



HAL
open science

Évaluation prévisionnelle du comportement de systèmes informatiques selon des critères économiques et de sûreté de fonctionnement

Jorge Moreira de Souza

► **To cite this version:**

Jorge Moreira de Souza. Évaluation prévisionnelle du comportement de systèmes informatiques selon des critères économiques et de sûreté de fonctionnement. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 1981. Français. NNT: . tel-00180967

HAL Id: tel-00180967

<https://theses.hal.science/tel-00180967>

Submitted on 22 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

A L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

pour l'obtention

du **GRADE de DOCTEUR d'ETAT (Sciences)**

Spécialité : Automatique

par

Jorge MOREIRA DE SOUZA

Ingénieur et Maître ès-Sciences

Université Pontificale (PUC-RJ) - Rio de Janeiro

ÉVALUATION PRÉVISIONNELLE DU COMPORTEMENT DE SYSTÈMES INFORMATIQUES SELON DES CRITÈRES ÉCONOMIQUES ET DE SURETÉ DE FONCTIONNEMENT

Soutenue le 26 Février 1981, devant la Commission d'Examen:

MM.	A. COSTES	Président
	A. BIROLINI	}
	M. CORAZZA	
	G. FISCHÉ	
	E. GELENBE	
	J.C. LAPRIE	
	B. LEMAIRE	
	J.J. STIFFLER	Examineurs

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

PRESIDENT D'HONNEUR

M. le Professeur ESCANDE
Membre de l'Institut

PRESIDENT

M. le Professeur MONTEL

VICE-PRESIDENTS

M. MARTY	Professeur
M. ENJALBERT	Professeur sans chaire
M. CONSTANT	Maître de Conférences
M. ANDRE	Maître Assistant

Directeur de l'E.N.S.A.T.	Monsieur le Professeur RAYNAUD
Directeur de l'E.N.S.C.T.	Monsieur le Professeur VOIGT
Directeur de l'E.N.S.E.E.I.H.T.	Monsieur le Professeur NOUGARO
Directeur de l'I.G.C.	Monsieur le Professeur GARDY

SECRETAIRE GENERAL

M. CRAMPES

PROFESSEURS HONORAIRES

M. ESCANDE - Membre de l'Institut
M. DIEHL
M. DUPIN

PROFESSEURS

M. ANGELINO	Génie Chimique
M. BUGAREL	Génie Chimique
M. DAT	Mécanique
M. GARDY	Génie Chimique
M. GRUAT	Mécanique
M. HOFFMANN	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. MARTY	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. MONTEL	Chimie Appliquée et Chimie des Matériaux
M. NOUGARO	Mécanique
M. THIRRIOT	Mécanique
M. VOIGT	Chimie Minérale

.../.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Melle	BERDUCOU	Biologie et Biochimie Appliquées, Sciences Agronomiques
M.	CALMON	Biologie et Biochimie Appliquées, Sciences Agronomiques
M.	DABOSI	Chimie Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	ENJALBERT	Génie Chimique
M.	FABRE	Mécanique
M.	FALLOT	Biologie et Biochimie Appliquées, Sciences Agronomiques
M.	GILOT	Chimie Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	LEFEUVRE	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	MATHIEU	Chimie Analytique Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	TRANNOY	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	TRUCHASSON	Mécanique

MAITRES DE CONFERENCES

M.	ALBERTINI	Sciences Agronomiques
M.	BAJON	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	BAUDRAND	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	BOURGEAT	Minéralogie, Géochimie, Pétrographie et Géologie Appliquée
M.	BRUEL	Informatique fondamentale et appliquée
M.	BUIS	Biologie et Physiologie végétale
M.	CANDAU	Biologie et Biochimie Appliquée, Sciences Agronomiques
M.	CONSTANT	Chimie minérale
M.	COSTES	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	COUDERC	Génie Chimique
M.	ECOCHARD	Biologie et Biochimie Appliquée, Sciences Agronomiques
M.	FOCH	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	GASET	Chimie Organique Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	GOURDENNE	Chimie Physique
M.	LABAT	Biologie et Biochimie Appliquée, Sciences Agronomiques
M.	LENZI	Chimie Appliquée et Chimie des Matériaux
M.	MASBERNAT	Mécanique
M.	MATHEAU	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	MORELIERE	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M.	TERRON	Zoologie et Ecologie

Liste établie le 24 janvier 1979

A Sueli, Marília et Isabel

REMERCIEMENTS

Je ne saurais commencer ce mémoire sans exprimer mes remerciements

- à Monsieur G. GRATELOUP, Professeur à l'I.N.S.A., qui m'a accueilli au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, alors qu'il en était le Directeur et qui m'a toujours honoré de sa confiance,
- à mes camarades de l'Equipe "Architectures Sûres de Fonctionnement".

En tant qu'enseignant à la PUC/RJ (Universidade Católica de Rio de Janeiro), je tiens à remercier cet organisme ainsi que CNPq (Conselho Nacional de Ensino e Pesquisa) pour avoir matériellement permis et soutenu mon séjour au LAAS.

Je réserve ici une place privilégiée à Alain COSTES, Professeur à l'I.N.P.T., et à Jean-Claude LAPRIE, Maître de Recherche au C.N.R.S., et Responsable de l'équipe ASF ; que ce mémoire soit pour vous le témoignage de ma reconnaissance pour tous les conseils et l'aide apportés dans la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier également :

- A. COSTES, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, Président du Jury de soutenance et Rapporteur,
- A. BIROLINI, Directeur du Centre Suisse d'Essais des Composants Electroniques, Membre du Jury de soutenance et Rapporteur
- M. CORAZZA, Professeur à l'Institut Universitaire de Technologie de Lannion, Membre du Jury de soutenance,
- G. FISCHÉ, Ingénieur en chef à la C.I.T.-Alcatel, Membre du Jury de soutenance et Rapporteur,
- E. GELENBE, Professeur à l'Université Paris XI, Membre du Jury de soutenance,

- J.C. LAPRIE, Maître de Recherche au C.N.R.S., Responsable de l'Equipe "Architectures Sûres de Fonctionnement" du L.A.A.S., Membre du Jury de soutenance,
- B. LEMAIRE, Professeur au Centre National des Arts et Métiers, Membre du Jury de soutenance,
- J.J. STIFFLER, Ingénieur en Chef à la Société RAYTHEON, Membre du Jury de soutenance,
- J. ARLAT, C. BEOUNES, J.P. BLANQUART, J.L. BOSSEBOEUF, S. CAUMONT, Y. CROUZET, K. KANOUN, A.M. LEGWINSKY, D. NOYES, D. POWELL, Membres de l'Equipe "Architectures Sûres de Fonctionnement",
- C. LANDRAULT, Chargé de Recherche au C.N.R.S. pour l'aide qu'il m'a apportée alors qu'il était Membre de l'Equipe "Architectures Sûres de Fonctionnement",
- J. PENAVAYRE, Secrétaire de la division "Structures des Systèmes de Commande Automatique",
- J.E. DOUCET et B. MEUNIER du Service "Informatique et Simulation",
- M. CABANE, G. LOMI, Secrétaires du Bureau Personnel Chercheur,

Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation matérielle de ce mémoire : Melle M. LABERGUE, et Messieurs J. CATALA, E. LAPEYRE-MESTRE, R. ZITTEL, D. DAURAT et R. LORTAL.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	3
CHAPITRE 1. ÉTABLISSEMENT DES EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES PERMETTANT L'ACCÈS AUX LIMITES DE CONFIANCE	7
I. GRANDEURS DE LA SURETE DE FONCTIONNEMENT	12
II. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT	21
III. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT DEFINI A PARTIR D'UN PROCESSUS MARKOVIEH HOMOGENE	34
IV. DESCRIPTION DES OUTILS D'EVALUATION	51
CHAPITRE 2. ÉVALUATION DES LIMITES DE CONFIANCE DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITÉ DE SYSTÈMES INFORMATIQUES	61
I. ÉTABLISSEMENT DES EXPRESSIONS DE LA LIMITE DE CONFIANCE DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITE	64
II. ÉVALUATION DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITE D'UNE STRUCTURE NON-REDONDANTE	69
III. ÉVALUATION DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITE DES STRUCTURES REDONDANTES	85
CHAPITRE 3. DÉFINITION D'UNE MÉTHODE D'ANALYSE ÉCONOMIQUE - APPLICATION À L'ÉVALUATION DES COÛTS D'EXPLOI- TATION DE SYSTÈMES INFORMATIQUES	107
I. ANALYSE QUALITATIVE DES BENEFICES APPORTES PAR LA TOLERANCE AUX FAUTES	111
II. DEFINITION D'UN OUTIL POUR L'ANALYSE ECONOMIQUE DES BENEFICES	116
III. ANALYSE QUANTITATIVE DES BENEFICES APPORTES PAR LA TOLERANCE AUX FAUTES	124

CONCLUSION	141
ANNEXES	147
BIBLIOGRAPHIE	171
TABLE DES MATIÈRES	179

I N T R O D U C T I O N

Le développement important de la technologie des semi-conducteurs et par conséquent de l'informatique explique en grande partie le rôle important des structures numériques dans les processus industriels qui se traduit par leur utilisation croissante dans les systèmes complexes.

Cette situation rend également important le rôle de l'évaluation prévisionnelle en raison des conséquences entraînées, tant sur le plan de la sécurité que sur le plan économique, par le comportement du système en-dehors des spécifications établies par le cahier des charges.

Nous pouvons considérer que ces spécifications se divisent en trois groupes qui sont :

- performances qui prennent en compte les spécifications fonctionnelles telles que : configuration minimale, capacité de calcul, ...
- sûreté de fonctionnement qui se traduisent par les spécifications de disponibilité, fiabilité, ...
- économiques qui se traduisent par des critères tels que : coûts d'investissement, coûts de maintenance, ...

Ceci explique l'intérêt porté depuis plusieurs années au développement des outils mathématiques sophistiqués destinés, d'une part à représenter de manière réaliste le comportement du système, d'autre part à fournir des résultats quantitatifs permettant :

- le choix entre les diverses solutions possibles,
- la démonstration de la capacité du système à répondre aux spécifications du cahier des charges.

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au développement des outils mathématiques destinés à la prévision de la sûreté de fonctionnement et à l'évaluation économique des systèmes digitaux réparables en présence de pannes.

Prévision de la sûreté de fonctionnement

L'hypothèse couramment admise pour ces systèmes est que les temps de défaillance sont exponentiellement distribués ; une des caractéristiques importantes de cette loi de distribution est la forte dispersion autour

de la valeur moyenne, ce qui rend les évaluations basées sur la valeur moyenne peu représentatives. Si la convergence vers la valeur moyenne est assurée quand le nombre d'événements est grand dans l'intervalle de temps considéré, dans le cas contraire, l'évaluation d'une manière assez précise de la valeur que peut prendre une variable aléatoire nécessite la connaissance de sa fonction de répartition.

Evaluation économique

Peu nombreux sont les travaux existant dans la littérature sur le développement des outils destinés à l'aide à la conception prenant en compte des critères économiques. L'analyse économique se traduit par l'évaluation des principales composantes du coût pendant le cycle de vie du système qui peut être décomposé en deux grandes périodes :

- le cycle de conception et réalisation qui prend en compte les coûts technologiques, coûts de production...
- le cycle d'exploitation qui considère le coût de maintenance, les pertes de production...

0

0 0

Ces considérations permettent de situer les travaux présentés dans ce mémoire qui s'intègrent dans les études menées par l'Equipe "Architectures Sûres de Fonctionnement" au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S., sur la modélisation et l'architecture des structures numériques sûres de fonctionnement.

Le premier chapitre est consacré à l'obtention des expressions mathématiques et au développement des outils permettant une approche systématique d'accès aux fonctions de répartition des variables aléatoires, mises en jeu dans un processus markovien homogène. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'étude probabiliste des variables aléatoires qui représentent le nombre de transitions entre les états et le temps de séjour dans un ensemble d'états d'un processus markovien.

Le second chapitre est consacré à l'application des résultats mathématiques issus du chapitre précédent, à l'évaluation du taux d'arrêt et de l'indisponibilité des structures non-redondantes et redondantes.

Dans le troisième et dernier chapitre, nous proposons une méthode d'analyse économique permettant l'étude quantitative de l'influence des principales composantes de coût pendant le cycle d'exploitation du système. Cette méthode utilise le modèle markovien qui représente le comportement du système, les composantes de coût venant se superposer au modèle. Elle est appliquée à l'évaluation de la réduction des coûts d'exploitation apportée par la tolérance aux fautes.

§§§

CHAPITRE 1

ÉTABLISSEMENT DES EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES
PERMETTANT L'ACCÈS AUX LIMITES DE CONFIANCE

INTRODUCTION

Les grandeurs permettant de caractériser quantitativement un événement aléatoire peuvent être regroupées en deux grandes catégories suivant que l'on s'intéresse :

- à la détermination de la probabilité qu'un événement se produise à un instant donné,
- à l'évaluation de la valeur que peut prendre la variable aléatoire qui lui est associée.

Les travaux menés jusqu'à présent dans le domaine de l'évaluation des composantes de la sûreté de fonctionnement portent essentiellement sur l'obtention des expressions mathématiques et le développement des outils associés permettant l'accès aux grandeurs probabilistes.

Pour les grandeurs appartenant à la deuxième catégorie on se restreint, dans la majorité des cas, à une évaluation prenant uniquement en compte les valeurs moyennes. Il faut noter que ce type d'évaluation peut conduire à des résultats optimistes en ce sens que la confiance que l'on peut accorder à une telle évaluation est de l'ordre de 50%.

Dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes intéressés plus particulièrement à l'étude probabiliste des variables aléatoires qui représentent la fréquence et la durée d'un événement.

Les résultats fondamentaux concernant l'étude de ces deux variables aléatoires sont formulés dans la théorie du renouvellement. Ces résultats, obtenus pour les processus à 2-états, portent essentiellement sur :

- l'obtention de l'expression permettant l'accès à la fonction de répartition des variables aléatoires qui représentent la fréquence et la durée d'un événement,
- l'étude du comportement asymptotique, pour des valeurs de temps importantes, de cette fonction de répartition.

La modélisation d'un système complexe par un processus à 2-états est, en général, insuffisante ; en conséquence, pour l'évaluation des systèmes complexes, l'accès aux grandeurs définies à partir des variables aléatoires passe par la généralisation des résultats issus de la théorie du renouvellement à un processus à N-états.

Les processus à N-états que l'on trouve dans le domaine de la sûreté de fonctionnement appartiennent à deux grandes classes :

- les processus markoviens : lorsque la connaissance de l'état du système à un instant donné suffit pour prédire son évolution future ; le processus est dit homogène lorsque son comportement futur n'est pas affecté par une translation dans le temps,
- les processus non markoviens : dans le cas contraire.

Le souci de dégager des méthodes systématiques permettant l'accès aux expressions mathématiques qui décrivent le comportement du processus conduit à retenir les processus markoviens homogènes. Ce choix est justifié par le fait que :

- l'étude des processus non markoviens peut être effectuée en le transformant en processus markovien par la méthode des états fictifs,
- dans la description du comportement des systèmes informatiques réparables la représentation du processus d'apparition des fautes matérielles par la loi exponentielle est une hypothèse confirmée par l'expérience. Cette hypothèse est aussi valable pour la représentation du processus de réparation lorsque la valeur moyenne des temps de maintenance est petite devant celle des autres variables aléatoires mises en jeu [LAP, 75].

Ce chapitre est consacré à l'obtention des expressions mathématiques et au développement des outils associés permettant une approche systématique d'accès aux grandeurs définies à partir des variables aléatoires dans un processus markovien homogène.

Nous nous intéressons cependant plus particulièrement à l'étude probabiliste des variables aléatoires qui représentent :

- le nombre de transitions entre les états effectuées au cours du temps t , les transitions étant définies sur l'ensemble des transitions possibles du processus markovien,
- la durée globale du temps de séjour au cours du temps t , dans un sous-ensemble d'états défini sur l'ensemble d'états que peut prendre le processus markovien.

Les résultats dont la portée est importante sont donnés sous forme de propositions :

- les propositions dont les résultats constituent une contribution originale sont appuyés par les démonstrations qui, pour conserver le texte homogène, sont reportées en annexe,
- dans le cas contraire nous indiquons la ou les référence(s) où elle peut être trouvée.

Ce chapitre est divisé en quatre parties :

- la première partie est consacrée à la définition des grandeurs permettant de caractériser la sûreté de fonctionnement en rappelant tout d'abord les grandeurs probabilistes généralement utilisées dans la littérature et en introduisant par la suite les grandeurs définies à partir des variables aléatoires,
- la deuxième partie est un rappel des principaux résultats issus de la théorie du renouvellement,
- dans la troisième partie nous donnons les principaux résultats concernant l'étude de la fréquence et de la durée dans un processus markovien homogène à N -états ; pour obtenir ces résultats, nous avons suivi la même démarche que celle adoptée dans la théorie du renouvellement :
 - . accès à la fonction de répartition de la variable aléatoire,
 - . étude du comportement asymptotique,
- dans la quatrième partie nous décrivons les programmes qui ont été mis au point afin de permettre un traitement automatique des expressions obtenues dans la troisième partie.

I - GRANDEURS DE LA SURETE DE FONCTIONNEMENT

L'évaluation du comportement des systèmes digitaux réparables en présence de pannes dans un but d'évaluation prévisionnelle ou d'aide à la conception s'explique par la nécessité :

- de montrer que le système satisfait aux contraintes de sûreté de fonctionnement imposées,
- de connaître l'impact sur la qualité de service d'une amélioration de la fiabilité, de la politique de maintenance adoptée, de la gestion du stock, etc...
- de quantifier les conséquences économiques des solutions adoptées.

L'utilisation des processus markoviens comme outil mathématique permettant l'accès à une évaluation quantitative des grandeurs caractérisant la sûreté de fonctionnement, a donné lieu à de nombreux travaux [ARN, 73 - LAP, 75 - NG, 76 - LAN, 77 - LES, 77 - GAY, 79].

Cette utilisation nous paraît tout à fait justifiée car l'outil markovien permet une approche systématique d'accès à ces grandeurs à partir du modèle markovien qui représente le comportement du système ; dans ce contexte le processus généralement adopté est celui à espace d'état discret et espace de temps continu.

Pour expliciter cette démarche et les principaux résultats qui en découlent nous considérons le cas général d'un système qui peut se trouver dans des états définis sur un ensemble $\{E\}$.

Les grandeurs caractérisant la sûreté de fonctionnement peuvent être généralement définies à partir :

- des probabilités que le processus soit dans un sous-ensemble défini sur $\{E\}$,
- des variables aléatoires qui représentent le nombre de transitions entre les états et le temps de séjour dans un sous-ensemble d'états défini sur l'ensemble $\{E\}$.

I.1 Grandeurs définies à partir des probabilités d'être dans les états

Considérons les sous-ensembles d'états $\{F\}$ et $\{A\}$ où le système est respectivement en fonctionnement et en arrêt. Cette répartition des états en deux sous-ensembles permet la détermination des grandeurs caractérisant le comportement binaire, marche/arrêt, du système :

- la fiabilité qui est la probabilité de fonctionnement continu du système ; elle est obtenue à partir des probabilités que le processus soit dans le sous-ensemble $\{F\}$, les états du sous-ensemble $\{A\}$ étant des états absorbants,
- la disponibilité qui est la probabilité que le système soit opérationnel lorsqu'il est sollicité ; elle est obtenue à partir de la somme des probabilités d'être dans un état de l'ensemble $\{F\}$,
- la maintenabilité qui est la probabilité que le système soit remis en état de fonctionnement étant donné qu'il était défaillant ; elle est obtenue à partir de la somme des probabilités d'être dans un état de l'ensemble $\{A\}$, les états de l'ensemble $\{F\}$ étant des états absorbants.

On est souvent amené à s'intéresser à la détermination des grandeurs où cette représentation binaire n'est plus suffisante ; dans ce cas, les ensembles $\{F\}$ et $\{A\}$ sont divisés en sous-ensembles qui sont fonction des caractéristiques des phénomènes qui doivent être mis en évidence. En [LAP, 75], l'ensemble $\{A\}$ a été subdivisé en deux sous-ensembles $\{AB\}$ $\{AM\}$ selon que l'arrêt du système survient à la suite d'une panne bénigne ou maligne. Cette approche permet l'évaluation de la sécurité définie comme la probabilité d'éviter les événements catastrophiques ; elle est obtenue à partir de la somme des probabilités d'être dans un état des ensembles $\{F\}$ et $\{AB\}$.

Le tableau de la figure 1.1 donne les graphes d'état des grandeurs définies précédemment où $\phi_i(t)$ est la probabilité que le processus soit dans l'état i à l'instant t .

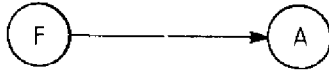
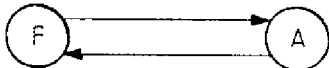
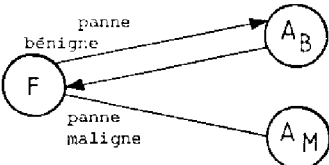
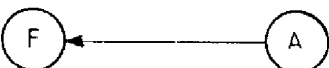
GRANDEURS	GRAPHES D'ETAT	DEFINITIONS
FIABILITE		$R(t) = \sum_{i \in \{F\}} \phi_i(t)$
DISPONIBILITE		$A(t) = \sum_{i \in \{F\}} \phi_i(t)$
SECURITE		$S(t) = \sum_{i \in \{F\} \cup \{A_B\}} \phi_i(t)$
MAINTENABILITE		$M(t) = \sum_{i \in \{F\}} \phi_i(t)$

Figure 1.1 Graphes et définitions de la Fiabilité, Disponibilité, Sécurité et Maintenabilité

Ces grandeurs ont été utilisées pour évaluer les performances caractéristiques de la sûreté de fonctionnement d'un système sans possibilité de dégradation progressive de performance.

Si l'on veut prendre en compte dans le modèle les possibilités de dégradation progressive des performances à la suite de pannes consécutives, l'ensemble d'états $\{F\}$ doit être subdivisé en plusieurs sous-ensembles qui représentent les niveaux des performances accomplies par le système en fonction des dégradations subies.

Considérons le modèle d'un système à dégradation progressive dont le graphe d'état est donné par la figure 1.2. L'ensemble $\{F\}$ a été divisé en m états F_1, F_2, \dots, F_m qui représentent les niveaux successifs de dégradation que peut prendre le système.

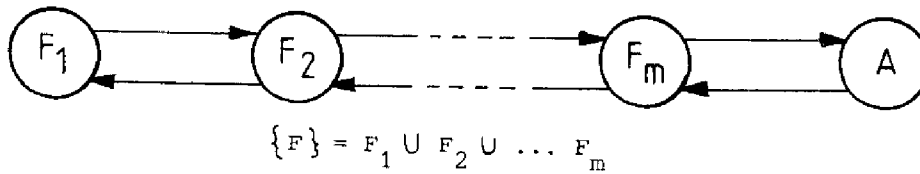


Figure 1.2 Graphe d'un système à dégradation progressive

A chaque état F_i est associé un niveau de performance P_i qui peut exprimer :

- la capacité de calcul associée à l'état [BEA,78],
- le niveau d'utilisation des ressources disponibles [GAY,79],
- l'efficacité avec laquelle une tâche est effectuée dans l'état [LAN,77].

Le tableau de la figure 1.3 donne les définitions des grandeurs utilisées pour caractériser les performances des systèmes à dégradation progressive :

- la performance moyenne : elle a été utilisée pour caractériser la performance des systèmes multiprocesseurs [BEA,78] et des structures multitâches matériellement redondantes ou non [LAN,77],
- la performance disponible : c'est la probabilité que le niveau de performance du système soit égal à P_j à l'instant t ,
- la performance disponible au-dessus d'un seuil : qui est la probabilité que le niveau de performance du système soit supérieur à un seuil P_j à l'instant t . Le seuil est défini en fonction des performances de sûreté de fonctionnement ou de qualité de service qui doivent être assurées par le système.

Les deux dernières grandeurs ont été utilisées pour l'évaluation de la politique de redistribution des tâches dans un système multiprocesseurs [GAY,79 - BEA,78].

GRANDEURS	DEFINITIONS
Performance moyenne	$\sum_{i \in \{F\}} P_i \phi_i(t)$
Performance disponible P_j	$\sum_{i \in F_j} \phi_i(t)$
Performance disponible au dessus d'un seuil P_j	$\sum_{i \in F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_{j-1}} \phi_i(t)$

Figure 1.3 Définitions des grandeurs caractéristiques des systèmes à dégradation progressive

I.2 Grandeurs définies à partir des variables aléatoires

Les grandeurs définies à partir de variables aléatoires peuvent être regroupées en deux catégories :

- grandeurs basées sur la variable aléatoire qui représente le nombre de transitions appartenant à un sous-ensemble $\{T_1\}$ de l'ensemble $\{T\}$ des transitions possibles,
- grandeurs définies à partir de la variable aléatoire qui représente le temps de séjour dans un sous-ensemble $\{E_1\}$ de l'ensemble $\{E\}$.

I.2.1 Grandeurs définies à partir du nombre de transitions

Les grandeurs que l'on peut associer aux critères de sûreté de fonctionnement pour la première catégorie, sont les suivantes :

- le nombre d'arrêts : elle représente le nombre d'arrêts du système qui se sont produits sur un intervalle d'opération $[0, t]$; elle est obtenue à partir du comptage des transitions qui amènent aux états d'arrêt du modèle markovien,
- le nombre de pièces de rechange : pour les systèmes réparables un certain nombre d'unités de rechange doit être disponible de manière à réduire le temps moyen de réparation et de ce fait augmenter la disponibilité du système ; l'évaluation du nombre d'unités de rechange passe par l'évaluation du nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps d'opération du système.

Afin de montrer comment il est possible d'obtenir ces grandeurs à partir du comptage de transitions dans un graphe d'états, nous avons pris comme exemple le graphe d'états d'une structure à deux unités en redondance active.

Les états que peut prendre la structure sont :

- FF - les deux unités fonctionnent,
- FD - une des unités est en panne,
- DD - les deux unités sont défectueuses et le système est hors service.

La figure 1.4 donne le graphe d'états et les transitions retenues:



Figure 1.4 Graphe d'états d'une structure à deux unités en redondance active

Le tableau de la figure 1.5 donne les transitions à prendre en compte pour l'évaluation du nombre d'arrêts et du nombre de pièces de rechange :

Grandeurs	$\{ T_1 \}$
Nombre d'arrêts	FD \rightarrow DD
Nombre de pièces de rechange	FF \rightarrow FD, FD \rightarrow DD

Figure 1.5 Grandeurs définies à partir du nombre de transitions

1.2.2 Grandeurs définies à partir du temps de séjour

Les principales composantes de la sûreté de fonctionnement définies à partir du temps de séjour sont :

- le temps global de fonctionnement qui correspond à la somme de toutes les périodes de fonctionnement dans l'intervalle $[0, t]$,
- le temps global d'arrêt qui correspond à la somme de toutes les périodes où le système est en arrêt dans l'intervalle d'opération $[0, t]$.

Le tableau de la figure 1.6 donne les états à considérer lors de l'évaluation de ces deux grandeurs dans le cas de la structure à deux unités considérée dans le paragraphe précédent.

Grandeurs	$\{ E_1 \}$
Temps global de fonctionnement	FF , FD
Temps global d'arrêt	DD

Figure 1.6 Grandeurs définies à partir du temps de séjour

La caractérisation de la performance des systèmes à dégradation progressive à partir du temps de séjour, permet en particulier la détermination :

- du temps passé au-dessus d'un seuil P_j qui correspond au temps passé dans les états F_1, F_2, \dots, F_{j-1} dont les niveaux de performance sont supérieurs à P_j ,
- du temps passé au-dessous d'un seuil P_j qui correspond au temps passé dans les états $F_{j+1}, F_{j+2}, \dots, F_m$, A dont les niveaux de performance sont inférieurs à P_j .

Les grandeurs définies précédemment ne représentent pas une liste exhaustive ; nous avons uniquement donné, à partir des variables aléatoires, les grandeurs habituellement utilisées pour la caractérisation de la sûreté de fonctionnement : disponibilité, nombre d'arrêts, etc...

I.3 Méthodes d'évaluation d'une grandeur définie à partir d'une variable aléatoire

L'évaluation de la valeur que peut prendre une variable aléatoire dépend du critère de précision et de la confiance que l'on veut associer à l'évaluation. On peut prendre pour l'évaluation :

- la valeur moyenne : dans ce cas l'évaluation est dite ponctuelle du fait qu'elle est donnée à partir d'un seul chiffre,
- la limite de confiance : dans ce cas, on s'intéresse également à la détermination de la confiance associée à l'évaluation.

Afin de pouvoir estimer la confiance associée à l'évaluation, on utilise les notions de limite de confiance et niveau de confiance :

- β_{sup} est une limite de confiance supérieure de la variable aléatoire β correspondant à un niveau de confiance α , si

$$\text{Prob} \{ \beta \leq \beta_{sup} \} = \alpha$$

La limite de confiance supérieure correspond au quantile d'ordre α de la fonction de répartition de la variable aléatoire β ,

- β_{inf} est une limite de confiance inférieure de la variable aléatoire correspondant à un niveau de confiance α , si

$$\text{Prob} \{ \beta \geq \beta_{inf} \} = \alpha$$

La limite de confiance inférieure correspond au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la fonction de répartition de la variable aléatoire β .

Remarque Bien que les notions de niveau de confiance et de limite de confiance soient habituellement utilisées en statistique pour l'estimation des paramètres, nous utilisons ici ces mêmes dénominations en raison de la similitude de l'interprétation que nous y attachons qui consiste à associer à l'évaluation une mesure de précision.

La plupart des travaux sur l'évaluation des grandeurs définies à partir du nombre de transitions et du temps de séjour portent sur l'évaluation des valeurs moyennes ; le travail le plus complet qui traite de ce problème est, à notre avis, celui effectué par [SIN,75].

Deux méthodes qui permettent la détermination des limites de confiance seront envisagées :

- évaluation à partir de la fonction de répartition,
- approche asymptotique quand le temps tend vers l'infini.

I.3.1 Evaluation à partir de la fonction de répartition

Considérons la variable aléatoire dont la fonction de répartition est $F(t)$.

Les limites de confiance correspondant à un niveau de confiance , sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} \text{Prob} \{ \beta \leq \beta_{\text{sup}} \} &= F(\beta_{\text{sup}}) = \alpha \\ \text{Prob} \{ \beta \geq \beta_{\text{inf}} \} &= 1 - F(\beta_{\text{inf}}) = \alpha \end{aligned}$$

La figure 1.7 indique la méthode d'obtention de β_{sup} et β_{inf} à partir de la fonction $F(t)$.

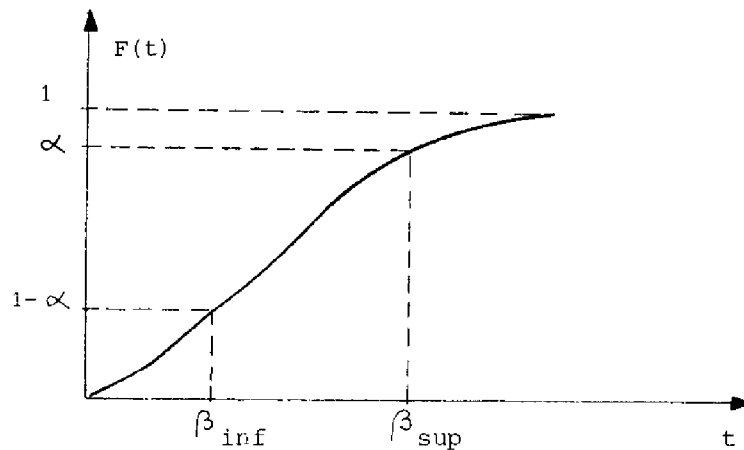


Figure 1.7 : Détermination des limites de confiance à partir de la fonction de répartition

I.3.2 Approche asymptotique

Considérons que m et σ^2 sont respectivement la valeur moyenne et la variance de la variable aléatoire β , dont on veut déterminer les limites de confiance correspondant à un niveau de confiance α .

L'approche asymptotique que nous utilisons repose sur la vérification de la propriété que la variable réduite centrée ξ

$$\xi = \frac{\beta - m}{\sigma}$$

est asymptotiquement normale quand le temps tend vers l'infini. Ceci permet d'écrire :

$$\text{Prob} \left\{ \xi \leq y \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx$$

Sachant que y_α satisfait à l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_\alpha} e^{-x^2/2} dx = \alpha$$

il vient en conséquence :

$$\beta_{\text{sup}} = m + y_\alpha \sigma$$

$$\beta_{\text{inf}} = m - y_\alpha \sigma$$

II - PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

Ce paragraphe a pour but de rappeler les résultats concernant les processus de renouvellement qui seront utilisés dans le paragraphe suivant. Dans un premier rappel, nous considérons les processus de renouvellement pour lesquels la durée du temps de renouvellement est nulle, le renouvellement étant considéré comme instantané ; nous étudierons ensuite les processus de renouvellement avec une durée finie du temps de renouvellement.

Cette présentation est essentiellement basée sur [TAK, 57 - COX, 70 - GNE, 72].

II.1 Définitions

Nous considérons un ensemble d'éléments dont la durée de vie est une variable aléatoire avec une densité de probabilité $f(x)$.

Un élément commence à fonctionner à l'instant $t=0$ puis tombe en panne après un temps aléatoire x_1 ; afin d'assurer un fonctionnement continu, il est immédiatement remplacé par un nouvel élément qui tombe en panne après un temps aléatoire x_2 et ainsi de suite, un élément étant remplacé après panne par un nouvel élément.

Le flux $\{x_n\}$, $n=1,2,\dots$ constitue un processus de renouvellement simple si les variables aléatoires x_i , $i=1,2,\dots$ sont indépendantes avec la même densité de probabilité $f(x)$.

Le processus de renouvellement est dit modifié quand seule la densité de probabilité $f_1(x)$ du temps jusqu'à la première panne est différente.

Soit N_t la variable aléatoire représentant le nombre de renouvellements qui se sont produits dans l'intervalle de temps $[0, t]$. La variable aléatoire N_t joue un rôle fondamental dans l'étude d'un processus de renouvellement. Par conséquent, un rôle aussi important appartient à la fonction de renouvellement $H(t)$ qui est égale au nombre moyen de renouvellements qui se sont produits au cours du temps t .

Nous utilisons la notation $M[x]$ pour exprimer la valeur moyenne de la variable aléatoire x ; par cette notation, la fonction de renouvellement est donnée par :

$$H(t) = M[N_t]$$

La densité de renouvellement $h(t)$ est définie comme la dérivée de $H(t)$; elle exprime l'intensité de renouvellement à l'instant t .

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}\{\text{qu'un renouvellement se produise en}(t, t + \Delta t)\}}{\Delta t}$$

Soit S_r la variable aléatoire qui représente le temps jusqu'au r ^{ième} renouvellement

$$S_r = x_1 + x_2 + \dots + x_r$$

Connaissant la distribution de N_t , on peut déterminer celle de S_r [COX, 70, page 36] par l'égalité :

$$\text{Prob} \{ N_t < r \} = \text{Prob} \{ S_r > t \}$$

De cette égalité il découle que

$$\text{Prob} \{ N_t = r \} = \text{Prob} \{ S_r \leq t < S_{r+1} \}$$

Dans de nombreux problèmes pratiques, on s'intéresse au comportement du processus de renouvellement après un temps d'opération assez long ; il est donc intéressant d'étudier son comportement asymptotique.

Pour cela, il faut définir la variable aléatoire V_t , qui représente le temps de survie d'un élément qui fonctionne à l'instant t ; la variable V_t sera appelée durée de vie résiduelle de l'élément ; quand t tend vers l'infini la densité de probabilité de V_t est donnée par [COX, 70, page 62] :

$$\frac{1 - F(x)}{M[x_i]} \quad i = 2, 3, \dots$$

où

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx$$

Un processus de renouvellement est dit stationnaire quand

$$f_1(x) = \frac{1 - F(x)}{M[x_i]} \quad i = 2, 3, \dots$$

La figure 1.8 donne l'évolution d'un processus de renouvellement jusqu'à l'instant t .

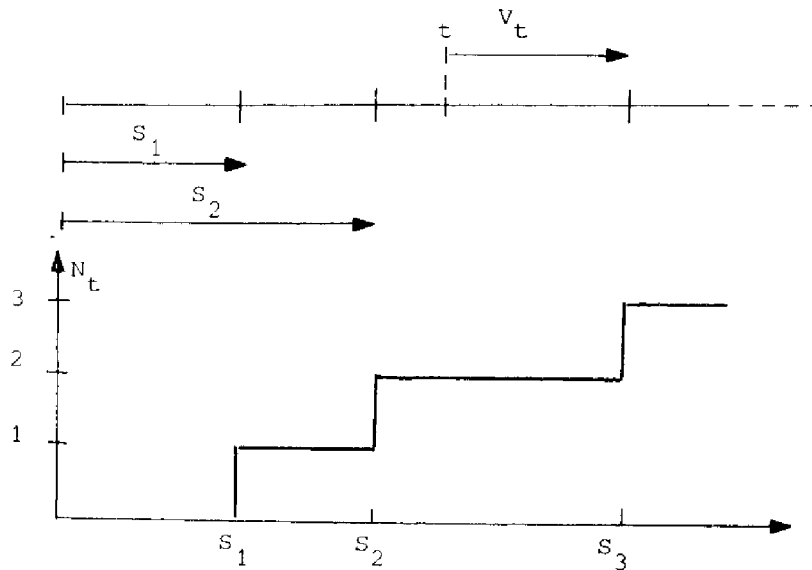


Figure 1.8 Evolution d'un processus de renouvellement jusqu'à l'instant t

II.2 Evaluation du nombre de renouvellements

Le problème fondamental consiste à estimer de manière assez précise la valeur de la variable aléatoire N_t , ce qui revient à déterminer les limites de confiance de la variable aléatoire N_t correspondant à un niveau de confiance donné.

La détermination des limites de confiance de N_t , peut être effectuée, comme nous l'avons montré dans le paragraphe I.3, à partir :

- de la fonction de répartition,
- de l'approche asymptotique.

II.2.1 Détermination de la fonction de répartition

Notons $[F(t)]^{(n)}$ la n -convolution de la fonction de répartition $F(t)$:

$$[F(t)]^{(n)} = \int_0^t [F(t-u)]^{(n-1)} dF(u), \quad [F(t)]^{(1)} = F(t).$$

Nous savons que, dans un processus de renouvellement simple, la fonction de répartition de N_t est donnée par

$$\text{Prob} \{N_t < r\} = \text{Prob} \{S_r > t\} = [F(t)]^{(r)}$$

La figure 1.9 donne l'éventail des courbes de la fonction de répartition de N_t pour plusieurs valeurs de r ; elle indique également la façon dont la limite de confiance supérieure est obtenue à partir de la fonction de répartition.

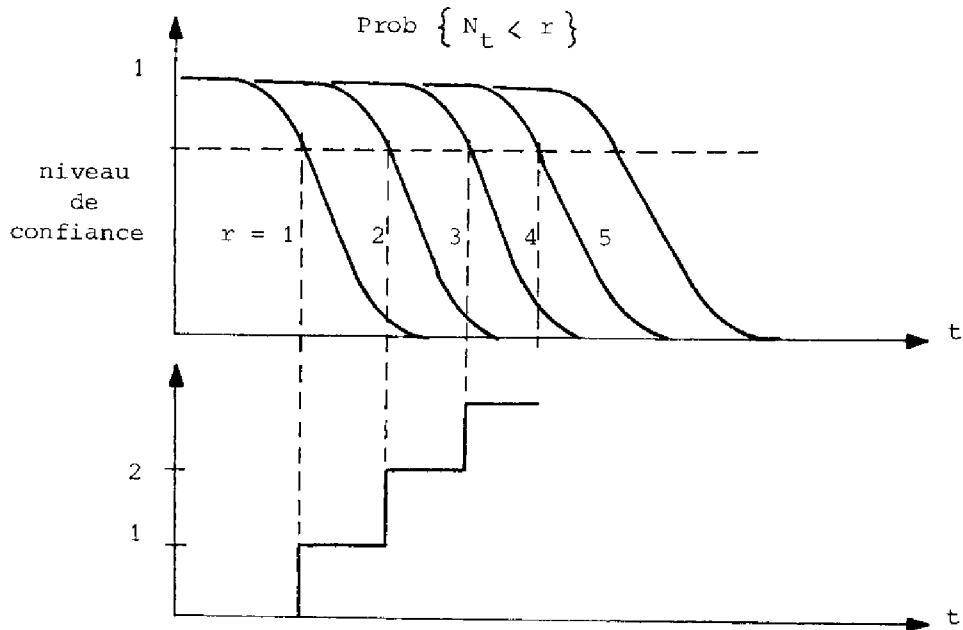


Figure 1.9 Détermination de la limite de confiance

II.2.2 Approche asymptotique

Les principaux résultats concernant le comportement asymptotique dont on a besoin pour l'étude d'un processus markovien, sont donnés dans les trois propositions suivantes :

Proposition 1.

Dans un processus de renouvellement où m et σ^2 sont respectivement la valeur moyenne et la variance du temps entre renouvellements, la variable réduite centrée

$$\frac{N_t - t/m}{\sigma \sqrt{t/m^3}}$$

tend, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers une variable normale standard.

De cette proposition, il découle que

$$\text{Prob} \left\{ \frac{N_t - t/m}{\sigma \sqrt{t/m^3}} < y \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx$$

La démonstration se trouve en [GNE,72, page 119].

Ce résultat permet la détermination des limites de confiance pour le nombre de renouvellements.

Pour la détermination de la limite de confiance supérieure avec un niveau de confiance α , il faut déterminer y_α tel que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_\alpha} e^{-x^2/2} dx = \alpha$$

De la proposition-1, nous avons l'inégalité :

$$N_t < t/m + y_\alpha \sigma \sqrt{t/m^3} \tag{1}$$

avec une probabilité α .

L'utilisation de la proposition-1 nécessite la connaissance de la moyenne m , et de la variance σ^2 , du temps entre renouvellements, ce qui implique la détermination des deux premiers moments.

L'évaluation de la valeur moyenne m quand le temps t tend vers l'infini peut être effectuée en connaissant la valeur limite de la densité de renouvellement $h(t)$, ce qui est indiqué par la proposition-2, dont la démonstration peut être trouvée en [COX,70, page 55].

Proposition 2.

Dans un processus de renouvellement où le temps moyen entre renouvellements est égal à m , la valeur limite de la densité de renouvellement $h(t)$ quand $t \rightarrow \infty$ est donnée par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 1/m$$

L'évaluation des moments d'ordre n ($n > 1$) du temps entre renouvellements pour un processus de renouvellement stationnaire représente un résultat important ; ces moments peuvent être obtenus à partir des moments d'ordre $(n-1)$ du temps de vie résiduelle, représentés par la variable aléatoire V_t .

Proposition 3.

Soient $M^n[x]$ et $M^n[V_t]$ les moments d'ordre n de la variable aléatoire x qui représente le temps entre renouvellements et de la variable aléatoire V_t . Pour un processus de renouvellement stationnaire, ils sont liés par l'expression :

$$M^{n+1}[x] = (n+1)M[x] \cdot M^n[V_t]$$

La démonstration de cette proposition est donnée en [COX, 70, page 64].

II.3 Processus de renouvellement à temps fini de renouvellement

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé que le temps de renouvellement de l'élément défaillant était nul, le renouvellement étant effectué instantanément. Supposons maintenant que le temps de renouvellement du $i^{\text{ème}}$ élément défaillant soit représenté par une variable aléatoire avec une densité de probabilité connue.

Dans ce cas, nous avons un processus aléatoire à deux états, appelés Z_0 et Z_1 , qui représentent respectivement le fonctionnement et l'arrêt dû à la nécessité d'un remplacement de l'élément. La figure 1.10 donne l'évolution dans le temps du processus considéré.

Ce processus constitue un processus de renouvellement à temps fini de renouvellement si les variables aléatoires $x_i^0, x_i^1, i=1,2,\dots$ sont indépendantes.

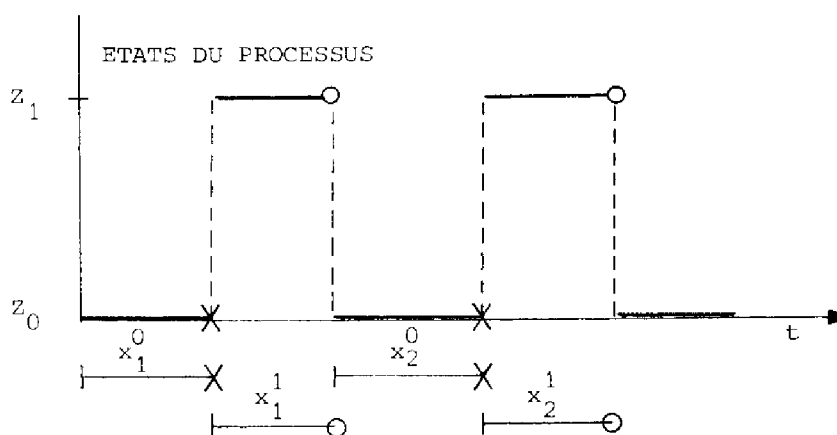


Figure 1.10 Evolution dans le temps d'un processus à deux états Z_0 et Z_1

Etant donné que le temps de renouvellement est fini, il y a une fraction du temps d'opération où l'élément est en fonctionnement et une fraction du temps d'opération nécessaire aux remplacements. Deux variables aléatoires représentent ces deux fractions de l'intervalle de temps :

- le temps global de fonctionnement qui correspond à la somme de toutes les périodes de fonctionnement x_i^0 , $i=1,2,\dots$, dans l'intervalle de temps $[0, t]$,
- le temps global de remplacement qui correspond à la somme de toutes les périodes de remplacement x_i^1 , $i=1,2,\dots$, dans l'intervalle de temps $[0, t]$.

Ces deux grandeurs correspondent respectivement aux temps de séjour dans les états Z_0 et Z_1 du processus aléatoire à 2-états défini précédemment.

L'évaluation du temps de séjour ainsi que le comportement asymptotique quand le temps tend vers l'infini ont été étudiés dans [TAK, 57 - MUT, 68 - LI, 71 - GNE, 72 - PLA, 80].

Une estimation plus précise du temps de séjour passe par la détermination des limites de confiance qui peuvent être obtenues :

- en connaissant la fonction de répartition du temps de séjour,
- à partir du comportement asymptotique.

Hypothèse

Nous considérons dans les développements suivants que l'état à l'instant initial $t=0$, est l'état Z_0 .

11.3.1 Fonction de répartition du temps de séjour

Soient d_t^0 et d_t^1 , les variables aléatoires représentant respectivement les temps de séjour dans les états Z_0 et Z_1 , pour un intervalle du temps d'opération $[0, t]$. Notons $d^0(x, t)$ et $d^1(x, t)$ les fonctions de répartition respectives.

$$\text{Prob} \left\{ d_t^0 \leq x \right\} = d^0(x, t)$$

$$\text{Prob} \left\{ d_t^1 \leq x \right\} = d^1(x, t)$$

Considérons deux processus de renouvellement.

$\{x_n^0\}$ constitué par les périodes successives de fonctionnement : les pannes dans ce processus se produisent aux instants

$$x_1^0, x_1^0 + x_2^0, x_1^0 + x_2^0 + x_3^0, \dots$$

$$s_r^0 = x_1^0 + x_2^0 + \dots + x_r^0, s_0^0 \equiv 0$$

$\{x_n^1\}$ constitué par les périodes successives de renouvellement. Les renouvellements se produisent aux instants

$$x_1^1, x_1^1 + x_2^1, x_1^1 + x_2^1 + x_3^1, \dots$$

$$s_r^1 = x_1^1 + x_2^1 + \dots + x_r^1, s_0^1 \equiv 0$$

Notons :

- N_t^0 le nombre de pannes jusqu'à l'instant t dans le processus $\{x_n^0\}$ et N_t^1 le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant t dans le processus $\{x_n^1\}$

- $v^0(n, t)$ et $v^1(n, t)$ les densités de masse des variables aléatoires N_t^0 et N_t^1 :

$$v^0(n, t) = \text{Prob} \left\{ N_t^0 = n \right\}$$

$$v^1(n, t) = \text{Prob} \left\{ N_t^1 = n \right\}$$

Dans l'annexe A, nous montrons l'équivalence des événements suivants

$$\begin{aligned} \{d_t^0 \leq x\} &= \{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\} \\ \{d_t^1 \leq x\} &= \{N_x^1 \geq N_{t-x}^0\} \end{aligned} \quad (2)$$

Les fonctions de répartition du temps de séjour passé dans l'état sont alors données par

$$\begin{aligned} d^0(x, t) &= \text{Prob} \{d_t^0 \leq x\} = \text{Prob} \{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\} \\ d^1(x, t) &= \text{Prob} \{d_t^1 \leq x\} = \text{Prob} \{N_x^1 \geq N_{t-x}^0\} \end{aligned}$$

Les propositions 4 et 5 découlent de ces résultats.

Proposition 4.

Soit un processus aléatoire à deux états Z_0 et Z_1 ; la fonction de répartition du temps de séjour passé dans l'état Z_0 dans l'intervalle de temps $[0, t]$ est donnée par

$$d^0(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v^1(n, t-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} v^0(k, x)$$

Proposition 5.

Soit un processus aléatoire à deux états Z_0 et Z_1 ; la fonction de répartition du temps de séjour passé dans l'état Z_1 dans l'intervalle de temps $[0, t]$ est donnée par

$$d^1(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v^0(n, t-x) \sum_{k=n}^{+\infty} v^1(k, x)$$

Remarque La première démonstration des résultats donnés dans les propositions 4 et 5 est attribuée à Takacs [TAK, 57] ; nous avons donné une nouvelle démonstration basée sur les égalités (2).

La figure 1.11 donne la forme des fonctions de répartition $d^0(x,t)$ et $d^1(x,t)$.

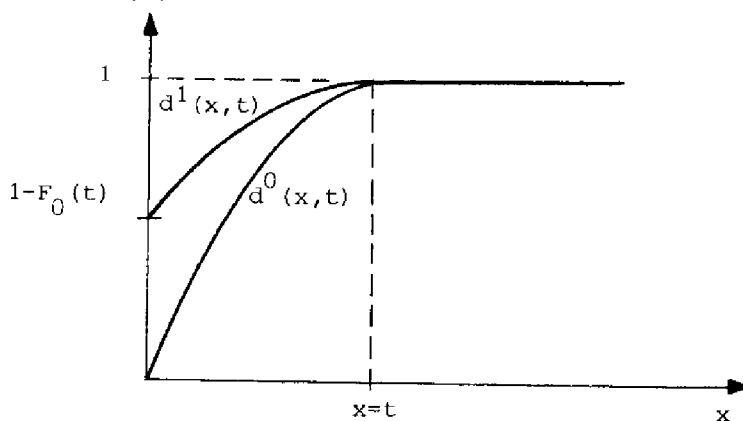


Figure 1.11 Fonctions de répartition du temps de séjour dans l'état Z_0 et Z_1

La discontinuité pour $x=0$ de la fonction $d^1(x,t)$ s'explique par le fait que la probabilité pour que le temps de séjour en Z_1 soit zéro est égale à la probabilité qu'à l'instant t , l'état Z_0 soit encore occupé (nous avons supposé que Z_0 est l'état occupé à l'instant zéro).

L'évaluation des limites de confiance à partir de la détermination de la fonction de répartition ne peut être envisagée que dans des cas simples :

- on est restreint à l'étude des processus aléatoires à deux états,
- les lois de distribution du temps de fonctionnement et du temps de renouvellement sont distribuées selon une loi d'Erlang ; de ce fait les n -convolutions sont facilement calculées une fois qu'elles sont distribuées selon une loi d'Erlang.

A part ces cas simples, le temps de calcul nécessaire à l'évaluation de la fonction de répartition sera important et de ce fait difficilement envisageable d'un point de vue pratique.

II.3.2 Approche asymptotique

Les inconvénients que nous venons d'indiquer à la fin du paragraphe précédent justifient l'intérêt de l'étude du comportement asymptotique du temps de séjour quand le temps d'opération tend vers l'infini. Les résultats permettant d'obtenir les comportements asymptotiques des fonctions de répartition de d_t^1 et d_t^0 sont énoncés dans les propositions 6 et 7.

Nous reprenons pour arriver à ces propositions les processus de renouvellement $\{x_n^0\}$ et $\{x_n^1\}$ définis dans le paragraphe II.3.1 ; notons respectivement (m_0, σ_0^2) et (m_1, σ_1^2) la moyenne et la variance du temps de fonctionnement et du temps de renouvellement.

Quand $x \rightarrow +\infty$ et $(t-x) \rightarrow +\infty$, nous savons, d'après le résultat énoncé dans la proposition 1, que N_x^0 et N_{t-x}^1 sont distribués selon une loi normale standard dont :

- les moyennes sont données par : t/m_0 et $(t-x)/m_1$
- les variances sont données par : $\sigma_0^2 t/m_0^3$ et $\sigma_1^2 (t-x)/m_1^3$

Gnedenko a démontré [GNE, 72] que si les variables aléatoires N_x^0 et N_{t-x}^1 sont asymptotiquement normales quand $x \rightarrow +\infty$ et $(t-x) \rightarrow +\infty$, l'événement

$$\{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\} = \{d_t^0 \leq x\}$$

est asymptotiquement normal quand $t \rightarrow +\infty$. Ce résultat est précisé dans la proposition suivante.

Proposition 6.

La variable réduite centrée $\left\{ \frac{d_t^0 - a_0 t}{\sqrt{b_0 t}} \right\}$

tend, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers une variable normale standard avec :

$$a_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1}, \quad b_0 = \frac{m_1^2 \sigma_0^2 + m_0^2 \sigma_1^2}{(m_0 + m_1)^3}$$

Remarque La démonstration donnée en [GNE, 72] correspond à la détermination du comportement asymptotique de l'évènement

$$\left\{ N_x^0 \geq N_{t-x}^1 \right\}$$

quand $t \rightarrow +\infty$, sachant que les variables aléatoires N_x^0 et N_{t-x}^1 sont distribuées asymptotiquement selon une loi normale quand $x \rightarrow +\infty$ et $(t-x) \rightarrow +\infty$. La démonstration du comportement asymptotique de l'évènement

$$\left\{ N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1 \right\}$$

étant identique à celle donnée en [GNE, 72], nous ne la donnons pas dans ce mémoire.

Le comportement asymptotique de la variable aléatoire d_t^1 est donné dans la proposition 7. La démonstration suit le même développement que celui adopté pour la variable d_t^0 .

Proposition 7.

La variable réduite centrée $\left\{ \frac{d_1 t - a_1 t}{\sqrt{b_1 t}} \right\}$

tend, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers une variable normale standard avec :

$$a_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_0}, \quad b_1 = \frac{m_1^2 \sigma_0^2 + m_0^2 \sigma_1^2}{(m_0 + m_1)^3}$$

D'après les résultats précédents, la limite de confiance supérieure du temps de séjour dans l'état Z_1 est donnée par

$$d_t^1 \leq \frac{m_1}{m_0 + m_1} \cdot t + y_\alpha \sqrt{\frac{(m_1^2 \sigma_0^2 + m_0^2 \sigma_1^2) \cdot t}{(m_0 + m_1)^3}}$$

La valeur de y_α est liée au niveau de confiance α par l'égalité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_\alpha} e^{-x^2/2} dx = \alpha$$

III - PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT DEFINI A PARTIR
D'UN PROCESSUS MARKOVIEN HOMOGENE

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré que le processus aléatoire pouvait prendre deux états : état de fonctionnement et état d'arrêt.

Cette représentation très simple ne permet pas la modélisation du comportement d'un système complexe qui nécessite un ensemble fini d'états.

Ce paragraphe est consacré au développement des expressions mathématiques permettant la généralisation des résultats énoncés dans le paragraphe précédent à un processus à N-états.

La généralisation des résultats de la théorie du renouvellement à un processus à N-états, tant en ce qui concerne le nombre de transitions que les temps de séjour, a déjà fait l'objet de travaux portant sur les processus markoviens de renouvellement :

- obtention de la fonction de répartition du nombre de transitions entre les états $[PYK, 61_a - PYK, 61_b]$ ainsi que son comportement asymptotique $[PYK, 64]$,
- moments de la fonction de répartition des temps de séjour et son comportement asymptotique qui peuvent être déduits des résultats exposés dans $[MCK, 67]$.

Nous avons ressenti, en fonction des buts que nous nous sommes fixés, le besoin de formuler de manière semblable les solutions à ces deux problèmes dans le contexte des processus markoviens homogènes.

Cette formulation fait l'objet de ce paragraphe, dans lequel nous nous sommes attachés à mettre l'ensemble des résultats sous une forme adaptée à la résolution numérique ; pour cela, il nous a semblé préférable d'appliquer les résultats de la théorie du renouvellement à un processus à N-états plutôt que de particulariser les travaux concernant les processus markoviens de renouvellement.

Nous verrons que la variable aléatoire qui représente le nombre de transitions entre les états joue un rôle aussi important dans un processus à N-états que la variable aléatoire qui représente le nombre de renouvellements dans un processus de renouvellement.

III.1 Définitions

Considérons que le processus aléatoire peut prendre un nombre fini d'états appartenant à l'ensemble $\{E\} = \{1, 2, \dots, N\}$.

A l'instant $t=0$ le processus est dans l'état J_0 ; après être resté un temps aléatoire x_1 dans l'état J_0 , il passe dans l'état J_1 où il séjourne durant un temps aléatoire x_2 et ainsi de suite. L'état $J_n \in \{E\}$ représente l'état du processus à la $n^{\text{ième}}$ transition. Nous notons S_n la variable aléatoire qui représente le temps jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ transition

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Nous nous inspirons ici des définitions données en [PYK,61].

Chaîne de Markov

Le processus $\{J_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov ; la chaîne est définie à partir des probabilités de transition p_{ij} de l'état i vers l'état j

$$p_{J_n, j} = \text{Prob} \{ J_{n+1} = j \mid J_n, J_{n-1}, \dots, J_1, J_0 \}$$

$$\sum_{j \in \{E\}} p_{J_n, j} = 1$$

Processus markovien

Le processus $\{(J_n, S_n), n \geq 0\}$ est un processus markovien. Il est défini à partir des probabilités de transition p_{ij} et par les variables aléatoires τ_{ij} qui représentent le temps de séjour dans l'état i , sachant que l'état suivant est l'état j .

Pour le processus $\{(J_n, S_n), n \geq 0\}$, la probabilité pour que l'état suivant soit (J_n, S_n) sachant que le processus est dans l'état (J_{n-1}, S_{n-1}) , est donnée par l'expression :

$$\text{Prob} \{J_n=j, S_n \leq t \mid J_{n-1}, S_{n-1}, J_{n-2}, S_{n-2}, \dots, J_1, S_1, J_0\} = p_{J_{n-1} j} \cdot F_{J_{n-1}, j}^{(t-S_{n-1})} \quad (3)$$

où $F_{ij}(x)$ représente la fonction de répartition de la variable aléatoire τ_{ij} .

Processus semi-markovien

Considérons le processus $\{Z(t), t \geq 0\}$ où $Z(t)$ représente l'état du processus à l'instant t .

Le processus $\{Z(t), t \geq 0\}$ est un processus markovien aux instants t où une transition a lieu ; ces instants sont appelés points de régénération. Hors de ces instants, il n'est plus markovien ; il est alors appelé processus semi-markovien.

Les probabilités p_{ij} de passage de l'état i vers l'état j , aux instants qui constituent des points de régénération, définissent la chaîne (de Markov) immergée dans le processus semi-markovien.

L'état $Z(t)$ est défini par l'expression :

$$\{Z(t) = j\} = \sum_{n=0}^{+\infty} \{J_n = j, S_n \leq t < S_{n+1}\}$$

Processus markovien homogène

Considérons le processus semi-markovien $\{Z(t), t \geq 0\}$ défini précédemment ; ce processus est markovien uniquement aux points de régénération, c'est-à-dire aux instants où un état vient d'être occupé.

Si l'on considère maintenant un processus pour lequel tous les instants sont des points de régénération. En ajoutant la propriété d'homogénéité dans le temps, on est conduit aux relations [COX, 68] :

$$\text{Prob} \{ Z(t + \Delta t) = j \mid Z(t) = i \} = \lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t), \quad i \neq j$$

$$\text{Prob} \{ Z(t + \Delta t) = i \mid Z(t) = i \} = 1 + \lambda_{ii} \Delta t + o(\Delta t)$$

avec

$$\lambda_{ii} + \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^N \lambda_{ik} = 0$$

Des définitions précédentes, on peut déduire les propositions suivantes :

- la densité de probabilité du temps de séjour dans l'état i , notée $w_i(t)$, est donnée par l'expression :

$$w_i(t) = (-\lambda_{ii}) e^{\lambda_{ii} \cdot t}$$

- la densité de probabilité du temps de passage de l'état i à l'état j indépendamment des autres états, notée $g_{ij}(t)$, est donnée par l'expression :

$$g_{ij}(t) = \lambda_{ij} e^{-\lambda_{ij} \cdot t}$$

- la probabilité de transition directe entre les états i et j dans l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, notée $q_{ij}(t)$, sachant que le processus était dans l'état i à l'instant zéro, a pour expression :

$$q_{ij}(t) = q_{ij}(t) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \bar{G}_{ik}(t) = \lambda_{ij} e^{\lambda_{ii} t}$$

- la probabilité p_{ij} pour que la prochaine transition soit effectuée vers l'état j sachant que le processus est dans l'état i est donnée par l'expression :

$$p_{ij} = \int_0^{+\infty} q_{ij}(t) dt = \frac{\lambda_{ij}}{(-\lambda_{ii})}$$

Processus markovien de renouvellement

On peut, également, s'intéresser à la détermination du nombre de transitions dans l'intervalle de temps $[0, t]$ sans s'intéresser à la détermination de l'état du processus à l'instant t .

Introduisons quelques notations : une transition t_{ij} a lieu chaque fois que l'état j est atteint à partir de l'état i en une seule transition. Soit $\{T\}$ l'ensemble des transitions t_{ij} , $i, j=1, 2, \dots, N$.

Considérons la variable aléatoire $N(t)$ qui représente le nombre de transitions appartenant à $\{T\}$ ayant eu lieu dans l'intervalle de temps $[0, t]$. L'état du processus $\{N(t), t \geq 0\}$ est défini par l'expression :

$$\{N(t) = n\} = \sum_{j=1}^N \{J_n = j, S_n \leq t < S_{n+1}\}$$

On peut être amené à ne considérer qu'un sous-ensemble de transitions appartenant à l'ensemble $\{T\}$; dans ce cas, on divise l'ensemble $\{T\}$ en sous-ensembles $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ où T_i représente le sous-ensemble de transitions t_{ki} qui amènent le processus de l'état $k \neq i$ à l'état i .

L'état du processus markovien de renouvellement à l'instant t est défini par le vecteur $\mathbb{N}(t)$:

$$\mathbb{N}(t) = [N_1(t), N_2(t), \dots, N_n(t)]$$

où $N_i(t)$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de transitions appartenant à $\{T_i\}$ et qui se sont produites dans l'intervalle $[0, t]$.

Processus de renouvellement défini à partir d'un processus markovien homogène

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évaluation du nombre de transitions appartenant à un sous-ensemble de $\{T\}$ dans un processus markovien homogène.

Pour cela, nous divisons l'ensemble $\{T\}$ en deux sous-ensembles disjoints $\{T_0\}$ et $\{T_1\}$ tels que :

$$\{T_0\} \cup \{T_1\} = \{T\}$$

et nous notons $N_1(t)$ la variable aléatoire qui représente le nombre de transitions appartenant à $\{T_1\}$ ayant eu lieu dans l'intervalle $[0, t]$.

Le processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$ est appelé un processus de renouvellement défini à partir d'un processus markovien homogène.

III.2 Evaluation du nombre de transitions

Nous considérons le processus de renouvellement défini à partir d'un processus markovien homogène dans lequel l'ensemble de transitions $\{T\}$ est divisé en deux sous-ensembles disjoints $\{T_0\}$ et $\{T_1\}$.

Les transitions appartenant à $\{T_0\}$ et $\{T_1\}$ seront appelées respectivement transition du type-0 et du type-1.

Pour cette évaluation nous prendrons les notations suivantes :

λ_{ij}^0 : taux de transition du type-0

λ_{ij}^1 : taux de transition du type-1

λ_{ii}^0 : $-\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (\lambda_{ik}^0 + \lambda_{ik}^1)$

$\lambda_{ii}^1 = 0$

Λ_0 : matrice de transition dont les éléments sont λ_{ij}^0

Λ_1 : matrice de transition dont les éléments sont λ_{ij}^1

$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1$

Le problème fondamental consiste à estimer d'une manière assez précise la valeur de la variable aléatoire $N_1(t)$.

La détermination des limites de confiance peut être effectuée :

- si l'on connaît la fonction de répartition de la variable aléatoire $N_1(t)$,
- à partir du comportement asymptotique du processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$.

III.2.1 Fonction de répartition du nombre de transitions

La fonction de répartition de la variable aléatoire est obtenue par l'expression

$$\text{Prob} \{ N_1(t) \leq n \mid Z(0) = i \} = \sum_{k=0}^n v_i^1(k, t)$$

où $v_i^1(k,t)$ est la densité de masse du nombre de transitions ; elle est définie comme la probabilité pour que le nombre de transitions du type-1 ayant eu lieu dans l'intervalle $[0,t]$ soit égal à k sachant que le processus était dans l'état i à l'instant initial :

$$v_i^1(k,t) = \text{Prob} \{ N_1(t) = k \mid Z(0) = i \}$$

Notons $\mathbb{V}^1(n,t)$ le vecteur dont les éléments sont $v_i^1(n,t)$, $i=1,2,\dots,N$.

L'obtention du vecteur de densité de masse $\mathbb{V}^1(n,t)$ passe par la résolution de l'équation différentielle donnée dans la proposition suivante.

Proposition 8.

Le vecteur de densité de masse $\mathbb{V}^1(n,t)$ satisfait l'équation différentielle suivante :

$$d\mathbb{V}^1(n,t) / dt = \Lambda_1 \mathbb{V}^1(n-1,t) + \Lambda_0 \mathbb{V}^1(n,t) \quad (4)$$

pour laquelle les conditions initiales sont :

$$\mathbb{V}^1(0,0) = \mathbb{1} , \mathbb{V}^1(n,0) = \mathbb{0} , n = 1,2,\dots$$

Remarque L'expression trouvée généralement dans la littérature donne la transformée en Z et de Laplace du vecteur $\mathbb{V}^1(n,t)$; nous avons préféré l'exprimer par l'équation différentielle récursive qui permet une solution directe lorsque l'on utilise des méthodes numériques.

C'est ce qui explique que nous donnons dans l'annexe B, la démonstration de l'expression (4).

Nous avons l'expression suivante pour le vecteur $\mathbb{M}^1(n,t)$ des fonctions de répartition :

$$\mathbb{M}^1(n,t) = \sum_{k=0}^n \mathbb{V}^1(k,t)$$

il vient alors :

$$dM^1(n,t)/dt = \Lambda_1 M^1(n-1,t) + \Lambda_0 M^1(n,t) \quad (5)$$

avec comme conditions initiales :

$$M^1(n,0) = \mathbf{1}, n=0,1,\dots$$

L'obtention de $M^1(n,t)$ se fait en utilisant la récursivité en n de l'expression (5) :

- lorsque $n=0$, le vecteur $M^1(0,t)$ est obtenu par la résolution de l'équation $dM^1(0,t)/dt = \Lambda_0 M^1(0,t)$
- lorsque $n=1$, le vecteur $M^1(1,t)$ est obtenu par la résolution de l'équation $dM^1(1,t)/dt = \Lambda_1 M^1(0,t) + \Lambda_0 M^1(1,t)$ dans laquelle $M^1(0,t)$ est connu
- ...

III.2.2 Approche asymptotique

Le principal résultat concernant le comportement asymptotique de la variable aléatoire $N_1(t)$ est énoncé dans la proposition 9 ; la démonstration suit une démarche identique à celle adoptée en [GNE, 72] pour le processus de renouvellement.

Proposition 9.

Nous considérons le processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$ et nous notons m_1 et σ_1^2 la valeur moyenne et la variance du temps entre renouvellements des transitions du type-1.

La variable réduite centrée

$$\frac{N_1(t) - t/m_1}{\sigma_1 \sqrt{t/m_1^3}}$$

tend, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers une variable normale standard.

Ce résultat est à rapprocher de celui énoncé dans la proposition 1 concernant le processus de renouvellement ; en effet, le processus de renouvellement est un cas particulier du processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$ quand le nombre d'états N est égal à un.

L'évaluation des limites de confiance de la variable aléatoire $N_1(t)$ nécessite la détermination de m_1 et σ_1^2 .

Détermination de m_1

Si l'on retient une terminologie identique à celle utilisée dans l'étude des processus de renouvellement, la densité de renouvellement $h_1^1(t)$ sera définie comme la dérivée du nombre moyen de transitions du type-1 ayant eu lieu dans l'intervalle $[0, t]$, le processus étant dans l'état i à l'instant $t=0$, ce qui conduit à l'expression :

$$h_1^1(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{Prob}\{\text{qu'une transition du type-1 se produise en } (t, t + \Delta t) / Z(0) = i\}}{\Delta t}$$

D'après la définition de $h_1^1(t)$, on a :

$$h_1^1(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \phi_{ik}(t) \lambda_{kj}^1$$

où $\phi_{ij}(t)$ représente la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant t , sachant qu'il était dans l'état i à l'instant initial $t=0$.

Sous forme matricielle nous avons l'égalité :

$$H^1(t) = \Phi(t) \Lambda_1 \cdot \mathbb{1}$$

où $H^1(t) = \{h_1^1(t)\}$ est un vecteur dont les éléments sont $h_1^1(t)$, $i=1, 2, \dots, N$

$\Phi(t) = \{\phi_{ij}(t)\}$ est une matrice dont les éléments sont $\phi_{ij}(t)$, $i, j=1, 2, \dots, N$.

Lorsque le temps t tend vers l'infini la densité de renouvellement tend vers la valeur limite ρ_1 qui est indépendante de l'état initial ; ρ_1 est donné par l'expression :

$$\rho_1 = \Phi \Lambda_1 \mathbb{1}$$

où $\Phi = [\phi_1, \phi_2 \dots \phi_N]$ est le vecteur ligne dont les éléments sont
 $\phi_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{ij}(t)$.

Le nombre moyen de renouvellements dans l'intervalle de temps $[0, t]$, quand $t \rightarrow +\infty$, est donc donné par

$$\frac{M[N_1(t)]}{t} = \rho_1$$

on déduit de cette égalité que la valeur asymptotique du temps moyen entre renouvellements du type-1 est donnée par :

$$m_1 = \frac{t}{M[N_1(t)]} = \frac{1}{\rho_1}$$

Ce résultat est équivalent, pour un processus à N-états, à celui énoncé dans la proposition 2 pour les processus de renouvellement.

Détermination de σ_1^2

Quand $t \rightarrow +\infty$, le moment d'ordre n du temps entre renouvellements des transitions du type-1 peut être déduit à partir des moments de la durée de vie résiduelle avant une transition du type-1, notée v_t^1 , en utilisant le résultat énoncé dans la proposition 3.

Le moment d'ordre n de la variable aléatoire v_t^1 , quand $t \rightarrow +\infty$, est déterminé à partir de la fonction de survie par la relation :

$$\text{Prob} \left\{ v_{t \rightarrow +\infty}^1 > x \right\} = \Phi W^1(0, x), \quad W^1(0, 0) = \mathbb{1}$$

D'après le résultat énoncé dans la proposition 8, $W^1(0, x)$ satisfait l'équation différentielle :

$$dW^1(0, x)/dx = \Lambda_0 W^1(0, x)$$

dont la transformée de Laplace est donnée par :

$$\mathcal{L}[W^1(0, x)] = [s \mathbb{I} - \Lambda_0]^{-1} \mathbb{1}$$

où \mathbb{I} est la matrice identité.

Il en résulte que le moment d'ordre n est donné par l'égalité [BUZ, 70 - COR, 75] :

$$M^n [V_{t=\infty}^1] = n! \Phi (-\Lambda_0)^{-1} \mathbb{1}$$

Le résultat précédent, en conjonction avec celui énoncé dans la proposition 3, conduit à l'expression suivante pour la variance σ_1^2 :

$$\sigma_1^2 = 2 m_1 \Phi (-\Lambda_0)^{-1} \mathbb{1} - (m_1)^2$$

III.3 Evaluation du temps de séjour dans un ensemble d'états

Ce paragraphe est consacré à l'étude de deux méthodes qui permettent l'accès aux limites de confiance des variables aléatoires $d_0(t)$ et $d_1(t)$ qui représentent les durées du temps de séjour dans les deux sous-ensembles disjoints $\{E_0\}$ et $\{E_1\}$ tels que :

$$\{E_0\} \cup \{E_1\} = \{E\}$$

où $\{E\}$ représente l'ensemble des états que peut prendre le processus markovien homogène.

De même que dans le paragraphe précédent, les méthodes proposées sont basées d'une part sur la détermination de la fonction de répartition, d'autre part, sur l'approche asymptotique quand t tend vers l'infini.

Dans les deux méthodes, nous considérons que l'ensemble des transitions $\{T\}$ est divisé en quatre sous-ensembles disjoints définis comme suit (figure 1.12) :

$\{T_{0,0}\}, \{T_{1,1}\}$: l'ensemble des transitions entre les états appartenant respectivement aux sous-ensembles $\{E_0\}$ et $\{E_1\}$

$\{T_{0,1}\}, \{T_{1,0}\}$: l'ensemble des transitions de passage d'un état appartenant à $\{E_0\}$, $\{E_1\}$ à un état appartenant à $\{E_1\}$, $\{E_0\}$

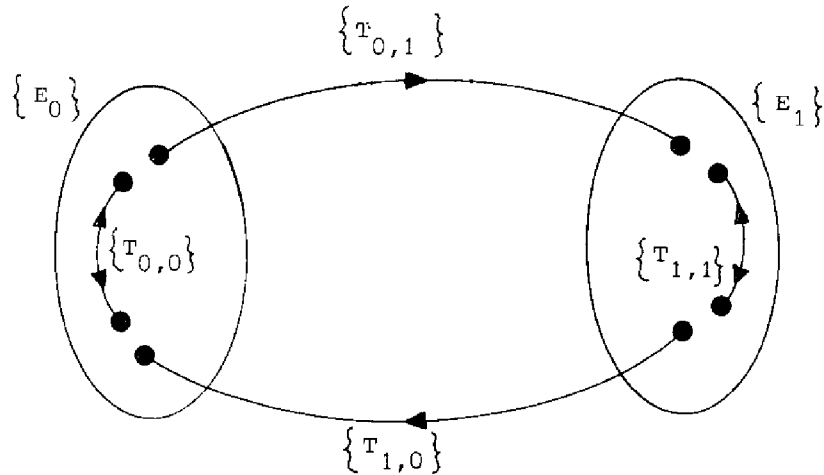


Figure 1.12 Partitions de l'ensemble de transitions $\{T\}$

Les partitions de la matrice des taux de transition $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ et de la matrice des probabilités de la chaîne immergée $\mathbb{P} \{p_{ij}\}$, $p_{ii} = -1$, en tenant compte des sous-ensembles $\{T_{0,0}\}$, $\{T_{0,1}\}$, $\{T_{1,0}\}$ et $\{T_{1,1}\}$ sont indiquées ci-après :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} \end{bmatrix} \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{00} & \mathbb{P}_{01} \\ \mathbb{P}_{10} & \mathbb{P}_{11} \end{bmatrix}$$

Cette partition des ensembles $\{E\}$ et $\{T\}$ permet de considérer le processus $\{z(t), t \geq 0\}$ comme un processus à deux états $\{z_0, z_1\}$ où

$$z_0 = \{E_0\} \text{ et } z_1 = \{E_1\}$$

Nous avons donc défini un nouveau processus à partir de $\{z(t), t \geq 0\}$, le processus à 2-états $\{z_0, z_1\}$, ce qui permettra de faire le rapprochement entre les résultats obtenus dans le deuxième paragraphe concernant l'étude du temps de séjour dans un processus à 2-états et ceux concernant le processus $\{z(t), t \geq 0\}$ à N-états.

III.3.1 Fonction de répartition du temps de séjour

La notation employée sera la même que celle utilisée dans le paragraphe II.3 concernant l'étude d'un processus à 2-états.

Les processus de renouvellement $\{x_n^0\}$ et $\{x_n^1\}$ sont définis à partir du processus markovien homogène, les instants de renouvellement étant respectivement :

$$x_1^0, x_1^0 + x_2^0, x_1^0 + x_2^0 + x_3^0$$

$$x_1^1, x_1^1 + x_2^1, x_1^1 + x_2^1 + x_3^1$$

où x_i^0 et x_i^1 sont les variables aléatoires qui représentent respectivement le temps de séjour dans les états Z_0 et Z_1 au $i^{\text{ème}}$ passage.

Nous avons défini deux processus de renouvellement à partir du processus à 2-états $\{Z_0, Z_1\}$:

- le processus $\{x_n^0\}$ pour lequel les temps de séjour dans les états $i \in Z_1$ sont nuls, ce qui revient à considérer que les passages dans les états $i \in Z_1$ sont instantanés ; un renouvellement a lieu dans le processus $\{x_n^0\}$ chaque fois qu'une transition appartenant à l'ensemble $\{T_{0,1}\}$ a lieu. Ce processus est représenté sur la figure 1.13.

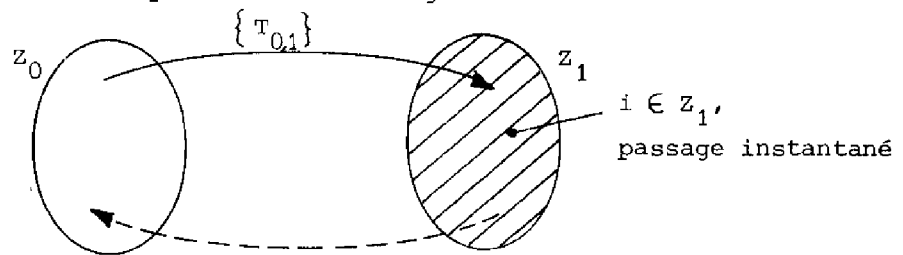


Figure 1.13 Représentation du processus aléatoire $\{x_n^0\}$

- le processus $\{x_n^1\}$ pour lequel le temps de séjour dans les états $i \in Z_0$ sont nuls, un renouvellement ayant lieu à chaque transition appartenant à l'ensemble $\{T_{1,0}\}$. Ce processus est représenté par la figure 1.14.

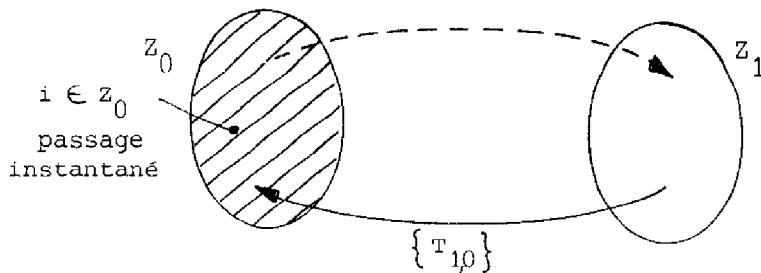


Figure 1.14 Représentation du processus aléatoire $\{x_n^1\}$

Hypothèse

Nous considérons dans les développements suivants que l'état, à l'instant initial $t=0$, appartient à Z_0 .

Pour les processus $\{x_n^0\}$ et $\{x_n^1\}$ définis précédemment, nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \{d_0(t) \leq x\} &= \{N_{01}(x) \geq N_{10}(t-x) + 1\} \\ \{d_1(t) \leq x\} &= \{N_{10}(x) \geq N_{01}(t-x)\} \end{aligned} \quad (6)$$

où : $N_{01}(t)$ est la variable aléatoire représentant le nombre de renouvellements s'étant produits jusqu'à l'instant t dans le processus $\{x_n^0\}$,

$N_{10}(t)$ est la variable aléatoire représentant le nombre de renouvellements s'étant produits jusqu'à l'instant t dans le processus $\{x_n^1\}$.

Ce résultat est à rapprocher de celui donné par les expressions (2), paragraphe II.3.1, relatives à un processus à 2-états. En effet, vu les définitions des processus $\{x_n^0\}$ et $\{x_n^1\}$ pour le processus à 2-états et pour le processus à N-états, les égalités (6) peuvent être immédiatement déduites de celles données par les expressions (2).

Les fonctions de répartition des variables aléatoires $d_0(t)$ et $d_1(t)$, notées $d_i^0(x,t)$ et $d_i^1(x,t)$ sont définies par les expressions :

$$\begin{aligned} d_i^0(x,t) &= \text{Prob} \{d_0(t) \leq x \mid z(0) = i\} \\ d_i^1(x,t) &= \text{Prob} \{d_1(t) \leq x \mid z(0) = i\} \end{aligned} \quad i \in Z_0$$

Des expressions (6), il découle que :

$$\begin{aligned} d_i^0(x,t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} v_i^{10}(n, t-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_i^{01}(k, x) \\ d_i^1(x,t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} v_i^{01}(n, t-x) \sum_{k=n}^{+\infty} v_i^{10}(k, x) \end{aligned}$$

où $v_i^{01}(n,t) = \text{Prob} \{N_{01}(t) = n \mid Z(0) = i\}$

$v_i^{10}(n,t) = \text{Prob} \{N_{10}(t) = n \mid Z(0) = i\}$

Ces résultats sont exprimés sous forme matricielle dans la proposition 10.

Pour cette proposition nous introduisons les vecteurs dont les expressions sont les suivantes :

$$\mathbb{D}^0(x,t) = \{d_i^0(x,t), i \in \{E\}\} = \left[\begin{array}{c} \mathbb{D}_{Z_0}^0(x,t) \\ \mathbb{D}_{Z_1}^0(x,t) \end{array} \right]$$

$$\mathbb{D}^1(x,t) = \{d_i^1(x,t), i \in \{E\}\} = \left[\begin{array}{c} \mathbb{D}_{Z_0}^1(x,t) \\ \mathbb{D}_{Z_1}^1(x,t) \end{array} \right]$$

$$\mathbb{V}^{01}(n,t) = \{v_i^{01}(n,t), i \in \{E\}\} = \left[\begin{array}{c} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t) \\ \mathbb{V}_{Z_1}^{01}(n,t) \end{array} \right]$$

$$\mathbb{V}^{10}(n,t) = \{v_i^{10}(n,t), i \in \{E\}\} = \left[\begin{array}{c} \mathbb{V}_{Z_0}^{10}(n,t) \\ \mathbb{V}_{Z_1}^{10}(n,t) \end{array} \right]$$

Proposition 10.

Les vecteurs des fonctions de répartitions $\mathbb{D}_{Z_0}^0(x,t)$, $\mathbb{D}_{Z_0}^1(x,t)$ sont donnés par les expressions :

$$\mathbb{D}_{Z_0}^0(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{V}_{Z_0}^{10}(n, t-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(k, x)$$

$$\mathbb{D}_{Z_0}^1(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n, t-x) \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{V}_{Z_0}^{10}(k, x)$$

L'utilisation des expressions données dans la proposition 10 nécessite la détermination des vecteurs $\mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t)$ $\mathbb{V}_{Z_0}^{10}(n,t)$.

Les équations différentielles dont la solution permet l'accès à ces vecteurs sont données dans la proposition 11. La démonstration de ces résultats est donnée dans l'annexe C.

Proposition 11.

Les vecteurs de densité de masse $\mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t)$ et $\mathbb{V}_{Z_0}^{10}(n,t)$ satisfont le système d'équations différentielles suivant :

$$d\mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t) / dt = \Lambda_{01} (-\mathbb{P}_{11})^{-1} \mathbb{P}_{10} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n-1,t) + \Lambda_{00} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t)$$

$$\mathbb{V}_{Z_0}^{10}(n,t) = (-\mathbb{P}_{00})^{-1} \mathbb{P}_{01} \mathbb{V}_{Z_1}^{10}(n,t)$$

$$d\mathbb{V}_{Z_1}^{10}(n,t) / dt = \Lambda_{10} (-\mathbb{P}_{00})^{-1} \mathbb{P}_{01} \mathbb{V}_{Z_1}^{10}(n-1,t) + \Lambda_{11} \mathbb{V}_{Z_1}^{10}(n,t)$$

avec les conditions initiales :

$$\mathbb{V}_{Z_0}^{01}(0,0) = \mathbb{1} , \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,0) = \mathbb{0} , n = 1, 2, \dots$$

$$\mathbb{V}_{Z_1}^{10}(0,0) = \mathbb{1} , \mathbb{V}_{Z_1}^{10}(n,0) = \mathbb{0} , n = 1, 2, \dots$$

III.3.2 Approche asymptotique

L'étude du comportement asymptotique des variables aléatoires qui représentent la durée du temps de séjour dans les sous-ensembles $\{E_0\}$ et $\{E_1\}$ suit une démarche identique à celle utilisée lors de l'étude d'un processus à 2-états (paragraphe II.3.2).

Pour cette étude, nous utilisons les expressions (6) que nous rappelons :

$$\{d_0(t) \leq x\} = \{N_{01}(x) \geq N_{10}(t-x) + 1\}$$

$$\{d_1(t) \leq x\} = \{N_{10}(x) \geq N_{01}(t-x)\}$$

Les variables aléatoires $N_{01}(t)$ et $N_{10}(t)$ sont asymptotiquement normales quant t tend vers l'infini.

Les propositions 12 et 13, résultent de l'application du résultat donné en [GNE, 72] concernant le comportement asymptotique de $d_0(t)$ et $d_1(t)$ à partir des égalités données au paragraphe II.3.2.

Proposition 12.

La variable réduite centrée $\left\{ \frac{d_0(t) - a_0 t}{\sqrt{b_0 t}} \right\}$ tend, lorsque $t \rightarrow +\infty$,

vers une variable normale standard, où

$$a_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \quad , \quad b_0 = \frac{m_1^2 \sigma_0^2 + m_0^2 \sigma_1^2}{(m_0 + m_1)^3}$$

avec

- m_0, σ_0^2 : valeur moyenne et variance du temps de séjour dans l'état Z_0 ,
- m_1, σ_1^2 : valeur moyenne et variance du temps de séjour dans l'état Z_1 .

Proposition 13.

La variable réduite centrée $\left\{ \frac{d_1(t) - a_1 t}{\sqrt{b_1 t}} \right\}$ tend, lorsque $t \rightarrow +\infty$,

vers une variable normale standard où

$$a_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \quad , \quad b_1 = \frac{m_1^2 \sigma_0^2 + m_0^2 \sigma_1^2}{(m_0 + m_1)^3}$$

La détermination de $m_0, \sigma_0^2, m_1, \sigma_1^2$ suit la même démarche que celle adoptée au paragraphe III.2.2 concernant l'obtention de la valeur moyenne et de la variance du temps entre renouvellements dans le processus $\{N_1(t), t \geq 0\}$. En effet, m_0, σ_0^2 et m_1, σ_1^2 correspondent à la valeur moyenne et la variance du temps entre renouvellements dans les processus $\{x_n^0\}$ et $\{x_n^1\}$.

Considérons la partition du vecteur Φ

$$\Phi = [\Phi_{Z_0}, \Phi_{Z_1}]$$

et les vecteurs normalisés à un, $\Phi_{Z_0}^*, \Phi_{Z_1}^*$ tels que $\Phi_{Z_0}^* \mathbb{1} = \Phi_{Z_1}^* \mathbb{1} = 1$; ces vecteurs sont définis par les expressions

$$\Phi_{Z_0}^* = \frac{\Phi_{Z_0}}{\Phi_{Z_0} \cdot \mathbb{1}} \quad , \quad \Phi_{Z_1}^* = \frac{\Phi_{Z_1}}{\Phi_{Z_1} \cdot \mathbb{1}}$$

Les expressions suivantes permettent l'accès aux valeurs moyennes

$$p_0 = 1/m_0 = \Phi_{Z_0}^* \Lambda_{01} \cdot \uparrow$$

$$p_1 = 1/m_1 = \Phi_{Z_1}^* \Lambda_{10} \cdot \uparrow$$

L'obtention des variances σ_0^2 et σ_1^2 nécessite l'évaluation de la valeur moyenne de la durée de vie résiduelle dans les processus $\{x_n^0\}$ et $\{x_n^1\}$, notées respectivement v_t^0 et v_t^1 .

$$M[v_t^0] = \Phi_{Z_0}^* [-\Lambda_{00}]^{-1} \uparrow$$

$$M[v_t^1] = \Phi_{Z_1}^* [-\Lambda_{11}]^{-1} \uparrow$$

Les variances sont données par les expressions :

$$\sigma_0^2 = 2 \cdot m_0 \cdot M[v_t^0] - (m_0)^2$$

$$\sigma_1^2 = 2 \cdot m_1 \cdot M[v_t^1] - (m_1)^2$$

IV - DESCRIPTION DES OUTILS D'EVALUATION

IV.1 Présentation générale des outils

De façon à permettre une résolution automatique des résultats énoncés dans le troisième paragraphe, nous avons mis au point deux outils, le programme LIMCONF et le programme SURFI.

L'objectif du programme LIMCONF est l'analyse de l'erreur introduite par l'utilisation de l'approche asymptotique dans l'évaluation des limites de confiance du nombre de transitions.

Ce programme permet de déterminer les limites de confiance du nombre de transitions dans un processus markovien homogène :

- à partir de la solution numérique de l'équation différentielle énoncée dans la proposition 8,
- en utilisant l'approche asymptotique dont le résultat est énoncé dans la proposition 9.

Le programme SURFI a un caractère plus général en ce sens qu'il permet :

- l'évaluation des composantes indépendantes du temps (valeur moyenne d'apparition d'un évènement, valeur asymptotique d'une composante dépendant du temps,...) en fonction d'un paramètre quelconque de la matrice de transition,
- l'évaluation des limites de confiance à partir de l'approche asymptotique des grandeurs définies à partir du nombre de transitions et du temps de séjour dans un ensemble d'états d'un processus markovien homogène.

Nous n'avons pas pris en compte dans ce programme l'évaluation de la limite de confiance du temps de séjour à partir de la fonction de répartition ; en effet, la solution numérique des expressions données dans les propositions 10 et 11 est complexe et demande un temps de calcul trop important même dans les cas des structures dont le nombre d'états du modèle markovien n'est pas supérieur à cinq.

Les programmes LIMCONF et SURFI sont constitués de deux parties :

- définition du modèle qui consiste à définir le fichier de données nécessaires à l'exécution du programme : définition de la matrice des taux de transitions, définition des composantes recherchées, ...
- traitement du modèle qui consiste à définir les algorithmes employés dans l'évaluation des composantes.

Afin de donner à l'utilisateur une plus grande facilité de manipulation du fichier de données nous avons adopté une organisation identique de fichier pour les deux programmes ; elle est inspirée de celle adoptée pour le programme SURF [DOU,79] qui a été conçu et développé par l'équipe à laquelle nous appartenons et le Service d'Informatique du Laboratoire ; la définition de cette étape est donnée dans l'annexe D.

Ce paragraphe est consacré à la définition de la partie de traitement du modèle correspondante à chaque programme.

Dans les deux cas l'ensemble d'états $\{E\}$ que peut prendre le processus est divisé en deux sous-ensembles disjoints $\{E_0\}$ et $\{E_1\}$ et la partition de la matrice des taux de transition Λ est effectuée en tenant compte de ces deux sous-ensembles :

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} \\ \hline \Lambda_{10} & \Lambda_{11} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \} N_0 \\ \} N_1 \end{array} \right\}$$

$\underbrace{\Lambda_{10}}_{N_0} \quad \underbrace{\Lambda_{11}}_{N_1}$

IV.2 Le programme LIMCONF

Dans ce qui suit, nous considérons l'application du programme LIMCONF à l'évaluation de la limite de confiance du nombre de passages dans les états appartenant à l'ensemble $\{E_1\}$ à partir de la fonction de répartition ; étant donné que l'obtention de la limite de confiance à partir de l'approche asymptotique est la même pour les deux programmes, elle sera considérée lors de la présentation du programmes SURFI en même temps que l'obtention de la limite de confiance du temps de séjour.

La détermination de la fonction de répartition du nombre de passages dans l'ensemble $\{E_1\}$ passe par la résolution de l'équation différentielle récursive :

$$dM^1(n,t) / dt = \Lambda_1 M^1(n-1,t) + \Lambda_0 M^1(n,t)$$

où

$$\Lambda_0 = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_{00} & \mathbb{0} \\ \hline \Lambda_{10} & \Lambda_{11} \end{array} \right], \quad \Lambda_1 = \Lambda - \Lambda_0$$

avec les conditions initiales $M^1(n,0) = \mathbb{1}$, $n=0,1,\dots$

La résolution numérique de l'équation différentielle pour chaque valeur de n est effectuée par la méthode d'intégration de Runge-Kutta du quatrième ordre.

Dans le cas général d'une équation de la forme $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ la valeur de $y=y_1$ obtenue par la méthode de Runge-Kutta pour $x=x_0 + H$ sachant que pour $x=x_0$, $y=y_0$, est donnée par l'expression [BOO,66]

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

où

$$K_1 = H \cdot f(x_0, y_0)$$

$$K_2 = H \cdot f(x_0 + H/2, y_0 + K_1/2)$$

$$K_3 = H \cdot f(x_0 + H/2, y_0 + K_2/2)$$

$$K_4 = H \cdot f(x_0 + H, y_0 + K_3)$$

L'utilisation des expressions précédentes permet l'obtention de $M^1(n,t)$, pour $n=0$ aux instants qui sont multiples de H , c'est-à-dire aux instants $K.H$.

L'obtention de $M^1(n,t)$ ($n=1$) nécessite l'évaluation de $M^1(0,t)$, dont les valeurs ne sont connues qu'aux instants $K.H$, aux instants $K.H + H/2$

De même, l'obtention de $M^1(n,t)$ aux instants $K.H$ nécessite la connaissance de $M^1(n-1,t)$ aux instants $K.H$ et $K.H + H/2$.

La détermination de ces points intermédiaires, a été effectuée par l'utilisation de la méthode d'interpolation de Lagrange [BOO,66]; étant donné quatre points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) le programme détermine pour un argument x le polynôme d'interpolation $P(x)$:

$$P(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) y_i$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^3 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad i = 0, 1, 2, 3$$

L'organigramme de la procédure Runge-Kutta est donné par la figure 1.15.

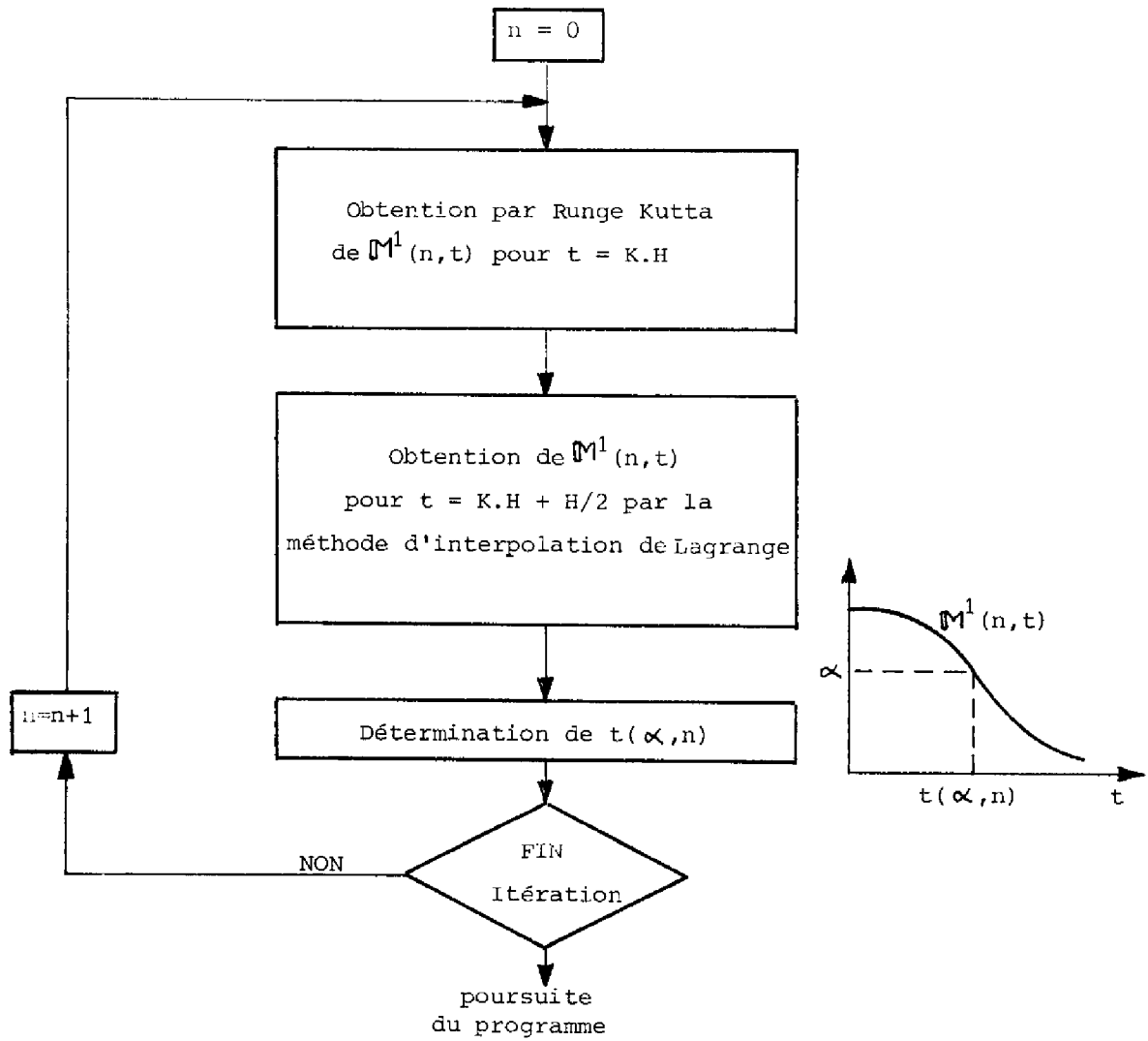


Figure 1.15 Organigramme de la procédure Runge-Kutta

A partir des points $t(\alpha, n)$ la courbe de la limite de confiance supérieure est obtenue comme indiqué par la figure 1.16.

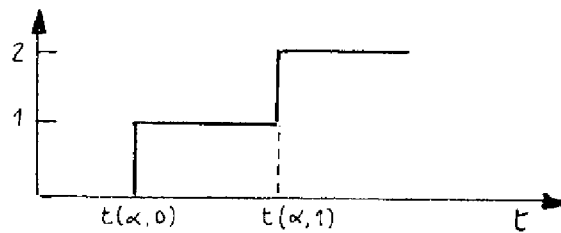


Figure 1.16 Obtention de la limite de confiance

IV.3 Le programme SURFI

Le programme SURFI offre deux options à l'utilisateur :

- option P : évaluation des composantes indépendantes du temps ; l'ensemble $\{E_1\}$ représente l'ensemble des états absorbants,
- option C : évaluation des limites de confiance du nombre de passages ou du temps de séjour dans l'ensemble $\{E_1\}$.

IV.3.1 Evaluation des composantes indépendantes du temps

Le tableau de la figure 1.17 donne les composantes pouvant être évaluées par le programme et les expressions correspondantes dans lesquelles nous avons introduit le vecteur de sommation UN :

- dont les éléments sont 0 ou 1
- qui est partitionné en tenant compte des ensembles $\{E_0\}$ et $\{E_1\}$ de la manière suivante :

$$UN = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{UN_0}^{N_0} & \overbrace{UN_1}^{N_1} \end{array} \right]$$

COMPOSANTES	EXPRESSIONS
Temps moyen avant absorption	$P(0) (-\Lambda_{00})^{-1} UN_0$ où $P(0)$ est le vecteur des probabilités initiales
Probabilité d'absorption pour un état appartenant à $\{E_1\}$	$P(0) (-\Lambda_{00})^{-1} \Lambda_{01} UN_1$
Probabilité stationnaire	$[10\ 0\dots 0] [\Lambda_m]^{-1} UN$ où Λ_m est la matrice déduite de la matrice des taux de transition Λ en remplaçant la première colonne par des 1

Figure 1.17 Expressions des composantes indépendantes du temps

IV.3.2 Evaluation des limites de confiance - approche asymptotique

Le tableau de la figure 1.18 donne les expressions permettant l'accès aux limites de confiance du nombre de passages et du temps de séjour dans l'ensemble $\{E_1\}$.

LIMITE DE CONFIANCE	EXPRESSIONS
<p>NOMBRE DE PASSAGES DANS L'ENSEMBLE $\{E_1\}$</p>	$N_1(t) = t/m_1 + y_\alpha \sigma_1 \sqrt{t/m_1^3}$ <p>où $1/m_1 = \frac{\Phi}{\Lambda_1} \mathbb{1}$</p> $\sigma_1^2 = 2m_1 \frac{\Phi}{(-\Lambda_0)^{-1} \mathbb{1}} - (m_1)^2$ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_\alpha} e^{-x^2/2} dx$
<p>TEMPS DE SEJOUR DANS L'ENSEMBLE $\{E_1\}$</p>	$d_1(t) = \frac{m_1}{m_0 + m_1} t + y_\alpha \sqrt{\frac{(m_1^2 \sigma_0^2 + m_0^2 \sigma_1^2) \cdot t}{(m_0 + m_1)^3}}$ <p>où $1/m_0 = \left[\frac{\Phi_0}{\Phi_0} \mathbb{1} \right] \Lambda_{01} \mathbb{1}$</p> $1/m_1 = \left[\frac{\Phi_1}{\Phi_1} \mathbb{1} \right] \Lambda_{10} \mathbb{1}$ $\sigma_0^2 = 2m_0 \left[\frac{\Phi_0}{\Phi_0} \mathbb{1} \right] \left[-\Lambda_{00} \right]^{-1} \mathbb{1} - (m_0)^2$ $\sigma_1^2 = 2m_1 \left[\frac{\Phi_1}{\Phi_1} \mathbb{1} \right] \left[-\Lambda_{11} \right]^{-1} \mathbb{1} - (m_1)^2$ $\Phi = \left[\underbrace{\Phi_0}_{N_0} \mid \underbrace{\Phi_1}_{N_1} \right]$ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_\alpha} e^{-x^2/2} dx$

Figure 1.18 Expressions permettant l'accès aux limites de confiance

L'utilisation de ces expressions nécessite la détermination du vecteur de probabilités stationnaires Φ et du paramètre y :

- le vecteur Φ est déterminé comme indiqué dans le tableau de la figure 1.18 du paragraphe précédent,
- la détermination de y_α [ABR,70] est effectuée à partir de l'approximation :

$$y_\alpha = \begin{cases} y & \text{si } 0 < \alpha \leq .5 \\ -y & \text{si } .5 < \alpha < 1 \end{cases}$$

où

$$y = t - \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| < 4,5 \cdot 10^{-4}$$

$$t = \begin{cases} \sqrt{\ln 1/\alpha^2} & \text{si } 0 < \alpha \leq .5 \\ \sqrt{\ln 1/(1-\alpha)^2} & \text{si } .5 < \alpha < 1 \end{cases}$$

$$c_0 = 2,515517$$

$$d_1 = 1,432788$$

$$c_1 = 0,802853$$

$$d_2 = 0,189269$$

$$c_2 = 0,010328$$

$$d_3 = 0,001308$$

CONCLUSION

Les mesures de la sûreté de fonctionnement d'un système peuvent être exprimées à partir du nombre de transitions entre les états que peut prendre le système et le temps de séjour dans un sous-ensemble de ces états.

L'accroissement du degré de certitude associé aux évaluations de ces mesures entraîne la détermination de la limite de confiance correspondant à un certain niveau de confiance.

Nous avons développé dans ce chapitre les résultats mathématiques permettant l'accès de manière systématique aux limites de confiance des grandeurs définies à partir des variables aléatoires qui représentent le nombre de transitions entre les états et le temps de séjour dans un ensemble d'états d'un processus markovien ; ils constituent une extension des résultats issus de la théorie du renouvellement à un processus markovien à N-états.

Pour l'établissement des résultats mathématiques, nous avons suivi une démarche identique à celle utilisée dans la théorie du renouvellement :

- détermination de la fonction de répartition,
- détermination du comportement asymptotique de la fonction de répartition.

Les résultats obtenus ont permis de montrer que :

- l'obtention de la fonction de répartition conduit à des expressions assez complexes qui lui ôtent une grande partie de son intérêt sur le plan pratique,
- les expressions déduites pour le comportement asymptotique :
 - .sont intéressantes par la simplicité de calcul,
 - .prennent en compte la valeur moyenne et l'écart type associés à la variable aléatoire.

Afin de permettre une résolution automatique des expressions établies, nous avons mis au point deux programmes :

- LIMCONF dont l'objectif est l'analyse de l'erreur introduite par l'utilisation de l'approche asymptotique pour l'évaluation du nombre de transitions,
- SURFI qui utilise l'approche asymptotique pour l'obtention des limites de confiance des grandeurs définies à partir du nombre de transitions et du temps de séjour.

La suite naturelle à ce chapitre sera donc d'analyser au moyen des résultats obtenus :

- la représentativité de l'évaluation basée sur la valeur moyenne,
- la comparaison entre les différentes méthodes d'évaluation de la limite de confiance.

§§§

CHAPITRE 2

ÉVALUATION DES LIMITES DE CONFIANCE
DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITÉ
DE SYSTÈMES INFORMATIQUES

INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré à l'application des résultats généraux développés dans le premier chapitre à l'évaluation de deux grandeurs souvent utilisées pour caractériser la sûreté de fonctionnement des systèmes réparables :

- le taux d'arrêt,
- l'indisponibilité.

Deux méthodes d'évaluation de ces grandeurs sont considérées :

- l'évaluation ponctuelle basée uniquement sur la valeur moyenne,
- l'évaluation basée sur la limite de confiance et le niveau de confiance.

Les études d'évaluation prévisionnelle existant dans la littérature sont généralement basées sur la première méthode. Cependant, comme nous l'avons déjà dit dans le premier chapitre, l'évaluation basée uniquement sur la valeur moyenne est une évaluation idéale en ce sens qu'elle caractérise le comportement d'un événement qui se produit un nombre infini de fois.

Pour les systèmes sûrs de fonctionnement le nombre de fois où l'évènement arrêt se produit pendant le cycle de vie est assez faible, ce qui justifie l'intérêt de l'utilisation de la deuxième méthode dans l'évaluation prévisionnelle du taux d'arrêt et de l'indisponibilité.

Dans cette étude, nous nous intéressons à la détermination de la limite de confiance supérieure et du niveau de confiance qui permettent de déterminer respectivement le seuil et la probabilité pour que ce seuil ne soit pas dépassé pour le temps d'opération prévu ; en effet, les spécifications en sûreté de fonctionnement relatives à l'arrêt du système donnent généralement des seuils maximaux pour le taux d'arrêt et l'indisponibilité qui ne doivent pas être dépassés.

Le chapitre est divisé en trois grandes parties :

- dans la première partie, nous donnons les expressions permettant l'accès à la limite de confiance du taux d'arrêt et de l'indisponibilité,
- dans la seconde partie, ces grandeurs sont évaluées pour une structure non-redondante,
- l'étude des structures redondantes est effectuée dans la troisième partie.

I - ETABLISSEMENT DES EXPRESSIONS DE LA LIMITE DE CONFIANCE
DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITE

Deux grandeurs seront utilisées pour l'étude de l'arrêt du système :

- le taux d'arrêt - $\rho_{UA}(t)$ qui est le nombre d'arrêts par unité de temps d'opération,
- l'indisponibilité - $UA(t)$ qui est la proportion du temps d'opération passé par le système en état d'arrêt.

Cette définition a la même interprétation que celle de l'indisponibilité qui est la probabilité que le système soit dans l'état d'arrêt à l'instant t quand le temps d'opération tend vers l'infini.

Le taux d'arrêt et l'indisponibilité sont obtenus à partir des variables aléatoires qui représentent respectivement le nombre d'arrêts et le temps global d'arrêt.

L'utilisation des résultats du premier chapitre dans l'évaluation de la limite de confiance passe par l'expression des variables aléatoires en fonction du nombre de transitions et du temps de séjour dans l'ensemble $\{E\}$ des états que peut prendre le système.

Pour cette étude, l'ensemble $\{E\}$ est partitionné en deux sous-ensembles $\{F\}$ et $\{A\}$ définis comme suit :

- $\{F\}$: sous-ensemble des états où le système est en fonctionnement,
- $\{A\}$: sous-ensemble des états où le système est en arrêt.

Durant la période d'opération, le système est successivement dans les sous-ensembles $\{F\}$ et $\{A\}$, ce qui définit une séquence d'intervalles de fonctionnement et d'arrêt qui est indiquée sur la figure 2.1.

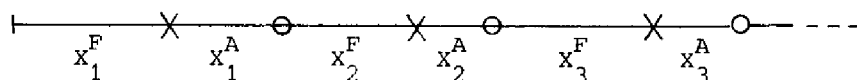


Figure 2.1 Séquence d'intervalles de fonctionnement x_i^F et d'arrêt x_i^A du système.

Les périodes consécutives de fonctionnement et d'arrêt définissent deux processus aléatoires :

- le processus aléatoire $\{x_n^F\}$ obtenu à partir des périodes consécutives de fonctionnement,
- le processus aléatoire $\{x_n^A\}$ obtenu à partir des périodes consécutives d'arrêt.

Le nombre d'arrêts et le temps global d'arrêt sont respectivement exprimés en fonction :

- du nombre de transitions effectuées de l'ensemble $\{F\}$ vers l'ensemble $\{A\}$
- du temps de séjour dans l'ensemble $\{A\}$.

La détermination de la limite de confiance du nombre d'arrêts et du temps global d'arrêt conduit à partitionner :

- le vecteur des probabilités stationnaires

$$\Phi = [\Phi_F \quad | \quad \Phi_A]$$

- la matrice des taux de transition

$$\Lambda = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_{FF} & \Lambda_{FA} \\ \hline \Lambda_{AF} & \Lambda_{AA} \end{array} \right]$$

- la matrice des probabilités de la chaîne immergée

$$P = \left[\begin{array}{c|c} P_{FF} & P_{FA} \\ \hline P_{AF} & P_{AA} \end{array} \right]$$

I.1 Evaluation de la limite de confiance du taux d'arrêt

Soit $NA(t)$ la variable aléatoire qui représente le nombre d'arrêts dans l'intervalle $[0, t]$. La limite de confiance du nombre d'arrêts est la valeur $NA(\alpha, t)$ telle que la probabilité pour que le nombre d'arrêts soit inférieur à $NA(\alpha, t)$ est α .

La limite de confiance du taux d'arrêt est donnée par l'expression :

$$P_{UA}(\alpha, t) = NA(\alpha, t) / t$$

Le tableau de la figure 2.2 résume les expressions permettant l'accès à la limite de confiance du nombre d'arrêts. L'obtention de la valeur exacte utilise le résultat énoncé dans la proposition 8 du premier chapitre ; la valeur approchée utilise celui énoncé dans la proposition 9.

I.2 Evaluation de la limite de confiance de l'indisponibilité

Soit $TA(t)$ la variable aléatoire qui représente le temps global d'arrêt dans l'intervalle $[0, t]$ et $TA(\alpha, t)$ la limite de confiance correspondant à un niveau de confiance α .

La limite de confiance de l'indisponibilité est obtenue par l'égalité :

$$UA(\alpha, t) = TA(\alpha, t) / t$$

Le tableau de la figure 2.3 résume les expressions permettant l'accès à la limite de confiance du temps global d'arrêt. Les expressions de la valeur exacte et de la valeur approchée utilisent respectivement les résultats énoncés dans les propositions 11 et 13 du premier chapitre.

LIMITE DE CONFIANCE	EXPRESSIONS
<p>VALEUR EXACTE</p> <p>-</p> <p>OBTENTION DE LA FONCTION DE REPARTITION</p> <p>$M^A(n, t)$</p>	<p>$M^A(n, t)$ est obtenue à partir de la solution de l'équation différentielle</p> $dM^A(n, t)/dt = \Lambda_1 M^A(n-1, t) + \Lambda_0 M^A(n, t)$ <p>avec comme conditions initiales :</p> $M^A(n, 0) = \mathbb{1}, n=0, 1, \dots$ <p>où $M^A(n, t) = \{m_i^A(n, t)\}$</p> $m_i^A(n, t) = \text{Prob} \{NA(t) \leq n \mid z(0) = i\}$ $\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \textcircled{0} & \Lambda_{FA} \\ \text{---} & \text{---} \\ \textcircled{0} & \textcircled{0} \end{bmatrix}$ $\Lambda_0 = \begin{bmatrix} \Lambda_{FF} & \textcircled{0} \\ \text{---} & \text{---} \\ \Lambda_{FA} & \Lambda_{AA} \end{bmatrix}$
<p>VALEUR APPROCHÉE</p> <p>-</p> <p>APPROCHE ASYMPTOTIQUE</p>	$NA(\alpha, t) = t/m_A + y_\alpha \sigma_A \sqrt{\frac{t}{m_A^3}}$ <p>où $1/m_A = \Phi_F \Lambda_{FA} \cdot \mathbb{1}$</p> $\sigma_A^2 = -2m_A \Phi \begin{bmatrix} \Lambda_{FF} & \textcircled{0} \\ \text{---} & \text{---} \\ \Lambda_{AF} & \Lambda_{AA} \end{bmatrix}^{-1} \mathbb{1} - (m_A)^2$ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_\alpha} e^{-x^2/2} dx$

Figure 2.2. Expressions permettant l'accès à la limite de confiance du nombre d'arrêts.

LIMITE DE CONFIANCE	EXPRESSIONS
<p>VALEUR EXACTE</p> <p>-</p> <p>OBTENTION DE LA FONCTION DE REPARTITION</p> <p>$D_F^A(x, t)$</p>	$D_F^A(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_F^{FA}(n, t-x) \sum_{k=n}^{+\infty} V_F^{AF}(k, x)$ <p>où $D_F^A(x, t) = \{d_i^A(x, t) \mid Z(0)=i, i \in \{F\}\}$</p> $d_i^A(x, t) = \text{Prob} \{TA(t) \leq x \mid Z(0) = i\}$ <p>$V_F^{FA}(n, t)$ satisfait l'équation différentielle</p> $dV_F^{FA}(n, t)/dt = \Lambda_{FA} (-P_{AA})^{-1} P_{AF} V_F^{FA}(n-1, t) + \Lambda_{FF} V_F^{FA}(n, t)$ <p>avec comme conditions initiales</p> $V_F^{FA}(0, 0) = 1, V_F^{FA}(n, 0) = 0, n=1, 2, \dots$ <p>$V_F^{AF}(n, t)$ est obtenue à partir de l'expression</p> $V_F^{AF}(n, t) = -(P_{FF})^{-1} P_{FA} V_A^{AF}(n, t)$ <p>où $V_A^{AF}(n, t)$ satisfait l'équation différentielle</p> $dV_A^{AF}(n, t)/dt = \Lambda_{AF} (-P_{FF})^{-1} P_{FA} V_A^{AF}(n-1, t) + \Lambda_{AA} V_A^{AF}(n, t)$ <p>avec comme conditions initiales</p> $V_A^{FA}(0, 0) = 1, V_A^{AF}(n, 0) = 0, n=1, 2, \dots$
<p>VALEUR APPROCHEE</p> <p>-</p> <p>APPROCHE ASYMPTOTIQUE</p>	$TA(x, t) = \frac{m_A}{m_A + m_F} t + y_\alpha \sqrt{\frac{(m_A^2 \sigma_F^2 + m_F^2 \sigma_A^2) \cdot t}{(m_A + m_F)^3}}$ <p>où $1/m_F = [\Phi_F / \Phi_F \cdot 1] \Lambda_{FA} 1$</p> $1/m_A = [\Phi_A / \Phi_A \cdot 1] \Lambda_{AF} 1$ $\sigma_F^2 = 2 m_F [\Phi_F / \Phi_F \cdot 1] [-\Lambda_{FF}]^{-1} 1 - (m_F)^2$ $\sigma_A^2 = 2 m_A [\Phi_A / \Phi_A \cdot 1] [-\Lambda_{AA}]^{-1} 1 - (m_A)^2$ $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y_\alpha} e^{-x^2/2} dx$

Figure 2.3 Expressions permettant l'accès à la limite de confiance du temps de séjour.

II - EVALUATION DU TAUX D'ARRET ET DE L'INDISPONIBILITE

D'UNE STRUCTURE NON-REDONDANTE

Ce paragraphe est consacré à l'étude du taux d'arrêt et de l'indisponibilité d'une structure non-redondante en introduisant le niveau de confiance associé à l'estimation précédemment définie.

Nous considérons que cette structure ne peut prendre que deux états : l'état de fonctionnement et l'état d'arrêt ; la simplicité du modèle markovien qui en représente le comportement permet d'avoir accès facilement aux fonctions de répartition du nombre d'arrêts et du temps global d'arrêt.

Nous utilisons les résultats obtenus à partir de la fonction de répartition pour l'analyse de deux points importants, à savoir :

- le niveau de confiance qu'on peut accorder à une estimation basée sur la valeur moyenne,
- l'influence du temps d'opération sur l'erreur introduite par l'utilisation de l'approche asymptotique, cette approche n'étant théoriquement valable que pour un intervalle de temps d'opération infini.

II.1 Définition du modèle

La figure 2.4 donne le modèle retenu pour la structure non-redondante où :

- λ est le taux de défaillance de l'unité,
- μ est le taux de réparation de l'unité.

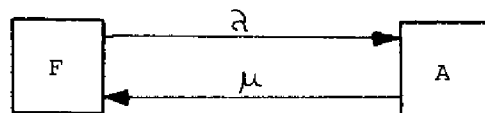


Figure 2.4 Modèle de comportement de la structure non-redondante.

Dans la suite de ce paragraphe, les temps d'opération seront normalisés par rapport au taux de défaillance λ .

II.2 Etude comparative entre la limite de confiance et la valeur moyenne

Nous étudions ici l'évaluation du taux d'arrêt et de l'indisponibilité de la structure non-redondante basée sur la limite de confiance ; dans cette étude, l'évaluation de la limite de confiance est effectuée à partir de la valeur exacte.

Nous effectuons parallèlement une étude comparative entre l'évaluation effectuée à partir de la valeur moyenne et celle effectuée à partir de la limite de confiance de manière à identifier les aspects nouveaux décelés par l'introduction du niveau de confiance.

Pour cette étude, nous considérons que :

- les valeurs du temps d'opération et du taux de réparation sont rapportées au taux de défaillance λ ,
- le facteur multiplicatif K traduit les variations du taux de défaillance de l'unité.

II.2.1 Evaluation du taux d'arrêt

Le tableau de la figure 2.5 donne la valeur moyenne et les limites de confiance du taux d'arrêt correspondant à des niveaux de confiance de 95% et 99%.

On peut constater à partir de ces résultats que :

- le rapport entre la limite de confiance et la valeur moyenne diminue avec la fréquence d'arrêt sur l'intervalle du temps d'opération,
- la variation du taux de défaillance ne provoque pas la même variation sur la valeur moyenne et sur la limite de confiance ; si l'on considère les valeurs du taux d'arrêt pour le temps d'opération normalisé

$\lambda \times t = 1$, on voit que l'augmentation d'un facteur de dix du taux de défaillance provoque une augmentation du même ordre de grandeur sur la valeur moyenne tandis que le facteur d'accroissement est de 4,7 à un niveau de confiance de 95% et de 3,2 à un niveau de confiance de 99%,

Taux d'arrêt

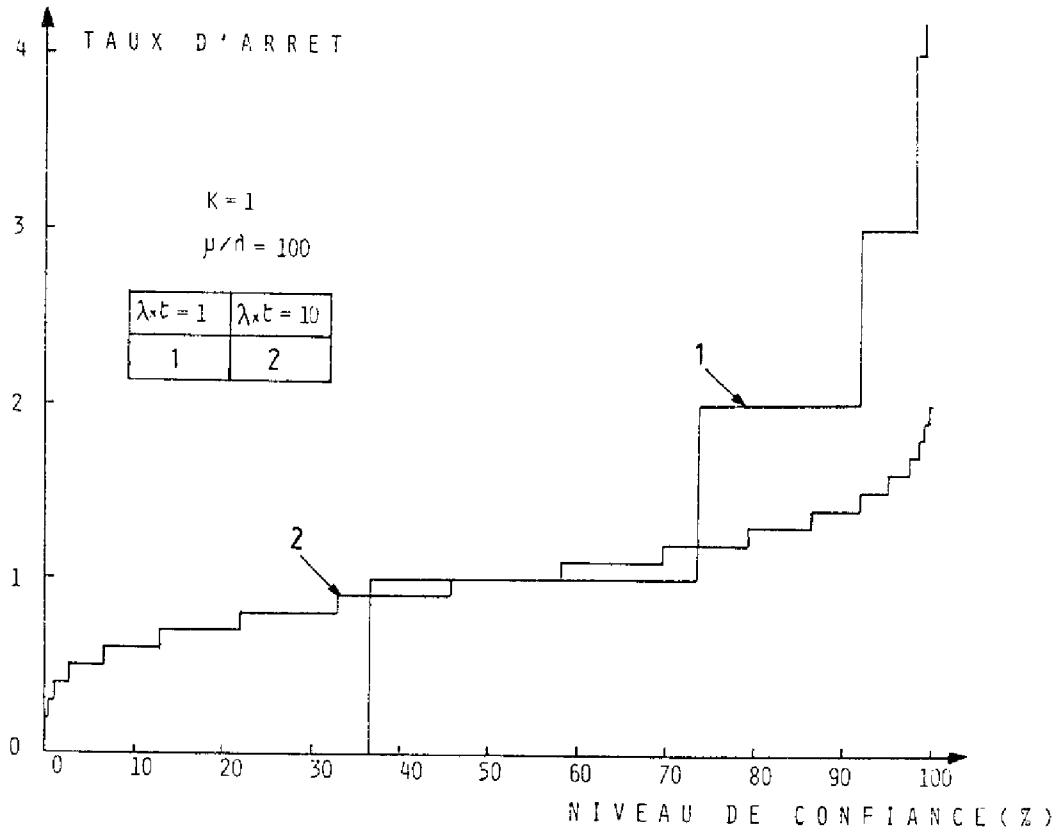
$\lambda \times t$	μ/λ	K	Valeur Moyenne	Niveau de Confiance 95 %	Niveau de Confiance 99 %
1	100	1	0.99	3.0	5.0
		10	9.09	14.0	16.0
	1000	1	0.999	3.0	5.0
		10	9.9	15.0	17.0
10	100	1	0.99	1.5	1.7
		10	9.09	11.0	12.0
	1000	1	0.999	1.5	1.7
		10	9.9	12.0	13.0

Figure 2.5 Valeur moyenne et limite de confiance du taux d'arrêt.

- l'influence de la variation du taux de réparation peut être considérée comme négligeable quand les temps de réparation sont petits devant le temps de défaillance ($\mu/K\lambda \gg 100$),
- l'influence du temps d'opération sur la valeur moyenne est négligeable ce qui n'est pas le cas pour la limite de confiance ; dans ce cas, les variations avec le temps d'opération sont accentuées quand la fréquence d'arrêt sur l'intervalle est faible.

Ces résultats mettent en évidence la sensibilité de la limite de confiance aux variations du niveau de confiance quand la fréquence de l'évènement à mesurer est faible dans l'intervalle de temps considéré.

Afin d'analyser ce dernier point, nous donnons sur la figure 2.6 la variation de la limite de confiance du taux d'arrêt en fonction du niveau de confiance.



*Figure 2.6 Limite de confiance du taux d'arrêt -
influence du niveau de confiance*

L'examen de ces courbes conduit à formuler plusieurs remarques :

- la probabilité pour qu'il n'y ait pas d'arrêt dans l'intervalle de temps $\lambda \times t = 1$ est égale à $e^{-1} = 36,8\%$; de ce fait, la limite de confiance du taux d'arrêt est nulle quand le niveau de confiance est inférieur à cette probabilité,
- la probabilité pour qu'il n'y ait pas d'arrêt dans l'intervalle de temps $\lambda \times t = 10$ est égale à $e^{-10} = 4,5 \times 10^{-5}$, ce qui explique que, dans ce cas, le taux d'arrêt est non nul pour des faibles valeurs du niveau de confiance,
- il y a une inversion dans le comportement de la limite de confiance du taux d'arrêt avec le niveau de confiance ; cette inversion s'explique par le fait que la limite de confiance du nombre d'arrêts augmente plus rapidement avec le niveau de confiance pour le temps d'opération $\lambda \times t = 1$ que pour le temps d'opération $\lambda \times t = 10$.

Afin de montrer l'impact des résultats précédents sur l'évaluation du nombre d'arrêts, nous prenons comme exemple une structure non redondante dont le temps moyen de fonctionnement est de 1000 heures et le temps moyen de réparation de 1 heure :

- si l'on considère un intervalle d'opération de 1000 heures, sur 95% des intervalles d'opération, le nombre d'arrêts est inférieur à 3,
- si l'on considère un intervalle d'opération de 10 000 heures, le nombre d'arrêts sera inférieur à 15 avec un niveau de confiance de 95%, ce qui correspond à 1,5 arrêt par intervalle de 1000 heures de fonctionnement,
- le nombre moyen d'arrêts sur un intervalle d'opération de 1000 heures est égal à 1.

II.2.2 Evaluation de l'indisponibilité

La valeur moyenne et les limites de confiance de l'indisponibilité pour des niveaux de confiance de 95% et 99% sont données dans le tableau de la figure 2.7.

Indisponibilité (10^{-3})

$\lambda \times t$	μ / λ	K	Valeur Moyenne	Niveau de Confiance 95 %	Niveau de Confiance 99 %
1	100	1	9.9	38.0	60.0
		10	90.9	154.0	181.0
	1000	1	0.999	3.8	6.0
		10	9.9	17.1	20.1
10	100	1	9.9	17.1	20.1
		10	90.9	111.0	119.0
	1000	1	0.999	1.7	2.0
		10	9.9	12.2	13.1

Figure 2.7 Valeur moyenne et limite de confiance de l'indisponibilité.

L'examen de ces résultats conduit à formuler plusieurs remarques :

- l'augmentation du taux de défaillance provoque des variations plus accentuées sur l'indisponibilité moyenne que sur la limite de confiance. Pour l'intervalle d'opération normalisé $\lambda \times t = 1$, l'augmentation du taux de défaillance d'un facteur de dix conduit à une augmentation du même ordre de grandeur de la valeur moyenne de l'indisponibilité ; pour des niveaux de confiance de 95% et de 99% les facteurs d'accroissement sont respectivement de 4,0 et de 3,0,
- l'influence du temps d'opération sur la valeur moyenne est négligeable ce qui n'est pas le cas pour les limites de confiance correspondant au niveau de confiance de 95% et 99%,
- les variations de la valeur moyenne de l'indisponibilité et des limites de confiance peuvent être considérées comme proportionnelles avec l'augmentation du taux de réparation,
- si le taux de défaillance et le taux de réparation varient dans les mêmes proportions, l'indisponibilité moyenne ne varie pas, mais par contre les limites de confiance sont différentes.

Il faut souligner que les résultats qui ont induit les deux premières remarques ont été également observés lors de l'évaluation du taux d'arrêt.

Nous avons également noté que, pour des taux de réparation très grands devant les taux de défaillance, l'influence sur la limite de confiance du taux d'arrêt était négligeable ; ce résultat explique la proportionnalité de la variation de l'indisponibilité avec la variation du taux de réparation.

Afin d'analyser plus en profondeur le dernier résultat, nous avons considéré la variation de la limite de confiance de l'indisponibilité en fonction du niveau de confiance à $\mu / K\lambda$ constant ; les courbes de la figure 2.8 donnent la limite de confiance pour les couples de valeurs de paramètres ($K=1, \mu / \lambda = 100$) et ($K=10, \mu / \lambda = 1000$).

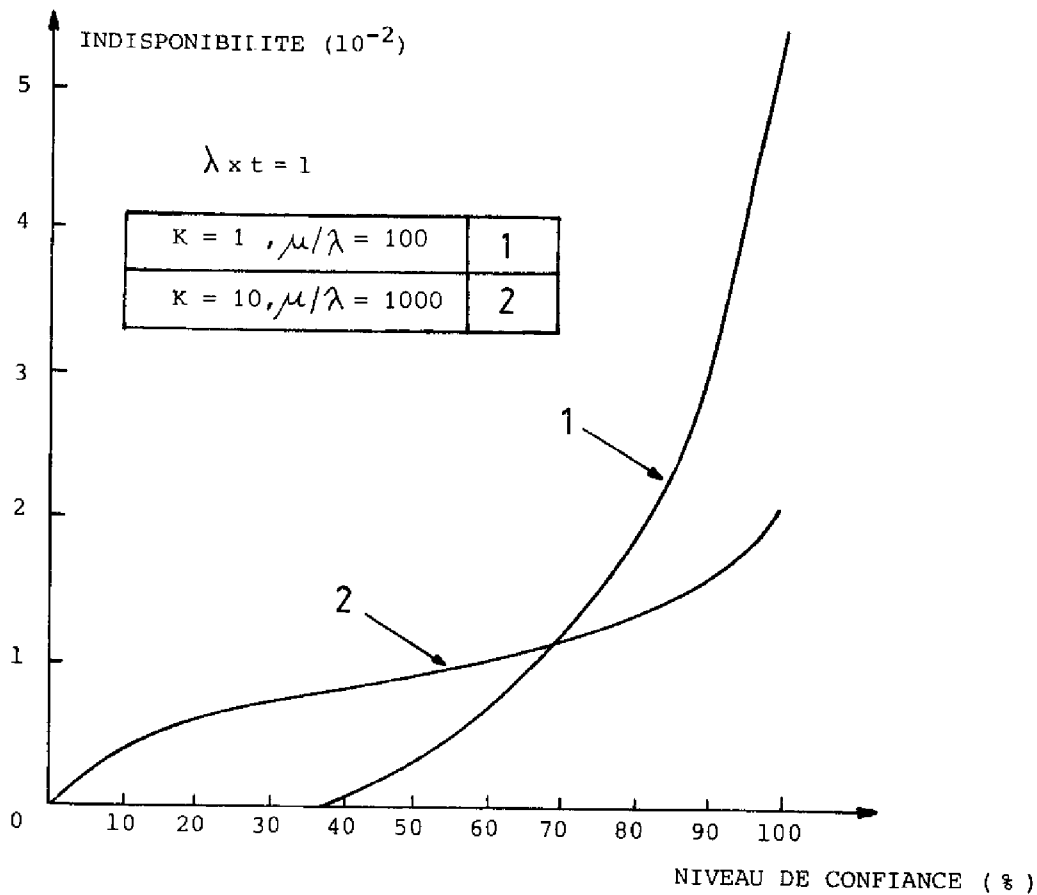


Figure 2.8 Limite de confiance de l'indisponibilité - influence du niveau de confiance.

Ces courbes montrent que l'indisponibilité est différente pour les deux couples, ce que n'indiquerait pas une analyse basée uniquement sur la valeur moyenne. Cette différence s'explique par les deux points suivants :

- la variation du taux de défaillance provoque des variations sur les limites de confiance de l'indisponibilité moins accentuées lorsqu'il y a augmentation du niveau de confiance,
- la variation du taux de réparation provoque des variations proportionnelles sur la limite de confiance de l'indisponibilité, indépendamment du niveau de confiance.

On peut donc dire qu'il y a un seuil pour le niveau de confiance à partir duquel la limite de confiance de l'indisponibilité est plus sensible à l'augmentation du taux de réparation qu'à l'augmentation du taux de défaillance, ce qui conduit à une plus faible indisponibilité.

En conclusion de l'évaluation de l'indisponibilité, on peut dire que la prise en compte du niveau de confiance, lors de l'analyse de sensibilité de la limite de confiance aux paramètres du modèle, conduit à des variations non seulement en valeurs absolues mais également en valeurs relatives.

Afin de montrer l'influence de la prise en compte du niveau de confiance, prenons comme exemple l'évaluation du temps global d'arrêt sur un intervalle d'opération de 100 heures d'une structure non redondante dont le temps moyen de fonctionnement est de 1000 heures et le temps moyen de réparation est de 1 heure.

L'évaluation effectuée à partir de la valeur moyenne donne un temps global d'arrêt égal à 6 minutes.

En réalité il y a deux possibilités :

- le système fonctionne pendant l'intervalle considéré et de ce fait, l'indisponibilité est nulle,
- le système tombe en panne dans l'intervalle d'opération.

La probabilité pour que le premier événement se produise est, pour l'exemple considéré, donnée par $e^{-0,1}$ soit 90,5%.

De ce fait, la limite de confiance de l'indisponibilité est nulle avec un niveau de confiance de 90,5%.

Si l'on considère la détermination du niveau de confiance correspondant à 6 minutes, nous obtenons 91,4% qui n'est pas très différent du résultat précédent ; par contre, pour des niveaux de confiance de 95% et 99%, les limites de confiance sont respectivement de 0,7 et 2,5 heures, ce qui représente des résultats beaucoup moins optimistes que la valeur moyenne.

II.2.3 Représentativité de l'estimation basée sur la valeur moyenne

Les résultats précédents ont montré une grande sensibilité de la valeur de la limite de confiance du taux d'arrêt et de l'indisponibilité au niveau de confiance, l'introduction du niveau de confiance pouvant conduire à des valeurs qui sont plusieurs fois supérieures à la valeur moyenne.

Cette différence entre la valeur moyenne et la limite de confiance découle du fait que les variables aléatoires considérées sont très dispersées, ce qui est le cas quand nous considérons le temps de défaillance et le temps de réparation comme exponentiellement distribués.

Si cette hypothèse est confirmée par l'expérience pour les temps de défaillance des systèmes digitaux, elle ne constitue qu'une approximation grossière pour le temps de réparation.

Afin d'analyser les points soulevés précédemment, considérons une structure non-redondante, pour laquelle la moyenne et l'écart-type du temps de défaillance et du temps de réparation sont respectivement m_F, σ_F et m_A, σ_A .

Le taux d'arrêt

A partir des résultats donnés dans le premier chapitre, la moyenne et l'écart-type du taux d'arrêt pour la structure non-redondante en régime stationnaire sont donnés par les expressions :

$$\frac{1}{m_A + m_F} \quad , \quad \sqrt{\frac{\sigma_A^2 + \sigma_F^2}{(m_A + m_F)^3 \cdot t}}$$

Si l'on considère que :

- la variable aléatoire qui représente le temps de réparation est très peu dispersée, $\sigma_A \sim 0$
- le temps de réparation est petit devant le temps de défaillance,

les expressions précédentes deviennent :

$$\frac{1}{m_F} \quad , \quad \sqrt{\frac{\sigma_F^2}{m_F^3 \cdot t}}$$

Le temps de défaillance étant exponentiellement distribué, nous avons $m_F = \sigma_F^2$, d'où l'écart-type est donné par l'expression :

$$\sqrt{\frac{1 / m_F}{t}}$$

Pour que l'écart-type soit dix fois inférieur à la valeur moyenne, afin de rendre plus représentative l'évaluation basée sur la valeur moyenne, le temps d'opération doit être égal à 100 fois le temps moyen de fonctionnement.

L'indisponibilité

La valeur moyenne et l'écart-type de l'indisponibilité pour la structure non-redondante en régime stationnaire sont donnés par les expressions :

$$\frac{m_A}{m_A + m_F} \quad , \quad \sqrt{\frac{m_A^2 \sigma_F^2 + m_F^2 \sigma_A^2}{(m_A + m_F)^3 \cdot t}}$$

Si l'on fait les mêmes considérations que pour le taux d'arrêt, ces expressions deviennent :

$$\frac{m_A}{m_F} \quad , \quad m_A \cdot \sigma_F \sqrt{\frac{1}{m_F^3 \cdot t}}$$

ce qui conduit aux remarques suivantes :

- la moyenne et l'écart-type de l'indisponibilité peuvent être déduits de la valeur moyenne et de l'écart-type du taux d'arrêt en les multipliant par le temps moyen de réparation,
- le rapport entre l'écart-type et la valeur moyenne de l'indisponibilité dépend exclusivement de la valeur moyenne et de l'écart-type du temps de défaillance ; de ce fait, de même que pour le taux d'arrêt, il faut que le temps d'opération soit égal à 100 fois le temps moyen de fonctionnement, pour rendre ce rapport égal à 0,1.

Appuyées sur l'analyse précédente, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

- la non-représentativité de la valeur moyenne dans l'évaluation du taux d'arrêt et de l'indisponibilité, quand le temps de défaillance est exponentiellement distribué,
- l'importance de la prise en compte du niveau de confiance dans l'évaluation des variables aléatoires fortement dispersées.

La complexité des expressions permettant l'accès à la valeur exacte de la limite de confiance, lui ôte cependant une grande partie de sa portée sur le plan pratique, ce qui conduit à envisager l'utilisation de l'approche asymptotique. Il faut cependant, pour pouvoir appliquer cette approche, faire auparavant une analyse de l'erreur introduite par l'utilisation d'une telle méthode.

II.3 Influence du temps d'opération sur l'erreur introduite par l'approche asymptotique

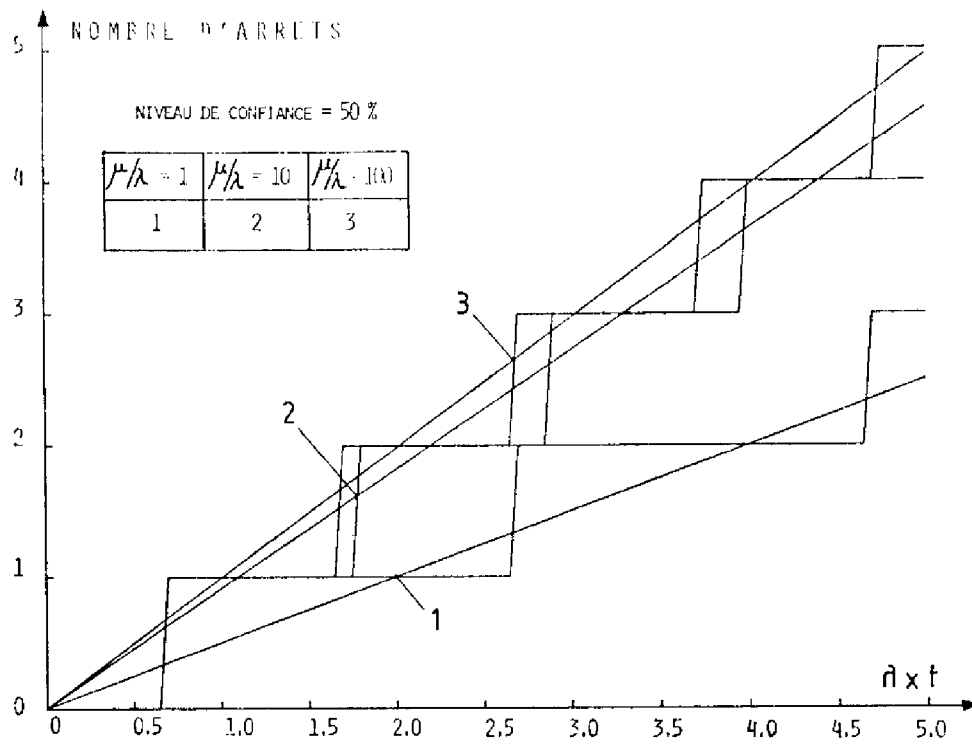
II.3.1 Analyse de l'erreur introduite dans l'évaluation de la limite de confiance du taux d'arrêt

Les figures 2.9 (a) et (b) visualisent l'évolution dans le temps de la limite de confiance du nombre d'arrêts :

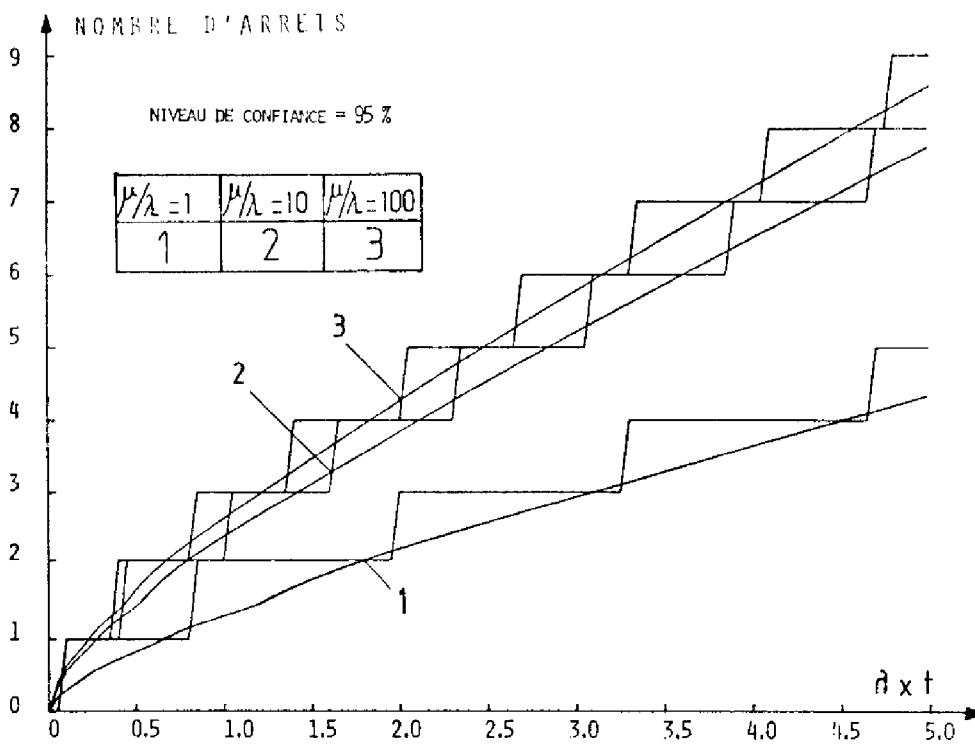
- la courbe en escalier est obtenue à partir de la fonction de répartition,
- la courbe en tracé continu est obtenue à partir de l'approche asymptotique.

L'examen de ces courbes conduit aux remarques suivantes :

- l'erreur induite par l'utilisation de l'approche asymptotique reste inférieure à 1 pour toutes les valeurs du temps d'opération,
- si l'on prend comme estimation de la limite de confiance du nombre d'arrêts le plus petit nombre entier immédiatement supérieur à la valeur obtenue par l'approche asymptotique, on obtient une estimation par excès, en ce sens qu'elle est toujours supérieure d'une unité, ou égale, à la valeur exacte.



(a)



(b)

Figures 2.9 Limites de confiance du nombre d'arrêts.

La détermination de l'erreur introduite par l'utilisation de l'approche asymptotique dans l'évaluation du taux d'arrêt peut être effectuée à partir des courbes des figures 2.10 (a) et (b) qui donnent les limites de confiance du taux d'arrêt correspondant respectivement à des niveaux de confiance de 50% et 95%. On peut constater en effet, à partir de ces courbes, la convergence dans le temps vers la valeur asymptotique.

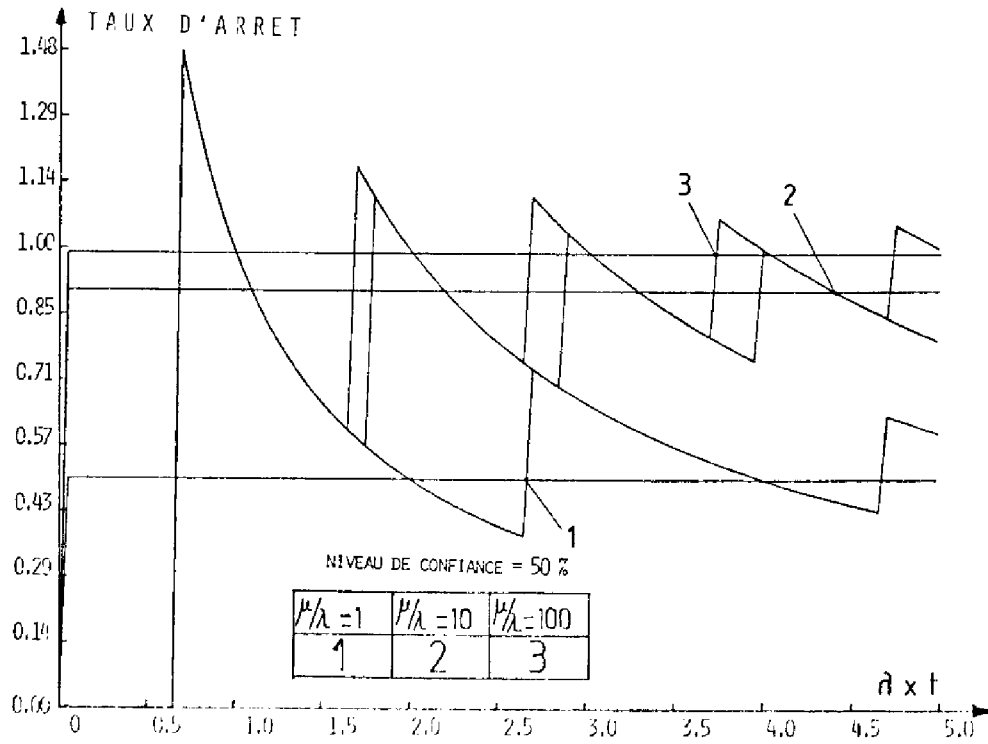
II.3.2 Analyse de l'erreur introduite dans l'évaluation de la limite de confiance de l'indisponibilité

Nous allons considérer tout d'abord l'étude de l'influence du temps d'opération sur l'erreur introduite par l'utilisation de l'approche asymptotique dans l'évaluation de la limite de confiance du temps global d'arrêt.

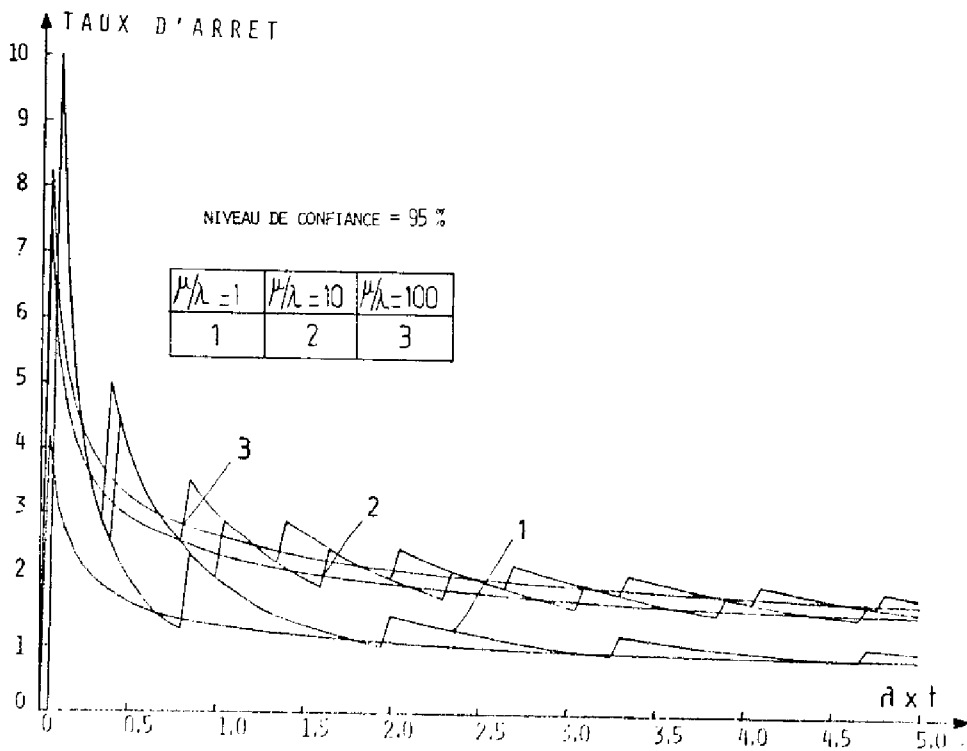
Une première estimation de l'erreur absolue peut être effectuée à partir des résultats obtenus dans le paragraphe précédent concernant l'erreur introduite dans l'évaluation du nombre d'arrêts. En effet, le temps global d'arrêt à l'instant t est égal au nombre d'arrêts survenus dans l'intervalle de temps, multiplié par la durée de chaque arrêt.

L'erreur introduite dans l'évaluation du nombre d'arrêts à partir de l'approche asymptotique est, comme nous l'avons constaté, inférieure ou égale à 1 ; on peut en déduire que l'erreur absolue introduite par une évaluation du temps global d'arrêt par l'approche asymptotique doit être de l'ordre du temps moyen d'un arrêt, soit $1/\mu$.

Remarque En toute rigueur, le temps global d'arrêt est égal au nombre de renouvellements dans le processus aléatoire $\{x_n^F\}$ à l'instant $(t-x)$ multiplié par le temps entre renouvellements dans le processus aléatoire $\{x_n^A\}$ défini dans l'intervalle de temps x . Quand $x \ll t$, et quand les temps d'arrêt sont petits devant les temps de fonctionnement, on peut considérer comme identiques les nombres de renouvellements dans le processus $\{x_n^F\}$ et dans le processus à temps fini de renouvellement qui représente le comportement d'une structure non-redondante.



(a)



(b)

Figures 2.10 Limites de confiance du taux d'arrêt

Le tableau de la figure 2.11 donne la valeur exacte et la valeur approchée du temps global d'arrêt, obtenues respectivement à partir de la fonction de répartition et de l'approche asymptotique.

L'examen de ce tableau conduit aux trois remarques suivantes :

- la valeur moyenne de l'indisponibilité n'est pas la limite de confiance pour un niveau de confiance de 50%, comme le prédit l'approche asymptotique ; dans ce cas, l'adoption de la valeur moyenne comme limite de confiance constitue une estimation par excès, en ce sens qu'elle est supérieure à la valeur exacte de la limite de confiance. Le niveau de confiance d'une estimation basée sur la valeur moyenne pour les exemples étudiés est de l'ordre de 63%,
- pour un niveau de confiance de 95%, l'évaluation de la limite de confiance d'après l'approche asymptotique constitue une évaluation par défaut,
- l'erreur absolue entre la valeur exacte et la valeur approchée est inférieure à $1/\mu$.

Les courbes de la figure 2.12 visualisent l'erreur introduite dans l'évaluation de la limite de confiance de l'indisponibilité en fonction du niveau de confiance.

II. 3. 3 Conclusion

Les résultats précédents permettent de constater que lors de l'évaluation des limites de confiance du taux d'arrêt et de l'indisponibilité, l'erreur introduite par l'utilisation de l'approche asymptotique est plus sensible aux variations du niveau de confiance qu'aux variations du temps d'opération.

μ/λ	$\lambda \times t$	NIVEAU DE CONFIANCE	
		50 %	95 %
10	1	3.5	32.2
		9.09	29
		-159.71 %	9.94 %
	5	41	96
		45.5	90
		-10.98 %	6.25 %
	10	87	160
		90.9	155
		-4.48 %	3.13 %
100	1	0.4	3.8
		1.0	3.4
		-150 %	10.53 %
	5	4.5	10.65
		4.95	10
		-10 %	6.1 %
	10	9.5	18
		9.95	17
		-4.74 %	5.56 %

TEMPS GLOBAL D'ARRET

VALEUR EXACTE (10^{-2})
VALEUR APPROCHEE (10^{-2})
ERREUR RELATIVE

Figure 2.11 Comparaison entre la valeur exacte et la valeur approchée de la limite de confiance de l'indisponibilité.

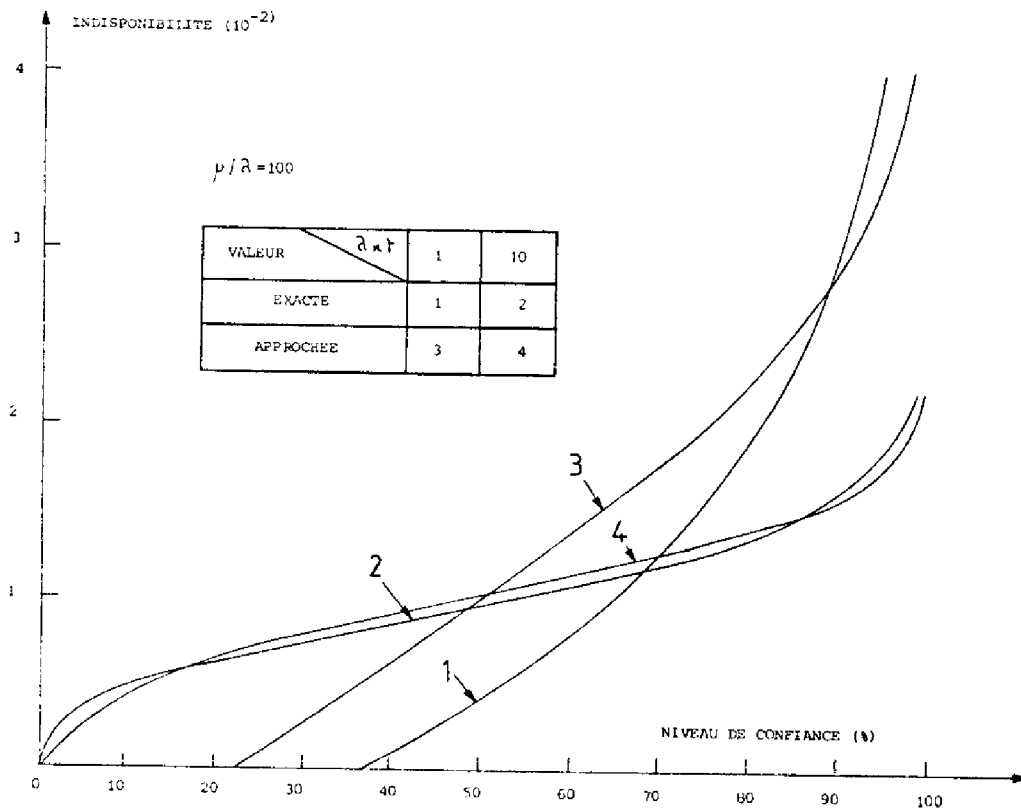


Figure 2.12 Comparaison entre la valeur exacte et la valeur approchée de la limite de confiance de l'indisponibilité - influence du niveau de confiance.

III - EVALUATION DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITE
DES STRUCTURES REDONDANTES

Les résultats du paragraphe précédent ont mis en évidence la non-représentativité de la valeur moyenne pour l'évaluation du taux d'arrêt et de l'indisponibilité quand le temps de défaillance est exponentiellement distribué.

L'adjonction de la redondance a pour conséquence que l'évènement "arrêt" devient plus rare, ce qui rend encore moins appropriée l'évaluation du taux d'arrêt et de l'indisponibilité par la valeur moyenne ; le temps d'opération nécessaire à la diminution de la dispersion autour de la valeur moyenne est alors dépourvu de tout sens pratique.

Nous conduirons cette étude :

- en effectuant une comparaison entre l'évaluation basée sur la valeur moyenne et celle basée sur la limite de confiance, afin de pouvoir comparer les résultats obtenus,
- en utilisant l'approche asymptotique pour l'évaluation de la limite de confiance.

Les structures redondantes considérées ont un niveau de redondance égal à l'unité, en ce sens qu'elles peuvent tolérer la défaillance d'une unité.

III.1 Définition des structures redondantes

Nous considérons, dans cette étude, deux types de structures redondantes :

- Structure redondante à réplication totale, où l'ensemble des unités effectuent les mêmes opérations ; c'est le cas :
 - .de la structure redondante sélective active, qui est constituée de deux unités, l'unité passive n'intervenant qu'en cas de défaillance de l'unité opérationnelle,
 - .de la structure redondante massive, qui est constituée de trois unités, l'information de sortie délivrée étant le résultat du vote majoritaire effectué sur les trois unités,
- Structure redondante à réplication partielle, où l'ensemble des unités coopèrent à l'exécution de l'opération ; c'est le cas de la structure à N unités, l'unité en attente n'intervenant qu'en cas de défaillance d'une quelconque des N unités opérationnelles.

La mise en oeuvre des structures considérées entraîne l'adjonction des mécanismes supplémentaires nécessaires au recouvrement des fautes, qui sont :

- les mécanismes de détection, diagnostic et reconfiguration, dans le cas des structures redondantes sélective active et à N-unités,

- le vote majoritaire dans le cas de la redondance massive, pour laquelle nous supposons que des mécanismes de détection et diagnostic sont ajoutés dans le but de faciliter la maintenance.

Pour les études d'évaluation, il est donc nécessaire de prendre en compte les conséquences de l'adjonction de ces mécanismes sur le fonctionnement global de la structure :

- dans les modèles proposés, le paramètre K permet de tenir compte de l'augmentation du taux de défaillance des unités considérées par rapport au taux de défaillance d'une unité non dotée de ces mécanismes,
- l'aptitude du système à recouvrir, de manière automatique, les fautes et à poursuivre le traitement est pris en compte par le facteur de couverture [BOU,69]

$$CAUT = \text{Prob} \left\{ \begin{array}{l} \text{le traitement se poursuit sans perte essentielle} \\ \text{d'information / une faute s'est manifestée} \end{array} \right\}$$

- la fraction de pannes non recouvertes automatiquement, mais qui peuvent être recouvertes manuellement par l'intervention de l'opérateur sans réparation, est prise en compte par le facteur CMAN défini comme suit :

$$CMAN = \text{Prob} \left\{ \begin{array}{l} \text{le traitement peut être repris sans perte essentielle} \\ \text{d'information après intervention manuelle sans répa-} \\ \text{ration / une faute s'est manifestée} \end{array} \right\}$$

Remarque La distribution des tâches dans une structure à N-unités limite l'efficacité de la reconfiguration manuelle ; de ce fait, elle n'est pas prise en compte lors de la définition du modèle markovien correspondant à cette structure.

III.2 Définition des modèles

Deux types de politique de maintenance seront envisagés :

- politique de maintenance immédiate : l'équipe de maintenance doit se rendre sur le site sans retard, à la suite d'une panne sur l'une des unités,

- politique de maintenance différée : le déplacement de l'équipe de maintenance peut être différé dans le temps à la suite d'une panne tolérée, la ou les unité(s) en attente assurant le fonctionnement du système.

La politique de maintenance immédiate est généralement adoptée dans les systèmes destinés à des applications critiques exigeant une haute disponibilité ; les structures redondantes envisagées sont, dans ce cas, la structure redondante sélective active et la structure redondante massive.

Dans les applications où les contraintes de disponibilité sont moindres, on adopte généralement la structure à N-unités ; dans ce cas, l'adjonction d'une unité en attente :

- représente un coût matériel plus faible, la proportion de matériel supplémentaire étant de $1/N$,
- permet l'adoption de la politique de maintenance différée, qui entraîne l'amélioration des caractéristiques de sûreté de fonctionnement par rapport à celles d'un système non-redondant, tout en diminuant le coût associé à la maintenance.

Le tableau de la figure 2.13 donne, pour les structures redondantes envisagées, la politique de maintenance retenue.

STRUCTURE	APPLICATIONS	POLITIQUE DE MAINTENANCE
<ul style="list-style-type: none">- redondante sélective active- redondante massive	Haute disponibilité	Immédiate
<ul style="list-style-type: none">- à N-unités	Systèmes commerciaux	Différée

Figure 2.13 Politique de maintenance retenue pour les structures redondantes envisagées.

III.2.1 Modèle des structures redondantes sélective active et massive

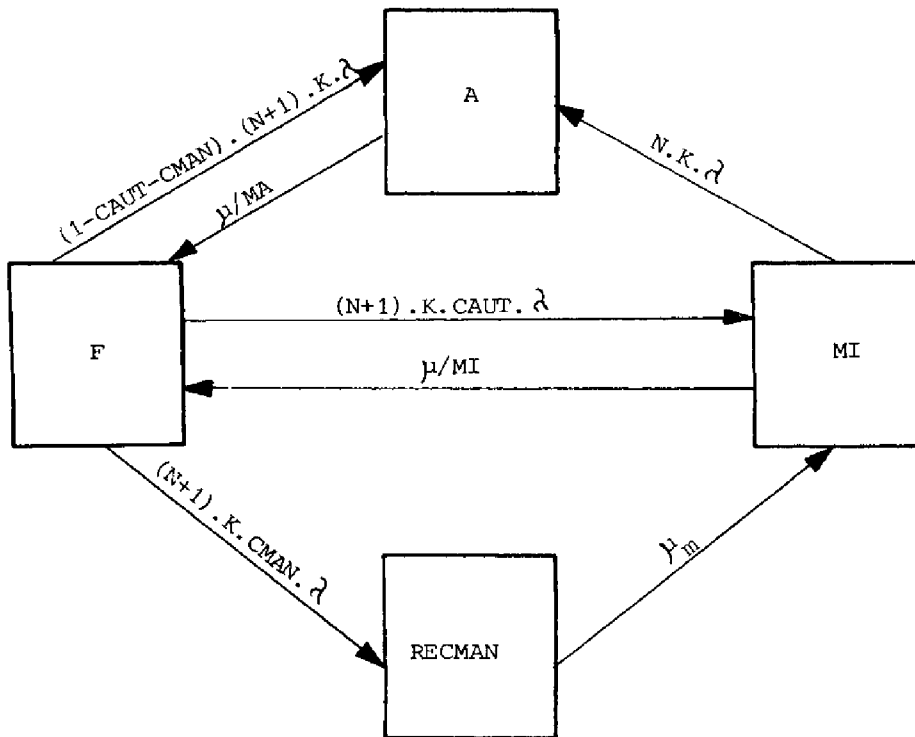
Le comportement des structures redondantes sélective active et massive est représenté par le modèle markovien donné par la figure 2.14 où les états ont les significations suivantes :

- état F : les N+1 unités fonctionnement
- état MI : appel à la maintenance immédiate à la suite d'une panne couverte automatiquement par le système
- état RECMAN : arrêt du système à la suite d'une panne pouvant être couverte manuellement ; l'opérateur peut remettre le système en marche sans avoir à réparer l'unité défaillante
- état A : arrêt du système suite à une panne non couverte, ou à une deuxième unité en panne

Le modèle proposé tient compte des possibilités de taux de réparation différents après panne, taux qui sont rapportés au taux de réparation, μ , d'une unité non-redondante.

Nous allons expliciter les raisons qui nous ont amené à prendre en compte ces possibilités de taux de réparation différents :

- le paramètre MI prend en compte l'efficacité des mécanismes de détection et de diagnostic pour l'aide à la maintenance,
- le paramètre MA prend en compte l'efficacité des mécanismes d'aide à la maintenance lors de l'arrêt du système ; il faut noter que l'ensemble des capacités du système est paralysé et ne peut, de ce fait, être utilisé pour l'aide à la maintenance, ce qui peut conduire à des temps de réparation assez longs.



STRUCTURE	N
Redondante sélective active	1
Redondante massive	2

λ = taux de défaillance de l'unité

μ = taux de réparation

μ_m = taux de remise en marche lors d'une reconfiguration manuelle

Figure 2.14 Modèle de comportement des structures redondantes sélective active et massive.

III.2.2 Modèle de la structure à N-unités

Le comportement de la structure à N-unités est représenté par le modèle markovien donné par la figure 2.15 ; les définitions des états sont les suivantes :

état F : les N+1 unités fonctionnent

état DEL : délai introduit avant l'intervention de l'équipe de maintenance à la suite d'une panne couverte automatiquement ; nous considérons que ce délai est distribué exponentiellement avec un taux δ .

état MDIF : réparation de l'unité en panne

état A : arrêt du système

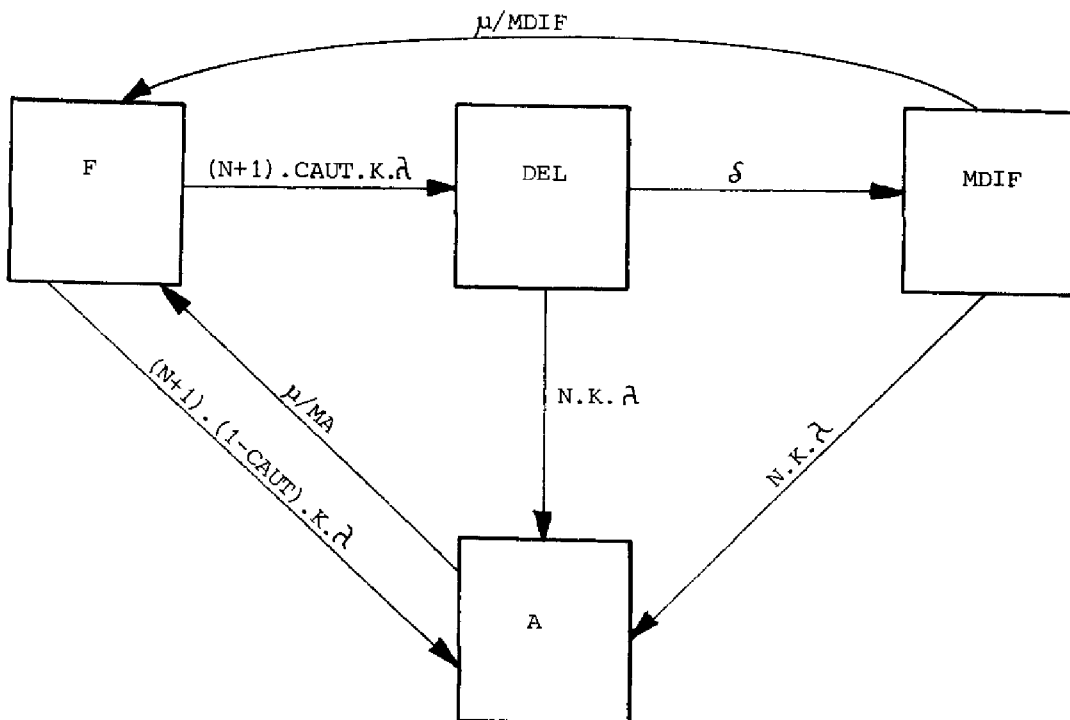


Figure 2.15 Modèle de comportement de la structure à N-unités

III.3 Evaluation des taux d'arrêt

La limite de confiance du taux d'arrêt est donnée pour les diverses structures considérées sur les figures 2.16, 2.17 et 2.18.

Les commentaires relatifs aux résultats obtenus sont divisés en deux parties selon qu'ils portent :

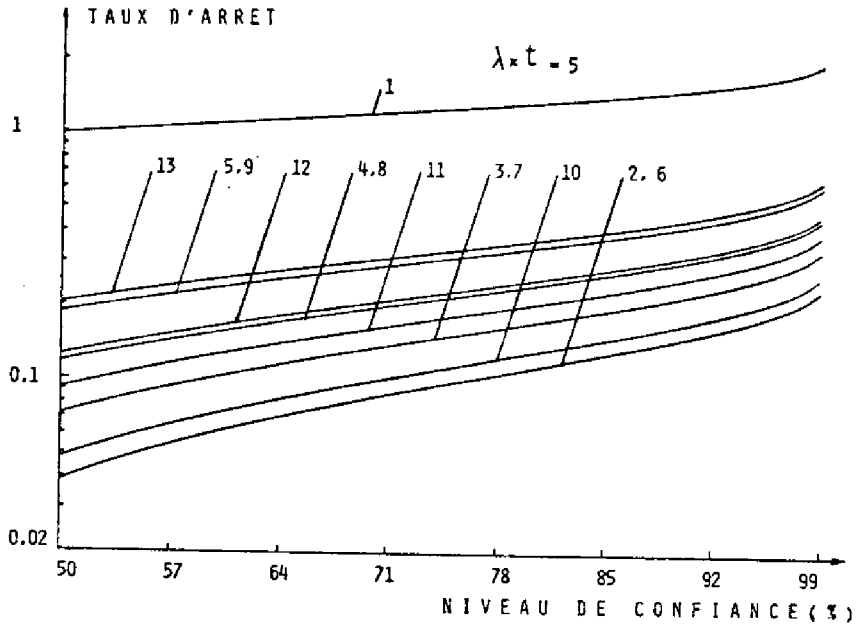
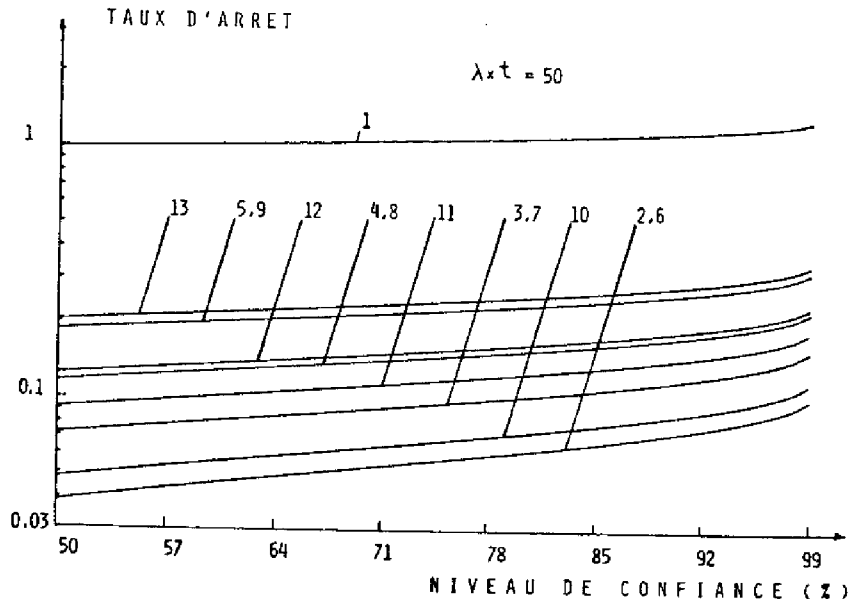
- sur la comparaison entre les méthodes d'évaluation,
- sur l'influence des paramètres liés aux structures considérées.

III.3.1 Commentaires relatifs aux méthodes d'évaluation

Les courbes obtenues permettent de visualiser les différences entre les méthodes d'évaluation en fonction de la variation du niveau de confiance ; on peut en particulier constater que :

- une variation donnée des paramètres du modèle n'induit pas une variation identique sur la valeur moyenne et sur la limite de confiance ; ceci est traduit, dans l'échelle logarithmique, par des courbes non parallèles,
- l'étude comparative entre deux structures est très sensible au niveau de confiance quand leurs performances, du point de vue de la sûreté de fonctionnement, sont différentes.

Afin d'argumenter ce dernier point, considérons l'amélioration du taux d'arrêt obtenue par l'adjonction de la redondance ; nous prendrons comme indice de mérite le facteur d'amélioration défini comme le rapport entre le taux d'arrêt de la structure non-redondante et celui de la structure redondante.



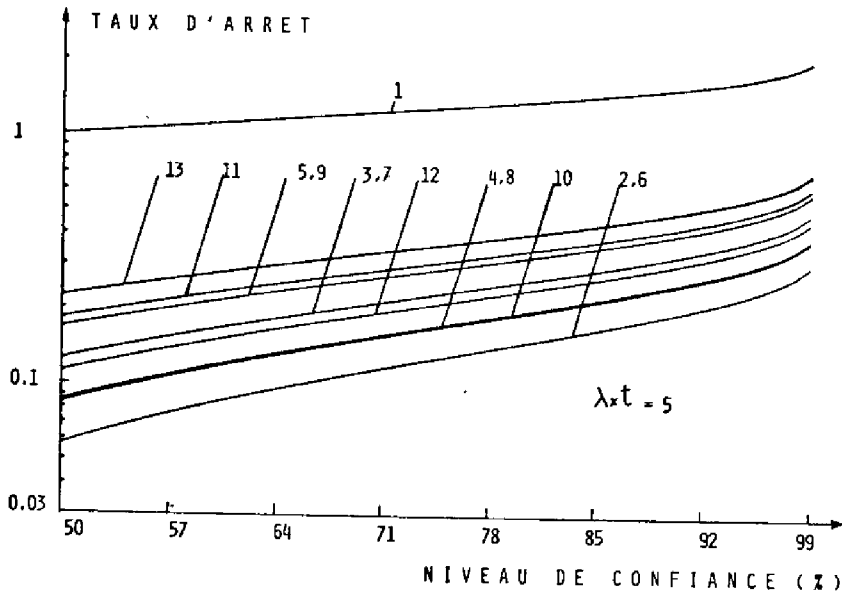
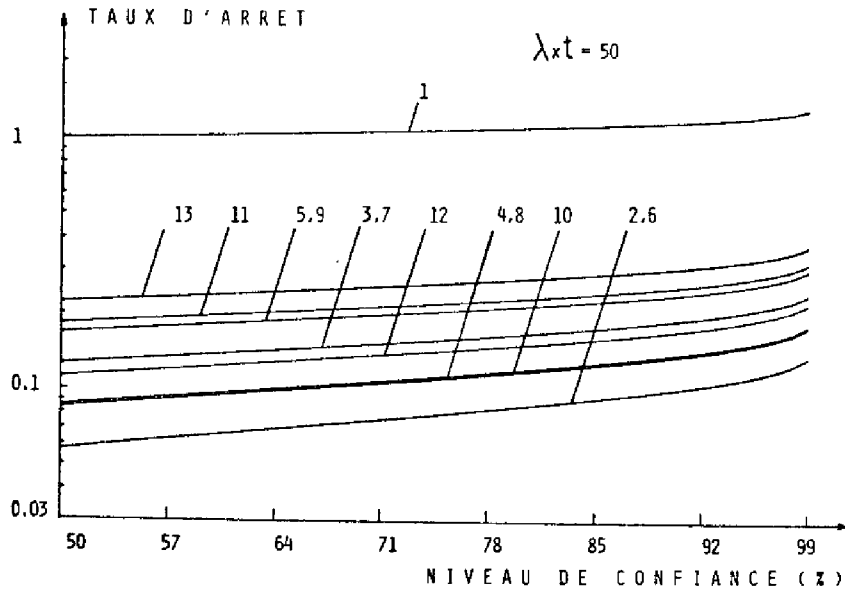
Structure non-redondante : 1

Structure redondante sélective active :

CAUT		.99		.95	
		MI	K	MI	K
1	1	2	3	4	5
	1.5	10	11	12	13
2	1	6	7	8	9
	1.5	10	11	12	13

$N=1$, $\mu/\lambda = 100$, $CMAN=0$

Figure 2.16 Limite de confiance du taux d'arrêt de la structure redondante sélective active



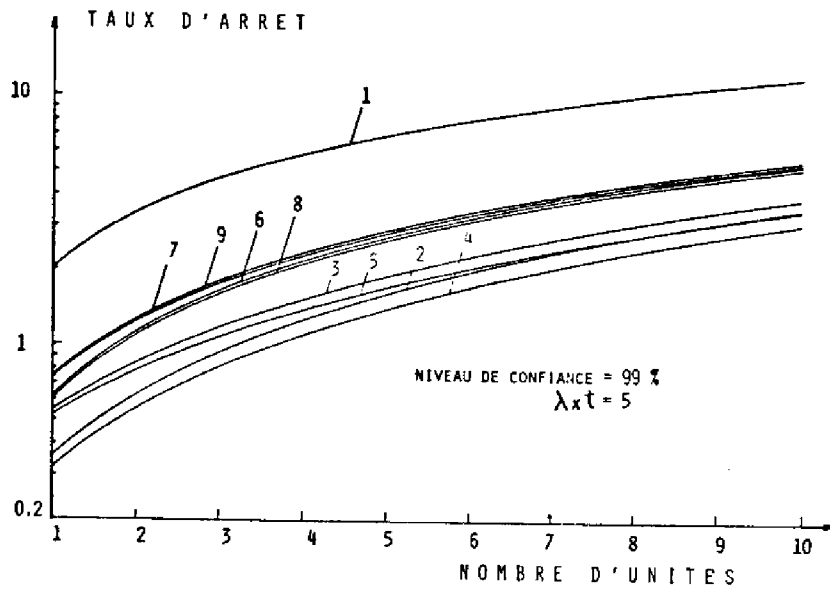
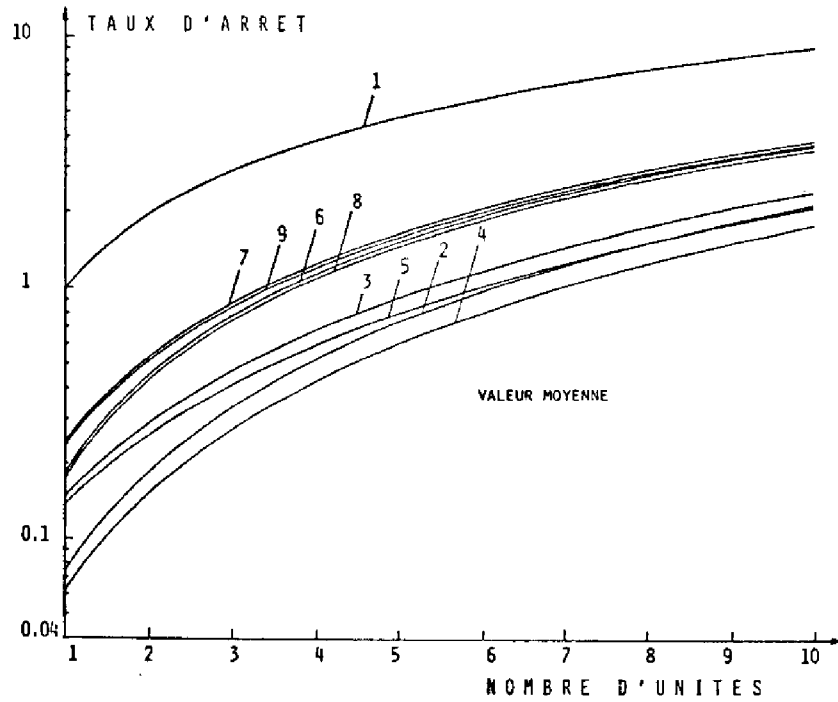
Structure non-redondante : 1

Structure redondante massive :

		CAUT		.99		
		MI	K	1	1.5	
MA	1	1	2	3	4	5
	2	1	6	7	8	9
		1.5	10	11	12	13

$N=2$, $\mu/\lambda = 100$, $CMAN=0$

Figure 2.17 Limite de confiance du taux d'arrêt de la structure redondante massive



Structure non-redondante : 1

Structure à N unités :

CAUT	.99		.95	
δ/λ MODIF	1	.3	1	.3
50	2	4	3	5
10	6	8	7	9

$\mu/\lambda = 100$, $K=1$, $MA=1$

Figure 2.18 Limite de confiance du taux d'arrêt de la structure à N-unités

Le tableau de la figure 2.19 donne le facteur d'amélioration pour les diverses structures ; il faut noter que les valeurs des paramètres sont :

- pour les structures redondantes, ceux correspondant à la courbe 2 des figures 2.16, 2.17 et 2.18,
- pour la structure non-redondante, ceux correspondant à la courbe 1 des figures 2.16, 2.17 et 2.18.

FACTEUR D'AMELIORATION	Moyenne	Niveau de confiance 99 %	
		$\lambda \times t = 50$	$\lambda \times t = 5$
Redondante sélective active	25,4	12,6	8,3
Redondante massive	17,4	9,6	6,6
Redondante à N-unités (N=10)	4,3	-	3,4

Figure 2.19 Influence du niveau de confiance sur le facteur d'amélioration

III.3.2 Commentaires relatifs aux structures

Les commentaires relatifs aux structures sont réunis dans le tableau de la figure 2.20 ; il faut cependant noter que :

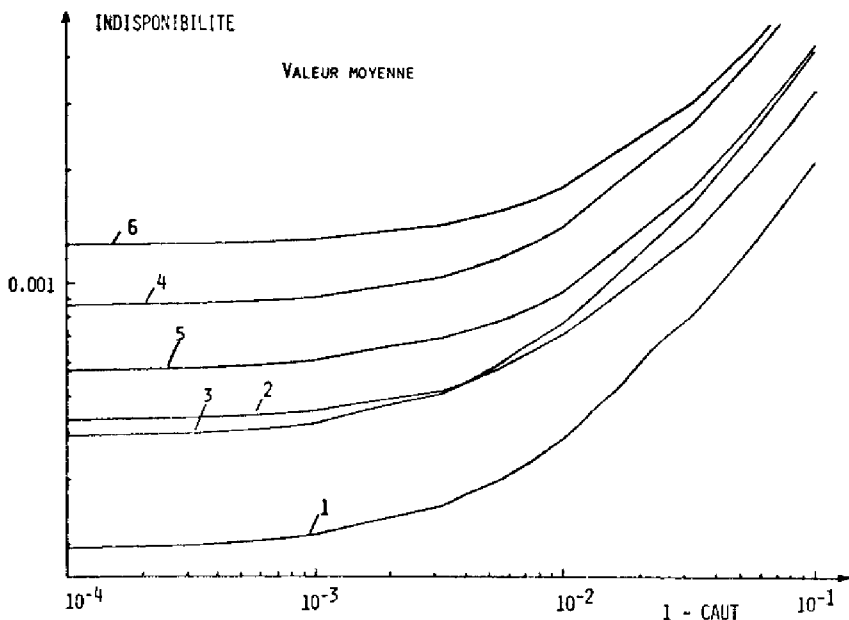
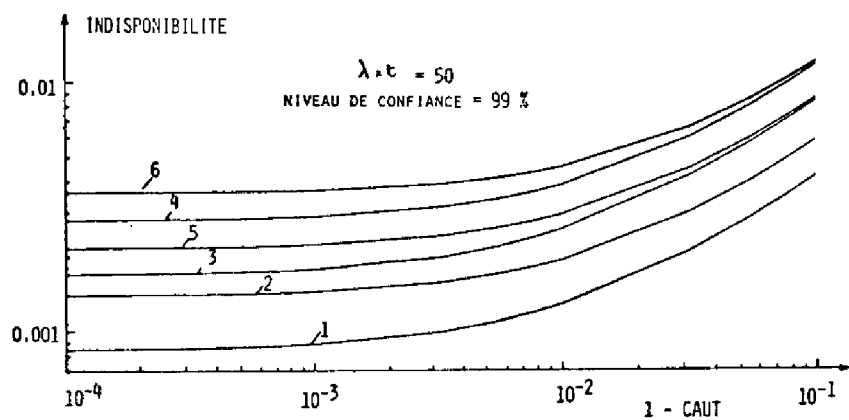
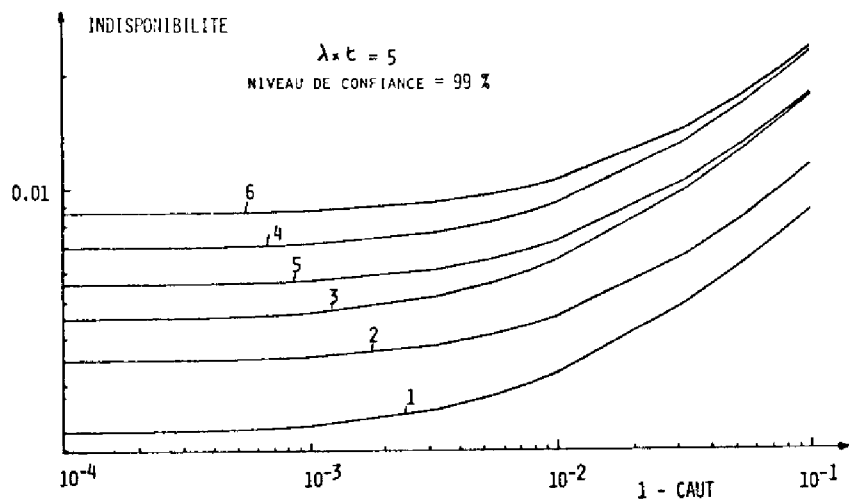
- nous avons considéré que la technique de redondance massive permet l'obtention d'un meilleur facteur de couverture, CAUT (1,.99),
- dans l'évaluation correspondant à la structure sélective active, nous n'avons pas considéré la possibilité de reconfiguration manuelle (CMAN=0), du fait que son influence sur le taux d'arrêt est négligeable.

STRUCTURE	COMMENTAIRES
Redondante Sélective Active (Figure 2.16)	<ul style="list-style-type: none"> - Influence non négligeable du temps d'opération dans l'évaluation de la limite de confiance - Les paramètres dominants sont le facteur de couverture et le paramètre K - Influence négligeable du paramètre MA
Redondante Massive (Figure 2.17)	<ul style="list-style-type: none"> - Influence non négligeable du temps d'opération - La dominance du paramètre K, et en conséquence, l'accroissement de la sensibilité au paramètre MI - Influence négligeable du paramètre MA
Redondante à N-unités (Figure 2.18)	<ul style="list-style-type: none"> - Influence du temps d'opération sur l'évaluation de la limite de confiance moins accentuée quand le nombre d'unités est grand - Le paramètre dominant est le facteur de couverture quand le nombre d'unités est faible ; l'accroissement du nombre d'unités diminue son influence ; l'influence des paramètres CAUT, MDIF, est alors comparable - L'augmentation du délai d'intervention diminue l'influence des variations des autres paramètres sur le taux d'arrêt

Figure 2.20 Commentaires sur les résultats des figures 2.16, 2.17 et 2.18

III.4 Evaluation de l'indisponibilité

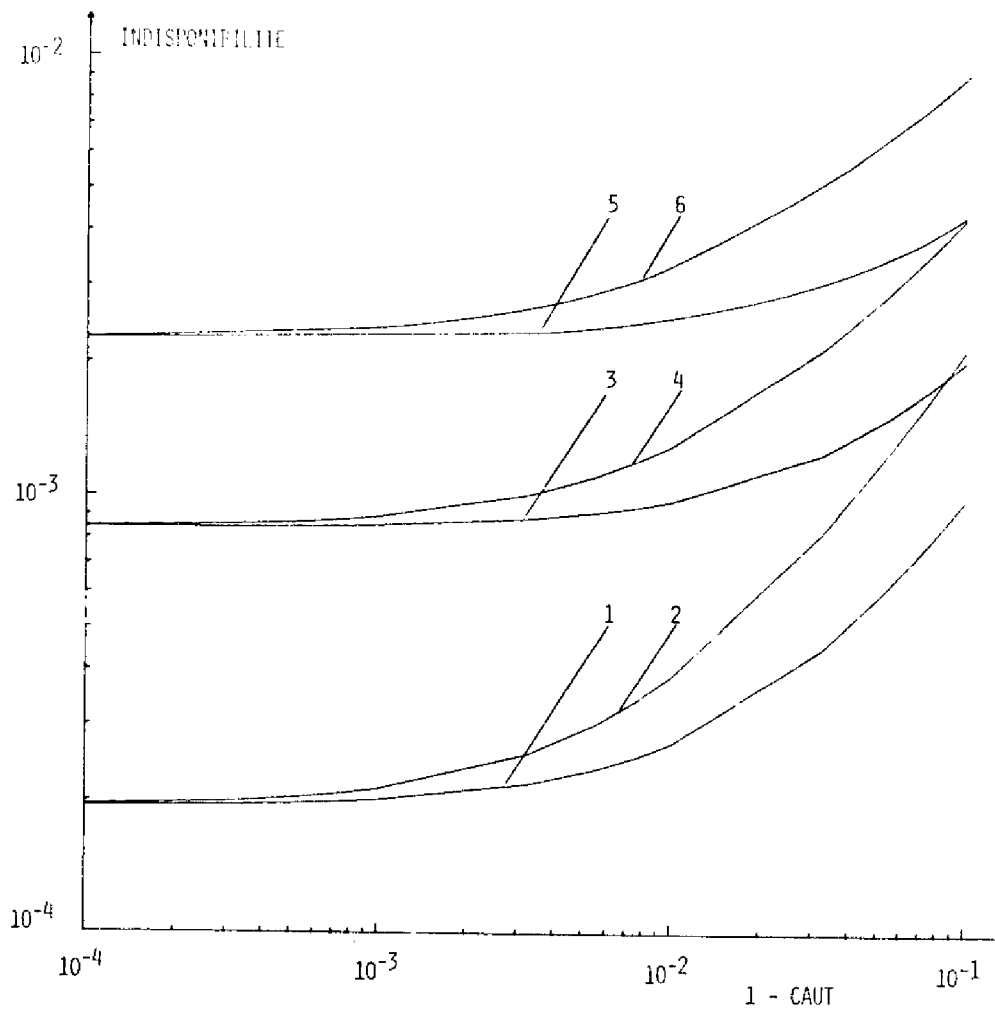
Les résultats correspondant à l'évaluation de la limite de confiance de l'indisponibilité pour les diverses structures redondantes considérées sont donnés par les figures 2.21, 2.22, 2.23 et 2.24.



N=1
 $\mu/\lambda = 100$, CMAN=0

MA	K		1	1.5
	MI			
1	1		1	2
2		1	3	4
		1.5	5	6

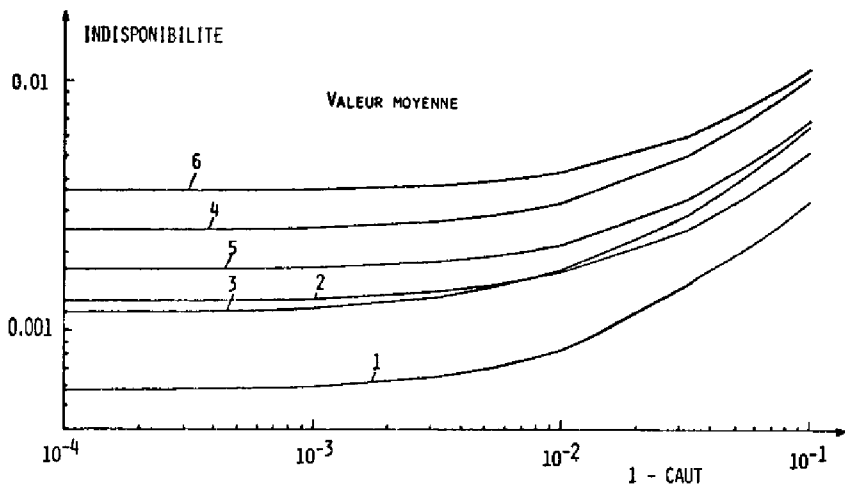
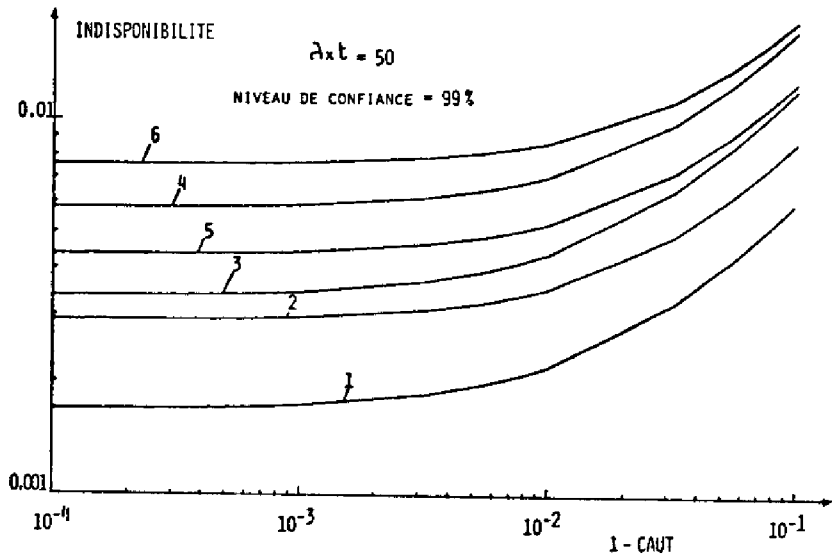
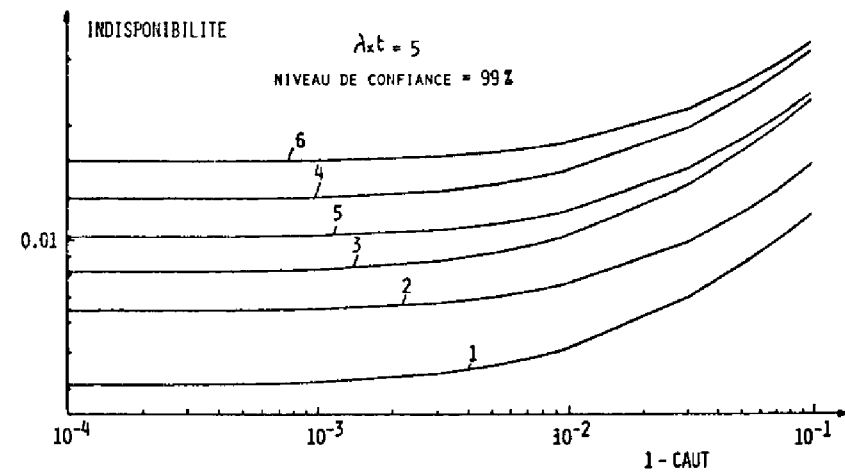
Figure 2.21 Limite de confiance de l'indisponibilité de la structure redondante sélective active



$\omega/\lambda = 100$, $K=1$, $MI=1$, $MA=1$

CMAN	valeur moyenne	niveau de confiance: 99%	
		$\lambda t = 50$	$\lambda t = 5$
1 - CAUT	1	3	5
0	2	4	6

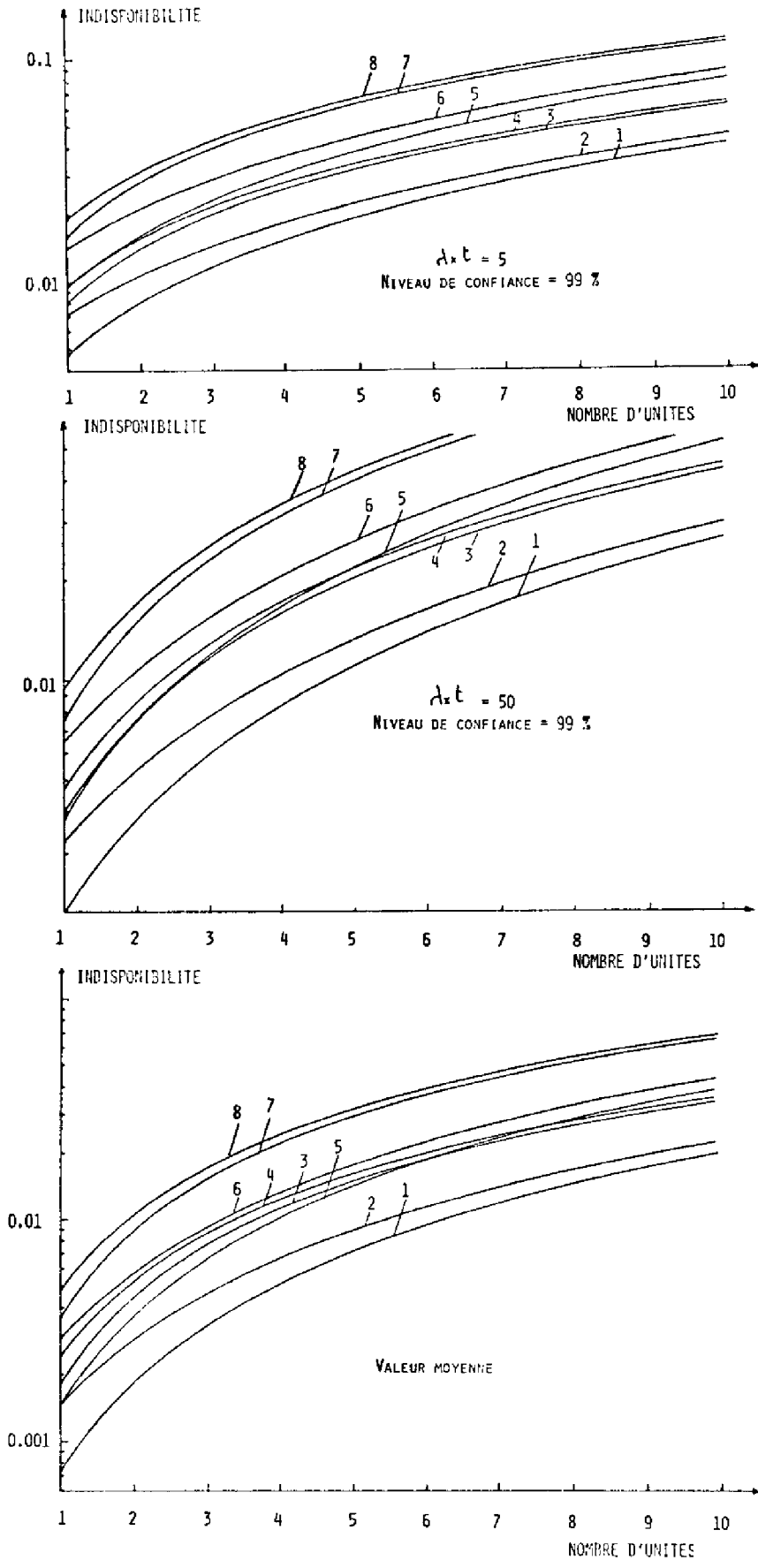
Figure 2.22 Structure redondante sélective active avec prise en compte de la reconfiguration manuelle



N=2
 $\mu/\lambda = 100$, CMAN=0

MA	MI \ K		
		1	1.5
1	1	1	2
2	1	3	4
	1.5	5	6

Figure 2.23 Limite de confiance de l'indisponibilité de la structure redondante massive



$\mu / \lambda = 100$
K=1 , MDIF=1

MA	SA CAUT	50	10
1	.99	1	3
	.95	2	4
2	.99	5	7
	.95	6	8

Figure 2.24 Limite de confiance de l'indisponibilité de la structure redondante à N-unités

De même que dans le paragraphe précédent, les commentaires relatifs aux résultats obtenus sont divisés en deux parties selon qu'ils portent sur l'aspect "méthode", ou sur l'aspect "structure".

III.4.1 Commentaires relatifs aux méthodes d'évaluation

Ces résultats permettent de retrouver certains comportements déjà mis en évidence lors de l'étude de la structure non-redondante :

- la variation des paramètres K , CAUT, MI , λ conduit à des variations différentes de la valeur moyenne et de la limite de confiance,
- la variation du paramètre MA induit des variations proportionnelles sur la valeur moyenne et la limite de confiance ; ceci peut être déduit du parallélisme des courbes :
 - .1 et 3, et, 2 et 4 dans les figures 2.21 et 2.23
 - .1 et 5, 2 et 6, 3 et 7, et, 4 et 8 dans la figure 2.24.

III.4.2 Commentaires relatifs aux structures

Les commentaires relatifs aux structures sont réunis dans le tableau de la figure 2.25.

STRUCTURE	COMMENTAIRES
Redondante Sélective Active (Figure 2.21)	<ul style="list-style-type: none">- Influence non négligeable du temps d'opération dans l'évaluation basée sur la limite de confiance- Inversion dans le comportement de l'indisponibilité avec l'introduction du niveau de confiance ; on peut constater, à partir des courbes 1,2,5, que:<ul style="list-style-type: none">.pour $CAUT < 0,99$, le paramètre CAUT est dominant.pour $0,99 < CAUT < 0,996$, le paramètre MA devient dominant.pour $CAUT > 0,996$, l'évaluation basée sur la valeur moyenne montre la dominance du paramètre K ; l'évaluation basée sur la limite de confiance montre la dominance du paramètre MA

Figure 2.25 (Début) Commentaires sur les résultats des figures 2.21, 2.22, 2.23 et 2.24

STRUCTURE	COMMENTAIRES
<p>Redondante Sélective Active- prise en compte de la reconfiguration manuelle</p> <p>(Figure 2.22)</p>	<p>- L'introduction de la reconfiguration manuelle diminue la sensibilité de l'indisponibilité au paramètre CAUT ; cette décroissance est plus accentuée pour l'analyse basée sur la limite de confiance</p>
<p>Redondante Massive</p> <p>(Figure 2.23)</p>	<p>- Influence non négligeable du temps d'opération</p> <p>- Inversion dans le comportement de l'indisponibilité avec l'introduction du niveau de confiance ; on peut constater, à partir des courbes 1,2,5 que:</p> <p>.pour $CAUT < 0,98$, le facteur de couverture est dominant</p> <p>.pour $0,98 < CAUT < 0,99$, le paramètre MA devient dominant</p> <p>.pour $CAUT > 0,99$, l'évaluation basée sur la valeur moyenne montre la dominance du paramètre K ; dans l'évaluation basée sur la limite de confiance, le paramètre MA reste dominant</p>
<p>Redondante à N-unités</p> <p>(Figure 2.24)</p>	<p>- Diminution de l'influence du temps d'opération avec l'augmentation du nombre d'unités</p> <p>- Inversion de comportement avec l'introduction du niveau de confiance ; l'analyse des courbes 1,2,3,5 amène aux conclusions suivantes :</p> <p>.pour l'intervalle de temps $\lambda_{xt}=5$, l'analyse basée sur la limite de confiance montre la dominance du paramètre MA</p> <p>.pour l'intervalle de temps $\lambda_{xt}=50$, le paramètre MA devient dominant quand le nombre d'unités est supérieur à 2</p> <p>.l'analyse basée sur la valeur moyenne montre la dominance du paramètre MA quand le nombre d'unités est supérieur à 6</p>

Figure 2.25 (Fin)

CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à l'évaluation du taux d'arrêt et de l'indisponibilité d'une structure non redondante et de structures redondantes, par deux méthodes :

- évaluation basée uniquement sur la valeur moyenne,
- évaluation basée sur la limite de confiance
 - .obtention de la valeur exacte,
 - .utilisation de l'approche asymptotique.

Le tableau de la figure 2.26 réunit les principaux avantages et inconvénients de l'utilisation de ces méthodes dans l'évaluation prévisionnelle.

Les résultats portent essentiellement sur l'analyse de l'erreur introduite par l'utilisation de l'approche asymptotique et sur la comparaison entre les deux méthodes d'évaluation ; ils permettent de dégager les conclusions suivantes :

- la valeur moyenne ne peut constituer une estimation représentative que :
 - .si le nombre d'événements à mesurer sur l'intervalle de temps considéré est assez grand,
 - .si le temps d'opération est suffisamment long,
- l'incertitude liée à la valeur moyenne découle principalement du fait que les temps de défaillance sont exponentiellement distribués,
- l'accroissement du niveau de confiance conduit à des résultats qui sont quantitativement et qualitativement différents de ceux obtenus à partir de la valeur moyenne :
 - .influence non négligeable du temps d'opération,
 - .sensibilité différente aux variations des paramètres du modèle, pouvant dans le cas de l'indisponibilité conduire à des inversions de comportement,

EVALUATION	AVANTAGES	INCONVENIENTS	APPLICATION
VALEUR MOYENNE	- calcul simple	- le niveau de confiance est de l'ordre de 63% pour les processus aléatoires exponentiellement distribués	- envisageable dans le cas où les processus aléatoires mis en jeu sont peu dispersés - envisageable pour l'évaluation des performances des systèmes digitaux
LIMITE DE CONFIANCE - APPROCHE ASYMPTOTIQUE	- calcul simple - prend en compte le niveau de confiance	- introduit des erreurs	- envisageable pour l'évaluation de la sûreté de fonctionnement - phase de conception et d'évaluation prévisionnelle - étude de sensibilité
LIMITE DE CONFIANCE - FONCTION DE REPARTITION	- prend en compte le niveau de confiance	- complexité de calcul	- envisageable pour l'évaluation de la sûreté de fonctionnement ; en raison de sa complexité, l'évaluation est restreinte aux solutions retenues

Figure 2.26 Comparaison entre les méthodes d'évaluation

.évaluation en valeurs absolues nettement supérieures pouvant dans certains cas conduire à des variations d'un ordre de grandeur par rapport à la valeur moyenne,

- l'approche asymptotique est un bon compromis lors de la phase d'aide à la conception entre des calculs complexes permettant l'accès à la fonction de répartition et une estimation uniquement basée sur la valeur moyenne.

\$\$\$

CHAPITRE 3

DÉFINITION D'UNE MÉTHODE D'ANALYSE ÉCONOMIQUE -

APPLICATION À L'ÉVALUATION DES COÛTS

D'EXPLOITATION DE SYSTÈMES INFORMATIQUES

INTRODUCTION

Les techniques de tolérance aux fautes ont été jusqu'à présent essentiellement utilisées dans des systèmes destinés à des applications critiques impliquant des contraintes importantes de sûreté de fonctionnement; dans ces applications l'augmentation du coût de l'investissement induite par la redondance se justifie par la disproportion qui existe entre la cause d'une défaillance et ses conséquences :

- vies humaines en danger dans les systèmes de transport, de commande de centrales nucléaires, ...
- lourdes pénalités économiques dans les systèmes complexes de traitement en temps partagé, de commutation téléphonique, de "commande-contrôle" de systèmes de production de biens et d'énergies...

Dans le cas de systèmes destinés à des applications dont les spécifications en sûreté de fonctionnement sont moins contraignantes, les constructeurs et les utilisateurs ont toujours hésité à payer les coûts supplémentaires induits par les redondances ; cette position peut être expliquée par le fait que l'accroissement du coût de l'investissement est beaucoup plus visible en première analyse que les bénéfices amenés par de meilleures caractéristiques de sûreté de fonctionnement (disponibilité, maintenabilité, ...).

Il faut cependant souligner que les dernières années ont vu une évolution très sensible de cette position qui s'explique en grande partie par une décroissance du coût de la matière et un accroissement très important du coût des interventions humaines.

D'un point de vue méthodologique, le choix final d'une solution devrait passer par une étude comparative entre les différentes solutions basée sur :

- des critères de performance qui se traduisent par le choix d'une solution amenant les meilleures caractéristiques fonctionnelles telles que : capacité de calcul, cycle instruction, ...

- des critères de sûreté de fonctionnement qui se traduisent par le choix d'une solution basée sur les améliorations des caractéristiques de la sûreté telles que : disponibilité, fiabilité,...
- des critères économiques qui peuvent être répartis en deux grandes classes :
 - . choix basé sur les coûts pendant le cycle d'exploitation, augmentation des profits, réduction des coûts, ...
 - . choix basé sur les coûts pendant le cycle de conception et réalisation : diminution des investissements, ...

Dans la suite de ce chapitre, ces quatre critères seront appelés respectivement : Performances, Sûreté, Bénéfices et Coûts.

L'analyse des solutions alternatives peut, suivant le domaine d'application considéré, s'orienter vers une analyse monocritère ou une analyse multicritère. Le tableau de la figure 3.1 donne l'ensemble des analyses possibles à partir de ces quatre critères, ainsi que les références à des travaux qui ont déjà été publiés.

ANALYSE	REFERENCES
PERFORMANCES	[BRO, 75]
SURETE	[LAP, 75] [LAN, 77] [NG, 76]
BENEFICES	[KUM, 76] [KAY, 76] [MOR, 80] [MOR, 81]
COUTS	[PHI, 74]
PERFORMANCES et SURETE	[GAY, 79]
PERFORMANCES et BENEFICES	-
PERFORMANCES et COUTS	-
SURETE et BENEFICES	-
SURETE et COUTS	[TIL, 77]
BENEFICES et COUTS	[COT, 77]
PERFORMANCES et SURETE et BENEFICES	-
PERFORMANCES et SURETE et COUTS	-
SURETE et BENEFICES et COUTS	-
PERFORMANCES et BENEFICES et COUTS	-
PERFORMANCES et SURETE et BENEFICES et COUTS	-

FIGURE 3.1 Ensemble des analyses possibles à partir des critères de performances, sûreté, bénéfices et coûts

La justification économique d'une solution tolérante aux fautes passe par l'analyse des critères coûts et bénéfiques ; elle est effectuée en deux phases :

- dans la première phase, il faut démontrer qu'elle constitue une solution viable d'un point de vue économique, ce qui se traduit par l'analyse quantitative des bénéfiques,
- les résultats obtenus lors de l'analyse menée dans la phase précédente constituent des données pour la deuxième phase où on effectue une analyse combinée entre les coûts de réalisation supplémentaires induits par les solutions retenues et les bénéfiques correspondants (analyse coûts et bénéfiques).

Ce chapitre est consacré au développement et à l'application d'un outil d'analyse quantitative des bénéfiques permettant le déroulement de la première phase.

Il est divisé en trois grandes parties :

- la première partie est consacrée à l'analyse qualitative de l'influence de la tolérance aux fautes sur les principales composantes du coût pendant le cycle de vie du système,
- la deuxième partie définit l'outil proposé et fournit les expressions mathématiques pour l'analyse quantitative des bénéfiques,
- la troisième partie concerne l'analyse quantitative de la réduction de coût apportée par la tolérance aux fautes. Les structures redondantes considérées sont celles définies dans le deuxième chapitre.

I - ANALYSE QUALITATIVE DES BÉNÉFICES APPORTÉES PAR LA TOLÉRANCE AUX FAUTES

Ce paragraphe est consacré à l'identification des principales composantes représentatives du coût pendant le cycle de vie du système et à l'analyse qualitative de l'influence de la tolérance aux fautes sur ces composantes.

I.1 Les composantes du coût pendant le cycle de vie du système

L'analyse des coûts d'un système montre qu'il faut prendre en compte trois grandes catégories de coûts :

- le coût d'investissement,
- le coût de maintenance,
- le coût d'arrêt.

1.1.1 Le coût d'investissement

Le coût d'investissement correspond pour l'utilisateur au coût d'achat ou au coût de location. Pour le fabricant, il inclut le coût de conception (recherche, développement, ...) et le coût de réalisation (équipement, contrôle de qualité, environnement, ...).

1.1.2 Le coût de maintenance

Une analyse des composantes du coût de maintenance montre que les principaux facteurs à considérer sont les frais de main d'oeuvre, le coût d'approvisionnement initial en unités de rechange et les coûts des unités de rechange ; nous empruntons à [SED 80] le tableau de la figure 3.2 qui permet de visualiser l'impact de chacun de ces facteurs sur le coût de maintenance.

Facteurs	% du coût de maintenance
Frais de main d'oeuvre	34
Coût d'approvisionnement initial	26
Coût des unités de rechange	21
Formation	6
Support	5
Autres	8

FIGURE 3.2

Répartition des coûts associés à la maintenance

Nous pouvons remarquer que les frais de main d'oeuvre et les coûts des unités de rechange correspondent à plus de 50% ; la suite de ce paragraphe sera consacrée à l'analyse de ces deux facteurs.

Les frais de main d'oeuvre sont fonction :

- du nombre d'appels à la maintenance dans le cas de la maintenance curative,
- de la fréquence des visites dans le cas de la maintenance préventive,
- du délai d'intervention de l'équipe de maintenance,
- de la durée de l'intervention.

La fréquence d'appel à la maintenance dépend de la fréquence d'apparition des fautes dans le cas de la maintenance curative.

Dans le cas de la maintenance préventive, la fréquence des visites résulte d'un compromis tenant compte de la réduction des coûts, de l'amélioration de la disponibilité, ...

L'intervention a un caractère d'urgence lorsque la défaillance d'une unité provoque l'arrêt du système ; dans le cas contraire, le délai d'intervention peut être plus long du fait que le système continue à assurer, de manière dégradée ou non l'ensemble des fonctions qui lui sont confiées.

La durée de l'intervention est fonction du temps nécessaire au déplacement de l'équipe de maintenance, du temps nécessaire à l'identification de l'unité défaillante, à son remplacement et à la remise en fonctionnement du système.

Le coût des unités de rechange comprend :

- le coût d'immobilisation qui dépend de l'importance du stock d'unités de rechange,
- le coût de remplacement qui dépend de la fréquence des remplacements nécessaires à la réparation à la suite des pannes permanentes et du nombre de sous-ensembles à remplacer.

I.1.3 Le coût d'arrêt

L'utilisation des systèmes informatiques dans des systèmes de complexité croissante où l'autorité qui leur est conférée est elle aussi croissante rend les conséquences économiques de l'arrêt du système toujours plus importantes.

Le coût d'arrêt peut être caractérisé par :

- les pertes de production ou le manque à gagner ; cette composante est essentiellement fonction du temps global d'arrêt du système,
- les coûts des incidents provoqués par ces arrêts intempestifs entraînant la perte de tout ou partie du système commandé ; cette composante est essentiellement fonction de la fréquence d'arrêt.

I.2 Analyse qualitative de l'influence de la tolérance aux fautes sur les composantes du coût

Les principales décisions qui affectent le coût d'investissement supplémentaire amené par un système tolérant aux fautes concernent :

- l'efficacité des mécanismes de détection : la détection de la faute dès qu'elle se manifeste augmente les possibilités de survie et de poursuite correcte des tâches à effectuer :
 - . à la suite d'une reprise dans le cas des fautes transitoires,
 - . après avoir changé l'unité en panne par l'unité en attente dans le cas des pannes permanentes,
 - . etc...
- la technique de redondance retenue : le choix entre les techniques de redondance sélective et massive dépend du rapport entre l'augmentation du coût d'investissement et les bénéfices apportés par les améliorations correspondantes de la sûreté de fonctionnement,
- le nombre d'unités en attente : il affecte non seulement la sûreté de fonctionnement du système mais aussi l'organisation de la politique de maintenance, car le délai d'intervention de l'équipe de maintenance dépend de la capacité de survie du système à la suite de fautes permanentes.

La justification de l'utilisation de la tolérance aux fautes d'un point de vue économique nécessite l'analyse de l'influence de ces facteurs sur les bénéfices ; nous considérons par la suite que les bénéfices se traduisent par la réduction du coût de maintenance et d'arrêt dont les principales composantes sont rappelées dans le tableau de la figure 3.3.

COÛT	COMPOSANTES
Maintenance	Frais de main d'oeuvre Coût des unités de rechange
Arrêt	Coût de l'interruption de service

FIGURE 3.3 Composantes du coût de maintenance et d'arrêt

Une conception tolérante aux fautes peut conduire à une réduction de ces trois composantes.

La réduction des frais de main d'oeuvre peut se concrétiser par :

- la réduction du nombre d'appels d'urgence dus à l'indisponibilité instantanée du système du fait qu'un certain nombre de pannes peuvent être tolérées; comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, le délai d'intervention de l'équipe de maintenance dépend du caractère d'urgence de l'appel à la suite d'une panne, ce qui amène à faire un appel à la maintenance immédiate à la suite d'un appel d'urgence ; les fautes tolérées pouvant en effet entraîner un appel à la maintenance différée.

Des politiques de maintenance immédiate et différée ont été explicitées dans le deuxième chapitre au paragraphe III.2. D'un point de vue coût, la première est plus onéreuse que la seconde. On peut expliquer cet accroissement du coût par le fait que l'équipe de maintenance ne peut pas intervenir de façon programmée et qu'elle doit de ce fait, être disponible en permanence. Afin de montrer les majorations du coût de maintenance en fonction de la disponibilité de l'équipe de maintenance, nous donnons dans le tableau de la figure 3.4 les majorations par rapport au prix de référence selon les horaires d'intervention possibles pour un cas concret (Contrat de maintenance CII-Honeywell Bull-LAAS).

Horaires de disponibilité de l'équipe de maintenance	5 jours/semaine	Samedi	Dimanche
8 heures	Prix de référence	10 %	15 %
12 heures	20 %	15 %	22 %
16 heures	40 %	20 %	30 %
20 heures	60 %	25 %	35 %
24 heures	70 %	30 %	40 %

FIGURE 3.4 Majoration du coût de maintenance selon les horaires d'intervention

- la diminution de la durée d'intervention de l'équipe de maintenance qui a une information sur l'unité défaillante par les mécanismes de détection et de localisation des pannes. Dans [SED 80], il est estimé que le diagnostic représente de l'ordre de 85% du temps de réparation. On peut donc espérer une diminution de la durée de l'intervention (déplacement, diagnostic et remplacement) de l'ordre de 60%.

La réduction du coût des unités de rechange est une conséquence de la réduction du coût de remplacement due à l'augmentation des informations données par les mécanismes de détection et de localisation qui réduisent le nombre des sous-ensembles à remplacer et à retester.

La diminution des pertes de revenus, des coûts des incidents est une conséquence de la diminution du temps global d'arrêt et du nombre d'arrêts pendant l'intervalle d'opération, diminution obtenue par l'adjonction des unités redondantes.

II - DEFINITION D'UN OUTIL POUR L'ANALYSE ECONOMIQUE DES BENEFICES

La définition d'un outil d'analyse économique des bénéfices nécessite :

- un modèle permettant la description du comportement de la structure et la prise en compte des paramètres économiques qui caractérisent les revenus et les coûts générés pendant son fonctionnement,

- la définition de grandeurs caractéristiques permettant de comparer sous forme quantitative les solutions alternatives.

Le modèle utilisé est basé sur le concept de la structure de revenu proposé par [HOW 71], qui est particulièrement intéressant car :

- le modèle de description du comportement de la structure est compatible avec les modèles basés sur les processus markoviens qui sont utilisés depuis plusieurs années pour l'évaluation de la sûreté de fonctionnement [chapitre 1, § I],
- les revenus et les coûts sont fonction du temps de séjour dans les états du modèle et du nombre de transitions, ce qui donne à ce modèle une grande souplesse dans la prise en compte et la représentation des paramètres économiques,
- il est facilement transposable sous forme de programme d'aide à la conception.

II.1 Modèle économique défini sur le modèle markovien : la structure de revenu

Nous considérons un système dont le comportement est décrit par un processus markovien à nombre fini d'états appartenant à l'ensemble $\{E\}$.

Chaque état est occupé durant un temps aléatoire avant qu'une transition ne soit effectuée vers un autre état. La structure de revenu se superpose au processus markovien précédemment défini ; elle est basée sur les deux principes suivants :

- lorsqu'un état $i \in \{E\}$ est occupé, un revenu est généré avec un taux y_i ,
- lorsqu'il y a une transition de l'état i vers l'état j , il y a génération d'un revenu b_{ij} .

A titre d'exemple, considérons l'utilisation de la structure de revenu dans l'évaluation du coût de maintenance d'un système réparable :

- si le système se trouve dans l'état de réparation i , le paramètre y_i permet de prendre en compte les coûts horaires associés aux frais de main d'oeuvre,

- lors de la transition de l'état de réparation vers l'état j , le paramètre b_{ij} permet de prendre en compte les coûts des unités de rechange nécessaires à la réparation.

Nous donnons dans les paragraphes suivants les équations permettant l'obtention de la valeur moyenne du revenu quand la structure de revenu est définie sur un processus markovien homogène. L'expression de la valeur moyenne du revenu est, dans ce cas, plus facile à exploiter par ordinateur que celle donnée dans [HOW 71] pour les processus semi-markoviens.

Beaucoup plus significative que la valeur moyenne est la limite de confiance du revenu. Nous avons montré lors de l'étude menée dans le deuxième chapitre que la prise en compte du niveau de confiance peut conduire à des résultats différents de ceux obtenus à partir de la valeur moyenne, non seulement en valeur absolue mais également en valeur relative.

Une telle analyse sort cependant du cadre de ce mémoire ; la complexité des expressions mathématiques permettant l'accès aux limites de confiance justifie qu'une telle analyse fasse l'objet d'une étude séparée.

II.2 Evaluation de la valeur moyenne du revenu

Dans une analyse économique on considère qu'il est quantitativement différent d'avoir à dépenser ou à gagner une somme d'argent immédiatement ou plus tard ; on part du principe qu'une somme d'argent à l'instant zéro placée pour générer des intérêts vaudra plus après N périodes de temps.

L'évaluation de la valeur moyenne du revenu sera effectuée en deux parties :

- dans la première partie, nous prenons en compte le taux d'intérêt,
- dans la deuxième partie, nous considérons le taux d'intérêt nul.

II.2.1 Avec prise en compte du taux d'intérêt

II.2.1.1 Définition du taux d'intérêt

Soit Y_0 une somme d'argent à l'instant zéro ; l'approche adoptée dans [SHA 69] pour l'évaluation de la somme d'argent après N périodes de temps à un taux d'intérêt de r_N par période est donnée par l'égalité suivante :

$$Y_N = (1 + r_N)^N Y_0$$

Quand N est grand, nous pouvons écrire

$$(1 + r_N)^N \sim e^{r_N \cdot N}$$

soit :

$$Y_0 = e^{-r_N N} Y_N$$

Si γ est le taux d'intérêt par unité de temps, il en résulte que pour un intervalle de temps t composé de N périodes avec un taux d'intérêt r_N , r_N et γ sont liés par la relation

$$r_N = \gamma t/N$$

Si Y_t est la valeur de la somme d'argent à l'instant t , Y_0 sera donnée par

$$Y_0 = e^{-\gamma t} Y_t$$

Cette dernière approche est proposée par [HOW 71] ; elle sera utilisée dans les développements suivants.

II.2.1.2 Valeur moyenne du revenu

Soit un modèle markovien à N états sur lequel on construit la structure de revenu définie précédemment.

La valeur moyenne du revenu généré par la structure de revenu dans l'intervalle de temps $[0, t]$ est représentée par $g_1(t, \gamma)$ où γ est le taux d'intérêt et i l'état du modèle à l'instant initial.

Sachant qu'à l'instant zéro le processus est dans l'état i , nous avons deux possibilités à l'instant t :

- soit l'état i est encore occupé,
- soit la transition a été effectuée vers l'état j , à l'instant τ ;
 $\tau \leq t, j \neq i, j \in \{E\}$.

La probabilité pour que la première possibilité se produise est donnée par :

$$\sum_{j \neq i} \bar{Q}_{ij}(t) = \sum_{j \neq i} \int_t^\infty q_{ij}(x) dx$$

Dans ce cas, le revenu généré est donné par l'expression

$$\int_0^t y_i e^{-\lambda x} dx$$

La deuxième possibilité se produit avec une probabilité $q_{ij}(\tau)$, $\tau \leq t$, le revenu étant dans ce cas :

$$e^{-\lambda \tau} b_{ij} + e^{-\lambda \tau} q_j(t-\tau, \lambda) + \int_0^\tau y_i e^{-\lambda x} dx$$

où

- le premier terme prend en compte la valeur du revenu fixe généré à l'instant où la transition a lieu,
- le deuxième terme prend en compte la valeur du revenu généré dans l'intervalle de temps $t - \tau$ sachant que le processus est dans l'état j à l'instant τ ,
- le troisième terme prend en compte le revenu généré durant l'intervalle où l'état i est occupé.

La valeur moyenne du revenu $g_i(t, \lambda)$ est donc donnée par l'égalité

$$g_i(t, \lambda) = \sum_{j \neq i} \int_t^\infty q_{ij}(x) dx \left[\int_0^t y_i e^{-\lambda x} dx \right] + \sum_{j=1}^N \int_0^t q_{ij}(\tau) \left[\int_0^\tau y_i e^{-\lambda x} dx + e^{-\lambda \tau} b_{ij} + e^{-\lambda \tau} g_j(t-\tau, \lambda) \right] d\tau$$

Sous forme matricielle, nous pouvons écrire :

$$\frac{dG(t, \lambda)}{dt} = -(\lambda \Pi - \Lambda) G(t, \lambda) - \Lambda_d R \quad (1)$$

où

- Λ_d est la matrice constituée des éléments diagonaux de la matrice Λ ,

- $G(t, \gamma)$ est le vecteur dont les éléments sont $g_i(t, \gamma)$,
 $i = 1, 2, \dots, N$,

- R est un vecteur dont les éléments r_i sont donnés par l'expression :

$$r_i = y_i \tau_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N p_{ij} b_{ij}$$

où τ_i représente le temps moyen passé dans l'état i et p_{ij} les probabilités de transition de la chaîne immergée.

On peut remarquer que le revenu r_i a donc deux composantes :

- $y_i \tau_i$ qui prend en compte les revenus générés pendant le séjour dans l'état i ,
- $\sum p_{ij} b_{ij}$ qui prend en compte les revenus fixes.

L'établissement de l'équation (1) est donné dans l'annexe E.

Obtention de la valeur asymptotique de $G(t, \gamma)$ quand t tend vers l'infini

La transformée de Laplace $G(s, \gamma)$ de $G(t, \gamma)$ est donnée à partir de l'équation (1) par :

$$s G(s, \gamma) = -(\gamma \Pi - \Lambda) G(s, \gamma) - \frac{1}{s} \Lambda_d R \quad (2)$$

soit :

$$G(s, \gamma) = \frac{1}{s} (s \Pi + \gamma \Pi - \Lambda)^{-1} (-\Lambda_d) R$$

Quand t tend vers l'infini, on obtient l'expression :

$$G(t, \gamma) \Big|_{t \rightarrow \infty} = (\gamma \Pi - \Lambda)^{-1} (-\Lambda_d) R \quad (3)$$

Si l'on suppose que $\gamma \ll \lambda_{ii}, \forall i$, ce qui est généralement vérifié en pratique, nous pouvons utiliser l'égalité suivante :

$$\Phi_0 (\gamma \Pi - \Lambda)^{-1} = \frac{1}{\gamma} \Phi$$

Sachant que pour les processus markoviens ergodiques :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma \Phi_0 [\gamma \Pi - \Lambda]^{-1} = \Phi$$

où Φ_0 est le vecteur des probabilités initiales
 Φ est le vecteur des probabilités stationnaires d'être dans les états du processus markovien.

De ce fait, la valeur moyenne du revenu $g(t, \gamma)$ est donnée par l'expression :

$$g(t, \gamma) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{\gamma} \Phi (-\Lambda_d) \mathbb{R}$$

II.2.2 Sans prise en compte du taux d'intérêt

L'évaluation de la valeur moyenne du revenu sans le taux d'intérêt est effectuée à partir des expressions (1) et (2) en prenant γ égal à zéro, d'où :

$$\frac{dG(t)}{dt} = \Lambda G(t) - \Lambda_d \mathbb{R} \quad (5)$$

$$G(s) = \frac{1}{s} (s \mathbb{I} - \Lambda)^{-1} (-\Lambda_d) \mathbb{R}$$

Quand t tend vers l'infini, la valeur asymptotique du revenu est donnée par :

$$g(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \Phi (-\Lambda_d) \mathbb{R} \cdot t \quad (6)$$

où Φ est le vecteur des probabilités stationnaires d'être dans les états du processus markovien.

Cette dernière expression a une interprétation assez simple : la valeur moyenne du revenu généré, quand le temps d'opération est assez grand, correspond à la somme, sur tous les états, du nombre moyen de passages dans chaque état i multiplié par le revenu r_i généré à chaque passage.

II.3 Définition des grandeurs caractéristiques de comparaison

Les grandeurs de comparaison sont définies selon l'analyse des bénéfices, orientée vers :

- l'augmentation de profit,
- la réduction des coûts pendant le cycle d'exploitation.

Soient $P_0(T)$, $C_0(T)$ et $P_1(T)$, $C_1(T)$ les profits et les coûts générés respectivement par les structures S_0 et S_1 dans l'intervalle de temps de durée T .

L'augmentation relative du bénéfice apporté par la structure S_1 par rapport à S_0 se traduit par :

- l'augmentation relative du profit, donnée par le coefficient d'augmentation CAP

$$CAP = [P_1(T) - P_0(T)] / P_0(T)$$

- la réduction relative du coût, donnée par le coefficient de réduction CRC

$$CRC = [C_0(T) - C_1(T)] / C_0(T)$$

L'évaluation des profits et des coûts pendant le cycle d'exploitation nécessite la résolution numérique des équations (1) ou (4) selon que l'on tient compte ou non des taux d'intérêt.

Dans le cas de structures pour lesquelles les probabilités d'être dans les différents états du modèle markovien tendent rapidement vers les valeurs stationnaires, il est envisageable d'utiliser les résultats asymptotiques donnés par les expressions (3), (4) et (6), plus faciles à traiter. Il est intéressant de noter qu'avec cette hypothèse de stationnarité, les coefficients définis précédemment deviennent des grandeurs indépendantes du temps, et de plus, indépendantes du taux d'intérêt lorsque $\gamma \ll \lambda_{ii}, \forall i$.

II.4 Le programme d'analyse des bénéfices

Le programme d'analyse des bénéfices que nous avons réalisé permet de calculer les coefficients CRC et CAP, et offre à l'utilisateur la possibilité d'effectuer une étude de sensibilité par rapport aux paramètres du modèle. La valeur moyenne du revenu généré par le modèle est calculée en supposant que le processus markovien est stationnaire.

Les données nécessaires en entrée du programme sont :

- la matrice des taux de transition Λ ,
- les matrices des revenus y_i et b_{ij} , nécessaires à la détermination de r_i .

L'étude de sensibilité de CRC et de CAP aux paramètres du modèle est conduite en deux étapes :

- première étape : le CRC (CAP) est calculé pour un ensemble de valeurs de paramètres fournies par l'utilisateur. Le CRC (CAP) calculé dans cette étape sera appelé CRC de référence (CAP de référence),
- deuxième étape : l'utilisateur définit les paramètres qu'il souhaite faire varier. Pendant la variation d'un paramètre, les autres conservent les valeurs du CRC de référence (CAP de référence).

III - ANALYSE QUANTITATIVE DES BENEFICES APPORTES PAR LA TOLERANCE AUX FAUTES

Les arguments présentés dans le paragraphe I sont essentiellement qualitatifs et de ce fait insuffisants pour convaincre les fabricants et les utilisateurs de l'intérêt économique d'une conception tolérante aux fautes.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à quantifier l'impact d'une solution tolérante aux fautes sur la réduction des coûts de maintenance et d'arrêt.

Les structures tolérantes aux fautes considérées sont celles définies au paragraphe III du deuxième chapitre.

III.1 Définition des paramètres représentatifs des coûts

L'analyse des principales composantes du coût effectuée au paragraphe I conduit à la définition des paramètres suivants pour l'évaluation des coûts de maintenance et d'arrêt.

Les frais de main d'oeuvre

Ils sont pris en compte par :

- le paramètre Y_I qui représente le coût par unité de temps de la politique de maintenance immédiate,
- le paramètre Y_D qui représente le coût par unité de temps de la politique de maintenance différée.

La relation entre les valeurs respectives de ces deux paramètres est donnée par l'inégalité $Y_I > Y_D$.

Le coût de remplacement

Il est pris en compte :

- dans le cas de la structure non redondante, par le paramètre b ,
- dans le cas des structures redondantes, par deux paramètres correspondant à deux possibilités de réparation :
 - . la réparation est effectuée pendant que la structure est en état de fonctionnement ; le coût de remplacement rapporté au paramètre b est, dans ce cas, $RM.b$,
 - . la structure est en arrêt ; le coût de remplacement rapporté au paramètre b est, dans ce cas, $RA.b$.

Le fait que les unités opérationnelles peuvent, à la suite d'une panne tolérée, être utilisées pour l'aide au diagnostic, conduit à faire cette différence au niveau du coût de remplacement selon que la structure est en fonctionnement ou en arrêt.

Les paramètres RM et RA prennent en compte l'efficacité de la détection et de la localisation qui permet de réduire le nombre de sous-ensembles à remplacer.

Le coût d'arrêt

Le coût d'arrêt de service par unité de temps est pris en compte par le paramètre Y_A .

Plutôt que d'associer des valeurs absolues aux paramètres définis ci-dessus, nous avons préféré définir des facteurs représentant les rapports suivants :

- Y_I/Y_D - rapport entre le coût horaire de la maintenance immédiate et de la maintenance différée.
- Y_A/Y_I - rapport entre le coût horaire de l'arrêt et de la maintenance immédiate.
- $P=Y_I/\mu.b$ - rapport entre le coût horaire de la maintenance immédiate et le coût horaire de remplacement d'un système non redondant (μ représente le taux de réparation de l'unité).

Cette approche présente les avantages suivants :

- on n'utilise que des valeurs relatives,
- les domaines d'application peuvent être variés selon les valeurs du rapport Y_A/Y_I .

Une évaluation du facteur P pour les systèmes commerciaux peut être trouvée dans la littérature ; selon les estimations données en [SED,80] $P=1.6$, d'après [PHI,78, tableau 8] pour des estimations faites en 1978, $P=2.1$ pour les salaires charges non comprises, et $P=9.5$ pour les salaires charges comprises. Dans le futur, on peut s'attendre à une augmentation du facteur P ; les données indiquées en [PHI,74] et [PHI,78] pour les années 1970 et 1978 montrent que les salaires ont doublé tandis que les coûts des unités de rechange sont restés inchangés.

Les composantes du coût peuvent être exprimées à partir des paramètres définis précédemment :

$$Y_I = P \cdot \mu \cdot b$$

$$Y_A = (Y_A/Y_I) \cdot P \cdot \mu \cdot b$$

$$Y_D = (Y_D/Y_I) \cdot P \cdot \mu \cdot b$$

Le paramètre b apparaissant comme facteur multiplicatif des composantes du coût, il devient facteur commun dans l'expression du coefficient de réduction de coût. De ce fait, les composantes relatives $P, Y_I/Y_D, Y_A/Y_I$ sont suffisantes pour la détermination du CRC.

Le tableau de la figure 3.5 résume l'ensemble des paramètres utilisés pour caractériser la structure de revenu et les modèles markoviens des structures redondantes considérées.

III.2 Influence du coût d'arrêt sur la réduction de coût

L'influence du coût d'arrêt sur la réduction du coût apportée par une solution tolérante aux fautes dépend du rapport Y_A/Y_I .

Paramètres relatifs		Définition
aux Modèles Markoviens	$1/\lambda$	temps moyen de fonctionnement de l'unité
	$1/\mu$	temps moyen de réparation de l'unité
	$1/\mu_m$	temps moyen nécessaire à la reconfiguration manuelle
	MDIF, MI	prennent en compte respectivement l'accroissement du temps de réparation de la politique de maintenance différée et immédiate
	MA	prend en compte l'accroissement du temps d'arrêt pour les structures redondantes
	CAUT	proportion des fautes couvertes automatiquement
	CMAN	proportion des fautes couvertes manuellement
	K	prend en compte l'augmentation du taux de défaillance de l'unité
	N	nombre d'unités
aux Structures de Revenu	Y_A/Y_I	rapport entre le coût d'arrêt et le coût de maintenance immédiate
	Y_I/Y_D	rapport entre le coût de maintenance immédiate et le coût de maintenance différée
	$P=Y_I/\mu \cdot b$	facteur P
	RM	prend en compte l'augmentation du coût de remplacement quand la structure redondante est opérationnelle
	RA	prend en compte l'augmentation du coût de remplacement quand la structure redondante est en arrêt
	b	coût moyen de remplacement

FIGURE 3.5 Paramètres utilisés dans les modèles markoviens et dans les structures de revenu

Nous allons donc effectuer une analyse de sensibilité au rapport Y_A/Y_I afin de dégager les principaux aspects à considérer.

Nous considérons tout d'abord l'évaluation du coefficient de réduction de coût CRC défini entre la structure redondante sélective active avec politique de maintenance immédiate et une structure non redondante.

Le modèle markovien de ces structures et la structure de revenu superposée à ce modèle sont donnés par la figure 3.6 où :

- les coûts donnés sur les états correspondent aux composantes générées pendant que l'état est occupé,
- les coûts donnés sur les transitions correspondent aux composantes fixes générées au moment de la transition.

Pour conduire l'analyse de sensibilité du CRC aux paramètres du modèle, nous avons retenu l'approche suivante :

- les valeurs du CRC de référence utilisées correspondent à ceux d'un système idéal à haut niveau de performances. De ce fait, si le CRC est dans ce cas sensible aux variations d'un paramètre, il sera encore plus sensible aux variations du même paramètre si les valeurs du CRC de référence correspondent à un système réel, et donc moins performant,
- nous considérons que $\lambda \ll \lambda_{ii}, \nu_i$. Cette hypothèse est réaliste du fait que :
 - . le taux d'intérêt est inférieur à 30% par an,
 - . le taux de défaillance des systèmes digitaux actuels est compris dans l'intervalle $[10^{-2}/\text{heure}, 10^{-4}/\text{heure}]$.

De ce fait, comme indiqué dans le paragraphe II.3, le CRC devient indépendant du taux d'intérêt.

III.2.1 Structure redondante sélective active (N=1)

La réduction de coût apportée par une structure redondante sélective active en fonction du rapport Y_A/Y_I est donnée sur la figure 3.7.

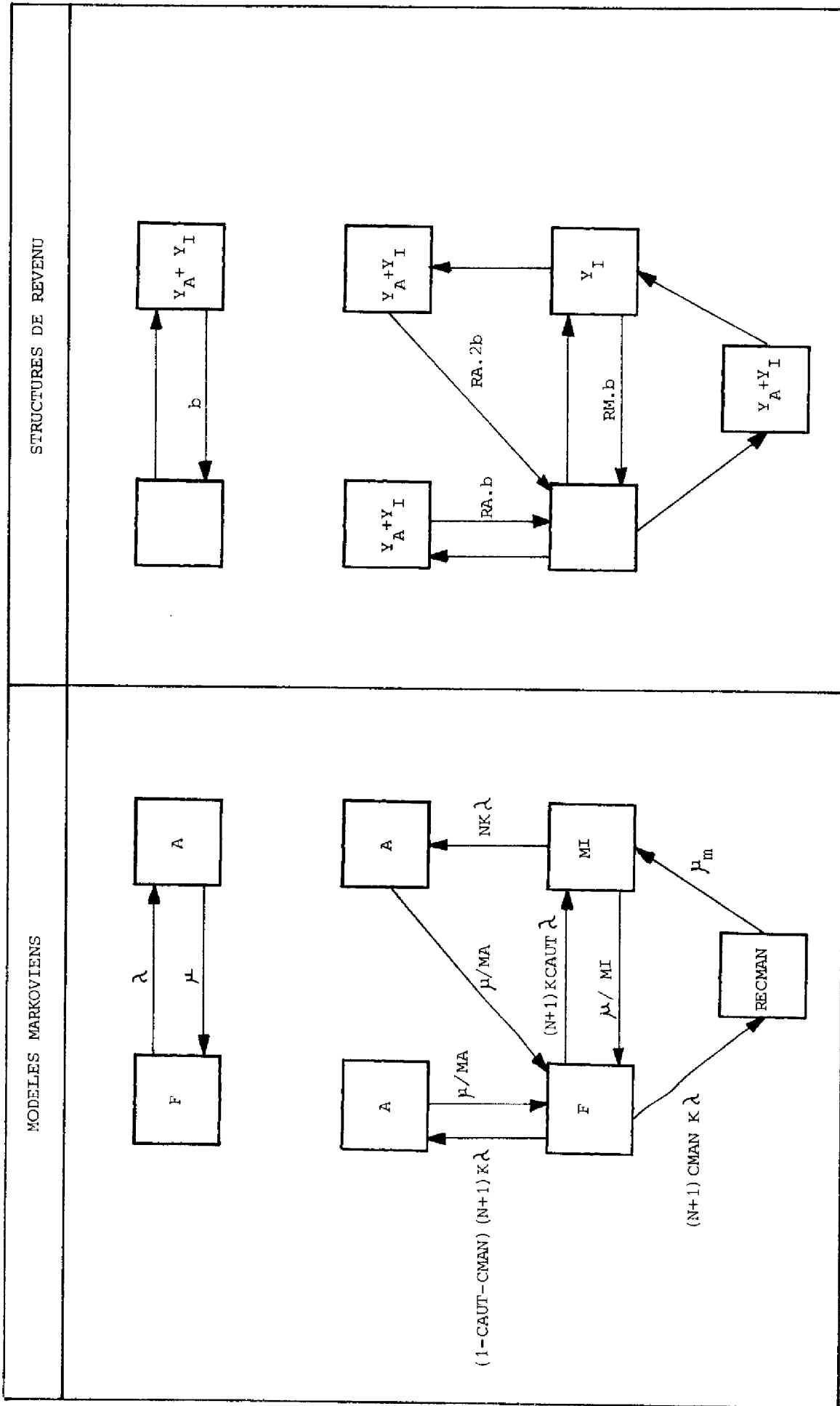


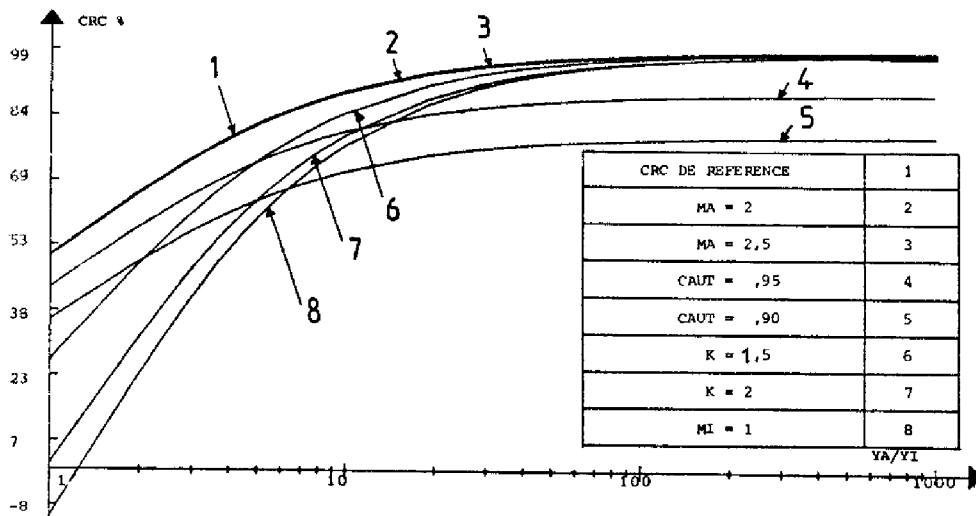
Figure 3.6 Modèles markoviens et structures de revenu de la structure non redondante et des structures redondantes sélective active et massive

Pour obtenir ces résultats, nous avons supposé que la probabilité de reconfiguration manuelle à la suite d'une panne est nulle, $CMAN=0$ et nous avons fait varier les paramètres CA, MI, K et MA .

Ces résultats amènent les conclusions suivantes :

- quand $Y_A/Y_I \sim 1$, la valeur du CRC est donnée principalement par les probabilités d'occupation des états de maintenance. L'étude de l'influence du paramètre MI met en évidence que la réduction de coût ne peut être envisagée dans ce cas que par la réduction du coût de la maintenance générée pendant l'occupation de l'état MI . Une telle réduction peut être obtenue :

- . par la réduction du temps moyen de réparation à la suite d'une panne tolérée, les mécanismes de détection pouvant être utilisés pour identifier rapidement l'unité en panne et de ce fait réduire le temps de diagnostic,
- . par la diminution du coût horaire de la maintenance, ce qui conduit à envisager l'adoption de la politique de maintenance différée.



CRC DE REFERENCE

$$\lambda = 10^{-3}/\text{heure}$$

$$\mu = .25/\text{heure}$$

$$CAUT = 1$$

$$CMAN = 0$$

$$K = 1$$

$$MI = .3$$

$$MA = 1$$

$$RM = 1$$

$$RA = 1$$

$$P = 4$$

Figure 3.7 Réduction de coût apportée par la redondance sélective active - politique de maintenance immédiate

La politique de maintenance différée sera envisagée au paragraphe III.3.

- Quand $Y_A/Y_I \gg 1$, le facteur de couverture, CAUT est le paramètre dominant, le CR étant insensible aux autres paramètres. Ce résultat s'explique car la valeur du CRC est dépendante principalement des probabilités que les structures soient dans les états défailants, c'est-à-dire de l'indisponibilité des structures. L'influence importante du facteur de couverture sur l'indisponibilité a déjà été montrée en [ARN,73], et ces résultats viennent le confirmer.

Afin d'analyser l'influence de l'amélioration du facteur de couverture sur le CRC, considérons les possibilités suivantes :

- prise en compte de la reconfiguration manuelle dans une structure redondante sélective active. Comme nous l'avons exposé dans le deuxième chapitre (paragraphe III.1), la reconfiguration manuelle donne à l'opérateur la possibilité de trouver une configuration opérationnelle et de remettre le système en marche sans réparation,
- utilisation de la redondance massive dans laquelle la tolérance aux fautes est assurée par un organe de vote majoritaire ; la simplification des mécanismes de détection, la suppression des mécanismes de commutation peuvent contribuer à une amélioration du facteur de couverture.

Ces deux points vont être analysés dans les deux paragraphes suivants.

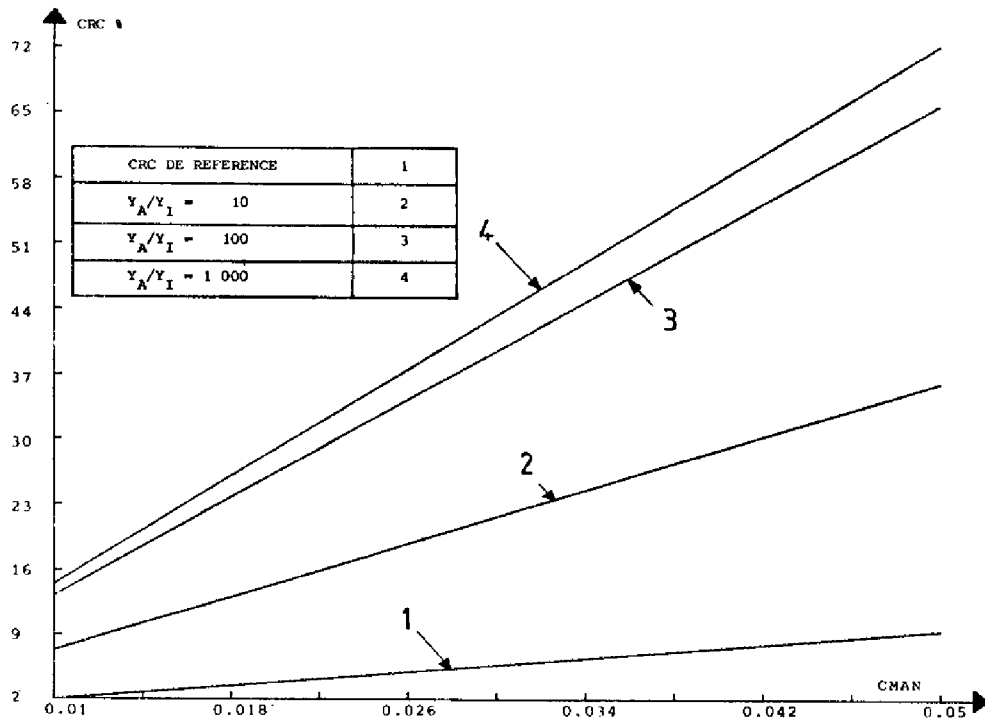
III.2.1.1 Bénéfices apportés par la reconfiguration manuelle

L'analyse de bénéfice est effectuée à partir de l'évaluation du CRC d'une structure dotée de la capacité de reconfiguration manuelle en comparaison d'une structure ne possédant pas cette capacité (CMAN=0).

Le temps moyen passé dans l'état RECMAN correspond au temps nécessaire pour trouver une configuration opérationnelle permettant de remettre le système en marche. Nous considérons dans cette analyse, que le paramètre μ_{M} a une valeur égale à 1/heure [ROH,72].

Les courbes de la figure 3.8 permettent de visualiser la variation du CRC avec le paramètre CMAN.

On voit que la reconfiguration manuelle constitue une solution efficace quand $Y_A \gg Y_I$; son faible coût de réalisation rend envisageable son incorporation dans la structure sélective active.



CRC DE REFERENCE

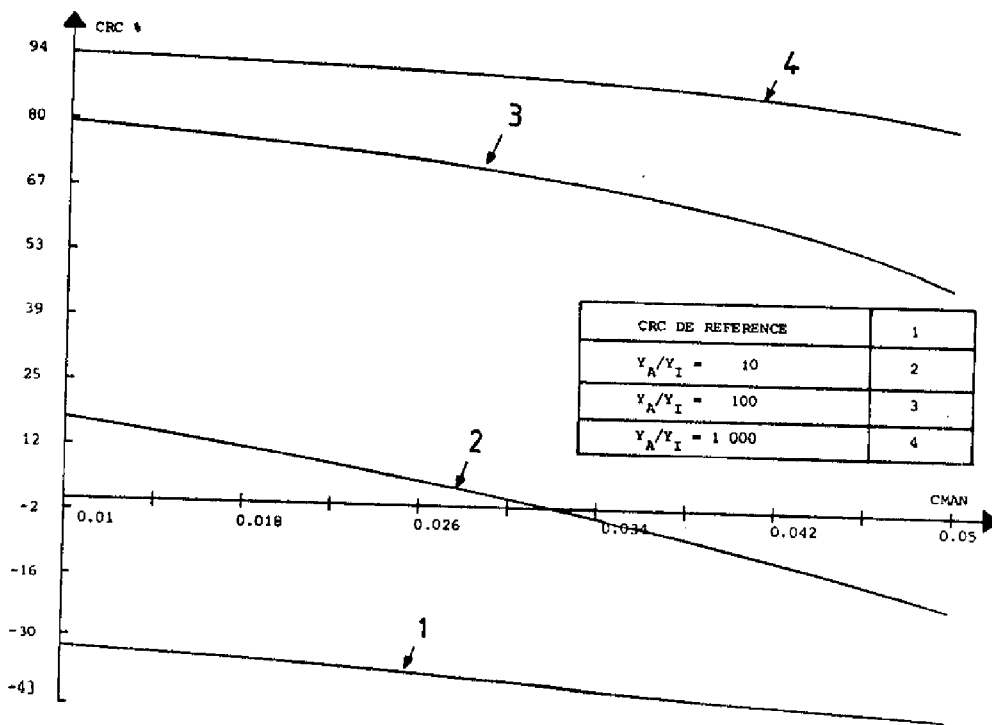
$\lambda = 10^{-3}/\text{heure}$	CAUT = .95	RM = 1
$\mu = .25/\text{heure}$	K = 1	RA = 1
$\mu_m = 1/\text{heure}$	MI = .3	P = 4
	MA = 1	YA/YI = 1

Figure 3.8 Bénéfices apportés par la reconfiguration manuelle

III.2.1.2 Comparaison entre la redondance sélective active et la redondance massive

Afin d'analyser l'influence sur le CRC de l'amélioration du facteur de couverture obtenue par l'utilisation de la structure redondante massive, nous donnons à la figure 3.9 l'évaluation du CRC d'une structure redondante massive par rapport à une structure redondante sélective active.

Si la redondance massive n'est pas envisageable pour $Y_A/Y_I \leq 10$, l'amélioration apportée sur le facteur de couverture la rend économiquement viable pour $Y_A \gg Y_I$.



CRC DE REFERENCE

$\lambda = 10^{-3}/\text{heure}$

$\mu = .25 / \text{heure}$

REDONDANCE	
MASSIVE	SELECTIVE ACTIVE
CAUT=1	CAUT=.95
CMAN=0	$\mu_m = 1/\text{heure}$

$K = 1$

$RM = 1$

$MI = .3$

$RA = 1$

$MA = 1$

$P = 4, Y_A/Y_I = 1$

Figure 3.9 Réduction de coût apportée par la redondance massive par rapport à la redondance sélective active

III.3 Réduction du coût de maintenance

Dans le paragraphe précédent nous avons montré que, dans le cas où les paramètres Y_A et Y_I ont le même ordre de grandeur, la maintenabilité a une grande importance dans la réduction du coût. Cet aspect se traduit au niveau de la conception des systèmes tolérants aux fautes, par les points suivants :

- des mécanismes d'aide à la maintenance doivent être incorporés au système de manière à réduire le temps moyen de réparation et le nombre d'unités à remplacer et à retester [SED,80],
- l'introduction de la redondance doit permettre, à la suite d'une panne tolérée, l'adoption d'une politique de maintenance plus souple et moins coûteuse.

Etant donné la faible valeur du rapport Y_A/Y_I , il n'est pas envisageable d'adopter des techniques de redondance entraînant une importante augmentation matérielle, comme par exemple, la redondance massive. Pour les systèmes dont le fonctionnement est assuré par un ensemble d'unités identiques, l'adjonction d'une unité d'attente devient moins coûteuse et de ce fait envisageable quand $Y_A/Y_I \sim 1$. Nous consacrons ce paragraphe à l'analyse de la réduction du coût de maintenance due à l'adjonction d'une unité d'attente à un système non redondant constitué de N unités actives.

Le système non redondant est constitué de N unités actives sans possibilité de dégradation progressive des performances :

- les N unités sont utilisées pour l'exécution des tâches,
- la panne d'une unité entraîne l'arrêt total du système.

La figure 3.10 donne les modèles markoviens et les structures de revenu superposées aux modèles. Le modèle markovien de la structure redondante à N unités a été donné dans le deuxième chapitre (paragraphe III.1).

Pour conduire l'analyse de sensibilité du CRC aux paramètres du modèle, nous avons retenu la même approche que celle adoptée au paragraphe précédent :

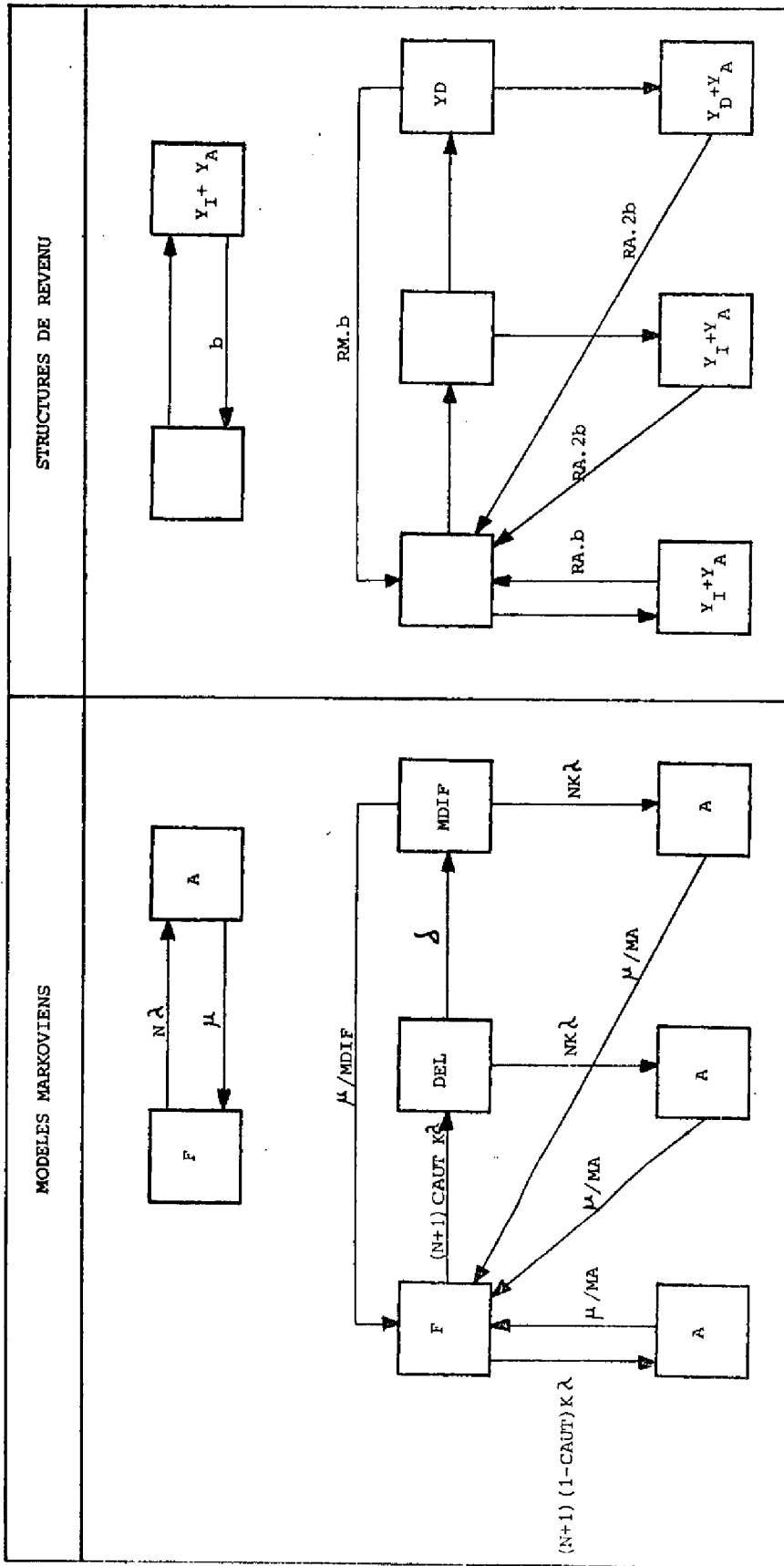
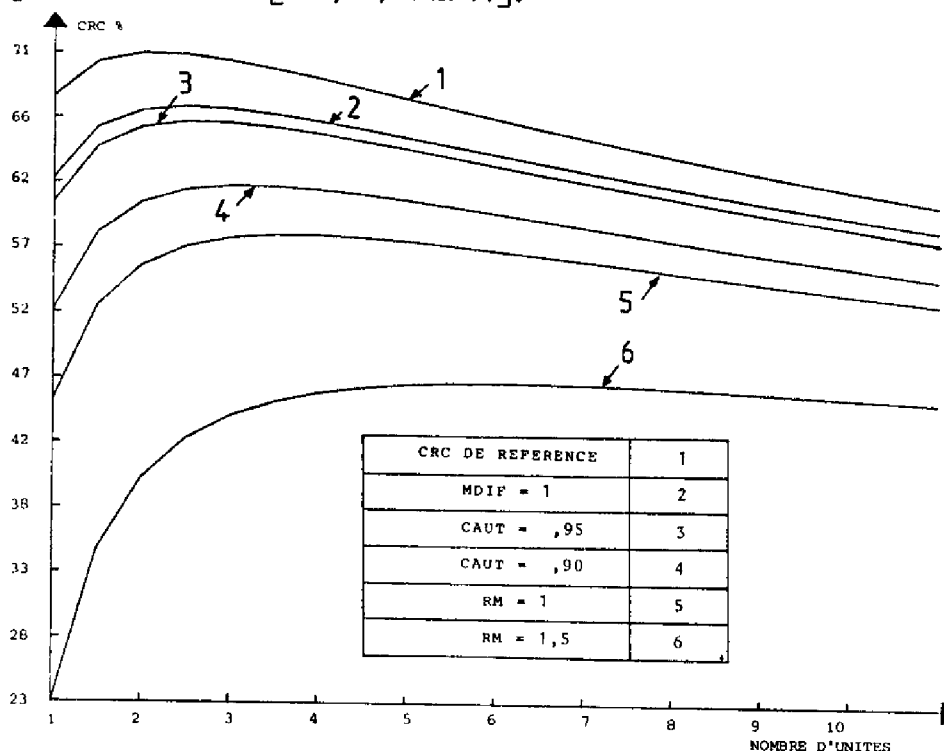


Figure 3.10 Modèles markoviens et structures de revenu de la structure non redondante et de la structure redondante à N-unités

- les valeurs de référence utilisées correspondent à un système idéal à haut niveau de performances,
- le taux d'intérêt $\gamma \ll \lambda_{ii}, \forall_i$.

Le CRC est déterminé en fonction de N, N étant le nombre minimal d'unités nécessaires à l'exécution des tâches. Les figures 3.11 et 3.12 montrent l'influence des paramètres sur le CRC :

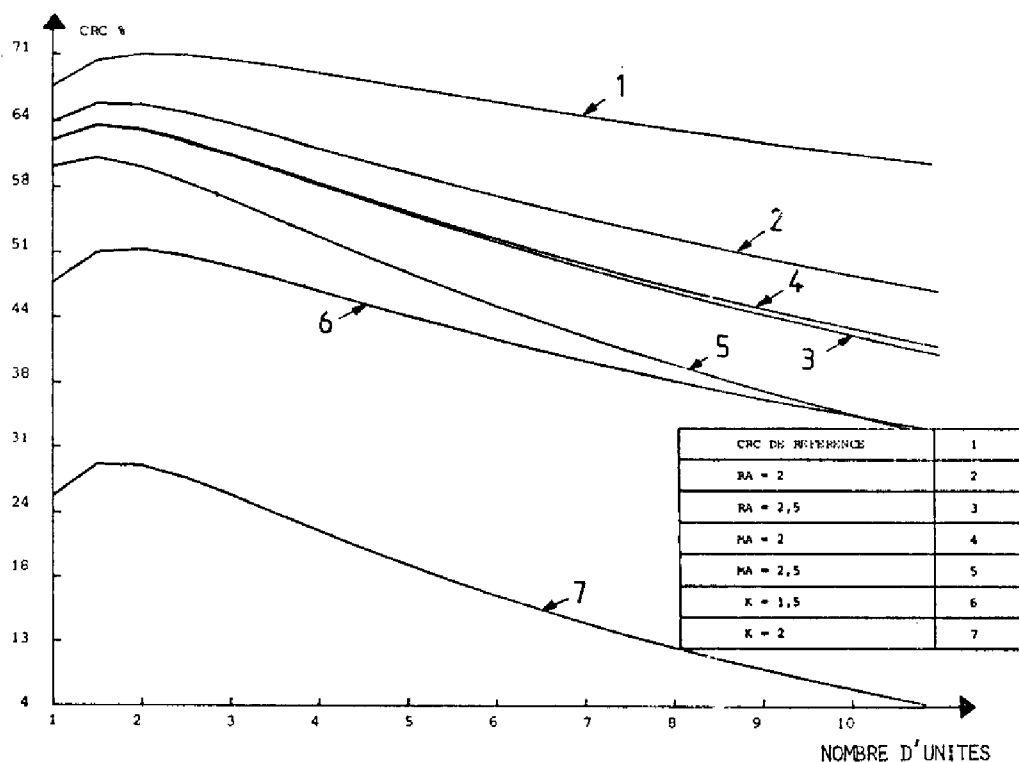
- on note la grande sensibilité du CRC par rapport aux paramètres RM et K. Ce résultat met en évidence l'importance qui doit être accordée, lors de la phase de conception, aux sous-ensembles permettant de localiser les unités en panne. Il faut noter que l'utilisation de circuits VLSI doit permettre de réaliser les fonctions nécessaires à la tolérance aux fautes sans augmenter de façon significative le taux de panne de l'unité [SED,80, CAR 77].



CRC DE REFERENCE

$\lambda = 10^{-3}/\text{heure}$	CAUT = 1	RM = .5
$\mu = .25 /\text{heure}$	K = 1	RA = 1
$\delta = .025/\text{heure}$	MDIF = .1	P = 1.5
	MA = 1	YD/YI = .1
		YA/YI = 1

Figure 3.11 Système N-unités - Réduction de coût apportée par l'adjonction d'une unité d'attente



CRC DE REFERENCE

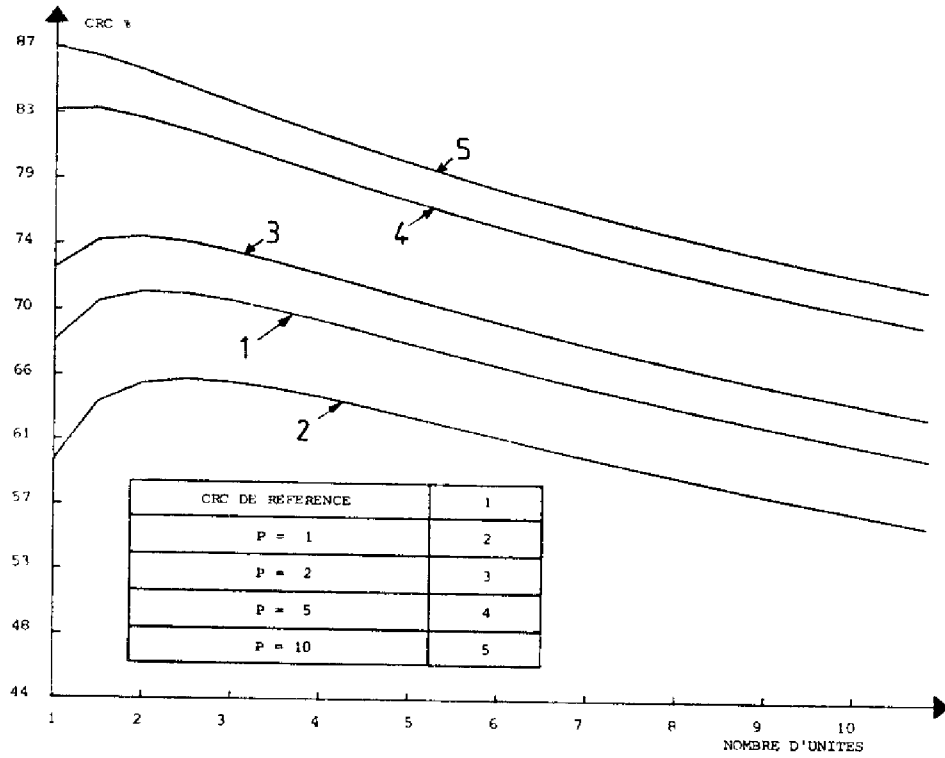
$\lambda = 10^{-3}$ /heure
 $\mu = .25$ /heure
 $\delta = .025$ /heure
 CAUT = 1
 K = 1
 MDIF = .1
 MA = 1
 RM = .5
 RA = 1
 P = 1.5
 YD/YI = .1
 YA/YI = 1

Figure 3.12 Système N-unités - Réduction de coût apportée par l'adjonction d'une unité d'attente

- on voit qu'il y a un nombre optimum d'unités qui permet de maximiser le CRC ; ce résultat peut s'expliquer par le fait que l'adjonction de l'unité en attente 1) augmente le nombre des interventions de maintenance lorsque le nombre d'unités fonctionnelles N est faible, 2) augmente l'indisponibilité du système lorsque N est grand. Cela explique aussi l'allure des courbes des figures 3.11 et 3.12 :

- . la figure 3.11 montre que le CRC est plus sensible aux paramètres liés aux états de maintenance, MDIF et RM, quand N est faible,
- . la figure 3.12 montre que la sensibilité du CRC aux paramètres RA, MA est plus accentuée pour N grand.

La figure 3.13 montre que la tolérance aux fautes est d'autant plus efficace dans la réduction du coût de maintenance que le facteur P prend des valeurs élevées. Comme nous l'avons mentionné au paragraphe III.1, le facteur P est amené à croître, ce qui permet d'affirmer que la tolérance aux fautes est une solution intéressante pour les systèmes futurs.



CRC DE REFERENCE

$$\lambda = 10^{-3}/\text{heure}$$

$$\mu = .25 / \text{heure}$$

$$\delta = .025/\text{heure}$$

$$\text{CAUT} = 1$$

$$K = 1$$

$$\text{MDIF} = .1$$

$$\text{MA} = 1$$

$$\text{RM} = .5$$

$$\text{RA} = 1$$

$$P = 1.5$$

$$\text{YD/YI} = .1$$

$$\text{YA/YI} = 1$$

Figure 3.13 Système N-unités - Réduction de coût apportée par l'adjonction d'une unité d'attente

IV - CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode pour l'analyse économique des bénéfiques. Cette méthode permet de prendre en compte les principaux paramètres économiques qui sont introduits dans le modèle markovien qui représente le comportement de la structure, fournissant ainsi des résultats quantitatifs qui viennent en support de la décision de choix entre les différents systèmes envisageables.

Cette méthode présente, à notre avis, les avantages suivants :

- elle a un large spectre d'application dans les modélisations prenant en compte les aspects économiques et la sûreté de fonctionnement des systèmes,
- elle utilise les résultats précédemment obtenus sur l'évaluation de la sûreté par des méthodes markoviennes, la structure de revenu étant superposée au modèle markovien,
- une grande variété de grandeurs peut être définie, amenant une connaissance plus fine du comportement du système,
- elle peut être facilement automatisée sous forme d'un programme d'ordinateur.

L'application de la méthode à l'analyse des bénéfiques (réduction de coût) amenés par la tolérance aux fautes, a fourni des résultats quantitatifs qui permettent d'arriver aux conclusions suivantes :

- les coûts réduits de maintenance peuvent être obtenus avec des techniques de tolérance aux fautes, à condition qu'une attention particulière soit apportée à certaines fonctions qui correspondent aux paramètres critiques qui ont été déterminés lors de l'étude de sensibilité,
- l'idée générale que la tolérance aux fautes augmente le coût de maintenance est tout à fait injustifiée. Nous avons montré, par exemple, que les fonctions ajoutées, telles que la fonction de détection qui permet de réduire le nombre de sous-ensembles à remplacer peuvent conduire à une importante économie dans le coût de maintenance,
- il est tout à fait justifié d'envisager d'obtenir des systèmes plus sûrs avec des techniques de tolérance aux fautes qui conduiront à des coûts plus faibles.

CONCLUSION

Les résultats exposés dans ce mémoire peuvent être regroupés en deux catégories selon qu'ils portent :

- sur l'introduction du niveau de confiance dans les études de prévision de la sûreté de fonctionnement,
- sur la définition d'une méthode d'analyse économique des coûts pendant le cycle d'exploitation du système.

0

0 0

En ce qui concerne l'introduction du niveau de confiance, les résultats obtenus peuvent être classés en deux catégories :

- résultats relatifs aux méthodes d'évaluation des grandeurs caractéristiques de la sûreté de fonctionnement,
- résultats relatifs à l'application des résultats précédents à l'évaluation des systèmes informatiques.

L'évaluation des grandeurs caractéristiques de la sûreté de fonctionnement a été effectuée par deux méthodes :

- évaluation basée sur la valeur moyenne,
- évaluation basée sur la limite de confiance.

Nous avons tout d'abord montré que ces grandeurs peuvent être exprimées à partir des variables aléatoires qui représentent le nombre de transitions entre les états que peut prendre le système, et le temps de séjour dans un sous-ensemble d'états.

Les résultats fondamentaux relatifs à l'évaluation des limites de confiance des variables aléatoires qui représentent la fréquence et la durée d'un événement aléatoire découlent de la théorie du renouvellement ; notre étude a consisté à généraliser ces résultats à un processus markovien à N-états ; les résultats que nous avons obtenus ont conduit :

- à l'établissement des expressions mathématiques permettant l'accès de manière systématique aux limites de confiance :

.de manière exacte à partir de la fonction de répartition ; les expressions s'avèrent cependant assez complexes, ce qui ôte une grande partie de l'intérêt de cette méthode sur le plan pratique, .de manière approchée en utilisant l'approche asymptotique quand le temps tend vers l'infini ; les expressions sont, dans ce cas, simples, la complexité supplémentaire de calcul induite par rapport à l'évaluation de la valeur moyenne n'étant pas importante.

- au développement de programmes permettant la résolution automatique des expressions précédentes.

Les résultats obtenus à partir de l'application de ces méthodes à l'évaluation du taux d'arrêt et de l'indisponibilité des structures non-redondantes et redondantes ont montré l'importance de la prise en compte du niveau de confiance dans l'évaluation prévisionnelle ; ces résultats peuvent être résumés par les points suivants :

- l'introduction du niveau de confiance conduit à des résultats qui sont quantitativement et qualitativement différents de ceux obtenus à partir de la valeur moyenne,
- cette différence découle principalement du fait que les temps de défaillance sont exponentiellement distribués, hypothèse qui est couramment retenue pour les systèmes informatiques,
- l'approche asymptotique est un bon compromis lors de la phase d'aide à la conception entre des calculs complexes permettant l'accès à la fonction de répartition et une estimation ponctuelle uniquement basée sur la valeur moyenne.

Les études que nous avons présentées sont susceptibles de développement sur les deux plans suivants :

- application : l'application des résultats obtenus permet l'évaluation des structures à dégradation progressive de performance. (Ces structures connaissent actuellement un grand développement),
- méthode : l'extension des résultats exposés doit permettre la prise en compte des lois non-exponentielles (utilisation de la méthode des états fictifs par exemple).

En ce qui concerne l'analyse économique, notre contribution a principalement porté sur deux points :

- développement des expressions de la structure de revenu proposée par Howard pour les processus markoviens homogènes,
- définition d'une méthode d'analyse économique des coûts induits pendant le cycle d'exploitation du système.

La détermination de la valeur moyenne du revenu généré par la structure de revenu superposée au modèle markovien a conduit à l'établissement :

- de l'équation différentielle permettant l'accès à la valeur moyenne du revenu,
- des expressions simplifiées :
 - .quand le temps tend vers l'infini,
 - .quand le taux d'intérêt est petit devant les taux de transition.

La démarche suivie pour la définition d'une méthode d'analyse économique a été identique à celle généralement utilisée pour l'évaluation des systèmes complexes ; elle comprend :

- l'identification des principales composantes à prendre en compte,
- la définition des grandeurs caractéristiques et le développement des outils automatisés d'aide à la conception,
- des analyses de sensibilité permettant de dégager les facteurs dominants.

L'application de la méthode à l'analyse de la réduction de coût amenée par la tolérance aux fautes a fourni des résultats quantitatifs qui ont permis de tirer les conclusions suivantes :

- l'idée générale que la tolérance aux fautes augmente le coût d'exploitation est tout à fait injustifiée. Nous avons montré, par exemple, que les fonctions ajoutées, telles que les fonctions de détection et diagnostic, peuvent conduire à une importante économie dans le coût de maintenance.

- il est tout à fait justifié d'envisager d'obtenir des systèmes plus sûrs avec des techniques de tolérance aux fautes qui conduiront à des coûts d'exploitation plus faibles.

Les voies qui s'ouvrent à l'extension de l'étude économique concernent :

- la prise en compte du coût d'approvisionnement initial des pièces de rechange qui, conjointement aux coûts de remplacement et les frais de main d'oeuvre, correspondent à plus de 90% du coût de maintenance,
- l'établissement des expressions permettant l'accès à la limite de confiance qui donne au concepteur le moyen d'effectuer des évaluations plus représentatives que s'il considère uniquement la valeur moyenne.

§§§

ANNEXES

ANNEXE A

Démonstration de l'égalité

$$\{d_t^0 \leq x\} = \{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\} \quad (1)$$

Soient d_t^0 et d_t^1 les variables aléatoires qui représentent les temps de séjour dans les états Z_0 et Z_1 à l'instant t et soit l'état Z_0 , l'état du processus à l'instant initial.

L'approche suivie est inspirée de celle proposée en [MUT,68].

Nous considérons les processus $\{x_n^0\}$ et $\{x_n^1\}$ qui ont été définis dans le premier chapitre (paragraphe II.3.1) et nous introduisons les processus suivants :

$$B^0(y) = \sum_{k=1}^{N_y^1 + 1} x_k^0 : \text{lorsque } N_y^1 \geq 0 \quad (2)$$

$$B^1(y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_y^0} x_k^1 : \text{lorsque } N_y^0 > 0 \\ 0 : \text{dans le cas contraire} \end{cases} \quad (3)$$

La figure A1 donne une représentation de l'évolution de ces deux processus :

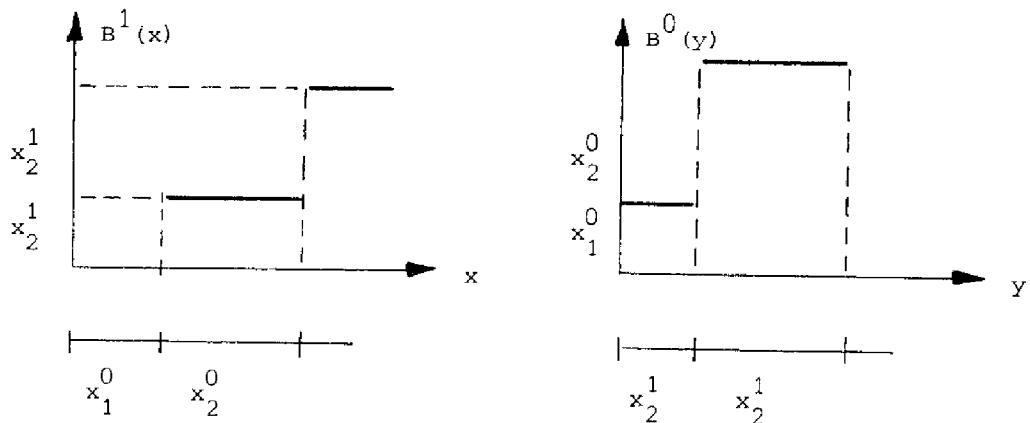


Figure A1

L'instant t où le processus à 2-états Z_0 et Z_1 est observé, correspond à la somme des temps de séjour passé en Z_0 et Z_1 .

Nous allons montrer tout d'abord que

$$\{d_t^0 \leq x\} \implies \{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\}$$

Nous avons l'identité suivante

$$\{d_t^0 \leq x\} = \{B^0(y) \leq x\}$$

Sachant que $t = y + B^0(y)$

(4)

où y est le temps de séjour dans l'état Z_1 à l'instant t

A partir de la définition de $B^0(y)$, on peut écrire

$$\{B^0(y) \leq x\} = \left\{ \sum_{k=1}^{N_y^1+1} x_k^0 \leq x \right\} = \left\{ S_{N_y^1+1}^0 \leq x \right\}$$

Sachant que

$$\{S_n^0 \leq t\} = \{N_t^0 \geq n\}$$

Nous avons l'égalité

$$\left\{ S_{N_y^1+1}^0 \leq x \right\} = \left\{ N_x^0 \geq N_y^1 + 1 \right\}$$

Si $\{d_t^0 \leq x\}$ nous avons, d'après l'égalité (4), $y \geq t-x$

En fonction de la monotonie croissante de N_y^1 avec y on peut écrire

$$y \geq t-x \implies N_y^1 \geq N_{t-x}^1$$

où

$$\{d_t^0 \leq x\} \implies \{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\}$$

Pour prouver l'égalité (i), il nous faut maintenant montrer que

$$\{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\} \implies \{d_t^0 \leq x\}$$

Nous avons

$$\{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\} = \{S_{N_{t-x}^1 + 1}^0 \leq x\} = \{B^0(t-x) \leq x\}$$

Sachant que

$$t = B^0(t-x) + B^1(x)$$

où x est le temps de séjour dans l'état Z_0 à l'instant t
d'où

$$\{B^0(t-x) \leq x\} \implies \{B^1(x) > t-x\}$$

sachant que $t = x + B^1(x)$

$$\{B^1(x) > t-x\} \equiv \{d_t^1 > t-x\}$$

De l'égalité

$$d_t^0 + d_t^1 = t$$

on peut tirer

$$\{d_t^1 > t-x\} \implies \{d_t^0 \leq x\}$$

d'où

$$\{N_x^0 \geq N_{t-x}^1 + 1\} \implies \{d_t^0 \leq x\}$$

La démonstration de l'égalité

$$\{d_t^1 \leq x\} = \{N_x^1 \geq N_{t-x}^0\}$$

est effectuée suivant une démarche identique à celle utilisée dans la démonstration précédente.

ANNEXE B

Démonstration de la proposition-8

L'ensemble des transitions $\{T\}$ est divisé en deux sous-ensembles disjoints $\{T_0\}$ et $\{T_1\}$.

La probabilité $v_i^1(n, t + \Delta t)$ pour que le nombre de transitions du type -1 s'étant produit dans l'intervalle de temps $[0, t + \Delta t]$ soit égal à n , sachant que le processus était dans l'état i à l'instant initial, est donnée par l'expression :

$$v_i^1(n, t + \Delta t) = \sum_{k=1}^N \lambda_{ik}^1 \Delta t \cdot v_k^1(n-1, t) +$$

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N \lambda_{ik}^0 \cdot \Delta t \cdot v_k^1(n, t) +$$

$$v_i^1(n, t) \left[1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (\lambda_{ik}^0 + \lambda_{ik}^1) \Delta t \right]$$

Le premier terme prend en compte la possibilité que la transition vers un autre état à partir de l'état initial i , soit du type -1 ; dans ce cas, il suffit d'avoir $(n-1)$ transitions du type -1 dans le temps t qui reste.

Les deux termes suivants correspondent respectivement à la possibilité que la première transition soit du type-0 et qu'il n'y ait pas de transition dans l'intervalle $[0, \Delta t]$.

D'après la notation utilisée dans le premier chapitre (paragraphe III.2)

$$\lambda_{ii}^0 = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (\lambda_{ik}^0 + \lambda_{ik}^1), \quad \lambda_{ii}^1 \equiv 0$$

En faisant tendre Δt vers zéro, nous avons :

$$dv^1(n, t) / dt = \sum_{k=1}^N v_k^1(n-1, t) \lambda_{ik}^1 + \sum_{k=1}^N v_k^1(n, t) \lambda_{ik}^0$$

soit sous forme matricielle :

$$dV^1(n, t) / dt = \Lambda_1 V^1(n-1, t) + \Lambda_0 V^1(n, t)$$

$$\begin{matrix} & & 0 \\ & & \\ 0 & & 0 \end{matrix}$$

ANNEXE C

Démonstration de la proposition-11

Définitions

Nous considérons que l'ensemble des transitions $\{T\}$ est divisé en quatre sous-ensembles disjoints définis comme suit (figure C1) :

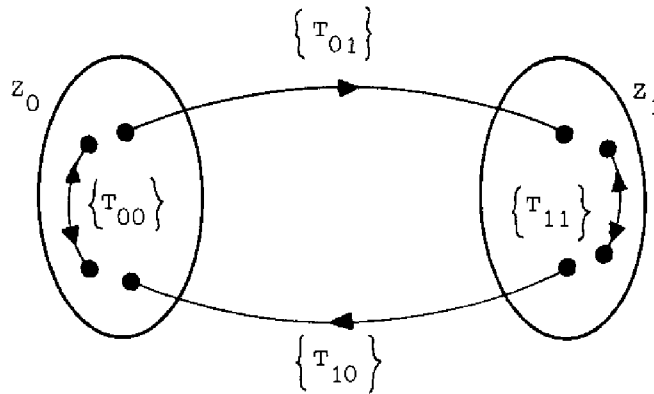


Figure C1

- $\{T_{00}\}, \{T_{11}\}$: l'ensemble des transitions entre les états appartenant respectivement aux sous-ensembles Z_0 et Z_1 .
- $\{T_{01}\}, \{T_{10}\}$: l'ensemble des transitions de passage d'un état appartenant à Z_0, Z_1 , à un état appartenant à Z_1, Z_0 .

Les partitions de la matrice des taux de transition $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ et de la matrice des probabilités de la chaîne immergée $\mathbb{P} = \{p_{ij}\}$, $p_{ii} = -1$, en tenant compte des sous-ensembles $\{T_{00}\}, \{T_{01}\}, \{T_{10}\}$ et $\{T_{11}\}$ sont indiquées ci-après :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} \end{bmatrix} \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} \mathbb{P}_{00} & \mathbb{P}_{01} \\ \mathbb{P}_{10} & \mathbb{P}_{10} \end{bmatrix}$$

Nous considérons les processus $\{x_n^0\}$ et $\{x_n^1\}$ comme définis dans le premier chapitre (paragraphe III.3.1) :

- le processus $\{x_n^0\}$ pour lequel les temps de séjour dans les états $i \in Z_1$ sont nuls, ce qui revient à considérer que les passages dans les états $i \in Z_1$ sont instantanés ; un renouvellement a lieu dans le processus $\{x_n^0\}$ chaque fois qu'une transition appartenant à l'ensemble $\{T_{01}\}$ a lieu,
- le processus $\{x_n^1\}$ pour lequel le temps de séjour dans les états $i \in Z_0$ est nul, un renouvellement ayant lieu à chaque transition appartenant à l'ensemble $\{T_{10}\}$.

La notion d'état dont le passage est instantané, est introduite en [COX,68, page 179] ; il sera appelé état instantané. Si l'état i est un état instantané, nous avons

$$\lambda_{ii} = -\infty$$

La densité de probabilité du temps de séjour dans l'état instantané i est donnée par l'expression :

$$w_i(t) = \delta(t)$$

où $\delta(t)$ est la fonction d'impulsion de DIRAC à l'origine.

Nous savons également, d'après l'expression de la densité de masse $q_{ij}(t)$ pour un processus markovien homogène, que pour l'état instantané i :

$$q_{ij}(t) = p_{ij} \delta(t)$$

Démonstration

Nous considérons tout d'abord la démonstration de l'expression permettant l'accès au vecteur de densités de masse $\mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t)$. Nous savons que dans ce cas, les états $i \in Z_1$ sont instantanés.

Nous avons deux cas à considérer :

1. L'état $i \in Z_0$. L'expression de $v_i^{01}(n, t + \Delta t)$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
v_i^{01}(n, t + \Delta t) &= \sum_{k \in Z_1} \lambda_{ik}^{01} \Delta t v_k^{01}(n-1, t) + \\
&\sum_{\substack{k \neq i \\ k \in Z_0}} \lambda_{ik}^{00} \Delta t v_k^{01}(n, t) + \\
&+ v_i^{01}(n, t) [1 + \lambda_{ii}^{00} \cdot \Delta t]
\end{aligned}$$

où $\lambda_{ij}^{n,m}$ - taux de transition appartenant à l'ensemble $\{T_{n,m}\}$

$$\lambda_{ii}^{00} = - \left[\sum_{k \neq i} \lambda_{ik}^{00} + \lambda_{ik}^{01} \right]$$

Dans cette expression le premier terme prend en compte que la première transition quittant l'état i est effectuée vers un état de l'ensemble Z_1 . La possibilité que la première transition soit vers un autre état de l'ensemble Z_0 est prise en compte par le deuxième terme. Enfin, le troisième terme prend en compte la possibilité qu'il n'y ait pas de transition dans l'intervalle $[0, \Delta t]$

2. L'état $i \in Z_1$. Nous savons, pour le processus considéré, que l'état i est un état instantané. De ce fait, pendant que le processus est dans un état $i \in Z_1$, il n'y a pas de variation du temps.

$$v_i^{01}(k, t) = \sum_{j \in Z_0} p_{ij}^{10} v_j^{01}(k, t) + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in Z_1}} p_{ij}^{11} v_j^{01}(k, t)$$

où $p_{ij}^{n,m}$ - probabilité de transition de la chaîne immergée appartenant à l'ensemble $\{T_{n,m}\}$

Le premier terme prend en compte la possibilité que la première transition soit effectuée de l'ensemble Z_1 vers l'ensemble Z_0 ; le deuxième terme tient compte de la possibilité que l'ensemble Z_1 ne soit pas quitté.

Des expressions précédentes, on déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad d v_i^{01}(n,t) / dt = \sum_{k \in Z_1} \lambda_{ik}^{01} v_k^{01}(n-1,t) + \sum_{k \in Z_0} \lambda_{ik}^{00} v_k^{01}(n,t), \quad i \in Z_0 \\ 2. \quad 0 = \sum_{j \in Z_0} p_{ij}^{10} v_j^{10}(k,t) + \sum_{j \in Z_1} p_{ij}^{11} v_j^{01}(k,t), \quad i \in Z_1 \end{array} \right.$$

soit sous forme matricielle

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \quad d \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t) / dt = \mathbb{A}_{01} \mathbb{V}_{Z_1}^{01}(n-1,t) + \mathbb{A}_{00} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t) \\ 2. \quad \mathbb{0} = \mathbb{P}_{10} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(k,t) + \mathbb{P}_{11} \mathbb{V}_{Z_1}^{01}(k,t) \end{array} \right.$$

En exprimant $\mathbb{V}_{Z_1}^{01}(k,t)$ en fonction de $\mathbb{V}_{Z_0}^{01}(k,t)$ et en faisant $k=n-1$, on obtient

$$\mathbb{V}_{Z_1}^{01}(n-1,t) = (-\mathbb{P}_{11})^{-1} \mathbb{P}_{10} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n-1,t)$$

Alors, il vient :

$$d \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t) / dt = \mathbb{A}_{01} (-\mathbb{P}_{11})^{-1} \mathbb{P}_{10} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n-1,t) + \mathbb{A}_{00} \mathbb{V}_{Z_0}^{01}(n,t) \quad (1)$$

En utilisant la même démarche que celle suivie pour la démonstration de l'expression (1) on peut démontrer l'expression permettant l'accès à $\mathbb{V}_{Z_0}^{10}(n,t)$.

Remarque

On peut remarquer que l'introduction des états instantanés dans le processus réduit le nombre d'états à prendre en compte dans l'équation différentielle une fois que la probabilité que le processus soit dans un état instantané est nulle.

Cette technique a été utilisée en [LAP,76] pour réduire le nombre d'états de l'équation différentielle de la fiabilité des systèmes réparables quand les taux de réparation sont grands devant les taux de défaillances. Les résultats de la proposition-11 constituent une extension de ces résultats, permettant l'accès à l'évaluation du nombre de transitions.

0

0 0

ANNEXE D

Programmes LIMCONF et SURF I

-

Traitement du modèle

Le but de cette annexe est de définir l'organisation des fichiers de données des programmes LIMCONF et SURFI.

La partie du fichier de données qui est commune aux deux programmes est indiquée par le tableau de la figure D1.

DONNEES	COMMENTAIRES
LAMBDA = nom	nom = nom du paramètre de la matrice des taux de transition qui représente le taux de défaillance
CVAR = nom VI VF ou CVAR =	nom = nom du paramètre de la matrice des taux de transition que l'on veut faire varier. Cette option permet l'obtention d'une grandeur en fonction du paramètre choisi : dans ce cas, il faut fournir les valeurs initiale VI et finale VF de l'intervalle de variation du paramètre permet la suppression de l'option
I,J = expression littérale	Définition des éléments de la matrice des taux de transition Il n'est pas nécessaire de fournir les éléments correspondant à des zéros de la matrice
. . .	Rubrique de séparation
nom=liste de valeurs	Elle contient la liste de valeurs numériques des paramètres de la matrice des taux de transition séparées par des virgules
* * *	Rubrique de séparation

FIGURE D 1

Tracé des courbes

La présentation des résultats issus des programmes LIMCONF et SURFI peut être effectuée sous forme d'un tracé.

Le tableau de la figure D2 donne les options en ce qui concerne la définition du tracé des courbes.

COMMENTAIRES		LIMCONF	SURFI
commentaire devant s'inscrire	sous le tracé	défini par les paramètres TITRE (1), TITRE (2)	défini par les paramètres TITRE (1), TITRE (2)
	à droite de l'axe Y	défini par le paramètre Y TEXT	dix premiers caractères de TITRE (1)
	sous l'axe X	défini par le paramètre X TEXT	dix premiers caractères de TITRE (2)
forme du tracé LIN - linéaire LOG - logarithmique	l'axe Y	LIN	défini par le paramètre OPT
	l'axe X	LIN	défini par le paramètre OPT
dimension du cadre dans lequel s'inscrit le tracé		axe X = 20 cm axe Y = 15 cm	axe X = 20 cm axe Y = 15 cm
paramètre retenu pour l'abscisse		le temps	défini par CVAR ou niveau de confiance

FIGURE D2

Le programme LIMCONF

Nous divisons l'ensemble d'état $\{E\}$ que peut prendre le processus markovien en deux sous-ensembles disjoints $\{E_0\}$ et $\{E_1\}$; nous nous intéressons à évaluer la limite de confiance du nombre de passages dans le sous-ensemble $\{E_1\}$.

Le tableau de la figure D3 donne l'organisation du fichier de données du programme LIMCONF.

DONNEES	COMMENTAIRES
TITRE(1),TITRE(2)	commentaire devant s'inscrire sous le tracé
YTEXT, XTEXT	définition des axes
N	dimension de la matrice des taux de transition
Définition du modèle	comme indiqué dans le tableau de la figure D1
VEI	vecteur des probabilités initiales
VEF	vecteur permettant d'identifier les éléments appartenant à l'ensemble $\{E_1\}$: $VEF(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{E_1\} \\ 0 & \text{si } i \in \{E_0\} \end{cases}$
Niveau de confiance	valeur numérique du niveau de confiance
[RK,NORM]	vecteur à deux éléments ; permet la sélection de la méthode d'évaluation de la limite de confiance 10 - Runge Kutta 01 - approche asymptotique 11 - les deux
H	pas d'intégration
PONT	nombre de points d'intégration à évaluer
NLIM	le programme se termine - une fois fini le nombre de points à calculer, - si le nombre de passages est supérieur à NLIM

FIGURE D3

Le programme SURFI

Le programme SURFI offre à l'utilisateur deux options :

- option P : détermination des composantes indépendantes du temps,
- option C : détermination des limites de confiance.

Dans le cas de l'option P, la composante est déterminée en fonction d'un paramètre de la matrice des taux de transition qui doit être spécifié par la rubrique CVAR donnée dans le tableau de la figure D1.

Dans le cas de l'option C, il y a deux possibilités :

- la rubrique CVAR est spécifiée : la limite de confiance est déterminée en fonction du paramètre choisi,
- la rubrique CVAR est vide : la limite de confiance est déterminée en fonction du niveau de confiance ; les valeurs initiale et finale de l'intervalle de variation sont définies par la rubrique VECP qui a, dans ce cas, deux éléments (NP=2).

L'organisation du fichier de données au programme SURFI est donnée par le tableau de la figure D4.

0
0 0

DONNEES	COMMENTAIRES
TITRE (1),TITRE(2)	commentaire devant s'inscrire sous le tracé
N	dimension de la matrice Λ
N_0	dimension de la sous.matrice Λ_{00} ; remarque : $N_0 \leq N$
NTRACE	nombre de vecteurs de sommation UN
Définition du modèle	comme indiqué dans le tableau de la figure D1
VEI	vecteur des probabilités initiales
UN	vecteur de sommation ; le programme permet la définition de plusieurs vecteurs UN selon l'indication fournie par le paramètre NTRACE
P ou CFS ou CFI ou CDS ou CDI NT, NP VECT VECP	option P : composantes indépendantes du temps option C : détermination des limites de confiance: CFS - supérieure du nombre de passages CFI - inférieure du nombre de passages CDS - supérieure du temps de séjour CDI - inférieure du temps de séjour données supplémentaires pour l'option C : nombre d'éléments affectés respectivement aux rubriques VECT et VECP valeurs du temps d'opération valeurs du niveau de confiance
C ou F* ou F	rubrique permettant d'indiquer qu'il y a d'autres exemples à traiter rubrique permettant d'indiquer la fin des exem- ples et qu'ils doivent être tracés sur les mêmes axes X-Y rubrique permettant d'indiquer la fin des exem- ples et qu'ils doivent être tracés sur des axes X-Y différents

FIGURE D4

ANNEXE E

Détermination de la valeur moyenne du revenu

La valeur moyenne du revenu généré dans l'intervalle de temps $[0, t]$ est donnée par $g_i(t, \gamma)$,

où

γ : représente le taux d'intérêt

i : est l'état initial à l'instant initial

$g_i(t, \gamma)$ est donné par l'expression

$$g_i(t, \gamma) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_t^{+\infty} q_{ij}(x) dx \left[\int_0^t y_i e^{-\gamma x} dx \right] \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_0^t q_{ij}(\tau) \left[e^{-\gamma \tau} b_{ij} + e^{-\gamma \tau} g_j(t-\tau, \gamma) + \int_0^{\tau} y_i e^{-\gamma x} dx \right] d\tau$$

Sachant que $\int_0^t y_i e^{-\gamma x} dx = y_i \frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma}$

et que $\bar{Q}_{ij}(t) = \int_t^{+\infty} q_{ij}(x) dx$, $Q_{ij}(t) = P_{ij} - \bar{Q}_{ij}(t)$

il vient

$$g_i(t, \gamma) = \sum_{j=1}^N \bar{Q}_{ij}(t) y_i \frac{(1 - e^{-\gamma t})}{\gamma} + \\ \frac{y_i}{\gamma} \left[Q_{ij}(t) - \int_0^t q_{ij}(\tau) e^{-\gamma \tau} d\tau \right] + \\ b_{ij} \int_0^t q_{ij}(\tau) e^{-\gamma \tau} d\tau + \\ \int_0^t e^{-\gamma \tau} q_{ij}(\tau) g_j(t-\tau, \gamma) d\tau$$

Regroupant les termes

$$g_i(t, \gamma) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{y_i}{\gamma} [\bar{Q}_{ij}(t) + Q_{ij}(t)] - \\ \frac{y_i}{\gamma} [\bar{Q}_{ij}(t) e^{-\gamma t} + \int_0^t q_{ij}(\tau) e^{-\gamma \tau} d\tau] + \\ b_{ij} \int_0^t q_{ij}(\tau) e^{-\gamma \tau} d\tau + \\ \int_0^t e^{-\gamma \tau} q_{ij}(\tau) g_j(t-\tau, \gamma) d\tau$$

Le premier terme est constant et égal à $\frac{y_i p_{ij}}{\gamma}$

où p_{ij} représente les probabilités de transition de la chaîne immergée.

Sachant que dans un processus markovien homogène $q_{ij}(t) = \lambda_{ij} e^{\lambda_{ii} t}$ les deuxième et troisième termes sont donnés par

$$-\frac{y_i}{\gamma} \left[p_{ij} e^{-(\gamma - \lambda_{ii})t} + \frac{\lambda_{ij}}{\gamma - \lambda_{ii}} (1 - e^{-(\gamma - \lambda_{ii})t}) \right] + \\ b_{ij} \frac{\lambda_{ij}}{\gamma - \lambda_{ii}} (1 - e^{-(\gamma - \lambda_{ii})t})$$

L'expression de $g_i(\gamma, t)$ devient alors :

$$g_i(t, \gamma) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left[\frac{y_i p_{ij}}{\gamma} - \frac{y_i \lambda_{ij}}{\gamma(\gamma - \lambda_{ii})} \right] (1 - e^{-(\gamma - \lambda_{ii})t}) + \\ \frac{b_{ij} \lambda_{ij}}{\gamma - \lambda_{ii}} (1 - e^{-(\gamma - \lambda_{ii})t}) + \\ \lambda_{ij} \int_0^t e^{-(\gamma - \lambda_{ii})\tau} g_j(t-\tau, \gamma) d\tau$$

Le premier terme peut encore être simplifié

$$\frac{y_i p_{ij}}{\gamma} - \frac{y_i \lambda_{ij}}{\gamma(\gamma - \lambda_{ii})} = \frac{y_i p_{ij}}{(\gamma - \lambda_{ii})}$$

De ce fait, il vient

$$g_i(t, \gamma) = \sum_{j=1}^N \frac{y_i p_{ij} + b_{ij} \lambda_{ij}}{(\gamma - \lambda_{ii})} (1 - e^{-(\gamma - \lambda_{ii})t}) + \lambda_{ij} \int_0^t e^{-(\gamma - \lambda_{ii})\tau} g_j(t - \tau, \gamma) d\tau$$

Cette équation peut être résolue à l'aide de la transformée de Laplace. La transformée de Laplace est donnée par

$$g_i(s, \gamma) = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{y_i p_{ij} + b_{ij} \lambda_{ij}}{s(s + \gamma - \lambda_{ii})} + \frac{\lambda_{ij}}{(s + \gamma - \lambda_{ii})} g_j(s, \gamma)$$

Introduisons le paramètre r_i défini par l'expression

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_i \tau_i + b_{ij} p_{ij}, \quad \tau_i = 1 / (-\lambda_{ii})$$

L'expression de $g_i(s, \gamma)$ devient

$$g_i(s, \gamma) = \frac{r_i(-\lambda_{ii})}{s(s + \gamma - \lambda_{ii})} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\lambda_{ij}}{(s + \gamma - \lambda_{ii})} g_j(s, \gamma)$$

En exprimant l'expression sous forme matricielle

$$(s \mathbb{I} + \gamma \mathbb{I} - \mathbb{M}_d) \mathbb{G}(s, \gamma) = -\frac{1}{s} \mathbb{M}_d \mathbb{R} + \mathbb{M}_o \mathbb{G}(s, \gamma)$$

où \mathbb{I} est la matrice identité.

L'équation différentielle du revenu est donnée par l'expression

$$d \mathbb{G}(t, \gamma) / dt = -(\gamma \mathbb{I} - \mathbb{M}) \mathbb{G}(t, \gamma) - \mathbb{M}_d \mathbb{R}$$

0

0 0

BIBLIOGRAPHIE

- [ABR,70] M. ABRAMOVITZ, I.A. STEGUN
"Handbook of Mathematical functions", National Bureau of Standards,
1970.
- [ARN,73] T.F. ARNOLD
"The concept of coverage and its effect on the reliability model
of a repairable system", IEEE Trans.Computers, vol. C-22, n°3,
March 1973, pp. 251-254.
- [BEA,78] M.D. BEAUDRY
"Performance-related reliability measures for computing systems",
IEEE Trans.Computers, vol. C-27, n°6, June 1978, pp. 540-547.
- [BOO,66] A.D. BOOTH
"Numerical methods", Butterworths, London, 1966.
- [BOU,69] W.G. BOURICIUS, W.C. CARTER, P.R. SCHNEIDER
"Reliability modeling techniques for self-repairing computer
systems", Proc. ACM 1969 Ann. Conf, August 1969, pp. 295-309.
- [BRO,75] J.C. BROWNE, K.M. CHANDY, R.M. BROWN, T.W. KELLER, D.F. TOWSLEY,
C.W. DISSLY
"Hierarchical techniques for the development of realistic models
of complex computer system", Proc. IEEE, vol. 63, n°6, June 1975,
pp. 966-975.
- [BUZ,70] J.A. BUZACOTT
"Markov approach to finding failure times of repairable systems",
IEEE Trans. Reliability, vol. R-19, n°14, November 1970,pp. 128-134.
- [CAR,77] W.C. CARTER, G.R. PUTZOLU, A.B. WADIA, W.G. BOURICIUS, D.C. JESSEP,
E.P. HSIEH, C.J. TAN
"Cost effectiveness of self-checking computer design", Proc. of
1977 Int. Symp. on Fault-Tolerant Computing, Los Angeles,
California, June 1977, pp. 117-123.

- [COR, 75] M. CORAZZA
"Techniques mathématiques de la fiabilité prévisionnelle",
Cepadues Edition, Toulouse, 1975.
- [COT, 77] I.W. COTTON
"Cost-benefit analysis of interactive systems", Comp. Networks,
vol. 1, 1977, pp. 311-324.
- [COX, 68] D.R. COX, H.D. MILLER
"The theory of stochastic processes", Methuen and Co Ltd, London,
1968.
- [COX, 70] D.R. COX
"Renewal Theory", Methuen and Co Ltd, 1970.
- [DOU, 79] J.E. DOUCET
"SURF : Système d'évaluation de la sûreté de fonctionnement,
2ème partie : Notion d'utilisation", Note Technique LAAS-SIS,
n° 79, T.38, Août 1979.
- [GAY, 79] F.A. GAY
"Performance modeling for gracefully degrading systems",
Thèse Ph.D, North Western University, June 1979.
- [GNE, 72] B. GNEDENKO, Y. BELIAEV, A. SOLOVIEV
"Méthodes Mathématiques en Théorie de la Fiabilité", Editions MIR,
1972.
- [HOW, 71] R.A. HOWARD
"Dynamic Probabilistic Systems", J. Wiley & Sons, 1971, vol. II.
- [KAY, 76] E. KAY
"The effectiveness of preventive maintenance", Int. J. Prod. Res.,
1976, vol. 14, n°3, pp. 324-344.

- [KUM,76] A. KUMAR
"Steady-state profit in a 2-unit standby system", IEEE Trans. Reliability, vol. R-25, n°2, June 1976, pp. 105-108.
- [LAN,77] C. LANDRAULT
"Prévision de la sûreté de fonctionnement des systèmes numériques réparables", Thèse de Doctorat ès Sciences, Institut National Polytechnique de Toulouse, 11 Mars 1977.
- [LAP,75] J.C. LAPRIE
"Prévision de la sûreté de fonctionnement et architecture de structures numériques temps réels réparables", Thèse de Doctorat ès Sciences, Université Paul Sabatier, Toulouse, 16 Juin 1975.
- [LAP,76] J.C. LAPRIE
"On reliability prediction of repairable redundant digital structures", IEEE Trans. Reliability, vol. R-25, n°4, October 1976, pp. 275-277.
- [LES,77] A. LESTRADE-CARBONNEL
"Prévision de la sûreté de fonctionnement par les processus stochastiques", Doctorat de 3e cycle, Institut National Polytechnique de Toulouse, 7 Juin 1977.
- [LI,71] T.J. LI
"On the calculation of system downtime distribution", IEEE Trans. Reliability, vol. R-20, N°1, February 1971, pp. 38-39.
- [MCL,67] R.A. Mc LEAN, M.F. NEUTS
"The integral of a step function defined on a Semi-Markov process", SIAM J. Appl. Math., vol. 15, N°3, May 1967, pp. 726-737.
- [MOR,80] J. MOREIRA DE SOUZA
"A unified method for the benefit analysis of fault-tolerance", Proc. of 1980 Int. Symp. on Fault Tolerant Computing, October 1980, Kyoto, Japan, pp. 201-203.

- [MOR,81] J. MOREIRA DE SOUZA
"Benefit analysis of concurrent redundancy techniques", à paraître
IEEE Trans. Reliability, April 1981.
- [MUT,68] E.J. MUTH
"A method for predicting system downtime", IEEE Trans. Reliability,
vol. R-17, n°2, June 1968, pp. 97-102.
- [NG,76] Y.W. NG
"Reliability modeling and analyzis for fault-tolerant computers",
Dep. Comp. Science, Univ. California, Tech. Rep. UCLA-ENG-7698,
September 1976.
- [PHI,74] M. PHISTER JR
"Data processing technology and economics", Santa Monica Publ.
Company, 1974.
- [PHI,78] M. PHISTER JR
"Analyzing computer technology costs - Part 2 : Maintenance",
Comp. Design, October 1978, pp. 109-118.
- [PLA,80] O. PLATZ
"Asymptotic distribution of downtime for a cold-standby system",
IEEE Trans. Reliability, vol. R-29, n°1, April 1980, pp. 79-81.
- [PYK,61a] R. PYKE
"Markov renewal processes : definitions and preliminary pro-
perties", Ann. Math. Stat., vol. 32, n°4, 1961, pp. 1231-1242.
- [PYK,61b] R. PYKE
"Markov renewal process with finitely many states",
Ann. Math. Stat., vol. 32, n°4, 1961, pp. 1243-1259.
- [PYK,64] R. PYKE, R. SCHAUFLELE
"Limit theorems for Markov renewal process",
Ann. Math. Stat., vol. 35, n°4, 1964, pp. 1746-1764.

- [ROH,72] W.B. ROHN, T.F. ARNOLD
"Design for low expected down-time in real time control systems",
Proc. of the IEEE Int. Conf. on Communications, Philadelphia, Pa,
June 1972, pp. 16-25, 16-31.
- [SED,80] R.M. SEDMAK, H.L. LIEBERGOT
"Fault-Tolerance of a general purpose computer implemented by
very large scale integration", IEEE Trans. Computers, vol. C-29,
n°6, June 1980, pp. 492-500.
- [SHA,69] W.F. SHARPE
"The economics of computers", Columbia paperbacks, 1969.
- [SIN,75] C. SINGH, R. BILLINGTON,
"Frequency and duration concepts in system reliability evaluation",
IEEE Trans. Reliability, vol. R-24, April 1975, pp. 31-36.
- [TAK,57] L. TAKACS
"On certain sojourn time problems in the theory of stochastic
processes", Acta Mathematica, vol. 8, n°1.2, 1957, pp. 169-191.
- [TIL,77] F.A. TILLMAN, C.L. HWANG, W. KUO
"Optimisation techniques for system reliability with redundancy",
IEEE Trans. Reliability, vol. R-26, August 1977, pp. 148-155.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	3
CHAPITRE 1. ÉTABLISSEMENT DES EXPRESSIONS MATHÉMATIQUES PERMETTANT L'ACCÈS AUX LIMITES DE CONFIANCE	7
<i>INTRODUCTION</i>	9
<i>I. GRANDEURS DE LA SURETE DE FONCTIONNEMENT</i>	12
<i>I.1 Grandeurs définies à partir des probabilités d'être dans les états</i>	13
<i>I.2 Grandeurs définies à partir des variables aléatoires</i>	16
<i>I.2.1 Grandeurs définies à partir du nombre de transitions</i>	16
<i>I.2.2 Grandeurs définies à partir du temps de séjour</i>	17
<i>I.3 Méthodes d'évaluation d'une grandeur définie à partir d'une variable aléatoire</i>	19
<i>I.3.1 Evaluation à partir de la fonction de répartition</i>	20
<i>I.3.2 Approche asymptotique</i>	21
<i>II. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT</i>	21
<i>II.1 Définitions</i>	22
<i>II.2 Evaluation du nombre de renouvellements</i>	24
<i>II.2.1 Détermination de la fonction de répartition</i>	24
<i>II.2.2 Approche asymptotique</i>	25
<i>II.3 Processus de renouvellement à temps fini de renouvellement</i>	27
<i>II.3.1 Fonction de répartition du temps de séjour</i>	29
<i>II.3.2 Approche asymptotique</i>	32
<i>III. PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT DEFINI A PARTIR D'UN PROCESSUS MARKOVIEN HOMOGENE</i>	34
<i>III.1 Définitions</i>	35
<i>III.2 Evaluation du nombre de transitions</i>	39
<i>III.2.1 Fonction de répartition du nombre de transitions</i>	39
<i>III.2.2 Approche asymptotique</i>	41

III.3	<i>Evaluation du temps de séjour dans un ensemble d'états</i>	44
III.3.1	<i>Fonction de répartition du temps de séjour</i>	45
III.3.2	<i>Approche asymptotique</i>	49
IV.	<i>DESCRIPTION DES OUTILS D'EVALUATION</i>	51
IV.1	<i>Présentation générale des outils</i>	51
IV.2	<i>Le programme LIMCONF</i>	53
IV.3	<i>Le programme SURFI</i>	56
IV.3.1	<i>Evaluation des composantes indépendantes du temps</i>	56
IV.3.2	<i>Evaluation des limites de confiance - approche asymptotique</i>	57
CONCLUSION		59
CHAPITRE 2.	EVALUATION DES LIMITES DE CONFIANCE DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITÉ DE SYSTÈMES INFORMATIQUES	61
INTRODUCTION		63
I.	ETABLISSEMENT DES EXPRESSIONS DE LA LIMITE DE CONFIANCE DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITE	64
I.1	<i>Evaluation de la limite de confiance du taux d'arrêt</i>	66
I.2	<i>Evaluation de la limite de confiance de l'indisponibilité</i>	66
II.	EVALUATION DU TAUX D'ARRÊT ET DE L'INDISPONIBILITE D'UNE STRUCTURE NON-REDONDANTE	69
II.1	<i>Définition du modèle</i>	69
II.2	<i>Etude comparative entre la limite de confiance et la valeur moyenne</i>	70
II.2.1	<i>Evaluation du taux d'arrêt</i>	70
II.2.2	<i>Evaluation de l'indisponibilité</i>	73
II.2.3	<i>Représentativité de l'estimation basée sur la valeur moyenne</i>	77

II.3 Influence du temps d'opération sur l'erreur introduite par l'approche asymptotique	79
II.3.1 Analyse de l'erreur introduite dans l'évaluation de la limite de confiance du taux d'arrêt	79
II.3.2 Analyse de l'erreur introduite dans l'évaluation de la limite de confiance de l'indisponibilité	81
II.3.3 Conclusion	83
III. EVALUATION DU TAUX D'ARRET ET DE L'INDISPONIBILITE DES STRUCTURES REDONDANTES	85
III.1 Définition des structures redondantes	86
III.2 Définition des modèles	87
III.2.1 Modèle des structures redondantes sélective active et massive	89
III.2.2 Modèle de la structure à N-unités	91
III.3 Evaluation des taux d'arrêt	92
III.3.1 Commentaires relatifs aux méthodes d'évaluation	92
III.3.2 Commentaires relatifs aux structures	96
III.4 Evaluation de l'indisponibilité	97
III.4.1 Commentaires relatifs aux méthodes d'évaluation	102
III.4.2 Commentaires relatifs aux structures	102
CONCLUSION	104
CHAPITRE 3. DÉFINITION D'UNE MÉTHODE D'ANALYSE ÉCONOMIQUE - APPLICATION À L'ÉVALUATION DES COÛTS D'EXPLOITATION DE SYSTÈMES INFORMATIQUES	107
INTRODUCTION	109
I. ANALYSE QUALITATIVE DES BÉNÉFICES APPORTÉES PAR LA TOLÉRANCE AUX FAUTES	111
I.1 Les composantes du coût pendant le cycle de vie du système	111
I.1.1 Le coût d'investissement	112
I.1.2 Le coût de maintenance	112
I.1.3 Le coût d'arrêt	113

I.2 Analyse qualitative de l'influence de la tolérance aux fautes sur les composantes du coût	114
II. DEFINITION D'UN OUTIL POUR L'ANALYSE ECONOMIQUE DES BENEFICES	116
II.1 Modèle économique défini sur le modèle markovien : la structure de revenu	117
II.2 Evaluation de la valeur moyenne du revenu	118
II.2.1 Avec prise en compte du taux d'intérêt	119
II.2.1.1 Définition du taux d'intérêt	119
II.2.1.2 Valeur moyenne du revenu	119
II.2.2 Sans prise en compte du taux d'intérêt	122
II.3 Définition des grandeurs caractéristiques de comparaison	122
II.4 Le programme d'analyse des bénéfices	123
III. ANALYSE QUANTITATIVE DES BENEFICES APPORTES PAR LA TOLERANCE AUX FAUTES	124
III.1 Définition des paramètres représentatifs des coûts	124
III.2 Influence du coût d'arrêt sur la réduction de coût	126
III.2.1 Structure redondante sélective active (N=1)	128
III.2.1.1 Bénéfices apportés par la reconfiguration manuelle	131
III.2.1.2 Comparaison entre la redondance sélective active et la redondance massive	133
III.3 Réduction du coût de maintenance	134
CONCLUSION	139
CONCLUSION	141
ANNEXES	147
BIBLIOGRAPHIE	171