma_\epsilon \neq 0$ , alors la puissance des fluctuations  $\sigma^2$  d'une grille irrégulière doit être plus faible que la puissance des fluctuations sur une grille régulière pour fonctionner à cohérence maximale. Il existe donc un compromis stochastique à réaliser entre les variances du bruit de grille et des micro-mouvements pour que les photorécepteurs des rétines artificielles fonctionnent à cohérences élevées pour tous les points de l'image observé.

## 2.4 Discussions et perspectives

L'objectif du chapitre était de montrer qu'il peut exister un avantage à combiner un système à échantillonnage irrégulier, comme la rétine, à un système moteur assurant des vibrations aléatoires, tel que les micro-mouvements. A l'aide de modèles très simples de rétine, d'une mesure de performance particulière, et d'un modèle d'image simple, nous avons mis en évidence deux phénomènes liés aux grandeurs aléatoires du problème permettant d'améliorer les performances. La mise en évidence de ces phénomènes d'amélioration de la mesure s'appuie sur les deux modèles,  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$ , présentés dans la première partie 2.1, ainsi que des variantes à grille régulière  $\mathcal{G}_r$  et à grille irrégulière  $\mathcal{G}_i$ . Pour la mesure de performance utilisée dans le chapitre, on a montré que l'étude de la partie 2.2, consacrée aux systèmes  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  sur grille régulière, s'étend facilement à l'étude des systèmes à grille irrégulière. De plus, une telle grille présente également le phénomène qualifié d'amélioration de la cohérence par l'irrégularité de la grille. Néanmoins, malgré la simplicité des modèles et de la mesure de performance utilisée, ces résultats ont bien souvent été obtenus par des simulations numériques, sauf pour quelques cas analytiques. Nous discutons dans les paragraphes suivants la validité de ces modèles, ainsi que la pertinence de la mesure de performance que nous avons utilisés.

### 2.4.1 Comment améliorer la validité du modèle ?

Pour simplifier l'étude, les simulations ont été réalisées pour une seule ligne de photorécepteurs des rétines artificielles décrites en 2.1. Évidemment, pour être certain que les conclusions de cette étude soient également celles des phénomènes du système visuel, il est tout d'abord nécessaire de simuler une rétine bi-dimensionnelle. Nous avons également fait l'hypothèse que tous les récepteurs étaient du même type, alors que quatre familles de photorécepteurs cohabitent sur la rétine. Pour gagner en validité, il faudrait faire apparaître les cônes rouges, verts, bleus, ainsi que les bâtonnets au sein des modèles. Tenir compte de cette remarque peut être de composer le modèle  $\mathcal{H}_a$  de quatre réponses impulsionnelles différentes. Néanmoins, tous les cônes rouges ne répondent pas identiquement à un stimuli, parce que, d'une part les cellules peuvent être différentes, et parce que d'autre part, la réponse impulsionnelle dépend également du voisinage du photorécepteur. Il en est de même pour les tous les photorécepteurs de la rétine. On voit ainsi apparaître une nouvelle couche d'aléas qu'il faudrait incorporer dans le modèle pour que celui-ci soit plus représentatif de la réalité. De plus, si on revient sur les types de réponse impulsionnelle considérés dans le chapitre, nous avons supposé que  $a(\cdot)$  réalise simplement un filtrage spatial. En toute rigueur, le filtrage n'est pas uniquement spatial mais plutôt spatio-temporel (voir 1.1.1).

Le modèle à grille irrégulière est celui qui est le plus proche de l'œil humain. Il est possible d'améliorer la pertinence de ce modèle en reproduisant l'implantation naturelle des photorécepteurs d'une rétine qui servirait d'étalon [107, 133]. Une autre méthode peut être d'estimer la densité de probabilité conjointe du bruit de grille à tous les photorécepteurs à partir d'un échantillon de plusieurs rétines.

L'amélioration des modèles, passe également par une modélisation précise de la densité des micro-mouvements. En effet, les simulations ont été réalisées pour trois densités de probabilité de micro-mouvements relativement simples. De plus, dans cette étude, les micro-mouvements sont supposés stationnaires à l'ordre deux. Or, il est prouvé (voir partie 1.2) que plusieurs mouvements oculaires déplacent involontairement les rétines de l'homme. En oubliant la classification des différents mouvements oculaires, pour supposer que les yeux sont soumis à un seul et même bruit, alors, pour que ce bruit comporte à la fois les saccades et les micro-mouvements, il est probable qu'il soit de nature impulsionnelle et non stationnaire. Néanmoins, le degré de complexité des calculs pourtant déjà élevé dans les modèles simples serait à nouveau augmenté en respectant ces réalités physiologiques.

### 2.4.2 Comment augmenter la pertinence de la mesure ?

L'hypothèse de contrôle optimal stochastique ainsi que celle de l'amélioration de la vision par l'irrégularité de la grille de mesure ont été mises en évidence par l'intermédiaire de la cohérence. Cette mesure est fondée sur une analyse statistique à l'ordre deux. Par définition, c'est une mesure locale en temps et en espace. En effet, celle-ci ne met pas en relation tous les éléments de la rétine avec les micro-mouvements mais seulement un photorécepteur et un point de l'image  $S$  à un instant  $t$  donné. L'information mutuelle de Shannon définie par la théorie de l'information permettrait de caractériser à tous les ordres ce transfert d'information. De même, avec une telle mesure, on peut envisager d'étendre l'étude à plusieurs photorécepteurs.

Néanmoins, cette mesure est nettement plus complexe à manipuler. Avec les modèles utilisés dans ce chapitre, les calculs fondés sur l'information mutuelle ne conduisent à aucune expression exploitable. Pour utiliser cette mesure, il est nécessaire de simplifier le modèle de rétine. Par exemple, on peut symboliser le processus d'acquisition rétinien par un système de sous échantillonnage d'une image déjà échantillonnée. Même avec un modèle aussi simple, l'expression de l'information mutuelle reste très compliquée et difficilement exploitable en simulation. Néanmoins, même si ce modèle possède ses propres limitations, les quelques travaux (non présentés car trop partiels) réalisés dans cette direction sont encourageants. Nous pensons qu'il est possible de poursuivre les recherches sur l'information mutuelle avec par exemple une modélisation matricielle (voir tensorielle en deux dimensions) en intégrant des résultats relatifs aux matrices aléatoires.

Pour conclure ce chapitre, les travaux présentés ici ne sont pas en contradiction avec ceux effectués sur la compréhension du fonctionnement du système visuel par d'autres communautés scientifiques. Simplement, nous espérons apporter une pierre supplémentaire à l'édifice, en présentant une vision différente de l'intérêt que peut avoir les fluctuations aléatoires au sein de la perception visuelle.

Nous venons de donner une interprétation du rôle d'une des composantes aléatoires présentes au sein du système visuel, les micro-mouvements. Dans le premier chapitre, nous avons également présenté un autre phénomène, la variabilité neuronale qui est également assimilé à du bruit. Le prochain chapitre est consacré à l'étude des problèmes de détection binaire qui peuvent être réalisés par les premières couches du système visuel sous l'influence de ce bruit neuronal.

---

 Quantification stochastique et détection dans le système visuel
 

---

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Quantifieurs et réseaux de neurones</b>	<b>86</b>
3.1.1	Définitions et généralités sur les quantifieurs	86
3.1.1.1	Quantifieur uniforme	87
3.1.1.2	Quantification à haute résolution et approche <i>compander</i>	88
3.1.1.3	Quantification vectorielle	90
3.1.2	Parallèle avec les réseaux de neurones à seuil	91
3.1.2.1	Un modèle de réseau de neurones formels	91
3.1.2.2	Des représentations neuronales de quantifieurs	92
<b>3.2</b>	<b>Quantification optimale pour la détection</b>	<b>95</b>
3.2.1	Détection - Solutions optimales et sous-optimales	96
3.2.2	Les quantifieurs-détecteurs optimaux	98
3.2.2.1	Quantifieurs-détecteurs maximisant une $f$ -divergence	99
3.2.2.2	Quantifieurs-détecteurs asymptotiques	100
3.2.3	Performances des quantifieurs en détection	101
3.2.3.1	Probabilité d'erreur de détection d'un quantifieur déterministe	101
3.2.3.2	Performances de détection des quantifieurs optimaux	102
<b>3.3</b>	<b>Détection par quantifieurs stochastiques</b>	<b>103</b>
3.3.1	Description des quantifieurs stochastiques	104
3.3.1.1	Quantifieurs uniformes/adaptés stochastiques	105
3.3.1.2	Quantifieurs stochastiques variants et invariants dans le temps	105
3.3.1.3	Représentation réseau des quantifieurs stochastiques	105
3.3.2	Probabilité d'erreur de détection des quantifieurs stochastiques	107
3.3.2.1	Probabilité d'erreur d'un quantifieur variant stochastique	107
3.3.2.2	Probabilité d'erreur d'un quantifieur invariant stochastique	108
3.3.3	Détection de constantes par quantifieur stochastique	110
3.3.3.1	Quantifieurs centrés <i>versus</i> quantifieurs décentrés	110
3.3.3.2	Quantifieurs invariants <i>versus</i> quantifieurs variants	113
3.3.3.3	Quantifieurs stochastiques <i>versus</i> quantifieurs optimaux	115
3.3.3.4	Quantifieurs stochastiques adaptés <i>versus</i> quantifieurs optimaux	117
3.3.4	Influences des différents paramètres	119
3.3.4.1	La densité de probabilité du bruit de seuils	119
3.3.4.2	Le seuil de détection $\eta$	121
3.3.4.3	La taille $M$ du quantifieur	124
3.3.4.4	La densité de probabilité du bruit de canal	126
<b>3.4</b>	<b>Retour sur les neurones du système visuel</b>	<b>126</b>

---



---

*There have been proposals for technological uses of stochastic resonance, and a small but increasing effort has been made to see whether Mother Nature may already be using it.*

K. Wisenfeld and F. Jaramillo, 1998

**L'**ŒIL de l'homme, et plus particulièrement la rétine, est un composant de photo-transduction dont le rôle est de convertir un signal lumineux en un signal électrique qui est par la suite acheminé vers le cerveau via le nerf optique. Or, le taux d'information transmissible par le nerf optique est limité. La rétine n'est donc pas qu'un simple système passif d'enregistrement du flux lumineux, mais véritablement un centre de traitement de l'information sophistiqué qui élabore un code compréhensible pour les centres nerveux placés en aval (voir partie 1). L'élaboration de ce code suppose que la rétine réalise une extraction ou une sélection des informations "pertinentes" de l'image brute frappant les photorécepteurs. Selon Marr [98], l'ensemble des informations "pertinentes" ou encore les descripteurs forment l'esquisse primitive de l'image. Dans ces descripteurs on trouve par exemple quelques contours, régions, orientations principales ou textures de la scène. D'un point de vue simplifié, on peut considérer que les descripteurs d'une scène observée sont les résultats de nombreux tests variés de classification et/ou de détection.

De ce point de vue, les premières couches du système visuel sont sans cesse en train de traiter des problèmes de détection et/ou de classification. On peut d'ailleurs généraliser cette approche au système nerveux central (SNC) tout entier. En effet, la recherche du visage d'une personne familière dans une foule, l'identification de lettres et la reconnaissance de mots dans un texte, ou le choix de placer une pierre sur une des intersections d'un *goban* dans une partie de go représentent des exemples de détection de la vie courante réalisées par le SNC. Nous justifions ainsi l'intérêt porté tout au long de ce chapitre aux problèmes de détection binaire.

De plus, les neurones composant les différentes couches du système nerveux, et plus particulièrement celles du système visuel, baignent dans un bruit ambiant (voir partie 1.2.2). Comment les tâches de détection sont-elles réalisées par les réseaux neurones sous l'effet de ce bruit intrinsèque? Ce chapitre est consacré à l'étude de l'influence du bruit natif aux réseaux de neurones biologiques devant réaliser un test d'hypothèses.

La modélisation biophysique et la modélisation computationnelle sont les deux axes de la modélisation de neurones biologiques [32]. La modélisation biophysique consiste à identifier et mettre en équation les différents mécanismes physiques et chimiques qui sont en cause dans la génération du potentiel d'action d'un neurone biologique. Cette approche a donné naissance entre autres aux modèles de neurones de Hodgkin-Huxley [70] et de Fitzhugh-Nagumo [41, 113]. Par opposition, la modélisation computationnelle considère un neurone comme un atome de calcul et ne tient pas compte des mécanismes biophysiques observés sur les neurones naturels mais seulement de la technique de transmission de l'information utilisée. De cette approche sont issues deux types de modèles computationnels, les modèles fréquentiels et les modèles impulsionsnels (voir partie 1.2.2). Pour l'étude de ce chapitre, nous allons nous restreindre à un cas particulier de modèle impulsionsnel, en nous concentrant sur les réseaux à seuils. Sous certaines conditions, comme nous le montrerons dans la première partie du chapitre (voir 3.1.2), les réseaux de neurones à seuils sont équivalents à des quantifieurs. Par conséquent, la thématique du chapitre, la détection dans le système visuel, peut être abordée par l'étude des problèmes de détections assurés par des quantifieurs.

Or, les problèmes de détection fondés sur des quantifieurs ont été traités depuis les années 70 dans un cadre purement déterministe. Comme nous le rappelons dans la partie 3.2, en imposant une structure de quantifieur au détecteur, la solution obtenue est nécessairement sous-optimale. Il est cependant toujours possible de trouver la meilleure des solutions sous-optimales selon différents critères de performance. Dans la partie 3.2, nous décrivons deux approches différentes de fabrication de quantifieurs spécialisés dans une tâche de détection. Dans un cadre déterministe, il existe donc des méthodes pour déduire les paramètres d'un réseau de neurones à seuils impliqué dans une tâche de détection.

Quelle est alors l'influence du bruit interne sur les performances de détection du réseau ? En conservant le formalisme de modélisation du réseau par un quantifieur, nous introduisons ici le concept de quantifieurs stochastiques pour répondre à cette question qui fait l'objet de la partie 3.3. Dans cette partie, nous effectuons entre autres des comparaisons entre les solutions sous-optimales décrites en 3.2 lorsqu'elles sont soumises à une influence stochastique. Évidemment l'ajout d'aléas sur les quantifieurs optimaux ne peut que détériorer les performances. En revanche, comme nous le montrons à la fin du chapitre, ajouter du bruit sur les seuils d'un quantifieur non optimisé peut être bénéfique. Ceci est encore une manifestation des phénomènes où le bruit peut être un atout au sein d'un système non-linéaire, et illustre que de tels effets prennent certainement essence au sein du système visuel humain.

Afin d'établir clairement le parallèle entre les réseaux de neurones à seuils et les quantifieurs, nous commençons par introduire quelques définitions et propriétés concernant ces derniers.

### 3.1 Quantifieurs et réseaux de neurones

Généralement, un quantifieur est simplement perçu comme un dispositif réalisant l'approximation des valeurs qui lui sont appliquées en entrée. Mais, le quantifieur peut également jouer un rôle bien plus élaboré dans une chaîne de traitement de l'information numérique. La compression de données, la reconnaissance des formes ou de paroles, ou le codage de source sont des exemples de tâches que peuvent remplir les quantifieurs [46]. Dans ces applications, le quantifieur n'a plus le simple rôle de conversion analogique/numérique, mais est au contraire un dispositif réalisant une fonction plus élaborée. Afin de fixer les notations utilisées dans la suite du chapitre, quelques notions relatives à la théorie de la quantification scalaire et vectorielle sont présentées dans la sous-partie qui suit.

#### 3.1.1 Définitions et généralités sur les quantifieurs

Le principe de fonctionnement d'un quantifieur scalaire est que : toute valeur présente à l'entrée du quantifieur est associée à une des  $M$  valeurs composant  $\mathcal{C}$ , le dictionnaire, ou *codebook* en anglais. Le dictionnaire porte parfois le nom d'espace des niveaux de sortie. Lorsque le dictionnaire est à valeurs réelles  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ , le quantifieur réalise effectivement une opération d'approximation. Dans ce types d'applications, les valeurs d'entrée de  $Q$  peuvent être contenues dans une seule partie ou la réunion de plusieurs parties de  $\mathbb{R}$ . La valeur scalaire  $M = |\mathcal{C}|$ , cardinal de l'ensemble  $\mathcal{C}$ , représente à la fois le nombre de codes appartenant au dictionnaire, et la taille du quantifieur. L'association d'une valeur d'entrée  $x$  scalaire, réalisation de la variable aléatoire  $X$  de densité de probabilité  $f_X(x)$ , à un niveau de sortie ou code du dictionnaire est régie par :

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{C} = \{q_1, \dots, q_M\} \\ x &\longrightarrow q_k \text{ si } x \in \Delta_k \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $\Delta_k$  est une partition de  $\mathbb{R}$ . Un quantifieur scalaire de taille  $M$  est un système qui découpe l'axe réel  $\mathbb{R}$  en  $M$  sous ensembles  $\Delta_k$  pour  $k = 1 \dots M$ , encore dénommées cellules de partition. La partition  $\Delta_k$  peut se noter à l'aide de la fonction de quantification inverse  $Q^{-1}$ , et a alors pour expression :

$$\Delta_k = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = q_k\} = Q^{-1}(q_k) \quad (3.2)$$

Nous en déduisons des conditions sur la nature des partitions  $\Delta_k$  :

$$\begin{cases} \bigcup_k \Delta_k &= \mathbb{R} \\ \Delta_k \cap \Delta_{k'} &= \emptyset \end{cases} \text{ pour } k, k' = 1, \dots, M \text{ et } k \neq k' \quad (3.3)$$

L'ensemble des partitions  $\Delta_k$  bornées forme la région granulaire, alors que la réunion des  $\Delta_k$  non bornées porte le nom de région de dépassement (voir figure 3.1). Les expressions (3.2) et (3.3) définissent la fonction

de quantification dans un cadre très général. Si on se restreint à la caractérisation des quantifieurs réguliers, alors les partitions  $\Delta_k$  sont des intervalles disjoints de la ligne réelle  $\mathbb{R}$ , et :

$$\Delta_k = ]t_{k-1}; t_k] \text{ pour } k = 1 \dots M \quad (3.4)$$

où les  $t_k$  sont couramment appelés les seuils de quantifications. La régularité d'un quantifieur se traduit également par le fait que le dictionnaire  $\mathcal{C}$  est inclus dans l'espace des variables d'entrée, et que chacun des codes  $q_k$  appartient à un et un seul intervalle  $\Delta_k$  :

$$q_k \in \Delta_k = ]t_{k-1}; t_k] \text{ pour } k = 1, \dots, M \quad (3.5)$$

Par définition, toute fonction de quantification  $Q$  est une opération non linéaire. De plus, les propriétés de construction des quantifieurs réguliers assurent que ceux ci soient monotones.

Dans un cadre général, on considère que l'entrée  $X$  est une grandeur aléatoire définie par sa densité de probabilité  $f_X(x)$ . Pour assurer la plus grande dynamique de quantification avec une entrée possédant une densité de probabilité  $f_X(x)$  à support borné à l'intervalle  $[a, b]$ , on fixe généralement les seuils limites du quantifieur  $t_0$  et  $t_M$  respectivement aux valeurs  $a$  et  $b$ . Dans ce cas, il n'y a pas de région de dépassement, et on introduit la notion de plage d'entrée  $PE = t_M - t_0$ . Par contre, lorsque que la densité  $f_X$  est à support infini, alors pour avoir la plus grande dynamique de quantification, les seuils limites devraient tendre vers l'infini :  $t_M = -t_0 = \infty$ . Cette opération est physiquement impossible. On introduit alors la notion de plage de dépassement, qui est la réunion des intervalles  $]-\infty, t_1] \cup [t_{M-1}, \infty[$ . Dans ce cas, la plage d'entrée est calculée à partir de :  $PE = t_{M-1} - t_1$ . Ainsi, quelque soit les grandeurs d'entrées du quantifieur, la plage d'entrée  $PE$  est toujours finie. Ces définitions sont résumées sur la figure 3.1 pour deux densités de probabilités  $f_X$  quelconques, dont une est bornée et l'autre non.

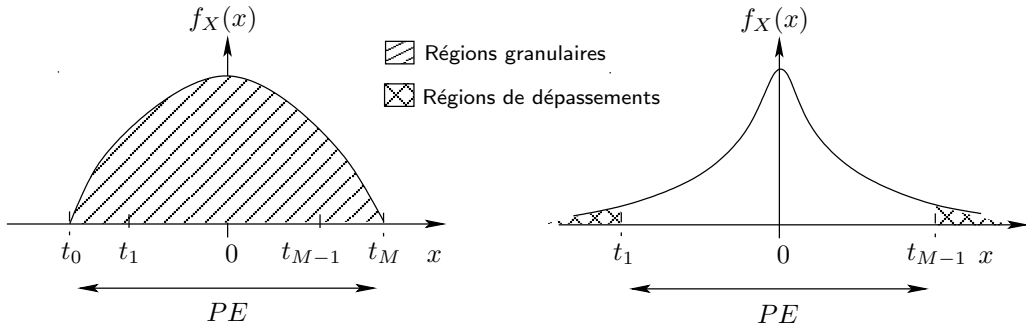


FIG. 3.1 – Illustration de la pleine échelle  $PE$  et des régions granulaires et de dépassements d'un quantifieur pour une entrée aléatoire de densité de probabilité  $f_X$  à support borné (gauche) et support infini (droite).

### 3.1.1.1 Quantifieur uniforme

Le quantifieur uniforme est le plus connu et le plus simple de tout les quantifieurs réguliers. Un quantifieur est uniforme si tous les intervalles  $\Delta_k$  le constituant sont de même taille, et si d'autre part, les niveaux de quantifications  $q_k$  sont égaux au milieu de leurs intervalles de quantification respectifs :

$$\begin{cases} q & = q_k - q_{k-1} & \text{pour } k = 1, \dots, M \\ q_k & = \frac{t_k + t_{k-1}}{2} & \text{pour } k = 2, \dots, M - 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $q$  représente le pas de quantification du quantifieur uniforme. Comme on peut également écrire que  $q_k = t_{k-1} + q/2$ , il est simple de montrer que :

$$q = q_k - q_{k-1} = t_k - t_{k-1}$$



L'illustration de la figure 3.2 représente deux quantifieurs scalaires réguliers, l'un quelconque et l'autre uniforme. On remarque que la condition de régularité (3.5) est dans les deux cas respectée, et que les largeurs de partitions et les hauteurs des échelons sont identiques pour le quantifieur uniforme.

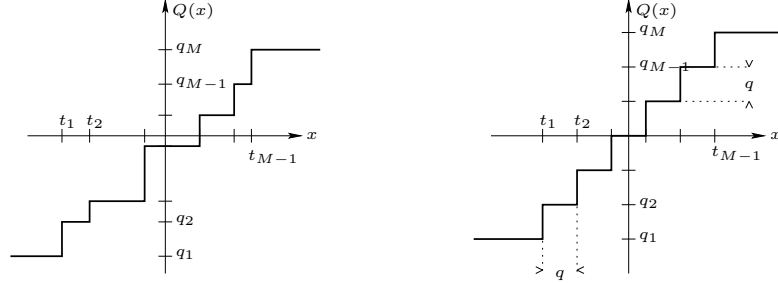


FIG. 3.2 – Caractéristiques de transferts de deux quantifieurs. À gauche, le quantifieur entre dans la catégorie des quantifieurs réguliers. Celui de droite est un cas particulier de cette classe puisqu'il est de nature uniforme de pas  $q$ .

Avec un quantifieur uniforme, lorsque la grandeur d'entrée  $X$  à quantifier est de distribution uniforme sur  $[a, b]$ , l'erreur ou le bruit de quantification  $\epsilon = Q(X) - X$  est également uniforme et distribué sur l'intervalle  $[-q/2, q/2]$ . Ce résultat, bien connu dans la théorie de la quantification [46], en introduit un autre qui l'est peut être encore plus. L'écart-type du bruit de quantification  $\sigma_\epsilon$  est proportionnel au pas de quantification  $q$ , autrement dit on a la variance du bruit de quantification ou l'erreur quadratique moyenne (EQM) qui est donnée par :

$$\sigma_\epsilon^2 = EQM = E[(Q(X) - X)^2] = E[\epsilon^2] = \frac{q^2}{12} \quad (3.7)$$

Si la plage d'entrée  $PE$  et le nombre de niveau de quantification  $M$  sont fixés, alors le quantifieur uniforme tel que  $q = PE/M$  est optimale au sens de l'erreur quadratique moyenne, et l'erreur minimale vaut  $PE^2/12M^2$ . Cette solution est obtenue en imposant la structure du quantifieur, et est optimal dans ce sens. Cependant, rien ne garantit que c'est par cette voie que les meilleures performances d'approximation peuvent être atteinte. Par exemple, si l'on relaxe la contrainte d'uniformité du quantifieur, l'erreur quadratique moyenne peut être minimisée d'avantage.

### 3.1.1.2 Quantification à haute résolution et approche *compander*

Par définition, l'erreur quadratique moyenne (EQM) d'un quantifieur régulier est donnée par :

$$\begin{aligned} EQM &= E[(X - Q(X))^2] \\ &= \sum_{k=1}^M \int_{t_{k-1}}^{t_k} (x - q_k)^2 f_X(x) dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

où  $f_X(x)$  représente la densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$ . De cette expression, on constate que le problème d'optimisation au sens de l'EQM peut être assez compliqué, puisqu'il consiste à déterminer conjointement les  $t_k$  et les  $q_k$  minimisant (3.8). Une façon d'aborder ce problème d'optimisation est de le traiter à partir de l'algorithme récursif de Lloyd [46], dans lequel chaque itération est composé par :

- une routine de recherche des seuils optimaux  $t_k$  pour un dictionnaire  $\mathcal{C}$  donnée, et,
- une routine effectuant la tâche contraire, l'optimisation du dictionnaire pour les seuils  $t_k$  précédemment obtenus.

Cet algorithme peut être implémenté pour des distances autre que la distance euclidienne attachée à l'erreur quadratique.

**Approche compander :** Le problème de minimisation de l'EQM (3.8) peut être posé différemment grâce à l'approche *compander*<sup>1</sup> d'un quantifieur régulier [46]. Cette approche permet de modéliser tout quantifieur régulier ( $\mathbf{t} = \{t_k\}_{k=1}^{M-1}, \mathbf{q} = \{q_k\}_{k=1}^M$ ) à partir d'un quantifieur uniforme et d'une fonction non linéaire monotone. Comme l'illustre la figure 3.3, la technique consiste à mettre en cascade un quantifieur uniforme précédé d'une fonction non-linéaire de compression  $G$ , suivi de la fonction d'expansion correspondante (parfois appelée fonction de restauration), inverse de la fonction de compression  $G^{-1}$ .

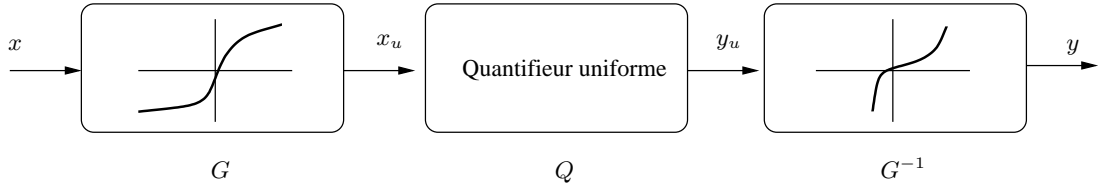


FIG. 3.3 – Modélisation compander d'un quantifieur régulier quelconque par un quantifieur uniforme.

Le bloc  $G$  réalise la compression des données d'entrée  $x$  afin qu'ils correspondent à la plage d'entrée  $PE$  du quantifieur uniforme, souvent réduit à l'intervalle  $[0, 1]$ . Mathématiquement, il est nécessaire que la fonction  $G$  soit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , et que la dérivée première  $G'$  existe sur tout  $\mathbb{R}$ . L'opération inverse  $G^{-1}$  permet aux données de retrouver leur dynamique initiale en effectuant l'opération inverse de la compression.

Ainsi, la recherche des paramètres  $t_k$  et  $q_k$  du quantifieur initial garantissant le minimum de l'EQM (3.8) est maintenant transposée en un problème de dimensionnement de la fonction non linéaire  $G$ , et du dimensionnement du quantifieur uniforme.

**Quantification à haute résolution :** Il est possible [46] de trouver une solution relativement simple au problème de minimisation de l'EQM (3.8) en faisant les hypothèses de la quantification fine ou quantification à haute résolution :

- la taille du quantifieur  $M$  tend vers l'infini,
- le quantifieur est régulier et donc  $q_k = (t_k + t_{k-1})/2$ .

Avec ces hypothèses, l'erreur quadratique moyenne d'un quantifieur régulier peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} EQM &\approx \sum_{k=1}^M f_X(x_k) \int_{\Delta_k} (x - q_k)^2 dx \text{ pour } x_k \in \Delta_k = [t_{k-1}, t_k[ \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k=1}^M f_X(x_k) \Delta_k^3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Soit alors,  $\lambda$ , la fonction de densité de seuils, définie par le nombre de niveaux  $M(q)dq$  appartenant à l'intervalle  $[q, q + dq[$  :

$$\lambda(q) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M(q)}{M}$$

<sup>1</sup>Le terme *compander* provient de la contraction des termes anglais de fonction de compression : *compressor*, et de fonction de restauration : *expander*.

Dans le cadre asymptotique de la quantification fine, on peut exprimer la largeur de l'intervalle  $\Delta_k$  en fonction de densité de seuils  $\lambda$  :

$$\Delta_k = \frac{1}{M\lambda(q_k)} \quad (3.10)$$

En insérant (3.10) dans (3.9), on obtient :

$$EQM \approx \frac{1}{12} \sum_{k=1}^M \frac{f_X(x_k)\Delta_k}{M^2\lambda(x_k)}$$

et l'EQM devient finalement :

$$EQM \approx \frac{1}{12M^2} \int_{t_1}^{t_{M-1}} \frac{f_X(x)}{\lambda(x)^2} dx \quad (3.11)$$

D'autre part, la dérivée de la fonction de compression  $G$  peut être approchée par la pente du compresseur  $G$ , dans laquelle la largeur de l'intervalle  $\Delta_k$  est remplacée par la fonction de densité de seuils  $\lambda$  :

$$G'(q_k) \approx \frac{G(t_k) - G(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \frac{q}{\Delta_k} = Mq\lambda(q_k) \quad (3.12)$$

et où  $q$  est le pas du quantifieur uniforme. L'équation (3.12) permet donc de relier la densité de seuils  $\lambda$  et la fonction non linéaire  $G$ . A partir de (3.11), on peut montrer en employant l'inégalité de Hölder (voir (D.4)) que pour atteindre le minimum de l'erreur quadratique moyenne la densité de seuil  $\lambda$  doit satisfaire :

$$\lambda(x) = \frac{f_X(x)^{\frac{1}{3}}}{\int f_X(y)^{\frac{1}{3}} dy} \quad (3.13)$$

La fonction de compression  $G$  du quantifieur optimal au sens de l'EQM est alors obtenue en intégrant (3.13). Finalement, pour un pas de quantification  $\Delta$  fixé, et pour une plage d'entrée  $PE$  donnée, on trouve les valeurs des seuils  $t_k$  et des niveaux  $q_k$  par échantillonnage régulier au pas de  $\Delta/2$  (voir [46]) de la fonction  $G^{-1}$ , comme l'illustre la figure 3.4.

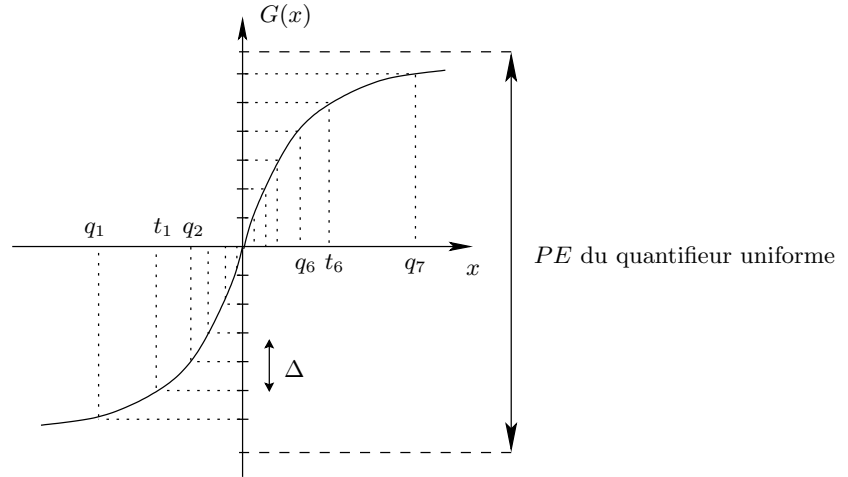


FIG. 3.4 – Détermination des seuils  $t_k$  et des niveaux  $q_k$  d'un quantifieur régulier pour  $M = 7$  à partir de la fonction de compression  $G$ .

### 3.1.1.3 Quantification vectorielle

Nous terminons cette partie en donnant quelques précisions sur l'extension de la quantification scalaire vers la quantification vectorielle. Pour cette dernière, l'entrée ne provient plus de la ligne réelle  $\mathbb{R}$ , mais de

l'espace  $\mathbb{R}^p$  ou d'une partie de celui-ci, et où  $p \geq 1$  entier représente la dimension du quantifieur, ainsi :

$$\begin{aligned} Q_v : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathcal{C} = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_M\} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{q}_k \text{ si } \mathbf{x} \in \Delta_k \end{aligned} \quad (3.14)$$

La régularité d'un quantifieur vectoriel est définie par la convexité des partitions  $\Delta_k$  dans l'espace  $\mathbb{R}^p$ . Comme dans le cas scalaire, il est également nécessaire que chaque vecteur de code  $\mathbf{q}_k$  appartienne à la partition  $\Delta_k$  auquel il est attaché. Cependant, comme pour la quantification scalaire, la fonction du quantifieur est réellement déterminée par l'organisation et la définition des  $M$  éléments du dictionnaire  $\mathcal{C}$ . Par exemple, si le quantifieur est dédié à une application de classification, il est alors judicieux de fabriquer l'espace des sorties par les étiquettes des  $K$  classes d'intérêts du problème. Dans ce cas, le dictionnaire serait défini par :  $\mathcal{C} = \{1, \dots, K\}$ . Evidemment dans cet exemple, le quantifieur n'est pas régulier. On rencontre souvent un cas particulier de la quantification vectorielle qui est celui où l'on peut décomposer  $Q_v$  par une succession de quantifieurs scalaires, chacun opérant sur une composante du vecteur d'entrée.

### 3.1.2 Parallèle avec les réseaux de neurones à seuil

Comme nous l'avons présenté en 1.2.2, les réseaux de neurones artificiels (RNA) ou formels ont pour vocation initiale de modéliser et de reproduire le fonctionnement de systèmes neuronaux biologiques. Depuis les années 50, de nombreux types de réseaux de neurones ont été développés intégrant diverses caractéristiques. Il existe ainsi des réseaux de neurones linéaires, non linéaires, adaptatifs, non-adaptatifs, statiques, dynamiques, déterministes, stochastiques etc... Les réseaux de neurones artificiels se sont donc naturellement étendus à la communauté du traitement du signal et des images mettant à profit leur fonctionnalité pour faciliter l'implantation d'algorithme. En traitement du signal par exemple, les RNA trouvent des applications en filtrage (non)-linéaire, identification, estimation, séparation de sources et déconvolution, prédiction, mais avant tout dans des problèmes de classification/détection et reconnaissance de formes [66, 74]. Dans ce paragraphe, nous présentons plusieurs façons de représenter un quantifieur sous forme de réseau de neurones, et nous insistons plus particulièrement sur celle ne comportant que des neurones à seuils.

#### 3.1.2.1 Un modèle de réseau de neurones formels

Les réseaux artificiels sont constitués de nombreuses cellules élémentaires, définies par un modèle de neurone, et organisées en couches selon une structure particulière définie par le modèle de connexion. Le modèle de neurone le plus utilisé est celui développé par McCulloch&Pitts [60, 105], il est représenté sur la gauche de la figure 3.5a. C'est un modèle de neurone à plusieurs entrées  $e_i$  pour  $i = 1, \dots, n_e$  et une seule sortie  $s$ . Le neurone est composé de deux fonctions :

- La fonction  $N : \mathbb{R}^{n_e} \times \mathbb{R}^{n_e} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction réseau, qui détermine comment les entrées  $e_i$ , les poids synaptiques  $w_i$ , et le seuil  $\theta$  agissent sur un potentiel  $p$ . Bien souvent, l'expression du potentiel est simplement le produit scalaire entre le vecteur d'entrée  $[e_1, \dots, e_{n_e}]^T$  et le vecteur poids  $[w_1, \dots, w_{n_e}]^T$  auquel s'ajoute la valeur du seuil  $\theta : p = \theta + \sum_{i=1}^{n_e} w_i e_i$ .
- La fonction  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction d'activation du neurone. Nous nous intéressons principalement au cas où la fonction d'activation est la différence de fonctions échelon unité, ou fonction de Heaviside.

L'architecture des connexions entre les neurones est le deuxième point qui définit un RNA. La configuration des connexions est souvent représentée par un graphe orienté, où les noeuds sont associés aux neurones et où les arcs orientés figurent les liens synaptiques. La topologie de tels graphes peut alors être acyclique ou cyclique, signifiant que les connexions inter-neurones sont directes ou récurrentes. La figure

3.5, présente en (b) un RNA à topologie acyclique, c'est à dire sans aucune boucle, et en (c) un RNA à topologie cyclique comportant plusieurs boucles de retour.

De plus, comme l'illustre la figure 3.5b, les connexions peuvent être partielles (sur le neurone 2), où certaines entrées d'un neurone  $e_i$  sont connectées au potentiel de référence du réseau, ou alors totales (sur le neurone 1), où toutes les entrées sont connectées, soit à une sortie d'un autre neurone ou soit à une entrée du réseau.

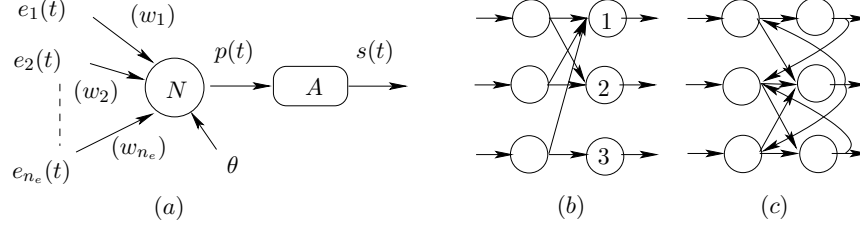


FIG. 3.5 – (a) - modèle de neurone de McCulloch & Pitts. (b) et (c) - représentation par graphe orienté de l'architecture d'un RNA. Topologie acyclique (b). Topologie cyclique (c). Les connexions de 1 sont totales, les connexions de 2 et 3 sont partielles.

Le modèle de neurone de McCulloch&Pitts, issu d'une inspiration biologique, est donc très modulaire. Nous pouvons ainsi l'utiliser pour représenter de plusieurs manières et à plusieurs étages les fonctions de quantification (vectorielle y compris) à partir de neurone à fonction d'activation très simple comme la fonction échelon unité symbolisant un neurone à seuil.

### 3.1.2.2 Des représentations neuronales de quantifieurs

Dans [46], les auteurs démontrent qu'il existe deux structures (primaires et secondaires) pour un quantifieur scalaire alors qu'ils en notent trois pour un quantifieur vectoriel. Nous allons seulement présenter les deux structures propres à un quantifieur scalaire. Dans tout les cas, les structures de représentation sont constituées d'éléments simples agencées logiquement et traitant la même information, et possède donc une représentation en réseau de neurone.

**Structure primaire :** La première structure d'un quantifieur scalaire provient du fait que la sortie du quantifieur peut s'écrire à partir de :

$$Q(x) = \sum_{k=1}^M q_k \Delta_k(x) \quad (3.15)$$

où les fonctions de sélections  $\Delta_k$  sont les fonctions indicatrices des ensembles  $\Delta_k$  :

$$\Delta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Delta_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La représentation graphique de (3.15) est portée par la figure 3.6. Le lien entre quantifieur scalaire et RNA est alors immédiat. Ce RNA comporte deux couches de neurones :

- La première est composée de  $M$  neurones à entrée simple et de poids unitaire, dont les fonctions de réseau  $N$  sont toutes égales à l'identité. La fonction d'activation du neurone  $k$  est définie par  $A_k(x) = \Delta_k(x)$ . Sur cette couche, les connexions sont partielles et directes.
- La seconde couche est simplement composée d'un neurone à  $M$  entrées qui réalise la somme pondérée par les  $(q_k)$  des  $M$  sorties de la couche précédente. Ce dernier neurone confère au réseau le terme d'architecture *pooled*, puisqu'il réalise la fusion, ici la somme, des informations de sorties des couches

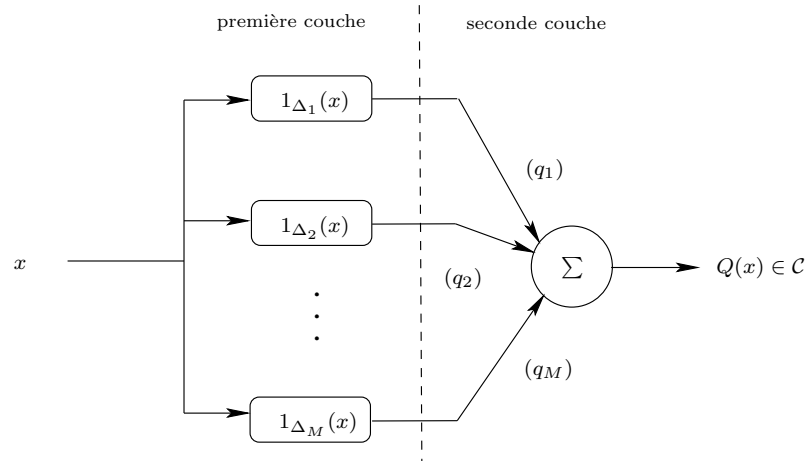


FIG. 3.6 – Représentation de la structure primaire d'un quantifieur scalaire. La représentation est équivalente à un RNA à deux couches.

précédentes.

Pour chaque échantillon  $x$  appliqué en entrée, seulement une branche de la première couche du réseau est activée. Ainsi, la sortie de la deuxième couche ne peut être composée que d'un seul mot de code. On vérifie ainsi l'équation (3.15), où seule une fonction de sélection  $\Delta_k$  est non nulle pour un échantillon  $x$  donné, et où les valeurs de sorties  $q_k$  affectent les sorties binaires de chaque sélecteur  $\Delta_k$  par leurs pondérations.

**Structure secondaire :** La deuxième structure d'un quantifieur scalaire fait intervenir des quantifieurs élémentaires à un seul niveau. Un quantifieur scalaire à un niveau, est un quantifieur régulier défini pour  $M = 1$ , et peut être représenté par une simple fonction échelon unité :

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.16)$$

Les fonctions de sélections  $\Delta_k$  peuvent être construites à partir des fonctions élémentaires définies par (3.16) :

$$\Delta_k(x) = U(x - t_{k-1}) - U(x - t_k) = U(x - t_{k-1})(1 - U(x - t_k)) \quad (3.17)$$

En insérant (3.17) dans (3.15), on obtient deux écritures différentes de la deuxième structure d'un quantifieur régulier. Les représentations réseau de la deuxième structure sont un peu plus compliquées puisqu'elles comportent une ou deux couches supplémentaires par rapport à la représentation de la figure 3.6. Néanmoins, pour ces représentations, les neurones sont plus simples, puisque leurs fonctions d'activation sont des fonctions échelon unité (3.16), et donc des quantifieurs à un seul niveau. Les connexions entre les premières couches du réseau permettent la réalisation de fonction indicatrice (3.17). La figure 3.7 donne les deux représentations de fonction indicatrice à partir de RNA à seuils.

**Décomposition codage/décodage :** D'autre part, d'un point de vue fonctionnel un quantifieur régulier peut toujours être décomposé en deux blocs distincts [46, 52]. Le premier bloc, le codeur  $\mathcal{E}$ , se charge du partitionnement de l'espace des valeurs d'entrée (par exemple  $\mathbb{R}^p$ ), et le second bloc, le décodeur  $\mathcal{D}_e$  est spécialisé dans l'affectation des codes :

$$\begin{array}{l} \mathcal{E} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{I} = \{1, \dots, M\} \\ x \longrightarrow k \text{ si } x \in \Delta_k \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathcal{D}_e : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{D} = \{q_1, \dots, q_M\} \\ k \longrightarrow q_k \end{array} \right. \quad (3.18)$$

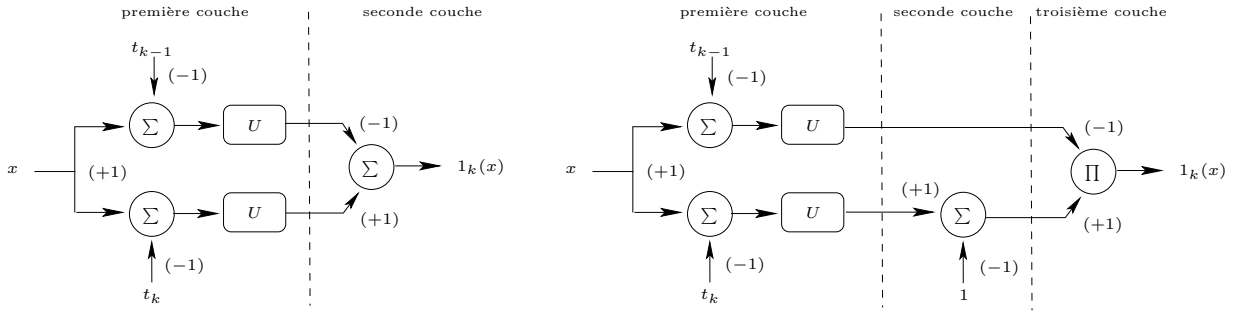


FIG. 3.7 – Architecture entre deux neurones de la première et de la deuxième couche d'un RNA représentant la deuxième structure d'un quantifieur.

L'opération d'encodage  $\mathcal{E}$ , peut alors être simplement définie par la fonction échelon unité (3.16), et on a :

$$\mathcal{E}(x) = \sum_{k=1}^M U(x - t_k) \quad (3.19)$$

La représentation réseau à seuils de l'opération  $\mathcal{E}$  est donnée par la figure 3.8a. La fonction d'activation du neurone est ici modélisé par la fonction échelon unité  $U$ . L'encodage  $\mathcal{E}$  d'un quantifieur possède donc une représentation réseau très simple. En effet, celle-ci est uniquement composée de neurones à seuil sans pondération associé aux valeurs de sortie du dictionnaire  $\mathcal{C}$ . La différence principale entre ce réseau et celui de la structure primaire de la figure 3.6 réside dans le nombre de branches actives après application d'une grandeur en entrée. En l'occurrence, pour que l'index de sortie du réseau soit maximal, il faut que tous les seuils  $t_k$  soient franchis. Par ailleurs, on constate souvent qu'une décomposition en éléments simples d'un système complexe nécessite souvent un très grand nombre de cellules primaires. Or ici, la complexité n'est pas augmentée, puisqu'il suffit de  $M$  comparateurs à seuil pour réaliser la partie d'encodage.

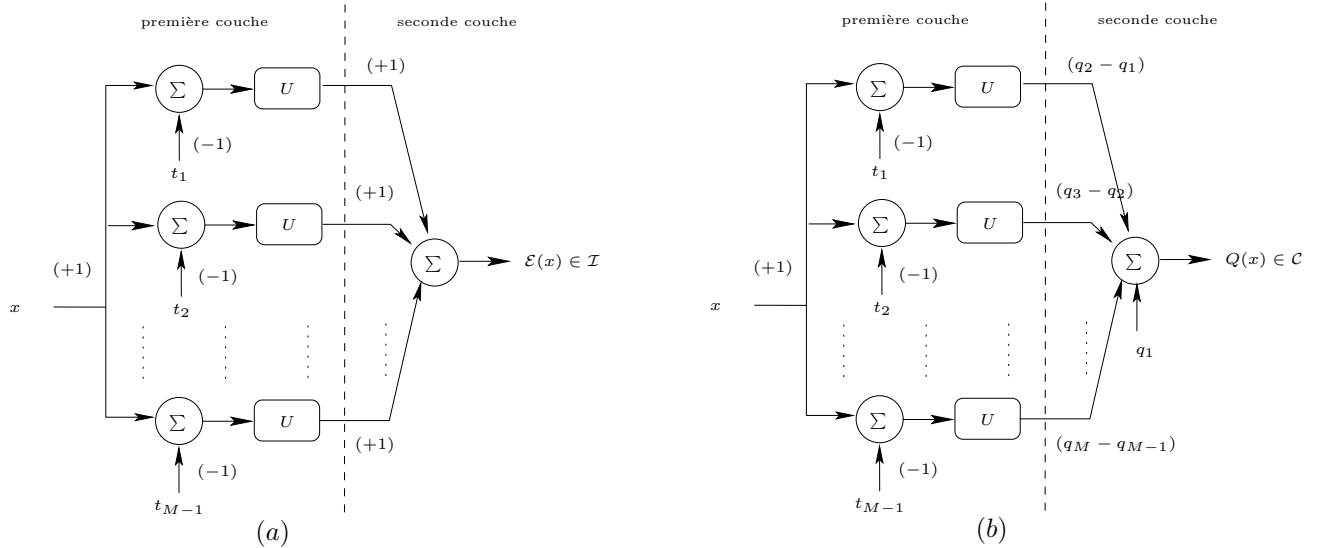


FIG. 3.8 – (a) - Représentation neuronale de la partie  $\mathcal{E}$  d'un quantifieur régulier à l'aide de neurones à seuil. (b) - Représentation neuronale en deux couches d'un quantifieur régulier à l'aide de neurones à seuil.

Alors que la fonction de codage  $\mathcal{E}$  indique l'index de la région à laquelle on peut associer l'entrée, l'étape  $\mathcal{D}_e$ , est directement reliée à la génération d'un code compréhensible pour les éléments placés en

post-traitement. Ainsi, la représentation neuronale la plus simple d'un quantifieur régulier est obtenue en pondérant les branches d'entrées du neurone de la seconde couche du RNA de l'encodeur pour y incorporer l'étape de décodage. La figure 3.8b donne cette représentation très simple. Celle-ci est d'architecture *pooled*, et est composée de seulement deux couches de neurones.

Dans cette partie, on a souligné quelques liens existants entre quantifieurs et réseaux de neurones artificiels, et notamment les réseaux de neurones à seuils. La décomposition (3.18) codage/décodage garantit que tout quantifieur peut être implanté sous forme d'un réseau de neurones. Par contre, la réciproque n'est pas toujours vérifiée, et ce même en relaxant la contrainte de régularité des quantifieurs. Néanmoins, pour des réseaux à seuils d'architecture simple, "l'amalgame" entre réseau et quantifieur est souvent possible. Ceci nous permet d'étudier le comportement de réseaux de neurones à seuils dédiés à une tâche de décision binaire, en les modélisant sous la forme de quantifieurs. Lorsque les réseaux sont complètement déterministes, alors les quantifieurs associés le sont également. Par contre, lorsqu'un réseau évolue sous l'influence de bruit, alors nous modélisons ce réseau par un quantifieur stochastique. Pour des quantifieurs-détecteurs déterministes, il est possible de déterminer de manière optimale la configuration des seuils et des niveaux garantissant un certain degré de performances de discrimination. La synthèse de quantifieurs-détecteurs optimaux fait l'objet de la partie qui suit. Le cas des quantifieurs-détecteurs stochastiques est traité en 3.3.

## 3.2 Quantification optimale pour la détection

Un problème de classification consiste à déterminer de quelle hypothèse est issue une séquence d'observation bruitée composée de  $N$  échantillons  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^N$ . La reconnaissance de lettres ou de chiffres en reconnaissance optique de caractères [80] en est un exemple. Nous supposons que la classification est également une des tâches cognitives prédominantes du système nerveux central et plus particulièrement du système visuel. En effet, pour qu'il y ait construction d'un code neuronal, il faut au préalable que les neurones sensoriels extraient les informations "pertinentes" des stimuli qui les excitent. C'est cette phase d'extraction que nous assimilons à un problème de classification. Dans un tel problème de classification, les hypothèses sont multiples, et lorsque le problème se réduit à deux hypothèses, alors celui-ci porte le nom de problème de détection ou de décision. Le suffixe binaire est souvent ajouté pour indiquer que seule deux hypothèses le composent. C'est ce type de problèmes que nous traitons par la suite, ceux-ci se posent de la sorte :

$$\begin{cases} H_0 & : \mathbf{x} \sim f_0 \\ H_1 & : \mathbf{x} \sim f_1 \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $f_0$  et  $f_1$  représentent respectivement les densités de probabilité des observations  $x_i$  sous chaque hypothèse  $H_0$  et  $H_1$  ( $F_j$  pour  $j = 0, 1$  représente alors la fonction de répartition sous l'hypothèse  $H_j$ ). On supposera que les observations  $x_i$  sont indépendantes entre elles.

Puisque les observations sont bruitées, il n'y a pas une solution simple aux problèmes du type (3.20). Le choix réalisé par un détecteur peut être correct pour une réalisation de  $\mathbf{x}$ , et faux pour une autre réalisation. Ces problèmes sont donc traités de façon à obtenir des solutions dites optimales. Or, l'optimalité est toujours définie selon un certain critère et pour une application donnée. Par exemple, dans le cas de la quantification optimale de représentation, le choix du type de quantification (scalaire ou vectorielle) ainsi que la taille  $M$  du quantifieur fixent la classe du problème. La résolution consiste à chercher des fonctions  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{D}$  d'un quantifieur qui minimise l'erreur quadratique moyenne EQM (ou tout autre distance) entre une variable aléatoire  $X$  et ses valeurs quantifiées. Les quantifieurs issus de la quantification à haute résolution ou de l'algorithme de Lloyd sont optimaux au sens de l'EQM [46].

Puisque c'est en minimisant une fonction d'erreur ou de coût ou encore en maximisant une fonction de performance que l'on obtient une solution optimale, il peut exister plusieurs solutions optimales à un



problème donné (par exemple pour deux fonctions coût différentes). D'autre part, le compromis performance/coût de réalisation d'un système se traduit en général en un problème d'optimisation dont les solutions sont restreintes à une classe de solutions réalisables. Cette remarque permet de faire la distinction entre solutions optimales et solutions sous-optimales, thème qui est discuté dans la partie 3.2.1. La partie 3.2.2 est consacrée à la classe de solutions sous-optimales définies par les quantifieurs-détecteurs. Dans cette partie, nous présentons deux méthodes de détermination de quantifieurs optimaux pour la détection. Enfin, la troisième partie comporte le calcul de la probabilité d'erreur d'un détecteur fondé sur un quantifieur déterministe, et également les performances de détection de trois quantifieurs optimaux (chacun selon un critère différent).

### 3.2.1 Détection - Solutions optimales et sous-optimales

La solution d'une application de détection est obtenue par optimisation d'un critère de performance. Le critère est fonction des informations à *priori* disponibles. La minimisation ou la maximisation de ce critère conduit à l'élaboration d'un détecteur, qui est optimal seulement vis-à-vis de ce critère. L'approche de Bayes, celle de Neyman Pearson ou encore la méthode du maximum à *posteriori*, [80, 157], conduisent à un détecteur optimal fondé sur le test du rapport de vraisemblance qui se résume à :

$$l(\mathbf{x}) = \frac{f_1}{f_0}(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (3.21)$$

ou à une transformation continue et monotone du rapport de vraisemblance  $l = f_1/f_0$ , avec par exemple le test de la log-vraisemblance défini par :

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \log l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \log l(x_i) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (3.22)$$

dans le cas où les observations  $\mathbf{x} = \{x\}_{i=1}^N$  sont indépendantes et identiquement distribuées. Dans le

test (3.22), la notation  $\underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta$  signifie que l'on décide  $H_1$  si  $l(\mathbf{x})$  est supérieur au seuil  $\eta$ , et que l'on

décide  $H_0$  dans le cas contraire. La structure du détecteur est donc identique pour toutes les stratégies énumérées ci-dessus. Seul le seuil de décision  $\eta$  prend une valeur différente pour chaque critère utilisé. La solution au sens du maximum de vraisemblance est obtenue pour  $\eta = 1$ , alors que celle correspondant au sens du maximum à *posteriori* est donnée par :

$$\eta = \frac{\pi_0}{\pi_1} \quad (3.23)$$

où  $\pi_0$  et  $\pi_1$  sont respectivement les probabilités d'occurrence des hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ . Si on opte pour la minimisation de la probabilité d'erreur de détection,  $P_e = \pi_0 P_f + \pi_1 P_m$ , où  $P_f = \Pr(\text{decider } H_1 | H_0 \text{ est vraie})$  est communément appelée la probabilité de fausse alarme, et où  $P_m = \Pr(\text{decider } H_0 | H_1 \text{ est vraie})$  représente la probabilité de manque, alors l'expression du seuil de détection est encore une fois donnée par (3.23). De ces définitions, la probabilité de détection a comme expression  $P_d = \Pr(\text{decider } H_1 | H_1 \text{ est vraie})$ . Cette grandeur est encore égale à  $1 - P_m$ . Selon la stratégie de Bayes, la minimisation du risque moyen conduit à une autre expression de seuil  $\eta$ , qui fait intervenir les coûts de décision. Le détecteur de Neyman Pearson est un peu différent dans le sens où l'on recherche la fonction de détection qui maximise  $P_d$  pour une  $P_f$  imposée. C'est la valeur de la probabilité de fausse alarme  $P_f$  qui permet de déduire la valeur du seuil de décision  $\eta$ .

Toutes ces stratégies de décision sont optimales pour le critère à partir duquel elles sont calculées, et selon la stratégie qui est retenue les performances de détection peuvent varier. Dans tous les cas, les meilleures performances susceptibles d'être atteintes se déduisent de l'expression du minimum de la probabilité d'erreur de détection (voir [118]) :

$$\min P_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E_0 [|\pi_1 l(\mathbf{x}) - \pi_0|] \quad (3.24)$$

où  $E_0$  représente l'espérance mathématique par rapport à la densité de probabilité  $f_0$  (hypothèse  $H_0$ ).

La structure du test (3.22) impose de connaître parfaitement au moins une (et souvent les deux) densité de probabilité des observations  $f_1$  et/ou  $f_0$ . Néanmoins, même si celles-ci sont réellement connues, il est souvent nécessaire d'être capable de calculer, pour tout vecteur d'observation  $\mathbf{x}$  leur *ratio* pour déterminer la fonction de vraisemblance  $l$ . Par exemple, les variables aléatoires  $\alpha$ -stable [141] sont définies par leur fonction caractéristique, et il n'existe que trois cas (Lévy, Gaussien, et Cauchy) où l'on connaît la forme explicite de leur densité de probabilité. Pour les autres cas, le calcul de la vraisemblance  $l$  ne peut être réalisé sans avoir recours à une intégration numérique qui risque d'être difficilement mise en œuvre par exemple dans un détecteur embarqué. Ce genre de contraintes a poussé la communauté de détection à étudier et envisager des structures sous-optimales pour la détection. La sous-optimalité apparaît souvent par le mode de résolution du problème. Par exemple, on peut imposer une contrainte de construction dans le mécanisme de recherche d'une solution optimale, qui conduit à une solution sous-optimale. Nécessairement, en ayant recours à des méthodes sous-optimales nous introduisons une perte de performances vis-à-vis de la solution optimale pour un certain critère. Dans [118], Orsak&Paris se sont tournés sur l'évaluation de telles pertes dans un cadre très général. L'un des résultats principaux qu'ils ont publié est un encadrement des pertes de performances  $\Delta P_e(G, \Lambda) = P_e(G) - P_e(\Lambda)$  mesurées par la différence entre la probabilité d'erreur d'un détecteur optimal  $\Lambda$  et celle d'un détecteur sous-optimal  $G$  :

$$\frac{1}{2} [d_\epsilon(f_0, f_1) - d_\epsilon(\psi_{0,G}, \psi_{1,G})] \leq \Delta P_e(\Lambda, G) \leq M (\pi_0 d_{KL}(\psi_{0,G}, \psi_{0,\Lambda}) + \pi_1 d_{KL}(\psi_{1,G}, \psi_{1,\Lambda})) \quad (3.25)$$

où  $d_\epsilon(f_0, f_1) = E_0[|\pi_1 l - \pi_0|]$  et  $d_{KL}(f_0, f_1) = E_0[l \log l]$  sont respectivement la divergence de Kolmogorov et la divergence de Kullback-Leibler [31], et où  $\psi_{i,G}$  représentent les distributions de sortie du détecteur  $G$  sous l'hypothèse  $H_i$  (c'est-à-dire la transformée de la densité de probabilité  $f_i$  par la fonction  $G$ ). La fonction  $M$  de la borne supérieure de (3.25) est une fonction croissante dont l'expression est explicitée dans [118].

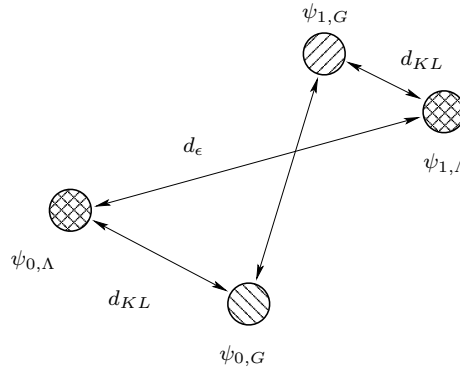


FIG. 3.9 – Procédure de réalisation d'un détecteur sous-optimal  $G$  fondée sur la minimisation de la perte de performance  $\Delta P_e(\Lambda, G)$  par rapport au détecteur du rapport de vraisemblance.

Ainsi, en se basant sur le résultat (3.25), Orsak&Paris ont proposé une méthode d'élaboration de détecteur sous-optimal :

1. pour que la borne inférieure soit la plus faible possible, il faut que la distance de Kolmogorov  $d_\varepsilon(\psi_{0,G}, \psi_{1,G})$  soit grande. Le détecteur  $G$  doit séparer les statistiques de sorties  $\psi_{0,G}$  et  $\psi_{1,G}$ ,
2. pour que la borne supérieure de  $\Delta P_e(\Lambda, G)$  diminue, il est nécessaire que le détecteur  $G$  minimise la séparation entre les densités de sorties  $\psi_{i,G}$  et  $\psi_{i,\Lambda}$  sous chaque hypothèses  $H_i$ .

Si ces deux opérations sont réalisées simultanément (voir figure 3.9), alors le détecteur  $G$  possède des performances très proches du détecteur optimal  $\Lambda$ . Dans [118], les auteurs précisent que si le test du rapport de vraisemblance fondé sur les distributions  $\psi_{i,G}$  est équivalent à un simple test de comparaison des données traitées par  $G$  à un seuil, alors la borne inférieure de (3.25) est atteinte. Dans ce cas, la procédure de recherche du détecteur sous-optimal se réduit à la maximisation de la divergence de Kolmogorov  $d_\varepsilon(\psi_{0,G}, \psi_{1,G})$  entre les statistiques de sorties  $\psi_{i,G}$ .

Le détecteur localement optimum est certainement un des détecteurs sous-optimaux les plus connus. Sa structure est identique à celle du détecteur fondé sur le test du rapport de vraisemblance, à la différence près que la fonction de transformation des données  $\Lambda$  est remplacée par la fonction score [80]. Même si ce détecteur offre des performances proches de celles obtenues par le détecteur  $\Lambda$  dans le cas où le signal à détecter est très faible, il peut être compliqué à implanter (par exemple pour  $f_0$  et  $f_1$   $\alpha$ -stable).

### 3.2.2 Les quantifieurs-détecteurs optimaux

Dans les années 1970, la communauté a introduit les quantifieurs dans les problèmes de détection (par exemple [1, 8, 17, 26, 79, 121, 125, 126]). Le principe de fonctionnement d'un quantifieur-détecteur  $Q$  de paramètres  $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  est de comparer la somme des  $N$  échantillons indépendants  $x_i$  après quantification à un seuil  $\eta$  :

$$T_Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N Q(x_i) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \eta \quad (3.26)$$

La structure d'un quantifieur détecteur (figure 3.10) est similaire à celle fondée sur les critères usuels (Bayes, Neyman Pearson, etc ...). Par construction, un détecteur quantifieur est nécessairement une solu-

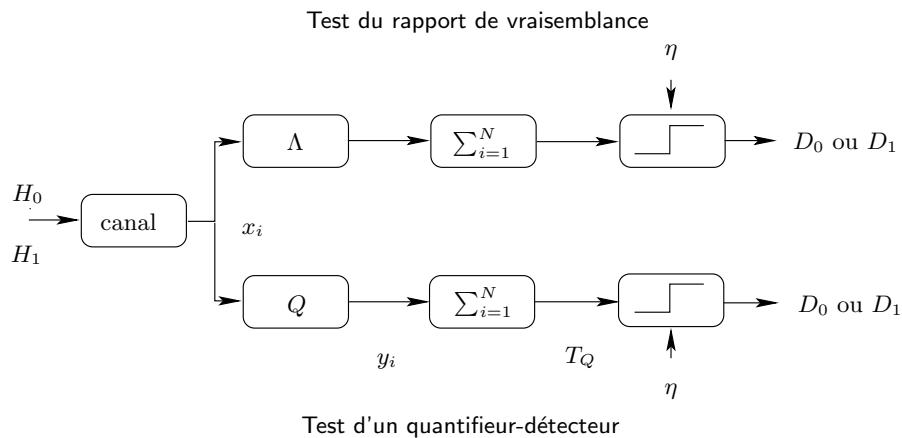


FIG. 3.10 – Comparaison des structures d'un détecteur fondé sur un test du rapport de vraisemblance  $\Lambda$  et d'un quantifieur-détecteur  $Q$  de paramètres  $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  pour des échantillons  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^N$  indépendants.

tion sous-optimale. En effet, pour que cette solution soit optimale, il faudrait que la log-vraisemblance  $\Lambda$  (ou vraisemblance) du problème soit égale à la fonction de transfert  $Q$  du quantifieur.

Optimiser un quantifieur  $Q$  de taille  $M$  pour réaliser une tâche de détection revient à déterminer les seuils  $\mathbf{t}$  et les niveaux de quantification  $\mathbf{q}$  minimisant un certain critère. L'efficacité est le critère d'optimisation retenu par Kassam dans [79]. Ce critère est une approximation du coefficient de déflexion [80]. La maximisation de la déflexion a été complètement résolue par Picinbono&Duvaut dans [121] en généralisant le problème aux quantifieurs vectoriels. Ils ont montré que pour une partition de seuils  $\Delta_k$  donnée, les niveaux de quantification optimaux sont simplement un rapport de vraisemblance local définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_k = \frac{P_1(\Delta_k)}{P_0(\Delta_k)} \quad \text{où} \quad \Delta_k = ]t_{k-1}; t_k] \\ P_j(\Delta_k) = \Pr [x_i \in \Delta_k \mid H_j] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_j(x) dx = F_j(t_k) - F_j(t_{k-1}) \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Ainsi, le quantifieur-détecteur  $Q$  est totalement caractérisé dès que la répartition optimale des seuils  $t_k$  est trouvée. Cette répartition doit garantir que la déflexion soit maximale.

La littérature associée à l'élaboration de quantifieur-détecteurs optimaux est assez riche, et les critères d'optimisation retenus sont également très variés. On trouve par exemple, le critère du Minimax dans [123], et un critère de robustesse vis-à-vis des variations du modèle dans [124]. Par la suite, nous ne développons que deux critères seulement. Le premier permet d'élaborer des quantifieur-détecteurs qui garantissent de minimiser (ou maximiser) une divergence entre les statistiques sous chaque hypothèse post-quantification. Le second critère permet de déterminer la distribution de seuil du quantifieur à partir de l'approche asymptotique présentée en 3.1.1.

### 3.2.2.1 Quantifieurs-détecteurs maximisant une $f$ -divergence

Dans [126], Poor&Thomas ont une approche similaire à celle de Picinbono&Duvaut. Les niveaux de quantifications  $q_k$  sont également déterminés par le rapport de vraisemblance des partitions de seuils donné par l'expression (3.27). Cependant, les seuils du quantifieur doivent à présent maximiser une  $f$ -divergence [88] entre les mesures de probabilité des données de sortie du quantifieur sous chaque hypothèse. Les quantifieur-détecteurs maximisant une  $f$ -divergence sont ainsi définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_k = \frac{P_1(\Delta_k)}{P_0(\Delta_k)} \quad \text{pour} \quad k = 1 \dots M \quad \text{et pour} \quad \Delta_k = ]t_{k-1}; t_k] \\ \mathbf{t} = \underset{\mathbf{t}}{\text{Arg max}} [d_f(\psi_{0,Q}, \psi_{1,Q})] \end{array} \right. \quad (3.28)$$

où les seuils optimaux sont obtenus à l'aide de procédures d'optimisation numériques classiques telles que la descente de gradient ou l'algorithme de Newton-Raphson.

Poor&Thomas montre que la borne inférieure de Orsak&Paris (3.25) est forcément atteinte puisque le test du rapport de vraisemblance fondé sur les statistiques post-quantification est équivalent à la comparaison de la somme des données quantifiées à un seuil. Dans ce cas, minimiser la perte de performance  $\Delta P_e$  est équivalent à maximiser la divergence de Kolmogorov  $d_\varepsilon(\psi_{0,Q}, \psi_{1,Q})$ . Néanmoins, la maximisation de cette divergence est délicate, c'est pourquoi Poor&Thomas proposent de maximiser d'autres divergences, celles appartenant à la famille des  $f$ -divergences. Bien entendu, remplacer la divergence de Kolmogorov par une autre apporte une modification au critère de performance. Pour la divergence  $d_\varepsilon(f_0, f_1) = E_0[|\pi_1 l - \pi_0|]$ , d'après (3.24), le critère est une fonction affine du minimum de la probabilité d'erreur :  $\min P_e = 1/2[1 - d_\varepsilon(f_0, f_1)]$ . La solution obtenue selon ce procédé est donc la meilleure solution de toutes les solutions sous-optimales de la famille des quantifieurs. En prenant une autre divergence, la solution peut être optimale pour cette divergence, mais ne peut l'être au sens de la probabilité d'erreur.

### 3.2.2.2 Quantifieurs-détecteurs asymptotiques

Plusieurs stratégies de développement de quantifieurs-détecteurs ont été élaborées à partir de l'approche asymptotique présentée dans la partie 3.1.1. On rappelle que cette approche est fondée sur le fait que la taille du quantifieur  $M \rightarrow \infty$ . Que ce soit pour un quantifieur scalaire ou vectoriel, on montre que l'optimalité est obtenue en optimisant la fonction de densité de seuils  $\lambda$  (voir (3.1.1.2)) maximisant/minimisant un critère de performances/fonction coût tel que : l'erreur quadratique moyenne [17], les  $f$ -divergences généralisées [125], la probabilité d'erreur asymptotique [8], ou encore les exposants des bornes de Stein et de Sanov [56].

Par exemple, dans [125], Poor étudie dans un cadre général les pertes de performances apportées par l'utilisation d'un quantifieur  $Q$  dans un problème de détection. Pour cela, il montre au préalable que l'on peut mesurer les performances d'un système à l'aide des  $f$ -divergences généralisées :  $d(p, f, l) = E_p[f(l(\mathbf{x}))]$  où  $p$  est une densité de probabilité,  $f$  une fonction convexe de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction des observations. Dans le cas d'un problème de détection binaire (3.20), on prend :  $p = f_0$ , la mesure de probabilité des observations sous l'hypothèse  $H_0$ , et  $l$  la fonction de vraisemblance du problème. Si on choisit  $f$  telle que  $f(l) = l \log l$ ,  $d$  mesure l'information de Kullback-Leibler, c'est-à-dire l'information de discrimination de  $H_0$  en faveur de  $H_1$  [88]. D'autre part, si on choisit  $f(l) = -\pi_1^\kappa \pi_0^{1-\kappa} l^\kappa$  avec  $\kappa \in [0, 1]$ ,  $d$  conduit à l'évaluation de la borne de Chernoff, une borne sur la probabilité d'erreur minimale [17, 125, 157].

Poor a montré que les pertes de performances asymptotiques du détecteur dues à la quantification des observations  $\mathbf{x}$  à partir de quantifieurs uniformes de pas  $q \rightarrow 0$  ont comme expression :

$$L_Q((f_0, f, l) = d(f_0, f, l) - d(f_0, f, l_Q) = \frac{q^2}{24} E_0 [\|\nabla l(\mathbf{x})\|^2 f''(l(\mathbf{x}))]$$

où le gradient de la vraisemblance est noté  $\nabla l$ , et où  $l_Q$  est définie par  $E[l(\mathbf{x})|Q(\mathbf{x})]$ . Pour un problème de détection cette espérance se réduit à (3.27), et donc  $l_Q(x) = P_1(\Delta_i)/P_0(\Delta_i)$  si  $x \in \Delta_i$ . En utilisant le formalisme *compander* (voir 3.1.1), Poor montre que les pertes asymptotiques d'un quantifieur régulier scalaire<sup>2</sup> non uniforme de fonction de compression  $G$  et de densité de seuil  $\lambda = G'$  peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$L_Q(f_0, f, l) \sim \frac{1}{24M^2} E_0 \left[ \left( \frac{l'(x)}{\lambda(x)} \right)^2 f''(l(x)) \right] \quad (3.29)$$

où  $f_M(x) \sim g_M(x)$  si  $\lim_{M \rightarrow \infty} f_M(x)/g_M(x) = 1$ . Par l'inégalité de Hölder, on montre en annexe D que la densité de seuils obtenue à partir de (3.29) lorsque  $f(l) = -l^\kappa$  est donnée par :

$$\lambda(x) \propto \left[ \left( \frac{l'(x)}{l(x)} \right)^2 f_1^\kappa(x) f_0^{1-\kappa}(x) \right]^{1/3} \quad (3.30)$$

où  $f_0$  et  $f_1$  représentent respectivement la densité de probabilité des observations sous l'hypothèse  $H_0$  et  $H_1$ . De même, pour  $f(l) = (l-1) \log l$  ( $J$ -divergence), la densité de seuils optimale  $\lambda$  est obtenue à partir de :

$$\lambda(x) \propto \left[ \left( \frac{l'(x)}{l(x)} \right)^2 (f_1(x) + f_0(x)) \right]^{1/3} \quad (3.31)$$

Comme la fonction de densité de seuil  $\lambda$  est par définition égale à la dérivée de la fonction de compression  $G'$ , on peut rechercher en théorie une primitive de  $\lambda$ . En pratique, il est courant de rechercher les seuils de quantifications en appliquant  $G^{-1}$  à l'entrée d'un quantifieur uniforme (voir figure 3.4) de taille  $M$  finie. Évidemment les résultats de détection obtenus avec cette procédure d'optimisation varient beaucoup avec la taille  $M$  du quantifieur.

Le paragraphe suivant présente la mesure de performance que nous utilisons pour tester les schémas de détection de quantifieurs représentant des réseaux neuronaux simples, des réseaux à seuils.

<sup>2</sup>Dans l'article de Poor, ce résultat est donné pour un quantifieur vectoriel composé par le produit de quantifieur régulier scalaire.

### 3.2.3 Performances des quantifieurs en détection

Les critères d'évaluation des performances des schémas de détection sont étroitement liés avec les critères de développement des stratégies de détection. Néanmoins, même si les techniques d'élaboration de stratégies de détection sont nombreuses, on peut regrouper ces critères d'évaluations en deux corps. En effet, on distingue les critères dit globaux, fondés sur les réseaux de courbes COR et les critères locaux telle que la probabilité d'erreur [56]. Dans cette partie, nous nous intéresserons plus particulièrement à l'évaluation de la probabilité d'erreur de détection, la mesure locale la plus pertinente des problèmes de détection que nous testons.

#### 3.2.3.1 Probabilité d'erreur de détection d'un quantifieur déterministe

Supposons que les données observées soient regroupées au sein du vecteur  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$ . Lorsque le détecteur est un quantifieur défini par le couple de vecteurs de seuils et de niveaux  $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ , alors le test de décision est fondé sur la statistique  $T_Q$  donnée par (3.26) :

$$T_Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N Q(x_i) = \sum_{k=1}^M n_k q_k \geq \eta$$

où  $n_k$  est une variable aléatoire qui représente le nombre d'échantillons  $x_i$  appartenant à l'intervalle  $\Delta_k = ]t_{k-1}; t_k]$ , c'est-à-dire, le nombre des  $N$  composantes du vecteur d'observation  $\mathbf{x}$  ayant comme représentation quantifiée le niveau  $q_k$ . Dans le cas où les observations  $x_i$  sont indépendantes et identiquement distribuées, le vecteur aléatoire  $\mathbf{n} = [n_1, \dots, n_M]^T$  est distribué selon une loi multinomiale [84] sous chaque hypothèse  $H_j$  pour  $j = 0, 1$  :

$$\mathbf{n} \sim \mathcal{M}(N, P_j(\Delta_1), \dots, P_j(\Delta_M)) \quad (3.32)$$

avec  $P_j(\Delta_k) = \Pr[x_i \in \Delta_k | H_j] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_j(x) dx = F_j(t_k) - F_j(t_{k-1})$ . Sous l'hypothèse hypothèse  $H_j$ , la probabilité conditionnelle que le vecteur aléatoire  $\mathbf{n} = [z_1, \dots, z_M]^T$ , tel que  $\sum_{k=1}^M z_k = N$  se note :

$$\Pr[\mathbf{n} = [z_1, \dots, z_M]^T | H_j] = \frac{N!}{z_1! \dots z_M!} P_j(\Delta_1)^{z_1} \dots P_j(\Delta_M)^{z_M} \quad (3.33)$$

Soit  $\mathcal{D}(T, \mathbf{q}, \eta)$ , un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^M$ , fonction du nombre d'échantillons  $N$ , du seuil de détection  $\eta$  et du vecteur de niveaux  $\mathbf{q}$ , définit par :

$$\mathcal{D}(N, \mathbf{q}, \eta) = \left\{ \mathbf{z} \in \{0, \dots, N\}^M / \sum_{k=1}^M z_k = N \text{ et } \sum_{k=1}^M z_k q_k > \eta \right\} \quad (3.34)$$

La probabilité d'erreur de détection  $P_e$  peut alors être évaluée à partir de :

$$P_e = \pi_0 P_f + \pi_1 P_m = \pi_1 + \pi_0 P_f - \pi_1 P_d$$

où la probabilité de fausse alarme et la probabilité de détection peuvent être calculées à l'aide des expressions suivantes :

$$\begin{aligned} P_f &= \Pr[T_Q(\mathbf{x}) > \eta | H_0] \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{D}(N, \mathbf{q}, \eta)} \frac{N!}{z_1! \dots z_M!} \prod_{k=1}^M P_0(\Delta_k)^{z_k} \end{aligned} \quad \left\| \quad \begin{aligned} P_d &= \Pr[T_Q(\mathbf{x}) > \eta | H_1] \\ &= \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{D}(N, \mathbf{q}, \eta)} \frac{N!}{z_1! \dots z_M!} \prod_{k=1}^M P_1(\Delta_k)^{z_k} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ainsi, la probabilité d'erreur  $P_e$  de tout quantifieur-détecteur a pour expression :

$$P_e = \pi_1 + \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{D}(N, \mathbf{q}, \eta)} \frac{N!}{z_1! \dots z_M!} \left( \pi_0 \prod_{k=1}^M P_0(\Delta_k)^{z_k} - \pi_1 \prod_{k=1}^M P_1(\Delta_k)^{z_k} \right) \quad (3.36)$$

### 3.2.3.2 Performances de détection des quantifieurs optimaux

Le problème de détection considéré ici, est symétrique en zéro. Il consiste à détecter une constante  $c$  positive sous  $H_1$ , et  $-c$  sous  $H_0$ , dans du bruit blanc, centré, et de puissance  $\sigma_\xi^2$  :

$$\begin{cases} H_0 : x_i = \xi_i - c & , \quad x_i \sim f_0(x) \\ H_1 : x_i = \xi_i + c & , \quad x_i \sim f_1(x) \end{cases}$$

A partir de la formule (3.36) nous avons tracé sur la figure 3.11 la probabilité d'erreur de trois quantifieur-détecteurs optimaux, chacun selon un critère différent, en fonction du rapport signal sur bruit ( $RSB$ ). Les valeurs des seuils et des niveaux de ces trois quantifieurs sont donnés en annexe D, et nous définissons l'expression du  $RSB$  par :  $RSB = c^2/\sigma_\xi^2$ . Les trois quantifieurs sont de taille  $M = 8$ , et la séquence d'observation  $\mathbf{x}$  est composée de  $N = 5$  échantillons indépendants.

Le premier des trois quantifieur, noté  $8-Q_{PT,J}$ , est optimal selon le critère de Poor&Thomas (PT) de la partie 3.2.2 pour une  $J$ -divergence. Le quantifieur noté  $8-Q_{\infty,C}$  est un quantifieur asymptotique (voir 3.2.2.2) au sens de la borne de Chernoff. Enfin, le quantifieur noté  $8-Q_{\infty,J}$  est un quantifieur asymptotique au sens de la  $J$ -divergence.

La densité de probabilité du bruit de canal  $\xi$  utilisée pour le graphique de gauche de la figure 3.11 est laplacienne. Pour celle de droite, la densité de probabilité de  $\xi$  est gaussienne.

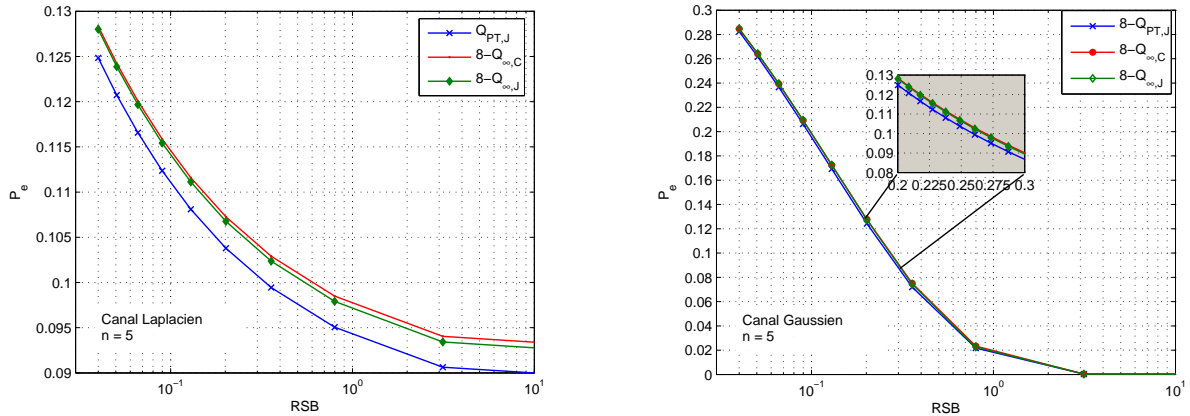


FIG. 3.11 – Comparaison de la probabilité d'erreur de trois quantifieur-détecteur optimaux de taille  $M = 8$  :  $8-Q_{PT,J}$ ,  $8-Q_{\infty,C}$  et  $8-Q_{\infty,J}$  en fonction du  $RSB = c^2/\sigma_\xi^2$ . Gauche - canal laplacien. Droite - canal gaussien.

Plus le  $RSB$  augmente et plus la tâche de détection est aisée, et c'est pourquoi les courbes sont décroissantes. Dans le cas gaussien, les performances des trois quantifieurs sont très proches. Néanmoins, que ce soit pour un bruit de canal laplacien ou gaussien, on remarque que la courbe de performances du  $8-Q_{PT,J}$  est toujours placée au dessous des deux autres. En effet, les deux quantifieurs  $8-Q_{\infty,C}$  et  $8-Q_{\infty,J}$  sont des quantifieurs asymptotiques. Leurs performances sont optimales lorsque la taille du quantifieur tend vers l'infini.

Dans la section 3.1, on a montré que les quantifieurs réguliers possèdent une représentation sous forme de réseau à seuils. Par conséquent, l'étude du fonctionnement de ces réseaux simples impliqués dans une application de détection peut être menée à partir de quantifieur régulier. Nous venons de voir dans cette partie qu'il est possible de déterminer les paramètres d'un quantifieur déterministe pour qu'il fonctionne de manière optimale selon un certain critère et pour une application donnée.

Néanmoins, peut-on connaître, si il en existe un, le critère retenu par la nature dans les systèmes biologiques ? De plus, dans un système naturel, tel que le processus de vision, les réseaux de neurones qui

le composant ne peuvent pas être considérés déterministes. En supposant qu'une procédure d'optimisation soit réalisée lors de la formation du réseau, quels sont les performances du réseau évoluant dans du bruit ambiant ? Nous étudions dans la partie suivante quel est l'effet de fluctuations aléatoires des paramètres de quantification de quantifieur-détecteur : les quantifieur-détecteurs stochastiques.

### 3.3 Détection par quantifieurs stochastiques

La variabilité neuronale présentée dans la partie 1.2.2 traduit le fait que les réseaux de neurones impliqués dans le processus de vision évoluent en environnement bruité. Les réseaux que nous étudions dans ce chapitre sont de simples réseaux de neurones à seuils. La prise en compte de la variabilité neuronale au sein de ces réseaux est réalisée par l'utilisation de quantifieurs stochastiques, c'est-à-dire un quantifieur dont les seuils et les niveaux sont modifiés aléatoirement au cours du temps par du bruit interne (voir figure 3.12).

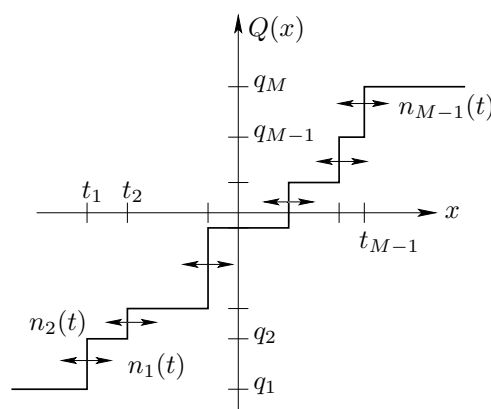


FIG. 3.12 – Illustration de la caractéristique de transfert d'un quantifieur stochastique.

Sans bruit, en supposant que les seuils et les niveaux du réseau à seuils (ou du quantifieur) aient été choisis selon les stratégies des parties 3.2.2 et 3.2.3, alors les performances du réseau sont optimales au sens des critères utilisés. Il est évident que les performances du réseau se dégradent lorsqu'il évolue dans un environnement bruité, que les détecteurs deviennent des solutions sous-optimales. Néanmoins, nous avons donné un exemple dans la partie 1.4.2 illustrant que les réseaux à seuils possèdent des comportements assez étranges en présence de bruit : ils sont capables d'améliorer leurs performances lorsque du bruit est ajouté sur leurs seuils [135, 154, 155]. L'effet de *dithering* montre également que le bruit peut être bénéfique aux quantifieurs dans des applications audio ou visuelles [20, 21, 53, 130, 161].

Cette partie vise à montrer comment évoluent les performances des quantifieurs initialement optimaux (mais devenus stochastiques) lorsqu'ils sont soumis à des fluctuations. On veut également étudier comment réagissent des schémas de détection fondés sur des quantifieurs quelconques, des quantifieurs n'ayant pas été optimisés pour une tâche de détection précise, lorsqu'ils sont soumis à des fluctuations.

Dans un premier temps, nous décrivons tout d'abord les modèles de quantifieurs stochastiques utilisés dans le chapitre. Les performances de détection des détecteurs fondés sur des quantifieurs stochastiques sont évaluées à l'aide de la probabilité d'erreur de détection. Nous établissons dans la deuxième partie les expressions de la probabilité d'erreur de quelques détecteurs quantifieurs stochastiques. Enfin, la troisième partie est consacrée à la présentation des résultats des tests des schémas de détection fondés sur les différents quantifieurs stochastiques, et à l'étude de l'influence des différents paramètres des modèles. Nous verrons qu'il existe au sein de ces dispositifs des phénomènes d'amélioration de détection via le bruit, ce fait est finalement discuté dans la quatrième et dernière partie.



### 3.3.1 Description des quantifieurs stochastiques

Un quantifieur stochastique est un quantifieur dont les seuils et les niveaux sont des variables aléatoires. Dans cette étude, nous imposons quelques restrictions à cette définition générale. Tout d'abord, les quantifieurs stochastiques étudiés sont simplement obtenus en ajoutant du bruit variant ou invariant au cours du temps  $i$  sur les seuils  $\mathbf{t}$  d'un quantifieur déterministe  $Q$ . Les niveaux du quantifieur stochastique sont à la fois fonction des seuils bruités et non bruités offrant ainsi l'avantage de travailler avec des quantifieurs à niveaux fixes ou adaptés avec le même modèle. Nous noterons respectivement les seuils bruités  $\tilde{\mathbf{t}}$  et les niveaux aléatoires  $\tilde{\mathbf{q}}$  du quantifieur stochastique  $\tilde{Q}$  pour faire la distinction entre les paramètres  $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$  du quantifieur déterministe  $Q$ .

Deuxièmement, nous avons choisi d'imposer la structure initiale du quantifieur. Les quantifieurs stochastiques étudiés sont bâtis à partir de quantifieurs uniformes. Les propriétés des quantifieurs uniformes sont décrites dans la partie 3.1.1. A partir de (3.6), les seuils et les niveaux initiaux (sans fluctuations aléatoires) d'un quantifieur uniforme de taille  $M$  et de pas  $q$  sont :

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline t_0 = -\infty & t_M = \infty & t_k = t_1 + (k-1)q \quad \forall k = 1, \dots, M-1 \\ \hline q_1 = t_1 - q/2 & q_M = q_{M-1} + q/2 & q_k = (t_k + t_{k-1})/2 \quad \forall k = 2, \dots, M-1 \\ \hline \end{array} \quad (3.37)$$

Les expressions au cours du temps  $i$  des seuils bruités  $\tilde{\mathbf{t}}(i)$ , et des niveaux  $\tilde{\mathbf{q}}(i)$  (avec fluctuations aléatoires) du modèle général de quantifieur stochastique que nous avons retenu sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{t}_k(i) &= t_k + r_k(i) = t_k + \alpha_k(i) + \tau_k(i) \\ \tilde{q}_k(i) &= h(\mathbf{t}, \mathbf{r}(i)) \end{cases} \quad (3.38)$$

pour  $k = 1, \dots, M-1$  et pour  $i = 1, \dots, N$ . Dans (3.38),  $h$  est une fonction réelle de variables réelles, et  $\tau_k(i)$  est un processus aléatoire blanc centré, de densité de probabilité  $f_{\tau_k}$ . De plus, on supposera que les  $\tau_k$  sont indépendants entre eux. Les constantes déterministes  $\alpha_k(i)$  fixent la moyenne à chaque instant  $i$  de la fluctuation aléatoire appliquée au seuil  $t_k(i)$ . Enfin, on note également  $r_k(i) = \alpha_k(i) + \tau_k(i)$ , le bruit de seuil appliqué au seuil  $t_k$  à l'instant  $i$ . Par conséquent, la densité de probabilité conjointe de tous les seuils bruités  $\tilde{\mathbf{t}}$  à un instant  $i$  particulier se note :

$$f_{\tilde{\mathbf{t}}, i}(\boldsymbol{\theta}, i) = \prod_{k=1}^{M-1} f_{\tilde{t}_k, i}(\theta_k, i) \quad \text{où} \quad f_{\tilde{t}_k, i}(\theta_k, i) = f_{\tau_k}(\theta_k - \alpha_k(i) - t_k) \quad (3.39)$$

Ainsi, contrairement aux quantifieurs déterministes, pour caractériser complètement un quantifieur stochastique appartenant au modèle (3.38), il ne suffit plus de connaître seulement le couple  $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ , mais également les lois des fluctuations aléatoires qui y siègent (3.39), ainsi que  $h$  la fonction de modification des niveaux.

Nous avons décidé d'étudier le comportement de quatre types de détecteur-quantifieur stochastique issus du modèle général (3.38) dans des problèmes de détection binaire :

- quantifieur uniforme invariant stochastique (QUIS),
- quantifieur uniforme variant stochastique (QUVS),
- quantifieur adapté invariant stochastique (QAIS),
- quantifieur adapté variant stochastique (QAVS).

Chacun de ces quatre quantifieurs stochastiques présentent l'une ou l'autre des caractéristiques présentées dans les deux paragraphes suivants.

### 3.3.1.1 Quantifieurs uniformes/adaptés stochastiques

La distinction entre ces deux types de quantifieurs porte sur la valeur des niveaux de quantification.

- Un quantifieur uniforme stochastique, qui peut être variant ou invariant, est un quantifieur décrit par (3.38), pour lequel la fonction d'adaptation  $h$  des niveaux est telle que  $\tilde{q}_k(i) = q_k$  pour tout  $k = 1, \dots, M$  et pour tout  $i = 1, \dots, N$ , et où les  $q_k$  sont donnés par (3.37). Ainsi, seuls les seuils de ce type de quantifieur sont aléatoires, les niveaux de sorties sont déterministes. Le terme de quantifieur uniforme stochastique, se justifie par le fait que l'écart entre deux niveaux consécutifs est toujours constant  $\tilde{q}_{k+1} - \tilde{q}_k = q$ .
- Par opposition au quantifieur uniforme, un quantifieur adapté stochastique (variant ou invariant), est un quantifieur dont les niveaux de sortie sont aléatoires et fonctions des seuils bruités  $\tilde{\mathbf{t}}(i)$ . La fonction de modification  $h$  des niveaux de sortie est ici la fonction de log-vraisemblance du problème de détection :  $h = \Lambda$ . Pour chaque intervalle  $\tilde{\Delta}_k(i) = ]\tilde{t}_{k-1}(i); \tilde{t}_k(i)]$ , le niveau du quantifieur est égal à la log-vraisemblance locale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{q}_k(i) = \Lambda(\tilde{t}_{k-1}(i), \tilde{t}_k(i)) = \log \frac{P_1(\tilde{\Delta}_k(i))}{P_0(\tilde{\Delta}_k(i))} \\ \text{avec} \\ P_j(\tilde{\Delta}_k(i)) = \Pr [x_i \in \tilde{\Delta}_k(i) \mid H_j] = \int_{\tilde{t}_{k-1}(i)}^{\tilde{t}_k(i)} f_j(x) dx = F_j(\tilde{t}_k(i)) - F_j(\tilde{t}_{k-1}(i)) \end{array} \right.$$

Ainsi, un quantifieur adapté stochastique est par construction, et à tout instant  $i$ , une approximation en escalier de la fonction de vraisemblance du problème. Le terme adapté provient du fait que les niveaux  $\tilde{q}(i)$  s'adaptent aux statistiques des données d'entrée, et ce quelles que soient les fluctuations aléatoires de seuils.

### 3.3.1.2 Quantifieurs stochastiques variants et invariants dans le temps

Le modèle (3.38) de quantifieurs stochastiques est un modèle dont les seuils et les niveaux peuvent fluctuer au cours du temps ou pas. Ainsi, nous distinguerons deux classes de quantifieurs stochastiques :

- La classe des quantifieurs stochastiques variant dans le temps : Cette classe s'applique aux réseaux qui possèdent des fluctuations internes de constante de temps faible devant la constante de temps d'évolution de la grandeur d'entrée. Pour une application de détection, cela signifie que le détecteur fondé sur un quantifieur stochastique est tiré aléatoirement pour chaque échantillon de la séquence d'entrée  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^N$ . La décision est prise à partir d'une séquence  $\mathbf{x}$  composée de  $N$  échantillons et de  $N$  quantifieur-détecteurs.
- La classe des quantifieurs stochastiques invariant dans le temps : Cette classe s'applique aux réseaux qui possèdent des fluctuations internes de constante de temps élevée par rapport à la constante de temps d'évolution de la grandeur d'entrée. Le terme de quantifieur stochastique invariant dans le temps est un peu abusif dans le sens où les paramètres du quantifieur varient quand même dans le temps. Seulement on considère que les variations ne sont notables qu'au bout d'un certain laps de temps. Par exemple, pour une application de détection, on peut supposer que toute la séquence d'observation  $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^N$  soit traitée avec le même détecteur, et que les fluctuations du quantifieur agissent uniquement pendant l'acquisition des données d'entrée.

### 3.3.1.3 Représentation réseau des quantifieurs stochastiques

Les expressions des seuils et des niveaux des quatre types de détecteur testés par la suite sont résumés dans le tableau 3.1. Les sigles des quatre quantifieurs permettent de distinguer si le quantifieur Q est

uniforme (U) ou adapté (A), et invariant (I) ou variant (V) dans le temps. La lettre (S) indique que le quantifieur est de nature stochastique. Nous complétons la notation en faisant précéder le sigle par la taille  $M$  du quantifieur :

Q : quantifieur	U : uniforme	A : adapté
I : invariant	$\tilde{t}_k = t_k + \alpha_k + \tau_k$ $\tilde{q}_k = q_k$	$\tilde{t}_k = t_k + \alpha_k + \tau_k$ $\tilde{q}_k = \frac{P_1(\tilde{\Delta}_k)}{P_0(\tilde{\Delta}_k)}$
V : variant	$\tilde{t}_k(i) = t_k + \alpha_k(i) + \tau_k(i)$ $\tilde{q}_k(i) = q_k$	$\tilde{t}_k(i) = t_k + \alpha_k(i) + \tau_k(i)$ $\tilde{q}_k(i) = \frac{P_1(\tilde{\Delta}_k(i))}{P_0(\tilde{\Delta}_k(i))}$

TAB. 3.1 – Tableau récapitulatif des paramètres des quantifieurs stochastiques de type : QUIS, QAIS, QUVS, QAVS, avec  $k = 1, \dots, M$  et pour  $i = 1, \dots, N$ .

La figure 3.13 donne les représentations sous formes de réseau de neurones à seuils des quantifieurs uniformes stochastiques présentés dans ce tableau. La gauche de la figure donne la représentation réseau d'un quantifieur QUIS ou QUVS. La structure du réseau est aussi simple que celle d'un réseau de quantifieur régulier déterministe. Le réseau est uniquement composé de deux couches de neurones à seuils. La seule différence provient du nombre d'entrées des neurones de la première couche. En effet, chaque neurone de la première couche possède trois entrées. Une des entrées du neurone  $k$  est constante, de pondération synaptique  $(-1)$ , et symbolise la valeur initiale du seuil  $t_k$ . Une autre reçoit la valeur de l'échantillon à traiter  $x(i)$ , et enfin la dernière est reliée au bruit de seuil  $n_k(i)$  par une pondération synaptique égale à  $(-\sigma_k)$ . Le neurone final de la deuxième couche réalise la somme pondérée par  $q$  des  $M - 1$  sorties des neurones de la première couche et du niveau plancher  $q_1 = t_1 - \frac{q}{2}$ .

Par contre, les quantifieurs stochastiques adaptés nécessitent nettement plus de connexions que les quantifieurs stochastiques uniformes. Pour assurer l'adaptation des niveaux de seuils, il est nécessaire que certains neurones effectuent le calcul de la log-vraisemblance. Nous ne donnons pas de représentation réseau de ce type de quantifieurs stochastiques.

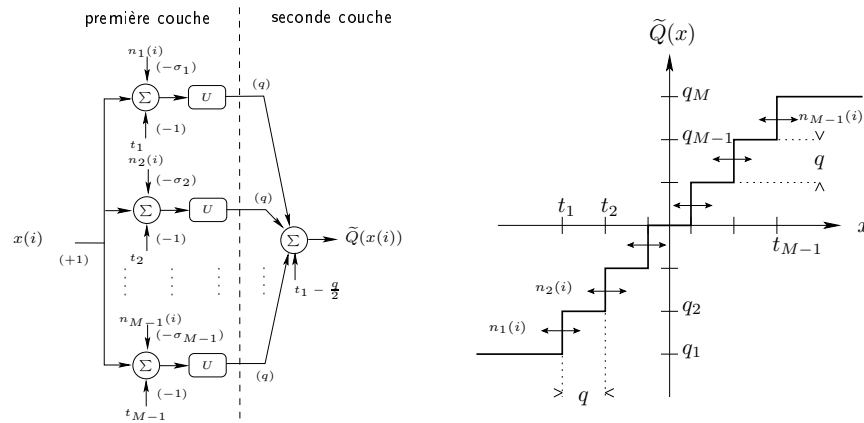


FIG. 3.13 – Équivalence réseau à seuil bruité (gauche) et quantifieur stochastique (droite) de type QUIS ou QUVS.

Les performances de détection binaire de ces quatre types de détecteurs, et par conséquent de ces réseaux de neurones à seuils, sont présentées dans la partie 3.3.3. Les comparaisons entre les quatre différentes stratégies sont réalisées pour différentes densités de probabilité de bruit de seuil. Ces comparaisons consistent à évaluer la probabilité d'erreur des quatre schémas de détection en fonction de la puissance du bruit de seuil qui est appliqué.

### 3.3.2 Probabilité d'erreur de détection des quantifieurs stochastiques

La probabilité d'erreur  $P_e$  d'un quantifieur-détecteur déterministe est donnée par l'expression (3.36) de la partie 3.2.3. Les calculs pour aboutir à cette expression sont relativement simples. Par contre, l'expression de la probabilité d'erreur  $\widetilde{P}_e$  d'un quantifieur stochastique est dans tous les cas, nettement plus compliquée à obtenir.

En effet, tout au long du calcul aboutissant à (3.36), nous avons fait hypothèse que le quantifieur est déterministe. En d'autres termes, c'est un quantifieur pour lequel on connaît toujours les valeurs des seuils  $\mathbf{t}$  et des niveaux  $\mathbf{q}$ . Dans le cas d'un quantifieur stochastique fondé sur (3.38), les seuils sont aléatoires et explicitement fonction du temps. En toute généralité, la grandeur aléatoire  $T_{\widetilde{Q}} = \sum_{i=1}^N \widetilde{Q}(x_i)$ , la somme des échantillons  $x_i$  quantifiés par un quantifieur stochastique  $\widetilde{Q}$ , n'est plus distribuée selon une loi multinomiale.

De plus, il est bien souvent impossible de déterminer la densité de probabilité de  $T_{\widetilde{Q}}$  parce que cette grandeur est la somme de transformées non linéaires et aléatoires  $\widetilde{Q}$  de variables aléatoires  $\mathbf{x}$ . Néanmoins, selon que l'on cherche la probabilité d'erreur d'un quantifieur stochastique variant dans le temps ou pas on peut obtenir une expression de probabilité d'erreur plus ou moins simple à calculer.

#### 3.3.2.1 Probabilité d'erreur d'un quantifieur variant stochastique

Lorsque le quantifieur stochastique est variant dans le temps, le test de détection repose sur la statistique  $T_{\widetilde{Q}} = \sum_{i=1}^N \widetilde{Q}(x_i)$ . Soit  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_N]$ , une matrice de  $N$  réalisations de vecteurs de seuils  $\tilde{\mathbf{t}}(i) = \boldsymbol{\theta}_i = [\theta_{1,i}, \dots, \theta_{M-1,i}]^T$  au cours du temps, et soit  $\boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\rho}_1, \dots, \boldsymbol{\rho}_N]$ , la matrice de niveaux  $\tilde{\mathbf{q}}(i) = h(\mathbf{t}, \tilde{\mathbf{r}}(i))$  (voir (3.38)) correspondants, que l'on notera simplement  $\boldsymbol{\rho} = h(\boldsymbol{\theta})$  pour alléger les notations. Ainsi,  $\theta_{k,i}$  l'élément positionné sur la ligne  $k$  et la colonne  $i$  de la matrice  $\boldsymbol{\theta}$ , symbolise le  $k^{\text{ième}}$  seuil à l'instant  $i$  du quantifieur. La notation est identique pour les niveaux  $\rho_{k,i}$  de la matrice  $\boldsymbol{\rho}$ . La probabilité de détection  $P_d$  (pour  $j = 1$ ) et la probabilité de fausse alarme  $P_f$  (pour  $j = 0$ ) conditionnelle à ce tirage  $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho})$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Pr \left[ T_{\widetilde{Q}}(\mathbf{x}) > \eta \mid H_j, \boldsymbol{\theta} \text{ avec } \boldsymbol{\rho} = h(\boldsymbol{\theta}) \right] &= \Pr \left[ \left\{ \widetilde{Q}(x_i) = \rho_{m_i,i} \right\}_{i=1}^N \text{ et } \sum_{i=1}^N \rho_{m_i,i} > \eta \mid H_j \right] \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{D}_v(N, M, \boldsymbol{\rho}, \eta)} \prod_{i=1}^N \Pr [x_i \in ]\theta_{m_i-1,i}; \theta_{m_i,i}][H_j] \\ &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{D}_v(N, M, \boldsymbol{\rho}, \eta)} \prod_{i=1}^N [F_j(\theta_{m_i,i}) - F_j(\theta_{m_i-1,i})] \end{aligned} \quad (3.40)$$

avec  $\mathcal{D}_v(N, M, \boldsymbol{\rho}, \eta) = \left\{ \mathbf{m} \in \{1, \dots, M\}^N \text{ tels que } \sum_{i=1}^N \rho_{m_i,i} > \eta \right\}$ . Les indices  $m_i$  à valeurs dans  $\{1, \dots, M\}$  sont fonctions du temps puisqu'ils dépendent directement de la valeur de l'échantillon  $x_i$ . Le passage de la première à la seconde ligne est possible parce que les échantillons  $x_i$  sont indépendants. En moyennant (3.40), pour toutes les réalisations possibles des matrices de seuils  $\boldsymbol{\theta}$  (on note  $\boldsymbol{\rho}$  les matrices de niveaux correspondants), on obtient la probabilité de détection  $\widetilde{P}_d$  pour  $j = 1$ , et la probabilité de fausse alarme  $\widetilde{P}_f$  pour  $j = 0$  :

$$\widetilde{P}_{d,f} = \int \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{D}_v(N, M, \boldsymbol{\rho}, \eta)} \prod_{i=1}^N (F_j(\theta_{m_i,i}) - F_j(\theta_{m_i-1,i})) f_{\tilde{\mathbf{t}}_i}(\boldsymbol{\theta}_i) d\boldsymbol{\theta}_i \quad (3.41)$$

où l'intégrale multiple est à calculer sur les supports de la densité de probabilité conjointe des seuils  $f_{\tilde{\mathbf{t}}_i}$  pour tous les instants  $i$ , et donc en toute généralité sur le domaine  $\mathbb{R}^{N(M-1)}$ . Enfin, comme pour un quantifieur-détecteur déterministe, la probabilité d'erreur  $\widetilde{P}_e$  découle de :  $\widetilde{P}_e = \pi_1 + \pi_0 \widetilde{P}_f - \pi_1 \widetilde{P}_d$  où les probabilités de fausse alarme et de détection sont données par (3.41).

Ainsi, on voit que la probabilité d'erreur d'un quantifieur stochastique variant temporellement est très compliquée à calculer. L'intégrale est de dimension très élevée, et son degré de complexité augmente avec la taille du quantifieur  $M$  et avec la taille de la séquence d'observation  $N$ . Le domaine de sommation  $\mathcal{D}_v$  varie pour chaque vecteur de niveau  $\boldsymbol{\rho}_i$  qui, dans un cadre général, est fonction des seuils aléatoires. Pour un QUVS, et pour tout quantifieur stochastique variant dans le temps à niveaux constants, le domaine  $\mathcal{D}_v$  reste le même pour tout le calcul.

L'expression (3.41) est valable pour tous quantifieurs stochastiques (variants ou invariants) utilisés dans un problème de détection binaire. Malheureusement cette expression est difficilement exploitable, c'est pourquoi nous aurons recours à des techniques de Monte-Carlo pour estimer la probabilité d'erreur de tels quantifieurs. Pour la classe des quantifieurs invariants dans le temps, on peut apporter quelques simplifications à l'expression de la probabilité d'erreur.

### 3.3.2.2 Probabilité d'erreur d'un quantifieur invariant stochastique

Pour un quantifieur stochastique invariant dans le temps, il est possible d'établir l'expression de la probabilité d'erreur  $\tilde{P}_e$  directement à partir de (3.36). En effet, par définition, les seuils et les niveaux d'un tel quantifieur sont tirés une fois pour toute la séquence d'observation. Ainsi, on peut écrire  $T_{\tilde{Q}} = \sum_{k=1}^M \tilde{n}_k \tilde{q}_k$ , et dans ce cas  $T_{\tilde{Q}}(\mathbf{x})$  est donc le produit scalaire entre un vecteur aléatoire  $\tilde{\mathbf{n}} = [\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_M]^T$  à valeur dans  $\{0, 1, \dots, N\}^M$  et un vecteur de niveaux  $\tilde{\mathbf{q}}$ . Comme pour un quantifieur déterministe, sous l'hypothèse  $H_j$  et pour un vecteur de seuils  $\tilde{\mathbf{t}}$ , le vecteur  $\tilde{\mathbf{n}}$  est distribué selon une loi multinomiale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{n}} |_{H_j, \tilde{\mathbf{t}}} \sim \mathcal{M} \left( N, P_j(\tilde{\Delta}_1), \dots, P_j(\tilde{\Delta}_M) \right) \quad \text{avec} \quad \tilde{\Delta}_k = ]\tilde{t}_{k-1}; \tilde{t}_k] \\ P_j(\tilde{\Delta}_k) = P_j([\tilde{t}_{k-1}; \tilde{t}_k]) = \int_{\tilde{t}_{k-1}}^{\tilde{t}_k} f_j(x) dx = F_j(\tilde{t}_k) - F_j(\tilde{t}_{k-1}) \end{array} \right. \quad (3.42)$$

où  $P_j(\tilde{\Delta}_k)$  sont les probabilités d'occurrences qui sont elles même aléatoires d'une séquence à une autre. Ainsi, pour un tirage de seuils particulier  $\tilde{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\theta}$ , et un vecteur de niveaux  $\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\rho} = h(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta})$  correspondants<sup>3</sup>, la probabilité d'erreur  $\tilde{P}_e|_{\tilde{\mathbf{t}}}$  est égale à la probabilité d'erreur d'un quantifieur déterministe de paramètre  $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho})$  :

$$\tilde{P}_e|_{\tilde{\mathbf{t}}} = \pi_1 + \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{D}(N, \boldsymbol{\rho}, \eta)} \frac{N!}{z_1! \dots z_M!} \left( \pi_0 \prod_{k=1}^M P_0(\tilde{\Delta}_k)^{z_k} - \pi_1 \prod_{k=1}^M P_1(\tilde{\Delta}_k)^{z_k} \right) \quad (3.43)$$

où

$$\mathcal{D}(N, \boldsymbol{\rho}, \eta) = \left\{ \mathbf{z} \in \{0, \dots, N\}^M \text{ tels que } \sum_{k=1}^M z_k = N \text{ et } \sum_{k=1}^M z_k \rho_k > \eta \right\}$$

La probabilité d'erreur  $\tilde{P}_e$  est alors obtenue en moyennant (3.43) sur la densité de probabilité conjointe du bruit de seuil  $f_{\tilde{\mathbf{t}}}$  :

$$\tilde{P}_e = E_{\tilde{\mathbf{t}}} \left[ \tilde{P}_e|_{\tilde{\mathbf{t}}=\boldsymbol{\theta}} \right] = \int_{\mathbb{R}^{M-1}} \tilde{P}_e|_{\boldsymbol{\theta}} f_{\tilde{\mathbf{t}}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (3.44)$$

Le calcul de la probabilité d'erreur d'un quantifieur stochastique invariant dans le temps n'est guère moins compliquée que celle d'un quantifieur stochastique variant dans le temps. La simplification provient de l'énumération du domaine de sommation  $\mathcal{D}(N, \boldsymbol{\rho}, \eta)$  qui est fonction des vecteurs de niveaux  $\boldsymbol{\rho}$ , par opposition au cas variant où le domaine  $\mathcal{D}_v$  est fonction de matrices de niveaux.

Lorsque le quantifieur stochastique est à niveaux déterministes, c'est-à-dire lorsque  $\tilde{\mathbf{q}} = h(\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}) = \mathbf{q}$ , le domaine de sommation  $\mathcal{D}(N, \mathbf{q}, \eta)$  est toujours le même, et il est ainsi possible d'inverser le signe intégrale et

<sup>3</sup>Attention, ici  $\boldsymbol{\rho}$  désigne un vecteur de niveaux et non pas une matrice comme dans la partie précédente.

le signe somme. Néanmoins, on peut s'appuyer sur (3.42) pour développer le calcul de la probabilité d'erreur  $\tilde{P}_e$  uniquement parce que pour chaque séquence, le vecteur  $\tilde{\mathbf{n}}$  est multinomial. Pour  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$  déterministe, il faut que  $\tilde{\mathbf{n}}$  soit multinomial à chaque séquence pour que l'expression de probabilité d'erreur (3.44) soit valable. Ce cas est vérifié uniquement si on impose la condition de régularité  $\tilde{t}_0 < \dots < \tilde{t}_M$  aux fluctuations du quantifieur, c'est-à-dire si :

$$n_k = \alpha_k + \tau_k \in \left[-\frac{q}{2}; \frac{q}{2}\right] \quad \text{pour } k = 1, \dots, M \quad (3.45)$$

Ainsi, sous la condition (3.45), et pour  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ , alors la probabilité d'erreur peut s'écrire :

$$\tilde{P}_e = \pi_1 + \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{D}(N, \mathbf{q}, \eta)} \frac{N!}{z_1! \dots z_M!} \int_{\mathbb{R}^{M-1}} \left[ \pi_0 \prod_{k=1}^M P_0(|\theta_{k-1}; \theta_k|)^{z_k} - \pi_1 \prod_{k=1}^M P_1(|\theta_{k-1}; \theta_k|)^{z_k} \right] f_{\tilde{\mathbf{t}}}(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (3.46)$$

Les seuils bruités étant indépendants,  $f_{\tilde{\mathbf{t}}}(\boldsymbol{\theta}) = f_{\tilde{t}_1}(\theta_1) \dots f_{\tilde{t}_{M-1}}(\theta_{M-1})$ , l'expression (3.46) peut être simplifiée. En effet, par définition (voir (3.42)), on a  $P_j(|\theta_{k-1}; \theta_k|) = F_j(\theta_k) - F_j(\theta_{k-1})$ , où  $F_j$  représente la cumulative des observations sous l'hypothèse  $H_j$ . Les produits  $\prod_{k=1}^M P_j(|\theta_{k-1}; \theta_k|)^{z_k}$  pour  $j = 0, 1$  peuvent alors être factorisés et s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^M P_j(|\theta_{k-1}; \theta_k|)^{z_k} &= \prod_{k=1}^M (F_j(\theta_k) - F_j(\theta_{k-1}))^{z_k} \\ &= \prod_{k=1}^M \sum_{m_k=0}^{z_k} C_{z_k}^{m_k} F_j(\theta_k)^{z_k - m_k} (-F_j(\theta_{k-1}))^{m_k} \\ &= \sum_{m_1=0}^{z_1} \dots \sum_{m_M=0}^{z_M} (-1)^{\sum_{k=1}^M m_k} \prod_{k=1}^M C_{z_k}^{m_k} F_j(\theta_k)^{z_k - m_k} F_j(\theta_{k-1})^{m_k} \\ &= \sum_{m_1=0}^{z_1} \dots \sum_{m_M=0}^{z_M} (-1)^{\sum_{k=1}^M m_k} \\ &\quad \times F_j(\theta_0)^{m_1} F_j(\theta_M)^{z_M - m_M} C_{z_M}^{m_M} \prod_{k=1}^{M-1} C_{z_k}^{m_k} F_j(\theta_k)^{z_k - m_k + m_{k+1}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

où  $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$  est l'expression du coefficient du binôme. En remplaçant (3.47) pour  $j = 0, 1$  dans (3.46), l'intégrale multiple se sépare, et finalement l'expression de la probabilité d'erreur d'un quantifieur stochastique invariant dont les fluctuations de seuils respectent (3.45) et de niveaux déterministes devient :

$$P_e = \pi_1 + \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{D}(n, \mathbf{q}, \eta), \mathbf{m} \in \mathcal{C}(\mathbf{z})} \frac{N! (-1)^{\sum_{k=1}^M m_k}}{\prod_{k=1}^M (z_k - m_k)! m_k!} \left[ \sum_{j=0}^1 (-1)^j \pi_j \prod_{k=1}^{M-1} \int_{b_k^-}^{b_k^+} F_j(\theta)^{z_k - m_k + m_{k+1}} f_{\tilde{t}_k}(\theta) d\theta \right] \quad (3.48)$$

avec

$$\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_M]^T \text{ et } \mathcal{C}(\mathbf{z}) = \{0\} \times \{0, 1, \dots, z_2\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, z_M\}$$

et où les bornes d'intégrations sont définies par  $b_k^- = t_k + \alpha_k - \frac{q}{2}$  et  $b_k^+ = t_k + \alpha_k + \frac{q}{2}$ . Dans (3.48), on a utilisé les propriétés des fonctions de répartition  $F_j(\theta_0) = 1 - F_j(\theta_M) = 0$  et la convention  $0^0 = 1$ .

Cette fois l'expression de la probabilité d'erreur, est plus simple à calculer puisqu'il n'y a plus d'intégrale multiple. Celle ci est remplacée par le produit de  $M$  intégrales simples. Le domaine de sommation  $\mathcal{D}(n, \mathbf{q}, \eta)$  est à définir une seule fois. Néanmoins, le calcul reste tout de même lourd en opérations. Pour chaque vecteur  $\mathbf{z}$  de  $\mathcal{D}(n, \mathbf{q}, \eta)$ , il faut procéder à l'énumération des vecteurs  $\mathbf{m}$  de  $\mathcal{C}(\mathbf{z})$ , et pour chaque  $\mathbf{m}$ , calculer les produits des intégrales sous chaque hypothèses.

Si les densités de bruits de seuils ne respectent pas (3.45), alors la relation d'ordre entre les seuils n'est plus garantie. Dans ce cas, (3.48) est une approximation de la probabilité d'erreur réelle. Celle-ci doit être

calculée à partir de (3.44) si le quantifieur est invariant. Dans tout les cas, il est possible de la déterminer à partir de (3.41). Néanmoins, ces calculs demandent énormément de ressources numériques et restent très compliqués à mettre en œuvre. C'est la raison pour laquelle, les probabilités d'erreur des schémas de détection fondés sur des quantifieur-détecteur stochastiques sont principalement estimées à partir de simulations de Monte-Carlo.

### 3.3.3 Détection de constantes par quantifieur stochastique

Dans cette partie, on veut tester quelle est l'influence des fluctuations aléatoires des quantifieur-détecteurs présentés dans le tableau 3.1 lorsqu'ils sont dédiés à effectuer une tâche de détection simple, la détection de constantes dans du bruit. Le modèle général des problèmes de détection binaire (3.20) est réduit au problème suivant :

$$\begin{cases} H_0 : x_i = \xi_i + s_0 & , \quad x_i \sim f_0(x) = f_\xi(x - s_0) \\ H_1 : x_i = \xi_i + s_1 & , \quad x_i \sim f_1(x) = f_\xi(x - s_1) \end{cases} \quad (3.49)$$

où  $s_0$  et  $s_1$  sont les constantes à détecter à partir des  $N$  échantillons de la séquence d'observations bruitées  $\mathbf{x}$ . On impose que le bruit de canal  $\xi$  est blanc au sens strict, et que la densité de probabilité  $f_\xi$  appartient à la classe des densités de probabilités gaussiennes généralisées de paramètre  $p > 0$ , et de variance  $\sigma_\xi^2$ , définie par [79] :

$$\begin{cases} f_\xi(u) = \frac{B(p)}{\sigma_\xi} e^{-A(p) \left| \frac{u}{\sigma_\xi} \right|^p} & \text{pour } p \in \mathbb{R}^+ \\ A(p) = \left( \frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(1/p)} \right)^{p/2} & , \quad B(p) = \frac{p}{2\Gamma(1/p)} \left( \frac{\Gamma(3/p)}{\Gamma(1/p)} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (3.50)$$

où  $\Gamma(u)$  est la fonction gamma. Lorsque  $p = 1$ , la densité de probabilité du bruit de canal  $f_\xi$  est une loi laplacienne, alors que pour  $p = 2$ , la loi est gaussienne. Enfin, lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , la densité de probabilité est uniforme.

Comme nous le verrons en 3.3.4, la nature de la distribution du bruit de seuil a de l'influence sur les performances des quantifieurs stochastiques. Ici, il s'agit de mesurer comment évolue la probabilité d'erreur des quantifieurs stochastiques lorsque la puissance des fluctuations varie, alors que la densité de probabilité du bruit seuil reste de même nature. Les quatre types de quantifieurs stochastiques étudiés sont fondés sur un quantifieur déterministe uniforme. Selon la moyenne du vecteur  $\mathbf{t}$ , le vecteur de répartition des seuils sans fluctuation, on considère que le détecteur-quantifieur est à :

- condition nominale : le vecteur initial de seuils  $\mathbf{t}$  est centré selon la moyenne des deux constantes à détecter  $(s_0 + s_1)/2$ . Dans ce cas, le quantifieur respecte la symétrie du problème (3.49), c'est un quantifieur-détecteur stochastique centré.
- condition non-nominale : le vecteur  $\mathbf{t}$  n'est pas centré selon  $(s_0 + s_1)/2$ . Le quantifieur ne respecte pas la symétrie du problème, c'est donc un quantifieur stochastique décentré.

Ces conditions, qu'elles soient nominales ou non, qualifient uniquement la partie déterministe d'un quantifieur stochastique. Evidemment, dès l'application de bruit sur les seuils, les quantifieurs ne sont plus dans leurs conditions initiales. Néanmoins, selon ces définitions, il est possible d'étudier la robustesse des quantifieur-détecteurs stochastiques vis-à-vis des variations d'hypothèses, en testant par exemple les performances de détection d'un quantifieur stochastique décentré dans un problème symétrique et inversement.

#### 3.3.3.1 Quantifieurs centrés *versus* quantifieurs décentrés

Dans un premier temps, nous allons comparer les performances d'un  $M$ -QUIS pour différentes puissances de bruit de seuil dans des conditions nominales et non-nominales. Le seuil de détection  $\eta$  du  $M$ -QUIS

est nul, et le vecteur de seuil  $\mathbf{t}$  initial est centré en zéro. On considère alors deux problèmes (3.49). Celui où les constantes à détecter sont :  $s_0 = -1$  et  $s_1 = 1$ . Ce problème est symétrique par rapport à 0, le quantifieur stochastique est donc centré puisqu'il fonctionne dans des conditions nominales. Le second problème est celui où les constantes valent  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . Dans ce cas, le problème est symétrique autour de 1. Le quantifieur est donc décentré puisqu'il fonctionne dans des conditions déterministes non-nominales.

Le nombre d'échantillons  $N$  de la séquence d'observation est fixé à 5. Le  $M$ -QUIS est à  $M = 8$  niveaux. Le bruit de canal est laplacien ( $p = 1$ ) et de puissance unitaire :  $\sigma_\xi = 1$ . Les seuils  $t_1$  et  $t_{M-1}$  sont respectivement égaux à  $-2\sigma_\xi$  et  $2\sigma_\xi$ . Ces valeurs sont choisies de sorte que seulement 5% des échantillons  $\xi_i$  puissent appartenir aux régions de dépassement du quantifieur uniforme déterministe. En effet, on vérifie que pour<sup>4</sup>  $p = 1$ ,  $F_\xi(t_1) \leq 0.05 \Leftrightarrow t_1 \approx -2\sigma_\xi$ . Les fluctuations de seuils  $\tau_k$  sont identiquement et uniformément distribuées sur l'intervalle  $[-\sqrt{3}\sigma; \sqrt{3}\sigma]$ . De plus, les constantes  $\alpha_k$  pour  $k = 1, \dots, M-1$  sont toutes égales à  $\alpha$ . Ainsi, la moyenne et la variance du bruit de seuil  $n$  sont respectivement égaux à  $\alpha$  et  $\sigma^2$ .

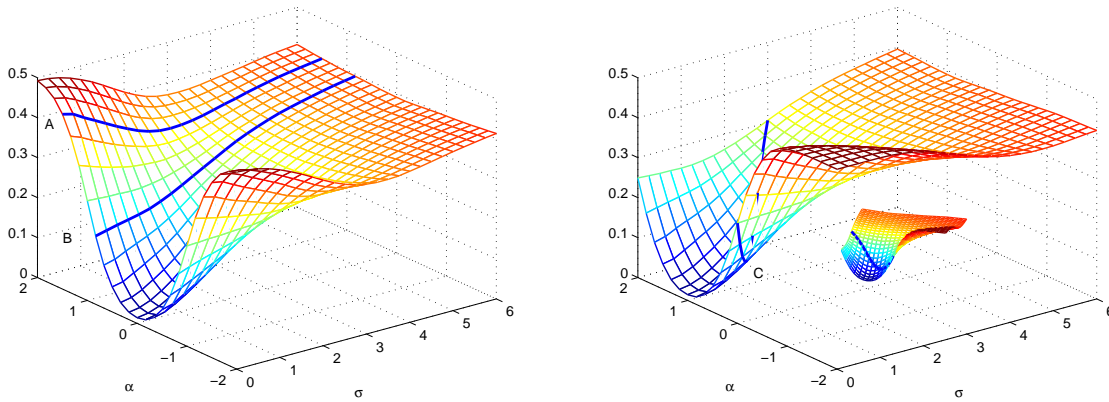


FIG. 3.14 – Probabilité d'erreur  $\tilde{P}_e$  d'un QUIS de bruits de seuils indépendants et identiquement distribués selon une loi uniforme sur  $[\alpha - \sqrt{3}\sigma, \alpha + \sqrt{3}\sigma]$  dans des conditions déterministes nominales et non-nominales et pour un seuil de détection  $\eta = 0$ . Le bruit de canal est laplacien  $p = 1$ . Gauche :  $s_0 = -s_1 = -1$  - conditions nominales. Droite :  $s_0 = 0, s_1 = 2$  - conditions non-nominales. La probabilité d'erreur est également tracée sur la nappe intérieure pour un angle de vue différent. Les probabilités d'erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d'observations.

La figure 3.14 donne la probabilité d'erreur du 8-QUIS dans les conditions décrites ci-dessus en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\sigma$  des fluctuations aléatoires des seuils  $\tilde{\mathbf{t}}$ . Le tracé du quantifieur évoluant dans les conditions déterministes nominales, dans le premier problème de détection, est placé sur la partie de gauche de la figure. Les performances du même quantifieur dans des conditions non-nominales sont reportées sur la partie de droite. Sur les deux tracés, la probabilité d'erreur est minimale lorsque la moyenne des fluctuations  $\alpha$  est égale au point de symétrie du problème  $(s_0 + s_1)/2$  et pour  $\sigma = 0$ . **Si la moyenne des fluctuations est égale à cette valeur, alors la symétrie est respectée. Dans ce cas, le bruit de seuils contribue à une perte de performance vis-à-vis des performances du quantifieur uniforme déterministe.**

Néanmoins, on voit que quelles que soient les conditions déterministes, si  $\alpha \neq (s_0 + s_1)/2$ , alors ajouter du bruit sur les seuils peut provoquer une amélioration des performances. Par exemple, considérons les deux courbes en trait plein partant des points A et B de la nappe de probabilité d'erreur sur la gauche de la figure 3.14. Ces deux valeurs de  $\tilde{P}_e$  sont obtenues pour des fluctuations de seuils de moyenne  $\alpha_A = 1.5$  et  $\alpha_B = 0.83$  et de puissance nulle  $\sigma = 0$ . Lorsque  $\sigma$  augmente, alors en partant de B, la probabilité d'erreur augmente et les performances se dégradent, alors que du point A, la probabilité commence par diminuer,

<sup>4</sup>Cette approximation est également valable pour le cas gaussien  $p = 2$ .



pour atteindre un minimum, et puis finalement augmenter. Sur cette dernière courbe, le minimum est atteint pour une valeur de  $\sigma$  particulière  $\sigma = 2.5$ .

**Le 8-QUIS possède un effet qualifié d'amélioration des performances par le bruit de seuil, qui se manifeste lorsque le quantifieur est décentré. L'ajout de bruit sur les seuils peut alors être perçu comme une correction stochastique d'une mauvaise répartition des seuils. La moyenne du bruit  $\alpha$  permet de recaler l'ensemble des seuils vers le point de symétrie du problème, et les fluctuations  $\tau_k$  d'apporter de la diversité au traitement.**

Considérons à présent un bruit de seuil uniforme asymétrique réparti sur l'intervalle  $[0; 2\sqrt{3}\sigma]$ . La puissance de ce bruit est toujours  $\sigma^2$ , mais cette fois, la moyenne est égale à  $\sqrt{3}\sigma$ . La variance et la moyenne sont donc reliées par un seul paramètre. L'évolution de la probabilité d'erreur  $\tilde{P}_e$  du 8-QUIS avec cette densité de bruit de seuil est représentée à partir du point *C* en trait plus épais sur la nappe de droite (cas asymétrique) de la figure 3.14. Quand  $\sigma = 0$ , la moyenne est nulle et la probabilité d'erreur est égale à 0.25. Plus  $\sigma$  augmente, et plus la moyenne des fluctuations augmente. Ainsi, la moyenne du vecteur de seuils du 8-QUIS se rapproche de plus en plus du point de symétrie qui est égale à 1 dans ce cas de figure. La probabilité d'erreur atteint un minimum pour  $\sigma = 0.667$ . Dès que cette valeur est dépassée, les performances se dégradent. La correction stochastique des seuils est cette fois commandée par la puissance du bruit de seuil.

Enfin, la figure 3.15 montre l'adéquation entre la formule théorique de probabilité d'erreur (3.48) du 8-QUIS considéré et une estimation de  $\tilde{P}_e$  par simulation de Monte-Carlo. Les résultats sont tracés pour

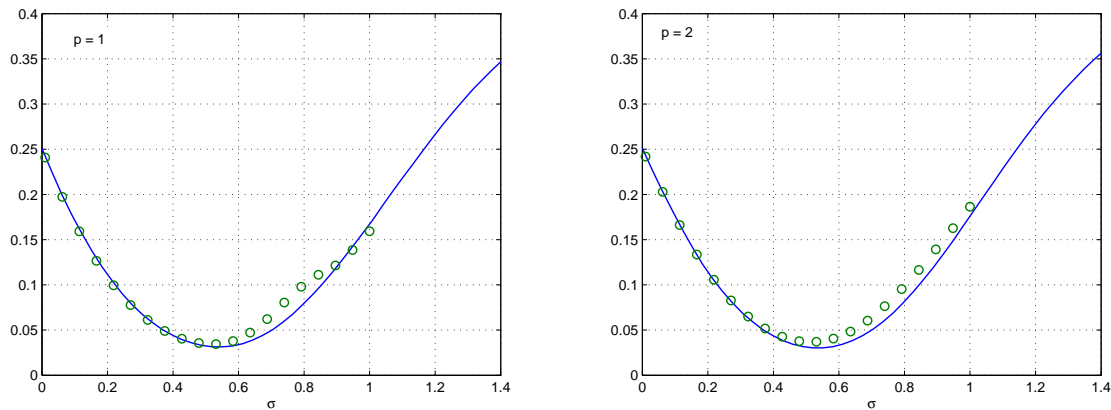


FIG. 3.15 – Probabilité d'erreur du QUIS de taille  $M = 8$ , dont les fluctuations de seuils sont indépendantes et uniformes sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma]$ . Comparaison entre les simulations de Monte-Carlo (trait plein) et l'expression théorique de  $\tilde{P}_e$  donnée par (3.48). Gauche - bruit de canal laplacien  $p = 1$ . Droite - bruit de canal gaussien  $p = 2$ . Les deux courbes coïncident parfaitement pour  $2\sqrt{3}\sigma < q = PE/M$ . La ligne en pointillé délimite la zone de validité  $\sigma \approx 0.28$ . Les probabilités d'erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d'observations.

deux bruits de canaux différents, un canal laplacien pour  $p = 1$ , et un canal gaussien pour  $p = 2$ . Le bruit de seuil est distribué selon une loi uniforme sur  $[0; 2\sqrt{3}\sigma]$ . Il est donc à support borné comme l'exige la relation (3.48) pour que celle ci soit valable.

La valeur maximale de  $\sigma$  pour laquelle l'expression de la probabilité d'erreur est correcte, est dans ce cas donnée par :  $\sigma \leq q/2\sqrt{3}$ . Avec  $q = 4\sigma_\xi/M$  et pour  $M = 8$ , on trouve  $\sigma \leq 0.28$ . Cette limite est tracée en pointillé sur les deux panneaux de la figure. Les courbes théoriques collent totalement aux courbes pratiques lorsque la condition sur  $\sigma$  est respectée. Malheureusement, cette plage de valeur de  $\sigma$  est très faible, et diminue lorsque la taille  $M$  du quantifieur augmente. En pratique, rien oblige à se contraindre à ne pas simuler les performances pour des valeurs de  $\sigma$  excédant la valeurs maximales théoriques. Il est

évident que dans ce cas de figure, des inversions entre les seuils s'opèrent, et que la formule théorique n'est plus valide. La relation (3.48) devient alors une estimation de la probabilité d'erreur réelle. L'écart entre les deux estimées est faible ( $\leq 0.3\%$ ) pour  $\sigma \leq 0.5$ . En simulation nous avons trouvé que pour  $0.5 < \sigma < 1.4$ , l'écart maximal entre les deux estimées est d'environ 2% dans le cas gaussien comme dans le cas laplacien. On remarque également que la position du minimum entre les deux courbes (théoriques et pratiques) varie légèrement puisque les minima apparaissent en dehors de la plage de validité de la courbe théorique.

### 3.3.3.2 Quantifieurs invariants *versus* quantifieurs variants

Après avoir mis en évidence le phénomène d'amélioration de la détection par les fluctuations de seuils, on veut dans un deuxième temps voir quelle est l'influence de la variabilité temporelle des quantifieurs sur ce phénomène. Pour cela, on va comparer les performances du quantifieur 8-QUIS testé précédemment aux performances du 8-QUVS correspondant dans deux problèmes de détection. Le premier problème est centré en 0, alors que le second est centré en 1. La taille de la séquence est toujours fixée à  $N = 5$ , et la densité de probabilité du canal est laplacienne  $p = 1$ .

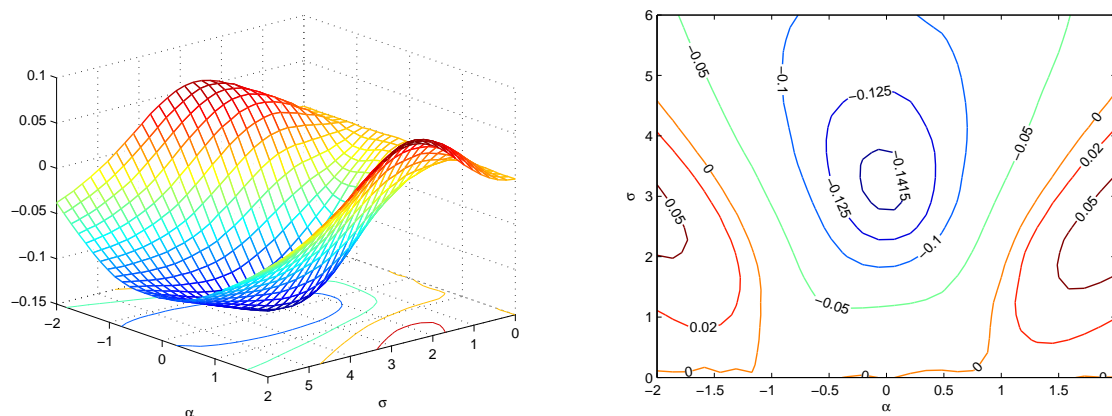


FIG. 3.16 – Gauche - Différence entre la probabilité d'erreur d'un 8-QUVS et la probabilité d'erreur d'un 8-QUIS, tous deux de bruit de seuil à échantillons indépendants et identiquement distribués selon une loi uniforme sur  $[\alpha - \sqrt{3}\sigma; \alpha + \sqrt{3}\sigma]$ . Droite - Représentation des courbes de niveaux de la nappe de gauche. Le seuil de détection est nul  $\eta = 0$ . Bruit de canal laplacien  $p = 1$ . Les constantes à détecter sont  $s_0 = -s_1 = -1$ . Les probabilités d'erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d'observations.

La gauche de la figure 3.16 représente la différence entre la probabilité d'erreur du 8-QUVS et la probabilité d'erreur du 8-QUIS pour des fluctuations de seuils uniformes de moyenne  $\alpha$  et de variance  $\sigma^2$  dans le problème symétrique en 0. Lorsque les valeurs de la nappe sont positives alors les performances du 8-QUIS sont supérieures à celles du 8-QUVS et inversement. On vérifie que sans fluctuation  $\sigma = 0$ , la différence entre les deux courbes est nulle, et que les performances entre 8-QUIS et 8-QUVS sont identiques puisque les deux quantifieurs possèdent les mêmes conditions nominales déterministes. La nappe tracée sur 3.16 possède un minimum négatif pour  $\alpha = 0$  et  $\sigma = 3.2$ . Pour le problème symétrique et des fluctuations de seuils uniformes, c'est pour cette valeur de  $\alpha$  et cette valeur de  $\sigma$  que la différence de performance entre les deux quantifieurs est la plus importante. C'est donc dans ces conditions où il est le plus avantageux d'utiliser le 8-QUVS que le 8-QUIS, même si, ce ne sont pas les conditions avec lesquelles le 8-QUVS offre ses meilleures performances de détection.

Les courbes de niveaux de la différence de probabilité d'erreur des deux quantifieurs stochastiques 8-QUIS et 8-QUVS sont tracées sur la droite de la figure 3.16. Ces courbes permettent de connaître les

valeurs du couple  $(\alpha, \sigma)$  pour lesquelles les performances du 8-QUVS sont supérieures ou inférieures aux performances du 8-QUIS. Les performances des deux quantifieurs sont équivalentes sur la ligne de niveau zéro. Les zones où la différences de probabilités d'erreur ne sont pas négatives sont concentrées sur les bords inférieurs de la figure. Approximativement, on peut dire que pour  $|\alpha| \leq 0.75$  et  $2 < \sigma < 6$ , le 8-QUVS est de 10% plus performant que le 8-QUIS, et que lorsque la valeur de  $\alpha$  augmente, le 8-QUIS est plus performant que le 8-QUVS pour de faibles perturbations de seuils ( $\sigma$  faible). **Dans cet exemple, nous sommes dans un cadre complètement symétrique. Le bruit de seuils conduit alors une perte de performance vis-à-vis des performances du quantifieur uniforme déterministe. La variabilité temporelle du quantifieur apporte plus de diversité au traitement. On en conclut que pour un problème centré, alors que le bruit de seuils ne peut que contribuer à une perte de performance, la variabilité temporelle du quantifieur réduit cette perte.**

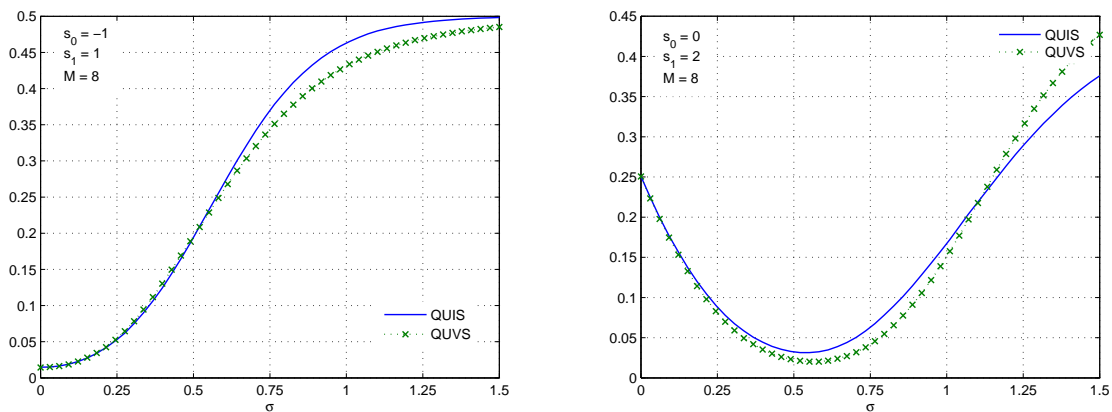


FIG. 3.17 – Probabilité d'erreur  $\tilde{P}_e$  d'un 8-QUIS et d'un 8-QUVS de bruit de seuil indépendant et identiquement distribué selon une loi uniforme sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma]$ . Le seuil de détection est nul  $\eta = 0$ . Gauche :  $s_0 = -s_1 = -1$  - conditions nominales. Droite :  $s_0 = 0, s_1 = 2$  - conditions non-nominales. Bruit de canal laplacien  $p = 1$ . Les probabilités d'erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d'observations.

La figure 3.17 présente l'évolution de la probabilité d'erreur du 8-QUIS en trait plein et du 8-QUVS en pointillé pour le problème centré en 0 (à gauche) et le problème centré en 1 (à droite) en fonction de l'écart-type des fluctuations distribuées uniformément sur  $[0; 2\sqrt{3}\sigma]$ . Lorsque  $\sigma$  augmente, le support de fluctuation des seuils est de plus en plus grand et l'ensemble des seuils se décale selon  $\sqrt{3}\sigma$ . Sur la figure de gauche, les deux quantifieur-détecteurs sont dans des conditions déterministes nominales, c'est pourquoi les fluctuations ne peuvent que dégrader les performances. Les dégradations sont similaires tant que  $\sigma < 0.6$ , et les probabilités d'erreur tendent vers 1/2 lorsque  $\sigma$  augmente.

Sur la figure de droite, les conditions déterministes sont non-nominales. Comme précédemment, puisque le bruit est asymétrique, le phénomène d'amélioration de la probabilité d'erreur par les fluctuations est donc possible. En effet, en augmentant  $\sigma$ , la moyenne des fluctuations augmente également, ce qui a pour conséquence de centrer les quantifieurs stochastiques vers le point de symétrie du problème. Le minimum atteint par le 8-QUVS est inférieur à celui atteint par le 8-QUIS. Le minimum de la probabilité d'erreur du 8-QUIS et du 8-QUVS est atteint pour  $\sigma = 0.58$ . Par rapport au 8-QUIS, la variabilité temporelle du 8-QUVS agit comme un facteur positif sur les performances de détection pour  $\sigma \in [0; 1.2]$ . Dès que l'écart-type des fluctuations n'appartient plus à cet intervalle, la tendance s'inverse, les performances du 8-QUIS deviennent meilleures que celle du 8-QUVS. Néanmoins quand cette inversion se produit, les détecteurs fonctionnent à performances très médiocres (au mieux  $\tilde{P}_e \approx 0.25$ ).

Les deux graphiques de la figure 3.17 sont des illustrations de la diversité apportée par des fluctuations de seuils variantes dans le temps. Dans des conditions déterministes nominales, la détection du quantifieur stochastique ne peut être que dégradée par les fluctuations. Plus il y a de fluctuations et plus cette dégradation est importante. **En revanche, si on se place dans des conditions déterministes non-nominales, par ajout de bruit sur les seuils, on peut corriger le mauvais positionnement du quantifieur vis-à-vis du problème. Dans ce cas, plus il y a de fluctuations dans le temps, et plus cette correction est réalisée.**

### 3.3.3.3 Quantifieurs stochastiques *versus* quantifieurs optimaux

Dans cette partie, on désire comparer les performances de détection de quantifieurs stochastiques (sous-optimaux) à celles d'un quantifieur optimal minimisant une  $f$ -divergence (voir 3.2.2). En parallèle, on s'intéresse également à comprendre comment se comporte sous l'influence de bruit de seuils, un quantifieur-détecteur stochastique dont les vecteurs de seuils et de niveaux déterministes sont optimaux au sens de la minimisation d'une  $f$ -divergence, ou lorsque les seuils et les niveaux déterministes sont espacés uniformément. La séquence d'observation est toujours de 5 échantillons. Le seuil de comparaison  $\eta$  est nul. Les quantifieurs possèdent  $M = 8$  niveaux de quantifications. Le bruit de canal est toujours laplacien  $p = 1$ .

Le quantifieur optimal  $8-Q_{PT,J}$  considéré, est un quantifieur de Poor&Tomas : de vecteur de seuils  $\mathbf{t}_{PT,J}$ , et de vecteur de niveaux  $\mathbf{q}_{PT,J}$ . Ce quantifieur est obtenu en maximisant la  $J$ -divergence entre les densités de probabilité des données post-quantifiées d'un problème de détection symétrique en 0. La maximisation de (3.28) est réalisée par un algorithme itératif classique de descente de gradient. Les paramètres du quantifieur présentés dans le tableau 3.2 sont issus des calculs de l'annexe D.

$\mathbf{t}_{PT,J}$	-0.87	-0.60	-0.31	0	0.31	0.60	0.87	
$\mathbf{q}_{PT,J}$	-2.80	-2.08	-1.29	-0.44	0.44	1.29	2.08	2.80

TAB. 3.2 – Valeurs numériques des seuils et des niveaux du quantifieur  $8-Q_{PT,J}$ , canal laplacien  $p = 1$ .

Pour réaliser l'étude, les versions stochastiques variantes et invariantes dans le temps du quantifieur optimal  $8-Q_{PT,J}$  sont mises en compétition avec un 8-QUIS et un 8-QUVS, dans deux problèmes de détection, symétrique en 0 (conditions nominales du  $8-Q_{PT,J}$ ), et symétrique en 1. Il est évident que les performances d'un quantifieur optimal dans des conditions nominales de détection sont supérieures aux performances des quantifieurs stochastiques sous optimaux. Rappelons également que tout quantifieur optimal soumis à des fluctuations aléatoires de seuils de puissance non nulle n'est plus optimal, et que les performances de celui-ci se dégradent selon l'intensité des fluctuations.

Les deux figures de 3.18 décrivent le comportement de la probabilité d'erreur des quatre quantifieurs stochastiques dans un problème symétrique en 0. La figure de droite est un zoom de la figure de gauche pour de faibles valeurs de  $\sigma$ . Les quantifieurs sont tous dans leurs conditions nominales. Comme le bruit de seuil est asymétrique, dès que la puissance du bruit est non nulle, la moyenne l'est également, et la moyenne du vecteur de seuil n'est plus égale au point de symétrie du problème. C'est pourquoi les quatre courbes de performances présentées sur les deux graphiques sont croissantes.

La courbe supplémentaire du graphique de droite, une courbe ayant comme légende " $Q_{PT}$  nominal" est fictive et n'est pas fonction de  $\sigma$ . Elle représente la probabilité d'erreur du quantifieur optimal de Poor&Thomas obtenue dans des conditions optimales, et donc sans fluctuation, et elle sert de courbe de référence. On note  $P_e^{ref}$ , la valeur minimale de probabilité d'erreur d'un  $8-Q_{PT}$  dans des conditions nominales et sans fluctuations. Dans cet exemple, on a  $P_e^{ref} = 9.8 \cdot 10^{-3}$ . Sans fluctuation,  $\sigma = 0$ , les performances d'un quantifieur variant et invariant sont quasi-identiques, et la différence de probabilité d'erreur entre le quantifieur optimal de Poor&Thomas et d'un 8-QUIS est inférieure à 0.5%. Les courbes

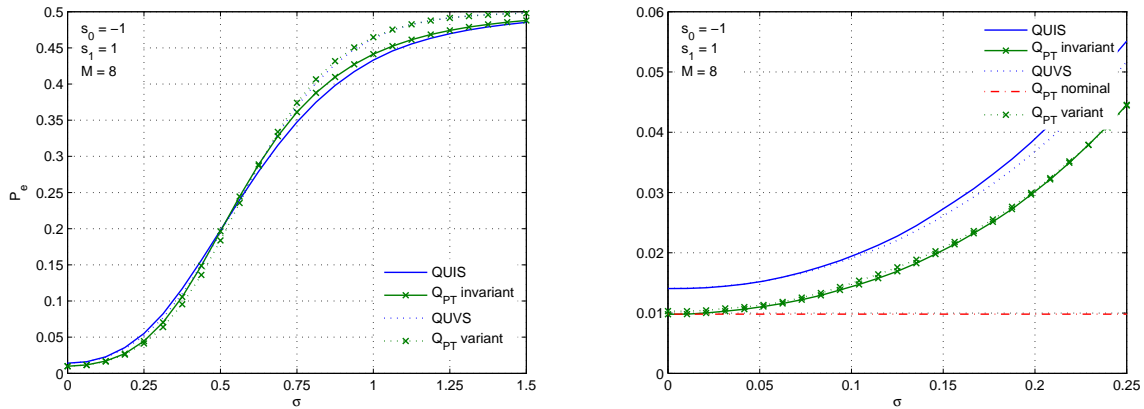


FIG. 3.18 – Probabilité d’erreur d’un 8-QUIS, 8-QUVS, et d’un 8- $Q_{PT,J}$  stochastique de bruit de seuil indépendant et identiquement distribué selon une loi uniforme sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma]$ . Le seuil de détection est nul  $\eta = 0$ . Les constantes à détectées sont :  $s_0 = -s_1 = -1$  - conditions nominales. Les probabilités d’erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d’observations.

du 8- $Q_{PT,J}$  invariant et variant sont tangentes à la courbe de référence pour de très faible valeur de  $\sigma$ . Pour  $\sigma = 0.1$ , la différence entre la probabilité d’erreur du 8- $Q_{PT,J}$  variant et la probabilité d’erreur de la courbe de référence est égale à 0.5%. Tant que  $\sigma$  est inférieure à 0.5, les performances de détection des quantifieurs variant sont moins dégradées que celles des quantifieurs non variant.

Dans un système à seuils soumis à des fluctuations aléatoires intrinsèques, l’optimisation initiale des seuils permet de maintenir des performances de détection très proches des performances obtenues sans bruit si les fluctuations sont de faible puissance. Les performances se dégradent rapidement avec l’augmentation de la puissance des fluctuations. Si la puissance des fluctuations est suffisamment élevée alors les performances d’un quantifieur optimisé et d’un quantifieur uniforme bien centré sont équivalentes.

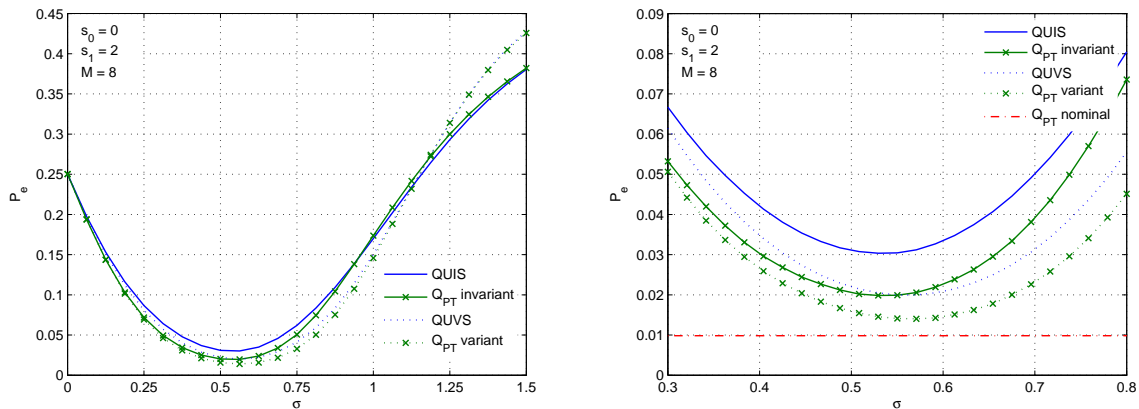


FIG. 3.19 – Probabilité d’erreur d’un 8-QUIS, 8-QUVS, et d’un 8- $Q_{PT,J}$  stochastique de bruit de seuil indépendant et identiquement distribué selon une loi uniforme sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma]$ . Le seuil de détection est nul  $\eta = 0$ . Les constantes à détectées sont :  $s_0 = 0, s_1 = 2$  - conditions non-nominales. Les probabilités d’erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d’observations.

Les deux graphiques de la figure 3.19 donnent les performances des quatre quantifieurs stochastiques

dans un problème symétrique en 1, alors que le 8- $Q_{PT,J}$  a été dimensionné pour un problème symétrique en 0. Avec ou sans fluctuations, tous les quantifieurs sont donc sous optimaux pour le problème de détection posé. Pour les quatre quantifieurs on remarque encore que l'ajout d'un bruit asymétrique permet de faire une correction stochastique du positionnement du quantifieur vis-à-vis du point de symétrie du problème.

Le tableau 3.3 regroupe pour chaque quantifieur les valeurs d'écart type  $\sigma_{opt}$  pour lequel on observe un minimum de la courbe de probabilité d'erreur. Le tableau donne également les valeurs de la probabilité d'erreur minimale correspondantes  $P_e^{min}$ , ainsi que l'écart  $\Delta P_e$  en pourcentage entre le minimum  $P_e^{min}$  et  $P_e^{ref}$ . Les quantifieurs variants dans le temps sont plus gourmands en puissance de fluctuations que les quantifieurs non variant pour fonctionner à  $P_e^{min}$ . Les performances de détection du 8-QUVS sont équivalentes à celles du 8- $Q_{PT,J}$  invariant dans le temps puisque leur  $\Delta P_e$  est égale à 1% à tous les deux. Néanmoins, pour atteindre ce niveau de performance, l'agitation des seuils du 8-QUVS doit être un peu plus forte que celle du 8- $Q_{PT,J}$  ( $\sigma_{opt} = 0.562$  pour le 8-QUVS contre  $\sigma_{opt} = 0.537$  pour 8- $Q_{PT,J}$ ). Enfin, pour le même niveau de puissance  $\sigma_{opt} = 0.567$ , les performances du 8- $Q_{PT,J}$  variant dans le temps sont très proche (0.5%) de la probabilité d'erreur de référence  $P_e^{ref}$ .

Pour un problème asymétrique, des quatre quantifieurs stochastiques testés dans cette partie, c'est le 8- $Q_{PT,J}$  variant dans le temps qui possède les meilleures performances de détection. Afin d'expliquer pourquoi, nous rappelons d'abord que sans bruits, la caractéristique de transfert d'un 8- $Q_{PT,J}$  est une "bonne" approximation en escalier (au sens de la  $f$ -divergence retenue) de la log-vraisemblance du problème de détection. Dans cet exemple, cette approximation n'est pas centrée autour du point de symétrie du problème. Comme précédemment, ajouter du bruit sur les seuils permet de recentrer l'approximation et donc d'améliorer les performances de détection. Néanmoins, l'ajout de bruit sur les seuils dénature également la qualité de l'approximation. On peut alors supposer que la variabilité temporelle, apportant de la diversité, permet que globalement les approximations de la log-vraisemblance du 8- $Q_{PT,J}$  variant dans le temps soient de meilleures qualités que celles de son homologue invariant dans le temps. Le choix des niveaux de quantification est un facteur qui a beaucoup d'influence sur la détection.

	$\sigma_{opt}$	$P_e^{min}$	$\Delta P_e$		$\sigma_{opt}$	$P_e^{min}$	$\Delta P_e$
8 - $QUIS$	0.542	0.031	2%	8 - $QUVS$	0.562	0.020	1 %
8 - $Q_{PT}$ inv	0.537	0.019	1%	8 - $Q_{PT}$ var	0.567	0.014	0.5%

TAB. 3.3 – Valeurs numériques de l'écart-type optimal  $\sigma_{opt}$  d'une loi uniforme garantissant une amélioration stochastique de la probabilité d'erreur pour quatre quantifieurs.  $P_e^{min}$  probabilité d'erreur obtenue pour  $\sigma = \sigma_{opt}$ .  $\Delta P_e$  différence en pour-cent entre  $P_e^{min}$  et  $P_e^{ref}$ . Les probabilités d'erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d'observations.

Dans la partie qui suit, nous observons ce que peut apporter l'adaptation des niveaux de quantification aux statistiques des données d'entrées sur les performances de détection des quantifieurs stochastiques.

### 3.3.3.4 Quantifieurs stochastiques adaptés *versus* quantifieurs optimaux

Dans ce paragraphe, on désire comparer les performances des quatre quantifieurs précédents avec celles d'un 8-QAIS. La figure 3.20 donne la probabilité d'erreur d'un 8-QAIS en fonction de la moyenne  $\alpha$  et de l'écart-type  $\sigma$  des fluctuations uniformes appliquées sur les seuils pour deux bruit de canal différents. Les deux panneaux de gauche correspondent à un bruit de canal laplacien alors que les deux de droite sont tracés pour un bruit de canal gaussien. Les deux figures du haut donnent la probabilité d'erreur pour une large plage de valeur de  $\alpha$ .

Quand  $\sigma$  est nul, les seuils du quantifieur sont espacés régulièrement, et plus la valeur de  $\sigma$  augmente, et plus la répartition des seuils devient irrégulière. Par construction, les niveaux d'un quantifieur adapté sont

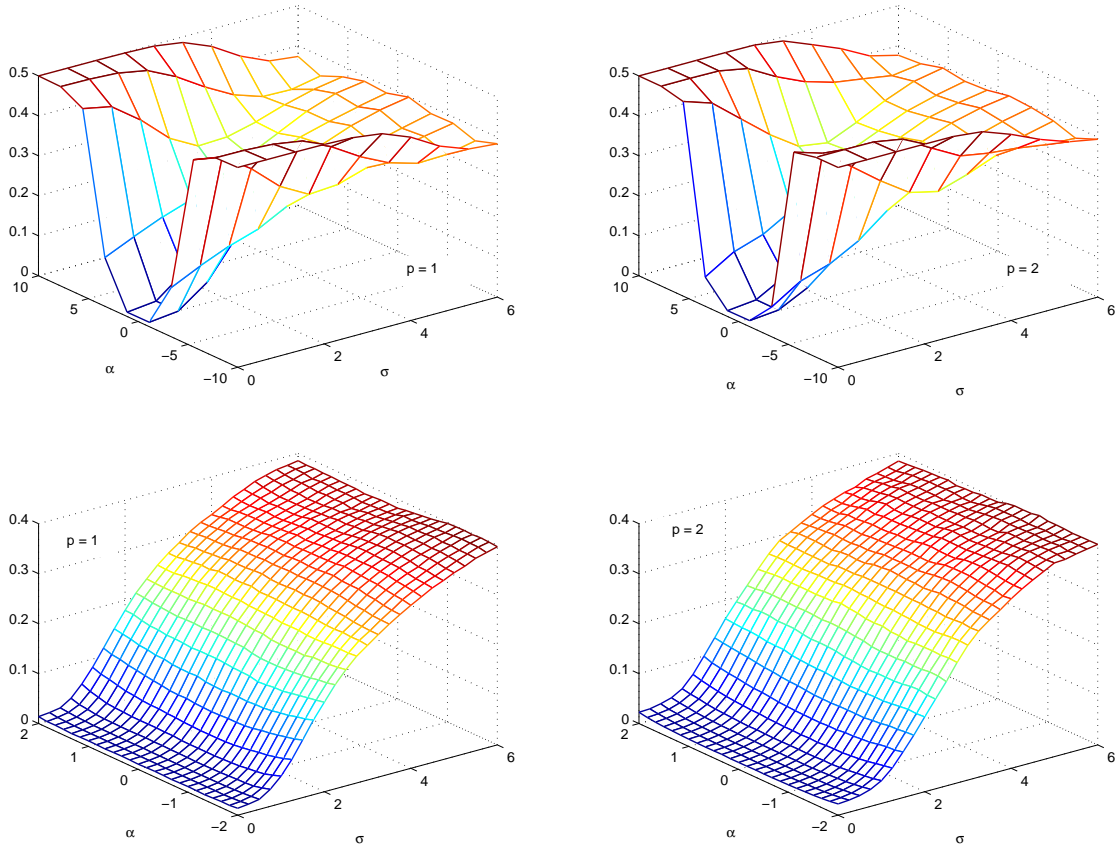


FIG. 3.20 – Probabilité d’erreur  $\tilde{P}_e$  d’un 8-QAIS de bruits de seuils indépendants et identiquement distribués selon une loi uniforme sur  $[\alpha - \sqrt{3}\sigma, \alpha + \sqrt{3}\sigma]$  en fonction de  $\sigma$  et  $\alpha$ . Le seuil de détection est nul  $\eta = 0$ . Les constantes à détectées sont :  $s_0 = -s_1 = -1$ . Gauche - bruit de canal laplacien  $p = 1$ . Droite - bruit de canal gaussien  $p = 2$ . Les probabilités d’erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d’observations.

toujours égaux au rapport de vraisemblance local (calculés selon la valeurs des seuils). La caractéristique de transfert d’un  $M$ -QAIS (et d’un  $M$ -QAVS) est donc toujours une approximation de la fonction de vraisemblance du problème de détection. On remarque sur les deux figures du bas que la nappe de probabilité d’erreur est quasiment constante lorsque l’on effectue des coupes par rapport à l’axe  $\sigma$  pour  $\alpha \in [-2; 2]$ . Dans ces exemples, le minimum de la probabilité d’erreur est atteint pour  $\sigma = 0$ , et pour une plage de valeur de  $\alpha$  assez large centrée autour du point de symétrie du problème. Dans cette plage de valeur, le bruit ne fait que dégrader les performances. En dehors de cette plage, le bruit peut opérer de manière bénéfique. Dans un cadre déterministe ( $\sigma = 0$ ), le 8-QAIS est donc robuste à des décalages  $\alpha \in [-2; 2]$ .

Les figures 3.21, donnent la probabilité d’erreur des 8-QUIS, 8-QUVS, 8-QAIS et du 8- $Q_{PT,J}$  en fonction de l’écart-type des fluctuations lorsque le problème de détection est symétrique autour de 1. Le seuil de détection est nul, et les fluctuations uniforme sont distribuées sur  $[0; 2\sqrt{3}\sigma]$ . Les courbes des trois quantifieurs 8-QUIS, 8-QUVS, et 8- $Q_{PT,J}$  présentent l’effet de correction stochastique de la probabilité d’erreur par bruit de seuil. La zone des minima de ces courbes est agrandie sur la figure de droite. On vérifie sur cette figure que les performances du quantifieur 8-QAIS se dégradent lorsque  $\sigma$  augmente. Néanmoins, on remarque également que dans ces conditions, les performances du 8-QAIS sont supérieures de 0.3% à celles du 8- $Q_{PT,J}$ , de 0.35% à celles du 8-QUVS et enfin de 1.5% à celles du 8-QUIS lorsque l’on compare

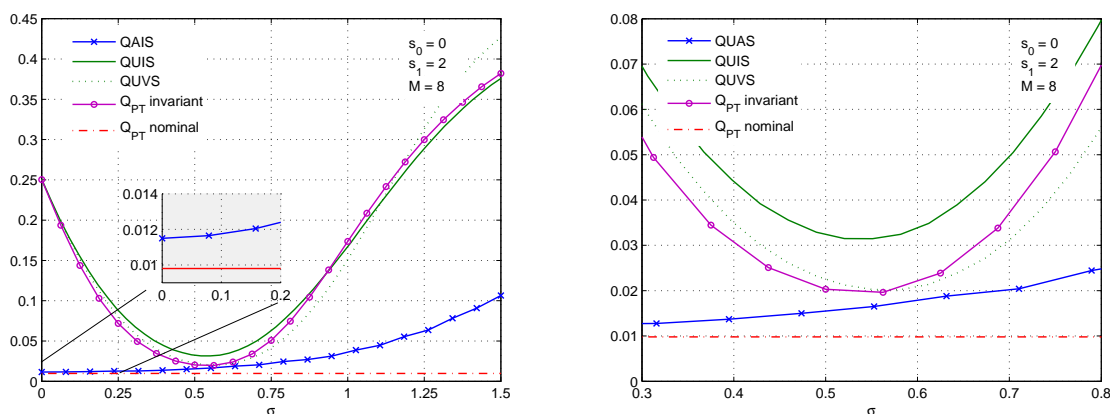


FIG. 3.21 – Probabilité d’erreur d’un 8-*QUIS*, 8-*QUVS*, 8-*QAIS* et d’un 8- $Q_{PT,J}$  stochastique de bruit de seuil indépendant et identiquement distribué selon une loi uniforme sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma]$ . Le seuil de détection est nul  $\eta = 0$ . Les constantes à détecter sont :  $s_0 = 0, s_1 = 2$  - conditions non-nominales. Le bruit de canal est laplacien  $p = 1$ . Les probabilités d’erreur sont estimées par simulations de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruits de seuils et 100 séquences d’observations.

les valeurs des probabilités d’erreur obtenues à  $\sigma_{opt}$ . Même si les trois quantifieurs stochastiques 8-*QUIS*, 8-*QUVS*, et 8- $Q_{PT,J}$  fonctionnent à  $\sigma_{opt}$ , leur probabilité d’erreur est toujours inférieure à celle obtenue par les approximations en escalier de la fonction de vraisemblance du problème. Sur le panneau de gauche, la fenêtre intérieure correspond à un zoom autour de  $\sigma = 0$  de la courbe de performances du 8-*QAIS* et de la courbe de référence obtenue avec le 8- $Q_{PT,J}$  sans fluctuation. La différence des probabilités d’erreurs entre les deux cas est inférieure à 0.2%.

On peut ainsi conclure ce paragraphe en observant que lorsque les niveaux sont adaptés aux seuils, alors la répartition des seuils, qu’elle soit aléatoire ou pas, n’a que peu de conséquence sur les performances de détection. Néanmoins, l’adaptation des niveaux aux seuils est dans tous les cas difficile à opérer.

### 3.3.4 Influences des différents paramètres

Dans la section précédente, nous avons mis en évidence qu’il existe au sein des quantifieurs stochastiques un phénomène d’amélioration des performances par le bruit de seuil dans les problèmes de détection binaire. Cette amélioration est possible lorsque, sans bruit, le quantifieur n’évolue pas dans des conditions nominales. Si le bruit de seuil permet de recalculer aléatoirement les seuils du quantifieur vers le point de symétrie du problème alors les performances s’en trouvent améliorées. Tous ces résultats ont été obtenus pour des fluctuations de seuils de densité uniforme. Nous allons montrer que le phénomène de minimisation de la probabilité d’erreur n’est pas exclusif à cette densité de probabilité. L’influence du seuil de détection  $\eta$  est testée dans une seconde partie, afin de présenter l’équivalent d’un réseau de courbes COR pour les quantifieurs-détecteurs stochastiques. Nous verrons dans une troisième partie, quelle est l’influence de la taille  $M$  des quantifieurs sur les performances de détection. Enfin, dans une dernière partie nous présentons une étude sur la robustesse des quantifieurs stochastiques vis-à-vis des variations du bruit de canal.

#### 3.3.4.1 La densité de probabilité du bruit de seuils

Nous avons illustré dans la partie 3.3.3 que les performances des quantifieur-détecteurs stochastiques peuvent être améliorées par le bruit de seuil. Cette observation a été réalisée pour des fluctuations aléatoires de densité uniforme. A présent, on veut observer quelle est l’influence de la forme de la densité de bruit



de seuil sur l'amélioration stochastique. Le modèle de loi de fluctuation retenu est fondé sur la loi beta de paramètres  $a$  et  $b$  :

$$\mathcal{B}_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \quad ]_{0,1}[ (x)$$

où  $B(a,b)$ , la fonction beta [84] est donnée par :

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

où  $]_{0,1}[$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0;1]$ . L'égalité entre les coefficients  $a$  et  $b$  est imposée afin d'obtenir une loi de fluctuation symétrique :  $a = b$ . Lorsque  $a = 1$ , la loi est uniforme. La moyenne du modèle est alors constante et égale à  $1/2$ . L'écart-type est quant à lui fonction du paramètre  $a$  puisque son expression est donnée par :

$$\sigma_B = \frac{1}{4(2a+1)^{1/2}} \quad (3.51)$$

La densité de probabilité des fluctuations normalisée est notée :  $\mathcal{B}_a(x) = \sigma_B \mathcal{B}_{a,a}(\sigma_B x)$ . Finalement, les fluctuations de puissances  $\sigma^2$ , appliquées sur les seuils des quantifieurs stochastiques sont distribuées selon la loi  $\mathcal{B}_a(x/\sigma)/\sigma$ . Pour  $n_k \sim \frac{1}{\sigma} \mathcal{B}_a\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ , la moyenne des fluctuations est alors égale à :

$$E[n_k] = \frac{\sigma}{2\sigma_B} \quad (3.52)$$

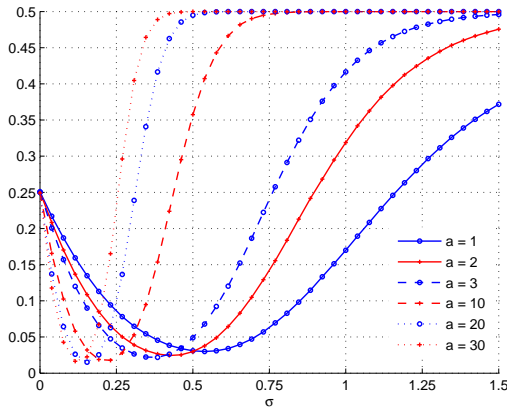


FIG. 3.22 – Probabilité d'erreur  $\tilde{P}_e$  d'un QUIS de bruit de seuil indépendant et identiquement distribué selon une loi en beta symétrique  $(\sigma_B \sigma) \mathcal{B}_{a,a}(\sigma_B x/\sigma)$  où  $\sigma_B = (4(2a+1))^{-1/2}$ . Le bruit de canal est laplacien,  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . La probabilité d'erreur est estimée par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d'observations.

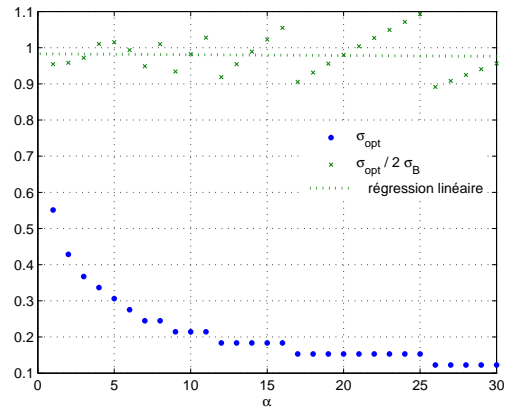


FIG. 3.23 – Evolution du ratio  $\sigma_{opt}/(2 * \sigma_B)$  en fonction du coefficient de forme de la loi en beta symétrique  $\beta$ . Le bruit de canal est laplacien,  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . Les valeurs de  $\sigma_{opt}$  sont obtenues numériquement, pour des probabilités d'erreur estimées par simulation de Monte-Carlo : pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d'observations.

La probabilité d'erreur en fonction de l'écart-type  $\sigma$  d'un 8-QUIS de fluctuations de seuils distribués selon  $\mathcal{B}_a(x/\sigma)/\sigma$  pour  $a = \{1; 2; 3; 10; 30\}$  est tracée sur la figure 3.22. Comme le montre cette figure, la valeur de  $\sigma$  qui optimise la probabilité d'erreur décroît lorsque  $a$  augmente. Parallèlement, le minimum atteint par la probabilité d'erreur, augmente pour  $a$  croissant.

L'interprétation de ces observations est assez simple. Lorsque  $a$  augmente, d'après les propriétés des lois en beta, la distribution des fluctuations tend à devenir gaussienne, de moyenne  $\sigma/(2\sigma_B)$ . Le minimum de la probabilité d'erreur est obtenu lorsque la moyenne des fluctuations est égale au point de symétrie du problème, qui vaut  $(s_0 + s_1)/2 = 1$  dans le cas présent. Par conséquent, d'après (3.52) et (3.51), la valeur de  $\sigma$  optimale,  $\sigma_{opt}$ , est fonction du coefficient  $a$  avec :  $\sigma_{opt} \propto a^{-1/2}$ .

La figure 3.23 montre comment évolue la valeur de  $\sigma_{opt}$  ainsi que le rapport  $\sigma_{opt}/(2\sigma_B)$  en fonction de  $a$ . Lorsque  $a$  augmente,  $\sigma_{opt}$  diminue, et le rapport devient constant et approximativement égale à 1. De plus, lorsque  $a$  augmente la valeur de  $\sigma_B$  diminue. Le cas limite est celui où les fluctuations ajoutées sur les seuils tendent à être distribués selon une loi gaussienne d'écart type nul et de moyenne unitaire. Cette valeur correspond justement au point de symétrie du problème de détection.

### 3.3.4.2 Le seuil de détection $\eta$

Dans un problème de détection, le seuil de comparaison  $\eta$  du détecteur est un paramètre clef. Nous avons rappelé dans la partie 3.2.1 que l'ajustement de la valeur du seuil permet à un détecteur d'évoluer selon un critère d'optimalité ou non. Pour un quantifieur-détecteur stochastique, il existe également des valeurs du paramètre  $\eta$  qui garantissent que le détecteur fonctionne dans des conditions optimales selon un critère. Si l'on retient comme critère la probabilité d'erreur, alors il faut déterminer le seuil  $\eta_{opt}$  qui minimise cette dernière, c'est-à-dire résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\eta_{opt} = \text{Arg max}_{\eta} [\tilde{P}_e(\eta)] \quad (3.53)$$

La somme des échantillons post-quantification  $T_{\tilde{Q}}$  est une grandeur discrète définie dans un ensemble de taille finie, le problème (3.53) possède ainsi une infinité de solutions réelles  $\eta \in [\eta_{min}; \eta_{max}]$ . De plus, d'après l'expression générale de la probabilité d'erreur d'un quantifieur-détecteur stochastique, il est impossible de résoudre analytiquement le problème (3.53) par les méthodes classiques d'optimisation.

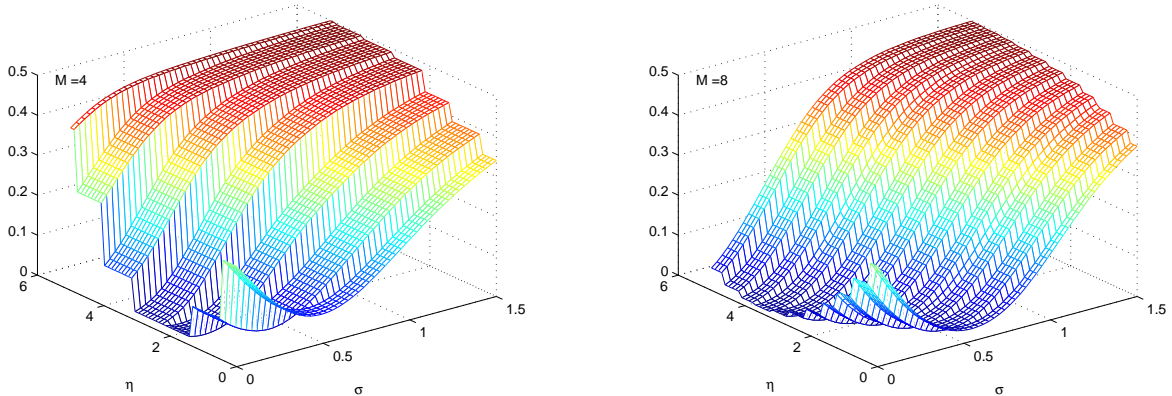


FIG. 3.24 – Probabilité d'erreur d'un QUIS en fonction de  $\sigma$ , l'écart-type des fluctuations de densité de probabilité uniforme sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma[$  et du seuil de détection  $\eta$ . Gauche - taille de quantifieur  $M = 4$ . Droite - taille de quantifieur  $M = 8$ . Le bruit de canal est laplacien,  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . La probabilité d'erreur est estimée par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d'observations.

La figure 3.24 montre qu'elle est la probabilité d'erreur d'un 4-QUIS et 8-QUIS en fonction de  $\eta$  et de  $\sigma$  pour des fluctuations uniformes sur  $[0; 2\sqrt{3}\sigma[$  dans le problème de détection de constantes centré en 1. On vérifie que l'influence du seuil  $\eta$  ne modifie pas les performances de détection de manière continue

puisque les courbes  $Pe$  à  $\sigma$  fixée sont constantes par paliers. Cette remarque est d'ailleurs vérifiée pour tout quantifieur-détecteur.

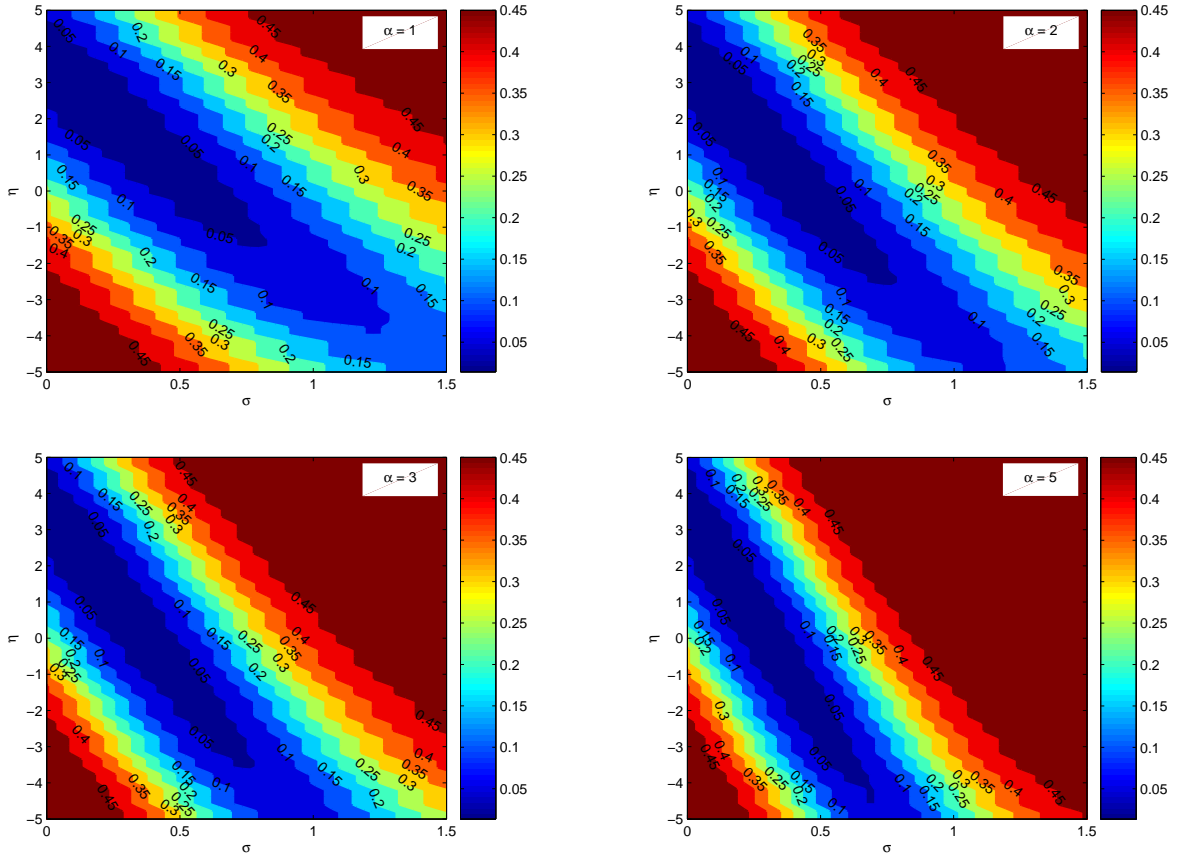


FIG. 3.25 – Courbes de niveaux de la nappe de probabilité d'erreur d'un 8-QUIS en fonction de  $\sigma$ , l'écart-type des fluctuations de seuils, et du seuil de détection  $\eta$ . Les fluctuations de seuils sont distribuées selon une loi en beta symétrique et normalisée de paramètre  $a$ . Le bruit de canal est laplacien,  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . La probabilité d'erreur est estimée par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d'observations.

La figure 3.25 présente les courbes de niveaux de la nappe de probabilité d'erreur, que nous désignerons par courbe iso-probabilité d'erreur, d'un 8-QUIS en fonction de  $\sigma$ , l'écart-type des fluctuations de seuils, et du seuil de détection  $\eta$ . Les fluctuations de seuils sont distribuées selon une loi en beta symétrique normalisée de paramètre  $a$  définie par  $\mathcal{B}_a(x/\sigma)/\sigma$ . Ces quatre réseaux de courbes  $a = \{1; 2; 3; 5\}$  donnent de manière empirique, le lien qui existe entre le seuil de détection  $\eta$  et l'écart-type des fluctuations de seuils  $\sigma$  discuté plus haut. On remarque que le lien entre  $\eta$  et  $\sigma$  n'est pas bijectif. En effet, à  $\sigma$  donné, il y a au moins deux valeurs possibles de  $\eta$  qui garantissent d'être sur la même courbe iso-probabilité d'erreur. Il y a deux valeurs possibles puisque le problème de détection est symétrique, et au moins deux car la somme des échantillons quantifiés  $T_{\bar{Q}}$  est une grandeur à valeurs discrètes.

Les courbes iso-probabilité d'erreur peuvent approximativement être représentées par une courbe semi-elliptique. Le paramètre de forme  $a$  de la densité de probabilité des fluctuations a tendance à faire pivoter les courbes dans le sens horaire, de réduire le petit axe de l'ellipse, et enfin d'allonger le grand axe.

La figure 3.26 illustre comment évoluent les courbes d'iso-probabilité d'erreur d'un 8-QUIS lorsque les fluctuations sont uniformes et symétriques autour de zéro. Les ellipses sont cette fois horizontales. On en

conclut que c'est lorsque la moyenne augmente avec le paramètre  $\sigma$  que la rotation des l'ellipses des courbes iso-probabilité d'erreur opère. L'interprétation physique de ce phénomène reste encore à faire.

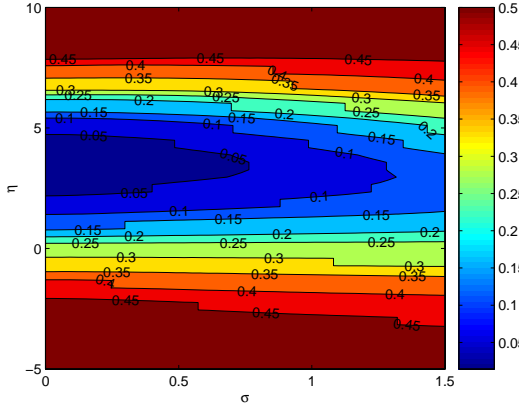


FIG. 3.26 – Courbes de niveaux de la nappe de probabilité d'erreur d'un 8-QUIS en fonction de  $\sigma$ , l'écart-type des fluctuations de seuils de loi uniformes sur  $[0; 2\sqrt{3}\sigma]$ , et du seuil de détection  $\eta$ . Le bruit de canal est laplacien,  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . La probabilité d'erreur est estimée par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d'observations.

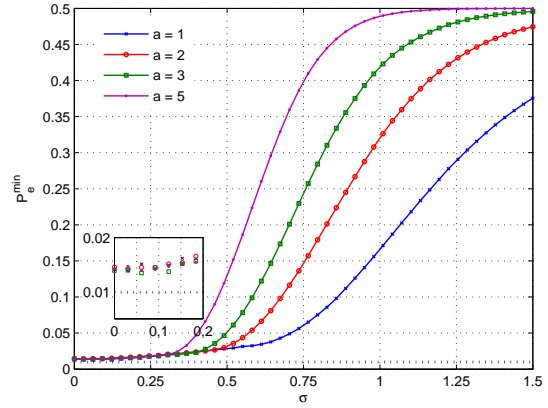


FIG. 3.27 – Probabilité d'erreur minimale d'un 8-QUIS en fonction de  $\sigma$ , l'écart-type des fluctuations de seuils. Les fluctuations de seuils sont distribuées selon une loi en beta symétrique et normalisée de paramètre  $a$ . Le bruit de canal est laplacien,  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . La probabilité d'erreur est estimée par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d'observations.

Pour un type de fluctuations donné ( $a$  fixé), à chaque valeur de  $\sigma$  correspond une valeur de seuil pour laquelle la probabilité d'erreur est minimale. La figure 3.27 donne la grandeur  $P_e^{min}$  en fonction de l'écart-type des fluctuations lorsque celles ci sont distribuées selon une loi en beta de paramètre  $a$  et normalisée. Les courbes sont croissantes, et on peut découper leur évolution en trois zones :

- pour  $\sigma$  faible ;  $\sigma \leq 0.25$ , l'accroissement est inférieur à 1%,
- pour  $\sigma$  modéré ; la chute de performance augmente rapidement avec la valeur de  $\sigma$ . Plus le coefficient  $a$  augmente et plus l'augmentation de  $P_e^{min}$  est sensible aux variations de  $\sigma$ ,
- pour  $\sigma$  grand ; le quantifieur-détecteur stochastique devient un détecteur aléatoire (équivalent à prise de décision au pile ou face).

La probabilité d'erreur minimale d'un quantifieur-détecteur est une grandeur qui ne peut être que dégradée par les fluctuations de seuils. Par exemple, le minimum de la probabilité d'erreur atteignable par correction stochastique pour  $\sigma = 1$  est forcément inférieure à la meilleure des probabilités d'erreur pour  $\sigma = 0.5$ . Si il y a un avantage à utiliser l'effet de correction stochastique présent dans les quantifieurs dans une application donnée, autant que se soit pour une valeur de  $\sigma$  faible la plus faible possible.

Nous terminons l'étude de l'influence du paramètre  $\eta$  sur les performances des quantifieurs stochastiques en présentant des réseaux de courbes COR [80]. Ces courbes donnent comment varie la probabilité de détection en fonction de la probabilité de fausse alarme. Elles sont tracées point par point en faisant varier le seuil de détection  $\eta$  sur  $\mathbb{R}$ . Un réseau de courbes COR permet donc de connaître les performances globales d'un détecteur. Chaque courbe possède un point en  $(0; 0)$  obtenu lorsque le seuil de détection  $\eta \rightarrow \infty$  et un autre point en  $(1; 1)$  qui est obtenu en faisant tendre  $\eta \rightarrow -\infty$ . Sur le segment de droite passant par ces deux points la probabilité d'erreur est égale à 0.5. Ce segment de droite est la courbe COR d'un détecteur

au pile ou face. Sur un tel réseau, un détecteur performant s'illustre par une courbe COR qui tend à passer par le point  $(0; 1)$ . Notons que lorsque le détecteur est un quantifieur stochastique, il existe une courbe COR pour chaque valeur de  $\sigma$ .

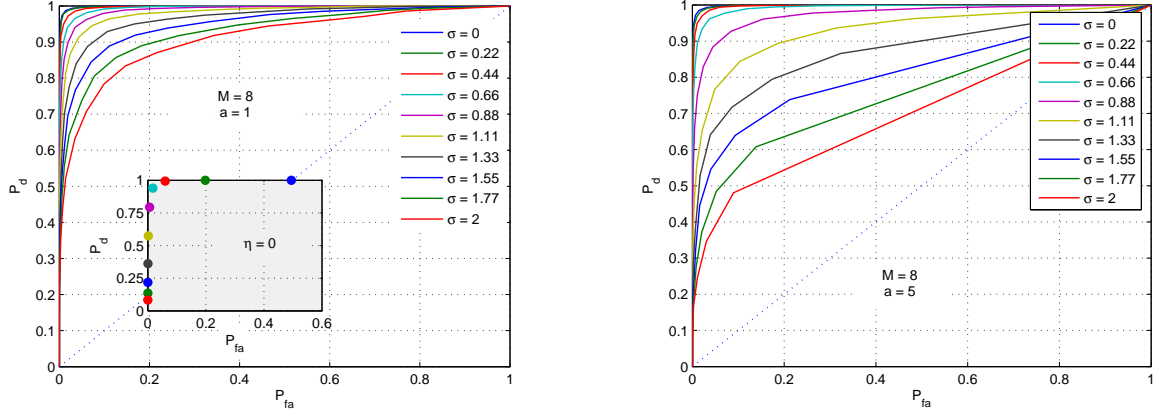


FIG. 3.28 – Courbe COR d'un 8-QUIS de fluctuations distribuées selon une loi en Beta normalisée de paramètre  $a$  et d'écart-type  $\sigma$ . Les constantes à détecter sont  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . Les probabilités de détection et de fausse alarme sont estimées par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d'observations.

La figure 3.28 présente les réseaux de courbes COR d'un 8-QUIS, dont les fluctuations de seuils sont distribuées selon une loi en beta normalisée de paramètre  $a = 1$  (gauche) et de paramètre  $a = 5$  (droite). Le problème est centré autour de 1. Sur les deux graphiques, toutes les courbes sont placées les unes en dessous des autres selon les valeurs croissantes de  $\sigma$ . Plus  $\sigma$  augmente et plus les performances globales du détecteur diminuent. L'effet de correction stochastique observé auparavant n'est donc pas clairement visible sur les réseaux de courbes COR. La correction stochastique est de nature ponctuelle, c'est-à-dire qu'elle a lieu pour des couples de  $\eta$  et de  $\sigma$ .

Le panneau intérieur de la figure de gauche donne l'évolution de la probabilité de détection en fonction de la probabilité de fausse alarme pour un seuil de détection fixé,  $\eta = 0$ , et pour différentes valeurs de  $\sigma$ . Cette suite de points n'est pas une courbe COR puisque le seuil de détection  $\eta$  est fixe. Pour cette valeur de  $\eta$ , le point correspondant à  $\sigma = 0$  est placé en haut à droite du panel, alors que le point obtenu pour  $\sigma = 2$  est en bas à gauche. On voit que pour  $\sigma < 0.66$  les points se rapprochent du coin supérieur gauche, ce qui illustre une phase d'amélioration des performances en fonction de  $\sigma$ . Pour les valeurs de  $\sigma$  supérieure à 0.66, les points s'éloignent du coin supérieur gauche pour se rapprocher du coin inférieur gauche, c'est la phase de décroissance de performance en fonction de  $\sigma$ . On en conclut que globalement, les fluctuations de seuils n'améliorent pas les performances générales d'un quantifieur-détecteur, mais que par contre, il peut y avoir une correction stochastique qui opère localement, c'est-à-dire à seuil fixe.

Le graphique de droite de la figure 3.28 permet simplement de montrer quel est l'effet du coefficient  $a$  sur le réseau de courbe COR. On remarque que plus la valeur  $a$  augmente et plus le réseau s'étend dans le plan supérieur au dessus de la première bissectrice. Les performances générales du quantifieur sont donc plus dégradées au fur et à mesure que  $\sigma$  augmente lorsque  $a$  est supérieur à 1.

### 3.3.4.3 La taille $M$ du quantifieur

Dans cette partie, nous cherchons à mettre en évidence comment évolue l'effet de correction stochastique avec la taille des quantifieur-détecteurs. Pour cela nous comparons ensemble les performances de  $M$ -QUIS dans un problème de détection de constantes centrées en 1, où le seuil de détection  $\eta$  est nul. Les fluctuations

de seuils sont uniformes et distribuées sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma]$ . L'évolution de la probabilité d'erreur de six  $M$ -QUIS est représentée sur les deux figures 3.29 avec une plage de valeurs de  $\sigma$  réduites pour la seconde figure.

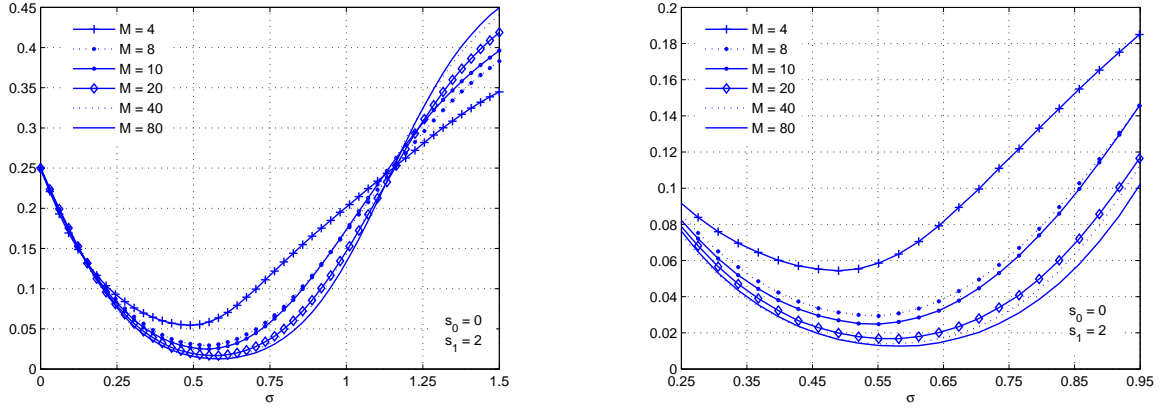


FIG. 3.29 – Probabilité d'erreur de  $M$ -QUIS en fonction de  $\sigma$ , l'écart-type des fluctuations uniformes sur  $[0; 2\sqrt{3}\sigma]$  pour seuil de détection  $\eta = 0$ . Les constantes à détecter sont  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . Le bruit de canal est Laplacien. La probabilité d'erreur est estimée par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d'observations.

Pour de très faibles valeurs de  $\sigma$ ,  $\sigma < 0.2$ , les performances des six  $M$ -QUIS sont pratiquement identiques. Pour des valeurs de  $\sigma > 1.1$ , plus la taille  $M$  du quantifieur est importante et plus les performances du quantifieur sont dégradées par l'ajout de bruit. En effet, en pratique on constate que plus le nombre de seuils est important, et plus il est simple de "dénaturer" le quantifieur par inversion de seuils. Ces nombreuses inversions, fonctions de  $M$  et de  $\sigma$ , altèrent complètement la structure du détecteur. Ainsi, la statistique de test  $T_{\tilde{Q}}$  n'est plus du tout représentative des données  $\mathbf{x}$  appliquées en entrée. Cette explication va dans le même sens que les observations réalisées récemment par Saha dans [140].

L'amélioration de la probabilité d'erreur par le bruit de seuil prend effet pour des valeurs de  $\sigma$  comprises entre 0.35 et 0.75 dans ces simulations. Comme le montre le graphique de gauche de la figure 3.30, la valeur de  $\sigma_{opt}$  augmente avec  $M$ . Plus le quantifieur est de taille importante, et plus les fluctuations doivent être de puissance élevée pour que l'effet de correction stochastique soit effectif. Par contre, on constate sur la figure de droite de 3.30, que la probabilité d'erreur obtenue pour des fluctuations de puissance  $\sigma_{opt}^2$  diminue selon  $M$ . La décroissance de  $P_e(\sigma_{opt})$  en fonction de  $M$  n'est pas linéaire. Au delà de  $M = 100$ , les performances commencent à stagner. Nous avons approché les performances asymptotiques de la probabilité d'erreur  $P_e(\sigma_{opt})$  par simulation pour  $M = 250$ , et dans ce cas de figure, nous trouvons  $P_e(\sigma_{opt}) = 0.0124$  pour  $\sigma_{opt} = 0.592$ .

Nous comparons par la suite les performances "optimales" de plusieurs  $M$ -QUIS à celles de quantifieurs asymptotiques  $M-Q_{\infty, J}$  (voir partie 3.2.3) dans les mêmes conditions stochastiques. La comparaison est réalisée dans le cas d'un bruit de canal gaussien pour  $M = 10, 20, 40$  et  $80$ . Le résultat est tracé sur la figure 3.31. Cette figure donne la probabilité d'erreur minimale atteinte par ces quantifieurs en fonction de l'écart-type  $\sigma$  des fluctuations ajoutées sur les seuils. Comme le montre le panneau intérieur, pour des faibles valeurs de  $\sigma$ , les performances des quantifieurs asymptotiques sont supérieures à celles des quantifieurs uniformes. On vérifie également dans ces conditions ( $\sigma$  faible) que plus la taille du quantifieur augmente et plus les performances des  $M-Q_{\infty, J}$  sont accrues. Néanmoins, pour des valeurs de  $\sigma$  plus importantes, les  $M$ -QUIS sont plus performants et sont donc plus robustes aux fluctuations aléatoires de seuils.

Finalement, la conclusion de ce paragraphe est qu'il n'est pas nécessaire de recourir à l'optimalité lorsque la taille  $M$  est petite, puisque les quantifieurs optimaux et uniformes ont des performances similaires.

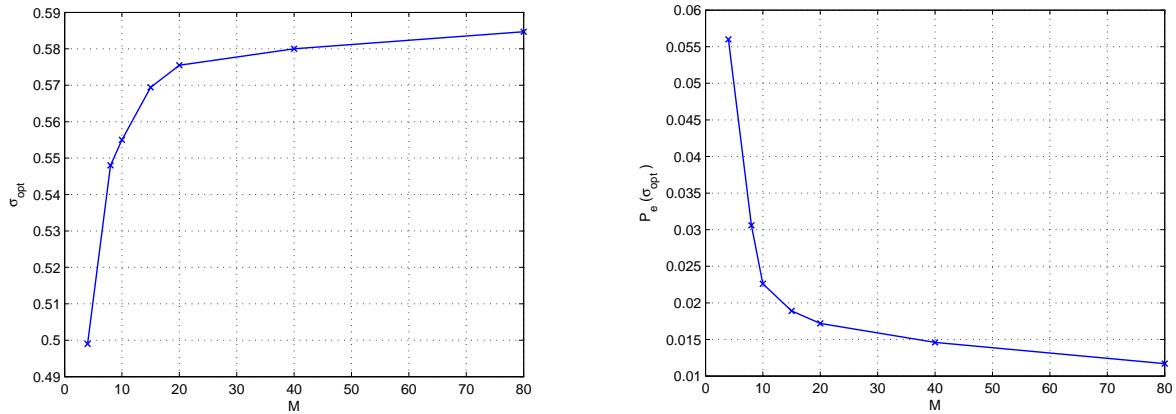


FIG. 3.30 – Évolution de  $\sigma_{opt}$  et de  $P_e(\sigma_{opt})$  (obtenus à partir de la figure 3.29) en fonction de  $M$ .

#### 3.3.4.4 La densité de probabilité du bruit de canal

A présent, nous cherchons à tester quelle est l'influence de la distribution du bruit de canal sur les performances de détection des quantifieurs stochastiques. La famille de densité de bruit de canal utilisée permet de réaliser simplement l'étude en faisant varier le coefficient  $p$ .

Les résultats sont tracés sur la figure 3.32 pour deux QUIS de taille différente. Le premier est composé de 4 niveaux, alors que le second en possède 8. On se place dans un cadre où la correction stochastique peut opérer. En effet, le problème de détection est celui qui est centré autour de 1, et le bruit de seuil est uniformément distribué sur  $[0; 2\sqrt{3}\sigma]$ . La probabilité d'erreur est évaluée et tracée en fonction de  $\sigma$  pour 5 valeurs de  $p$ . Les deux figures du bas sont tracées pour une plage de valeurs de  $\sigma$  plus proche de la valeur optimale  $\sigma_{opt}$  dans chaque cas.

Les courbes tracées sur la figure 3.32 montrent que la correction stochastique existe pour toutes les densités de canal testées, et que la valeur optimale de la puissance des fluctuations varie peu avec le coefficient  $p$ . Les minima de probabilité d'erreur atteints dans chaque cas sont différents pour  $M = 4$ , alors que pour  $M = 8$ , seul le minimum obtenu pour  $p = 0,5$  se démarque des autres. Cette observation est vérifiée pour des valeurs de  $M$  importantes. Les quantifieurs stochastiques sont donc relativement robustes aux variations de bruit de canal.

### 3.4 Retour sur les neurones du système visuel

La majeure partie de ce chapitre a été consacré à l'étude des schémas de détection particuliers, les quantifieurs-détecteurs, dans des problèmes de décisions binaires. On a montré dans la première partie du chapitre que les quantifieurs sont équivalents à des réseaux de neurones formels. Évidemment, la réciproque n'est pas toujours vérifiée. Néanmoins, nous pouvons extrapoler les résultats de détection obtenus avec des quantifieurs à de simples réseaux de neurones à seuils, et ainsi comprendre comment varie les performances de réseaux-détecteurs (simples puisqu'à seuils) évoluant dans un environnement bruité. La méthode employée offre la possibilité d'avoir des références en termes de performances de détection par la théorie des quantifieurs-détecteurs optimaux (voir 3.2.2 et 3.2.3). A l'aide des remarques et des résultats obtenus tout au long du chapitre nous pouvons à présent développer quelques éléments de réponses aux questions suivantes :

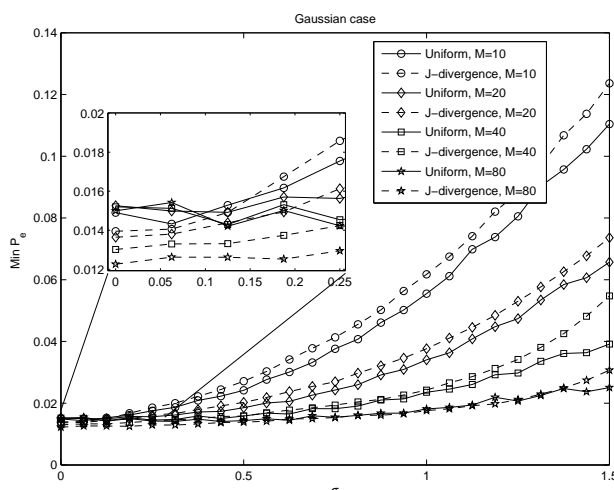


FIG. 3.31 – Probabilité d’erreur minimale de  $M$ - $Q_{UIS}$  et de  $M$ - $Q_{\infty,J}$  en fonction de  $\sigma$ , l’écart-type des fluctuations uniformes sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma]$ . Les constantes à détecter sont  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . Le bruit de canal est Laplacien. Les probabilités d’erreur sont estimées par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d’observations. Les valeurs de probabilité d’erreur minimale sont obtenues numériquement en faisant varier le seuil  $\eta$ .

#### Qu’est-ce-que la correction stochastique dans un réseau à seuils ?

Nous avons montré l’existence au sein des quantifieurs-détecteurs d’un phénomène d’amélioration des performances par les fluctuations aléatoires des seuils de quantifications. Au niveau réseau, cela revient à considérer des variations aléatoires des seuils de déclenchement des potentiels d’actions (voir partie 1.2.2). Or, la variabilité du code neuronal au niveau d’un neurone est généralement interprétée par l’évolution des neurones voisins. On peut alors assimiler l’effet de correction stochastique à une forme aléatoire d’asservissement d’un neurone par le reste de la population. Tous les neurones d’une couche sont susceptibles d’être corrigés ou asservis par les autres neurones de la couche. Cette description rejoint les théories d’auto-organisation des réseaux de neurones [32].

#### Quels sont les avantages pour un réseau-détecteur d’évoluer en environnement bruité ?

Nous avons montré que les quantifieurs-détecteurs stochastiques possèdent différentes formes de robustesse. Un degré de robustesse qui se manifeste à la fois vis-à-vis des variations de constantes du problème ( $s_0$  et  $s_1$ ), et à la fois vis-à-vis des variations de densité de probabilité de bruit de canal. En imaginant que les neurones de la rétine doivent fournir sans arrêt des descripteurs relatifs à la scène visualisée en réalisant des tests d’hypothèses, il est clair que les problèmes de détections sous-jacents sont très variés et variables. On en conclut que le bruit ambiant, responsable de la correction stochastique, rend les réseaux-détecteurs adaptatifs et par conséquent robustes aux variations d’hypothèses.

#### Quelle est la stratégie d’optimisation de réseau retenue par la nature ?

Nous venons de supposer que les problèmes de détections auxquels doivent répondre les éléments du système visuel sont très variés. Les problèmes de détections analysés dans ce chapitre sont très simples. Dans la partie 3.2 nous avons exposé plusieurs méthodes permettant de construire des quantifieurs-détecteurs optimaux toujours selon un critère de performance. Malgré la simplicité des problèmes de



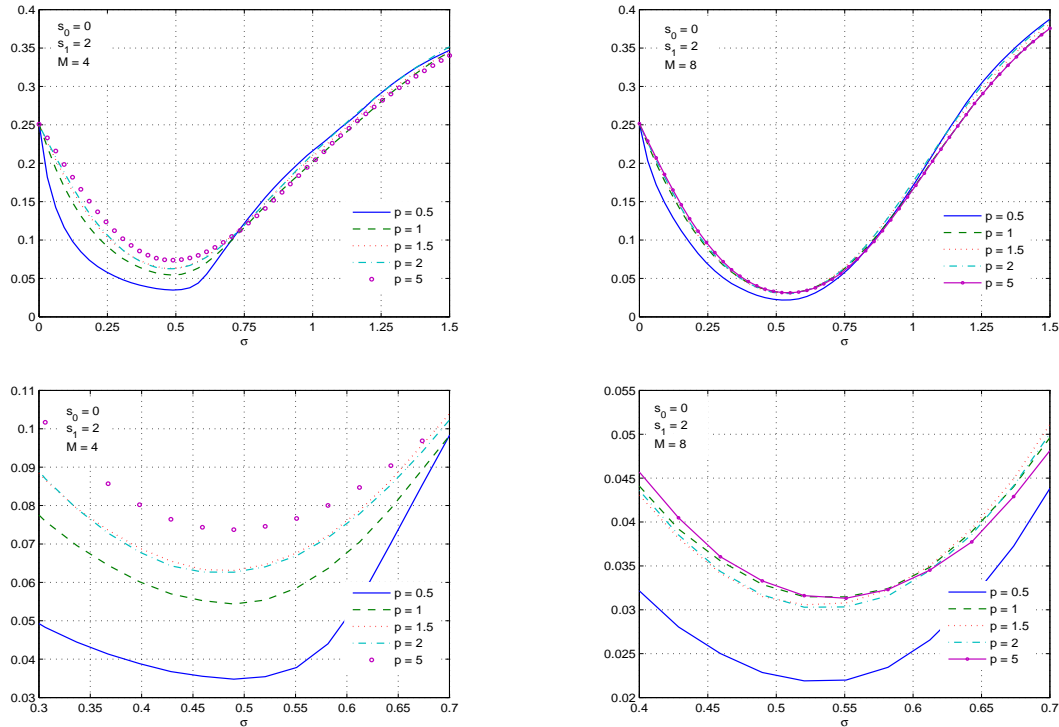


FIG. 3.32 – Probabilité d’erreur d’un 4-QUIS (gauche) et d’un 8-QUIS (droite) de fluctuation de seuil uniforme sur  $[0, 2\sqrt{3}\sigma]$  en fonction de  $\sigma$ , pour différentes densités de bruit de canal :  $p = 0.5, 1, 1.5, 2, 5$ . Le problème est symétrique en 1, les constantes à détecter sont :  $s_0 = 0$  et  $s_1 = 2$ . Le seuil de détection est nulle. La probabilité d’erreur est estimée par simulation de Monte-Carlo, pour 1000 réalisations de bruit de seuils et 100 séquences d’observations.

détection du chapitre, les résultats obtenus en 3.3.3 montrent que les quantifieur-détecteurs optimaux sont très sensibles aux fluctuations aléatoires de seuils. Nous en concluons que si elle existe, ce n’est certainement pas une de ces stratégies qui est retenue par la nature.

En revanche, les quantifieurs uniformes stochastiques variants et invariants ont montré un fort potentiel à être corrigés stochastiquement. Ces détecteurs sont très souples et adaptés à un mode de fonctionnement en environnement bruité. *A priori*, si une stratégie d’optimisation existe, on peut affirmer qu’elle n’est pas orientée vers l’optimalité pour un problème donné mais plutôt autour de la robustesse du détecteur et sa capacité à s’adapter aux variations de travail.

### Quelques perspectives d’étude :

Au niveau de notre approche, la première des perspectives envisagées, est d’étudier comment se comporte les quantifieurs-détecteurs stochastiques lorsque les bruits de seuils ne sont plus indépendants. D’un point de vue réseau de neurones, cette hypothèse de travail permettrait de faire ressortir si il existe ou non une tendance de correction globale au réseau, ou si la correction s’effectue indépendamment des connexions des neurones entre eux. Dans ce cas, l’étude devrait être menée non pas sur une valeur de  $\sigma$  mais sur une matrice de covariance de taille  $M \times M$ . Pour mettre en évidence les éventuels effets d’amélioration par le bruit, on peut par exemple envisager de tracer l’évolution de la probabilité d’erreur du réseau en fonction d’une norme matricielle de la matrice de corrélation.

L’étude que nous avons présentée dans ce chapitre a été réalisée pour des réseaux de neurones simples

à seuils. Ces neurones sont des approximations des neurones impulsionnels (voir partie 1.2.2), neurones impulsionnels qui ne sont pas issus de la biophysique mais qui reproduisent néanmoins beaucoup de caractéristiques du fonctionnement de neurones réels. Il nous semble intéressant de prolonger l'étude autour de réseaux de neurones impulsionnels (sans approximations) pour être plus proche de la biologie. On peut apporter plus de réalisme en modélisant par exemple les trains de potentiels d'actions par des processus ponctuels. Dans ce cas, l'approche par quantifieur n'est plus exploitable. Il serait donc nécessaire de définir des outils de comparaisons de performances entre réseaux stochastiques et réseaux optimaux. Par exemple, dans [66], les auteurs présentent des méthodes de classifications à noyaux, réalisées par réseaux de neurones, dont le critère de performances est issu des méthodes bayésiennes. Des études semblables peuvent également être menée autour de réseau de neurones dont les cellules élémentaires seraient des neurones à impulsions.



**L**ES TRAVAUX présentés dans cette thèse sont axés autour d'une branche particulière du traitement du signal, la branche qui observe les systèmes, où le bruit peut avoir un comportement bénéfique. Le système visuel est un terrain propice pour ce type de recherches. Dans le premier chapitre nous avons exposé quelques principes sur le fonctionnement du système visuel. Nous avons en particulier détaillé les opérations des premières couches. Aux premiers abords, le système visuel semble réaliser à plusieurs étages, des opérations de traitement du signal assez classiques : échantillonnage, filtrage, codage. En réalité, ces opérations sont relativement complexes. L'échantillonnage effectué par la rétine est irrégulier, et est composé de quatre types de photorécepteurs qui assurent une très grande dynamique de traitement. Le filtrage de la couche plexiforme externe est spatio-temporel, et réalise pratiquement instantanément un blanchiment spectral du flux lumineux provenant des photorécepteurs. Le codage en potentiels d'actions des stimuli visuels par la couche plexiforme interne effectue au préalable une sélection, extraction, et compression des informations "pertinentes" contenues dans la scène visuelle. De plus, toutes ces opérations complexes sont réalisées dans du bruit. Dans ce manuscrit, nous avons présenté quel pourrait être le rôle du bruit sur deux points particuliers du traitement visuel.

Dans le chapitre 2, nous avons abordé la question de l'échantillonnage soumis à des fluctuations aléatoires. Dans les modèles étudiés, nous avons mis en évidence deux phénomènes dépendants à la fois de la nature des fluctuations, et de la répartition des photorécepteurs, qui garantissent une amélioration des performances. La mesure de performances utilisée est la fonction d'inter-corrélation normalisée entre un point de l'image et un photorécepteur : la cohérence. Dans un premier temps, l'étude a porté sur l'influence de fluctuations aléatoires sur une grille de photorécepteurs régulière. Cette étude a fait apparaître le phénomène de contrôle optimal stochastique de la cohérence par les micro-mouvements. Ce phénomène est caractérisé par le fonctionnement d'un photorécepteur à cohérence maximale pour un certain niveau de bruit. Dans un deuxième temps, nous avons poursuivi cette étude sur une grille irrégulière. D'une part nous avons montré que le phénomène de contrôle optimal stochastique de la cohérence par les micro-mouvements est également présent sur une grille irrégulière, et d'autre part, nous avons observé le phénomène qualifié d'amélioration de la cohérence par l'irrégularité de la grille. Ce dernier est caractérisé par une augmentation de la cohérence d'un photorécepteur selon le degré d'irrégularité de la grille. Dans le modèle utilisé, cette irrégularité est paramétrée par une grandeur aléatoire que nous avons appelé bruit de grille. Nous avons montré que les performances au niveau d'un photorécepteur appartenant à une grille irrégulière sont supérieures à celles d'un photorécepteur d'une grille régulière. Le bruit de grille et les fluctuations aléatoires ont donc des effets bénéfiques sur les performances des modèles étudiés. Par conséquent, il semblerait que l'échantillonnage du système visuel exploite ces possibilités d'amélioration des performances par le bruit.

Nous pensons que cette hypothèse doit être validée (ou invalidée) par expérimentation. Les points cruciaux à vérifier sont de tester si la puissance des micro-fluctuations varie au cours du temps ou non, et d'examiner si les éventuelles variations de puissance permettent bien une amélioration de la cohérence. Ces expériences peuvent être réalisées à l'aide d'un oculomètre (*eye tracker* en anglais) puisque les techniques actuelles permettent de faire des enregistrements de la position des yeux toutes les 2 millisecondes, c'est-à-dire à une cadence d'échantillonnage suffisante pour détecter des micro-saccades [38, 101]. Si ces expérimentations conduisent à la conclusion que la puissance des micro-fluctuations est bien variante au

cours du temps, alors dans un deuxième temps il serait important de comprendre pour quelles tâches cognitives cette adaptation de la puissance serait réalisée, et de trouver où et comment cette adaptation stochastique s'effectuerait.

Dans le cas, où l'expérimentation invaliderait l'hypothèse de départ, c'est-à-dire en observant que la puissance des fluctuations est constante, alors nous en concluons que le contrôle optimal stochastique présenté dans ce manuscrit n'est pas exploité au sein du système visuel. Néanmoins, pour une puissance de micro-fluctuations donnée, il peut y avoir certains photorécepteurs qui fonctionnent à cohérence maximale pour une zone de la scène visuelle. Dès lors, on peut supposer que ce sont les cônes placés dans la région fovéale qui fonctionnent dans ces conditions, et on peut interpréter le rôle des micro-fluctuations comme un processus qui participe à un accroissement de la précision ou de l'acuité visuelle, et éventuellement d'expliquer le phénomène d'hyperacuité visuelle [44] par ces observations. Dans le cas où l'expérience nous indiquerait que ce sont plutôt les bâtonnets positionnés aux extrémités de la rétine qui bénéficieraient de cette amélioration de la précision, alors ces résultats suggéreraient un phénomène d'amélioration de la vision périphérique, encore appelé "hyperacuité visuelle dans le champs visuel périphérique" par Henning [64].

Le chapitre 3 a été consacré à l'étude des problèmes de détection binaires supposés être réalisés par les neurones du système visuel, et en particulier au niveau de la couche plexiforme interne. Les efforts ont porté sur l'évaluation de l'influence du bruit interne des réseaux sur les performances de détection. Cette étude s'est appuyée sur une modélisation des neurones biologiques par des réseaux de neurones formels relativement simples, les neurones à seuils. On a d'abord montré que sous certaines hypothèses, ce genre de réseau de neurones formels réalise la quantification des informations qui sont appliquées en entrée. Lorsque les réseaux à seuils sont soumis à des fluctuations aléatoires, alors la fonction réalisée par le réseau bruité est toujours une quantification, mais cette fois, la quantification est stochastique. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques méthodes capables de rendre un quantifieur optimal pour un problème de détection donné. La finalité de cette démarche était de construire un système de référence en termes de performances de détection. Dans un deuxième temps, nous avons évalué les performances de détection de différents quantifieurs stochastiques. De ces expériences, nous avons fait ressortir deux résultats intéressants. D'une part, pour certains problèmes de détection, il est possible de déterminer un niveau de bruit optimal pour que les quantifieurs stochastiques fonctionnent à probabilité d'erreur minimale, et d'autre part, la robustesse d'un détecteur quantifieur stochastique est relativement importante vis-à-vis des paramètres des expériences. Là encore, le bruit injecté dans le modèle permet d'accroître les performances. En particulier, si le quantifieur n'est pas centré par rapport au problème de détection, alors le bruit peut réaliser une correction stochastique en recentrant le quantifieur. De même, le bruit apporte de la diversité aux traitements, et c'est en partie ce qui explique la robustesse des quantifieurs stochastiques.

Ainsi, dans les modèles étudiés, le bruit que nous ajoutons sur les seuils peut être réellement bénéfique si sa puissance est correctement réglée. Au niveau du système visuel, c'est peut être cette stratégie qui est exploitée, puisque comme nous l'avons observé, alors que les quantifieurs stochastiques sont assez robustes, les performances des quantifieurs optimaux se révèlent médiocres lorsque les conditions de détections s'éloignent de celles retenues pour l'optimisation. Néanmoins, nous pensons que les résultats du chapitre 3, bien que très encourageants, sont obtenus avec des modèles trop simples pour être directement extrapoler sur le fonctionnement du système visuel réel. Alors que des expérimentations nous paraissent difficile à réaliser, certains points demandent tout de même à être vérifiés en pratique sur des neurones réels. Par exemple, les conclusions du chapitre 3 suppose qu'il y ait une variation de la puissance du bruit de seuils, qui permettrait de réaliser la correction stochastique évoquée dans le chapitre. On peut certainement avoir une idée de cette adaptation (ou du moins d'une variation) de la puissance des fluctuations internes en mesurant l'activité électrique de neurones *in vitro*. Néanmoins, la mesure de l'activité électrique de neurones *in vivo* nous paraît bien plus difficile à réaliser, même si un tel résultat validerait de façon forte l'hypothèse

énoncée plus haut. De plus, élaborer une phase expérimentale sur des réseaux de neurones *in vitro* nous paraît également périlleuse, puisque nous serions incapable d'interpréter la réponse d'un tel réseau à un problème de détection binaire. En effet, comment peut-on déchiffrer une salve de potentiels d'actions en termes de décision  $H_0$  ou  $H_1$  lorsqu'un stimulus est appliqué à ce que l'on suppose être l'entrée du réseau? Ces quelques remarques confirment que les études liés aux vivants, et en particulier celles s'intéressant à l'homme, sont très complexes. Pour obtenir plus de résultats, nous pensons donc qu'il est nécessaire d'établir une concertation pluridisciplinaire.

Que ce soient les micro-mouvements aléatoires des yeux, la répartition non régulière des photorécepteurs sur la rétine, la variabilité du code neuronal, ou les fluctuations interne des neurones, ces formes d'aléas participent à notre sens au fonctionnement du système visuel. Nous n'avons exploré que deux axes de recherche sur ce thème. Comme nous l'avons déjà précisé, ces deux axes peuvent être approfondis, d'une part en intégrant dans les modèles d'études plus de données biologiques observées sur le système visuel, et d'autre part en passant par une phase de recherche plus expérimentale. Finalement, nous sommes persuadés que les bénéfices du "bruit" ne se situent pas seulement au niveau de l'échantillonnage par les photorécepteurs ou dans la sélection et le codage des informations pertinentes de la scène visuelle, mais dans toutes les fonctions du système visuel où de "l'aléatoire" semble prendre place.



## Fonctions de Lambert

**H**ISTORIQUEMENT, les fonctions  $W_k$  de Lambert furent étudiées par Johann Heinrich Lambert puis par Euler [30] lorsqu'ils cherchaient à donner une solution à l'équation :

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$$

Ces fonctions sont par exemple utilisées dans des applications mathématiques telles que les problèmes de dénombrements combinatoires ou d'exponentiations itérées. Ces fonctions apparaissent encore lors de la résolution d'équations différentielles à retard.

Dans cette annexe, nous donnons dans un premier temps la définition et quelques propriétés des fonctions de Lambert. Dans une deuxième partie, nous détaillons le calcul prouvant l'unicité de  $\sigma_0^m$  de la partie 2.2.2 en donnant exprimant  $\sigma_0^m$  à l'aide d'une fonction de Lambert.

## A.1 Définitions et propriétés

La fonction de Lambert est définie comme étant la fonction réciproque de  $f$  telle que :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\longmapsto \mathbb{C} \\ w &\longmapsto z = we^w \end{aligned}$$

où le nombre complexe  $z = f(w) = x + iy$ . Ainsi,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , il existe  $w \in \mathbb{C}$  qui vérifie l'équivalence  $we^w = z \Leftrightarrow w = W_k(z)$ , on définit alors :

$$w = f^{-1}(z) = W_k(z)$$

Comme la fonction  $f$  n'est pas injective, la fonction  $W_k$  est multiforme<sup>1</sup>. Le coefficient  $k$  représente le paramètre de la fonction. Beaucoup d'études traitent le cas où  $z$  est complexe [30], nous nous limiterons ici aux arguments réels  $z = x \in \mathbb{R}$ . Ainsi, lorsque  $e^{-1} \leq x < 0$ , seulement deux branches de  $W_k(\cdot)$  existent. Nous notons la branche satisfaisant  $W_k(x) \geq -1$  par  $W_0(x)$ . La branche qui au contraire satisfait  $W_k(x) < -1$  a comme indice  $k = -1$ ,  $W_{-1}(x)$ . Pour tout réel  $x \geq 0$ , la définition est unique, car seule la branche  $W_0(\cdot)$  existe, c'est pour cette raison qu'elle porte le nom de branche principale. Par convention, si le paramètre  $k$  est omis, la fonction fait directement référence à la branche principale  $W_0(x) = W(x)$ . La deuxième branche  $W_{-1}(x)$  du cas réel porte généralement le nom de branche secondaire. La figure A.1 donne l'allure de la branche principale en trait continu, et de la branche secondaire de la fonction de Lambert pour des valeurs de  $x$  réelles.

On peut montrer [30] que  $\forall k$  on a toujours  $W_k(e^{-1}) = -1$ . De même, pour tout  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$  vérifiant  $(a + bx)e^{cx} - d = 0$ , nous avons :

$$x = \frac{1}{c} W_k \left( \frac{cd}{be^{ac/b}} \right) - \frac{a}{b}$$

<sup>1</sup>C'est pour cette raison que nous notons parfois abusivement "les fonctions" de Lambert et non pas la fonction de Lambert



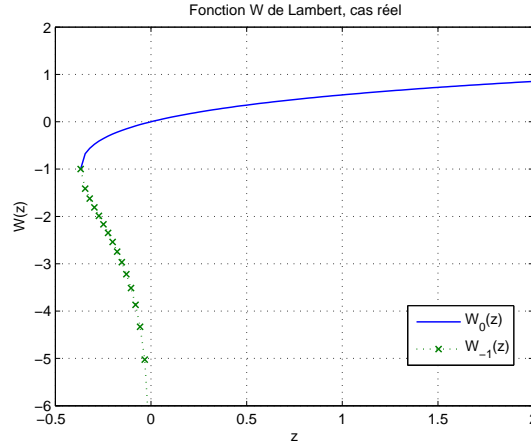


FIG. A.1 – Les deux branches réelles de la fonction de Lambert. En trait plein, la branche principale  $W_0(z) = W(z)$  et en pointillé la branche secondaire  $W_{-1}(z)$ .

## A.2 Calcul de $\sigma^m$ pour des fluctuations uniformes sur une grille régulière sans filtrage

Nous allons montrer que dans le cadre de la partie 2.2.2, la puissance de fluctuations optimale  $\sigma_0^m$  est unique, et allons donner son expression à l'aide de la fonction de Lambert. Pour des fluctuations uniformes, d'après (2.37) et (2.38), sur l'intervalle  $]|u_0|; +\infty]$ , la cohérence  $\mathcal{C}_e$  a pour expression :

$$\mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0) = \begin{cases} \frac{1 - \cosh(u_0)e^{-\sigma_0}}{\sigma_0} & \text{si } \sigma_0 > |u_0| \end{cases}$$

et la dérivée partielle de  $\mathcal{C}_e$  en  $\sigma_0$  en un point particulier  $u_0$  est donnée par :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0)}{\partial \sigma_0} = \frac{1}{\sigma_0^2} [\cosh(u_0)(1 + \sigma_0)e^{-\sigma_0} - 1] \quad \text{si } \sigma_0 > |u_0|$$

Les valeurs possibles de  $\sigma_0^m$  appartenant à l'intervalle  $]|u_0|; +\infty]$  sont les solutions de l'équation :

$$\cosh(u_0)(1 + \sigma_0^m)e^{-\sigma_0^m} - 1 = 0 \quad \text{pour } \sigma_0^m > |u_0|$$

Les propriétés de la fonction de Lambert permettent alors d'écrire :

$$\sigma_0^m(k) = - \left[ 1 + W_k \left( -\frac{e^{-1}}{\cosh(u_0)} \right) \right]$$

Puisque nous sommes dans le cas réel, il n'y a donc que deux solutions possibles, une pour  $k = 0$ , et une autre pour  $k = -1$ . Or, comme  $W_0(x) \geq -1 \forall x \in [-e^{-1}, \infty[$ , la solution pour  $k = 0$  donne toujours un résultat négatif, la puissance de fluctuations optimale  $\sigma_0^m$  est donc unique et est obtenue pour  $k = -1$  :

$$\sigma_0^m = - \left[ 1 + W_{-1} \left( -\frac{e^{-1}}{\cosh(u_0)} \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

---

Fluctuations uniformes - filtrage par une porte sur une grille régulière

---

**C**ETTE annexe présente dans un premier temps le détail des calculs de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  de la partie 2.2.3 pour des fluctuations uniformes lorsque la réponse impulsionnelle des photorécepteurs est une porte de largeur  $2\alpha$  :

$$a(x) = \begin{cases} 1/2\alpha & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Dans une deuxième partie, nous détaillons les calculs de l'analyse de fonction de cohérence  $\mathcal{C}_a$  obtenue dans ce cas d'étude.

### B.1 Calcul du numérateur $N_a$ de la cohérence $\mathcal{C}_a$

D'après (2.35) et (B.1), l'expression de la cohérence sur  $\mathcal{H}_a$  pour une seule ligne de photorécepteurs est donnée par :

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{1}{2\alpha\mathcal{D}_a} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} \mathcal{C}_e(v, \sigma) dv = \frac{\mathcal{N}_a(u, \sigma, \alpha)}{\mathcal{D}_a} \quad (\text{B.2})$$

où, d'après (2.41), le coefficient  $\mathcal{D}_a$  et le numérateur  $\mathcal{N}_a$  sont égaux à :

$$D_a = \frac{(2\beta\alpha - 1 + e^{-2\beta\alpha})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\beta\alpha} \quad \text{et} \quad N_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{1}{2\alpha} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} \mathcal{C}_e(v, \sigma) dv \quad (\text{B.3})$$

et où l'expression de la cohérence  $\mathcal{C}_e$  dans (B.2) du cas non filtré est donnée par (2.37) :

$$\mathcal{C}_e(u, \sigma) = \begin{cases} \mathcal{C}_e^1(u, \sigma) = \frac{1 - \cosh(\beta u)e^{-\sqrt{3}\beta\sigma}}{\sqrt{3}\beta\sigma} & \text{si } |u| < \sqrt{3}\sigma \\ \mathcal{C}_e^2(u, \sigma) = \frac{e^{-\beta|u|} \sinh(\sqrt{3}\beta\sigma)}{\sqrt{3}\beta\sigma} & \text{si } |u| \geq \sqrt{3}\sigma \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Les bornes d'intégrations, ainsi que l'expression de  $\mathcal{C}_e$  à intégrer de (B.2) changent selon les relations d'ordres entre les paramètres  $u$ ,  $\sigma$  et  $\alpha$ . La figure B.1 donne une représentation graphique du calcul de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  selon l'axe spatiale  $u$  à une valeur de  $\sigma$  fixé. Le support d'intégration est symbolisé par les rectangles hachurés différemment selon les valeurs de la distance d'inter-corrélation  $u$ , de la puissance des fluctuations  $\sigma^2$ , et de la largeur de la porte  $\alpha$ . Les extrémités des rectangles donnent les bornes d'intégration. Il y a donc 6 cas de figure à traiter. Cependant, d'après (B.2) et (B.4) l'expression de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est symétrique par rapport à la variable  $u$  :

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \mathcal{C}_a(-u, \sigma, \alpha) = \mathcal{C}_a(|u|, \sigma, \alpha)$$

Ainsi, sur les 6 cas à étudier, nous ne traiterons seulement que 4 cas, nous verrons que les 2 autres se déduisent facilement des autres. Dans tous les cas, nous prendrons soins d'extraire des expressions des intervalles d'intégrations les conditions sur  $\sigma$  et sur  $u$  qui permettent d'évoluer dans la surface d'un rectangle.

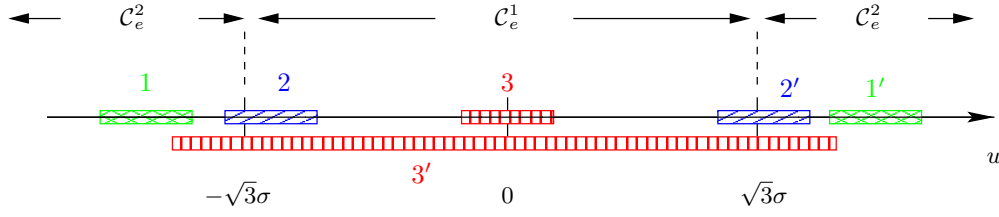


FIG. B.1 – Représentation graphique de  $C_e$  - Représentation des six cas du calcul de  $\mathcal{N}_a(u, \sigma, \alpha)$ . Le cas 1 et 1' sont symétriques. Idem pour les cas 2 et 2'.

**Cas 1** : Pour  $\alpha + u \leq -\sqrt{3}\sigma$  - La cohérence  $C_e$  est égale à  $C_e^2$  sur tout le domaine d'intégration. Les coefficients  $\sigma$  et  $\alpha$  sont positifs ou nuls. Le cas 1 est donc possible seulement si  $u \leq -\alpha$ , et pour  $\sigma \in [0; (-u - \alpha)/\sqrt{3}]$ , et nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_a(u, \sigma, \alpha) &= \frac{1}{2\alpha} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} C_e^2(v) dv = \frac{\sinh(\sqrt{3}\beta\sigma)}{2\sqrt{3}\alpha\beta\sigma} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} e^{\beta v} dv \\ &= \frac{\sinh(\sqrt{3}\beta\sigma) \sinh(\alpha\beta) e^{\beta u}}{\sqrt{3}\alpha\beta^2\sigma} \end{aligned}$$

Comme  $C_a(u, \sigma, \alpha) = C_a(-u, \sigma, \alpha) = C_a(|u|, \sigma, \alpha)$ , alors par symétrie le cas 1' est identique au cas 1 en remplaçant le terme en  $u$  par  $-u$ . Le domaine de validité de l'expression obtenue est alors :  $|u| \geq \alpha$  et  $\sigma \in [0; (|u| - \alpha)/\sqrt{3}]$ . L'expression du numérateur  $\mathcal{N}_a$  dans le cas 1 et dans le cas 1' est donc :

$$\boxed{\mathcal{N}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{\sinh(\sqrt{3}\beta\sigma) \sinh(\alpha\beta) e^{-\beta|u|}}{\sqrt{3}\alpha\beta^2\sigma} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} |u| \geq \alpha \\ \sigma \in \left[0; \frac{|u| - \alpha}{\sqrt{3}}\right] \end{cases}} \quad (\text{B.5})$$

**Cas 2** : Pour  $-\sqrt{3}\sigma \leq u + \alpha \leq \sqrt{3}\sigma$  et  $u - \alpha \leq -\sqrt{3}\sigma$  - Pour ce cas, on voit sur le graphique B.1 que la cohérence prend à la fois l'expression  $C_e^1$  et  $C_e^2$  sur le domaine d'intégration. L'encadrement de  $u + \alpha$ , et l'inégalité de  $u - \alpha$  peuvent encore s'écrire selon ces trois conditions en fonction de  $\sigma$  :

$$\begin{cases} \sigma \geq (u + \alpha)/\sqrt{3} \\ \sigma \geq (-\alpha - u)/\sqrt{3} \\ \sigma \leq (\alpha - u)/\sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

D'après la dernière ligne de (B.6), il faut que  $u \leq \alpha$  pour que  $\sigma$  soit positif ou nul et donc pour que le cas 2 soit possible. On voit également d'après (B.6) que  $\sqrt{3}\sigma$  doit appartenir aux deux intervalles  $\sqrt{3}\sigma \in [-u - \alpha; \alpha - u[$  et  $\sqrt{3}\sigma \in [u + \alpha; \alpha - u[$ . Le premier intervalle existe toujours, le second existe si  $u < 0$ . Dans ce cas, en écrivant  $u = -|u|$ , les valeurs de  $\sigma$  pour lesquelles nous sommes dans le cas 2 sont données par l'intersection des intervalles :

$$\begin{cases} u < 0 \\ \sqrt{3}\sigma \in [ |u| - \alpha; |u| + \alpha[ \cap [ -|u| + \alpha; |u| + \alpha[ = [ |u| - \alpha; |u| + \alpha[ \end{cases}$$

et la cohérence a comme expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_a(u, \sigma, \alpha) &= \frac{1}{2\alpha} \int_{u-\alpha}^{-\sqrt{3}\sigma} C_e^2(v) dv + \frac{1}{2\alpha} \int_{-\sqrt{3}\sigma}^{u+\alpha} C_e^1(v) dv \\ &= \frac{\alpha\beta + \sqrt{3}\beta\sigma + \beta u - \sinh(\sqrt{3}\beta\sigma) e^{-\alpha\beta} e^{\beta u} - \sinh(\alpha\beta + \beta u) e^{-\sqrt{3}\beta\sigma}}{2\sqrt{3}\alpha\beta^2\sigma} \end{aligned}$$

Toujours par symétrie, l'expression du numérateur  $\mathcal{N}_a$  de la cohérence du cas 2' est symétrique au cas 2, en remplaçant les termes en  $u$  par  $-u$ . Les conditions obtenues à partir des bornes sont dans ce cas :  $u > 0$  et  $\sqrt{3}\sigma \in [|u - \alpha|; u + \alpha[$ . L'expression de  $\mathcal{N}_a$  du cas 2 et 2' est donc identique et est valable quelque soit  $u$  et pour  $\sqrt{3}\sigma \in [|u| - \alpha|; |u| + \alpha[$  :

$$\boxed{\mathcal{N}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{\alpha\beta + \sqrt{3}\beta\sigma - \beta|u| - \sinh(\sqrt{3}\beta\sigma)e^{-\alpha\beta}e^{-\beta|u|} - \sinh(\alpha\beta - \beta|u|)e^{-\sqrt{3}\beta\sigma}}{2\sqrt{3}\alpha\beta^2\sigma}} \quad (\text{B.7})$$

$$\forall u \text{ et } \forall \sigma \in \left[ \frac{|u| - \alpha}{\sqrt{3}}; \frac{|u| + \alpha}{\sqrt{3}} \right[$$

**Cas 3** : Pour  $-\sqrt{3}\sigma \leq u - \alpha$  et  $u + \alpha \leq \sqrt{3}\sigma$  - La cohérence est uniquement égale à  $\mathcal{C}_e^1$  sur tout le domaine d'intégration (voir figure B.1). De plus,  $\sigma$  est toujours positif, et donc :

$$\begin{cases} \sigma \geq (u + \alpha)/\sqrt{3} \\ \sigma \geq (\alpha - u)/\sqrt{3} \\ \sigma \geq 0 \end{cases} \iff \sigma \geq \max\left(\frac{\alpha - u}{\sqrt{3}}, \frac{u + \alpha}{\sqrt{3}}, 0\right) \quad (\text{B.8})$$

Quelque soit le signe de  $u$  nous avons :

$$\max\left(\frac{\alpha - u}{\sqrt{3}}, \frac{u + \alpha}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{|u| + \alpha}{\sqrt{3}}$$

et le numérateur  $\mathcal{N}_a$  de la cohérence est dans ce cas égale à :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{N}_a(u, \sigma, \alpha) &= \frac{1}{2\alpha} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} \mathcal{C}_e^1(v) dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}\beta\sigma} - \frac{e^{-\sqrt{3}\beta\sigma} \cosh(\beta u) \sinh(\alpha\beta)}{\sqrt{3}\alpha\beta^2\sigma} \end{aligned}} \quad (\text{B.9})$$

$$\forall u \text{ et pour } \sigma \geq \left[ \frac{|u| + \alpha}{\sqrt{3}}; \infty \right[$$

**Cas 3'** : Pour  $-\sqrt{3}\sigma \geq u - \alpha$  et  $u + \alpha \geq \sqrt{3}\sigma$  - D'après la figure B.1, la cohérence a les deux expressions  $\mathcal{C}_e^1$  et  $\mathcal{C}_e^2$  sur le domaine d'intégration du cas 3'. Comme  $\sigma > 0$ , les conditions sur les bornes d'intégrations peuvent encore s'écrire selon :

$$\begin{cases} 0 \leq \sigma \leq (u + \alpha)/\sqrt{3} \\ 0 \leq \sigma \leq (\alpha - u)/\sqrt{3} \end{cases} \iff 0 \leq \sigma \leq \min\left(\frac{u + \alpha}{\sqrt{3}}, \frac{\alpha - u}{\sqrt{3}}\right) \quad (\text{B.10})$$

Or, quelque soit le signe de  $u$ ,  $\min\left(\frac{u + \alpha}{\sqrt{3}}, \frac{\alpha - u}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\alpha - |u|}{\sqrt{3}}$ . De plus, (B.10) n'est possible qu'à la condition que  $|u| \leq \alpha$  et le calcul du numérateur nous mène dans ce cas l'expression suivante :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{N}_a(u, \sigma, \alpha) &= \frac{1}{2\alpha} \int_{u-\alpha}^{-\sqrt{3}\sigma} \mathcal{C}_e^2(u) du + \frac{1}{2\alpha} \int_{-\sqrt{3}\sigma}^{\sqrt{3}\sigma} \mathcal{C}_e^1(u) du + \frac{1}{2\alpha} \int_{\sqrt{3}\sigma}^{u+\alpha} \mathcal{C}_e^2(u) du \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\cosh(\beta u) e^{-\alpha\beta} \sinh(\sqrt{3}\beta\sigma)}{\alpha\beta\sqrt{3}\sigma} \end{aligned}} \quad (\text{B.11})$$

$$\text{pour } |u| \leq \alpha \text{ et } \sigma \in \left[ 0; \frac{\alpha - |u|}{\sqrt{3}} \right[$$

et on remarque que le domaine de validité de (B.11) est le complémentaire du domaine de validité de (B.5) vis-à-vis de  $|u|$ .

En résumé, si l'on définit les variables normalisées,  $u_0 = \beta u$ ,  $\alpha_0 = \beta \alpha$  et  $\sigma_0 = \sqrt{3}\beta\sigma$ , le numérateur  $\mathcal{N}_a$  possède quatre écritures définies sur trois domaines de définitions qui sont fonctions de  $u_0$  et  $\alpha_0$  :

$$\mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0) = [0 ; |u_0| - \alpha_0[ \quad (B.12)$$

$$\mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0) = [|u_0| - \alpha_0 ; |u_0| + \alpha_0[ \quad (B.13)$$

$$\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0) = [|u_0| + \alpha_0 ; \infty[ \quad (B.14)$$

- si  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0)$ , nous sommes dans les cas (1, 1') et (3'), et  $\mathcal{N}_a$  a comme expression :

$$\mathcal{N}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 - e^{-\alpha_0} \cosh(u_0) \sinh(\sigma_0)}{\sigma_0 \alpha_0} & \text{si } |u_0| \leq \alpha_0 \\ \frac{e^{-|u_0|} \sinh(\alpha_0) \sinh(\sigma_0)}{\sigma_0 \alpha_0} & \text{si } |u_0| > \alpha_0 \end{cases} \quad (B.15)$$

- si  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$ , nous sommes dans le cas (2, 2'), et  $\mathcal{N}_a$  a comme expression :

$$\mathcal{N}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{1}{2\sigma_0 \alpha_0} [\alpha_0 - |u_0| + \sigma_0 - e^{-\alpha_0 - |u_0|} \sinh(\sigma_0) - \sinh(\alpha_0 - |u_0|) e^{-\sigma_0}] \quad (B.16)$$

- si  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$ , nous sommes dans le cas (3), et  $\mathcal{N}_a$  a comme expression :

$$\mathcal{N}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{1}{\sigma_0 \alpha_0} [\alpha_0 - \cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) e^{-\sigma_0}] \quad (B.17)$$

## B.2 Etude des variations de la cohérence $\mathcal{C}_a$

En combinant l'expression du dénominateur  $\mathcal{D}_a$  avec celles du numérateur  $\mathcal{N}_a$ , la cohérence définie sur les trois domaines (B.12), (B.13) et (B.14) :

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \begin{cases} \frac{\sigma_0 - e^{-\alpha_0} \cosh(u_0) \sinh(\sigma_0)}{\alpha_0 \sigma_0 \mathcal{D}_a} & \text{si } |u_0| \leq \alpha_0 \\ \frac{e^{-|u_0|} \sinh(\alpha_0) \sinh(\sigma_0)}{\alpha_0 \sigma_0 \mathcal{D}_a} & \text{si } |u_0| > \alpha_0 \end{cases} \quad \text{pour } \sigma_0 \in \mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0)$$

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{\alpha_0 - |u_0| + \sigma_0 - e^{-\alpha_0 - |u_0|} \sinh(\sigma_0) - \sinh(\alpha_0 - |u_0|) e^{-\sigma_0}}{2\alpha_0 \sigma_0 \mathcal{D}_a} \quad \text{pour } \sigma_0 \in \mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$$

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{\alpha_0 - \cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) e^{-\sigma_0}}{\alpha_0 \sigma_0 \mathcal{D}_a} \quad \text{pour } \sigma_0 \in \mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$$

Nous allons à présent réaliser l'étude des variations de la fonction de cohérence  $\mathcal{C}_a$ . Cette étude est décomposée en deux parties :  $|u_0| \leq \alpha_0$  et  $|u_0| > \alpha_0$ . Dans les deux cas, nous analysons le signe de la dérivée partielle  $\frac{\partial \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)}{\partial \sigma_0}$  par rapport à  $\sigma_0$  sur les trois domaines définis par (B.12), (B.13) et (B.14).

### B.2.1 Étude des variations de $\mathcal{C}_a$ pour $|u_0| \leq \alpha_0$

a - dans l'intervalle  $\mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0) = [0 ; \alpha_0 - |u_0|[$  - la dérivée a comme expression :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)}{\partial \sigma_0} = \frac{e^{-\alpha_0} \cosh(u_0) [\sinh(\sigma_0) - \sigma_0 \cosh(\sigma_0)]}{\alpha_0 \sigma_0^2 \mathcal{D}_a} \quad \text{si } |u_0| \leq \alpha_0$$

Le signe de  $\partial \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) / \partial \sigma_0$  est déterminé par celui de  $\sinh(\sigma_0) - \sigma_0 \cosh(\sigma_0) = \cosh(\sigma_0) [\tanh(\sigma_0) - \sigma_0]$ . Or  $\tanh(\sigma_0) - \sigma_0 < 0 \forall \sigma_0 \in \mathbb{R}_*^+$ . **Donc sur  $\mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0)$ , la dérivée  $\partial \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) / \partial \sigma_0$  est toujours négative, ce qui implique que la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est strictement décroissante.**

**b - dans l'intervalle**  $\mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0) = [\alpha_0 - |u_0| ; |u_0| + \alpha_0[$  - la dérivée a comme expression :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)}{\partial \sigma_0} = \frac{e^{-\alpha_0 - |u_0|} (\sinh(\sigma_0) - \sigma_0 \cosh(\sigma_0)) + \sinh(\alpha_0 - |u_0|) e^{-\sigma_0} (\sigma_0 + 1) - (\alpha_0 - |u_0|)}{2\alpha_0 \sigma_0^2 \mathcal{D}_a} \quad (\text{B.18})$$

Le signe de  $\partial \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) / \partial \sigma_0$  est déterminé par celui de :

$$f_1(\sigma_0) = e^{-\alpha_0 - |u_0|} (\sinh(\sigma_0) - \sigma_0 \cosh(\sigma_0)) + \sinh(\alpha_0 - |u_0|) e^{-\sigma_0} (\sigma_0 + 1) - (\alpha_0 - |u_0|)$$

**Pour montrer que la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est décroissante sur tout l'intervalle  $\mathcal{D}_2$ , on va d'abord montrer que la fonction  $f_1$  est décroissante, puis montrer que la valeur de  $f_1$  à l'extrémité inférieure du domaine  $\mathcal{D}_2$  est négative.**

La dérivée  $f_1'$  est égale à :  $f_1'(\sigma_0) = -\sigma_0(\sinh(\sigma_0)e^{-\alpha_0 - |u_0|} + \sinh(\alpha_0 - |u_0|)e^{-\sigma_0})$  et est donc strictement négative. En effet, les termes entre parenthèses de  $f_1'$  sont tous positifs pour  $\sigma_0 \in \mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$  et  $|u_0| \leq \alpha_0$ . Par conséquent, la fonction  $f_1$  est décroissante.

Calculons la valeur de  $f_1$  pour  $\sigma_0 = \alpha_0 - |u_0|$ , c'est-à-dire la valeur maximale que peut prendre  $\sigma_0$  sur l'intervalle  $\mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$  :

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_0 - |u_0|) &= e^{-\alpha_0 - |u_0|} (\sinh(\alpha_0 - |u_0|) - (\alpha_0 - |u_0|) \cosh(\alpha_0 - |u_0|)) \\ &+ \sinh(\alpha_0 - |u_0|) e^{-(\alpha_0 - |u_0|)} (\alpha_0 - |u_0| + 1) - (\alpha_0 - |u_0|) \\ &= \sinh(\alpha_0 - |u_0|) (e^{-\alpha_0 - |u_0|} + e^{-\alpha_0 + |u_0|}) \\ &+ (\alpha_0 - |u_0|) [e^{-\alpha_0 + |u_0|} \sinh(\alpha_0 - |u_0|) - e^{-\alpha_0 - |u_0|} \cosh(\alpha_0 - |u_0|) - 1] \\ &= e^{-\alpha_0 + |u_0|} \sinh(\alpha_0 - |u_0|) (1 + e^{-2|u_0|}) \\ &+ (\alpha_0 - |u_0|) \left[ \frac{1 - e^{-2\alpha_0 + 2|u_0|}}{2} - e^{-\alpha_0 - |u_0|} \cosh(\alpha_0 - |u_0|) - 1 \right] \\ &= (1 + e^{-2|u_0|}) e^{-(\alpha_0 - |u_0|)} [\sinh(\alpha_0 - |u_0|) - (\alpha_0 - |u_0|) \cosh(\alpha_0 - |u_0|)] \\ &= (1 + e^{-2|u_0|}) e^{-(\alpha_0 - |u_0|)} \cosh(\alpha_0 - |u_0|) [\tanh(\alpha_0 - |u_0|) - (\alpha_0 - |u_0|)] \end{aligned}$$

Tous les termes de la dernière ligne sont positifs sauf celui entre crochets qui est négatif. Nous avons montré que  $f_1(\alpha_0 - |u_0|) \leq 0$  et que  $f_1$  est décroissante. Par conséquent, sur  $\mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0)$ , la fonction  $f_1(\sigma_0)$  est négative. **Enfin, la cohérence  $\mathcal{C}_a$  ne fait donc que décroître sur cette intervalle.**

**c - dans l'intervalle**  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0) = [|u_0| + \alpha_0 ; \infty[$  - la dérivée a comme expression :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)}{\partial \sigma_0} = \frac{\cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) (\sigma_0 + 1) e^{-\sigma_0} - \alpha_0}{\alpha_0 \sigma_0^2 \mathcal{D}_a} \quad (\text{B.19})$$

Le signe de  $\partial \mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) / \partial \sigma_0$  est déterminé par celui de la fonction  $f_2$  définie par :

$$f_2(\sigma_0) = \cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) (\sigma_0 + 1) e^{-\sigma_0} - \alpha_0$$

**Pour montrer que la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est décroissante sur l'intervalle  $\mathcal{D}_3$  lorsque  $|u_0| \leq 0$ , on va montrer que la fonction  $f_2$  est toujours décroissante, puis montrer que le signe de  $f_2$  à l'extrémité inférieure de l'intervalle  $\mathcal{D}_3$  est négatif.**

La dérivée de  $f_2$  est donnée par :  $f_2'(\sigma_0) = -\sigma_0 \cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) e^{-\sigma_0}$ . Le signe de  $f_2'(\sigma_0)$  est donc toujours négatif, la fonction  $f_2$  est donc décroissante.

A présent, nous allons étudier le signe de  $f_2$  au point  $\sigma_0 = |u_0| + \alpha_0$ , c'est-à-dire la borne inférieure de l'intervalle  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$ . Pour cela, posons :

$$f_3(\alpha_0, |u_0|) = f_2(\alpha_0 + |u_0|) = (1 + \alpha_0 + |u_0|)e^{-(\alpha_0 + |u_0|)} \cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) - \alpha_0$$

On veut montrer que la fonction  $f_3$  est négative sur le huitième de plan réel  $(O, \alpha_0, |u_0|)$  où  $\alpha_0 > 0$  et  $|u_0| > 0$  et  $|u_0| \leq \alpha_0$  (voir figure B.2).

1. Étudions dans un premier temps, le signe de  $f_3(\alpha_0, |u_0|)$  sur la demi droite du plan  $(O, \alpha_0, |u_0|)$  définie par  $|u_0| = \alpha_0$ . Tout d'abord, notons que  $f_3(0, 0) = 0$ . Posons :

$$\begin{aligned} f_4(\alpha_0) &= f_3(\alpha_0, \alpha_0) \\ &= (1 + 2\alpha_0)e^{-2\alpha_0} \cosh(\alpha_0) \sinh(\alpha_0) - \alpha_0 \\ &= \frac{1 + 2\alpha_0}{4} (1 - e^{-4\alpha_0}) - \alpha_0 \end{aligned}$$

les dérivées successives de  $f_4$  sont :

$$\begin{cases} f_4'(\alpha_0) &= -\frac{1}{2} + \frac{4\alpha_0 + 1}{2} e^{-4\alpha_0} \\ f_4''(\alpha_0) &= -8\alpha_0 e^{-4\alpha_0} \end{cases}$$

La dérivée seconde  $f_4''(\alpha_0)$  est négative pour toute valeur positive de  $\alpha_0$ , la dérivée première  $f_4'(\alpha_0)$  est donc décroissante pour  $\alpha_0 \geq 0$ . Comme  $f_4'(0) = 0$ , la dérivée première est strictement négative. Donc, la fonction  $f_4(\alpha_0)$  est strictement décroissante, et comme  $f_4(0) = 0$ , la fonction  $f_4$  est négative quelque soit la valeur de  $\alpha_0 \geq 0$ . **On en déduit que  $f_3(\alpha_0, \alpha_0) \leq 0$ .**

Sur la médiatrice du plan  $(0, \alpha_0, |u_0|)$  la fonction  $f_3(\alpha_0, |u_0|)$  est donc négative. On va montrer que pour  $u_0$  fixée la fonction  $f_3$  est décroissante lorsque  $\alpha_0$  augmente, et par conséquent que la fonction  $f_3$  est négative sur tout le domaine de l'étude (figure B.2).

2. On rappelle que la définition de  $f_3$  est la suivante :

$$f_3(\alpha_0, |u_0|) = f_2(\alpha_0 + |u_0|) = \frac{\cosh(u_0)e^{-|u_0|}}{2} (1 + \alpha_0 + |u_0|) (1 - e^{-\alpha_0}) - \alpha_0$$

La dérivée partielle de  $f_3(\alpha_0, |u_0|)$  par rapport à  $\alpha_0$  est donc égale à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3(\alpha_0, |u_0|)}{\partial \alpha_0} &= \frac{1}{2} [1 + (1 + 2|u_0| + 2\alpha_0)e^{-2\alpha_0}] \cosh(u_0)e^{-|u_0|} - 1 \\ &= f_5(\alpha_0) \end{aligned}$$

La dérivée  $f_5'(\alpha_0) = -2(\alpha_0 + |u_0|) \cosh(u_0)e^{-(2\alpha_0 + |u_0|)}$  est toujours négative. La fonction  $f_5(\alpha_0)$  est donc décroissante. Par conséquent, la dérivée  $\frac{\partial f_3(\alpha_0, |u_0|)}{\partial \alpha_0}$  est décroissante en fonction de  $\alpha_0$  à  $|u_0|$  fixé. Pour montrer que la dérivée  $\frac{\partial f_3(\alpha_0, |u_0|)}{\partial \alpha_0}$  est négative, on va étudier son signe en  $\alpha_0 = |u_0|$ . Nous avons alors :

$$\left. \frac{\partial f_3(\alpha_0, |u_0|)}{\partial \alpha_0} \right|_{\alpha_0 = |u_0|} = -\frac{3}{4} + \frac{1 + 2|u_0|}{2} e^{-2|u_0|} + \frac{1 + 4|u_0|}{4} e^{-4|u_0|} = f_6(|u_0|)$$

On va montrer que la fonction  $f_6$  est toujours négative en vérifiant que  $f_6(0) = 0$ , et que  $f_6$  est décroissante. Le premier point à vérifier est évident :  $f_6(0) = 1/2 + 1/4 - 3/4 = 0$ . Le calcul de la dérivée de  $f_6$  donne  $f_6'(|u_0|) = -2|u_0|e^{-2|u_0|} (1 + 2e^{-2|u_0|})$ ,  $f_6'$  est donc toujours négative, et la fonction  $f_6$  est bien négative.

**Par conséquent, nous avons :**

$$f_3(\alpha_0, |u_0|) \leq 0 \quad \forall \alpha_0 \geq |u_0| \geq 0$$

Finalement en  $\alpha_0 + |u_0|$ , borne inférieure de  $\mathcal{D}_3(\alpha_0, |u_0|)$  la fonction  $f_2(\sigma_0)$  est négative. Précédemment, nous avons montré que  $f_2(\sigma_0)$  est strictement décroissante. La démonstration s'achève sur le fait que le signe de  $f_2(\sigma_0)$  est celui de  $\partial\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)/\partial\sigma_0$ . **Sur  $\mathcal{D}_3$ , lorsque  $|u_0| \leq \alpha_0$ , la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est donc strictement décroissante.** La figure B.2 résume graphiquement les résultats de la démonstration.

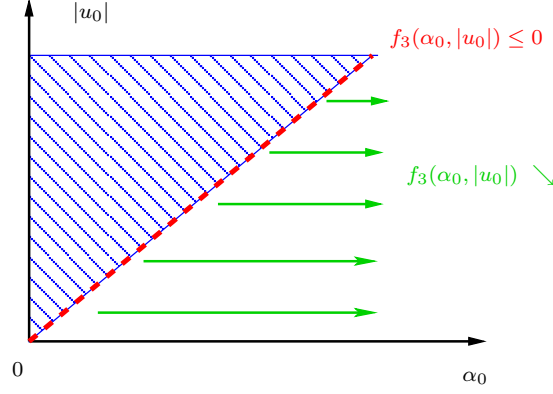


FIG. B.2 – Comportement de la fonction  $f_3$  dans le huitième de plan  $(O, \alpha_0, |u_0|)$ . Sur la médiane en pointillé,  $f_3$  est négative. En s'éloignant selon les flèches la fonction  $f_3$  diminue. La partie hachurée ne fait pas partie de l'étude.

Nous venons de montrer que lorsque  $|u_0| \leq \alpha_0$ , sur les domaines  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  et  $\mathcal{D}_3$  que la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est uniquement décroissante. Il ne peut donc pas y avoir un maximum de la cohérence dans cette configuration.

### B.2.2 Étude des variations de $\mathcal{C}_a$ pour $|u_0| > \alpha_0$

**a - dans l'intervalle**  $\mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0) = [0 ; |u_0| - \alpha_0[$  - l'expression de la dérivée est donnée par :

$$\frac{\partial\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)}{\partial\sigma_0} = \frac{e^{-\alpha_0} \sinh(\alpha_0) [\sigma_0 \cosh(\sigma_0) - \sinh(\sigma_0)]}{\alpha_0 \sigma_0^2 \mathcal{D}_a} \quad \text{si } |u_0| > \alpha_0 \quad (\text{B.20})$$

Le signe de  $\partial\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)/\partial\sigma_0$  est celui de  $\sigma_0 \cosh(\sigma_0) - \sinh(\sigma_0) = \cosh(\sigma_0)[\sigma_0 - \tanh(\sigma_0)]$ . Or  $\sigma_0 - \tanh(\sigma_0) > 0 \forall \sigma_0 \in \mathbb{R}_*^+$ . Donc sur  $\mathcal{D}_1(u_0, \alpha_0)$ , la dérivée  $\partial\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)/\partial\sigma_0$  est toujours positive, ce qui implique que la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est strictement croissante (pour  $\sigma > 0$ ).

Comme la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est croissante sur  $\mathcal{D}_1$  lorsque  $|u_0| > \alpha_0$ , il existe au moins un minimum **un maximum de  $\mathcal{C}_a$  pour  $\sigma_0$  non nulle. Ce(s) maximum(maxima) est(sont) positioné(s) dans  $\mathcal{D}_2$  et/ou  $\mathcal{D}_3$ .**

**b - dans les intervalles**  $\mathcal{D}_2(u_0, \alpha_0) = [|u_0| - \alpha_0 ; |u_0| + \alpha_0[$  et  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0) = [|u_0| + \alpha_0 ; \infty[$  : l'expression de la dérivée est donnée par (B.18) pour l'intervalle  $\mathcal{D}_2$ , et par (B.19) pour l'intervalle  $\mathcal{D}_3$ . L'étude sur le domaine  $\mathcal{D}_2$  est plus compliquée, et nous ne l'avons pas menée à termes. En revanche, nous présentons ici un résultat concernant le domaine  $\mathcal{D}_3$ . Sur cet intervalle  $\mathcal{D}_3$ , le signe de  $\partial\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0)/\partial\sigma_0$  est celui de la fonction  $f_2(\sigma_0)$ . La dérivée de cette fonction est toujours négative sur  $\mathbb{R}^+$ , et donc sur  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0) \subset \mathbb{R}_*^+$ . Par conséquent la fonction  $f_2$  est uniquement décroissante. Posons  $C = \cosh(u_0) \sinh(\alpha_0) / \alpha_0$ , et étudions le signe de  $f_2(\sigma_0)$  pour  $\sigma_0$  variant dans l'intervalle  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$ .

Les limites de la fonction  $f_2$  aux bornes de l'intervalle  $\mathcal{D}_3$  sont :

$$\begin{aligned} \text{En } \sigma_0 = |u_0| + \alpha_0 &\implies f_7(|u_0| + \alpha_0) = C(|u_0| + \alpha_0 + 1)e^{-|u_0| - \alpha_0} - 1 \\ \text{En } \sigma_0 \rightarrow \infty &\implies f_7(\infty) = -1 \end{aligned}$$



Ainsi, le tableau de variation de la fonction  $f_2$  est donné par :

$\sigma_0$	$ u_0  + \alpha_0$	$\sigma_0^{\text{opt}}$	$\infty$
$f_2'(\sigma_0)$	—	—	
$f_2(\sigma_0)$	$f_2( u_0  + \alpha_0)$	$\searrow$	—1

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $f_2(\sigma_0)$  s'annule en  $\sigma_0^{\text{opt}}$  sur  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$  est que :

$$f_7(|u_0| + \alpha_0) \geq 0 \tag{B.21}$$

Si cette condition est remplie alors il existe un maximum unique de  $\mathcal{C}_a(u_0, \sigma_0)$  sur  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$ . La valeur  $\sigma_0^m$  est la solution de l'équation :

$$f_2(\sigma_0) = C(\sigma_0 + 1)e^{-\sigma_0} - 1 = 0$$

La forme explicite de la solution de  $f_2(\sigma_0) = 0$  nous est donnée par les fonctions de Lambert (voir annexe A) :

$$\sigma_0^m = - \left[ 1 + W_{-1} \left( -\frac{e^{-1}}{C} \right) \right] \tag{B.22}$$

Lorsque la condition (B.21) n'est pas remplie, alors la fonction  $f_2$  est négative sur tout l'intervalle  $\mathcal{D}_3(u_0, \alpha_0)$ , et la cohérence  $\mathcal{C}_a$  y est alors décroissante. Le(s) maximum(maxima) est(sont) alors placé(s) dans  $\mathcal{D}_2$ .

---

Fluctuations laplaciennes et gaussiennes - cas non filtré et filtré

---

CETTE annexe présente le détail des calculs des cohérences  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_a$  de la partie 2.2.4 pour des fluctuations laplaciennes et gaussiennes lorsque la réponse impulsionnelle  $a(\cdot)$  des photorécepteurs est un Dirac, puis une porte de largeur  $2\alpha$  :

$$a(x) = \begin{cases} 1/2\alpha & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

### C.1 Préliminaires

D'après (2.35), (2.35), et (C.1), les expressions de cohérences sur  $\mathcal{H}_e$  et  $\mathcal{H}_a$  pour une seule ligne de photorécepteurs sont données par :

$$\mathcal{C}_e(u, \sigma) = e^{-\beta u} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\sigma}} f_\xi(v) e^{\beta \sigma v} dv + e^{\beta u} \int_{\frac{u}{\sigma}}^{\infty} f_\xi(v) e^{-\beta \sigma v} dv \quad (\text{C.2})$$

et

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{1}{2\alpha \mathcal{D}_a} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} \mathcal{C}_e(v, \sigma) dv \quad (\text{C.3})$$

Dans la dernière expression, d'après (2.41), le coefficient  $\mathcal{D}_a$  est égal à :

$$\mathcal{D}_a = \frac{(2\beta\alpha - 1 + e^{-2\beta\alpha})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\beta\alpha}$$

et est identique quelque soit la nature des fluctuations. Les fonctions de cohérences  $\mathcal{C}_e$  et  $\mathcal{C}_a$  sont symétriques par rapport à la variable  $u$  :

$$\mathcal{C}_e(u, \sigma) = \mathcal{C}_e(-u, \sigma) = \mathcal{C}_e(|u|, \sigma) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \mathcal{C}_a(-u, \sigma, \alpha) = \mathcal{C}_a(|u|, \sigma, \alpha) \quad (\text{C.4})$$

Au final, les résultats seront exprimés à l'aide des grandeurs normalisées suivantes :

$$\begin{aligned} u_0 &= \beta u \\ \sigma_0 &= \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2}} \\ \alpha_0 &= \beta \alpha \end{aligned}$$

### C.2 Pour des micro-mouvements laplaciens

On considère que la variance des fluctuations est unitaire, la densité de probabilité des fluctuations a pour expression  $f_\xi(u) = \frac{e^{-\sqrt{2}|u|}}{\sqrt{2}}$ .

### C.2.1 Cohérence non filtrée

D'après (C.2), la cohérence  $\mathcal{C}_e$  pour des fluctuations laplaciennes est donnée par :

$$\mathcal{C}_e(u, \sigma) = \frac{e^{-\beta u}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\sigma}} e^{-\sqrt{2}|v|+\beta\sigma v} dv + \frac{e^{\beta u}}{\sqrt{2}} \int_{\frac{u}{\sigma}}^{\infty} e^{-\sqrt{2}|v|-\beta\sigma v} dv$$

Nous allons développer uniquement le calcul de  $\mathcal{C}_e$  pour  $u \geq 0$ , le cas  $u < 0$  pouvant se déduire de propriété de symétrie de la cohérence (C.4), ainsi pour  $u \geq 0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_e(u, \sigma) &= \frac{e^{-\beta u}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^0 e^{v(\beta\sigma+\sqrt{2})} dv + \frac{e^{-\beta u}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{u}{\sigma}} e^{v(\beta\sigma-\sqrt{2})} dv + \frac{e^{\beta u}}{\sqrt{2}} \int_{\frac{u}{\sigma}}^{\infty} e^{-v(\beta\sigma+\sqrt{2})} dv \\ &= \frac{e^{-\beta u}}{\sqrt{2}(\beta\sigma+\sqrt{2})} + \frac{e^{-\beta u} \left[ e^{\frac{u}{\sigma}(\beta\sigma-\sqrt{2})} - 1 \right]}{\sqrt{2}(\beta\sigma-\sqrt{2})} + \frac{e^{\beta u} \left[ e^{-\frac{u}{\sigma}(\beta\sigma+\sqrt{2})} \right]}{\sqrt{2}(\beta\sigma+\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{e^{-\beta u}}{\beta\sigma+\sqrt{2}} - \frac{e^{-\beta u}}{\beta\sigma-\sqrt{2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{e^{-\sqrt{2}\frac{u}{\sigma}}}{\beta\sigma-\sqrt{2}} + \frac{e^{-\sqrt{2}\frac{u}{\sigma}}}{\beta\sigma+\sqrt{2}} \right] \\ &= \frac{\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{u}{\sigma}} - e^{-\beta u}}{\left( \frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\forall u \in \mathbb{R}$  la cohérence  $\mathcal{C}_e$  est donnée par :

$$\mathcal{C}_e(u, \sigma) = \frac{\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{|u|}{\sigma}} - e^{-\beta|u|}}{\left( \frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1} \quad (\text{C.5})$$

et finalement, en utilisant les variables normalisées  $u_0$  et  $\sigma_0$  on obtient :

$$\mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0) = \frac{\sigma_0 e^{-|u_0|/\sigma_0} - e^{-|u_0|}}{\sigma_0^2 - 1} \quad (\text{C.6})$$

### C.2.2 Cohérence filtrée

D'après (C.3) et (C.5), l'expression de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  est dans ce cas :

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{\int_{u-\alpha}^{u+\alpha} \left[ \frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{|v|}{\sigma}} - e^{-\beta|v|} \right] dv}{2\alpha \mathcal{D}_a \left[ \left( \frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 \right]}$$

Pour ne pas alourdir les expressions dans le calcul de  $\mathcal{C}_a$ , posons :

$$I = \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} \left[ \frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}\frac{|v|}{\sigma}} - e^{-\beta|v|} \right] dv$$

On distingue alors trois cas différents selon les valeurs de  $\alpha > 0$  et  $u$  formant les bornes d'intégrations de  $I$  :

1. Si  $u + \alpha < 0$ , c'est-à-dire  $u \leq -\alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} \left[ \frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}\frac{v}{\sigma}} - e^{\beta v} \right] dv \\ &= \frac{\beta\sigma^2}{2} \left( e^{\sqrt{2}\frac{u+\alpha}{\sigma}} - e^{\sqrt{2}\frac{u-\alpha}{\sigma}} \right) - \frac{1}{\beta} \left[ e^{\beta(u+\alpha)} - e^{\beta(u-\alpha)} \right] \\ &= \beta\sigma^2 e^{\sqrt{2}\frac{u}{\sigma}} \sinh \left( \sqrt{2}\frac{\alpha}{\sigma} \right) - \frac{2e^{\beta u}}{\beta} \sinh(\beta\alpha) \end{aligned}$$

et donc, dans ce cas la cohérence  $\mathcal{C}_a$  s'écrit selon :

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{\frac{\beta^2 \sigma^2}{2} e^{\sqrt{2} \frac{u}{\sigma}} \sinh\left(\sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma}\right) - e^{\beta u} \sinh(\beta \alpha)}{\alpha \beta \mathcal{D}_a \left[ \left( \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 \right]} \quad (\text{C.7})$$

2. Si  $u - \alpha \leq 0$  et  $u + \alpha > 0$ , c'est-à-dire  $|u| \leq \alpha$ , on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{u-\alpha}^0 \left[ \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2} \frac{v}{\sigma}} - e^{\beta v} \right] dv + \int_0^{u+\alpha} \left[ \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2} \frac{v}{\sigma}} - e^{-\beta v} \right] dv \\ &= \frac{\beta \sigma^2}{2} \left[ 1 - e^{\sqrt{2} \frac{u-\alpha}{\sigma}} \right] - \frac{1}{\beta} \left[ 1 - e^{\beta(u-\alpha)} \right] - \frac{\beta \sigma^2}{2} \left[ e^{-\sqrt{2} \frac{u+\alpha}{\sigma}} - 1 \right] + \frac{1}{\beta} \left[ e^{-\beta(u+\alpha)} - 1 \right] \\ &= \beta \sigma^2 \left[ 1 - e^{-\sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma}} \cosh\left(\sqrt{2} \frac{u}{\sigma}\right) \right] + \frac{2e^{-\beta \alpha}}{\beta} \cosh(\beta u) - \frac{2}{\beta} \end{aligned}$$

et donc, dans ce cas la cohérence  $\mathcal{C}_a$  s'écrit selon :

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{\frac{\beta^2 \sigma^2}{2} \left[ 1 - e^{-\sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma}} \cosh\left(\sqrt{2} \frac{u}{\sigma}\right) \right] + e^{-\beta \alpha} \cosh(\beta u) - 1}{\alpha \beta \mathcal{D}_a \left[ \left( \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 \right]}$$

3. Si  $u + \alpha > 0$ , c'est-à-dire  $u \geq \alpha$ , alors en utilisant la propriété de symétrie de  $\mathcal{C}_a$  (C.4) et d'après (C.7) il vient :

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{\frac{\beta^2 \sigma^2}{2} e^{\sqrt{2} \frac{-u}{\sigma}} \sinh\left(\sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma}\right) - e^{-\beta u} \sinh(\beta \alpha)}{\alpha \beta \mathcal{D}_a \left[ \left( \frac{\beta \sigma}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 \right]}$$

Finalement, l'expression de la cohérence  $\mathcal{C}_a$  en grandeurs normalisées s'écrit :

- Pour  $|u_0| \geq \alpha_0$

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{\sigma_0^2 \sinh(\alpha_0/\sigma_0) e^{-|u_0|/\sigma_0} - \sinh(\alpha_0) e^{-|u_0|}}{\alpha_0 (\sigma_0^2 - 1) \mathcal{D}_a} \quad (\text{C.8})$$

- Pour  $|u_0| < \alpha_0$

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{\sigma_0^2 - \sigma_0^2 e^{-\alpha_0/\sigma_0} \cosh(u_0/\sigma_0) - 1 + e^{-\alpha_0} \cosh(u_0)}{\alpha_0 (\sigma_0^2 - 1) \mathcal{D}_a} \quad (\text{C.9})$$

### C.3 Pour des micro-mouvements gaussiens

Comme dans le cas laplacien, on se place dans le cas où la densité de probabilité des fluctuations est de variance unitaire. Ainsi, la densité de probabilité a comme expression  $f_\xi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ . Avant de détailler les calculs, rappelons au préalable la fonction d'erreur complémentaire  $\text{erfc}(\cdot)$  définie par :

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (\text{C.10})$$

### C.3.1 Cohérence non filtrée

D'après (C.2), la cohérence  $\mathcal{C}_e$  pour des fluctuations gaussiennes est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_e(u, \sigma) &= \frac{e^{-\beta u}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\sigma}} e^{-\left(\frac{v^2}{2} - \beta\sigma v\right)} dv + \frac{e^{\beta u}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{u}{\sigma}}^{\infty} e^{-\left(\frac{v^2}{2} + \beta\sigma v\right)} dv \\ &= \frac{e^{-\beta u}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\sigma}} e^{-\left(\frac{v-\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} dv + \frac{e^{\beta u}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{u}{\sigma}}^{\infty} e^{-\left(\frac{v+\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} dv \\ &= e^{\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} \left[ \frac{e^{-\beta u}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{u}{\sigma}} e^{-\left(\frac{v-\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} dv + \frac{e^{\beta u}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{u}{\sigma}}^{\infty} e^{-\left(\frac{v+\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} dv \right]\end{aligned}$$

En utilisant (C.10), la cohérence  $\mathcal{C}_e$  devient :

$$\mathcal{C}_e(u, \sigma) = \frac{e^{\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}}{2} \left[ e^{-\beta u} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma - \frac{u}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) + e^{\beta u} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma + \frac{u}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (\text{C.11})$$

et finalement, la cohérence  $\mathcal{C}_e$  pour des fluctuations gaussiennes en grandeurs normalisées se note :

$$\mathcal{C}_e(u_0, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0^2}}{2} \left[ e^{-u_0} \operatorname{erfc} \left( \sigma_0 - \frac{u_0}{2\sigma_0} \right) + e^{u_0} \operatorname{erfc} \left( \sigma_0 + \frac{u_0}{2\sigma_0} \right) \right] \quad (\text{C.12})$$

### C.3.2 Cohérence filtrée

A partir de (C.3) et de (C.11), la cohérence  $\mathcal{C}_a$  pour des fluctuations gaussiennes a comme expression :

$$\mathcal{C}_a(u, \sigma, \alpha) = \frac{e^{\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}}{4\alpha\mathcal{D}_a} \left[ \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} e^{-\beta v} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma - \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) dv + \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} e^{\beta v} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma + \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) dv \right]$$

Pour de ne pas alourdir les notations, posons :

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} e^{-\beta v} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma - \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) dv \\ I_2 &= \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} e^{\beta v} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma + \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) dv\end{aligned}$$

**Intégration par parties de  $I_1$  :** L'intégrale  $I_1$  est de la forme  $\int_{u-\alpha}^{u+\alpha} f'(v)g(v)dv$ , où  $f'(v) = e^{-\beta v}$  et  $g(v) = \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma - \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right)$ . Par conséquent,  $I_1$  peut être calculer par intégration par parties. Prenons comme primitive de  $f'$  la fonction  $f(v) = -\frac{e^{-\beta v}}{\beta}$ . D'après [50, (0.410)], la dérivée de la fonction  $g$  est égale à  $g'(v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{\beta\sigma - \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right)^2}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned}I_1 &= \left[ -\frac{e^{-\beta v}}{\beta} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma - \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \right]_{u-\alpha}^{u+\alpha} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\beta\sigma} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} e^{-\beta v} e^{-\left(\frac{\beta\sigma - \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right)^2} dv \\ &= I_{11} + I_{12}\end{aligned}$$

Le calcul du premier terme  $I_{11}$  donne :

$$I_{11} = \frac{1}{\beta} \left[ e^{-\beta(u-\alpha)} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{u-\alpha}{\sqrt{2}\sigma} \right) - e^{-\beta(u+\alpha)} \operatorname{erfc} \left( \frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{u+\alpha}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right]$$

Après quelques développements, on peut mettre le second terme  $I_{12}$  sous la forme :

$$I_{12} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\beta} e^{-\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} \int_{\frac{u-\alpha}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{u+\alpha}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-t^2} dt$$

et en utilisant (C.10), il vient :

$$I_{12} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\beta} e^{-\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{u-\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{u+\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]$$

**Intégration par parties de  $I_2$  :** Comme pour l'intégrale  $I_1$ , l'intégrale  $I_2$  est de la forme  $\int_{u-\alpha}^{u+\alpha} f'(v)g(v)dv$ , où  $f'(v) = e^{\beta v}$  et  $g(v) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sigma + \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right)$ . Par conséquent,  $I_2$  peut également être calculer par intégration par parties. Prenons comme primitive de  $f'$  la fonction  $f(v) = \frac{e^{\beta v}}{\beta}$ . La dérivée de la fonction  $g$  est égale à  $g'(v) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{\beta\sigma + \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right)^2}$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\beta} \left[ e^{\beta v} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sigma + \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \right]_{u-\alpha}^{u+\alpha} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\beta\sigma} \int_{u-\alpha}^{u+\alpha} e^{\beta v} e^{-\left(\frac{\beta\sigma + \frac{v}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right)^2} dv \\ &= I_{21} + I_{22} \end{aligned}$$

Le calcul du premier terme  $I_{21}$  donne :

$$I_{21} = \frac{1}{\beta} \left[ e^{\beta(u+\alpha)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{u+\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right) - e^{\beta(u-\alpha)} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}} + \frac{u-\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]$$

Après quelques développements, on voit que le second terme  $I_{22}$  est égal à  $I_{12}$ , on a donc :

$$I_{22} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\beta} e^{-\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2} \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{u-\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{u+\alpha}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] = I_{12}$$

Finalement, la cohérence  $\mathcal{C}_a$  dans le cas gaussien, lorsque  $a(\cdot)$  est une porte a comme expression :

$$\mathcal{C}_a(u, \alpha, \sigma) = \frac{e^{\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}}{4\alpha\mathcal{D}_a} (I_{11} + I_{21} + 2I_{22}) \quad (\text{C.13})$$

Sous une écriture un peu plus concise, et avec des grandeurs  $u_0, \sigma_0$  et  $\alpha_0$  normalisées, elle se note :

$$\mathcal{C}_a(u_0, \alpha_0, \sigma_0) = \frac{e^{\sigma_0^2}}{4\alpha_0\mathcal{D}_a} (I_1 + I_{-1}) + \frac{1}{2\alpha_0\mathcal{D}_a} \left[ \operatorname{erfc}\left(-\frac{\alpha_0 + u_0}{2\sigma_0}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_0 - u_0}{2\sigma_0}\right) \right] \quad (\text{C.14})$$

où

$$I_\epsilon = \epsilon \left[ e^{\epsilon(\alpha_0 - u_0)} \operatorname{erfc}\left(\sigma_0 + \epsilon \frac{\alpha_0 - u_0}{2\sigma_0}\right) - e^{-\epsilon(\alpha_0 + u_0)} \operatorname{erfc}\left(\sigma_0 - \epsilon \frac{\alpha_0 + u_0}{2\sigma_0}\right) \right] \text{ où } \epsilon = \pm 1$$



---

 Paramètres de seuils et de niveaux des quantifieurs optimaux
 

---

**C**ETTE annexe présente les valeurs des seuils et des niveaux des 3 quantifieurs scalaires optimaux selon les procédures exposées en 3.2.2, et utilisés dans le manuscrits pour un bruit de canal laplacien et gaussien. Dans une première partie, nous détaillons les calculs menant aux paramètres des 2 détecteurs quantifieurs asymptotiques  $Q_{\infty,C}$  et  $Q_{\infty,J}$ . Dans la deuxième partie nous exposons comment nous avons obtenu les paramètres du quantifieur détecteur  $Q_{PT,J}$ , quantifieur optimal de Poor&Thomas maximisant la  $J$ -divergence (bruit de canal gaussien et laplacien).

## D.1 Quantifieurs optimaux asymptotiques

Nous allons détailler les calculs menant aux paramètres des 2 détecteurs quantifieurs asymptotiques  $Q_{\infty,C}$  et  $Q_{\infty,J}$  dans un cadre gaussien puis laplacien. Pour cela, dans un premier temps, nous cherchons les fonctions de densités de seuils  $\lambda^{\text{opt}}$  qui minimisent l'expression de la perte de performances asymptotiques (3.29) :

$$L_Q(f_0, f, l) \sim \frac{1}{24M^2} E_0 \left[ \left( \frac{l'(x)}{\lambda(x)} \right)^2 f''(l(x)) \right] \quad (\text{D.1})$$

où  $f_M(x) \sim g_M(x)$  signifie  $\lim_{M \rightarrow \infty} f_M(x)/g_M(x) = 1$ , pour la divergence de Chernoff puis pour la  $J$ -divergence. Ensuite nous présentons les deux exemples obtenus pour un bruit de canal gaussien puis laplacien.

Nous allons supposer que les observations  $\mathbf{x}$ , sont i.i.d. et que  $f_0$  et  $f_1$  représentent respectivement leur densité de probabilité sous l'hypothèse  $H_0$  et  $H_1$ . Par conséquent, dans (D.1) l'espérance mathématique est réalisée par rapport à  $f_0$ , c'est-à-dire selon l'hypothèse  $H_0$ . Les démonstrations qui suivent sont fondées sur l'inégalité de Hölder que nous rappelons ci-dessous. Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs tels que  $1/a + 1/b = 1$ , alors l'inégalité de Hölder établit :

$$\int h(x)g(x)dx \leq \left[ \int h^a(x)dx \right]^{1/a} \left[ \int g^b(x)dx \right]^{1/b} \quad (\text{D.2})$$

pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ . Dans (D.2), l'égalité est vérifiée si et seulement si :  $f^a \propto g^b$ .

De plus, comme  $G(x) = \int_{-\infty}^x \lambda(u)du$ , où  $G$  représente la fonction de compression du quantifieur, une fois la densité de seuil optimale obtenue, il sera facile de déterminer les seuils  $t^{\text{opt}}$  et les niveaux  $q^{\text{opt}}$  du quantifieur en échantillonnant régulièrement  $G^{-1}$  (voir partie 3.1.1).

### D.1.1 Optimisation pour la divergence de Chernoff

Si l'on veut minimiser (D.1) par rapport à la divergence de Chernoff, nous avons alors  $f(l) = -l^\kappa$ , et  $f''(l) = \kappa(1 - \kappa)l^{\kappa-2}$  pour  $\kappa \in [0, 1]$ . Le rapport de vraisemblance  $l$  est par définition égal à  $l(x) =$



$f_1(x)/f_0(x)$ . Il est facile de montrer que la perte de performances asymptotiques  $D_C$  est égale à :

$$\begin{aligned} D_C &\sim L_Q(f_0, f, l) \\ &\sim \frac{1}{24M^2} E_0 \left[ \left( \frac{l'(x)}{\lambda(x)} \right)^2 f''(l(x)) \right] \\ &\sim \frac{\kappa(1-\kappa)}{24M^2} \int \left( \frac{l'(x)}{\lambda(x)} \right)^2 l(x)^{\kappa-2} f_0(x) dx \\ &\sim \frac{\kappa(1-\kappa)}{24M^2} \int \frac{1}{\lambda^2(x)} \left( \frac{l'(x)}{l(x)} \right)^2 f_1^\kappa(x) f_0^{1-\kappa}(x) dx \end{aligned}$$

Pour ne pas alourdir les écritures, posons :

$$u(x) = \left( \frac{l'(x)}{l(x)} \right)^2 f_1^\kappa(x) f_0^{1-\kappa}(x)$$

et dans ce cas, la perte de performances asymptotiques  $D_C$  que nous devons minimiser se note :

$$D_C = \frac{\kappa(1-\kappa)}{24M^2} \int \frac{u(x)}{\lambda^2(x)} dx \quad (\text{D.3})$$

D'après (D.2), pour  $a = 3$ ,  $b = 3/2$ , et en posant  $h(x) = (u(x)/\lambda(x)^2)^{1/3}$  et  $g(x) = \lambda(x)^{2/3}$ , nous avons :

$$\int \left( \frac{u(x)}{\lambda(x)^2} \right)^{1/3} \lambda(x)^{2/3} dx \leq \left( \frac{24M^2}{\kappa(1-\kappa)} D_C \right)^{1/3} \left( \int \lambda(x) dx \right)^{2/3}$$

Comme  $\int \lambda(x) dx = 1$ , nous obtenons :

$$D_C \geq \frac{\kappa(1-\kappa)}{24M^2} \left( \int f(x)^{1/3} dx \right)^3$$

avec égalité si et seulement si :  $h^a(x) \propto g^b(x)$ , c'est-à-dire pour une densité de seuils  $\lambda$  donnée par :

$$\lambda(x) \propto \left[ \left( \frac{l'(x)}{l(x)} \right)^2 f_1^\kappa(x) f_0^{1-\kappa}(x) \right]^{1/3} \quad (\text{D.4})$$

Pour atteindre le minimum de l'information de Chernoff [8, 31, 125], on se placera dans le cas où  $\kappa = 1/2$ .

### D.1.2 Optimisation pour la $J$ -divergence

Dans cette partie, on veut minimiser (D.1) par rapport à la  $J$ -divergence. Nous avons alors  $f(l) = (1-l) \log(l)$ , et  $f''(l) = 1/l + 1/l^2$ . Il est alors facile de montrer que dans ce cas, la perte de performances asymptotiques  $D_J$  est égale à :

$$\begin{aligned} D_J &\sim L_Q(f_0, f, l) \\ &\sim \frac{1}{24M^2} E_P \left[ \left( \frac{l'(x)}{\lambda(x)} \right)^2 f''(l(x)) \right] \\ &\sim \frac{1}{24M^2} \int \frac{1}{\lambda^2(x)} \left( \frac{l'(x)}{l(x)} \right)^2 (f_0(x) + f_1(x)) dx \end{aligned}$$

Si cette fois nous posons :

$$u(x) = \left( \frac{l'(x)}{l(x)} \right)^2 (f_0(x) + f_1(x))$$

alors la perte de performances asymptotiques  $D_J$  que nous devons minimiser se note :

$$D_J \sim \frac{1}{24M^2} \int \frac{u(x)}{\lambda^2(x)} dx$$

Cette expression est à un coefficient près identique à (D.3). Selon la même procédure d'optimisation présentée en D.1.1, on peut montrer que la densité de seuils  $\lambda^{\text{opt}}$  optimale dans ce cas est donnée par :

$$\lambda(x) \propto \left[ \left( \frac{l'(x)}{l(x)} \right)^2 (f_1(x) + f_0(x)) \right]^{1/3} \quad (\text{D.5})$$

### D.1.3 Exemples pour un bruit de canal laplacien et gaussien

Nous allons développer les calculs donnant les paramètres de seuils et de niveaux des quantifieurs détecteurs optimaux asymptotiques  $Q_{\infty,C}$  et  $Q_{\infty,J}$  pour un bruit de canal gaussien puis laplacien de variance unitaire pour un problème de détection binaire symétrique pour  $c > 0$  :

$$\begin{cases} H_0 : x_i = \xi_i - c & , & x_i \sim f_0(x) \\ H_1 : x_i = \xi_i + c & , & x_i \sim f_1(x) \end{cases}$$

Les valeurs des seuils des quantifieurs optimaux relatives à un problème asymétrique se déduisent simplement en décalant le vecteur de seuils autour du point de symétrie du problème.

#### a - Bruit de canal gaussien

Dans ce cas, les densités de probabilités sont données par :

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+c)^2}{2}} \\ f_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-c)^2}{2}} \end{aligned}$$

La fonction de vraisemblance est alors égale à :  $l(x) = e^{2cx}$ , et on peut facilement montrer que :  $l'(x)/l(x) = 2c$ . Par conséquent, à partir de (D.4) et (D.5), les densités optimales de seuils  $\lambda^{\text{opt}}$  dans le cas gaussien sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{opt}}(x) &\propto e^{-\frac{x^2}{6}} && \text{pour la divergence de Chernoff} \\ \lambda^{\text{opt}}(x) &\propto e^{-\frac{x^2}{6}} \cosh^{1/3}(cx) && \text{pour la J-divergence} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

#### b - Bruit de canal laplacien

Dans ce cas, les densités de probabilités sont données par :

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x+c|} \\ f_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x-c|} \end{aligned}$$

et la fonction de vraisemblance est alors définie par :

$$l(x) = \begin{cases} e^{2\sqrt{2}x} & \text{si } |x| \leq c \\ e^{2\sqrt{2}c} \text{sign}(x) & \text{si } |x| > c \end{cases}$$

où  $\text{sign}(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et  $\text{sign}(x) = -1$  si  $x < 0$ . Il est facile de montrer que le rapport  $l'(x)/l(x)$  est constant pour  $|x| \leq c$  et nul pour  $|x| > c$ . Par conséquent, à partir de (D.4) et (D.5), les densités optimales de seuils  $\lambda^{\text{opt}}$  dans le cas laplacien sont données par :

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{opt}}(x) &\propto \mathbb{1}_{[-c;c]}(x) && \text{pour la divergence de Chernoff} \\ \lambda^{\text{opt}}(x) &\propto \cosh^{1/3}(\sqrt{2}x) \mathbb{1}_{[-c;c]}(x) && \text{pour la J-divergence} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

où  $\mathbb{1}_{[-c;c]}(x)$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $[-c; c]$ .

La figure D.1 correspond aux tracés des fonctions de densités de seuils pour la divergence de Chernoff et la  $J$ -divergence dans le cas gaussien (D.6), ainsi que les fonctions de compression équivalentes  $G(x) = \int_{-\infty}^x \lambda(u) du$  obtenues par intégration numérique.

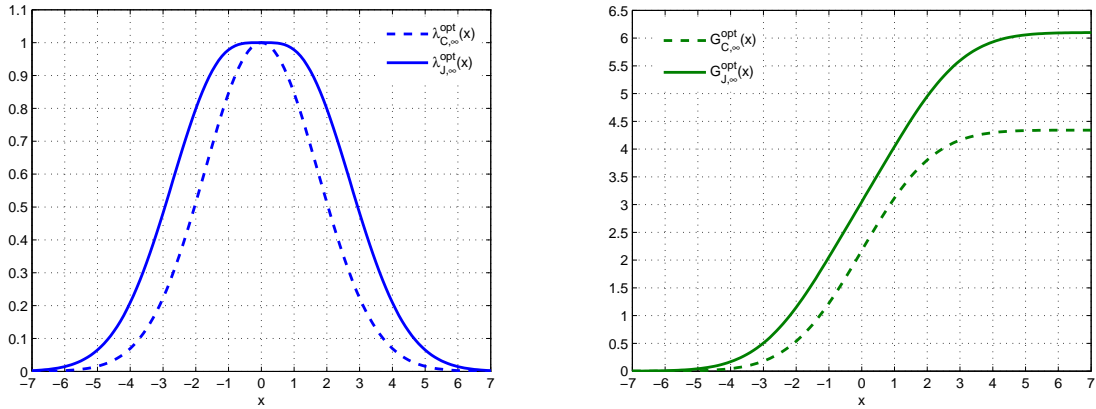


FIG. D.1 – Tracés des densités de seuils optimales et des fonctions de compression correspondantes dans le cadre asymptotique (symbole  $\infty$ ) pour un bruit de canal gaussien. L'optimisation est réalisée par rapport à la divergence de Chernoff (pointillés) et par rapport à la  $J$ -divergence (trait plein).

Enfin le tableau D.1, donne les valeurs numériques des quantifieurs optimaux selon (D.6) et (D.7) pour  $M = 8$  dans un problème centré en zéro :  $s_1 = -s_0 = 1$ . On rappelle que ces valeurs sont obtenues selon la même procédure que celle décrite par la figure 3.4, et que notations utilisées sont les suivantes :

- $Q_{\infty,C}$  : quantifieur asymptotique dont la densité de seuil est fondée sur la borne de Chernoff,
- $Q_{\infty,J}$  : quantifieur asymptotique dont la densité de seuil est fondée sur la  $J$ -divergence.

## D.2 Quantifieurs optimaux maximisant une $f$ -divergence

Dans cette partie, nous donnons un exemple des paramètres de seuils et de niveaux des quantifieurs optimaux selon [126] pour un bruit de canal gaussien et laplacien. La procédure d'optimisation est rappelée ci-dessous (voir partie 3.2.2.1) :

$$\begin{cases} q_k = \frac{P_1(\Delta_k)}{P_0(\Delta_k)} & \text{pour } k = 1 \dots M \quad \text{et pour } \Delta_k = ]t_{k-1}; t_k] \\ \mathbf{t} = \underset{\mathbf{t}}{\text{Arg max}} [d_f(\psi_0, Q, \psi_1, Q)] \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Les niveaux de quantifications  $q_k$  sont déterminés par le rapport de vraisemblance des partitions de seuils, et les seuils du quantifieur doivent maximiser une  $f$ -divergence. Cette maximisation est réalisée numériquement par une descente de gradient ou par l'algorithme de Newton-Raphson et donc de manière itérative.

Laplacien, p=1								
$t_{\infty,C}$	-1	-0.67	-0.33	0	0.33	0.67	1	
$q_{\infty,C}$	-1.17	-0.83	-0.5	-0.17	0.17	0.5	0.83	1.17
$t_{\infty,J}$	-0.77	-0.52	-0.26	0	0.26	0.52	0.77	
$q_{\infty,J}$	-2.50	-1.82	-1.11	-0.37	0.37	1.11	1.82	2.50
Gaussien, p=2								
$t_{\infty,C}$	-1.99	-1.17	-0.55	0	0.55	1.17	1.99	
$q_{\infty,C}$	-4.75	-2.99	-1.67	-0.54	0.54	1.67	2.99	4.75
$t_{\infty,J}$	-2.54	-1.56	-0.76	0	0.76	1.56	2.54	
$q_{\infty,J}$	-5.73	-3.80	-2.21	-0.73	0.73	2.21	3.80	5.73

TAB. D.1 – Valeurs numériques des seuils et des niveaux des quantifieurs  $Q_{\infty,C}, Q_{\infty,J}$  de taille  $M = 8$  pour un canal laplacien et gaussien, et pour des hypothèses centrées  $s_1 = -s_0 = 1$ .

La  $f$ -divergence employée dans le manuscrit est la  $J$ -divergence, qui est la version symétrique de la divergence de Kullback. Nous rapellons son expression est donnée par :

$$d_J(f_0, f_1) = d_{KL}(f_0, f_1) + d_{KL}(f_1, f_0) = E_0[(l - 1) \ln l]$$

Ainsi nous notons  $Q_{PT,J}$ , le quantifieur optimal de Poor&Thomas maximisant la  $J$ -divergence. Si la taille du quantifieur est fixée à  $M = 8$ , que le bruit de canal est laplacien puis gaussien, pour un problème centré en zéro :  $s_1 = -s_0 = 1$ , alors nous obtenons :

Laplacien, p=1								
$t_{PT,J}$	-0.87	-0.60	-0.31	0	0.31	0.60	0.87	
$q_{PT,J}$	-2.80	-2.08	-1.29	-0.44	0.44	1.29	2.08	2.80
Gaussien, p=2								
$t_{PT,J}$	-2.13	-1.34	-0.66	0	0.66	1.34	2.13	
$q_{PT,J}$	-5	-3.30	-1.92	-0.64	0.64	1.92	3.30	5

TAB. D.2 – Valeurs numériques des seuils et des niveaux des quantifieurs  $Q_{PT,J}$  de taille  $M = 8$  pour un canal laplacien et gaussien, et pour des hypothèses centrées  $s_1 = -s_0 = 1$ .



<b>A</b>		<b>I</b>	
Acuité visuelle .....	14	Inégalité	
Adaptation		Cauchy-Schwarz .....	46, 67
contraste .....	23, 29	Hölder .....	90, 100, 151
luminance .....	23, 24	<b>J</b>	
neuronale .....	18, 39	Jitter .....	39, 48
<b>B</b>		<b>L</b>	
Blanchiment spectral .....	24	Lambert (fonctions) .....	53, 57, 135
Borne de Chernoff .....	100	<b>M</b>	
<b>C</b>		Macro-mouvement	
Cellule		poursuite .....	16
amacrine .....	11, 12, 26	saccade .....	15
bipolaire .....	11, 24, 26	Micro-mouvement	
ganglionnaire .....	12, 23, 26, 28	dérive .....	16
horizontale .....	11, 24	micro-saccade .....	16, 18
Champ récepteur .....	11, 18, 28, 29, 42, 51, 54, 65	tremblement .....	16
Cohérence .....	45, 48, 49, 70, 71	Modèle de neurone	
Contrôle optimal stochastique	54, 55, 59, 61, 62, 64, 68, 77, 80	à seuil .....	22, 31, 33, 93, 95, 103
Corps géniculés latéraux (CGL) .....	12, 26	fréquentiel .....	21
Correction stochastique .....	112, 115, 127	impulsionnel .....	21, 26, 31
Couche plexiforme		<b>N</b>	
externe .....	11, 18, 23, 24, 26, 27	Nerf optique .....	8, 12, 13, 23
interne .....	13, 23, 26	<b>P</b>	
<b>D</b>		Photorécepteur	
Densité de seuils .....	90, 100	bâtonnet .....	8–10, 18, 41, 42
Divergence de		cône .....	8–10, 26, 41, 42
Kolmogorov .....	97, 99	Potentiels	
Kullback-Leibler .....	97	d'action ....	7, 12, 14, 19, 21, 23, 26, 28, 31, 32
<b>F</b>		gradué .....	7, 11, 26, 27
Facteur d'échelle .....	52, 65	Pré-traitement rétinien .....	5, 24, 85
Facteur de forme .....	72	Probabilité d'erreur de détection ...	96, 97, 101, 107
Fiabilité neuronale .....	20	Problème de détection .....	96, 102, 110
Fonction de vraisemblance .....	97	<b>Q</b>	
Fovéa .....	9, 10, 13, 17, 18	Quantifieur régulier	
<b>G</b>		asymptotique .....	100, 102, 151
Grille		maximisant f divergence .....	99, 102
irrégulière .....	43, 69, 71	minimisant f divergence .....	151
régulière .....	43, 47	uniforme .....	87, 89

- Quantifieur stochastique  
  adapté invariant (QAIS) ..... 104  
  adapté variant (QAVS) ..... 104  
  uniforme invariant (QUIS) ..... 104  
  uniforme variant (QUVS) ..... 104
- R**
- Rapport de vraisemblance ..... 96
- Régions  
  de dépassements ..... 86  
  granulaires ..... 86
- Résonance stochastique ..... 29–31, 33
- S**
- Scène naturelle ..... 24, 40
- Synapse  
  chimique ..... 8, 23, 27, 29  
  électrique ..... 8, 27
- Système nerveux central (SNC) ..... 12, 85, 95
- T**
- Tâche aveugle ..... 10
- Test du rapport de vraisemblance ..... 96
- Théorème de convergence dominée ..... 49
- Triade synaptique ..... 11, 24
- V**
- Variabilité neuronale ..... 14, 19, 21, 103
- Voie  
  koniocellulaire ..... 13  
  magnocellulaire ..... 13, 23, 26, 28, 29  
  parvocellulaire ..... 12, 23, 26, 28, 29

- [1] B. Aazhang and H. V. Poor. On optimum and nearly optimum data quantization for signal detection. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32(1) :745–751, July 1984.
- [2] D. Alleyson. *Le traitement du signal chromatique dans la rétine : un modèle de base pour la perception des couleurs*. Informatique - Sciences Cognitives, Université Joseph Fourier - Grenoble 1, Mars 1999.
- [3] P. O. Amblard, S. Zozor, and O. Michel. Networks of the pooling type and optimal quantization. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 3 :716–719, May 2006.
- [4] J. J. Atick. Could information theory provide an ecological theory of sensory processing? *Network*, 3 :213–251, 1992.
- [5] J. J. Atik and A. N. Redlich. What does the retina know about natural scenes? *Neural Computation*, 4(2) :196–210, 1992.
- [6] H. B. Barlow. Unsupervised learning. *Neural Computation*, 1 :295–311, 1989.
- [7] W. H. A. Beaudot. *Le traitement neuronal de l'information dans la rétine des vertébrés*. Informatique, Institut National Polytechnique de Grenoble, Décembre 1994.
- [8] G. R. Benitz and J.A. Bucklew. Asymptotically optimal quantizers for detection of i.i.d. data. *IEEE Transactions on Information Theory*, 35(2) :316–325, March 1989.
- [9] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani. Stochastic resonance in climatic change. *Tellus*, 34 :10–16, 1892.
- [10] R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A*, 14 :L453–L457, 1981.
- [11] M. J. Berry and M. Meister. The structure and precision of retinal spike trains. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 94 :5411–6, 1997.
- [12] F. J. Beutler. Error free recovery of signals from irregularly spaced samples. *SIAM Review*, 8(3) :328–335, 1966.
- [13] F. J. Beutler. Alias-free randomly timed sampling of stochastic processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 16(2) :147–152, 1970.
- [14] F. J. Beutler and O. A. Z. Leneman. The theory of stationary point processes. *Acta Mathematica*, 116 :159–197, 1966.
- [15] H. S. Black. *Modulation theory*. Van Nostrand, New York, New York, 1953.
- [16] R. Brette. *Modèles Impulsionnels de Réseaux de Neurones Biologiques*. PhD thesis, INSERM Paris - Ecole Doctorale Cerveau Cognition Comportement, Décembre 2003.
- [17] J. A. Bucklew. Multidimensional digitization of data followed by a mapping. *IEEE Transactions on Information Theory*, 30(1) :107–110, January 1984.
- [18] P. Buser and M. Imbert. *Neurophysiologie fonctionnelle*. Hermann, Paris, 1987.
- [19] J. A. Cadzow and O. M. Solomon. Linear modeling and the coherence function. *IEEE Transactions on acoustics, speech and signal processing*, 35(1) :19–28, January 1987.



- [20] P. Carbone and D. Petri. Effect of additive dither on the resolution of ideal quantizers. *IEEE Trans. on Instrum Meas.*, 43 :389–396, June 1994.
- [21] P. Carbone and D. Petri. Performance of stochastic and deterministic dithered quantizers. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 49(2) :337–341, april 2000.
- [22] F. Chapeau-Blondeau. Noise enhanced capacity via stochastic resonance in an asymmetric binary channel. *Phys. Rev. E.*, 55 :2016–2020, February 1997.
- [23] F. Chapeau-Blondeau and D. Rousseau. Neuronal signal transduction aided by noise at threshold and at saturation. *Neural Processing Letters*, 20 :71–83, 2004.
- [24] J. M. Chassery and A. Montanvert. *Géométrie discrète en analyse dimages*. Hermès, 1991.
- [25] L. Y. Chew, C. Ting, and C. H. Lai. Chaotic resonance : Two-state model with chaos-induced escape over potential barrier. *Physical Review E*, 72 :036222(13), September 2005.
- [26] Y. C. Ching and L. Kurz. Nonparametric detectors based on  $m$ -interval partitioning. *IEEE Transactions on Information Theory*, 18(2) :251–257, March 1972.
- [27] J. J. Collins, C. C. Chow, and T. T. Imhoff. Aperiodic stochastic resonance in excitable systems. *Physical Review E*, 52 :3321–3324, October 1995.
- [28] J. J. Collins, T. T. Imhoff, and P. Grigg. Noise-enhanced tactile sensation. *Nature*, 383 :770, October 1996.
- [29] P. Cordo. Noise in human muscle spindles. *Nature*, 383 :769–770, October 1996.
- [30] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth. On the Lambert W function. *Advances in Computational Mathematics*, 5(1) :329–359, December 1996.
- [31] T. M. Cover and A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley-Interscience Publication, New York, 1991.
- [32] P. Dayan and L. F. Abbott. *Theoretical Neuroscience : Computational And Mathematical Modeling of Neural Systems*. MIT Press, Cambridge, January 2001.
- [33] R. W. Ditchburn. The function of small saccades. *Vision Research*, 20 :271–272, 1980.
- [34] J. E. Dowling. *The retina : an approachable part of the brain*. MA : Harvard University Press, Cambridge, 1987.
- [35] M. I. Dykman, R. Mannella, P. V. E. McClintock, and N. G. Stocks. Phase shifts in stochastic resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 68 :2985–2988, May 1992.
- [36] R. Engbert and R. Kliegl. Microsaccades uncover the orientation of covert attention. *Vision Research*, 43 :1035–1045, 2003.
- [37] R. Engbert and R. Kliegl. Microsaccades keep the eyes’ balance during fixation. *Psychological Science*, 15(6) :431–436, 2004.
- [38] R. Engbert and K. Mergenthaler. Microsaccades are triggered by low retinal image slip. *PNAS*, 103(18) :7192–7197, May 2006.
- [39] C. Enroth-Cugell and J. G. Robson. The contrast sensitivity of retinal ganglion cells of the cat. *J. Physiol.(Lond.)*, 187 :517–552, 1966.
- [40] M. Ezenman, P. E. Hallett, and R. C. Frecker. Power spectra for ocular drift and tremor. *Vision Research*, 25(11) :1635–1640, 1985.
- [41] R. Fitzhugh. Impulse and physiological states in models of nerve membrane. *Biophysics J.*, 1 :445–466, 1961.
- [42] L. Fronzoni and R. Mannella. Stochastic resonance in periodic potential. *J. of Statistical Physics*, 70 :501–512, January 1993.

- [43] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Rev. Mod. Phys.*, 70(1) :223–287, January 1998.
- [44] W. S. Geisler. Physical limits of acuity and hyperacuity. *Journal of Optical Society of America*, 1(7) :775–782, July 1984.
- [45] H. J. Gerrits and A. J. Vendrik. The influence of stimulus movements on perception in parafoveal stabilized vision. *Vision Research*, 14 :175–180, 1974.
- [46] A. Gersho and E. Gray. *Vector quantization and signal compression*. Kluwer Academic Publishers, London, 1991.
- [47] W. Gerstner. Time structure of the activity in neural network models. *Physical Review E*, 51(1) :738–758, 1995.
- [48] B. Girard and A. Berthoz. From brainstem to cortex : computational models of saccade generation circuitry. *Progress in Neurobiology*, 77 :215–251, 2005.
- [49] X. Godivier. *La résonance stochastique dans la transmission non linéaire du signal*. Sciences pour l'ingénieur, Ecole Doctorale de Nantes, Décembre 1997.
- [50] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press Inc., London, sixth ed. edition, 1963.
- [51] Y. Grall. La fonction visuelle. Technical report, Techniques de l'Ingénieur, traité Electronique.
- [52] R. M. Gray and D. L. Neuhoff. Quantization. *IEEE Trans. on Information Theory*, 44(6) :2325–2383, 1998.
- [53] R. M. Gray and T. G. Stockham. Dithered quantizers. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 39(3) :805–812, May 1993.
- [54] R. L. Gregory. *Eye and Brain, The psychology of Seeing*. University Press, Oxford, 1998.
- [55] M. Greschner, M. Bongard, P. Rujan, and J. Ammermüller. Retinal ganglion cell synchronization by fixational eye movements improves feature stimulation. *Nature Neuroscience*, 5(4) :341–347, April 2002.
- [56] R. Gupta and A. O. Hero. High-Rate vector quantization for detection. *IEEE Transactions on Information Theory*, 49(8) :1951–1969, August 2003.
- [57] M. Gur, A. Beylin, and D. M. Snodderly. Response variability of neurons in primary visual cortex (v1) of alert monkeys. *The Journal of Neuroscience*, 17 :2914–2920, 1987.
- [58] K. M. Hampson and E. A. H. Mallen. Coherence function analysis of the higher-order aberrations of the human eye. *Optics letters*, 31(2) :184–186, january 2006.
- [59] C. M. Harris and D. M. Wolpert. Signal-dependent noise determines motor planning. *Nature*, 394 :780–784, August 1998.
- [60] S. Haykin. *Neural networks : a comprehensive foundation*. Pearson Education, Hamilton, Ontario, 1999.
- [61] C. Heneghan, C. C. Chow, J. J. Collins, T. T. Imhoff, S. B. Lowen, and M. C. Teich. Information measures quantifying aperiodic stochastic resonance. *Physical Review Letters*, 54 :2228–2231, September 1996.
- [62] M. H. Henning and K. Funke. A biophysically realistic simulation of the vertebrate retina. *Neurocomputing*, 38-40 :659–665, 2001.
- [63] M. H. Henning, K. Funke, and F. Wörgötter. The influence of different retinal subcircuits on the non linearity of ganglion cell behavior. *The Journal of Neuroscience*, 22(19) :8726–8738, October 2002.
- [64] M. H. Henning, N. J. Kerscher, K. Funke, and F. Wörgötter. Stochastic resonance in visual cortical neurons : does the eye-tremor actually improve visual acuity ? *Neurocomputing*, 44-46 :115–120, 2002.

- [65] J. Hérault. *De la rétine biologique aux circuits neuromorphiques*. Traité IC2, Les systèmes de vision. J-M Jolion - Hermès, 2001.
- [66] J. Hérault and C. Jutten. *Réseaux neuronaux et traitement du signal*. Hermes, Juillet 1994.
- [67] I. Hidaka, D. Nozaki, and Y. Yamamoto. Functional stochastic resonance in the human brain : noise induced sensitization of baroreflex system. *Physical review letters*, 85(17) :3740–3743, October 2000.
- [68] J. R. Higgins. Five short stories about the cardinal series. *Bull. Am. Math. Soc.*, 12 :45–89, 1985.
- [69] T. Hoch, G. Wenning, and K. Obermayer. Optimal noise-aided signal transmission through populations of neurons. *Physical Review E*, 68 :011911(11), 2003.
- [70] A. Hodgkin and A. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol (Lond)*, 117 :500–544, 1952.
- [71] H. Hofer, J. Carroll, J. Neitz, M. Neitz, and D. R. Williams. Organization of the human trichromatic cone mosaic. *The Journal of Neuroscience*, 25(42) :96699679, September 2005.
- [72] M. O. Hongler, Y. L. Meneses, A. Beyeler, and J. Jacot. The resonant retina : Exploiting vibration noise to optimally detect edges in an image. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(9) :1051–1062, September 2003.
- [73] K. Hoshino, F. Mura, and I. Shimoyama. A one-chip scanning retina with an integrated micromechanical scanning actuator. *IEEE Journal of microelectromechanical systems*, 10(4) :492–497, December 2001.
- [74] Y. H. Hu and J. N. Hwang. *Handbook of neural network signal processing*. CRC Press LLC, 2002.
- [75] M. E. Inchiosa, J. W. C. Robinson, and A. R. Bulsara. Information-theoretic stochastic resonance in noise-floor limited systems : The case of adding noise. *Physical Review Letters*, 85 :3369–3372, 2000.
- [76] E. Ippen, J. Linder, and W. L. Ditto. Chaotic resonance : a simulation. *J. of Statistical Physics*, 70 :437–450, January 1993.
- [77] F. Jaramillo and K. Wiesenfeld. Mechano-electrical transduction assisted by Brownian motion : a role for noise in the auditory system. *Nature*, 1(5) :384–388, September 1998.
- [78] A. J. Jerry. The Shannon sampling theorem - its various extensions and applications : A tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 65(11) :1565–1596, 1977.
- [79] S. A. Kassam. Optimum quantization for signal detection. *IEEE Transactions on Communications*, 25(5) :479–484, May 1977.
- [80] S. M. Kay. *Fundamentals for Statistical Signal Processing : Detection Theory*. vol. 2. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998.
- [81] K. Kitajo, D. Nozaki, L. M. Ward, and Y. Yamamoto. Behavioral stochastic resonance within the human brain. *Phys. Rev. Lett.*, 90(21) :218103–(4), May 2003.
- [82] D. C. Knill and A. Pouget. The Bayesian brain : the role of uncertainty neural coding and computation. *Neurosciences*, 27(12) :712–719, December 2004.
- [83] H. Kolb, E. Fernandez, and R. Nelson. Webvision : The organization of the Retina and Visual System. <http://webvision.med.utah.edu/index.html>, September 2005.
- [84] G. A. Korn and T. M. Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1968.
- [85] E. Kowler. *Eye Movements and Their Role in Visual and Cognitive Processes*. Elsevier Publishing Company, September 1990.
- [86] E. Kowler and R. M. Steiman. Miniature saccades : eye movements that do not count. *Vision Research*, 19 :105–108, 1979.

- [87] A. Krawiecki, S. Matyjaskiewicz, K. Kacperski, and J. A. Holyst. Noise-free stochastic multiresonance near chaotic crises. *Physical Review E*, 64(4) :041104(4), September 2001.
- [88] S. Kullback. *Information Theory and Statistics*. Dover, 1968.
- [89] B. Lacaze. Théorie élémentaire de l'échantillonnage périodique des fonctions à énergie finie. *Traitement du signal*, 21(2) :129–140, 2004.
- [90] O. Landolt, A. Mitros, and C. Koch. Visual sensor with resolution enhancement by mechanical vibrations. *IEEE Proc. 2001 Conf. Advanced research in VLSI*, pages 249–263, 2001.
- [91] D. A. Leopold and N. K. Logothetis. Microsaccades differentially modulate neural activity in the striate and extrastriate visual cortex. *Experimental Brain Research*, 123(3) :341–345, November 1998.
- [92] A. Lewis, R. Garcia, and L. Zhaoping. The distribution of visual objects on the retina : connecting eye movements and cone distributions. *Journal of vision*, 3(11) :807–813, 2003.
- [93] A. Lewis, R. Garcia, and L. Zhaoping. Understanding cone distributions from saccadic dynamics. Is information rate maximised? *Neurocomputing*, 58(60) :807–813, 2004.
- [94] A. Longtin, A. R. Bulsara, and F. Moss. Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons. *Phys. Rev. Lett.*, 67(5) :656–659, July 1991.
- [95] D. L. MacAdam. Visual sensitivities to color differences in daylight. *Journal of Optical Society of America*, 32 :247–273, 1942.
- [96] V. Mante, R. A. Frazor, V. Bonin, W. S. Geisler, and M. Carandini. Independence of luminance and contrast in natural scenes and in the early visual system. *Nature Neuroscience*, 2005.
- [97] R. J. Marks. *Introduction to Shannon sampling and interpolation theory*. Springer - Verlag, New York, New York, 1991.
- [98] D. Marr. *Vision*. Freeman, New York, 1982.
- [99] S. Martinez-Conde, S. L. Macknik, and D. H. Hubel. Microsaccadic eye movements and firing of single cells in the striate cortex of macaque monkeys. *Nature Neuroscience*, 3(3) :251–258, March 2000.
- [100] S. Martinez-Conde, S. L. Macknik, and D. H. Hubel. The function of bursts of spikes during visual fixation in the awake primate lateral geniculate nucleus and primary visual cortex. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 99(21) :13920–13925, October 2002.
- [101] S. Martinez-Conde, S. L. Macknik, and D. H. Hubel. The role of the fixational eye movements in visual perception. *Nature Reviews Neuroscience*, 5 :229–240, March 2004.
- [102] R. H. Masland. The fundamental plan of the retina. *Nature Neuroscience*, 4(9) :877–886, September 2001.
- [103] E. Masry. Alias-free sampling : An alternative conceptualization and its applications. *IEEE Transactions on Information Theory*, 24(3) :317–324, 1978.
- [104] S. Matyjaskiewicz, A. Krawiecki, J. A. Holyst, and L. Schimansky-Geier. Stochastic multiresonance due to interplay between noise and fractals. *Physical Review E*, 68(1) :016216(7), July 2003.
- [105] W. S. McCulloch and W. H. Pitts. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5 :115–133, 1943.
- [106] M. D. McDonnell, D. Abbott, and C. E. M. Pearce. A characterization of suprathreshold stochastic resonance in an array of comparators by correlation coefficient. *Fluctuation and Noise Letters*, 2(3) :205–220, September 2002.

- [107] M. J. McMahon, M. J. M. Lankheet, and D. R. Williams. Fine structure of parvocellular receptive fields in the primate fovea by laser interferometry. *The journal of neuroscience*, 20(5) :2043–2053, march 2000.
- [108] E. Meijering. A chronology of the interpolation. *Proc. of the IEEE*, 90(3) :319–342, 2002.
- [109] Z. Meinen and T. Sejnowski. Reliability of spike timing in neocortical neurons. *Science*, 268 :1503–1506, 1995.
- [110] S. Mitaim and B. Kosko. Adaptative stochastic resonance. *Proceedings of the IEEE*, 86(11) :2152–2183, November 1998.
- [111] S. Morfu, J. M. Bilbault, and J. C. Conte. Noise-enhanced propagation in a dissipative chain of triggers. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12 :1–5, 2002.
- [112] F. Moss, L. M. Ward, and W. G. Sannita. Stochastic resonance and sensory information processing : a tutorial and review of application. *Clinical Neurophysiology*, 115(2) :267–281, February 2004.
- [113] J. Naguma, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 50 :2061–2071, 1962.
- [114] A. Neiman, B. Shulgin, V. Anishchenko, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, and J. Freund. Dynamical entropies applied to stochastic resonance. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :4851–4851, December 1996.
- [115] R. A. Normann and F. S. Werblin. Control of retinal sensitivity light and dark adaptation of vertebrate rod and cones. *Journal of General Physiology*, 63 :37–61, 1974.
- [116] L. Nowak, M. Sanchez-Vives, and D. McCormick. Influence of low and high frequency inputs on spike timing in visual cortical neurons. *Cerebral Cortex*, 7(6) :487–501, September 1997.
- [117] I. Ohzawa, G. Sclar, and R. D. Freeman. Contrast gain control in the cat visual cortex. *Nature*, 298(5871) :266–268, July 1982.
- [118] G. C. Orsak and B.-P. Paris. On the relationship between measures of discrimination and the performance of suboptimal detectors. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(1) :188–203, January 1995.
- [119] L. Perrinet. *Comment déchiffrer le code impulsif de la Vision ? Etude du flux parallèle, asynchrone et éparé dans le traitement visuel ultra-rapide*. Sciences Cognitives, Université Paul Sabatier - Toulouse, Février 2003.
- [120] M. Piana, M. Canfora, and M. Riani. Role of noise in image processing by the human perceptive system. *Physical review E*, 62(1) :1104–1109, July 2000.
- [121] B. Picinbono and P. Duvaut. Optimum quantization for detection. *IEEE Transactions on Communications*, 36(11) :1254–1258, november 1988.
- [122] H. E. Pleßer. *Aspects of signal processing in noisy neurons*. PhD thesis, Georg-August-Universität, Göttingen, July 1999.
- [123] H. V. Poor. Robust decision design using a distance criterion. *IEEE Transactions on Information Theory*, 26(5) :575–587, September 1980.
- [124] H. V. Poor. Robust quantization of  $\epsilon$ -contaminated data. *IEEE Transactions on Communications*, 33(3) :218–222, March 1985.
- [125] H. V. Poor. Fine quantization in signal detection and estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(5) :960–972, September 1988.
- [126] H. V. Poor and J. B. Thomas. Application of Ali-Silvey distance measures in the design of generalized quantizers for binary decision systems. *IEEE Transactions on Communication*, 25(9) :893–900, September 1977.

- [127] D. S. Reich, J. D. Victor, B. W. Knight, T. Ozaki, and E. Kaplan. Response variability and timing precision of neuronal spike trains in vivo. *The American Physiological Society*, 77 :2836–2841, 1997.
- [128] J. B. Reppas and W. M. Usrey. Saccadic eye movements modulate visual responses in the lateral geniculate nucleus. *Neuron*, 35 :961–974, August 2002.
- [129] F. Rieke, D. Warland, R. Ruyter van Steveninck, and W. Bialek. *Spikes : Exploring the Neural Code*. Bradford Book, 1996.
- [130] L. G. Roberts. Picture coding using pseudo-random noise. Master’s thesis, MIT, 1961.
- [131] D. A. Robinson. The use of control systems analysis in the neurophysiology of eye movements. *Ann. Rev. Neurosci.*, 4 :643–503, 1981.
- [132] R. Rodieck. Quantitative analysis of cat retinal ganglion cell response to visual stimuli. *Vision Research*, 5 :583–601, 1965.
- [133] A. Roorda and D. Williams. The arrangement of the three cone classes in the living human eye. *Nature*, 397 :520–522, February 1999.
- [134] D. Rousseau. *Contribution à l’étude du traitement de l’information dans les processus physiques non linéaires : résonance stochastique et rôle bénéfique du bruit*. Traitement du Signal et des Images, Ecole Doctorale D’Angers, Angers, Octobre 2004.
- [135] D. Rousseau, F. Duan, and F. Chapeau-Blondeau. Suprathreshold stochastic resonance and noise-enhanced Fisher information in arrays of threshold devices. *Physical Review E*, 68 :031107, 2003.
- [136] M. Rucci and G. Desbordes. Contributions of fixational eye movements to the discrimination of briefly presented stimuli. *Journal of Vision*, 3 :852–864, 2003.
- [137] D. L. Ruderman. The statistics of natural images? *Network : Computation in Neural System*, 5(4) :517–548, November 1994.
- [138] W. A. H. Rushton and H. D. Baker. Red/green sensitivity in normal vision. *Vision research*, 4 :75–85, 1964.
- [139] R. R. Ruyter van Steveninck, G. D. Lewen, S. P. Strong, R. Koberle, and W. Bialek. Reproducibility and variability in neural spike trains. *Science*, 21(5307) :1805–1808, March 1997.
- [140] A. A. Saha. Perturbative corrections to stochastic resonant quantizers. *Signal Processing*, 86 :3466–3471, june 2006.
- [141] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall, New York, 1994.
- [142] J. L. Schnapf, B. J. Nunn, M. Meister, and D. A. Baylor. Visual transduction in cones of the monkey macaca fascicularis. *Journal of Physiology*, 427(1) :681–713, 1990.
- [143] R. Sekuler and R. Blake. *Perception*. McGraw - Hill Humanities, New-York, 2nd edition, 1990.
- [144] C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *Proc. IRE*, 37 :10–21, 1949.
- [145] H. S. Shapiro and R. A. Silverman. Alias-free sampling of random noise. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 8(2) :225–248, 1960.
- [146] R. Shapley and J. D. Victor. The contrast gain control of the cat retina. *Vision Research*, 19(4) :431–434, 1979.
- [147] E. Simonotto, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, and . F. Moss. Visual perception of stochastic resonance. *Physical review letters*, 78(78) :1186–1189, February 1997.
- [148] D. M. Snodderly, I. Kagan, and M. Gur. Selective activation of visual cortex neurons by fixational eye movements : implications for neural codings. *Vision Neuroscience*, 18 :259–277, 2001.

- [149] W. Softky and C. Koch. The highly irregular firing of cortical cells is inconsistent with temporal integration of random. *The Journal of Neuroscience*, 13 :334–350, January 1993.
- [150] R. Soma, D. Nozaki, S. Kwak, and Y. Yamamoti.  $1/f$  noise outperforms white noise in sensitizing baroreflex function in the human brain. *Physical review letters*, 91(7) :1–4, August 2003.
- [151] D. L. Sparks. The brainstem control of saccadic eye movements. *Nature Reviews Neuroscience*, 3(12) :952–964, December 2002.
- [152] R. M. Steinman, G. M. Haddad, A. A. Skavenski, and D. Wymann. Miniature eye movement. *Science*, 181 :810–819, 1973.
- [153] R. B. Stein, E. R. Gossen, and K. E. Jones. Neuronal variability : noise or part of the signal? *Nature Review Neuroscience*, 6(5) :389–397, may 2005.
- [154] N. G. Stocks. Suprathreshold stochastic resonance in multilevel threshold systems. *Physical Review Letters*, 84(11) :2310 – 2313, March 2000.
- [155] N. G. Stocks. Information transmission in parallel threshold arrays : Suprathreshold stochastic resonance. *Physical Review E*, 63, March 2001.
- [156] N. G. Stocks. Suprathreshold stochastic resonance : an exact result for uniformly distributed signal and noise. *Physical Letters A*, 279 :308–312, February 2001.
- [157] H. L. Van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory*. part 1. John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [158] J. M. Valetton and D. Van Norren. Light adaptation of primates cones : An analysis based on extracellular data. *Vision Research*, 23(12) :1539–1547, 1983.
- [159] J. D. Victor. The dynamics of the cat retinal X cell centre. *The Journal of Physiology*, 386(1) :219–246, 1987.
- [160] J. M. G. Vilar and J. M. Rubi. Stochastic Multiresonance. *Physical Review Letters*, 78 :2882–2885, April 1997.
- [161] M. F. Wadgy. Effect of various dither forms on quantization errors of ideal A/D converters. *IEEE Trans. on Instrum Meas.*, 38 :850–855, August 1989.
- [162] L. M. Ward, S. Desai, D. Rootman, M. Tata, and F. Moss. Noise can help as well as hinder seeing and hearing. *Bulletin of the American Physical Society*, March 2001.
- [163] K. Wiesenfeld and F. Jaramillo. Minireview of stochastic resonance. *Chaos*, 8(3) :539–548, September 1998.
- [164] K. Wiesenfeld and F. Moss. Stochastic resonance and the benefits of noise : from ice ages to crayfish and squids. *Nature*, 373 :33–36, January 1995.
- [165] A. Wohrer, P. Kornprobst, and T. Viéville. A Biologically-Inspired Model for a Spiking Retina. Research Report 5848, INRIA, February 2006.
- [166] A. L. Yarbus. *Eye movements and vision*. Plenum Press, New York, 1967.
- [167] K. A. Zaghoul, K. Boahen, and J. B. Demb. Contrast adaptation in subthreshold and spiking responses of mammalian Y-type retinal ganglion cells. *The Journal of Neuroscience*, 25(4) :860–868, January 2005.
- [168] S. Zozor. *Sur la théorie de la résonance stochastique à temps discret et son application en détection*. Signal Image Parole, INPG, Grenoble, Novembre 1999.





---

## Résumé

---

De récentes études tendent à montrer que les réseaux de neurones biologiques exploitent le bruit et les non-linéarités pour favoriser les processus de traitements de l'information. Cette thèse s'articule autour de cette thématique; elle tente de mettre à jour des liens entre des opérations de traitement du signal susceptibles d'apparaître au sein du système visuel et les facteurs aléatoires qui y sont sous-jacents.

Une description du système visuel et de ses différentes sources de bruits est réalisée dans le premier chapitre. Nous étudions dans le chapitre 2, le lien possible entre l'échantillonnage si particulier de la rétine et les mouvements incontrôlables et incessants de l'œil, les micro-mouvements. A l'aide de modèles simples de rétine et pour des fluctuations de diverses natures nous montrons que la ressemblance entre la scène projetée sur la rétine et la scène réelle peut être améliorée par des micro-mouvements aléatoires.

Dans le chapitre 3, on s'intéresse à un problème récurrent dans les systèmes naturels tel que le processus visuel : le test d'hypothèse binaire en milieu bruité. En particulier, nous caractérisons qu'elle peut être l'influence du bruit interne sur les performances de détection des premières couches de neurones du système visuel. Pour prendre en compte le bruit interne observé dans les réseaux de neurones biologiques, nous proposons de réaliser l'étude autour de quantifieurs stochastiques, quantifieurs dont les seuils sont soumis à des fluctuations aléatoires. Là encore, on observe que le bruit injecté dans le modèle permet d'accroître les performances de détection en diminuant la probabilité d'erreur.

**Mots clés :** Système visuel, micro-mouvements, échantillonnage aléatoire, contrôle optimal stochastique, quantifieur stochastique, détection.

---

---

## Abstract

---

Recent studies have shown that biological neural systems are able to use noise and non linearities to improve the information processing which is occurred in. This thesis focus on this topic. We investigate the links between some operations of signal processing whose potentially appear in the visual system and its internal noises.

A description of the human visual system and its different sources of noise is done in first chapter. We study in the second part the link between the irregular retinal sampling and the random fixational eye movements. We use a simple model of retina. For several kind of fluctuations we show that the likeness of the image projected on the model of retina and the real scene can be improved by random movements.

In the third chapter we are interested in a problem which is recurrent in biological systems such as the visual system : noisy binary detection tasks. The influence of the internal noise of the first layers of neurons of the visual system on the performance of the detection tasks is characterized. To simulate the internal noise observed in biological neural networks we propose to use stochastic quantizers. A stochastic quantizer is a quantizer which of thresholds are perturbed randomly by threshold noises. Once again we observe that the threshold noise can improve the detection performance by decreasing the probability of error.

**Key-words :** Visual system, micro-movements, random sampling, optimal stochastic control, stochastic quantizer, detection.

---