Approximation du temps local et intégration par régularisation

Blandine Berard Bergery

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAEM
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I,

en Mathématiques Appliquées

par **Blandine BÉRARD BERGERY**

Approximation du temps local et intégration par régularisation

Soutenue publiquement le 16 octobre 2007

Membres du jury :

Rapporteurs :	Dominique Lepingle	Professeur à l'Université d'Orléans.
	Philip Protter	Professeur à Cornell University
Examinateurs :	Michel Emery	Professeur à l'Université de Strasbourg.
	Bernard Roynette	Professeur à l'IECN, UHP.
	Pierre Vallois	Professeur à l'IECN, UHP.

Institut Élie Cartan Nancy (Mathématiques), Faculté des Sciences et Techniques
B.P. 239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

En se basant sur la théorie de l'intégration par régularisation et la convergence uniforme en probabilité, on définit plusieurs schémas d'approximation du temps local. Selon les cas, ils sont valables pour des semi-martingales, des diffusions ou pour le mouvement brownien standard. En outre, on s'intéresse à d'autres modes de convergence que la convergence en probabilité dans le cadre de l'intégration par régularisation. On étudie des cas de convergences presque sûre, puis des convergences au second ordre.

Dans ce chapitre, on commence par faire des rappels sur les semi-martingales continues (Section 1.1.1), puis sur l'intégration par régularisation (Section 1.1.2). On présente un premier schéma d'approximation du temps local dans la Section 1.1.3. Ce premier schéma peut se décomposer de plusieurs manières, chacune donnant naissance à de nouveaux schémas d'approximation. Ces différentes décompositions sont présentées dans la Section 1.2. Ce chapitre se termine avec une série de résultats préliminaires qui seront utilisés fréquemment dans les chapitres suivants (Section 1.3).

Dans les trois chapitres suivants, on étudie la convergence des différents schémas d'approximation vers le temps local. Le Chapitre 2 concerne les semi-martingales et les diffusions réversibles. Le Chapitre 3 se concentre sur le cas particulier du mouvement brownien standard. Enfin, le Chapitre 4 traite le cas de certaines martingales browniennes. L'essentiel de ces résultats a été publié dans [3], et le cas brownien a fait l'objet de [4].

Les deux derniers chapitres sont consacrés à d'autres modes de convergence que la convergence en probabilité. Dans le Chapitre 5, on montre la convergence presque sûre vers l'intégrale stochastique dans le cas où l'intégrant est Höldérien. Dans le Chapitre 6, on étudie la convergence au second ordre de la variation quadratique et de l'intégrale stochastique.

1.1 Intégration par régularisation et temps local

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ un espace de probabilité complet et $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus réel continu, $(\mathcal{F}_t)$-adapté. Une catégorie particulière de tels processus est celle des semi-martingales continues, ou alors celles des processus gaussiens. Alors qu'on connaît déjà une intégrale, une variation quadratique et un temps local pour les semi-martingales (voir section 1.1.1), de tels objets n'existent pas pour le cas des processus continus en général, et même pas dans le cadre restreint des processus gaussiens. Les travaux de Russo et Vallois dans [21], [22] et [23] ont permis de définir une intégrale et une variation quadratique pour une classe de processus continus plus large que les semi-martingales (voir section 1.1.2). En se basant sur le procédé de construction de cette variation quadratique, on définit une première famille d'approximation du temps local (voir section 1.1.3).

1.1.1 Rappels sur les semi-martingales continues

Avant de considérer les processus continus en général, rappelons quelques résultats connus pour les semi-martingales continues. Ces rappels sur le calcul stochastique d'Itô sont tirés de [19] et [14]. Commençons par rappeler brièvement ce que sont les semi-martingales, leur variation quadratique et l'intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale.

Définition 1.1.1 *Un processus X est une $(\mathcal{F}_t)$- semi-martingale continue si X peut s'écrire $X = X_0 + M + A$, avec X_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable, M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale continue et A un processus continu, $(\mathcal{F}_t)$-adapté et à variation finie.*

Nous rappelons ensuite la définition de la variation quadratique pour une martingale, puis pour une semi-martingale.

Définition 1.1.2 *Soient X, Y deux martingales locales continues. Alors il existe un unique processus $< X, Y >$ adapté, continu et à variation bornée tel que $< X, Y >_0 = 0$ et $XY - < X, Y >$ est une martingale locale continue.*
Si $X = Y$, alors $< X, X >$ est la variation quadratique de X et c'est un processus croissant. On notera parfois dans la suite $< X > = < X, X >$.

Définition 1.1.3 *Soit $X = X_0 + M + A$ une semi-martingale continue, avec M une martingale locale continue, A un processus continu adapté à variation borné. On définit la variation quadratique de X par : $< X, X > = < M, M >$.*

Signalons que $< M, M >_t$ est définie classiquement par la convergence en probabilité de $\sum_i \left(M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n} \right)^2$ où $\Delta_n = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$ est une subdivision de $[0, t]$ telle que $|\Delta_n|$ converge vers 0.

Enfin, rappelons la définition de l'intégrale stochastique d'Itô pour une semi-martingale.

Définition 1.1.4 *Si $X = X_0 + M + A$ est une semi-martingale, alors pour tout processus K progressivement mesurable tel que pour tout $t \geqslant 0$,*
1) $\int_0^t K_s^2 d < M >_s < \infty$,
2) $\int_0^t |K|_s d|A|_s < \infty$,
on peut définir $(\int_0^t K_s dX_s)_{t \geqslant 0}$ l'intégrale stochastique d'Itô de K par rapport à X de la manière suivante :

$$\int_0^t K_s dX_s = \int_0^t K_s dM_s + \int_0^t K_s dA_s,$$

avec $\int_0^t K_s dM_s$ l'intégrale stochastique par rapport à la martingale locale continue M et $\int_0^t K_s dA_s$ l'intégrale de Stieljes par rapport à A. Le processus $(\int_0^t K_s dX_s)_{t \geqslant 0}$ est une semi-martingale continue nulle en 0.

Grâce à la variation quadratique et l'intégrale stochastique, on montre que l'image d'une semi-martingale continue par une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est une semi-martingale continue.

Théorème 1.1.5 (Formule d'Itô) *Soit X une semi-martingale continue et $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Alors $F(X)$ est une semi-martingale continue et on a pour tout $t \geqslant 0$:*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)d < X >_s .$$

La formule d'Itô ci-dessus n'est valable que pour des fonctions F de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, mais on peut écrire une formule semblable pour les fonctions convexes, en introduisant le temps local d'une semi-martingale.

Commençons par rappeler les résultats relatifs au temps local $L(X)$ de la semi-martingale X.

Théorème 1.1.6 (formule de Tanaka) *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $(L_t^a(X), a \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$ un processus bimesurable, adapté, appelé le temps local de X, tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $t \to L_t^a$ est croissant continu, et tel que pour tout $t \geqslant 0, a \in \mathbb{R}$*

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t 1\!\!I_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2}L_t^a(X),$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t 1\!\!I_{\{X_s \leqslant a\}} dX_s + \frac{1}{2}L_t^a(X),$$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t sign(X_s - a)dX_s + L_t^a(X).$$

Remarque. On rappelle que $x^- = \sup(-x, 0)$ et $x^+ = \sup(x, 0)$.

On peut maintenant écrire une extension de la formule d'Itô pour les fonctions convexes.

Théorème 1.1.7 (Formule d'Itô-Tanaka) *Soient X une semi-martingale continue et F une différence de deux fonctions convexes. Alors $F(X)$ est une semi-martingale et pour $t \geqslant 0$, on a*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'_-(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a F''(da),$$

avec F'_- la dérivée à gauche de F et $F''(da)$ la dérivée seconde au sens des distributions.

Terminons ces rappels par une brève étude du temps local. $L^a(X)$ est un processus qui sert à mesurer ce qui se passe localement autour de a, comme on peut le voir dans les propositions suivantes.

Proposition 1.1.8 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le processus $(L_t^a(X), t \geqslant 0)$ étant croissant, on peut lui associer une mesure dL_t^a sur $\mathbb{R}^+$. Cette mesure est portée par l'ensemble $\{t : X_t = a\}$.*

Proposition 1.1.9 (Formule de densité d'occupation) *Pour toute fonction ϕ borélienne positive définie sur $\mathbb{R}$, on a presque sûrement pour tout $t \geqslant 0$:*

$$\int_0^t \phi(X_s)d < X >_s = \int_{\mathbb{R}} \phi(a)L_t^a(X)da.$$

Une extension de cette formule peut être trouvée en exercice dans [19] :

Proposition 1.1.10 *Si X est une semi-martingale continue, alors presque sûrement, pour toute fonction h borélienne positive définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,*

$$\int_0^t h(s, X_s)d < X >_s = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t h(s, a)dL_s^a(X)\right) da.$$

Énonçons maintenant quelques propriétés de régularité du temps local.

Proposition 1.1.11 *Soit X une semi-martingale continue. Alors il existe une modification du processus $(L_t^a(X))_{a\in\mathbb{R},t\geqslant 0}$ telle que $(a,t)\to L_t^a(X)$ est p.s continu en t et càdlàg en a. Si de plus, $\int_0^t 1\!\!1_{\{X_s=a\}}dX_s = 0$, alors il existe une modification bicontinue de $L(X)$.*

Remarque.

1) Pour le mouvement brownien $(B_t)_{t\geqslant 0}$, on a $\int_0^t 1\!\!1_{\{B_s=a\}}dB_s = 0$. En effet,

$$E\left((\int_0^t 1\!\!1_{\{B_s=a\}}dB_s)^2\right) = E\left(\int_0^t 1\!\!1^2_{\{B_s=a\}}ds\right) = \int_0^t P(B_s=a)ds = 0.$$

Plus généralement, si X est une martingale, alors $\int_0^t 1\!\!1_{\{X_s=a\}}dX_s = 0$.

2) Si $\int_0^t 1\!\!1_{\{X_s=a\}}dX_s = 0$, la deuxième égalité du Théorème 1.1.6 peut être modifiée de la manière suivante :

$$(X_t-a)^- = (X_0-a)^- - \int_0^t 1\!\!1_{\{X_s<a\}}dX_s + \frac{1}{2}L_t^a(X).$$

Dans le cas des martingales, on a plus de régularité que la simple bicontinuité.

Proposition 1.1.12 *Soit X une martingale continue. On peut choisir une version du temps local telle que, presque sûrement, $a\to L_t^a$ est Hölderien d'ordre δ uniformément en $t\in[0,T]$, pour tout $\delta<\frac{1}{2}$.*

Enfin, la Proposition suivante donne une première formule d'approximation du temps local par des intégrales. Ce résultat est une conséquence directe de la formule de densité d'occupation et de la Proposition 1.1.11.

Proposition 1.1.13 *Soit X une semi-martingale continue, alors*

$$\forall t\geqslant 0, a\in\mathbb{R},\quad L_t^a(X) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t 1\!\!1_{[a,a+\epsilon[}(X_s)d<X>_s \quad p.s.$$

Si X est une martingale locale continue, on a :

$$L_t^a(X) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t 1\!\!1_{]a-\epsilon,a+\epsilon[}(X_s)d<X>_s\ .$$

Si on veut étendre les formules d'Itô et d'Itô-Tanaka pour des processus continus plus généraux, comme les processus gaussiens ou des processus continus, il faut utiliser une intégrale qui étende celle d'Itô. La définition de cette intégrale stochastique étendue est l'objet de la section suivante.

1.1.2 Généralisation aux processus continus

Commençons par définir l'intégrale forward, qui étend l'intégrale stochastique d'Itô pour certains processus continus. L'intégrale forward, et plus généralement l'intégration par régularisation, ont été introduites et développées par Russo et Vallois dans [21], [22], [23] et [24]. Cette intégrale se construit par convergence (ucp) d'une famille d'intégrales. Rappelons la définition de la convergence (ucp) (d'après la Section II.4 de [18]).

Définition 1.1.14 *On dit qu'une famille de processus* $(H_t^{(\epsilon)})_{t\geqslant 0}$ *converge uniformément sur les compacts en probabilité (ucp) vers* $(H_t)_{t\geqslant 0}$ *si pour tout* $T>0$, $\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|H_t^{(\epsilon)}-H_t|$ *converge en probabilité vers 0 quand* ϵ *tend vers 0.*

Nous pouvons maintenant introduire la définition de l'intégrale forward, valable pour certains processus continus.

Définition 1.1.15 *Soient* X *un processus réel continu* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté et* H *un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté. On définit* $\int_0^t Hd^-X$ *l'intégrale forward de* H *par rapport à* X *comme la limite suivante :*

$$\forall t\geqslant 0,\qquad \int_0^t Hd^-X=\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s\left(X_{s+\epsilon}-X_s\right)ds,$$

si cette limite existe.

Comme dans la section 1.1.1, on associe à l'intégrale forward une variation quadratique, définie aussi par convergence (ucp). Pour la différencier de la variation quadratique ordinaire, on la note $[,]$.

Définition 1.1.16 *Soient* X,Y *deux processus réels continus. On définit le crochet de* X *et* Y *par :*

$$[X,Y]_\cdot=\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\frac{1}{\epsilon}\int_0^\cdot\left(Y_{s+\epsilon}-Y_s\right)\left(X_{s+\epsilon}-X_s\right)ds$$

si cette limite existe.
Si $Y=X$*, alors* $[X,X]$ *est appelé variation quadratique de* X*.*

On remarque que pour un processus continu, il existe un lien très fort entre l'existence de sa variation quadratique et celle de certaines intégrales forward.

Proposition 1.1.17 *Soit* X *un processus continu.* $[X,X]$ *existe si et seulement si pour tout* f *fonction de classe* $\mathcal{C}^1$, $\int_0^\cdot f(X)d^-X$ *existe.*

L'intégrale forward et la variation quadratique ainsi définies sont des extensions de l'intégrale stochastique d'Itô et de la variation quadratique ordinaire relatives aux semi-martingales continues, comme on le voit dans ces résultats tirés de [20].

Proposition 1.1.18 *Si* X,Y *sont deux semi-martingales continues, alors* $[X,Y]=<X,Y>$.

Proposition 1.1.19 *Soient* X *une semi-martingale continue et* H *processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté admettant des limites à gauche, alors :*

$$\forall t\geqslant 0,\qquad \int_0^t Hd^-X=\int_0^t H_{s-}dX_s,$$

avec $\int_0^t H_s dX_s$ *l'intégrale stochastique habituelle.*

La variation quadratique possède une propriété de stabilité, tirée de [21] :

Proposition 1.1.20 *Soient* X,Y *processus continus tels que* $[X,Y],[X,X],[Y,Y]$ *existent et* $f,g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$*, alors* $[f(X),g(Y)]$ *existe et*

$$\forall t\geqslant 0,\quad [f(X),g(Y)]_t=\int_0^t f'(X_s)g'(X_s)d[X,Y]_s.$$

En particulier, si X est une semi-martingale continue, on a

$$\forall t \geqslant 0, \quad [f(X), g(X)]_t = \int_0^t f'(X_s) g'(X_s) d < X >_s .$$

Avec ces définitions, Russo et Vallois ont obtenu une formule de type Itô dans le cas des processus continus. La version suivante de cette formule est tirée de [23].

Théorème 1.1.21 *Soient X un processus continu tel que $[X,X]$ existe et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) d^- X_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d[X,X]_s.$$

En se basant sur cette théorie de l'intégration par régularisation, on a pu construire un nouveau schéma d'approximation du temps local (c.f. la section suivante 1.1.3).

Dans cette section, la variation quadratique et l'intégrale forward ont été définies par des limites au sens ucp. Il parait naturel de se demander si on peut montrer, sous certaines hypothèses, une convergence au sens presque sûr, puis ensuite d'établir une convergence au second ordre.

Gradinaru et Nourdin [10] ont obtenu des résultats de convergence presque sûre. En particulier, pour B^H un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in [\frac{1}{2}, 1]$, si g est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, alors $\frac{1}{\epsilon} \int_0^t g(B_u^H)(B_{u+\epsilon}^H - B_u^H) du$ converge presque sûrement uniformément sur les compacts vers l'intégrale forward $\int_0^t g(B_u^H) d^- B_u^H$. Dans ce même article, il est démontré un résultat de même type, en remplaçant le mouvement brownien fractionnaire par une martingale s'écrivant sous la forme $M = M_0 + \int_0^t J_s dB_s$, avec J processus adapté localement höldérien.

Dans le chapitre 5, on montre que, sous certaines hypothèses de régularité sur l'intégrant $(H_t)_{t \geqslant 0}$, la convergence vers l'intégrale forward de H par rapport à une martingale locale continue M a lieu au sens presque sûr, ainsi qu'un résultat d'approximation presque sûre de la variation quadratique de M.

Le chapitre 6 considère la convergence au second ordre : on y étudie la convergence en loi de

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^t H_s (X_{(s+\epsilon)\wedge t} - X_s) ds - \int_0^t H_s dX_s \right) \text{ et } \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_0^t H_s (X_{(s+\epsilon)\wedge t} - X_s)^2 ds - \int_0^t H_s ds \right),$$

dans le cas où X est le mouvement brownien standard.

1.1.3 Vers une formule d'approximation du temps local : $J_\epsilon(t,y)$

Considérons $(X_t)_{t \geqslant 0}$ un processus continu à valeur dans $\mathbb{R}$. Énumérons rapidement des exemple de processus qui admettent un processus des temps locaux $(L_t^x(X), x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$. L'exemple le plus courant est celui des semi-martingales (voir la section 1.1.1). Quand X est un processus de Markov, le temps local $(L_t^x)_{t \geqslant 0}$ à un niveau x est défini comme une fonctionnelle additive particulière dans [6], et au moyen des excursions dans le Chapitre IV de [5]. Une construction du processus des temps locaux pour une diffusion unidimensionnelle a été donnée dans [11]. Une classe importante de processus de Lévy admet un processus des temps locaux (c.f. Chapter V de [5]). Au-delà des semi-martingales et des processus de Markov, des processus des temps locaux associés aux processus gaussien (c.f. [9]) ont été définis en tant que densité d'occupation. Un exemple particulier de processus gaussiens ayant un processus des temps locaux est le mouvement brownien fractionnaire. Des formules de Tanaka et d'Itô-Tanaka ont été données dans [8].

La définition de $(L_t^x(X), x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$ ne dépend pas toujours explicitement des trajectoires de $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Par exemple, si X est une martingale locale continue, $(L_t^x(X), t \geqslant 0)$ peut être défini comme l'unique processus adapté nul en 0 tel que $|X_t - x| - L_t^x(X)$ est une martingale locale. Ainsi, il est intéressant de produire des schémas d'approximation de $(L_t^x(X), x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$ pour lesquels les propriétés de la trajectoire de X apparaissent plus explicitement. Dans le cas des semi-martingales, la proposition 1.1.13 est un premier exemple.

La théorie des excursions de Lévy (c.f. [26]) donne un autre type d'approximation en comptant le nombre de descentes ou d'excursions avant un temps donné. Dans le cas des diffusions, la convergence de sommes normalisées a été étudiée dans [1] et [12]. Enfin, on peut se référer à [16] et [2] pour des approximations du temps local de processus de Lévy.

Les schémas d'approximation qu'on étudie ici seront tous dérivés d'un premier schéma $(J_\epsilon(t,y), y \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$, qui s'inspire de la définition de la variation quadratique pour les processus continus. Les approximations du temps local qui en découlent sont donc des approximations qui dépendent des trajectoires de X. Commençons par définir $(J_\epsilon(t,y), y \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$:

$$J_\epsilon(t,y) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(1\!\!1_{\{y<X_{s+\epsilon}\}} - 1\!\!1_{\{y<X_s\}}\right)(X_{s+\epsilon} - X_s)\, ds, \quad \forall y \in \mathbb{R}, t \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Notons que, si $\lim_{\epsilon\to 0}(ucp) J_\epsilon(t,y)$ existe, alors, par définition, elle est égale à $[1\!\!1_{\{y<X_\cdot\}}, X_\cdot]_t$.

Si le processus X admet une variation quadratique, la proposition suivante montre que les mesures $J_\epsilon(t,y)dy$ convergent faiblement quand ϵ tend vers 0.

Proposition 1.1.22 *Soit X un processus continu admettant une variation quadratique. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on a*

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp) \int_{\mathbb{R}} f(y) J_\epsilon(t,y) dy = \int_0^t f(X_s) d[X]_s.$$

Si on applique ce résultat pour X une semi-martingale continue, comme X admet un crochet et $[X] = <X>$, il vient

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp) \int_{\mathbb{R}} f(y) J_\epsilon(t,y) dy = \int_0^t f(X_s) d <X> s.$$

D'après la formule de densité d'occupation (Proposition 1.1.9), $\int_0^t f(X_s) d<X>s = \int_{\mathbb{R}} f(y) L_t^y(X) dy$. Par conséquent

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp) \int_{\mathbb{R}} f(y) J_\epsilon(t,y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) L_t^y(X) dy,$$

pour toute fonction f continue à support compact.

Cette analyse suggère donc de montrer la convergence de $J_\epsilon(t,y)$ vers $L_t^y(X)$ dans le cadre des semi-martingales. Pour simplifier, on fera l'essentiel de l'étude en prenant $y = 0$ et on note simplement $J_\epsilon(t,0) = J_\epsilon(t)$. Afin d'établir sa convergence, $J_\epsilon(t)$ a été décomposée de plusieurs manières. Ces différentes décompositions sont présentées dans la Section 1.2, accompagnées d'un bref résumé des cas où la convergence a été montrée. Les résultats complets de convergences sont répartis dans les Chapitres 2 à 4.

Preuve de la Proposition 1.1.22. Soit $t > 0$. À toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ nous associons la primitive g de f telle que $g(0) = 0$. On calcule de deux manières différentes la limite de l'intégrale suivante :

$$\Gamma_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t (g(X_{s+\epsilon}) - g(X_s))(X_{s+\epsilon} - X_s)\, ds,$$

quand ϵ tend vers 0.
Première approche : d'après la Proposition 1.1.20, on a :

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\Gamma_\epsilon(t) = [g(X),X]_t = \int_0^t g'(X_s)d[X]_s = \int_0^t f(X_s)d[X]_s.$$

Deuxième approche : il est clair que :

$$g(b)-g(a) = \int_{\mathbb{R}} \left(1\!\!1_{\{y<b\}} - 1\!\!1_{\{y<a\}}\right) f(y)dy.$$

Ce qui conduit à :

$$\Gamma_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}} \left(1\!\!1_{\{y<X_{s+\epsilon}\}} - 1\!\!1_{\{y<X_s\}}\right)(X_{s+\epsilon}-X_s)\, f(y)dy\right) ds.$$

On applique le Théorème de Fubini et on obtient :

$$\Gamma_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)J_\epsilon(t,y)dy,$$

où $J_\epsilon(t,y)$ est défini par (1.1). Comme $\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\Gamma_\epsilon(t)$ existe et vaut $\int_0^t f(X_s)d[X]s$, la Proposition est démontrée. ■

1.2 Décompositions successives de $J_\epsilon(t)$

On rappelle que

$$J_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(1\!\!1_{\{0<X_{s+\epsilon}\}} - 1\!\!1_{\{0<X_s\}}\right)(X_{s+\epsilon}-X_s)\, ds.$$

1.2.1 Une décomposition élémentaire

En séparant les deux indicatrices, on obtient une somme de deux termes d'apparences semblables :

$$J_\epsilon(t) = -I^1_\epsilon(t) + I^2_\epsilon(t), \tag{1.2}$$

avec

$$I^1_\epsilon(t) = \int_0^t \frac{X_{s+\epsilon}-X_s}{\epsilon} 1\!\!1_{\{0<X_s\}}ds, \tag{1.3}$$

$$I^2_\epsilon(t) = \int_0^t \frac{X_{s+\epsilon}-X_s}{\epsilon} 1\!\!1_{\{0<X_{s+\epsilon}\}}ds. \tag{1.4}$$

La différence entre deux ces deux termes est l'indicatrice. Dans $I^1_\epsilon(t)$, $1\!\!1_{\{0<X_s\}}$ est adapté et on va pouvoir utiliser le fait que X est une martingale pour l'étude de ce terme. Alors que dans $I^2_\epsilon(t)$, $1\!\!1_{\{0<X_{s+\epsilon}\}}$ n'est pas adapté. Nous aurons donc à modifier ce terme pour se ramener à un processus adapté.

Les résultats de convergence obtenus sont les suivants.
- Si X est une semi-martingale vérifiant certaines conditions d'absolue continuité, alors $I^1_\epsilon(t)$ converge au sens ucp vers $\int_0^t 1\!\!1_{\{0<X_s\}}dX_s$ (c.f. Théorème 2.1.2 du Chapitre 2).
- Si X est une diffusion réversible, alors $I^1_\epsilon(t), I^2_\epsilon(t)$ et $J_\epsilon(t)$ convergent au sens ucp vers $\int_0^t 1\!\!1_{\{0<X_s\}}dX_s$, $X_t^+ - X_0^+ + \frac{1}{2}L^0_t(X)$ et $L^0_t(X)$ respectivement (c.f. Théorèmes 2.1.2 , 2.1.3 et 2.1.1 du Chapitre 2).

– Si X est un mouvement brownien standard, alors $I^1_\epsilon(t), I^2_\epsilon(t)$ et $J_\epsilon(t)$ convergent au sens ucp vers $\int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{0<X_s\}} dX_s$, $X_t^+ + \frac{1}{2} L_t^0(X)$ et $L_t^0(X)$ respectivement . C'est une conséquence des résultats précédents, mais on présente une autre preuve du Théorème 2.1.1 dans la Section 3.2.1 du Chapitre 3. De plus, on montre que la convergence a lieu dans $L^2(\Omega)$ et on a une estimation de la vitesse de convergence dans la Section 3.4.

– Si X est une martingale de la forme $X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$ où σ est une fonction vérifiant certaines propriétés, alors $I^1_\epsilon(t), I^2_\epsilon(t)$ et $J_\epsilon(t)$ convergent au sens ucp vers $\int_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\{0<X_s\}} dX_s$, $X_t^+ + \frac{1}{2} L_t^0(X)$ et $L_t^0(X)$ respectivement (C'est une conséquence des deux premiers points. Voir le Chapitre 4).

Cette décomposition (1.2) n'est pas totalement satisfaisante car, comme on le voit dans les Théorèmes 2.1.2 et 2.1.3 du Chapitre 2, les limites respectives de $I^1_\epsilon(t)$ et $I^2_\epsilon(t)$ ne s'expriment pas en fonction uniquement du temps local. On propose donc une autre décomposition de $J_\epsilon(t)$.

1.2.2 Deuxième décomposition

On peut écrire $J_\epsilon(t)$ sous la forme :

$$J_\epsilon(t) = I^3_\epsilon(t) + I^4_\epsilon(t) + R_\epsilon(t), \tag{1.5}$$

avec

$$I^3_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_u \leqslant 0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t} 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_u > 0\}} du, \tag{1.6}$$

$$I^4_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_u 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} > 0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} \leqslant 0\}} du, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} R_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(1\!\!\mathrm{I}_{\{0<X_{u+\epsilon}\}} - 1\!\!\mathrm{I}_{\{0<X_u\}}\right)(X_{u+\epsilon} - X_u)\, du \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(1\!\!\mathrm{I}_{\{0<X_t\}} - 1\!\!\mathrm{I}_{\{0<X_u\}}\right)(X_t - X_u)\, du, \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Remarquons que, dans (1.6) et (1.7), nous avons systématiquement introduit $X_{(u+\epsilon)\wedge t}$ à la place de $X_{u+\epsilon}$, pour que $I^3_\epsilon(t), I^4_\epsilon(t)$ soient des processus adaptés. Cela jouera un rôle important dans les preuves, en particulier pour obtenir la convergence au sens (ucp).

Les résultats de convergence obtenus sont les suivants.

– Si X est une semi-martingale continue, alors $I^3_\epsilon(t)$ converge au sens ucp vers $\frac{1}{2} L_t^0$ (c.f. Théorème 2.2.1 du Chapitre 2).

– Si X est une diffusion réversible, alors $I^3_\epsilon(t)$ et $I^4_\epsilon(t)$ convergent au sens ucp vers $\frac{1}{2} L_t^0$ (c.f. Théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 du Chapitre 2).

– Si X est un mouvement brownien standard, alors $I^3_\epsilon(t)$ et $I^4_\epsilon(t)$ convergent au sens ucp vers $\frac{1}{2} L_t^0$, d'après les points précédents.

– Si X est une martingale de la forme $X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$ où σ est une fonction vérifiant certaines propriétés, alors $I^3_\epsilon(t)$ et $I^4_\epsilon(t)$ convergent au sens ucp vers $\frac{1}{2} L_t^0$. La convergence de $I^3_\epsilon(t)$ découle du premier point, la convergence de $I^4_\epsilon(t)$ est un corollaire du Théorème 4.1.1 (C'est une conséquence des deux premiers points. Voir le Chapitre 4).

D'une manière évidente, $I^3_\epsilon(t)$ et $I^4_\epsilon(t)$ peuvent chacun se décomposer en deux termes, ce qui fait l'objet de la section suivante.

Preuve de la décomposition (1.5). Pour que l'indice de $X_{u+\epsilon}$ ne dépasse pas t dans $J_\epsilon(t)$, on commence par introduire $(u+\epsilon)\wedge t$ à la place de $u+\epsilon$:

$$\begin{aligned} J_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(1\!\!1_{\{0<X_{(u+\epsilon)\wedge t}\}} - 1\!\!1_{\{0<X_u\}}\right)(X_{(u+\epsilon)\wedge t} - X_u)du \\ &+\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(1\!\!1_{\{0<X_{u+\epsilon}\}} - 1\!\!1_{\{0<X_u\}}\right)(X_{u+\epsilon} - X_u)du \\ &-\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(1\!\!1_{\{0<X_t\}} - 1\!\!1_{\{0<X_u\}}\right)(X_t - X_u)du. \end{aligned}$$

On regroupe la deuxième et la troisième ligne sous la notation $R_\epsilon(t)$. Il reste la première ligne à modifier, qu'on note provisoirement $\widetilde{J}_\epsilon(t)$. On la décompose en une somme de quatres termes positif, en utilisant l'égalité suivante :

$$1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}} - 1\!\!1_{\{X_u>0\}} = 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0, X_u\leqslant 0\}} - 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0, X_u>0\}}.$$

On a alors en reportant dans l'intégrale

$$\widetilde{J}_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t (X_{(u+\epsilon)\wedge t} - X_u)(1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0, X_u\leqslant 0\}} - 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0, X_u>0\}})du.$$

Après avoir développé le produit, on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \Big[X_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0, X_u\leqslant 0\}} - X_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0, X_u>0\}} \\ &\qquad -X_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0, X_u\leqslant 0\}} + X_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0, X_u>0\}}\Big]\,du. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} X_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}} &= X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}, \\ -X_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0\}} &= X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}, \\ -X_u 1\!\!1_{\{X_u\leqslant 0\}} &= X^-_u, \\ X_u 1\!\!1_{\{X_u>0\}} &= X^+_u, \end{aligned}$$

on peut écrire $\widetilde{J}_\epsilon(t)$ comme une somme de quatre termes positifs :

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_u\leqslant 0\}}du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_u>0\}}du \\ &+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0\}}du. \end{aligned}$$

La première ligne est $I^3_\epsilon(t)$ et la deuxième $I^4_\epsilon(t)$, et on a bien la décomposition (1.5). ■

1.2.3 Dernière décomposition

De l'identité (1.5), on déduit directement :

$$I^3_\epsilon(t) = I^{3,1}_\epsilon(t) + I^{3,2}_\epsilon(t) + r^3_\epsilon(t), \quad I^4_\epsilon(t) = I^{4,1}_\epsilon(t) + I^{4,2}_\epsilon(t) + r^4_\epsilon(t), \tag{1.9}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_\epsilon^{3,1}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du, && (1.10)\\
I_\epsilon^{3,2}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du, && (1.11)\\
r_\epsilon^{3}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u=0\}}du, && (1.12)\\
I_\epsilon^{4,1}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{u}\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du, && (1.13)\\
I_\epsilon^{4,2}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{u}\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}du, && (1.14)\\
r_\epsilon^{4}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{u}\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}=0\}}du. && (1.15)
\end{aligned}$$

Remarquons qu'on ne peut plus décomposer davantage les termes.

Les résultats de convergence obtenus sont les suivants.

– Si X est un mouvement brownien standard, alors $I_\epsilon^{3,i}(t), I_\epsilon^{4,i}(t), i = 1, 2$ convergent au sens ucp vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$. On a de plus une estimation de la vitesse de convergence de $I_\epsilon^{4,i}(t)$ dans $L^2(\Omega)$ (c.f. Théorème 3.3.1 du Chapitre 3).
– Si X est une martingale de la forme $X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$ où σ est une fonction vérifiant certaines propriétés, alors $I_\epsilon^{3,i}(t), I_\epsilon^{4,i}(t), i = 1, 2$, convergent au sens ucp vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ (c.f. Théorème 4.1.1 du Chapitre 4).

1.3 Résultats préliminaires

Commençons par une extension du théorème de Fubini au cas des intégrales stochastiques. Il est crucial dans la plupart des preuves. Il permet d'exprimer certaines intégrales de Lebesgue sous la forme d'intégrales stochastiques par rapport à des martingales. Ainsi, on pourra obtenir leur convergence (ucp) via l'inégalité de Doob.

Lemme 1.3.1 *Soit $(H(u,s), s \in \mathbb{R}, u \geqslant 0)$ une collection de processus prévisibles, mesurables par rapport à (u,s,ω). Si une de ces hypothèses est vérifiée :*

i. *$(X_s)_{s\geqslant 0}$ est une semi-martingale continue et $(H(u,s))_{s,u\geqslant 0}$ est uniformément borné,*

ii. *$(X_s)_{s\geqslant 0}$ est une martingale continue de la forme $X_t = \int_0^t \sigma(s)dB_s$, avec σ un processus adapté borné, et $\int_0^t\int_0^t E(H(u,s)^2)dsdu < \infty$,*

alors, presque sûrement,

$$\int_0^t\left[\int_0^t H(u,s)dX_s\right]du = \int_0^t\left[\int_0^t H(u,s)du\right]dX_s, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Preuve. Le cas $i)$ est directement extrait de la Section IV.5 de [19]. On montre le Lemme 1.3.1 dans le cas $ii)$. Il parait naturel de se ramener à un processus uniformément borné afin de pouvoir appliquer le point $i)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $H^n = \mathbb{1}_{\{|H|<n\}}H$. H^n est bien un processus mesurable uniformément borné, et X est une martingale, donc on est dans le cas $i)$. On a donc presque sûrement

$$\int_0^t\left(\int_0^t H^n(u,s)dX_s\right)du = \int_0^t\left(\int_0^t H^n(u,s)du\right)dX_s. \tag{1.16}$$

On veut maintenant faire tendre n vers l'infini pour revenir à H.
Montrons d'abord que $\int_0^t \left(\int_0^t H^n(u,s)dX_s\right)du$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $\int_0^t \left(\int_0^t H(u,s)dX_s\right)du$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on écrit

$$E\left(\int_0^t \left(\int_0^t \left[H^n(u,s) - H(u,s)\right]dX_s\right)du\right)^2 \leqslant E\left(t\int_0^t \left(\int_0^t \left[H^n(u,s) - H(u,s)\right]dX_s\right)^2 du\right).$$

Puis on a

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t \left(\int_0^t \left[H^n(u,s) - H(u,s)\right]dX_s\right)du\right)^2 &\leqslant t\int_0^t E\left(\int_0^t \left[H^n(u,s) - H(u,s)\right]dX_s\right)^2 du, \\ &\leqslant t\int_0^t E\left(\int_0^t (H^n(u,s) - H(u,s))^2\sigma(s)^2 ds\right)du, \\ &\leqslant t\int_0^t \left(\int_0^t E\left[(H^n(u,s) - H(u,s))\sigma(s)^2\right]^2 ds\right)du. \end{aligned}$$

$(H^n(u,s) - H(u,s))^2\sigma(s)^2$ converge presque sûrement vers 0. σ est continue sur $[0,t]$, elle est borné par un réel b, donc

$$(H^n(u,s) - H(u,s))^2\sigma(s)^2 \leqslant 2b^2H^2(u,s).$$

Comme $H^2(u,s)$ est intégrable par rapport à $dP \otimes ds \otimes du$ d'après l'hypothèse ii), on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^t \int_0^t E\left(H^n(u,s) - H(u,s)\right)^2 \sigma(s)^2 ds du = 0.$$

Donc $\int_0^t \left[\int_0^t H^n(u,s)dX_s\right]du$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $\int_0^t \left[\int_0^t H(u,s)dX_s\right]du$.
On procède de la même manière pour l'autre limite :

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t \left(\int_0^t [H^n(u,s) - H(u,s)]du\right)dX_s\right)^2 &= E\left(\int_0^t \left(\int_0^t [H^n(u,s) - H(u,s)]du\right)^2 \sigma(s)^2 ds\right), \\ &\leqslant E\left(\int_0^t t\int_0^t \sigma(s)^2\left(H^n(u,s) - H(u,s)\right)^2 duds\right), \\ &\leqslant \int_0^t t\int_0^t E\left[\sigma(s)(H^n(u,s) - H(u,s))\right]^2 duds. \end{aligned}$$

Comme précédement,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_0^t \sigma(s)E\left[\sigma(s)(H^n(u,s) - H(u,s))\right]^2 duds = 0,$$

donc on a bien la convergence dans L^2 de $\int_0^t \left[\int_0^t H^n(u,s)du\right]dX_s$ vers $\int_0^t \left[\int_0^t H(u,s)du\right]dX_s$.
Finalement, on déduit de (1.16) l'égalité suivante par passage à la limite :

$$\int_0^t \left(\int_0^t H(u,s)dX_s\right)du = \int_0^t \left(\int_0^t H(u,s)du\right)dX_s.$$

■

Ensuite, on rappelle les propriétés de Hölder du mouvement Brownien et de son temps local

Lemme 1.3.2 *Soient $T > 0, \delta \in]0, \frac{1}{2}[$ et X le mouvement Brownien standard.*

i) Presque sûrement, X est Höldérien d'ordre δ : il existe une constante aléatoire positive $C_\delta \in L^2(\Omega)$ telle que, presque sûrement,

$$\forall y, y' \in [0, 2T], \quad |X_y - X_{y'}| \leqslant C_\delta |y - y'|^\delta.$$

ii) Presque sûrement, $a \to L_t^a(X)$ est Hölderien d'ordre δ uniformément en $t \in [0, T]$: il existe K_δ constante aléatoire positive finie telle que, p.s,

$$\forall t \in [0, T], \forall a, a' \in \mathbb{R}, \quad |L_t^a(X) - L_t^{a'}(X)| \leqslant K_\delta |a - a'|^\delta.$$

A partir de maintenant, dès que $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ et T sont donnés, les constantes K_δ, C_δ sont considérées comme fixées.

Nous aurons souvent besoin d'ajuster les bornes des intégrales que nous étudierons pour faire les calculs. Le lemme suivant a pour objectif de montrer que ces ajustements ne changent pas la limite finale.

Lemme 1.3.3 *Soient $T > 0$, X un processus continu et $a, b, c, d : [0, 1] \times [0, T + 1] \to \mathbb{R}$, tels que :*

$$\forall (\epsilon, t) \in [0, 1] \times [0, T + 1] \qquad 0 \leqslant b(\epsilon, t) - a(\epsilon, t) \leqslant \epsilon, \tag{1.17}$$

$$\forall s \in [a(\epsilon, t), b(\epsilon, t)] \qquad |c(\epsilon, s) - d(\epsilon, s)| \leqslant \epsilon. \tag{1.18}$$

Pour tout $s \in [a(\epsilon, t), b(\epsilon, t)]$, on note A_s un événement. Alors

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{a(\epsilon,t)}^{b(\epsilon,t)} (X_{c(\epsilon,s)} - X_{d(\epsilon,s)}) \mathbb{1}_{A_s} ds = 0,$$

presque sûrement, uniformément en $t \in [0, T]$.
De plus, si X est le mouvement brownien standard, pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ fixé, on presque sûrement

$$\sup_{t \in [0,T]} \left| \frac{1}{\epsilon} \int_{a(\epsilon,t)}^{b(\epsilon,t)} (X_{c(\epsilon,s)} - X_{d(\epsilon,s)}) \mathbb{1}_{A_s} ds \right| \leqslant C_\delta \epsilon^\delta.$$

Preuve. On note

$$\Delta(t, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \int_{a(\epsilon,t)}^{b(\epsilon,t)} (X_{c(\epsilon,s)} - X_{d(\epsilon,s)}) \mathbb{1}_{A_s} ds.$$

Alors

$$|\Delta(t, \epsilon)| \leqslant \frac{1}{\epsilon} \int_{a(\epsilon,t)}^{b(\epsilon,t)} \left| X_{c(\epsilon,s)} - X_{d(\epsilon,s)} \right| ds.$$

Presque sûrement, $s \to X_s$ est continue sur $[0, T + 1]$ donc uniformément continue. Soit $\delta > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t, t' \in [0, T + 1]$, si $|t - t'| \leqslant \alpha$, alors on a $|X_t - X_{t'}| \leqslant \delta$.

Pour tout ϵ tel que $0 < \epsilon \leqslant \alpha$, d'après (1.18), on a $\left| X_{c(\epsilon,s)} - X_{d(\epsilon,s)} \right| \leqslant \delta$. Donc

$$\forall t \in [0, T] \quad |\Delta(t, \epsilon)| \leqslant \frac{b(\epsilon, t) - a(\epsilon, t)}{\epsilon} \delta \leqslant \delta.$$

δ pouvant être choisi aussi petit qu'on veut, on a convergence de $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\Delta(t, \epsilon)|$ vers 0.

Si X est le mouvement brownien standard, pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ fixé, par la propriété de Hölder 1.3.2, on a $|X_y - X_{y'}| \leqslant C_\delta |y - y'|^\delta$. Donc

$$\begin{aligned}
|\Delta(t,\epsilon)| &\leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_{a(\epsilon,t)}^{b(\epsilon,t)} C_\delta \left|c(\epsilon,s) - d(\epsilon,s)\right|^\delta ds,\\
&\leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_{a(\epsilon,t)}^{b(\epsilon,t)} C_\delta \epsilon^\delta ds,\\
&\leqslant C_\delta \epsilon^\delta \frac{b(\epsilon,t) - a(\epsilon,t)}{\epsilon},\\
&\leqslant C_\delta \epsilon^\delta.
\end{aligned}$$

Ce qui montre la deuxième partie du lemme. ■

Chapitre 2

Temps local des semi-martingales

Dans ce chapitre, X est une semi-martingale continue. Parmi les semi-martingales, on s'intéresse en particulier à la classe des diffusions stables par retournement du temps. Ce type de diffusion a été étudiée dans [17] et [15]. Nous considérons la généralisation faite dans la Section 5 de [25].

Soit X une diffusion qui vérifie :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds, \tag{2.1}$$

et les conditions suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \forall t \in [0,T], X_t \text{ a une densité } p(t,x) \text{ par rapport à la mesure de Lebesgue,} \\ \sigma, b \text{ sont conjointement continus,} \\ \sigma^2(s,.) \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R}), b(s,.) \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}), xp(s,.) \in W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}), \\ p\sigma^2(s,.) \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}) \text{ pour presque tout } s \in [0,T], \\ \frac{\partial p\sigma^2}{\partial x}, \frac{\partial^2 xp}{\partial x^2} \in L^1([0,t] \times \mathbb{R}), t \in]0,T]. \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Pour $T > 0$ fixé, on pose $\widetilde{X}_u = X_{T-u}, \quad u \in [\ 0, T]$.

Alors, par le Théorème 5.1 de [25], $(\widetilde{X}_u)_{u \in [\ 0,T]}$ est une diffusion qui vérifie l'équation suivante :

$$\widetilde{X}_u = X_T + \int_0^u \sigma(T-s, \widetilde{X}_s)d\beta_s + \int_0^u \tilde{b}(T-s, \widetilde{X}_s)ds, \tag{2.3}$$

où β est un mouvement brownien sur un espace pouvant être élargi et $\tilde{b}(s,x) = -b(s,x) + \left(\frac{\frac{\partial(\sigma^2 p)}{\partial x}}{p}\right)(s,x)$, si on pose $(\frac{1}{p})(s,x) = 0$ si $p(s,x) = 0$.

Dans ce cadre, on obtient deux résultats de convergence vers le temps local : la convergence de $J_\epsilon(t,x)$ dans la Section 2.1 et la convergence de $I^3_\epsilon(t), I^4_\epsilon(t)$ dans la Section 2.2.

2.1 Convergence de $J_\epsilon(t,x)$ via la convergence de $I^1_\epsilon(t)$ et $I^2_\epsilon(t)$

2.1.1 Résultats de convergence

Théorème 2.1.1 *Soit X une diffusion qui vérifie (2.1)-(2.2). Alors,*

$$\lim_{\epsilon\to 0} (ucp)\ J_\epsilon(t,x) = L^x_t(X), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cette convergence a lieu quand x est fixé. Nous n'avons pas réussi à montrer que la convergence est uniforme par rapport à x dans un compact.

Pour simplifier, on prend $x = 0$ et $J_\epsilon(t) = J_\epsilon(t,0)$. Pour montrer ce résultat, on utilise la décomposition (1.2), c'est à dire $J_\epsilon(t) = -I^1_\epsilon(t) + I^2_\epsilon(t)$, avec

$$I^1_\epsilon(t) = \int_0^t \frac{X_{s+\epsilon} - X_s}{\epsilon} 1\!\!1_{\{0<X_s\}} ds, \quad I^2_\epsilon(t) = \int_0^t \frac{X_{s+\epsilon} - X_s}{\epsilon} 1\!\!1_{\{0<X_{s+\epsilon}\}} ds.$$

On étudie séparément la convergence de $I^1_\epsilon(t)$ et de $I^2_\epsilon(t)$ quand $\epsilon \to 0$.

Notre premier résultat concerne $I^1_\epsilon(t)$ (c.f la Section 2.1.2 pour la preuve).

Proposition 2.1.2 *Soit $X = M + V$ une semi-martingale continue, avec M une martingale locale continue et V un processus adapté continu à variation bornée. On suppose de plus que dV et $d < M >$ sont absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors,*

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\ I^1_\epsilon(t) = \int_0^t 1\!\!1_{\{0<X_s\}} dX_s.$$

Plus généralement, si Y est un processus adapté, alors

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp) \int_0^t \frac{X_{s+\epsilon} - X_s}{\epsilon} 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds = \int_0^t 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} dX_s.$$

Remarque : si X est une diffusion qui satisfait (2.1)-(2.2), alors la Proposition 2.1.2 s'applique et $I^1_\epsilon(t)$ converge (ucp) vers $\int_0^t 1\!\!1_{\{0<X_s\}} dX_s$ quand $\epsilon \to 0$.

Si on définit $\widetilde{X}$ comme le retourné temporel de X, l'étude de $I^2_\epsilon(t)$ pour X est équivalente à celle de $I^1_\epsilon(t)$ pour $\widetilde{X}$. Mais il faut que $\widetilde{X}$ soit une semi-martingale pour pouvoir appliquer la Proposition 2.1.2. Ce qui explique pourquoi nous nous sommes intéressés aux diffusions réversibles.

Proposition 2.1.3 *Si X est une diffusion qui satisfait (2.1)-(2.2), alors*

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\ I^2_\epsilon(t) = X^+_t - X^+_0 + \frac{1}{2} L^0_t(X).$$

La preuve de ce résultat est donné dans la Section 2.1.3.

Si X est une diffusion qui satisfait (2.1)-(2.2), alors $I^1_\epsilon(t)$ et $I^2_\epsilon(t)$ convergent quand $\epsilon \to 0$, et on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\ J_\epsilon(t) = -\int_0^t 1\!\!1_{\{0<X_s\}} dX_s + X^+_t - X^+_0 + \frac{1}{2} L^0_t(X).$$

La formule de Tanaka $X^+_t = X^+_0 + \int_0^t 1\!\!1_{\{0<X_s\}} dX_s + \frac{1}{2} L^0_t(X)$ donne alors le Théorème 2.1.1.

2.1.2 Preuve de la Proposition 2.1.2

Soit X une semi-martingale continue de décomposition $X = M+V$ telle que $dV, d < M >$ sont absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue. On se place dans le cas général en étudiant

$$I_\epsilon^0(t) = \int_0^t \frac{X_{s+\epsilon} - X_s}{\epsilon} 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds.$$

$I_\epsilon^1(t)$ est le cas particulier où $Y = X$.

L'idée de la preuve est d'écrire $I_\epsilon^0(t)$ comme la somme d'une semi-martingale et d'un terme de reste. Pour des raisons d'adaptation, on commence par exprimer $I_\epsilon^0(t)$ en fonction de $X_{(s+\epsilon)\wedge t}$ au lieu de $X_{s+\epsilon}$.

$$I_\epsilon^0(t) - \int_0^t 1\!\!1_{\{0<X_s\}} dX_s = \widetilde{I}_\epsilon^1(t) + \widehat{I}_\epsilon^1(t) + \Delta_1(t,\epsilon), \tag{2.4}$$

avec

$$\widetilde{I}_\epsilon^1(t) = \int_0^t \frac{1}{\epsilon}(M_{(s+\epsilon)\wedge t} - M_s) 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds - \int_0^t 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} dM_s \tag{2.5}$$

$$\widehat{I}_\epsilon^1(t) = \int_0^t \frac{1}{\epsilon}(V_{(s+\epsilon)\wedge t} - V_s) 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds - \int_0^t 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} dV_s, \tag{2.6}$$

$$\Delta_1(t,\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_{s+\epsilon} - X_t)\, 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds. \tag{2.7}$$

Par le Lemme 1.3.3, $\Delta_1(t,\epsilon)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément sur les compacts.

a) On commence par montrer que $\widehat{I}_\epsilon^1(t)$ converge presque sûrement vers 0. L'idée est d'écrire $\widehat{I}_\epsilon^1(t)$ comme une intégrale par rapport à dV :

$$\widehat{I}_\epsilon^1(t) = \int_0^t \frac{1}{\epsilon} \left(\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} dV_u \right) ds - \int_0^t 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} dV_s.$$

En appliquant le théorème de Fubini, on obtient

$$\widehat{I}_\epsilon^1(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(u-\epsilon)^+}^u 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds - 1\!\!1_{\{0<Y_u\}} \right) dV_u.$$

Donc

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |\widehat{I}_\epsilon^1(t)| \leqslant \int_0^T \left| \frac{1}{\epsilon} \int_{(u-\epsilon)^+}^u 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds - 1\!\!1_{\{0<Y_u\}} \right| d|V|_u.$$

On remarque que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_{(u-\epsilon)^+}^u 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds - 1\!\!1_{\{0<Y_u\}} = 0, \quad (du) \text{ presque partout} \tag{2.8}$$

Comme $\frac{1}{\epsilon}\int_{(u-\epsilon)^+}^u 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds$ est borné par 1, et que $d|V|_s$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, par le théorème de convergence dominée, $\widehat{I}_\epsilon^1(t)$ tend vers 0, uniformément pour $t \in [0,T]$, quand $\epsilon \to 0$.

b) Puis on montre que $\sup_{t\in[0,T]} \widetilde{I}_\epsilon^1(t)$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$. En particulier, on va montrer que $\widetilde{I}_\epsilon^1(t)$ est une intégrale stochastique.

Comme $M_{(s+\epsilon)\wedge t} - M_s = \int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} dM_u$ et $1\!\!1_{\{0<Y_s\}}$ est adapté, on a

$$\widetilde{I}_\epsilon^1(t) = \int_0^t \frac{1}{\epsilon} \left(\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} dM_u \right) ds - \int_0^t 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} dM_s.$$

En appliquant le théorème de Fubini stochastique 1.3.1, on obtient

$$\widetilde{I}_\epsilon^1(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(u-\epsilon)^+}^u 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds - 1\!\!1_{\{0<Y_u\}} \right) dM_u.$$

Ainsi, $\widetilde{I}_\epsilon^1(t)$ est une martingale locale.

Supposons que $< M >_T$ est borné. Il est clair que

$$< \widetilde{I}_\epsilon^1 >_t = \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(u-\epsilon)^+}^u 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds - 1\!\!1_{\{0<Y_u\}} \right)^2 d < M >_u \leqslant \int_0^T 4d < M >_u = 4 < M >_T .$$

Donc $(\widetilde{I}_\epsilon^1)_{t\in[0,T]}$ est une martingale bornée dans $L^2(\Omega)$. On peut donc appliquer l'inégalité de Doob :

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T} (\widetilde{I}_\epsilon^1(t))^2 \right) &\leqslant 4E\left(\left(\widetilde{I}_\epsilon^1(T) \right)^2 \right), \\ &\leqslant 4E\left[\int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(u-\epsilon)^+}^u 1\!\!1_{\{0<Y_s\}} ds - 1\!\!1_{\{0<Y_u\}} \right)^2 d < M >_u \right]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

D'après (2.8) et par les mêmes arguments que dans **a)** ci-dessus, on en déduit que $E\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\widetilde{I}_\epsilon^1(t))^2\right)$ tend vers 0 quand $\epsilon \to 0$. Ce qui implique que $\lim_{\epsilon\to 0} (ucp)\, \widetilde{I}_\epsilon^1(t) = 0$.

Comme $< M >_T$ n'est pas nécessairement bornée, on introduit la suite de temps d'arrêt suivante :

$$T_n = \inf\{t \geqslant 0, < M >_t \geqslant n\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. Comme M^{T^n} est une martingale locale telle que $< M^{T^n} >_t = < M >_{t\wedge T_n} \leqslant n$, alors $\forall n \geqslant 0, \widetilde{I}_\epsilon^1(t\wedge T_n)$ converge (ucp) vers 0 quand $\epsilon \to 0$. T_n étant une suite de temps d'arrêt croissante convergeant vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$, on en déduit que $\lim_{\epsilon\to 0}$ (ucp) $\widetilde{I}_\epsilon^1(t) = 0$. ■

2.1.3 Preuve de la Proposition 2.1.3

Soit $T \geqslant t \geqslant 0$. On ne peut pas employer directement la Proposition 2.1.2, ni même le théorème de Fubini stochastique, car le processus $(1\!\!1_{\{0<X_{s+\epsilon}\}})_{s\geqslant 0}$ n'est pas $(\mathcal{F}_s)_{s\geqslant 0}$-adapté. On va donc utiliser un retournement du temps. En gros, retourner le temps permet de se ramener de $I_\epsilon^2(t)$ à $I_\epsilon^1(t)$ pour un processus retourné.

On commence par faire le changement de variable $u = T - s - \epsilon$.

$$I_\epsilon^2(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{T-t-\epsilon}^{T-\epsilon} (X_{T-u} - X_{T-u-\epsilon}) 1\!\!1_{\{0<X_{T-u}\}} du.$$

Puis on décompose $I_\epsilon^2(t)$ sous la forme :

$$I_\epsilon^2(t) = \widetilde{I}_\epsilon^2(t) + \Delta_2(\epsilon, t), \tag{2.10}$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_\epsilon^2(t) &= 1\!\!1_{\{\epsilon\leqslant t\}} \frac{1}{\epsilon} \int_{T-t}^{T-\epsilon} (X_{T-u} - X_{T-u-\epsilon}) 1\!\!1_{\{0<X_{T-u}\}} du, \\ \Delta_1(\epsilon, t) &= \frac{1}{\epsilon} \int_{T-t-\epsilon}^{T-(t\vee\epsilon)} (X_{T-u} - X_{T-u-\epsilon}) 1\!\!1_{\{0<X_{T-u}\}} du, \end{aligned}$$

Daprès le Lemme 1.3.3, $\lim_{\epsilon\to 0}\Delta_1(\epsilon,t)=0$ presque sûrement uniformément en $t\in[0,T]$. Il reste à montrer que $\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\widetilde{I}^2_\epsilon(t)=X_t^+-X_0^++\frac{1}{2}L_t^0(X)$.

On note $\widetilde{X}_u=X_{T-u},\quad u\in[\,0,T]$. $(\widetilde{X}_t)_{t\in[\,0,T]}$ est une diffusion vérifiant l'équation suivante

$$\widetilde{X}_t=X_T+\int_0^t\sigma(T-s,\widetilde{X}_s)d\beta_s+\int_0^t\tilde{b}(T-s,\widetilde{X}_s)ds.$$

En particulier, $<\widetilde{X}>_t=\int_0^t\sigma^2(T-s,\widetilde{X}_s)ds$. On a alors

$$\widetilde{I}^2_\epsilon(t)=-\mathbb{1}_{\{\epsilon\leqslant t\}}\frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T-\epsilon}(\widetilde{X}_{u+\epsilon}-\widetilde{X}_u)\mathbb{1}_{\{0<\widetilde{X}_u\}}du.$$

On peut donc appliquer la Proposition 2.1.2 :

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\,\widetilde{I}^2_\epsilon(t)=-\int_{T-t}^{T}\mathbb{1}_{\{0<\widetilde{X}_u\}}d\widetilde{X}_u.$$

On exprime cette limite en fonction du temps local. D'après la formule de Tanaka, on a presque sûrement,

$$\widetilde{X}_T^+-\widetilde{X}_{T-t}^+=\int_{T-t}^{T}\mathbb{1}_{\{0<\widetilde{X}_u\}}d\widetilde{X}_u+\frac{1}{2}(L_T^0(\widetilde{X})-L_{T-t}^0(\widetilde{X})).$$

Comme $\widetilde{X}_T=X_0$ et $\widetilde{X}_{T-t}=X_t$, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\,\widetilde{I}^2_\epsilon(t)=X_t^+-X_0^++\frac{1}{2}(\widetilde{L}_T^0(X)-\widetilde{L}_{T-t}^0(X)).$$

La dernière étape est d'écrire $(L_t^0(\widetilde{X}))_{t\in[0,T]}$ via $(L_t^0(X))_{t\in[0,T]}$. D'après la Proposition 1.1.13 appliquée à $L(\widetilde{X})$:

$$L_T^0(\widetilde{X})-L_{T-t}^0(\widetilde{X})=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\int_{T-t}^{T}\mathbb{1}_{\{0<\widetilde{X}_u<\alpha\}}d<\widetilde{X}>_u.$$

Comme $<\widetilde{X}>_u=\int_0^u\sigma^2(T-s,\widetilde{X}_s)ds$, on a

$$L_T^0(\widetilde{X})-L_{T-t}^0(\widetilde{X})=\lim_{\alpha\to 0}\int_{T-t}^{T}\mathbb{1}_{\{0<X_{T-u}<\alpha\}}\sigma^2(T-u,X_{T-u})du.$$

Le changement de variable $s=T_u$ donne

$$L_T^0(\widetilde{X})-L_{T-t}^0(\widetilde{X})=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^t\mathbb{1}_{\{0<X_s<\alpha\}}\sigma^2(s,X_s)ds=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^t\mathbb{1}_{\{0<X_s<\alpha\}}d<X>_s.$$

Ainsi, par la Proposition 1.1.13 ,

$$L_T^0(\widetilde{X})-L_{T-t}^0(\widetilde{X})=L_t^0(X).\tag{2.11}$$

Finalement $\widetilde{I}^2_\epsilon(t)$ converge au sens (ucp) vers $X_t^+-X_0^++\frac{1}{2}L_t^0(X)$ quand $\epsilon\to 0$. ∎

2.2 Convergence de $I_\epsilon^3(t)$ et $I_\epsilon^4(t)$

2.2.1 Résultats de convergence

On rappelle qu'on a décomposé $J_\epsilon(t)$ dans la Section 1.2.2 sous la forme $J_\epsilon(t) = I_\epsilon^3(t) + I_\epsilon^4(t) + R_\epsilon(t)$, avec

$$\begin{aligned}
I_\epsilon^3(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} du, \\
I_\epsilon^4(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_u \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} > 0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} \leqslant 0\}} du \\
R_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(\mathbb{1}_{\{0 < X_{u+\epsilon}\}} - \mathbb{1}_{\{0 < X_u\}}\right)(X_{u+\epsilon} - X_u)\, du \\
&\quad -\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(\mathbb{1}_{\{0 < X_t\}} - \mathbb{1}_{\{0 < X_u\}}\right)(X_t - X_u)\, du, \quad t \geqslant 0.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.3.3, $R_\epsilon(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément sur les compacts, donc on ne s'intéresse qu'à la convergence de $I_\epsilon^3(t)$ et $I_\epsilon^4(t)$.

Théorème 2.2.1 *Si X est une semi-martingale continue, alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \text{ (ucp) } I_\epsilon^3(t) = \frac{1}{2} L_t^0(X).$$

Théorème 2.2.2 *Si X est une diffusion qui vérifie (2.1)-(2.2), alors*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \text{ (ucp) } I_\epsilon^4(t) = \frac{1}{2} L_t^0(X).$$

2.2.2 Preuve du Théorème 2.2.1

Soit $X = M + V$ une semi-martingale continue. En raisonnant par arrêt (c.f. la preuve de la Proposition 2.1.2), on peut considérer que $M, < M >$ et la variation totale de V sont des processus bornés.

1. D'après la formule de Tanaka

$$X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} = X^+_u + \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} dX_s + \frac{1}{2}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X)).$$

En remplaçant dans $\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} du$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \Bigg[X^+_u \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} + \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} dX_s \\
&\quad + \frac{1}{2}(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X)) \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}}\Bigg] du.
\end{aligned}$$

Le premier terme de la somme $X^+_u \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}}$ est nul. Dans le deuxième terme, $(\mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}})_{u \geqslant 0}$ est un processus adapté, donc on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} dX_s\right) du \\
&\quad + \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X)) \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du.
\end{aligned}$$

On applique exactement le même procédé pour l'intégrale contenant X^-. En additionnant les deux termes, les intégrales contenant le temps local se regroupent et on a alors

$$\begin{aligned} I_\epsilon^3(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dX_s \right) du \\ &-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0, X_u>0\}} dX_s \right) du \\ &+\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du. \end{aligned}$$

Les deux premières lignes convergeant vers 0 (voir les points **3.** et **4.**), la limite de $I_\epsilon^3(t)$ est donnée par la limite de la troisième ligne (voir le point **2.**)

2. Étude de $\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du$. On commence par écrire $(L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))$ comme une intégrale de Stieljes par rapport à $dL^0_\cdot(X)$.

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du = \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} dL^0_s(X) \right) du.$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du &= \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s du \right) dL^0_s(X), \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{s\wedge\epsilon}{\epsilon} dL^0_s(X). \end{aligned}$$

En remarquant que $L^0_t(X) = \int_0^t dL^0_s(X)$, il vient

$$\left| \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du - \frac{1}{2}L^0_t(X) \right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T \left| \frac{s\wedge\epsilon}{\epsilon} - 1 \right| dL^0_s(X), \quad \forall t \in [0,T].$$

Comme $\frac{s\wedge\epsilon}{\epsilon} - 1$ est borné par 2 et qu'il tend vers 0 pour tout $s \in]0,T]$, le théorème de convergence dominée donne directement

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))du - \frac{1}{2}L^0_t(X) = 0,$$

presque sûrement uniformément sur $[0,T]$.

3. Étude de $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dX_s \right) du$. On a d'une manière évidente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dX_s \right) du &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dV_s \right) du \\ &+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dM_s \right) du. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, comme V est à variation bornée, on peut appliquer la même méthode que pour le point **2** ci-dessus. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s>0, X_u\leqslant 0\}} dV_s \right) du \right| &= \left| \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}} du \right) dV_s \right|, \\ &\leqslant \int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s>0\}} \left| \frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}} du \right| d|V|_s. \end{aligned}$$

Soit $s \in [0,T]$ tel que $X_s > 0$. Comme $t \to X_t$ est continu, $\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du = 0$ dès que ϵ est assez petit. En remarquant que $\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du\right|$ est borné par 1, le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s > 0, X_u \leqslant 0\}} dV_s \right) du = 0,$$

presque sûrement, uniformément pour $t \in [0,T]$.

Il reste à montrer que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \ (\text{ucp}) \ \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s > 0, X_u \leqslant 0\}} dM_s \right) du = 0. \tag{2.12}$$

On utilise le même raisonnement que pour l'intégrale en dV_s, puisque nous avons une version stochastique du théorème de Fubini. Plus précisément, comme $(\frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{u \leqslant s \leqslant (u+\epsilon)\wedge t\}} \mathbb{1}_{\{X_s > 0, X_u \leqslant 0\}})_{s,u \geqslant 0}$ est mesurable et uniformément borné, le lemme 1.3.1 s'applique :

$$\frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s > 0, X_u \leqslant 0\}} dM_s \right) du = \int_0^t g(\epsilon, s) dM_s,$$

avec

$$g(\epsilon, s) = \mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} \frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^{s} \mathbb{1}_{\{X_u \leqslant 0\}} du.$$

Par l'inégalité de Doob :

$$E\left(\sup_{t \in [0,T]} \left(\int_0^t g(\epsilon,s) dM_s \right)^2 \right) \leqslant 4E\left(\int_0^T |g(\epsilon,s)|^2 d < M >_s \right).$$

Comme précédemment, $g(\epsilon, s) = 0$ dès que ϵ est assez petit et il est borné par 1. Donc par le théorème de convergence dominée, $E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^t g(\epsilon,s) dM_s\right)^2\right)$ converge vers 0 quand $\epsilon \to 0$.

4. Étude de $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dX_s\right) du$

Même si $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dX_s\right) du$ ressemble beaucoup à $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s > 0, X_u \leqslant 0\}} dX_s\right) du$, la différence entre les inégalités larges et strictes nous a obligé à l'étudier séparément. De la même manière que dans le point **3**, on écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dX_s \right) du \quad &= \quad \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dV_s \right) du \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dM_s \right) du. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, on a

$$\left| \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dV_s \right) du \right| \leqslant \int_0^T \mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} \left| \frac{1}{\epsilon} \int_u^{(u+\epsilon)} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0\}} dV_s \right| du, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Soit$u \in [0,T]$ tel que $X_u > 0$. Par continuité de X, $\frac{1}{\epsilon}\int_u^{(u+\epsilon)} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0\}} dV_s = 0$ dès que ϵ est assez petit. De plus, ce terme est borné par la variation totale de V. Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s \leqslant 0, X_u > 0\}} dV_s \right) du = 0,$$

presque sûrement, uniformément pour $t \in [0,T]$.

Pour le second terme, on procède comme au point **3**. Le théorème de Fubini stochastique donne :

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0, X_u>0\}} dM_s\right) du = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}} \tilde{g}(\epsilon,s) dM_s,$$

avec

$$\tilde{g}(\epsilon,s) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s} \mathbb{1}_{\{X_u>0\}} du.$$

Par l'inégalité de Doob, il vient :

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}}\tilde{g}(\epsilon,s)dM_s\right)^2\right) \leqslant 4E\left(\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}}|\tilde{g}(\epsilon,s)|^2 d<M>_s\right).$$

Il reste à montrer que $E\left(\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}}|\tilde{g}(\epsilon,s)|^2 d<M>_s\right)$ tend vers 0 quand $\epsilon \to 0$. Ce terme se décompose comme une somme de deux termes :

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T |\tilde{g}(\epsilon,s)|^2 d<M>_s\right) &= E\left(\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s<0\}}|\tilde{g}(\epsilon,s)|^2 d<M>_s\right) \\ &\quad + E\left(\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s=0\}}|\tilde{g}(\epsilon,s)|^2 d<M>_s\right). \end{aligned}$$

Comme $X_s < 0$ dans le premier terme, $\tilde{g}(\epsilon,s) = 0$ dès que ϵ est assez petit et, par le théorème de convergence dominée, ce terme converge vers 0 quand $\epsilon \to 0$.

Comme $\tilde{g}(\epsilon,s) \leqslant 1$, le second terme peut être borné par $E\left(\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s=0\}} d<M>_s\right)$. Par la formule de densité d'occupation,

$$\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s=0\}} d<M>_s = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x=0\}} L_T^x dx = 0.$$

Donc $\sup_{t\in[0,T]} \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0, X_u>0\}} dM_s\right) du$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$ quand $\epsilon \to 0$. ■

Remarque : On ne peut pas montrer directement que chacune des deux intégrales composant $I_\epsilon^3(t)$ converge individuellement. En effet, sans la sommation des deux intégrales, les indicatrices apparaissant dans $\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))\mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}} du$ (resp. $\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t (L^0_{(u+\epsilon)\wedge t}(X) - L^0_u(X))\mathbb{1}_{\{X_u>0\}} du$) ne se simplifient pas.

Pour l'une des intégrales de $I_\epsilon^3(t)$, la formule de Tanaka nous ramène à $\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}} du\right) dL_s^0(X)$. Le terme $\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u\leqslant 0\}} du\right)$ converge bien vers $\mathbb{1}_{\{X_s\leqslant 0\}}$ presque sûrement par rapport à la mesure de Lebesgue. Mais $dL_s^0(X)$ étant une mesure singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, on ne peut pas utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure.

2.2.3 Preuve du théorème 2.2.2

Soit $T > 0$ et X une diffusion qui vérifie (2.1)-(2.2). L'idée principale de la preuve est de se ramener à $I_\epsilon^3(t)$ par retournement du temps. On commence par décomposer $I_\epsilon^4(t)$:

$$I_\epsilon^4(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t-\epsilon} X_u^- \mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}>0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^{t-\epsilon} X_u^+ \mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}\leqslant 0\}} du + R_\epsilon^{4,1}(t), \tag{2.13}$$

avec

$$R_\epsilon^{4,1}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t} X_u^- \mathbb{1}_{\{X_t>0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t} X_u^+ \mathbb{1}_{\{X_t\leqslant 0\}} du.$$

Comme $\frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t} X_u^- \mathbb{1}_{\{X_t>0\}} du = \frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t} (X_u^- - X_t^-)\mathbb{1}_{\{X_t>0\}} du$, le Lemme 1.3.3 s'applique et le premier terme de $R_\epsilon^{4,1}(t)$ converge p.s. vers 0, uniformément sur $[0,T]$. D'une manière symétrique, en remplaçant X^- par X^+, le second terme de $R_\epsilon^{4,1}(t)$ converge aussi p.s. vers 0, uniformément sur $[0,T]$. Ainsi, $R_\epsilon^{4,1}(t)$ converge presque sûrement vers 0, quand $\epsilon \to 0$, uniformément sur $[0,T]$.

Il reste à transformer les deux autres termes de la décomposition de $I_\epsilon^4(t)$. On fait le changement de variable $s = T - u - \epsilon$

$$I_\epsilon^4(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T-\epsilon} X_{T-s-\epsilon}^- \mathbb{1}_{\{X_{T-s}>0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T-\epsilon} X_{T-s-\epsilon}^+ \mathbb{1}_{\{X_{T-s}\leqslant 0\}} du + R_\epsilon^{4,1}(t).$$

On pose $\widetilde{X}_u = X_{T-u}, \quad u \in [\,0,T]$. $(\widetilde{X}_u)_{u\in[\,0,T]}$ est une diffusion, donc une semimartingale, et il vient

$$\begin{aligned} I_\epsilon^4(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T-\epsilon} \widetilde{X}_{s+\epsilon}^- \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s>0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T-\epsilon} \widetilde{X}_{s+\epsilon}^+ \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s\leqslant 0\}} du + R_\epsilon^{4,1}(t), \\ &= \left[\frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T} \widetilde{X}_{(s+\epsilon)\wedge T}^- \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s>0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T} \widetilde{X}_{(s+\epsilon)\wedge T}^+ \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s\leqslant 0\}} du\right] + R_\epsilon^{4,1}(t) - R_\epsilon^{4,2}(t), \end{aligned}$$

avec

$$R_\epsilon^{4,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{T-\epsilon}^{T} \widetilde{X}_T^- \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s>0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_{T-\epsilon}^{T} \widetilde{X}_T^+ \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s\leqslant 0\}} du.$$

Comme $\widetilde{X}_s^- \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s>0\}} = 0$ et $\widetilde{X}_s^+ \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s\leqslant 0\}} = 0$, on a

$$R_\epsilon^{4,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{T-\epsilon}^{T} (\widetilde{X}_T^- - \widetilde{X}_s^-) \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s>0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_{T-\epsilon}^{T} (\widetilde{X}_T^+ - \widetilde{X}_s^+) \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s\leqslant 0\}} du.$$

Par le Lemme 1.3.3, $R_\epsilon^{4,2}(t)$ converge vers 0 presque sûrement, uniformément sur $[0,T]$.

Finalement, il reste à étudier

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T} \widetilde{X}_{(s+\epsilon)\wedge T}^- \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s>0\}} du + \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T} \widetilde{X}_{(s+\epsilon)\wedge T}^+ \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s\leqslant 0\}} du.$$

Ce terme est exactement $I_\epsilon^3(T) - I_\epsilon^3(T-t)$ pour $\widetilde{X}$. Comme $\widetilde{X}$ est une semi-martingale, le Théorème 2.2.1 s'applique :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \text{ (ucp) } I_\epsilon^4(t) = \frac{1}{2}(L_T^0(\widetilde{X}) - L_{T-t}^0(\widetilde{X})).$$

D'après (2.11), on a $L_T^0(\widetilde{X}) - L_{T-t}^0(\widetilde{X}) = L_t^0(X)$, ce qui termine la preuve. ■

Chapitre 3

Approximation du temps local du mouvement brownien

Dans cette section, X est le mouvement brownien standard, et on adoptera la convention $X_s = 0$ si $s < 0$. C'est une diffusion réversible vérifiant (2.1)-(2.2), donc les Théorèmes 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2.1 et 2.2.2 s'appliquent : $J_\epsilon(t), I^1_\epsilon(t), I^2_\epsilon(t), I^3_\epsilon(t)$ et $I^4_\epsilon(t))$ convergent au sens ucp.

Cependant, dans le cas du mouvement brownien, on peut montrer directement les résultats du Théorème 2.1.1, en utilisant uniquement les résultats associés au mouvement brownien (voir la Section 3.2). En outre, on montre la convergence de $I^{3,i}_\epsilon(t), I^{4,i}_\epsilon(t), i = 1, 2$ (voir la Section 3.3). Les propriétés gaussiennes du mouvement brownien permettent de plus d'avoir une estimation de la vitesse de convergence de $I^{4,i}_\epsilon(t)$ et $J_\epsilon(t)$ dans $L^2(\Omega)$, et d'en déduire un résultat de convergence presque sûre (voir Section 3.4).

Avant d'étudier $J_\epsilon(t)$, rappelons certains schémas d'approximation du temps local brownien qui sont déjà connus.

3.1 De nombreuses approximations

Dans le cas du mouvement brownien, il existe déjà de nombreuses formules d'approximation de son temps local. Dans le chapitre 1, la Proposition 1.1.13 fournit une première procédure d'approximation.

Commençons par les procédures d'approximation dues à Lévy, tirées de [11], [19] et [26]. Pour $\epsilon > 0$, on considère les suites de temps d'arrêts définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} \sigma_0 &= 0, \\ \tau_0 &= \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| = \epsilon\}. \end{cases}$$

Et pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} \sigma_n &= \inf\{t > \tau_{n-1} : X_t = 0\}, \\ \tau_n &= \inf\{t > \sigma_n : |X_t| = \epsilon\}. \end{cases}$$

Pour $t \geqslant 0$, on note $d_\epsilon(t) = \max\{n \geqslant 0 : \sigma_n < t\}$, le nombre de descentes de $|X|$ du niveau ϵ à 0, sur l'intervalle $[0, t]$.

Théorème 3.1.1 *$\epsilon d_\epsilon(t)$ converge presque sûrement et au sens ucp vers $\frac{1}{2}L_t^0(X)$, quand ϵ tend vers 0.*

Soit $Z = \{t \geqslant 0 : X_t = 0\}$, l'ensemble des zéros du mouvement brownien. On sait que Z^c est une réunion disjointe d'intervalles de $\mathbb{R}$, que l'on note $Z^c = \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Le mouvement brownien X restreint à un intervalle I_n est appelé une excursion. Pour tout $t \geqslant 0$, on définit le nombre de "grandes" excursions :

$$d'_\epsilon(t) = \#\{n \in \mathbb{N} : I_n \in [0,t], |I_n| > \epsilon\},$$

et la longueur totale des "petites" excursions avant l'instant t :

$$d''_\epsilon(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| 1\!\!1_{\{|I_n|<\epsilon\}},$$

où $|I_n|$ désigne la longueur de l'intervalle I_n.

Théorème 3.1.2 *Presque sûrement, $\sqrt{\epsilon} d'_\epsilon(t)$ et $\sqrt{\epsilon} d''_\epsilon(t)$ convergent vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}} L_t^0(X)$ quand ϵ tend vers 0.*

Une autre méthode est d'approcher le temps local à l'aide de séries, comme le montre ce résultat tiré de [1].

Théorème 3.1.3

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} 1\!\!1_{\{X_{\frac{i-1}{n}} X_{\frac{i}{n}} < 0\}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} L_t^0(X).$$

La convergence ayant lieu dans L^2 et au sens ucp.

Ce résultat a été généralisé par Jacod dans [12].

Théorème 3.1.4 *Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $h(x,y) \leqslant \hat{h}(x)e^{a|y|}$ avec $\hat{h} \in L^1$ et bornée. Soit u une suite positive telle que $u_n \to +\infty$ et $\frac{u_n}{n} \to 0$. Alors pour tout $t > 0$,*

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp) \frac{u_n}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} h\left(u_n X_{\frac{i-1}{n}}, \sqrt{n}\left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}\right)\right) = cL_t^0(X),$$

avec $c = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} dx$.

Avant de terminer cette section, nous énonçons un dernier résultat d'approximation du temps local tiré de [19].

Proposition 3.1.5 *Soit f une fonction intégrable. alors presque sûrement, pour tout $t > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^t f(nX_s)ds = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right) L_t^0(X),$$

et, pour tout $p \geqslant 1$, au sens L^p uniformément sur les compacts.

3.2 Convergence de $J_\epsilon(t)$ dans le cas brownien

3.2.1 Une preuve directe

On rappelle que $J_\epsilon(t) = I^1_\epsilon(t) + I^2_\epsilon(t)$, avec

$$\begin{aligned} J_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{0<X_{s+\epsilon}\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_s\}}\right)(X_{s+\epsilon} - X_s)\, ds, \\ I^1_\epsilon(t) &= \int_0^t \frac{X_{s+\epsilon} - X_s}{\epsilon} \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} ds, \\ I^2_\epsilon(t) &= \int_0^t \frac{X_{s+\epsilon} - X_s}{\epsilon} \mathbb{1}_{\{0<X_{s+\epsilon}\}} ds. \end{aligned}$$

ainsi que les résultat des Théorème 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.1 :

1. $\lim_{\epsilon\to 0}$ (ucp) $J_\epsilon(t) = [\mathbb{1}_{\{0<X_s\}}, X_s]_t = L^0_t$.
2. $\lim_{\epsilon\to 0}$ (ucp) $I^1_\epsilon(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} dX_s$.
3. $\lim_{\epsilon\to 0}$ (ucp) $I^2_\epsilon(t) = X_t^+ + \frac{1}{2} L^0_t$.

Preuve directe des Théorèmes 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.3. Par définition, $\lim_{\epsilon\to 0}$ (ucp)$J_\epsilon(t) = [\mathbb{1}_{\{0<X_s\}}, X_s]_t$, si la limite existe.

On considère $F : x \to x^+$ une primitive de $x \to \mathbb{1}_{\{0<x\}} \in L^2_{loc}$. Comme $F \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ et X est le mouvement brownien standard, le Théorème 4.1 de [22] s'applique :

$$F(X_t) = F(0) + \int_0^t f'(X_s) d^- X_s + \frac{1}{2}[F'(X), X]_t = F(0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}[F'(X), X]_t.$$

D'une part, on en déduit que

$$[\mathbb{1}_{\{0<X_s\}}, X_s]_t = 2\left(X_t^+ - X_0^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} dX_s\right),$$

et la formule de Tanaka donne alors le point (i).

D'autre part, on en déduit que $\int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} d^- X_s$ existe et est égale à l'intégrale stochastique $\int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} dX_s$, ce qui donne le point (ii). Comme $I^2_\epsilon(t) = J_\epsilon(t) - I^1_\epsilon(t)$, le point (iii) se déduit des deux précédents via la formule de Tanaka. ■

Remarque. Plus généralement, si $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une semi-martingale et (Y_t) un processus adapté tel que $t \to Y_t$ admet des limites à gauche, alors, d'après la Proposition 3.31 de [24],

$$\lim_{\epsilon\to 0} \text{ (ucp) } \frac{1}{\epsilon}\int_0^t Y_s (X_{s+\epsilon} - X_s)\, ds = \int_0^t Y_s dX_s.$$

Dans cette preuve, la convergence de $I^2_\epsilon(t)$ est déduite de celle de $I^1_\epsilon(t)$ et de $J_\epsilon(t)$. Mais on peut aussi montrer que $I^2_\epsilon(t)$ converge par retournement.

3.2.2 Convergence de $I^2_\epsilon(t)$ seul

Soit $T \geqslant t \geqslant 0$. Comme $\mathbb{1}_{\{0<X_{s+\epsilon}\}}$ n'est pas adapté, nous allons employer un argument de retournement du temps pour se ramener au cas adapté. Dans le cas brownien, on ne va pas utiliser le théorème des diffusions réversibles, mais les propriétés de retournement du mouvement brownien.

1. On fait le changement de variable $u = T - s - \epsilon$. Il vient :

$$I^2_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t-\epsilon}^{T-\epsilon}(X_{T-u} - X_{T-u-\epsilon})\mathbb{1}_{\{0<X_{T-u}\}}du.$$

$I^2_\epsilon(t)$ se décompose sous la forme :

$$I^2_\epsilon(t) = \widetilde{I}_\epsilon(t) + \Delta_1(\epsilon, t),$$

avec

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_\epsilon(t) &= \mathbb{1}_{\{\epsilon\leqslant t\}}\frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T-\epsilon}(X_{T-u} - X_{T-u-\epsilon})\mathbb{1}_{\{0<X_{T-u}\}}du,\\
\Delta_1(\epsilon, t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{T-t-\epsilon}^{T-(t\vee\epsilon)}(X_{T-u} - X_{T-u-\epsilon})\mathbb{1}_{\{0<X_{T-u}\}}du.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.3.3, $\lim_{\epsilon\to 0}\ \Delta_1(\epsilon, t) = 0$ presque sûrement, donc il suffit de montrer que $\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\widetilde{I}^2_\epsilon(t) = X^+_t + \frac{1}{2}L^0_t$.

Commençons par introduire le processus et la filtration du temps "retourné". On définit

$$\widetilde{X}_u = X_T - X_{T-u}, \quad u \in [\ 0, T],$$

et on note $(\mathcal{F}^{\widetilde{X}}_t)_{t\geqslant 0}$ sa filtration naturelle. Grossièrement, la trajectoire de $\widetilde{X}$ sur $[0, T]$ est l'image de celle de X par une rotation d'angle π.

Alors, $(\widetilde{X}_u)_{0\leqslant u\leqslant T}$ est un $\mathcal{F}^{\widetilde{X}}$-mouvement brownien standard sur $[0, T]$, issu de 0. On note $L(\widetilde{X})$ son temps local. On rappelle que $L(\widetilde{X})$ est un processus bicontinu et que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^t \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s=a\}}d\widetilde{X}_s = 0$.

Comme $X_{T-u} - X_{T-u-\epsilon} = \widetilde{X}_{u+\epsilon} - \widetilde{X}_u$, on peut écrire :

$$\widetilde{I}_\epsilon(t) = \mathbb{1}_{\{\epsilon\leqslant t\}}\frac{1}{\epsilon}\int_{T-t}^{T-\epsilon}(\widetilde{X}_{u+\epsilon} - \widetilde{X}_u)\mathbb{1}_{\{0<X_{T-u}\}}du.$$

Comme $X_{T-u} = X_T - \widetilde{X}_u$, $(\mathbb{1}_{\{0<X_{T-u}\}})_{u\in[0,T]}$ n'est pas $\mathcal{F}^{\widetilde{X}}$-adapté, on doit donc élargir la filtration pour rendre ce processus adapté.

On pose $\mathcal{G}_t = \bigcap_{\eta>0}(\mathcal{F}^{\widetilde{X}}_{t+\eta} \vee \sigma(X_T))$ pour $t \in [\ 0, T]$. $(\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$ est la plus petite filtration vérifiant les conditions habituelles, contenant $(\mathcal{F}^{\widetilde{X}}_t)_{t\in[0,T]}$ ainsi que la tribu $\sigma(X_T)$. Avec cette nouvelle filtration, $\widetilde{X}$ n'est plus un mouvement brownien. Mais d'après un résultat de [27], $(\widetilde{X})$ est une $(\mathcal{G}_t)$-semi-martingale de décomposition :

$$\widetilde{X}_u = W_u + \int_0^u \frac{\widetilde{X}_T - \widetilde{X}_s}{T-s}ds, \quad 0 \leqslant u \leqslant T,$$

avec $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement brownien sur $[0, T]$.

Ainsi, X_{T-u} est $(\mathcal{G}_t)$-adapté, $\widetilde{X}$ est une semi-martingale dont le crochet et la partie à variation bornée sont absolument continus par rapport à la mesure de Lebesgue. Donc, par 2.1.2,

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)\ \widetilde{I}_\epsilon(t) = \int_{T-t}^{T}\mathbb{1}_{\{0<X_{T-u}\}}d\widetilde{X}_s = \int_{T-t}^{T}\mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_u<X_T\}}d\widetilde{X}_s.$$

3. On identifie $\int_{T-t}^T \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_u<X_T\}}d\widetilde{X}_s$, pour revenir à X et son temps local. Posons pour $x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$:

$$F(t, x) = \int_{T-t}^{T}\mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_u<x\}}d\widetilde{X}_u.$$

On cherche à évaluer $F(t, X_T)$.

D'une part, comme $\int_0^t \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_u = x\}} d\widetilde{X}_u = 0$, la formule de Tanaka (1.1.6) donne pour tout $x \in \mathbb{R}$, presque sûrement :

$$F(t,x) = \left(\widetilde{X}_{T-t} - x\right)^- - \left(\widetilde{X}_T - x\right)^- + \frac{1}{2}\left(L_T^x(\widetilde{X}) - L_{T-t}^x(\widetilde{X})\right)$$

Les processus $\left((\widetilde{X}_t - x)^-; t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\right)$ et $\left(L_t^x(\widetilde{X}); t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\right)$ sont bicontinus. Donc F est bicontinue. X_T étant $\mathcal{G}_0$-mesurable, on a alors

$$F(t, X_T) = \left(\widetilde{X}_{T-t} - X_T\right)^- - \left(\widetilde{X}_T - X_T\right)^- + \frac{1}{2}\left(L_T^{X_T}(\widetilde{X}) - L_{T-t}^{X_T}(\widetilde{X})\right).$$

D'autre part, $\widetilde{X}$ est une $(\mathcal{G}_t)$-semi-martingale, donc p.s. $F : (t,x) \to \int_{T-t}^T \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_u < x\}} d\widetilde{X}_u$ admet une version bicontinue. Comme X_T est $\mathcal{G}_0$-mesurable, on a

$$F(t, X_T) = \int_{T-t}^T \mathbb{1}_{\{\widetilde{X}_s < X_T\}} d\widetilde{X}_s = \lim_{\epsilon \to 0}(ucp)\, \widetilde{I}_\epsilon(t).$$

Finalement,

$$\lim_{\epsilon \to 0}(ucp)\, \widetilde{I}_\epsilon(t) = \left(\widetilde{X}_{T-t} - X_T\right)^- - \left(\widetilde{X}_T - X_T\right)^- + \frac{1}{2}\left(L_T^{X_T}(\widetilde{X}) - L_{T-t}^{X_T}(\widetilde{X})\right).$$

En simplifiant $\widetilde{X}_{T-t} - X_T = -X_t$ et $\widetilde{X}_T = X_T$, on a :

$$\lim_{\epsilon \to 0}(ucp)\, \widetilde{I}_\epsilon(t) = (X_t)^+ + \frac{1}{2}\left(L_T^{X_T}(\widetilde{X}) - L_{T-t}^{X_T}(\widetilde{X})\right).$$

Il nous reste à passer de $L(\widetilde{X})$ à $L(X)$. D'après la Proposition 1.1.13 :

$$L_T^{X_T}(\widetilde{X}) - L_{T-t}^{X_T}(\widetilde{X}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \int_{T-t}^T \mathbb{1}_{\{X_T \leqslant \widetilde{X}_u < X_T + \alpha\}} du$$

Comme $\widetilde{X}_u = X_T - X_{T-u}$, on est ramené à une intégrale ne contenant que X :

$$L_T^{X_T}(\widetilde{X}) - L_{T-t}^{X_T}(\widetilde{X}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \int_{T-t}^T \mathbb{1}_{\{0 \leqslant -X_{T-u} < \alpha\}} du.$$

On fait le changement de variable $s = T - u$, puis on utilise à nouveau la Proposition 1.1.13 :

$$L_T^{X_T}(\widetilde{X}) - L_{T-t}^{X_T}(\widetilde{X}) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} \int_0^t \mathbb{1}_{\{0 \leqslant -X_s < \alpha\}} ds = L_t^0(-X).$$

Par symétrie du mouvement brownien issu de 0, $L_t^0(-X) = L_t^0(X)$, et

$$\lim_{\epsilon \to 0}(ucp)\, \widetilde{I}_\epsilon(t) = X_t^+ + \frac{1}{2} L_t^0.$$

■

3.3 Convergence de $I_\epsilon^{3,i}(t)$ et $I_\epsilon^{4,i}(t)$, $i=1,2$

3.3.1 Résultats

On rappelle que $I_\epsilon^j(t) = I_\epsilon^{j,1}(t) + I_\epsilon^{j,2}(t) + r_\epsilon^j(t), j = 3,4$, avec

$$\begin{aligned}
I_\epsilon^{3,1}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_u>0\}}du, \quad I_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_u<0\}}du,\\
r_\epsilon^3(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}1\!\!1_{\{X_u=0\}}du,\\
I_\epsilon^{4,1}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du, \quad I_\epsilon^{4,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}du,\\
r_\epsilon^4(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}=0\}}du.
\end{aligned}$$

Théorème 3.3.1

$$\lim_{\epsilon\to 0} \textit{ (ucp) } I_\epsilon^{3,1}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \textit{ (ucp) } I_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{4}L_t^0(X).$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \textit{ (ucp) } I_\epsilon^{4,1}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \textit{ (ucp) } I_\epsilon^{4,2}(t) = \frac{1}{4}L_t^0(X).$$

De plus, pour tout $T>0, \delta\in]0,\frac{1}{2}[$,

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}\left|I_\epsilon^{4,i}(t) - \frac{1}{4}L_t^0(X)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_1\epsilon^{\frac{\delta}{2}}, \qquad i=1,2,$$

avec $\mathcal{C}_1$ une constante

Remarque. Au cours de la preuve, on décompose $I_\epsilon^{j,i}$ en somme de plusieurs termes, et on constate que ces termes ont des vitesses de convergence différentes. C'est-à-dire :

$$\mathcal{C}_1\epsilon^{\frac{\delta}{2}} = c_1\epsilon^{\frac{\delta}{2}} + c_2\epsilon^{\frac{1}{4}} + c_3\epsilon^{\delta} + c_4\epsilon^{\frac{1}{2}},$$

avec $c_1 = \sqrt{E(K_\delta^2)}\int_0^\infty y^{\delta+1}\Phi(-y)dy$, $c_2 = \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\pi}}$, $c_3 = 2\sqrt{E(C_\delta^2)}$, $c_4 = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$. Ces différentes vitesses jouent un rôle important dans la preuve de la Proposition 3.4.2.

On fixe $\delta\in]0,\frac{1}{2}[$ (c.f. le Lemme 1.3.2). Comme $(-X)$ est un mouvement brownien standard, on a

$$\lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon^{3,1}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon^{3,2}(t), \qquad \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon^{4,1}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} I_\epsilon^{4,2}(t).$$

Ainsi, nous avons trois propriétés distinctes à démontrer :

1. la convergence (ucp) de $I_\epsilon^{4,2}(t)$ vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ (voir la Section 3.3.2.),
2. la convergence (ucp) de $I_\epsilon^{3,2}(t)$ vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ (voir la Section 3.3.3.),
3. la vitesse de convergence de $I_\epsilon^{4,i}(t) - \frac{1}{4}L_t^0(X), i=1,2$ (voir la Section 3.3.2.).

Pour commencer, on montre que $r_\epsilon^3(t)$ et $r_\epsilon^4(t)$, les deux termes de reste qui interviennent dans la décomposition de $I_\epsilon^3(t)$ et $I_\epsilon^4(t)$, tendent vers 0 quand $\epsilon\to 0$, uniformément sur $[0,T]$. Par la formule de densité d'occupation,

$$\int_0^t 1\!\!1_{\{X_u=0\}}du = \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{\{x=0\}}L_t^x(X)dx = 0.$$

Ainsi, $r^3_\epsilon(t)$ est nul. Ensuite, on décompose $r^4_\epsilon(t)$ comme :

$$r^4_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} X^+_u \mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}=0\}}du + \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X^+_u \mathbb{1}_{\{X_t=0\}}du$$

Le changement de variable dans la première intégrale $v = u+\epsilon$ et l'introduction de X^+_t dans la deuxième intégrale donnent :

$$r^4_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_\epsilon^{t\vee\epsilon} X^+_{v-\epsilon}\mathbb{1}_{\{X_v=0\}}dv + \frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^t (X^+_u - X^+_t)\mathbb{1}_{\{X_t=0\}}du.$$

Comme précédemment, la première intégrale de $r^4_\epsilon(t)$ est nulle. Par le Lemme 1.3.3, le second terme tend p.s. vers 0, uniformément sur $[0,T]$, and on a

$$|r^4_\epsilon(t)| \leqslant C_\delta \epsilon^\delta. \tag{3.1}$$

3.3.2 Convergence de $I^{4,2}_\epsilon(t)$

1. Comme $\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}$ n'est pas $(\mathcal{F}_u)$-mesurable, on l'"approxime" par $E(\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}|\mathcal{F}_u)$. Remarquons que ce terme est une fonction de X_u. En effet,

$$E(\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}|\mathcal{F}_u) = E(\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}-X_u<-X_u\}}|X_u) = E(\mathbb{1}_{\left\{\frac{X_{(u+\epsilon)\wedge t}-X_u}{\sqrt{\epsilon\wedge(t-u)}}<-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon\wedge(t-u)}}\right\}}|X_u),$$

Comme $\frac{X_{(u+\epsilon)\wedge t}-X_u}{\sqrt{\epsilon\wedge(t-u)}}$ est une gaussienne centrée réduite indépendante de X_u, on a

$$E(\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}|\mathcal{F}_u) = \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon\wedge(t-u)}}\right),$$

avec Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On l'introduit dans $I^{4,2}_\epsilon(t)$:

$$I^{4,2}_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\left[\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon\wedge(t-u)}}\right)\right]du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon\wedge(t-u)}}\right)du.$$

On découpe la deuxième intégrale en deux parties :

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} X^+_u\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du + \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X^+_u\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{t-u}}\right)du,$$

puis on rajoute et on retranche $\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X^+_u\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du$. Ce qui conduit à une nouvelle décomposition de $I^{4,2}_\epsilon(t)$:

$$I^{4,2}_\epsilon(t) = A^1_\epsilon(t) + A^2_\epsilon(t) + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du, \tag{3.2}$$

avec

$$A^1_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\left[\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon\wedge(t-u)}}\right)\right]du, \tag{3.3}$$

$$A^2_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X^+_u\left[\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{t-u}}\right)du - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right]. \tag{3.4}$$

Le terme principal est $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)$, car il converge vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ (voir point **2.** ci-dessous). Dans le point **3**, on montre que $A_\epsilon^1(t)+A_\epsilon^2(t)$ tend vers 0.

2. Étude de $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du$**.** $x\to x^+\Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right)$ est une fonction borélienne positive de X_u, donc par la formule de densité d'occupation,

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du=\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}}x^+\Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right)L_t^x(X)dx.$$

On fait le changement de variable $y\sqrt{\epsilon}=x$ et on obtient

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du=\int_0^\infty y\Phi(-y)L_t^{y\sqrt{\epsilon}}(X)dy.$$

Remarquons que $\int_0^\infty u\Phi(-u)du=\frac{1}{4}$. En effet

$$\int_0^\infty u\Phi(-u)du=\int_0^\infty u\left(\int_{-\infty}^{-u}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\right)du.$$

On fait le changement de variable $x=-y$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^\infty u\Phi(-u)du &= \int_0^\infty u\int_u^\infty\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right)du,\\ &= \int_0^\infty\left(\int_0^x udu\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}},\\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}},\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)du-\frac{1}{4}L_t^0(X)=\int_0^\infty y\Phi(-y)\left(L_t^{\sqrt{\epsilon}y}(X)-L_t^0(X)\right)dy.$$

Par la propriété de Hölder du temps local brownien (c.f. Lemme 1.3.2), $|L_t^{\sqrt{\epsilon}y}(X)-L_t^0(X)|\leqslant K_\delta|\sqrt{\epsilon}y|^\delta$. Il vient alors

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)-\frac{1}{4}L_t^0(X)\right|\leqslant\left(K_\delta\int_0^\infty y^{\delta+1}\Phi(-y)dy\right)\epsilon^{\frac{\delta}{2}}. \tag{3.5}$$

Ainsi, $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)$ converge vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ presque sûrement, uniformément sur $[0,T]$.

3. Étude de $A_\epsilon^1(t)+A_\epsilon^2(t)$**.**

On commence par séparer $A_\epsilon^1(t)$ en deux intégrales :

$$A_\epsilon^1(t)=\frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+}X_u^+\left[\mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}<0\}}-\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right]du+\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+\left[\mathbb{1}_{\{X_t<0\}}-\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{t-u}}\right)\right]du.$$

Puis on décompose $\mathbb{1}_{\{X_t<0\}}-\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{t-u}}\right)$ ainsi :

$$\mathbb{1}_{\{X_t<0\}}-\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right)+\left[\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)-\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{t-u}}\right)\right]+\left[\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right)-\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right].$$

En reportant dans $A^1_\epsilon(t)$, on obtient cinq intégrales :

$$\begin{aligned}
A^1_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} X_u^+ \left[1\!\!1_{\{X_{u+\epsilon}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right] du \\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ 1\!\!1_{\{X_t<0\}} du - \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right) du \\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \left[\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) - \Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{t-u}}\right)\right] du \\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \left[\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right) - \Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right] du.
\end{aligned}$$

On remarque que la quatrième intégrale $\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \left[\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) - \Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{t-u}}\right)\right] du$ est égale à $-A^2_\epsilon(t)$. Donc, après simplification, il reste quatre termes :

$$A^1_\epsilon(t) + A^2_\epsilon(t) = R^1_\epsilon(t) + D^2_\epsilon(t) + D^3_\epsilon(t) + R^4_\epsilon(t), \tag{3.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
R^1_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} X_u^+ \left[1\!\!1_{\{X_{u+\epsilon}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right] du, \\
D^2_\epsilon(t) &= 1\!\!1_{\{X_t<0\}} \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ du, \\
D^3_\epsilon(t) &= -\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right) du, \\
R^4_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \left[\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right) - \Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right] du.
\end{aligned}$$

On veut transformer $R^1_\epsilon(t)$ et $R^4_\epsilon(t)$ au moyen de la formule d'Itô. Pour u fixé, on considère la fonction

$$\phi(x,s) = \Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right), \quad (x,s) \in [0,+\infty[, [u, u+\epsilon[.$$

$\phi \in \mathcal{C}^2([0,+\infty[, [u,u+\epsilon[)$, donc par la formule d'Itô, pour tout $v \in [u, u+\epsilon[$,

$$\phi(X_v, v) - \phi(X_u, u) = \int_u^v \frac{\partial \phi}{\partial s}(X_s, s) ds + \int_u^v \frac{\partial \phi}{\partial x}(X_s, s) dX_s + \frac{1}{2}\int_u^v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(X_s, s) ds.$$

0n calcule les dérivées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,s) &= -\frac{1}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\Phi'\left(-\frac{x}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right), \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,s) &= \frac{1}{u+\epsilon-s}\Phi''\left(-\frac{x}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right), \\
\frac{\partial \phi}{\partial s}(x,s) &= \frac{x}{2(u+\epsilon-s)\sqrt{u+\epsilon-s}}\Phi'\left(-\frac{x}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right).
\end{aligned}$$

Comme $\Phi'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$ et $\Phi''(z) = \frac{z}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-z^2}{2}}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,s) &= -\frac{1}{\sqrt{(u+\epsilon-s)}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2(u+\epsilon-s)}}\right), \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,s) &= \frac{1}{u+\epsilon-s} \times \left(-\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sqrt{u+\epsilon-s}}e^{-\frac{x^2}{2(u+\epsilon-s)}}\right), \\
\frac{\partial \phi}{\partial s}(x,s) &= \frac{x}{2(u+\epsilon-s)\sqrt{u+\epsilon-s}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2(u+\epsilon-s)}}\right).
\end{aligned}$$

On remarque alors que

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,s) = \frac{\partial\phi}{\partial s}(x,s),$$

ce qui donne :

$$\phi(X_v,v) - \phi(X_u,u) = -\int_u^v \frac{\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right)}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}} dX_s, \quad \forall v \in [u, u+\epsilon[. \tag{3.7}$$

Cette formule utilisée pour $v = t$ si $u \in](t-\epsilon)^+, t]$ donne

$$\Phi\left(-\frac{X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right) - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) = -\int_u^t \frac{\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right)}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}} dX_s.$$

On peut alors reporter dans $R_\epsilon^4(t)$:

$$R_\epsilon^4(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \left[-\int_u^t \frac{\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right)}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}} dX_s\right] du.$$

Comme la mesure de Lebesgue de $\{u; X_{u+\epsilon} = 0\}$ est nulle, on peut utiliser (3.7) pour $v = u+\epsilon$ si $u \in [0, (t-\epsilon)^+]$:

$$\mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) = -\int_u^{u+\epsilon} \frac{\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right)}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}} dX_s.$$

En reportant dans $R_\epsilon^1(t)$, on a

$$R_\epsilon^1(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} X_u^+ \left[-\int_u^{u+\epsilon} \frac{\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right)}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}} dX_s\right] du.$$

On peut alors rassembler $R_\epsilon^1(t)$ et $R_\epsilon^4(t)$, ce qui mène à une nouvelle expression de $A_\epsilon^1(t) + A_\epsilon^2(t)$:

$$A_\epsilon^1(t) + A_\epsilon^2(t) = D_\epsilon^1(t) + D_\epsilon^2(t) + D_\epsilon^3(t), \tag{3.8}$$

avec

$$D_\epsilon^1(t) = -\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+ \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \frac{\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right)}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}} dX_s\right) du.$$

Dans la suite du paragraphe, on montre que chaque $D_\epsilon^i(t)$ tend vers 0. Remarquons que, dans $D_\epsilon^2(t)$ et $D_\epsilon^3(t)$, la longueur des intervalles d'intégration est plus petite que ϵ. La convergence de ces termes aura lieu presque sûrement et découle de la continuité de X. Pour $D_\epsilon^1(t)$, on observe que c'est une martingale (par le théorème de Fubini) et on utilise l'inégalité de Doob pour montrer la convergence dans $L^2(\Omega)$.

Convergence de $D_\epsilon^2(t)$ vers 0. Comme $\mathbb{1}_{\{X_t\leqslant 0\}}X_t^+ = 0$, on peut écrire

$$D_\epsilon^2(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_u^+ - X_t^+)\mathbb{1}_{\{X_t<0\}} du.$$

Par le Lemme 1.3.3, $D_\epsilon^2(t)$ tends p.s. vers 0, uniformément sur $[0,T]$ et on a :

$$\sup_{t\in[0,T]} \left|D_\epsilon^2(t)\right| \leqslant |C_\delta|\epsilon^\delta. \tag{3.9}$$

Convergence de $D^3_\epsilon(t)$ vers 0. Comme précédemment, on introduit X_t^+ dans $D^3_\epsilon(t)$:

$$D^3_\epsilon(t) = -\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_t^+ - X_u^+)\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right)du + \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right)du.$$

Pour le premier terme, on majore Φ par 1 et on utilise la propriété de Hölder de $t \to X_t$ (Lemme 1.3.2) :

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_t^+ - X_u^+)\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right)du\right| \leqslant \frac{|C_\delta|}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t |t-u|^\delta du \leqslant |C_\delta|\epsilon^\delta.$$

On étudie ensuite le second terme de $D^3_\epsilon(t)$. Remarquons que $\Phi(x) \leqslant \sqrt{2}e^{\frac{-x^2}{4}}$ pour $x \leqslant 0$. En effet, pour tout $y \leqslant x$, si on majore $e^{-\frac{y^2}{2}}$ par $e^{-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}}$, on a alors

$$\Phi(x) \leqslant e^{-\frac{x^2}{4}}\left(\int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{4}}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\right) \leqslant e^{-\frac{x^2}{4}}\sqrt{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y'^2}{2}}\frac{dy'}{\sqrt{2\pi}}\right) \leqslant e^{-\frac{x^2}{4}}\sqrt{2}.$$

Comme $\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}} \leqslant 0$ grâce à X_t^+, on obtient la majoration suivante :

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right)du\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+ e^{-\frac{X_t^2}{4(u+\epsilon-t)}}du.$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \to xe^{-\frac{x^2}{4(u+\epsilon-t)}}$ est positive, continue, nulle en 0 et à l'infini. Elle est donc bornée. Évaluons son maximum. Sa dérivée est $x \to (1 - \frac{x^2}{2(u+\epsilon-t)})e^{-\frac{x^2}{4(u+\epsilon-t)}}$ et s'annule pour $x = \sqrt{2(u+\epsilon-t)}$. la fonction atteint donc son maximum en ce point, et il vaut $\sqrt{2(u+\epsilon-t)}e^{-\frac{1}{2}}$. Ainsi,

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{u+\epsilon-t}}\right)du\right| \leqslant \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \sqrt{u+\epsilon-t}du \leqslant \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}.$$

$D^3_\epsilon(t)$ converge p.s. vers 0 uniformément sur $[0,T]$ et

$$\sup_{t\in[0,T]} |D^3_\epsilon(t)| \leqslant |C_\delta|\epsilon^\delta + \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}. \tag{3.10}$$

Convergence de $D^1_\epsilon(t)$ to 0. Afin d'utiliser le théorème de Fubini 1.3.1, on doit d'abord montrer que :

$$\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} E\left[H^2_\epsilon(u,s)\right]ds\right)du < \infty,$$

où

$$H_\epsilon(u,s) = \frac{X_u^+}{\epsilon\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}}\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$E\left[H^2_\epsilon(u,s)\right] \leqslant \frac{1}{2\pi(u+\epsilon-s)\epsilon^2}\sqrt{E[(X_u^+)^4]E\left[\exp\left(-\frac{2X_s^2}{(u+\epsilon-s)}\right)\right]}.$$

Comme X_r est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance r, on peut calculer explicitement les deux espérances.

$$E\left((X_u^+)^4\right) = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2u}}\frac{du}{\sqrt{2\pi u}} = \frac{3}{2}u^2,$$

et

$$\begin{aligned} E\left(\exp\left(-\frac{2X_s^2}{(u+\epsilon-s)}\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{2x^2}{u+\epsilon-s}-\frac{x^2}{2s}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi s}}, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\frac{3s+u+\epsilon}{u+\epsilon-s}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi s}}. \end{aligned}$$

En posant $y = x\sqrt{\frac{3s+u+\epsilon}{u+\epsilon-s}}$, il vient

$$E\left(\exp\left(-\frac{2X_s^2}{(u+\epsilon-s)}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2s}\right)\frac{dy}{\sqrt{2\pi s}}\sqrt{\frac{u+\epsilon-s}{3s+u+\epsilon}} = \sqrt{\frac{u+\epsilon-s}{3s+u+\epsilon}}.$$

Comme $s \geqslant u \Rightarrow 3s+u+\epsilon > 4u$, on a

$$E\left(\exp\left(-\frac{2X_s^2}{(u+\epsilon-s)}\right)\right) \leqslant \sqrt{\frac{u+\epsilon-s}{4u}}.$$

En reportant ces résultats dans la majoration de $E\left[H_\epsilon^2(u,s)\right]$, on obtient

$$E\left[H_\epsilon^2(u,s)\right] \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon^2}\left(\frac{u}{u+\epsilon-s}\right)^{\frac{3}{4}}, \quad \forall u \in [0,t], s \in]u, u+\epsilon[.$$

Comme $\int_0^t \left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\left(\frac{u}{u+\epsilon-s}\right)^{\frac{3}{4}} ds\right) du < \infty$, le théorème de Fubini stochastique s'applique :

$$D_\epsilon^1(t) = -\int_0^t \left(\int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{1}{\epsilon}\frac{X_u^+}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}}\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right) du\right) dX_s.$$

Ainsi, $(D_\epsilon^1(t), 0 \leqslant t \leqslant T)$ est une martingale de carré intégrable, et par l'inégalité de Doob, il vient :

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}(D_\epsilon^1(t))^2\right) \leqslant 4E\left[(D_\epsilon^1(T))^2\right],$$

et

$$E\left[(D_\epsilon^1(T))^2\right] = E\left(\int_0^T \left[\int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{1}{\epsilon}\frac{X_u^+}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}}\exp\left(-\frac{X_s^2}{2(u+\epsilon-s)}\right) du\right]^2 ds\right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au terme entre crochet donne :

$$E\left[(D_\epsilon^1(T))^2\right] \leqslant \int_0^T \left[\int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{1}{2\pi\epsilon(u+\epsilon-s)}E\left((X_u^+)^2\exp\left(-\frac{X_s^2}{u+\epsilon-s}\right)\right) du\right] ds.$$

Pour $s > u > (s-\epsilon)^+$, on pose

$$A = E\left((X_u^+)^2\exp\left(-\frac{X_s^2}{u+\epsilon-s}\right)\right) = E\left((X_u^+)^2\exp\left(-\frac{(X_s-X_u+X_u)^2}{u+\epsilon-s}\right)\right).$$

Comme $X_s - X_u$ est indépendant de X_u, on a

$$A = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x^+)^2 e^{-\frac{(y+x)^2}{u+\epsilon-s}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2u}-\frac{y^2}{2(s-u)}}dydx}{2\pi\sqrt{(s-u)u}} = \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x^2}{2u}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y+x)^2}{u+\epsilon-s}-\frac{y^2}{2(s-u)}} \frac{dydx}{2\pi\sqrt{(s-u)u}}.$$

Grâce à la décomposition suivante

$$\frac{(y+x)^2}{u+\epsilon-s} + \frac{y^2}{2(s-u)} = \frac{s-u+\epsilon}{2(s-u)(u+\epsilon-s)}\left(y+\frac{2(s-u)x}{s-u+\epsilon}\right)^2 + \frac{x^2}{s-u+\epsilon},$$

il vient

$$A = \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{(s+u+\epsilon)x^2}{2u(s-u+\epsilon)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s-u+\epsilon}{2(s-u)(u+\epsilon-s)}\left(y+\frac{2(s-u)x}{s-u+\epsilon}\right)^2} \frac{dydx}{2\pi\sqrt{(s-u)u}}.$$

Le changement de variable $z = \sqrt{\frac{s-u+\epsilon}{(s-u)(u+\epsilon-s)}}\left(y + \frac{2(s-u)x}{s-u+\epsilon}\right)$ mène à

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{(s+u+\epsilon)x^2}{2u(s-u+\epsilon)}} \sqrt{\frac{(s-u)(u+\epsilon-s)}{s-u+\epsilon}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi(s-u)u}}, \\
&= \sqrt{\frac{(u+\epsilon-s)}{s-u+\epsilon}} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{(s+u+\epsilon)x^2}{2u(s-u+\epsilon)}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi u}}, \\
&= \sqrt{\frac{(u+\epsilon-s)}{s-u+\epsilon}} \int_0^\infty \left(\frac{u(s-u+\epsilon)}{(s+u+\epsilon)}\right)^{\frac{3}{2}} x'^2 e^{-\frac{x'^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi u}} \qquad \left(x' = \sqrt{\frac{(s+u+\epsilon)}{u(s-u+\epsilon)}}x\right), \\
&= \frac{u(s-u+\epsilon)\sqrt{u+\epsilon-s}}{2(s+u+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

En reportant dans l'intégrale, on a :

$$E\left[(D^1_\epsilon(T))^2\right] \leqslant \int_0^T \left[\int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{u(s-u+\epsilon)}{\sqrt{u+\epsilon-s}(s+u+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} du\right] ds.$$

Comme $u \geqslant s-\epsilon \Rightarrow s-u+\epsilon \leqslant 2\epsilon$ et $\frac{1}{s+u+\epsilon} \leqslant \frac{1}{u}$, il vient :

$$\begin{aligned}
E\left[(D^1_\epsilon(T))^2\right] &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^T \left[\int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{1}{\sqrt{u+\epsilon-s}\sqrt{u}} du\right] ds, \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^T \left(\int_u^{u+\epsilon} \frac{1}{\sqrt{u+\epsilon-s}} ds\right) \frac{du}{\sqrt{u}}, \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^T 2\sqrt{\epsilon}\frac{du}{\sqrt{u}}, \\
&\leqslant \frac{2\sqrt{\epsilon T}}{\pi}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left(D^1_\epsilon(t)\right)^2\right] \leqslant \frac{2\sqrt{\epsilon T}}{\pi}, \tag{3.11}$$

et $D^1_\epsilon(t)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément sur $[0,T]$.

4. On peut montrer la convergence de $I^{4,2}_\epsilon(t)$ et évaluer la vitesse de convergence. (3.2) et (3.8) donnent la décomposition suivante :

$$I^{4,2}_\epsilon(t) - \frac{1}{4}L^0_t(X) = D^1_\epsilon(t) + D^2_\epsilon(t) + D^3_\epsilon(t) + \left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) - \frac{1}{4}L^0_t(X)\right). \tag{3.12}$$

Les inégalités (3.9), (3.10), (3.11) et (3.5) impliquent que $I^{4,2}_\epsilon(t)$ converge vers $\frac{1}{4}L^0_t(X)$ et que

$$\left\|\sup_{t\in[0,T]}\left|I^{4,2}_\epsilon(t) - \frac{1}{4}L^0_t(X)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1\epsilon^{\frac{\delta}{2}} + c_2\epsilon^\delta + c_3\epsilon^{\frac{1}{2}},$$

avec $c_1 = \sqrt{E(K^2_\delta)}\int_0^\infty y^{\delta+1}\Phi(-y)dy$, $c_2 = 2\sqrt{E(C^2_\delta)}$, $c_3 = \frac{2\sqrt{T}}{\pi} + \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$.

3.3.3 Convergence de $I_\epsilon^{3,2}(t)$

On suit la même méthode que dans la section 3.3.2. Comme $X_{u+\epsilon}^+$ n'est pas $(\mathcal{F}_u)$-mesurable, on le "remplace" par $E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)$. Ce qui conduit à considérer cette décomposition de $I_\epsilon^{3,2}(t)$:

$$I_\epsilon^{3,2}(t) = \widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) + \overline{I}_\epsilon^{3,2}(t) + \Delta_\epsilon^{3,2}(t),$$

avec

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du, && (3.13)\\
\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} \left(X_{u+\epsilon}^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\right)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du && (3.14)\\
&\quad +\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t) - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\right)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du, && (3.15)\\
\Delta_\epsilon^{3,2}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(X_t^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t)\right)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du. && (3.16)
\end{aligned}$$

Le terme principal est $\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t)$ car il converge vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ (voir point **1.**). Dans le point **2**, on montre que $\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t)$ tend vers 0.

Pour $\Delta_\epsilon^{3,2}(t)$, comme $X_t^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t) = Y_t - Y_{u+\epsilon}$, avec $Y_s = E(X_s^+|\mathcal{F}_t), s \in [(t-\epsilon)^+, t]$, le Lemme 1.3.3 s'applique et $\Delta_\epsilon^{3,2}(t)$ converge p.s. vers 0, uniformément sur $[0,T]$.

1. Étude de $\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t)$. On commence par remarquer que $E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)$ est une fonction de X_u. En effet,

$$E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u) = E((X_{u+\epsilon} - X_u + X_u)^+|\mathcal{F}_u) = E((\sqrt{\epsilon}G + X_u)^+|\mathcal{F}_u),$$

où $G = \frac{X_{u+\epsilon}-X_u}{\sqrt{\epsilon}}$. G est indépendante de $\mathcal{F}_u$ et de loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc

$$E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u) = \sqrt{\epsilon}g\left(\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right), \qquad \text{avec } g(x) = E((G+x)^+).$$

Par la formule de densité d'occupation,

$$\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\int_{-\infty}^0 g\left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right)L_t^x(X)dx.$$

Le changement de variable $y\sqrt{\epsilon} = x$ donne :

$$\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \int_{-\infty}^0 g(y)L_t^{\sqrt{\epsilon}y}(X)dy.$$

On a $\int_{-\infty}^0 g(y)dy = \frac{1}{4}$. En effet, $\int_{-\infty}^0 g(y)dy = E\left(\int_{-\infty}^0 (G+y)^+dy\right)$. On fait deux cas suivant le signe de G :

– Si $G > 0$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 (G+y)^+dy &= \int_{-\infty}^{-G}(G+y)^+dy + \int_{-G}^0 (G+y)^+dy,\\
&= \int_{-G}^0 (G+y)dy,\\
&= \frac{G^2}{2}.
\end{aligned}$$

– Si $G \leqslant 0$, alors $\int_{-\infty}^{0}(G+y)^+dy = 0$.
Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{0} g(y)dy == E(\mathbb{1}_{\{G>0\}}\frac{G^2}{2}) = \frac{1}{4}E(G^2) = \frac{1}{4}.$$

Il vient donc

$$\widetilde{I}_{\epsilon}^{3,2}(t) - \frac{1}{4}L_t^0(X) = \int_{-\infty}^{0} g(y)(L_t^{\sqrt{\epsilon}y}(X) - L_t^0(X))dy.$$

Par la propriété de Hölder du temps local brownien (c.f. Lemme 1.3.2),

$$\left|\widetilde{I}_{\epsilon}^{3,2}(t) - \frac{1}{4}L_t^0(X)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{0}(G+y)^+K_\delta(\sqrt{\epsilon}y)^\delta dy \leqslant \left[K_\delta\int_{-\infty}^{0}(G+y)^+y^\delta dy\right]\epsilon^{\frac{\delta}{2}}.$$

Par conséquent, $\widetilde{I}_{\epsilon}^{3,2}(t)$ converge vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ p.s, uniformément sur $[0,T]$.

2. Convergence de $\overline{I}_{\epsilon}^{3,2}(t)$. On veut montrer que $\overline{I}_{\epsilon}^{3,2}(t)$ est une martingale afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Doob.

Soient u,ϵ fixés. On commence par exprimer $\left(X_{u+\epsilon}^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\right)$ et $\left(E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t) - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\right)$ comme des intégrales stochastiques au moyen de la formule d'Itô.

On pose $M_s = E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_s), s\in[u,u+\epsilon[$. $(M_s)_{s\in[u,u+\epsilon[}$ est une martingale. On écrit $M_s = E((X_{u+\epsilon} - X_s + X_s)^+|\mathcal{F}_s)$. $X_{u+\epsilon}-X_s$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $u+\epsilon-s$ et on note $f(s,y) = E((X_{u+\epsilon}-X_s+x)^+)$. Comme $X_{u+\epsilon}-X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, on a

$$M_s = f(s,X_s).$$

On peut exprimer f sous la forme d'une intégrale :

$$f(s,y) = \int_{\mathbb{R}}(x+y)^+p_{u+\epsilon-s}(x)dx, \quad \text{avec } p_{u+\epsilon-s}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2(u+\epsilon-s)}}}{\sqrt{2\pi(u+\epsilon-s)}}.$$

On calcule les dérivées de f. En écrivant $f(s,y) = \int_{-y}^{+\infty}(x+y)p_{u+\epsilon-s}(x)dx$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(s,y) &= (-y+y)p_{u+\epsilon-s}(-y)dx - \int_{-y}^{+\infty}\frac{\partial(x+y)p_{u+\epsilon-s}(x)}{\partial y}dx,\\ &= -\int_{-y}^{+\infty}p_{u+\epsilon-s}(x)dx,\\ &= 1-\Phi\left(\frac{-y}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right),\end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard. La dérivée seconde se calcule alors directement.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,y) = \frac{1}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\Phi'\left(\frac{-y}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right).$$

Pour calculer la dérivée en s, on commence par modifier f.

$$f(s,y) = \int_{-y}^{+\infty}xp_{u+\epsilon-s}(x)dx + y\int_{-y}^{+\infty}p_{u+\epsilon-s}(x)dx$$

Le changement de variable $z = \frac{x}{\sqrt{u+\epsilon-s}}$ dans la première intégrale donne :

$$\begin{aligned}f(s,y) &= \int_{-\frac{y}{\sqrt{u+\epsilon-s}}}^{+\infty}\sqrt{u+\epsilon-s}\,ze^{-\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2\pi}} + y\left[1-\Phi\left(\frac{-y}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right)\right],\\ &= \frac{\sqrt{u+\epsilon-s}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)}} + y\left[1-\Phi\left(\frac{-y}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right)\right].\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s}(s,y) &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{u+\epsilon-s}}e^{-\frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)}} + \frac{\sqrt{u+\epsilon-s}}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)^2}e^{-\frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)}}\right) \\ &\quad + \frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)^{\frac{3}{2}}}\Phi'\left(\frac{-y}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right), \\ &= \frac{e^{-\frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)}}}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{2\sqrt{u+\epsilon-s}} - \frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)^{\frac{3}{2}}}\right] + \frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)^{\frac{3}{2}}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)}}}{\sqrt{2\pi}}, \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{u+\epsilon-s}}\frac{e^{-\frac{y^2}{2(u+\epsilon-s)}}}{\sqrt{2\pi}}, \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{u+\epsilon-s}}\Phi'\left(\frac{-y}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right).\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{C}^{1,2}([u,u+\epsilon[,\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,y) = -\frac{\partial f}{\partial s}(s,y)$, la formule d'Itô donne :

$$f(v,X_v) - f(u,X_u) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(s,X_s)dX_s, \quad v \in [u,u+\epsilon[.$$

C'est-à-dire

$$f(v,X_v) - f(u,X_u) = \int_u^v \left[1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right)\right]dX_s.$$

On applique cette formule :

$$f(u+\epsilon,X_{u+\epsilon}) - f(u,X_u) = \int_u^{u+\epsilon}\left[1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right)\right]dX_s, \quad u \in [0,(t-\epsilon)^+], \tag{3.17}$$

$$f(t,X_t) - f(u,X_u) = \int_u^t \left[1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right)\right]dX_s, \quad u \in [(t-\epsilon)^+,t]. \tag{3.18}$$

Comme

$$f(u+\epsilon,X_{u+\epsilon}) - f(u,X_u) = M_{u+\epsilon} - M_u = X_{u+\epsilon}^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u),$$

et

$$f(t,X_t) - f(u,X_u) = M_t - M_u = E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t) - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u),$$

on peut reporter (3.17) et (3.18) dans $\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t)$, et on obtient

$$\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left[\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}(1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right))dX_s\right]\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du.$$

Comme $x \to 1-\Phi(x)$ est borné uniformément par 1, on peut appliquer le théorème de Fubini 1.3.1 :

$$\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s (1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right))\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du\right]dX_s.$$

Ainsi, $(\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t), 0 \leqslant t \leqslant T)$ est une martingale de carré intégrable, et l'inégalité de Doob donne :

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}|\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t)|^2\right) \leqslant 4E\left(\int_0^T \left[\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s (1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right))\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du\right]^2 ds\right).$$

Pour finir, on montre que le membre de droite de cette inégalité converge vers 0. Selon le signe de X_s, l'étude du terme entre crochet est différente. Comme $\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s=0\}}ds = 0$, il reste deux cas : $X_s < 0$ et $X_s > 0$.

– Pour $X_s > 0$, on majore $1-\Phi$ par 1 et on a :

$$1\!\!1_{\{X_s>0\}}\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}(1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right))1\!\!1_{\{X_u<0\}}du\right| \leqslant 1\!\!1_{\{X_s>0\}}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}1\!\!1_{\{X_u<0\}}du\right).$$

On a déjà montré que le terme à droite converge vers 0, quand $\epsilon \to 0$, p.s. et dans $L^1(\Omega)$.

– Si $X_s < 0$, on utilise que $|1-\Phi(\alpha)| \leqslant Ce^{-\frac{\alpha^2}{4}}$ pour tout $\alpha > 0$:

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}(1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right))1\!\!1_{\{X_u<0\}}du\right| \leqslant \frac{C}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}e^{-\frac{X_s^2}{4(u+\epsilon-s)}}du.$$

Le changement de variable $v = u+\epsilon-s$ donne :

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}(1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right))1\!\!1_{\{X_u<0\}}du\right| \leqslant \frac{C}{\epsilon}\int_{(\epsilon-s)^+}^{\epsilon}e^{-\frac{X_s^2}{4v}}dv.$$

Comme $X_s \neq 0$, $\frac{1}{\epsilon}\int_{(\epsilon-s)^+}^{\epsilon}e^{-\frac{X_s^2}{4v}}dv$ converge vers 0 p.s et dans $L^1(\Omega)$.

Finalement, par le théorème de convergence dominée, $E\left(\int_0^T\left[\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}(1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{u+\epsilon-s}}\right))1\!\!1_{\{X_u<0\}}du\right]^2ds\right)$ converge vers 0. ■

3.4 Vitesse de convergence de $J_\epsilon(t)$ dans L^2 et convergence presque sûre

3.4.1 Résultats

On rappelle que $J_\epsilon(t)$ est défini par $J_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t\left(1\!\!1_{\{0<X_{s+\epsilon}\}} - 1\!\!1_{\{0<X_s\}}\right)(X_{s+\epsilon}-X_s)\,ds$. Une vitesse de convergence de $J_\epsilon(t)$ vers le temps local L_t^0 dans $L^2(\Omega)$ est donnée par le résultat suivant :

Théorème 3.4.1 *Pour tout $T > 0$, $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe une constante $\mathcal{C}_2$ telle que*

$$\forall\epsilon \in]0,1], \qquad \left\|\sup_{t\in[0,T]}|J_\epsilon(t,y) - L_t^y|\right\|_2 \leqslant \mathcal{C}_2\epsilon^{\frac{\delta}{2}}.$$

Remarque. Au cours de la preuve, $J_\epsilon(t)$ est décomposée en une somme de plusieurs termes, et on constate que ces termes ont des vitesses de convergence différentes. C'est-à-dire :

$$\mathcal{C}_2\epsilon^{\frac{\delta}{2}} = C_1\epsilon^{\frac{\delta}{2}} + C_2\epsilon^{\frac{1}{4}} + C_3\epsilon^{\delta} + C_4\sqrt{\epsilon}.$$

Ces différentes vitesses jouent un rôle important dans la preuve de la proposition 3.4.2. Les constantes ont été calculées explicitement :

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\sqrt{E(K_\delta^2)}\int_0^\infty y^{\delta+1}\Phi(-y)dy, \\ C_2 &= \frac{4\sqrt{2}\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\pi}}, \\ C_3 &= \frac{8\delta+9}{\delta+1}\sqrt{E(C_\delta^2)}, \\ C_4 &= 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}. \end{aligned}$$

Notons qu'apparaissent C_δ la constante de Hölder de X, mais aussi K_δ la constante de Hölder de $L(X)$.

Une conséquence indirecte de ce théorème (ou plutôt de sa preuve) est le résultat suivant, concernant la convergence presque sûre :

Proposition 3.4.2 *Soit X le mouvement brownien standard et $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante telle que $\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\epsilon_i}<\infty$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, presque sûrement,*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left|J_{\epsilon_n}(t,x)-L_t^x(X)\right| &= 0,\\ \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left|I_{\epsilon_n}^{4,i}(t,x)-\frac{1}{4}L_t^x(X)\right| &= 0, \quad i=1,2.\end{aligned}$$

Remarques.

1. Comme dans la preuve du Théorème 5.1.1, nous aurions voulu utiliser cette suite extraite pour montrer qu'il y a convergence presque sûre de $J_\epsilon(t)$ vers le temps local, mais nous n'y sommes pas arrivés.
2. Les méthodes employées dans cette étude ne semblent pas se généraliser pour une martingale continue.

Preuve. La preuve du Théorème 3.4.1 part de la décomposition suivante :

$$J_\epsilon(t)-L_t^0(X)=-\left(I_\epsilon^1(t)-\int_0^t 1\!\!1_{\{0<X_s\}}dX_s\right)+\left(I_\epsilon^2(t)-X_t^+-\frac{1}{2}L_t^0(X)\right). \tag{3.19}$$

Dans la Section 3.4.2 (resp. 3.4.3), on étudie la vitesse de convergence de $I_\epsilon^1(t)$ (resp. $I_\epsilon^2(t)$). On utilisera le Théorème 3.3.1 pour obtenir la vitesse de convergence de $I_\epsilon^2(t)$ vers sa limite. Dans la Section 3.4.4, on montre la Proposition 3.4.2.

On introduit les fonctions

$$f(x)=\mathrm{Arctan}(\sqrt{x}) \text{ et } F(x)=\int_0^x f(u)du, \quad \forall x\geqslant 0. \tag{3.20}$$

Ce sont des fonctions positives, croissantes et qui vérifient $0\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{x}$. Ces fonctions interviennent de manière essentielle dans les calculs qui suivent à cause du résultat élémentaire suivant.

Lemme 3.4.3 *Soient deux réels $x<y$ et X le mouvement brownien standard.*
– *Si $x\leqslant 0$, alors $P(0<X_x,0<X_y)=0$.*
– *Si $x>0$, alors $P(0<X_x,0<X_y)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi}f\left(\frac{y-x}{x}\right)$.*

Preuve. Si $x\leqslant 0$, alors par convention $X_x=0$ et $P(0<X_x,0<X_y)=0$.
Supposons maintenant $x>0$. On a

$$P(0<X_x,0<X_y)=P(0<X_x,0<(X_y-X_x)+X_x).$$

Or, X_x est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance x et X_y-X_x est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $y-x$, indépendante de X_x. Par conséquent,

$$P(0<X_y,0<X_x)=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{1}{2\pi\sqrt{x(y-x)}}\exp\left(-\frac{(a-b)^2}{2(y-x)}-\frac{b^2}{2x}\right)dadb.$$

On calcule explicitement cette intégrale. On commence par le changement de variable $\tilde{a} = \frac{a-b}{\sqrt{y-x}}$ à b fixé :

$$P(0 < X_y, 0 < X_x) = \int_0^\infty \left(\int_{\frac{-b}{\sqrt{y-x}}}^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{x}} \exp\left(-\frac{\tilde{a}^2}{2} - \frac{b^2}{2x} \right) d\tilde{a} \right) db.$$

Puis on fait un deuxième changement de variable $\tilde{b} = \frac{b}{\sqrt{x}}$:

$$P(0 < X_y, 0 < X_x) = \int_0^\infty \left(\int_{-\tilde{b}\sqrt{\frac{x}{y-x}}}^\infty \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\tilde{a}^2}{2} - \frac{\tilde{b}^2}{2} \right) d\tilde{a} \right) d\tilde{b}.$$

Le calcul final se fait grâce à un passage en coordonnées polaires $(r, \theta) = (\sqrt{\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2}, \arctan(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}))$:

$$\begin{aligned} P(0 < X_y, 0 < X_x) &= \int_{-\arctan\sqrt{\frac{x}{y-x}}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2}{2} \right) r dr d\theta, \\ &= \int_{-\arctan\sqrt{\frac{x}{y-x}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi} d\theta, \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan\sqrt{\frac{x}{y-x}}, \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{\frac{y-x}{x}} \right), \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arctan\sqrt{\frac{y-x}{x}}. \end{aligned}$$

■

3.4.2 Vitesse de convergence de $I_\epsilon^1(t)$.

Proposition 3.4.4

$$\left\| \sup_{t\in[0,T]} \left| I_\epsilon^1(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{0<B_s\}} dX_s \right| \right\|_2 \leqslant c_5 \sqrt[4]{\epsilon} + c_6 \epsilon^\delta + + c_7 \sqrt{\epsilon},$$

où $c_5 = \frac{2\sqrt{2}\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\pi}}$, $c_6 = \sqrt{E(C_\delta^2)}$ *et* $c_7 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}$.

1. On utilise la décomposition (2.4) pour $Y = X$. Remarquons que $\widehat{I}_\epsilon^1(t) = 0$ car X est une martingale, ainsi (2.4) se réduit à :

$$I_\epsilon^1(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} dX_s = \widetilde{I}_\epsilon^1(t) + \Delta_1(t, \epsilon), \tag{3.21}$$

où on rappelle que

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_\epsilon^1(t) &= \int_0^t \frac{1}{\epsilon} (X_{(s+\epsilon)\wedge t} - X_s) \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} ds - \int_0^t \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} dX_s, \\ \Delta_1(t, \epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} \int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_{s+\epsilon} - X_t) \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} ds. \end{aligned}$$

Pour $\Delta_1(t, \epsilon)$, le Lemme 1.3.3 donne directement :

$$\sup_{t\in[0,T]} |\Delta_1(t, \epsilon)| \leqslant C_\delta \epsilon^\delta. \tag{3.22}$$

Étudions maintenant $\widetilde{I}^1_\epsilon(t)$. Comme $< X >_u = u$, l'inégalité (2.9) devient :

$$E\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\widetilde{I}^1_\epsilon(t))^2\right) \leqslant 4E\left[\int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(u-\epsilon)^+}^u \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}}ds\right)^2 du\right]. \tag{3.23}$$

On doit donc évaluer et majorer

$$B := 4\int_0^T E\left[\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(u-\epsilon)^+}^u \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}}ds\right)^2\right] du.$$

On écrit $\left(\int_{(u-\epsilon)^+}^u \mathbb{1}_{\{0<X_s\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}}ds\right)^2$ sous la forme d'une double intégrale sur $[(u-\epsilon)^+, u] \times [(u-\epsilon)^+, u]$, domaine rectangulaire du plan :

$$B = \frac{4}{\epsilon^2}\int_0^T E\left[\iint_{[(u-\epsilon)^+,u]^2} (\mathbb{1}_{\{0<X_s\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}})(\mathbb{1}_{\{0<X_{s'}\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}})dsds'\right] du.$$

Puis, par symétrie, l'intégrale sur le rectangle est égale à deux fois l'intégrale sur le triangle rectangle défini par $\{(s,s') \in [(u-\epsilon)^+, u] \times [(u-\epsilon)^+, u], s < s'\}$:

$$2\iint_{[(u-\epsilon)^+,u]^2} \mathbb{1}_{\{s<s'\}}(\mathbb{1}_{\{0<X_s\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}})(\mathbb{1}_{\{0<X_{s'}\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}})dsds'.$$

On a alors

$$B = \frac{8}{\epsilon^2}\int_0^T \left(\iint_{[(u-\epsilon)^+,u]^2} \mathbb{1}_{\{s<s'\}} E\left[\mathbb{1}_{\{0<X_s\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}})(\mathbb{1}_{\{0<X_{s'}\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}}\right] dsds'\right) du.$$

L'espérance dans cette intégrale peut être calculée explicitement, grâce au Lemme 3.4.3.

$$\begin{aligned}
E\left((\mathbb{1}_{\{0<X_s\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}})(\mathbb{1}_{\{0<X_{s'}\}} - \mathbb{1}_{\{0<X_u\}})\right) &= P(0<X_s, 0<X_{s'}) - P(0<X_s, 0<X_u) \\
&\quad -P(0<X_u, 0<X_{s'}) + P(0<X_u), \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}f\left(\frac{s'-s}{s}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}f\left(\frac{u-s}{s}\right) \\
&\quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}f\left(\frac{u-s'}{s'}\right) + \frac{1}{2}, \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(f(\frac{u-s'}{s'}) + f(\frac{u-s}{s}) - f(\frac{s'-s}{s})\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$B = \frac{4}{\pi}\int_0^T \left\{\iint_{[(u-\epsilon)^+,u]} \frac{\mathbb{1}_{\{s<s'\}}}{\epsilon^2}\left(f(\frac{u-s'}{s'}) + f(\frac{u-s}{s}) - f(\frac{s'-s}{s})\right) dsds'\right\} du. \tag{3.24}$$

2. Calcul de la double intégrale. On pose

$$K_\epsilon(u) = \iint_{[(u-\epsilon)^+,u]^2} \mathbb{1}_{\{s<s'\}}\left(f(\frac{u-s'}{s'}) + f(\frac{u-s}{s}) - f(\frac{s'-s}{s})\right) dsds',$$

et on cherche à calculer $K_\epsilon(u)$. On commence par séparer les trois termes.

$$K_\epsilon(u) = \int_{(u-\epsilon)^+}^u \left(\int_{(u-\epsilon)^+}^{s'} f(\frac{u-s'}{s'})ds\right) ds' + \int_{(u-\epsilon)^+}^u \left(\int_s^u f(\frac{u-s}{s})ds'\right) ds - \int_{(u-\epsilon)^+}^u \left(\int_s^u f(\frac{s'-s}{s})ds'\right) ds.$$

En changeant l'ordre d'intégration, on peut intégrer partiellement certains termes :

$$\begin{aligned} K_\epsilon(u) &= \int_{(u-\epsilon)^+}^u (s'-(u-\epsilon)^+) f(\frac{u-s'}{s'}) ds' + \int_{(u-\epsilon)^+}^u (u-s) f(\frac{u-s}{s}) ds, \\ &- \int_{(u-\epsilon)^+}^u \left(\int_s^u f(\frac{s'-s}{s}) ds' \right) ds. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on note la variable s au lieu de s', afin de réunir les trois termes sous la forme d'une seule intégrale en ds.

$$K_\epsilon(u) = \int_{(u-\epsilon)^+}^u \left[(s-(u-\epsilon)^+) f\left(\frac{u-s}{s}\right) + (u-s) f\left(\frac{u-s}{s}\right) - \int_s^u f\left(\frac{s'-s}{s}\right) ds' \right] ds.$$

On simplifie le terme entre crochet en notant que $s-(u-\epsilon)^+ + (u-s) = u \wedge \epsilon$. On arrive alors à cette expression :

$$K_\epsilon(u) = \int_{(u-\epsilon)^+}^u \left[f\left(\frac{u-s}{s}\right) (u \wedge \epsilon) - \int_s^u f\left(\frac{s'-s}{s}\right) ds' \right] ds.$$

Puis on fait le changement de variable $v = \frac{s'-s}{s}$ dans l'intégrale en ds' : $\int_s^u f\left(\frac{s'-s}{s}\right) ds' = s \int_0^{\frac{u-s}{s}} f(v) dv$. On reporte dans $K_\epsilon(u)$.

$$K_\epsilon(u) = \int_{(u-\epsilon)^+}^u \left[f\left(\frac{u-s}{s}\right) (u \wedge \epsilon) - s \int_0^{\frac{u-s}{s}} f(v) dv \right] ds.$$

Finalement,

$$K_\epsilon(u) = \mathbb{1}_{\{u \leqslant \epsilon\}} \int_0^u \left(f\left(\frac{u-s}{s}\right) u - sF\left(\frac{u-s}{s}\right) \right) ds + \mathbb{1}_{\{\epsilon < u\}} \int_{u-\epsilon}^u \left(f\left(\frac{u-s}{s}\right) \epsilon - sF\left(\frac{u-s}{s}\right) \right) ds.$$

On reporte ce résultat dans (3.24) :

$$\begin{aligned} B &= \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_0^\epsilon \left[\int_0^u \left(f\left(\frac{u-s}{s}\right) u - sF\left(\frac{u-s}{s}\right) \right) ds \right] du \\ &+ \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_\epsilon^T \left[\int_{u-\epsilon}^u \left(f\left(\frac{u-s}{s}\right) \epsilon - sF\left(\frac{u-s}{s}\right) \right) ds \right] du. \end{aligned}$$

3. Majoration de B. Comme $F \geqslant 0$, on majore simplement par

$$B \leqslant \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_0^\epsilon \left[\int_0^u f\left(\frac{u-s}{s}\right) u ds \right] du + \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_\epsilon^T \left[\int_{u-\epsilon}^u f\left(\frac{u-s}{s}\right) \epsilon ds \right] du.$$

On applique Fubini dans les deux intégrales :

$$B \leqslant \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_0^\epsilon \left[\int_s^\epsilon f\left(\frac{u-s}{s}\right) u du \right] ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_0^T \left[\int_{s\vee\epsilon}^{T\wedge(s+\epsilon)} f\left(\frac{u-s}{s}\right) \epsilon du \right] ds.$$

On décompose la deuxième intégrale en trois :

$$\begin{aligned} B &\leqslant \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_0^\epsilon \left[\int_s^\epsilon f\left(\frac{u-s}{s}\right) u du \right] ds \\ &+ \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_0^\epsilon \left[\int_\epsilon^{s+\epsilon} f\left(\frac{u-s}{s}\right) \epsilon du \right] ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_\epsilon^{T-\epsilon} \left[\int_s^{s+\epsilon} f\left(\frac{u-s}{s}\right) \epsilon du \right] ds \\ &+ \frac{4}{\pi\epsilon^2} \int_{T-\epsilon}^T \left[\int_s^T f\left(\frac{u-s}{s}\right) \epsilon du \right] ds. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $v = \frac{u-s}{s}$ dans les intégrales en du.

$$\begin{aligned} B &\leqslant \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_0^{\epsilon}\left[\int_0^{\frac{\epsilon-s}{s}} f(v)s^2(1+v)dv\right]ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_0^{\epsilon}\left[\int_{\frac{\epsilon-s}{s}}^{\frac{\epsilon}{s}} s\epsilon f(v)dv\right]ds \\ &+\frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\left[\int_0^{\frac{\epsilon}{s}} s\epsilon f(v)dv\right]ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_{T-\epsilon}^{T}\left[\int_0^{\frac{T-s}{s}} s\epsilon f(v)dv\right]ds. \end{aligned}$$

On majore $f(v)$ par $\sqrt{v}$ et on a :

$$\begin{aligned} B &\leqslant \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_0^{\epsilon}\left[\int_0^{\frac{\epsilon-s}{s}} s^2(1+v)\sqrt{v}dv\right]ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_0^{\epsilon}\left[\int_{\frac{\epsilon-s}{s}}^{\frac{\epsilon}{s}} s\epsilon\sqrt{v}dv\right]ds \\ &+\frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\left[\int_0^{\frac{\epsilon}{s}} s\epsilon\sqrt{v}dv\right]ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_{T-\epsilon}^{T}\left[\int_0^{\frac{T-s}{s}} s\epsilon\sqrt{v}dv\right]ds. \end{aligned}$$

Pour chacun des termes entre crochets, on majore v par la borne supérieure de l'intégrale en dv :

$$\begin{aligned} B &\leqslant \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_0^{\epsilon}\left[\int_0^{\frac{\epsilon-s}{s}} s^2(1+\frac{\epsilon-s}{s})\sqrt{\frac{\epsilon-s}{s}}dv\right]ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_0^{\epsilon}\left[\int_{\frac{\epsilon-s}{s}}^{\frac{\epsilon}{s}} s\epsilon\sqrt{\frac{\epsilon}{s}}dv\right]ds \\ &+\frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\left[\int_0^{\frac{\epsilon}{s}} s\epsilon\sqrt{\frac{\epsilon}{s}}dv\right]ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_{T-\epsilon}^{T}\left[\int_0^{\frac{T-s}{s}} s\epsilon\sqrt{\frac{T-s}{s}}dv\right]ds. \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} B &\leqslant \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_0^{\epsilon}\left[\frac{\epsilon(\epsilon-s)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{s}}\right]ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_0^{\epsilon}\left[\epsilon\sqrt{\epsilon}\sqrt{s}\right]ds \\ &+\frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\left[\frac{\epsilon^2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{s}}\right]ds + \frac{4}{\pi\epsilon^2}\int_{T-\epsilon}^{T}\left[\frac{\epsilon(T-s)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{s}}\right]ds. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale (resp. la quatrième), on majore $\epsilon - s$ (resp. $T - s$) par ϵ, et il vient :

$$\begin{aligned} B &\leqslant \frac{4\sqrt{\epsilon}}{\pi}\int_0^{\epsilon}\frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{4}{\pi\sqrt{\epsilon}}\int_0^{\epsilon}\sqrt{s}ds + \frac{4\sqrt{\epsilon}}{\pi}\int_{\epsilon}^{T-\epsilon}\frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{4\sqrt{\epsilon}}{\pi}\int_{T-\epsilon}^{T}\frac{ds}{\sqrt{s}}, \\ &\leqslant \frac{4\sqrt{\epsilon}}{\pi}\int_0^{T}\frac{ds}{\sqrt{s}} + \frac{4}{\pi\sqrt{\epsilon}}\int_0^{\epsilon}\sqrt{s}ds, \\ &\leqslant \frac{8\sqrt{\epsilon T}}{\pi} + \frac{8\epsilon}{3\pi}. \end{aligned}$$

En reportant la majoration de B dans (3.23), on a

$$E\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\widetilde{I}_{\epsilon}^1(t))^2\right) \leqslant \frac{8\sqrt{\epsilon T}}{\pi} + \frac{8\epsilon}{3\pi}. \qquad (3.25)$$

Ce résultat et (3.22) donnent la vitesse de convergence de $I_{\epsilon}^1(t)$. ■

3.4.3 Vitesse de convergence de $I_{\epsilon}^2(t)$.

On rappelle que $I_{\epsilon}^2(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t (X_{s+\epsilon} - X_s)\mathbb{1}_{\{0<X_{s+\epsilon}\}}ds$. La vitesse de convergence de $I_{\epsilon}^2(t)$ est du même ordre que celle de $I_{\epsilon}^1(t)$, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.4.5 *Pour tout $T > 0, \delta \in]0, \frac{1}{2}[$,*

$$\left\| \sup_{t \in [0,T]} \left| I_\epsilon^2(t) - X_t^+ - \frac{1}{2} L_t^0(X) \right| \right\|_2 \leqslant c_8 \epsilon^{\frac{\delta}{2}} + c_9 \epsilon^{\frac{1}{4}} + c_{10} \epsilon^\delta + c_{11} \epsilon^{\frac{1}{2}},$$

avec $c_8 = 2\sqrt{E(K_\delta^2)} \int_0^\infty y^{\delta+1} \Phi(-y) dy$, $c_9 = \frac{2\sqrt{2}\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\pi}}$, $c_{10} = \frac{7\delta+8}{\delta+1} \sqrt{E(C_\delta^2)}$, $c_{11} = 2\sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}}$.

Preuve. Pour commencer, on décompose $I_\epsilon^2(t) - X_t^+ - \frac{1}{2} L_t^0(X)$:

$$I_\epsilon^2(t) - X_t^+ - \frac{1}{2} L_t^0(X) = \left(\widetilde{I}_\epsilon^2(t) - X_t^+ - \frac{1}{2} L_t^0(X) \right) + \Delta_2(t, \epsilon), \tag{3.26}$$

avec

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_\epsilon^2(t) &= \int_0^t \frac{1}{\epsilon} (X_{(s+\epsilon)\wedge t} - X_s) \mathbb{1}_{\{0 < X_{(s+\epsilon)\wedge t}\}} ds, \\ \Delta_2(t, \epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} \int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_{s+\epsilon} - X_s)\, \mathbb{1}_{\{0 < X_{s+\epsilon}\}} ds - \frac{1}{\epsilon} \int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_t - X_s)\, \mathbb{1}_{\{0 < X_t\}} ds. \end{aligned}$$

Le Lemme 1.3.3 donne :

$$\sup_{t \in [0,T]} |\Delta_2(t, \epsilon)| \leqslant 2 C_\delta \epsilon^\delta. \tag{3.27}$$

Ensuite, on étudie la convergence de $\widetilde{I}_\epsilon^2(t)$ vers $X_t^+ + \frac{1}{2} L_t^0(X)$. L'idée principale de la preuve est d'exprimer $\widetilde{I}_\epsilon^2(t)$ en fonction de $I_\epsilon^{4,1}(t)$ et $I_\epsilon^{4,2}(t)$.

D'abord, on décompose $\widetilde{I}_\epsilon^2(t)$ comme une somme de deux termes :

$$\widetilde{I}_\epsilon^2(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_{(s+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{0 < X_{(s+\epsilon)\wedge t}\}} ds - \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_s \mathbb{1}_{\{0 < X_{(s+\epsilon)\wedge t}\}} ds.$$

Le changement de variable $u = s + \epsilon$ dans le premier terme donne :

$$\begin{aligned} \int_0^t X_{(s+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{0 < X_{(s+\epsilon)\wedge t}\}} ds &= \int_\epsilon^{t+\epsilon} X_{u\wedge t} \mathbb{1}_{\{0 < X_{u \wedge t}\}} du, \\ &= \int_t^{t+\epsilon} X_t \mathbb{1}_{\{0 < X_t\}} du + \int_\epsilon^t X_u \mathbb{1}_{\{0 < X_u\}} du, \\ &= \epsilon X_t^+ + \int_0^t X_u \mathbb{1}_{\{0 < X_u\}} du - \int_0^\epsilon X_u \mathbb{1}_{\{0 < X_u\}} du. \end{aligned}$$

En additionnant avec le deuxième terme, il vient :

$$\widetilde{I}_\epsilon^2(t) = X_t^+ + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_u \left(\mathbb{1}_{\{0 < X_u\}} - \mathbb{1}_{\{0 < X_{(u+\epsilon)\wedge t}\}} \right) du - \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon X_u^+ du.$$

On utilise une nouvelle fois l'identité

$$\mathbb{1}_{\{0 < X_u\}} - \mathbb{1}_{\{0 < X_{(u+\epsilon)\wedge t}\}} = \mathbb{1}_{\{0 < X_u, X_{(u+\epsilon)\wedge t} \leqslant 0\}} - \mathbb{1}_{\{0 < X_{(u+\epsilon)\wedge t}, X_u \leqslant 0\}},$$

et on obtient

$$\widetilde{I}_\epsilon^2(t) = X_t^+ + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_u^- \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} \leqslant 0\}} du - \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_u^+ \mathbb{1}_{\{0 < X_{(u+\epsilon)\wedge t}\}} du - \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon X_u^+ du,$$

c'est-à-dire

$$\widetilde{I}_\epsilon^2(t) = X_t^+ + I_\epsilon^{4,1}(t) + I_\epsilon^{4,2}(t) - \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon X_u^+ du + r_\epsilon^4(t),$$

où on rappelle que

$$\begin{aligned} I_\epsilon^{4,1}(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^- 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du, \quad I_\epsilon^{4,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+ 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}\leqslant 0\}}du, \\ r_\epsilon^4(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+ 1\!\!1_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}=0\}}du. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\widetilde{I}_\epsilon^2(t) - X_t^+ - \frac{1}{2}L_t^0(X) = \left(I_\epsilon^{4,1}(t) - \frac{1}{4}L_t^0(X)\right) + \left(I_\epsilon^{4,2}(t) - \frac{1}{4}L_t^0(X)\right) - \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon X_u^+ du + r_\epsilon^4(t). \tag{3.28}$$

Pour $\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon X_u^+ du$, d'après le Lemme 1.3.3, on majore X_u par $C_\delta u^\delta$ et il vient

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon X_u^+ du\right| \leqslant \frac{C_\delta}{\delta+1}\epsilon^\delta. \tag{3.29}$$

Finalement, en utilisant la majoration précédente, (3.1) et le Théorème 3.3.1, on a

$$\begin{aligned} \left\|\sup_{t\in[0,T]}\left|\widetilde{I}_\epsilon^2(t) - X_t^+ - \frac{1}{2}L_t^0(X)\right|\right\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant \left(2\sqrt{E(K_\delta^2)}\int_0^\infty y^{\delta+1}\Phi(-y)dy\right)\epsilon^{\frac{\delta}{2}} + \left(\frac{2\sqrt{2}\sqrt[4]{T}}{\sqrt{\pi}}\right)\epsilon^{\frac{1}{4}} \\ &+ \left(\frac{5\delta+6}{\delta+1}\sqrt{E(C_\delta^2)}\right)\epsilon^\delta + \left(2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)\epsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Rajouter (3.27) termine la preuve de la proposition 3.4.5 . ∎

Finalement, le Théorème 3.4.1 est une conséquence directe des Propositions 3.4.4 et 3.4.5 . ∎

3.4.4 Convergence presque sûre.

On montre la Proposition 3.4.2. Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, décroissante vers 0 et vérifiant $\sum_{i=1}^\infty \sqrt{\epsilon_i} < \infty$. Notons que le Théorème 3.3.1 ne permet pas d'obtenir directement la Proposition 3.4.2 via le Lemme de Borel Cantelli, puisqu'on ne peut pas prendre $\delta = \frac{1}{2}$.

Pour commencer, on montre la convergence p.s de $I_{\epsilon_n}^{4,2}(t)$ vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$, quand $n \to \infty$. On rappelle l'identité (3.12) :

$$I_\epsilon^{4,2}(t) - \frac{1}{4}L_t^0(X) = D_\epsilon^1(t) + D_\epsilon^2(t) + D_\epsilon^3(t) + \left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) - \frac{1}{4}L_t^0(X)\right).$$

D'après (3.5), (3.9) et (3.10) , les quantités $\left(\frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) - \frac{1}{4}L_t^0(X)\right)$, $D_\epsilon^2(t)$ et $D_\epsilon^3(t)$ tendent vers 0, quand $\epsilon \to 0$, avec un taux de convergence d'ordre $\delta < \frac{1}{2}$. Mais ce n'est pas un problème, puisque la convergence a lieu presque sûrement.

On étudie maintenant $D_\epsilon^1(t)$. D'après (3.11), il existe une constante C telle que $E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(D_\epsilon^1(t)\right)^2\right] \leqslant C\sqrt{\epsilon}$. Donc, pour tout $n \in N$,

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(D_\epsilon^1(t)\right)^2\right] \leqslant C\sqrt{\epsilon_n}.$$

Pour tout $\eta > 0$, on a par l'inégalité de Markov

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|D_\epsilon^1(t)\right| > \eta\right) \leqslant \frac{E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|D_\epsilon^1(t)\right|^2\right)}{\eta^2} \leqslant \frac{C\sqrt{\epsilon_n}}{\eta^2}.$$

Comme $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\epsilon_n}<\infty$, par le Lemme de Borel-Cantelli, $\left(D^1_{\epsilon_n}(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 0, uniformément pour $t\in[0,T]$.

Par conséquent, $I^{4,2}_{\epsilon_n}(t)$ converge p.s vers $\frac{1}{4}L^0_t(X)$, quand $n\to\infty$. La convergence de $I^{4,1}_{\epsilon_n}(t)$ vers $\frac{1}{4}L^0_t(X)$ s'obtient par la symétrie du mouvement brownien.

Finalement, on étudie la convergence de $J_{\epsilon_n}(t)$. Il est clair que (3.19), (2.4), (3.26) et (3.28) entraînent que $J_\epsilon(t)-L^0_t(X)$ est égal à :

$$\widetilde{I}^1_\epsilon(t)+\Delta^1_\epsilon(t)+\left(I^{4,1}_\epsilon(t)-\frac{1}{4}L^0_t(X)\right)+\left(I^{4,2}_\epsilon(t)-\frac{1}{4}L^0_t(X)\right)+\Delta^2_\epsilon(t)+r^4_\epsilon(t)-\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon X^+_u du.$$

On procède comme pour la convergence de $I^{4,2}_{\epsilon_n}(t)$. D'après (3.22), (3.27), (3.1) et (3.29), on déduit que $\Delta^1_\epsilon(t)+\Delta^2_\epsilon(t)+r^4_\epsilon(t)-\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon X^+_u du$ tend p.s vers 0 quand $\epsilon\to 0$. On a déjà montré que $\left(I^{4,i}_{\epsilon_n}(t)-\frac{1}{4}L^0_t(X)\right)$, $i=1,2$, converge p.s. quand $n\to\infty$. Enfin, par (3.25), il existe une constante C telle que

$$E\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}(\widetilde{I}^1_\epsilon(t))^2\right)\leqslant C\sqrt{\epsilon},$$

donc par le Lemme de Borel-Cantelli, $\widetilde{I}^1_{\epsilon_n}(t)$, converge presque sûrement quand $n\to\infty$. ■

Chapitre 4

Convergence vers le temps local de certaines martingales gaussiennes

Dans tout ce chapitre, σ est une fonction de carré intégrable définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que

1. il existe un réel $a > 0$ tel que $a \leqslant \sigma(s)\,, \forall s \in \mathbb{R}^+$,
2. σ est une fonction hölderienne d'ordre γ, avec $\gamma > \frac{1}{4}$.

On considère alors $(X_t)_{t \geqslant 0}$ la martingale définie par $X_t = \int_0^t \sigma(s) dB_s$, avec B mouvement brownien standard. Elle vérifie en particulier les propriétés suivantes :

Lemme 4.0.6 *1. Pour tout $t \in [0, T+1]$, X_t est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int_0^t \sigma^2(s) ds$. Si $s > u \geqslant 0$, alors X_u est indépendante de $X_s - X_u$, variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int_u^s \sigma^2(v) dv$.*

2. La variation quadratique de X est par $< X >_t = \int_0^t \sigma^2(s) ds$.

3. Comme σ est Hölderien, il existe une constante $b > 0$ telle que pour tout $s \in [0, T+1]$, $\sigma(s) \leqslant b$. De plus σ^2 est aussi Hölderien d'ordre γ sur $[0, T+1]$.

4. Pour $\beta \in]0, \frac{1}{2}[$, $a \to L_t^a(X)$ est Hölderien d'ordre β uniformément en $t \in [0, T]$.

4.1 Résultats

D'une part, comme X est une martingale continue telle que $d < X >$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, les Théorèmes 2.1.2 et 2.2.1 s'appliquent : $I_\epsilon^1(t)$ et $I_\epsilon^3(t)$ convergent vers $\int_0^t \mathbb{1}_{\{0 < X_s\}} dX_s$ et $\frac{1}{4} L_t^0(X)$ respectivement.

D'autre part, X est une diffusion vérifiant (2.1) avec $\sigma(s, x) = \sigma(s)$ et $b(s, x) = 0$. Comme X_t est une variable aléatoire gaussienne, elle admet pour densité

$$p(t, x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\int_0^t \sigma^2(u) du}\right)}{\sqrt{2\pi \int_0^t \sigma^2(u) du}},$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. $\sigma(s,x)$ est continue, elle vérifie $x \to \sigma^2(s,x) = \sigma^2(s) \in W^{2,1}_{loc}(\mathbb{R})$. D'une manière évidente $x \to b(s,x) = 0 \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$. La densité de X_s vérifie :

$$\begin{aligned} x \to xp(s,x) &= \frac{x\exp\left(-\frac{x^2}{2\int_0^s \sigma^2(u)du}\right)}{\sqrt{2\pi\int_0^s \sigma^2(u)du}} \quad \in \quad W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}), \\ x \to p\sigma^2(s,x) &= \sigma^2(s)\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\int_0^t \sigma^2(u)du}\right)}{\sqrt{2\pi\int_0^s \sigma^2(u)du}} \quad \in \quad W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}), \quad \forall s > 0. \end{aligned}$$

Comme $\sigma \in [a,b]$, on a $a^2 s < \int_0^s \sigma^2(u)du < b^2 s$ et ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p\sigma^2}{\partial x}(s,x) &= \sigma^2(s)\frac{-x\exp\left(-\frac{x^2}{2\int_0^s \sigma^2(u)du}\right)}{(\int_0^s \sigma^2(u)du)\sqrt{2\pi\int_0^s \sigma^2(u)du}} \quad \in \quad L^1([0,t]\times\mathbb{R}), t\in]0,T], \\ \frac{\partial^2 xp}{\partial x^2} &= \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\int_0^t \sigma^2(u)du}\right)}{\sqrt{2\pi\int_0^t \sigma^2(u)du}}\left(\frac{x^3}{\left(\int_0^t \sigma^2(u)du\right)^2} - \frac{3x}{\int_0^t \sigma^2(u)du}\right) \quad \in \quad L^1([0,t]\times\mathbb{R}), t\in]0,T]. \end{aligned}$$

Donc X vérifie (2.1)-(2.2) et les Théorèmes 2.1.1, 2.1.3 et 2.2.2 s'appliquent. On a ainsi la convergence (ucp) de $J_\epsilon(t)$, $I^2_\epsilon(t)$ et $I^4_\epsilon(t)$ vers $L^0_t(X)$, $X^+_t + \frac{1}{2}L^0_t(X)$ et $\frac{1}{2}L^0_t(X)$ respectivement.

Comme dans le cas brownien, on peut aller plus loin dans les décompositions et montrer la convergence des termes suivants :

$$\begin{aligned} I^{3,1}_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u>0\}}du, \quad I^{3,2}_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du, \\ r^3_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_{(u+\epsilon)\wedge t}\mathbb{1}_{\{X_u=0\}}du, \\ I^{4,1}_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^-_u\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}>0\}}du, \quad I^{4,2}_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}du, \\ r^4_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X^+_u\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}=0\}}du. \end{aligned}$$

Commençons par montrer que $r^3_\epsilon(t)$ et $r^4_\epsilon(t)$ convergent vers 0. Comme σ ne s'annule pas, on peut introduire $\sigma^2(u)$ dans $\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_u=0\}}du$ pour faire apparaître la variation quadratique de X.

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_u=0\}}du = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_u=0\}}\frac{1}{\sigma^2(u)}d<X>_u .$$

Par l'extension 1.1.10 de la formule de densité d'occupation :

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_u=0\}}du = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{x=0\}}\frac{1}{\sigma^2(s)}dL^x_s(X)\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t \frac{dL^x_s(X)}{\sigma^2(s)}\right)\mathbb{1}_{\{x=0\}}dx = 0.$$

Par conséquent, $r^3_\epsilon(t)$ est nul. Ensuite, on décompose $r^4_\epsilon(t)$ comme :

$$r^4_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} X^+_u\mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}=0\}}du + \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X^+_u\mathbb{1}_{\{X_t=0\}}du.$$

Le changement de variable $v = u+\epsilon$ dans la première intégrale donne :

$$r^4_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_\epsilon^{t\vee\epsilon} X^+_{v-\epsilon}\mathbb{1}_{\{X_v=0\}}dv + \frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^t X^+_u\mathbb{1}_{\{X_t=0\}}du.$$

Comme précédemment, la première intégrale de $r_\epsilon^4(t)$ est nulle. Par le Lemme 1.3.3, le second terme tend p.s. vers 0, uniformément sur $[0,T]$.

Il reste donc à étudier $I_\epsilon^{3,i}(t)$ et $I_\epsilon^{4,i}(t)$.

Théorème 4.1.1

$$\lim_{\epsilon\to 0}(ucp)I_\epsilon^{4,1}(t) = \lim_{\epsilon\to 0}(ucp)I_\epsilon^{4,2}(t) = \frac{1}{4}L_t^0(X),$$

et

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ (ucp)\ I_\epsilon^{3,1}(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\ (ucp)\ I_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{4}L_t^0(X).$$

Remarque. La propriété de Hölder de σ permet de ne pas trop s'éloigner du cas brownien. En effet, pour $t \geqslant 0, \epsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} E\Big(X_{t+\epsilon} - X_t - \sigma(t)(B_{t+\epsilon} - B_t)\Big)^2 &= E\left(\int_t^{t+\epsilon}(\sigma(s)-\sigma(t))dB_s\right)^2, \\ &= E\left(\int_t^{t+\epsilon}(\sigma(s)-\sigma(t))^2 ds\right), \\ &\leqslant \int_t^{t+\epsilon} C(s-t)^{2\gamma}ds, \\ &\leqslant \frac{C}{2\gamma+1}\epsilon^{2\gamma+1}. \end{aligned}$$

Les variations de X sont donc proches de celles du mouvement brownien multipliées par la fonction σ. Les méthodes utilisées pour le mouvement brownien peuvent ainsi être utilisées pour X moyennant un ajustement par des coefficients dépendant de σ.

Preuve du Théorème 4.1.1. Par symétrie,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ \text{(ucp)}\ I_\epsilon^{3,1}(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\ \text{(ucp)}\ I_\epsilon^{3,2}(t) \text{ et } \lim_{\epsilon\to 0}\ \text{(ucp)}\ I_\epsilon^{4,1}(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\ \text{(ucp)}\ I_\epsilon^{4,2}(t),$$

donc il suffit d'étudier la convergence de $I_\epsilon^{3,2}(t)$ et $I_\epsilon^{4,2}(t)$. On commence par l'étude de $I_\epsilon^{4,2}(t)$ (voir ci-dessous et les sections 4.2, 4.3). Puis on étudie $I_\epsilon^{3,2}(t)$ dans la section 4.4

Étude de $I_\epsilon^{4,2}(t)$. Comme pour le mouvement brownien, on remplace $\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}$ par $E(\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}|X_u)$. Ce terme peut s'exprimer en fonction de X_u. En effet,

$$E(\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}|X_u) = E(\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}-X_u<-X_u\}}|X_u).$$

Or $X_{(u+\epsilon)\wedge t} - X_u$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\sigma^2(s)ds$ indépendante de X_u, donc $G = \frac{X_{(u+\epsilon)\wedge t}-X_u}{\sqrt{\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\sigma^2(s)ds}}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite indépendante de X_u. Si on note Φ la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite, alors on a

$$\begin{aligned} E(\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}}|X_u) &= E(\mathbb{1}_{\{G<\frac{-X_u}{\sqrt{\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\sigma^2(s)ds}}\}}|X_u), \\ &= \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\sigma^2(s)ds}}\right). \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on pose

$$S_v^w = \int_v^w \sigma^2(s)ds \text{ pour tout } w \geqslant v \geqslant 0.$$

Il vient en introduisant ce terme dans $I_\epsilon^{4,2}(t)$:

$$I_\epsilon^{4,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+ \left(\mathbb{I}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{(u+\epsilon)\wedge t}}}\right)\right) du + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+ \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{(u+\epsilon)\wedge t}}}\right) du.$$

On transforme la deuxième intégrale pour faire apparaître $u+\epsilon$ à la place de $(u+\epsilon)\wedge t$, et on obtient alors

$$I_\epsilon^{4,2}(t) = A_\epsilon^1(t) + A_\epsilon^2(t) + A_\epsilon^3(t), \tag{4.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_\epsilon^1(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+ \left[\mathbb{I}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{(u+\epsilon)\wedge t}}}\right)\right] du,\\
A_\epsilon^2(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \left[\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^t}}\right) - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)\right] du,\\
A_\epsilon^3(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+ \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) du.
\end{aligned}$$

Le terme principale est $A_\epsilon^3(t)$, qui converge vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ (voir Section 4.2). Dans la Section 4.3, on montre que $A_\epsilon^1(t) + A_\epsilon^2(t)$ converge vers 0.

4.2 Convergence de $A_\epsilon^3(t)$ vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$

Comme σ ne s'annule pas, on peut diviser et multiplier par $\sigma^2(u)$ pour faire apparaître $d < X >_u$. On écrit alors $A_\epsilon^3(t)$ sous la forme suivante :

$$A_\epsilon^3(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t h(u, X_u) d < X >_u,$$

avec h la fonction borélienne positive définie par :

$$h(u,x) = \frac{x^+}{\sigma^2(u)}\Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right).$$

Par l'extension (référence) de la formule de densité d'occupation, on a

$$A_\epsilon^3(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t \frac{x^+}{\sigma^2(u)}\Phi\left(-\frac{x}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) dL_u^x(X)dx.$$

Le changement de variable $y\sqrt{\epsilon} = x$ donne :

$$A_\epsilon^3(t) = \int_{\mathbb{R}}\int_0^t \frac{y^+}{\sigma^2(u)}\Phi\left(-\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) dL_u^{\sqrt{\epsilon}y}(X)dy.$$

L'intégrale sur $\mathbb{R}$ devient une intégrale sur $\mathbb{R}^+$ à cause du y^+. Puis on ajoute et on retranche $\Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)}\right)$, ce qui permet de décomposer $A_\epsilon^3(t)$ en deux termes.

$$A_\epsilon^3(t) = D_\epsilon^6(t) + D_\epsilon^7(t), \tag{4.2}$$

avec

$$\begin{aligned}
D_\epsilon^6(t) &= \int_0^\infty \int_0^t \frac{y}{\sigma^2(u)} \left[\Phi\left(-\frac{\sqrt{\epsilon} y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}} \right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) \right] dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X) dy, \\
D_\epsilon^7(t) &= \int_0^\infty \int_0^t \frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X) dy.
\end{aligned}$$

Le terme principal est $D_\epsilon^7(t)$, car il converge vers $\frac{1}{4} L_t^0(X)$ (voir section 4.2.1.). On montre à la section 4.2.2 que $D_\epsilon^6(t)$ converge vers 0.

4.2.1 Convergence de $D_\epsilon^7(t)$ vers $\frac{1}{4} L_t^0(X)$.

Pour $y > 0$ fixé, la mesure μ_ϵ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\mu_\epsilon(ds) = dL_s^{\sqrt{\epsilon} y}(X)$ a pour fonction de répartition $s \to \mu_\epsilon([0, s]) = L_s^{\sqrt{\epsilon} y}(X)$. Or, pour tout s positif, $\lim_{\epsilon \to 0} L_s^{\sqrt{\epsilon} y}(X) = L_s^0(X)$ par continuité de $L_s^{\cdot}(X)$. Comme $L_s^0(X)$ est la fonction de répartition de la mesure $\mu(ds) = dL_s^0(X)$, on a la convergence étroite de μ_ϵ vers μ.

La fonction $u \to \frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right)$ est continue et bornée, car $\sigma(u) \in [a, b]$ pour tout u. Donc

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^t \frac{y^+}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X) = \int_0^t \frac{y^+}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^0(X).$$

Établissons une domination de $\int_0^t \frac{y^+}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X)$. Comme $\sigma(u) \in [a, b], y \geqslant 0$ et que Φ est une fonction croissante, on a

$$\frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) \leqslant \frac{y}{a} \Phi\left(-\frac{y}{b} \right), \qquad \forall u \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^t \frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X) \right| &\leqslant \frac{y}{a^2} \Phi\left(-\frac{y}{b} \right) \int_0^t dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X), \\
&\leqslant \frac{y}{a^2} \Phi\left(-\frac{y}{b} \right) L_t^{\sqrt{\epsilon} y}(X),, \qquad \forall y \geqslant 0.
\end{aligned}$$

On écrit $L_t^{\sqrt{\epsilon} y}(X) = L_t^{\sqrt{\epsilon} y}(X) - L_t^0(X) + L_t^0(X)$. D'après le Lemme (4.0.6), pour $\beta < \frac{1}{2}$, $a \to L_t^a(X)$ est hölderien d'ordre β. Donc il existe K variable aléatoire telle que presque sûrement

$$\forall t \in [0, T], \forall a, a' \in \mathbb{R}, \quad |L_t^a(X) - L_t^{a'}(X)| \leqslant K |a - a'|^\beta.$$

Par conséquent,

$$|L_t^{\sqrt{\epsilon} y}(X)| \leqslant K \epsilon^{\frac{\beta}{2}} y^\beta + L_t^0(X). \tag{4.3}$$

Ce qui donne

$$\left| \int_0^t \frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X) \right| \leqslant \frac{y}{a^2} \Phi\left(-\frac{y}{b} \right) \left(K \epsilon^{\frac{\beta}{2}} y^\beta + L_t^0(X) \right).$$

On majore ϵ par 1, ce qui donne

$$\left| \int_0^t \frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X) \right| \leqslant \left(\frac{K y^{\beta+1}}{a^2} + L_t^0(X) \frac{y}{a^2} \right) \Phi\left(-\frac{y}{b} \right).$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc et on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\infty \int_0^t \frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^{\sqrt{\epsilon} y}(X) dy = \int_0^\infty \int_0^t \frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)} \right) dL_u^0(X) dy.$$

Il reste à évaluer la limite. On fait le changement de variable $z = \frac{y}{\sigma(u)}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^t \frac{y}{\sigma^2(u)} \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)}\right) dL_u^0(X) dy &= \int_0^\infty \int_0^t z\Phi(-z) dL_u^0(X) dz, \\
&= \int_0^t \left(\int_0^\infty z\Phi(-z) dz \right) dL_u^0(X), \\
&= \int_0^t \frac{1}{4} dL_u^0(X), \\
&= \frac{1}{4} L_t^0(X).
\end{aligned}$$

On a donc presque sûrement convergence sur $[0,T]$ de la fonction $t \to D_\epsilon^7(t)$ vers $t \to \frac{1}{4}L_t^0(X)$, fonction croissante continue . Comme $\frac{y}{\sigma^2(u)}\Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)}\right)$ est positif, la fonction $t \to D_\epsilon^7(t)$ est croissante sur $[0,T]$ pour tout $\epsilon > 0$. Donc par le Théorème de Dini, on a la convergence uniforme sur $[0,T]$.

4.2.2 Convergence de $D_\epsilon^6(t)$ vers 0

On commence établir une majoration de

$$\Phi\left(-\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)}\right).$$

Si on considère deux réels $s' \leqslant s \leqslant 0$, pour tout $z \in [s', s]$, on a $e^{-\frac{z^2}{2}} \leqslant e^{-\frac{s^2}{2}}$. On en déduit

$$0 \leqslant \Phi(s) - \Phi(s') = \int_{s'}^s e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \leqslant e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{s - s'}{\sqrt{2\pi}}.$$

On applique ça pour $-\frac{y}{\sigma(u)}$ et $-\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}$.

$$\left|\Phi\left(-\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}} - \frac{y}{\sigma(u)}\right| \exp\left[\max\left(-\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}, -\frac{y}{\sigma(u)}\right)\right].$$

Comme σ est borné par b, on a $S_u^{u+\epsilon} = \int_u^{u+\epsilon} \sigma^2(v)dv \leqslant b^2\epsilon$. Ce qui implique que $-\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}} \leqslant -\frac{y}{b}$. De même, $-\frac{y}{\sigma(u)} \leqslant -\frac{y}{b}$. Ainsi, on obtient un majorant pour l'exponentielle.

$$\left|\Phi\left(-\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left|\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}} - \frac{y}{\sigma(u)}\right| \exp\left(-\frac{y}{b}\right).$$

Il reste à majorer le terme en valeur absolue

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}} - \frac{y}{\sigma(u)}\right| &\leqslant \frac{\left|\sqrt{\epsilon}\sigma(u) - \sqrt{S_u^{u+\epsilon}}\right|}{\sigma(u)\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}, \\
&\leqslant \frac{\left|\epsilon\sigma^2(u) - \int_u^{u+\epsilon} \sigma^2(v)dv\right|}{\sigma(u)\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}\left|\sqrt{\epsilon}\sigma(u) + \sqrt{S_u^{u+\epsilon}}\right|}
\end{aligned}$$

Pour les termes au dénominateur, $\sigma \geqslant a$ donne $S_u^{u+\epsilon} = \int_u^{u+\epsilon} \sigma^2(v)dv \geqslant a^2\epsilon$, et donc

$$\sigma(u)\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}\left|\sqrt{\epsilon}\sigma(u) + \sqrt{S_u^{u+\epsilon}}\right| \geqslant 2a^3\epsilon.$$

Pour le numérateur, on la propriété de höldérien de σ^2 : $|\sigma^2(v)-\sigma^2(u)| \leqslant C|v-u|^\gamma$, avec C une constante.

$$\begin{aligned}
\left|\epsilon\sigma^2(u) - \int_u^{u+\epsilon} \sigma^2(v)dv\right| &\leqslant \int_u^{u+\epsilon} |\sigma^2(v) - \sigma^2(u)|dv, \\
&\leqslant C\int_u^{u+\epsilon} |v-u|^\gamma dv, \\
&\leqslant \frac{C}{\gamma+1}\epsilon^{\gamma+1}
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\left|\Phi\left(-\frac{\sqrt{\epsilon}y}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sigma(u)}\right)\right| \leqslant \frac{C}{2a^3(\gamma+1)\sqrt{2\pi}}\epsilon^\gamma \exp\left(-\frac{y}{b}\right).$$

Reporter cette inégalité dans $D_\epsilon^6(t)$ donne :

$$|D_\epsilon^6(t)| \leqslant \frac{C}{2a^3(\gamma+1)\sqrt{2\pi}}\epsilon^\gamma \int_0^\infty \int_0^t \frac{y}{\sigma(u)} \exp\left(-\frac{y}{b}\right) dL_u^{\sqrt{\epsilon}y}(X)dx.$$

On minore σ par a et il vient :

$$\begin{aligned}
|D_\epsilon^6(t)| &\leqslant \frac{C}{2a^4(\gamma+1)\sqrt{2\pi}}\epsilon^\gamma \int_0^\infty \left(\int_0^t dL_u^{\sqrt{\epsilon}y}(X)\right) y\exp\left(-\frac{y}{b}\right) dy, \\
&\leqslant \frac{C}{2a^4(\gamma+1)\sqrt{2\pi}}\epsilon^\gamma \int_0^\infty \left(L_t^{\sqrt{\epsilon}y}(X)\right) y\exp\left(-\frac{y}{b}\right) dy.
\end{aligned}$$

D'après (4.3), on a

$$\begin{aligned}
|D_\epsilon^6(t)| &\leqslant \frac{C}{2a^4(\gamma+1)\sqrt{2\pi}}\epsilon^\gamma \int_0^\infty \left(K\epsilon^{\frac{\beta}{2}}y^\beta + L_t^0(X)\right) y\exp\left(-\frac{y}{b}\right) dy, \\
&\leqslant \epsilon^{\gamma+\frac{\beta}{2}}\left(\frac{CK}{2a^4(\gamma+1)\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^{\beta+1}\exp\left(-\frac{y}{b}\right)dy\right) + \epsilon^\gamma L_t^0(X)\left(\frac{C}{2a^4(\gamma+1)\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y\exp\left(-\frac{y}{b}\right)dy\right).
\end{aligned}$$

Comme $t \to L_t^0(X)$ est croissante, on a presque sûrement

$$|D_\epsilon^6(t)| \leqslant \epsilon^{\gamma+\frac{\beta}{2}}K_1 + \epsilon^\gamma L_T^0(X)K_2, \quad \forall t \in [0,T],$$

avec K_1, K_2 deux constantes. Donc $D_\epsilon^6(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément en $t \in [0,T]$.

4.3 Convergence de $A_\epsilon^1(t) + A_\epsilon^2(t)$ vers 0

4.3.1 Décomposition de $A_\epsilon^1(t) + A_\epsilon^2(t)$

1. On commence par s'occuper de $A_\epsilon^1(t)$, et on rappelle que

$$A_\epsilon^1(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t X_u^+\left[\mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{(u+\epsilon)\wedge t}}}\right)\right]du.$$

Notre objectif est d'utiliser la formule d'Itô pour transformer le terme entre crochet . Pour se ramener de $(u+\epsilon)\wedge t$ à $u+\epsilon$, on sépare $A_\epsilon^1(t)$ en deux parties :

$$A_\epsilon^1(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^t} X_u^+\left[\mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)\right]du + \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+\left[\mathbb{1}_{\{X_t<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^t}}\right)\right]du.$$

On sépare de nouveau le deuxième terme en deux partie, puis on remplace $-\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^t}}\right)$ par

$$\left[\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)-\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^t}}\right)\right]+\left[\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right)-\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)\right]-\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right),$$

où, pour $u\in[0,t]$ fixé, f_u est la fonction affine définie par

$$f_u(s)=\frac{S_u^{u+\epsilon}}{\epsilon}(\epsilon+u-s),\quad s\in[u,u+\epsilon].$$

La fonction f_u est positive sur l'intervalle $[u,u+\epsilon]$. Notons deux valeurs particulières : $f_u(u)=S_u^{u+\epsilon}$ et $f_u(u+\epsilon)=0$.

On obtient alors la décomposition suivante :

$$A_\epsilon^1(t)=R_\epsilon^1(t)+R_\epsilon^2(t)+D_\epsilon^3(t)+D_\epsilon^4(t)+D_\epsilon^5(t),$$

avec

$$R_\epsilon^1(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^t} X_u^+\left[\mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}<0\}}-\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)\right]du, \tag{4.4}$$

$$R_\epsilon^2(t) = \int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+\left[\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right)-\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)\right]du, \tag{4.5}$$

$$D_\epsilon^3(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+\mathbb{1}_{\{X_t<0\}}du, \tag{4.6}$$

$$D_\epsilon^4(t) = -\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right)du, \tag{4.7}$$

$$D_\epsilon^5(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+\left[\Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)-\Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^t}}\right)\right]du.$$

On remarque que $D_\epsilon^5(t)=-A_\epsilon^1(t)$. Par conséquent, on a

$$A_\epsilon^1(t)+A_\epsilon^2(t)=R_\epsilon^1(t)+R_\epsilon^2(t)+D_\epsilon^3(t)+D_\epsilon^4(t). \tag{4.8}$$

2. Étude de $R_\epsilon^1(t)$. On veut employer la formule d'Itô pour transformer le terme entre crochet en une intégrale. On pose :

$$\phi_u(s,x)=\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{\{\sqrt{f_u(s)}y<-x\}}e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}},\qquad \forall x\in\mathbb{R}, s\in[u,u+\epsilon]. \tag{4.9}$$

Alors

$$\phi_u(s,x)=\begin{cases}\Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{f_u(s)}}\right) & \text{si } f_u(s)>0,\\ \mathbb{1}_{\{x<0\}} & \text{sinon.}\end{cases} \tag{4.10}$$

ϕ_u est la fonction pour laquelle on veut utiliser la formule d'Itô.

On a deux autres expressions pour ϕ, obtenues par changement de variable :

$$\phi_u(s,x) = \int_{-\infty}^{-x}\exp\left(-\frac{z^2}{2f_u(s)}\right)\frac{dz}{\sqrt{2\pi f_u(s)}}, \tag{4.11}$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2f_u(s)}\right)\frac{dz}{\sqrt{2\pi f_u(s)}},. \tag{4.12}$$

D'après (4.10),

$$\phi_u(u, X_u) = \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{f_u(u)}}\right) = \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) \text{ et } \phi_u(u+\epsilon, X_{u+\epsilon}) = \mathbb{I}_{\{X_{u+\epsilon}<0\}},$$

donc le terme entre crochet de $R_\epsilon^1(t)$ s'exprime sous la forme

$$\mathbb{I}_{\{X_{u+\epsilon}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) = \phi_u(u+\epsilon, X_{u+\epsilon}) - \phi_u(u, X_u). \tag{4.13}$$

Afin de pouvoir utiliser la formule d'Itô, on calcule les dérivées de ϕ_u.

– On calcule de deux manières la dérivée de ϕ_u par rapport à la première variable. D'après (4.9), si $f_u(s) > 0$, on a

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial s}(s, x) = \frac{x f_u'(s)}{2 f_u^{\frac{3}{2}}(s)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 f_u(s)}\right). \tag{4.14}$$

Et d'après (4.12), on a

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial s}(s, x) = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{(z-x)^2 f_u'(s) - f_u(s) f_u'(s)}{2 f_u^2(s)}\right] \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2 f_u(s)}\right) \frac{dz}{\sqrt{2\pi f_u(s)}}, \tag{4.15}$$

avec $f_u'(s) = \frac{\partial f_u}{\partial s}(s)$.

– On utilise (4.11) pour calculer la dérivée de ϕ_u par rapport à la deuxième variable :

$$\frac{\partial \phi_u}{\partial x}(s, x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2 f_u(s)}\right). \tag{4.16}$$

– Et on utilise (4.12) pour calculer la dérivée seconde par rapport à la deuxième variable :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(s, x) = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{(z-x)^2 - f_u(s)}{2 f_u^2(s)}\right] \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2 f_u(s)}\right) \frac{dz}{\sqrt{2\pi f_u(s)}}.$$

En comparant avec (4.15), on voit que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(s, x) = \frac{2}{f_u'(s)} \frac{\partial \phi_u}{\partial s}(s, x). \tag{4.17}$$

Ainsi, ϕ_u est de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ et on peut appliquer la formule d'Itô pour tout $v \in [u, u+\epsilon[$:

$$\phi_u(v, X_v) - \phi_u(u, X_u) = \int_u^v \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_u^v \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_u^v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(s, X_s) d < X >_s .$$

Comme on a $d < X >_s = \sigma^2(s) ds$ et (4.17), on obtient

$$\phi_u(v, X_v) - \phi_u(u, X_u) = \int_u^v \left(1 + \frac{\sigma^2(s)}{f_u'(s)}\right) \frac{\partial \phi}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_u^v \frac{\partial \phi}{\partial x}(s, X_s) dX_s.$$

Remplaçons les dérivées par (4.14) et (4.16) et on trouve

$$\begin{aligned} \phi_u(v, X_v) - \phi_u(u, X_u) \quad &= \quad \int_u^v X_s \frac{f_u'(s) + \sigma^2(s)}{2 f_u^{\frac{3}{2}}(s)} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2 f_u(s)}\right) \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad - \int_u^v \frac{1}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2 f_u(s)}\right) dX_s. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ainsi, en prenant $v = u + \epsilon$ dans l'égalité précédente, (4.13) devient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon}<0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right) &= \int_u^{u+\epsilon} X_s \frac{f_u'(s)+\sigma^2(s)}{2f_u^{\frac{3}{2}}(s)} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right)\frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad - \int_u^{u+\epsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right) dX_s.
\end{aligned}$$

Reporter ce résultat dans $R_\epsilon^1(t)$ mène à :

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_\epsilon^1(t) &= -\int_0^{(t-\epsilon)^+} \left(\frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon} \frac{X_u^+}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right) dX_s\right) du \\
&\quad + \int_0^{(t-\epsilon)^+} \left(\frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon} X_s X_u^+ \frac{f_u'(s)+\sigma^2(s)}{2f_u^{\frac{3}{2}}(s)} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right)\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}\right) du.
\end{aligned}$$

2. Étude de $R_\epsilon^2(t)$. D'après la formule d'Itô (4.18) appliquée pour $v = t \in [u, u+\epsilon]$ quand $u \in [(t-\epsilon)^+, t]$, on a

$$\begin{aligned}
\phi_u(t, X_t) - \phi_u(u, X_u) &= \int_u^t X_s \frac{f_u'(s)+\sigma^2(s)}{2f_u^{\frac{3}{2}}(s)} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right)\frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad - \int_u^t \frac{1}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right) dX_s.
\end{aligned}$$

Or

$$\phi_u(t, X_t) - \phi_u(u, X_u) = \Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right) - \Phi\left(\frac{-X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right),$$

donc il vient

$$\begin{aligned}
R_\epsilon^2(t) &= -\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_u^t \frac{X_u^+}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right) dX_s\right) du \\
&\quad + \int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(\int_u^t X_u^+ X_s \frac{f_u'(s)+\sigma^2(s)}{2f_u^{\frac{3}{2}}(s)} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right)\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}\right) du.
\end{aligned}$$

Ainsi, $R_\epsilon^2(t)$ et $R_\epsilon^2(t)$ peuvent se regrouper et on obtient, en reportant dans (4.8) :

$$A_\epsilon^1(t) + A_\epsilon^2(t) = D_\epsilon^1(t) + D_\epsilon^2(t) + D_\epsilon^3(t) + D_\epsilon^4(t), \tag{4.19}$$

avec

$$\begin{aligned}
D_\epsilon^1(t) &= -\int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \frac{X_u^+}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right) dX_s\right) du, \\
D_\epsilon^2(t) &= \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} X_s X_u^+ \frac{f_u'(s)+\sigma^2(s)}{2f_u^{\frac{3}{2}}(s)} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right)\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}\right) du, \\
D_\epsilon^3(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \mathbb{1}_{\{X_t<0\}} du, \\
D_\epsilon^4(t) &= -\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_u^+ \Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right) du.
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que chaque terme converge vers 0. En montrant que $D_\epsilon^1(t)$ est une martingale, on obtiendra sa convergence dans $L^2(\Omega)$ via l'inégalité de Doobs (c.f. section 4.3.2). Dans la section 4.3.3, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour établir la convergence de $D_\epsilon^2(t)$ vers 0 dans $L^2(\Omega)$. Enfin, on montre que $D_\epsilon^3(t)$ et $D_\epsilon^4(t)$ convergent presque sûrement vers 0(c.f. section 4.3.4).

4.3.2 Convergence de $D^1_\epsilon(t)$ vers 0

Étape 1. On écrit $D^1_\epsilon(t) = -\int_0^t \left(\int_0^t H_\epsilon(s,u)dX_s\right)du$, avec

$$H_\epsilon(s,u) = \frac{\mathbb{I}_{\{u<s<(u+\epsilon)\wedge t\}}}{\epsilon}\frac{X_u^+}{\sqrt{2\pi f_u(s)}}\exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right).$$

Pour utiliser le Théorème de Fubini stochastique 1.3.1, on montre que H_ϵ vérifie :

$$\int_0^t\int_0^t E\left(H_\epsilon^2(u,s)\right)dsdu < \infty. \tag{4.20}$$

On commence majorer l'espérance.

$$E\left(H_\epsilon^2(u,s)\right) = \frac{\mathbb{I}_{\{u<s<(u+\epsilon)\wedge t\}}}{2\epsilon^2\pi f_u(s)}E\left((X_u^+)^2\exp\left(-\frac{X_s^2}{f_u(s)}\right)\right).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$E\left(H_\epsilon^2(u,s)\right) \leqslant \frac{\mathbb{I}_{\{u<s<(u+\epsilon)\wedge t\}}}{2\epsilon^2\pi f_u(s)}\sqrt{E\left((X_u^+)^4\right)E\left(\exp\left(-\frac{2X_s^2}{f_u(s)}\right)\right)}. \tag{4.21}$$

On calcule les deux espérances en utilisant le fait que X_u et X_s sont des variables aléatoires gaussiennes centrées de variance $\int_0^u \sigma^2(v)dv = S_0^u$ et $\int_0^s \sigma^2(v)dv = S_0^s$ respectivement.

Pour la première espérance, on a

$$E\left((X_u^+)^4\right) = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2S_0^u}}\frac{du}{\sqrt{2\pi S_0^u}}.$$

Le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{S_0^u}}$ conduit à

$$E\left((X_u^+)^4\right) = (S_0^u)^2\int_0^{+\infty} y^4 e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{du}{\sqrt{2\pi}} = \frac{3}{2}(S_0^u)^2.$$

Pour l'autre terme, on a

$$\begin{aligned}
E\left(\exp\left(-\frac{2X_s^2}{f_u(s)}\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{2x^2}{f_u(s)} - \frac{x^2}{2S_0^s}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi S_0^s}}, \\
&= \int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\frac{4S_0^s + f_u(s)}{f_u(s)S_0^s}\right)\frac{dx}{\sqrt{2\pi S_0^s}}.
\end{aligned}$$

En posant $y = x\sqrt{\frac{4S_0^s+f_u(s)}{f_u(s)S_0^s}}$, il vient

$$E\left(\exp\left(-\frac{2X_s^2}{f_u(s)}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\frac{dy}{\sqrt{2\pi S_0^s}}\sqrt{\frac{f_u(s)S_0^s}{4S_0^s+f_u(s)}} = \sqrt{\frac{f_u(s)}{4S_0^s+f_u(s)}}.$$

Reporter dans la majoration (4.21) donne

$$\begin{aligned}
E\left(H_\epsilon^2(u,s)\right) &\leqslant \frac{\mathbb{I}_{\{u<s<(u+\epsilon)\wedge t\}}}{2\epsilon^2\pi f_u(s)}\sqrt{\frac{3}{2}(S_0^u)^2}\left(\frac{f_u(s)}{4S_0^s+f_u(s)}\right)^{\frac{1}{4}}, \\
&\leqslant \mathbb{I}_{\{u<s<(u+\epsilon)\wedge t\}}\frac{\sqrt{3}S_0^u}{2\sqrt{2}\epsilon^2\pi f_u^{\frac{3}{4}}(s)(4S_0^s+f_u(s))^{\frac{1}{4}}}.
\end{aligned}$$

Comme $\sigma(s) \in [a,b]$, on a $0 < a^2 s \leqslant S_0^s$, $S_0^u \leqslant b^2 u$ et $a^2(u+\epsilon-s) \leqslant f_u(s)$. Ce qui donne la majoration suivante :

$$\begin{aligned} E\left(H_\epsilon^2(u,s)\right) &\leqslant \mathbb{1}_{\{u<s<(u+\epsilon)\wedge t\}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\epsilon^2\pi} \frac{b^2 u}{(u+\epsilon-s)^{\frac{3}{4}} a^{\frac{3}{2}} (4a^2 s + a^2(u+\epsilon-s))^{\frac{1}{4}}}, \\ &\leqslant C\mathbb{1}_{\{u<s<(u+\epsilon)\wedge t\}} \frac{u}{(u+\epsilon-s)^{\frac{3}{4}}(3s+u+\epsilon)^{\frac{1}{4}}}, \end{aligned}$$

avec C une constante. $s \in [u, u+\epsilon] \Rightarrow 3s+u+\epsilon > \epsilon$, donc on a

$$\frac{u}{(u+\epsilon-s)^{\frac{3}{4}}(3s+u+\epsilon)^{\frac{1}{4}}} < \frac{u}{\epsilon^{\frac{1}{4}}(u+\epsilon-s)^{\frac{3}{4}}}.$$

Comme $\int_0^t \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \frac{u}{(u+\epsilon-s)^{\frac{3}{4}}} ds du < \infty$, (4.20) est vérifiée. On peut donc appliquer le Lemme 1.3.1 :

$$D_\epsilon^1(t) = -\int_0^t \left(\int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{1}{\epsilon} \frac{X_u^+}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right) du \right) dX_s.$$

Ainsi, $(D_\epsilon^1(t), 0 \leqslant t \leqslant T)$ est une martingale de carré intégrable et on peut lui appliquer l'inégalité de Doob :

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} (D_\epsilon^1(t))^2\right) \leqslant 4E\left((D_\epsilon^1(T))^2\right).$$

Il reste donc à montrer que $E(D_\epsilon^1(T))^2$ converge vers 0 pour obtenir la convergence de $D_\epsilon^1(t)$ vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément sur $[0,T]$.

$$E\left(D_\epsilon^1(T)\right)^2 = E\left(\int_0^T \left[\int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{1}{\epsilon} \frac{X_u^+}{\sqrt{2\pi f_u(s)}} \exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right) du \right]^2 \sigma^2(s) ds \right).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au terme entre crochet, on a

$$E\left(D_\epsilon^1(T)\right)^2 \leqslant E\left(\int_0^T \left[\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{(X_u^+)^2}{2\pi f_u(s)} \exp\left(-\frac{X_s^2}{f_u(s)}\right) du \right] \sigma^2(s) ds \right),$$

puis finalement

$$E\left(D_\epsilon^1(T)\right)^2 \leqslant \int_0^T \left[\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \frac{\sigma^2(s)}{2\pi f_u(s)} E\left((X_u^+)^2 \exp\left(-\frac{X_s^2}{f_u(s)}\right) \right) du \right] ds.$$

Si on examine rapidement les termes dans l'intégrale, on remarque que $f_u(s)$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Grâce au terme X_u^+, pour s assez proche de u, $X_s > 0$, donc $\frac{1}{f_u(s)} \exp\left(-\frac{X_s^2}{f_u(s)}\right)$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Mais on doit faire une étude plus précise pour montrer la convergence vers 0 de l'intégrale.

Étape 2. Calcul de l'espérance. Comme X_u est une gaussienne centrée de variance S_0^u indépendante de $X_s - X_u$ gaussienne centrée de variance S_u^s, on peut calculer explicitement l'espérance en écrivant :

$$\begin{aligned} E\left((X_u^+)^2 e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) &= E\left((X_u^+)^2 \exp\left(-\frac{(X_s - X_u + X_u)^2}{f_u(s)}\right)\right), \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} y^{+2} \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{f_u(s)} - \frac{y^2}{2S_0^u} - \frac{x^2}{2S_u^s}\right) \frac{dxdy}{2\pi\sqrt{S_u^s S_0^u}}, \\ &= \int_0^\infty y^2 e^{-\frac{y^2}{f_u(s)} - \frac{y^2}{2S_0^u}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{f_u(s)} - \frac{2xy}{f_u(s)} - \frac{x^2}{2S_u^s}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi S_u^s}} \right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi S_0^u}}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$-\frac{x^2}{f_u(s)}-\frac{2xy}{f_u(s)}-\frac{x^2}{2S_u^s}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2S_u^s+f_u(s)}{f_u(s)S_u^s}\right)\left(x+y\frac{2S_u^s}{2S_u^s+f_u(s)}\right)^2+y^2\left(\frac{2S_u^s}{f_u(s)(2S_u^s+f_u(s))}\right),$$

et on fait le changement de variable suivant

$$X=\left(x+y\frac{2S_u^s}{2S_u^s+f_u(s)}\right)\sqrt{\frac{2S_u^s+f_u(s)}{f_u(s)S_u^s}}.$$

L'intégrale devient alors

$$\int_0^\infty y^2\exp\left(-\frac{y^2}{f_u(s)}-\frac{y^2}{2S_0^u}+y^2\frac{2S_u^s}{f_u(s)(2S_u^s+f_u(s))}\right)\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{X^2}{2}}\frac{dX}{\sqrt{2\pi S_u^s}}\right)\sqrt{\frac{f_u(s)S_u^s}{2S_u^s+f_u(s)}}\frac{dy}{\sqrt{2\pi S_0^u}}.$$

Après simplification et en utilisant que $S_0^u+S_u^s=S_0^s$, il reste :

$$E\left((X_u^+)^2e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right)=\int_0^\infty y^2\exp\left(-\frac{y^2}{2}\frac{2S_0^s+f_u(s)}{S_0^u(2S_u^s+f_u(s))}\right)\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{f_u(s)}{S_0^u(2S_u^s+f_u(s))}}.$$

On fait le changement de variable $Y=y\sqrt{\frac{2S_0^s+f_u(s)}{S_0^u(2S_u^s+f_u(s))}}$ et il vient

$$E\left((X_u^+)^2e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right)=\int_0^\infty y^2e^{-\frac{Y^2}{2}}\frac{dY}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{S_0^u(2S_u^s+f_u(s))}{2S_0^s+f_u(s)}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{f_u(s)}{S_0^u(2S_u^s+f_u(s))}}.$$

Finalement

$$E\left((X_u^+)^2e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right)=\frac{S_0^u\sqrt{f_u(s)}(2S_u^s+f_u(s))}{2(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{3}{2}}}.$$

En reportant dans la majoration de $D_\epsilon^1(T)$, il vient :

$$E\left(D_\epsilon^1(T)\right)^2\leqslant\int_0^T\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s\frac{\sigma^2(s)}{2\pi f_u(s)}\frac{S_0^u\sqrt{f_u(s)}(2S_u^s+f_u(s))}{2(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{3}{2}}}duds.$$

Étape 3. Majorations. On simplifie par $\sqrt{f_u(s)}$ et on change l'ordre d'intégration, il vient

$$E\left(D_\epsilon^1(T)\right)^2\leqslant\int_0^T\frac{1}{\epsilon}\int_u^{(u+\epsilon)\wedge T}\frac{\sigma^2(s)S_0^u(2S_u^s+f_u(s))}{4\pi\sqrt{f_u(s)}(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{3}{2}}}dsdu.$$

Comme σ est majoré par b, on a $S_0^u\leqslant b^2u, S_u^s\leqslant b^2(s-u), f_u(s)\leqslant b^2(u+\epsilon-s)$ dans le numérateur. Comme σ est minoré par a, on a $S_0^s\geqslant a^2s, f_u(s)\geqslant a^2(u+\epsilon-s)$ au dénominateur. Ce qui donne

$$\begin{aligned}E\left(D_\epsilon^1(T)\right)^2 &\leqslant \int_0^T\frac{1}{\epsilon}\int_u^{(u+\epsilon)\wedge T}\frac{b^2.b^2u(2b^2(s-u)+b^2(u+\epsilon-s))}{4\pi\sqrt{a^2(u+\epsilon-s)}(2a^2s+a^2(u+\epsilon-s))^{\frac{3}{2}}}dsdu,\\ &\leqslant \frac{b^6}{4\pi a^4}\int_0^T\frac{1}{\epsilon}\int_u^{(u+\epsilon)\wedge T}\frac{u(s-u+\epsilon)}{\sqrt{u+\epsilon-s}(u+\epsilon+s)^{\frac{3}{2}}}dsdu.\end{aligned}$$

On remarque que $0\leqslant u+\epsilon-s\leqslant 2\epsilon$ et $u+\epsilon+s\geqslant 2u+\epsilon$ pour tout $s\in[u,(u+\epsilon)\wedge T]$. Donc on peut majorer ainsi

$$E\left(D_\epsilon^1(T)\right)^2\leqslant\frac{b^6}{4\pi a^4}\int_0^T\frac{2u}{(2u+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\int_u^{(u+\epsilon)\wedge T}\frac{1}{\sqrt{u+\epsilon-s}}dvdu.$$

Comme

$$\int_u^{(u+\epsilon)\wedge T}\frac{1}{\sqrt{u+\epsilon-s}}dv=2\sqrt{\epsilon}-2\sqrt{u+\epsilon-(u+\epsilon)\wedge T}\leqslant 2\sqrt{\epsilon},$$

on a

$$
\begin{aligned}
E\left(D_\epsilon^1(T)\right)^2 &\leqslant \frac{b^6}{2\pi a^4}\int_0^T \frac{2u}{(2u+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\epsilon}du,\\
&\leqslant \frac{b^6\sqrt{\epsilon}}{2\pi a^4}\int_0^T \frac{1}{(2u+\epsilon)^{\frac{1}{2}}}-\frac{\epsilon}{(2u+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}du,\\
&\leqslant \frac{b^6\sqrt{\epsilon}}{2\pi a^4}\left(\sqrt{2T+\epsilon}-\sqrt{\epsilon}+\frac{\epsilon}{\sqrt{2T+\epsilon}}-\frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}\right),\\
&\leqslant \frac{b^6}{2\pi a^4}\left(\sqrt{\epsilon}\sqrt{2T+1}-2\epsilon+\frac{\epsilon\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{2T}}\right),\\
&\leqslant C_1\sqrt{\epsilon}\sqrt{T},
\end{aligned}
$$

avec C_1 une constante.

On reporte ce résultat dans l'inégalité de Doob et on a

$$
E\left(\sup_{t\in[0,T]}(D_\epsilon^1(t))^2\right)\leqslant 4C_1\sqrt{\epsilon T}.
$$

Donc D_ϵ^1 converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément pour $t\in[0,T]$, quand ϵ tend vers 0.

4.3.3 Convergence de $D_\epsilon^2(t)$ vers 0

Étape 1. Majoration de $E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\right)$ D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$
\left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\leqslant t\int_0^t\left[\frac{1}{\epsilon}\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}X_sX_u^+\frac{f_u'(s)+\sigma^2(s)}{2f_u^{\frac{3}{2}}(s)}\exp\left(-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}\right)\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}\right]^2du.
$$

Pour $\delta\in]0,\frac{1}{2}[$, on décompose ainsi le terme à intégrer :

$$
\left(\frac{-1}{\epsilon\sqrt{2\pi}f_u^{\frac{1-\delta}{2}}(s)}\right)\times\left(X_sX_u^+\frac{f_u'(s)+\sigma^2(s)}{2f_u^{\frac{2+\delta}{2}}(s)}e^{-\frac{X_s^2}{2f_u(s)}}\right),
$$

et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz une nouvelle fois :

$$
\left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\leqslant t\int_0^t\left[\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\frac{1}{\epsilon^2 2\pi f_u^{1-\delta}(s)}ds\right]\left[\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}X_s^2X_u^{+2}\frac{(f_u'(s)+\sigma^2(s))^2}{4f_u^{2+\delta}(s)}e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}ds\right]du.
$$

Comme les intégrants sont positifs, les deux intégrales sur $[u,(u+\epsilon)\wedge t]$ sont majorées par les intégrales sur $[u,u+\epsilon]$, c'est-à-dire :

$$
\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}\frac{1}{\epsilon^2 2\pi f_u^{1-\delta}(s)}ds\leqslant\int_u^{(u+\epsilon)}\frac{1}{\epsilon^2 2\pi f_u^{1-\delta}(s)}ds,
$$

et

$$
\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t}X_s^2X_u^{+2}\frac{(f_u'(s)+\sigma^2(s))^2}{4f_u^{2+\delta}(s)}e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}ds\leqslant\int_u^{(u+\epsilon)}X_s^2X_u^{+2}\frac{(f_u'(s)+\sigma^2(s))^2}{4f_u^{2+\delta}(s)}e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}ds.
$$

En reportant dans la majoration de $D_\epsilon^2(t)$, il vient :

$$
\left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\leqslant t\int_0^t\left[\int_u^{(u+\epsilon)}\frac{1}{\epsilon^2 2\pi f_u^{1-\delta}(s)}ds\right]\left[\int_u^{(u+\epsilon)}X_s^2X_u^{+2}\frac{(f_u'(s)+\sigma^2(s))^2}{4f_u^{2+\delta}(s)}e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}ds\right]du.
$$

Le terme dans l'intégrale par rapport à du est indépendant de t et positif,, donc pour tout $t \in [0,T]$, l'intégrale de 0 à t est majorée par l'intégrale de 0 à T :

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(D_\epsilon^2(t)\right)^2 \leqslant T \int_0^T \left[\int_u^{u+\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2 2\pi f_u^{1-\delta}(s)} ds\right] \left[\int_u^{u+\epsilon} X_s^2 X_u^{+2} \frac{(f_u'(s)+\sigma^2(s))^2}{4 f_u^{2+\delta}(s)} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}} ds\right] du.$$

Finalement, on obtient

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\right) \leqslant \frac{T}{8\pi} \int_0^T \left[\int_u^{u+\epsilon} \frac{ds}{\epsilon^2 f_u^{1-\delta}(s)}\right] \left[\int_u^{u+\epsilon} \frac{(f_u'(s)+\sigma^2(s))^2}{f_u^{2+\delta}(s)} E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) ds\right] du. \tag{4.22}$$

Étape 2. Calcul de la première intégrale en ds.

$$\begin{aligned}
\int_u^{u+\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2 f_u^{1-\delta}(s)} ds &= \int_u^{u+\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2 \left(\frac{S_u^{u+\epsilon}}{\epsilon}\right)^{1-\delta} (\epsilon+u-s)^{1-\delta}} ds, \\
&= \frac{1}{\epsilon^2 \left(\frac{S_u^{u+\epsilon}}{\epsilon}\right)^{1-\delta}} \left[\frac{-(u+\epsilon-s)^\delta}{\delta}\right]_u^{u+\epsilon}, \\
&= \frac{1}{\delta \epsilon^{2-\delta} \left(\frac{S_u^{u+\epsilon}}{\epsilon}\right)^{1-\delta}}.
\end{aligned}$$

Comme $\sigma \geqslant a$, $\frac{S_u^{u+\epsilon}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon} \sigma^2(v)dv \geqslant a^2$, et reporter dans (4.22) donne :

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\right) \leqslant \frac{T}{8\delta\pi a^{2-2\delta}} \int_0^T \frac{1}{\epsilon^{2-\delta}} \left[\int_u^{u+\epsilon} \frac{(f_u'(s)+\sigma^2(s))^2}{f_u^{2+\delta}(s)} E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) ds\right] du.$$

Ensuite, majorons le terme $(f_u'(s)+\sigma^2(s))^2$.

$$\begin{aligned}
f_u'(s)+\sigma^2(s) &= -\frac{S_u^{u+\epsilon}}{\epsilon} + \sigma^2(s) = \frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon} -\sigma^2(v)dv + \sigma^2(s), \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon} (\sigma^2(s)-\sigma^2(v))dv.
\end{aligned}$$

D'après la propriété de Hölder de σ^2, on a

$$\begin{aligned}
|f_u'(s)+\sigma^2(s)| &\leqslant \frac{C}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon} |s-v|^\gamma dv, \\
&\leqslant \frac{C}{\epsilon}\int_u^{s} (s-v)^\gamma dv + \frac{C}{\epsilon}\int_s^{u+\epsilon} (v-s)^\gamma dv, \\
&\leqslant \frac{C}{\epsilon(\gamma+1)}((s-u)^{\gamma+1} + (u+\epsilon-s)^{\gamma+1}).
\end{aligned}$$

Comme $0 \leqslant s-u \leqslant \epsilon$, il vient :

$$|f_u'(s)+\sigma^2(s)| \leqslant \frac{2C}{(\gamma+1)}\epsilon^\gamma.$$

On obtient, en reportant cette inégalité dans (4.22),

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\right) \leqslant \frac{TC^2}{2\delta\pi a^{2-2\delta}(\gamma+1)^2} \int_0^T \frac{\epsilon^{2\gamma}}{\epsilon^{2-\delta}} \int_u^{u+\epsilon} \frac{1}{f_u^{2+\delta}(s)} E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) dsdu.$$

Étape 3. Calcul de l'éspérance. On utilise le caractère gaussien de X et la décomposition suivante :

$$E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) = E\left((X_s - X_u + X_u)^2 X_u^{+2} e^{-\frac{(X_s - X_u + X_u)^2}{f_u(s)}}\right).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) &= \iint_{\mathbb{R}} (x+y)^2 y^{+2} e^{-\frac{(x+y)^2}{f_u(s)} - \frac{x^2}{2S_u^s} - \frac{y^2}{2S_0^u}} \frac{dxdy}{2\pi\sqrt{S_u^s S_0^u}}, \\
&= \iint_{\mathbb{R}} (x^2 y^{+2} + 2xy^{+3} + y^{+4}) e^{-\frac{x^2}{f_u(s)} - \frac{2xy}{f_u(s)} - \frac{y^2}{f_u(s)} - \frac{x^2}{2S_u^s} - \frac{y^2}{2S_0^u}} \frac{dxdy}{2\pi\sqrt{S_u^s S_0^u}}.
\end{aligned}$$

On commence par modifier le terme dans l'exponentielle. Pour alléger les calculs, on note $g = \frac{2S_u^s + f_u(s)}{S_u^s f_u(s)}$ le coefficient de x^2.

$$\begin{aligned}
-\frac{x^2}{f_u(s)} - \frac{2xy}{f_u(s)} - \frac{y^2}{f_u(s)} - \frac{x^2}{2S_u^s} - \frac{y^2}{2S_0^u} &= -\frac{g}{2}x^2 - \frac{2xy}{f_u(s)} - y^2\left(\frac{2S_0^u + f_u(s)}{2S_0^u f_u(s)}\right), \\
&= -\frac{g}{2}\left[x + \frac{2y}{f_u(s)g}\right]^2 + \frac{2y^2}{gf_u^2(s)} - y^2\left(\frac{2S_0^u + f_u(s)}{2S_0^u f_u(s)}\right), \\
&= -\frac{g}{2}\left[x + \frac{2y}{f_u(s)g}\right]^2 - \frac{y^2}{2}h,
\end{aligned}$$

avec

$$h = \frac{2S_0^u + f_u(s)}{2S_0^u f_u(s)} - \frac{4}{gf_u^2(s)} = \frac{2S_0^s + f_u(s)}{S_0^u(2S_u^s + f_u(s))}.$$

Ainsi, on a

$$E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) = \iint_{\mathbb{R}} (x^2 y^{+2} + 2xy^{+3} + y^{+4}) e^{-\frac{g}{2}\left[x + \frac{2y}{f_u(s)g}\right]^2 - \frac{y^2}{2}h} \frac{dxdy}{2\pi\sqrt{S_u^s S_0^u}}.$$

Le changement de variable $X = \sqrt{g}\left[x + \frac{2y}{f_u(s)g}\right]$ mène à :

$$E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) = \iint_{\mathbb{R}} \left(\left[\frac{X}{\sqrt{g}} - \frac{2y}{f_u(s)g}\right]^2 y^{+2} + 2\left[\frac{X}{\sqrt{g}} - \frac{2y}{f_u(s)g}\right] y^{+3} + y^{+4}\right) e^{-\frac{X^2}{2} - \frac{y^2}{2}h} \frac{dXdy}{2\pi\sqrt{gS_u^s S_0^u}}.$$

On développe le produit, puis on regroupe selon les puissances de y :

$$\begin{aligned}
E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) &= \int_0^\infty y^4 \left[\frac{4}{f_u^2(s)g^2} - \frac{4}{f_u(s)g} + 1\right] \left(\int_R e^{-\frac{X^2}{2}} \frac{dX}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{y^2}{2}h} \frac{dy}{\sqrt{2\pi g S_u^s S_0^u}} \\
&+ \int_0^\infty y^3 \left[-\frac{2}{f_u(s)g\sqrt{g}} + \frac{2}{\sqrt{g}}\right] \left(\int_R X e^{-\frac{X^2}{2}} \frac{dX}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{y^2}{2}h} \frac{dy}{\sqrt{2\pi g S_u^s S_0^u}} \\
&+ \int_0^\infty \frac{y^2}{g} \left(\int_R X^2 e^{-\frac{X^2}{2}} \frac{dX}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{y^2}{2}h} \frac{dy}{\sqrt{2\pi g S_u^s S_0^u}}.
\end{aligned}$$

Les intégrales en X valent respectivement 1, 0 et 1, ce qui donne

$$\begin{aligned}
E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) &= \left[\frac{4}{f_u^2(s)g^2} - \frac{4}{f_u(s)g} + 1\right] \frac{1}{\sqrt{gS_u^s S_0^u}} \int_0^\infty y^4 e^{-\frac{y^2}{2}h} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&+ \frac{1}{g\sqrt{gS_u^s S_0^u}} \int_0^\infty y^2 e^{-\frac{y^2}{2}h} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $Y=\sqrt{h}y$ dans les deux intégrales en y, et on obtient

$$\begin{aligned} E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) &= \left[\frac{4}{f_u^2(s)g^2}-\frac{4}{f_u(s)g}+1\right]\frac{1}{\sqrt{gS_u^sS_0^u}h^2\sqrt{h}}\int_0^{\infty}Y^4e^{-\frac{Y^2}{2}}\frac{dY}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad +\frac{1}{g\sqrt{gS_u^sS_0^u}h\sqrt{h}}\int_0^{\infty}Y^2e^{-\frac{Y^2}{2}}\frac{dY}{\sqrt{2\pi}}, \\ &= \frac{3}{2}\left[\frac{4}{f_u^2(s)g^2}-\frac{4}{f_u(s)g}+1\right]\frac{1}{\sqrt{gS_u^sS_0^u}h^2\sqrt{h}}+\frac{1}{2}\frac{1}{g\sqrt{gS_u^sS_0^u}h\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

On remplace g et h par leur valeur.

$$\begin{aligned} E\left(X_s^2 X_u^{+2} e^{-\frac{X_s^2}{f_u(s)}}\right) &= \frac{3}{2}\left[\frac{4f_u^2(s)(S_u^s)^2}{f_u^2(s)(2S_u^s+f_u(s))^2}-\frac{4f_u(s)S_u^s}{f_u(s)(2S_u^s+f_u(s))}+1\right] \\ &\quad \times\frac{\sqrt{f_u(s)}\sqrt{S_u^s}(S_0^u)^{\frac{5}{2}}(2S_u^s+f_u(s))^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{S_u^sS_0^u(2S_u^s+f_u(s))}(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad +\frac{1}{2}\frac{f_u^{\frac{3}{2}}(s)(S_0^u)^{\frac{3}{2}}(S_u^s)^{\frac{3}{2}}(2S_u^s+f_u(s))^{\frac{3}{2}}}{(2S_u^s+f_u(s))^{\frac{3}{2}}\sqrt{S_0^uS_u^s}(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{3}{2}}}, \\ &= \frac{f_u(s)^{\frac{3}{2}}S_0^u}{2(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{5}{2}}}[3S_0^uf_u(s)+S_u^sf_u(s)+2S_0^sS_u^s]. \end{aligned}$$

On reporte dans (4.22), en notant $\tilde{C}$ les constantes.

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\right) &\leqslant \tilde{C}\int_0^T\frac{\epsilon^{2\gamma}}{\epsilon^{2-\delta}}\int_u^{u+\epsilon}\frac{f_u(s)^{\frac{3}{2}}S_0^u[3S_0^uf_u(s)+S_u^sf_u(s)+2S_0^sS_u^s]}{f_u^{2+\delta}(s)2(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{5}{2}}}dsdu, \\ &\leqslant \tilde{C}\int_0^T\frac{\epsilon^{2\gamma}}{\epsilon^{2-\delta}}\int_u^{u+\epsilon}\frac{S_0^u}{(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{5}{2}}}[3S_0^uf_u^{\frac{1}{2}-\delta}(s)+S_u^sf_u^{\frac{1}{2}-\delta}(s))+\frac{2S_0^sS_u^s}{f_u^{\frac{1}{2}+\delta}(s))}]dsdu. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la décomposition suivante

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\right)\leqslant\tilde{C}\frac{\epsilon^{2\gamma}}{\epsilon^{2-\delta}}\left(3d^1(\epsilon)+d^2(\epsilon)+d^3(\epsilon)\right),$$

avec

$$\begin{aligned} d^1(\epsilon) &= \int_0^T\int_u^{u+\epsilon}\frac{(S_0^u)^2f_u^{\frac{1}{2}-\delta}(s)}{(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{5}{2}}}dsdu, \\ d^2(\epsilon) &= \int_0^T\int_u^{u+\epsilon}\frac{S_0^uS_u^sf_u^{\frac{1}{2}-\delta}(s)}{(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{5}{2}}}dsdu, \\ d^3(\epsilon) &= \int_0^T\int_u^{u+\epsilon}\frac{2S_0^sS_u^sS_0^u}{f_u^{\frac{1}{2}+\delta}(s)(2S_0^s+f_u(s))^{\frac{5}{2}}}dsdu. \end{aligned}$$

Il reste à majorer chacun des termes pour montrer que $E\left(\sup_{t\in[0,T]}\left(D_\epsilon^2(t)\right)^2\right)$ converge vers 0.

Étape 4. Pour tout $u\in[0,T], s\in[u,u+\epsilon]$, on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} S_0^u &\leqslant b^2u, \\ S_u^s &\leqslant b^2(s-u)\leqslant b^2\epsilon, \\ S_0^s &\leqslant b^2s\leqslant b^2(u+\epsilon). \end{aligned}$$

Rappelons aussi que $f_u(s)=\frac{\int_u^{u+\epsilon}\sigma^2(v)dv}{\epsilon}(u+\epsilon-s)$, et donc que $a^2\leqslant f_u(s)\leqslant b^2$.

Comme $\delta < \frac{1}{2}$, l'exposant $\frac{1}{2} - \delta$ est positif. On a donc

$$f_u^{\frac{1}{2}-\delta}(s) \leqslant b^{1-2\delta}(u+\epsilon-s)^{\frac{1}{2}-\delta} \leqslant b^{1-2\delta}\epsilon^{\frac{1}{2}-\delta}.$$

Pour les termes au dénominateur, on obtient

$$2S_0^s + f_u(s) \geqslant 2a^2 s + a^2(u+\epsilon-s) \geqslant a^2(u+\epsilon+s) \geqslant a^2(2u+\epsilon),$$

et

$$f_u^{\frac{1}{2}+\delta} \geqslant a^{1+2\delta}(u+\epsilon-s)^{\frac{1}{2}+\delta}.$$

On reporte ces majorations dans les trois intégrales et on les calcule.
Commençons par étudier $d^1(\epsilon)$.

$$\begin{aligned}
d^1(\epsilon) &\leqslant \int_0^T \int_u^{u+\epsilon} \frac{(b^2u)^2 b^{1-2\delta}\epsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}{a^5(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}} dsdu, \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\int_0^T \frac{u^2\epsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}{(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}\epsilon \int_u^{u+\epsilon} dsdu, \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta}\int_0^T \frac{u^2}{(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}du.
\end{aligned}$$

On décompose le terme à intégrer sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
d^1(\epsilon) &\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta}\int_0^T \frac{1}{4(2u+\epsilon)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\epsilon}{2(2u+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\epsilon^2}{4(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}du, \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta}\left[\frac{1}{4}\sqrt{2T+\epsilon} - \frac{1}{4}\sqrt{\epsilon} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{2T+\epsilon}} - \frac{\epsilon}{2\sqrt{\epsilon}} - \frac{\epsilon^2}{12(2T+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\epsilon^2}{12\epsilon^{\frac{3}{2}}}\right], \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\left[\frac{\sqrt{2T+\epsilon}}{4}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta} - \frac{2}{3}\epsilon^{2-\delta} + \frac{\epsilon^{\frac{5}{2}-\delta}}{2\sqrt{2T+\epsilon}} - \frac{\epsilon^{\frac{7}{2}-\delta}}{12(2T+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\right], \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}\sqrt{2T+\epsilon}}{4a^5}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta} + \epsilon^{2-\delta}K_1(\epsilon),
\end{aligned}$$

avec $K_1(\epsilon) = \frac{2}{3} + \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2T+\epsilon}} - \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}}}{12(2T+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}$ borné et convergeant vers $\frac{2}{3}$ quand $\epsilon \to 0$.

On étudie ensuite $d^2(\epsilon)$.

$$\begin{aligned}
d^2(\epsilon) &\leqslant \int_0^T \int_u^{u+\epsilon} \frac{b^2ub^2\epsilon b^{1-2\delta}\epsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}{a^5(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}} dsdu, \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta}\int_0^T \frac{u}{(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}\int_u^{u+\epsilon} dsdu, \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\epsilon^{\frac{5}{2}-\delta}\int_0^T \frac{1}{2(2u+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\epsilon}{2(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}du.
\end{aligned}$$

On calcule l'intégrale

$$\begin{aligned}
d^2(\epsilon) &\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\epsilon^{\frac{5}{2}-\delta}\left[-\frac{1}{2(2T+\epsilon)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2\epsilon^{\frac{1}{2}}} + \frac{\epsilon}{6(2T+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\epsilon}{6\epsilon^{\frac{3}{2}}}\right], \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{a^5}\left[\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta}}{3} - \frac{\epsilon^{\frac{5}{2}-\delta}}{2(2T+\epsilon)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\epsilon^{\frac{7}{2}-\delta}}{6(2T+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\right], \\
&\leqslant \frac{b^{5-2\delta}}{3a^5}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta} + \epsilon^{2-\delta}K_2(\epsilon),
\end{aligned}$$

avec $K_2(\epsilon) = -\frac{\epsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}{2(2T+\epsilon)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta}}{6(2T+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}$, borné et convergeant vers 0 quand $\epsilon \to 0$.

Enfin, on étudie $d^3(\epsilon)$.

$$\begin{aligned} d^3(\epsilon) &\leqslant \int_0^T \int_u^{u+\epsilon} \frac{2b^2(u+\epsilon)b^2\epsilon b^2 u}{a^{1+2\delta}(u+\epsilon-s)^{\frac{1}{2}+\delta}a^5(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}dsdu, \\ &\leqslant \frac{b^6\epsilon}{a^{6+2\delta}} \int_0^T \frac{2u(u+\epsilon)}{(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}} \int_u^{u+\epsilon} \frac{ds}{(u+\epsilon-s)^{\frac{1}{2}+\delta}}du. \end{aligned}$$

Comme $\delta < \frac{1}{2}$, la fonction $\frac{1}{(u+\epsilon-s)^{\frac{1}{2}+\delta}}$ est bien intégrable, et on a

$$\begin{aligned} d^3(\epsilon) &\leqslant \frac{b^6\epsilon}{a^{6+2\delta}} \int_0^T \frac{2u(u+\epsilon)}{(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}} \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}{\frac{1}{2}-\delta}du, \\ &\leqslant \frac{2b^6}{a^{6+2\delta}(1-2\delta)}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta} \int_0^T \frac{2u(u+\epsilon)}{(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}du. \end{aligned}$$

On décompose $\frac{2u(u+\epsilon)}{(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}$ de la manière suivante

$$\frac{2u(u+\epsilon)}{(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2(2u+\epsilon)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\epsilon}{(2u+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\epsilon^2}{2(2u+\epsilon)^{\frac{5}{2}}}.$$

On intègre et on obtient

$$\begin{aligned} d^3(\epsilon) &\leqslant \frac{2b^6}{a^{6+2\delta}(1-2\delta)}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta}\left[\frac{(2T+\epsilon)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\epsilon}{(2u+\epsilon)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\epsilon}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} - \frac{\epsilon^2}{6(2T+\epsilon)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\epsilon^2}{6\epsilon^{\frac{3}{2}}}\right], \\ &\leqslant \frac{2b^6}{a^{6+2\delta}(1-2\delta)}\left[\frac{\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta}(2T+\epsilon)^{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{4\epsilon^{2-\delta}}{3} + \frac{\epsilon^{\frac{5}{2}-\delta}}{(2u+\epsilon)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\epsilon^{\frac{7}{2}-\delta}}{6(2T+\epsilon)^{\frac{3}{2}}}\right], \\ &\leqslant \frac{2b^6\sqrt{2T+\epsilon}}{a^{6+2\delta}(2-4\delta)}\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta} + \epsilon^{2-\delta}K_3(\epsilon), \end{aligned}$$

Avec $K_3(\epsilon)$ bornée et convergeant vers $-\frac{4}{3}$ quand $\epsilon \to 0$.

En reportant les majorations de $d^i(\epsilon), i = 1, 2, 3$ dans celle $D^2_\epsilon(t)$, on obtient

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(D^2_\epsilon(t)\right)^2\right) \leqslant \tilde{C}\frac{\epsilon^{2\gamma}}{\epsilon^{2-\delta}}\left(K_0(\epsilon)\epsilon^{\frac{3}{2}-\delta} + \epsilon^{2-\delta}(K_1(\epsilon)+K_2(\epsilon)+K_3(\epsilon))\right),$$

avec $K_0(\epsilon)$ borné, défini par $K_0(\epsilon) = \frac{3b^{5-2\delta}\sqrt{2T+\epsilon}}{4a^5} + \frac{b^{5-2\delta}}{3a^5} + \frac{2b^6\sqrt{2T+\epsilon}}{a^{6+2\delta}(2-4\delta)}$.
Finalement, il vient

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(D^2_\epsilon(t)\right)^2\right) \leqslant \tilde{C}K_0(\epsilon)\epsilon^{2\gamma-\frac{1}{2}} + \epsilon^{2\gamma}(K_1(\epsilon)+K_2(\epsilon)+K_3(\epsilon)).$$

Comme $\gamma > \frac{1}{4}$, on a $2\gamma - \frac{1}{2} > 0$, donc $\epsilon^{2\gamma-\frac{1}{2}}$ converge vers 0 quand ϵ tend vers 0, et $\epsilon^{2\gamma}$ aussi. Ainsi, on a montré que

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left(\sup_{t\in[0,T]} \left(D^2_\epsilon(t)\right)^2\right) = 0.$$

4.3.4 Convergence de $D_\epsilon^3(t)$ et $D_\epsilon^4(t)$ vers 0

1. Convergence de $D_\epsilon^3(t)$. Comme on peut écrire

$$D_\epsilon^3(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_u^+ - X_t^+)\mathbb{1}_{\{X_t<0\}}du,$$

le Lemme 1.3.3 donne directement la converge p.s. de $D_\epsilon^3(t)$ vers 0, uniformément sur $[0,T]$.

2. Convergence de $D_\epsilon^4(t)$. On introduit X_t^+ dans $D_\epsilon^4(t)$ et il vient :

$$D_\epsilon^4(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_t^+ - X_u^+)\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right)du + \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right)du.$$

Pour le premier terme, on majore Φ par 1. Par l'uniforme continuité de X sur $[0,T]$, $\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t |X_t^+ - X_u^+|du$ converge presque sûrement vers 0, uniformément sur $[0,T]$.

Ensuite, on étudie le deuxième terme. On rappelle que si $x \leqslant 0$, alors $\Phi(x) \leqslant Ce^{-\frac{x^2}{4}}$, avec C une constante. On l'utilise pour $x = \frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}$, qui est négatif dès que X_t^+ est non nul.

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right)du\right| \leqslant \frac{C}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+e^{-\frac{X_t^2}{4f_u(t)}}du.$$

La fonction $h(x) = xe^{-\frac{x^2}{4f_u(t)}}$ définie pour $x \geqslant 0$ est continue, positive, valant 0 en 0 et à l'infini. Elle est donc bornée. Elle a pour dérivée $h'(x) = (1 - \frac{x^2}{2f_u(t)})e^{-\frac{x^2}{4f_u(t)}}$, qui s'annule pour $x = \sqrt{2f_u(t)}$. Donc h admet son maximum en $x = \sqrt{2f_u(t)}$, et le maximum vaut $\sqrt{2f_u(t)}e^{-\frac{1}{2}}$. Ce qui donne :

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right)du\right| \leqslant \frac{Ce^{-\frac{1}{2}}}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \sqrt{2f_u(t)}du.$$

Comme σ est majoré par b, on a pour tout $u \in [(t-\epsilon)^+, t]$,

$$f_u(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon} \sigma^2(s)ds(u+\epsilon-t) \leqslant b^2(u+\epsilon-t) \leqslant b^2\epsilon.$$

Ainsi, on a

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t X_t^+\Phi\left(\frac{-X_t}{\sqrt{f_u(t)}}\right)du\right| \leqslant Cbe^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}.$$

Donc ce terme converge vers 0 presque sûrement, uniformément pour $t \in [0,T]$. Ainsi, $D_\epsilon^4(t)$ converge vers 0 presque sûrement, uniformément pour $t \in [0,T]$. ■

4.4 Convergence de $I_\epsilon^{3,2}(t)$ vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$

On suit la même méthode que dans la section 3.3.3. Comme $X_{u+\epsilon}^+$ n'est pas $(\mathcal{F}_u)$-mesurable, on le "remplace" par $E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)$. Ce qui conduit à considérer cette décomposition de $I_\epsilon^{3,2}(t)$:

$$I_\epsilon^{3,2}(t) = \widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) + \overline{I}_\epsilon^{3,2}(t) + \Delta_\epsilon^{3,2}(t),$$

avec

$$\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du, \tag{4.23}$$

$$\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} \left(X_{u+\epsilon}^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\right)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du \tag{4.24}$$

$$+\frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t) - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\right)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du, \tag{4.25}$$

$$\Delta_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t \left(X_t^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t)\right)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du. \tag{4.26}$$

Le terme principal est $\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t)$ car il converge vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ (voir la section 4.4.1.). Dans la section 4.4.2, on montre que $\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t)$ tend vers 0.

Pour $\Delta_\epsilon^{3,2}(t)$, comme $X_t^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t) = Y_t - Y_{u+\epsilon}$, avec $Y_s = E(X_s^+|\mathcal{F}_t), s \in [(t-\epsilon)^+, t]$, le Lemme 1.3.3 s'applique et $\Delta_\epsilon^{3,2}(t)$ converge p.s. vers 0, uniformément sur $[0,T]$.

4.4.1 Convergence de $\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t)$ vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$

1. On commence par remarquer que $E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)$ est une fonction de X_u. En effet,

$$E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u) = E((X_{u+\epsilon} - X_u + X_u)^+|\mathcal{F}_u) = E((\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}G + X_u)^+|\mathcal{F}_u),$$

où $G = \frac{X_{u+\epsilon}-X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}$ et $S_u^{u+\epsilon} = \int_u^{u+\epsilon}\sigma^2(v)dv$. G est une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(0,1)$, indépendante de $\mathcal{F}_u$, donc

$$E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u) = \sqrt{S_u^{u+\epsilon}}\,g\left(\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right), \quad \text{avec } g(x) = E((G+x)^+).$$

On reporte dans $\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t)$ et on fait apparaître $d<X>_u$ en multipliant et divisant par $\sigma^2(u) \neq 0$.

$$\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \frac{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}{\sigma^2(u)}g\left(\frac{X_u}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}d<X>_u .$$

Par la formule de densité d'occupation,

$$\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_0^t \frac{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}{\sigma^2(u)}g\left(\frac{x}{\sqrt{S_u^{u+\epsilon}}}\right)\mathbb{1}_{\{x<0\}}dL_u^x(X)\right]dx.$$

Le changement de variable $y\sqrt{\epsilon} = x$ donne :

$$\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \int_{-\infty}^0\left[\int_0^t \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}{\sigma^2(u)}g\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}\right)dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X)\right]dy.$$

Comme $\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}$ converge vers $\sigma(u)$, on introduit $\frac{\sigma(u)}{\sigma^2(u)}g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right)$ dans l'intégrale, ce qui donne la décomposition suivante :

$$\widetilde{I}_\epsilon^{3,2}(t) = K_\epsilon^6(t) + K_\epsilon^7(t),$$

avec

$$
\begin{aligned}
K_\epsilon^6(t) &= \int_{-\infty}^0 \left[\int_0^t \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X)\right] dy,\\
K_\epsilon^7(t) &= \int_{-\infty}^0 \left[\int_0^t \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}{\sigma^2(u)} g\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}\right) - \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X)\right] dy.
\end{aligned}
$$

Le premier terme est le terme principal, il converge vers $\frac{1}{4}L_t^0(X)$ (voir point **2.**). Le deuxième terme converge vers 0 (voir point **3**)

2. Convergence de $K_\epsilon^6(t)$. La mesure $dL_s^{\sqrt{\epsilon}y}(X)$ converge étroitement vers $dL_s^0(X)$ (voir section 4.2.1) et la fonction $u \to \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right)$ est continue et bornée (rappelons que $\sigma \in [a,b]$). Donc

$$
\lim_{\epsilon\to 0} \int_0^t \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X) = \int_0^t \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) dL_u^0(X).
$$

Établissons une domination de ce terme. Comme $y < 0$ et $g(x) = E((G+x)^+)$, on a

$$
g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) = E\left(\mathbb{1}_{\{\sigma(u)G > -y\}}(G + \frac{y}{\sigma(u)})\right).
$$

On remarque que $\{\sigma(u)G > -y\} \in \{bG > -y\}$, de plus y est négatif, donc on peut majorer l'indicatrice par $\mathbb{1}_{\{y\in[-bG,0]\}}$. En utilisant que $\sigma \in [a,b]$, on a finalement

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X)\right| &\leqslant \int_0^t \frac{1}{a} E\left(\mathbb{1}_{\{y\in[-bG,0]\}}(|G| + \frac{|y|}{a})\right) dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X),\\
&\leqslant \frac{1}{a} E\left(\mathbb{1}_{\{y\in[-bG,0]\}}(|G| + \frac{|y|}{a})\right) L_t^{y\sqrt{\epsilon}}(X).
\end{aligned}
$$

En utilisant (4.3), puis en majorant ϵ par 1, on a

$$
\left|\int_0^t \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X)\right| \leqslant \frac{1}{a} E\left(\mathbb{1}_{\{y\in[-bG,0]\}}(|G| + \frac{|y|}{a})\right) (Ky^\beta + L_t^0).
$$

Comme

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \frac{1}{a} E\left(\mathbb{1}_{\{y\in[-bG,0]\}}(|G| + \frac{|y|}{a})\right)(Ky^\beta + L_t^0(X))dy &= \frac{K}{a} E\left(\int_{-bG}^0 (|G| + \frac{|y|}{a}) y^\beta dy\right)\\
&\quad + E\left(\int_{-bG}^0 (|G| + \frac{|y|}{a}) dy\right) \frac{L_t^0(X)}{a},\\
&\leqslant \frac{K}{a} E\left(\int_{-bG}^0 (|G| + \frac{|bG|}{a}) b|G|^\beta dy\right)\\
&\quad + E\left(\int_{-bG}^0 (|G| + \frac{|bG|}{a}) dy\right) \frac{L_t^0(X)}{a},\\
&\leqslant \frac{Kb^2}{a}(1 + \frac{b}{a}) E\left(|G|^{2+\beta}\right) + \frac{L_t^0(X)b}{a}(1 + \frac{b}{a}) E(G^2),\\
&< \infty,
\end{aligned}
$$

par le théorème de convergence dominée

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} K_\epsilon^6(t) &= \int_{-\infty}^0 \left[\int_0^t \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) dL_u^0(X)\right] dy,\\
&= \int_0^t \left[\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right) dy\right] dL_u^0(X),\\
&= \int_0^t \left[\int_{-\infty}^0 g(z)\, dz\right] dL_u^0(X), \qquad z = \frac{y}{\sigma(u)}.
\end{aligned}
$$

Or, $\int_{-\infty}^{0} g(z)dz = \frac{1}{4}$ (voir section 4.2.1), donc on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} K_\epsilon^6(t) = \int_0^t \frac{1}{4} dL_u^0(X) = \frac{1}{4} L_t^0(X).$$

On a donc presque sûrement convergence sur $[0,T]$ de la fonction $t \to K_\epsilon^6(t)$ vers $t \to \frac{1}{4}L_t^0(X)$, fonction croissante continue . Comme $\frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right)$ est positif, la fonction $t \to K_\epsilon^6(t)$ est croissante sur $[0,T]$ pour tout $\epsilon > 0$. Donc par le Théorème de Dini, on a la convergence uniforme sur $[0,T]$.

3. Convergence de $K_\epsilon^7(t)$ vers 0. On note $K_\epsilon^7(t) = \int_{-\infty}^{0} \int_0^t k_\epsilon^7(u,y) dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X) dy$, avec

$$k_\epsilon^7(u,y) = \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon} S_u^{u+\epsilon}}}{\sigma^2(u)} g\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon} S_u^{u+\epsilon}}}\right) - \frac{1}{\sigma(u)} g\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right).$$

On cherche à établir une majoration de $k_\epsilon^7(u,y)$. Comme $g(x) = E((G+x)^+)$, $k_\epsilon^7(u,y)$ se décompose en trois termes :

$$\begin{aligned}
k_\epsilon^7(u,y) &= E\left[\mathbb{1}_{\left\{\frac{-y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}} < G, \frac{-y}{\sigma(u)} < G\right\}} \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}} - \sigma(u)}{\sigma^2(u)} G\right] \\
&\quad + E\left[\mathbb{1}_{\left\{\frac{-y}{\sigma(u)} < G < \frac{-y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}\right\}} \frac{-\sigma(u)G - y}{\sigma^2(u)}\right] \\
&\quad + E\left[\mathbb{1}_{\left\{\frac{-y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}} < G < \frac{-y}{\sigma(u)}\right\}} \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}} G + y}{\sigma^2(u)}\right].
\end{aligned}$$

Rappelons que σ^2 est hölderien d'ordre γ et que $b \geqslant \sigma(u) \geqslant a$. On obtient alors cette inégalité :

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}} - \sigma(u)\right| &= \left|\frac{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon} - \sigma^2(u)}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}} + \sigma(u)}\right|, \\
&= \frac{\left|\frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon}(\sigma^2(v) - \sigma^2(u))dv\right|}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon}\sigma(v)^2 dv} + \sigma(u)}, \\
&\leqslant \frac{\frac{1}{\epsilon}\int_u^{u+\epsilon} C|v-u|^\gamma dv}{2a}, \\
&\leqslant \frac{C\epsilon^\gamma}{2a},
\end{aligned}$$

avec C une constante.

Par conséquent, on a pour le premier terme

$$\left|\frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}} - \sigma(u)}{\sigma^2(u)} G\right| \leqslant \frac{C\epsilon^\gamma |G|}{2a^3}.$$

Pour le deuxième terme, on utilise que $\frac{-y}{\sigma(u)} < G < \frac{-y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{-\sigma(u)G - y}{\sigma^2(u)}\right| = \frac{\sigma(u)G + y}{\sigma^2(u)} &\leqslant \frac{\left|y - y\frac{\sigma(u)}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}\right|}{\sigma^2(u)}, \\
&\leqslant |y|\frac{\left|\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}} - \sigma(u)\right|}{\sigma^2(u)\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}, \\
&\leqslant |y|\frac{C\epsilon^\gamma}{2a^4},
\end{aligned}$$

On procède de la même manière pour le troisième terme. Comme $\frac{-y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}} < G < \frac{-y}{\sigma(u)}$, il vient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}G + y}{\sigma^2(u)}\right| = \frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}G + y}{\sigma^2(u)} &\leqslant \frac{\left|y - y\frac{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}}{\sigma^2(u)}\right|}{\sigma^2(u)}, \\
&\leqslant |y|\frac{\left|\sigma(u) - \sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}\right|}{\sigma^3(u)}, \\
&\leqslant |y|\frac{C\epsilon^\gamma}{2a^4},
\end{aligned}$$

Finalement, on majore les trois indicatrices par une seule en regroupant les conditions $\{\frac{-y}{\sqrt{\frac{1}{\epsilon}S_u^{u+\epsilon}}} < G\}$ et $\{\frac{-y}{\sigma(u)} < G\}$. Comme σ est majoré par b, elles sont incluses dans $\{-Gb < y\}$. Comme y est négatif, on peut majorer les trois indicatrices par une seule : $\mathbb{1}_{\{-Gb<y<0\}}$. On obtient alors

$$|k_\epsilon^7(u,y)| \leqslant E\left[\mathbb{1}_{\{-Gb<y<0\}}\frac{C\epsilon^\gamma}{2a^3}\left(|G| + \frac{2|y|}{a}\right)\right].$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}|K_\epsilon^7(t)| &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\int_{-\infty}^0\int_0^t |k_\epsilon^7(u,y)|dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X)dy, \\
&\leqslant \int_{-\infty}^0\int_0^T |k_\epsilon^7(u,y)|dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X)dy, \\
&\leqslant \int_{-\infty}^0\int_0^T E\left[\mathbb{1}_{\{-Gb<y<0\}}\frac{C\epsilon^\gamma}{2a^3}\left(|G| + \frac{2|y|}{a}\right)\right]dL_u^{y\sqrt{\epsilon}}(X)dy, \\
&\leqslant \frac{C\epsilon^\gamma}{2a^3}\int_{-\infty}^0 E\left[\mathbb{1}_{\{-Gb<y<0\}}\left(|G| + \frac{2|y|}{a}\right)\right]L_T^{y\sqrt{\epsilon}}(X)dy.
\end{aligned}$$

Par (4.3), il vient

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}|K_\epsilon^7(t)| &\leqslant \frac{C\epsilon^\gamma}{2a^3}\left(K\epsilon^{\frac{\beta}{2}}\int_{-\infty}^0 E\left[\mathbb{1}_{\{-Gb<y<0\}}\left(|G| + \frac{2|y|}{a}\right)\right]|y|^\beta dy\right. \\
&\quad \left.+ L_T^0(X)\int_{-\infty}^0 E\left[\mathbb{1}_{\{-Gb<y<0\}}\left(|G| + \frac{2|y|}{a}\right)\right]dy\right), \\
&\leqslant \frac{C\epsilon^\gamma}{2a^3}\left(K\epsilon^{\frac{\beta}{2}}E\left[\int_{-Gb}^0\left(|G| + \frac{2|y|}{a}\right)\right]|y|^\beta dy + L_T^0(X)E\left[\int_{-Gb}^0\left(|G| + \frac{2|y|}{a}\right)\right]dy\right), \\
&\leqslant C'\epsilon^{\gamma+\frac{\beta}{2}} + C''\epsilon^\gamma L_T^0(X),
\end{aligned}$$

avec C', C'' des constantes. Ainsi, $K_\epsilon^7(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément sur $[0,T]$.

4.4.2 Convergence de $\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t)$ vers 0

On procède exactement de la même manière que dans le point **2.** de la section 3.4.3, en montrant que $\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t)$ est une martingale afin de pouvoir utiliser l'inégalité de Doob.

Soient u, ϵ fixés. On commence par exprimer $\left(X_{u+\epsilon}^+ - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\right)$ et $\left(E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_t) - E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_u)\right)$ comme des intégrales stochastiques au moyen de la formule d'Itô.

On emploie de nouveau la martingale $M_s = E(X_{u+\epsilon}^+|\mathcal{F}_s), s \in [u, u+\epsilon[$. Elle peut s'acrire $M_s = E((X_{u+\epsilon} - X_s + X_s)^+|\mathcal{F}_s)$. $X_{u+\epsilon} - X_s$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $S_s^{u+\epsilon}$ et on note $f(s,y) = E((X_{u+\epsilon} - X_s + x)^+)$. Comme $X_{u+\epsilon} - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$, on a encore $M_s = f(s, X_s)$.

On peut exprimer f sous la forme d'une intégrale :

$$f(s,y) = \int_{\mathbb{R}} (x+y)^+ \frac{e^{-\frac{x^2}{2S_s^{u+\epsilon}}}}{\sqrt{2\pi S_s^{u+\epsilon}}} dx = \int_{-y}^{+\infty} (x+y) \frac{e^{-\frac{x^2}{2S_s^{u+\epsilon}}}}{\sqrt{2\pi S_s^{u+\epsilon}}} dx.$$

En faisant le changement de variable $\sqrt{S_s^{u+\epsilon}} z = x$, on a l'expression suivante :

$$f(s,y) = \int_{-\frac{y}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}}^{+\infty} (\sqrt{S_s^{u+\epsilon}} z + y) \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

Les deux expressions précédentes de f permettent de calculer ses dérivées.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(s,y) &= 0 + \int_{-y}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2S_s^{u+\epsilon}}}}{\sqrt{2\pi S_s^{u+\epsilon}}} dx, \\
&= \int_{-\frac{y}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz, \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-y}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right),
\end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard. On déduit directement la dérivée seconde :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2S_s^{u+\epsilon}}}}{\sqrt{2\pi S_s^{u+\epsilon}}}.$$

Enfin, on évalue la dérivée en s à partir de la deuxième expression de f, en notant que $\frac{\partial S_s^{u+\epsilon}}{\partial s}(s) = -\sigma^2(s)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial s}(s,y) &= 0 - \int_{-\frac{y}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}}^{+\infty} \frac{\sigma^2(s)}{2\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}} z \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz, \\
&= -\frac{\sigma^2(s)}{2\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}} \frac{e^{-\frac{y^2}{2S_s^{u+\epsilon}}}}{\sqrt{2\pi}}, \\
&= -\frac{\sigma^2(s)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s,y).
\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{C}^{1,2}([u, u+\epsilon[, \mathbb{R})$, on peut donc appliquer la formule d'Itô :

$$f(v, X_v) - f(u, X_u) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(s, X_s) dX_s + \int_u^v \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_u^v \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s, X_s) d < X >_s .$$

En utilisant que $d < X >_s = \sigma^2(s) ds$ et $\frac{\partial f}{\partial s}(s, y) = -\frac{\sigma^2(s)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(s, y)$, les deux dernières intégrales se simplifient et il vient :

$$f(v, X_v) - f(u, X_u) = \int_u^v 1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right) dX_s, \quad v \in [u, u+\epsilon[.$$

On applique cette formule :

$$\begin{aligned} f(u+\epsilon, X_{u+\epsilon}) - f(u, X_u) &= \int_u^{u+\epsilon} \left[1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right)\right] dX_s, \quad u \in [0, (t-\epsilon)^+], && (4.27) \\ f(t, X_t) - f(u, X_u) &= \int_u^t \left[1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right)\right] dX_s, \quad u \in [(t-\epsilon)^+, t]. && (4.28) \end{aligned}$$

Par définition,

$$f(u+\epsilon, X_{u+\epsilon}) - f(u, X_u) = M_{u+\epsilon} - M_u = X_{u+\epsilon}^+ - E(X_{u+\epsilon}^+ | \mathcal{F}_u),$$

et

$$f(t, X_t) - f(u, X_u) = M_t - M_u = E(X_{u+\epsilon}^+ | \mathcal{F}_t) - E(X_{u+\epsilon}^+ | \mathcal{F}_u),$$

donc on peut reporter (4.27) et (4.28) dans $\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t)$:

$$\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left[\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} (1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right)) dX_s\right] \mathbb{1}_{\{X_u < 0\}} du.$$

Comme $x \to 1 - \Phi(x)$ est borné uniformément par 1, le théorème de Fubini 1.3.1 s'applique et on a

$$\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s (1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right)) \mathbb{1}_{\{X_u < 0\}} du\right] dX_s.$$

Ainsi, $(\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t), 0 \leqslant t \leqslant T)$ est une martingale de carré intégrable, et l'inégalité de Doob donne :

$$E\left(\sup_{t \in [0,T]} |\overline{I}_\epsilon^{3,2}(t)|^2\right) \leqslant 4E\left(\int_0^T \left[\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s (1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right)) \mathbb{1}_{\{X_u < 0\}} du\right]^2 ds\right).$$

Pour finir, montrons que le membre de droite de cette inégalité converge vers 0. Selon le signe de X_s, l'étude du terme entre crochet est différente. Comme $\int_0^T \mathbb{1}_{\{X_s = 0\}} ds = 0$, il reste deux cas : $X_s < 0$ et $X_s > 0$.

– Pour $X_s > 0$, on majore $1 - \Phi$ par 1 et on a :

$$\mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} \left|\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s (1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right)) \mathbb{1}_{\{X_u < 0\}} du\right| \leqslant \mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s \mathbb{1}_{\{X_u < 0\}} du\right).$$

On a déjà montré que le terme à droite converge vers 0, quand $\epsilon \to 0$, p.s. et dans $L^1(\Omega)$.

– Si $X_s < 0$, on utilise que $|1 - \Phi(\alpha)| \leqslant Ce^{-\frac{\alpha^2}{4}}$ pour tout $\alpha > 0$:

$$\left|\frac{1}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s (1 - \Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right)) \mathbb{1}_{\{X_u < 0\}} du\right| \leqslant \frac{C}{\epsilon} \int_{(s-\epsilon)^+}^s e^{-\frac{X_s^2}{4S_s^{u+\epsilon}}} du.$$

Or $a^2(u+\epsilon-s) \leqslant S_s^{u+\epsilon} \leqslant b^2(u+\epsilon-s)$ donc $-\frac{X_s^2}{4S_s^{u+\epsilon}} \leqslant -\frac{X_s^2}{4b^2(u+\epsilon-s)}$ et on a

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}(1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right))\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du\right| \leqslant \frac{C}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s} e^{-\frac{X_s^2}{4b^2(u+\epsilon-s)}}du.$$

Le changement de variable $v = u+\epsilon-s$ donne :

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}(1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right))\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du\right| \leqslant \frac{C}{\epsilon}\int_{(\epsilon-s)^+}^{\epsilon} e^{-\frac{X_s^2}{4b^2 v}}dv.$$

Comme $X_s \neq 0$, $\frac{1}{\epsilon}\int_{(\epsilon-s)^+}^{\epsilon} e^{-\frac{X_s^2}{4b^2 v}}dv$ converge vers 0 p.s et dans $L^1(\Omega)$.

Finalement, par le théorème de convergence dominée, $E\left(\int_0^T\left[\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^{s}(1-\Phi\left(\frac{-X_s}{\sqrt{S_s^{u+\epsilon}}}\right))\mathbb{1}_{\{X_u<0\}}du\right]^2 ds\right)$ converge vers 0. ■

Chapitre 5

Résultats de convergence presque sûre

Dans la Section 1.1.2, la variation quadratique et l'intégrale forward ont été définies par des limites au sens ucp. Il parait naturel de se demander s'il n'est pas possible de montrer, sous certaines hypothèses, une convergence au sens presque sûr.

Gradinaru et Nourdin [10] ont obtenu des résultats de convergence presque sûre. En particulier, pour B^H un mouvement brownien fractionnaire d'indice $H \in [\frac{1}{2}, 1]$, si g est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, alors $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t g(B_u^H)(B_{u+\epsilon}^H - B_u^H)du$ converge presque sûrement uniformément sur les compacts vers l'intégrale forward $\int_0^t g(B_u^H)d^-B_u^H$. Dans ce même article, il est démontré un résultat de même type, en remplaçant le mouvement brownien fractionnaire par une martingale s'écrivant sous la forme $M = M_0 + \int_0^t J_s dB_s$, avec J processus adapté localement höldérien.

Le but de cette section est de montrer que, sous certaines hypothèses de régularité sur l'intégrant $(H_t)_{t\geqslant 0}$, l'intégrale stochastique de H par rapport à une martingale locale continue M peut être approchée presque sûrement (c.f. le Théorème 5.1.1 dans la Section 5.2). Nous montrerons aussi (c.f. la Proposition 5.2.1 de la Section 5.1) un résultat d'approximation presque sûre vers la variation quadratique de M.

Rappelons que si M est une martingale locale continue, alors pour certains processus H, l'intégrale forward de H par rapport à M et l'intégrale stochastique d'Itô sont égales (voir [21], Proposition 1.1.).

5.1 Convergence presque sûre vers l'intégrale stochastique

Théorème 5.1.1 *Soient $(M_t, t \geqslant 0)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale continue et $(H_t, t \geqslant 0)$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté. Si pour tout $T > 0$, il existe $\alpha' \in]0,1]$ et C_T une variable aléatoire finie presque sûrement telle que, presque sûrement,*

$$|H_s - H_u| \leqslant C_T|u-s|^{\alpha'} \quad \forall u, s \in [0,T].$$

alors

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{u+\epsilon} - M_u)du = \int_0^t H_u dM_u,$$

la convergence ayant lieu presque sûrement, uniformément pour $t \in [0,T]$.

5.1.1 Preuve du Théorème 5.1.1

Préliminaires. Soit $T > 0$. Par arrêt, on suppose que M et $< M >$ sont des processus bornés par une constante $\widetilde{C}$.

Pour $\alpha \in]0, \alpha'[$, montrons qu'il existe une constante $\widetilde{K} > 0$ tel que

$$\forall u, s \in [0,T], \quad |H_s - H_u| \leqslant \widetilde{K}|u-s|^\alpha. \tag{5.1}$$

On pose

$$\psi(u,v) = \frac{H_u - H_v}{|u-v|^\alpha} \text{ si } u \neq v \text{ et } \psi(u,u) = 0.$$

Comme presque sûrement $|\psi(u,v)| \leqslant C_T|u-v|^{\alpha'-\alpha}$ et que $\alpha' - \alpha > 0$, le processus ψ est continu sur $[0,T]^2$, donc uniformément continu.
Si on note

$$\begin{cases} \psi^\star(u) = \sup_{0 \leqslant v < u} |\psi(u,v)| \quad \text{pour } u \in]0,T] \\ \psi^\star(0) = 0 \end{cases}$$

alors $\psi^\star$ est un processus continu. Donc, par arrêt, on peut le supposer borné et (5.1) est montré. En particulier, notons que H est borné par $K = \widetilde{K}T^\alpha$ sur $[0,T]$.

Organisation de la preuve. Pour $t \in [0,T]$, on veut étudie la convergence presque sûre de

$$\widetilde{I}_\epsilon^-(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{u+\epsilon} - M_u)du$$

vers $I(t) = \int_0^t H_u dM_u$, quand ϵ tend vers 0.

Les étapes de la preuve sont les suivantes :
- On se ramène de $\widetilde{I}_\epsilon^-(t)$ à une martingale $I_\epsilon^-(t)$ dans la Section 5.1.2.
- On construit une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_{\epsilon_n}^-$ converge presque sûrement vers $I(t)$ dans la Section 5.1.3.
- On choisit une suite $n = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$, telle que $n(\epsilon) \to +\infty$ quand $\epsilon \to 0$ (voir fin de la Section 5.1.3). Puis on décompose $I_\epsilon^-(t)$ comme $(I_\epsilon^-(t) - I_{\epsilon_n}^-) + I_{\epsilon_n}^-$. On a montré précédemment que $I_{\epsilon_n}^-$ converge presque sûrement vers $I(t)$, donc il reste à montrer que $(I_\epsilon^-(t) - I_{\epsilon_n}^-)$ converge presque sûrement vers 0, quand $\epsilon \to 0$.
- On écrit $I_\epsilon^-(t) - I_{\epsilon_n}^- = \xi_\epsilon(t) + \widetilde{\xi}_\epsilon(t)$. On étudie la convergence presque sûre vers 0 de $\xi_\epsilon(t)$ (resp. $\widetilde{\xi}_\epsilon(t)$) dans la Section 5.1.4 (resp. 5.1.5) .

5.1.2 La martingale $I_\epsilon^-(t)$

1. Du à la présence de $M_{u+\epsilon}$, le processus $(\widetilde{I}_\epsilon^-(t), t \in [0,T])$ n'est pas $\mathcal{F}$-adapté. Pour revenir à un processus adapté, on décompose $\widetilde{I}_\epsilon^-$ sous la forme suivante :

$$\widetilde{I}_\epsilon^-(t) = I_\epsilon^-(t) + \Delta_1(\epsilon,t), \tag{5.2}$$

avec

$$\begin{aligned} I_\epsilon^-(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon)\wedge t} - M_u)du, \\ \Delta_1(\epsilon,t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{u+\epsilon} - M_{(u+\epsilon)\wedge t})du. \end{aligned}$$

On commence par étudier $\Delta_1(\epsilon,t)$. Après simplification, on a

$$\Delta_1(\epsilon,t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t H_u(M_{u+\epsilon} - M_t)du.$$

Comme

$$|M_{u+\epsilon} - M_u| \leqslant \sup\{|M_s - M_{s'}|, s, s' \in [0,T+1], |s-s'| \leqslant \epsilon\} \quad \forall u \in [(t-\epsilon)^+, t]$$

et que H est majoré par K, on obtient

$$|\Delta_1(\epsilon,t)| \leqslant K \sup\{|M_s - M_{s'}|, s, s' \in [0,T+1], |s-s'| \leqslant \epsilon\}.$$

Presque sûrement, $s \to M_s$ est continu sur $[0,T+1]$ donc uniformément continu. Donc $\Delta_1(\epsilon,t)$ converge vers 0 presque sûrement et uniformément pour $t \in [0,T]$.

2. Ainsi, il suffit de montrer que $I_\epsilon^-(t)$ converge presque sûrement vers $I(t)$ pour montrer le Théorème 5.1.1. L'intérêt d'étudier $I_\epsilon^-(t)$ au lieu de $\widetilde{I}_\epsilon^-(t)$ réside dans le fait que $(I_\epsilon^-(t))_{t\in[0,T]}$ est une martingale locale continue. En effet :

$$I_\epsilon^-(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon)\wedge t} - M_u)du = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u\left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} dM_s\right)du.$$

Comme H est un processus adapté, on peut écrire

$$I_\epsilon^-(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{u<s<(u+\epsilon)\wedge t\}} H_u dM_s\right)du.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, le processus $\left(\mathbb{1}_{\{(u+\epsilon)\wedge t<s<u\}} H_u\right)_{s,u\in[0,T]}$ est mesurable et uniformément borné par K, M est une martingale continue et du est une mesure finie sur $[0,t]$, donc on peut appliquer le théorème de Fubini stochastique 1.3.1. On a alors :

$$I_\epsilon^-(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s H_u du\right)dM_s.$$

$(I_\epsilon^-(t))_{t\in[0,T]}$ est donc bien une martingale locale continue.

Par conséquent, on peut écrire

$$I_\epsilon^-(t) - I(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s H_u du - H_s\right)dM_s. \tag{5.3}$$

Ainsi, $(I_\epsilon^-(t) - I(t))_{t\in[0,T]}$ est une martingale locale continue. Elle est de carré intégrable dans L^2 car :

$$\begin{aligned} E\left(< I_\epsilon^- - I >_t\right) &= E\left(\int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s H_u du - H_s\right)^2 d < M >_s\right), \\ &\leqslant E\left(\int_0^t (2K)^2 d < M >_s\right), \\ &\leqslant E\left(4K^2 < M >_t\right), \\ &\leqslant 4K^2\widetilde{C} < \infty. \end{aligned}$$

5.1.3 Convergence presque sûre de $(I^-_{\epsilon_n}(t))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $I(t)$

1. Construction de la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$**.** Avant d'expliciter le choix de la suite ϵ_n, on montre le résultat suivant : Si on pose $p = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2} + 1$, alors il existe une constante $\tilde{c}$ telle que

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} |I^-_\epsilon(t) - I(t)|^p\right) \leqslant \tilde{c}\,\epsilon^{\alpha p}. \tag{5.4}$$

Remarque. Le choix de p sera justifié dans le point **4.** de la Section 5.1.4.

En effet, d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on a

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{t\in[0,T]} |I^-_\epsilon(t) - I(t)|^p\right) &\leqslant c_p E\left(< I^-_\epsilon - I >_T^{\frac{p}{2}}\right), \\
&\leqslant c_p E\left[\left(\int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s H_u du - H_s\right)^2 d < M >_s\right)^{\frac{p}{2}}\right].
\end{aligned}$$

La propriété de Hölder (5.1) permet la majoration suivante

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s H_u du - H_s\right| &\leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s |H_u - H_s|\, du, \\
&\leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_{(s-\epsilon)^+}^s \widetilde{K}|u-s|^\alpha du, \\
&\leqslant \frac{\widetilde{K}}{(\alpha+1)}\epsilon^\alpha.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{t\in[0,T]} |I^-_\epsilon(t) - I(t)|^p\right) &\leqslant c_p E\left[\left(\int_0^T \left(\frac{\widetilde{K}}{(\alpha+1)}\epsilon^\alpha\right)^2 d < M >_s\right)^{\frac{p}{2}}\right], \\
&\leqslant \frac{c_p\widetilde{K}^p}{(\alpha+1)^p}\epsilon^{\alpha p} E\left[< M >_T\right]^{\frac{p}{2}}, \\
&\leqslant \left[\frac{c_p\widetilde{K}^p\widetilde{C}^{\frac{p}{2}}}{(\alpha+1)^p}\right]\epsilon^{\alpha p}.
\end{aligned}$$

On définit alors la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par $\epsilon_n = n^{-\frac{2}{p\alpha}}$ pour tout $n > 0$.

2. Convergence de $I^-_{\epsilon_n}(t)$**.** Pour δ un réel positif, d'après l'inégalité de Markov, on a

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |I^-_\epsilon(t) - I(t)| > \delta\right) \leqslant \frac{E\left(\sup_{t\in[0,T]} |I^-_\epsilon(t) - I(t)|^p\right)}{\delta^p}.$$

L'inégalité (5.4) donne alors

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |I^-_\epsilon(t) - I(t)| > \delta\right) \leqslant \frac{\tilde{c}}{\delta^p}\epsilon^{\alpha p}.$$

Comme $\epsilon_n = n^{-\frac{2}{p\alpha}}$, il vient

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} |I^-_{\epsilon_n}(t) - I(t)| > \delta\right) \leqslant \frac{\tilde{c}}{\delta^p}\epsilon_n^{\alpha p} \leqslant \frac{\tilde{c}}{\delta^p}n^{-2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ est une série convergente. Donc par le Lemme de Borel-Cantelli,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} |I^-_{\epsilon_n}(t) - I(t)| = 0 \quad p.s.$$

3. On veut maintenant passer à la convergence presque sûre de $I^-_\epsilon(t)$, quand $\epsilon \to 0$.

Pour $\epsilon \in]0,1[$, on note $n = n(\epsilon)$ l'entier non nul tel que $\epsilon \in]\epsilon_{n+1}, \epsilon_n]$. En particulier, n tend vers l'infini quand ϵ tend vers 0. $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors une suite strictement décroissante qui converge vers 0.

On écrit la décomposition suivante :

$$I^-_\epsilon(t) = (I^-_\epsilon(t) - I^-_{\epsilon_n}(t)) + I^-_{\epsilon_n}(t). \tag{5.5}$$

Par le résultat du point **2**, $I^-_{\epsilon_n}(t)$ tend presque sûrement vers $I(t)$, uniformément sur $[0,T]$, quand $\epsilon \to 0$. Il reste donc à montrer que le premier terme $I^-_\epsilon(t) - I^-_{\epsilon_n}(t)$ converge vers 0 p.s, uniformément sur $[0,T]$, quand $\epsilon \to 0$. On écrit

$$I^-_\epsilon(t) - I^-_{\epsilon_n}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon)\wedge t} - M_u)du - \frac{1}{\epsilon_n}\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon_n)\wedge t} - M_u)du,$$

et on introduit $\frac{1}{\epsilon}$ dans le deuxième terme

$$I^-_\epsilon(t) - I^-_{\epsilon_n}(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon)\wedge t} - M_u)du + \left(-\frac{1}{\epsilon} + (\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n})\right)\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon_n)\wedge t} - M_u)du.$$

On obtient alors la décomposition suivante :

$$I^-_\epsilon(t) - I^-_{\epsilon_n}(t) = \xi_\epsilon(t) + \widetilde{\xi}_\epsilon(t), \tag{5.6}$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi_\epsilon(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon)\wedge t} - M_u)du - \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon_n)\wedge t} - M_u)du, \\
\widetilde{\xi}_\epsilon(t) &= \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right)\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon_n)\wedge t} - M_u)du.
\end{aligned}$$

Dans la Section 5.1.3 (resp. 5.1.4), on montre que $\xi_\epsilon(t)$ (resp. $\widetilde{\xi}_\epsilon(t)$) converge presque sûrement vers 0, uniformément sur $[0,T]$, quand $\epsilon \to 0$, ce qui termine la preuve du Théorème 5.1.1.

5.1.4 Convergence de $\xi_\epsilon(t)$ vers 0

Pour chacune des deux intégrales qui composent $\xi_\epsilon(t)$, on fait la même modification, de manière à faire apparaître une différence en H, pour pouvoir exploiter la propriété de Hölder de H.

Commençons par modifier $\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon)\wedge t} - M_u)du$.

$$\begin{aligned}
\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon)\wedge t} - M_u)du &= \int_0^t H_u M_{(u+\epsilon)\wedge t}du - \int_0^t H_u M_u du \\
&= \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}}\int_0^t H_u M_{(u+\epsilon)\wedge t}du + \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon\}}\int_0^t H_u M_{(u+\epsilon)\wedge t}du \\
&\quad - \int_0^t H_u M_u du, \\
&= \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}}\int_0^{t-\epsilon} H_u M_{u+\epsilon}du + \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}}\int_{t-\epsilon}^t H_u M_t du + \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon\}}\int_0^t H_u M_t du \\
&\quad - \int_0^t H_u M_u du.
\end{aligned}$$

Le changement de variable $v = u + \epsilon$ dans la première intégrale donne

$$\mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_{\epsilon}^{t} H_{v-\epsilon} M_v dv + \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_{t-\epsilon}^{t} H_u M_t du + \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon\}} \int_0^t H_u M_t du - \int_0^t H_u M_u du.$$

On termine en décomposant la dernière intégrale sous la forme suivante :

$$-\int_0^t H_u M_u du = -\mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_0^{\epsilon} H_u M_u du - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_{\epsilon}^{t} H_u M_u du - \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon\}} \int_0^t H_u M_u du,$$

afin d'en inclure une partie dans la première intégrale.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^t H_u (M_{(u+\epsilon)\wedge t} - M_u) du &= \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_{\epsilon}^{t} (H_{v-\epsilon} - H_v) M_v dv + \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_{t-\epsilon}^{t} H_u M_t du \\ &+ \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon\}} \int_0^t H_u M_t du - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_0^{\epsilon} H_u M_u du - \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon\}} \int_0^t H_u M_u du. \end{aligned}$$

Le même procédé appliqué à l'autre terme de $\xi_\epsilon(t)$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^t H_u (M_{(u+\epsilon_n)\wedge t} - M_u) du &= \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{\epsilon_n}^{t} (H_{v-\epsilon_n} - H_v) M_v dv + \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{t-\epsilon_n}^{t} H_u M_t du \\ &+ \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon_n\}} \int_0^t H_u M_t du - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_0^{\epsilon_n} H_u M_u du - \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon_n\}} \int_0^t H_u M_u du. \end{aligned}$$

On soustrait les deux termes et on obtient

$$\begin{aligned} \epsilon \xi_\epsilon(t) &= \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_{\epsilon}^{t} (H_{v-\epsilon} - H_v) M_v dv - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{\epsilon_n}^{t} (H_{v-\epsilon_n} - H_v) M_v dv \\ &+ \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_{t-\epsilon}^{t} H_u M_t du - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{t-\epsilon_n}^{t} H_u M_t du \\ &+ \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon\}} \int_0^t H_u M_t du - \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon_n\}} \int_0^t H_u M_t du \\ &- \mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}} \int_0^{\epsilon} H_u M_u du + \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_0^{\epsilon_n} H_u M_u du \\ &- \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon\}} \int_0^t H_u M_u du + \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon_n\}} \int_0^t H_u M_u du. \end{aligned}$$

On remplace $\mathbb{1}_{\{t>\epsilon\}}$ par $\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} + \mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}}$. Dans la première ligne, on écrit $\int_{\epsilon_n}^t (H_{v-\epsilon_n} - H_v) M_v dv = \int_{\epsilon}^t (H_{v-\epsilon_n} - H_v) M_v dv - \int_{\epsilon}^{\epsilon_n} (H_{v-\epsilon_n} - H_v) M_v dv$ pour faire des regroupements avec la première intégrale de la ligne. Des termes se regroupent et se simplifient ligne à ligne dans les lignes 2 à 5, et il vient :

$$\begin{aligned} \epsilon \xi_\epsilon(t) &= \mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}} \int_{\epsilon}^{t} (H_{v-\epsilon} - H_v) M_v dv \\ &+ \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \left[\int_{\epsilon}^{t} (H_{v-\epsilon} - H_{v-\epsilon_n}) M_v dv + \int_{\epsilon}^{\epsilon_n} (H_{v-\epsilon_n} - H_v) M_v dv \right] \\ &+ \mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}} \int_{t-\epsilon}^{t} H_u M_t du - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{t-\epsilon_n}^{t-\epsilon} H_u M_t du \\ &- \mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}} \int_0^t H_u M_t du \\ &- \mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}} \int_0^{\epsilon} H_u M_u du + \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{\epsilon}^{\epsilon_n} H_u M_u du \\ &+ \mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}} \int_0^t H_u M_u du. \end{aligned}$$

On regroupe la troisième avec la quatrième ligne et la cinquième avec la sixième, on a alors

$$\begin{aligned}
\epsilon\xi_\epsilon(t) &= \mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}}\int_\epsilon^t (H_{v-\epsilon}-H_v)\,M_v dv\\
&+\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_\epsilon^t (H_{v-\epsilon}-H_{v-\epsilon_n})\,M_v dv+\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_\epsilon^{\epsilon_n} (H_{v-\epsilon_n}-H_v)\,M_v dv\\
&-\mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}}\int_0^{t-\epsilon} H_u M_t du-\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{t-\epsilon_n}^{t-\epsilon} H_u M_t du\\
&-\mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}}\int_\epsilon^t H_u M_u du+\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_\epsilon^{\epsilon_n} H_u M_u du.
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à diviser par ϵ pour retrouver $\xi_\epsilon(t)$. Si on pose

$$\begin{aligned}
\Delta_2(t) &= \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_\epsilon^{\epsilon_n} (H_{v-\epsilon_n}-H_v)\,M_v dv,\\
\Delta_3(t) &= \frac{M_t}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{t-\epsilon_n}^{t-\epsilon} H_u du,\\
\Delta_4(t) &= \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_\epsilon^{\epsilon_n} H_u M_u du,\\
\Delta_5(t) &= \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_\epsilon^t (H_{v-\epsilon}-H_{v-\epsilon_n})\,M_v dv,\\
\Delta_6(t) &= \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}}\left[\int_\epsilon^t (H_{v-\epsilon}-H_v)\,M_v dv-\int_0^{t-\epsilon} H_u M_t du-\int_\epsilon^t H_u M_u du\right],
\end{aligned}$$

alors $\xi_\epsilon(t)$ se décompose sous la forme

$$\xi_\epsilon(t)=\Delta_5(t)+\Delta_2(t)-\Delta_3(t)+\Delta_4(t)+\Delta_6(t). \tag{5.7}$$

Dans les points suivants, on montre que chaque $\Delta_i(t)$ converge vers 0 en utilisant la propriété de Hölder (5.1). Rappelons que H est borné par K, et que M et $<M>$ sont bornés par $\widetilde{C}$.

1. Étude de $\Delta_2(t)$. On majore ce terme par

$$\begin{aligned}
|\Delta_2(t)| &\leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_\epsilon^{\epsilon_n} |H_{v-\epsilon_n}-H_v|\,|M_v| dv,\\
&\leqslant \frac{\widetilde{K}\widetilde{C}}{\epsilon}\int_\epsilon^{\epsilon_n} |\epsilon_n|^\alpha dv,\\
&\leqslant \widetilde{C}\widetilde{K}\frac{\epsilon_n-\epsilon}{\epsilon}\epsilon_n^\alpha \quad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

Comme $\epsilon\in]\epsilon_{n+1},\epsilon_n]$, on a :

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \leqslant & \frac{1}{\epsilon} & \leqslant & \frac{1}{\epsilon_{n+1}},\\
0 & \leqslant & \epsilon_n-\epsilon & \leqslant & \epsilon_n-\epsilon_{n+1}.
\end{array}$$

On remplace ϵ_n par $n^{-\frac{2}{p\alpha}}$ dans les termes suivants :

$$\begin{aligned}
\epsilon_n-\epsilon_{n+1} &= n^{-\frac{2}{p\alpha}}-(n+1)^{-\frac{2}{p\alpha}},\\
\frac{1}{\epsilon_{n+1}} &= (n+1)^{\frac{2}{p\alpha}},\\
\epsilon_n^\alpha &= n^{-\frac{2}{p}}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\epsilon_n-\epsilon}{\epsilon}\leqslant\left(n^{-\frac{2}{p\alpha}}-(n+1)^{-\frac{2}{p\alpha}}\right)(n+1)^{\frac{2}{p\alpha}}\leqslant(1+\frac{1}{n})^{\frac{2}{p\alpha}}-1.$$

Comme $(1+\frac{1}{n})^{\frac{2}{p\alpha}} = 1 + \frac{2}{p\alpha}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, on arrive à

$$\frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon} \leqslant 1 + \frac{2}{p\alpha}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1 \leqslant \frac{2}{p\alpha}n^{-1} + o(n^{-1}). \tag{5.8}$$

Remarquons au passage que $\frac{\epsilon_n-\epsilon}{\epsilon}$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. On obtient alors

$$\begin{aligned} |\Delta_2(t)| &\leqslant \frac{2\widetilde{C}\widetilde{K}}{p\alpha}(n^{-1} + o(n^{-1}))n^{-\frac{2}{p}}, \\ &\leqslant \frac{2\widetilde{C}\widetilde{K}}{p\alpha}n^{-\frac{2}{p}-1} + o(n^{-\frac{2}{p}-1}). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{p}-1} = 0$, $\Delta_2(t)$ converge vers 0 presque sûrement uniformément en t.

2. Étude de $\Delta_3(t) = \frac{M_t}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{t-\epsilon_n}^{t-\epsilon} H_u du$. On commence par majorer

$$\begin{aligned} |\Delta_3(t)| &\leqslant \frac{|M_t|}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{t-\epsilon_n}^{t-\epsilon} |H_u|\, du, \\ &\leqslant \frac{\widetilde{C}}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{t-\epsilon_n}^{t-\epsilon} \widetilde{K}\, |u|^\alpha\, du, \\ &\leqslant \frac{\widetilde{C}\widetilde{K}}{\epsilon(\alpha+1)}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\left(|t-\epsilon|^{\alpha+1} - |t-\epsilon_n|^{\alpha+1}\right). \end{aligned}$$

La fonction $t \to |t-\epsilon|^{\alpha+1} - |t-\epsilon_n|^{\alpha+1}$ définie pour $t > \epsilon_n$ est une fonction positive car $\epsilon \leqslant \epsilon_n$ et $\alpha > 0$. Sa dérivée est $t \to (\alpha+1)\,|t-\epsilon|^\alpha - (\alpha+1)\,|t-\epsilon_n|^\alpha$, qui est aussi positive. Donc la fonction est croissante et elle atteint son maximum en $t = T$. Son maximum est

$$\begin{aligned} |T-\epsilon|^{\alpha+1} - |T-\epsilon_n|^{\alpha+1} &= T^{\alpha+1}\left[\left|1-\frac{\epsilon}{T}\right|^{\alpha+1} - \left|1-\frac{\epsilon_n}{T}\right|^{\alpha+1}\right], \\ &= T^{\alpha+1}\left[1 - (\alpha+1)\frac{\epsilon}{T} - 1 + (\alpha+1)\frac{\epsilon_n}{T} + o(\epsilon)\right], \\ &= (\alpha+1)T^\alpha\left[\epsilon_n - \epsilon\right] + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [0,T]$, on a la majoration suivante :

$$|\Delta_3(t)| \leqslant \widetilde{C}\widetilde{K}T^\alpha\frac{\epsilon_n-\epsilon}{\epsilon} + o(1).$$

D'après (5.8), $\frac{\epsilon_n-\epsilon}{\epsilon}$ tend vers 0, donc $\Delta_3(t)$ converge presque sûrement vers 0 uniformément sur $[0,T]$.

3. Étude de $\Delta_4(t) = \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_\epsilon^{\epsilon_n} H_u M_u du$. Comme précédemment, on majore

$$\begin{aligned} |\Delta_4(t)| &\leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_\epsilon^{\epsilon_n} |H_u M_u|\, du, \\ &\leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_\epsilon^{\epsilon_n} \widetilde{K}\,|u|^\alpha\,\widetilde{C}du, \\ &\leqslant \frac{\widetilde{K}\widetilde{C}}{\alpha+1}\frac{\left(\epsilon_n^{\alpha+1} - \epsilon^{\alpha+1}\right)}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Comme $\epsilon \in]\epsilon_{n+1}, \epsilon_n]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon_n^{\alpha+1} - \epsilon^{\alpha+1}}{\epsilon} &\leqslant \frac{\epsilon_n^{\alpha+1} - \epsilon_{n+1}^{\alpha+1}}{\epsilon_{n+1}}, \\
&\leqslant \frac{n^{-\frac{2(\alpha+1)}{p\alpha}} - (n+1)^{-\frac{2(\alpha+1)}{p\alpha}}}{(n+1)^{-\frac{2}{p\alpha}}}, \\
&\leqslant n^{-\frac{2(\alpha+1)}{p\alpha}} \frac{1 - (1+\frac{1}{n})^{-\frac{2(\alpha+1)}{p\alpha}}}{n^{-\frac{2}{p\alpha}}(1+\frac{1}{n})^{-\frac{2}{p\alpha}}}, \\
&\leqslant n^{-\frac{2}{p}} \left(1 - 1 + \frac{2(\alpha+1)}{p\alpha}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right)\left(1 - \frac{2}{p\alpha}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right), \\
&\leqslant n^{-\frac{2}{p}} \left(\frac{2(\alpha+1)}{p\alpha}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right), \\
&\leqslant \frac{2(\alpha+1)}{p\alpha} n^{-\frac{2}{p}-1} + o(n^{-\frac{2}{p}-1}).
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{p}-1} = 0$, $\Delta_4(t)$ converge presque sûrement vers 0 uniformément sur $[0, T]$.

4. Étude de $\Delta_5(t) = \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_\epsilon^t (H_{v-\epsilon} - H_{v-\epsilon_n}) M_v dv$. Par la propriété de Hölder de H, on a

$$\begin{aligned}
|\Delta_5(t)| &\leqslant \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_\epsilon^t |H_{v-\epsilon} - H_{v-\epsilon_n}| \, |M_v| \, dv, \\
&\leqslant \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_\epsilon^t \widetilde{K} \, |\epsilon_n - \epsilon|^\alpha \, \widetilde{C} dv, \\
&\leqslant \widetilde{K}\widetilde{C} \frac{|\epsilon_n - \epsilon|^\alpha}{\epsilon} \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}(t - \epsilon), \\
&\leqslant \widetilde{K}\widetilde{C} \frac{|\epsilon_n - \epsilon|^\alpha}{\epsilon} T.
\end{aligned}$$

On rappelle que $0 \leqslant \epsilon_n - \epsilon \leqslant n^{-\frac{2}{p\alpha}} - (n+1)^{-\frac{2}{p\alpha}}$ et que $\frac{1}{\epsilon} \leqslant (n+1)^{\frac{2}{p\alpha}}$. On peut donc écrire

$$\frac{|\epsilon_n - \epsilon|^\alpha}{\epsilon} \leqslant \left[n^{-\frac{2}{p\alpha}} - (n+1)^{-\frac{2}{p\alpha}}\right]^\alpha [n+1]^{\frac{2}{p\alpha}} \leqslant n^{-\frac{2\alpha}{p\alpha}} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{2}{p\alpha}}\right]^\alpha n^{\frac{2}{p\alpha}} [1 + \frac{1}{n}]^{\frac{2}{p\alpha}}.$$

Le dernier terme entre crochet est majoré par une constante C. On fait un développement limité de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{2}{p\alpha}}$ dans le premier terme entre crochet et il vient :

$$\frac{|\epsilon_n - \epsilon|^\alpha}{\epsilon} \leqslant C n^{\frac{2(1-\alpha)}{p\alpha}} \left[1 - 1 + \frac{2}{p\alpha}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^\alpha \leqslant \widetilde{C} n^{\frac{2(1-\alpha)}{p\alpha} - \alpha},$$

avec $\widetilde{C}$ une constante.

Comme $p = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2} + 1$, il vient

$$\frac{2(1-\alpha)}{p\alpha} - \alpha = \frac{2(1-\alpha) - \alpha^2 p}{p\alpha} = \frac{2 - 2\alpha - 2(1-\alpha) - \alpha^2}{p\alpha} = \frac{-\alpha}{p} < 0.$$

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{2(1-\alpha)}{p\alpha} - \alpha} = 0$. Donc $\Delta_5(t)$ converge presque sûrement vers 0 uniformément sur $[0, T]$.

5. Étude de $\Delta_6(t) = \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}} \left[\int_\epsilon^t (H_{v-\epsilon} - H_v) M_v dv - \int_0^{t-\epsilon} H_u M_t du - \int_\epsilon^t H_u M_u du\right]$. On majore $|H|$

par K et M par $\widetilde{C}$.

$$\begin{aligned}
|\Delta_6(t)| &\leqslant \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}}\int_\epsilon^t |(H_{v-\epsilon}-H_v)M_v|\,dv + \int_0^{t-\epsilon}|H_uM_t|\,du + \int_\epsilon^t |H_uM_u|\,du,\\
&\leqslant \frac{1}{\epsilon}\mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}}\int_\epsilon^t 2K\widetilde{C}dv + \int_0^{t-\epsilon}K\widetilde{C}du + \int_\epsilon^t K\widetilde{C}du,\\
&\leqslant 4K\widetilde{C}\mathbb{1}_{\{\epsilon<t\leqslant\epsilon_n\}}\frac{t-\epsilon}{\epsilon},\\
&\leqslant 4K\widetilde{C}\frac{\epsilon_n-\epsilon}{\epsilon}, \quad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

D'après (5.8), $\frac{\epsilon_n-\epsilon}{\epsilon}$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Donc $\Delta_6(t)$ converge presque sûrement vers 0 uniformément sur $[0,T]$.

5.1.5 Convergence de $\widetilde{\xi}_\epsilon(t)$

Comme pour $\xi_\epsilon(t)$, on va décomposer cette intégrale en une somme de termes de limite nulle.

$$\widetilde{\xi}_\epsilon(t) = \left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{\epsilon_n}\right)\int_0^t H_u(M_{(u+\epsilon_n)\wedge t}-M_u)du.$$

On commence par séparer l'intégrale en trois :

$$\widetilde{\xi}_\epsilon(t) = \left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{\epsilon_n}\right)\left[\int_0^{(t-\epsilon_n)^+} H_uM_{u+\epsilon_n}du + \int_{(t-\epsilon_n)^+}^t H_uM_tdu - \int_0^t H_uM_udu\right].$$

Si $t\leqslant\epsilon_n$, alors la première intégrale est nulle. Sinon, on fait le changement de variable $v=u+\epsilon_n$ dans cette intégrale. On a alors

$$\widetilde{\xi}_\epsilon(t) = \left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{1}{\epsilon_n}\right)\left[\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{\epsilon_n}^t H_{v-\epsilon_n}M_vdv + M_t\int_{(t-\epsilon_n)^+}^t H_udu - \int_0^t H_uM_udu\right].$$

Puis on écrit

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}_\epsilon(t) = \left(\tfrac{1}{\epsilon}-\tfrac{1}{\epsilon_n}\right) &\Bigg[\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{\epsilon_n}^t H_{v-\epsilon_n}M_vdv + M_t\int_{(t-\epsilon_n)^+}^t H_udu\\
&-\mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon_n\}}\int_0^t H_uM_udu - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_0^t H_uM_udu\Bigg].
\end{aligned}$$

On sépare la dernière intégrale en deux pour pouvoir regrouper certains termes.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}_\epsilon(t) = \left(\tfrac{1}{\epsilon}-\tfrac{1}{\epsilon_n}\right) &\Bigg[\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{\epsilon_n}^t H_{v-\epsilon_n}M_vdv + M_t\int_{(t-\epsilon_n)^+}^t H_udu\\
&-\mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon_n\}}\int_0^t H_uM_udu - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_0^{\epsilon_n} H_uM_udu - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{\epsilon_n}^t H_uM_udu\Bigg],\\
\widetilde{\xi}_\epsilon(t) = \left(\tfrac{1}{\epsilon}-\tfrac{1}{\epsilon_n}\right) &\Bigg[\mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_{\epsilon_n}^t (H_{v-\epsilon_n}-H_v)M_vdv + M_t\int_{(t-\epsilon_n)^+}^t H_udu\\
&-\mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon_n\}}\int_0^t H_uM_udu - \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}}\int_0^{\epsilon_n} H_uM_udu\Bigg]
\end{aligned}$$

Si on pose :

$$\begin{aligned}
\Delta_7(t) &= \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right) \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{\epsilon_n}^{t} \left(H_{v-\epsilon_n} - H_v\right) M_v dv,\\
\Delta_8(t) &= \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right) \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{0}^{\epsilon_n} H_u M_u du,\\
\Delta_9(t) &= \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right) M_t \int_{(t-\epsilon_n)^+}^{t} H_u du,\\
\Delta_{10}(t) &= \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right) \mathbb{1}_{\{t\leqslant\epsilon_n\}} \int_{0}^{t} H_u M_u du,
\end{aligned}$$

on a alors la décomposition suivante :

$$\widetilde{\xi}_\epsilon(t) = \Delta_7(t) + \Delta_9(t) - \Delta_{10}(t) - \Delta_8(t). \tag{5.9}$$

Dans les points suivant, on montre que chacun des termes converge vers 0, en utilisant le même type de majoration que pour $\xi_\epsilon(t)$.

1. Étude de $\Delta_7(t) = \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right) \mathbb{1}_{\{t>\epsilon_n\}} \int_{\epsilon_n}^{t} \left(H_{v-\epsilon_n} - H_v\right) M_v dv$. Si $t \in [\epsilon_n, T]$, on a

$$\begin{aligned}
|\Delta_7(t)| &\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \int_{\epsilon_n}^{t} |H_{v-\epsilon_n} - H_v| \, |M_v| dv,\\
&\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \int_{\epsilon_n}^{t} \widetilde{K} \, |\epsilon_n|^\alpha \, \widetilde{C} dv,\\
&\leqslant \widetilde{K}\widetilde{C}\frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \epsilon_n^\alpha (t - \epsilon_n).
\end{aligned}$$

Comme $(t - \epsilon_n) < T$, on a finalement

$$|\Delta_7(t)| \leqslant \widetilde{K}\widetilde{C}\frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \epsilon_n^\alpha T, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après (5.8), on a

$$\frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon} \epsilon_n^\alpha \leqslant \frac{2}{p\alpha} n^{-\frac{2}{p}-1} + o(n^{-\frac{2}{p}-1}).$$

On remplace ϵ_n par $n^{-\frac{2}{p\alpha}}$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
|\Delta_7(t)| &\leqslant \widetilde{K}\widetilde{C} n^{\frac{2}{p\alpha}} \left(\frac{2}{p\alpha} n^{-\frac{2}{p}-1} + o(n^{-\frac{2}{p}-1})\right),\\
&\leqslant \widetilde{K}\widetilde{C} \left(\frac{2}{p\alpha} n^{-\frac{2}{p}-1+\frac{2}{p\alpha}} + o(n^{-\frac{2}{p}-1+\frac{2}{p\alpha}})\right).
\end{aligned}$$

La puissance de n est $-\frac{2}{p} - 1 + \frac{2}{p\alpha} = \frac{2(1-\alpha)-p\alpha}{p\alpha}$. Étudions son signe. Comme $p = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2} + 1$, on a

$$2(1-\alpha) - p\alpha = 2(1-\alpha) - (\frac{2(1-\alpha)}{\alpha^2} + 1)\alpha = \frac{-2\alpha^2 + 3\alpha - 2}{\alpha}.$$

Le discriminant du trinôme $-2\alpha^2 + 3\alpha - 2$ est $-7 < 0$. Donc l'exposant de n est strictement négatif. Ce qui implique que $\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{2}{p}-1+\frac{2}{p\alpha}} = 0$ et $\Delta_7(t)$ converge presque sûrement vers 0 uniformément sur $[0, T]$.

2. Étude de $\Delta_8(t) = \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right) 1\!\!1_{\{t>\epsilon_n\}} \int_0^{\epsilon_n} H_u M_u du$**.** Si $t \in [\epsilon_n, T]$, on écrit la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |\Delta_8(t)| &\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} |H_u M_u| \, du, \\ &\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \int_0^{\epsilon_n} \widetilde{C}\widetilde{K} \, |u|^\alpha \, du, \\ &\leqslant \frac{\widetilde{C}\widetilde{K}}{\alpha+1} \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \epsilon_n^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$|\Delta_8(t)| \leqslant \frac{\widetilde{C}\widetilde{K}}{\alpha+1} \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon} \epsilon_n^\alpha, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'après (5.8), $\frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon} \epsilon_n^\alpha$ tend vers 0. Donc $\Delta_8(t)$ converge presque sûrement vers 0 uniformément sur $[0, T]$.

3. Étude de $\Delta_9(t) = \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right) M_t \int_{(t-\epsilon_n)^+}^t H_u du$**.** On majore :

$$\begin{aligned} |\Delta_9(t)| &\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} |M_t| \int_{(t-\epsilon_n)^+}^t |H_u| \, du, \\ &\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \widetilde{C} \int_{(t-\epsilon_n)^+}^t \widetilde{K} \, |u|^\alpha \, du, \\ &\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} \widetilde{C}\widetilde{K} t^\alpha \epsilon_n, \\ &\leqslant \widetilde{C}\widetilde{K} T^\alpha \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon}, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

Comme $\frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon}$ tend vers 0, $\Delta_9(t)$ converge presque sûrement vers 0 uniformément sur $[0, T]$.

4. Étude de $\Delta_{10}(t) = \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_n}\right) 1\!\!1_{\{t \leqslant \epsilon_n\}} \int_0^t H_u M_u du$**.** Pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} |\Delta_{10}(t)| &\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} 1\!\!1_{\{t \leqslant \epsilon_n\}} \int_0^t |H_u| \, |M_u| du, \\ &\leqslant \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} 1\!\!1_{\{t \leqslant \epsilon_n\}} \int_0^t \widetilde{K} u^\alpha \, \widetilde{M} du, \\ &\leqslant \frac{\widetilde{M}\widetilde{K}}{\alpha+1} \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon\epsilon_n} (1\!\!1_{\{t \leqslant \epsilon_n\}} t^{\alpha+1}), \\ &\leqslant \frac{\widetilde{M}\widetilde{K}}{\alpha+1} \frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon} \epsilon_n^\alpha. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\epsilon_n - \epsilon}{\epsilon} \epsilon_n^\alpha$ tend vers 0, $\Delta_{10}(t)$ converge presque sûrement vers 0 uniformément sur $[0, T]$. ■

5.2 Convergence presque sûre vers la variation quadratique

Après s'être intéressé à la convergence presque sûre de l'intégrale forward, on peut se demander s'il y a des résultats similaires pour la variation quadratique. Par exemple, le Théorème 2.1 de [10] implique que pour B mouvement brownien standard, $\frac{1}{\epsilon} \int_0^t (B_{u+\epsilon} - B_u)^2 du$ converge presque sûrement vers $< B >_t = t$.

La Proposition suivante est une conséquence directe du Théorème 5.1.1 qu'on vient de démontrer.

Proposition 5.2.1 *Soit* $(M_t, t \geqslant 0)$ *une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale locale continue. Si pour tout* $T > 0$*, il existe* $\alpha' \in]0, 1]$ *et* C_T *une variable aléatoire finie p.s. telle que presque sûrement,*

$$\forall u, s \in [0, T], \quad |M_s - M_u| \leqslant C_T |u - s|^{\alpha'},$$

alors
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (M_{u+\epsilon}-M_u)^2du=[M]_t,$$
la convergence ayant lieu presque sûrement uniformément sur les compacts.

Preuve. Soient $T>0$ et $t\in[0,T]$. On écrit la décomposition suivante :
$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (M_{u+\epsilon}-M_u)^2du=\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_{u+\epsilon}(M_{u+\epsilon}-M_u)du-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_u(M_{u+\epsilon}-M_u)du. \tag{5.10}$$
Le premier terme devient :
$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_{u+\epsilon}(M_{u+\epsilon}-M_u)du=\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_{u+\epsilon}^2du-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_{u+\epsilon}M_udu.$$
Le changement de variable $v=u+\epsilon$ dans la première intégrale donne alors :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_{u+\epsilon}(M_{u+\epsilon}-M_u)du &= \frac{1}{\epsilon}\int_\epsilon^{t+\epsilon} M_v^2dv-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_{u+\epsilon}M_udu.\\ &= -\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon M_v^2dv+\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} M_v^2dv+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_v^2dv-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_{u+\epsilon}M_udu,\\ &= -\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon M_v^2dv+\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} M_v^2dv-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_u(M_{u+\epsilon}-M_u)du.\end{aligned}$$

En reportant le résultat dans (5.10), il vient :
$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (M_{u+\epsilon}-M_u)^2du=\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} M_v^2dv-\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon M_v^2dv-\frac{2}{\epsilon}\int_0^t M_u(M_{u+\epsilon}-M_u)du.$$
Le second terme $-\frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon M_v^2dv$ est indépendant de t et il converge presque sûrement vers M_0^2. Comme M est continu, $\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} M_v^2dv$ converge presque sûrement vers M_t^2, uniformément pour $t\in[0,T]$.

Enfin, pour le troisième terme, on utilise le Théorème 5.1.1 avec $H=M$ et on a presque sûrement uniformément sur $[0,T]$:
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_u(M_{u+\epsilon}-M_u)du=\int_0^t M_udM_u.$$
Donc finalement, presque sûrement uniformément sur $[0,T]$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (M_{u+\epsilon}-M_u)^2du=M_t^2-M_0^2-2\int_0^t M_udM_u.$$
Or d'après la formule d'Itô, $M_t^2-M_0^2=2\int_0^t M_udM_u+<M>_t$, donc
$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (M_{u+\epsilon}-M_u)^2du=<M>_t=[M]_t,$$
presque sûrement uniformément pour $t\in[0,T]$. ■

Chapitre 6

Convergences au second ordre

Soient $(B_t)_{t\geqslant 0}$ le mouvement brownien standard et $(H_t)_{t\geqslant 0}$ un processus adapté. On note W un mouvement brownien standard indépendant de B.

Dans le cadre de l'intégration par régularisation, sous certaines conditions sur H, on a les convergences suivantes au sens (ucp) :

– Convergence vers l'intégrale stochastique :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t}-B_s)ds=\int_0^t H_s dB_s.$$

– Convergence vers la variation quadratique

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t}-B_s)^2 ds=\int_0^t H_s ds.$$

On s'intéresse dans ce chapitre à la convergence au second ordre, c'est-à-dire qu'on étudie la convergence en loi de $\Delta_\epsilon(t)$ et $\Delta_\epsilon^{(2)}(t)$, qui sont définis ainsi :

– Dans le cas de l'intégrale stochastique,

$$\Delta_\epsilon(t)=\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t}-B_s)ds-\int_0^t H_s dB_s\right].$$

– Dans le cas de la variation quadratique.

$$\Delta_\epsilon^{(2)}(t)=\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t}-B_s)^2 ds-\int_0^t H_s ds\right].$$

On commence par étudier la martingale W_ϵ définie par :

$$W_\epsilon(t)=\int_0^t H_\epsilon(u)dB_u,\ \text{avec}\ H_\epsilon(u)=\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_{(u-\epsilon)^+}^u (B_u-B_s)ds. \tag{6.1}$$

W_ϵ est une martingale continue de carré intégrable. Cette martingale apparaît naturellement lors de l'étude de la convergence en loi de $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t(B_{(s+\epsilon)\wedge t}-B_s)^2 ds-t\right]$ (voir la Section 6.2.1). De plus, ce processus intervient dans $\Delta_\epsilon^{(2)}(t)$ et $\Delta_\epsilon(t)$ (c.f. la Section 6.7).

La Section 6.1 établit la convergence en loi de W_ϵ vers un mouvement brownien de variance $\frac{1}{3}$, quand $\epsilon\to 0$.

Dans le cas de la variation quadratique, la convergence en loi de $\Delta_\epsilon^{(2)}(t)$ pour $H = 1$ découle naturellement de la convergence de W_ϵ (voir la Section 6.2.1). Dans le reste de la Section 6.2, on étend partiellement ce résultat en montrant la convergence en loi à t fixé pour $H = f(B)$, avec f suffisamment régulière.

Nous considérons ensuite la convergence en loi de $\Delta_\epsilon(t)$. On s'intéresse à deux types de processus : H étagé et H semi-martingale continue.

Si H est un processus étagé, le résultat de la Section 6.3 montre que $\Delta_\epsilon(t)$ converge en loi, à t fixé, vers un processus étagé, dans lequel interviennent des variables aléatoires gaussiennes.

Considérons à présent le cas où H est une semi-martingale continue s'écrivant sous la forme $H_t = H_0 + M_t + V_t$, avec V processus adapté continu à variation finie et M_t martingale locale continue, V et M étant nuls en 0. Alors $\Delta_\epsilon(H,t)$ se décompose en trois parties :

$$\Delta_\epsilon(H,t) = \Delta_\epsilon(H_0,t) + \Delta_\epsilon(M,t) + \Delta_\epsilon(V,t),$$

avec

$$\begin{aligned}
\Delta_\epsilon(H_0,t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_0(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_0^t H_0 dB_s\right], \\
\Delta_\epsilon(h,t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t M_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_0^t M_s dB_s\right], \\
\Delta_\epsilon(V,t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t V_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_0^t V_s dB_s\right].
\end{aligned}$$

On montre que chaque terme converge, mais a une limite différente :
- $\Delta_\epsilon(H_0,t)$ correspond au cas où H est constant, donc étagé. D'après le résultat la Section 6.3, $\Delta_\epsilon(H_0,.)$ converge en loi, à t fixé, vers $\frac{H_0 W_0}{\sqrt{3}}$, avec W_0 une variable aléatoire gaussienne standard indépendante de $\mathcal{F}_0$.
- Dans la Section 6.4, on montre la convergence de $\Delta_\epsilon(H,t)$ vers 0, si H est Höldérien et à variation finie.
- Dans la Section 6.5, on étudie le cas où $H_t = \int_0^t \Lambda_s dB_s$, avec Λ processus borné et Hölderien. Alors $\Delta_\epsilon(H,t)$ converge en loi vers $-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_s dW_s$, à t fixé.

Pour terminer le cas semi-martingale, on considère le cas particulier $H = f(B)$ avec f une fonction suffisamment régulière nulle en 0. Dans la Section 6.6, on montre par une méthode différente de celle de la Section 6.4 que $\Delta_\epsilon(H,t)$ converge en loi vers $-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t f'(B_s)dW_s$ à t fixé.

On retrouve le fait que la limite de $\Delta_\epsilon(H,t)$ provient du terme martingale $\int_0^t f'(B_s)dB_s$ et que le terme à variation finie n'apporte pas de contribution. En effet, par la formule d'Itô : $H_t = f(B_t) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$.

6.1 Théorème principal de convergence en loi

6.1.1 Énoncé du Théorème

Théorème 6.1.1 *$(W_\epsilon, t \geqslant 0)$ converge en loi vers $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}B_t, t \geqslant 0\right)$ quand $\epsilon \to 0$.*

La preuve du Théorème 6.1.1 se décompose en trois étapes. On commence par calculer et majorer les moments de $W_\epsilon(t)$ (voir Section 6.1.2). Puis, la méthode des moments permet d'établir la convergence en loi de $W_\epsilon(t)$ à t fixé (c.f. la Section 6.1.3). Enfin, on montre la convergence en loi finie-dimensionnelle et le critère de Kolmogorov pour terminer la preuve dans la Section 6.1.4.

6.1.2 Préliminaires

Cette section regroupe une série de lemmes concernant les propriétés de $W_\epsilon(t)$ et $H_\epsilon(u)$, qui serviront dans les sections suivantes. Pour simplifier, on note $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ l'égalité en loi.

Lemme 6.1.2 *Pour tout $t \geqslant 0$, on a l'égalité suivante en loi :*

$$H_\epsilon(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{(t \wedge \epsilon)\sqrt{t \wedge \epsilon}}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \sigma B_1.$$

Le moment d'ordre deux de $H_\epsilon(t)$ est $E\left[|H_\epsilon(t)|^2\right] = \frac{(t\wedge\epsilon)^3}{\epsilon^3}\sigma^2$, et on peut majorer ses moments de tout ordre $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall t \geqslant 0, \forall \epsilon > 0, \quad E\left[|H_\epsilon(t)|^k\right] \leqslant m_k,$$

avec $m_k = \sigma^k E\left(|B_1|^k\right)$.

Preuve. On fait le changement de variable $s = t - v$ dans $H_\epsilon(t)$. La borne t de l'intégrale devient 0, la borne $(t-\epsilon)^+$ devient $t - (t-\epsilon)^+ = t \wedge \epsilon$. On a donc :

$$H_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_0^{t\wedge\epsilon} (B_t - B_{t-v}) dv.$$

Comme $(B_t - B_{t-v}; 0 \leqslant v \leqslant t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (B_v; 0 \leqslant v \leqslant t)$, il vient $H_\epsilon(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_0^{t\wedge\epsilon} B_v dv$. Le changement de variable $v = (t\wedge\epsilon)r$ donne $H_\epsilon(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{t\wedge\epsilon}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_0^1 B_{(t\wedge\epsilon)r} dr$. Enfin, par la propriété de scaling du mouvement brownien $(B_{\lambda u}; 0 \leqslant u) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\sqrt{\lambda} B_u; 0 \leqslant u)$ pour $\lambda = t \wedge \epsilon > 0$, on a

$$H_\epsilon(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{(t\wedge\epsilon)\sqrt{t\wedge\epsilon}}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_0^1 B_r dr.$$

$\int_0^1 B_r dr$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance σ. En effet, par le Théorème de Fubini stochastique :

$$\int_0^1 B_r dr = \int_0^1 \left(\int_0^r dB_u\right) dr = \int_0^1 \left(\int_u^1 dr\right) dB_u = \int_0^1 (1-u) dB_u.$$

Il vient alors

$$E\left[\left(\int_0^1 B_r dr\right)^2\right] = E\left[\int_0^1 (1-u)^2 du\right] = \frac{1}{3} = \sigma^2.$$

Donc $\int_0^1 B_r dr \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sigma B_1$. Par conséquent, pour tout k entier,

$$E\left[|H_\epsilon(t)|^k\right] = \frac{(t\wedge\epsilon)^{\frac{3k}{2}}}{\epsilon^{\frac{3k}{2}}} \sigma^k E\left[|B_1|^k\right].$$

D'une part, pour $k = 2$, $E\left[|H_\epsilon(t)|^2\right] = \frac{(t\wedge\epsilon)^3}{\epsilon^3}\sigma^2$.

D'autre part, en majorant $\frac{t\wedge\epsilon}{\epsilon}$ par 1, on obtient la majoration de $E\left[|H_\epsilon(t)|^k\right]$ par une constante dépendant uniquement de k. ∎

On déduit du lemme précédent des résultats sur les moments de $W_\epsilon(t)$.

Lemme 6.1.3 $\lim_{\epsilon\to 0} E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] = E\left[(\sigma B_t)^2\right]$. *De plus, la convergence est uniforme en* $t \geqslant 0$.

Preuve. D'après (6.1),

$$E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] = \int_0^t E\left[(H_\epsilon(u))^2\right] du.$$

Le Lemme 6.1.2 donne directement :

$$E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] = \int_0^t \sigma^2 \frac{(u\wedge\epsilon)^3}{\epsilon^3} du.$$

On veut majorer $\left|E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] - E[(\sigma B_t)^2]\right| = \left|E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] - \sigma^2 t\right|$. On distingue deux cas :

– Si $t \geqslant \epsilon$:

$$E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] = \frac{\sigma^2}{\epsilon^3}\left(\int_0^\epsilon u^3 du + \int_\epsilon^t \epsilon^3 du\right) = \frac{\sigma^2}{\epsilon^3}\left(\frac{\epsilon^4}{4} + \epsilon^3(t-\epsilon)\right) = \sigma^2 t - \frac{3\sigma^2}{4}\epsilon.$$

Donc

$$\left|E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] - \sigma^2 t\right| \leqslant \frac{3\sigma^2}{4}\epsilon.$$

– Si $0 \leqslant t < \epsilon$:

$$E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] = \frac{\sigma^2}{\epsilon^3}\int_0^t u^3 du = \frac{\sigma^2 t^4}{4\epsilon^3}.$$

Comme $0 \leqslant t < \epsilon$, on obtient

$$E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] - \sigma^2 t = \sigma^2 t\left(1 - \frac{t^3}{4\epsilon^3}\right) \leqslant \sigma^2\epsilon.$$

Finalement, on a

$$\forall t \geqslant 0, \quad \left|E\left[(W_\epsilon(t))^2\right] - E[(\sigma B_t)^2]\right| \leqslant \sigma^2\epsilon.$$

Donc $E\left[(W_\epsilon(t))^2\right]$ converge vers $E\left[(\sigma B_t)^2\right]$ quand $\epsilon \to 0$, uniformément en t. ■

Lemme 6.1.4 *Pour tout entier* $k \geqslant 2$, *il existe une constante* $C(k)$ *telle que*

$$\forall t \geqslant 0, \quad E\left[|W_\epsilon(t)|^k\right] \leqslant C(k)\, t^{\frac{k}{2}}.$$

Preuve. $(W_\epsilon(t))_{t\geqslant 0}$ est une martingale, donc on peut appliquer l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned} E\left[|W_\epsilon(t)|^k\right] &\leqslant c(k) E\left[< W_\epsilon >_t^{\frac{k}{2}}\right], \\ &\leqslant c(k) E\left[\left(\int_0^t (H_\epsilon(u))^2 du\right)^{\frac{k}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Pour majorer $\left(\int_0^t H_\epsilon^2(u) du\right)^{\frac{k}{2}}$, on commence par faire le changement de variable $u = tv$, puis on utilise l'inégalité de Jensen.

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t H_\epsilon^2(u) du\right)^{\frac{k}{2}} &= \left(\int_0^1 t(H_\epsilon(tv))^2 dv\right)^{\frac{k}{2}}, \\ &\leqslant \int_0^1 \left[t(H_\epsilon(tv))^2\right]^{\frac{k}{2}} dv, \\ &\leqslant \int_0^t t^{\frac{k}{2}-1}(H_\epsilon(u))^k du, \qquad \text{avec } u = tv. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E\left[\left(\int_0^t (H_\epsilon(u))^2\,du\right)^{\frac{k}{2}}\right] \leqslant t^{\frac{k}{2}-1} E\left[\int_0^t (H_\epsilon(u))^k\,du\right].$$

En utilisant la majoration du Lemme 6.1.2, il vient

$$E\left[\left(\int_0^t (H_\epsilon(u))^2\,du\right)^{\frac{k}{2}}\right] \leqslant m_k t^{\frac{k}{2}}. \tag{6.2}$$

Par conséquent,

$$E\left[|W_\epsilon(t)|^k\right] \leqslant c(k) m_k t^{\frac{k}{2}}.$$

■

Lemme 6.1.5 *Pour tout* $u \geqslant 0$,

$$E\left[\left(W_\epsilon(u) - W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^2\right] \leqslant \sigma^2 \epsilon.$$

Preuve. Comme $W_\epsilon(u) - W_\epsilon((u-\epsilon)^+) = \int_{(u-\epsilon)^+}^u H_\epsilon(v)dB_v$, on a :

$$\begin{aligned} E\left[\left(W_\epsilon(u) - W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^2\right] &= \int_{(u-\epsilon)^+}^u E\left[(H_\epsilon(v))^2\right] dv, \\ &= \int_{(u-\epsilon)^+}^u \sigma^2 \frac{(v\wedge\epsilon)^3}{\epsilon^3} dv, \\ &\leqslant \sigma^2\epsilon. \end{aligned}$$

■

6.1.3 Méthode des moments

On commence par étudier la convergence des moments de $W_\epsilon(t)$.

Proposition 6.1.6

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left[(W_\epsilon(t))^{2n}\right] = E\left[(\sigma B_t)^{2n}\right],$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, *la convergence étant uniforme sur les compacts en* t.

Preuve. On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, on a déjà montré le résultat dans le Lemme 6.1.3. Supposons le résultat vrai au rang $n \geqslant 1$.

1. La formule d'Itô appliquée à $W_\epsilon(t) = \int_0^t H_\epsilon(u)dB_u$ conduit à :

$$(W_\epsilon(t))^{2n+2} = (2n+2)\int_0^t (W_\epsilon(u))^{2n+1} H_\epsilon(u)dB_u + \frac{(2n+2)(2n+1)}{2}\int_0^t (W_\epsilon(u))^{2n}(H_\epsilon(u))^2\,du.$$

En prenant l'espérance, le premier terme disparaît et il reste

$$E\left[(W_\epsilon(t))^{2n+2}\right] = (n+1)(2n+1)\int_0^t E\left[(W_\epsilon(u))^{2n}(H_\epsilon(u))^2\right] du.$$

On remplace $(W_\epsilon(u))^{2n}$ par $\left[(W_\epsilon(u))^{2n} - (W_\epsilon((u-\epsilon)^+))^{2n}\right] + (W_\epsilon((u-\epsilon)^+))^{2n}$. On obtient alors la décomposition suivante :

$$E\left[(W_\epsilon(t))^{2n+2}\right] = (n+1)(2n+1)(\xi_\epsilon^1(t) + \xi_\epsilon^2(t)), \tag{6.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi_\epsilon^1(t) &= \int_0^t E\left[\left\{(W_\epsilon(u))^{2n} - \left(W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^{2n}\right\}(H_\epsilon(u))^2\right] du, \\
\xi_\epsilon^2(t) &= \int_0^t E\left[\left(W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^{2n}(H_\epsilon(u))^2\right] du.
\end{aligned}$$

Comme $\xi_\epsilon^1(t)$ converge vers 0 (voir le point **2.**), le terme principal est $\xi_\epsilon^2(t)$ et on étudie la limite au point **3.** Le point **4.** conclut la récurrence.

2. On commence par montrer que $\xi_\epsilon^1(t)$ converge vers 0, uniformément en t sur les compacts, quand $\epsilon \to 0$. On utilise l'identité suivante :

$$a^{2n} - b^{2n} = (a-b)\sum_{k=0}^{2n-1} a^k b^{2n-1-k}.$$

Pour $a = W_\epsilon(u), b = W_\epsilon((u-\epsilon)^+)$, elle donne

$$\xi_\epsilon^1(t) = \sum_{k=0}^{2n-1}\int_0^t S_k(\epsilon,u)du, \tag{6.4}$$

avec pour $k = 0, \ldots, 2n-1$:

$$S_k(\epsilon,u) = E\left[\left(W_\epsilon(u) - W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)(H_\epsilon(u))^2 (W_\epsilon(u))^k (W_\epsilon((u-\epsilon)^+))^{2n-1-k}\right].$$

On majore chacun des termes de la somme grâce à l'inégalité suivante :

$$|E(abcd)| \leqslant [E(a^2)]^{\frac{1}{2}}[E(b^4)]^{\frac{1}{4}}[E(c^8)]^{\frac{1}{8}}[E(d^8)]^{\frac{1}{8}}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
|S_k(\epsilon,u)| \quad &\leqslant \quad \left[E\left(W_\epsilon(u) - W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\left(H_\epsilon(u)\right)^8\right]^{\frac{1}{4}} \\
&\quad \times \left[E(W_\epsilon(u))^{8k}\right]^{\frac{1}{8}}\left[E(W_\epsilon((u-\epsilon)^+))^{16n-8-8k}\right]^{\frac{1}{8}}.
\end{aligned}$$

D'après les résultats des Lemmes 6.1.2, 6.1.4 et 6.1.5, on a

$$\begin{aligned}
|S_k(\epsilon,u)| \quad &\leqslant \quad \left[\sigma^2\epsilon\right]^{\frac{1}{2}} m_k^{\frac{1}{4}}\left[C(8k)t^{4k}\right]^{\frac{1}{8}}\left[C(16n-8-8k)t^{8n-4-4k}\right]^{\frac{1}{8}}, \\
&\leqslant \quad \left\{[c(8k)c(16n-8-8k)]^{\frac{1}{8}} m_k^{\frac{1}{4}}\right\} t^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $t \in [0,T]$,

$$\left|\int_0^t S_k(\epsilon,u)du\right| \leqslant C_{n,k}T^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}.$$

On en déduit que $\int_0^t S_k(\epsilon,u)du$ converge vers 0 quand $\epsilon \to 0$, uniformément pour $t \in [0,T]$. Donc, d'après (6.4), $\xi_\epsilon^1(t)$ converge vers 0 uniformément pour $t \in [0,T]$.

3. On étudie ensuite $\xi_\epsilon^2(t)$. Comme $W_\epsilon((u-\epsilon)^+)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}$-mesurable, elle est indépendante de $H_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_{(u-\epsilon)^+}^u (B_u - B_s)ds$. Par conséquent,

$$\xi_\epsilon^2(t) = \int_0^t E\left[\left(W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^{2n}\right] E\left[(H_\epsilon(u))^2\right] du.$$

D'après le Lemme 6.1.2, $E\left[(H_\epsilon(u))^2\right] = \left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3\sigma^2$, on en déduit :

$$\xi_\epsilon^2(t) = \sigma^2\int_0^t E\left[\left(W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^{2n}\right]\left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3 du.$$

Ainsi, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\left|\xi_\epsilon^2(t) - \sigma^2\int_0^t E\left[(\sigma B_u)^{2n}\right]du\right| \leqslant \sigma^2\int_0^T\left|\left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3 E\left[\left(W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^{2n}\right] - E\left[(\sigma B_u)^{2n}\right]\right| du.$$

Par hypothèse de récurrence, $\lim_{\epsilon\to 0} E\left[(W_\epsilon(u))^{2n}\right] = E\left[\sigma\left(B_u\right)^{2n}\right]$, uniformément en $u\in[0,T]$, donc

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3 E\left[\left(W_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^{2n}\right] = E\left[(\sigma B_u)^{2n}\right],$$

uniformément pour $u\in[0,T]$. Par conséquent, $\xi_\epsilon^2(t)$ converge vers $\sigma^2\int_0^t E\left[(\sigma B_u)^{2n}\right]du$, uniformément pour $t\in[0,T]$.

4. La décomposition (6.3) donne alors :

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left[(W_\epsilon(t))^{2n+2}\right] = (n+1)(2n+1)\sigma^2\int_0^t E\left[(B_{\sigma^2 u})^{2n}\right]du.$$

Or,

$$\begin{aligned}
(n+1)(2n+1)\sigma^2\int_0^t E\left[(\sigma B_u)^{2n}\right]du &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2}\sigma^2\int_0^t(\sigma\sqrt{u})^{2n}E\left[(B_1)^{2n}\right]du,\\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{2}\sigma^{2n+2}\int_0^t u^n\frac{(2n)!}{n!\,2^n}du,\\
&= \frac{(2n+2)!}{n!\,2^{n+1}}\sigma^{2n+2}\frac{t^{n+1}}{n+1},\\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,2^{n+1}}(\sigma\sqrt{t})^{2n+2},\\
&= E\left[(\sigma B_t)^{2n+2}\right].
\end{aligned}$$

Donc $E\left[(W_\epsilon(t))^{2n+2}\right]$ converge vers $E\left[(\sigma B_t)^{2n+2}\right]$, uniformément pour $t\in[0,T]$, ce qui termine la récurrence. ■

Proposition 6.1.7 *Pour tout t fixé, $W_\epsilon(t)$ converge en loi vers σB_t.*

Soit $t\geqslant 0$ fixé. On utilise la version suivante de la méthode des moments, tirée de [7] et du critère de Carleman de [28].

Proposition 6.1.8 *Soient X une variable aléatoire et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que*

$$\begin{aligned}
E(|X_n|^k) &< \infty, &\quad \forall k,n\in\mathbb{N},\\
E(|X|^k) &< \infty, &\quad \forall k\in\mathbb{N},\\
\lim_{n\to\infty} E(X_n^k) &= E(X^k), &\quad \forall n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Si

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\frac{[E(X^{2k})]^{\frac{1}{2k}}}{2k} < \infty,$$

alors X_n converge en loi vers X quand $n\to\infty$.

Preuve de la Proposition 6.1.7. Pour les moments d'ordre pair, le Lemme 6.1.6 donne

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left[(W_\epsilon(t))^{2k}\right] = E\left[(\sigma B_t)^{2k}\right].$$

Les moments d'ordre impairs de $W_\epsilon(t)$ sont nuls, donc convergent vers $0 = E\left[(\sigma B_t)^{2k+1}\right]$. Il reste à étudier la limite de $\frac{(E[(\sigma B_t)^{2k}])^{\frac{1}{2k}}}{2k}$ quand $k \to \infty$. On calcule l'espérance :

$$E\left[(\sigma B_t)^{2k}\right] = \sigma^{2k} t^k E\left[(B_1)^{2k}\right] = \sigma^{2k} t^k \frac{(2k)!}{k'!\,2^k}.$$

Donc

$$\frac{\left|E\left[(\sigma B_t)^{2k}\right]\right|^{\frac{1}{2k}}}{2k} = \frac{\sigma\sqrt{t}}{2k\sqrt{2}}\left(\frac{(2k)!}{k!}\right)^{\frac{1}{2k}}.$$

D'après la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, donc, lorsque $k \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|E\left[(B_{\sigma^2 t})^{2k}\right]\right|^{\frac{1}{2k}}}{2k} &\sim \frac{\sigma\sqrt{t}}{2\sqrt{2}k}\left[\frac{\sqrt{4\pi k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^{k}}\right]^{\frac{1}{2k}} \\
&\sim \frac{\sigma\sqrt{t}}{2\sqrt{2}k}\left[\frac{2^{2k+\frac{1}{2}}k^k}{e^k}\right]^{\frac{1}{2k}} \\
&\sim \frac{\sigma 2^{\frac{1}{4k}}\sqrt{t}}{\sqrt{2ek}}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|E\left[(B_{\sigma^2 t})^{2k}\right]\right|^{\frac{1}{2k}}}{2k} = 0.$$

■

6.1.4 Convergence en loi finie-dimensionnelle et critère de Kolmogorov

Proposition 6.1.9 *Soient $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Alors $(W_\epsilon(t_1), W_\epsilon(t_2), \ldots, W_\epsilon(t_n))$ converge en loi vers $(\sigma B_{t_1}, \sigma B_{t_2}, \ldots, \sigma B_{t_n})$.*

Preuve. On fait la preuve pour $n = 2$. Soient $0 < t_1 < t_2$ et $\epsilon \in]0, t_1 \wedge (t_2 - t_1)[$. Comme $t_1 > \epsilon$, remarquons que $(u-\epsilon)^+ = u - \epsilon$ pour tout $u \in [t_1, t_2]$. On écrit la décomposition suivante :

$$W_\epsilon(t_2) = W_\epsilon(t_1) + \Theta_\epsilon(t_1, t_2) + R^1_\epsilon(t_1, t_2), \tag{6.5}$$

avec

$$\begin{aligned}
R^1_\epsilon(t_1,t_2) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_{t_1}^{t_1+\epsilon}\left(\int_{u-\epsilon}^{u}(B_u - B_s)ds\right)dB_u, \\
\Theta_\epsilon(t_1,t_2) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_{t_1+\epsilon}^{t_2}\left(\int_{u-\epsilon}^{u}(B_u - B_s)ds\right)dB_u.
\end{aligned}$$

Commençons par étudier $R^1_\epsilon(t_1,t_2)$.

$$\begin{aligned}
E\left[\left(R^1_\epsilon(t_1,t_2)\right)^2\right] &= \frac{1}{\epsilon^3}\int_{t_1}^{t_1+\epsilon} E\left[\left(\int_{u-\epsilon}^{u}(B_u-B_s)ds\right)^2\right]du,\\
&= \frac{2}{\epsilon^3}\int_{t_1}^{t_1+\epsilon}\int_{u-\epsilon}^{u}\int_{u-\epsilon}^{s_2} E\left[(B_u-B_{s_1})(B_u-B_{s_2})\right]ds_1ds_2du,\\
&= \frac{2}{\epsilon^3}\int_{t_1}^{t_1+\epsilon}\int_{u-\epsilon}^{u}\int_{u-\epsilon}^{s_2}(u-s_2)ds_1ds_2du,\\
&= \frac{2}{\epsilon^3}\int_{t_1}^{t_1+\epsilon}\int_{u-\epsilon}^{u}(s_2-u+\epsilon)(u-s_2)ds_2du.
\end{aligned}$$

En posant $w=u-s_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[\left(R^1_\epsilon(t_1,t_2)\right)^2\right] &= \frac{2}{\epsilon^3}\int_{t_1}^{t_1+\epsilon}\int_0^\epsilon(\epsilon-w)wdwdu,\\
&\leqslant \frac{2}{\epsilon^3}\int_{t_1}^{t_1+\epsilon}\int_0^\epsilon \epsilon^2dwdu,\\
&\leqslant 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Donc $R^1_\epsilon(t_1,t_2)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$, et il suffit d'étudier la convergence en loi de $W_\epsilon(t_1)+\Theta_\epsilon(t_1,t_2)$. $W_\epsilon(t_1)$ et $\Theta_\epsilon(t_1,t_2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes. D'après la Proposition 6.1.7, $W_\epsilon(t_1)$ converge en loi vers σB_{t_1}. Il reste donc à étudier la convergence en loi de $\Theta_\epsilon(t_1,t_2)$.

On pose $B'_t=B_{t+t_1}-B_{t_1}, t\geqslant 0$. B' est un mouvement brownien standard pour sa filtration propre. Il vient, en faisant le changement de variable $u=t_1+v$,

$$\Theta_\epsilon(t_1,t_2)=\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_\epsilon^{t_2-t_1}\left(\int_{t_1+v-\epsilon}^{t_1+v}(B_{t_1+v}-B_s)ds\right)dB'_v.$$

En posant $r=s-t_1$ (qui est positif pour tout $s\in[t_1+v-\epsilon,t_1+v]$ car $v-\epsilon$ positif), on a

$$\begin{aligned}
\Theta_\epsilon(t_1,t_2) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_\epsilon^{t_2-t_1}\left(\int_{v-\epsilon}^{v}(B'_v-B'_r)dr\right)dB'_v,\\
&= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^{t_2-t_1}\left(\int_{(v-\epsilon)^+}^{v}(B'_v-B'_r)dr\right)dB'_v+\tilde{R}_\epsilon(t_1,t_2),
\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{R}_\epsilon(t_1,t_2)=\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^\epsilon\left(\int_0^v(B'_v-B'_r)dr\right)dB'_v.$$

De la même manière que $R^1_\epsilon(t_1,t_2)$, on montre que $\tilde{R}_\epsilon(t_1,t_2)$ converge vers 0 dans L^2.

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\tilde{R}_\epsilon(t_1,t_2)\right)^2\right] &= \frac{1}{\epsilon^3}\int_0^\epsilon E\left[\left(\int_0^v(B'_v-B'_r)dr\right)^2\right]dv,\\
&= \frac{2}{\epsilon^3}\int_0^\epsilon\int_0^v\int_0^{r_2}E\left[(B'_v-B'_{r_1})((B'_v-B'_{r_2})\right]dr_1dr_2dv,\\
&= \frac{2}{\epsilon^3}\int_0^\epsilon\int_0^v\int_0^{r_2}(v-r_2)dr_1dr_2dv,\\
&= \frac{2}{\epsilon^3}\int_0^\epsilon\int_0^v(v-r_2)r_2dr_2dv,\\
&\leqslant \frac{2}{\epsilon^3}\int_0^\epsilon\int_0^v\epsilon^2dr_2dv,\\
&\leqslant 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{R}_\epsilon(t_1,t_2)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$.

Pour le premier terme, d'après 6.1.7, $\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^{t_2-t_1}\left(\int_{(v-\epsilon)^+}^{v}(B'_v - B'_r)dr\right)dB'_v$ converge en loi vers $\sigma B'_{t_2-t_1}$. Donc $\Theta_\epsilon(t_1,t_2)$ converge en loi vers $\sigma B'_{t_2-t_1}$ quand $\epsilon \to 0$.

Finalement, d'après la décomposition (6.5), $(W_\epsilon(t_1), W_\epsilon(t_2))$ converge en loi vers $\left(\sigma B_{t_1}, \sigma B_{t_1} + \sigma B'_{t_2-t_1}\right)$ quand $\epsilon \to 0$. On termine la preuve en remarquant que $B_{t_1} + B'_{t_2-t_1} = B_{t_2}$. ■

Montrons à présent que le critère de Kolmogorov est vérifié.

Lemme 6.1.10 *Il existe une constante K telle que*

$$\forall\, 0 \leqslant s \leqslant t, \epsilon > 0, \qquad E\left[|W_\epsilon(t) - W_\epsilon(s)|^4\right] \leqslant K|t-s|^2.$$

Preuve. Pour $t \geqslant s \geqslant 0$, on a

$$W_\epsilon(t) - W_\epsilon(s) = \int_s^t H_\epsilon(u)dB_u.$$

Pour $s \geqslant 0$ fixé, $\left(\int_0^t \mathbb{I}_{\{s\leqslant u\}} H_\epsilon(u)dB_u\right)_{t\geqslant 0}$ est une martingale, donc par l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned} E\left[|W_\epsilon(t) - W_\epsilon(s)|^4\right] &\leqslant c(4)E\left[< W_\epsilon(.) - W_\epsilon(s) >_t^2\right], \\ &\leqslant c(4)E\left[\left(\int_s^t (H_\epsilon(u))^2\,du\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$E\left[|W_\epsilon(t) - W_\epsilon(s)|^4\right] \leqslant c(4)E\left[(t-s)\int_s^t (H_\epsilon(u))^4 du\right].$$

Le Lemme 6.1.2 donne :

$$E\left[|W_\epsilon(t) - W_\epsilon(s)|^4\right] \leqslant c(4)m_4(t-s)^2.$$

■

La Proposition 6.1.9 donne la convergence en loi finie-dimensionnelle de $(W_\epsilon(t))_{t\geqslant 0}$ vers $(\sigma B_t))_{t\geqslant 0}$, et le Lemme 6.1.10 donne la relative compacité. On en déduit que $(W_\epsilon(t))_{t\geqslant 0}$ converge en loi vers $(\sigma B_t))_{t\geqslant 0}$ quand $\epsilon \to 0$. Ce qui termine la preuve du Théorème 6.1.1. ■

6.2 Convergence en loi vers la variation quadratique

6.2.1 Convergence dans le cas $H = 1$

Comme B est Hölderien, la Proposition 5.2.1 s'applique et $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (B_{s+\epsilon} - B_s)^2 ds$ converge vers t presque sûrement, le résultat étant aussi valable en remplaçant $B_{s+\epsilon}$ par $B_{(s+\epsilon)\wedge t}$. On étudie alors la convergence de :

$$\Delta_\epsilon^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t (B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^2 ds - t\right].$$

Proposition 6.2.1 $\left(\Delta_\epsilon^{(2)}(t)\right)_{t\geqslant 0}$ *converge en loi vers* $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}B_t\right)_{t\geqslant 0}$ *quand* $\epsilon \to 0$.

Preuve. L'idée de la preuve est de faire apparaitre W_ϵ dans $\Delta_\epsilon^{(2)}(t)$ pour pouvoir appliquer le Théorème 6.1.1. On commence par décomposer $\Delta_\epsilon^{(2)}(t)$ au moyen de la formule d'Itô :

$$(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^2 = 2\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} (B_u - B_s)dB_u + (s+\epsilon)\wedge t - s.$$

En reportant dans $\Delta_\epsilon^{(2)}(t)$, on obtient :

$$\Delta_\epsilon^{(2)}(t) = 2W_\epsilon(t) + R_\epsilon(t),$$

avec

$$R_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\int_0^t \frac{(s+\epsilon)\wedge t - s}{\epsilon}ds - t\right).$$

$R_\epsilon(t)$ ne joue pas de rôle dans la limite en loi de $\Delta_\epsilon^{(2)}(t)$ puisque $R_\epsilon(t)$ est un terme déterministe tel que $\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{t\geqslant 0}|R_\epsilon(t)| = 0$ (voir ci-dessous). Donc le Théorème 6.1.1 donne directement le résultat.

Convergence de $R_\epsilon(t)$ vers 0.

$$R_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\int_0^{(t-\epsilon)^+} 1ds + \int_{(t-\epsilon)^+}^t \frac{t-s}{\epsilon}ds - t\right) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left((t-\epsilon)^+ - t + \int_{(t-\epsilon)^+}^t \frac{t-s}{\epsilon}ds\right).$$

Le changement de variable $u = t - s$ dans la deuxième intégrale donne

$$\begin{aligned} R_\epsilon(t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(-(t\wedge\epsilon) + \int_0^{t\wedge\epsilon}\frac{u}{\epsilon}du\right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(-(t\wedge\epsilon) + \frac{(t\wedge\epsilon)^2}{2\epsilon}\right), \\ &= \frac{(t\wedge\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}}\left(\frac{t\wedge\epsilon}{2\epsilon} - 1\right). \end{aligned}$$

Comme $t\wedge\epsilon \leqslant \epsilon$, on obtient pour tout $t \geqslant 0$, $|R_\epsilon(t)| \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{\epsilon}$, et donc la convergence presque sûre vers 0.

6.2.2 Convergence dans le cas $H = f(B)$

Dans cette section, on considère f une fonction dérivable, bornée et à dérivée bornée. On note C_f (respectivement $C_{f'}$) un majorant de $|f|$ (respectivement $|f'|$). Alors

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ (\text{ucp})\ \frac{1}{\epsilon}\int_0^t f(B_s)(B_{s+\epsilon} - B_s)^2 ds = \int_0^t f(B_s)ds,$$

ce résultat étant aussi valable en remplaçant $B_{s+\epsilon}$ par $B_{(s+\epsilon)\wedge t}$. On s'intéresse donc à la convergence en loi de :

$$\Delta_\epsilon^{(2)}(f,t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t f(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^2 ds - \int_0^t f(B_s)ds\right].$$

Remarquons que pour $f = 1$, $\Delta_\epsilon^{(2)}(1,t) = \Delta_\epsilon^{(2)}(t)$ a été étudié dans la section précédente.

Proposition 6.2.2 $\Delta_\epsilon^{(2)}(f,t)$ *converge en loi à t fixé vers* $2\gamma(f,t)$ *quand* $\epsilon \to 0$, *avec* $\gamma(f,t) = \sigma\int_0^t f(B_u)dW_u$, *avec* W *mouvement brownien standard indépendant de* B *et* $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Preuve. Après avoir modifié $\Delta_\epsilon^{(2)}(f,t)$, la preuve suivra les mêmes étapes que celle du Théorème 6.2.1.

1. On commence par décomposer $\Delta_\epsilon^{(2)}(f,t)$ au moyen de la formule d'Itô :

$$(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^2 = 2\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} (B_u - B_s)dB_u + (s+\epsilon)\wedge t - s.$$

En reportant dans $\Delta_\epsilon^{(2)}(f,t)$, on obtient :

$$\Delta_\epsilon^{(2)}(f,t) = 2\Delta_\epsilon^1(f,t) + R_\epsilon(f,t), \tag{6.6}$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta_\epsilon^1(f,t) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^t \left(\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} f(B_s)(B_u - B_s)dB_u\right)ds,\\ R_\epsilon(f,t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\int_0^t f(B_s)\frac{(s+\epsilon)\wedge t - s}{\epsilon}ds - \int_0^t f(B_s)ds\right).\end{aligned}$$

Le terme principal est $\Delta_\epsilon^1(f,t)$ car, presque sûrement, $\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{t\geqslant 0}|R_\epsilon(f,t)| = 0$.

En effet,

$$\begin{aligned}R_\epsilon(f,t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\int_0^t f(B_s)\frac{(s+\epsilon)\wedge t - s - \epsilon}{\epsilon}ds\right),\\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\int_0^{(t-\epsilon)^+} f(B_s)\frac{(s+\epsilon) - s - \epsilon}{\epsilon}ds\right) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\int_{(t-\epsilon)^+}^t f(B_s)\frac{t - s - \epsilon}{\epsilon}ds\right).\end{aligned}$$

Le premier terme est nul. Le changement de variable $v = t - s$ donne alors :

$$R_\epsilon(f,t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(\int_0^{t\wedge\epsilon} f(B_{t-v})\frac{v-\epsilon}{\epsilon}dv\right).$$

Comme f est bornée et $v \leqslant t\wedge\epsilon \leqslant \epsilon$, on a

$$\begin{aligned}|R_\epsilon(f,t)| &\leqslant \frac{C_f}{\sqrt{\epsilon}}\int_0^{t\wedge\epsilon} 2ds,\\ &\leqslant \frac{C_f}{\sqrt{\epsilon}}2(t\wedge\epsilon),\\ &\leqslant 2C_f\sqrt{\epsilon},\end{aligned}$$

pour tout $t \geqslant 0$. Donc $R_\epsilon(f,t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément en $t \geqslant 0$.

2. Il suffit donc d'étudier la convergence en loi de $\Delta_\epsilon^1(f,t)$ pour avoir celle de $\Delta_\epsilon^{(2)}(f,t)$. On écrit $\Delta_\epsilon^1(f,t)$ comme une martingale. Comme

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^t E\left[\left(\frac{1\!\!1_{\{s\leqslant u\leqslant (s+\epsilon)\wedge t\}}}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}f(B_s)(B_u - B_s)\right)^2\right]duds &= \frac{1}{\epsilon^3}\int_0^t\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} E(f^2(B_s)(B_u - B_s)^2)duds,\\ &\leqslant \frac{C_f^2}{\epsilon^3}\int_0^t\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t}(u-s)duds,\\ &< \infty,\end{aligned}$$

le Théorème de Fubini stochastique 1.3.1 s'applique et donne :

$$\Delta_\epsilon^1(f,t) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^t\left(\int_{(u-\epsilon)^+}^u f(B_s)(B_u - B_s)ds\right)dB_u.$$

On utilise l'identité suivante

$$f(B_s) = f(B_{(u-\epsilon)^+}) + [f(B_u) - f(B_{(u-\epsilon)^+})] + [f(B_s) - f(B_u)].$$

$\Delta^1_\epsilon(f,t)$ devient alors :

$$\Delta^1_\epsilon(f,t) = \tilde{\Delta}_\epsilon(f,t) + R^1_\epsilon(f,t) + R^2_\epsilon(f,t),$$

avec

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t) &= \int_0^t f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u)dB_u, && (6.7)\\
R^1_\epsilon(f,t) &= \int_0^t [f(B_u) - f(B_{(u-\epsilon)^+})]H_\epsilon(u)dB_u, && (6.8)\\
R^2_\epsilon(f,t) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^t \left(\int_{(u-\epsilon)^+}^u [f(B_s) - f(B_u)](B_u - B_s)ds\right) dB_u, && (6.9)\\
H_\epsilon(u) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_{(u-\epsilon)^+}^u (B_u - B_s)ds. && (6.10)
\end{aligned}$$

Notons que $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t), R^1_\epsilon(f,t)$ et $R^2_\epsilon(f,t)$ sont des martingales.

D'après les lemmes 6.2.4 et 6.2.5 ci-dessous, $R^2_\epsilon(f,t)$ et $R^1_\epsilon(f,t)$ convergent vers 0. La convergence en loi de de $\Delta^1_\epsilon(f,t)$ se déduit donc de la convergence de $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$.

Pour montrer que $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$ converge en loi vers $\gamma(f,t)$ avec $\gamma(f,t) = \int_0^t \sigma f(B_u)dW_u$, on emploie une méthode identique à celle de la Section 6.1, dont les étapes sont réparties dans les sections suivantes. Dans la Section 6.2.3, on majore les moments de $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$. La méthode des moments permet alors de montrer la convergence en loi de $\tilde{\Delta}_\epsilon(t)$ à t fixé dans la Section 6.2.4. ■

Remarque. Le critère de Kolmogorov (Lemme 6.2.3 ci-dessous) donne la tension de la famille $(\tilde{\Delta}_\epsilon)_{\epsilon>0}$, mais on n'est pas arrivé à prouver la convergence en loi finie-dimensionnelle.

En effet, soit $t_1 > t_2 > 0$ et $(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t_1), \tilde{\Delta}_\epsilon(f,t_2))$. Le deuxième terme $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t_2)$ se décompose comme $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t_1) + \theta_\epsilon(t_1,t_2)$, avec $\theta_\epsilon(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(B_{u-\epsilon})H_\epsilon(u)dB_u$. Si on pose $B'_v = B_{v+t_1} - B_{t_1}$ et qu'on fait le changement de variable $u = v + t_1$, il vient $\theta_\epsilon(t_1,t_2) = \int_0^{t_1+t_2} f(B'_{V-\epsilon} + B_{t_1})H'_\epsilon(v)dB'_v$. On remarque alors que $f(B'_{V-\epsilon} + B_{t_1})$ dépend de B_{t_1}, donc $\theta_\epsilon(t_1,t_2)$ et $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t_1)$ ne sont pas indépendants.

Lemme 6.2.3 (critère de Kolmogorov) *Il existe une constante K telle que*

$$\forall 0 \leqslant s \leqslant t, \epsilon > 0, \quad E\left[\left|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t) - \tilde{\Delta}_\epsilon(f,s)\right|^4\right] \leqslant K|t-s|^2.$$

Preuve. Pour $t \geqslant s \geqslant 0$, on a

$$\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t) - \tilde{\Delta}_\epsilon(f,s) = \int_s^t f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u)dB_u.$$

Par l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t) - \tilde{\Delta}_\epsilon(f,s)\right|^4\right] &\leqslant c(4)E\left[< \tilde{\Delta}_\epsilon(f,.) - \tilde{\Delta}_\epsilon(f,s) >^2_t\right],\\
&\leqslant c(4)E\left[\left(\int_s^t \left(f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u)\right)^2 du\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,s)\right|^4\right] &\leqslant c(4)E\left[(t-s)\int_s^t f^4(B_{(u-\epsilon)^+})(H_\epsilon(u))^4du\right], \\
&\leqslant c(4)(t-s)\int_s^t E\left[f^4(B_{(u-\epsilon)^+})\right]E\left[(H_\epsilon(u))^4\right]du.
\end{aligned}$$

En majorant f par C_f et en utilisant le Lemme 6.1.2, il vient

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,s)\right|^4\right] &\leqslant c(4)(t-s)\int_s^t C_f^2 m_4 du, \\
&\leqslant c(4)C_f^2 m_4(t-s)^2.
\end{aligned}$$

■

Lemme 6.2.4 *$R_\epsilon^2(f,t)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément en t sur les compacts.*

Preuve. Comme $R_\epsilon^2(f,t)$ est une martingale, on a par l'inégalité de Doob :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(R_\epsilon^2(f,t)\right)^2\right]\leqslant 4\int_0^T E\left[\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\left(\int_{(u-\epsilon)^+}^u (f(B_s)-f(B_u))(B_u-B_s)ds\right)^2\right]du.$$

f' est bornée donc $|f(B_s)-f(B_u)|\leqslant C_{f'}|B_u-B_s|$. Par conséquent :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(R_\epsilon^2(f,t)\right)^2\right]\leqslant 4\frac{C_{f'}^2}{\epsilon^3}\int_0^T E\left[\left(\int_{(u-\epsilon)^+}^u (B_u-B_s)^2ds\right)^2\right]du.$$

On fait le changement de variable $v=u-s$. Comme $(B_u-B_{u-v},0\leqslant v\leqslant u)\stackrel{\mathcal{L}}{=}(B_v,0\leqslant v\leqslant u)$, on a

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(R_\epsilon^2(f,t)\right)^2\right]\leqslant \frac{4C_{f'}^2}{\epsilon^3}\int_0^T E\left[\left(\int_0^{u\wedge\epsilon} B_v^2dv\right)^2\right]du.$$

On pose $v=(u\wedge\epsilon)w$. D'après la propriété de scaling du mouvement brownien, il vient :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(R_\epsilon^2(f,t)\right)^2\right] &\leqslant \frac{4C_{f'}^2}{\epsilon^3}\int_0^T E\left[\left(\int_0^1(\sqrt{u\wedge\epsilon}B_w)^2(u\wedge\epsilon)dw\right)^2\right]du, \\
&\leqslant 4C_{f'}^2\int_0^T\frac{(u\wedge\epsilon)^4}{\epsilon^3}E\left[\left(\int_0^1 B_w^2dw\right)^2\right]du, \\
&\leqslant 4C_{f'}^2 E\left[\left(\int_0^1 B_w^2dw\right)^2\right]\epsilon T.
\end{aligned}$$

Donc $R_\epsilon^2(f,t)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément en t sur les compacts. ■

Lemme 6.2.5 *$R_\epsilon^1(f,t)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément en t sur les compacts.*

Preuve. $R_\epsilon^1(f,t)$ est une martingale qui peut s'écrire $R_\epsilon^1(f,t)=\int_0^t[f(B_u)-f(B_{(u-\epsilon)^+})]H_\epsilon(u)dB_u$, donc

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(R_\epsilon^1(f,t)\right)^2\right]\leqslant 4\int_0^T E\left[\left(f(B_u)-f(B_{(u-\epsilon)^+})\right)^2(H_\epsilon(u))^2\right]du$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(R^1_\epsilon(f,t)\right)^2\right]\leqslant 4\int_0^T\sqrt{E\left[\left(f(B_u)-f(B_{(u-\epsilon)^+})\right)^4\right]}\sqrt{E\left[(H_\epsilon(u))^4\right]}du.$$

Le Lemme 6.1.2 donne alors :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(R^1_\epsilon(f,t)\right)^2\right]\leqslant 4m_4\int_0^T\sqrt{E\left[\left(f(B_u)-f(B_{(u-\epsilon)^+})\right)^4\right]}du.$$

f est continue donc pour tout $u\in[0,T]$, $f(B_u)-f(B_{(u-\epsilon)^+})$ tend vers 0 quand $\epsilon\to 0$. f est bornée, donc par le théorème de convergence dominée, $E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left(R^1_\epsilon(f,t)\right)^2\right]$ tend vers 0 quand $\epsilon\to 0$. ■

6.2.3 Préliminaires

Lemme 6.2.6 *Pour tout entier $k\geqslant 2$, il existe une constante $C(k)$ telle que*

$$\forall t\geqslant 0,\qquad E\left[\left|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right|^k\right]\leqslant C(k)t^{\frac{k}{2}}.$$

Preuve. $(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t))_{t\geqslant 0}$ est une martingale. L'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy donne alors

$$\begin{aligned}E\left[\left|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right|^k\right] &\leqslant c(k)E\left[<\tilde{\Delta}_\epsilon(f,.)>_t^{\frac{k}{2}}\right],\\ &\leqslant c(k)E\left[\left(\int_0^t f^2(B_{(u-\epsilon)^+})\,(H_\epsilon(u))^2\,du\right)^{\frac{k}{2}}\right].\end{aligned}$$

Comme f est bornée par C_f, il vient :

$$E\left[\left|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right|^k\right]\leqslant c(k)C_f^kE\left[\left(\int_0^t(H_\epsilon(u))^2du\right)^{\frac{k}{2}}\right].$$

(6.2) donne alors directement :

$$E\left[\left|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right|^k\right]\leqslant(c(k)m_kC_f^k)t^{\frac{k}{2}}.$$

■

Lemme 6.2.7 *Pour tout $v\geqslant 0$,*

$$E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,v)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(v-\epsilon)^+)\right)^2\right]\leqslant C_f^2\sigma^2\epsilon.$$

Preuve. On procède comme dans le Lemme 6.1.5.

$$\tilde{\Delta}_\epsilon(f,v)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(v-\epsilon)^+)=\int_{(v-\epsilon)^+}^v f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u)dB_u.$$

Donc

$$E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,v)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(v-\epsilon)^+)\right)^2\right]=\int_{(v-\epsilon)^+}^v E\left[f^2(B_{(u-\epsilon)^+})\,(H_\epsilon(u))^2\right]du.$$

Comme f est bornée par C_f, on obtient

$$E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,v)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(v-\epsilon)^+)\right)^2\right]\leqslant C_f^2\int_{(v-\epsilon)^+}^v E\left[(H_\epsilon(u))^2\right]du.$$

Le Lemme 6.1.2 donne

$$E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,v)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(v-\epsilon)^+)\right)^2\right]\leqslant C_f^2\int_{(v-\epsilon)^+}^v m_2du\leqslant C_f^2 m_2\epsilon.$$

■

6.2.4 Méthode des moments

1. On étudie la convergence des moments de $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$. Le moment d'ordre 1 étant nul, on commence avec le moment d'ordre 2 :

Lemme 6.2.8

$$\lim_{\epsilon\to 0}E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^2\right]=E\left[(\gamma(f,t))^2\right],$$

uniformément pour t sur les compacts.

Preuve. On rappelle que $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)=\int_0^t f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u)dB_u$. Alors,

$$E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^2\right]=\int_0^t E\left[f^2(B_{(u-\epsilon)^+})\left(H_\epsilon(u)\right)^2\right]du.$$

$f^2(B_{(u-\epsilon)^+})$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}$-mesurable donc indépendante de $H_\epsilon(u)$, et il vient :

$$\begin{aligned}E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^2\right]&=\int_0^t E\left[f^2(B_{(u-\epsilon)^+})\right]E\left[(H_\epsilon(u))^2\right]du,\\&=\int_0^t E\left[f^2(B_{(u-\epsilon)^+})\right]\left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3\sigma^2du,\end{aligned}$$

d'après le Lemme 6.1.2.

Conditionnellement à $\sigma(B_u,u\geqslant 0)$, $\gamma(f,t)=\sigma\int_0^t f(B_u)dW_u$ suit la loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma^2\int_0^t f^2(B_u)du$.

On a donc pour tout $t\in[0,T]$:

$$\left|E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^2-(\gamma(f,t))^2\right]\right|\leqslant\sigma^2\int_0^T\left|E\left[f^2(B_{(u-\epsilon)^+})\right]\left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3-E\left[f^2(B_u)\right]\right|du.$$

Or, $\lim_{\epsilon\to 0}E\left[f^2(B_{(u-\epsilon)^+})\right]\left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3=E\left[f^2(B_u)\right]$. De plus, f est borné et $\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\leqslant 1$. Donc, par le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^2-(\gamma(f,t))^2\right]\right|=0,$$

uniformément pour $t\in[0,T]$. ■

2. On montre ensuite la convergence des moments de tout ordre de $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$.

Proposition 6.2.9 *Pour tout $k\in\mathbb{N}$,*

$$\lim_{\epsilon\to 0}E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^k\right]=E\left[(\gamma(f,t))^k\right],$$

uniformément en $t\in[0,T]$, avec $\gamma(f,t)=\sigma\int_0^t f(B_u)dW_u$.

Preuve. Les moments d'ordre impairs étant nuls, on étudie les moments d'ordre pairs. Par récurrence sur $n \geqslant 1$, on montre que

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^{2n}\right] = E\left[(\gamma(f,t))^{2n}\right],$$

uniformément en $t \in [0,T]$.

Pour $n = 1$, le Lemme 6.2.8 donne $\lim_{\epsilon\to 0} E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^{2}\right] = E\left[(\gamma(f,t))^{2}\right]$.

Supposons qu'on a le résultat au rang $n \geqslant 1$. On veut montrer la convergence du moment d'ordre $2n+2$. Posons $k = 2n$. La formule d'Itô pour $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t) = \int_0^t f(B_{u-\epsilon})H_\epsilon(u)dB_u$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^{k+2} &= (k+2)\int_0^t \left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)\right)^{k+1} f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u)dB_u \\
&\quad + \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t \left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)\right)^{k} (f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u))^2 du.
\end{aligned}$$

Donc

$$E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^{k+2}\right] = \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)\right)^{k} (f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u))^2\right] du.$$

De même, la formule d'Itô appliquée à $\gamma(f,t)$ donne :

$$E\left[(\gamma(f,t))^{k+2}\right] = \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[(\gamma(f,u))^{k}(\sigma f(B_u))^2\right] du.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^{k+2} - (\gamma(f,t))^{k+2}\right] &= \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)\right)^{k} (f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u))^2\right. \\
&\quad \left. - (\gamma(f,u))^{k}(\sigma f(B_u))^2\right] du. \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

On décompose l'espérance dans l'intégrale en trois termes :

$$\begin{aligned}
& E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)\right)^{k} (f(B_{(u-\epsilon)^+})H_\epsilon(u))^2 - (\gamma(f,u))^{k}(\sigma f(B_u))^2\right], \\
= \; & E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)\right)^{k} H_\epsilon(u)^2(f^2(B_{(u-\epsilon)^+}) - f^2(B_u))\right] + E\left[(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^k f^2(B_u)(H_\epsilon(u))^2 - \sigma^2)\right] \\
& + E\left[\left((\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^k - \gamma(f,u)^k\right)(\sigma f(B_u)^2\right].
\end{aligned}$$

Dans le deuxième terme, en remplaçant $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^k$ par

$$(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^k - (\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+))^k + (\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+))^k,$$

et en reportant dans (6.11), on obtient la décomposition suivante :

$$E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^{k+2} - (\gamma(f,t))^{k+2}\right] = \frac{(k+2)(k+1)}{2}(\xi^1_\epsilon(t) + \xi^2_\epsilon(t) + \xi^3_\epsilon(t) + \xi^4_\epsilon(t)), \qquad (6.12)$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi^1_\epsilon(t) &= \int_0^t E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)\right)^{k} H_\epsilon(u)^2(f^2(B_{(u-\epsilon)^+}) - f^2(B_u))\right] du, \\
\xi^2_\epsilon(t) &= \int_0^t E\left[\left((\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^k - (\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+))^k\right) f^2(B_u)(H_\epsilon(u))^2 - \sigma^2)\right] du, \\
\xi^3_\epsilon(t) &= \int_0^t E\left[(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+))^k f^2(B_u)((H_\epsilon(u))^2 - \sigma^2)\right] du, \\
\xi^4_\epsilon(t) &= \int_0^t E\left[\left((\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^k - \gamma(f,u)^k\right)(\sigma f(B_u))^2\right] du.
\end{aligned}$$

On montre que chacun des $\xi_\epsilon^j(t)$ converge vers 0.

Étude de $\xi_\epsilon^1(t)$. En appliquant deux fois la formule de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)\right)^k H_\epsilon(u)^2(f^2(B_{(u-\epsilon)^+})-f^2(B_u))\right]du &\leqslant \left[E\left(\left(f^2(B_{u-\epsilon})-f^2(B_u)\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad\times\left[E\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)^{4k}\right)E\left(H_\epsilon(u)\right)^8\right]^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t\in[0,T]$,

$$|\xi_\epsilon^1(t)|\leqslant\int_0^T\left[E\left(\left(f^2(B_{(u-\epsilon)^+})-f^2(B_u)\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)^{4k}\right)E\left(H_\epsilon(u)\right)^8\right]^{\frac{1}{4}}du.$$

On peut majorer chacune des trois espérances. En effet, d'après le Lemme 6.2.6, il existe une constante C_n telle que, pour tout $u\in[0,T]$, $E\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)^{4k}\right)\leqslant C_k u^{2k}$. D'après le Lemme 6.1.2, pour tout $u\in[0,T]$, $E\left(H_\epsilon(u)\right)^8\leqslant m_8$. Comme f est bornée à dérivée bornée, la dérivée de f^2 est bornée par une constante C, donc $|f^2(B_{(u-\epsilon)^+})-f^2(B_u)|\leqslant C|B_{(u-\epsilon)^+}-B_u|$.

Finalement, il existe une constante K telle que, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned} |\xi_\epsilon^1(t)| &\leqslant K\int_0^T\left[E\left(B_{(u-\epsilon)^+}-B_u\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}u^{\frac{k}{2}}du, \\ &\leqslant K\int_0^T\sqrt{\epsilon}u^{\frac{k}{2}}du, \\ &\leqslant \frac{KT^{\frac{k}{2}+1}}{\frac{k}{2}+1}\sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

Donc $\xi_\epsilon^1(t)$ converge vers 0 quand $\epsilon\to0$, uniformément pour $t\in[0,T]$.

Étude de $\xi_\epsilon^2(t)$. On utilise l'identité

$$a^k-b^k=(a-b)\sum_{p=0}^{k-1}a^pb^{k-1-p},$$

pour $a=\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)$ et $b=\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)$. On obtient alors

$$\xi_\epsilon^2(t)=\sum_{p=0}^{k-1}\int_0^t S_p(\epsilon,u)-Z_p(\epsilon,u)du,$$

avec

$$\begin{aligned} S_p(\epsilon,u) &= E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)\right)\right)(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^p(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+))^{k-1-p}f^2(B_u)(H_\epsilon(u))^2\right], \\ Z_p(\epsilon,u) &= E\left[\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)\right)\right)(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^p(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+))^{k-1-p}f^2(B_u)\sigma^2\right]. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $t\in[0,T]$,

$$|\xi_\epsilon^2(t)|\leqslant\sum_{p=0}^{k-1}\int_0^T|S_p(\epsilon,u)|+|Z_p(\epsilon,u)|du, \tag{6.13}$$

Les termes $S_p(\epsilon,u)$ et $Z_p(\epsilon,u)$ s'étudient de la même manière. On commence par $S_p(\epsilon,u)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} |S_p(\epsilon,u)| &\leqslant \left[E\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\left(f(B_u)H_\epsilon(u)\right)^8\right]^{\frac{1}{4}} \\ &\quad\times\left[E(\tilde{\Delta}_\epsilon(u))^{8p}E(\Delta_\epsilon^1((u-\epsilon)^+))^{8k-8-8p}\right]^{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

Majorons chacun des termes du membre de droite. Pour la première espérance, d'après le Lemme 6.2.7, il existe une constante C telle que

$$E\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)\right)^2 \leqslant C\epsilon, \quad \forall u\in[0,T].$$

Pour la deuxième espérance, on majore f par C_f, puis on utilise le Lemme 6.1.2. On a alors, pour tout $u\in[0,T]$, $E\left(f(B_u)H_\epsilon(u)\right)^8 \leqslant C_f^8 m_8$. Pour les deux derniers termes, d'après le Lemme 6.2.6, il existe une constante n_p telle que, pour tout $u\in[0,T]$,

$$E(\tilde{\Delta}_\epsilon(u))^{8p}E(\Delta_\epsilon^1((u-\epsilon)^+))^{8k-8-8p} \leqslant n_p u^{4p}((u-\epsilon)^+))^{4k-4-4p} \leqslant n_p u^{4k-4}.$$

Par conséquent, il existe une constante C^p telle que,

$$|S_p(\epsilon,u)| \leqslant C^p u^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{\epsilon}, \quad \forall u\in[0,T].$$

De même, pour $Z_p(\epsilon,u)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned}|Z_p(\epsilon,u)| \quad \leqslant \quad & \left[E\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u)-\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\left(f(B_u)\sigma\right)^8\right]^{\frac{1}{4}} \\ & \left[E(\tilde{\Delta}_\epsilon(u))^{8p}E(\Delta_\epsilon^1((u-\epsilon)^+))^{8k-8-8p}\right]^{\frac{1}{8}}.\end{aligned}$$

Le seul terme différent de $S_p(\epsilon,u)$ étant $E\left(f(B_u)\sigma\right)^8 \leqslant C_f^8\sigma^8$, on obtient une constante $\tilde{C}^p$ telle que

$$|Z_p(\epsilon,u)| \leqslant \tilde{C}^p u^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{\epsilon}, \quad \forall u\in[0,T].$$

Finalement, en reportant dans (6.13), il vient :

$$|\xi_\epsilon^2(t)| \leqslant \left(\sum_{p=0}^{k-1}(C^p+\tilde{C}^p)\int_0^T u^{\frac{k-1}{2}}du\right)\sqrt{\epsilon}.$$

Donc $\xi_\epsilon^2(t)$ converge vers 0 quand $\epsilon\to 0$, uniformément pour $t\in[0,T]$.

Étude de $\xi_\epsilon^3(t)$. Comme f est borné par C_f, on a

$$|\xi_\epsilon^3(t)| \leqslant C_f^2\int_0^T\left|E\left[|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)|^k((H_\epsilon(u))^2-\sigma^2)\right]\right|du, \quad \forall t\in[0,T].$$

$\tilde{\Delta}_\epsilon^k(f,(u-\epsilon)^+)$ est $\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}$-adapté, donc indépendant de $H_\epsilon(u)$. Il vient alors :

$$|\xi_\epsilon^3(t)| \leqslant C_f^2\int_0^T\left|E\left[|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)|^k\right]E\left[(H_\epsilon(u))^2-\sigma^2\right]\right|du.$$

D'après le Lemme 6.2.6, il existe une constante C telle que,

$$\forall u\in[0,T], \quad E\left[|\tilde{\Delta}_\epsilon(f,(u-\epsilon)^+)|^k\right] \leqslant C((u-\epsilon)^+)^{\frac{k}{2}} \leqslant Cu^{\frac{k}{2}}.$$

D'après le Lemme 6.1.2,

$$\forall u\in[0,T], \quad E\left(H_\epsilon(u))^2-\sigma^2\right) = \left(\left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3-1\right)\sigma^2.$$

Par conséquent, on a la majoration suivante :

$$|\xi_\epsilon^3(t)| \leqslant C_f^2\sigma^2 C \int_0^T u^{\frac{k}{2}} \left(1 - \left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3\right) du.$$

Quand ϵ tend vers 0, $u^{\frac{k}{2}}\left(1-\left(\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}\right)^3\right)$ converge vers 0, et il est borné par $2T^{\frac{k}{2}}$. Donc le théorème de convergence dominée donne la convergence de $\xi_\epsilon^3(t)$ vers 0 quand $\epsilon \to 0$, uniformément pour $t \in [0,T]$.

Étude de $\xi_\epsilon^4(t)$. On majore f^2 par C_f^2 et on a pour tout $t \in [0,T]$,

$$|\xi_\epsilon^4(t)| \leqslant (\sigma C_f)^2 \int_0^T \left| E\left[(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^k - \gamma(f,u)^k\right]\right| du.$$

Par hypothèse de récurrence, $E\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,u))^k - \gamma(f,u)^k\right)$ converge vers 0 quand $\epsilon \to 0$, uniformément pour $u \in [0,T]$. Donc $\xi_\epsilon^4(t)$ converge vers 0 quand $\epsilon \to 0$, uniformément pour $t \in [0,T]$.

En reportant ces résultats dans (6.12), on conclut que

$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left(\left(\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)\right)^{k+2} - (\gamma(f,t))^{k+2}\right) = 0,$$

uniformément pour $t \in [0,T]$. Ce qui termine la récurrence. ■

3. On établit la convergence en loi de $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$ à t fixé.

Proposition 6.2.10 *À t fixé, $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$ converge en loi vers $\sigma\int_0^t f(B_u)dW_u$.*

Preuve. Soit $t \geqslant 0$ fixé. On utilise la méthode des moments. D'après la Proposition 6.2.9, on a la convergence de tous les moments de $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$ vers ceux de $\sigma\int_0^t f(B_u)dW_u$. Il reste donc à étudier la limite de $\frac{(M_k(t))^{\frac{1}{2k}}}{2k}$ quand $k \to \infty$, avec

$$M_k(t) = E\left[\left(\sigma\int_0^t f(B_u)dW_u\right)^{2k}\right] \geqslant 0.$$

Conditionnellement à $\sigma(B_u, u \geqslant 0)$, $\sigma\int_0^t f(B_u)dW_u$ suit la loi gaussienne centrée de variance $\sigma^2\int_0^t f^2(B_u)du$. Donc

$$E\left[\left(\int_0^t \sigma f(B_u)dW_u\right)^{2k} \Big|\sigma(B_u, u\geqslant 0)\right] = \left(\sqrt{\int_0^t \sigma^2 f^2(B_u)du}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{k!\,2^k}.$$

La majoration de f par C_f donne alors :

$$E\left[\left(\sigma\int_0^t f(B_u)dW_u\right)^{2k} \Big|\sigma(B_u, u\geqslant 0)\right] \leqslant t^k\sigma^{2k}C_f^{2k}\frac{(2k)!}{k!\,2^k}.$$

Donc

$$\frac{(M_k(t))^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leqslant \frac{\sigma C_f\sqrt{t}}{2k}\left(\frac{(2k)!}{k!\,2^k}\right)^{\frac{1}{2k}}.$$

D'après la preuve de la Proposition 6.1.7, $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}\left(\frac{(2k)!}{k!2^k}\right)^{\frac{1}{2k}} = 0$, donc $\lim_{k\to\infty}\frac{(M_k(t))^{\frac{1}{2k}}}{2k} = 0$.

Par la méthode des moments, $\tilde{\Delta}_\epsilon(f,t)$ converge en loi vers $\sigma\int_0^t f(B_u)dW_u$ quand $\epsilon \to 0$, pour $t \geqslant 0$ fixé.

■

6.3 Convergence en loi vers l'intégrale stochastique si H est étagé

Dans cette section, $(H_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus étagé. On considère
– $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante avec $a_0 = 0, a_n \to \infty$,
– $h, (h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires, h_i étant $\mathcal{F}_{a_i}$-mesurable, h étant $\mathcal{F}_0$-mesurable et $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|h_i\|_\infty < \infty$, tels que

$$H_t = h\mathbb{1}_{\{t=0\}} + \sum_{i\geqslant 0} h_i \mathbb{1}_{\{t\in]a_i,a_{i+1}]\}}.$$

On étudie les limites de

$$K_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_0^t H_s dB_s,$$

et

$$\Delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} K_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_0^t H_s dB_s\right],$$

quand $\epsilon \to 0$.

Proposition 6.3.1 $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds$ *converge presque sûrement vers l'intégrale stochastique* $\int_0^t H_s dB_s$*, uniformément pour* t *dans un compact, quand* $\epsilon \to 0$.
De plus, il existe une suite $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de variables aléatoires indépendantes et de même loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *telle que* W_i *est indépendant de* $(\mathcal{F}_a, a \geqslant 0)$ *et* $\Delta_\epsilon(t)$ *converge en loi vers*

$$\frac{h_0}{\sqrt{3}} W_0 + \sum_{i\geqslant 1} \frac{(h_i - h_{i-1})}{\sqrt{3}} W_i \mathbb{1}_{\{t\leqslant a_{i+1}\}},$$

à t *fixé, quand* $\epsilon \to 0$.

Remarque :

1. Comme H n'est pas continu, nous ne sommes pas dans les conditions du Théorème 5.1.1. Il faut donc faire la démonstration de la convergence presque sûre.
2. Si $H_t = h_0$ est un processus constant, alors on en déduit que $\Delta_\epsilon(t)$ converge en loi vers $\frac{h_0}{\sqrt{3}}W$, avec W une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, indépendante de $\mathcal{F}_0$.
3. Si $t \in [0, a_1]$, $\Delta_\epsilon(t)$ converge à t fixé vers $\frac{h_0}{\sqrt{3}}W$, mais $(\Delta_\epsilon(t), 0 \leqslant t \leqslant a_1)$ ne converge pas en loi vers le processus constant $\frac{h_0}{\sqrt{3}}W$ dans $\mathcal{C}([0,a_1])$. En effet, le processus limite en 0 vaut $\frac{h_0}{\sqrt{3}}W$, alors que $\Delta_\epsilon(0) = 0$.

Le point 3. de la Remarque souligne qu'il n'y a pas convergence en loi de $(\Delta_\epsilon(t), 0 \leqslant t)$ pour n'importe quel processus H. Ce qui explique notre recherche des cas pour lesquels la convergence en loi a lieu.

Preuve de la Proposition 6.3.1. Pour simplifier, on considère $0 < a_1 < a_2 < a_3$, $t \in [a_2, a_3]$ et ϵ assez petit pour que $\epsilon < |a_1| \wedge |a_2 - a_1| \wedge |a_3 - a_2|$. Comme H est étagé, les intégrales sur $[0,t]$ de $K_\epsilon(t)$ et $\Delta_\epsilon(t)$ se décomposent d'une manière naturelle en intégrales sur $[0, a_1]$, $]a_1, a_2]$ et $]a_2, t]$. Ainsi, sur chaque intervalle, on étudie la convergence presque sûre et la convergence au second ordre. Il faut cependant remarquer qu'il y a une différence entre ces deux convergences :
– Pour la convergence presque sûre, t est pris uniformément dans l'intervalle $[a_2, a_3]$.

– Pour la convergence au second ordre, t est fixé dans $]a_2, a_3]$. On peut donc ajuster le choix de ϵ en fonction de t.

Commençons par décomposer $K_\epsilon(t)$ et $\Delta_\epsilon(t)$:

$$\begin{aligned} K_\epsilon(t) &= h_0 K_\epsilon^0(t) + h_1 K_\epsilon^1(t) + h_2 K_\epsilon^2(t), \\ \Delta_\epsilon(t) &= \frac{h_0}{\sqrt{\epsilon}} K_\epsilon^0(t) + \frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}} K_\epsilon^1(t) + \frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}} K_\epsilon^2(t), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K_\epsilon^0(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^{a_1} (B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_0^{a_1} dB_s, \\ K_\epsilon^1(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_2} (B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_{a_1}^{a_2} dB_s, \\ K_\epsilon^2(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{t} (B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_{a_2}^{t} dB_s. \end{aligned}$$

On étudie chacun des trois termes de la même manière : on montre que chaque $K_\epsilon^i(t)$ converge presque sûrement vers 0, puis on étudie la limite en loi de $\frac{h_i}{\sqrt{\epsilon}} K_\epsilon^i(t)$.

Etude de $K_\epsilon^2(t)$. On commence par étudier la convergence presque sûre. Pour $t \in [a_2, a_2 + \epsilon]$, par la propriété de Hölder du mouvement Brownien, il vient

$$\begin{aligned} |K_\epsilon^2(t)| &= \left| \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{t} (B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - (B_t - B_{a_2}) \right|, \\ &\leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{t} C_\delta |(s+\epsilon)\wedge t - s|^\delta ds + C_\delta |t - a_2|^\delta, \\ &\leqslant \frac{lt - a_2|}{\epsilon} C_\delta \epsilon^\delta + C_\delta \epsilon^\delta, \\ &\leqslant 2C_\delta \epsilon^\delta. \end{aligned}$$

Pour $t > a_2 + \epsilon$, séparer l'intégrale en deux termes mène à :

$$\begin{aligned} K_\epsilon^2(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{t} B_{(s+\epsilon)\wedge t} ds - \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{t} B_s ds - (B_t - B_{a_2}), \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{t-\epsilon} B_{s+\epsilon} ds + \frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^{t} B_t ds - \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{t} B_s ds - (B_t - B_{a_2}). \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $s' = s + \epsilon$ dans la première intégrale :

$$K_\epsilon^2(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2+\epsilon}^{t} B_{s'} ds' + B_t - \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{t} B_s ds - (B_t - B_{a_2}).$$

Il vient après simplification :

$$K_\epsilon^2(t) = B_{a_2} - \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{a_2+\epsilon} B_s ds = \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{a_2+\epsilon} (B_{a_2} - B_s) ds.$$

Par la propriété de Hölder de B (Proposition 1.3.2), pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$|K_\epsilon^2(t)| \leqslant \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{a_2+\epsilon} C_\delta |a_2 - s|^\delta ds \leqslant C_\delta \epsilon^\delta,$$

donc $K_\epsilon^2(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément pour $t \in [a_2, a_3]$.

Étudions à présent la convergence en loi de $\frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}}K_\epsilon^2(t)$. Comme t est fixé, on peut choisir ϵ tel que $\epsilon < t-a_2$. On a

$$\frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}}K_\epsilon^2(t) = \frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\left(\int_{a_2}^t\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} dB_v\right)du - \int_{a_2}^t dB_v\right].$$

Il vient, d'après le théorème de Fubini stochastique,

$$\begin{aligned}
\frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}}K_\epsilon^2(t) &= \frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^t\left(\int_{a_2\vee(v-\epsilon)}^v du\right)dB_v - \int_{a_2}^t dB_v\right],\\
&= \frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}}\left[\int_{a_2}^t\left(\frac{v-(a_2\vee(v-\epsilon))}{\epsilon}-1\right)dB_u\right],\\
&= \frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}}\left[\int_{a_2}^{(a_2+\epsilon)\wedge t}\left(\frac{v-a_2}{\epsilon}-1\right)dB_v\right].
\end{aligned}$$

Comme $\epsilon < t-a_2$, on a $(a_2+\epsilon)\wedge t = a_2+\epsilon$ et ce terme ne dépend pas de t. Donc

$$\frac{h_2}{\sqrt{\epsilon}}K_\epsilon^2(t) = h_2 G_2(\epsilon),$$

avec

$$G_2(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\int_{a_2}^{a_2+\epsilon}\left(\frac{v-a_2}{\epsilon}-1\right)dB_v. \tag{6.14}$$

$G_2(\epsilon)$ est une variable aléatoire indépendante de $\mathcal{F}_{a_2}$. Elle suit la loi gaussienne centrée et de variance

$$E((G_2(\epsilon))^2) = \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{a_2+\epsilon}\left(\frac{v-a_2}{\epsilon}-1\right)^2 ds = \frac{1}{3}.$$

Etude de $K_\epsilon^1(t)$. Comme dans le point précédent, on découpe la première intégrale en trois parties, puis on fait le changement de variable $s' = s+\epsilon$.

$$\begin{aligned}
K_\epsilon^1(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_2\wedge(t-\epsilon)} B_{s+\epsilon}ds + \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2\wedge(t-\epsilon)}^{a_2} B_t ds - \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_2} B_s ds - (B_{a_2}-B_{a_1}),\\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1+\epsilon}^{(a_2+\epsilon)\wedge t} B_{s'}ds' + \frac{(a_2-t+\epsilon)^+}{\epsilon}B_t - \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_2} B_s ds - (B_{a_2}-B_{a_1}),\\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{(a_2+\epsilon)\wedge t} B_s ds - \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_1+\epsilon} B_s ds - B_{a_2} + B_{a_1} + \frac{(a_2-t+\epsilon)^+}{\epsilon}B_t.
\end{aligned}$$

On utilise la décomposition suivante :

$$\frac{(a_2+\epsilon)\wedge t - a_2}{\epsilon} + \left(1 - \frac{(a_2+\epsilon)\wedge t - a_2}{\epsilon}\right) = \frac{(a_2+\epsilon)\wedge t - a_2}{\epsilon} + \left(\frac{(a_2+\epsilon-t)^+}{\epsilon}\right).$$

Ce qui permet de faire entrer B_{a_2} dans la première intégrale et B_{a_1} dans la deuxième intégrale. On obtient alors

$$K_\epsilon^1(t) = \frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{(a_2+\epsilon)\wedge t}(B_s - B_{a_2})ds - \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_1+\epsilon}(B_s - B_{a_1})ds + \frac{(a_2-t+\epsilon)^+}{\epsilon}(B_t - B_{a_2}).$$

Par la propriété de Hölder de B,

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{a_2}^{(a_2+\epsilon)\wedge t}(B_s - B_{a_2})ds\right| \leqslant C_\delta \epsilon^\delta, \quad \left|\frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_1+\epsilon}(B_s - B_{a_1})ds\right| \leqslant C_\delta \epsilon^\delta,$$

et

$$\frac{(a_2-t+\epsilon)^+}{\epsilon}|B_t-B_{a_2}| \leqslant \frac{(a_2-t+\epsilon)^+}{\epsilon}C_\delta|t-a_2|^\delta.$$

Si $t \geqslant a_2+\epsilon$, alors $(a_2-t+\epsilon)^+=0$. Si $t<a_2+\epsilon$, alors $|a_2-t|\leqslant \epsilon$, et il vient

$$\frac{(a_2-t+\epsilon)^+}{\epsilon}|B_t-B_{a_2}| \leqslant 2C_\delta\epsilon^\delta.$$

Donc $K_\epsilon^1(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément pour $t\in]a_2,a_3]$.

Étudions à présent la convergence en loi de $\frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}}K_\epsilon^1(t)$. On choisit ϵ tel que $t>a_2+\epsilon$.

$$\frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}}K_\epsilon^1(t) = \frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_2}\left(\int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} dB_v\right)du - \int_{a_1}^{a_2} dB_v\right].$$

Le théorème de Fubini stochastique donne alors

$$\begin{aligned}
\frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}}K_\epsilon^1(t) &= \frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_2+\epsilon}\left(\int_{a_1\vee(v-\epsilon)}^{v\wedge a_2} du\right)dB_v - \int_{a_1}^{a_2} dB_v\right],\\
&= \frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\int_{a_1}^{a_2}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{a_1\vee(v-\epsilon)}^{v} du - 1\right)dB_v + \int_{a_2}^{a_2+\epsilon}\left(\frac{1}{\epsilon}\int_{v-\epsilon}^{a_2} du\right)dB_v\right],\\
&= \frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\int_{a_1}^{a_2}\left(\frac{v-a_1\vee(v-\epsilon)}{\epsilon}-1\right)dB_v + \int_{a_2}^{(a_2+\epsilon)\wedge t}\left(\frac{a_2-v+\epsilon}{\epsilon}\right)dB_v\right],\\
&= \frac{h_1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\int_{a_1}^{a_1+\epsilon}\left(\frac{v-a_1}{\epsilon}-1\right)dB_v - \int_{a_2}^{a_2+\epsilon}\left(\frac{v-a_2}{\epsilon}-1\right)dB_v\right],\\
&= h_1G_1(\epsilon)-h_1G_2(\epsilon),
\end{aligned}$$

avec $G_2(\epsilon)$ défini par (6.14) et

$$G_1(\epsilon)=\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\int_{a_1}^{a_1+\epsilon}\left(\frac{v-a_1}{\epsilon}-1\right)dB_v. \tag{6.15}$$

Comme précédemment, $G_1(\epsilon)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\frac{1}{3}$, indépendante de $\mathcal{F}_{a_1}$ et de $G_2(\epsilon)$.

Etude de $K_\epsilon^0(t)$. Dans ce terme, t n'intervient plus. Comme pour les deux termes précédents, on découpe l'intégrale en deux parties et on fait le changement de variable $s'=s+\epsilon$.

$$\begin{aligned}
K_\epsilon^0(t) &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^{a_1}(B_{s+\epsilon}-B_s)ds - B_{a_1},\\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_\epsilon^{a_1+\epsilon}B_{s'}ds' - \frac{1}{\epsilon}\int_0^{a_1}B_s ds - B_{a_1},\\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_1+\epsilon}B_s ds - \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon}B_s ds - B_{a_1},\\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_1+\epsilon}(B_s-B_{a_1})ds - \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon}B_s ds.
\end{aligned}$$

Par la propriété de Hölder de B,

$$\left|\frac{1}{\epsilon}\int_{a_1}^{a_1+\epsilon}(B_s-B_{a_1})ds\right| \leqslant C_\delta\epsilon^\delta, \quad \left|\frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon}B_s ds\right| \leqslant C_\delta\epsilon^\delta,$$

donc K_ϵ^0 converge presque sûrement vers 0.

On étudie la convergence en loi de

$$\frac{h_0}{\sqrt{\epsilon}} K_\epsilon^0(t) = \frac{h_0}{\sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{\epsilon} \int_0^{a_1} \left(\int_u^{u+\epsilon} dB_v \right) du - \int_0^{a_1} dB_v \right].$$

Le théorème de Fubini stochastique donne

$$\begin{aligned}
\frac{h_0}{\sqrt{\epsilon}} K_\epsilon^0(t) &= \frac{h_0}{\sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(\int_0^{a_1+\epsilon} \int_{(v-\epsilon)^+}^{v \wedge a_1} du \right) dB_v - \int_0^{a_1} dB_v \right], \\
&= \frac{h_0}{\sqrt{\epsilon}} \left[\int_0^{a_1} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{(v-\epsilon)^+}^{v} du - 1 \right) dB_v + \int_{a_1}^{a_1+\epsilon} \left(\frac{1}{\epsilon} \int_{v-\epsilon}^{a_1} du \right) dB_v \right], \\
&= \frac{h_0}{\sqrt{\epsilon}} \left[\int_0^{a_1} \left(\frac{v-(v-\epsilon)^+}{\epsilon} - 1 \right) dB_v + \int_{a_1}^{a_1+\epsilon} \left(\frac{a_1 - v + \epsilon}{\epsilon} \right) dB_v \right], \\
&= \frac{h_0}{\sqrt{\epsilon}} \left[\int_0^{\epsilon} \left(\frac{v}{\epsilon} - 1 \right) dB_v - \int_{a_1}^{a_1+\epsilon} \left(\frac{v-a_1}{\epsilon} - 1 \right) dB_v \right], \\
&= h_0 G_0(\epsilon) - h_0 G_1(\epsilon),
\end{aligned}$$

avec $G_1(\epsilon)$ définie par (6.15) et

$$G_0(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_0^{\epsilon} \left(\frac{v}{\epsilon} - 1 \right) dB_v.$$

$G_0(\epsilon)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance $\frac{1}{3}$. Elle est indépendante de $G_2(\epsilon), G_1(\epsilon)$ et de $\mathcal{F}_0$.

Limite de $K_\epsilon(t)$ et de $\Delta_\epsilon(t)$. Finalement, $K_\epsilon(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément pour $t \in [a_2, a_3]$.

Concernant la convergence en loi à t fixé, pour ϵ assez petit,

$$\Delta_\epsilon(t) = h_0 G_0(\epsilon) + (h_1 - h_0) G_1(\epsilon) + (h_2 - h_1) G_2(\epsilon),$$

avec $G_0(\epsilon), G_1(\epsilon), G_2(\epsilon, t)$ des variables aléatoires indépendantes, de loi gaussienne centrée de variance $\frac{1}{3}$, G_i étant indépendante de $\mathcal{F}_{a_i}$.

$h_0, h_1, h_2, G_0(\epsilon), G_1(\epsilon)$ sont $\mathcal{F}_{a_2}$-mesurables. $G_2(\epsilon)$ est indépendant de $\mathcal{F}_{a_2}$ et converge en loi vers une loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$.

Établissons la convergence en loi de $G_1(\epsilon)$ conditionnellement à $\mathcal{F}_a$ pour $a > a_1$. On décompose $\mathcal{F}_a$ en $\mathcal{F}_{a_1} \vee \mathcal{F}_{[a_1,a]}$. Dans $G_1(\epsilon)$, on fait le changement de variable $s = v - a_1$ et on pose $\overline{B}_s = B_{s+a_1} - B_{a_1}$. $(\overline{B}_s, 0 \leqslant s \leqslant a - a_1)$ est un mouvement brownien standard indépendant de $\mathcal{F}_{a_1}$. On a alors

$$G_1(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_0^{\epsilon} \left(\frac{s - \epsilon}{\epsilon} \right) d\overline{B}_s.$$

Comme $G_1(\epsilon)$ est indépendant de $\mathcal{F}_{a_1}$, il suffit de montrer que, conditionnellement à $\sigma(\overline{B}_s, 0 \leqslant s \leqslant a - a_1)$, $G_1(\epsilon)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi indépendante.

On pose $\mathcal{G}_0 = \sigma(\overline{B}_s, 0 \leqslant s \leqslant a - a_1)$ et $\mathcal{G}_\epsilon = \sigma(\overline{B}_s - \overline{B}_\epsilon, \epsilon \leqslant s \leqslant a - a_1)$. Alors, $G_1(\epsilon)$ est indépendant de $\mathcal{G}_\epsilon$ et $\mathcal{G}_\epsilon$ converge vers $\mathcal{G}_0$.

Soit $A \in \mathcal{G}_0$. Pour évaluer la limite de $\theta_\epsilon(u) = E\left[\exp(iuG_1(\epsilon)) \mathbb{1}_A\right]$, on le décompose :

$$\theta_\epsilon(u) = \theta_\epsilon^1(u) + (\theta_\epsilon(u) - \theta_\epsilon^1(u)),$$

avec

$$\theta^1_\epsilon(u) = E\left[\exp(iuG_1(\epsilon))E(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_\epsilon)\right].$$

Le terme principal est $\theta^1_\epsilon(u)$ car $\theta_\epsilon(u)-\theta^1_\epsilon(u)$ converge vers 0. En effet, $\exp(iuG_1(\epsilon))$ est borné et $E(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_\epsilon)$ converge vers $E(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_0) = \mathbb{1}_A$.

Pour étudier $\theta^1_\epsilon(u)$, on utilise que $G_1(\epsilon)$ est indépendant de $\mathcal{G}_\epsilon$.

$$\theta^1_\epsilon(u) = E\left[\exp(iuG_1(\epsilon))\right] E\left[E(\mathbb{1}_A|\mathcal{G}_\epsilon)\right].$$

Ainsi,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\theta^1_\epsilon(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\frac{1}{3}\right) E\left[\mathbb{1}_A\right].$$

Par conséquent, conditionnellement à $\mathcal{F}_a$, $G_1(\epsilon)$ converge en loi vers G_1 indépendante de $\mathcal{F}_a$, pour tout $a > a_1$.

De même, conditionnellement à $\mathcal{F}_a$, $G_0(\epsilon)$ converge en loi vers G_0 indépendante de $\mathcal{F}_a$ pour tout $a > a_1$. En particulier, conditionnellement à $\mathcal{F}_{a_2}$, $G_0(\epsilon)$ et $G_1(\epsilon)$ convergent en loi vers G_0 et G_1 indépendantes de $\mathcal{F}_{a_2}$. On se ramène donc à la convergence de $h_0G_0(\epsilon)+(h_1-h_0)G_1(\epsilon)$, indépendamment de $(h_2-h_1)G_2(\epsilon)$.

$h_0, h_1, G_0(\epsilon)$ sont $\mathcal{F}_{a_1}$-mesurables. $G_1(\epsilon)$ est indépendant de $\mathcal{F}_{a_1}$ et converge en loi vers une loi $\mathcal{N}(0,\frac{1}{3})$. Par un raisonnement similaire, conditionnellement à $\mathcal{F}_{a_1}$, $G_0(\epsilon)$ converge en loi vers G_0 indépendante de $\mathcal{F}_{a_1}$.

Ainsi, $\Delta_\epsilon(t)$ converge en loi vers $h_0G_0 + (h_1-h_0)G_1 + (h_2-h_1)G_2$, avec G_0, G_1, G_2 variables aléatoires gaussiennes indépendantes, centrées et de variance $\frac{1}{3}$. ∎

6.4 Convergence dans L^2 vers l'intégrale stochastique si H est à variation finie

Dans cette section, $(H_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus adapté continu, à variation bornée. On suppose de plus que $H_0 = 0$ et que H est Hölderien d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'il existe une variable aléatoire $K \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall x, y \geqslant 0, |H_x - H_y| \leqslant K|x-y|^\alpha.$$

Alors, d'après le Théorème 5.1.1, $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds$ converge presque sûrement vers $\int_0^t H_s dB_s$, uniformément en t dans un compact.

On étudie ensuite la convergence en loi de :

$$\Delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_0^t H_s dB_s\right].$$

Proposition 6.4.1 *$\Delta_\epsilon(t)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$ uniformément pour $t \in [0,T]$, quand $\epsilon \to 0$.*

Preuve. On commence par écrire $\Delta_\epsilon(t)$ sous la forme d'une intégrale stochastique en utilisant le Théorème de Fubini stochastique.

$$\begin{aligned}\Delta_\epsilon(t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(H_s\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} dB_u\right) ds - \int_0^t H_s dB_s\right],\\ &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(u-\epsilon)^+}^u H_s ds\right) dB_u - \int_0^t H_s dB_s\right].\end{aligned}$$

Comme $H_0 = 0$, on prolonge H par $H_x = 0$ si $x \leqslant 0$. Ainsi, $\int_{(u-\epsilon)^+}^u H_s ds = \int_{u-\epsilon}^u H_s ds$ et

$$\Delta_\epsilon(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{u-\epsilon}^u (H_s - H_u) ds \right) dB_u.$$

Par conséquent,

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} |\Delta_\epsilon(t)|^2 \right) \leqslant 4 \int_0^T E\left(\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{u-\epsilon}^u (H_s - H_u) ds \right)^2 du.$$

H étant à variation bornée, $H_u - H_s = \int_s^u dH_r$ au sens de l'intégrale de Stieljes et on peut appliquer le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{u-\epsilon}^u (H_s - H_u) ds &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{u-\epsilon}^u \left(-\int_s^u dH_r \right) ds, \\ &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{u-\epsilon}^u \left(-\int_{u-\epsilon}^r ds \right) dH_r, \\ &= \int_{u-\epsilon}^u \frac{u-\epsilon-r}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} dH_r. \end{aligned}$$

Comme $|u - \epsilon - r| \leqslant \epsilon$, on obtient la majoration suivante :

$$\left| \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{u-\epsilon}^u (H_s - H_u) ds \right| \leqslant \left| \int_{u-\epsilon}^u \frac{dH_r}{\sqrt{\epsilon}} \right| \leqslant \left| \frac{H_u - H_{u-\epsilon}}{\sqrt{\epsilon}} \right|.$$

Puis, par la propriété de Hölder de H,

$$\left| \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{u-\epsilon}^u (H_s - H_u) ds \right| \leqslant K\epsilon^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Ainsi,

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} |\Delta_\epsilon(t)|^2 \right) \leqslant 4 \int_0^T E(K^2)\epsilon^{2\alpha-1} du \leqslant 4TE(K^2)\epsilon^{2\alpha-1}.$$

Comme $2\alpha - 1 > 0$, $\Delta_\epsilon(t)$ tend vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément sur $[0, T]$. ■

6.5 Convergence en loi vers l'intégrale stochastique si H est l'intégrale stochastique d'un processus Hölderien

6.5.1 Énoncé du Théorème

On considère Λ un processus adapté continu uniformément borné. On note M une borne de Λ. On suppose de plus que Λ vérifie une propriété de Hölder : il existe $\gamma > 0$ et $K \in L^2(\Omega)$ tels que $|\Lambda_u - \Lambda_s| \leqslant K|u-s|^\gamma$. On pose $H_t = \int_0^t \Lambda_u dB_u$. H est une martingale continue et on étudie

$$\Delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{\epsilon} \int_0^t H_s(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s) ds - \int_0^t H_s dB_s \right].$$

Théorème 6.5.1 $\Delta_\epsilon(t)$ *converge en loi à t fixé vers* $-\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^t \Lambda_u dW_u$ *quand* $\epsilon \to 0$, *avec W mouvement brownien standard indépendant de B.*

Preuve. On commence par montrer que $\Delta_\epsilon(t)$ est une martingale grâce au théorème de Fubini stochastique.

$$\Delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t H_s\left(\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} dB_u\right)ds - \int_0^t H_s dB_s\right].$$

Comme $E((H_s)^2) = E(\int_0^s \Lambda_u^2 du) \leqslant M^2 s$, on a bien $\int_0^t \left(\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} E((H_s)^2)du\right) ds < \infty$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini stochastique :

$$\Delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t\left(\int_{(u-\epsilon)^+}^u H_s ds\right)dB_u - \int_0^t H_s dB_s\right] = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_{(u-\epsilon)^+}^u H_s ds - H_u\right]dB_u.$$

Pour écrire le termes entre crochets comme une seule intégrale, on décompose H_u sous la forme

$$H_u = \frac{u-(u-\epsilon)^+}{\epsilon}H_u + \frac{(\epsilon-u)^+}{\epsilon}H_u.$$

Ce qui donne :

$$\Delta_\epsilon(t) = \widetilde{\Delta}_\epsilon(t) + R_\epsilon^1(t),$$

avec

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_\epsilon(t) &= \int_0^t \widetilde{H}_\epsilon(u)dB_u,\\
\widetilde{H}_\epsilon(u) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_{(u-\epsilon)^+}^u (H_s - H_u)ds,\\
R_\epsilon^1(t) &= -\int_0^t \frac{(\epsilon-u)^+}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}H_u dB_u.
\end{aligned}$$

Le terme principal est $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)$, car $R_\epsilon^1(t)$ converge vers 0 dans $L^2(\Omega)$, uniformément pour $t \geqslant 0$. En effet, par l'inégalité de Doob, on a

$$E[\sup_{t\geqslant 0}(R_\epsilon^1(t))^2] \leqslant 4E\left[\int_0^\epsilon\left(\frac{\epsilon-u}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}H_u\right)^2du\right] \leqslant 4\int_0^\epsilon \frac{(\epsilon-u)^2}{\epsilon^3}E[(H_u)^2]du.$$

On majore $\epsilon - u$ par ϵ et $E[(H_u)^2] = \int_0^u E[(\Lambda_r)^2]dr$ par $M^2 u$. Il vient

$$E[\sup_{t\geqslant 0}(R_\epsilon^1(t))^2] \leqslant 4M^2\int_0^\epsilon \frac{u}{\epsilon} \leqslant 4M^2\frac{\epsilon^2}{2\epsilon}du \leqslant 2M^2\epsilon.$$

On étudie ensuite $\widetilde{\Delta}_\epsilon$, en employant la même méthode que pour l'étude de W_ϵ. La Section 6.5.2 regroupe les calculs préliminaires, puis on montre que $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)$ convergence en loi à t fixé vers $\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r$ par la méthode des moments (c.f la Section 6.5.3). ∎

Remarque. Le critère de Kolmogorov (Lemme 6.5.2 ci-dessous) donne la tension de la famille $(\widetilde{\Delta}_\epsilon)_{\epsilon>0}$, mais on n'a pas réussi à montrer la convergence en loi finie-dimensionnelle.

Lemme 6.5.2 *Il existe une constante $\widetilde{K}$ telle que*

$$\forall 0 \leqslant s \leqslant t, \epsilon > 0, \quad E\left[\left|\widetilde{\Delta}_\epsilon(t) - \widetilde{\Delta}_\epsilon(s)\right|^4\right] \leqslant \widetilde{K}|t-s|^2.$$

Preuve. Pour $t \geqslant s \geqslant 0$, on a

$$\widetilde{\Delta}_\epsilon(t) - \widetilde{\Delta}_\epsilon(s) = \int_s^t \widetilde{H}_\epsilon(u) dB_u.$$

Par l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\widetilde{\Delta}_\epsilon(t) - \widetilde{\Delta}_\epsilon(s)\right|^4\right] &\leqslant c(4) E\left[< \widetilde{\Delta}_\epsilon(t) - \widetilde{\Delta}_\epsilon(s) >_t^2\right], \\
&\leqslant c(4) E\left[\left(\int_s^t \left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2 du\right)^2\right], \\
&\leqslant c(4)(t-s) \int_s^t E\left[(H_\epsilon(u))^4\right] du, \\
&\leqslant c(4)(t-s) \int_s^t m_4 du, \\
&\leqslant c(4) m_4 (t-s)^2.
\end{aligned}$$

■

6.5.2 Préliminaires

Cette section regroupe une série de lemmes concernant les propriétés de $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)$ et $\widetilde{H}_\epsilon(u)$, qui serviront dans les sections suivantes.

Lemme 6.5.3

$$\widetilde{H}_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{(u-\epsilon)^+}^u \Lambda_r (r - (u-\epsilon)^+) dB_r,$$

$$< \widetilde{H}_\epsilon > (u) = \frac{1}{\epsilon^3} \int_{(u-\epsilon)^+}^u \Lambda_r^2 (r - (u-\epsilon)^+)^2 dr \leqslant M^2.$$

De plus, on peut majorer ses moments de tout ordre : $\forall k \in \mathbb{N}$, *il existe une constante* m_k *telle que*

$$\forall t \geqslant 0, \forall \epsilon > 0, \quad E\left[\left|\widetilde{H}_\epsilon(t)\right|^k\right] \leqslant m_k.$$

Preuve. On remplace $H_s - H_u$ par $-\int_s^u \Lambda_r dB_r$. Comme Λ est uniformément borné, on peut appliquer le théorème de Fubini stochastique :

$$\widetilde{H}_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{(u-\epsilon)^+}^u \left(\int_{(u-\epsilon)^+}^r ds\right) \Lambda_r dB_r = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{(u-\epsilon)^+}^u \Lambda_r (r - (u-\epsilon)^+) dB_r.$$

On en déduit directement la variation quadratique de $\widetilde{H}_\epsilon$:

$$< \widetilde{H}_\epsilon > (u) = \frac{1}{\epsilon^3} \int_{(u-\epsilon)^+}^u \Lambda_r^2 (r - (u-\epsilon)^+)^2 dr.$$

En majorant Λ_r par M et $(r - (u-\epsilon)^+)^2$ par ϵ^2, on obtient la majoration de $< \widetilde{H}_\epsilon > (u)$ par M^2.

Pour la majoration des moments, par l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy,

$$\begin{aligned} E\left[\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^k\right] &\leqslant c_k E\left[\left(\frac{1}{\epsilon^3}\int_{(u-\epsilon)^+}^u \Lambda_r^2 (r-(u-\epsilon)^+)^2 dr\right)^{\frac{k}{2}}\right], \\ &\leqslant c_k E\left[\left(\frac{1}{\epsilon^3}\int_{(u-\epsilon)^+}^u M^2\epsilon^2 dr\right)^{\frac{k}{2}}\right], \\ &\leqslant c_k M^k. \end{aligned}$$

On étudie la convergence du moment d'ordre 2 de $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)$.

Lemme 6.5.4 $\lim_{\epsilon\to 0} E\left[(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t))^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_u dW_u\right)^2\right]$*. De plus, la convergence est uniforme en* $t \geqslant 0$.

Preuve. On calcule l'espérance :

$$E\left[(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t))^2\right] = \int_0^t E\left[\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2\right] du.$$

D'après le Lemme 6.5.3,

$$E\left[(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t))^2\right] = \int_0^t \frac{1}{\epsilon^3}\int_{(u-\epsilon)^+}^u E[\Lambda_r^2](r-(u-\epsilon)^+)^2 dr du.$$

Par le théorème de Fubini, on obtient finalement

$$E\left[(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t))^2\right] = \int_0^t \frac{1}{\epsilon^3}\int_r^{(r+\epsilon)\wedge t} (r-(u-\epsilon)^+)^2 du E[\Lambda_r^2] dr.$$

D'autre part, on a

$$E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^2\right] = \int_0^t \frac{E[\Lambda_r^2]}{3} du.$$

Ainsi,

$$E\left[(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t))^2\right] - E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_u dW_u\right)^2\right] = \int_0^t E(\Lambda_r^2)\left[\frac{1}{\epsilon^3}\int_r^{(r+\epsilon)\wedge t}(r-(u-\epsilon)^+)^2 du - \frac{1}{3}\right] dr.$$

$E(\Lambda_r^2)$ est majoré par M^2. On étudie le terme entre crochet en distinguant trois cas :

– Si $r \in [0,\epsilon]$, comme $u \in [r, r+\epsilon]$, $(r-(u-\epsilon)^+)^2 \leqslant \epsilon^2$, il vient

$$\left|\frac{1}{\epsilon^3}\int_r^{(r+\epsilon)\wedge t}(r-(u-\epsilon)^+)^2 du - \frac{1}{3}\right| \leqslant \left|\frac{(r+\epsilon)\wedge t - r}{\epsilon}\right| + \frac{1}{3} \leqslant 2,$$

car $(r+\epsilon)\wedge t - r \leqslant \epsilon$.

– Si $r \in]\epsilon, (t-\epsilon)^+[$, alors

$$\frac{1}{\epsilon^3}\int_r^{(r+\epsilon)\wedge t}(r-(u-\epsilon)^+)^2 du - \frac{1}{3} = \frac{1}{\epsilon^3}\int_r^{r+\epsilon}(r-u+\epsilon)^2 du - \frac{1}{3} = \frac{\epsilon^3}{3\epsilon^3} - \frac{1}{3} = 0.$$

– Si $r \in [(t-\epsilon)^+, t]$, alors $(r+\epsilon)\wedge t = t$. Comme $(r-(u-\epsilon)^+)^2 \leqslant \epsilon^2$, il vient

$$\left|\frac{1}{\epsilon^3}\int_r^{(r+\epsilon)\wedge t}(r-(u-\epsilon)^+)^2 du - \frac{1}{3}\right| \leqslant \left|\frac{t-r}{\epsilon}\right| + \frac{1}{3} \leqslant 2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|E\left[(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t))^2\right]-E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_u dW_u\right)^2\right]\right| &\leqslant \int_0^\epsilon 2M^2dr+\int_{(t-\epsilon)^+}^t 2M^2dr,\\ &\leqslant 2M^2(\epsilon+t-(t-\epsilon)^+),\\ &\leqslant 4M^2\epsilon.\end{aligned}$$

Donc $E\left[(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t))^2\right]$ converge vers $E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_u dW_u\right)^2\right]$, uniformément pour $t \geqslant 0$. ■

Lemme 6.5.5 *Pour tout entier $k \geqslant 2$, il existe une constante $C(k)$ telle que*

$$\forall t \geqslant 0, \quad E\left[\left|\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right|^k\right] \leqslant C(k)t^{\frac{k}{2}}.$$

Preuve. $(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t))_{t\geqslant 0}$ est une martingale, donc on peut appliquer l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy :

$$\begin{aligned}E\left[\left|\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right|^k\right] &\leqslant c(k)E\left[<\widetilde{\Delta}_\epsilon>_t^{\frac{k}{2}}\right],\\ &\leqslant c(k)E\left[\left(\int_0^t\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2du\right)^{\frac{k}{2}}\right].\end{aligned}$$

Pour majorer $\left(\int_0^t \widetilde{H}_\epsilon^2(u)du\right)^{\frac{k}{2}}$, on utilise que :

$$\left(\int_0^t \widetilde{H}_\epsilon^2(u)du\right)^{\frac{k}{2}} \leqslant t^{\frac{k}{2}-1}\int_0^t(\widetilde{H}_\epsilon(u))^kdu.$$

Par conséquent,

$$E\left[\left|\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right|^k\right] \leqslant c(k)t^{\frac{k}{2}-1}E\left[\int_0^t\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^kdu\right].$$

En utilisant la majoration du Lemme 6.5.3, il vient finalement :

$$E\left[\left|\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right|^k\right] \leqslant c(k)m_kt^{\frac{k}{2}}.$$

■

Lemme 6.5.6 *Pour tout $t \geqslant 0$,*

$$E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)-\widetilde{\Delta}_\epsilon((t-\epsilon)^+)\right)^2\right] \leqslant M^2\epsilon.$$

Preuve. Comme $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)-\widetilde{\Delta}_\epsilon((t-\epsilon)^+)=\int_{(t-\epsilon)^+}^t \widetilde{H}_\epsilon(u)dB_u$, on a :

$$\begin{aligned}E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)-\widetilde{\Delta}_\epsilon((t-\epsilon)^+)\right)^2\right] &= \int_{(t-\epsilon)^+}^t E\left[\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2\right]du,\\ &= \int_{(t-\epsilon)^+}^t\left(\frac{1}{\epsilon^3}\int_{(u-\epsilon)^+}^u E[\Lambda_r^2](r-(u-\epsilon)^+)^2dr\right)du,\\ &\leqslant \int_{(t-\epsilon)^+}^t\left(\frac{1}{\epsilon^3}\int_{(u-\epsilon)^+}^u M^2\epsilon^2dr\right)du,\\ &\leqslant M^2[t-(t-\epsilon)^+],\\ &\leqslant M^2\epsilon.\end{aligned}$$

■

6.5.3 Méthode des moments

On commence par étudier la convergence des moments de $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)$.

Proposition 6.5.7
$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right)^k\right] = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^k\right],$$
pour tout $k \in \mathbb{N}$, la convergence étant uniforme sur les compacts en t.

Preuve. Par récurrence sur $n \geqslant 1$, on montre que
$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right)^{2n}\right] = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^{2n}\right],$$
et
$$\lim_{\epsilon\to 0} E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right)^{2n-1}\right] = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^{2n-1}\right],$$
uniformément en $t \in [0, T]$.

Pour $n = 1$, le Lemme 6.5.4 donne $\lim_{\epsilon\to 0} E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right)^2\right] = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^2\right]$. Le moment d'ordre 1 étant nul, on a bien $E\left[\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right] = E\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right]$.

Supposons qu'on a le résultat au rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire la convergence des moments d'ordre $2n$ et $2n-1$. On veut montrer la convergence des moments d'ordre $2n+2$ et $2n+1$. Les deux cas se traitant de la même manière, on fait la preuve pour $k \in \mathbb{N}$, avec $k = 2n$ (resp. $2n-1$), et on montre la convergence du moment d'ordre $k+2 = 2n+2$ (resp. $2n+1$).

1. La formule d'Itô appliquée à $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t) = \int_0^t \widetilde{H}_\epsilon(u) dB_u$ conduit à :
$$\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right)^{k+2} = (k+2)\int_0^t \left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u)\right)^{k+1} \widetilde{H}_\epsilon(u) dB_u + \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t \left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u)\right)^k \left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2 du.$$
En prenant l'espérance, le premier terme disparaît et il reste
$$E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right)^{k+2}\right] = \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u)\right)^k \left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2\right] du.$$
De même, la formule d'Itô appliquée à $\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r$ donne :
$$E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^{k+2}\right] = \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^k \frac{\Lambda_u^2}{3}\right] du.$$
En posant
$$\mathcal{E}_\epsilon(t) = E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)\right)^{k+2} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^{k+2}\right],$$
il vient alors
$$\mathcal{E}_\epsilon(t) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u)\right)^k \left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^k \frac{\Lambda_u^2}{3}\right] du.$$

On remplace $\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u)\right)^k$ par $\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u)\right)^k - \left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k\right] + \left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\epsilon(t) &= \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left\{(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u))^k - (\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+))^k\right\}\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2\right]du, \\
&+\frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^k \frac{\Lambda_u^2}{3}\right]du
\end{aligned}$$

Dans le deuxième terme, comme $\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}$-mesurable, on a

$$E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2\right] = E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k E\left((\widetilde{H}_\epsilon(u))^2|\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}\right)\right],$$

Or,

$$\begin{aligned}
E\left((\widetilde{H}_\epsilon(u))^2|\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}\right) &= E\left(\left(\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_{(u-\epsilon)^+}^u \Lambda_r(r-(u-\epsilon)^+)dW_r\right)^2\Big|\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}\right), \\
&= E\left(\frac{1}{\epsilon^3}\int_{(u-\epsilon)^+}^u \Lambda_r^2(r-(u-\epsilon)^+)^2 dr\Big|\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}\right), \\
&= E\left(<\widetilde{H}_\epsilon>(u)\Big|\mathcal{F}_{(u-\epsilon)^+}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2\right] = E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k <\widetilde{H}_\epsilon>(u)\right].$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\epsilon(t) &= \frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left\{(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u))^k - (\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+))^k\right\}\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2\right]du, \\
&+\frac{(k+2)(k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k <\widetilde{H}_\epsilon>(u) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^k \frac{\Lambda_u^2}{3}\right]du
\end{aligned}$$

Finalement, on décompose $\mathcal{E}_\epsilon(t)$ sous la forme :

$$\mathcal{E}_\epsilon(t) = \frac{(k+2)(k+1)}{2}(\xi_\epsilon^1(t) + \xi_\epsilon^2(t) + \xi_\epsilon^3(t)),$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi_\epsilon^1(t) &= \int_0^t E\left[\left|\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u)\right)^k - \left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k\right|\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2\right]du, \\
\xi_\epsilon^2(t) &= \int_0^t E\left[\left\{\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^k\right\} <\widetilde{H}_\epsilon>(u)\right]du, \\
\xi_\epsilon^3(t) &= -\int_0^t E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^k\left\{\frac{\Lambda_u^2}{3} - <\widetilde{H}_\epsilon>(u)\right\}\right]du.
\end{aligned}$$

On montre que $\xi_\epsilon^1(t)$ (resp. $\xi_\epsilon^2(t)$, $\xi_\epsilon^3(t)$) converge vers 0 dans le point **2** (resp. le point **3**, le point **4.**), uniformément pour $t \in [0,T]$. Ainsi, $\mathcal{E}_\epsilon(t)$ converge vers 0, uniformément pour $t \in [0,T]$. Ce qui conclut la récurrence.

2. On commence par montrer que $\xi_\epsilon^1(t)$ converge vers 0, uniformément en t sur les compacts, quand $\epsilon \to 0$. On utilise l'identité suivante :

$$a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^i b^{k-1-i}.$$

Pour $a = \widetilde{\Delta}_\epsilon(u), b = \widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)$, elle donne

$$|\xi_\epsilon^1(t)| \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^t S_i(\epsilon, u)du, \tag{6.16}$$

avec pour $i = 0, \ldots, k-1$:

$$S_i(\epsilon, u) = E\left[\left|\widetilde{\Delta}_\epsilon(u) - \widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right| \left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^2 (\widetilde{\Delta}_\epsilon(u))^i (\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+))^{k-1-i}\right].$$

On majore chacun des termes de la somme grâce à l'inégalité suivante :

$$|E(abcd)| \leqslant [E(a^2)]^{\frac{1}{2}} [E(b^4)]^{\frac{1}{4}} [E(c^8)]^{\frac{1}{8}} [E(d^8)]^{\frac{1}{8}}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} |S_i(\epsilon, u)| \quad &\leqslant \quad \left[E\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u) - \widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[E\left(\widetilde{H}_\epsilon(u)\right)^8\right]^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \times \left[E(\widetilde{\Delta}_\epsilon(u))^{8i}\right]^{\frac{1}{8}} \left[E(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+))^{8k-8-8i}\right]^{\frac{1}{8}}. \end{aligned}$$

D'après les résultats des Lemmes 6.5.3, 6.5.5 et 6.5.6, on a

$$\begin{aligned} |S_k(\epsilon, u)| \quad &\leqslant \quad \left[M^2\epsilon\right]^{\frac{1}{2}} m_8^{\frac{1}{4}} \left[C(8i)t^{4i}\right]^{\frac{1}{8}} \left[C(8k-8-8i)t^{4k-4-4i}\right]^{\frac{1}{8}}, \\ &\leqslant \quad \left\{[C(8i)C(8k-8-8i)]^{\frac{1}{8}} m_8^{\frac{1}{4}}\right\} t^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

Donc, pour $t \in [0, T]$,

$$\left|\int_0^t S_i(\epsilon, u)du\right| \leqslant C_{i,k} T^{n-\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}.$$

On en déduit que $\int_0^t S_i(\epsilon, u)du$ converge vers 0 quand $\epsilon \to 0$, uniformément pour $t \in [0, T]$. Donc, d'après (6.16), $\xi_\epsilon^1(t)$ converge vers 0 uniformément pour $t \in [0, T]$.

3. On étudie ensuite $\xi_\epsilon^2(t)$. Comme $< \widetilde{H}_\epsilon > (u)$ est borné par M^2, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$|\xi_\epsilon^2(t)| \leqslant M^2 \int_0^T E\left|\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^k\right| du.$$

Par hypothèse de récurrence, $E\left[\left(\widetilde{\Delta}_\epsilon((u-\epsilon)^+)\right)^k\right]$ converge vers $E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^k\right]$, uniformément pour $u \in [0, T]$. Donc $|\xi_\epsilon^3(t)|$ converge vers 0, uniformément pour $t \in [0, T]$.

4. Enfin, on étudie $\xi_\epsilon^3(t)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient

$$|\xi_\epsilon^3(t)| \leqslant \int_0^t \sqrt{E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^{2k}\right] E\left[\left(\frac{\Lambda_u^2}{3} - < \widetilde{H}_\epsilon > (u)\right)^2\right]} du.$$

Par l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy, la première espérance est majorée :

$$E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^{2k}\right] \leqslant c_k E\left[\left(\frac{1}{3}\int_0^u \Lambda_r^2 dr\right)^k\right] \leqslant \frac{c_k M^2}{3} u^k \leqslant \frac{c_k M^2}{3} T^k.$$

On étudie ensuite la deuxième espérance en calculant :

$$\frac{\Lambda_u^2}{3} - < \widetilde{H}_\epsilon > (u) = \frac{\Lambda_u^2}{3} - \frac{1}{\epsilon^3}\int_{(u-\epsilon)^+}^u \Lambda_r^2 (r-(u-\epsilon)^+)^2 dr.$$

Le changement de variable $s = \frac{r-(u-\epsilon)^+}{\epsilon}$ donne alors

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_u^2}{3} - < \widetilde{H}_\epsilon > (u) &= \frac{\Lambda_u^2}{3} - \int_0^{\frac{u\wedge\epsilon}{\epsilon}} \Lambda^2_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+} s^2 ds, \\ &= \frac{\Lambda_u^2}{3} - \int_0^1 \Lambda^2_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+} s^2 ds + \mathbb{1}_{\{u<\epsilon\}} \int_{\frac{u}{\epsilon}}^1 \Lambda^2_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+} s^2 ds. \end{aligned}$$

Dans le troisième terme, on majore Λ par M et s par 1.

$$\mathbb{1}_{\{u<\epsilon\}} \int_{\frac{u}{\epsilon}}^1 \Lambda^2_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+} s^2 ds \leqslant \mathbb{1}_{\{u<\epsilon\}} \frac{\epsilon - u}{\epsilon} M^2 \leqslant \mathbb{1}_{\{u<\epsilon\}} M^2.$$

Pour les deux premiers termes, comme $\int_0^1 s^2 ds = \frac{1}{3}$, on a

$$\frac{\Lambda_u^2}{3} - \int_0^1 \Lambda^2_{\epsilon s-(u-\epsilon)^+} s^2 ds = \int_0^1 \left(\Lambda_u^2 - \Lambda^2_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+}\right) s^2 ds.$$

Or, par la propriété de Hölder de Λ,

$$\begin{aligned} |\Lambda_u^2 - \Lambda^2_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+}| &= |(\Lambda_u + \Lambda_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+})(\Lambda_u - \Lambda_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+})|, \\ &\leqslant 2M|\Lambda_u - \Lambda_{\epsilon s+(u-\epsilon)^+}|, \\ &\leqslant 2MK|u - \epsilon s - (u-\epsilon)^+|^\gamma, \\ &\leqslant 2MK|2\epsilon|^\gamma, \\ &\leqslant 2^{\gamma+1} MK\epsilon^\gamma. \end{aligned}$$

Finalement, en reportant dans $\xi_\epsilon^3(t)$, il vient pour $t \in [0,T]$.

$$|\xi_\epsilon^3(t)| \leqslant \sqrt{\frac{c_k M^2}{3} T^k} \int_0^T \mathbb{1}_{\{u<\epsilon\}} M^2 + 2^{\gamma+1} MK\epsilon^\gamma du.$$

Donc $\xi_\epsilon^3(t)$ converge vers 0, uniformément pour $t \in [0,T]$. ■

Proposition 6.5.8 *Pour tout t fixé, $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)$ converge en loi vers $\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r$.*

Preuve. Soit $t \geqslant 0$ fixé. On utilise la méthode des moments. Le Lemme 6.5.7 donne la convergence des moments de $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)$ vers ceux de $\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r$. Il reste à étudier la limite de

$$\frac{(E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^{2k}\right])^{\frac{1}{2k}}}{2k},$$

quand $k \to \infty$. Par récurrence, on montre que

$$M_k(t) := E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^{2k}\right] \leqslant \left(\frac{M}{\sqrt{3}}\right)^{2k} t^k \frac{2k!}{k!\,2^k}.$$

Pour $k = 1$, on a

$$M_2(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 E\left[\int_0^t \Lambda_r^2 dr\right] \leqslant t\left(\frac{M}{\sqrt{3}}\right)^2 = t\left(\frac{M}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{2!}{1!\,2}.$$

D'après la formule de récurrence établie dans la preuve du Lemme 6.5.7, pour $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
M_{k+1}(t) &= E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^{2k+2}\right], \\
&= \frac{(2k+2)(2k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^{2k}\frac{\Lambda_u^2}{3}\right] du, \\
&\leqslant \frac{M^2}{3}\frac{(2k+2)(2k+1)}{2}\int_0^t E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^u \Lambda_r dW_r\right)^{2k}\right] du, \\
&\leqslant \left(\frac{M}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{(2k+2)(2k+1)}{2}\int_0^t M_k(u) du.
\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence,

$$\begin{aligned}
M_{k+1}(t) &\leqslant \left(\frac{M}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{(2k+2)(2k+1)}{2}\int_0^t \left(\frac{M}{\sqrt{3}}\right)^{2k} u^k \frac{2k!}{k!\,2^k} du, \\
&\leqslant \left(\frac{M}{\sqrt{3}}\right)^{2k+2} \frac{(2k+2)!}{k!\,2^{k+1}}\int_0^t u^k du, \\
&\leqslant \left(\frac{M}{\sqrt{3}}\right)^{2k+2} \frac{(2k+2)!}{k!\,2^{k+1}}\frac{t^{k+1}}{k+1},
\end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Par conséquent,

$$\frac{\left(E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r\right)^{2k}\right]\right)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leqslant \frac{M\sqrt{t}}{\sqrt{3}}\frac{\left(\frac{2k!}{k!\,2^k}\right)^{\frac{1}{2k}}}{2k}.$$

D'après le calcul fait dans la preuve de la Proposition 6.1.7,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left(\frac{2k!}{k!\,2^k}\right)^{\frac{1}{2k}}}{2k} = 0.$$

Donc par la méthode des moments, $\widetilde{\Delta}_\epsilon(t)$ converge en loi vers $\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_r dW_r$. ■

6.6 Convergence en loi vers l'intégrale stochastique si $H = f(B)$

Dans cette section, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^3$, à dérivées bornées et telle que $f(0) = 0$. On considère $H_t = f(B_t)$. Remarquons que H est un processus localement hölderien. En effet

$$|H_t - H_u| = |f(B_t) - f(B_u)| \leqslant c|B_t - B_u|,$$

avec c une borne de f'. Par le Lemme 1.3.2, pour $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$, on obtient

$$|H_t - H_u| \leqslant cC_\delta |t-u|^\delta.$$

Le Théorème 5.1.1 donne alors la convergence presque sûre de $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t f(B_s)(B_{s+\epsilon}-B_s)ds$ vers $\int_0^t f(B_s)dB_s$, uniformément en t dans un compact, le résultat étant aussi valable en remplaçant $B_{s+\epsilon}$ par $B_{(s+\epsilon)\wedge t}$.

On étudie ensuite

$$\Delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t f(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds - \int_0^t f(B_s)dB_s\right].$$

Proposition 6.6.1 $\Delta_\epsilon(t)$ *converge en loi à t fixé vers* $-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t f'(B_u)dW_u$, *quand* $\epsilon \to 0$.

Preuve de la Proposition 6.6.1. L'idée de cette preuve est de se ramener à la convergence étudiée à la Section 6.2 en employant la formule d'Itô et la formule de Taylor.

On note F la primitive de f nulle en 0. Alors, F est de classe $\mathcal{C}^4$ et par la formule d'Itô :

$$F(B_t) = \int_0^t f(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'(B_s)ds. \tag{6.17}$$

On retrouve ainsi le deuxième terme de $\Delta_\epsilon(t)$.

Pour faire apparaitre le premier terme de $\Delta_\epsilon(t)$, on applique la formule de Taylor à F :

$$F(B_{(s+\epsilon)\wedge t}) - F(B_s) = f(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s) + \frac{1}{2}f'(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^2 + \frac{1}{6}f''(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^3 + R(s,\epsilon),$$

où le reste vérifie $|R(s,\epsilon)| \leqslant M\frac{|B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s|^4}{24}$, avec M une borne de $f^{(3)}$.

Intégrer cette égalité de 0 à t donne le premier terme de $\Delta_\epsilon(t)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t f(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^t F(B_{(s+\epsilon)\wedge t})ds - \frac{1}{\epsilon}\int_0^t F(B_s)ds - \frac{1}{2}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t f'(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^2 ds \\ &\quad -\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \frac{1}{6}f''(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^3 ds - \frac{1}{\epsilon}\int_0^t R(s,\epsilon)ds.\end{aligned}$$

Dans $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t F(B_{(s+\epsilon)\wedge t})ds$, couper l'intégrale en deux donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t F(B_{(s+\epsilon)\wedge t})ds &= \frac{1}{\epsilon}\int_0^{(t-\epsilon)^+} F(B_{s+\epsilon})ds + \frac{1}{\epsilon}\int_{(t-\epsilon)^+}^t F(B_t)ds, \\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_\epsilon^{\epsilon\vee t} F(B_v)dv + \frac{t\wedge\epsilon}{\epsilon}F(B_t), \qquad (v = s+\epsilon).\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\int_0^t f(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)ds &= \frac{t\wedge\epsilon}{\epsilon}F(B_t) - \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon\wedge t} F(B_s)ds - \frac{1}{2\epsilon}\int_0^t f'(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^2 ds \\ &\quad -\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \frac{1}{6}f''(B_u)(B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s)^3 ds - \frac{1}{\epsilon}\int_0^t R(u,\epsilon)ds. \end{aligned} \tag{6.18}$$

En reportant (6.17) et (6.18) dans $\Delta_\epsilon(t)$, on obtient la décomposition suivante :

$$\Delta_\epsilon(t) = A_\epsilon^1(t) + A_\epsilon^2(t) + A_\epsilon^3(t) + A_\epsilon^4(t) + A_\epsilon^5(t) + A_\epsilon^6(t), \tag{6.19}$$

avec

$$A^1_\epsilon(t) = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^{\epsilon\wedge t} F(B_s)ds, \tag{6.20}$$

$$A^2_\epsilon(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}\left[\frac{1}{\epsilon}\int_0^t f'(B_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge t}-B_s)^2ds - \int_0^t f'(B_u)du\right], \tag{6.21}$$

$$A^3_\epsilon(t) = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^t \frac{1}{6}f''(B_u)(B_{s+\epsilon}-B_s)^3ds, \tag{6.22}$$

$$A^4_\epsilon(t) = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_{t-\epsilon}^t \frac{1}{6}f''(B_u)[(B_t-B_s)^3-(B_{s+\epsilon}-B_s)^3]ds, \tag{6.23}$$

$$A^5_\epsilon(t) = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^t R(u,\epsilon)ds, \tag{6.24}$$

$$A^6_\epsilon(t) = \left(\frac{t\wedge\epsilon}{\epsilon}-1\right)F(B_t). \tag{6.25}$$

On montre que les termes $A^1_\epsilon(t), A^3_\epsilon(t), A^4_\epsilon(t), A^5_\epsilon(t), A^6_\epsilon(t)$ convergent presque sûrement vers 0 et que la limite en loi de $\Delta_\epsilon(t)$ est donnée par $A^2_\epsilon(t)$. Pour faire cette étude, on fixe $\delta \in]\frac{3}{8},\frac{1}{2}[$. Alors, par la propriété de Hölder du mouvement brownien, il existe $K\in L^2(\Omega)$ tel que $\forall u,v\in[0,t], |B_u-B_v|\leqslant K|u-v|^\delta$.

Étude de $A^2_\epsilon(t)$. On peut appliquer à ce terme la Proposition 6.2.2 de la Section 6.2. Ainsi, $A^2_\epsilon(t)$ converge en loi vers $-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^t f'(B_s)dW_s$.

Étude de $A^1_\epsilon(t)$. La formule de Taylor appliquée à F à l'ordre 1 donne

$$F(B_s)-F(0) = f(0)(B_s-0)+r(s,\epsilon), \qquad \text{avec } |r(s,\epsilon)|\leqslant \frac{C_{f'}}{2}|B_s-0|^2.$$

Comme $F(0)=f(0)=0$ et $\epsilon\wedge t\leqslant\epsilon$, on a directement la majoration suivante

$$\begin{aligned}|A^1_\epsilon(t)| &\leqslant \frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^\epsilon |r(s,\epsilon)|ds,\\ &\leqslant \frac{C_{f'}}{2\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^\epsilon |B_s|^2ds,\\ &\leqslant \frac{C_{f'}}{2\epsilon\sqrt{\epsilon}}\int_0^\epsilon K^2s^{2\delta}ds,\\ &\leqslant \frac{K^2C_{f'}}{2\delta+1}\frac{\epsilon^{2\delta+1}}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}.\end{aligned}$$

Comme $\delta>\frac{3}{8}>\frac{1}{4}$, on a $2\delta+1>\frac{3}{2}$ et ainsi $A^1_\epsilon(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément pour $t\geqslant 0$..

Étude de $A^3_\epsilon(t)$:

$$6A^3_\epsilon(t) = -\int_0^t f''(B_u)\left(\frac{B_{s+\epsilon}-B_s}{\sqrt{\epsilon}}\right)^3ds.$$

D'après le Théorème 2.1 de [10], si B^H est un mouvement brownien fractionnaire d'index H, g une fonction vérifiant $|g(x)-g(y)|\leqslant L|x-y|^a(1+x^2+y^2)^b$ et Y un processus continu, alors

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^t Y_s g\left(\frac{B^H_{s+\epsilon}-B^H_s}{\epsilon^H}\right)ds = E[g(N)]\int_0^t Y_sds,$$

presque sûrement, uniformément sur les compacts, où N est une variable aléatoire gaussienne standard.

Si on prend $H=\frac{1}{2}$, $Y_s=f''(B_s)$, et $g(x)=x^3$, on peut appliquer ce théorème. Comme $E[N^3]=0$, on a la convergence presque sûre de $A^3_\epsilon(t)$ vers 0, uniformément pour $t\in[0,T]$.

Étude de $A^4_\epsilon(t)$. Si on note $\hat{m}$ un majorant de f'', il vient la majoration suivante :

$$|A^4_\epsilon(t)| \leqslant \frac{\hat{m}}{6\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{t-\epsilon}^{t} [|B_t - B_s|^3 + |B_{s+\epsilon} - B_s|^3] ds.$$

La propriété de Hölder du mouvement brownien donne alors :

$$|A^4_\epsilon(t)| \leqslant \frac{\hat{m}K^3}{6\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{t-\epsilon}^{t} [|t-s|^{3\delta} + |\epsilon|^{3\delta}] ds.$$

Comme $t - s \leqslant \epsilon$, on a

$$|A^4_\epsilon(t)| \leqslant \frac{\hat{m}K^3}{3} \frac{\epsilon^{3\delta+1}}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}.$$

$\delta > \frac{3}{8} > \frac{1}{6}$, donc $3\delta + 1 > \frac{3}{2}$ et ainsi $A^4_\epsilon(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément pour $t \geqslant 0$..

Étude de $A^5_\epsilon(t)$. La majoration $|R(u,\epsilon)| \leqslant M\frac{|B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s|^4}{24}$ dans la formule de Taylor donne

$$|A^5_\epsilon(t)| \leqslant \frac{M}{24\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_0^t |B_{(s+\epsilon)\wedge t} - B_s|^4 ds.$$

Puis, par la propriété de Hölder du mouvement brownien, il vient

$$|A^5_\epsilon(t)| \leqslant \frac{MK^4}{24\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_0^t |(s+\epsilon)\wedge t - s|^{4\delta} ds.$$

Comme $(s+\epsilon)\wedge t - s \leqslant \epsilon$, on a finalement

$$|A^5_\epsilon(t)| \leqslant \frac{MK^4 t}{24} \frac{\epsilon^{4\delta}}{\epsilon\sqrt{\epsilon}}.$$

$\delta > \frac{3}{8}$, donc $4\delta > \frac{3}{2}$ et ainsi $A^5_\epsilon(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément pour $t \in [0,T]$..

Étude de $A^6_\epsilon(t)$.

$$A^6_\epsilon(t) = \left(\frac{t\wedge\epsilon}{\epsilon} - 1\right) F(B_t) = \mathbb{1}_{\{t<\epsilon\}} \frac{t-\epsilon}{\epsilon} F(B_t).$$

En majorant $t - \epsilon$ par ϵ et $|F(x)|$ par $m|x|$, où m est une borne de $F' = f$, il vient :

$$A^6_\epsilon(t) \leqslant \mathbb{1}_{\{t<\epsilon\}} m|B_t|.$$

La propriété de Hölder du mouvement brownien donne alors

$$A^6_\epsilon(t) \leqslant \mathbb{1}_{\{t<\epsilon\}} mC_\delta t^\delta \leqslant mC_\delta \epsilon^\delta.$$

Donc $A^6_\epsilon(t)$ converge presque sûrement vers 0, uniformément pour $t \geqslant 0$. ■

6.7 Remarque sur $\Delta_\epsilon, \Delta^{(2)}_\epsilon$ et W_ϵ

1. Le processus W_ϵ mis en valeur dans la section 6.1 joue en réalité un rôle fondamental dans la convergence en loi de Δ_ϵ. En effet, si H est continu, l'étude de $\Delta_\epsilon(t)$ se ramène souvent à celle d'un processus de la forme $\int_0^t \widetilde{H}_u dW_\epsilon(u)$, où $\widetilde{H}$ dépend de H (voir les points suivants pour des exemples).

Or, W_ϵ est une famille de martingale continue qui converge en loi vers $\frac{1}{\sqrt{3}}W$, W étant un mouvement brownien standard. Donc d'après la Proposition 3.2 de [13], W_ϵ vérifie la condition d'uniforme tension.

Si on considère Λ processus càdlàg et $\mathcal{F}$-prévisible tel que (Λ, W_ϵ) converge en loi vers (Λ, W), alors par le Théorème 5.1 de [13], $\left(\int_0^t \Lambda_u dW_\epsilon(u), t \geqslant 0\right)$ converge en loi vers $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^t \Lambda_u dW_u, t \geqslant 0\right)$.

Cependant, ce résultat nécessite une hypothèse forte : la convergence jointe de (Λ, W_ϵ), que nous n'avons pas réussi à montrer dans nos exemples. C'est pourquoi nous avons à chaque fois montré "à la main" la convergence en loi de Δ_ϵ. Cette méthode a toutefois une limite, puisque nous n'avons obtenu que la convergence en loi à t fixé.

2. Soit H un processus adapté vérifiant une propriété de Hölder. On présente brièvement un moyen transformer $\Delta_\epsilon^{(2)}(t)$ en une intégrale stochastique en dW_ϵ. Par la décomposition (6.6),

$$\Delta_\epsilon^{(2)}(t) = \frac{2}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_0^t \left(\int_s^{(s+\epsilon)\wedge t} H_s(B_u - B_s) dB_u \right) ds + R_\epsilon(t),$$

où $R_\epsilon(t)$ est la notation générique pour un terme de reste qui converge vers 0. Le Théorème de Fubini stochastique donne :

$$\Delta_\epsilon(t)^{(2)} = \frac{2}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_0^t \left(\int_{(u-\epsilon)^+}^{u} H_s(B_u - B_s) ds \right) dB_u + R_\epsilon(t).$$

En écrivant $H_s = H_u + (H_s - H_u)$, il vient finalement

$$\Delta_\epsilon^{(2)}(t) = 2\int_0^t H_u dW_\epsilon(u) + R_\epsilon(t).$$

3. Soit Λ un processus adapté continu uniformément borné et $H_t = \int_0^t \Lambda_u dB_u$. On veut exprimer $\Delta_\epsilon(t)$ comme une intégrale en dW_ϵ. Le Théorème de Fubini stochastique donne

$$\Delta_\epsilon(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{\epsilon} \int_{(u-\epsilon)^+}^{u} H_s ds - H_u \right] dB_u.$$

Puis, par la décomposition de H_u en $\frac{u-(u-\epsilon)^+}{\epsilon} H_u + \frac{(\epsilon-u)^+}{\epsilon} H_u$, on a

$$\Delta_\epsilon(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{\epsilon\sqrt{\epsilon}} \int_{(u-\epsilon)^+}^{u} (H_s - H_u) ds \right) dB_u + R_\epsilon(t).$$

En écrivant $H_s - H_u = -\Lambda_u(B_u - B_s) - \int_s^u (\Lambda_r - \Lambda_u) dB_r$ et en appliquant le Théorème de Fubini stochastique, il vient

$$\int_{(u-\epsilon)^+}^{u} (H_s - H_u) ds = -\Lambda_u \int_{(u-\epsilon)^+}^{u} (B_u - B_s) ds - \int_{(u-\epsilon)^+}^{u} (r - (u-\epsilon)^+)(\Lambda_r - \Lambda_u) dB_r.$$

Reporter dans $\Delta_\epsilon(t)$ donne finalement

$$\Delta_\epsilon(t) = -\int_0^t \Lambda_u dW_\epsilon(u) + R_\epsilon(t).$$

4. Soit $(h(t))_{t\geqslant 0}$ un processus étagé qu'on suppose nul à l'origine et $H_t = \int_0^t h(s) dB_s$. On note $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante avec $a_0 = 0, a_n \to \infty$, $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires, h_i étant $\mathcal{F}_{a_i}$-mesurable et $\sup_{i\in\mathbb{N}} \|h_i\|_\infty < \infty$, tels que $h(t) = \sum_{i\geqslant 0} h_i \mathbb{1}_{\{t\in]a_i, a_{i+1}]\}}$.

Montrons que $\Delta_\epsilon(t)$ peut s'écrire comme une intégrale en dW_ϵ. Par le Théorème de Fubini, il vient

$$\Delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left[\int_0^t \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{(u-\epsilon)^+}^u H_s ds - H_u \right) dB_u \right].$$

En regardant ce qui se passe sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left[\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{\epsilon} \left(\int_{(u-\epsilon)^+}^u H_s ds - H_u \right) dB_u \right] = -h_i \left[W_\epsilon(a_{i+1}) - W_\epsilon(a_i) \right] + R_\epsilon.$$

Par conséquent,

$$\Delta_\epsilon(t) = -\int_0^t h(s) dW_\epsilon(s) + R_\epsilon(t).$$

Bibliographie

[1] J-M. Azaïs. Approximation des trajectoires et temps local des diffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 25(2) :175–194, 1989.

[2] M.T. Barlow, E. A. Perkins, and S. J. Taylor. Two uniform intrinsic constructions for the local time of a class of Lévy processes. *Illinois J. Math.*, 30(1) :19–65, 1986.

[3] B. Bérard Bergery and P. Vallois. Approximation via regularization of the local time of semimartingales and brownian motion. soumis.

[4] B. Bérard Bergery and P. Vallois. Quelques approximations du temps local brownien. à paraître.

[5] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 1996.

[6] R.M. Blumenthal and R. K. Getoor. Local times for Markov processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 3 :50–74, 1964.

[7] L. Breiman. *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.

[8] P. Cheridito and D. Nualart. Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0, \frac{1}{2})$. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(6) :1049–1081, 2005.

[9] D. Geman and J. Horowitz. Occupation densities. *Ann. Probab.*, 8(1) :1–67, 1980.

[10] M. Gradinaru and I. Nourdin. Approximation at first and second order of m-order integrals of the fractional Brownian motion and of certain semimartingales. *Electron. J. Probab.*, 8 :no. 18, 26 pp. (electronic), 2003.

[11] K. Itô and Henry P. McKean, Jr. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125.

[12] J. Jacod. Rates of convergence to the local time of a diffusion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 34(4) :505–544, 1998.

[13] A. Jakubowski, J. Mémin, and G. Pagès. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbf{D}^1$ de Skorokhod. *Probab. Theory Related Fields*, 81(1) :111–137, 1989.

[14] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[15] A. Millet, D. Nualart, and M. Sanz. Integration by parts and time reversal for diffusion processes. *Ann. Probab.*, 17(1) :208–238, 1989.

[16] E. Mordecki and M. Wschebor. Approximation of the occupation measure of Lévy processes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(8) :605–610, 2005.

[17] É. Pardoux. Grossissement d'une filtration et retournement du temps d'une diffusion. In *Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85*, volume 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pages 48–55. Springer, Berlin, 1986.

[18] P. E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[19] M. Revuz, D.and Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[20] F. Russo and P. Vallois. Forward, backward and symmetric stochastic integration. *Probab. Theory Related Fields*, 97(3) :403–421, 1993.

[21] F. Russo and P. Vallois. The generalized covariation process and Itô formula. *Stochastic Process. Appl.*, 59(1) :81–104, 1995.

[22] F. Russo and P. Vallois. Itô formula for C^1-functions of semimartingales. *Probab. Theory Related Fields*, 104(1) :27–41, 1996.

[23] F. Russo and P. Vallois. Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes. *Stochastics Stochastics Rep.*, 70(1-2) :1–40, 2000.

[24] F. Russo and P. Vallois. Elements of stochastic calculus via regularisation. In *Séminaire de Probabilités, XXXX*, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 2006.

[25] F. Russo, P. Vallois, and J. Wolf. A generalized class of Lyons-Zheng processes. *Bernoulli*, 7(2) :363–379, 2001.

[26] D. Williams. Lévy's downcrossing theorem. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 40(2) :157–158, 1977.

[27] M. Yor. *Some aspects of Brownian motion. Part II.* Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. Some recent martingale problems.

[28] M. Yor. *Exponential functionals of Brownian motion and related processes.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

Approximation du temps local et intégration par régularisation

Thèse en Mathématiques Appliquées
présentée par Blandine BÉRARD BERGERY sous la direction de Pierre VALLOIS.

Mots-clés Rameau : Temps local (Probabilités), Intégrales stochastiques, Semimartingales.

Résumé :
Cette thèse s'inscrit dans la théorie de l'intégration par régularisation de Russo et Vallois. La première partie est consacrée à l'approximation du temps local des semi-martingales continues. On montre que, si X est une diffusion réversible, alors $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(1\!\!1_{\{y<X_{s+\epsilon}\}} - 1\!\!1_{\{y<X_s\}}\right)(X_{s+\epsilon} - X_s)\, ds$ converge vers $L_t^y(X)$, en probabilité uniformément sur les compacts, quand $\epsilon \to 0$. De ce premier schéma, on tire deux autres schémas d'approximation du temps local, l'un valable pour les semi-martingales continues, l'autre pour le mouvement Brownien standard. Dans le cas du mouvement Brownien, une vitesse de convergence dans $L^2(\Omega)$ et un résultat de convergence presque sûre sont établis. La deuxième partie de la thèse est consacrée à l'intégrale "forward" et à la variation quadratique généralisée, définies par des limites en probabilité de famille d'intégrales. Dans le cas Höldérien, la convergence presque sûre est établie. Enfin, on montre la convergence au second ordre pour une série de processus particuliers.

Mots-clés : Temps local, intégration stochastique par régularisation, variation quadratique, vitesse de convergence, théorème de Fubini stochastique, convergence au second ordre.

2000 MSC : 60F99, 60G44, 60H05, 60H99, 60J55, 60J60, 60J65.

Abstract :
The setting of this work is the integration by regularization of Russo and Vallois. The first part studies schemes of approximation of the local time of continuous semimartingales. It is proven that, if X is a reversible diffusion, then $\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \left(1\!\!1_{\{y<X_{s+\epsilon}\}} - 1\!\!1_{\{y<X_s\}}\right)(X_{s+\epsilon} - X_s)\, ds$ converges to $L_t^y(X)$, in probability uniformly on the compact sets, when $\epsilon \to 0$. From this first schema, two other schemas of approximation for the local time are found. One converges in the semi-martingale case, the other in the Brownian case. Moreover, in the Brownian case, we estimate the rate of convergence in $L^2(\Omega)$ and a result of almost sure convergence is proven. The second part study the forward integral and the generalized quadratic variation, which have been defined by convergence of families of integrals, in probability uniformly on the compacts sets. In the case of Hölder processes, the almost sure convergence is proven. Finally, the second order convergence is studied in many cases.

Keyword : local time, stochastic integration by regularization, quadratic variation, rate of convergence, second order convergence, Fubini's stochastic theorem.

2000 MSC : 60F99, 60G44, 60H05, 60H99, 60J55, 60J60, 60J65.