



HAL
open science

Information Quantique par Passage Adiabatique : Portes Quantiques et Décohérence

Xavier Lacour

► **To cite this version:**

Xavier Lacour. Information Quantique par Passage Adiabatique : Portes Quantiques et Décohérence. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université de Bourgogne, 2007. Français. NNT: . tel-00180890

HAL Id: tel-00180890

<https://theses.hal.science/tel-00180890>

Submitted on 22 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Bourgogne



Thèse

présentée par

Xavier LACOUR

pour obtenir le titre de
DOCTEUR en PHYSIQUE

INFORMATION QUANTIQUE PAR PASSAGE ADIABATIQUE : PORTES QUANTIQUES ET DÉCOHÉRENCE

le 03 octobre 2007

devant la commission d'examen composée de :

M. DESOUTER-LECOMTE	Professeur (Université Paris Sud 11)	Rapporteur
D. BRAUN	Professeur (Université Paul Sabatier)	Rapporteur
N. CERF	Professeur (Université Libre de Bruxelles)	Examineur
E. CHARRON	Chargé de recherches (Université Paris Sud 11)	Examineur
S. GUÉRIN	Maître de conférences (Université de Bourgogne)	Directeur de thèse
H.R. JAUSLIN	Professeur (Université de Bourgogne)	Directeur de thèse

Institut Carnot de Bourgogne – Université de Bourgogne
UMR 5209 CNRS
BP 47870 – 21078 Dijon – France

Table des matières

Introduction	1
1 Information quantique et calcul quantique: notions de base	5
1.1 Concepts fondamentaux: le bit et le qubit	5
1.1.1 Information classique: le bit	5
1.1.2 Information quantique: le qubit	7
1.2 Portes logiques quantiques	9
1.2.1 Portes quantiques élémentaires à un qubit	9
1.2.2 Portes quantiques élémentaires à deux qubits	10
1.2.3 Ensemble universel de portes quantiques	11
1.3 Algorithmes quantiques	12
A Mesure quantique	17
2 Évolution adiabatique d'un système quantique	19
2.1 Théorème adiabatique	19
2.2 Passage adiabatique par effet Raman stimulé (STIRAP)	23
2.2.1 Système et Hamiltonien effectif	23
2.2.2 Évolution adiabatique du système	24
2.2.3 Conditions d'adiabaticité et robustesse	25
2.2.4 STIRAP fractionnaire (f-STIRAP)	27
2.3 Tripode STIRAP	28
2.3.1 Système et Hamiltonien effectif	29
2.3.2 Évolution adiabatique du système	30
2.3.3 Conditions d'adiabaticité	32
3 Portes quantiques à un qubit	35
3.1 Processus holonomiques	36
3.1.1 Porte PHASE	36
3.1.2 Porte ROTATION	38
3.1.3 Discussion	39
3.2 Processus basés sur le STIRAP	40
3.2.1 Porte générale à un qubit	40
3.2.2 Alternative: porte ROTATION généralisée	42
3.2.3 Discussion	45
3.3 Porte PHASE: phase géométrique et transport parallèle	46

4	Portes quantiques à deux qubits	49
4.1	Passage adiabatique dans une cavité optique	50
4.1.1	Hamiltonien effectif et états sombres	50
4.1.2	Évolution adiabatique et transfert de cohérence atomique	52
4.2	Applications à l'implémentation de portes quantiques	53
4.2.1	Porte SWAP	54
4.2.2	Porte CNOT	57
4.2.3	Porte CU	60
4.3	Généralisation : rotation des états de la base à deux qubits	64
4.3.1	Système et Hamiltonien effectif	64
4.3.2	Rotation d'états de la base à deux qubits	67
4.4	Applications à l'implémentation de portes quantiques	68
4.4.1	Porte ASCU	68
4.4.2	Porte SWAP ^α	70
4.5	Discussion : polarisation de la cavité et robustesse	73
4.5.1	Polarisation et robustesse	73
4.5.2	Fidélité des processus	74
B	Circuit quantique de mesure projective	77
5	Dynamique des systèmes quantiques ouverts	79
5.1	Opérateur densité	79
5.1.1	Définition	79
5.1.2	Propriétés	80
5.2	Opérations quantiques et représentation de Kraus	81
5.2.1	Définition	81
5.2.2	Exemples : canaux quantiques	82
5.3	Équation pilote de Lindblad	85
5.3.1	Définition	85
5.3.2	Exemple : évolution libre	87
C	Représentation de Kraus	91
D	Équation de Lindblad et Hamiltonien effectif	93
6	Déphasage dans les transitions à deux niveaux	97
6.1	Modèles à deux niveaux sans dissipation	97
6.2	Effets du déphasage sur une superposition d'états	99
6.3	Équation pilote du système dissipatif	100
6.4	Dynamique du système en résonance	101
6.4.1	Couplage constant	102
6.4.2	Couplage impulsionnel	103
6.5	Dynamique avec écart à la résonance variable	104
6.5.1	Traitement perturbatif de la dissipation	106
6.5.2	Application à des modèles type	108
6.5.3	Généralisation à un modèle Landau-Zener impulsionnel	110
6.6	Optimisation de la dynamique adiabatique	112

6.6.1	Évolution adiabatique du système dissipatif	112
6.6.2	Suivi adiabatique optimisé	115
6.7	Discussion	119
Conclusion et perspectives		123

Introduction

LA THÉORIE de l'information classique a connu un développement important depuis sa création au milieu du siècle dernier, et les outils de calcul classiques n'ont cessés de se perfectionner, permettant des calculs de plus en plus rapides et complexes. Le perfectionnement des ordinateurs, principalement dû à la miniaturisation qui permet depuis les années 1960 de doubler la puissance des processeurs environs tous les deux ans, fût prédit par Moore en 1965 [1], et est connu sous le nom de *loi de Moore*.

La miniaturisation des composants à semi-conducteurs est cependant limitée par l'apparition d'effets quantiques indésirables pour leur fonctionnement classique, et l'augmentation de la puissance de calcul classique deviendra de plus en plus difficile dans les années à venir. En conséquence, le temps de calcul requis pour la résolution de problèmes complexes ne pourra plus être réduit de façon simple par les outils de calcul classiques.

Une alternative serait l'utilisation d'outils de calcul basés sur la mécanique quantique : les *ordinateurs quantiques*. Feynman souligna en 1982 [2] que les ordinateurs classiques rencontreraient des difficultés essentielles pour simuler certaines propriétés quantiques. En revanche, ces mêmes propriétés seraient parfaitement prises en compte par des ordinateurs basés sur les lois de la mécanique quantique.

La très nette supériorité des ordinateurs quantiques sur les ordinateurs classiques a été montrée pour la première fois par Shor en 1994 [3]. Il proposa un algorithme quantique permettant la décomposition d'un entier en facteurs premiers en un temps dépendant de façon polynômiale de la taille de l'entier, alors que les meilleurs algorithmes classiques requièrent une dépendance exponentielle. D'autres algorithmes quantiques, plus rapides que leurs homologues classiques, ont été depuis proposés, comme l'algorithme de Grover [4], effectuant une recherche dans une base de données.

La première partie de cette thèse est consacrée à l'élaboration théorique de processus *adiabatiques* permettant l'implémentation de *portes logiques quantiques*. Le premier chapitre introduira les notions essentielles de l'information quantique, comme les qubits, les portes quantiques, et les ensembles universels. Le second chapitre introduira le passage adiabatique, et détaillera les processus adiabatiques de base qui seront utilisés pour l'implémentation de portes logiques quantiques.

Les portes logiques quantiques sont les composants élémentaires des ordinateurs quantiques, et doivent pouvoir être implémentés avec l'erreur la plus petite possible. Les processus d'implémentation doivent donc être très peu sensibles aux fluctuations des paramètres expérimentaux.

Le calcul quantique requiert la réalisation d'un ensemble minimum de portes quantiques, appelé *ensemble universel*, à partir duquel toutes les autres portes quantiques peuvent être obtenues par combinaisons.

Nous considérerons l'implémentation de portes quantiques constituant un ensemble uni-

versel par l'interaction de champs laser impulsionnels avec des atomes, dont deux états métastables seront utilisés comme états de base du qubit. L'implémentation des portes quantiques se formule alors par le contrôle des transitions effectuées dans le système par les champs laser.

Plusieurs techniques permettent l'implémentation de portes quantiques [5, 6]. Certaines méthodes, de type *impulsion- π* , sont basées sur le contrôle de phases dynamiques, et requièrent un contrôle très précis de l'aire des impulsions laser. Ces méthodes ne sont pas robustes, car elles supposent entre autres que l'on puisse fixer arbitrairement l'amplitude des champs laser perçus par l'atome à tout instant. Or, le profil temporel des impulsions perçu par l'atome peut varier fortement si on modifie sa position spatiale transverse, puisque la section transverse d'un champ laser n'est pas d'amplitude constante. De plus, il est très difficile d'imposer à l'atome une position précise par rapport aux lasers.

D'autres méthodes sont basées sur le contrôle de phases géométriques [7, 8], *i.e.* des phases dont la valeur dépend uniquement de la forme de la trajectoire parcourue dans l'espace des paramètres. Ces phases ne dépendent pas de la vitesse à laquelle sont parcourues les trajectoires, et sont donc plus robustes que les techniques de type *impulsion- π* . Elles dépendent cependant de la forme des trajectoires, et nécessitent donc elles aussi le contrôle du profil temporel des impulsions laser perçu par l'atome.

Il existe enfin des méthodes très robustes [9, 10], basées sur le passage adiabatique. Nous nous intéresserons à ce dernier type de processus, où seul le contrôle des phases relatives des lasers et de leur polarisation est requis de façon précise, ce qui est expérimentalement réalisable. Nous proposerons de plus des processus adiabatiques ne peuplant pas les états excités des atomes. Cette particularité les rend insensibles aux pertes par émission spontanée. Les chapitres trois et quatre traiteront respectivement des processus adiabatiques permettant l'implémentation des portes quantiques à un qubit et à deux qubits.

L'avantage des processus adiabatiques que nous utiliserons est leur robustesse : les portes quantiques implémentées seront insensibles aux fluctuations des paramètres et à l'émission spontanée des états excités des atomes. Cependant, le passage adiabatique consiste à faire évoluer le système de façon relativement lente, et plus le processus sera long, plus les effets décohérents dus aux interactions avec l'environnement extérieur seront importants, conduisant à des erreurs lors du calcul quantique. Nous proposerons pour réduire ces erreurs des implémentations directes de certaines portes quantiques, *i.e.* plus rapides que leur obtention à partir d'un ensemble universel.

La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'étude de la décohérence par déphasage lors du passage adiabatique. Un calcul quantique nécessite l'utilisation et l'enchaînement de plusieurs portes quantiques. Il est donc nécessaire de connaître les effets des phénomènes décohérents lors de l'évolution adiabatique, pour estimer par exemple la durée maximale à partir de laquelle il sera nécessaire de corriger les éventuelles erreurs produites.

Cette seconde partie est une étude préliminaire effectuée sur un système simple, montrant que les effets néfastes du déphasage peuvent être diminués. Son extension aux processus d'implémentation montrés dans les chapitres précédents est en perspective à la suite de ce travail. Le chapitre cinq introduira le formalisme utilisé pour la prise en compte des effets décohérents. Le dernier chapitre étudiera la probabilité de transition dans un système à deux niveaux soumis à la décohérence par déphasage. Le résultat principal de cette seconde partie est l'établissement de la formule de probabilité de transition à partir de la probabilité de transition du système non-décohérent, valable dans le régime adiabatique ainsi que dans le

régime diabatique. Nous montrerons ensuite comment cette probabilité de transition peut être optimisée par le choix des trajectoires suivies dans l'espace des paramètres.

Chapitre 1

Information quantique et calcul quantique : notions de base

CE CHAPITRE dresse un bref résumé des notions essentielles à la compréhension de l'information quantique et du calcul quantique [5, 6]. La première section décrira pour comparaison le fonctionnement de la théorie classique de l'information. Nous définirons ensuite l'unité élémentaire de l'information quantique : le *qubit*, et exposerons les propriétés surprenantes que les lois de la mécanique quantique autorisent. La seconde section décrira les briques élémentaires du calcul quantique : les *portes logiques quantiques*. Nous introduirons alors la notion essentielle d'*ensemble universel de portes*, puis nous terminerons en citant quelques algorithmes quantiques, témoins de la puissance de calcul potentielle offerte par les ordinateurs quantiques par rapport à leurs homologues classiques.

1.1 Concepts fondamentaux : le bit et le qubit

1.1.1 Information classique : le bit

La théorie de l'information classique développée au cours du siècle dernier repose sur le concept fondamental du *bit*, contraction du terme anglophone *binary digit*. Le bit est une unité élémentaire d'information, pouvant prendre deux valeurs possibles : le 0 ou le 1.

Tout nombre entier $N \in \mathbb{N}$ peut être représenté comme un ensemble de bits qui correspondent à son écriture sous forme binaire. Ainsi, le nombre 2 est représenté par les deux bits 10. De façon générale, il faut au minimum $\log_2 N$ bits pour représenter l'entier N , où \log_2 est le logarithme à base 2.

La théorie de l'information classique définit aussi des *encodages*, *i.e.* des lois spécifiques de codage, permettant de représenter tout autre élément d'information, comme l'alphabet et les différents caractères d'écriture, sous forme de bits. Le traitement de l'information correspond alors au traitement d'un ensemble de bits, et peut être effectué de façon automatisée par des machines.

Le traitement classique de l'information s'effectue par l'intermédiaire de *portes logiques*. Les portes logiques classiques sont des opérations qui produisent un ou plusieurs bits de sortie dont la valeur dépend des bits d'entrée. Par exemple, la porte logique NAND agit sur deux bits a, b en entrée et produit en sortie un unique bit c de valeur 0 si et seulement si les deux bits a et b ont la valeur 1, comme indiqué dans la table 1.1, appelée *table de vérité* de la porte NAND.

a	b	c
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

TAB. 1.1 – Table de vérité de la porte NAND. Les bits a et b correspondent aux bits d'entrée, le bit c au bit de sortie.

La porte NAND est une porte logique *universelle* : elle permet par diverses combinaisons possibles de construire n'importe quelle autre porte logique.

Le traitement classique de l'information n'est en général pas réversible. En effet, il est impossible de déterminer les bits d'entrée a et b de la porte NAND par la seule connaissance du bit de sortie c . Le principe de Landauer [11] stipule que cette irréversibilité est à l'origine d'une dissipation d'énergie,¹ et qu'au contraire un calcul réversible pourrait s'effectuer théoriquement sans perte d'énergie.

Un calcul réversible peut être obtenu par l'utilisation de portes logiques universelles réversibles, comme les portes de Fredkin et de Toffoli [12]. Ces portes logiques classiques, dont les tables de vérité sont représentées dans la table 1.2, utilisent trois bits d'entrée a, b, c et fournissent trois bits de sortie a', b', c' . Les bits d'entrée s'obtiennent à partir des bits de sor-

a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

(a) Porte de Fredkin

a	b	c	a'	b'	c'
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

(b) Porte de Toffoli

TAB. 1.2 – Tables de vérité des portes logiques universelles réversibles (a) de Fredkin et (b) de Toffoli.

tie en appliquant à nouveau la porte logique, prouvant ainsi la réversibilité de l'opération. La référence [5] montre comment la porte logique de Fredkin peut être implémentée macroscopiquement en utilisant des boules de billard, permettant ainsi la construction d'un ordinateur réversible, certes très instable, basé sur les lois de la mécanique classique.

1. Le principe de Landauer fixe une limite minimale à la dissipation d'énergie due à l'irréversibilité des calculs. La dissipation d'énergie des ordinateurs actuels est 500 fois plus importante que cette limite [5], la majeure partie étant dissipée par effet Joule.

1.1.2 Information quantique : le qubit

Définition

La théorie de l'information quantique utilise une entité quantique, par exemple un atome, pour coder l'unité élémentaire d'information : la *bit quantique*, appelé plus couramment *qubit* [13]. Les valeurs 0 et 1 de la base de calcul sont alors représentées par des états quantiques $|0\rangle$ et $|1\rangle$ de l'entité quantique.

Tandis que le bit classique ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, les lois de la mécanique quantique autorisent le qubit à être dans une superposition cohérente des états de la base de calcul :

$$|\Psi\rangle = e^{i\xi} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right). \quad (1.1)$$

La phase globale ξ est ici inessentielle, et l'état du qubit est donc caractérisé par deux angles : la phase relative ϕ et l'angle θ définissant les poids de la superposition d'états. Le qubit peut alors être représenté géométriquement par une sphère, appelée *sphère de Bloch*, où l'état $|\Psi\rangle$ du qubit correspond à un point à la surface de la sphère, comme indiqué sur la figure 1.1.

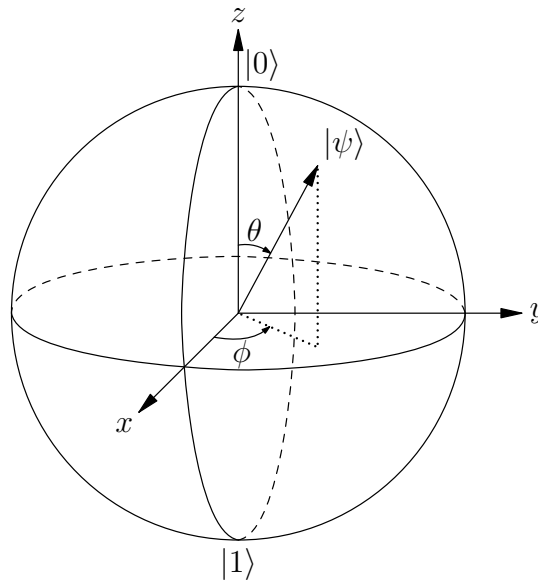


FIG. 1.1 – Représentation géométrique d'un qubit par une sphère de Bloch. L'état du qubit $|\Psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$ correspond à un point à la surface de la sphère.

Il est important de noter que tous les points de la surface de la sphère de Bloch correspondent à un état possible d'un qubit, alors que les valeurs possibles d'un bit classique se restreignent à deux valeurs qu'on peut identifier aux deux pôles de la sphère. Cette différence essentielle fournit au calcul quantique une partie de sa puissance.

À la fin d'un calcul quantique, l'information correspondant au résultat du calcul est obtenue en mesurant l'état de chaque qubit. Une mesure est un processus irréversible qui brise la superposition cohérente d'états $|\Psi\rangle$ du qubit et le projette dans l'un des états de la base de calcul $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Le résultat de la mesure correspond à l'état dans lequel le qubit a été projeté, *i.e.* l'état $|0\rangle$ avec la probabilité $\cos^2 \frac{\theta}{2}$, ou l'état $|1\rangle$ avec la probabilité $\sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Ensemble de qubits

L'ensemble des qubits utilisés pour le codage et le traitement d'une information s'appelle un *registre*. Nous considérerons ici un registre constitué de deux qubits. L'état quantique du registre, $|\Psi_R\rangle$, peut dans certains cas s'écrire comme le produit des états individuels des qubits

$$|\Psi_R\rangle = |q_1\rangle|q_2\rangle. \quad (1.2)$$

Ce cas de figure est appelé cas *séparable* : chaque qubit peut être décrit indépendamment des autres.

Les lois de la mécanique quantique autorisent le registre à être dans un état n'ayant pas d'équivalent classique, décrivant le système comme un tout indivisible. On parle alors d'*intrication*, et l'état *intriqué* du registre ne peut pas être factorisé en un produit d'états individuels des qubits :

$$\begin{aligned} |\Psi_R\rangle &= \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle \\ &\neq |q_1\rangle|q_2\rangle, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où les coefficients sont des nombres complexes avec la condition de normalisation

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \quad (1.4)$$

Un exemple d'état intriqué est l'état EPR²

$$|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle). \quad (1.5)$$

L'état EPR (1.5) ne peut pas s'écrire comme le produit de deux états à un qubit. La conséquence directe est qu'une mesure effectuée sur l'un des deux qubits projette l'ensemble du système dans l'un des états $|00\rangle$ ou $|11\rangle$ avec la probabilité 1/2 (cf. Annexe A).

Cette particularité due à l'intrication, *i.e.* la modification de l'état du registre entier en agissant sur un seul qubit, est à la base des processus de téléportation quantique et de la cryptographie quantique [15–17].

Les qubits peuvent être utilisés pour la transmission de bits classiques. L'état EPR permet alors le *codage superdense*, *i.e.* la transmission de deux bits classiques par l'envoi d'un seul qubit [18, 19].

Théorème de non-clonage

À la différence des bits classiques qui peuvent être copiés et multipliés autant de fois que l'on veut, un qubit ne peut pas être dupliqué. Ce résultat essentiel est connu sous le nom de *théorème de non-clonage* [20, 21]. Il est à la base de la sécurité des processus de cryptographie quantique [5, 15].

Le théorème de non-clonage se démontre de la façon suivante. Supposons que l'on veuille cloner un qubit dans un état $|\psi\rangle$ quelconque sur un second qubit initialement dans un état $|q\rangle$ arbitraire. Supposons qu'il existe une machine à cloner agissant sur les qubits par un opérateur unitaire U tel que pour tout $|\Psi\rangle$

$$U|\psi\rangle|q\rangle = |\psi\rangle|\psi\rangle. \quad (1.6)$$

2. Pour Einstein, Podolsky, Rosen, qui utilisèrent cet état pour formuler des questions fondamentales sur la possibilité d'une interprétation réaliste et locale de la mécanique quantique [14].

Par exemple, si $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, alors par linéarité

$$\begin{aligned} U|\psi\rangle|q\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(U|0\rangle|q\rangle + U|1\rangle|q\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle). \end{aligned} \quad (1.7)$$

L'état (1.7) correspond à l'état EPR, qui est un état intriqué et ne peut donc pas s'écrire sous la forme d'états séparables $|\psi\rangle|\psi\rangle$ comme défini à l'équation (1.6). Cette incohérence démontre que la supposition de départ, *i.e.* l'existence d'une machine à cloner les qubits, est fausse.

1.2 Portes logiques quantiques

Le traitement de l'information quantique s'effectue par l'action de *portes quantiques* sur le registre. Une porte quantique est une opération unitaire agissant sur un ou plusieurs qubits. Le calcul quantique est donc réversible par construction. Il existe un nombre infini de portes quantiques, qui peuvent toutes s'obtenir par combinaisons de quelques portes élémentaires, constituant un *ensemble universel* de portes quantiques.

Décrivons tout d'abord quelques portes quantiques élémentaires fréquemment rencontrées en information quantique [22, 23].

1.2.1 Portes quantiques élémentaires à un qubit

Les portes quantiques à un qubit peuvent être représentées sur la sphère de Bloch par des rotations autour d'un vecteur de la sphère. Elles peuvent donc toutes être obtenues par la combinaison de deux familles de portes quantiques : les portes PHASE effectuant des rotations autour de l'axe z , et les portes ROTATION effectuant des rotations autour de l'axe y .

Les portes PHASE modifient la phase relative du qubit. Elles s'écrivent dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$\text{PHASE}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix} = e^{i\frac{\phi}{2}} e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma_z}, \quad (1.8)$$

avec la matrice de Pauli

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Les portes PHASE ajoutent donc une phase ϕ à l'état $|1\rangle$ du qubit, sans modifier l'état $|0\rangle$.

Les portes ROTATION changent les poids de la superposition d'états du qubit. Elles s'écrivent dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$\text{ROTATION}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = e^{-i\alpha\sigma_y}, \quad (1.10)$$

avec la matrice de Pauli

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Ces deux familles de portes quantiques, PHASE et ROTATION, permettent en les combinant d'obtenir toutes les autres portes à un qubit.

Parmi les autres portes à un qubit usuelles, citons la porte HADAMARD, correspondant à la combinaison $\text{ROTATION}(\pi/4) \circ \text{PHASE}(\pi)$, et s'écrivant dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$\text{HADAMARD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (1.12)$$

et la porte NOT basculant l'état du qubit, correspondant à la combinaison $\text{ROTATION}(\pi/2) \circ \text{PHASE}(\pi)$

$$\text{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

La porte HADAMARD est utilisée pour effectuer la *transformation Hadamard*, appelée aussi *transformation Walsh-Hadamard*. Cette transformation permet la création d'un état dit maximalement intriqué, correspondant à la somme de tous les états de la base de calcul

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{n=0}^{2^N-1} |n\rangle, \quad (1.14)$$

où le nombre n correspond à la représentation décimale de l'état de la base de calcul. La transformation Hadamard s'obtient en appliquant à tous les qubits du registre, initialement préparés dans l'état $|0\rangle$, une porte HADAMARD :

$$\underbrace{|0\rangle|0\rangle \cdots |0\rangle}_{N \text{ qubits}} \longrightarrow \underbrace{\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)}_{N \text{ qubits}} = \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{n=0}^{2^N-1} |n\rangle. \quad (1.15)$$

1.2.2 Portes quantiques élémentaires à deux qubits

Les portes quantiques à deux qubits peuvent être classées en deux catégories : celles qui permettent d'intriquer les qubits, et celles qui ne le permettent pas.

Commençons par décrire les portes quantiques élémentaires permettant d'intriquer les qubits et utilisant un *qubit de contrôle*. Le qubit de contrôle détermine l'action de la porte quantique sur l'autre qubit, appelé *qubit cible*. Si le qubit de contrôle est dans l'état $|0\rangle$, alors le qubit cible est inchangé ; si le qubit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$, alors la porte quantique agit sur le qubit cible.

Citons en premier la porte contrôle-PHASE, notée CPHASE. Cette porte quantique applique une porte phase sur le qubit cible lorsque le qubit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$. La particularité de cette porte est que le qubit de contrôle peut être ici n'importe lequel des deux qubits. La porte CPHASE s'écrit dans la base de calcul $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

$$\text{CPHASE}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

et ajoute donc une phase ϕ à l'état $|11\rangle$.

La porte quantique CPHASE est l'une des portes quantiques à deux qubits les plus utilisées avec la porte contrôle-NOT, notée CNOT. Cette porte bascule l'état du qubit cible lorsque le qubit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$. Elle s'écrit dans la base de calcul $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ lorsque le qubit de contrôle est le premier qubit

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Les portes quantiques CPHASE et CNOT sont des cas particuliers d'une porte quantique plus générale : la porte contrôle-unitaire, notée CU. La porte CU effectue l'opération unitaire U sur le qubit cible lorsque le qubit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$. Elle s'écrit dans la base de calcul $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ lorsque le qubit de contrôle est le premier qubit sous la forme de blocs

$$\text{CU} = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

où l'opérateur identité agit sur les états $|00\rangle, |01\rangle$, et l'opérateur U sur les états $|10\rangle, |11\rangle$.

Terminons en citant une porte quantique ne permettant pas l'intrication, mais pouvant se révéler très utile dans un calcul quantique : la porte d'échange, notée SWAP. La porte SWAP permute les états des qubits, donc dans le cas d'un état séparable :

$$|q_1\rangle|q_2\rangle \rightarrow |q_2\rangle|q_1\rangle. \quad (1.19)$$

De façon générale, la porte SWAP s'écrit dans la base de calcul $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

$$\text{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Elle échange donc les coefficients des états $|01\rangle$ et $|10\rangle$, les deux autres états étant invariants.

La porte SWAP s'utilise parfois élevée à l'exposant $\alpha \in [0, 2]$. Elle est alors notée SWAP^α , et s'écrit dans la base de calcul $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$

$$\text{SWAP}^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\alpha. \quad (1.21)$$

La figure 1.2 représente les portes à deux qubits CPHASE, CNOT, CU et SWAP sous la forme schématique d'un circuit quantique. Le temps s'écoule de la gauche vers la droite, et les lignes horizontales représentent les qubits. L'état initial des qubits est indiqué sur la gauche du schéma. Le point noir indique le qubit de contrôle.

1.2.3 Ensemble universel de portes quantiques

Un ensemble universel de portes quantiques est constitué d'un nombre minimum de portes nécessaires pour effectuer un calcul quantique quelconque. En effet, toute autre porte quantique peut se construire par combinaison des portes quantiques de l'ensemble universel.

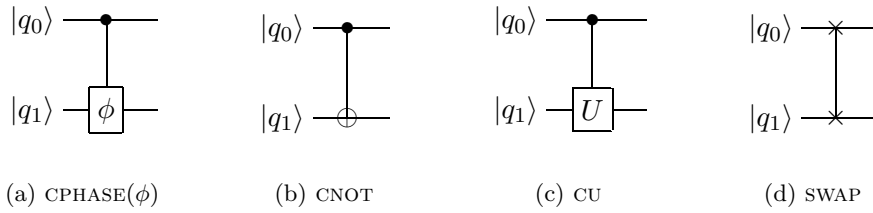


FIG. 1.2 – Représentation des portes quantiques à deux qubits (a) CPHASE, (b) CNOT, (c) CU et (d) SWAP sous la forme de circuits quantiques.

Il existe plusieurs ensembles universels de portes possibles. Citons par exemple les ensembles $\{\text{PHASE,ROTATION,CPHASE}\}$ et $\{\text{PHASE,ROTATION,CNOT}\}$ [24].

De façon générale, un ensemble universel de portes quantiques doit être composé des portes permettant la construction générale des opérations à un qubit, et d'une porte à deux qubits permettant l'intrication [25, 26].

Ainsi, la porte CU est une porte universelle à elle seule : elle permet l'intrication et les opérations à un qubit, en utilisant pour celles-ci un qubit de contrôle auxiliaire dans l'état $|1\rangle$.

Nous nous intéresserons dans les chapitres suivants à des processus permettant l'implémentation par passage adiabatique des portes quantiques constituant un ensemble universel : les portes à un qubit PHASE et ROTATION, et les portes à deux qubits CNOT et CU.

La figure 1.3 montre comment la porte CNOT peut s'obtenir à partir de l'ensemble universel $\{\text{PHASE,ROTATION,CPHASE}\}$ par la combinaison de deux portes HADAMARD et d'une porte CPHASE(π), et comment la porte SWAP peut s'obtenir par la combinaison de trois portes CNOT.

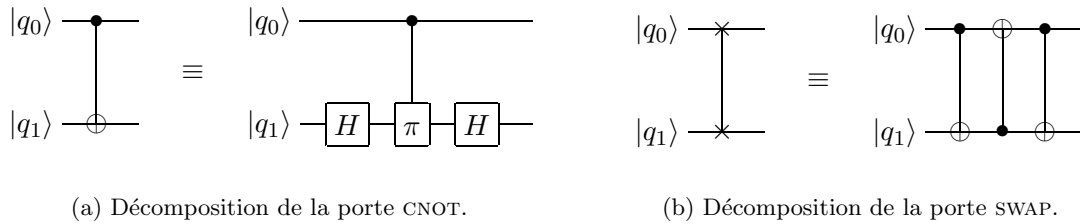


FIG. 1.3 – Décomposition (a) de la porte quantique CNOT en portes HADAMARD et CPHASE, et (b) de la porte quantique SWAP en portes CNOT.

1.3 Algorithmes quantiques

Les propriétés de superposition d'états et d'intrication de la mécanique quantique permettent le développement d'algorithmes n'ayant pas d'équivalents classiques en terme de rapidité. L'exemple le plus frappant est l'algorithme de Shor [3, 27], qui permet de factoriser un entier N en un temps dépendant de façon polynomiale de la taille de l'entier N , tandis que les meilleurs algorithmes classiques requièrent un temps exponentiel.³

3. Cette propriété assure la sécurité du code de cryptographie RSA, utilisé notamment pour les cartes bancaires.

Les algorithmes quantiques ne permettent pas toujours ce gain de temps exponentiel par rapport à leurs homologues classiques, mais plus couramment un gain de temps polynômial, comme par exemple l'algorithme de Grover [4,28] qui permet la recherche d'un élément dans une base de données de taille N en un temps de l'ordre de \sqrt{N} , au lieu d'un temps de l'ordre de N pour les algorithmes classiques.

À titre d'exemple, détaillons à présent l'algorithme de Deutsch-Jozsa [29]. Cet algorithme permet de déterminer la nature d'une fonction booléenne f agissant sur un nombre x compris entre 0 et $2^N - 1$. La fonction f doit correspondre à l'un des cas suivant, les autres cas de figure n'étant pas pris en compte par l'algorithme :

- (i) soit f est constante, auquel cas elle retourne toujours la valeur 0 ou la valeur 1 ;
- (ii) soit f est équilibrée, auquel cas elle retourne la valeur 0 pour une moitié des nombres x et la valeur 1 pour l'autre moitié.

Les nombres x sont codés par N qubits.

Classiquement, il est nécessaire d'évaluer la fonction $2^{N-1} + 1$ fois pour être certain de sa nature, étant donné que les $2^N/2$ premières évaluations peuvent donner le même résultat. En utilisant l'algorithme quantique de Deutsch-Jozsa, la fonction f n'est évaluée qu'une seule fois. Le mécanisme est le suivant.

1. On prépare un registre de $N + 1$ qubits, initialisé dans l'état

$$|\Psi_1\rangle = |0\rangle^{\otimes N} |1\rangle, \quad (1.22)$$

où les N premiers qubits sont utilisés pour coder les nombres x , et le dernier qubit pour contenir la réponse de la fonction f .

2. On applique une transformation Hadamard à l'ensemble des qubits du registre, ce qui crée une superposition de tous les états de la base de calcul.
3. On applique la fonction f , qui effectue la transformation

$$|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle \quad (1.23)$$

où \oplus correspond à l'addition modulo 2. Les 2^N états de la base de calcul sont alors transformés simultanément par une seule application de la fonction f , ce qui est impossible à réaliser classiquement.

4. On applique une transformation Hadamard sur les N premiers qubits.
5. On mesure les N premiers qubits : s'ils sont tous dans l'état $|0\rangle$, alors la fonction f est constante.

Appliquons cet algorithme sur un exemple à deux qubits :

- (a) pour une fonction constante f telle que $f(00) = f(01) = f(10) = f(11) = 1$. L'état du

registre, initialement $|\Psi_1\rangle = |00\rangle|1\rangle$, suit l'évolution

$$|\Psi_1\rangle = |00\rangle|1\rangle \quad (1.24a)$$

↓

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.24b)$$

↓

$$\begin{aligned} |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= - \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (1.24c)$$

↓

$$|\Psi_4\rangle = -|00\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.24d)$$

Les deux premiers qubits sont mesurés dans l'état $|0\rangle$, indiquant que la fonction f est constante.⁴

- (b) pour une fonction équilibrée f telle que $f(00) = f(01) = 0$ et $f(10) = f(11) = 1$. L'état du registre, initialement $|\Psi_1\rangle = |00\rangle|1\rangle$, suit l'évolution

$$|\Psi_1\rangle = |00\rangle|1\rangle \quad (1.25a)$$

↓

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.25b)$$

↓

$$\begin{aligned} |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (1.25c)$$

↓

$$|\Psi_4\rangle = |10\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.25d)$$

Les deux premiers qubits sont mesurés dans un état différent, indiquant que la fonction f est équilibrée.

4. Dans le cas où la fonction f est constante et retourne la valeur 0, l'état final $|\Psi_4\rangle$ est obtenu avec le signe opposé, et les deux premiers qubits sont donc aussi mesurés dans l'état $|0\rangle$.

– RÉSUMÉ DU CHAPITRE 1 –

OBJECTIF : Ce chapitre définit les notions de base liées au calcul quantique et à l'information quantique.

DÉFINITIONS :

- ① L'unité élémentaire d'information quantique est un système à deux niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ appelé *qubit*.
- ② L'ensemble des qubits utilisés constitue un *registre*.
- ③ Un calcul quantique s'effectue par l'action de *portes logiques quantiques* sur le registre.
- ④ Les *portes logiques quantiques* sont des opérations unitaires agissant sur les qubits du registre.
- ⑤ Les portes quantiques constituant un *ensemble universel* de portes suffisent à construire toutes les autres portes quantiques.
- ⑥ L'ensemble constitué des portes à un qubit et d'une porte à deux qubits produisant l'intrication est universel.

Annexe A

Mesure quantique

Le résultat d'une mesure quantique est décrit par l'application d'un ensemble de projecteurs. Prenons par exemple le cas d'un système à deux qubits initialement dans l'état EPR

$$|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle). \quad (\text{A.1})$$

Après une mesure effectuée sur le premier qubit, l'état du système s'obtient en appliquant le projecteur :

- P_0 si le résultat de la mesure indique que le premier qubit est dans l'état $|0\rangle$;
- P_1 si le résultat de la mesure indique que le premier qubit est dans l'état $|1\rangle$.

Les opérateurs P_0 et P_1 sont les projecteurs sur les sous-espaces propres du premier qubit, définis par les relations

$$P_0 = \sum_{j=0}^1 |0j\rangle\langle 0j|, \quad (\text{A.2a})$$

$$P_1 = \sum_{j=0}^1 |1j\rangle\langle 1j|. \quad (\text{A.2b})$$

L'état du système après la mesure effectuée sur le premier qubit s'écrit alors

$$|\Psi\rangle = \frac{P_0|\Psi_{\text{EPR}}\rangle}{\sqrt{\langle\Psi_{\text{EPR}}|P_0^\dagger P_0|\Psi_{\text{EPR}}\rangle}} = |00\rangle \quad (\text{A.3})$$

si la mesure indique que le premier qubit est dans l'état $|0\rangle$, et

$$|\Psi\rangle = \frac{P_1|\Psi_{\text{EPR}}\rangle}{\sqrt{\langle\Psi_{\text{EPR}}|P_1^\dagger P_1|\Psi_{\text{EPR}}\rangle}} = |11\rangle \quad (\text{A.4})$$

si la mesure indique que le premier qubit est dans l'état $|1\rangle$. Après la mesure du premier qubit, les deux qubits se retrouvent donc dans le même état quantique.

Chapitre 2

Évolution adiabatique d'un système quantique

L'ÉVOLUTION temporelle d'un système quantique non-dissipatif est déterminée de façon générale par l'équation de Schrödinger. La solution de cette équation dépend d'un temps τ caractéristique du système, et permet une analyse simplifiée dans les cas limites où τ tend vers zéro ou l'infini.

Le second cas, correspondant à l'évolution lente du système, de son état initial à son état final, est décrit dans le cadre du *théorème adiabatique*. Nous rappellerons l'énoncé de ce théorème et ses implications dans la première section. Différents processus de transfert de population atomique basés sur ce théorème seront rappelés dans les sections suivantes.

2.1 Théorème adiabatique

Considérons un système quantique dont l'Hamiltonien $H(t) = \hat{H}(t/\tau)$ évolue lentement et de façon continue dans le temps. La durée τ caractérise cette évolution, une évolution adiabatique ayant lieu lorsque τ tend vers l'infini.

Désignons par $E_1(t), E_2(t), \dots, E_n(t), \dots$ les valeurs propres instantanées de l'Hamiltonien, de dégénérescence respective $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$, par $\{|\Psi_n^\alpha(t)\rangle\}_{\alpha=0, \dots, d_n}$ les vecteurs propres instantanés associés, et par $P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t) \dots$ les projecteurs sur les sous-espaces propres associés :

$$H|\Psi_n^\alpha(t)\rangle = E_n(t)|\Psi_n^\alpha(t)\rangle, \quad (2.1a)$$

$$\langle \Psi_n^\alpha(t) | \Psi_m^\beta(t) \rangle = \delta_{nm} \delta_{\alpha\beta}, \quad (2.1b)$$

$$P_n(t) = \sum_{\alpha=0}^{d_n} |\Psi_n^\alpha(t)\rangle \langle \Psi_n^\alpha(t)|. \quad (2.1c)$$

L'opérateur d'évolution du système $U(t, t_i)$, appelé *propagateur*, relie l'état du système $|\Psi(t)\rangle$ au temps t à l'état initial $|\Psi(t_i)\rangle$ par la relation

$$|\Psi(t)\rangle = U(t, t_i) |\Psi(t_i)\rangle. \quad (2.2)$$

Le théorème adiabatique peut alors s'énoncer de la façon suivante [30] :

Théorème adiabatique – *Si les valeurs propres instantanées ne se croisent pas, i.e. $|E_n(t) - E_m(t)| > \delta_0 \forall t$, alors dans la limite où $\tau \rightarrow \infty$, les sous-espaces propres instantanés du système évoluent indépendamment les uns des autres :*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} P_n(t) U(t, t_i) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} U(t, t_i) P_n(t_i). \quad (2.3)$$

Ainsi, si la fonction d'onde $\Psi(t)$ décrivant l'état du système appartient au sous-espace propre instantané d'énergie $E_n(t)$ au temps initial, alors cette fonction d'onde restera dans ce sous-espace propre au cours de l'évolution, dans la limite adiabatique $\tau \rightarrow \infty$.

Dans le cas le plus simple où les valeurs propres ne sont pas dégénérées, le système évolue suivant les états propres auxquels il s'est connecté initialement :

$$|\Psi(t)\rangle \simeq \sum_n \langle \Psi_n(t_i) | \Psi(t_i) \rangle e^{-i(\phi_n^d + \phi_n^b)} |\Psi_n(t)\rangle. \quad (2.4)$$

Les corrections non-adiabatiques à l'état $|\Psi(t)\rangle$ du système sont d'ordre $\mathcal{O}(1/\tau)$. Chaque état propre accumule une phase $\phi_n^d + \phi_n^b$ lors de l'évolution, somme de la phase dynamique

$$\phi_n^d = \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^t E_n(t) dt, \quad (2.5)$$

et de la phase de Berry [31]

$$\phi_n^b = -i \int_{t_i}^t \langle \Psi_n(t) | \frac{d}{dt} | \Psi_n(t) \rangle dt \quad (2.6a)$$

$$= -i \int_{\mathbf{R}(t_i)}^{\mathbf{R}(t)} \langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R}, \quad (2.6b)$$

où le vecteur \mathbf{R} est formé par l'ensemble des paramètres dont dépend le système, et avec la notation $|n(\mathbf{R})\rangle = |\Psi_n(t)\rangle$.

L'écriture (2.6b) montre la nature géométrique de la phase de Berry : elle dépend essentiellement du chemin parcouru dans l'espace des paramètres, et non du temps mis pour parcourir ce chemin. Nous verrons ce cas plus en détail dans les exemples des sections suivantes.

Dans la pratique, il suffit que le temps caractéristique τ soit suffisamment grand devant les autres grandeurs caractéristiques du système pour que l'application du théorème adiabatique décrive la dynamique de façon appropriée. Les relations que doit alors satisfaire τ s'appellent les *conditions d'adiabaticités*.

Nous allons à présent esquisser une démonstration de ce théorème dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension finie sans croisement des valeurs propres instantanées [32–35], et préciser quelles sont les conditions d'adiabaticité. Le cas plus général d'un espace de Hilbert de dimension infinie avec un croisement possible des valeurs propres instantanées est traité dans les références [32, 36–40].

Le propagateur (2.2) du système est défini par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{dU(t, t_i)}{dt} = H(t) U(t, t_i), \quad (2.7a)$$

$$U(t_i, t_i) = \mathbb{1}. \quad (2.7b)$$

Les équations (2.7) s'écrivent de façon équivalente en fonction du temps normalisé $s = t/\tau$

$$\frac{i\hbar}{\tau} \frac{d\hat{U}(s, s_i)}{ds} = \hat{H}(s) \hat{U}(s, s_i), \quad (2.8a)$$

$$\hat{U}(s_i, s_i) = \mathbb{1}, \quad (2.8b)$$

avec les opérateurs $\hat{H}(s) = H(t)$ et $\hat{U}(s, s_i) = U(t, t_i)$.

On suppose que les vecteurs propres instantanés $|\hat{\Psi}_n^\alpha(s)\rangle = |\Psi_n^\alpha(t)\rangle$ de \hat{H} sont suffisamment dérivables par rapport au temps. On définit la famille d'opérateurs unitaires

$$\hat{T}(s) = \sum_n \sum_\alpha |\hat{\Psi}_n^\alpha(s)\rangle \langle \hat{\Psi}_n^\alpha(s_i)|. \quad (2.9)$$

Au temps initial, $\hat{T}(s_i) = \mathbb{1}$. La représentation matricielle de l'opérateur $\hat{T}(s)$ dans la base $\{|\hat{\Psi}_n^\alpha(s_i)\rangle\}$ a une interprétation simple : les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres instantanés $|\hat{\Psi}_n^\alpha(s)\rangle$ exprimés dans la même base $\{|\hat{\Psi}_n^\alpha(s_i)\rangle\}$. L'opérateur $\hat{T}(s)$ transforme l'Hamiltonien $\hat{H}(s)$ en un opérateur diagonal $\hat{D}(s)$ dans la base des vecteurs propres instantanés initiale $\{|\hat{\Psi}_n^\alpha(s_i)\rangle\}$:

$$\begin{aligned} \hat{D}(s) &= \hat{T}^\dagger(s) \hat{H}(s) \hat{T}(s) \\ &= \sum_n \hat{E}_n(s) \hat{P}_n(s_i), \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec les notations des valeurs propres instantanées $\hat{E}_n(s) = E_n(t)$ et des projecteurs spectraux $\hat{P}_n(s) = P_n(t)$. Le propagateur transformé

$$\hat{U}'(s, s_i) = \hat{T}^\dagger(s) \hat{U}(s, s_i) \hat{T}(s_i) \quad (2.11)$$

vérifie alors l'équation de Schrödinger

$$\frac{i\hbar}{\tau} \frac{d\hat{U}'(s, s_i)}{ds} = \hat{H}'(s) \hat{U}'(s, s_i), \quad (2.12)$$

avec l'Hamiltonien

$$\hat{H}'(s) = \hat{D}(s) - \frac{i\hbar}{\tau} \hat{T}^\dagger(s) \frac{d\hat{T}(s)}{ds}. \quad (2.13)$$

Dans la base des vecteurs propres instantanés initiale, l'Hamiltonien (2.13) est composé principalement de deux parties :

- les éléments internes à un sous-espace propre de valeur propre $\hat{E}_n(s)$

$$\langle \hat{\Psi}_n^\alpha(s_i) | \hat{H}' | \hat{\Psi}_n^\beta(s_i) \rangle = \hat{E}_n(s) \delta_{\alpha\beta} - \frac{i\hbar}{\tau} \langle \hat{\Psi}_n^\alpha(s) | \frac{d}{ds} | \hat{\Psi}_n^\beta(s) \rangle; \quad (2.14)$$

- les éléments couplant les sous-espaces propres entre eux¹

$$\langle \hat{\Psi}_n^\alpha(s_i) | \hat{H}' | \hat{\Psi}_m^\beta(s_i) \rangle = -\frac{i\hbar}{\tau} \langle \hat{\Psi}_n^\alpha(s) | \frac{d}{ds} | \hat{\Psi}_m^\beta(s) \rangle, \quad (2.15a)$$

$$= \frac{i\hbar}{\tau} \frac{\langle \hat{\Psi}_n^\alpha(s) | \frac{d\hat{H}(s)}{ds} | \hat{\Psi}_m^\beta(s) \rangle}{\hat{E}_n(s) - \hat{E}_m(s)}. \quad (2.15b)$$

1. Le passage de l'équation (2.15a) à l'équation (2.15b) se fait en introduisant la dérivée temporelle de l'équation aux valeurs propres (2.1a).

Dans la limite adiabatique $\tau \rightarrow \infty$, le terme de couplage (2.15) entre les sous-espaces propres, d'ordre $\mathcal{O}(1/\tau)$, peut être négligé devant leur écart en énergie $|\hat{E}_n(s) - \hat{E}_m(s)|$. Il doit cependant être pris en compte si cet écart en énergie est du même ordre de grandeur. Ceci mène à la condition d'adiabaticité²

$$\left| \hat{E}_n(s) - \hat{E}_m(s) \right| \gg \left| \frac{i\hbar \langle \hat{\Psi}_n^\alpha(s) | \frac{d\hat{H}(s)}{ds} | \hat{\Psi}_m^\beta(s) \rangle}{\tau \hat{E}_n(s) - \hat{E}_m(s)} \right|, \quad (2.16)$$

d'où la condition sur le temps caractéristique

$$\tau \gg \left| \frac{\hbar \langle \hat{\Psi}_n^\alpha(s) | \frac{d\hat{H}(s)}{ds} | \hat{\Psi}_m^\beta(s) \rangle}{(\hat{E}_n(s) - \hat{E}_m(s))^2} \right| \quad \forall \alpha, \beta, n, m \neq n, \quad \forall s. \quad (2.17)$$

Dès lors que la condition d'adiabaticité (2.17) est vérifiée, l'évolution de chaque sous-espace propre peut être traitée séparément dans la base des vecteurs propres instantanés initiale, et conduit aux propagateurs $\hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i)$ restreints aux sous-espaces propres et définis par les équations de Schrödinger

$$\frac{i\hbar}{\tau} \frac{d\hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i)}{ds} = P_n(s_i) \hat{H}'(s) P_n(s_i) \hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i) \quad \forall n. \quad (2.18)$$

Le propagateur adiabatique du système $\hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i)$ s'écrit alors comme la somme directe des propagateurs $\hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i)$ associés à chaque sous-espace propre

$$\hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i) = \bigoplus_n \hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i). \quad (2.19)$$

Le propagateur adiabatique initial est obtenu en inversant la transformation (2.11)

$$\begin{aligned} U_{\text{ad}}(t, t_i) &= \hat{U}_{\text{ad}}(s, s_i) \\ &= \hat{T}(s) \hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i) \hat{T}^\dagger(s_i) \\ &= \hat{T}(s) \hat{U}'_{\text{ad}}(s, s_i). \end{aligned} \quad (2.20)$$

On a alors l'identité

$$P_n(t) U_{\text{ad}}(t, t_i) = U_{\text{ad}}(t, t_i) P_n(t_i), \quad (2.21)$$

valable dans la limite adiabatique $\tau \rightarrow \infty$. \square

Dans le cas le plus simple où les valeurs propres ne sont pas dégénérées, les propagateurs adiabatiques restreints aux sous-espaces propres s'écrivent

$$U'_{\text{ad}}(t, t_i) = e^{-i(\phi_n^d + \phi_n^b)} P_n(t_i) \quad \forall n. \quad (2.22)$$

L'état du système au temps t est alors dans la limite adiabatique

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n \langle \Psi_n(t_i) | \Psi(t_i) \rangle e^{-i(\phi_n^d + \phi_n^b)} |\Psi_n(t)\rangle, \quad (2.23)$$

2. L'approximation adiabatique consiste à négliger les termes de couplage lors de l'évolution. Ils peuvent cependant être incorporés au premier ordre en répétant la procédure adiabatique sur l'Hamiltonien $\hat{H}'(s)$, ce qui s'appelle une *procédure superadiabatique* [41–45]. Le calcul des valeurs propres et des états propres instantanés par perturbation montre alors que les corrections à l'approximation adiabatique font intervenir le rapport des termes de couplage et des différences de valeurs propres, et sont donc négligeables sous la condition (2.16).

avec la phase dynamique

$$\phi_n^d = \frac{1}{\hbar} \int_{t_i}^t E_n(t) dt, \quad (2.24)$$

et de la phase géométrique de Berry [31]

$$\phi_n^b = -i \int_{t_i}^t \langle \Psi_n(t) | \frac{d}{dt} | \Psi_n(t) \rangle dt. \quad (2.25a)$$

2.2 Passage adiabatique par effet Raman stimulé (STIRAP)

Cette technique (cf. [46–50]) permet le transfert de population entre deux états métastables,³ en s'affranchissant des pertes par émission spontanée dues à l'état excité utilisé lors du couplage. Un autre avantage de cette technique est qu'elle ne requiert pas un contrôle précis des différents paramètres mis en jeu. Ces deux caractéristiques en font une méthode *robuste* pour le transfert de population.

2.2.1 Système et Hamiltonien effectif

On considère le système à trois niveaux composé de deux états métastables $|0\rangle, |1\rangle$ et d'un état excité $|e\rangle$, dont le taux de pertes par émission spontanée est noté γ (Figure 2.1).

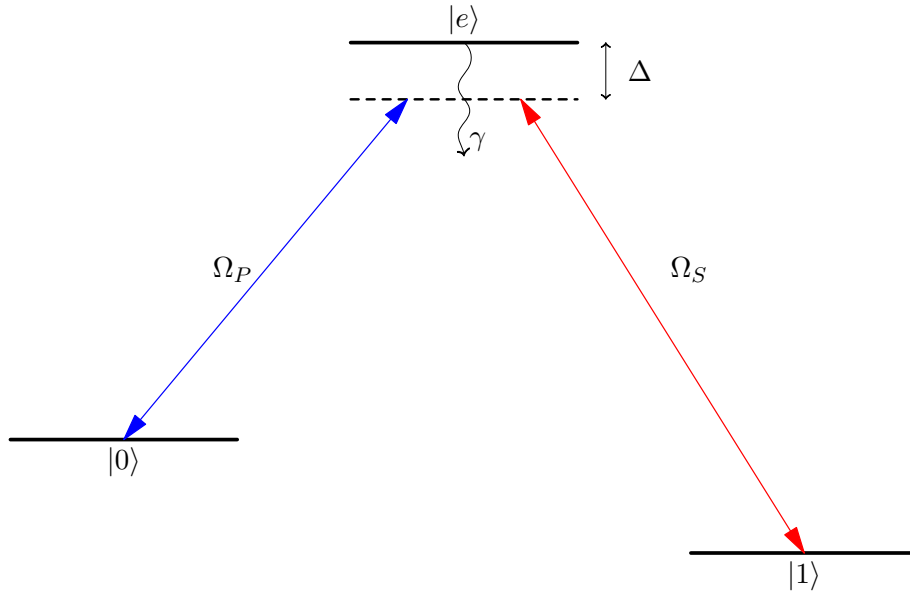


FIG. 2.1 – *Système à trois niveaux et couplages utilisés pour le STIRAP. L'état $|0\rangle$ est initialement peuplé.*

Les états métastables $|0\rangle, |1\rangle$ sont respectivement couplés à l'état excité $|e\rangle$ par les lasers pompe et Stokes, de champ électrique $\vec{E}_i(t) = \vec{\mathcal{E}}_i(t) \cos(\omega_i t - \phi_i)$ ($i = P, S$). L'Hamiltonien du système s'écrit alors, dans la base $\{|0\rangle, |e\rangle, |1\rangle\}$, en représentation d'interaction et dans

3. Un état métastable est un état dont la durée de vie est longue par rapport au temps d'évolution du système, ce qui permet de le considérer comme un état stable lors de la dynamique.

l'approximation résonante [30]

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega_P e^{-i\phi_P} & 0 \\ \Omega_P e^{i\phi_P} & 2\Delta & \Omega_S e^{i\phi_S} \\ 0 & \Omega_S e^{-i\phi_S} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

où interviennent les pulsations de Rabi $\Omega_i \geq 0$, reliées aux amplitudes $\vec{\mathcal{E}}_i(t)$ et aux moments dipolaires $\vec{\mu}_i$ par la relation

$$\Omega_i(t) = \frac{\vec{\mu}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}_i(t)}{\hbar}. \quad (2.27)$$

L'Hamiltonien (2.26) admet les valeurs propres instantanées

$$E_0 = 0, \quad (2.28a)$$

$$E_+ = \frac{\hbar}{2}(\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}) = \frac{\hbar\Omega}{2} \tan \psi, \quad (2.28b)$$

$$E_- = \frac{\hbar}{2}(\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}) = \frac{\hbar\Omega}{2} \cot \psi, \quad (2.28c)$$

associées aux vecteurs propres instantanés

$$|\Psi_0\rangle = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -e^{i\phi} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad |\Psi_+\rangle = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \psi \\ \sin \psi \\ e^{i\phi} \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}, \quad |\Psi_-\rangle = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \psi \\ e^{i\phi} \cos \theta \sin \psi \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

où les angles dynamiques θ, ψ , la pulsation Ω et la phase relative ϕ sont définis par les relations

$$\tan \theta = \frac{\Omega_P}{\Omega_S}, \quad (2.30a)$$

$$\tan \psi = \frac{\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}}{\Omega}, \quad (2.30b)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_P^2 + \Omega_S^2}, \quad (2.30c)$$

$$\phi = \phi_P - \phi_S. \quad (2.30d)$$

2.2.2 Évolution adiabatique du système

Dans la limite adiabatique où les pulsations de Rabi varient suffisamment lentement au cours du temps, l'analyse des vecteurs propres instantanés (2.29) suffit à décrire l'évolution du système.

En particulier, le vecteur $|\Psi_0\rangle$ permet le transfert de population de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ lorsque l'angle θ varie de 0 à $\pi/2$. Ce vecteur n'a pas de composante sur l'état excité et n'est donc pas affecté par ses pertes par émission spontanée, d'où son appellation *vecteur sombre*. Sa valeur propre associée étant nulle à tout instant, aucune phase dynamique n'est accumulée lors de son suivi adiabatique.

La définition (2.30a) de l'angle θ implique que le transfert de population s'effectue suivant l'état sombre par une séquence dite *contre-intuitive* des impulsions laser, *i.e.* le laser Stokes est enclenché avant la pompe. Cette séquence conduit aux connections suivantes des états

initial $|\Psi(t_i)\rangle$ et final $|\Psi(t_f)\rangle$

$$|\Psi(t_i)\rangle = |0\rangle = |\Psi_0(t_i)\rangle \quad (2.31a)$$

↓

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_0(t)\rangle \quad (2.31b)$$

↓

$$|\Psi(t_f)\rangle = |\Psi_0(t_f)\rangle = -e^{i\phi} |1\rangle. \quad (2.31c)$$

Le transfert de population de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ s'accompagne donc d'un gain de phase $\phi + \pi$, où la phase relative ϕ peut être contrôlée très précisément expérimentalement .

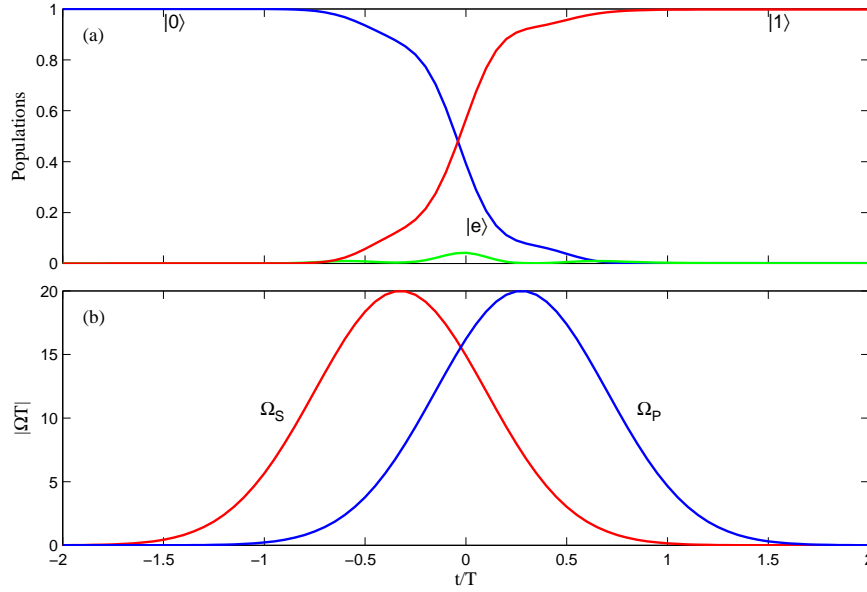


FIG. 2.2 – Évolution des populations (a) lors du processus STIRAP. Les pulsations de Rabi (b) sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T . Le délai entre les impulsions Stokes et pompe est $0.6T$.

L'évolution numérique du système est représentée sur la figure 2.2, pour des pulsations de Rabi de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T et d'amplitude normalisée 20. Le délai entre les impulsions pompe et Stokes correspond à $0.6T$ [Figure 2.2(b)]. Le transfert adiabatique de population est visible sur la figure 2.2(a). Il commence dès que l'impulsion pompe est enclenchée, et s'achève lorsque l'impulsion Stokes s'éteint.

2.2.3 Conditions d'adiabaticité et robustesse

L'évolution (2.31) s'effectue dans la limite adiabatique à condition que les pulsations de Rabi varient suffisamment lentement au cours du temps, de sorte que la condition d'adiabaticité (2.17) soit respectée, pour le temps caractéristique d'évolution $\tau = T$.

Les deux relations à vérifier pour le processus STIRAP sont

$$\left| \frac{d\theta}{ds} \right| \ll \left| \Omega T \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} \right|, \quad (2.32a)$$

$$\left| \frac{d\theta}{ds} \right| \ll \left| \Omega T \frac{\cos \psi}{\sin^2 \psi} \right|. \quad (2.32b)$$

La condition la plus forte, étant donnée la variation de l'angle ψ , proche de $\pi/2$, est la relation (2.32b), qui s'exprime par l'inégalité

$$\Omega T \gg \frac{\Omega_P \Omega_S (\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2})^{3/2}}{\Omega^3 (\Delta^2 + \Omega^2)^{1/4}}, \quad (2.33)$$

en effectuant les approximations

$$\frac{d\Omega_i}{dt} \approx \frac{\Omega_i}{T}. \quad (2.34)$$

Pendant les transferts de population, la pulsation de Rabi Ω est de l'ordre de l'amplitude maximale Ω_0 des pulsations pompe et Stokes. Si l'écart à la résonance reste faible de sorte que

$$\Delta \ll \Omega_0, \quad (2.35)$$

alors le second membre de l'inégalité (2.33) est de l'ordre de 1, d'où la condition d'adiabaticité du processus STIRAP

$$\Omega_0 T \gg 1. \quad (2.36)$$

Dans le cas inverse où $\Delta \gg \Omega_0$, un raisonnement analogue conduit à la condition [51]

$$T \Omega_0^2 \gg \Delta. \quad (2.37)$$

Le principal avantage du processus STIRAP, à l'instar des processus adiabatiques, est sa robustesse, *i.e.* son insensibilité aux fluctuations des paramètres. En effet, seule compte la variation globale de l'angle θ de 0 à $\pi/2$, et la forme des impulsions utilisées est donc inessentielle. La figure 2.3 montre cette robustesse pour le délai τ entre les impulsions Stokes et pompe, en fonction de l'écart à la résonance Δ , dont l'influence est négligeable sur le transfert de population. La figure 2.3(b) montre que cette robustesse est indépendante des pertes par émission spontanée dues à l'état excité, étant donné que la dynamique évolue suivant l'état sombre. Les probabilités de transition ont été obtenues dans ce cas en ajoutant à l'écart Δ un terme imaginaire $-i\gamma$ tel que $\gamma T = 1$, ce qui correspond à des pertes significatives de l'état excité $|e\rangle$.

Lorsque la dynamique n'est pas parfaitement adiabatique, les pertes par émission spontanée dues à l'état excité sont négligeables dans la limite où le taux de perte γ est faible [52,53], *i.e.*

$$\Omega_0^2 T \gg \gamma. \quad (2.38)$$

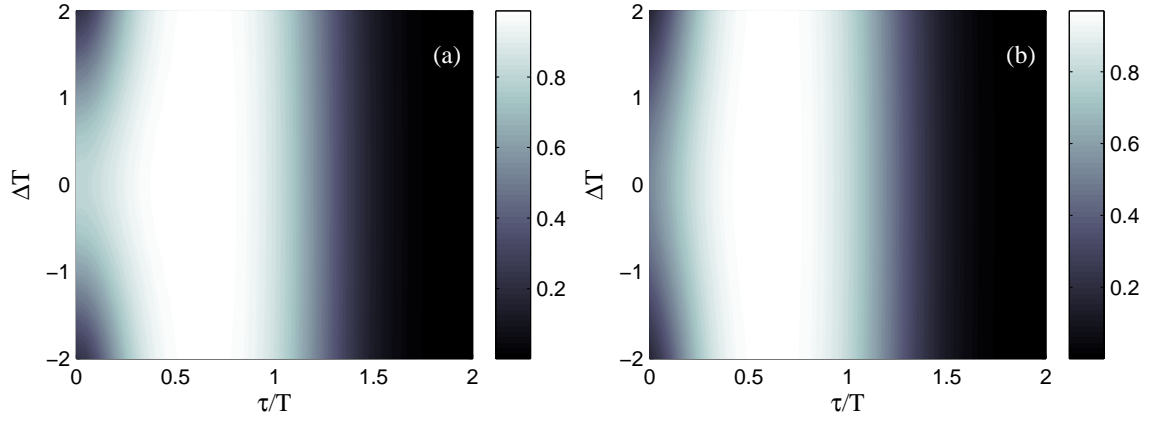


FIG. 2.3 – Probabilité de transition de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ en fonction de l'écart à la résonance Δ et du délai entre les impulsions τ , pour un système non-dissipatif (a), et pour un état excité à pertes $\gamma = -i/T$ (b). Les pulsations de Rabi des lasers sont d'amplitude maximale $\Omega_0 T = 20$.

2.2.4 STIRAP fractionnaire (f-STIRAP)

Cette technique, basée sur le STIRAP, permet la création d'une superposition des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ en effectuant un transfert partiel de population [54]. Il suffit pour cela que les impulsions pompe et Stokes s'éteignent dans un rapport constant

$$\frac{\Omega_P}{\Omega_S} \xrightarrow{t \rightarrow t_f} \tan \theta_0. \quad (2.39)$$

La dynamique évolue alors, dans la limite adiabatique, en suivant les connections

$$|\Psi(t_i)\rangle = |0\rangle = |\Psi_0(t_i)\rangle \quad (2.40a)$$

↓

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_0(t)\rangle \quad (2.40b)$$

↓

$$|\Psi(t_f)\rangle = |\Psi_0(t_f)\rangle = \cos \theta_0 |0\rangle - e^{i\phi} \sin \theta_0 |1\rangle. \quad (2.40c)$$

Les conditions d'adiabaticité sont celles du STIRAP, associées à la limite (2.39) qui doit s'appliquer lorsque ΩT est encore grand devant 1 pour éviter les couplages non-adiabatiques. L'évolution numérique des populations est représentée sur figure 2.4(a), pour une superposition d'états à poids égal. Les pulsations de Rabi utilisées, de la forme

$$\Omega_S(t) = \Omega_0(t + \tau/2) + \cos \theta_0 \Omega_0(t - \tau/2), \quad (2.41a)$$

$$\Omega_P(t) = \sin \theta_0 \Omega_0(t - \tau/2) \quad (2.41b)$$

où Ω_0 est une gaussienne de largeur à mi-hauteur T , sont portées sur la figure 2.4(b). Le décalage τ correspond à $0.8T$, l'angle θ_0 à $\pi/4$.

La robustesse du processus f-STIRAP est globalement équivalente à celle du processus STIRAP, exception faite de la relation (2.39) qui doit être vérifiée de façon précise. Une façon robuste de satisfaire cette relation est d'utiliser un système de sous-niveaux magnétiques Zeeman, comme représenté sur la figure 2.5. Les transitions sont alors pilotées par les polarisations des impulsions, et la séquence (2.41) s'obtient avec deux impulsions laser décalées de

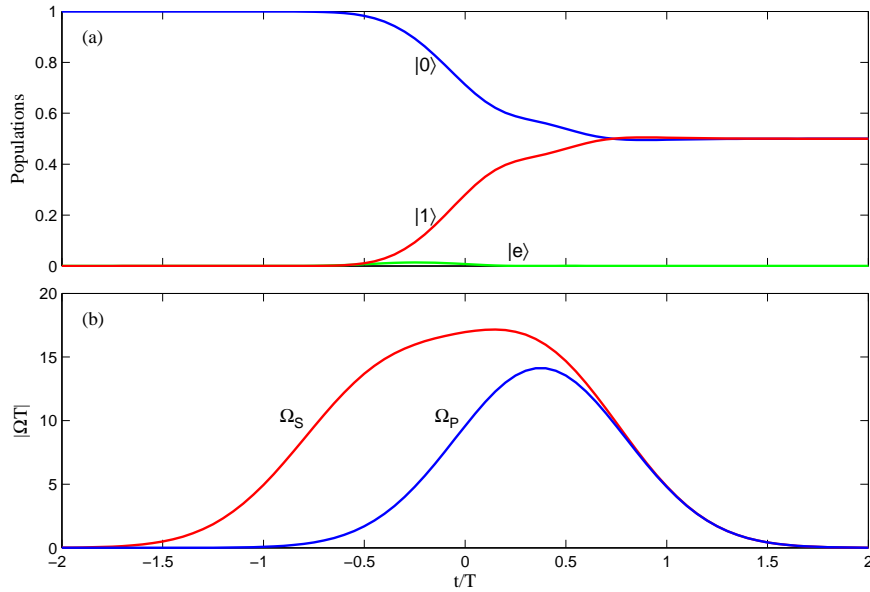


FIG. 2.4 – Évolution des populations (a) lors du processus f -STIRAP. Les pulsations de Rabi (b) sont définies par les équations (2.41).

τ : l'une de polarisation circulaire σ_- , l'autre de polarisation elliptique $\cos\theta_0\sigma_- + \sin\theta_0\sigma_+$. La relation (2.39) est alors naturellement satisfaite en fin de séquence.

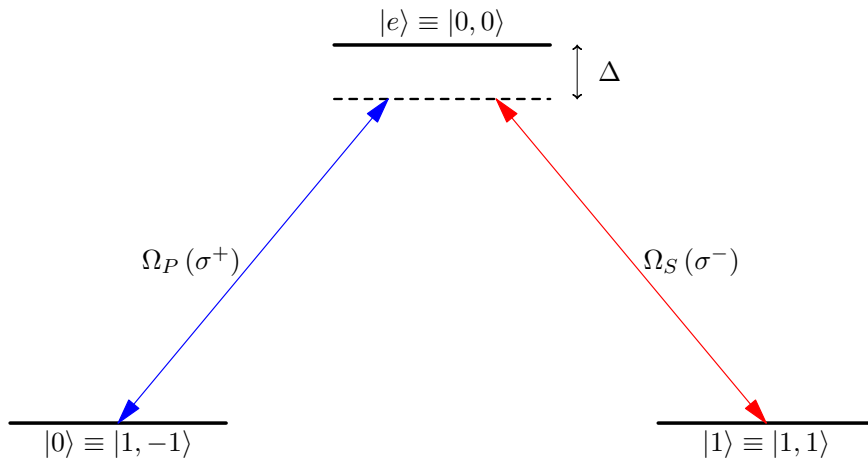


FIG. 2.5 – Système de sous-niveaux magnétiques Zeeman utilisable pour le processus f -STIRAP. Les transitions sont pilotées par les polarisations des lasers. Les impulsions Stokes et pompe ont respectivement les polarisations circulaires σ_- et σ_+ .

2.3 Tripode STIRAP

Cette technique (cf. [55]) est une extension du STIRAP fractionnaire qui utilise un troisième état métastable, d'où le terme *tripode*. La principale conséquence est l'apparition de deux états sombres dégénérés, qui peuvent donc évoluer de façon couplée au cours du temps, dans la limite adiabatique.

2.3.1 Système et Hamiltonien effectif

On considère un système formé de trois états métastables $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ couplés à un état excité $|e\rangle$. On supposera par simplification les couplages résonants, de pulsations de Rabi respectives $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2 \geq 0$. Un exemple de système utilisable est celui représenté sur la figure 2.6, composé de sous-niveaux magnétiques Zeeman.

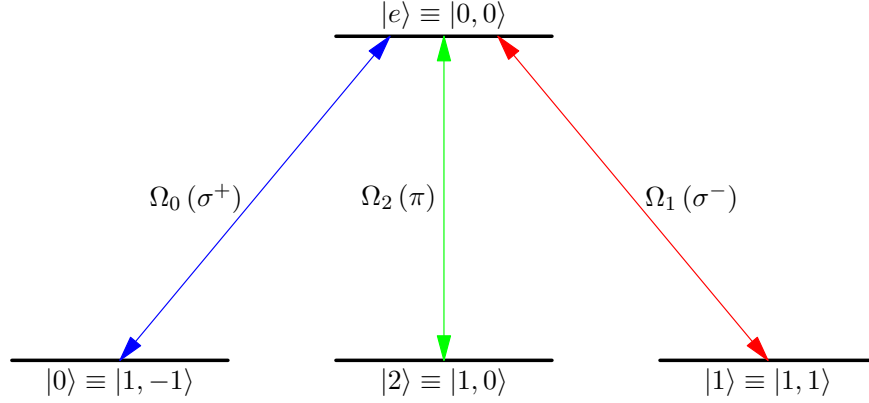


FIG. 2.6 – *Système de sous-niveaux magnétiques Zeeman utilisable pour le processus tripode-STIRAP. Les transitions sont pilotées par les polarisations des lasers : σ_+ , π ou σ_- .*

Ce système a pour Hamiltonien, écrit dans la base $\{|0\rangle, |e\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$, en représentation d'interaction et dans l'approximation résonante

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega_0 e^{-i\phi_0} & 0 & 0 \\ \Omega_0 e^{i\phi_0} & 0 & \Omega_1 e^{i\phi_1} & \Omega_2 e^{i\phi_2} \\ 0 & \Omega_1 e^{-i\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2 e^{-i\phi_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Cet Hamiltonien admet les valeurs propres instantanées

$$E_0 = E'_0 = 0, \quad (2.43a)$$

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\Omega}{2}, \quad (2.43b)$$

associées aux vecteurs propres instantanés

$$|\Psi_0\rangle = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ e^{i\phi} \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\Psi'_0\rangle = \begin{bmatrix} \cos\theta \sin\psi \\ 0 \\ e^{i\phi} \sin\theta \sin\psi \\ -e^{i\phi'} \cos\psi \end{bmatrix}, \quad (2.44a)$$

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi \\ 1 \\ e^{i\phi} \sin\theta \cos\psi \\ e^{i\phi'} \sin\psi \end{bmatrix}, \quad |\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\psi \\ -1 \\ e^{i\phi} \sin\theta \cos\psi \\ e^{i\phi'} \sin\psi \end{bmatrix}, \quad (2.44b)$$

où les angles dynamiques θ, ψ , les phases relatives ϕ, ϕ' et la pulsation de Rabi Ω sont définis

par les relations

$$\tan \theta = \frac{\Omega_1}{\Omega_0}, \quad (2.45a)$$

$$\tan \psi = \frac{\Omega_2}{\sqrt{\Omega_0^2 + \Omega_1^2}}, \quad (2.45b)$$

$$\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2}, \quad (2.45c)$$

$$\phi = \phi_0 - \phi_1, \quad (2.45d)$$

$$\phi' = \phi_0 - \phi_2. \quad (2.45e)$$

2.3.2 Évolution adiabatique du système

Dans la limite adiabatique, les sous-espaces propres du système évoluent indépendamment les uns des autres. Le couplage entre les deux états sombres, interne au sous-espace propre d'énergie nulle, doit donc être pris en considération.

Si la fonction d'onde est initialement connectée à ce sous-espace, *i.e.*

$$|\Psi(t_i)\rangle = \alpha |\Psi_0(t_i)\rangle + \beta |\Psi'_0(t_i)\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (2.46)$$

alors les coefficients α, β évolueront au cours du temps suivant l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i\hbar \dot{\theta} \sin \psi \\ i\hbar \dot{\theta} \sin \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

conduisant à l'état du système au temps t

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha(t) |\Psi_0(t)\rangle + \beta(t) |\Psi'_0(t)\rangle. \quad (2.48)$$

Découplage des vecteurs sombres

Le terme de couplage des états sombres, proportionnel à $\dot{\theta}$, s'annule dans le cas particulier où le rapport (2.45a) des pulsations de Rabi est constant à tout instant :

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \tan \theta_0 = \text{cste} \quad \forall t. \quad (2.49)$$

Cette condition peut être réalisée expérimentalement de façon robuste en utilisant le système Zeeman décrit sur la figure 2.6, et un laser de polarisation elliptique $\sin \theta_0 \sigma_- + \cos \theta_0 \sigma_+$, à l'instar du processus f-STIRAP.

Les vecteurs sombres évoluent alors indépendamment et permettent la création d'une superposition cohérente des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ à partir de l'état $|2\rangle$, dans le cas où le laser de pulsation de Rabi Ω_2 (pompe) est enclenché après celui de polarisation elliptique (Stokes).

La dynamique du système suit alors les connections

$$|\Psi(t_i)\rangle = |2\rangle = -e^{-i\phi'} |\Psi'_0(t_i)\rangle \quad (2.50a)$$

↓

$$|\Psi(t)\rangle = -e^{-i\phi'} |\Psi'_0(t)\rangle \quad (2.50b)$$

↓

$$|\Psi(t_f)\rangle = -e^{-i\phi'} |\Psi_0(t_f)\rangle = -e^{-i\phi'} \left(\cos \theta_0 |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta_0 |1\rangle \right), \quad (2.50c)$$

la phase globale ϕ' étant ici inessentielle.

L'évolution numérique des populations est représentée sur la figure 2.7, pour une superposition d'états à poids égal. Les pulsations de Rabi sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T . L'impulsion pompe est décalée de $0.6T$ par rapport aux impulsions Stokes.

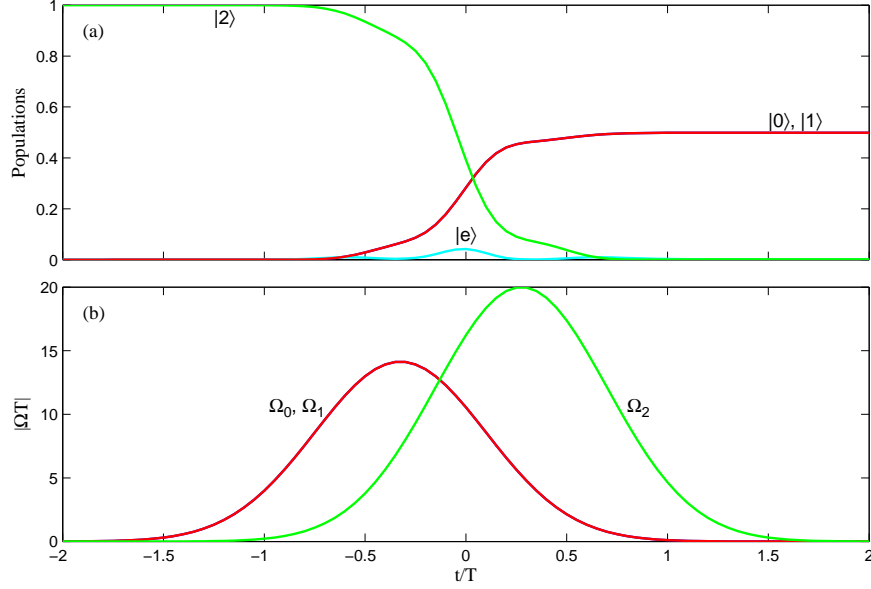


FIG. 2.7 – Évolution des population (a) lors du processus Tripode-STIRAP pour la création d'une superposition d'états à poids égal. Les populations des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ suivent alors la même évolution. Les pulsations de Rabi (b) sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T . La pulsation de Rabi Ω_2 est décalée de $0.6T$ par rapport à Ω_0, Ω_1 .

Rotations des vecteurs sombres

Dans le cas général où le terme de couplage des vecteurs sombres est non nul, l'équation de Schrödinger (2.47) s'écrit

$$i \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \dot{\theta} \sin \psi \hat{\sigma}_y \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

avec la matrice de Pauli

$$\hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

L'équation (2.51) s'intègre sans difficulté, et conduit à la rotation des vecteurs sombres définie par la relation

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta(t) & -\sin \Theta(t) \\ \sin \Theta(t) & \cos \Theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t_i) \\ \beta(t_i) \end{bmatrix}, \quad (2.53a)$$

$$\Theta(t) = \int_{\theta(t_i)}^{\theta(t)} \sin \psi d\theta. \quad (2.53b)$$

L'angle de cette rotation, défini par l'intégrale (2.53b), ne dépend que de la forme de la trajectoire $\sin \psi(\theta)$ dans l'espace des paramètres. La phase obtenue, dite *phase géométrique de Berry* [31], est donc robuste par rapport au temps mis à parcourir cette trajectoire.

La rotation (2.53a) permet la création de superpositions d'états. Nous verrons plus loin son application directe à la réalisation de portes logiques quantiques.

2.3.3 Conditions d'adiabaticité

Les conditions d'adiabaticité (2.17) s'écrivent dans le cas du tripode-STIRAP, pour $s = t/T$

$$\Omega T \gg \left| \frac{d\psi}{ds} \right|, \quad (2.54a)$$

$$\Omega T \gg \left| \frac{d\theta}{ds} \cos \psi \right|. \quad (2.54b)$$

La condition (2.54b) équivaut à celle du STIRAP pour un écart à la résonance Δ nul, et implique donc

$$\Omega_{\max} T \gg 1, \quad (2.55)$$

avec Ω_{\max} l'amplitude maximale des pulsations de Rabi. La condition (2.54a) peut quant-à elle se ramener à une inégalité de la forme

$$\Omega T \gg \frac{\Omega_2 \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}{\Omega^2}. \quad (2.56)$$

Le second membre étant de l'ordre de 1, la condition d'adiabaticité à satisfaire est alors ici aussi la condition (2.55).

– RÉSUMÉ DU CHAPITRE 2 –

OBJECTIF : Ce chapitre introduit le *passage adiabatique* et décrit différents processus de transfert de population l'utilisant.

DÉFINITIONS :

- ① Le *passage adiabatique* correspond à une évolution lente du système, effectuée en suivant les états propres instantanés du système.
- ② Les *états sombres* sont des états propres instantanés n'ayant aucune composante sur les états excités du système, et une énergie nulle en représentation d'interaction.

RÉSULTATS CONNUS : Processus de transfert de population :

- ① le STIRAP, effectuant un transfert total de population de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$;
- ② le f-STIRAP, effectuant un transfert partiel de population de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$;
- ③ le tripod-STIRAP, effectuant le transfert de la population d'une superposition cohérente de deux états vers un état tiers, ou réciproquement.

Ces processus sont *robustes* :

- ① insensibles à l'émission spontanée (suivi adiabatique des états sombres) ;
- ② insensibles aux fluctuations des paramètres du système ;
- ③ ne requièrent que le contrôle précis des polarisations des lasers et de leurs phases relatives, ce qui est expérimentalement réalisable.

Chapitre 3

Portes quantiques à un qubit

NOUS VERRONS dans ce chapitre différents processus adiabatiques permettant l'implémentation de portes quantiques à un qubit dans un système à quatre niveaux. On considérera un système de sous-niveaux magnétiques Zeeman $|j, m\rangle$, possédant un état excité $|e\rangle \equiv |0, 0\rangle$ et trois états métastables $|0\rangle \equiv |1, -1\rangle$, $|a\rangle \equiv |1, 0\rangle$, $|1\rangle \equiv |1, 1\rangle$ (Figure 3.1).

Les sous-niveaux magnétiques $|j, m\rangle$ sont vecteurs propres des opérateurs \vec{L}^2 et L_z , où L_z est la composante du moment cinétique \vec{L} dans une direction arbitraire \vec{e}_z , appelée axe de quantification. Nous agirons sur ce système avec trois lasers de polarisations orthogonales : l'un de polarisation linéaire, les deux autres de polarisations circulaires droite et gauche. L'axe de quantification \vec{e}_z est alors choisi dans la direction de la polarisation linéaire, qui correspond aussi à la direction de propagation des lasers de polarisations circulaires.

Dans un tel système, les règles de sélection induites par le moment dipolaire électrique font que les transitions, dans l'approximation résonante, sont pilotées par les polarisations des lasers : le laser de polarisation linéaire π dirigée suivant l'axe quantique couple l'état excité à l'état auxiliaire $|a\rangle$; les lasers de polarisations circulaires σ_+ , σ_- définies dans le plan orthogonal à l'axe quantique couplent respectivement l'état excité aux états $|0\rangle$, $|1\rangle$.

La polarisation et la direction de propagation d'un laser peuvent donc être choisies pour obtenir de façon robuste des couplages en rapport constant, comme c'est le cas pour le STIRAP fractionnaire, où le rapport constant $\Omega_0/\Omega_1 = \tan \theta_0$ s'obtient avec un laser de

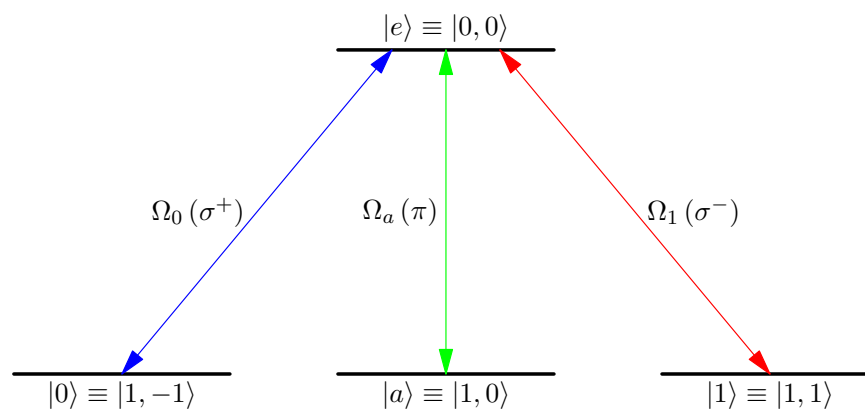


FIG. 3.1 – Système de sous-niveaux magnétiques Zeeman pouvant être utilisé pour l'implémentation des portes quantiques à un qubit. Les transitions sont pilotées par les polarisations des lasers.

polarisation elliptique de la forme $\cos \theta_0 \sigma_- + \sin \theta_0 \sigma_+$.

Nous verrons dans ce chapitre que ce système permet l'implémentation de portes quantiques à un qubit. Ces portes permettent la création de superpositions d'états dont les poids et la phase relative doivent être parfaitement définis, afin de ne pas induire d'erreurs lors de leur utilisation en calcul quantique.

Les techniques par passage adiabatique offrent plusieurs solutions dans cette optique. Nous verrons dans une première section l'utilisation des phases géométriques de Berry dans l'implémentation des portes quantiques dites *holonomiques* [8, 55]. Nous verrons ensuite l'utilisation des paramètres des lasers, tels que leur polarisation ou leur déphasage, dans des processus basés sur les techniques STIRAP. Nous rappellerons alors en premier lieu le processus permettant l'implémentation d'une porte quantique générale à un qubit [9], avant de proposer une alternative mettant en jeu une compensation de phases dynamiques [56].

3.1 Processus holonomiques

L'application des phases géométriques de Berry – appelées *holonomies* – au calcul quantique a conduit à l'idée d'ordinateur quantique holonomique [57, 58], bénéficiant des avantages liés à la nature géométrique des phases de Berry. En effet, les paramètres des portes quantiques associées ne dépendent que de la forme des trajectoires décrites dans l'espace des paramètres, et pas du temps mis à les parcourir, ce qui assure une certaine robustesse aux calculs quantiques à effectuer.

Plusieurs processus ont été proposés pour l'implémentation de portes quantiques holonomiques, en particulier la porte CPHASE [59, 60]. Nous rappellerons ici les premiers processus holonomiques faisant partie d'un ensemble universel expérimentalement réalisable, proposés par Unanyan *et al.* et Duan *et al.* [8, 55].

3.1.1 Porte PHASE

Systeme et Hamiltonien effectif

On considère deux lasers de pulsation de Rabi $\Omega_1, \Omega_a \geq 0$ couplant respectivement de façon résonante les états métastables $|1\rangle$ et $|a\rangle$ à l'état excité $|e\rangle$. La phase $\phi(t)$ du premier laser dépendra du temps. L'état $|0\rangle$, non-couplé, est un état stationnaire du système : l'étude peut se restreindre au sous-système formé par les états $|1\rangle, |a\rangle, |e\rangle$, dont l'Hamiltonien s'écrit en représentation d'interaction et dans l'approximation résonante

$$H(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & \Omega_a(t) & 0 \\ \Omega_a(t) & 0 & \Omega_1(t) e^{i\phi(t)} \\ 0 & \Omega_1(t) e^{-i\phi(t)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Cet Hamiltonien est semblable à celui du processus STIRAP (2.26) dans le cas résonant $\Delta = 0$. Il admet les mêmes valeurs et vecteurs propres instantanés (2.28–2.29), avec $\psi = \pi/4$ et $\tan \theta = \Omega_a/\Omega_1$.

Évolution adiabatique

La principale différence avec le processus STIRAP provient du glissement de phase du laser couplant l'état $|1\rangle$. Ce glissement de phase, représenté par la dépendance temporelle de

la phase $\phi(t)$, a pour conséquence l'apparition d'une phase géométrique lors de l'évolution adiabatique de l'état sombre du système. En particulier, une évolution adiabatique cyclique, assurant les connections de l'état sombre à l'état $|1\rangle$ aux instants initial et final, se traduit par un gain de phase pour cet état :

$$|\Psi(t_i)\rangle = |1\rangle = -|\Psi_0(t_i)\rangle \quad (3.2a)$$

↓

$$|\Psi(t)\rangle = -e^{-\int_{t_i}^t \langle \Psi_0(t) | \frac{d}{dt} | \Psi_0(t) \rangle dt} |\Psi_0(t)\rangle \quad (3.2b)$$

↓

$$|\Psi(t_f)\rangle = -e^{i\varphi} |\Psi_0(t_f)\rangle = e^{i\varphi} |1\rangle, \quad (3.2c)$$

où l'état $|1\rangle$ acquiert la phase géométrique de Berry

$$\varphi = i \int_{t_i}^{t_f} \langle \Psi_0(t) | \frac{d}{dt} | \Psi_0(t) \rangle dt \quad (3.3a)$$

$$= - \oint \sin^2 \theta d\phi. \quad (3.3b)$$

La valeur de cette phase ne dépend que de la forme de la courbe $\theta(\phi)$ dans l'espace des paramètres, et est robuste par rapport au temps mis à la parcourir. L'état $|0\rangle$ étant invariant, ce processus effectue bien une porte quantique PHASE.

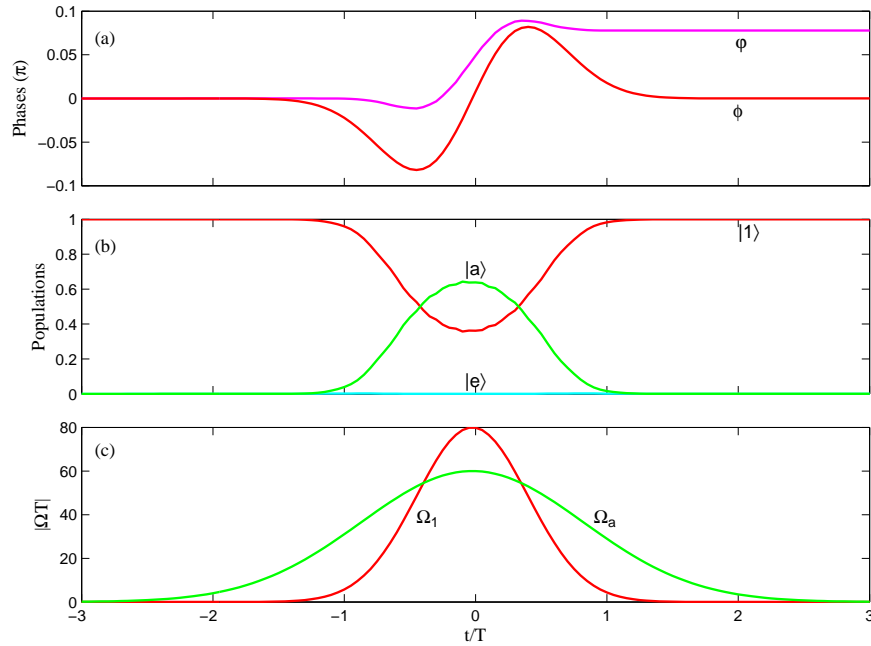


FIG. 3.2 – Simulation numérique de la porte PHASE holonomique. L'évolution cyclique est caractérisée à la fin du processus par un retour des populations (b) et du déphasage ϕ (a) à leur valeur initiale. Les pulsations de Rabi Ω_1, Ω_a utilisées (c) sont de forme gaussienne de largeurs à mi-hauteur respectives T et $2T$. Le déphasage ϕ est une gaussienne de largeur à mi-hauteur T , multipliée par le temps normalisé $s = t/T$. La phase géométrique φ (a) est à la fin du processus 0.244 rad.

L'évolution numérique du système est représentée sur la figure 3.2, pour des pulsations de Rabi Ω_1, Ω_a de forme gaussienne de largeurs à mi-hauteur respectives T et $2T$. L'évolution

cyclique est obtenue lorsque le laser couplant l'état $|a\rangle$ est enclenché en premier et éteint en dernier, et lorsque la phase relative ϕ revient à sa valeur initiale à la fin du processus. La phase géométrique de Berry est alors 0.244 rad. Cette valeur est en accord avec l'intégration numérique de la formule (3.3b), donnant 0.243 rad.

Conditions d'adiabaticité

Les conditions d'adiabaticité de ce processus holonomique sont celles du STIRAP, auxquelles s'ajoute une condition sur le taux de variation de la phase relative :

$$\left| \frac{d\phi}{ds} \frac{\Omega_a \Omega_1}{(\Omega_a^2 + \Omega_1^2)^3} \right| \ll T. \quad (3.4)$$

3.1.2 Porte ROTATION

Les trois états métastables $|0\rangle, |a\rangle, |1\rangle$ sont respectivement couplés à l'état excité $|e\rangle$ par des lasers de pulsation de Rabi $\Omega_0, \Omega_a, \Omega_1$, comme représenté sur la figure 3.1. Les lasers de pulsation de Rabi Ω_0, Ω_1 sont choisis en phase.

Ce système permet l'application du processus tripode-STIRAP (cf. section 2.3), faisant intervenir deux vecteurs sombres couplés lors de l'évolution adiabatique. Une évolution adiabatique cyclique, connectant respectivement ces vecteurs sombres aux états $|0\rangle, |1\rangle$, aux instants initial et final, permet d'identifier la rotation (2.53) effectuée par les vecteurs sombres à la porte quantique ROTATION s'appliquant sur le qubit. Cette évolution cyclique est obtenue en enclenchant les lasers dans l'ordre $\Omega_a, \Omega_1, \Omega_0$, et en les éteignant dans l'ordre inverse $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_a$, donnant lieu aux connections :

$$|\Psi(t_i)\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle = \alpha |\Psi_0(t_i)\rangle + \beta |\Psi'_0(t_i)\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.5a)$$

↓

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \alpha [\cos \Theta(t) |\Psi_0(t)\rangle + \sin \Theta(t) |\Psi'_0(t)\rangle] \\ &+ \beta [-\sin \Theta(t) |\Psi_0(t)\rangle + \cos \Theta(t) |\Psi'_0(t)\rangle] \end{aligned} \quad (3.5b)$$

↓

$$\begin{aligned} |\Psi(t_f)\rangle &= \alpha [\cos \Theta(t_f) |\Psi_0(t_f)\rangle + \sin \Theta(t_f) |\Psi'_0(t_f)\rangle] \\ &+ \beta [-\sin \Theta(t_f) |\Psi_0(t_f)\rangle + \cos \Theta(t_f) |\Psi'_0(t_f)\rangle] \\ &= \hat{\mathbf{R}} |\Psi(t_i)\rangle, \end{aligned} \quad (3.5c)$$

avec la matrice de rotation $\hat{\mathbf{R}}$ définie par

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix}, \quad (3.6a)$$

$$\Theta = \oint \sin \psi d\theta, \quad (3.6b)$$

où les angles dynamiques θ, ψ correspondent à ceux définis par les relations (2.45), en remplaçant l'indice 2 par l'indice a .

L'angle Θ de la porte ROTATION obtenue ne dépend que de la forme de la courbe $\psi(\theta)$ dans l'espace des paramètres, et est robuste par rapport au temps mis à la parcourir.

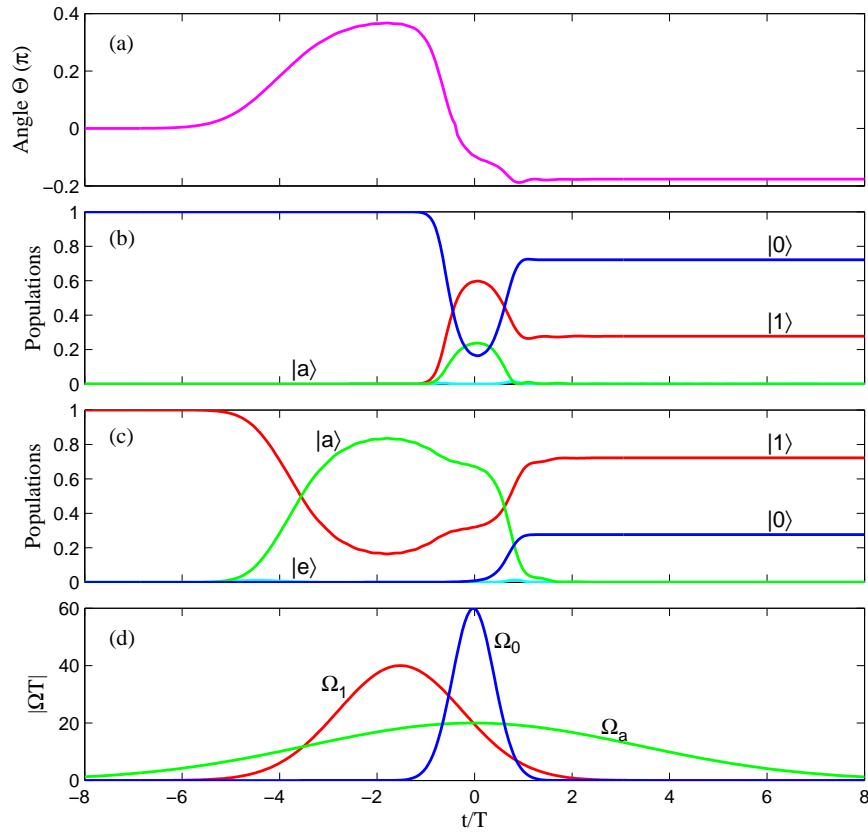


FIG. 3.3 – Simulation numérique de la porte ROTATION holonomique. L'évolution des populations est représentée pour un système initialement dans l'état $|0\rangle$ (b) et dans l'état $|1\rangle$ (c). Les pulsations de Rabi $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_a$ utilisées (d) sont de forme gaussienne de largeurs à mi-hauteur respectives $T, 3T$ et $8T$. La seconde impulsion est décalée de $1.5T$ par rapport à l'origine des temps. L'angle Θ (a) de la rotation effectuée a pour valeur finale -0.555 rad.

L'évolution numérique du système est représentée sur la figure 3.3, pour des pulsations de Rabi $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_a$ de forme gaussienne de largeurs à mi-hauteur respectives $T, 3T$ et $8T$. La seconde impulsion est décalée de $1.5T$ par rapport à l'origine des temps, ce qui conduit à une rotation d'angle $\Theta = -0.555$ rad. Cette valeur concorde avec l'intégration numérique de la formule (3.6b), donnant -0.558 rad.

3.1.3 Discussion

Le système à quatre niveaux utilisé permet l'implémentation des portes quantiques PHASE et ROTATION, qui permettent par combinaisons l'implémentation d'une porte quantique générale à un qubit. Les processus considérés sont basés sur le suivi adiabatique d'états sombres, et sont donc insensibles aux pertes par émission spontanée dues à l'état excité. Les arguments des portes correspondent à des phases géométriques de Berry, ce qui rend les processus insensibles au temps mis pour parcourir les trajectoires dans l'espace des paramètres. Ces arguments dépendent en revanche de la forme de ces trajectoires, et une déformation, si elle n'est pas compensée, induit une erreur sur l'opération quantique effectuée.

Le contrôle de la forme de ces trajectoires nécessite un contrôle relativement précis des enveloppes des impulsions, dont la forme n'est pas forcément simple si l'on souhaite atteindre

une valeur déterminée de l'argument de la porte quantique.

Cette précision nécessaire pour la forme des impulsions laser fait que les processus holonomiques, bien que plus robustes que les processus de type *impulsion*- π , qui nécessitent le contrôle de l'aire de l'impulsion, sont loin d'être aussi robustes que des processus basés sur le STIRAP, que nous allons décrire dans les sections suivantes.

3.2 Processus basés sur le STIRAP

Les processus STIRAP permettent un transfert total ou fractionnaire de population, tout en étant peu sensibles aux fluctuations des champs laser. Les superpositions d'états créées sont entièrement définies par les phases relatives des lasers et leur polarisation. L'utilisation de ces processus permet donc l'implémentation de portes quantiques robustes.

3.2.1 Porte générale à un qubit

Définition

Une porte quantique générale à un qubit permet de changer l'état du qubit en une quelconque superposition d'états donnée. Cette opération générale du groupe $SU(2)$ ¹ peut être représentée sur la sphère de Bloch comme une rotation d'angle δ autour d'un vecteur \mathbf{n} choisi, définissant l'opérateur de rotation dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$U(\delta, \mathbf{n}) = \exp\left(-i \frac{\delta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) \quad (3.7a)$$

$$= \cos \frac{\delta}{2} - i \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \frac{\delta}{2}, \quad (3.7b)$$

où $\mathbf{n} = (\sin 2\theta \cos \phi, \sin 2\theta \sin \phi, \cos 2\theta)$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ² est un vecteur de la sphère de Bloch, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ représentant les matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

L'opérateur de rotation (3.7) introduit un déphasage entre les superpositions d'états $|+\rangle$ et $|-\rangle$, représentées respectivement sur la sphère de Bloch par le vecteur \mathbf{n} et le vecteur diamétralement opposé :

$$U(\delta, \mathbf{n}) = e^{i\frac{\delta}{2}} |-\rangle\langle -| + e^{-i\frac{\delta}{2}} |+\rangle\langle +|, \quad (3.9a)$$

$$|-\rangle = -\sin \theta |0\rangle + e^{i\phi} \cos \theta |1\rangle, \quad (3.9b)$$

$$|+\rangle = \cos \theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle. \quad (3.9c)$$

C'est l'implémentation de ce déphasage qui permet l'implémentation d'une porte quantique générale à un qubit par passage adiabatique, comme proposé par Kis et Renzoni dans la référence [9].

1. Le groupe $SU(n)$ contient les matrices unitaires $n \times n$ de déterminant égal à 1. Il s'agit d'un sous-groupe de $U(n)$, contenant l'ensemble des matrices unitaires $n \times n$. Contrairement aux matrices de $U(n)$, les matrices de $SU(n)$ ne contiennent pas de phase globale.

2. On peut en fait se limiter aux vecteurs \mathbf{n} de l'hémisphère nord de la sphère, *i.e.* $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. En effet, une rotation d'angle δ autour d'un vecteur \mathbf{m} de l'hémisphère sud équivaut à une rotation d'angle $-\delta$ autour du vecteur \mathbf{n} diamétralement opposé.

Système et évolution adiabatique

Les trois états métastables $|0\rangle, |a\rangle, |1\rangle$ du système sont respectivement couplés à l'état excité $|e\rangle$ par des lasers de pulsation de Rabi $\Omega_0, \Omega_a, \Omega_1$, comme représenté sur la figure 3.1.

Ce système permet l'application du processus tripode-STIRAP défini section 2.3, en remplaçant l'indice 2 par l'indice a .

L'opérateur de ROTATION (3.7) peut s'obtenir en effectuant deux processus tripode-STIRAP, où les vecteurs sombres (2.44) évoluent de façon découplée.³ Le premier tripode-STIRAP transporte la population de l'état $|+\rangle$, défini par les relations (3.9), sur l'état auxiliaire $|a\rangle$; le second ramène cette population sur l'état $|+\rangle$ en lui conférant un phase $-\delta$.

La dynamique se déroule avec les connections suivantes :

- le premier tripode-STIRAP est effectué de t_i à t_m . Le laser de pulsation de Rabi Ω_a (Stokes), de phase ϕ_a , est enclenché en premier.

$$\begin{aligned} |\Psi(t_i)\rangle &= \langle -|\Psi(t_i)\rangle |-\rangle + \langle +|\Psi(t_i)\rangle |+\rangle \\ &= \langle -|\Psi(t_i)\rangle |\Psi_0(t_i)\rangle + \langle +|\Psi(t_i)\rangle |\Psi'_0(t_i)\rangle \end{aligned} \quad (3.10a)$$

↓

$$|\Psi(t)\rangle = \langle -|\Psi(t_i)\rangle |\Psi_0(t)\rangle + \langle +|\Psi(t_i)\rangle |\Psi'_0(t)\rangle \quad (3.10b)$$

↓

$$\begin{aligned} |\Psi(t_m)\rangle &= \langle -|\Psi(t_i)\rangle |\Psi_0(t_m)\rangle + \langle +|\Psi(t_i)\rangle |\Psi'_0(t_m)\rangle \\ &= \langle -|\Psi(t_i)\rangle |-\rangle - e^{i\phi'} \langle +|\Psi(t_i)\rangle |a\rangle \end{aligned} \quad (3.10c)$$

- le second tripode-STIRAP est effectué de t_n à t_f . Le laser de pulsation de Rabi Ω_a (pompe), de phase $\phi_a - \delta$, est enclenché en dernier.

$$\begin{aligned} |\Psi(t_n)\rangle &= \langle -|\Psi(t_i)\rangle |-\rangle - e^{i\phi'} \langle +|\Psi(t_i)\rangle |a\rangle \\ &= \langle -|\Psi(t_i)\rangle |\Psi_0(t_n)\rangle + e^{-i\delta} \langle +|\Psi(t_i)\rangle |\Psi'_0(t_n)\rangle \end{aligned} \quad (3.11a)$$

↓

$$|\Psi(t)\rangle = \langle -|\Psi(t_i)\rangle |\Psi_0(t)\rangle + e^{-i\delta} \langle +|\Psi(t_i)\rangle |\Psi'_0(t)\rangle \quad (3.11b)$$

↓

$$\begin{aligned} |\Psi(t_f)\rangle &= \langle -|\Psi(t_i)\rangle |\Psi_0(t_f)\rangle + e^{-i\delta} \langle +|\Psi(t_i)\rangle |\Psi'_0(t_f)\rangle \\ &= \langle -|\Psi(t_i)\rangle |-\rangle + e^{-i\delta} \langle +|\Psi(t_i)\rangle |+\rangle \\ &= e^{-i\frac{\delta}{2}} U(\delta, \mathbf{n}) |\Psi(t_i)\rangle. \end{aligned} \quad (3.11c)$$

Discussion et résultats numériques

Ce processus de double tripode-STIRAP proposé par Kis et Renzoni [9] permet d'obtenir l'opérateur de rotation (3.7) à une phase globale $-\delta/2$ près. Cette phase globale est cependant facteur de tous les états de la base de calcul et est donc inessentielle.

Il est à noter que cette phase globale permet l'implémentation, en particulier, de la porte quantique PHASE, et de la porte quantique NOT basculant l'état du qubit, étant donné que ces opérations appartiennent au groupe $U(2)$. Dans le cas de la porte PHASE, l'état $|0\rangle$ est un état stationnaire, et le processus correspond à un double STIRAP.

³. Ce découplage est assuré en gardant constant le rapport des fréquences de Rabi Ω_0/Ω_1 , ce qui peut s'obtenir de façon robuste en utilisant un laser de polarisation elliptique et un système formé de sous-niveaux magnétiques Zeeman (cf. section 2.3 et figure 2.6).

Le second tripode-STIRAP peut commencer dès que le premier laser de pulsation de Rabi Ω_a est éteint, alors que le second laser est encore enclenché. En effet, les impulsions de pulsations de Rabi Ω_0, Ω_1 , ayant la même phase relative dans les deux tripode-STIRAP, peuvent se chevaucher, voire ne former qu'une seule impulsion.

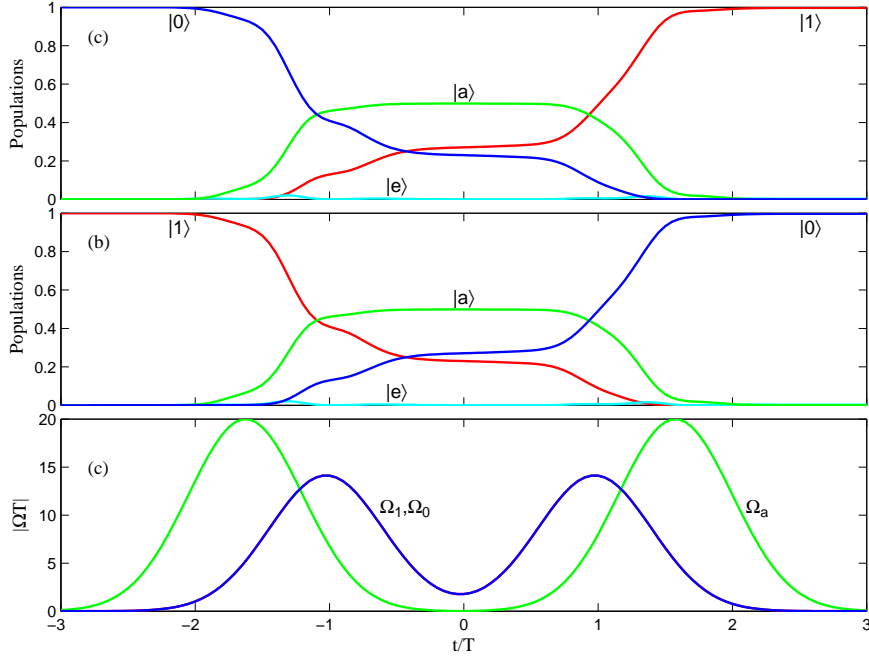


FIG. 3.4 – Simulation numérique de la porte NOT. L'évolution des populations est représentée pour un système initialement dans l'état $|0\rangle$ (a) et dans l'état $|1\rangle$ (b). Les pulsations de Rabi Ω_0, Ω_1 (c) sont identiques, de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , de phase relative $\phi = \pi$. Les pulsations de Rabi Ω_a (c), sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , décalées de $0.6T$ par rapport à Ω_0, Ω_1 , et déphasées de $\delta = \pi$.

La simulation numérique de la porte quantique NOT est représentée sur la figure 3.4. Cette porte est obtenue avec les paramètres $\theta = \pi/4, \phi = \delta = \pi$, sans accumulation d'une phase globale à la fin du processus. Les pulsations de Rabi Ω_0, Ω_1 et Ω_a de chaque tripode-STIRAP sont décalées de $0.6T$.

3.2.2 Alternative : porte ROTATION généralisée

Nous proposons ici une alternative [56], nécessitant un couplage de moins, à la porte générale à un qubit.

Définition et système

La porte quantique ROTATION généralisée est définie par l'opérateur

$$R(\alpha, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & e^{i\phi} \sin \alpha \\ -e^{-i\phi} \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

L'opérateur (3.12) généralise la porte ROTATION par le paramètre additionnel ϕ , correspondant à l'ajout de deux portes PHASE. Il peut être obtenu en combinant deux processus f-STIRAP (cf. section 2.2.4) dans un système à trois niveaux $|0\rangle, |1\rangle, |e\rangle$ (Figure 3.5).

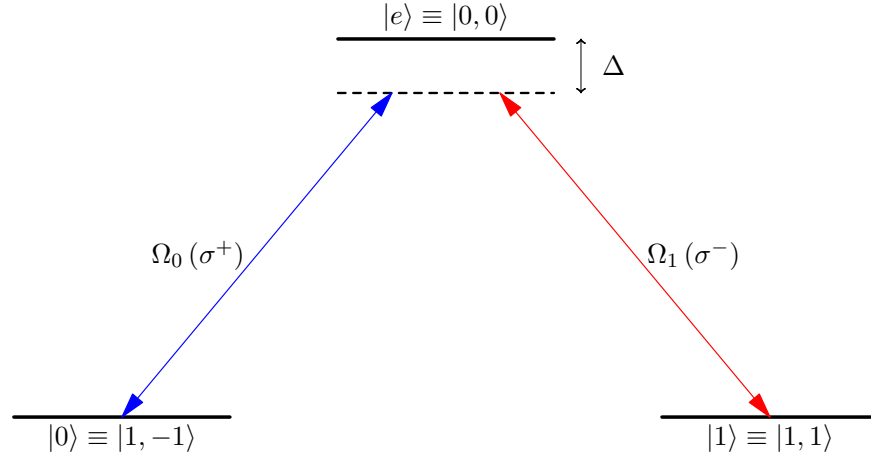


FIG. 3.5 – Schéma du système de sous-niveaux magnétiques Zeeman pouvant être utilisé pour l'implémentation de la porte ROTATION généralisée. Les lasers de pulsations de Rabi Ω_0, Ω_1 ont respectivement les polarisations circulaires σ_+, σ_- .

Nous utiliserons ici des lasers non-résonants, de sorte que l'état excité puisse être adiabatiquement éliminé. Cet état peut dès lors être considéré découplé du qubit, ce qui permet de négliger ses pertes par émission spontanée. Il faut alors tenir compte de la condition d'adiabaticité (2.37)

$$(\Omega_{\max} T)^2 \gg \Delta T \gg \Omega_{\max} T \gg 1, \quad (3.13)$$

où Ω_{\max} correspond à l'amplitude maximale des pulsations de Rabi.

L'opérateur d'évolution du STIRAP fractionnaire s'écrit alors dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$U(t_f, t_i) = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & e^{-i\phi_d} e^{i\phi} \sin \theta_0 \\ -e^{-i\phi} \sin \theta_0 & e^{-i\phi_d} \cos \theta_0 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

avec la phase dynamique accumulée lors de l'évolution

$$\phi_d = \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{2} \left(\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_0^2 + \Omega_1^2} \right). \quad (3.15)$$

Le propagateur (3.14) indique, comme cela a été démontré dans la section 2.2.4, que l'état initial $|0\rangle$ peut évoluer en la superposition $\cos \theta_0 |0\rangle - e^{-i\phi} \sin \theta_0 |1\rangle$, si les impulsions lasers s'éteignent dans un rapport constant $\frac{\Omega_0}{\Omega_1} \rightarrow \tan \theta_0$. Ce rapport constant peut être assuré par un laser de polarisation elliptique, comme indiqué section 2.2.4. Le processus f-STIRAP ne requiert alors que deux lasers, l'un de polarisation elliptique, l'autre de polarisation circulaire.

Évolution adiabatique

Le propagateur (3.14) correspond à l'opérateur de ROTATION généralisée (3.12) à condition de contrôler la phase dynamique pour qu'elle corresponde à un multiple de 2π . Un tel contrôle n'est évidemment pas robuste.

Nous proposons ici un processus permettant de compenser cette phase dynamique, sans avoir besoin d'en connaître la valeur. Ce processus consiste à combiner deux STIRAP fractionnaires :

- le premier est un STIRAP fractionnaire inversé, ayant lieu entre les instants t_i et t_m . Le laser de polarisation elliptique est enclenché en premier, assurant un rapport constant

des pulsations de Rabi

$$\frac{\Omega_0}{\Omega_1} \xrightarrow{t \rightarrow t_i} \cot \theta_0 = cste. \quad (3.16)$$

Le propagateur associé s'écrit dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$U_1(t_m, t_i) = \begin{bmatrix} e^{-i\phi_d} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R(\theta_0, \phi). \quad (3.17)$$

– le second est un STIRAP fractionnaire classique, ayant lieu entre les instants t_n et t_f , de propagateur

$$U_2(t_f, t_n) = R(\theta_0, \phi) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi'_d} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

L'opération résultant de ces processus s'écrit donc

$$U(t_f, t_i) = U_2 U_1 = R(\theta_0, \phi) \begin{bmatrix} e^{-i\phi_d} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi'_d} \end{bmatrix} R(\theta_0, \phi). \quad (3.19)$$

Le propagateur (3.19) correspond à l'opérateur ROTATION généralisée $R(2\theta_0, \phi)$, définie à une phase globale près, à condition que les phases dynamiques ϕ_d, ϕ'_d soient identiques. Cette condition est satisfaite si les impulsions des STIRAP fractionnaires normal et inversé ont les mêmes caractéristiques : forme d'impulsion, délai entre les impulsions, amplitudes. Ceci peut être réalisé dans une expérience de jet atomique, comme celle décrite en référence [61], avec des lasers réfléchis par des miroirs (Figure 3.6).

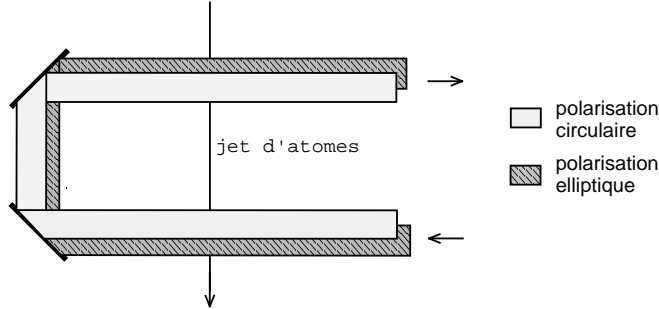


FIG. 3.6 – Schéma des champs lasers de polarisation circulaire (en clair) et elliptique (hachures) utilisables dans une expérience de jet atomique pour la réalisation de la porte quantique ROTATION généralisée.

Cette expérience nécessite que les amplitudes des champs lasers et que la vitesse des atomes restent constantes entre les deux STIRAP fractionnaires. L'angle $\alpha = 2\theta_0$ de la rotation est alors défini par la polarisation du laser elliptique.

Résultats numériques

La simulation numérique de la porte quantique ROTATION généralisée $R(\pi/4, 0)$ est représentée sur la figure 3.7. Les pulsations de Rabi utilisées sont de la forme

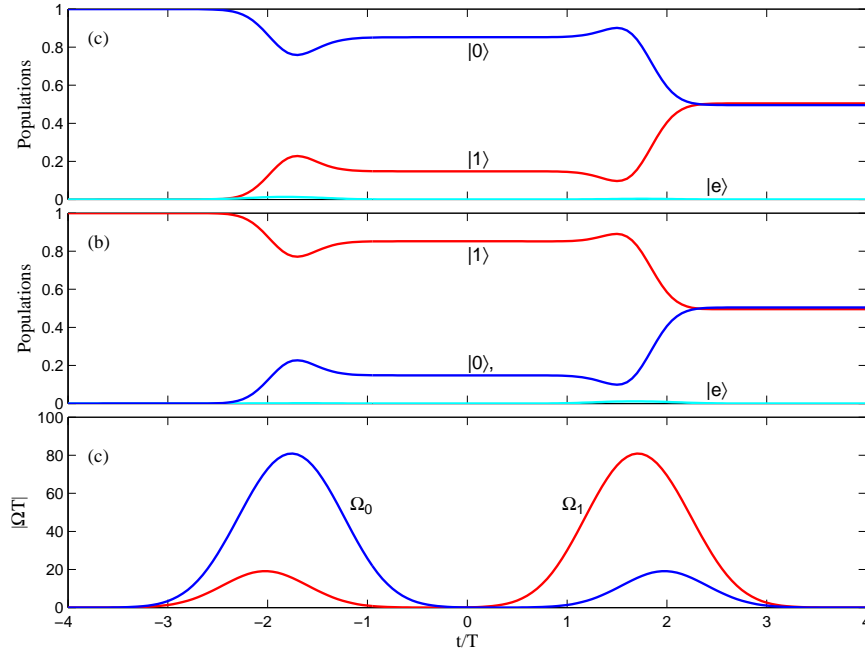


FIG. 3.7 – Simulation numérique de la porte ROTATION généralisée $R(\pi/4,0)$. L'évolution des populations est représentée pour un système initialement dans l'état $|0\rangle$ (a) et dans l'état $|1\rangle$ (b). Les pulsations de Rabi Ω_0, Ω_1 (c) sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T . Le délai entre les impulsions de polarisations elliptique et circulaire de chaque STIRAP fractionnaire est $0.5T$. Les impulsions ont une amplitude maximale $\Omega_m T = 50$. L'écart à la résonance $\Delta T = 330$ satisfait la condition d'adiabaticité (3.13).

$$\Omega_0(t) = \Omega(t + 2T - \tau) + \cos \theta_0 \Omega(t + 2T), \quad (3.20a)$$

$$\Omega_1(t) = \sin \theta_0 \Omega(t + 2T), \quad (3.20b)$$

pour le premier STIRAP fractionnaire, et

$$\Omega_0(t) = \Omega(t - 2T + \tau) + \sin \theta_0 \Omega(t - 2T), \quad (3.21a)$$

$$\Omega_1(t) = \cos \theta_0 \Omega(t - 2T), \quad (3.21b)$$

pour le second STIRAP fractionnaire, où $\Omega(t)$ est une gaussienne de largeur à mi-hauteur T , d'amplitude $\Omega_m T = 50$. Le rapport des pulsations de Rabi est tel que $\theta_0 = \pi/8$. L'écart à la résonance $\Delta T = 330$ satisfait la condition d'adiabaticité (3.13). L'état excité n'est pas peuplé lors de l'évolution, en accord avec son élimination adiabatique. La phase dynamique globale à la fin du processus est $\phi_d = -1.615$ rad, en accord avec l'intégration numérique de la formule (3.15), donnant $\phi_d = 4.662$ rad, soit -1.621 rad modulo 2π .

3.2.3 Discussion

Le système à quatre niveaux utilisé permet l'implémentation, en particulier, de la porte quantique PHASE, et d'un opérateur général du groupe $SU(2)$, défini à une phase globale près. Ces processus basés sur le suivi adiabatique d'états sombres sont insensibles aux pertes par émission spontanée de l'état excité. Ce sont de plus des processus robustes, *i.e.* peu sensibles à de légères fluctuations des champs lasers.

Nous avons proposé un processus permettant l'implémentation de la porte quantique ROTATION généralisée, définie à une phase globale près, dans ce même système restreint à seulement trois niveaux. L'élimination adiabatique de l'état excité rend ce processus peu sensible à ses pertes par émission spontanée. L'écart à la résonance nécessaire à cette élimination implique des pulsations de Rabi d'amplitude plus importante que le processus précédent.

Les paramètres des portes quantiques obtenues par ces processus basés sur les techniques STIRAP sont tous contrôlables de façon expérimentale. Ils correspondent en effet à des phases relatives entre lasers, ou bien sont donnés par les polarisations des lasers. Ces différents processus permettent donc l'implémentation de portes quantiques robustes.

3.3 Porte PHASE : phase géométrique et transport parallèle

Les deux processus évoqués pour l'implémentation de la porte PHASE peuvent être analysés de façon identique. En effet, le processus étudié en section 3.2.1, impliquant deux STIRAP déphasés l'un par rapport à l'autre, peut être vu comme constitué de deux impulsions laser de phase relative variable, à l'instar du processus holonomique décrit dans la section 3.1.1.

L'évolution générale de ce système s'effectue suivant l'état sombre $|\Psi_0\rangle$ défini dans l'équation (2.29), et confère à l'état $|1\rangle$ la phase

$$\varphi = \phi(t_f) - \phi(t_i) - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\phi}{dt} \sin^2 \theta dt. \quad (3.22)$$

Une évolution cyclique des paramètres, correspondant au cas où $\phi(t_f) = \phi(t_i)$, conduit à la porte PHASE holonomique. Le processus de double STIRAP, quant à lui, équivaut à effectuer le changement de phase lorsque le laser de pulsation de Rabi Ω_a est éteint ($\theta = 0$), ce qui rend identiquement nul l'intégrand de la relation (3.22). La phase finalement obtenue correspond alors à la phase relative des lasers de pulsation de Rabi Ω_a . Ce dernier cas correspond à la condition de transport parallèle, définie par la relation

$$\langle \Psi(t) | \frac{d}{dt} | \Psi(t) \rangle = 0 \quad \forall t. \quad (3.23)$$

La différence entre ces deux processus apparaît visuellement en considérant les trajectoires parcourues sur la sphère de Bloch par l'état du système $|\Psi(t)\rangle$ au cours de son évolution (Figure 3.8). Les états $|a\rangle, |1\rangle$ correspondent respectivement aux pôles nord et sud de la sphère. Le processus holonomique implique une évolution cyclique, représentée par un départ et un retour au pôle Sud de la sphère effectués sur des trajectoires tangentes à un même méridien. Le processus par double STIRAP remplit la condition de transport parallèle, qui se traduit ici par le déplacement le long d'un méridien. Le changement de phase s'effectue au pôle nord de la sphère, définissant le méridien utilisé pour le trajet retour.

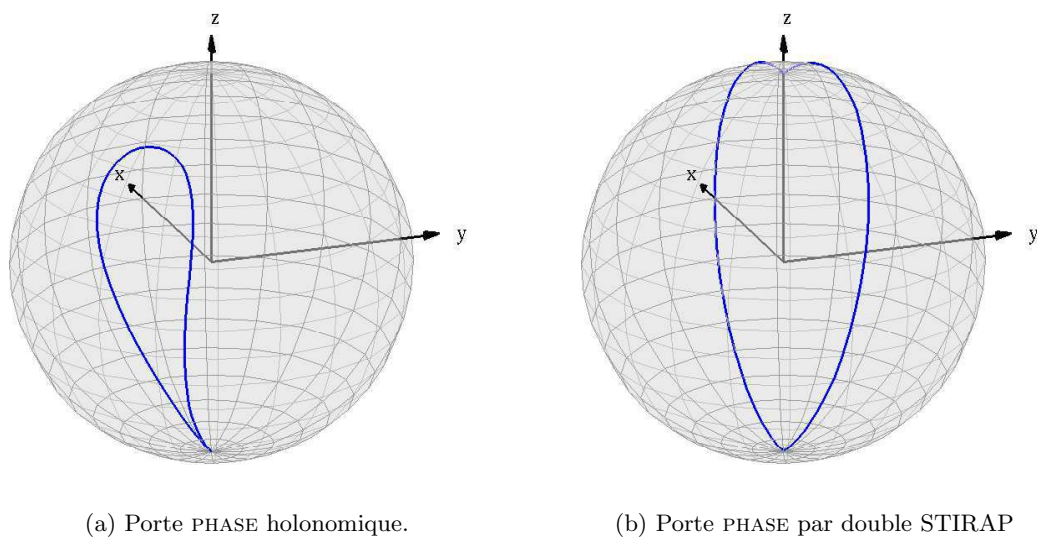


FIG. 3.8 – Trajectoires parcourues sur la sphère de Bloch par l'état du système $|\Psi(t)\rangle$ au cours de son évolution pour l'implémentation des portes PHASE holonomique (a), par double STIRAP (b).

– RÉSUMÉ DU CHAPITRE 3 –

OBJECTIF : Ce chapitre décrit les processus adiabatiques permettant l'implémentation des portes quantiques à un qubit.

OUTILS : passage adiabatique, suivi d'états sombres du système et phases géométriques.

RÉSULTATS CONNUS :

① Processus holonomiques permettant :

- l'implémentation de la porte PHASE ;
- l'implémentation de la porte ROTATION.

L'utilisation de phases géométriques rend ces processus non robustes ;

② Processus de type STIRAP permettant :

- l'implémentation de la porte PHASE (STIRAP) ;
- l'implémentation d'une porte générale à un qubit (tripod-STIRAP).

RÉSULTAT NOUVEAU :

- Processus de type STIRAP-fractionnaire permettant l'implémentation d'une porte ROTATION généralisée.

Contrairement aux processus holonomiques, les processus basés sur le STIRAP ne requièrent que le contrôle des polarisations et phases relatives des lasers.

Chapitre 4

Portes quantiques à deux qubits

L'IMPLEMENTATION de portes quantiques à deux qubits requiert un système permettant un couplage contrôlé des qubits lors du processus. Les qubits doivent aussi pouvoir être localisés et contrôlés individuellement afin d'effectuer une succession d'opérations lors d'un calcul quantique. Ces deux conditions sont remplies par l'utilisation de systèmes d'ions et d'atomes piégés.

Dans les systèmes d'ions piégés, les qubits sont couplés par le mode commun de vibration. Plusieurs processus d'implémentation ont été proposés [62–65] et la porte CNOT en particulier a été testée expérimentalement [66]. Cependant, ces processus sont basés sur des techniques impulsion- π non robustes, nécessitant le contrôle précis de l'aire des impulsions laser utilisées.

Nous utiliserons dans ce chapitre un système d'atomes piégés dans une cavité optique. Les qubits sont alors couplés à un même mode résonant de la cavité. Des expériences récentes montrent que les atomes piégés peuvent être déplacés sur des distances macroscopiques sans pertes de cohérence par l'utilisation de *pièges dipolaires optiques à onde stationnaire*¹ [67–73] et placés dans une cavité optique avec une précision inférieure aux longueurs d'ondes utilisées. Ces expériences montrent aussi que le contrôle individuel des atomes par laser, nécessaire à l'implémentation de portes quantiques, est possible [73].

Un autre système envisageable correspond à des impuretés piégées dans des cristaux, comme l'orthosilicate d'yttrium dopé par des ions terre-rare praséodyme, $\text{Pr}^{3+}:\text{Y}_2\text{SiO}_5$. Des expériences récentes montrent que les processus STIRAP et tripod-STIRAP sont applicables dans ces systèmes [74–76].

Nous verrons dans ce chapitre différents processus permettant l'implémentation de portes quantiques à deux qubits dans le système à quatre niveaux utilisé précédemment, auquel un second état excité $|e'\rangle$ pourra être ajouté.

Les qubits sont représentés par des atomes fixes dans une cavité optique, chacun d'entre eux étant couplé à un même mode résonant de la cavité. Le mode de la cavité produit alors un couplage effectif entre les qubits, permettant les opérations conduisant à l'intrication des qubits, telles que la porte quantique CNOT.

Le processus adiabatique permettant le transfert de superpositions cohérentes d'états d'un atome à un autre [77] sera rappelé dans une première section. Nous proposerons ensuite une utilisation directe de ce processus pour l'implémentation des portes quantiques SWAP et CNOT [78, 79], avant de rappeler comment la porte quantique CU peut-être obtenue, à une porte quantique PHASE près, à partir de ce processus [10].

1. *standing wave optical dipole trap.*

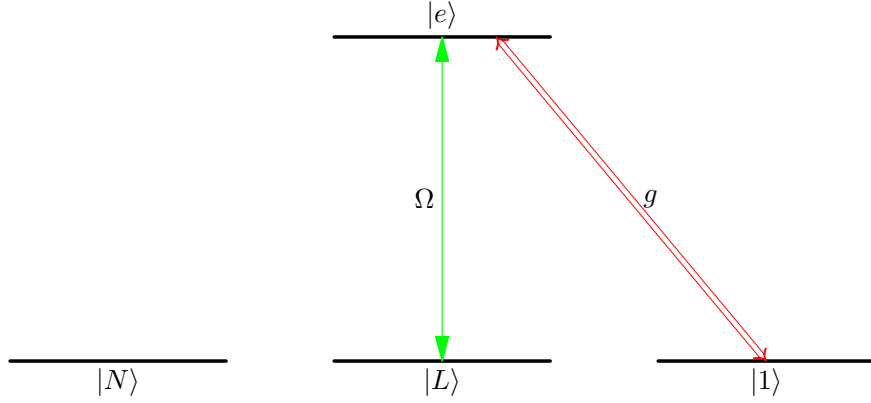


FIG. 4.1 – Schéma du système utilisé pour le transfert adiabatique de population dans la cavité optique. L'état $|1\rangle$ est couplé au mode de la cavité; l'état métastable couplé par le laser est noté de façon générique $|L\rangle$, et l'état non-couplé $|N\rangle$.

Nous proposerons dans une dernière section une généralisation de ce processus, permettant l'implémentation de la porte quantique SWAP^α et d'une généralisation de la porte quantique CU autorisant le choix de l'état du qubit de contrôle [80]. Cette porte quantique sera désignée par le sigle ASCU, signifiant *arbitrary-state controlled-unitary gate*.

4.1 Passage adiabatique dans une cavité optique

Nous rappelons dans cette section un processus analogue au processus STIRAP, qui permet le transfert adiabatique de population entre deux états du système formé par les deux qubits, proposé par Pellizzari *et al.* [77]. Les processus d'implémentation de portes quantiques à deux qubits détaillés dans ce chapitre seront basés sur ce transfert adiabatique de population.

4.1.1 Hamiltonien effectif et états sombres

Le schéma du système est représenté sur la figure 4.1. Le mode de la cavité assure le couplage résonant de l'état $|1\rangle$ de chaque qubit à l'état excité $|e\rangle$. Un champ laser couple l'état excité $|e\rangle$ à l'un des deux autres états métastables, noté de façon générique $|L\rangle$. Le troisième état métastable, noté $|N\rangle$, ne subit aucun couplage. L'état $|L\rangle$, couplé par le laser, pourra être alternativement l'état $|0\rangle$ ou l'état $|a\rangle$.

L'Hamiltonien du système s'écrit dans l'approximation résonante et en représentation d'interaction²

$$H(t) = \hbar \left(\Omega^{(1)}(t) |e^{(1)}\rangle \langle L^{(1)}| + g^{(1)} a |e^{(1)}\rangle \langle 1^{(1)}| + \Omega^{(2)}(t) |e^{(2)}\rangle \langle L^{(2)}| + g^{(2)} a |e^{(2)}\rangle \langle 1^{(2)}| + \text{h.c.} \right), \quad (4.1)$$

avec les opérateurs a, a^\dagger d'annihilation et de création du mode de cavité, et $\Omega^{(i)}, g^{(i)} \geq 0$ les pulsations de Rabi respectives des laser et mode de cavité associées au qubit i . Les atomes

2. Pour alléger l'écriture des états sombres à venir, les phases à l'origine des temps des lasers sont prises égales à zéro. Elles peuvent être ajoutées ultérieurement en effectuant la substitution $\Omega \rightarrow \Omega e^{-i\phi}$ dans l'Hamiltonien (4.1) et dans l'écriture des vecteurs sombres (4.4–4.6). La phase ϕ est définie en considérant les champs laser en $\cos(\omega t + \phi)$.

sont situés sur les ventres de l'onde stationnaire de la cavité. Les pulsations de Rabi $g^{(i)}$ sont du même ordre de grandeur.

L'Hamiltonien (4.1) est défini dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)} \otimes \mathcal{F}$, où $\mathcal{H}^{(i)}$ est l'espace de Hilbert associé au qubit i , et \mathcal{F} l'espace de Fock associé aux photons du mode de la cavité. Nous restreindrons l'étude au sous-espace de Hilbert impliqué dans l'évolution des états initiaux n'ayant aucun photon dans la cavité. Ces états sont en effet les seuls états pertinents pour l'implémentation de portes quantiques, la cavité n'étant pas peuplée initialement, mais seulement brièvement lors de la dynamique.

L'Hamiltonien restreint à ce sous-espace est diagonal par blocs :

$$H(t) = \begin{bmatrix} H_1 = 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_7(t) & 0 \\ 0 & 0 & H_{16}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

où chaque bloc $H_d(t)$ agit sur le sous-espace de Hilbert \mathcal{H}_d de dimension d , engendré par les états

$$\mathcal{H}_1 = \{|11\rangle|0\rangle\}, \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{H}_7 = \{|L1\rangle|0\rangle, |1L\rangle|0\rangle, |1N\rangle|0\rangle, |N1\rangle|0\rangle, |1e\rangle|0\rangle, |e1\rangle|0\rangle, |11\rangle|1\rangle\}, \quad (4.3b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{16} = \{ & |LL\rangle|0\rangle, |NN\rangle|0\rangle, |LN\rangle|0\rangle, |NL\rangle|0\rangle, |Le\rangle|0\rangle, |eL\rangle|0\rangle, |Ne\rangle|0\rangle, |eN\rangle|0\rangle, \\ & |ee\rangle|0\rangle, |L1\rangle|1\rangle, |1L\rangle|1\rangle, |N1\rangle|1\rangle, |1N\rangle|1\rangle, |1e\rangle|1\rangle, |e1\rangle|1\rangle, |11\rangle|2\rangle\}, \end{aligned} \quad (4.3c)$$

où la notation $|s_1 s_2\rangle|n\rangle$ représente les états du premier et second qubit (s_1 et s_2), ainsi que le nombre de photons présent dans la cavité (n). Les états $|1N\rangle|0\rangle$ et $|N1\rangle|0\rangle$, bien que n'étant pas impliqués dans la dynamique, ont été inclus dans le sous-espace \mathcal{H}_7 dans l'optique d'une généralisation à venir du processus, impliquant le couplage de l'un des états $|N\rangle$.

États sombres

L'Hamiltonien (4.2) admet huit états sombres, *i.e.* des états propres instantanés de valeurs propres associées nulles et n'ayant aucune composante sur les états excités des qubits. Le premier est l'état stationnaire définissant le sous-espace \mathcal{H}_1 ,

$$|\Psi_1\rangle = |11\rangle|0\rangle; \quad (4.4)$$

les trois suivants, dont deux sont stationnaires, sont définis dans le sous-espace \mathcal{H}_7 ,

$$|\Psi_7^{(a)}\rangle = |N1\rangle|0\rangle, \quad (4.5a)$$

$$|\Psi_7^{(b)}\rangle = |1N\rangle|0\rangle, \quad (4.5b)$$

$$|\Psi_7^{(c)}\rangle \propto g^{(1)}\Omega^{(2)}|L1\rangle|0\rangle + g^{(2)}\Omega^{(1)}|1L\rangle|0\rangle - \Omega^{(1)}\Omega^{(2)}|11\rangle|1\rangle; \quad (4.5c)$$

les quatre derniers, dont un seul est stationnaire, sont définis dans le sous-espace \mathcal{H}_{16} ,

$$|\Psi_{16}^{(a)}\rangle \propto \Omega^{(2)}|N1\rangle|1\rangle - g^{(2)}|NL\rangle|0\rangle, \quad (4.6a)$$

$$|\Psi_{16}^{(b)}\rangle \propto \Omega^{(1)}|1N\rangle|1\rangle - g^{(1)}|LN\rangle|0\rangle, \quad (4.6b)$$

$$|\Psi_{16}^{(c)}\rangle = |NN\rangle|0\rangle, \quad (4.6c)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_{16}^{(d)}\rangle \propto & g^{(1)}g^{(2)}\sqrt{2}|LL\rangle|0\rangle - g^{(2)}\Omega^{(1)}\sqrt{2}|1L\rangle|1\rangle - g^{(1)}\Omega^{(2)}\sqrt{2}|L1\rangle|1\rangle \\ & + \Omega^{(1)}\Omega^{(2)}|11\rangle|2\rangle. \end{aligned} \quad (4.6d)$$

4.1.2 Évolution adiabatique et transfert de cohérence atomique

Chaque état sombre de l'Hamiltonien (4.2) appartient à un sous-espace orthogonal aux autres et indépendant du temps. Cette propriété remarquable conduit en particulier à l'identité

$$\langle \Psi_d^{(k)} | \frac{d}{dt} | \Psi_d^{(k')} \rangle = 0 \quad \forall k' \neq k. \quad (4.7)$$

Le calcul montre de plus que cette relation reste valable pour $k' = k$ si les phases des lasers sont statiques, ce qui sera supposé vrai par la suite. L'évolution adiabatique du système le long des états sombres s'effectue alors sans apparition de phases géométriques ni de phases dynamiques, les valeurs propres instantanées associées étant nulles.

D'après le théorème adiabatique, la dynamique du système suit les états sombres connectés à l'état initial :

$$|\Psi(t)\rangle \simeq \sum_{d,k} c_d^{(k)} |\Psi_d^{(k)}(t)\rangle, \quad (4.8)$$

avec les coefficients déterminés au temps initial

$$c_d^{(k)} = \langle \Psi_d^{(k)}(t_i) | \Psi(t_i) \rangle. \quad (4.9)$$

Nous ne considérons ici que les états initiaux n'ayant aucune composante en dehors des états sombres. Les conditions d'adiabaticité associées à cette évolution sont similaires à celles du STIRAP,

$$gT, \Omega_{\max} T \gg 1, \quad (4.10)$$

avec Ω_{\max} l'amplitude maximale des pulsations de Rabi associées aux lasers. On considérera de plus que l'évolution s'effectue dans le régime de couplage fort de la cavité [81]

$$g \gg \kappa, \quad (4.11)$$

où κ correspond au taux de pertes de la cavité. Ce régime assure que l'interaction des qubits avec les photons de la cavité est dominant par rapport aux pertes.

Les photons n'apparaissent dans la cavité qu'au cours de l'évolution adiabatique du système. L'écriture des états sombres (4.5),(4.6) montre que la probabilité d'avoir un photon dans la cavité durant le processus devient très faible dans la limite

$$g \gg \Omega. \quad (4.12)$$

Sous les conditions (4.11),(4.12), le couplage des qubits est effectué par le mode de la cavité sans que celui-ci ne soit peuplé. Ce phénomène remarquable de nature purement quantique minimise la probabilité de décohérence due aux pertes de la cavité.

Le transfert de cohérence atomique est rendu possible par une évolution adiabatique suivant l'état sombre (4.5c). Il permet en effet, à la manière du processus STIRAP, de transférer la population de l'état initial $|L1\rangle|0\rangle$ vers l'état final $|1L\rangle|0\rangle$, en enclenchant les lasers dans l'ordre contre-intuitif $\Omega^{(2)}, \Omega^{(1)}$, comme l'indique son schéma de couplage représenté sur la figure 4.2.

Ce transfert adiabatique constitue une extension du STIRAP de trois à cinq niveaux. Au cours de la dynamique, seuls les états $|L1\rangle|0\rangle$ et $|1L\rangle|0\rangle$ sont peuplés, et pas les états excités $|e1\rangle|0\rangle$ et $|1e\rangle|0\rangle$, ni l'état à un photon $|11\rangle|1\rangle$, sous la condition (4.12).

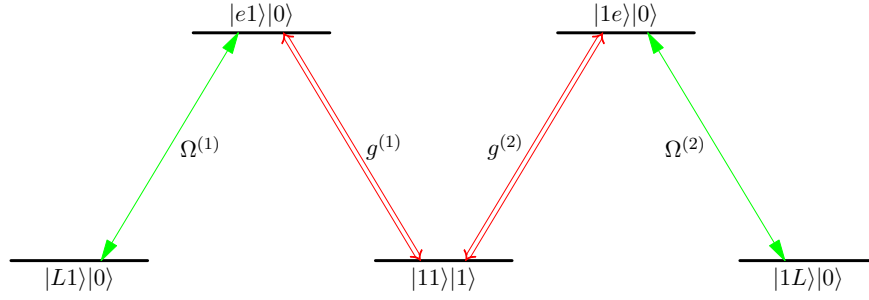


FIG. 4.2 – Schéma de couplage associé à l'état sombre (4.5c). Le transfert adiabatique de population de l'état $|L1\rangle|0\rangle$ vers l'état $|1L\rangle|0\rangle$ est obtenu en enclenchant les lasers dans l'ordre contre-intuitif $\Omega^{(2)}, \Omega^{(1)}$, et inversement.

Une superposition cohérente d'états du premier qubit $\alpha|L\rangle + \beta|1\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, peut alors être transférée sur le second qubit suivant les connexions [77]

$$|\Psi(t_i)\rangle = (\alpha|L\rangle + \beta|1\rangle)|1\rangle|0\rangle = \alpha|\Psi_7^{(c)}(t_i)\rangle + \beta|\Psi_1(t_i)\rangle \quad (4.13a)$$

↓

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha|\Psi_7^{(c)}(t)\rangle + \beta|\Psi_1(t)\rangle \quad (4.13b)$$

↓

$$|\Psi(t_f)\rangle = \alpha|\Psi_7^{(c)}(t_f)\rangle + \beta|\Psi_1(t_f)\rangle = |1\rangle(\alpha|L\rangle + \beta|1\rangle)|0\rangle. \quad (4.13c)$$

C'est l'utilisation du transfert de population suivant l'état sombre (4.5c) qui est à l'origine de plusieurs processus d'implémentation de portes quantiques à deux qubits, tels ceux concernant les portes quantiques SWAP et CNOT que nous proposons [78, 79], ou encore celui concernant la porte quantique CU [10].

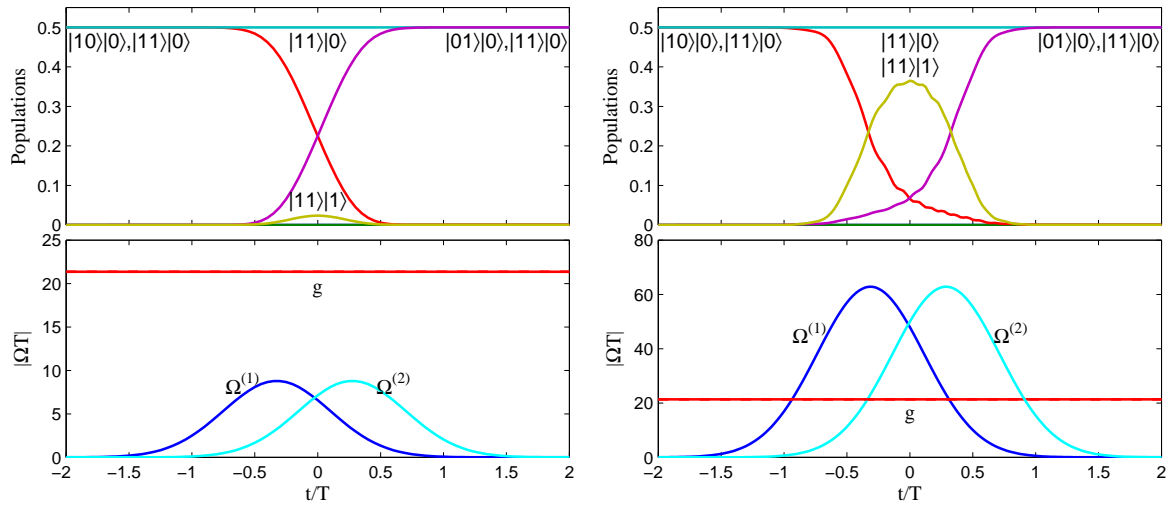
Résultats numériques

La simulation numérique du transfert de cohérence atomique (4.13) est représentée sur la figure 4.3, pour une superposition d'états à poids égaux. Le cas $g \gg \Omega$ est représenté sur la figure 4.3(a) : la cavité n'est alors pas peuplée de façon significative. Le cas $g < \Omega$ est considéré sur la figure 4.3(b) : la cavité est alors peuplée de façon significative lors de la dynamique, rendant la décohérence par perte du photon non négligeable.

La pulsation de Rabi associée à la cavité est constante, les qubits étant fixes dans la cavité. Les pulsations de Rabi des lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , séparées d'un délai égal à $0.6T$. Les valeurs numériques utilisées sont issues d'expériences récentes [82, 83], soit $g/2\pi = 34$ MHz, $T = 100$ ns, et $\Omega_{\max}/2\pi = 14$ MHz dans le cas (a), $\Omega_{\max}/2\pi = 100$ MHz dans le cas (b).

4.2 Applications à l'implémentation de portes quantiques

Le processus de transfert adiabatique de population entre atomes décrit dans la section précédente peut être appliqué directement pour l'implémentation de portes quantiques à deux qubits. Nous proposons dans les sections suivantes son utilisation pour l'implémentation des portes SWAP et CNOT [78, 79], puis celle de la porte CU [10].



(a) Cas $g \gg \Omega$: la cavité n'est jamais peuplée de façon significative.

(b) Cas $g < \Omega$: la cavité est peuplée de façon significative lors du processus.

FIG. 4.3 – Évolution des populations lors du transfert de cohérence atomique par passage adiabatique, dans les cas (a) $g \gg \Omega$ et (b) $g < \Omega$. Les pulsations de Rabi des lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , séparées d'un délai $0.6T$. La pulsation de Rabi associée à la cavité est constante.

4.2.1 Porte SWAP

La porte quantique SWAP permet d'échanger les états des deux qubits auxquels elle s'applique. Elle peut être obtenue à partir d'un ensemble universel de portes quantiques, par la composition de trois portes CNOT, *i.e.* de trois portes CPHASE et six portes HADAMARD (Figure 4.4).

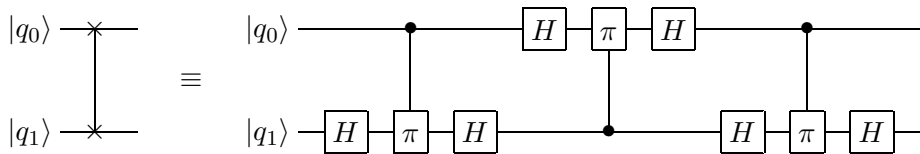


FIG. 4.4 – Décomposition de la porte SWAP en portes élémentaires HADAMARD et CPHASE(π).

Afin de réduire les pertes lors d'une implémentation expérimentale de cette porte, il est préférable d'utiliser un processus direct plutôt qu'une combinaison de portes élémentaires. Le processus que nous proposons ici permet cette implémentation directe par l'intermédiaire de sept impulsions laser, tandis que la combinaison de portes élémentaires en requiert au minimum vingt-et-une³ [78].

3. Ce nombre d'impulsions correspond à l'implémentation de trois portes CNOT dans le même système par l'utilisation des portes CU décrites dans les sections suivantes.

Mécanisme global

L'implémentation de la porte SWAP s'effectue en utilisant l'état auxiliaire de chaque qubit pour permuter en quatre étapes les états $|01\rangle$ et $|10\rangle$ du système.

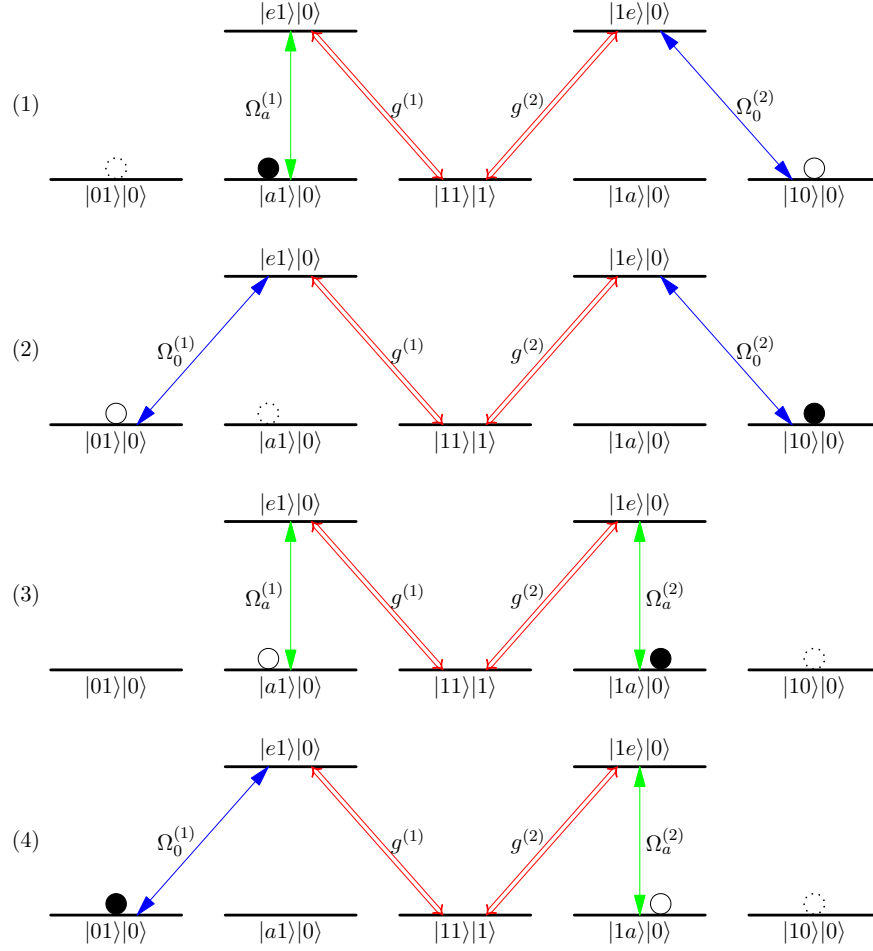


FIG. 4.5 – Représentation schématisée des étapes permettant l'implémentation de la porte SWAP. Pour chaque étape, le disque blanc correspond à l'état initial évoluant suivant l'état sombre (4.5c) pour atteindre l'état final symbolisé par un disque noir. Le disque pointillé indique un état initialement peuplé, évoluant suivant un autre état sombre du système.

On considère un état initial de la forme

$$|\Psi(t_i)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |01\rangle|0\rangle + \gamma |10\rangle|0\rangle + \delta |11\rangle|0\rangle, \quad (4.14a)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \quad (4.14b)$$

Les quatre étapes permettant l'implémentation de la porte SWAP, représentées sur la figure 4.5, sont définies comme suit :

- (1) La population de l'état $|10\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|a1\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_a^{(1)}, \Omega_0^{(2)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_1)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |01\rangle|0\rangle + \gamma |a1\rangle|0\rangle + \delta |11\rangle|0\rangle; \quad (4.15)$$

- (2) La population de l'état $|01\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|10\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_0^{(2)}, \Omega_0^{(1)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_2)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \gamma |a1\rangle|0\rangle + \beta |10\rangle|0\rangle + \delta |11\rangle|0\rangle; \quad (4.16)$$

- (3) La population de l'état $|a1\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|1a\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_a^{(2)}, \Omega_a^{(1)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_3)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \gamma |1a\rangle|0\rangle + \beta |10\rangle|0\rangle + \delta |11\rangle|0\rangle; \quad (4.17)$$

- (4) La population de l'état $|1a\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|01\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_0^{(1)}, \Omega_a^{(2)}$, conduisant à l'état final

$$|\Psi(t_f)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \gamma |01\rangle|0\rangle + \beta |10\rangle|0\rangle + \delta |11\rangle|0\rangle. \quad (4.18)$$

L'état du système évolue lors de chaque étape suivant les états sombres du système, sans gain de phases géométriques ou dynamiques. L'état final (4.18) correspond donc bien à l'action de la porte SWAP sur l'état initial (4.14a).

Connections aux états sombres

L'évolution du système, donnée par l'équation (4.8), s'effectue suivant les états sombres (4.4–4.6), où les états génériques $|N\rangle, |L\rangle$ correspondent aux états $|0\rangle$ ou $|a\rangle$ des qubits suivant le couplage utilisé, définissant les connections à chaque étape :

$$\begin{array}{cccccc} |00\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(a)}\rangle} & |00\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(d)}\rangle} & |00\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(c)}\rangle} & |00\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(b)}\rangle} & |00\rangle|0\rangle, \\ |01\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_7^{(a)}\rangle} & |01\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} & |10\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_7^{(b)}\rangle} & |10\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_7^{(b)}\rangle} & |10\rangle|0\rangle, \\ |10\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} & |a1\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_7^{(a)}\rangle} & |a1\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} & |1a\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} & |01\rangle|0\rangle, \\ |11\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_1\rangle} & |11\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_1\rangle} & |11\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_1\rangle} & |11\rangle|0\rangle & \xrightarrow{|\Psi_1\rangle} & |11\rangle|0\rangle. \end{array} \quad (4.19)$$

Résultats numériques

La simulation numérique de la porte SWAP est représentée sur la figure 4.6 pour des valeurs expérimentalement réalisables des pulsations de Rabi. Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur $T = 100$ ns et d'amplitude maximale $\Omega_{\max}/2\pi = 14$ MHz. La pulsation de Rabi associée à la cavité est constante de valeur $g/2\pi = 34$ MHz. Les impulsions d'une même étape sont séparées d'un délai $0.6T$.

L'évolution du système, effectuée suivant des états sombres, est insensible aux pertes par émission spontanée des états excités des qubits. Les pertes dues à la cavité deviennent négligeables sous la condition $g \gg \Omega$, permettant une implémentation robuste de la porte SWAP.

Ce processus permet de plus l'implémentation *directe* de la combinaison de portes quantiques

$$\text{PHASE}^{(1)}(\alpha) \circ \text{SWAP} \circ \text{PHASE}^{(1)}(\beta) \circ \text{CPHASE}(-\alpha - \beta), \quad (4.20)$$

en ajoutant respectivement aux phases relatives des lasers des étapes (1) et (2) les phases α, β . Des phases ajoutées aux phases relatives des lasers des autres étapes s'additionnent aux phases α, β et n'apportent aucune nouveauté.

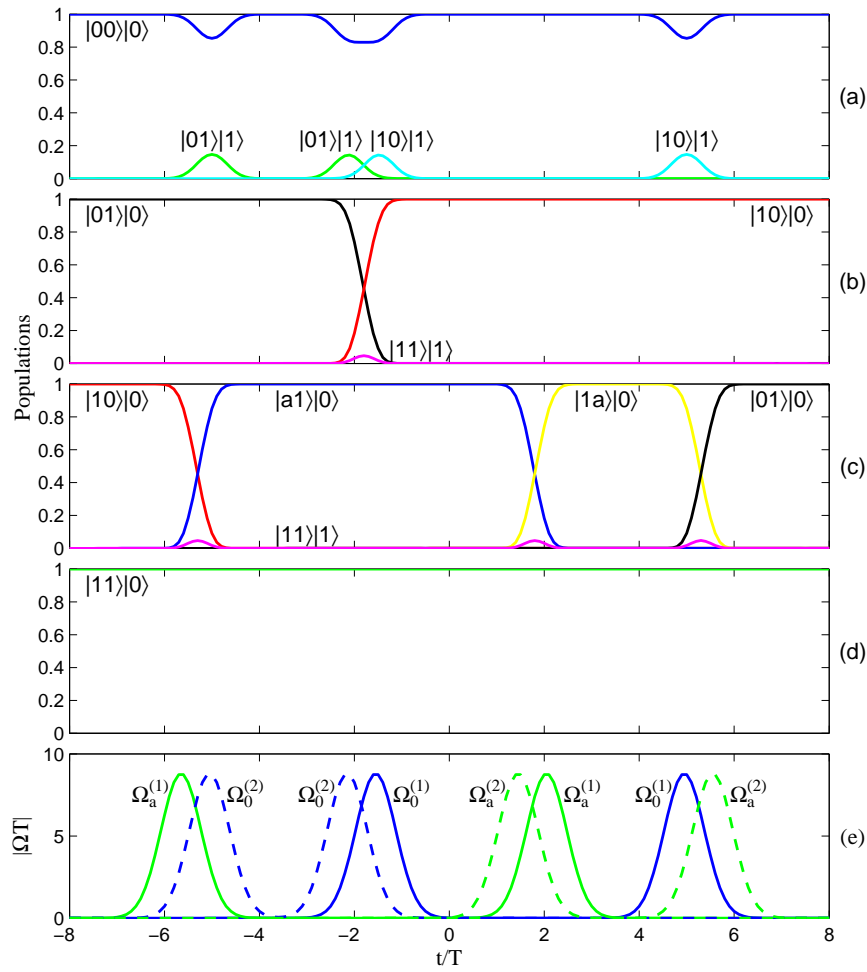


FIG. 4.6 – Simulation numérique de la porte SWAP. L'évolution des populations est représentée pour un état initial $|00\rangle|0\rangle$ (a), $|01\rangle|0\rangle$ (b), $|10\rangle|0\rangle$ (c), et $|11\rangle|0\rangle$ (d), ce dernier état étant stationnaire. Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , séparées d'un délai $0.6T$ lors d'une même étape.

4.2.2 Porte CNOT

La porte quantique CNOT permute l'état du second qubit si le premier est dans l'état $|1\rangle$, ce qui revient cette fois à permuter les coefficients des états $|10\rangle$ et $|11\rangle$ du système. L'état $|11\rangle|0\rangle$ étant stationnaire, cette permutation ne peut être effectuée directement comme pour la porte SWAP, et nécessite une étape préliminaire.

L'implémentation de la porte CNOT que nous proposons est constituée de six étapes [79]. La première est une étape préliminaire sur le second qubit, transférant la population de l'état $|1\rangle$ sur son état auxiliaire $|a\rangle$ par STIRAP. Ce transfert, qui nécessite le couplage de l'état $|1\rangle$ du second qubit, ne doit pas perturber le mode de cavité. Les lasers doivent donc être couplés à un second état excité $|e'\rangle$, ou bien être non-résonants avec l'état excité $|e\rangle$. Nous considérerons ici la première solution, les couplages résonants étant de meilleure efficacité. La dernière étape du processus est l'inverse de la première, *i.e.* le retour de la population de l'état $|a\rangle$ du second qubit sur son état $|1\rangle$.

Mécanisme global

On considère un état initial

$$|\Psi(t_i)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |01\rangle|0\rangle + \gamma |10\rangle|0\rangle + \delta |11\rangle|0\rangle, \quad (4.21a)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \quad (4.21b)$$

Les six étapes permettant l'implémentation de la porte CNOT par passage adiabatique sont les suivantes :

- (1) La population de l'état $|1\rangle$ du second qubit est transférée sur son état auxiliaire $|a\rangle$ par STIRAP. Les pulsations de Rabi, $\Omega_{a(sti)}^{(2)}$ et $\Omega_{1(sti)}^{(2)}$, sont choisies avec une phase relative π pour compenser la phase π acquise par la population lors du processus. L'état du système devient à la fin de cette étape préliminaire

$$|\Psi(t_1)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |0a\rangle|0\rangle + \gamma |10\rangle|0\rangle + \delta |1a\rangle|0\rangle. \quad (4.22)$$

- (2) La population de l'état $|10\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|a1\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_a^{(1)}, \Omega_0^{(2)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_2)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |0a\rangle|0\rangle + \gamma |a1\rangle|0\rangle + \delta |1a\rangle|0\rangle. \quad (4.23)$$

- (3) La population de l'état $|1a\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|01\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_0^{(1)}, \Omega_a^{(2)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_3)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |0a\rangle|0\rangle + \gamma |a1\rangle|0\rangle + \delta |01\rangle|0\rangle. \quad (4.24)$$

- (4) La population de l'état $|a1\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|1a\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_a^{(2)}, \Omega_a^{(1)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_4)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |0a\rangle|0\rangle + \gamma |1a\rangle|0\rangle + \delta |01\rangle|0\rangle. \quad (4.25)$$

- (5) La population de l'état $|01\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|10\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_0^{(2)}, \Omega_0^{(1)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_5)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |0a\rangle|0\rangle + \delta |10\rangle|0\rangle + \gamma |1a\rangle|0\rangle. \quad (4.26)$$

- (6) La population de l'état $|a\rangle$ du second qubit est ramenée sur son état $|1\rangle$ par STIRAP. Les lasers de pulsations de Rabi $\Omega_{1(sti)}^{(2)}, \Omega_{a(sti)}^{(2)}$ sont choisies avec une phase relative π , conduisant à l'état final

$$|\Psi(t_f)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |01\rangle|0\rangle + \delta |10\rangle|0\rangle + \gamma |11\rangle|0\rangle. \quad (4.27)$$

Les étapes (1) et (6) utilisent l'état $|e'\rangle$ du second qubit. Les étapes (2–5), qui permutent les populations des états $|10\rangle|0\rangle$ et $|1a\rangle|0\rangle$, sont schématisées sur la figure 4.7. L'état final (4.27) correspond à l'action de la porte CNOT sur l'état initial (4.21a).

Connections aux états sombres

L'évolution du système est donnée entre les étapes (2) et (5) par l'équation (4.8). La dynamique s'y effectue suivant les états sombres (4.4–4.6), où les états génériques $|N\rangle, |L\rangle$

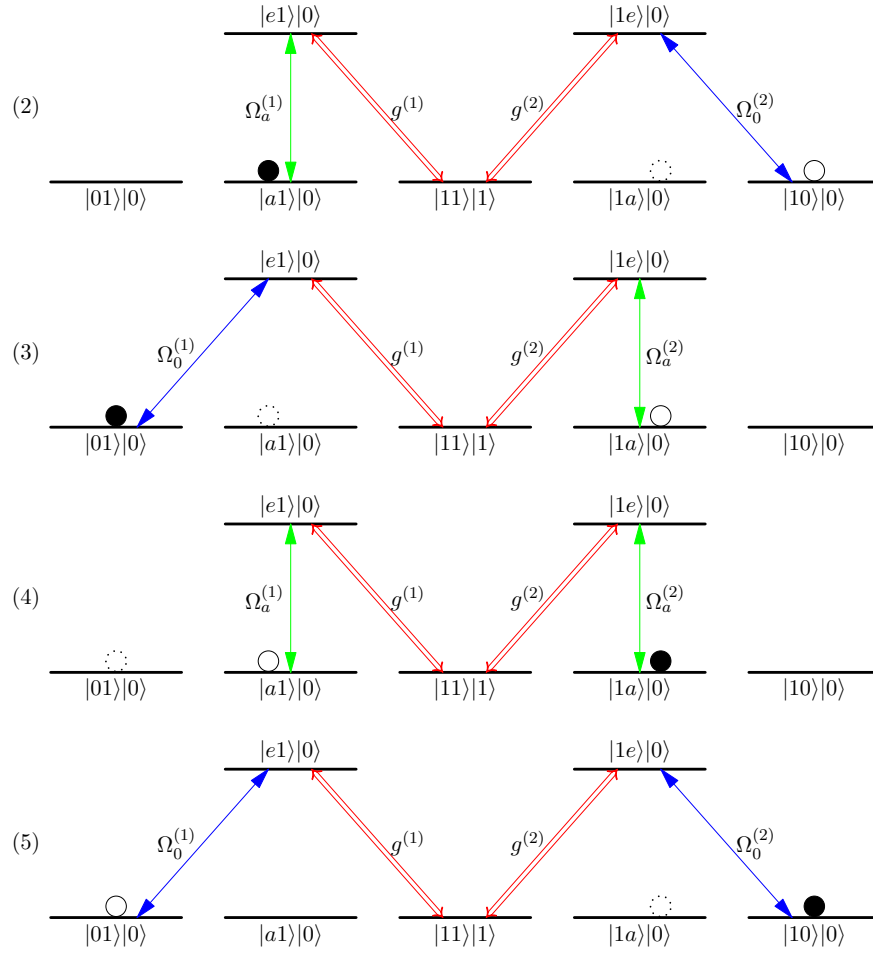


FIG. 4.7 – Représentation schématique des étapes (2) à (5) permettant l'implémentation de la porte CNOT. Pour chaque étape, le disque blanc correspond à l'état initial évoluant suivant l'état sombre (4.5c) pour atteindre l'état final symbolisé par un disque noir. Le disque pointillé indique un état initialement peuplé, évoluant suivant un autre état sombre du système.

correspondent aux états $|0\rangle$ ou $|a\rangle$ des qubits suivant le couplage utilisé, définissant les connexions

$$\begin{aligned}
 |00\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_{16}^{(a)}\rangle} |00\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(b)}\rangle} |00\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(c)}\rangle} |00\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(d)}\rangle} |00\rangle|0\rangle, \\
 |0a\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_{16}^{(c)}\rangle} |0a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(d)}\rangle} |0a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(a)}\rangle} |0a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(b)}\rangle} |0a\rangle|0\rangle, \\
 |10\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} |a1\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(a)}\rangle} |a1\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} |1a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(b)}\rangle} |1a\rangle|0\rangle, \\
 |1a\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_7^{(b)}\rangle} |1a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} |01\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(a)}\rangle} |01\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} |10\rangle|0\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Résultats numériques

La simulation numérique de la porte CNOT est représentée sur la figure 4.8 pour des valeurs expérimentalement réalisables des pulsations de Rabi. Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur $T = 100$ ns et d'amplitude maximale $\Omega_{\max}/2\pi = 14$ MHz pour les étapes (2-5). La pulsation de Rabi associée à la cavité est constante de valeur $g/2\pi = 34$ MHz. Les impulsions d'une même étape sont séparées d'un délai $0.6T$.

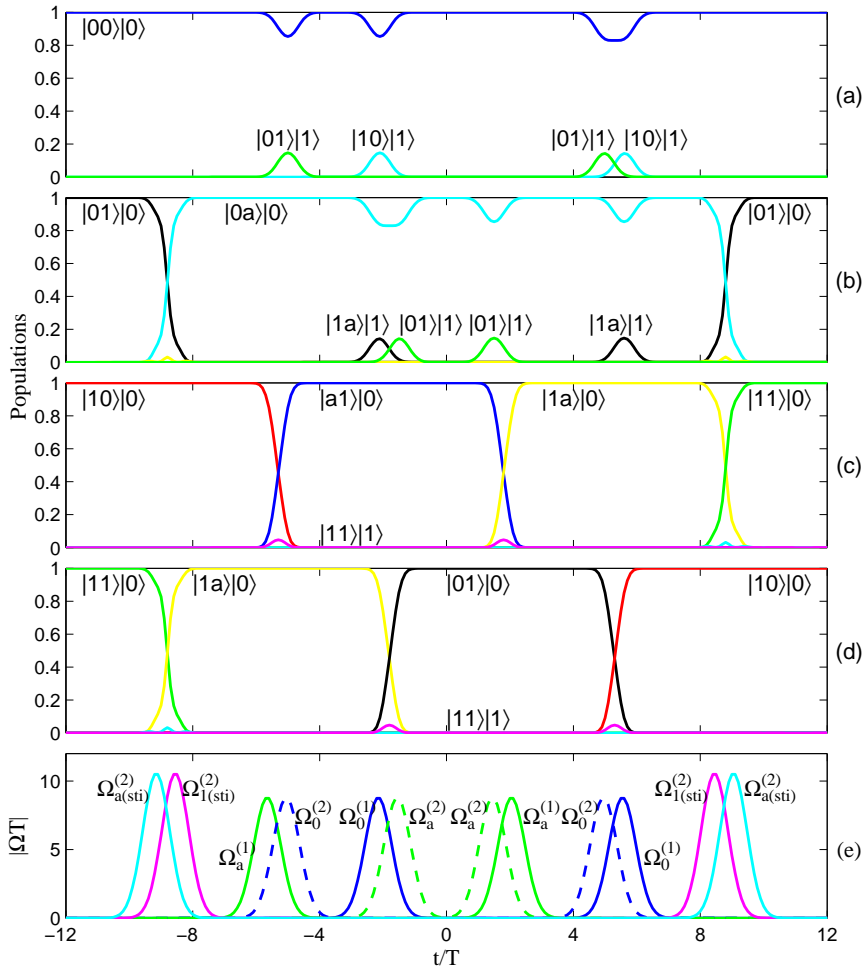


FIG. 4.8 – Simulation numérique de la porte CNOT. L'évolution des populations est représentée pour un état initial $|00\rangle|0\rangle$ (a), $|01\rangle|0\rangle$ (b), $|10\rangle|0\rangle$ (c), et $|11\rangle|0\rangle$ (d). Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , séparées d'un délai $0.6T$ lors d'une même étape.

L'évolution du système, effectuée suivant des états sombres, est insensible aux pertes par émission spontanée des états excités des qubits. Les pertes dues à la cavité deviennent négligeables sous la condition $g \gg \Omega$, permettant une implémentation robuste de la porte CNOT.

Ce processus permet de plus l'implémentation *directe* de la combinaison de portes quantiques

$$\text{PHASE}^{(1)}(\phi_6) \circ \text{CPHASE}(\phi_2 + \phi_4) \circ \text{CNOT} \circ \text{CPHASE}(\phi_3 + \phi_5) \circ \text{PHASE}^{(2)}(\phi_1), \quad (4.29)$$

en ajoutant aux phases relatives des lasers des étapes (i) les phases ϕ_i .

4.2.3 Porte CU

Le processus de transfert adiabatique de cohérence atomique décrit à la section 4.1 permet l'implémentation de deux façons différentes de la porte quantique CU, qui effectue une opération unitaire U sur le second qubit seulement si le premier est dans l'état $|1\rangle$.

La première méthode consiste à transférer les états $|10\rangle$ et $|11\rangle$ sur le second atome, afin de lui appliquer l'opération U [77]. Ce processus nécessite une double structure Λ pour le second atome, et l'utilisation de qubits non-identiques,⁴ présentant ainsi une asymétrie de construction, ce qui peut être un handicap dans l'implémentation d'un algorithme quantique. Nous décrivons dans cette section un autre procédé proposé par Goto et Ichimura [10], qui permet l'implémentation de la porte CU à une porte PHASE près. L'opérateur U agissant sur le second qubit sera écrit sous la forme

$$U = e^{i\frac{\phi}{2}} |c\rangle\langle c| + e^{-i\frac{\phi}{2}} |d\rangle\langle d|, \quad (4.30)$$

avec les superpositions cohérentes

$$|c\rangle = -\sin\theta |0\rangle + e^{i\phi} \cos\theta |1\rangle, \quad (4.31a)$$

$$|d\rangle = \cos\theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin\theta |1\rangle. \quad (4.31b)$$

Système et mécanisme global

Le mode de la cavité est ici couplé à l'état auxiliaire $|a\rangle$ des qubits. Ce changement rend l'implémentation de cette porte incompatible avec celles des portes évoquées précédemment (cf. section 4.5).

La porte CU requiert quatre étapes. Les étapes (1) et (4) correspondent à des processus tripod-STIRAP avec découplage des vecteurs sombres, décrits dans la section 2.3. Les états métastables sont alors couplés à un second état excité $|e'\rangle$ pour ne pas interférer avec le mode de la cavité. Les étapes (2) et (3) correspondent à l'extension du STIRAP défini par l'état sombre (4.5c).

On considère un état initial

$$|\Psi(t_i)\rangle = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |01\rangle|0\rangle + \gamma |10\rangle|0\rangle + \delta |11\rangle|0\rangle, \quad (4.32a)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1. \quad (4.32b)$$

Cet état initial peut s'écrire en utilisant l'identité $|c\rangle\langle c| + |d\rangle\langle d| = \mathbb{1}$ sur le second qubit sous la forme

$$|\Psi(t_i)\rangle = \alpha (\langle d|0\rangle|0d\rangle|0\rangle + \langle c|0\rangle|0c\rangle|0\rangle) + \beta (\langle d|1\rangle|0d\rangle|0\rangle + \langle c|1\rangle|0c\rangle|0\rangle) \quad (4.33)$$

$$+ \gamma (\langle d|0\rangle|1d\rangle|0\rangle + \langle c|0\rangle|1c\rangle|0\rangle) + \delta (\langle d|1\rangle|1d\rangle|0\rangle + \langle c|1\rangle|1c\rangle|0\rangle). \quad (4.34)$$

Les quatre étapes permettant l'implémentation de la porte CU par passage adiabatique sont les suivantes :

- (1) Un processus tripod-STIRAP transfère la population de la superposition cohérente d'états $|c\rangle$ (4.31a) du second qubit sur son état auxiliaire $|a\rangle$.⁵ La superposition d'états orthogonale $|d\rangle$ est inchangée. Les impulsions sont enclenchées dans l'ordre contre-intuitif $\Omega_{a(tri)}^{(2)}, \Omega_{0,1(tri)}^{(2)}$, où les pulsations de Rabi $\Omega_{0(tri)}^{(2)}, \Omega_{1,(tri)}^{(2)}$ sont de rapport constant. L'état du système devient

$$|\Psi(t_1)\rangle = \alpha (\langle d|0\rangle|0d\rangle|0\rangle + \langle c|0\rangle|0a\rangle|0\rangle) + \beta (\langle d|1\rangle|0d\rangle|0\rangle + \langle c|1\rangle|0a\rangle|0\rangle) \\ + \gamma (\langle d|0\rangle|1d\rangle|0\rangle + \langle c|0\rangle|1a\rangle|0\rangle) + \delta (\langle d|1\rangle|1d\rangle|0\rangle + \langle c|1\rangle|1a\rangle|0\rangle), \quad (4.35)$$

où les produits scalaires $\langle \cdot | \cdot \rangle$ concernent le second qubit.

4. Les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ des qubits ne sont pas codés sur les mêmes états atomiques d'un qubit à l'autre.

5. Il s'agit du processus inverse à celui étudié dans la section 2.3.

- (2) La population de l'état $|0a\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|a1\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_1^{(2)}, \Omega_a^{(1)}$, conduisant à l'état

$$|\Psi(t_2)\rangle = \alpha (\langle d|0\rangle|0d\rangle|0\rangle + \langle c|0\rangle|a1\rangle|0\rangle) + \beta (\langle d|1\rangle|0d\rangle|0\rangle + \langle c|1\rangle|a1\rangle|0\rangle) \\ + \gamma (\langle d|0\rangle|1d\rangle|0\rangle + \langle c|0\rangle|1a\rangle|0\rangle) + \delta (\langle d|1\rangle|1d\rangle|0\rangle + \langle c|1\rangle|1a\rangle|0\rangle). \quad (4.36)$$

- (3) La population de l'état $|a1\rangle|0\rangle$ est ramenée sur l'état $|0a\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_a^{(1)}, \Omega_1^{(2)}$. Le laser de pulsation de Rabi $\Omega_1^{(2)}$ est déphasé de φ par rapport à celui de l'étape (2). Cette phase est acquise par la population transférée, conduisant à l'état

$$|\Psi(t_3)\rangle = \alpha (\langle d|0\rangle|0d\rangle|0\rangle + e^{-i\varphi}\langle c|0\rangle|0a\rangle|0\rangle) + \beta (\langle d|1\rangle|0d\rangle|0\rangle + e^{-i\varphi}\langle c|1\rangle|0a\rangle|0\rangle) \\ + \gamma (\langle d|0\rangle|1d\rangle|0\rangle + \langle c|0\rangle|1a\rangle|0\rangle) + \delta (\langle d|1\rangle|1d\rangle|0\rangle + \langle c|1\rangle|1a\rangle|0\rangle). \quad (4.37)$$

- (4) Un processus tripod-STIRAP ramène la population de l'état $|a\rangle$ du second qubit sur la superposition cohérente d'états $|c\rangle$, par des lasers de pulsation de Rabi $\Omega_{0,1(tri)}^{(2)}, \Omega_a^{(2)}$. Le laser de pulsation de Rabi $\Omega_a^{(2)}$ est déphasé de $-\varphi$ par rapport à celui de l'étape (1). Cette phase est acquise par la population transférée, conduisant à l'état

$$|\Psi(t_f)\rangle = \alpha (\langle d|0\rangle|0d\rangle|0\rangle + \langle c|0\rangle|0c\rangle|0\rangle) + \beta (\langle d|1\rangle|0d\rangle|0\rangle + \langle c|1\rangle|0c\rangle|0\rangle) \\ + \gamma (\langle d|0\rangle|1d\rangle|0\rangle + e^{i\varphi}\langle c|0\rangle|1c\rangle|0\rangle) + \delta (\langle d|1\rangle|1d\rangle|0\rangle + e^{i\varphi}\langle c|1\rangle|1c\rangle|0\rangle) \\ = \alpha |00\rangle|0\rangle + \beta |01\rangle|0\rangle + e^{i\frac{\varphi}{2}} |1\rangle U(\gamma |0\rangle + \delta |1\rangle)|0\rangle, \quad (4.38)$$

où l'opérateur unitaire

$$U = e^{i\frac{\varphi}{2}} |c\rangle\langle c| + e^{-i\frac{\varphi}{2}} |d\rangle\langle d| \quad (4.39)$$

correspond à une rotation d'angle φ sur la sphère de Bloch, autour du vecteur défini par l'état $|c\rangle$.

L'état (4.38) correspond à l'action d'une porte CU sur l'état initial (4.32a), combinée à une porte PHASE d'angle $\frac{\varphi}{2}$ effectuée sur le premier qubit. Cette porte PHASE doit être compensée si seule la porte CU est considérée, sauf pour l'implémentation des portes quantiques particulières CPHASE et CNOT, qui correspondent à des portes CU dont l'opérateur U appartient à $U(2)$, et non seulement à $SU(2)$.

Connections aux états sombres

L'évolution du système est donnée entre les étapes (2) et (3) par l'équation (4.8). La dynamique s'y effectue suivant les états sombres (4.4–4.6), où l'état $|1\rangle$ doit être remplacé par l'état $|a\rangle$, et où les états génériques $|N\rangle, |L\rangle$ correspondent aux états $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ des qubits suivant le couplage utilisé, définissant les connections

$$\begin{aligned} |00\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_{16}^{(b)}\rangle} |00\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(b)}\rangle} |00\rangle|0\rangle, \\ |01\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_{16}^{(d)}\rangle} |01\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(d)}\rangle} |01\rangle|0\rangle, \\ |0a\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} |a1\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} e^{-i\varphi} |0a\rangle|0\rangle, \\ |10\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_{16}^{(c)}\rangle} |10\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(c)}\rangle} |10\rangle|0\rangle, \\ |11\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_{16}^{(a)}\rangle} |11\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(a)}\rangle} |11\rangle|0\rangle, \\ |1a\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_7^{(a)}\rangle} |1a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(a)}\rangle} |1a\rangle|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Résultats numériques et discussion

La simulation numérique du processus CU est représentée sur la figure 4.9 pour l'implémentation d'une porte CNOT avec des valeurs expérimentalement réalisables des pulsations de Rabi. Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur $T = 100$ ns et d'amplitude maximale $\Omega_{\max}/2\pi = 14$ MHz pour les étapes (2–3). La pulsation de Rabi associée à la cavité est constante de valeur $g/2\pi = 34$ MHz. Les impulsions d'une même étape sont séparées d'un délai $0.6T$.

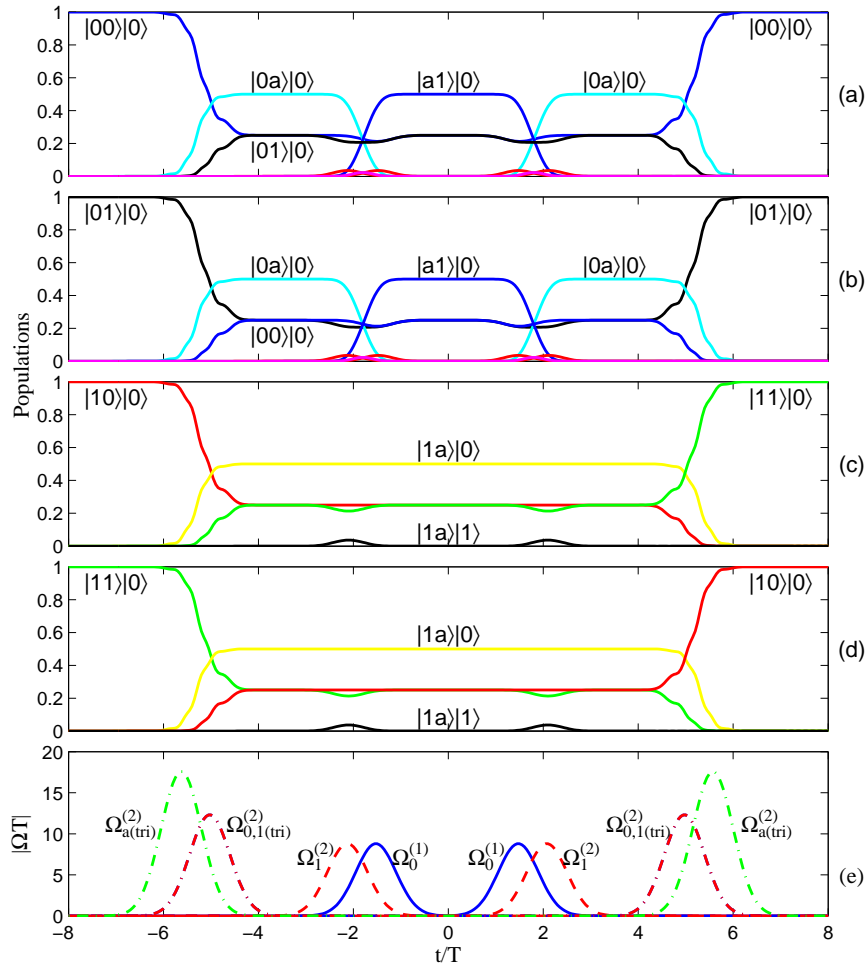


FIG. 4.9 – Simulation numérique du processus CU pour l'implémentation d'une porte quantique CNOT. L'évolution des populations est représentée pour un état initial $|00\rangle|0\rangle$ (a), $|01\rangle|0\rangle$ (b), $|10\rangle|0\rangle$ (c), et $|11\rangle|0\rangle$ (d). Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , séparées d'un délai $0.6T$ lors d'une même étape.

L'évolution du système, effectuée suivant des états sombres, est insensible aux pertes par émission spontanée des états excités des qubits. Les pertes dues à la cavité deviennent négligeables sous la condition $g \gg \Omega$, permettant une implémentation robuste de la porte CU. Cette porte quantique est toutefois obtenue ici à une porte PHASE près, comme expliqué précédemment.

La porte CNOT ainsi implémentée requiert au mieux sept impulsions lasers, contre onze

pour le processus proposé dans la sous-section précédente 4.2.2.⁶ Le processus exposé ici requiert l'utilisation de deux tripod-STIRAP, qui nécessitent le recours à des pulsations de Rabi en rapport constant. Ce rapport constant peut être obtenu de façon robuste dans des système de sous-niveaux magnétiques Zeeman comme expliqué dans la section 2.2.4. Le processus que nous avons proposé dans la sous-section 4.2.2 n'est pas soumis à cette contrainte, et peut donc être utilisé lorsque le rapport constant des impulsions laser n'est pas envisageable.

4.3 Généralisation : rotation des états de la base à deux qubits

Les processus à deux qubits décrits précédemment sont tous basés sur la transfert adiabatique de population dans la cavité, effectué suivant l'état sombre (4.5c). Nous proposons ici une généralisation de ce processus à un transfert adiabatique fractionnaire de population, tout comme le STIRAP se généralise au STIRAP-fractionnaire et au tripod-STIRAP.

Cette généralisation permet l'implémentation d'une porte CU dont l'état de contrôle peut être choisi de façon arbitraire. Cette porte que nous appellerons ASCU⁷ est obtenue par le suivi d'états sombres adaptés au processus contrôle-rotation. Nous verrons que ces états sombres permettent de plus l'implémentation de la porte quantique SWAP^α .

Il est important de noter que les implémentations de ces deux portes, ASCU et SWAP^α , ne sont pas compatibles. En effet, la porte ASCU requiert que le mode de cavité couple l'état $|a\rangle$ des qubits, et la porte SWAP^α l'état $|1\rangle$. Ces différences seront discutées dans la section 4.5.

4.3.1 Système et Hamiltonien effectif

Le mode de la cavité est couplé à l'état auxiliaire $|a\rangle$ des qubits. L'état $|1\rangle$ du premier qubit est couplé à l'état excité $|e\rangle$ par un laser de pulsation de Rabi $\Omega_1^{(1)}$; les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ du second qubit sont couplés à l'état excité par des lasers de pulsations de Rabi $\Omega_0^{(2)}, \Omega_1^{(2)}$ (Figure 4.10). C'est l'utilisation d'un second laser sur ce qubit qui permet le transfert fractionnaire de population.

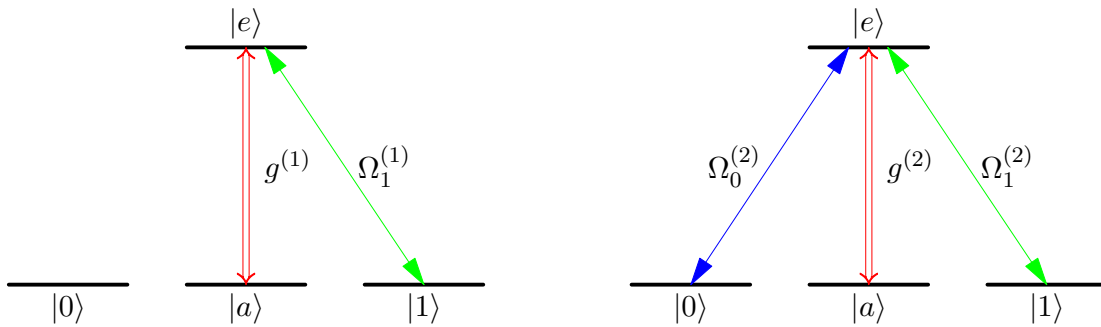


FIG. 4.10 – Schéma des couplages effectués sur les qubits pour l'implémentation de la porte quantique ASCU.

On suppose les couplages résonants, et les champs lasers oscillant en $\cos(\omega t + \phi_i^{(j)})$ ($i = 0, 1$,

6. On considère dans ce compte que les deux impulsions de pulsation de Rabi $\Omega_0^{(2)}$ pour le premier processus, $\Omega_a^{(2)}$ pour le second, intervenant consécutivement au milieu des processus, peuvent être remplacée par une seule impulsion élargie.

7. Il s'agit du sigle anglophone pour *arbitrary-state controlled-unitary gate*.

$j = 1, 2$). L'Hamiltonien correspondant à ce système s'écrit en représentation d'interaction et dans l'approximation résonante

$$H = \Omega_1^{(1)} e^{-i\phi_1^{(1)}} |e^{(1)}\rangle\langle 1^{(1)}| + g^{(1)} \hat{a} |e^{(1)}\rangle\langle a^{(1)}| \\ + \Omega_0^{(2)} e^{-i\phi_0^{(2)}} |e^{(2)}\rangle\langle 0^{(2)}| + \Omega_1^{(2)} e^{-i\phi_1^{(2)}} |e^{(2)}\rangle\langle 1^{(2)}| + g^{(2)} \hat{a} |e^{(2)}\rangle\langle a^{(2)}| + \text{h.c.}, \quad (4.41)$$

avec \hat{a} l'opérateur d'annihilation du mode de cavité.

Les pulsations de Rabi associées aux lasers couplant le second qubit seront choisies en rapport constant

$$\frac{\Omega_0^{(2)}}{\Omega_1^{(2)}} = \tan \theta. \quad (4.42)$$

Elles peuvent donc être paramétrées par l'angle θ et une pulsation $\Omega^{(2)}$:

$$\Omega_0^{(2)}(t) = \Omega^{(2)}(t) \sin \theta, \quad (4.43a)$$

$$\Omega_1^{(2)}(t) = \Omega^{(2)}(t) \cos \theta. \quad (4.43b)$$

Lors de l'évolution adiabatique du système, quatre états particuliers peuvent être identifiés pour le second qubit. Le premier est découplé de la dynamique et sera un état stationnaire, les trois autres participeront à la dynamique en permettant le transfert de population :

$$|d\rangle = \cos \theta e^{i\phi^{(2)}} |1\rangle - \sin \theta |0\rangle, \quad (4.44a)$$

$$|c\rangle = \sin \theta e^{i\phi^{(2)}} |1\rangle + \cos \theta |0\rangle, \quad (4.44b)$$

$$|c_2\rangle = \sin \theta e^{i\phi^{(2)}} |1\rangle - \cos \theta |0\rangle, \quad (4.44c)$$

$$|c_3\rangle = \cos \theta e^{i\phi^{(2)}} |1\rangle + \sin \theta |0\rangle, \quad (4.44d)$$

avec la phase relative des lasers

$$\phi^{(2)} = \phi_1^{(2)} - \phi_0^{(2)}. \quad (4.45)$$

La restriction de l'Hamiltonien (4.41) au sous-espace impliquant les états ne peuplant pas la cavité au temps initial a la forme diagonale par blocs (4.2), où chaque bloc $H_d(t)$ agit sur le sous-espace de Hilbert \mathcal{H}'_d de dimension d , engendré par les états

$$\mathcal{H}'_1 = \{|aa\rangle|0\rangle\}, \quad (4.46a)$$

$$\mathcal{H}'_7 = \{|1a\rangle|0\rangle, |a1\rangle|0\rangle, |a0\rangle|0\rangle, |0a\rangle|0\rangle, |ae\rangle|0\rangle, |ea\rangle|0\rangle, |aa\rangle|1\rangle\}, \quad (4.46b)$$

$$\mathcal{H}'_{16} = \{|11\rangle|0\rangle, |00\rangle|0\rangle, |10\rangle|0\rangle, |01\rangle|0\rangle, |1e\rangle|0\rangle, |e1\rangle|0\rangle, |0e\rangle|0\rangle, |e0\rangle|0\rangle, \\ |ee\rangle|0\rangle, |1a\rangle|1\rangle, |a1\rangle|1\rangle, |0a\rangle|1\rangle, |a0\rangle|1\rangle, |ae\rangle|1\rangle, |ea\rangle|1\rangle, |aa\rangle|2\rangle\}. \quad (4.46c)$$

Dans l'évolution que nous considérons ici, le bloc $H_{16}(t)$ est aussi diagonal par blocs, chacun d'entre eux étant défini dans les sous-espaces de \mathcal{H}'_{16}

$$\mathcal{H}'_4 = \{|00\rangle|0\rangle, |01\rangle|0\rangle, |0e\rangle|0\rangle, |0a\rangle|1\rangle\}, \quad (4.47a)$$

$$\mathcal{H}'_{12} = \{|11\rangle|0\rangle, |10\rangle|0\rangle, |1e\rangle|0\rangle, |e1\rangle|0\rangle, |e0\rangle|0\rangle, |ee\rangle|0\rangle, \\ |1a\rangle|1\rangle, |a1\rangle|1\rangle, |a0\rangle|1\rangle, |ae\rangle|1\rangle, |ea\rangle|1\rangle, |aa\rangle|2\rangle\}. \quad (4.47b)$$

États sombres

L'évolution adiabatique s'effectuera suivant six états sombres de l'Hamiltonien (4.41), appartenant deux à deux à trois sous-espaces orthogonaux. Les deux premiers sont définis dans le sous-espace \mathcal{H}'_4 :

$$|\Psi_1\rangle = |0d\rangle|0\rangle, \quad (4.48a)$$

$$|\Psi_2\rangle = \cos \eta |0c\rangle|0\rangle - \sin \eta e^{-i\phi_0^{(2)}} |0a\rangle|1\rangle; \quad (4.48b)$$

les deux suivants sont définis dans le sous-espace \mathcal{H}'_7 :

$$|\Psi_3\rangle = |ad\rangle|0\rangle, \quad (4.49a)$$

$$|\Psi_4\rangle = \sin \varphi |ac\rangle|0\rangle + \cos \psi \cos \varphi e^{i(\phi_1^{(1)} - \phi_0^{(2)})} |1a\rangle|0\rangle - \sin \psi \cos \varphi e^{-i\phi_0^{(2)}} |aa\rangle|1\rangle; \quad (4.49b)$$

les deux derniers sont définis dans le sous-espace \mathcal{H}'_{12} :

$$|\Psi_5\rangle = \cos \psi e^{i\phi_1^{(1)}} |1c_2\rangle|0\rangle - \sin \psi |ac_2\rangle|1\rangle, \quad (4.50a)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_6\rangle = & \left[\sqrt{2} \cos \eta \left(\cos \psi e^{i\phi_1^{(1)}} |1c_3\rangle|0\rangle - \sin \psi |ac_3\rangle|1\rangle \right) \right. \\ & \left. - \sin \eta e^{-i\phi_0^{(2)}} \left(\sqrt{2} \cos \psi e^{i\phi_1^{(1)}} |1a\rangle|1\rangle + \sin \psi |aa\rangle|2\rangle \right) \right] \\ & / \sqrt{1 + \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \eta}, \end{aligned} \quad (4.50b)$$

avec les angles dynamiques η, ψ, φ définis par les relations

$$\tan \eta = \frac{\Omega^{(2)}}{g^{(2)}}, \quad (4.51a)$$

$$\tan \psi = \frac{\Omega_1^{(1)}}{g^{(1)}}, \quad (4.51b)$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \psi}{\tan \eta}. \quad (4.51c)$$

Les états sombres $|\Psi_{1,2}\rangle$, $|\Psi_{3,4}\rangle$ et $|\Psi_{5,6}\rangle$ sont couplés dans la limite adiabatique par des termes proportionnels à $\dot{\theta}$,

$$\langle \Psi_2 | \frac{d}{dt} | \Psi_1 \rangle = -\dot{\theta} \cos \eta, \quad (4.52a)$$

$$\langle \Psi_4 | \frac{d}{dt} | \Psi_3 \rangle = -\dot{\theta} \sin \varphi, \quad (4.52b)$$

$$\langle \Psi_6 | \frac{d}{dt} | \Psi_5 \rangle = -\dot{\theta} \sqrt{2} \cos \eta. \quad (4.52c)$$

Dans le cas considéré ici où l'angle θ est constant, les couplages (4.52) sont identiquement nuls, et les états sombres (4.48–4.50) évoluent librement dans la limite adiabatique, sans accumulation de phases géométriques ou dynamiques.

L'évolution des populations des états $|00\rangle|0\rangle, |01\rangle|0\rangle$ et $|10\rangle|0\rangle, |11\rangle|0\rangle$ s'effectue respectivement suivant les états sombres $|\Psi_{1,2}\rangle$ et $|\Psi_{5,6}\rangle$. Étant donné que les couplages $g^{(j)}$ au mode de la cavité sont constants, ces populations restent inchangées par toute séquence d'impulsions laser. Ce sont les états sombres $|\Psi_{3,4}\rangle$ qui vont permettre d'effectuer une rotation de la base à deux qubits $\{|a0\rangle|0\rangle, |a1\rangle|0\rangle\}$, mécanisme à la base des processus d'implémentation des portes quantiques CU et SWAP $^\alpha$ que nous proposons.

4.3.2 Rotation d'états de la base à deux qubits

Cette opération est très similaire à la rotation du qubit obtenue par double processus tripod-STIRAP, et consiste à effectuer une opération unitaire

$$\begin{aligned} U(\delta, \mathbf{n}) &= \exp(-i\frac{\delta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &= e^{i\frac{\delta}{2}} |d\rangle\langle d| + e^{-i\frac{\delta}{2}} |c\rangle\langle c| \end{aligned} \quad (4.53)$$

sur le second qubit, le premier se trouvant dans l'état auxiliaire $|a\rangle$. Cette opération correspond à une rotation d'angle δ sur la sphère de Bloch, autour du vecteur \mathbf{n} représentant l'état $|c\rangle$.

L'état $|ad\rangle|0\rangle$ correspond à l'état sombre $|\Psi_3\rangle$, stationnaire. L'opérateur (4.53) est obtenu en déphasant l'état $|ac\rangle|0\rangle$ par l'intermédiaire de l'état sombre $|\Psi_4\rangle$, dont le schéma de couplage est représenté sur la figure 4.11. Il montre que la population d'une superposition

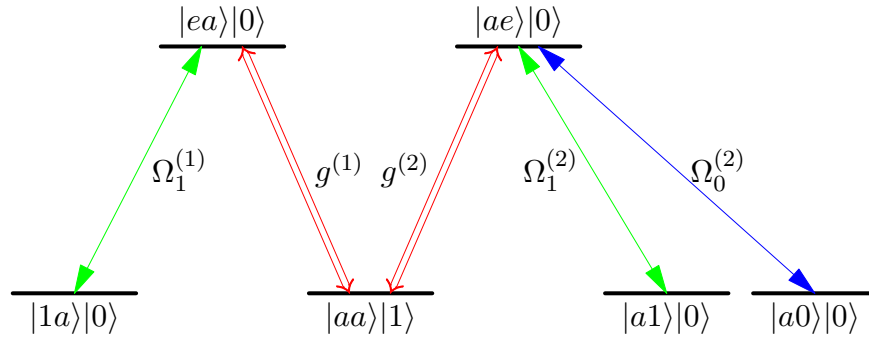


FIG. 4.11 – Représentation schématique des couplages associés à l'état sombre $|\Psi_4\rangle$.

cohérente des états $|a0\rangle|0\rangle, |a1\rangle|0\rangle$ peut être transportée sur l'état $|1a\rangle|0\rangle$, et réciproquement.

Mécanisme

Le processus permettant la rotation des états $|a0\rangle|0\rangle, |a1\rangle|0\rangle$ est défini comme suit, en deux étapes. On considère un état initial de la forme

$$\begin{aligned} |\Psi(t_i)\rangle &= \alpha |a0\rangle|0\rangle + \beta |a1\rangle|0\rangle \\ &= |a\rangle |\phi_i\rangle |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.54)$$

avec l'état du second qubit $|\phi_i\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$.

- (1) La population de l'état $|ac\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|1a\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_1^{(1)}, \Omega_1^{(2)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_1)\rangle = \langle d|\phi_i\rangle |ad\rangle|0\rangle + \langle c|\phi_i\rangle |1a\rangle|0\rangle, \quad (4.55)$$

où les produits scalaires $\langle \cdot | \cdot \rangle$ s'appliquent au second qubit.

- (2) La population de l'état $|1a\rangle|0\rangle$ est ramenée sur l'état $|ac\rangle|0\rangle$ par deux impulsions laser de pulsations de Rabi $\Omega_1^{(2)}, \Omega_1^{(1)}$. Le laser de pulsation de Rabi $\Omega_1^{(1)}$ est déphasé de δ par rapport à la première étape, conduisant à l'état final

$$\begin{aligned} |\Psi(t_f)\rangle &= \langle d|\phi_i\rangle |ad\rangle|0\rangle + e^{-i\delta} \langle c|\phi_i\rangle |ac\rangle|0\rangle, \\ &= e^{-i\frac{\delta}{2}} |a\rangle U(\delta, \mathbf{n}) |\phi_i\rangle |0\rangle. \end{aligned} \quad (4.56)$$

L'état final (4.56) correspond à l'application de l'opérateur U , défini à une phase globale près, sur l'état initial du second qubit uniquement lorsque le premier qubit se trouve dans l'état auxiliaire $|a\rangle$, les populations des autres états du système $|00\rangle|0\rangle, |01\rangle|0\rangle, |10\rangle|0\rangle, |11\rangle|0\rangle$ étant inchangée lors du processus, comme expliqué précédemment. Les états sombres (4.48–4.50) permettent donc une implémentation directe d'un processus contrôle-unitaire.

Connections aux états sombres

La dynamique du système s'effectue suivant les états sombres (4.48–4.50), définissant les connections

$$\begin{aligned}
|0d\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_1\rangle} |0d\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_1\rangle} |0d\rangle|0\rangle, \\
|0c\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_2\rangle} |0c\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_2\rangle} |0c\rangle|0\rangle, \\
|1c_2\rangle|0\rangle &\xrightarrow{e^{-i\phi_1^{(1)}}|\Psi_5\rangle} |1c_2\rangle|0\rangle \xrightarrow{|e^{-i\phi_1^{(1)}}\Psi_5\rangle} |1c_2\rangle|0\rangle, \\
|1c_3\rangle|0\rangle &\xrightarrow{e^{-i\phi_1^{(1)}}|\Psi_6\rangle} |0c_3\rangle|0\rangle \xrightarrow{e^{-i\phi_1^{(1)}}|\Psi_6\rangle} |1c_3\rangle|0\rangle,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

décrivant l'évolution des états $|00\rangle|0\rangle, |01\rangle|0\rangle$ et $|10\rangle|0\rangle, |11\rangle|0\rangle$ par combinaisons linéaires, et

$$\begin{aligned}
|ad\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_3\rangle} |ad\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_3\rangle} |ad\rangle|0\rangle, \\
|ac\rangle|0\rangle &\xrightarrow{|\Psi_4\rangle} |1a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_4\rangle} e^{-i\delta}|ac\rangle|0\rangle,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

pour la rotation des états $|a0\rangle|0\rangle, |a1\rangle|0\rangle$.

4.4 Applications à l'implémentation de portes quantiques

Le processus de rotation d'états de la base à deux qubits est adapté à l'opération contrôle-unitaire où le qubit de contrôle se trouve dans l'état auxiliaire $|a\rangle$. Nous proposons dans cette section des applications de ce processus pour l'implémentation des portes quantiques ASCU et SWAP $^\alpha$.

4.4.1 Porte ASCU

Cette porte permet l'application d'un opérateur unitaire U sur le second qubit lorsque le premier est dans un état arbitrairement choisi $|c'\rangle$, et peut donc s'écrire sous la forme de blocs

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

dans la base $\{|d'0\rangle, |d'1\rangle, |c'0\rangle, |c'1\rangle\}$, où $|d'\rangle$ est l'état orthogonal à $|c'\rangle$. Cette porte est équivalente au circuit quantique représenté sur la figure 4.12, composé de deux portes à un qubit et d'une porte CU.

L'implémentation de la porte ASCU s'effectue en trois étapes. On considère un état initial écrit dans la base $\{|d'\rangle, |c'\rangle\} \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\} \otimes |0\rangle$:

$$|\Psi(t_i)\rangle = \alpha_1 |d'0\rangle|0\rangle + \alpha_2 |d'1\rangle|0\rangle + \alpha_3 |c'0\rangle|0\rangle + \alpha_4 |c'1\rangle|0\rangle, \tag{4.60a}$$

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 = 1. \tag{4.60b}$$

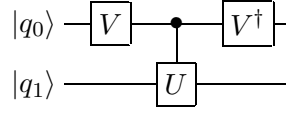


FIG. 4.12 – Décomposition de la porte quantique ASCU en portes élémentaires.

- (1) Un processus tripod-STIRAP transporte la population du premier qubit de l'état $|c'\rangle$ sur son état auxiliaire $|a\rangle$, par des lasers de pulsation de Rabi $\Omega_{a(tri)}^{(1)}, \Omega_{0,1(tri)}^{(1)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_1)\rangle = \alpha_1 |d'0\rangle|0\rangle + \alpha_2 |d'1\rangle|0\rangle - \alpha_3 |a0\rangle|0\rangle - \alpha_4 |a1\rangle|0\rangle; \quad (4.61)$$

- (2) Le processus de rotation des états $|a0\rangle|0\rangle, |a1\rangle|0\rangle$ exposé à la section 4.3.2 est appliqué, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_2)\rangle = \alpha_1 |d'0\rangle|0\rangle + \alpha_2 |d'1\rangle|0\rangle - e^{-i\frac{\delta}{2}} |a\rangle U(\delta, \mathbf{n})(\alpha_3 |0\rangle + \alpha_4 |1\rangle) |0\rangle; \quad (4.62)$$

- (3) Un processus tripod-STIRAP ramène la population du premier qubit de l'état auxiliaire $|a\rangle$ sur l'état $|c'\rangle$, par des lasers de pulsation de Rabi $\Omega_{0,1(tri)}^{(1)}, \Omega_{a(tri)}^{(1)}$. Le laser de pulsation de Rabi $\Omega_{a(tri)}^{(1)}$ est déphasé de ξ par rapport à l'étape (1). Cette phase est acquise par la population transportée, conduisant à l'état final

$$|\Psi(t_f)\rangle = \alpha_1 |d'0\rangle|0\rangle + \alpha_2 |d'1\rangle|0\rangle + |c'\rangle e^{i(\xi - \frac{\delta}{2})} U(\delta, \mathbf{n})(\alpha_3 |0\rangle + \alpha_4 |1\rangle) |0\rangle. \quad (4.63)$$

L'état final (4.63) correspond à l'application de la porte ASCU sur l'état initial (4.60), *i.e.* l'application de l'opérateur $U' = e^{i(\xi - \frac{\delta}{2})} U(\delta, \mathbf{n})$ sur le second qubit seulement si le premier se trouve dans l'état $|c'\rangle$. Comme la phase ξ peut être choisie de façon arbitraire, l'opération unitaire U' effectuée par cette porte ASCU sur le second qubit est définie dans le groupe $U(2)$ tout entier.

Résultats numériques et discussion

La simulation numérique du processus ASCU est représentée sur la figure 4.14 pour l'implémentation d'une porte HADAMARD lorsque le premier qubit se trouve dans l'état $|+\rangle$, où l'état $|+\rangle$ et son état orthogonal $|-\rangle$ sont définis par les relations

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (4.64a)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (4.64b)$$

Les pulsations de Rabi utilisées sont choisies expérimentalement réalisables. Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur $T = 100$ ns et d'amplitude maximale $\Omega_{\max}/2\pi = 14$ MHz. La pulsation de Rabi associée à la cavité est constante de valeur $g/2\pi = 34$ MHz. Les impulsions d'une même étape sont séparées d'un délai $0.6T$.

L'évolution du système, effectuée suivant des états sombres, est insensible aux pertes par émission spontanée des états excités des qubits. Les pertes dues à la cavité deviennent négligeables sous la condition $g \gg \Omega$, permettant une implémentation robuste de la porte ASCU.

La porte ASCU ainsi implémentée requiert au mieux sept impulsions lasers, et permet l'application d'un opérateur du groupe $U(2)$ au second qubit lorsque le premier est dans un état de contrôle arbitrairement choisi.

Cette porte quantique permet l'implémentation rapide d'algorithmes quantiques nécessitant certaines combinaisons de portes. Par exemple, la partie principale du circuit de mesure projective (cf. Annexe B) peut s'implémenter par la porte ASCU, comme représenté sur la figure 4.13, où les portes H correspondent à des portes HADAMARD, M à un opérateur unitaire de valeurs propres ± 1 . La mesure effectuée sur le premier qubit à la sortie de ce circuit projette l'état du second qubit sur l'un des états propres de l'opérateur M , déterminé par l'état mesuré. Un tel circuit est utilisé pour certains processus de correction d'erreurs [5, 84].

4.4.2 Porte SWAP^α

La porte quantique SWAP^α permet de former, avec les portes à un qubit, un ensemble universel de portes quantiques. Elle s'écrit dans la base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ sous la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

où $\alpha \in [0, 2]$, et avec la matrice de Pauli σ_x .

L'implémentation de la porte SWAP^α nécessite d'inverser les couplages des états $|1\rangle$ et $|a\rangle$ des qubits. Le mode de la cavité couple donc ici l'état $|1\rangle$ des qubits, comme pour les processus décrits section 4.1, et les états sombres correspondants s'obtiennent à partir des états sombres (4.48–4.50) par la permutation $1 \leftrightarrow a$ des indices des pulsations de Rabi et des états atomiques. Le schéma de couplage associé à l'état sombre (4.49b) est alors représenté sur la figure 4.15.

Le schéma de couplage 4.15 montre que le processus décrit dans la section 4.3.2 permet d'effectuer l'opération unitaire $e^{-i\frac{\delta}{2}} U(\delta, \mathbf{n})$ dans la base $\{|1a\rangle|0\rangle, |10\rangle|0\rangle\}$.

L'implémentation de la porte SWAP^α s'effectue en trois étapes. On considère un état initial

$$|\Psi(t_i)\rangle = \alpha_1 |00\rangle|0\rangle + \alpha_2 |01\rangle|0\rangle + \alpha_3 |10\rangle|0\rangle + \alpha_4 |11\rangle|0\rangle, \quad (4.66a)$$

$$|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2 + |\alpha_4|^2 = 1. \quad (4.66b)$$

- (1) La population de l'état $|01\rangle|0\rangle$ est transférée sur l'état $|1a\rangle|0\rangle$ par le processus de transfert décrit à la section 4.1. Les pulsations de Rabi des lasers sont enclenchées suivant la séquence contre-intuitive $\Omega_a^{(2)}, \Omega_0^{(1)}$, conduisant à l'état intermédiaire

$$|\Psi(t_1)\rangle = \alpha_1 |00\rangle|0\rangle + \alpha_2 |1a\rangle|0\rangle + \alpha_3 |10\rangle|0\rangle + \alpha_4 |11\rangle|0\rangle; \quad (4.67)$$

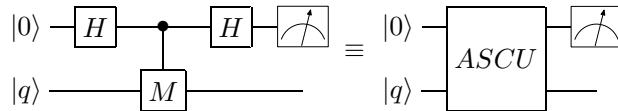


FIG. 4.13 – Circuit quantique réalisant une mesure projective et son équivalent utilisant la porte ASCU. Les portes H correspondent à des portes HADAMARD, M à un opérateur unitaire de valeurs propres ± 1 .

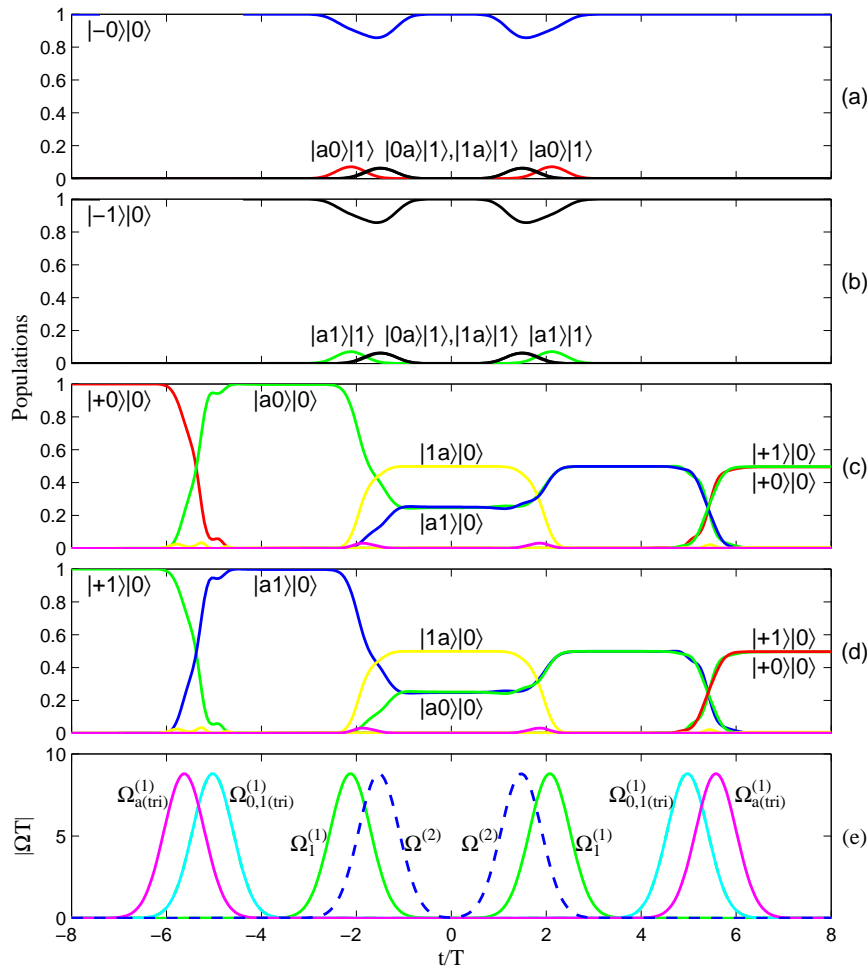


FIG. 4.14 – Simulation numérique du processus ASCU pour l'implémentation d'une porte HADAMARD lorsque le premier qubit se trouve dans l'état $|+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. L'évolution des populations est représentée pour un état initial $| - 0\rangle|0\rangle$ (a), $| - 1\rangle|0\rangle$ (b), $| + 0\rangle|0\rangle$ (c), et $| + 1\rangle|0\rangle$ (d). Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , séparées d'un délai $0.6T$ lors d'une même étape.

- (2) L'opération unitaire $e^{-i\frac{\delta}{2}} U(\delta, \mathbf{n})$ est appliquée aux états $|1a\rangle|0\rangle, |10\rangle|0\rangle$ par le processus décrit à la section 4.3. Les pulsations de Rabi associées sont $\Omega_a^{(1)}, \Omega_{a,0}^{(1)}$ pour la première partie du processus, et $\Omega_{a,0}^{(2)}, \Omega_a^{(1)}$ pour la seconde partie, le laser de pulsation de Rabi $\Omega_a^{(1)}$ étant déphasé de δ . L'état du système s'écrit alors

$$|\Psi(t_2)\rangle = \alpha_1 |00\rangle|0\rangle + e^{-i\frac{\delta}{2}} U(\delta, \mathbf{n}) (\alpha_2 |1a\rangle|0\rangle + \alpha_3 |10\rangle|0\rangle) + \alpha_4 |11\rangle|0\rangle. \quad (4.68)$$

- (3) La population de l'état $|1a\rangle|0\rangle$ est retransférée sur l'état $|01\rangle|0\rangle$ par des lasers de pulsations de Rabi $\Omega_0^{(1)}, \Omega_a^{(2)}$, conduisant à l'état final

$$|\Psi(t_f)\rangle = \alpha_1 |00\rangle|0\rangle + e^{-i\frac{\delta}{2}} U(\delta, \mathbf{n}) (\alpha_2 |01\rangle|0\rangle + \alpha_3 |10\rangle|0\rangle) + \alpha_4 |11\rangle|0\rangle. \quad (4.69)$$

L'état final (4.69) correspond à l'application de l'opération unitaire $e^{-i\frac{\delta}{2}} U(\delta, \mathbf{n})$ sur les états $|01\rangle|0\rangle, |10\rangle|0\rangle$ de l'état initial (4.66). Ce processus correspond à l'implémentation de la porte quantique SWAP^α en choisissant les lasers couplant le second qubit à l'étape (2) déphasés de

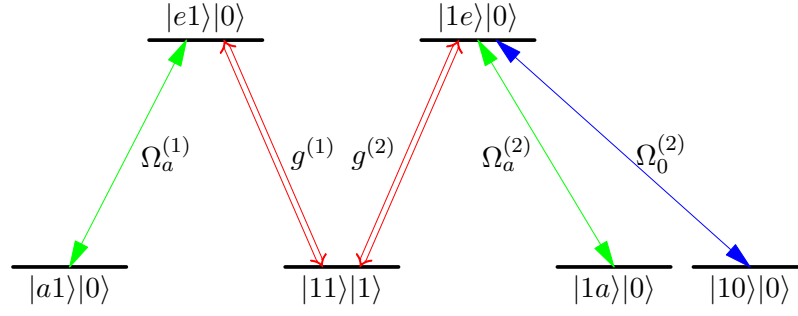


FIG. 4.15 – Schéma de couplage associé à l'état sombre (4.49b) utilisé pour l'implémentation de la porte quantique SWAP^α . Le mode de la cavité ici couple l'état $|1\rangle$ des qubits.

π et de pulsations de Rabi identiques, soit

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad (4.70a)$$

$$\phi = \pi. \quad (4.70b)$$

L'exposant α est relié au déphasage δ par un facteur π

$$\delta = \alpha\pi. \quad (4.71)$$

Connections aux états sombres

La dynamique du système s'effectue suivant les états sombres (4.4–4.6) pour les étapes (1) et (3), et suivant les états sombres (4.48–4.50) pour l'étape (2), suivant les connections

$$\begin{array}{l} |00\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(b)}\rangle} |00\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle} |00\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_{16}^{(b)}\rangle} |00\rangle|0\rangle, \\ |01\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} |1a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle} e^{-i\frac{\delta}{2}U}|1a\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(c)}\rangle} e^{-i\frac{\delta}{2}U}|01\rangle|0\rangle, \\ |10\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(b)}\rangle} |10\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle} e^{-i\frac{\delta}{2}U}|10\rangle|0\rangle \xrightarrow{|\Psi_7^{(b)}\rangle} e^{-i\frac{\delta}{2}U}|10\rangle|0\rangle, \end{array} \quad (4.72)$$

pour les états $|00\rangle|0\rangle, |01\rangle|0\rangle, |10\rangle|0\rangle$; l'état $|11\rangle|0\rangle$ est à tout instant un état stationnaire du système.

Résultats numériques et discussion

La simulation numérique du processus SWAP^α est représentée sur la figure 4.16 pour l'implémentation d'une porte

$$\sqrt{\text{SWAP}} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

correspondant à $\alpha = 1/2$. Les pulsations de Rabi utilisées sont choisies expérimentalement réalisables. Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur $T = 100$ ns et d'amplitude maximale $\Omega_{\text{max}}/2\pi = 14$ MHz. La pulsation de Rabi associée à la cavité est constante de valeur $g/2\pi = 34$ MHz. Les impulsions d'une même étape sont séparées d'un délai $0.6T$.

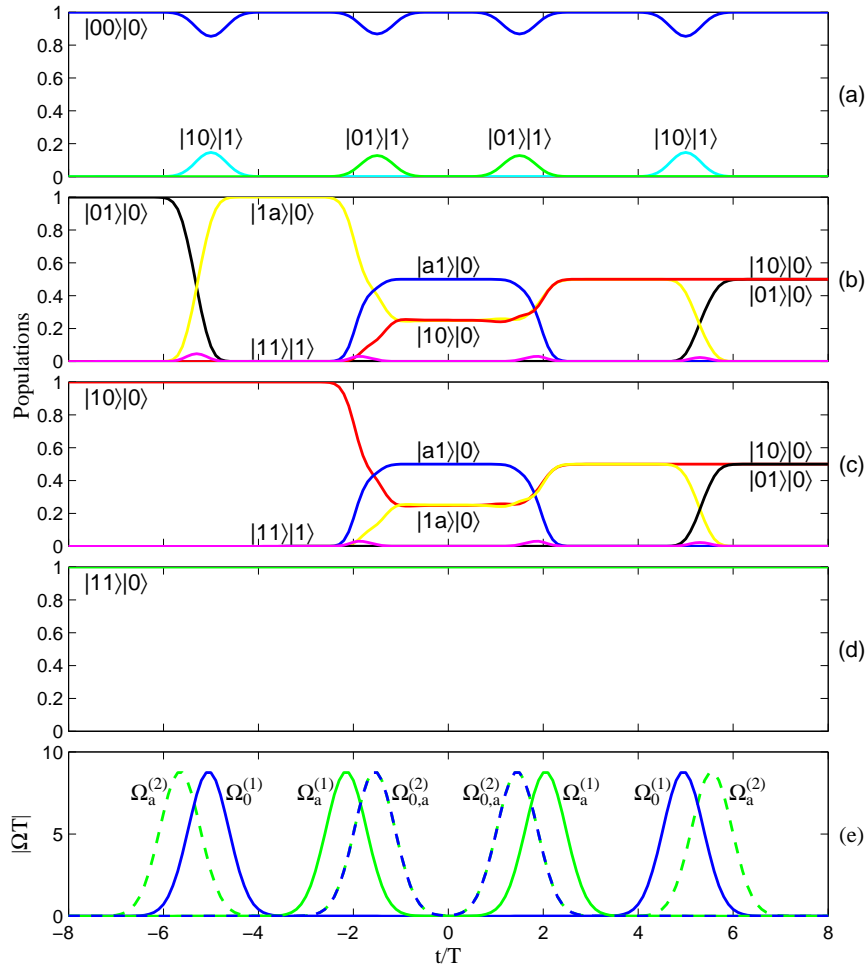


FIG. 4.16 – Simulation numérique du processus SWAP^α pour l'implémentation d'une porte $\sqrt{\text{SWAP}}$. L'évolution des populations est représentée pour un état initial $|00\rangle|0\rangle$ (a), $|01\rangle|0\rangle$ (b), $|10\rangle|0\rangle$ (c), et $|11\rangle|0\rangle$ (d), qui est un état stationnaire. Les phases des amplitudes de probabilité des évolutions (b) et (c) correspondent bien à $\pm\frac{\pi}{4}$ au temps final. Les pulsations de Rabi associées aux lasers sont de forme gaussienne de largeur à mi-hauteur T , séparées d'un délai $0.6T$ lors d'une même étape.

L'évolution du système, effectuée suivant des états sombres, est insensible aux pertes par émission spontanée des états excités des qubits. Les pertes dues à la cavité deviennent négligeables sous la condition $g \gg \Omega$.

4.5 Discussion : polarisation de la cavité et robustesse

4.5.1 Polarisation et robustesse

L'implémentation d'un circuit quantique nécessite l'utilisation successive de portes quantiques à un et deux qubits. Il est donc nécessaire que les systèmes physiques auxquels correspondent les qubits soient identiques pour les deux types d'opération, comme par exemple le système Zeeman que nous avons considéré.

Dans le cas du système Zeeman, les transitions sont sélectionnées par les polarisations circulaires droite et gauche définies dans le plan orthogonal à l'axe quantique, et par la

polarisation linéaire le long de l'axe quantique.

L'implémentation robuste des portes quantiques à un qubit nécessite que les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ correspondent aux états sélectionnés par les polarisations circulaires, et par conséquent l'état auxiliaire $|a\rangle$ à l'état sélectionné par la polarisation linéaire.

Le choix du couplage du qubit au mode de la cavité revient à choisir la polarisation de la cavité. Nous avons vu des processus utilisant deux choix différents :

- le couplage à l'état $|1\rangle$ pour les portes SWAP, CNOT et SWAP^α . La cavité est de polarisation circulaire gauche σ_- . Le laser de polarisation circulaire droite σ_+ doit donc se propager suivant l'axe de la cavité, ce qui nécessite un dispositif expérimental spécifique (miroirs percés, etc...), augmentant les pertes de la cavité. Une autre difficulté de ce système est la sélection individuelle des atomes par le laser de polarisation circulaire, si le registre est formé de qubits alignés le long de l'axe de la cavité ;
- le couplage à l'état auxiliaire $|a\rangle$ pour les portes CU et ASCU. La cavité est de polarisation linéaire, et les lasers de polarisations circulaires se propagent suivant une direction orthogonale à l'axe de la cavité.

Il est important, pour minimiser les pertes, que le facteur de qualité de la cavité soit le plus élevé possible. Le choix le plus robuste consiste donc à utiliser une cavité de polarisation linéaire, et privilégie l'utilisation des processus CU et ASCU. Cependant, deux solutions sont possibles pour appliquer les autres processus, *i.e.* SWAP, CNOT et SWAP^α , dans ce système. La première consiste à redéfinir les qubits, en permutant les étiquettes $|a\rangle$ et $|1\rangle$, mais les portes à un qubit nécessitant des lasers en rapport constant ne pourraient alors plus être appliquées de façon robuste. La seconde solution consiste à utiliser une étape préliminaire transférant par STIRAP la population des état $|1\rangle$ de chaque qubit sur leur état auxiliaire $|a\rangle$, et à effectuer l'opération inverse à la fin du processus.

4.5.2 Fidélité des processus

Les simulations numériques des différents processus décrits dans ce chapitre ont été effectuées en négligeant le taux de perte de la cavité. Cette approximation se justifie lorsque le couplage au mode de la cavité est plus important que le couplage aux champs laser, *i.e.* $g \gg \Omega$, auquel cas la cavité n'est pas peuplée de façon significative.

Les simulations numériques, effectuées pour des pulsations de Rabi expérimentalement réalisables, montrent cependant que certains états ayant un photon dans la cavité ont une population non nulle lors de la dynamique, et les pertes de la cavité ne peuvent donc plus être négligées. Il est alors nécessaire de déterminer la fidélité du processus, *i.e.* la probabilité d'atteindre l'état final recherché.

Nous considérons ici le calcul de la fidélité pour la porte ASCU, les conclusions pouvant se généraliser aux autres portes. Les calculs sont effectués dans le cas où l'état de contrôle de la porte ASCU et son état orthogonal sont respectivement

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (4.74a)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (4.74b)$$

On note respectivement $|\pm_{\text{id}}\rangle, |\pm_{\text{num}}\rangle$ les vecteurs correspondant à l'état final atteint dans le cas idéal non-dissipatif et dans la simulation numérique comportant un terme de perte, lorsque le qubit de contrôle est dans l'état $|\pm\rangle$ et le qubit cible dans l'état $|0\rangle$ ou $|1\rangle$.

Les états initiaux $| - 0 \rangle | 0 \rangle, | - 1 \rangle | 0 \rangle$ évoluent en conduisant à la même fidélité définie par

$$\mathcal{F}_- = |\langle -_{\text{id}} | -_{\text{num}} \rangle|^2; \quad (4.75)$$

les états initiaux $| + 0 \rangle | 0 \rangle, | + 1 \rangle | 0 \rangle$ évoluent en conduisant à la même fidélité définie par

$$\mathcal{F}_+ = |\langle +_{\text{id}} | +_{\text{num}} \rangle|^2. \quad (4.76)$$

Les fidélités \mathcal{F}_{\pm} sont représentées sur la figure 4.17 en fonction du taux de perte de la cavité κ et de la pulsation de Rabi de la cavité g , pour une pulsation de Rabi des lasers d'amplitude maximale $\Omega_{\text{max}}/2\pi = 14$ MHz. Les valeurs expérimentales de la référence [82], $g/2\pi = 34$ MHz et $\kappa/2\pi = 4.1$ MHz, indiquées par des croix sur la figure, conduisent aux fidélités $\mathcal{F}_- = 0.281$ et $\mathcal{F}_+ = 0.854$. Il est donc nécessaire d'utiliser des cavités de meilleure qualité pour pouvoir utiliser ces processus dans un calcul quantique.

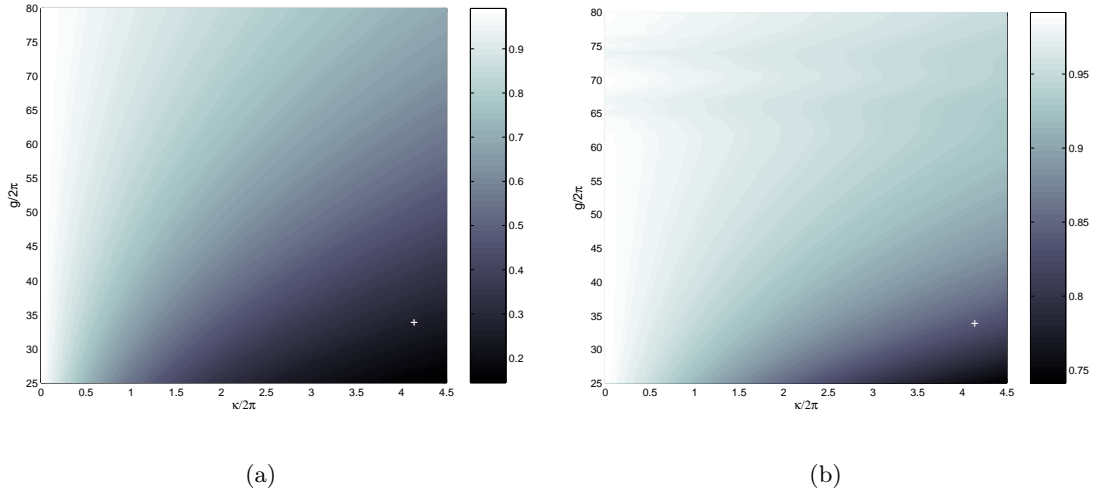


FIG. 4.17 – Fidélités de la porte ASCU en fonction du taux de perte de la cavité κ et de la pulsation de Rabi de la cavité g , pour une évolution (a) d'un état initial $| - 0 \rangle | 0 \rangle$ et (b) d'un état initial $| + 0 \rangle | 0 \rangle$. Les croix correspondent aux valeurs expérimentales $g/2\pi = 34$ MHz et $\kappa/2\pi = 4.1$ MHz. La pulsation de Rabi des lasers a une amplitude maximale $\Omega_{\text{max}}/2\pi = 14$ MHz.

– RÉSUMÉ DU CHAPITRE 4 –

OBJECTIF : Ce chapitre décrit des processus adiabatiques permettant l'implémentation de portes quantiques à deux qubits dans le même système que celui utilisé pour les portes quantiques à un qubit.

OUTILS : Passage adiabatique dans une cavité optique et suivi d'états sombres du système.

RÉSULTATS NOUVEAUX :

- ① Processus d'implémentation de la porte quantique CNOT.
- ② Processus d'implémentation de la porte quantique CU.
- ③ Processus d'implémentation directe de la porte quantique SWAP, *i.e.* sans la décomposer en portes élémentaires.
- ④ Processus d'implémentation directe de la porte ASCU, *i.e.* une porte CU avec un état de contrôle arbitrairement choisi.
- ⑤ Processus d'implémentation directe de la porte SWAP^α .

Annexe B

Circuit quantique de mesure projective

Lors d'un calcul quantique, les perturbations du système par l'environnement extérieur peuvent induire une modification involontaire de l'état $|\Psi\rangle$ du système et provoquer ainsi des erreurs sur le calcul effectué.

Des processus de correction d'erreurs ont été imaginés afin de détecter et de corriger au mieux ces perturbations. Certains d'entre eux utilisent le circuit de mesure projective, représenté sur la figure B.1. Ce circuit quantique utilise deux qubits : le qubit cible, initiale-

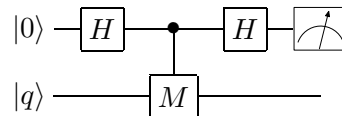


FIG. B.1 – *Circuit quantique réalisant une mesure projective. Les portes H correspondent à des portes HADAMARD, M à un opérateur unitaire de valeurs propres ± 1 .*

ment dans l'état $|q\rangle$ et un qubit auxiliaire initialement dans l'état $|0\rangle$. Le circuit quantique de mesure projective est composé de trois portes quantiques :

1. une porte HADAMARD, qui transforme l'état initial $|0\rangle|q\rangle$ en l'état intermédiaire

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|q\rangle; \quad (\text{B.1})$$

2. une porte contrôle-unitaire, dont l'opérateur unitaire M a pour valeurs propres ± 1 et pour vecteurs propres associés $|\pm\rangle$:

$$M = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|. \quad (\text{B.2})$$

L'état $|\psi_1\rangle$ devient alors

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|q\rangle + |1\rangle M|q\rangle); \quad (\text{B.3})$$

3. une porte HADAMARD, qui conduit à l'état final

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= \frac{1}{2}((|0\rangle + |1\rangle)|q\rangle + (|0\rangle - |1\rangle)M|q\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle(\mathbb{1} + M)|q\rangle + |1\rangle(\mathbb{1} - M)|q\rangle) \\ &= \langle +|q\rangle|0\rangle|+\rangle + \langle -|q\rangle|1\rangle|-\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

L'état (B.4) montre qu'une mesure effectuée sur le qubit auxiliaire projette le qubit cible dans l'état $|\pm\rangle$ avec la probabilité $|\langle\pm|q\rangle|^2$. Le point important est que le résultat de la mesure indique dans quel état à été projeté le qubit cible : l'état $|+\rangle$ si la mesure indique 0, et l'état $|-\rangle$ si la mesure indique 1.

Le circuit de mesure projective permet ainsi de vérifier l'état du qubit cible, et de déterminer si des corrections sont à apporter.

Chapitre 5

Dynamique des systèmes quantiques ouverts

LES CHAPITRES précédents ont été consacrés à l'étude de systèmes quantiques *fermés*, *i.e.* l'influence de l'environnement extérieur sur ces systèmes n'a pas été prise en compte. Cela s'est justifié en ne peuplant que des états métastables, *i.e.* des états de longue durée de vie, et en effectuant un suivi adiabatique le long d'états sombres qui permettent de s'affranchir de l'émission spontanée des états excités des atomes.

Toutefois, le suivi adiabatique peut requérir un temps relativement long pour s'effectuer, et permettre ainsi à des effets décohérents de perturber les processus. Il se peut de plus que des effets décohérents se produisent, comme ceux dus aux collisions, suite à une isolation imparfaite du système. L'étude de l'influence de l'environnement sur le passage adiabatique est donc une étape importante. Elle doit permettre de fixer, par exemple, la durée limite d'un processus pour qu'il puisse aboutir, et donc le nombre d'opérations quantiques qui peuvent être effectuée consécutivement avant d'utiliser des processus de correction d'erreurs.

L'étude des systèmes *ouverts* permet la prise en compte des différents effets néfastes dus à l'environnement. Les effets décohérents sont décrits par une approche statistique, ce qui requiert le formalisme de l'*opérateur densité*. Ce formalisme sera décrit dans les deux premières sections. La première section sera consacrée à la définition de l'opérateur densité ; la seconde section détaillera le formalisme des *opérations quantiques* [85], permettant de décrire les effets de l'environnement sur l'opérateur densité. Une troisième section établira l'*équation pilote de Lindblad* [86], qui décrit la dynamique des systèmes quantiques ouverts.

Le formalisme établi dans ce chapitre sera appliqué dans le chapitre suivant à la détermination de la probabilité de transition d'un système à deux niveaux soumis à la décohérence par déphasage.

5.1 Opérateur densité

5.1.1 Définition

Les effets décohérents intervenant dans les systèmes quantiques ouverts engendrent une perte d'information sur la description du système. Son état ne peut plus être décrit par un état pur $|\Psi\rangle$ unique, mais par un ensemble d'états purs $|\Psi_i\rangle$ pondérés par des probabilités

p_i . L'étude du système se fait alors par l'intermédiaire de l'opérateur densité

$$\rho = \sum p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|. \quad (5.1)$$

Les composantes de l'opérateur densité (5.1), aussi appelé *matrice densité*, s'interprètent de la façon suivante :

- la valeur moyenne $\langle\psi|\rho|\psi\rangle$ représente la probabilité du système d'être dans l'état $|\psi\rangle$, et sera appelée *population* de l'état $|\psi\rangle$;
- les termes croisés $\langle\psi|\rho|\psi'\rangle$ sont appelés *cohérences* du système. Ils donnent une information sur la nature de l'état du système, à savoir s'il correspond à un mélange statistique complètement incohérent des états $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$, auquel cas le terme de cohérence est nul, ou bien s'il peut en partie être décrit par une superposition cohérente, dans le cas contraire.

L'opérateur densité permet aussi la description des systèmes fermés. Dans ce cas particulier, l'opérateur densité du système évolue suivant l'équation de Von Neumann

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho], \quad (5.2)$$

avec H l'Hamiltonien du système, et conduit à la solution au temps t

$$\rho(t) = U(t, t_i)\rho(t_i)U^\dagger(t, t_i), \quad (5.3)$$

où $U(t, t_i)$ est l'opérateur d'évolution du système défini par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{dU}{dt} = H U. \quad (5.4)$$

5.1.2 Propriétés

L'opérateur densité est un opérateur hermitien, et ses valeurs propres, qui correspondent à des probabilités, sont comprises entre 0 et 1. Il possède les propriétés suivantes :

$$\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle, \quad (5.5a)$$

$$\text{Tr}(\rho) = 1, \quad (5.5b)$$

$$\rho^\dagger = \rho. \quad (5.5c)$$

La propriété (5.5a) est la propriété de positivité de l'opérateur. Elle vient du fait que la valeur moyenne de l'opérateur densité dans un état quelconque représente une population. La propriété (5.5b) correspond à une somme des probabilités traduisant la conservation de la population du système. L'opérateur densité associé à un état pur possède en plus la propriété d'idempotence

$$\rho^2 = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (5.6)$$

L'opérateur densité permet aussi d'obtenir la valeur moyenne d'une observable \hat{O} du système

$$\begin{aligned} \langle\hat{O}\rangle &= \sum p_i \langle\psi_i|\hat{O}|\psi_i\rangle \\ &= \text{Tr}(\rho\hat{O}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dans le cas particulier d'un système à deux niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$, l'opérateur densité

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

peut s'écrire comme un développement sur les matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{\rho} \cdot \vec{\sigma}), \quad (5.10)$$

où le vecteur $\vec{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$ représente l'opérateur densité sur la sphère de Bloch. Ce vecteur est de norme unité si l'opérateur représente un état pur, et de norme inférieure à un dans le cas d'un mélange statistique. Le centre de la sphère de Bloch, correspondant au vecteur nul, indique une perte totale d'information sur le système, *i.e.* une équiprobabilité d'être dans chacun des états. Les composantes du vecteur $\vec{\rho}$ s'obtiennent en utilisant le produit scalaire de l'espace des matrices 2×2 , soit

$$\rho_i = \text{Tr}(\rho \sigma_i), \quad (5.11)$$

d'où

$$\rho_x = \rho_{10} + \rho_{01}, \quad (5.12a)$$

$$\rho_y = i(\rho_{10} - \rho_{01}), \quad (5.12b)$$

$$\rho_z = \rho_{11} - \rho_{00}. \quad (5.12c)$$

Les composantes ρ_x et ρ_y correspondent respectivement aux parties réelle et imaginaire des cohérences, et ρ_z à l'inversion de population du système.

5.2 Opérations quantiques et représentation de Kraus

5.2.1 Définition

Une *opération quantique* \mathcal{E} est une application qui transforme un opérateur densité ρ en un autre opérateur densité

$$\rho' = \mathcal{E}(\rho). \quad (5.13)$$

Par exemple, l'évolution temporelle de l'opérateur densité d'un système fermé, donnée par l'équation (5.3), définit l'opération quantique

$$\mathcal{E}(\rho) = U \rho U^\dagger. \quad (5.14)$$

Une opération quantique doit obéir aux trois axiomes suivants :

1. conservation de la trace,

$$\text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) = 1 \quad \text{si} \quad \text{Tr}(\rho) = 1; \quad (5.15)$$

2. linéarité,

$$\mathcal{E}\left(\sum p_i \rho_i\right) = \sum p_i \mathcal{E}(\rho_i); \quad (5.16)$$

3. positivité *complète*. Cela signifie que si l'on étend le système à un environnement quelconque E , et que l'on considère l'opérateur densité ρ du système global, alors l'opérateur densité $\rho' = (1_E \otimes \mathcal{E})(\rho)$ est un opérateur positif. Cette troisième propriété, de nature plus technique, est nécessaire pour la mise en place d'une structure mathématique complète. Elle assure en particulier l'invariance de la dynamique du système lorsqu'on lui adjoint un environnement avec lequel il n'interagit pas.

Ces trois axiomes permettent l'écriture de l'opération quantique \mathcal{E} sous la forme

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger, \quad (5.17)$$

où les opérateurs E_i , nommés *opérateurs de Kraus*, vérifient la condition de normalisation

$$\sum_i E_i^\dagger E_i = \mathbb{1}. \quad (5.18)$$

L'écriture (5.17) est appelée *représentation de Kraus* de l'opération quantique [85]. La démonstration de cette relation est indiquée en Annexe C.

La décomposition (5.17) de l'opération quantique n'est cependant pas unique, ce qui peut être montré par l'exemple suivant [5]. On considère deux opérations quantiques \mathcal{E} et \mathcal{F} de représentations de Kraus respectives

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum E_i \rho E_i^\dagger, \quad (5.19a)$$

$$\mathcal{F}(\rho) = \sum F_i \rho F_i^\dagger, \quad (5.19b)$$

avec les opérateurs de Kraus

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z, \quad (5.20a)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z), \quad F_2 = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_z). \quad (5.20b)$$

Le calcul montre alors que les deux représentations de Kraus \mathcal{E} et \mathcal{F} correspondent à la même opération quantique,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\rho) &= \frac{1}{4} ((\sigma_x + \sigma_z)\rho(\sigma_x + \sigma_z) + (\sigma_x - \sigma_z)\rho(\sigma_x - \sigma_z)) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \rho \sigma_x + \sigma_z \rho \sigma_z) \\ &= \mathcal{E}(\rho). \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2.2 Exemples : canaux quantiques

On considère dans cette section les différents types de modifications que peut subir un qubit lors de sa transmission de A vers B . Le qubit est transmis à travers un canal couplé à l'environnement, et sera donc soumis à un bruit lors de la traversée du canal. Ce bruit peut être classé en quatre catégories différentes suivant les effets provoqués sur le qubit. Nous allons considérer quatre canaux différents, chacun introduisant un type de bruit particulier. Les opérations correspondantes sont appelées *canaux quantiques*.

Le canal dépolarisant

Un qubit qui traverse un canal dépolarisant ressort avec la probabilité p d'avoir subi une perte totale d'information, son état correspondant alors au centre de la sphère de Bloch, et avec la probabilité $(1 - p)$ dans son état initial. L'opération quantique associée s'écrit¹

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\rho) &= (1 - p)\rho + \frac{p}{2}\mathbb{1} \\ &= (1 - p')\rho + \frac{p'}{3}(\sigma_x\rho\sigma_x + \sigma_y\rho\sigma_y + \sigma_z\rho\sigma_z),\end{aligned}\quad (5.22)$$

avec $p' = 3p/4$. Le canal dépolarisant a pour effet de réduire le rayon de la sphère de Bloch, tout en préservant sa forme sphérique (Figure 5.1). Les opérateurs de Kraus associés peuvent s'écrire

$$E_0 = \sqrt{1 - p'}\mathbb{1}, \quad E_1 = \sqrt{\frac{p'}{3}}\sigma_x, \quad E_2 = \sqrt{\frac{p'}{3}}\sigma_y, \quad E_3 = \sqrt{\frac{p'}{3}}\sigma_z. \quad (5.23)$$

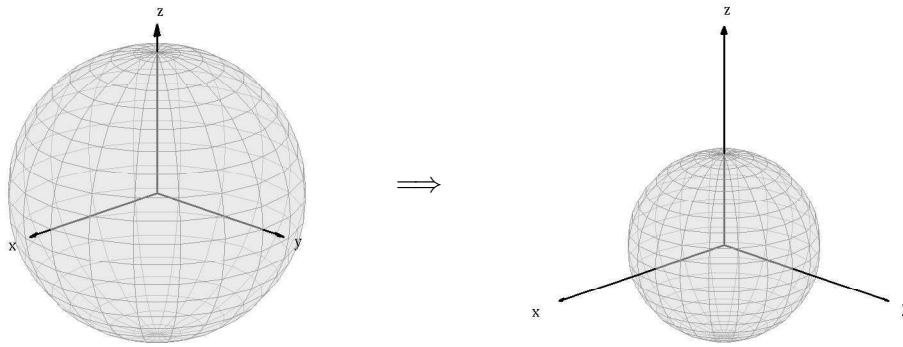


FIG. 5.1 – Effet du canal dépolarisant sur la sphère de Bloch pour une probabilité $p = 0.5$.

Le canal de basculement du bit

Un qubit qui traverse un canal de basculement du bit ressort avec la probabilité p d'avoir subi une permutation des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, et avec la probabilité $(1 - p)$ dans son état initial. L'opération quantique associée s'écrit

$$\mathcal{E}(\rho) = (1 - p)\rho + p\sigma_x\rho\sigma_x. \quad (5.24)$$

Le canal de basculement du bit laisse inchangé l'axe x de la sphère de Bloch, et comprime les axes y et z par un facteur $1 - 2p$ (Figure 5.2). Les opérateurs de Kraus associés peuvent s'écrire

$$E_0 = \sqrt{1 - p}\mathbb{1}, \quad E_1 = \sqrt{p}\sigma_x. \quad (5.25)$$

1. Le passage à la seconde ligne de l'équation (5.22) s'obtient en utilisant l'identité

$$\mathbb{1} = \frac{1}{2}(\rho + \sigma_x\rho\sigma_x + \sigma_y\rho\sigma_y + \sigma_z\rho\sigma_z),$$

valable pour tout opérateur densité ρ du qubit.

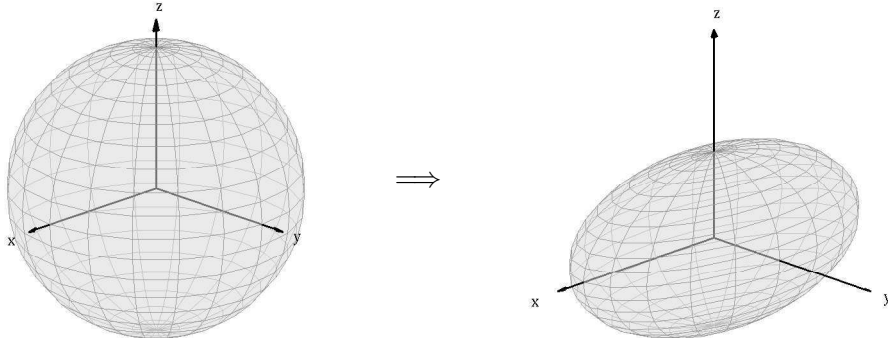


FIG. 5.2 – Effet du canal de basculement du bit sur la sphère de Bloch pour une probabilité $p = 0.25$.

Le canal de basculement de phase

Un qubit qui traverse un canal de basculement de phase ressort avec la probabilité p d'avoir une phase relative changée de π , et avec la probabilité $(1 - p)$ dans son état initial. L'opération quantique associée s'écrit

$$\mathcal{E}(\rho) = (1 - p)\rho + p\sigma_z\rho\sigma_z. \quad (5.26)$$

Le canal de basculement de phase laisse inchangé l'axe z de la sphère de Bloch, et comprime les axes x et y par un facteur $1 - 2p$ (Figure 5.3). Les opérateurs de Kraus associés peuvent s'écrire

$$E_0 = \sqrt{1 - p}\mathbb{1}, \quad E_1 = \sqrt{p}\sigma_z. \quad (5.27)$$

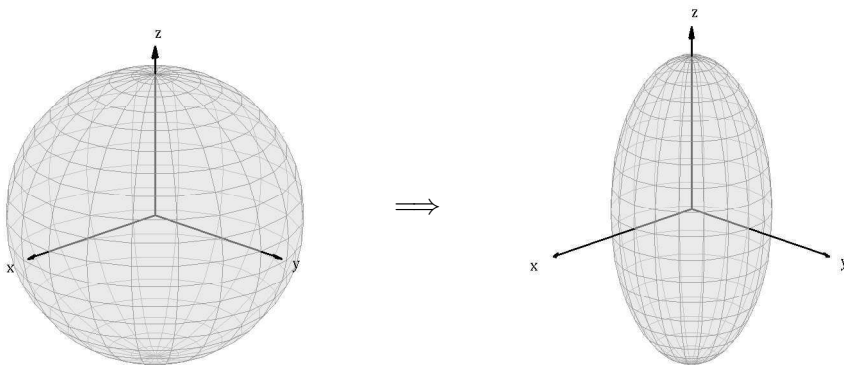


FIG. 5.3 – Effet du canal de basculement de phase sur la sphère de Bloch pour une probabilité $p = 0.25$.

Le canal de perte d'amplitude

Un qubit qui traverse un canal de perte d'amplitude ressort avec la probabilité p d'avoir perdu la composante de l'état $|1\rangle$, et avec la probabilité $(1 - p)$ dans son état initial. Si les états du qubit correspondent aux états stable et excité d'un atome, alors ce canal traduit la

transition spontanée de l'état excité vers l'état stable, pouvant être accompagnée de l'émission d'un photon vers l'environnement. Les opérateurs de Kraus associés à ce canal peuvent s'écrire

$$E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{bmatrix}, \quad E_1 = \sqrt{p} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

L'opérateur E_1 traduit la perte de l'état $|1\rangle$; l'opérateur E_0 permet de satisfaire la relation (5.18).

Le canal de perte d'amplitude comprime la sphère de Bloch en direction du pôle Nord, correspondant à l'état $|0\rangle$, en un ellipsoïde de révolution de hauteur $1-p$ et de rayon $\sqrt{1-p}$ dans le plan xy (Figure 5.4).

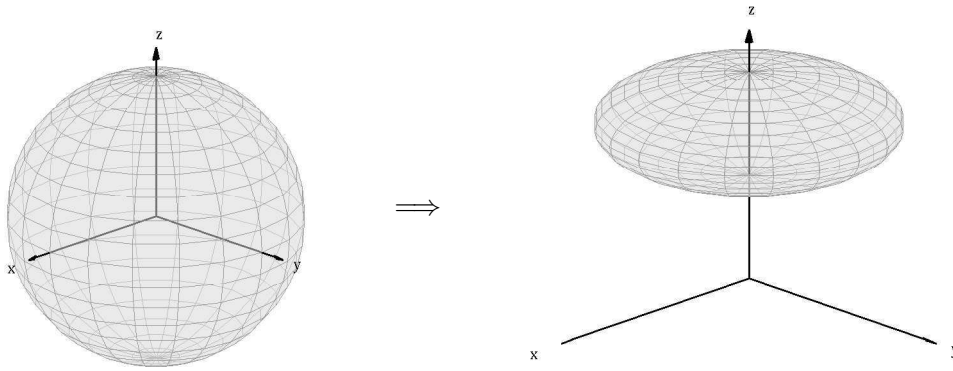


FIG. 5.4 – Effet du canal de perte d'amplitude sur la sphère de Bloch pour une probabilité $p = 0.5$.

5.3 Équation pilote de Lindblad

Le formalisme des opérations quantiques permet d'appliquer divers effets décohérents au système et d'obtenir l'opérateur densité qui en résulte, mais ne décrit pas la dynamique du système. La description de la dynamique du système s'effectue à l'aide d'une *équation pilote*, *i.e.* une équation reliant l'opérateur densité à son taux de variation, sans dépendances aux instants antérieurs. Nous établirons dans cette section l'*équation pilote de Lindblad* [86] en considérant une évolution infinitésimale de l'opérateur densité d'un système couplé à l'environnement dans la limite de Markov [87].

5.3.1 Définition

Définissons en premier lieu les trois échelles de temps intervenant dans le problème. On appelle τ_s le temps caractéristique d'évolution du système, qui correspond par exemple au temps mis à traverser un canal quantique; τ_e le temps caractéristique durant lequel l'environnement évolue et « oublie » toute information sur les instants antérieurs; τ_r le temps de relaxation du système suite à son interaction avec l'environnement.

On considère à présent l'évolution du système pendant une durée δt petite par rapport au temps caractéristique d'évolution du système, *i.e.* $\delta t \ll \tau_s$, pendant laquelle le système évoluera très peu. Cette durée doit cependant être plus grande que le *temps de mémoire*

de l'environnement, *i.e.* $\delta t \gg \tau_e$, afin de supprimer toute corrélation entre le système et l'environnement après cette courte évolution (condition de Markov).

Ainsi, l'opérateur densité du système à un instant $t + \delta t$ tel que

$$\tau_e \ll \delta t \ll \tau_s \quad (5.29)$$

peut s'exprimer comme une opération quantique

$$\begin{aligned} \rho(t + \delta t) &= \mathcal{E}(\rho(t)) \\ &= \sum E_i \rho(t) E_i^\dagger \end{aligned} \quad (5.30)$$

ne prenant en compte que les opérateurs au temps présent. L'équation pilote s'obtient alors en considérant un développement au premier ordre

$$\rho(t + \delta t) = \rho(t) + \mathcal{O}(\delta t), \quad (5.31)$$

ce qui n'est possible que si l'un des opérateurs de Kraus de l'équation (5.30), par exemple E_0 , s'écrit sous la forme

$$E_0 = \mathbb{1} + A\delta t, \quad (5.32)$$

les autres opérateurs de Kraus étant de la forme

$$E_i = \sqrt{\delta t} L_i, \quad i \geq 1. \quad (5.33)$$

L'opérateur A peut s'écrire comme la somme d'un opérateur hermitien K et d'un opérateur anti-hermitien $-\frac{i}{\hbar}H$. La condition de normalisation des opérateurs de Kraus (5.18) s'écrit alors

$$\sum E_i^\dagger E_i = \mathbb{1} + (2K + \sum L_i^\dagger L_i) \delta t \quad (5.34)$$

et requiert que le terme facteur de δt soit identiquement nul, d'où

$$K = -\frac{1}{2} \sum L_i^\dagger L_i. \quad (5.35)$$

L'équation (5.30) s'écrit alors sous la forme

$$\rho(t + \delta t) = \rho(t) + \left(-\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \frac{1}{2} \sum \left([L_i, \rho(t) L_i^\dagger] + [L_i \rho(t), L_i^\dagger] \right) \right) \delta t, \quad (5.36)$$

qui conduit à l'équation pilote – dans la limite où δt est suffisamment petit – appelée *équation de Lindblad*

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}(\rho), \quad (5.37)$$

avec le générateur infinitésimal de l'opération quantique de Lindblad, appelé *Lindbladien*

$$\mathcal{L}(\rho) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum \left([L_i, \rho L_i^\dagger] + [L_i \rho, L_i^\dagger] \right). \quad (5.38)$$

Les opérateurs L_i sont appelés *opérateurs de Lindblad*. Le cas d'un système fermé, où les différents opérateurs L_i sont nuls, permet d'identifier l'opérateur H de l'équation de Lindblad à l'Hamiltonien du système fermé. Cette définition n'est cependant pas unique, l'équation de Lindblad étant invariante par les transformations

$$L_i \rightarrow L_i + c_i \mathbb{1} \quad (5.39a)$$

$$H \rightarrow H + \frac{1}{2i} \sum (c_i^* L_i - c_i L_i^\dagger) + c \mathbb{1}, \quad (5.39b)$$

où c, c_i sont des scalaires.

5.3.2 Exemple : évolution libre

Considérons un système à deux niveaux comportant un état stable $|0\rangle$ et un état excité $|1\rangle$, dont l'Hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z. \quad (5.40)$$

Nous allons dans cette section appliquer l'équation de Lindblad afin de décrire la dynamique de ce système, lorsqu'il évolue librement en subissant des effets décohérents, tels que l'émission spontanée. L'opérateur de Lindblad associé à l'émission spontanée s'écrit sous la forme

$$\hat{\Gamma}_s = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

où γ correspond au taux d'émission spontanée de l'état excité. Introduisons un second terme de décohérence pouvant agir sur le système : le *déphasage*, qui détruit la phase relative des deux états du système. L'opérateur de Lindblad associé s'écrit sous la forme

$$\hat{\Gamma}_d = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

où Γ correspond au taux de déphasage. Introduisons un dernier terme correspondant à une excitation du système due, par exemple, à des collisions. L'opérateur de Lindblad associé s'écrit sous la forme

$$\hat{\Gamma}_c = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

où κ correspond au taux de pompage dû, par exemple, aux collisions. L'équation de Lindblad combinant ces trois effets s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} \\ \rho_{01} & \rho_{00} \end{bmatrix} = i\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & -\rho_{10} \\ \rho_{01} & 0 \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \rho_{11} & \frac{\rho_{10}}{2} \\ \frac{\rho_{01}}{2} & -\rho_{11} \end{bmatrix} - \Gamma \begin{bmatrix} 0 & \rho_{10} \\ \rho_{01} & 0 \end{bmatrix} - \frac{\kappa}{2} \begin{bmatrix} -\rho_{00} & \frac{\rho_{10}}{2} \\ \frac{\rho_{01}}{2} & \rho_{00} \end{bmatrix}. \quad (5.44)$$

La solution de l'équation (5.44) peut s'écrire explicitement sous la forme

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \rho_{11}^{\text{eq}} + (\rho_{11}^0 - \rho_{11}^{\text{eq}}) e^{-\frac{\gamma+\kappa}{2}t} & \rho_{10}^0 e^{-i\omega_0 t} e^{-(\frac{\gamma+\kappa}{4} + \Gamma)t} \\ \rho_{01}^0 e^{i\omega_0 t} e^{-(\frac{\gamma+\kappa}{4} + \Gamma)t} & \rho_{00}^{\text{eq}} + (\rho_{00}^0 - \rho_{00}^{\text{eq}}) e^{-\frac{\gamma+\kappa}{2}t} \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

avec ρ_{ij}^0 les composantes de l'opérateur densité à l'instant initial $t = 0$, et les populations à l'équilibre

$$\rho_{00}^{\text{eq}} = \frac{\gamma}{\kappa + \gamma} \quad (5.46a)$$

$$\rho_{11}^{\text{eq}} = \frac{\kappa}{\kappa + \gamma}. \quad (5.46b)$$

La solution (5.45) montre que le terme de déphasage ne modifie pas la population du système, mais détruit le terme de cohérence.

Le terme d'émission spontanée détruit la cohérence du système et la population de l'état excité. On remarque toutefois qu'il détruit la cohérence à un taux deux fois plus petit que

le taux de perte de la population de l'état excité. Cette différence s'observe sur la figure 5.4, où la sphère de Bloch est réduite de façon plus forte suivant l'axe z .

Le terme de pompage agit en apparence de la même façon que l'émission spontanée, en détruisant les cohérences et les populations. Il permet cependant le peuplement de l'état excité: quand le temps tend vers l'infini, les populations du système sont définies par le rapport du taux de pompage et du taux d'émission spontanée. Dans le cas d'un équilibre thermique, ce rapport devient

$$\frac{\rho_{11}^{\text{eq}}}{\rho_{00}^{\text{eq}}} = \frac{\kappa}{\gamma} = e^{\frac{-\hbar\omega_0}{k_B T}}, \quad (5.47)$$

avec k_B la constante de Boltzmann.

– RÉSUMÉ DU CHAPITRE 5 –

OBJECTIF : Ce chapitre décrit le formalisme utilisé pour le traitement des systèmes quantiques dissipatifs.

ÉQUATION PILOTE : L'opérateur densité du système couplé à un environnement évolue dans la limite de Markov suivant l'équation pilote de Lindblad

$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum \left([L_i, \rho L_i^\dagger] + [L_i \rho, L_i^\dagger] \right), \quad (5.48)$$

où les opérateurs L_i décrivent les effets dissipatifs.

Annexe C

Représentation de Kraus

Nous démontrons ici qu'une opération quantique peut s'écrire sous la forme de la représentation de Kraus

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum E_i \rho E_i^\dagger, \quad (\text{C.1})$$

avec la condition

$$\sum E_i^\dagger E_i = \mathbb{1}. \quad (\text{C.2})$$

Cette démonstration reprend celle de la référence [5].

Commençons par démontrer qu'une opération quantique définie sous la forme d'une représentation de Kraus vérifie trois les axiomes des opération quantiques.

On suppose l'égalité (C.1). L'opération quantique satisfait alors de toute évidence les axiomes de trace et de linéarité. Il reste à démontrer la positivité complète de l'opération quantique. On note \mathcal{S} le système correspondant à l'opérateur densité ρ , et E un environnement extérieur. Soit ρ un opérateur densité du système \mathcal{S} , et $|\psi\rangle$ un état du système global $\mathcal{S} + E$. On définit à partir de l'état $|\psi\rangle$ et des opérateurs de Kraus E_i l'état

$$|\phi_i\rangle = (\mathbb{1}_E \otimes E_i^\dagger)|\psi\rangle. \quad (\text{C.3})$$

On a alors la relation pour tout i

$$\langle\psi|(\mathbb{1}_E \otimes E_i)\rho(\mathbb{1}_E \otimes E_i^\dagger)|\psi\rangle = \langle\phi_i|\rho|\phi_i\rangle \geq 0 \quad (\text{C.4})$$

du fait de la positivité de l'opérateur densité. La somme des différent termes implique la relation

$$\langle\psi|(\mathbb{1}_E \otimes \mathcal{E})(\rho)|\psi\rangle = \sum \langle\phi_i|\rho|\phi_i\rangle \geq 0. \quad (\text{C.5})$$

L'inégalité (C.5) est valable pour tout opérateur densité, ce qui démontre la positivité complète de l'opération quantique.

Réciproquement, montrons que toute opération quantique vérifiant les trois axiomes des opérations quantiques peut s'écrire sous la forme d'une représentation de Kraus. On suppose l'environnement E de même dimension que le système \mathcal{S} . On considère les bases orthonormées $\{|i_S\rangle\}, \{|i_E\rangle\}$ associées respectivement au système et à son environnement. Soit $|\alpha\rangle$ un état d'intrication maximale du système global défini par la relation

$$|\alpha\rangle = \sum |i_S\rangle|i_E\rangle, \quad (\text{C.6})$$

et σ un opérateur de ce même système

$$\sigma = (\mathbb{1}_E \otimes \mathcal{E})(|\alpha\rangle\langle\alpha|). \quad (\text{C.7})$$

Cet opérateur σ , construit à partir d'un état d'intrication maximale, permet une description complète de l'opération quantique \mathcal{E} . On considère un état pur du système \mathcal{S}

$$|\psi\rangle = \sum c_j |j_{\mathcal{S}}\rangle, \quad (\text{C.8})$$

où $\{|j_{\mathcal{S}}\rangle\}$ est une base de l'espace de Hilbert du système, et un état correspondant dans l'environnement E

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum c_i^* |j_E\rangle, \quad (\text{C.9})$$

où $\{|j_E\rangle\}$ est une base de l'espace de Hilbert de l'environnement. L'opérateur σ vérifie alors la relation

$$\begin{aligned} \langle\tilde{\psi}|\sigma|\tilde{\psi}\rangle &= \langle\tilde{\psi}|(\mathbb{1}_E \otimes \mathcal{E})(|\alpha\rangle\langle\alpha|)|\tilde{\psi}\rangle \\ &= \langle\tilde{\psi}|\left(\sum_{i,j} |i_E\rangle\langle j_E| \otimes \mathcal{E}(|i_{\mathcal{S}}\rangle\langle j_{\mathcal{S}}|)\right)|\tilde{\psi}\rangle \\ &= \sum_{i,j} c_i c_j^* \mathcal{E}(|i_{\mathcal{S}}\rangle\langle j_{\mathcal{S}}|) \\ &= \mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

On définit les vecteurs $|s_i\rangle$ diagonalisant l'opérateur σ :

$$\sigma = \sum |s_i\rangle\langle s_i|, \quad (\text{C.11})$$

et enfin les opérateurs de Kraus E_i tels que

$$E_i |\psi\rangle = \langle\tilde{\psi}|s_i\rangle, \quad (\text{C.12})$$

où la notation $\langle\cdot|\cdot\rangle$ correspond à un produit scalaire effectué dans l'espace de Hilbert de l'environnement. Les opérateurs de Kraus E_i sont ainsi définis dans l'espace de Hilbert du système. On a alors la relation pour tout état pur ψ et pour tout i

$$\begin{aligned} \sum E_i |\psi\rangle\langle\psi| E_i^\dagger &= \sum \langle\tilde{\psi}|s_i\rangle\langle s_i|\tilde{\psi}\rangle \\ &= \langle\tilde{\psi}|\sigma|\tilde{\psi}\rangle \\ &= \mathcal{E}(|\psi\rangle\langle\psi|). \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

La relation (C.13) est valable pour tout état pur du système \mathcal{S} . On en déduit par linéarité l'écriture de l'opération quantique \mathcal{E} en représentation de Kraus :

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum E_i \rho E_i^\dagger, \quad (\text{C.14})$$

avec la relation

$$\sum E_i^\dagger E_i = \mathbb{1}. \quad (\text{C.15})$$

□

Annexe D

Équation de Lindblad et Hamiltonien effectif

Il est souvent commode de décrire un système complexe par un Hamiltonien effectif ne tenant compte que des effets dominants de la dynamique. La dynamique du système donnée par l'équation de Schrödinger associée à l'Hamiltonien effectif est alors beaucoup plus simple à analyser.

Les effets de la dissipation sur le système peuvent parfois s'exprimer par un Hamiltonien effectif. Le taux de perte de population d'un état du système est ainsi fréquemment traité comme une partie imaginaire de l'énergie associée à cet état, *i.e.* $E \rightarrow E - i\gamma$ [88]. L'Hamiltonien effectif est alors un opérateur non-hermitien

$$H_{\text{eff}}^\dagger \neq H_{\text{eff}}, \quad (\text{D.1})$$

et la résolution de l'équation de Schrödinger associée

$$i\hbar \frac{dU_{\text{eff}}}{dt} = H_{\text{eff}} U_{\text{eff}} \quad (\text{D.2})$$

conduit à un opérateur d'évolution U_{eff} non-unitaire, traduisant la perte de population du système. L'opérateur densité de ce système évolue alors suivant l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{d|\Psi\rangle\langle\Psi|}{dt} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left(H_{\text{eff}} \rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger \right). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

L'Hamiltonien effectif H_{eff} peut se déduire de l'équation pilote de Lindblad. En effet, l'équation pilote de Lindblad peut s'écrire en faisant apparaître un anti-commutateur $\{.,.\}$ défini par

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (\text{D.4})$$

sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] - \frac{1}{2} \sum_i \{L_i^\dagger L_i, \rho\} + \sum_i L_i \rho L_i^\dagger \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left(H_{\text{eff}} \rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger \right) + \sum_i L_i \rho L_i^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

avec l'Hamiltonien effectif

$$H_{\text{eff}} = H - \frac{i\hbar}{2} \sum_i L_i^\dagger L_i. \quad (\text{D.6})$$

Par exemple, l'opérateur de Lindblad correspondant aux pertes κ d'une cavité optique s'écrit

$$L_{\text{cav}} = \sqrt{\kappa} \hat{a}, \quad (\text{D.7})$$

où \hat{a} est l'opérateur d'annihilation du mode de la cavité considéré. Cet opérateur de Lindblad conduit à l'Hamiltonien effectif

$$H_{\text{eff}} = H - i\kappa \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (\text{D.8})$$

C'est cet Hamiltonien effectif qui a été utilisé à la section 4.5.2 pour le calcul de la fidélité des processus à deux qubits.

La conservation de population dans le système est prise en compte par le terme

$$\sum_i L_i \rho L_i^\dagger \quad (\text{D.9})$$

de l'équation pilote de Lindblad (D.5). Ce terme ne peut pas être introduit dans l'Hamiltonien effectif à cause de sa structure différente des autres termes. Il décrit le retour de la population perdue dans un état moins excité, comme par exemple dans le cas de la cavité optique le peuplement de l'état $|11\rangle|0\rangle$ suite à la perte du photon de l'état $|11\rangle|1\rangle$.¹

Dans certaines situations, la dynamique d'une partie des états du système peut être décrite à partir de l'Hamiltonien effectif uniquement, quand l'effet du terme (D.9) n'agit pas sur cette partie du système. Illustrons ceci par un exemple simple avec deux effets décohérents.

On considère un système à deux niveaux soumis à la décohérence par déphasage, et dont l'état excité $|1\rangle$ émet spontanément vers l'état stable $|0\rangle$. Les opérateurs de Lindblad associés à l'émission spontanée de l'état excité et au déphasage s'écrivent respectivement

$$\hat{\Gamma}_s = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Gamma}_d = \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.10})$$

L'anti-commutateur de l'équation pilote de Lindblad s'écrit alors

$$-\frac{1}{2} \sum_i \{\hat{\Gamma}_i^\dagger \hat{\Gamma}_i, \rho\} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\gamma + \Gamma)\rho_{11} & (\gamma/2 + \Gamma)\rho_{10} \\ (\gamma/2 + \Gamma)\rho_{01} & \Gamma\rho_{00} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

et le terme assurant la conservation de la population

$$\sum_i \hat{\Gamma}_i \rho \hat{\Gamma}_i^\dagger = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Gamma\rho_{11} & -\Gamma\rho_{10} \\ -\Gamma\rho_{01} & \gamma\rho_{11} + \Gamma\rho_{00} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.12})$$

Considérons d'abord la dissipation par perte spontanée de population seule. L'anti-commutateur (D.11) montre que la dissipation par perte de population détruit la population de l'état $|1\rangle$ et la cohérence entre les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Le terme (D.12) montre uniquement le gain de population de l'état $|0\rangle$ correspondant à la population perdue par l'état $|1\rangle$. L'Hamiltonien

1. Rappel : dans la notation $|s_1 s_2\rangle|n\rangle$, s_1 et s_2 indiquent les états de deux atomes 1 et 2, n représente le nombre de photons dans la cavité.

effectif (D.6) peut donc être utilisé pour décrire la dynamique des pertes de l'état $|1\rangle$, mais pas pour décrire l'évolution de l'état $|0\rangle$.

Ce raisonnement ne peut pas s'appliquer à la dissipation par déphasage. En effet, l'anti-commutateur montre une perte de population sur chaque état, mais cette même population est regagnée par le terme (D.12). De plus, le terme (D.12) effectue la même perte de cohérence que l'anti-commutateur. Pour ces deux raisons, le terme (D.12) doit être pris en compte pour le traitement de la dissipation par déphasage, qui ne peut donc pas être traitée par un Hamiltonien effectif.

En résumé, l'Hamiltonien effectif (D.6) ne permet que la prise en compte des *pertes* spontanées de population des états excités, lorsqu'il n'y a pas d'effets de décohérence par déphasage. Il décrit alors de façon exacte la dynamique du sous-système composé du système initial séparé des états recevant la population, qui sont à inclure dans l'environnement extérieur. Ainsi, dans l'exemple précédent, l'Hamiltonien effectif permet donc de décrire l'évolution de l'état $|1\rangle$ soumis à l'émission spontanée, et l'état $|0\rangle$ est à inclure dans l'environnement.

Chapitre 6

Déphasage dans les transitions à deux niveaux

LES SYSTÈMES à deux niveaux sont les systèmes les plus simples pouvant être utilisés comme qubit. Les transferts de population dans ces systèmes en absence de dissipation sont fréquemment rencontrés dans la littérature, et plusieurs modèles ayant une solution analytique existent [89–93].

L’effet de la décohérence par émission spontanée de l’état excité vers l’environnement extérieur lors de ces transferts de population a été étudiée dans la référence [94] à l’aide d’un Hamiltonien effectif non-hermitien. Le résultat surprenant provient des transitions Landau-Zener, qui sont indépendantes du taux de pertes de l’état excité [95].

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l’influence de la décohérence par déphasage sur des processus permettant le transfert de population de l’état $|0\rangle$ vers l’état $|1\rangle$ du qubit. Certains effets du déphasage dans le régime adiabatique ont été traités dans la référence [96], en considérant l’évolution adiabatique effectuée suivant les états propres du système non-dissipatif. Nous étendrons cette étude à une description allant du régime diabatique au régime adiabatique, ce qui permettra de déterminer le régime optimal minimisant les effets du déphasage [97]. Le principal résultat que nous obtenons dans ce chapitre est l’écriture approchée (6.62) de la probabilité de transition du système dissipatif en fonction de la probabilité du système sans déphasage. Nous étudierons ensuite l’évolution adiabatique du système dissipatif complet, et déterminerons des trajectoires spécifiques dans l’espace des paramètres, permettant un transfert de population optimisé.

6.1 Modèles à deux niveaux sans dissipation

Cette section établit une brève description des différents modèles utilisés pour effectuer des transitions dans les systèmes à deux niveaux en absence de dissipation [89–93]. On considère un système fermé, où un laser de pulsation de Rabi $\Omega \geq 0$ couple l’état métastable $|0\rangle$ à l’état excité $|1\rangle$ avec un écart à la résonance Δ (Figure 6.1). L’Hamiltonien du système s’écrit en représentation d’interaction et dans l’approximation résonante dans la base $\{|1\rangle, |0\rangle\}$

$$H(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta(t) & \Omega(t) \\ \Omega(t) & -\Delta(t) \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

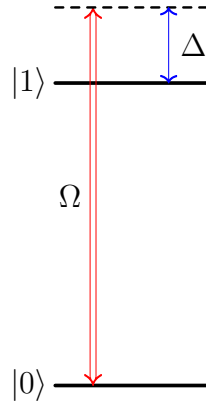


FIG. 6.1 – Schéma du système à deux niveaux utilisé. L'état métastable $|0\rangle$ est couplé à l'état excité $|1\rangle$ par un laser de pulsation de Rabi Ω avec un écart à la résonance Δ .

L'Hamiltonien (6.1) admet les valeurs propres

$$E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}, \quad (6.2)$$

associées aux vecteurs propres

$$|\Psi_{-}\rangle = \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad |\Psi_{+}\rangle = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

avec l'angle dynamique θ tel que

$$\tan \theta = \frac{\Omega}{\Delta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (6.4)$$

L'évolution adiabatique du système s'effectue sous la condition $|\dot{\theta}| \ll E_{+}$. Les vecteurs propres (6.3) montrent alors que le transfert de population de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ est possible lorsque l'évolution des paramètres Ω et Δ fait varier adiabatiquement l'angle θ de 0 à π . Cette évolution requiert un changement de signe de l'écart à la résonance Δ lors de la dynamique.

La probabilité de transition p_0 de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$, tenant compte des effets non-adiabatiques, est connue analytiquement pour plusieurs modèles à deux niveaux. Citons par exemple :

- le modèle Landau-Zener, qui utilise un couplage constant et un écart à la résonance linéaire :

$$\Omega(t) = \Omega_0, \quad (6.5a)$$

$$\Delta(t) = t/T^2, \quad (6.5b)$$

et conduit à la probabilité de transition

$$p_0 = 1 - \exp(-\pi\Omega_0^2 T^2/2); \quad (6.6)$$

- le modèle Allen-Eberly, qui utilise un couplage impulsionnel et un écart à la résonance antisymétrique :

$$\Omega(t) = \Omega_0 \operatorname{sech}(t/T), \quad (6.7a)$$

$$\Delta(t) = B \tanh(t/T), \quad (6.7b)$$

et conduit à la probabilité de transition

$$p_0 = 1 - \frac{\cos^2 \left(\frac{1}{2} \pi T \sqrt{\Omega_0^2 - B^2} \right)}{\cosh^2 \left(\frac{1}{2} \pi B T \right)}; \quad (6.8)$$

- le modèle Demkov-Kunike, qui utilise un couplage impulsionnel et un écart à la résonance asymétrique :

$$\Omega(t) = \Omega_0 \operatorname{sech}(t/T), \quad (6.9a)$$

$$\Delta(t) = \Delta_0 + B \tanh(t/T), \quad (6.9b)$$

et conduit à la probabilité de transition

$$p_0 = \frac{\cosh(\pi B T) - \cos \left(\pi T \sqrt{\Omega_0^2 - B^2} \right)}{\cosh(\pi \Delta_0 T) + \cosh(\pi B T)}; \quad (6.10)$$

- le modèle Rosen-Zener, qui utilise un couplage impulsionnel et un écart à la résonance constant :

$$\Omega(t) = \Omega_0 \operatorname{sech}(t/T), \quad (6.11a)$$

$$\Delta(t) = \Delta_0, \quad (6.11b)$$

et conduit à la probabilité de transition

$$p_0 = \frac{\sin^2 \left(\frac{1}{2} \pi \Omega_0 T \right)}{\cosh^2 \left(\frac{1}{2} \pi \Delta_0 T \right)}. \quad (6.12)$$

À la différence des trois autres modèles, le modèle Rosen-Zener utilise un écart à la résonance constant. La probabilité de transition est alors entièrement due aux effets non-adiabatiques.

Le modèle Demkov-Kunike contient les modèles Allen-Eberly et Rosen-Zener comme cas particulier lorsque les paramètres Δ_0 et B sont respectivement nuls.

Lors de la dynamique, l'état du système correspond temporairement à une superposition cohérente des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Les effets décohérents perturbent cette superposition d'états, et la probabilité de transition résultante s'en trouve modifiée. Nous allons dans les sections suivantes déterminer cette nouvelle probabilité de transition dans le cas particulier de la décohérence par déphasage.

6.2 Effets du déphasage sur une superposition d'états

La décohérence par déphasage détruit la phase relative ϕ d'une la superposition cohérente des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, pouvant s'écrire sous la forme générique

$$|\Psi\rangle = \cos \theta |0\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |1\rangle. \quad (6.13)$$

Ce type de décohérence est produit lors de la dynamique par les fluctuations de phase du laser couplant les états du système, et par les collisions entre atomes en général. L'opérateur densité associé à la superposition cohérente (6.13) s'écrit

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (6.14)$$

$$= \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & e^{-i\phi} \cos \theta \sin \theta \\ e^{i\phi} \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Son évolution temporelle libre, *i.e.* en absence de tout couplage, due aux effets décohérents du déphasage a été calculée dans la section précédente, et est donnée par l'opérateur densité (5.45), soit

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & e^{-i\phi} \cos \theta \sin \theta e^{-\Gamma t} \\ e^{i\phi} \cos \theta \sin \theta e^{-\Gamma t} & \cos^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

avec Γ le taux de déphasage. L'opérateur densité (6.16) montre la destruction du terme de cohérence par le déphasage, ainsi que la préservation des populations de chacun des deux états.

L'opérateur densité obtenu lorsque les termes de cohérence s'annulent est identique à celui d'un ensemble statistique, composé d'atomes dans les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ au choix, avec des poids respectifs $\cos^2 \theta$ et $\sin^2 \theta$. Il correspond ici cependant à celui d'un ensemble d'atomes, chacun étant dans une superposition cohérente définie par un même angle θ , mais avec une phase relative différente (Figure 6.2). Les phases relatives sont aléatoires et le terme de cohérence ne peut donc pas être défini.

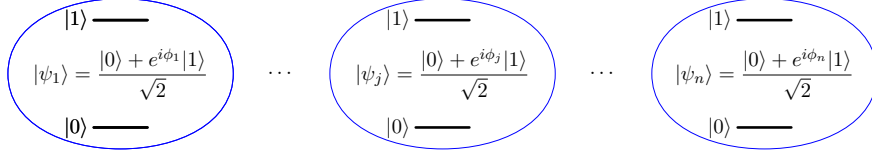


FIG. 6.2 – Représentation schématique d'un ensemble d'atomes préparés dans un même état $|\Psi\rangle = (|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle)/\sqrt{2}$, et soumis aux effets de la décohérence par déphasage. Lorsque le temps augmente, la phase relative de l'état de chaque atome devient aléatoire et n'est plus définie.

Cet exemple illustre une propriété générale des mélanges statistiques quantiques : une même matrice densité peut décrire deux types de mélanges statistiques ayant une interprétation physique distincte. Néanmoins, le formalisme des mélanges statistiques postule qu'aucune mesure physique ne permet de distinguer ces deux types de mélange. Les prédictions statistiques sur les mesures sont complètement données par la matrice densité.

Ainsi, la probabilité au temps t de trouver le système dans son état initial $|\Psi\rangle$ est

$$\begin{aligned} P(|\Psi\rangle, t) &= \text{Tr}(|\Psi\rangle\langle\Psi|\rho(t)) \\ &= 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2} (1 - e^{-\Gamma t}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 - \frac{\sin^2 2\theta}{2}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

6.3 Équation pilote du système dissipatif

La dynamique du système à deux niveaux soumis à la décohérence par déphasage est décrite par l'équation pilote de Lindblad

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}(\rho), \quad (6.18)$$

avec le Lindbladien

$$\mathcal{L}(\rho) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{1}{2} \left([\hat{\Gamma}_d, \rho \hat{\Gamma}_d^\dagger] + [\hat{\Gamma}_d \rho, \hat{\Gamma}_d^\dagger] \right), \quad (6.19)$$

où l'opérateur de Lindblad associé au déphasage s'écrit

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_d &= \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \sigma_z \\ &= \sqrt{\frac{\Gamma}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (6.20)$$

avec le taux de déphasage Γ . Pour résoudre l'équation de Lindblad (6.18) associée au système, nous utiliserons l'écriture de l'opérateur densité dans la base des matrices de Pauli

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \rho_x \sigma_x + \rho_y \sigma_y + \rho_z \sigma_z), \quad (6.21)$$

avec le vecteur de la sphère de Bloch

$$\varrho = \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Les composantes du vecteur (6.22) représentant l'opérateur densité sur la sphère de Bloch sont définies par les relations (5.12). Elles correspondent aux parties réelles et imaginaires des cohérences, et à l'inversion de population du système :

$$\rho_x = \rho_{10} + \rho_{01}, \quad (6.23a)$$

$$\rho_y = i(\rho_{10} - \rho_{01}), \quad (6.23b)$$

$$\rho_z = \rho_{11} - \rho_{00}, \quad (6.23c)$$

avec les éléments matriciels de l'opérateur densité $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle$. La conservation de la population lors du processus se traduit par l'équation

$$\rho_{00} + \rho_{11} = 1. \quad (6.24)$$

L'équation de Lindblad (6.18) peut alors s'écrire en fonction du vecteur de la sphère de Bloch ϱ sous la forme d'une équation de Bloch dissipative

$$\frac{d\varrho(t)}{dt} = \mathcal{L}(t) \varrho(t), \quad (6.25)$$

avec l'opérateur

$$\mathcal{L}(t) = \begin{bmatrix} -\Gamma & -\Delta(t) & 0 \\ \Delta(t) & -\Gamma & -\Omega(t) \\ 0 & \Omega(t) & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

6.4 Dynamique du système en résonance

L'équation de Bloch dissipative (6.25) s'écrit dans le cas résonant où $\Delta = 0$

$$\frac{d\varrho(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma & -\Omega(t) \\ 0 & \Omega(t) & 0 \end{bmatrix} \varrho(t). \quad (6.27)$$

L'évolution de la partie réelle des cohérences ρ_x est alors découplée, et il reste à résoudre un système d'équations différentielles d'ordre un couplant ρ_y et l'inversion de population ρ_z .

6.4.1 Couplage constant

Dans le cas simple où les états du système sont couplés par un champ constant de pulsation de Rabi $\Omega = \Omega_0$ allumé à $t = 0$, l'équation (6.27) s'intègre directement et conduit à la solution

$$\rho_z(t) = -e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left(\cos \omega t + \frac{\Gamma}{2\omega} \sin \omega t \right), \quad (6.28)$$

avec la pulsation de Rabi réelle dans le cas d'une dissipation faible $\Gamma/2 < \Omega_0$

$$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.29)$$

et où le système se trouve initialement dans l'état $|0\rangle$. Dans le cas non dissipatif $\Gamma = 0$, la solution (6.28) correspond aux oscillations de Rabi

$$\rho_z(t) = -\cos \Omega_0 t, \quad (6.30)$$

permettant un transfert complet aux instants T_n tels que $\Omega_0 T_n = n\pi$, avec n entier impair.

Le déphasage a ici pour effet d'atténuer l'amplitude des oscillations, conduisant au mélange $\rho_{00} = \rho_{11} = \frac{1}{2}$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Dans le cas d'une dissipation faible, *i.e.* $\Gamma/2 < \Omega_0$, le déphasage diminue la valeur de la pulsation de Rabi par rapport au cas non-dissipatif. Lorsque le taux de déphasage est trop important, *i.e.* $\frac{\Gamma}{2} \geq \Omega_0$, alors les oscillations disparaissent et les populations évoluent de façon monotone vers l'équilibre $\rho_{00} = \rho_{11} = \frac{1}{2}$.

L'inversion de population est tracée sur la figure 6.3. La figure 6.3(a) indique l'inversion de population après un temps de couplage T constant, en fonction de l'amplitude normalisée du couplage $\Omega_0 T$ pour différentes valeurs du taux de déphasage normalisé ΓT . La figure 6.3(b) indique l'inversion de population pour un couplage d'amplitude constante Ω_0 , en fonction du temps normalisé $\Omega_0 t$ pour différentes valeurs du taux de déphasage normalisé $\Gamma/2\Omega_0$. Les oscillations disparaissent lorsque $\Gamma/2 \geq \Omega_0$.

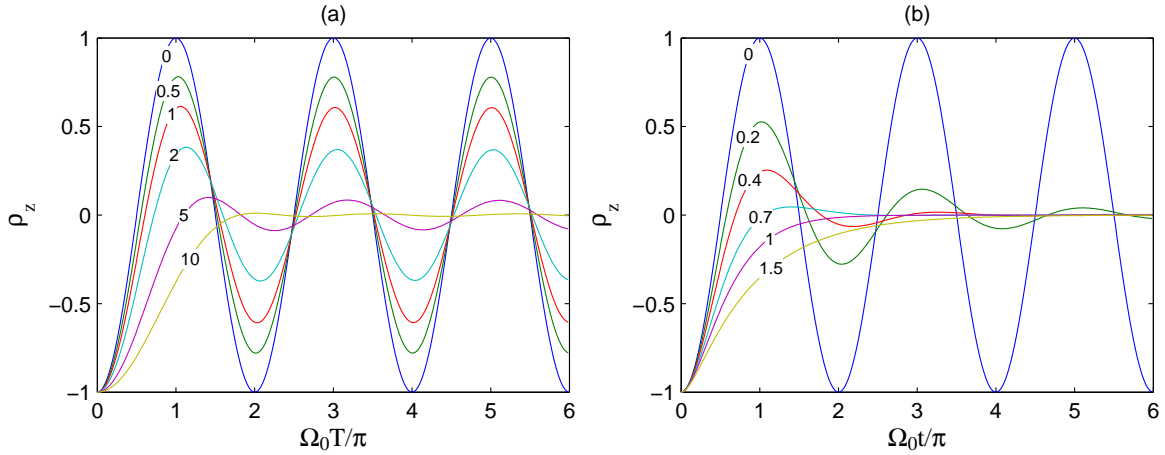


FIG. 6.3 – Inversion de population du système (a) après un temps de couplage T constant, en fonction de l'amplitude normalisée du couplage $\Omega_0 T$ pour différentes valeurs du taux de déphasage normalisé ΓT ; (b) pour un couplage d'amplitude constante Ω_0 , en fonction du temps normalisé $\Omega_0 t$ pour différentes valeurs du taux de déphasage normalisé $\Gamma/2\Omega_0$.

Pour un taux de déphasage Γ et une pulsation $\Omega_0 > \Gamma/2$ donnés, le transfert maximum de population est obtenu aux instants T_n tels que

$$\omega T_n = n\pi, \quad (6.31)$$

avec n entier impair. L'inversion de population est alors

$$\rho_z(T_n) = e^{-\frac{n\pi\Gamma}{2\omega}} \xrightarrow{\Omega_0 \gg \Gamma} e^{-\frac{n\pi\Gamma}{2\Omega_0}}. \quad (6.32)$$

Les effets du déphasage peuvent donc être réduits en utilisant un champs fort de pulsation de Rabi $\Omega_0 \gg \Gamma$ et de durée courte T telle que $\omega T = \pi$.

Remarque : l'ajout d'un écart à la résonance constant Δ a toujours pour effet de diminuer le transfert de population.

6.4.2 Couplage impulsif

L'équation de Bloch dissipative résonante (6.27) ne peut pas en général être intégrée directement lorsque le couplage dépend du temps. Elle conduit à l'équation d'évolution pour l'inversion de population

$$\ddot{\rho}_z + \left(\Gamma - \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \right) \dot{\rho}_z + \Omega^2 \rho_z = 0, \quad (6.33)$$

où les points indiquent la dérivée temporelle. L'équation (6.33) peut être résolue analytiquement dans le cas particulier où le couplage est de forme sécante hyperbolique [98]

$$\Omega(t) = \Omega_0 \operatorname{sech}(t/T). \quad (6.34)$$

L'inversion de population est alors donnée au cours du temps par des fonctions hypergéométriques, et devient au temps final

$$\rho_z(t_f) = -\frac{\Gamma^2 \left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma + \alpha\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma + \alpha\right)} \cos[\pi(\alpha - \gamma)], \quad (6.35)$$

avec les fonctions gamma $\Gamma(z)$ et les paramètres

$$\alpha = \Omega_0 T, \quad (6.36)$$

$$\gamma = \frac{\Gamma T}{2}. \quad (6.37)$$

Dans le cas non-dissipatif $\Gamma = 0$, la solution (6.35) correspond aux oscillations de Rabi

$$\rho_z(t_f) = -\cos(\pi\Omega_0 T), \quad (6.38)$$

permettant un transfert complet lorsque l'aire de l'impulsion $\pi\Omega_0 T$ est égale à $\pi + 2k\pi$, avec k entier. Comme pour le couplage constant, le déphasage diminue la pulsation de Rabi des oscillations et atténue leur amplitude. Les effets du déphasage sont d'autant plus forts que la durée T de l'impulsion est grande. En effet, le déphasage n'agit que lorsque le couplage est effectif.

L'inversion de population est tracée sur la figure 6.4 au temps final en fonction l'amplitude maximale normalisée $\Omega_0 T$ de l'impulsion, pour différentes valeurs du taux de déphasage normalisé ΓT .

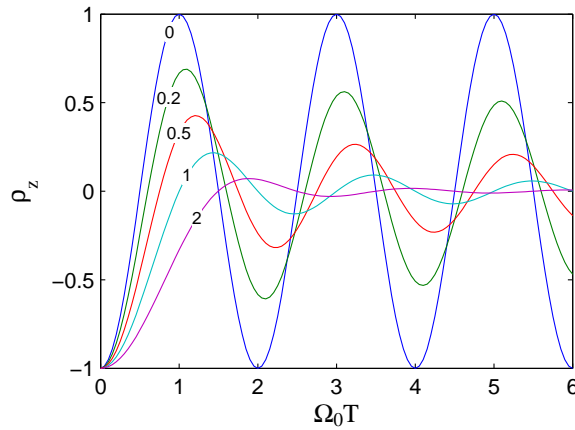


FIG. 6.4 – Inversion de population du système au temps final en fonction de l’amplitude maximale normalisée $\Omega_0 T$ de l’impulsion, pour différentes valeurs du taux de déphasage normalisé ΓT .

Dans la limite $\Omega_0 \gg \Gamma$, la position des maxima est donnée par la condition $\alpha - \gamma = n$, avec n un entier impair [98], et est donc décalée de γ par rapport au cas non-dissipatif. Les effets du déphasage peuvent ici aussi être réduits avec un champ fort de pulsation de Rabi $\Omega_0 \gg \Gamma$, et de largeur T telle que $(\Omega_0 - \Gamma/2)T = 1$.

6.5 Dynamique avec écart à la résonance variable

Les couplages résonants ne permettent pas d’effectuer de transfert de population autrement qu’en contrôlant la durée du couplage, au contraire des modèles utilisant un écart à la résonance variable. Il n’existe cependant pas dans ce cas de solutions analytiques connues. Nous proposons ici une résolution perturbative du problème, qui va permettre d’établir une formule de l’inversion de population valable aussi bien dans le régime diabatique que dans le régime adiabatique.

L’équation de Bloch (6.25) présente la même structure mathématique qu’une équation de Schrödinger associée à un Hamiltonien non-hermitien

$$\mathcal{H}(t) = i\mathcal{L}(t), \quad (6.39)$$

défini dans l’espace tridimensionnel \mathbb{C}^3 . Nous appliquerons donc les méthodes de résolution usuelles au Lindbladien \mathcal{H} afin de déterminer la dynamique du système. L’opérateur \mathcal{H} (6.39) est composé de deux termes distincts :

- le terme hermitien, non-dissipatif, décrivant la dynamique du système en l’absence de décohérence,

$$\mathcal{H}_0(t) = i \begin{bmatrix} 0 & -\Delta(t) & 0 \\ \Delta(t) & 0 & -\Omega(t) \\ 0 & \Omega(t) & 0 \end{bmatrix}; \quad (6.40)$$

- le terme non-hermitien contenant la dissipation

$$\mathcal{H}_d = -i\Gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

Nous déterminerons la dynamique en considérant la partie dissipative (6.41) comme une perturbation du Lindbladien non-décohérent (6.40).

La description du transfert de population dans les modèles à deux niveaux, en absence de décohérence, est décrite de façon particulièrement simple dans la limite adiabatique où le système évolue lentement. La population est alors transportée en suivant les états propres instantanés du système (6.3), et les effets non-adiabatiques peuvent être pris en considération par le couplage $\dot{\theta}$.

Suivant cette idée, nous étudierons la dynamique du système soumis à la dissipation dans la base adiabatique du Lindbladien non-dissipatif \mathcal{H}_0 . Ce Lindbladien admet les deux valeurs propres instantanées $E_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}$, ainsi qu'une troisième valeur propre instantanée identiquement nulle $E_0 = 0$. Les vecteurs propres instantanés associés s'écrivent

$$\varrho_0 = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \varrho_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ \mp i \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

avec l'angle dynamique θ défini par la relation (6.4).

Dans les modèles que nous considérons ici, le couplage entre les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ s'annule aux instants initial et final, l'angle θ prenant alors les valeurs 0 ou π . L'état initial du système, correspondant à une inversion de population ± 1 suivant que l'on commence dans l'état $|0\rangle$ ou dans l'état $|1\rangle$, est donc connecté à l'état propre ϱ_0 par la relation¹

$$\varrho(t_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$= \pm \cos \theta(t_i) \varrho_0(t_i). \quad (6.44)$$

De la même manière, l'inversion de population du système à l'instant final sera donné par la composante z de l'état propre ϱ_0 . C'est donc l'évolution de l'état propre instantané ϱ_0 , et plus particulièrement son état final, qui déterminera la probabilité de transition entre les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

On appelle \mathcal{T} la matrice dont les colonnes correspondent aux vecteurs propres instantanés (6.42),

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -\cos \theta(t) & \sqrt{2} \sin \theta(t) & -\cos \theta(t) \\ -i & 0 & i \\ \sin \theta(t) & \sqrt{2} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) \end{bmatrix}. \quad (6.45)$$

L'équation (6.25) s'écrit alors dans la base adiabatique du Lindbladien non-dissipatif \mathcal{H}_0

$$\frac{d\tilde{\varrho}(t)}{dt} = (\tilde{\mathcal{H}}'_0(t) + \tilde{\mathcal{H}}_d) \tilde{\varrho}(t), \quad (6.46)$$

avec le vecteur de la sphère de Bloch transformé

$$\tilde{\varrho}(t) = \mathcal{T}^\dagger(t) \varrho(t), \quad (6.47)$$

1. Le terme $\cos \theta(t_i)$ provient du fait que l'angle θ peut avoir au temps initial la valeur 0 ou π , et compense le signe $-$ apparaissant dans le vecteur ϱ_0 dans le second cas.

le Lindbladien non-décohérent transformé

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}'_0(t) &= \mathcal{T}^\dagger(t) \mathcal{H}_0(t) \mathcal{T}(t) - i\mathcal{T}^\dagger(t) \frac{\mathcal{T}(t)}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(t) & i\dot{\theta}(t)/\sqrt{2} & 0 \\ -i\dot{\theta}(t)/\sqrt{2} & 0 & -i\dot{\theta}(t)/\sqrt{2} \\ 0 & i\dot{\theta}(t)/\sqrt{2} & -\lambda(t) \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (6.48)$$

et avec le terme de dissipation transformé

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_d(t) &= \mathcal{T}^\dagger(t) \mathcal{H}_d \mathcal{T}(t) \\ &= -i\frac{\Gamma}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \theta(t) & -\frac{\sin 2\theta(t)}{\sqrt{2}} & -\sin^2 \theta(t) \\ -\frac{\sin 2\theta(t)}{\sqrt{2}} & 2\sin^2 \theta(t) & -\frac{\sin 2\theta(t)}{\sqrt{2}} \\ -\sin^2 \theta(t) & -\frac{\sin 2\theta(t)}{\sqrt{2}} & 1 + \cos^2 \theta(t) \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (6.49)$$

6.5.1 Traitement perturbatif de la dissipation

Le changement de base qui vient d'être effectué va permettre la détermination de la probabilité de transition du système par un traitement perturbatif. On suppose connue la solution du problème en absence de décohérence, et en particulier le propagateur $\mathcal{U}_0(t, t_i)$ associé à \mathcal{H}_0 , solution de l'équation de Schrödinger

$$i\frac{d\mathcal{U}_0(t, t_i)}{dt} = \mathcal{H}_0(t) \mathcal{U}_0(t, t_i), \quad (6.50)$$

devenant dans la nouvelle base

$$\tilde{\mathcal{U}}_0(t, t_i) = \mathcal{T}^\dagger(t, t_i) \mathcal{U}_0(t, t_i) \mathcal{T}(t_i). \quad (6.51)$$

Nous avons vu précédemment que la probabilité de transition du système était donnée par l'évolution du vecteur propre ϱ_0 . L'élément de couplage du Lindbladien dissipatif (6.49) entre les deux autres états propres ϱ_\pm , proportionnel à $\sin^2 \theta$, peut donc être négligé en première approximation. L'élément de couplage entre le vecteur ϱ_0 et les états ϱ_\pm , proportionnel à $\sin 2\theta$, peut lui aussi être négligé dans les deux limites suivantes :

- (i) dans la limite adiabatique, où il devient petit par rapport aux éléments diagonaux ;
- (ii) dans la limite diabatique, où il est petit par rapport au couplage non-adiabatique donné par $\dot{\theta}$.

Illustrons ceci avec le cas d'un modèle Landau-Zener. Au voisinage de l'anti-croisement ($|t| \rightarrow 0$) où s'effectue la transition, les couplages prennent les valeurs approchées

$$\Gamma \sin 2\theta \sim \frac{2\Gamma t}{\Omega_0 T^2}, \quad (6.52a)$$

$$\dot{\theta} \sim \frac{-1}{\Omega_0 T^2}. \quad (6.52b)$$

Dans la limite adiabatique où $\Omega_0 T \gg 1$, les deux termes (6.52a) sont petits devant un. Dans la limite diabatique où $\Omega_0 T \ll 1$, la transition s'effectue de façon soudaine au passage de l'anti-croisement [99], ce qui implique $|\dot{\theta}| \gg \Gamma \sin 2\theta$.

Nous testerons numériquement cette approximation dans le régime intermédiaire aux régimes diabatique et adiabatique et montrerons sa validité, qui s'explique par le fait que la transition d'un régime à l'autre s'effectue sur un intervalle relativement court.

Ces approximations conduisent à ne considérer que la partie diagonale du Lindbladien dissipatif,

$$\tilde{\mathcal{H}}_d(t) \approx -i\frac{\Gamma}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \theta(t) & 0 & 0 \\ 0 & 2 \sin^2 \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \cos^2 \theta(t) \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

L'équation (6.46) prend la forme simplifiée, en introduisant le propagateur de l'Hamiltonien non-dissipatif \mathcal{H}_0 défini à l'équation (6.50),

$$i\frac{d\tilde{\varrho}'}{dt} = \tilde{\mathcal{H}}'_d \tilde{\varrho}', \quad (6.54)$$

avec l'Hamiltonien transformé

$$\tilde{\mathcal{H}}'_d = \tilde{\mathcal{U}}_0^\dagger \tilde{\mathcal{H}}_d \tilde{\mathcal{U}}_0, \quad (6.55)$$

et le nouveau vecteur de la sphère de Bloch

$$\tilde{\varrho}' = \tilde{\mathcal{U}}_0^\dagger \tilde{\varrho}. \quad (6.56)$$

L'équation (6.54) s'intègre directement sous la condition

$$\left[\tilde{\mathcal{U}}_0, \tilde{\mathcal{H}}_d \right] = 0 \quad (6.57)$$

correspondant à un découplage des effets décohérents et du propagateur non-dissipatif. Cette approximation (6.57) se justifie dans les deux limites suivantes :

- (i) dans la limite adiabatique, le couplage $\dot{\theta}$ entre les états propres instantanés est négligeable et le propagateur $\tilde{\mathcal{U}}_0$ est diagonal. La condition (6.57) est alors parfaitement vérifiée ;
- (ii) dans la limite diabatique, le transfert de population s'effectue rapidement, et les effets décohérents n'ont pas le temps d'être ressentis. La condition (6.57) est alors vérifiée à tout instant, excepté pour un court intervalle de temps négligeable au voisinage de l'anti-croisement.

Nous montrerons numériquement que la condition (6.57) est aussi valable dans le régime intermédiaire aux régimes diabatique et adiabatique. L'intégration de l'équation (6.54) conduit alors au vecteur de la sphère de Bloch au temps t

$$\varrho(t) = \mathcal{U}_0(t, t_i) \mathcal{T}(t_i) e^{-i \int_{t_i}^t \tilde{\mathcal{H}}_d(s) ds} \mathcal{T}^\dagger(t_i) \varrho(t_i). \quad (6.58)$$

Au temps final, la solution (6.58) s'écrit sous la forme

$$\varrho(t_f) = \mathcal{U}_0(t_f, t_i) \begin{bmatrix} e^{-\xi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\xi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\eta} \end{bmatrix} \varrho(t_i), \quad (6.59)$$

avec les termes dissipatifs

$$\xi = \frac{\Gamma}{2} \int_{t_i}^{t_f} [1 + \cos^2 \theta(t)] dt, \quad (6.60a)$$

$$\eta = \Gamma \int_{t_i}^{t_f} \sin^2 \theta(t) dt. \quad (6.60b)$$

L'inversion de population au temps final correspond à la composante z du vecteur (6.59), d'où

$$\begin{aligned} \rho_z(t_f) &= e^{-\eta} U_0^{zz} \rho_z(t_i) \\ &= e^{-\eta} \rho_z^0(t_i), \end{aligned} \quad (6.61)$$

où $\rho_z^0(t_i)$ correspond à l'inversion de population finale du système non-dissipatif. La probabilité de transition de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} p &= \rho_{11}(t_f) \\ &= \frac{1 - e^{-\eta}}{2} + e^{-\eta} p_0, \end{aligned} \quad (6.62)$$

avec p_0 la probabilité de transition du système non-dissipatif. Dans le cas non-dissipatif où $\Gamma = 0$, on retrouve la probabilité $p = p_0$.

La formule (6.61) montre que la décohérence par déphasage agit comme un facteur atténuant l'inversion de population. Cet effet est moindre dans la limite adiabatique, où la transition s'effectue de façon très localisée dans le temps, conduisant à une intégrale $\eta \approx 0$.

Les formules (6.61) et (6.62) constituent le résultat principal de ce chapitre. Nous allons à présent les appliquer à plusieurs type de modèles couramment utilisés dans la littérature.

6.5.2 Application à des modèles type

La probabilité de transition (6.62) peut s'écrire analytiquement dans le cas des modèles à deux niveaux usuels décrits dans la section 6.1. Les termes dissipatifs s'écrivent alors

– pour le modèle Landau-Zener,

$$\eta = \pi \Gamma \Omega_0 T; \quad (6.63)$$

– pour le modèle Allen-Eberly,

$$\eta = \frac{2\Gamma \Omega_0 T \tan^{-1} \sqrt{B^2/\Omega_0^2 - 1}}{\sqrt{B^2 - \Omega_0^2}}; \quad (6.64)$$

– pour le modèle Demkov-Kunike,

$$\eta = \frac{\Gamma \Omega_0 T}{\sqrt{\Omega_0^2 + \Delta_0^2 - B^2}} \left[\tanh^{-1} \frac{B\Delta_0 - B^2 + \Omega_0^2}{\Omega_0 \sqrt{\Omega_0^2 + \Delta_0^2 - B^2}} - \tanh^{-1} \frac{B\Delta_0 + B^2 - \Omega_0^2}{\Omega_0 \sqrt{\Omega_0^2 + \Delta_0^2 - B^2}} \right]; \quad (6.65)$$

– pour le modèle Rosen-Zener,

$$\eta = \frac{2\Gamma \Omega_0 T}{\sqrt{\Omega_0^2 + \Delta_0^2}} \ln \frac{\sqrt{\Omega_0^2 + \Delta_0^2} + \Omega_0}{\Delta_0}. \quad (6.66)$$

La formule de probabilité de transition (6.62) requiert que la population à transférer évolue suivant l'état propre instantané ϱ_0 . Excepté le modèle Landau-Zener, les modèles à deux niveaux usuels présentent une levée de quasi-dégénérescence au temps initial conduisant à des interférences quantiques entre les différents états propres instantanés [100]. Cet effet qui n'a pas été pris en compte ici est négligeable lorsque l'écart à la résonance Δ est grand au temps initial, ce qui correspond à la condition

$$\Delta_0 T, BT \gg 0. \quad (6.67)$$

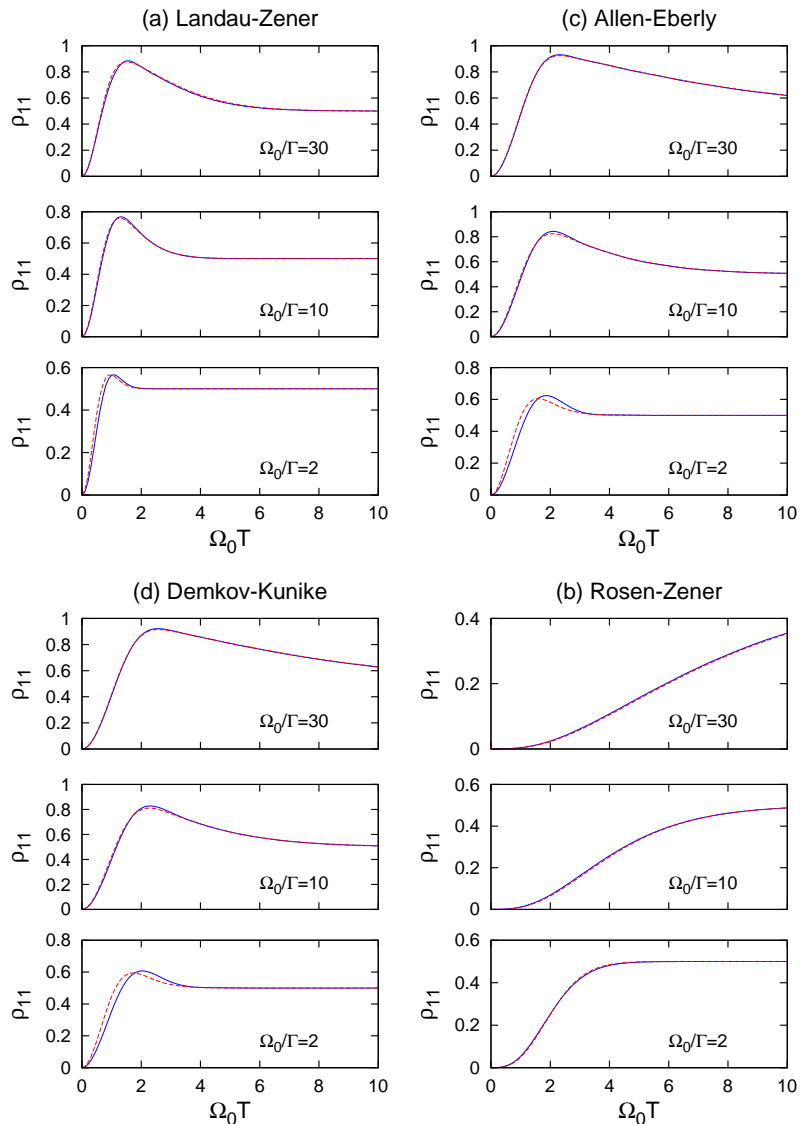


FIG. 6.5 – Comparaison des probabilités de transition de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ données par la formule (6.62) (pointillés) et la simulation numérique (trait plein). Les courbes sont tracées pour un déphasage relatif Ω_0/Γ constant et une largeur d'impulsion T constante. Les paramètres utilisés satisfont la condition (6.67), soit $BT = 2.5$ pour le modèle Allen-Eberly, $\Delta_0 T = 1, BT = 3$ pour le modèle Demkov-Kunike, et $\Delta_0 T = 3$ pour le modèle Rosen-Zener.

Les probabilités de transition de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ sont représentées sur la figure 6.5. La simulation numérique du système correspond aux courbes en trait plein et la formule (6.62)

aux courbes pointillées. Chaque courbe est tracée pour un déphasage relatif Ω_0/Γ constant et une largeur d'impulsion T constante, dans le cas d'un déphasage fort ($\Omega_0/\Gamma=2$), dans le cas d'un déphasage modéré ($\Omega_0/\Gamma=10$), et dans le cas d'un déphasage faible ($\Omega_0/\Gamma=30$). Les paramètres utilisés satisfont la condition (6.67), soit $BT = 2.5$ pour le modèle Allen-Eberly, $\Delta_0 T = 1, BT = 3$ pour le modèle Demkov-Kunike, et $\Delta_0 T = 3$ pour le modèle Rosen-Zener.

La figure 6.5 montre un excellent accord entre la formule de probabilité de transition (6.62) et la simulation numérique dans le régime adiabatique ($\Omega_0 T \gg 1$), étant donné que la relation (6.57) est alors parfaitement vérifiée.

La formule (6.62) s'accorde aussi à la simulation numérique dans les autres régimes, *i.e.* le régime diabatique ($\Omega_0 T \ll 1$) et le régime intermédiaire, dans le cas où la dissipation n'est pas trop forte, ce qui correspond aux cas intéressants pour les applications.

Dans le régime adiabatique, la probabilité de transition du modèle Rosen-Zener, nulle en absence de décohérence ($p_0 = 0$), est entièrement due aux effets de la dissipation.

Lorsque l'évolution du système devient trop longue, la décohérence détruit complètement l'inversion de population, et la probabilité de transition tend vers $1/2$.

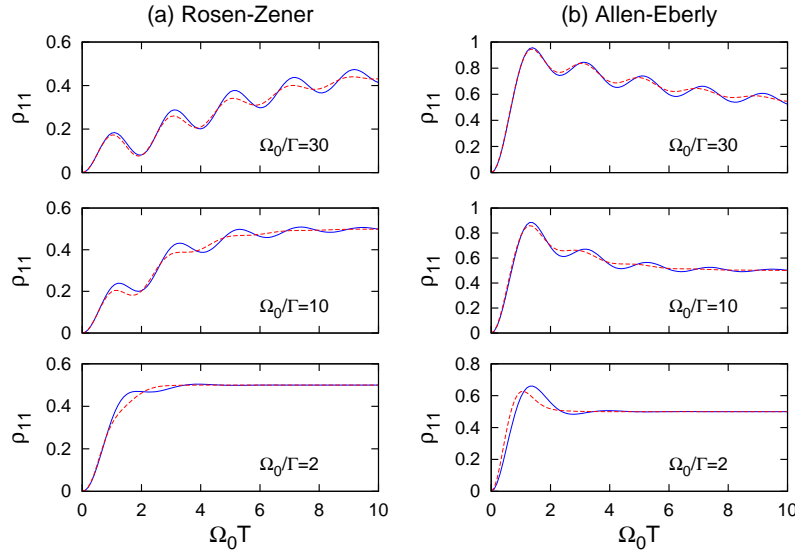


FIG. 6.6 – Comparaison des probabilités de transitions de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ données par la formule (6.62) (pointillés) et la simulation numérique (trait plein). Les courbes sont tracées pour un déphasage relatif Ω_0/Γ constant et une largeur d'impulsion T constante. Les paramètres utilisés, $BT = 1$ pour le modèle Allen-Eberly, et $\Delta_0 T = 1$ pour le modèle Rosen-Zener, ne satisfont pas la condition (6.67).

La figure 6.6 montre les probabilités de transitions dans le cas où la condition (6.67) n'est pas assurée, ce qui conduit à une levée de quasi-dégénérescence au temps initial. On constate que la formule (6.62) correspond toutefois à une bonne approximation de la probabilité de transition.

6.5.3 Généralisation à un modèle Landau-Zener impulsif

Le modèle Landau-Zener permet l'obtention d'une formule analytique pour la probabilité de transition. Le couplage utilisé dans ce modèle, constant de $t \rightarrow -\infty$ à $t \rightarrow +\infty$, n'est

cependant pas réaliste en pratique, où l'on utilise des couplages de durée finie, souvent sous forme d'impulsions.

En général, la probabilité de transition de ce type de modèles, définis par un écart à la résonance linéaire $\Delta(t) = t/T^2$ et un couplage impulsionnel $\Omega(t)$, n'est pas connue en absence de dissipation. Cependant, si l'impulsion a une largeur suffisamment grande, typiquement $T_p \gg T$, alors la transition au voisinage de l'anti-croisement peut être considérée comme un processus Landau-Zener, et la probabilité de transition peut être approchée par la formule Landau-Zener (6.6).

La probabilité de transition en présence de dissipation est alors obtenue par la formule (6.62), où p_0 correspond à la probabilité de transition Landau-Zener (6.6), et où l'intégrale η donnant les pertes doit être calculée par la formule (6.60b).

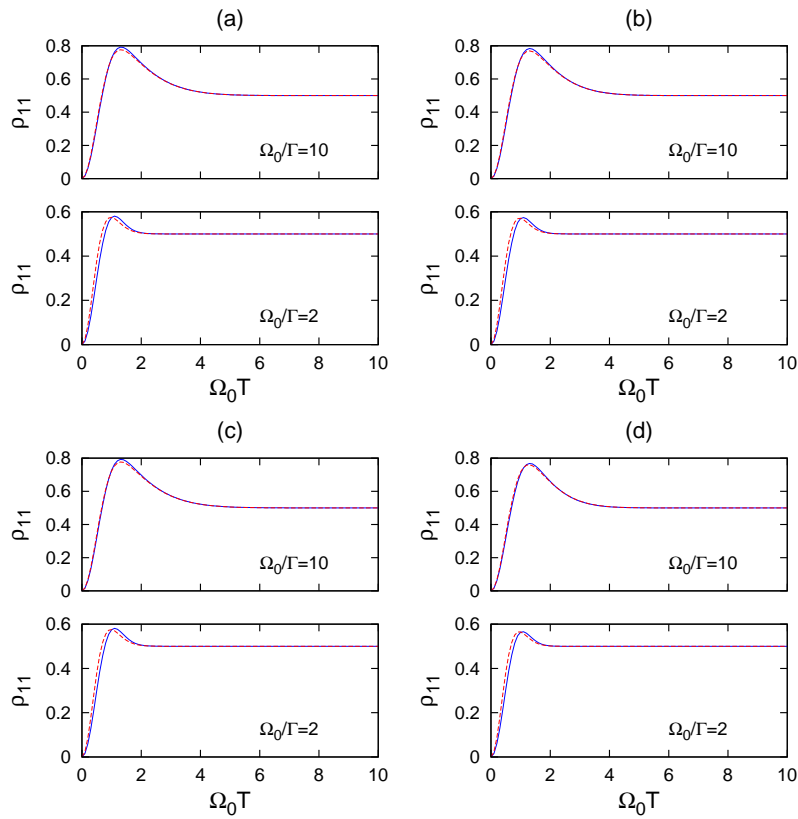


FIG. 6.7 – Comparaison des probabilités de transition de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ données par la formule (6.62) (pointillés) et la simulation numérique (trait plein), dans le cas de modèles Landau-Zener avec couplage impulsionnel. Les courbes sont tracées pour un déphasage relatif Ω_0/Γ constant et une largeur d'impulsion T constante. Les couplages utilisés sont de forme gaussienne (a), sécante hyperbolique (b), sinus carré (c) et impulsion porte (d).

Les probabilités de transition de l'état $|0\rangle$ vers l'état $|1\rangle$ sont représentées sur la figure 6.7. La simulation numérique du système correspond aux courbes en trait plein et la formule (6.62) aux courbes pointillées. Chaque courbe est tracée pour un déphasage relatif Ω_0/Γ constant et une largeur d'impulsion T constante, dans le cas d'un déphasage fort ($\Omega_0/\Gamma=2$), et dans

le cas d'un déphasage modéré ($\Omega_0/\Gamma=10$). Les couplages utilisés ont la forme suivante :

$$(a) \quad \Omega(t) = \Omega_0 \exp(-(t/T_p)^2), \quad (6.68a)$$

$$(b) \quad \Omega(t) = \Omega_0 \operatorname{sech}(t/T_p), \quad (6.68b)$$

$$(c) \quad \Omega(t) = \begin{cases} \Omega_0 \cos(t/T_p)^2 & \text{si } -\pi/2 \leq t/T_p \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (6.68c)$$

$$(d) \quad \Omega(t) = \begin{cases} \Omega_0 & \text{si } -1/2 \leq t/T_p \leq 1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (6.68d)$$

On observe un excellent accord entre la formule (6.62) et la simulation numérique lorsque le déphasage relatif n'est pas trop fort.

6.6 Optimisation de la dynamique adiabatique

Le passage adiabatique permet, dans le cas d'un système non-dissipatif, d'effectuer un transfert complet de population lorsque l'écart à la résonance Δ change de signe au cours de l'évolution. Dans le cas d'un système dissipatif, nous avons montré par la formule (6.61) que cette inversion de population est atténuée par un facteur exponentiel. Cette atténuation dépend du temps d'évolution du système, et est donc nuisible aux processus adiabatiques, qui requièrent une évolution lente. D'un autre côté, réduire le temps d'évolution diminue certes les pertes dues au déphasage, mais augmente les pertes dues à la non-adiabaticité. Le maximum de transfert s'effectue alors dans une zone intermédiaire, comme le montre les figures 6.5 et 6.7 .

Il est toutefois possible de réduire le temps d'évolution tout en minimisant les pertes non-adiabatiques. La stratégie consiste alors à suivre des trajectoires spécifiques dans l'espace des paramètres, qui correspondent dans le cas non-dissipatif à des *lignes de niveaux*, *i.e.* des trajectoires telles que la différence entre les valeurs propres est constante. [101]

Nous ne considérerons dans cette section que la dynamique adiabatique du système. Nous montrerons dans un premier temps que le suivi adiabatique des états propres instantanés du Lindbladien (6.39)

$$\mathcal{H} = i \begin{bmatrix} -\Gamma & -\Delta & 0 \\ \Delta & -\Gamma & -\Omega \\ 0 & \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

conduit à une inversion de population au temps final équivalente à la formule (6.61), avant de rechercher des trajectoires optimisant cette inversion de population.

6.6.1 Évolution adiabatique du système dissipatif

Le Lindbladien (6.69) du système dissipatif est un opérateur non hermitien, pour lequel peuvent être définis des vecteurs propres instantanés droits $|\Psi_n^R\rangle$ et gauches $\langle\Psi_n^L|$ par les relations

$$\mathcal{H}|\Psi_n^R\rangle = \lambda_n|\Psi_n^R\rangle, \quad (6.70a)$$

$$\langle\Psi_n^L|\mathcal{H} = \lambda_n\langle\Psi_n^L| \Leftrightarrow \mathcal{H}^\dagger|\Psi_n^L\rangle = \lambda_n^*|\Psi_n^L\rangle, \quad (6.70b)$$

où les symboles \dagger et $*$ dénotent respectivement l'adjoint et le complexe conjugué. Les relations (6.70) impliquent l'identité

$$\langle \Psi_m^L | \mathcal{H} | \Psi_n^R \rangle = \lambda_n \langle \Psi_m^L | \Psi_n^R \rangle = \lambda_m \langle \Psi_m^L | \Psi_n^R \rangle, \quad (6.71)$$

d'où l'égalité

$$(\lambda_n - \lambda_m) \langle \Psi_m^L | \Psi_n^R \rangle = 0 \quad (6.72)$$

qui permet de définir le produit scalaire

$$\langle \Psi_m^L | \Psi_n^R \rangle = \delta_{m,n} \quad (6.73)$$

en choisissant les normes des vecteurs droits et gauches de façon appropriée.

La représentation matricielle de l'opérateur T diagonalisant l'Hamiltonien

$$T^{-1} \mathcal{H} T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (6.74)$$

a alors pour vecteurs colonnes les vecteurs droits $|\Psi_n^R\rangle$, et son inverse T^{-1} a pour vecteurs lignes les vecteurs gauches $\langle \Psi_n^L|$.

Lorsque le Lindbladien du système est hermitien, les vecteurs propres instantanés droits et gauches sont liés par l'identité $|\Psi_n^L\rangle = |\Psi_n^R\rangle$. Dans le cas présent, le Lindbladien vérifie la relation

$$\mathcal{H} = -\mathcal{H}^*, \quad (6.75)$$

ce qui implique pour les équations aux valeurs propres

$$\mathcal{H} |\Psi_n^R\rangle^* = -\lambda_n^* |\Psi_n^R\rangle^*, \quad (6.76a)$$

$$\langle \Psi_n^L|^* \mathcal{H} = -\lambda_n^* \langle \Psi_n^L|^*. \quad (6.76b)$$

L'un des trois vecteurs propres instantanés du système, disons $|\Psi_2^R\rangle$, peut être choisi réel de valeur propre imaginaire

$$|\Psi_2^R\rangle = |\Psi_2^R\rangle^*, \quad (6.77a)$$

$$\lambda_2 = -\lambda_2^*. \quad (6.77b)$$

Les deux autres valeurs propres sont supposées avoir une partie réelle non nulle : les vecteurs propres instantanés $|\Psi_1^R\rangle$ et $|\Psi_3^R\rangle$ sont alors liés par les relations

$$|\Psi_1^R\rangle = |\Psi_3^R\rangle^*, \quad (6.78a)$$

$$\lambda_1 = -\lambda_3^*. \quad (6.78b)$$

Les relations entre les vecteurs gauches sont formellement identiques, en remplaçant les indices R par des indices L .

Les valeurs propres instantanées sont complexes, la partie imaginaire traduisant les pertes dues à la dissipation. Elles s'écrivent sous la forme

$$\lambda_1 = -\frac{2i\Gamma}{3} - \frac{i}{2}(C - D) + \frac{\sqrt{3}}{2}(C + D), \quad (6.79a)$$

$$\lambda_3 = -\frac{2i\Gamma}{3} - \frac{i}{2}(C - D) - \frac{\sqrt{3}}{2}(C + D), \quad (6.79b)$$

$$\lambda_2 = -\frac{2i\Gamma}{3} + i(C - D), \quad (6.79c)$$

avec les coefficients réels

$$C = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\beta - \alpha}{2}} \in \mathbb{R}, \quad (6.80a)$$

$$D = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\beta + \alpha}{2}} \in \mathbb{R}, \quad (6.80b)$$

$$\alpha = -2\Gamma^3 - 18\Gamma\Delta^2 + 9\Gamma\Omega^2 \in \mathbb{R}, \quad (6.80c)$$

$$\beta = \sqrt{4(3\Delta^2 + 3\Omega^2 - \Gamma^2)^3 + (-2\Gamma^3 - 18\Gamma\Delta^2 + 9\Gamma\Omega^2)^2} \in \mathbb{R}. \quad (6.80d)$$

Les vecteurs propres instantanés associés à la valeur propres imaginaire λ_2 s'écrivent

$$|\Psi_2^R\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \Omega \\ -\frac{\Omega}{\Delta} \left(\frac{\Gamma}{3} + C - D \right) \\ \Delta \left(1 + \frac{(\Gamma/3 + C - D)^2}{\Delta^2} \right) \end{bmatrix}, \quad \langle \Psi_2^L| = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \Omega \\ \frac{\Omega}{\Delta} \left(\frac{\Gamma}{3} + C - D \right) \\ \Delta \left(1 + \frac{(\Gamma/3 + C - D)^2}{\Delta^2} \right) \end{bmatrix}^T, \quad (6.81)$$

où le coefficient réel N assure la normalisation $\langle \Psi_2^L | \Psi_2^R \rangle = 1$. Le calcul montre que la définition (6.81) des états propres instantanés assure la condition de transport parallèle

$$\langle \Psi_2^L | \frac{d}{dt} | \Psi_2^R \rangle = 0. \quad (6.82)$$

La seule phase accumulée lors du suivi adiabatique du vecteur $|\Psi_2^R\rangle$ correspond alors à l'intégrale de la valeur propre $\lambda_2(t)$.

On remarque qu'aux instants initial et final où $\Omega = 0$, l'inversion de population est portée par le vecteur propre instantané $|\Psi_2^R\rangle$:

$$|\Psi_2^R(t_i)\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sgn}[\Delta(t_i)] \end{bmatrix}, \quad |\Psi_2^R(t_f)\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{sgn}[\Delta(t_f)] \end{bmatrix}, \quad (6.83)$$

où $\text{sgn}(x)$ est la fonction signe. L'état initial s'écrit donc sous la forme

$$\begin{aligned} |\varrho^R(t_i)\rangle &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \\ &= \pm \text{sgn}[\Delta(t_i)] |\Psi_2^R(t_i)\rangle. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Le suivi adiabatique correspond ici à négliger en première approximation les couplages entre les sous-espaces propres $|\langle \Psi_2^L | \frac{d}{dt} | \Psi_{1,3}^R \rangle|$ devant leur écart en énergie $|\lambda_1 - \lambda_{2,3}|$. Dans la limite adiabatique, l'état du système évolue donc suivant l'état propre instantané $|\Psi_2^R\rangle$:

$$\begin{aligned} |\varrho^R(t)\rangle &\simeq \langle \Psi_2^L(t_i) | \varrho^R(t_i) \rangle e^{-i \int_{t_i}^t \lambda_2(s) ds} |\Psi_2^R(t)\rangle \\ &\simeq \pm \text{sgn}[\Delta(t_i)] e^{-i \int_{t_i}^t \lambda_2(s) ds} |\Psi_2^R(t)\rangle. \end{aligned} \quad (6.85)$$

La « phase » dynamique accumulée lors du suivi du vecteur propre est ici complexe, et peut être considérée comme une phase généralisée. Elle conduit ici à une atténuation exponentielle, due à la dynamique non-unitaire du système.

Au temps final, l'inversion de population du système correspond à la composante z du vecteur

$$\begin{aligned}\rho_z(t_f) &= \langle z | \varrho^R(t_f) \rangle \\ &= \pm \operatorname{sgn}[\Delta(t_i)] e^{-i \int_{t_i}^{t_f} \lambda_2(s) ds} \langle z | \Psi_2^R(t_f) \rangle \\ &= \pm \operatorname{sgn}[\Delta(t_i)\Delta(t_f)] e^{-i \int_{t_i}^{t_f} \lambda_2(s) ds}.\end{aligned}\quad (6.86)$$

En remarquant que le terme $\pm \operatorname{sgn}[\Delta(t_i)\Delta(t_f)]$ correspond à l'inversion de population $\rho_z^{0,ad}$ du système non dissipatif dans la limite adiabatique, on obtient finalement

$$\rho_z(t_f) = \rho_z^{0,ad} e^{-\eta}, \quad (6.87)$$

avec le terme d'atténuation

$$\eta = i \int_{t_i}^{t_f} \lambda_2(s) ds \quad (6.88)$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{2\Gamma}{3} - C(s) + D(s) \right) ds. \quad (6.89)$$

Dans le cas d'une dissipation faible par rapport au couplage, *i.e.* $\Omega_0/\Gamma \gg 1$, le développement de la valeur propre λ_2

$$\lambda_2 \simeq i\Omega_0 \left(-\frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2} \frac{\Gamma}{\Omega_0} + \frac{\Delta^4 \Omega^2 \Omega_0^2}{(\Omega^2 + \Delta^2)^4} \left(\frac{\Gamma}{\Omega_0} \right)^3 + \mathcal{O}((\Gamma/\Omega_0)^5) \right) \quad (6.90)$$

redonne au premier ordre la formule d'inversion de population (6.61) obtenue par traitement perturbatif de la dissipation.

6.6.2 Suivi adiabatique optimisé

Le problème de l'optimisation du passage adiabatique revient à chercher les trajectoires dans l'espace des paramètres minimisant les pertes non-adiabatiques. Notons $|\epsilon^R(t)\rangle$ l'erreur effectuée lors du suivi adiabatique, définie par la différence entre l'état réel du système et l'état adiabatique (6.85) :

$$|\epsilon^R(t)\rangle = |\varrho^R(t)\rangle \mp \operatorname{sgn}[\Delta(t_i)] e^{-i \int_{t_i}^t \lambda_2(s) ds} |\Psi_2^R(t)\rangle. \quad (6.91)$$

L'erreur non-adiabatique sur l'inversion de population au temps final est alors

$$\begin{aligned}\epsilon &= \langle z | \epsilon^R(t_f) \rangle \\ &= \rho_z(t_f) - \rho_z^{0,ad} e^{-\eta}.\end{aligned}\quad (6.92)$$

Dans le cas non dissipatif, l'erreur non-adiabatique ϵ peut être déterminée par la formule Dykhne-Davis-Pechukas [102–105], appelée plus simplement formule DDP, donnant la probabilité de transition non-adiabatique entre les deux états du système

$$p = e^{-2\Im[\mathcal{D}(t_c)]}, \quad (6.93)$$

où \Im désigne la partie imaginaire, et

$$\mathcal{D}(t_c) = 2 \int_0^{t_c} E(t) dt, \quad (6.94)$$

où $E(t)$ correspond à la différence des valeurs propres instantanées du système, *i.e.*

$$E = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}, \quad (6.95)$$

et où t_c , appelé *point de transition*, est la valeur de t dans le plan complexe où les valeurs propres sont égales, *i.e.*

$$E(t_c) = 0. \quad (6.96)$$

Dans le cas dissipatif, aucune formule connue ne permet de calculer l'erreur ϵ . Nous pouvons cependant l'approcher dans la limite où la dissipation est faible devant le couplage, *i.e.* $\Omega_0/\Gamma \gg 1$, en utilisant pour $\rho_z(t_f)$ la formule (6.61) qui tient compte des pertes non-adiabatiques du système non-dissipatif par l'intermédiaire de $\rho_z^0(t_f)$, *i.e.*

$$\rho_z^0(t_f) = 1 - 2e^{-2\Im[\mathcal{D}(t_c)]} \quad (6.97)$$

dans le cas où $\rho_z^{0,ad} = 1$. L'erreur non-adiabatique (6.92) s'écrit alors

$$\epsilon = -2e^{-2\Im[\mathcal{D}(t_c)] - \eta}, \quad (6.98)$$

avec l'atténuation η définie au premier ordre en Γ par l'intégrale (6.60b), *i.e.*

$$\eta \simeq \Gamma \int_{t_i}^{t_f} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \Delta^2} dt. \quad (6.99)$$

Le signe moins indique que l'erreur enlève de la population à l'état $|1\rangle$ au temps final.

Dans le cas d'un système non-dissipatif, l'erreur non-adiabatique ϵ devient nulle lorsque la dynamique suit les lignes de niveaux du système dans l'espace des paramètres, *i.e.* les trajectoires définies par l'équation

$$E = \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2} = cste, \quad (6.100)$$

qui correspondent à des cercles. Le système que nous considérons ici est faiblement dissipatif. Au premier ordre, les trajectoires minimisant l'erreur non-adiabatique doivent donc correspondre à des cercles déformés. Nous considérerons ici les déformations du cercle en ellipses, définies par l'équation

$$\frac{\Delta^2(t)}{\Delta_0^2} + \frac{\Omega^2(t)}{\Omega_0^2} = 1. \quad (6.101)$$

La figure 6.8 représente la valeur absolue du logarithme de l'erreur non-adiabatique ϵ obtenue par simulation pour des trajectoires elliptiques avec un taux de déphasage $\Gamma T = 0.5$. Le paramétrage des ellipses est défini par les relations

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{-4 \log 2 \left(\frac{t}{T}\right)^2}, \quad (6.102a)$$

$$\Delta(t) = \text{sgn}(t) \Delta_0 \sqrt{1 - \Omega(t)^2/\Omega_0^2}. \quad (6.102b)$$

Les trajectoires circulaires sont représentées sur la figure 6.8 par la ligne en tirets. Les lignes noires indiquent une erreur non-adiabatique nulle. On remarque que l'erreur non-adiabatique est nulle pour des trajectoires elliptiques proches du cercle, comme supposé plus haut. On remarque aussi un phénomène inattendu : l'erreur non-adiabatique devient positive dans une

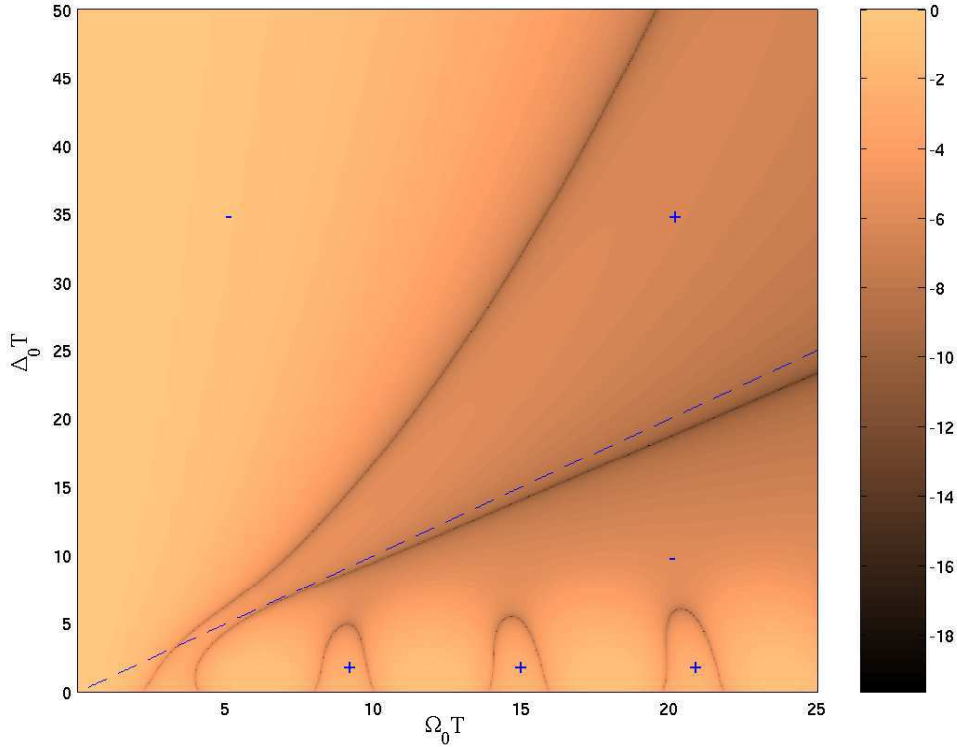


FIG. 6.8 – Logarithme de la valeur absolue de l’erreur non-adiabatique ϵ obtenue par simulation en fonction des demi-axes $\Omega_0 T$ et $\Delta_0 T$ de l’ellipse suivie lors de la dynamique pour un taux de déphasage $\Gamma T = 0.5$. Les lignes noires correspondent à une erreur nulle, et séparent les zones d’erreur positive et négative, indiquées sur la figure par des signes + et -. La ligne en tirets représente les trajectoires circulaires.

zone assez large au-dessus des trajectoires circulaires, avant de redevenir négative lorsque $\Omega_0 T$ approche de zéro. La formule approchée (6.98), basée sur la formule DDP ne contenant pas la dissipation, n’autorise pas un tel comportement et montre donc sa limitation. Toutefois, les valeurs positives de l’erreur ϵ sont relativement faibles, comme le montre la figure 6.9, représentant l’erreur non-adiabatique ϵ pour $\Omega_0 T = 12$ et un taux de déphasage $\Gamma T = 0.5$. On voit alors que l’erreur non-adiabatique obtenue par simulation (tirets) est relativement bien décrite par la formule approchée (6.98) dans la région au-delà du cercle $\Delta_0 T \geq \Omega_0 T$.

La région en-deçà du cercle, *i.e.* $\Delta_0 T < \Omega_0 T$ correspond au régime de levée de dégénérescence, conduisant à des oscillations dues à des interférences au temps final [100]. Cette région n’est pas concernée dans cette section.

La figure 6.10 montre le logarithme de la population restée sur l’état $|0\rangle$, obtenue par simulation, en fonction des demi-axes $\Omega_0 T$ et $\Delta_0 T$ de l’ellipse suivie lors de la dynamique, pour un taux de déphasage $\Gamma T = 0.5$. On remarque que cette population est minimale sur une zone étendue des paramètres $\Omega_0 T, \Delta_0 T$, ce qui signifie que le transfert est robuste par rapport aux variations des amplitudes des champs laser.

Cette zone de maximum de population transférée provient de la combinaison des effets dissipatifs et non-adiabatiques. En effet, lorsque $\Delta_0 T$ augmente par rapport à $\Omega_0 T$, le temps d’évolution du système diminue, et donc les pertes dues à la dissipation aussi. Cependant, la non-adiabaticité augmente et provoque une perte de population de l’état $|1\rangle$. Néanmoins,

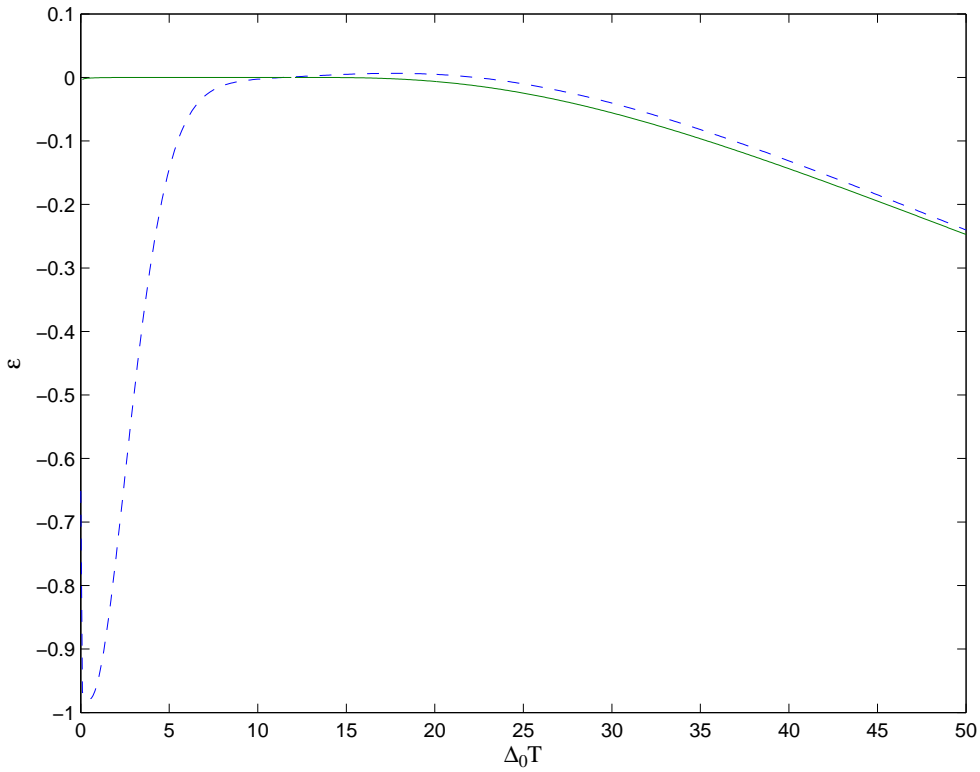


FIG. 6.9 – Erreur non-adiabatique ϵ en fonction du demi-axe $\Delta_0 T$ pour $\Omega_0 T = 12$ et un taux de déphasage $\Gamma T = 0.5$. La courbe en tirets correspond à la simulation, la courbe en trait plein à la formule approchée (6.98)

cette perte de population est dans un premier temps inférieure à la diminution des pertes par dissipation, et l'effet global est donc une augmentation de la population transférée. Lorsque $\Delta_0 T$ devient trop grand par rapport à $\Omega_0 T$, la perte non adiabatique de population est supérieure à la diminution des pertes par dissipation, et l'effet global est alors une diminution de la population transférée.

On remarque que la zone de maximum de transfert de population est proche de la région où les pertes non-adiabatiques sont faibles.

Le problème est à présent la détermination du demi-axe $\Delta_0 T$ permettant un transfert maximal de population pour une valeur donnée de $\Omega_0 T$. Nous pouvons utiliser la formule (6.62) issue du traitement perturbatif pour rechercher le demi-axe de l'ellipse minimisant la population restée sur l'état $|0\rangle$

$$\begin{aligned} \rho_{00}(t_f) &= 1 - \left(\frac{1 - e^{-\eta}}{2} + e^{-\eta} p_0 \right) \\ &= -\frac{1 + e^{-\eta}}{2} + e^{-\eta} e^{-2\Im[D(t_c)]}, \end{aligned} \quad (6.103)$$

où la probabilité de transition du système non-dissipatif est écrite avec la formule DDP

$$p_0 = 1 - e^{-2\Im[D(t_c)]}. \quad (6.104)$$

L'évolution des populations restées sur l'état $|0\rangle$ est représentée sur la figure 6.11 en fonction du demi-axe $\Delta_0 T$, pour la valeur $\Omega_0 T = 12$, à un taux de déphasage $\Gamma T = 0.5$. On remarque

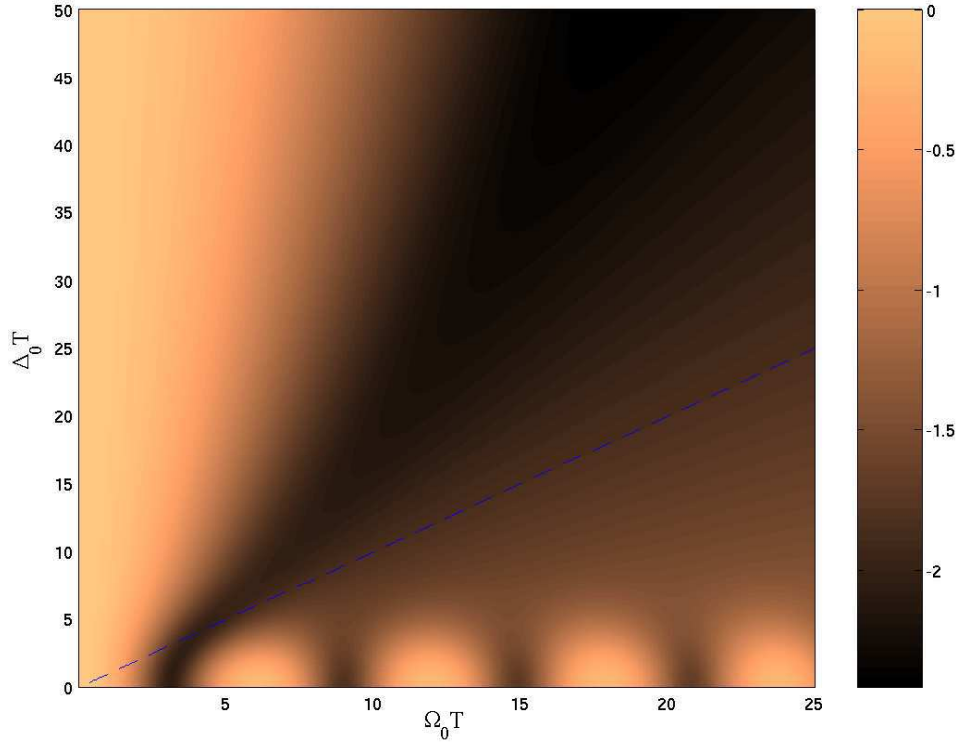


FIG. 6.10 – Logarithme de la population restée sur l'état $|0\rangle$ obtenue par simulation en fonction des demi-axes $\Omega_0 T$ et $\Delta_0 T$ de l'ellipse suivie lors de la dynamique. Le taux de déphasage est $\Gamma T = 0.5$.

que la formule (6.103) (trait plein) permet de situer le minimum de perte avec un bon accord par rapport à la simulation (tirets).

La comparaison des données numériques entre la simulation et la formule est portée dans le tableau 6.1 pour différentes valeurs des paramètres $\Omega_0 T$ et ΓT . On remarque un bon accord sur les déterminations du demi-axe $\Delta_0 T$ optimal et de la population transférée. Le gain relatif de population obtenu en effectuant la dynamique sur l'ellipse optimale par rapport aux trajectoires circulaires est d'autant plus important que le taux de déphasage ΓT et le couplage $\Omega_0 T$ augmentent.

6.7 Discussion

Nous avons étudié dans ce chapitre les effets du déphasage sur les transferts de population dans les systèmes à deux niveaux. La formule de probabilité de transition obtenue, valable aussi bien dans le régime diabatique que dans le régime adiabatique, permet la recherche de trajectoires dans l'espace des paramètres optimisant le transfert de population, en réduisant ainsi les effets néfastes dues au déphasage.

Cette optimisation est obtenue en s'écartant du régime adiabatique et en trouvant alors un compromis entre la diminution des pertes par déphasage et l'augmentation des pertes non-adiabatiques. Il est important de remarquer que c'est uniquement grâce à la validité de la formule (6.62) dans les différents régimes, diabatique et adiabatique, que son utilisation est possible pour l'optimisation.

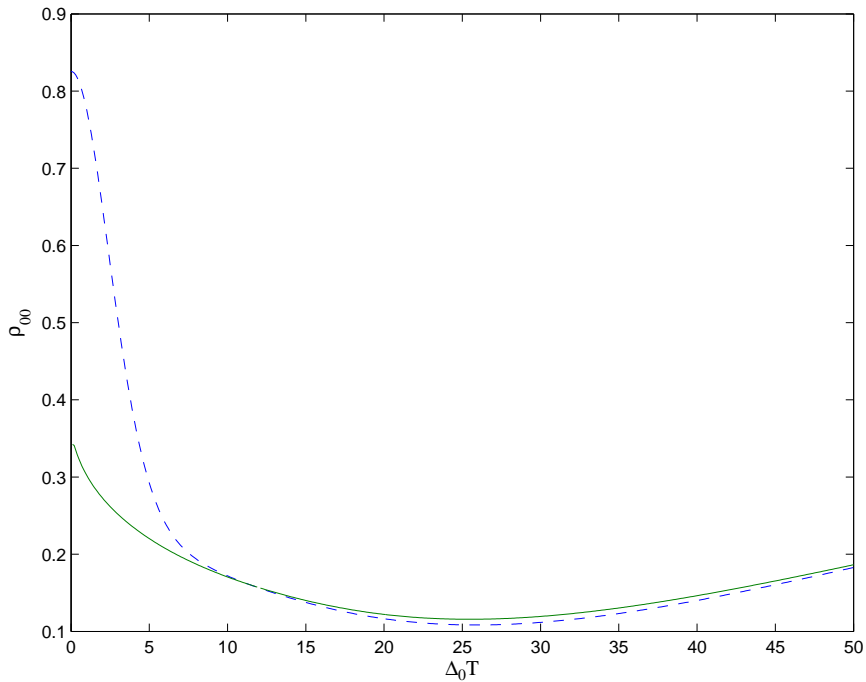


FIG. 6.11 – Populations de l'état $|0\rangle$ obtenues par simulation (tirets) et par application de la formule approchée (trait plein) en fonction du demi-axe $\Delta_0 T$ de l'ellipse suivie lors de la dynamique. Le taux de déphasage est $\Gamma T = 0.5$, l'autre demi-axe $\Omega_0 T = 12$.

Cependant, le système à deux niveaux n'est pas utilisable pratiquement comme qubit, étant donné que son état excité est en général un état soumis à l'émission spontanée, rendant le qubit instable. On préférera un système de type lambda, où les deux états métastables sont utilisés pour représenter les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ du qubit, ou bien un système Zeeman tel celui utilisé dans ce travail.

Les effets du déphasage ont été étudiés dans le système lambda dans le cadre de transitions effectuées par STIRAP, de façon numérique et analytique, dans les références [106–109]. Ces études montrent des pertes exponentielles dues au déphasage intervenant entre les deux états métastables. L'influence du déphasage entre l'état excité et les états métastables est négligeable dans le régime adiabatique, étant donné que celui-ci n'est pas peuplé durant la dynamique. Cependant, les résultats analytiques obtenus ne concernent que le régime adiabatique, et ne peuvent donc pas être utilisés pour la recherche de trajectoires s'écartant de ce régime pour optimiser le transfert. La principale difficulté est que les pertes non-adiabatiques ne sont pas connues analytiquement dans le cas du STIRAP, même en absence de dissipation.

Afin d'avoir une vision plus précise des effets du déphasage et des moyens de les réduire dans les processus d'implémentation de portes quantiques que nous avons montrés, il est donc nécessaire d'élargir les études effectuées sur le STIRAP à l'ensemble des régimes possibles, diabatique et adiabatique. Cet élargissement doit aussi se faire pour les systèmes de deux qubits couplés qui sont utilisés pour les portes à deux qubits,

$(\Omega_0 T; \Gamma T)$		Simulation	Formule	
(12; 0.5)	$\Delta_0 T$ optimal	25.90	25.45	
	ρ_{11} (cercle)	0.843	—	
	ρ_{11} (ellipse)	0.891	0.884	+5.7%
(20; 0.5)	$\Delta_0 T$ optimal	69	65	
	ρ_{11} (cercle)	0.843	—	
	ρ_{11} (ellipse)	0.916	0.912	+8.7%
(12; 1)	$\Delta_0 T$ optimal	30.96	31.07	
	ρ_{11} (cercle)	0.735	—	
	ρ_{11} (ellipse)	0.824	0.811	+11.2%
(20; 1)	$\Delta_0 T$ optimal	76	78	
	ρ_{11} (cercle)	0.735	—	
	ρ_{11} (ellipse)	0.852	0.854	+16%

TAB. 6.1 – Comparaison des données numériques issues de la simulation numérique et de l'application de la formule (6.103) pour différentes valeurs des paramètres $\Omega_0 T$ et ΓT . La dernière colonne indique le gain relatif de population, obtenu en effectuant la dynamique sur l'ellipse optimale par rapport aux trajectoires circulaires

– RÉSUMÉ DU CHAPITRE 6 –

OBJECTIF : Ce chapitre décrit les effets de la dissipation par déphasage lors des transitions dans un système à deux niveaux dans différents régimes, en allant du régime diabatique au régime adiabatique.

RÉSULTATS NOUVEAUX :

- ① Nous avons établi une formule de probabilité de transition reliant la probabilité sans dissipation p_0 à la probabilité avec dissipation p à travers un terme η contenant la dissipation :

$$p = \frac{1 - e^{-\eta}}{2} + e^{-\eta} p_0. \quad (6.105)$$

- ② Cette formule a été testée numériquement pour différents modèles couramment rencontrés dans la littérature et pour des modèles Landau-Zener impulsionnels.
- ③ Cette formule permet d'obtenir un transfert de population optimal comme un compromis entre une durée suffisamment longue pour minimiser les pertes non-adiabatiques et une durée suffisamment courte pour minimiser les pertes par déphasage.

Conclusion et perspectives

Nous avons montré que les techniques de passage adiabatique permettent l'implémentation des portes quantiques à un qubit dans un système atomique interagissant avec des champs laser impulsionnels. Nous avons vu que cette implémentation est robuste dans le cas d'un système Zeeman, où les transitions sont sélectionnées par les polarisations des champs laser : les portes quantiques obtenues ne requièrent pas le contrôle du profil temporel des impulsions lasers, contrairement aux propositions existantes basées sur les techniques de type impulsion- π ou sur l'utilisation de phases géométriques. Les processus adiabatiques que nous avons montrés requièrent seulement l'ordre dans lequel les impulsions laser sont enclenchées, et le contrôle précis des phases relatives des lasers ainsi que leur polarisation, ce qui est expérimentalement réalisable.

Les processus adiabatiques que nous avons montrés sont de plus basés sur le suivi adiabatique des états sombres du système, qui sont des états propres instantanés ne peuplant pas les états excités des atomes : ces processus sont donc par construction insensibles à l'émission spontanée des états excités.

Les portes quantiques à un qubit forment, avec une porte quantique à deux qubits permettant l'intrication, un ensemble universel de portes quantiques, *i.e.* un ensemble minimum de portes quantiques nécessaire à la réalisation d'un ordinateur quantique.

Nous avons montré que les techniques de passage adiabatique permettent l'implémentation de portes quantiques à deux qubits dans le même système atomique que celui utilisé pour les portes à un qubit. Les atomes sont fixés dans une cavité optique, et le mode résonant de la cavité effectue le couplage entre les atomes nécessaire à l'implémentation des portes à deux qubits.

Comme pour les portes à un qubit, les processus à deux qubits que nous avons montrés sont robustes par rapport aux amplitudes des champs lasers, et insensibles à l'émission spontanée des états excités des atomes grâce au suivi adiabatique des états sombres du système. Ces processus sont de plus insensibles aux pertes de la cavité dans la limite où la fréquence de Rabi associée au mode de la cavité est beaucoup plus importante que les fréquences de Rabi associées aux impulsions laser : l'amplitude des états à un photon est alors négligeable.

Ainsi, un ensemble universel de portes quantiques peut être implémenté par passage adiabatique dans un système atomique de façon robuste. Nous avons aussi montré que certaines portes quantiques particulières peuvent être implémentées par les techniques de passage adiabatique directement, *i.e.* sans les construire par compositions de portes quantiques appartenant à un ensemble universel. Cette implémentation directe permet un processus plus rapide, donc une optimisation du temps de calcul et une erreur moindre.

Puisque le passage adiabatique requiert par définition un temps relativement long pour être appliqué, des effets décohérents indésirables dus au couplage à l'environnement extérieur peuvent se manifester. Il est donc important d'étudier ces effets décohérents sur le passage

adiabatique. Les processus que nous avons considérés, faisant appel à des états sombres, sont insensibles à la décohérence par émission spontanée, mais sont sensibles à la décohérence par déphasage, étant donné que des superpositions cohérentes d'états se forment durant la dynamique.

Nous avons étudié les effets de la décohérence par déphasage lors de transitions effectuées dans un système à deux niveaux. Nous avons montré que le déphasage intervient, au premier ordre, comme une atténuation exponentielle de l'inversion de population du système non-décohérent. La formule obtenue permet une optimisation de la probabilité de transfert de population en recherchant des trajectoires spécifiques dans l'espace des paramètres où le transfert s'effectue de façon suffisamment rapide pour diminuer l'effet du déphasage, et suffisamment lentement pour éviter de trop grandes pertes non-adiabatiques.

Suite au travail effectué durant cette thèse, les perspectives suivantes sont envisagées :

- (i) utiliser les techniques de passage adiabatique pour optimiser des circuits quantiques simples tel que l'additionneur quantique, en les implémentant de façon directe et robuste au lieu de les obtenir par combinaisons de portes quantiques élémentaires. Cette optimisation a pour but de réduire le temps du calcul quantique et donc le risque d'erreur ;
- (ii) étudier les effets de la décohérence et plus particulièrement du déphasage lors du passage adiabatique effectué dans des systèmes lambda et Zeeman couplés, tels ceux étudiés dans ce travail. En effet, l'état excité du système à deux niveaux considéré dans ce travail est en général instable, et ce système ne peut donc pas être utilisé pratiquement comme qubit. De plus, nous avons vu que le déphasage pouvait modifier fortement la probabilité de transfert dans le système à deux niveaux. Il est donc important de connaître ses effets dans le système Zeeman utilisé ici, afin de déterminer leur impact sur les processus adiabatiques que nous avons montrés ;
- (iii) de façon plus générale, étudier les effets décohérents dus au déphasage et à l'émission spontanée lors du passage adiabatique.

Bibliographie

- [1] G. MOORE, « *Cramming more components onto integrated circuits* », *Electronics* **38** (1965).
- [2] R.P. FEYNMAN, « *Simulating physics with computers* », *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [3] P.W. SHOR, « *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring* », dans *Proceeding of the 35th annual symposium on foundations of computer science*, IEEE Press, CA, 1994.
- [4] L. K. GROVER, « *Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack* », *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997).
- [5] I.L. CHUANG & M.A. NIELSEN, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [6] A. GALINDO & M.A. MARTIN-DELGADO, « *Information and computation: classical and quantum aspects* », *Rev. Mod. Phys.* **74**, 347 (2002).
- [7] R.G. UNANYAN, N.V. VITANOV & K. BERGMANN, « *Preparation of entangled states by adiabatic passage* », *Phys. Rev. Lett.* **87**, 137902 (2001).
- [8] L.M. DUAN, J.I. CIRAC & P. ZOLLER, « *Geometric manipulation of trapped ions for quantum computation* », *Science* **292**, 1695 (2001).
- [9] Z. KIS & F. RENZONI, « *Qubit rotation by stimulated Raman adiabatic passage* », *Phys. Rev. A* **65**, 032318 (2002).
- [10] H. GOTO & K. ICHIMURA, « *Multiqubit controlled unitary gate by adiabatic passage with an optical cavity* », *Phys. Rev. A* **70**, 012305 (2004).
- [11] R. LANDAUER, « *Irreversibility and heat generation in the computing process* », *IBM J. Res. Dev.* **5**, 183 (1961).
- [12] E. FREDKIN & T. TOFFOLI, « *Conservative logic* », *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 219 (1982).
- [13] B. SCHUMACHER, « *Quantum coding* », *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995).
- [14] A. EINSTEIN, B. PODOLSKY & N. ROSEN, « *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* », *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [15] C.H. BENNETT & G. BRASSARD, « *Quantum cryptography: public key distribution and coin tossing* », dans *Proceeding of IEEE international conference on computers, systems and signal processing*, page 175, IEEE Press, 1984.
- [16] C.H. BENNETT, G. BRASSARD & A. EKERT, « *Quantum cryptography* », *Sci. Am.* **267**, 50 (1992).
- [17] C.H. BENNETT, G. BRASSARD, C. CRÉPEAU, R. JOZSA, A. PERES & W. WOOTERS, « *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and EPR channels* », *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

- [18] C.H. BENNETT & S.J. WIESNER, « *Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states* », Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).
- [19] K. MATTL, H. WEINFURTER, P.G. KWIAT & A. ZEILINGER, « *Dense coding in experimental quantum communication* », Phys. Rev. Lett. **76**, 4656 (1996).
- [20] D. DIEKS, « *Communication by EPR devices* », Phys. Lett. A **92**, 271 (1982).
- [21] W. WOOTERS & W.H. ZUREK, « *A single quantum cannot be cloned* », Nature **299**, 802 (1982).
- [22] A. BARENCO, C.H. BENNETT, R. CLEVE, D.P. DIVINCENZO, N. MARGOLUS, P. SHOR, T. SLEATOR, J.A. SMOLIN & H. WEINFURTER, « *Elementary gates for quantum computation* », Phys. Rev. A **52**, 3457 (1995).
- [23] D.P. DIVINCENZO, « *Quantum gates and circuits* », Proc. R. Soc. Lond. A **454**, 261 (1998).
- [24] D.P. DIVINCENZO, « *Two-qubit quantum gates are universal for quantum computation* », Phys. Rev. A **51**, 1015 (1995).
- [25] D. DEUTSCH, A. BARENCO & A. EKERT, « *Universality in quantum computation* », Proc. R. Soc. Lond. A **449**, 669 (1995).
- [26] S. LLOYD, « *Almost any quantum logic gate is universal* », Phys. Rev. Lett. **75**, 346 (1995).
- [27] P.W. SHOR, « *Polynomial-time algorithms for prime factorisation and discrete logarithms on a quantum computer* », SIAM J. Comp. **26**, 1484 (1997).
- [28] L. K. GROVER, dans *Proceeding of the 28th annual ACM symposium on the theory of computation*, page 212, ACM Press, 1996.
- [29] D. DEUTSCH & R. JOZSA, « *Rapid solution of problems by quantum computation* », Proc. R. Soc. Lond. A **439**, 553 (1992).
- [30] A. MESSIAH, *Mécanique Quantique*, Dunod, Paris, 1959.
- [31] M.V. BERRY, « *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes* », Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).
- [32] M. BORN & V. FOCK, « *Beweis des Adiabatsatzes* », Z. Phys. **51**, 165 (1928).
- [33] T. KATO, « *On the adiabatic theorem of quantum mechanics* », Phys. Soc. Jap. **5**, 435 (1958).
- [34] G. NENCIU, « *On the adiabatic theorem of quantum mechanics* », J. Phys. A **13**, L15 (1980).
- [35] J.E. AVRON, R. SEILER & L.G. YAFFE, « *Adiabatic theorem and applications to the quantum Hall effect* », Commun. Math. Phys. **110**, 33 (1987).
- [36] G. HAGEDORN, « *Adiabatic expansions near eigenvalue crossings* », Ann. Phys. **196**, 278 (1989).
- [37] J.E. AVRON, J. HOWLAND & B. SIMON, « *Adiabatic Theorems for Dense Point Spectra* », Commun. Math. Phys. **128**, 497 (1990).
- [38] A. JOYE, « *An adiabatic theorem for singularly perturbed Hamiltonian* », Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A **63**, 231 (1995).
- [39] J.E. AVRON & A. ELGART, « *Adiabatic theorem without a gap condition: two-level system coupled to quantized radiation field* », Phys. Rev. A **58**, 4300 (1998).
- [40] J.E. AVRON & A. ELGART, « *Adiabatic theorem without a gap condition* », Commun. Math. Phys. **203**, 445 (1999).

- [41] L.M. GARRIDO, « *Generalized adiabatic invariance* », J. Math. Phys. **5**, 335 (1964).
- [42] M.V. BERRY, « *Quantum phase corrections from adiabatic iteration* », Proc. R. Soc. Lond. A **414**, 31 (1987).
- [43] M.V. BERRY, « *Histories of adiabatic quantum transitions* », Proc. R. Soc. Lond. A **429**, 61 (1990).
- [44] R. LIM & M.V. BERRY, « *Superadiabatic tracking of quantum evolution* », J. Phys. A **24**, 3255 (1991).
- [45] G. NENCIU, « *Linear adiabatic theory. Exponential estimates* », Commun. Math. Phys. **152**, 479 (1993).
- [46] U. GAUBATZ, P. RUDECKI, M. BECKER, S. SCHIEMANN, M. KÜLZ & K. BERGMANN, « *Population switching between vibrational levels in molecular beams* », Chem. Phys. Lett. **149**, 463 (1988).
- [47] J.R. KUKLINSKI, U. GAUBATZ, F.T. HIOE & K. BERGMANN, « *Adiabatic population transfer in a three-level system driven by delayed laser pulses* », Phys. Rev. A **40**, 6741 (1989).
- [48] U. GAUBATZ, P. RUDECKI, S. SCHIEMANN & K. BERGMANN, « *Population transfer between molecular vibrational levels by stimulated Raman scattering with partially overlapping laser fields. A new concept and experimental results* », J. Chem. Phys. **92**, 5363 (1990).
- [49] N.V. VITANOV & S. STENHOLM, « *Non-adiabatic effects in population transfer in three-level systems* », Opt. Commun. **127**, 215 (1996).
- [50] K. BERGMANN, H. THEUER & B.W. SHORE, « *Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules* », Rev. Mod. Phys. **70**, 1003 (1998).
- [51] N.V. VITANOV & S. STENHOLM, « *Properties of stimulated Raman adiabatic passage with intermediate-level detuning* », Opt. Commun. **135**, 394 (1997).
- [52] N.V. VITANOV & S. STENHOLM, « *Population transfer via a decaying state* », Phys. Rev. A **56**, 1463 (1997).
- [53] P.A. IVANOV, N.V. VITANOV & K. BERGMANN, « *Spontaneous emission in stimulated Raman adiabatic passage* », Phys. Rev. A **72**, 053412 (2005).
- [54] N.V. VITANOV, K.A. SUOMINEN & B.W. SHORE, « *Creation of coherent atomic superpositions by fractional stimulated Raman adiabatic passage* », J. Phys. B **32**, 4535 (1999).
- [55] R.G. UNANYAN, M. FLEISCHHAUER, B.W. SHORE & K. BERGMANN, « *Robust creation and phase-sensitive probing of superposition states via stimulated Raman adiabatic passage (STIRAP) with degenerate dark states* », Opt. Commun. **155**, 144 (1998).
- [56] X. LACOUR, S. GUÉRIN, N.V. VITANOV, L.P. YATSENKO & H.R. JAUSLIN, « *Implementation of single-qubit quantum gates by adiabatic passage and static laser phases* », Opt. Commun. **264**, 362 (2006).
- [57] P. ZANARDI & M. RASETTI, « *Holonomic quantum computation* », Phys. Lett. A **264**, 94 (1999).
- [58] J. PACHOS, P. ZANARDI & M. RASETTI, « *Non-Abelian Berry connections for quantum computation* », Phys. Rev. A **61**, 010305(R) (1999).
- [59] J.A. JONES, V. VEDRAL, A. EKERT & G. CASTAGNOLI, « *Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance* », Nature **403**, 869 (1999).

- [60] G. FALCI, R. FAZIO, M.G. PALMA, J. SIEWERT & V. VEDRAL, « *Detection of geometric phases in superconducting nanocircuits* », *Nature* **407**, 355 (2000).
- [61] F. VEWINGER, M. HEINZ, R.G. FERNANDEZ, N.V. VITANOV & K. BERGMANN, « *Creation and measurement of a coherent superposition of quantum states* », *Phys. Rev. Lett.* **91**, 213001 (2003).
- [62] J.I. CIRAC & P. ZOLLER, « *Quantum computations with cold trapped ions* », *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).
- [63] A. SØRENSEN & K. MØLMER, « *Quantum computation with ions in thermal motion* », *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1971 (1999).
- [64] A. BEIGE, « *Ion-trap quantum computing in the presence of cooling* », *Phys. Rev. A* **69**, 012303 (2004).
- [65] M. PATERNOSTRO, M.S. KIM & P.L. KNIGHT, « *Vibrational coherent quantum computation* », *Phys. Rev. A* **71**, 022311 (2005).
- [66] F. SCHMIDT-KALER, H. HÄFFNER, M. RIEBE, S. GULDE, G.P.T. LANCASTER, T. DEUSCHLE, C. BECHER, C.F. ROOS, J. ESCHNER & R. BLATT, « *Realization of the Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate* », *Nature* **422**, 408 (2003).
- [67] D. SCHRADER, S. KUHR, W. ALT, M. MÜLLER, V. GOMER & D. MESCHEDE, « *An optical conveyor belt for single neutral atoms* », *Appl. Phys. B* **73**, 819 (2001).
- [68] S. KUHR, W. ALT, D. SCHRADER, M. MÜLLER, V. GOMER & D. MESCHEDE, « *Deterministic delivery of a single atom* », *Science* **293**, 278 (2001).
- [69] W. ALT, D. SCHRADER, S. KUHR, M. MÜLLER, V. GOMER & D. MESCHEDE, « *Single atoms in a standing-wave dipole trap* », *Phys. Rev. A* **67**, 033403 (2003).
- [70] Y. MIROSHNYCHENKO, D. SCHRADER, S. KUHR, W. ALT, I. DOTSENKO, M. KHU-DAVERDYAN, A. RAUSCHENBEUTEL & D. MESCHEDE, « *Continued imaging of the transport of a single neutral atom* », *Opt. Express* **11**, 3498 (2003).
- [71] S. KUHR, W. ALT, D. SCHRADER, I. DOTSENKO, Y. MIROSHNYCHENKO, W. ROSENFELD, M. KHU-DAVERDYAN, V. GOMER, A. RAUSCHENBEUTEL & D. MESCHEDE, « *Coherence properties and quantum state transportation in an optical conveyor belt* », *Phys. Rev. Lett.* **91**, 213002 (2003).
- [72] I. DOTSENKO, W. ALT, M. KHU-DAVERDYAN, S. KUHR, D. MESCHEDE, Y. MIROSHNYCHENKO, D. SCHRADER & A. RAUSCHENBEUTEL, « *Submicrometer position control of single trapped neutral atoms* », *Phys. Rev. Lett.* **95**, 033002 (2005).
- [73] S. NUSSMANN, M. HIJLKEMA, B. WEBER, F. ROHDE, G. REMPE & A. KUHN, « *Submicron positioning of single atoms in a microcavity* », *Phys. Rev. Lett.* **95**, 173602 (2005).
- [74] J. KLEIN, F. BEIL & T. HALFMANN, « *Robust population transfer by stimulated Raman adiabatic passage in a $Pr^{3+}:Y_2SiO_5$ crystal* », *Phys. Rev. Lett.* **99**, 113003 (2007).
- [75] H. GOTO & K. ICHIMURA, « *Population transfer via stimulated Raman adiabatic passage in a solid* », *Phys. Rev. A* **74**, 053410 (2006).
- [76] H. GOTO & K. ICHIMURA, « *Observation of coherent population transfer in a four-level tripod system with a rare-earth-metal-ion-doped crystal* », *Phys. Rev. A* **75**, 033404 (2007).
- [77] T. PELLIZZARI, S.A. GARDINER, J.I. CIRAC & P. ZOLLER, « *Decoherence, continuous observation, and quantum computing: a cavity QED model* », *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3788 (1995).

- [78] N. SANGOUARD, X. LACOUR, S. GUÉRIN & H.R. JAUSLIN, « *Fast SWAP gate by adiabatic passage* », Phys. Rev. A **72**, 062309 (2005).
- [79] N. SANGOUARD, X. LACOUR, S. GUÉRIN & H.R. JAUSLIN, « *CNOT gate by adiabatic passage with an optical cavity* », Eur. Phys. J. D **37**, 451 (2006).
- [80] X. LACOUR, N. SANGOUARD, S. GUÉRIN & H.R. JAUSLIN, « *Arbitrary state controlled-unitary gate by adiabatic passage* », Phys. Rev. A **73**, 042321 (2006).
- [81] R.J. THOMPSON, G. REMPE & H.J. KIMBLE, « *Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity* », Phys. Rev. Lett. **68**, 1132 (1992).
- [82] R. MILLER, T.E. NORTHUP, K.M. BIRNBAUM, A. BOCA, A.D. BOOZER & H.J. KIMBLE, « *Trapped atoms in cavity QED: coupling quantized light and matter* », J. Phys. B **38**, S551 (2005).
- [83] N.V. VITANOV, M. FLEISCHHAUER, B.W. SHORE & K. BERGMANN, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **46**, 55 (2001).
- [84] J. VALA, K.B. WALLEY & D.S. WEISS, « *Quantum error correction of a qubit loss in an addressable atomic system* », quant-ph/0510021.
- [85] K. KRAUS, « *General state changes in quantum theory* », Ann. Phys. **64**, 311 (1971).
- [86] G. LINDBLAD, « *On the generators of quantum dynamical semigroups* », Commun. Math. Phys. **48**, 119 (1976).
- [87] H.P. BREUER & F. PETRUCCIONE, *The theory of open quantum systems*, Oxford, 2002.
- [88] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC & G. GRYNBERG, *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*, John Wiley & Sons, Inc. Wiley-Interscience, New-York, 1998.
- [89] L.D. LANDAU, Phys. Z. Sowjetunion **2**, 46 (1932).
- [90] C. ZENER, Proc. R. Soc. Lond. A **137**, 696 (1932).
- [91] N. ROSEN & C. ZENER, « *Double Stern-Gerlach Experiment and Related Collision Phenomena* », Phys. Rev. **46**, 4110 (1932).
- [92] Y.N. DEMKOV & M. KUNIKE, Vestn. Leningr. Univ. Fiz. Khim. **16**, 39 (1969).
- [93] L. ALLEN & J.H. EBERLY, *Optical resonance and two-level atoms*, Dover, New York, 1987.
- [94] N.V. VITANOV & S. STENHOLM, « *Pulsed excitation of a transition to a decaying level* », Phys. Rev. A **55**, 2982 (1997).
- [95] V.M. AKULIN & W.P. SCHLEICH, « *Landau-Zener transition to a decaying level* », Phys. Rev. A **46**, 4110 (1992).
- [96] P.A. IVANOV & N.V. VITANOV, « *Adiabatic evolution amidst dephasing* », Phys. Rev. A **71**, 063407 (2005).
- [97] X. LACOUR, S. GUÉRIN, L.P. YATSENKO, N.V. VITANOV & H.R. JAUSLIN, « *Uniform analytic description of dephasing effects in two-state transitions* », Phys. Rev. A **75**, 033417 (2007).
- [98] E.S. KYOSEVA & N.V. VITANOV, « *Resonant excitation amidst dephasing: an exact analytic solution* », Phys. Rev. A **71**, 054102 (2005).
- [99] N.V. VITANOV, « *Transition times in the Landau-Zener model* », Phys. Rev. A **59**, 988 (1999).
- [100] L.P. YATSENKO, S. GUÉRIN & H.R. JAUSLIN, « *Pulse-driven near-resonant quantum adiabatic dynamics: lifting of quasidegeneracy* », Phys. Rev. A **70**, 043402 (2004).

- [101] S. GUÉRIN, S. THOMAS & H.R. JAUSLIN, « *Optimisation of population transfer by adiabatic passage* », Phys. Rev. A **65**, 023409 (2002).
- [102] A.M. DYKHNE, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **41**, 1324 (1962).
- [103] A.M. DYKHNE, « *Adiabatic perturbation of discrete spectrum states* », Sov. Phys. JETP **14**, 941 (1962).
- [104] J.P. DAVIS & P. PECHUKAS, « *Non-adiabatic transitions induced by a time-dependent Hamiltonian in the semi-classical/adiabatic limit: the two-state case* », J. Chem. Phys. **64**, 3129 (1976).
- [105] J.T. HWANG & P. PECHUKAS, « *The adiabatic theorem in the complex plane and the semi-classical calculation of non-adiabatic transition amplitudes* », J. Chem. Phys. **67**, 4640 (1997).
- [106] M. DEMIRPLAK & S.A. RICE, « *Optical control of molecular dynamics in a liquid* », J. Chem. Phys. **116**, 8028 (2002).
- [107] L.P. YATSENKO, V.I. ROMANENKO, B.W. SHORE & K. BERGMANN, « *Stimulated Raman adiabatic passage with partially coherent laser fields* », Phys. Rev. A **65**, 043409 (2002).
- [108] Q. SHI & E. GEVA, « *Stimulated Raman adiabatic passage in the presence of dephasing* », J. Chem. Phys. **119**, 11773 (2003).
- [109] P.A. IVANOV, N.V. VITANOV & K. BERGMANN, « *Effect of dephasing on stimulated Raman adiabatic passage* », Phys. Rev. A **70**, 063409 (2004).

Information Quantique par Passage Adiabatique : Portes Quantiques et Décohérence

Résumé : La première partie de cette thèse est consacrée à l'élaboration théorique de processus adiabatiques permettant l'implémentation de *portes logiques quantiques*, les constituants élémentaires des ordinateurs quantiques, par l'interaction de champs laser impulsionnels avec des atomes. L'utilisation de techniques adiabatiques permet des implémentations *robustes*, *i.e.* insensibles aux fluctuations des paramètres expérimentaux. Les processus décrits dans cette thèse ne nécessitent que le contrôle précis des polarisations et des phases relatives des champs lasers. Ces processus permettent l'implémentation d'un *ensemble universel* de portes quantiques, autorisant l'implémentation de toute autre porte quantique par combinaisons.

La seconde partie de cette thèse concerne les effets de la décohérence par déphasage sur le passage adiabatique. La formule de probabilité de transition d'un système à deux niveaux tenant compte de ces effets décohérents est établie. Cette formule est valable dans les différents régimes, diabatique et adiabatique, et permet d'établir les paramètres de trajectoires elliptiques optimisant le transfert de population.

Mots clefs : passage adiabatique, information quantique, calcul quantique, portes logiques quantiques, décohérence.

Quantum Information by Adiabatic Passage : Quantum Gates and Decoherence

Abstract : The first part of this thesis is about adiabatic quantum processes designed for the implementation of *quantum logic gates*, the elementary components of quantum computers, by the interaction of pulsed laser fields with atoms. The adiabatic methods allow *robust processes*, *i.e.* which are not sensitive to the fluctuations of experimental parameters. The processes described in this thesis only require accurate control of the polarisations and the relative static phases of the laser fields. These processes allow the implementation of a *universal set of quantum gates*, which make possible the implementation of all the other quantum gates by combinations. The second part of this thesis concerns the effects of dephasing decoherence in adiabatic passage. The transition probability formula of a two level system with dephasing is established. This formula is valid in all regimes, from diabatic to adiabatic, and can be used to derive the parameters of elliptic trajectories that optimise the population transfer.

Key words : adiabatic passage, quantum information, quantum computation, quantum logic gates, decoherence.