



HAL
open science

Calcul et commande hiérarchisés des systèmes dynamiques : mis en oeuvre numérique et hybride

Régis Hurteau

► **To cite this version:**

Régis Hurteau. Calcul et commande hiérarchisés des systèmes dynamiques : mis en oeuvre numérique et hybride. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1977. Français. NNT : . tel-00176772

HAL Id: tel-00176772

<https://theses.hal.science/tel-00176772>

Submitted on 4 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée

A L'UNIVERSITE PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SC.ENCES)

pour l'obtention

du grade de DOCTEUR INGENIEUR

par

Richard HURTEAU

Ingénieur E.P. MONTREAL

**CALCUL ET COMMANDE HIERARCHISES
DES SYSTEMES DYNAMIQUES:
MISE EN OEUVRE NUMERIQUE ET HYBRIDE**

Soutenu le 29 Septembre 1977, devant la commission d'examen:

MM.

G. GRATELOUP
B. CHENEVEAUX
J. O'SHEA
M.G. SINGH
A. TITLI
A. TURGEON

President

}
Examineurs

AVANT - PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes du C.N.R.S.. A ce titre, je tiens à remercier les directeurs successifs du L.A.A.S., Monsieur le Professeur J. LAGASSE, Monsieur MARTINOT et Monsieur le Professeur GRATELOUP, Directeur actuel, qui ont bien voulu m'accueillir dans ce laboratoire.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à :

Messieurs G. GRATELOUP, Professeur et Directeur du LAAS

B. CHEVENEVEAUX, Maître de Conférences à l'ENSM de Nantes

J. O'SHEA, Directeur du Département de Génie Electrique de l'Ecole Polytechnique de Montréal,

M.G. SINGH, Maître de Conférences à l'U.P.S. de Toulouse

A. TITLI, Maître de Conférences à l'I.N.S.A. de Toulouse

A. TURGEON, Chargé de Recherche à l'I.R.E.Q.

pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de participer à la Commission d'Examen.

Je remercie également tous les membres de l'équipe "Commande Hiérarchisée" et plus particulièrement M.F. HASSAN avec qui j'ai travaillé en étroite collaboration ainsi que Monsieur MORA CAMINO pour l'aide qu'il m'a apportée lors de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier tous les membres du Service Informatique et Simulation, notamment Monsieur J.P. GOUYON pour son assistance dans la réalisation de la simulation hybride.

Enfin, je remercie toutes les personnes du Service Documentation qui ont participé à la réalisation matérielle de ce mémoire et Madame J. SOM à qui nous devons la dactylographie.

PRINCIPALES NOTATIONS

\underline{X} Vecteur X

$\dot{\underline{X}}$ Dérivée par rapport au temps de vecteur X

m_X Dimension du vecteur X

\underline{X}^T, A^T Vecteur et matrice transposés

\mathbf{O} Matrice nulle

$\|\underline{X}\|_Q^2 = \underline{X}^T Q X$ Forme quadratique associée à la matrice Q

\mathcal{X}_X Vecteur des dérivées partielles de l'Hamiltonien par rapport à X

$\mathbf{1}$ Matrice unité

$\text{diag}(G_i)$ Matrice bloc diagonale d'éléments G_i

$\lambda_{\min}(A)$ valeur propre minimum de la matrice A

INTRODUCTION GENERALE

La notion d'optimalité se retrouve au centre des préoccupations des mathématiciens et des ingénieurs depuis fort longtemps et si l'énoncé des principes mathématiques de la théorie de l'optimisation s'échelonne sur un laps de temps relativement long (Euler et Lagrange au 18ème siècle), les recherches modernes n'ont vraiment démarré qu'avec l'apparition de la théorie des systèmes (1960) et surtout le développement des moyens de calculs digitaux.

Ayant considéré des processus de plus en plus grands et complexes, et des moyens de calculs nouveaux, tant analogiques que digitaux ayant été développés, le problème du contrôle optimal de ces systèmes se pose avec une nouvelle acuité. Le travail présenté dans ce mémoire fait partie d'un ensemble beaucoup plus vaste de recherches sur la commande optimale des processus.

L'application directe des méthodes "classiques" d'optimisation aux systèmes de grande dimension, pose des problèmes nouveaux : problèmes de calcul liés directement à la taille de ces systèmes et problèmes de mise en place de la structure de commande, les grands systèmes étant généralement constitués par un ensemble de sous-processus interconnectés.

L'approche hiérarchisée, telle qu'énoncée par Mesarovic [1] répond directement à ces obstacles. L'idée directrice consiste à décomposer un système en plusieurs sous-systèmes plus aisés à manipuler, tandis que les interconnexions sont traitées par un coordonnateur gérant l'ensemble de la structure.

Notre étude traite d'une façon plus précise, l'application des méthodes de décomposition-coordination aux problèmes de commande optimale des systèmes dynamiques.

Dans le premier chapitre nous rappellerons les principaux concepts de la commande hiérarchisée. Les différentes méthodes possibles de décomposition selon une structure à deux niveaux seront examinées et nous étudierons plus particulièrement les problèmes engendrés par l'introduction de variables d'état dans l'équation de couplage.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des systèmes linéaires à critère quadratique. Dans le cas du problème de régulation, il est possible, selon une approche globale classique, de calculer une loi de commande en boucle fermée. Nous présenterons deux algorithmes multiriveaux permettant de calculer cette même loi d'une façon entièrement décentralisée. Ces deux méthodes sont appliquées comparativement sur un exemple comportant 52 variables d'état.

De plus, les problèmes de stabilité et de sous-optimalité relatifs à l'implantation d'une structure de commande hiérarchisée sont examinés.

Le chapitre III traite de la commande optimale des systèmes dynamiques non-linéaires. Nous présentons deux méthodes permettant de calculer une loi de commande en boucle fermée partielle, soit selon une approche globale, soit par décomposition.

L'application de ces méthodes au problème de la commande optimale de l'excitation d'une machine synchrone, nous permettra d'évaluer les performances de ces algorithmes.

Enfin, au chapitre IV nous examinons la possibilité d'améliorer en ligne la loi de commande obtenue ; un nouveau problème d'optimisation est alors défini et la commande du système est réalisée selon une structure à deux niveaux. La résolution de ce problème sur système hybride nous permettra d'évaluer les performances de cette structure de commande.

C H A P I T R E I

METHODES DE DECOMPOSITION-COORDINATION STRUCTURES A DEUX NIVEAUX

- I-1 Principe de décomposition-coordination
- I-2 Problème d'optimisation dynamique : approche hiérarchisée
 - I-2-1 - Formulation du problème. Conditions d'optimalité
 - I-2-2 - Méthode de décomposition-coordination
 - I-2-2-1 - Méthode admissible
 - I-2-2-2 - Méthode non-admissible
 - I-2-2-3 - Méthode mixte
 - I-2-3 - Couplage par variable d'état
- I-3 - Aspect dual de la décomposition
- I-4 - Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous rappellerons, en nous référant aux travaux de A. TITLI [1] sur la commande multi-niveaux, les principes de la commande hiérarchisée et les différentes méthodes de décomposition-coordination applicables aux problèmes d'optimisation dynamique.

I-1 - PRINCIPE DE DECOMPOSITION-COORDINATION

L'approche globale d'un problème de commande optimale peut se représenter selon le schéma fonctionnel figure I-1

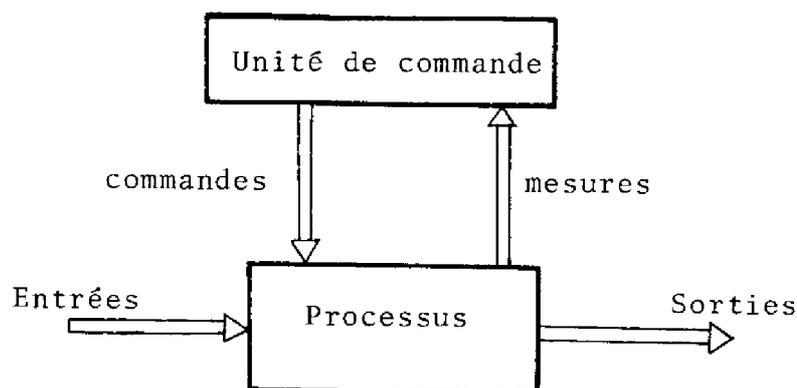


Figure I-1 - Structure "simple niveau-simple objectif"

Cette structure, dite "simple niveau-simple objectif", représente les relations entre le système de commande unique et le processus considéré comme un tout ; la loi de commande minimise un critère arbitraire, dans une certaine mesure, sous des contraintes égalités et/ou inégalités selon le cas. La résolution de ce type de problème d'optimisation est basée sur les résultats classiques de la programmation dynamique et du Principe du Maximum.

Cependant, attaquer la résolution d'un problème de grande dimension suivant de telles méthodes fera apparaître deux types de difficultés. D'une part, le temps calcul et l'emplacement mémoire nécessaires aux différents algorithmes de résolution, croissent d'une façon

prohibitif avec la dimension du système considéré. D'autre part, l'implantation directe de la commande s'avère peu adaptée au souci de l'ingénieur de disposer de commandes ayant une réalité physique immédiate.

En effet, la plupart des systèmes de grande dimension peuvent être représentés comme un ensemble de systèmes interconnectés et d'une façon semblable, un problème d'optimisation se présente souvent comme un ensemble de sous-problèmes couplés.

Dans cette optique, la commande hiérarchisée envisage différentes méthodes pour découper le problème d'optimisation en sous-problèmes solubles indépendamment ; ces sous-problèmes devant être coordonnés d'une manière ou d'une autre pour que la juxtaposition de leurs solutions conduise à la solution du problème initial global.

Au cours de notre étude nous nous intéresserons uniquement aux structures à 2 niveaux, telle que celle représentée dans la figure I-2.

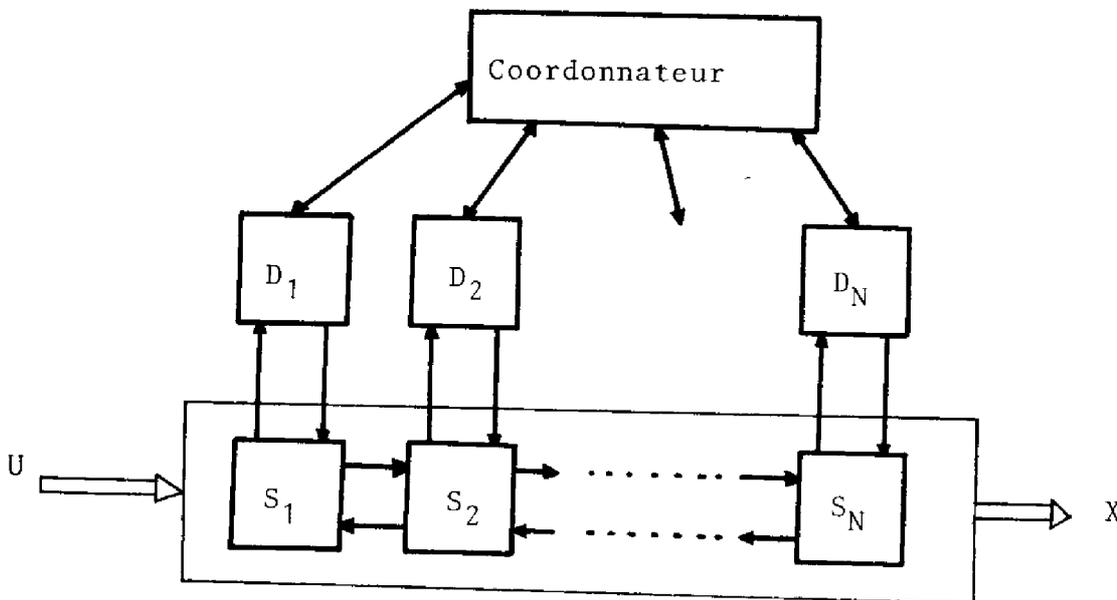


Figure I-2 - Structure à deux niveaux

Suivant ce schéma le processus est divisé en sous-systèmes qui sont commandés localement suivant des objectifs partiels. L'existence d'interactions implique l'intervention d'un coordonnateur au niveau supérieur qui reçoit l'information de chaque sous-système et synthétise une commande tenant compte du critère global.

Cette structure n'est sensée que si les sous problèmes sont notablement plus faciles à résoudre que le problème global et que si le travail de coordination est suffisamment simple pour assurer une convergence rapide vers la solution. Dans ce cas il devrait être possible de résoudre des problèmes d'optimisation plus importants que selon des méthodes globales, pour des moyens en calcul donnés (à noter l'utilisation possible de moyens de calcul parallèle).

L'existence d'une commande locale donne une grande flexibilité à la structure de commande, aussi il est possible d'imaginer l'adjonction de sous-systèmes nouveaux, ou de commandes locales redondantes pour des raisons de fiabilité.

Comme question préalable à l'exposé des méthodes de résolution hiérarchisées, se pose le problème du choix de la meilleure décomposition d'un système. Ce problème important est encore largement ouvert ; citons cependant les travaux de RICHETIN [33] sur l'analyse structurale des systèmes complexes.

Par la suite nous supposerons que la décomposition est suggérée par la réalité physique des sous-systèmes.

I-2 - PROBLEME D'OPTIMISATION DYNAMIQUE : APPROCHE HIERARCHISEE

I-2-1 - Formulation du problème. Conditions d'optimalité

Considérons un processus P décomposable en un ensemble de N sous-processus interconnectés P_i :

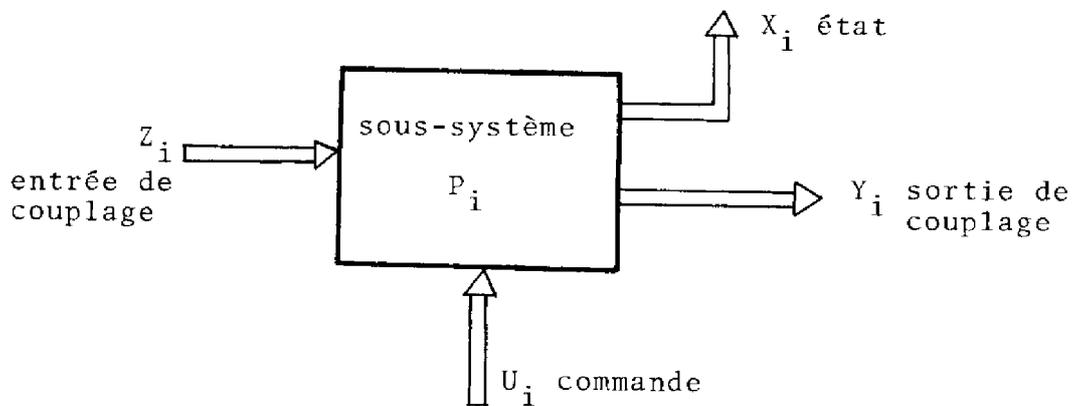


FIGURE I-3 - Schéma du sous-système n° i

avec pour le sous-système n° i :

- \underline{X}_i : vecteur d'état de dimension m_{X_i}
- \underline{U}_i : vecteur de commande de dimension m_{U_i}
- \underline{Z}_i : variables de couplage fournies par d'autres sous-systèmes
- \underline{Y}_i : sorties du système i jouant le rôle d'entrée pour d'autres sous-systèmes. Elles sont fonctions de l'état \underline{X}_i , des entrées de couplages \underline{Z}_i et des commandes \underline{U}_i .

Chaque sous-système est décrit par une équation dynamique :

$$\dot{\underline{X}}_i = f_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) \quad (\text{I-1})$$

une équation de modèle :

$$\underline{Y}_i = T_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) \quad (\text{I-2})$$

et une relation d'interconnexion entre les sous-systèmes :

$$\underline{Z}_i = H_i(\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_j, \dots, \underline{Y}_N) \quad (\text{I-3})$$

Le problème d'optimisation à résoudre pour ce système dynamique s'écrit de la façon suivante:

soit à minimiser le critère $J(u)$ par rapport à u

$$J(u) = \sum_{i=1}^N \left[\int_{t_0}^{t_f} r_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) dt + g_i(\underline{X}_i(t_f)) \right] \quad (I-4)$$

avec r_i et g_i fonctions scalaires continues et continuellement dérivables.

L'expression de critère est supposée séparable additivement.

La fonctionnelle $J(u)$ doit être minimisée sous les contraintes (I-1), (I-2) et (I-3) et sous les :

- contraintes inégalités instantannées :

$$Q_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) \leq 0 \quad i=1, \dots, N \quad (I-5)$$

- contraintes inégalités intégrales

$$\int_{t_0}^{t_f} P_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) dt \leq 0 \quad i=1, \dots, N \quad (I-6)$$

avec $\underline{X}(t_0)$ donnée et t_0, t_f fixés.

les fonctions f_i, T_i, H_i, Q_i et P_i sont supposées continues et continuellement dérivables.

Nous limiterons notre étude au cas où le temps final est fixé. Des méthodes très particulières sont employées pour un horizon libre [23] .

Parmi les méthodes possibles pour résoudre un tel problème nous retiendrons pour le cas continu, le calcul des variations et le Principe du Maximum.

Soit \mathcal{H} l'hamiltonien de ce problème :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left\{ \begin{aligned} & \Psi_i^T(t) \cdot f_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) - r_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) - \underline{y}_i^T(t) \cdot Q_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) \\ & - \underline{\lambda}_i^T \cdot P_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) - \underline{\alpha}_i^T(t) \cdot [T_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) - \underline{Y}_i] \\ & - \underline{\beta}_i^T(t) \cdot [\underline{Z}_i - H_i(\underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_j, \dots, \underline{Y}_N)] \end{aligned} \right\} \quad (I-7)$$

où $\underline{\Psi}_i(t)$, $\underline{\alpha}_i(t)$, $\underline{\beta}_i(t)$ sont des paramètres de Lagrange relatifs aux contraintes égalité et $\underline{\lambda}_i$, $\underline{\nu}_i(t)$ les paramètres de Kuhn-Tucker associés aux contraintes d'écart.

Les conditions nécessaires d'optimalité conduisant à une solution relative locale (si on fait l'hypothèse qu'il en existe au moins une) s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\underline{\Psi}} + \mathcal{H}_{\underline{X}} = 0 \end{array} \right\} \text{Equations d'Euler} \quad (\text{I-8})$$

$$\mathcal{H}_{\underline{Z}} = 0 \quad (\text{I-9})$$

$$\mathcal{H}_{\underline{U}} = 0 \quad (\text{I-10})$$

$$\mathcal{H}_{\underline{Y}} = 0 \quad (\text{I-11})$$

$$\underline{\nu}_i^T(t) \cdot Q_i = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\nu}_i(t) \geq 0 \quad \left. \vphantom{\underline{\nu}_i^T(t)} \right\} i=1, \dots, N \quad (\text{I-12})$$

$$\underline{\lambda}_i^T \cdot P_i = 0 \quad \text{et} \quad \underline{\lambda}_i \geq 0 \quad \left. \vphantom{\underline{\lambda}_i^T} \right\} i=1, \dots, N \quad (\text{I-13})$$

$$[\underline{\Psi}(t)]_- = [\underline{\Psi}(t)]_+ \quad (\text{conditions de Weierstrass-Erdmann}) \quad (\text{I-14})$$

$$0 = \underline{\Psi}_i(t_f) + g_{i\underline{X}_i}(t_f) \quad (\text{conditions de transversalité}) \quad (\text{I-15})$$

Cet ensemble de conditions doit être résolu avec en plus (I-1), (I-2), (I-3). Soit

$$\dot{\underline{X}} - \mathcal{H}_{\underline{\Psi}} = 0 \quad (\text{I-16})$$

$$\mathcal{H}_{\underline{\alpha}} = 0 \quad (\text{I-17})$$

$$\mathcal{H}_{\underline{\beta}} = 0 \quad (\text{I-18})$$

I-2-2 - Méthode de décomposition-coordination

Pour obtenir une répartition des calculs entre les deux niveaux de sorte que l'on ait à résoudre au niveau inférieur N sous-problèmes d'optimisation indépendants associés à chaque sous-système, il con-

vient de rendre l'Hamiltonien \mathcal{H} séparable additivement i.e. que $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}_i$

Ceci est réalisé en agissant sur la relation d'interconnexion qui relie tous les sous-systèmes, c'est-à-dire sur la séparation du terme

$$\sum_{i=1}^N \beta_i^T(t) \cdot [z_i - H_i(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_j, \dots, \underline{y}_N)] \quad (\text{I-19})$$

Sommairement, le choix des variables de coordination se réduit soit aux variables physiques de couplages \underline{y}_i , soit aux variables duales β_i , soit aux deux à la fois. Le type de décomposition dépendra de la nature de ces variables.

Le tableau en page 14 définit en détail les trois méthodes de décomposition-coordination. En nous référant à ce tableau nous rappellerons les caractéristiques de chacune des méthodes.

Méthode admissible : (coordination par le modèle)

Dans la méthode admissible le vecteur de coordination est composé du vecteur d'interconnexion \underline{y}_i . L'expression de l'Hamiltonien (I-7) s'écrit alors :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}'_i + \beta_i^T(t) [z_i - H_i(\underline{y}_1^{**}, \dots, \underline{y}_j^{**}, \dots, \underline{y}_N^{**})] = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}_i \quad (\text{I-20})$$

(les 2 astérisques désignent une variable fixée par le niveau supérieur).

Le niveau supérieur a pour tâche de déterminer les \underline{y}_i^{**} en résolvant l'équation $\mathcal{H}'_{\underline{y}} = 0$, par une méthode du gradient (par exemple). Le niveau inférieur se charge de résoudre N problèmes de minimisation indépendants pour $\underline{y}_i^{**}(t)$, $i=1, \dots, N$ donné.

Remarque : 1) L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'à chaque pas du coordonnateur, la solution trouvée satisfait toutes les contraintes et est donc admissible.

2) Au niveau inférieur les z_i sont directement déterminés par la relation d'interconnexion $z_i = H_i(\underline{y}_1^{**}, \dots, \underline{y}_j^{**}, \dots, \underline{y}_N^{**})$;

Répartition des équations entre les niveaux	Méthode admissible coordination par le module		Méthode non-admissible coordination par le critère		Méthode mixte coordination mixte	
	Niveau inférieur N. I.	Niveau Supérieur N. S.	N. I.	N. S.	N. I.	N. S.
$\dot{\psi} + \mathcal{H}_{\psi} = 0$	X		X		X	
$\mathcal{H}_{\underline{z}} = 0$	X		X		X	
$\mathcal{H}_{\underline{u}} = 0$	X		X		X	
$\mathcal{H}_{\underline{y}} = 0$		X	X			X
$\dot{Y}_i(t) Q_i = 0, Y_i \geq 0$	X		X		X	
$\lambda_i^T P_i = 0, \lambda_i \geq 0$	X		X		X	
$[\psi] = [\psi]$	X		X		X	
$\psi_i(t_f) = -\beta_i \dot{X}_i(t_f)$	X		X		X	
$\dot{X} - \mathcal{H}_{\psi} = 0$	X		X		X	
$\mathcal{H}_{\alpha} = 0$	X		X		X	
$\mathcal{H}_{\beta} = 0$	X			X		X
variables de coordination	$\underline{Y}(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ \vdots \\ Y_N(t) \end{bmatrix}$		$\underline{\beta}(t) = \begin{bmatrix} \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_N(t) \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \underline{Y}(t) \\ \underline{\beta}(t) \end{bmatrix}$	
sous problème no. i	$\text{Min}_{\underline{U}_i} \left[\int_{t_0}^{t_f} r_i(X_i, U_i, Z_i) dt + g_i(X_i(t_f)) \right]$ <p>sous: $\dot{X}_i = f_i(X_i, U_i, Z_i)$ $Y_i = T_i(X_i, U_i, Z_i)$ $Z_i = H_i(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ $Q_i \geq 0; \int_{t_f}^0 P_i dt \gg 0$ pour $\underline{Y}(t)$ donné</p>	$\text{Min}_{\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Y}_i} \left[\int_{t_0}^{t_f} \left[r_i + \beta_i^T Z_i - \sum_{j=1}^N \beta_j^T h_{ji}(\alpha_j) \right] dt + g_i(X_i(t_f)) \right]$ <p>sous: $\dot{X}_i = f_i(X_i, U_i, Z_i)$ $Y_i = T_i(X_i, U_i, Z_i)$ $Q_i \geq 0; \int_{t_f}^0 P_i dt \gg 0$ pour $\underline{\beta}(t)$ donné</p>	$\text{Min}_{\underline{X}_i, \underline{U}_i} \left[\int_{t_0}^{t_f} \left[r_i + \beta_i^T [Z_i - H_i(\alpha_1, \dots, \alpha_N)] \right] dt + g_i(X_i(t_f)) \right]$ <p>sous: $\dot{X}_i = f_i(X_i, U_i, Z_i)$ $Y_i = T_i(X_i, U_i, Z_i)$ $Q_i \geq 0; \int_{t_0}^{t_f} P_i dt \gg 0$ pour $\underline{Y}(t)$ et $\underline{\beta}(t)$ donnés</p>			
Algorithme de coordination (gradient) $\sigma =$ temps de coordination $k =$ constante d'itération	$\frac{d Y_i(t)}{d \sigma} = - \mathcal{H}_{Y_i}(t)$ <p>ou</p> $Y_i^{\sigma+1}(t) = Y_i(t) + k \left[\mathcal{H}_{Y_i}(t) \right]^{\sigma}$	$\frac{d \beta_i(t)}{d \sigma} = - \mathcal{H}_{\beta_i}(t)$ <p>ou</p> $\beta_i^{\sigma+1}(t) = \beta_i(t) - k \left[\mathcal{H}_{\beta_i}(t) \right]^{\sigma}$	$\frac{d Y_i(t)}{d \sigma} = - \mathcal{H}_{Y_i}(t)$ $\frac{d \beta_i(t)}{d \sigma} = - \mathcal{H}_{\beta_i}(t)$			
Conditions d'applicabilité	$m_{U_i} \gg m_{Y_i}$	Existence d'un point col pour le lagrangien associé au problème				

les \underline{Y}_i^{**} étant connus comme solution de la relation du modèle
 $\underline{Y}_i^{**} = T_i(\underline{X}_j, \underline{U}_i, \underline{Z}_i)$. Nous avons donc à résoudre un système de
 m_Y équations à m_{u_i} inconnues. D'où la condition nécessaire
 d'applicabilité:

$$m_{u_i} \geq m_{Y_i}$$

qui constitue une restriction importante sur la structure de la dé-
 composition.

Méthode non-admissible

Dans cette méthode, la séparation de l'hamiltonien est réali-
 sée en traitant l'équation de couplage, représentée par $\mathcal{H}_\beta = 0$ au niveau
 supérieur.

Considérons une forme non-linéaire séparable de l'équation
 de couplage

$$\underline{Z}_i = \sum_{j=1}^N h_{ij}(\underline{Y}_j) \quad (I-21)$$

où h_{ij} sont des fonctions d'interconnexion.

Le terme de l'Hamiltonien (I-19) qui nous intéresse s'écrit
 alors

$$\sum_{i=1}^N \beta_i^{**} \cdot \underline{Z}_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \beta_i^{**} \cdot h_{ij}(\underline{Y}_j) = \sum_{i=1}^N \beta_i^{**} \cdot \underline{Z}_i - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \beta_j^{**} \cdot h_{ji}(\underline{Y}_i) \quad (I-22)$$

Sous cette forme et pour β_j^{**} donné, ce terme est caractéristique du
 sous-problème n° i et $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}_i$

Au niveau supérieur (tableau page 14) nous avons donc N sous-
 problèmes d'optimisation à résoudre dont le critère est modifié
 (coordination par le critère). Le niveau supérieur résout l'équation
 de couplage et toutes les contraintes ne seront satisfaites qu'à la
 convergence de la structure. C'est donc une méthode non-admissible.

Méthode mixte :

Les $\underline{\beta}_i(t)$ et les $\underline{Y}_i(t)$ jouent dans cette méthode, simultanément le rôle de paramètres de coordination. Les équations \mathcal{H}_p et \mathcal{H}_Y sont résolues au niveau supérieur et le niveau inférieur traitera les autres conditions.

De la même façon que pour la méthode admissible, une condition nécessaire d'applicabilité est imposée sur la structure de la décomposition soit :

$$m_{Z_i} + m_{U_i} \geq m_{Y_i}$$

I-2-3 - Couplage par variable d'état

L'application des méthodes de décomposition aux systèmes dynamiques imposent de considérer le cas très fréquent où les variables d'état peuvent faire partie des variables d'interconnexions entre les sous-systèmes (jusqu'à maintenant les variables \underline{Y}_i étaient différentes des variables \underline{X}_i).

L'équation de modèle (I-2) n'est plus utile et les sous-systèmes sont alors représentés par la figure I-4.

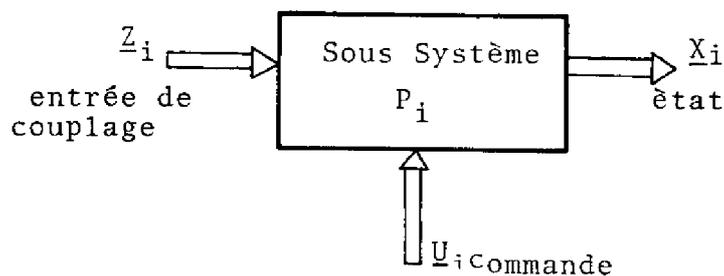


Figure I-4 - Sous-système n° i

L'équation d'interconnexion (I-3) devient :

$$\underline{Z}_i = H_i(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_j, \dots, \underline{X}_N)$$

Et le problème de minimisation s'écrit :

$$\text{Min}_{\underline{U}_i(t)} J = \sum_{i=1}^N \left[\int_{t_0}^{t_f} r_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) dt + g_i(\underline{X}_i(t_f)) \right] \quad (\text{I-23})$$

sous $\dot{\underline{X}}_i = f_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) \quad (\text{I-24})$

$$\underline{Z}_i = H_i(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_j, \dots, \underline{X}_N) \quad (\text{I-25})$$

$$Q_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) \leq 0 \quad (\text{I-26})$$

$$\int_{t_0}^{t_f} P_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) dt \leq 0 \quad (\text{I-27})$$

pour $\underline{X}_i(t_0)$ donné $i = 1 \dots N$
et t_0, t_f fixés

Nous allons examiner maintenant les difficultés engendrées par l'application des procédures décrites dans la section précédente.

Méthode admissible :

Dans la méthode admissible, nous serions amené à choisir comme variables de coordination les $\underline{X}_i(t)$. Les équations dynamiques $\dot{\underline{X}}_i - \mathcal{H}_\psi = 0$ étant résolues au niveau inférieur, tandis que les conditions $\dot{\underline{\Psi}}_i - \mathcal{H}_x = 0$ sont utilisées au niveau supérieur. D'où conflit et les méthodes admissibles et mixtes classiques ne seront donc pas applicables au couplage par variable d'état.

Méthode non admissible :

La séparation des tâches n'est pas remise en cause dans la méthode non-admissible. Au niveau inférieur l'hamiltonien du problème d'optimisation n°i s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i = & \underline{\Psi}_i^T(t) \cdot f_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) - r_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) - \underline{y}_i^T(t) Q_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) \\ & - \underline{\lambda}_i^T \cdot P_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) - \underline{\beta}_i^{**T} \underline{Z}_i + \sum_{j=1}^N \underline{\beta}_j^{**T} h_{ji}(\underline{X}_j) \end{aligned} \quad (\text{I-28})$$

La condition nécessaire d'optimalité $\mathcal{H}_{Z_i=0}$ ne permettra pas de déterminer directement les Z_i si ces variables apparaissent linéairement dans l'expression de l'hamiltonien (à fortiori dans le cas d'un système linéaire, donc à couplage linéaire, et à critère quadratique). Nous aurons donc, le plus souvent, un problème singulier au niveau inférieur.

Pour contourner cette difficulté Bauman dans [13] propose d'élever l'équation de couplage au carré

$$Z_i^2 = \left(\sum_{j=1}^N h_{ij}(X_j) \right)^2$$

Cette méthode peut rendre le problème "non-séparable" et présente l'inconvénient de générer des solutions parasites du type

$Z_i = - \sum_{j=1}^N h_{ij}(X_j)$; les algorithmes de résolution peuvent converger aussi bien vers la vraie solution que vers la fausse.

Dans le même ordre d'idée Titli et al [6] propose une méthode non-admissible possédant les mêmes restrictions d'applicabilité que celle de Bauman mais qui améliore l'efficacité de la structure à deux niveaux [6]. Elle suppose que les contraintes d'interconnexion $Z = H(X)$ puissent se mettre sous la forme $X = H^{-1}(Z)$ et que la substitution du terme en X dans le critère par $H^{-1}(Z)$ conserve la séparabilité du problème. Le critère est alors non-linéaire en X et non-linéaire en Z .

Dans le cas d'un système linéaire à critère quadratique, Pearson [3] ajoute simplement au critère un terme en Z ($\frac{1}{2} \|Z\|_S^2$). Cela présente comme inconvénient d'avoir à pondérer dans le critère les termes de couplage qui n'ont pas forcément de sens physique précis.

Méthode mixte modifiée

Pour contourner la difficulté mentionnée au début pour les méthodes mixtes, Titli et al [6] propose de choisir comme variable de coordination les vecteurs $Z(t)$ et $\beta(t)$. Le niveau supérieur traite alors les équations $\mathcal{H}_\beta = 0$ et $\mathcal{H}_Z = 0$.

Remarquons cependant que la résolution de $\mathcal{H}_Z = 0$ qui s'écrit

$$\mathcal{H}_{Z_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial Z_i}\right)^T \cdot \Psi_i(t) - \frac{\partial r_i}{\partial Z_i} - \left(\frac{\partial Q_i}{\partial Z_i}\right)^T \cdot \underline{y}_i(t) - \left(\frac{\partial P_i}{\partial Z_i}\right)^T \cdot \underline{\lambda}_i - \underline{\beta}_i(t) \quad (I-30)$$

$i=1 \text{ à } N$

implique un transfert d'information très important vers le niveau supérieur.

Dans le cas des systèmes linéaires à critère quadratique, cette méthode telle qu'elle fut introduite par Takahara [15], se simplifie et permet la mise en oeuvre d'une procédure à itération directe (comme nous le verrons au chapitre II).

I-3 - ASPECT DUAL DE LA DECOMPOSITION

Nous avons présenté jusqu'à maintenant les méthodes de décomposition en manipulant les conditions nécessaires d'optimalité de façon à obtenir une séparation des calculs. Dans cette section, nous verrons comment la décomposition et la coordination peuvent être considérées comme des opérations primales et duales.

D'une façon générale, le problème d'optimisation considéré dans la section I-2-3, s'écrit en abandonnant les contraintes inégalités instantannées (I-26) et intégrales (I-27) :

$$\text{Min } J(\underline{U}) = \sum_{i=1}^N \left[\int_{t_0}^{t_f} r_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) dt + g_i(\underline{X}_i(t_f)) \right]$$

sous :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{X}}_i &= f_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) \\ \underline{Z}_i &= \sum_{j=1}^N h_{ij}(\underline{X}_j) \end{aligned} \quad i = 1, \dots, N$$

avec

$$\underline{X}_i(t_0) = \underline{x}_{i_0} \text{ et } t_f \text{ fixés} \quad (I-31)$$

et constitue le problème primal.

On peut définir la fonction \mathcal{L} [18] :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}, \underline{\beta}) &= \sum_{i=1}^N r_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i) + \underline{\beta}_i^T \cdot (\underline{Z}_i - \sum_{j=1}^N h_{ij}(\underline{X}_j)) \\ &\quad + \underline{\lambda}_i^T \cdot (-\dot{\underline{X}}_i + f_i(\underline{X}_i, \underline{U}_i, \underline{Z}_i)) \end{aligned} \quad (I-32)$$

La fonction duale :

$$\Phi(\underline{\beta}) = \min_{\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}} \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}, \underline{\beta}) \quad (\text{I-33})$$

et le problème dual :

$$\max_{\underline{\beta}} \Phi(\underline{\beta}) = \max_{\underline{\beta}} \min_{\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}} \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}, \underline{\beta}) \quad (\text{I-34})$$

L'intérêt de formuler ce problème dual est que sous certaines conditions (cf.-ci-dessous), si \underline{X}^* , \underline{U}^* , \underline{Z}^* , $\underline{\beta}^*$ sont une solution de (I-34), alors \underline{U}^* est une solution du problème primal (I-31) ; le problème (I-31) est alors équivalent au problème (I-34).

La structure de résolution possible à deux niveaux est alors évidente. Au niveau inférieur pour $\underline{\beta}^{**}$ donné, N problèmes de minimisation sont résolus par rapport à $\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}$. Le niveau supérieur traitera le problème dual $\max_{\underline{\beta}} \Phi(\underline{\beta})$ et on en déduit la méthode non-admissible.

Les conditions pour lesquelles le problème primal et dual ont la même solution sont résumées dans le théorème de forte dualité de Lagrange [18] soit :

$$\max_{\underline{\beta}} \Phi(\underline{\beta}) = \min_{\underline{U}} J$$

Si le critère est convexe ainsi que le domaine admissible, c'est-à-dire :

- contraintes égalités linéaires
- contraintes inégalités positives et concaves

Ces conditions sont à relier à l'étude de l'existence d'un point col pour la fonction $\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{z}, \underline{\beta})$ (cf. tableau P.14). En effet, si nous reprenons explicitement l'écriture du problème primal et dual :

$$\begin{array}{ll} \text{primal :} & \min_{\underline{U}} \max_{\underline{X}, \underline{Z}, \underline{\beta}} \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}, \underline{\beta}) \\ \text{dual :} & \max_{\underline{\beta}} \min_{\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}} \mathcal{L}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}, \underline{\beta}) \end{array}$$

L'équivalence entre ces relations définit un problème de minimax et elle ne sera atteinte que s'il existe un point col (ou point selle) pour la fonction $\mathcal{L}(\underline{X}, \underline{U}, \underline{Z}, \underline{\beta})$ [34] .

Ces conditions sont des conditions suffisantes mais non nécessaires. Donc les méthodes de décomposition-coordination par le critère, basées sur le théorème de forte dualité de Lagrange, ne seront applicables, en général, qu'aux systèmes dynamiques linéaires comme le fait remarquer Javdan dans [25] .

Dans le cas de systèmes non-linéaires, les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre sont satisfaites, mais non les conditions suffisantes du théorème de forte dualité, il est alors possible qu'il existe une marge de dualité entre le problème primal et dual et que les méthodes de décomposition-coordination ne permettent d'atteindre la solution globale.

II-4 - CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons vu comment les méthodes de décomposition-coordination, directement issues du cas statique [1] , peuvent être appliquées à des systèmes dynamiques interconnectés.

La présence de variables d'état parmi les variables d'interconnexion réduit considérablement le champ d'application de ces méthodes. Il existe comme nous l'avons souligné, différentes possibilités de contourner ces difficultés. Par la suite nous retiendrons principalement la méthode non-admissible et la méthode de prédiction des interactions (méthode mixte) qui présentent l'avantage de définir une tâche de coordination extrêmement simple.

Nous avons également souligné, les restrictions d'applicabilité dues à l'aspect dual de la répartition des calculs.

De plus, ces méthodes présentent comme inconvénient majeur de ne satisfaire les contraintes du système global qu'à la fin des itérations du coordonnateur. La rapidité de convergence

sera donc un facteur déterminant, si l'on veut envisager l'implantation "en ligne" de ces méthodes.

Ce problème de disposer d'algorithmes de résolution "en ligne" fera l'objet des chapitres suivants.

C H A P I T R E II

SYSTEMES LINEAIRES A CRITERE QUADRATIQUE : OBTENTION D'UNE LOI DE COMMANDE EN BOUCLE FERMEE

- II-1 Introduction
- II-2 Application du Principe de Prédiction
- II-3 Résolutions des sous-problèmes d'optimisation
- II-4 Loi de commande en boucle fermée
- II-5 Application au problème du contrôle de la pollution d'une rivière
- II-6 Structure de commande hiérarchisée : stabilité et sous-optimalité
- II-7 Conclusion

II-1 - INTRODUCTION

D'une façon générale, les méthodes de décomposition-coordination conduisent à traiter au niveau inférieur des sous-problèmes d'optimisation de même nature que le problème global ; ces sous problèmes sont évidemment de dimension réduite et peuvent être résolus simultanément.

Au niveau calcul, cela revient à transformer un problème demandant un emplacement mémoire très grand, en un problème demandant peu de place mémoire mais plus de temps de calcul en général (dans le cas où l'on ne dispose pas d'unité de calcul parallèle).

En pratique, peu de systèmes auront une dynamique suffisamment lente pour envisager le calcul d'une loi de commande en ligne et la possibilité de résoudre le problème hors-ligne est peu attrayante puisqu'elle doit être répétée pour chaque condition initiale.

En effet, au niveau inférieur, les conditions nécessaires d'optimalité définissent un problème de type "avec condition aux deux bouts" et généralement, les méthodes itératives de résolution fournissent une loi de commande en boucle ouverte, sauf pour le cas des systèmes linéaires à critère quadratique.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons précisément au problème de régulation d'un ensemble de systèmes linéaires interconnectés ; il s'agit de conduire un système de grande dimension d'un état initial quelconque, à son régime permanent, et ce d'une façon optimale par rapport à un critère.

Selon une approche globale classique, la résolution de ce problème permet de définir une structure de commande en boucle fermée.

Les premiers travaux effectués pour développer des méthodes qui fournissent une loi de commande en boucle fermée pour des systèmes interconnectés, ont été réalisés par Cheneveaux. Il propose dans [34] un algorithme de résolution hors ligne en

deux temps. Premièrement les N sous problèmes locaux sont résolus indépendamment des interactions qui les lient. Les régulations locales ainsi calculées sont en boucle fermée. Au niveau supérieur le coordonnateur doit déterminer une loi de commande qui tient compte des interactions. Cheneveaux propose de trouver cette loi en résolvant le problème global, donc en calculant la matrice de gain globale. Au niveau coordonnateur la matrice de gain recherchée est alors égale à la différence entre la matrice de gain globale et la matrice de gain bloc-diagonale des sous-processus. Evidemment cette méthode présente l'inconvénient majeur d'avoir à résoudre le problème global.

Plus récemment et dans une optique différente, Cohen et al [25] ont examiné ce problème et sont arrivés à la conclusion qu'il est seulement possible d'obtenir une commande en boucle fermée partielle. Leur méthode de décomposition est applicable en ligne et chaque itération améliore la commande pour un système périodique.

Dans ce chapitre nous étudierons comparativement deux algorithmes développés par Singh et al [16] et par Hassan et al [20]. Ces algorithmes, basés sur le principe de prédiction des interactions de Takahara, permettent de calculer hors-ligne et d'une façon décentralisée, une structure de commande hiérarchisée en boucle fermée.

Le principe de cette approche est l'existence d'une relation linéaire entre la partie de commande en boucle ouverte et les états de tous les sous-systèmes. Pour le régulateur à horizon de temps infini, cette relation est constante et peut être déterminée hors ligne en résolvant d'abord le problème d'optimisation à l'aide d'une méthode de décomposition-coordination.

Par la suite, nous examinerons le problème de la stabilité et de la sous-optimalité d'une structure de commande hiérarchisée dans le cas de fonctionnement dégradé.

II-2 - APPLICATION DU PRINCIPE DE PREDICTION

Le problème d'optimisation dynamique pour un système interconnecté linéaire s'écrit de la façon suivante :

$$\text{Minimiser } J = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{1}{2} \|\underline{x}_i - \underline{x}_i^*\|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \|\underline{u}_i - \underline{u}_i^*\|_{R_i}^2 \right) dt \quad (\text{II-1})$$

où Q_i est une matrice semi-définie positive

R_i est une matrice définie positive

sous les contraintes : équation dynamique du modèle

$$\dot{\underline{x}}_i = A_i \underline{x}_i + B_i \underline{u}_i + C_i \underline{z}_i + \underline{D}_i, \quad i=1,2,\dots,N \quad (\text{II-2})$$

: équation d'interconnexion

$$\underline{z}_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} \underline{x}_j, \quad i=1,\dots,N \quad (\text{II-3})$$

$$\underline{x}_i(t_0) = \underline{x}_{i0}, \quad t_0, t_f \text{ fixés} \quad (\text{II-4})$$

où \underline{x}_i^* est le vecteur de consigne du régulateur du système n° i

\underline{D}_i vecteur de perturbation connu et constant.

Nous rappelons rapidement le principe de prédiction des interactions tel que présenté par Singh et al. dans [10]

Définissons la fonction duale

$$\Phi(\lambda) = \text{Min.}_{\underline{x}_i, \underline{u}_i} \left\{ L(\underline{x}_i, \underline{u}_i, \lambda, \underline{z}_i) \right\} \quad (\text{II-5})$$

$$\text{où } L(\underline{x}_i, \underline{u}_i, \lambda, \underline{z}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \|\underline{x}_i - \underline{x}_i^*\|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \|\underline{u}_i - \underline{u}_i^*\|_{R_i}^2 + \lambda_i^T \left(\underline{z}_i - \sum_{j=1}^N L_{ij} \underline{x}_j \right) + p_i^T (-\dot{\underline{x}}_i + A_i \underline{x}_i + B_i \underline{u}_i + C_i \underline{z}_i + \underline{D}_i) \right\} \quad (\text{II-6})$$

où $\underline{\lambda}$: multiplicateur de Lagrange de dimension $\sum_{i=1}^N m_{z_i}$
 \underline{p}_i : variables adjointes de dimension m_{x_i}

Le théorème de forte dualité de Lagrange permet d'écrire :

$$\text{Max}_{\underline{\lambda}} \Phi(\underline{\lambda}) = \text{Min}_{\underline{u}_i} J, \quad i=1, \dots, N \quad (\text{II-7})$$

Donc pour résoudre (II-1) sous (II-2), (II-3) et (II-4), il suffit de maximiser $\Phi(\underline{\lambda})$ et ceci peut être réalisé par une structure de calcul à deux niveaux.

En effet pour une trajectoire $\underline{\lambda}$ et \underline{z}_i donnée, la lagrangien L est séparable additivement :

$$L = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \|\underline{x}_i - \underline{x}_i\|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \|\underline{u}_i - \underline{u}_i\|_{R_i}^2 - \sum_{j=1}^N \underline{\lambda}_j^T L_{ji} \underline{x}_i + \underline{\lambda}_i^T \underline{z}_i + \underline{p}_i^T (-\underline{x}_i + A_i \underline{x}_i + B_i \underline{u}_i + C_i \underline{z}_i + \underline{D}_i) \right\} \quad (\text{II-8})$$

Alors pour \underline{z}_i et $\underline{\lambda}$ donnés, le minimum de L par rapport à \underline{x}_i et \underline{u}_i , ($i = 1 \dots N$) peut être obtenu en résolvant les N problèmes de minimisation décrits par les L_i en (II-8). Il reste dans ce cas, à améliorer les trajectoires \underline{z}_i et $\underline{\lambda}$ de telle sorte que le $\text{Max} \Phi(\underline{\lambda})$ soit atteint.

Ce dernier travail sera exécuté au niveau supérieur par le coordonnateur. Les conditions nécessaires pour maximiser $\Phi(\underline{\lambda})$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \underline{\lambda}} = 0 & \quad \text{soit} \quad \underline{\lambda}_i = -C_i^T \underline{p}_i & (\text{II-9}) \\ \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \underline{z}_i} = 0 & \quad \text{soit} \quad \underline{z}_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} \underline{x}_j \end{aligned}$$

La règle de coordination tirée du principe de prédiction s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \underline{\lambda}_i \\ \underline{z}_i \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} -C_i^T \underline{p}_i \\ \sum_{j=1}^N L_{ij} \underline{x}_j \end{bmatrix}^k \quad i=1, \dots, N \quad (\text{II-10})$$

La structure de calcul est représentée dans la figure II-1.

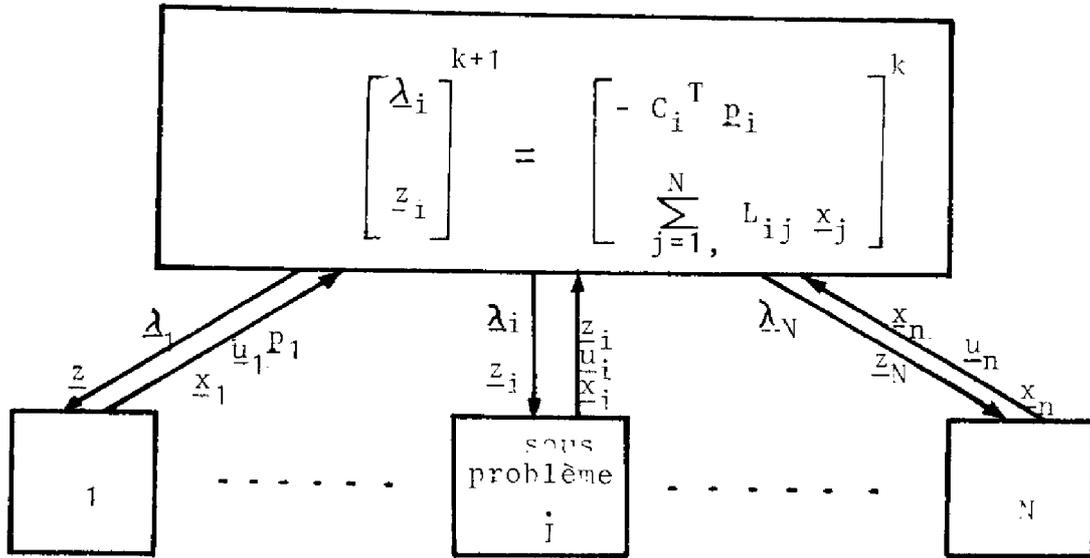


Figure II-1

Les x_i , u_i , p_i obtenus au niveau inférieur par la solution des problèmes de minimisation définie en (II-8) sont utilisés dans l'équation (II-10) pour calculer les prédictions de λ_i et z_i .

Cet algorithme fut d'abord proposé par Takahara [15] qui a étudié sa convergence.

II-3 - RESOLUTION DES N PROBLEMES D'OPTIMISATION INDEPENDANTS

Au niveau inférieur nous avons donc à résoudre N sous-problèmes de minimisation indépendants qui correspondent à la forme séparée du Lagrangien (II-8).

L'hamiltonien du ième problème est défini tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \|x_i - x_i^*\|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \|u_i - u_i^*\|_{R_i}^2 + \lambda_i^T z_i - \sum_{j=1}^N \lambda_j^T L_{ji} x_i \\ & + p_i^T (A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i + D_i) \end{aligned} \quad (II-11)$$

Les conditions nécessaires d'optimalité permettent d'écrire :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \underline{u}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u}_i = -R_i^{-1} B_i^T \underline{p}_i + \underline{u}_i^* \quad (\text{II-12})$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \underline{p}_i} = \overset{\circ}{\underline{x}}_i = A_i \underline{x}_i + B_i \underline{u}_i + C_i \underline{z}_i + \underline{D}_i \quad (\text{II-13})$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \underline{x}_i} = \overset{\circ}{\underline{p}}_i = Q_i (\underline{x}_i - \underline{x}_i^*) + A_i^T \underline{p}_i - \sum_{j=1}^N \left[\underline{d}_j^T L_{ji} \right]^T \quad (\text{II-14})$$

avec $\underline{p}_i(t_f) = 0$

II-3-1 - Résolution par l'équation de Riccati

Si l'on pose :

$$\underline{p}_i = K_i \underline{x}_i + \underline{s}_i \quad (\text{II-15})$$

$$\text{alors : } \overset{\circ}{\underline{p}}_i = K_i \overset{\circ}{\underline{x}}_i + \overset{\circ}{K}_i \underline{x}_i + \overset{\circ}{\underline{s}}_i \quad (\text{II-16})$$

En substituant (II-12) et (II-16) and (II-13) on obtient :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\underline{x}}_i &= A_i \underline{x}_i - B_i R_i^{-1} B_i^T K_i \underline{x}_i - B_i R_i^{-1} B_i \underline{s}_i \\ &+ B_i \underline{u}_i^* + C_i \underline{z}_i + \underline{D}_i \end{aligned} \quad (\text{II-17})$$

L'équation (II.14) s'écrit à l'aide de la relation (II.16) et (II.17) :

$$\begin{aligned} &\left[\overset{\circ}{K}_i + A_i^T K_i + K_i A_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i^T K_i + Q_i \right] \underline{x}_i \\ &+ \overset{\circ}{\underline{s}}_i + A_i^T \underline{s}_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i^T \underline{s}_i + K_i C_i \underline{z}_i + K_i \underline{D}_i - Q_i \underline{x}_i^* \\ &+ K_i B_i \underline{u}_i^* - \sum_{j=1}^N \left(\underline{d}_j^T L_{ji} \right)^T = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

Vérifier (II-18) indépendamment de \underline{x}_i impose de satisfaire simultanément les 2 systèmes d'équations suivantes :

- l'équation matricielle de Riccati :

$$\dot{K}_i + A_i^T K_i + K_i A_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i^T K_i + Q_i = 0 \quad (\text{II-19})$$

avec $K_i(t_f) = 0$

- une équation vectorielle de compensation

$$\begin{aligned} \dot{\underline{s}}_i + A_i^T \underline{s}_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i^T \underline{s}_i + K_i C_i \underline{z}_i + K_i D_i - Q_i \underline{x}_i^* \\ + K_i B_i \underline{u}_i^* - \sum_{j=1}^N (\underline{\lambda}_j^T L_{ji})^T = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

avec $\underline{s}_i(t_f) = 0$

Et la commande locale u_i est alors égale à :

$$\underline{u}_i = -R_i^{-1} B_i^T K_i \underline{x}_i - R_i^{-1} B_i^T \underline{s}_i + \underline{u}_i^* \quad (\text{II-21})$$

Remarques :

1) La solution $K(t)$ de l'équation matricielle de Riccati étant symétrique, nous avons N systèmes de $m_{x_i} \cdot (m_{x_i} + 1)/2$ équations différentielles non linéaires à résoudre à partir de la condition finale $K_i(t_f) = 0$. Ces solutions sont indépendantes des conditions initiales et constituent une contre-réaction partielle au niveau de chaque sous-système.

Les N équations de Riccati ne sont résolues qu'une seule fois, en l'occurrence à la 1ère itération du coordonnateur, soit lorsque $\underline{\lambda}(t) = 0$ et $\underline{z}(t) = 0$. Les sous-systèmes sont alors considérés découplés.

2) Le vecteur de compensation \underline{s}_i n'est pas indépendant des conditions initiales $\underline{x}_i(t_0)$. En effet, les termes \underline{z}_i et $\underline{\lambda}_i$ qui sont fixés par le coordonnateur, dépendent de $\underline{x}_i(t_0)$ par les relations (II-10) comme le montre l'écriture de l'équation (II-20) à l'optimum :

$$\begin{aligned} \underline{s}_i^0 = & (-A_i^T + K_i B_i R_i^{-1} B_i^T) \underline{s}_i - K_i C_i \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j - K_i D_i \\ & + Q_i x_i^* - K_i B_i u_i^* + \sum_{j=1}^N L_{ji}^T (-C_j^T K_j x_j - C_j^T \underline{s}_j) \quad (\text{II-22}) \end{aligned}$$

Le second terme dans (II-21) est donc en boucle ouverte et il est relié aux interconnexions entre les sous-systèmes.

II-3-2 - Par prédiction du vecteur adjoint

Une autre façon possible de résoudre les sous-problèmes d'optimisation est d'utiliser une méthode prédictive du vecteur adjoint [19]. Le problème initial est alors résolu selon l'algorithme de calcul à trois niveaux suivant :

- Etape n° 1 : l'index d'itération k du coordonnateur est positionné égale à 1 ($k=1$) et les trajectoires λ_i^k et z_i^k sont prédites (par exemple $\lambda_i^k(t)=0, z_i^k(t)=0$).
- Etape n° 2 : l'index d'itération l du 2ème niveau est positionné égal à 1 ($l=1$) et les trajectoires $p_i^{kl}(t)$ sont prédites.
- Etape n° 3 : Pour chacun des N sous-systèmes, la commande $u_i^{kl}(t)$ est calculée en utilisant la relation (II-12). L'intégration de l'équation (II-13) à partir des conditions initiales $x_i(t_0) = x_{i0}$ et en utilisant $u_i^{kl}(t)$ permettent d'obtenir les trajectoires des états $x_i(t)$.
- Etape n° 4 : Au second niveau l'intégration à rebours de l'équation (II-14) avec comme condition finale $p_i(t_f)=0$ donne les nouvelles prédictions de $p_i^{k(l+1)}(t)$.
- Etape n° 5 : Calcul de l'erreur de prédiction du vecteur adjoint pour chaque sous système

$$\epsilon_{p_j} = \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} (p_i^{k(l+1)} - p_i^{kl})^2 dt}$$

Si $\epsilon_{p_i} > E_{p_i}$ où E_{p_i} est une constante choisie arbitrairement, retourner en 3. Sinon

Etape n° 6 : Calculer $\underline{\lambda}^{k+1}$ et \underline{z}^{k+1} à partir de la relation (II-10)

Etape n° 7 : Calcul de l'erreur de coordination

$$\epsilon_Z = \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} (\underline{z}^{k+1} - \underline{z}^k)^2 dt}$$

$$\epsilon_\lambda = \sqrt{\int_{t_0}^{t_f} (\underline{\lambda}^{k+1} - \underline{\lambda}^k)^2 dt}$$

Si $\epsilon_Z > E_Z$ et $\epsilon_\lambda > E_\lambda$ où E_Z, E_λ sont aussi des constantes choisies arbitrairement petites, retourner à l'étape n° 2 et positionner $\underline{p}^{k1} = \underline{p}^{k(1+1)}$.

Si $\epsilon_Z \leq E_Z$ et $\epsilon_\lambda \leq E_\lambda$ les trajectoires optimales de la commande et des états sont atteintes.

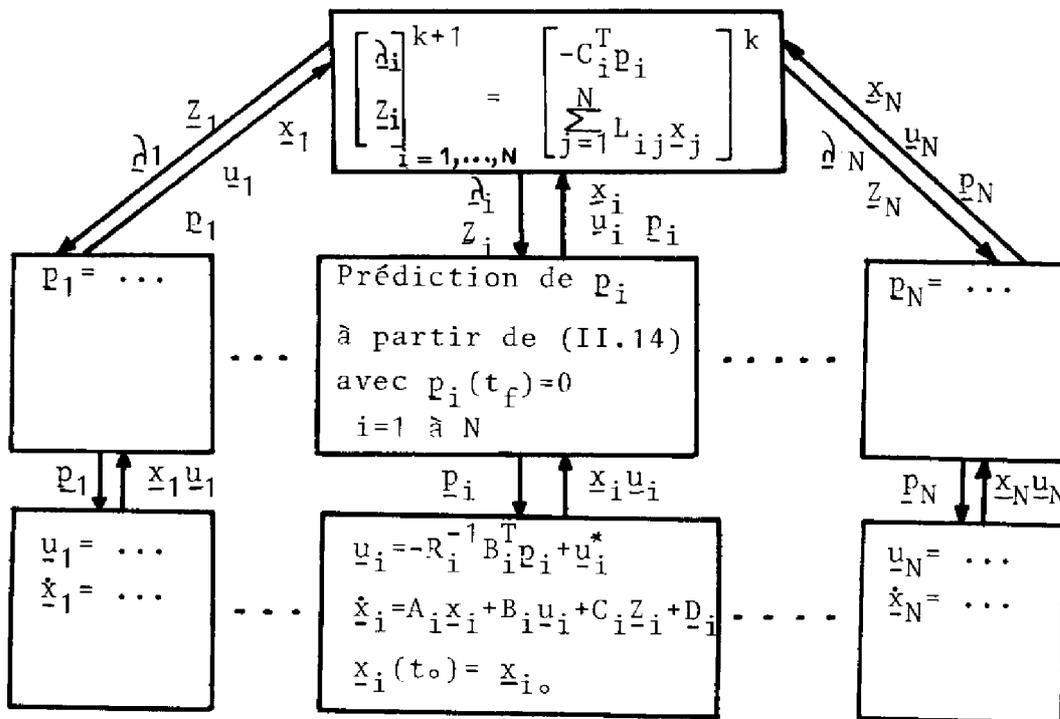


Figure II-2 - Structure de calcul à trois niveaux

Le principal intérêt de cet algorithme réside dans le fait que seulement des équations vectorielles de l'ordre des sous systèmes sont manipulées aux niveaux inférieurs et l'on évite de résoudre l'équation de Riccati. Comparé à l'algorithme précédent on a une approche globale, l'emplacement mémoire nécessaire sera minimal.

De plus, comme l'on ne manipule que des équations vectorielles d'ordre peu élevé, les intégrations numériques seront stables même pour des systèmes de commande de grande dimension.

Cependant, aux niveaux inférieurs, la procédure d'itération sur le vecteur adjoint peut poser certains problèmes d'initialisation. Il est difficile de prévoir même très approximativement les trajectoires optimales du système adjoint et dans les cas concrets, l'initialisation des vecteurs $\underline{p}_{i0}(t)$ ne pourra s'appuyer sur des considérations physiques. En fait, cette méthode apparaît comme une variante de la méthode d'itération sur les trajectoires de commande, dans laquelle l'ordre des calculs est permuté (les $\underline{p}_i(t)$ sont prédits au lieu des $\underline{u}_i(t)$).

Le calcul des nouvelles trajectoires $\underline{p}_{i0}^{k(1+1)}(t)$ par substitution directe présente l'avantage de ne pas imposer de calcul supplémentaire mais la convergence n'est pas garantie dans tous les cas [19].

Finalement les trajectoires de commande obtenues sont en boucle ouverte, donc fonction des conditions initiales. Cependant nous verrons dans la prochaine section, que dans le cas d'un système stationnaire et pour un horizon d'optimisation suffisamment long, il est possible de calculer une matrice de contre-réaction au niveau coordonnateur ainsi que les matrices de gains locales.

II-4 - LOI DE COMMANDE EN BOUCLE FERMEE

La résolution du problème de commande optimale à l'aide des deux algorithmes que nous avons exposés en II-3, définit une loi de commande en boucle ouverte. Dans le cas où l'équation de Riccati est solutionnée au niveau des sous-systèmes, la commande s'écrit :

$$\underline{u}_i = -R_i^{-1} B_i^T K_i \underline{x}_i - R_i^{-1} B_i^T \underline{s}_i + \underline{u}_i^* \quad i = 1 \text{ à } N \quad (\text{II-23})$$

(\underline{s}_i étant le vecteur de compensation en boucle ouverte, solution de l'équation différentielle II-20).

Dans [10] Singh et al démontre, dans le cas du régulateur ($\underline{u}_i^* = 0$, $\underline{x}_i^* = 0$) et sans perturbation ($D_i = 0$) que le vecteur de compensation \underline{s} et les états \underline{x} de tout le système sont reliés par une relation linéaire du type :

$$\underline{s}(t) = T(t_f, t) \underline{x}(t) \quad (\text{II-24})$$

où $T(t_f, t)$ est une matrice $m_x \cdot m_x$ définie par:

$$T(t_f, t) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi_1(t, \tau) (KCL + L^T C^T K) \Phi_2(\tau, t) d\tau \quad (\text{II-25})$$

avec $\Phi_1(t, t_0) \triangleq$ matrice de transition associée au système composé décrit par l'équation (II-22) :

$$\dot{\underline{s}} = \left[-A^T + KBR^{-1}B^T - L^T C^T \right] \underline{s} - \left[KCL - L^T C^T K \right] \underline{x}$$

$\Phi_2(t, t_0) \triangleq$ matrice de transition associée au système composé en boucle fermée $\dot{\underline{x}} = (A - BR^{-1}B^T K) \underline{x}$

où K est la matrice de Riccati bloc-diagonale

La détermination de $T(t_f, t)$ nécessite donc théoriquement la connaissance des matrices de transition de ces deux systèmes.

Cependant, dans le cas stationnaire, i.e. si A, B, C, Q, R sont des matrices constantes, et pour un horizon d'optimisation infini ($t_f \longrightarrow 0$) la matrice T (t_f, t) est invariante dans le temps. Pratiquement, quand l'horizon d'optimisation est suffisamment grand, i.e. 3 à 4 fois la plus grande constante de temps du système, on peut aussi considérer la matrice T constante.

Durant le régime transitoire, près de $t = 0$, la matrice T est constante alors que \underline{x} et \underline{s} varient dans le temps, il est alors possible de calculer T en utilisant les m_x premiers points à partir de $t = t_0$.

Soient les matrices

$$\begin{aligned} S &= [\underline{s}(t_0), \underline{s}(t_1), \dots, \underline{s}(t_{m_x})] \\ X &= [\underline{x}(t_0), \underline{x}(t_1), \dots, \underline{x}(t_{m_x})] \end{aligned}$$

- alors : $S = T X$ où $T = S X^{-1}$

Il suffit donc d'inverser hors ligne la matrice X pour obtenir T. L'extension aux cas du servomécanisme i.e. de régulation autour d'une consigne \underline{x}_i^* et \underline{u}_i^* est immédiate. Il est possible de démontrer que les vecteurs de compensation \underline{s}_i de la relation (II-23) sont donnés par

$$\underline{s} = T_1 \underline{x} + T_2$$

avec T_1 une matrice constante de dimension $m_x \times m_x$

T_2 un vecteur constant de dimension m_x

Dans le cas invariant et pour $t_f \longrightarrow \infty$

La commande s'écrit alors pour l'ensemble du système :

$$\underline{u} = (-R^{-1} B^T K - R^{-1} B^T T_1) \underline{x} - P^{-1} B^T T_2 + \underline{u}^*$$

$$\underline{u} = -\hat{G} \underline{x} - P^{-1} B^T T_2 + \underline{u}^*$$

(II-26)

où K est une matrice bloc-diagonale.

$$\hat{G} = -R^{-1} B^T K - R^{-1} B^T T_1$$

Nous retrouvons donc la matrice de gain globale \hat{G} et nous avons une commande indépendante des conditions initiales.

Dans le cas de l'algorithme à trois niveaux présenté en II-3-2, il est possible d'appliquer la même procédure pour calculer les matrices de gain locales et la matrice globale de coordination.

Etape N° 1 : A la première itération du coordonnateur i.e. quand $\underline{Z}(t) = 0$ et $\underline{\lambda}(t) = 0$ (cas où les interconnexions entre les sous-systèmes sont considérées comme nulles) il suffit de résoudre les N sous-problèmes et de former à partir des m_{xi} premières valeurs des vecteurs d'état et de commande les matrices

$$X_i = [\underline{x}_i(t_0), \underline{x}_i(t_1), \dots, \underline{x}_i(t_{m_{xi}-1})]$$

$$U_i = [\underline{u}_i(t_0), \underline{u}_i(t_1), \dots, \underline{u}_i(t_{m_{xi}-1})]$$

Les gains de contre-réaction locaux sont alors obtenus en faisant :

$$G_i = -U_i X_i^{-1}$$

Etape N° 2 : Pour trouver la matrice de gain de coordination, il faut former d'une manière semblable, à la fin de la convergence de l'ensemble de la structure, les vecteurs Y et F :

$$Y = [\underline{x}^I(t_0), \underline{x}^I(t_1), \dots, \underline{x}^I(t_{m_x-1})]$$

$$F = [\underline{u}^I(t_0), \underline{u}^I(t_1), \dots, \underline{u}^I(t_{m_x-1})]$$

où

$$\underline{x}^I(t_k) = \underline{x}(t_k) - \underline{x}(t_{m_x})$$

$$\underline{u}^I(t_k) = \underline{u}(t_k) - \underline{u}(t_{m_x}) - G \underline{x}^I(t_k)$$

où G est la matrice bloc-diagonale formée par les G_i , $i=1, \dots, N$

La matrice de coordination T_1 est alors donnée par :

$$T_1 = F Y^{-1}$$

et la loi de commande s'écrit

$$\underline{u} = -G \underline{x} - T_1 \underline{x} - \underline{I}_2$$

avec $\underline{I}_2 = -(\underline{u}(t_0) + G \underline{x}(t_0) + T_1 \underline{x}(t_0))$

Remarques :

1 - Cette méthode permet donc de résoudre le problème de régulation optimale d'un grand système à l'aide d'une structure de calcul hiérarchisée. Dans le cas stationnaire et si l'horizon de temps est suffisamment long il est possible de calculer par une procédure hors ligne les matrices de gain; les gains de contre-réaction peuvent être implantés d'une façon, soit globale, soit hiérarchisée.

2 - Dans le cas où la matrice de coordination T_1 est fonction du temps (i.e. si l'horizon d'optimisation est fini) la même méthode peut être appliquée en résolvant le problème m_x fois et pour m_x conditions initiales différentes. Alors pour chaque point d'intégration, définissons :

$$S = \begin{bmatrix} \underline{s}^1(t) & \underline{s}^2(t) & \dots & \underline{s}^{m_x}(t) \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \underline{x}^1(t) & \underline{x}^2(t) & \dots & \underline{x}^{m_x}(t) \end{bmatrix}$$

Et $T = S X^{-1}$

Dans ce cas la quantité de calcul devient très importante et cette méthode perd beaucoup de son intérêt.

3 - En pratique, le cas où l'horizon de temps est infini constitue le problème peut être le plus fréquent. La seule difficulté importante qui peut se présenter dans la procédure de calcul, viendrait du fait que les enregistrements retenus pour former la matrice X ou S ne soient pas linéairement indépendants. Théoriquement il suffit de choisir des conditions initiales qui soient suffisamment loin de l'optimum ; ce qui est souvent possible étant donné que ce travail est exécuté hors-ligne.

Une alternative possible serait de résoudre le problème (m_x+1) fois pour les conditions initiales :

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices de gains locales sont obtenues, si nécessaire, selon

la méthode exposée précédemment en formant

$$\underline{U} = [\underline{u}^1(t_0), \underline{u}^2(t_0), \dots, \underline{u}^m(t_0)]$$

alors

$$G = -U$$

La matrice de coordination T_1 et le vecteur T_2 sont calculés à partir des matrices Y et F

$$Y = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -\alpha & -\alpha & \dots & -\alpha \\ -\beta & 1-\beta & -\beta & \dots & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = [\underline{u}^I(t_0), \dots, \underline{u}^I(t_{m_x-1})]$$

$$\underline{u}^I = \underline{u}^1(t_0) - \underline{u}^{m_x+1}(t_0)$$

Alors

$$T_1 = -F Y^{-1}$$

et

$$T_2 = -(\underline{u}^1(t_0) + G \underline{x}^1(t_0) + T_1 \underline{x}^1(t_0))$$

L'existence de Y^{-1} dépend alors du choix de α et β .

De nouveau la quantité de calcul nécessaire est considérablement augmentée.

II-5 - APPLICATION AU CONTROLE DE LA POLLUTION D'UNE RIVIERE

Pour illustrer les deux algorithmes présentés dans la section II-3 nous les appliquons au problème du contrôle optimal de la pollution d'une rivière. Le modèle retenu a été antérieurement étudié en détail par Beck [21], Tamura [22] et Singh [17].

Il s'agit de maintenir à un niveau pré-spécifié, la qualité de l'eau d'une rivière. La mesure du degré de pollution de l'eau est donnée par deux facteurs :

- 1) la concentration en oxygène dissout (O.D.)
- 2) la concentration de la demande biochimique en oxygène (D.B.O.). La D.B.O. est une mesure du taux d'absorption d'oxygène nécessaire à la décomposition de matière organique.

En utilisant les mêmes données que Singh et al [16] mais en considérant un système ayant 6 sections, les équations dynamiques pour chacune de ces sections s'écrivent :

$$\dot{Z}_1 = -1.32Z_1 + 0.1q_1 + 0.9Z_0 + 0.1u_1$$

$$\dot{q}_1 = -0.32Z_1 - 1.2q_1 + 0.9q_0 + 1.9$$

$$\dot{Z}_2 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i Z_1(t - \tau_i) - 1.32Z_2 + 0.1u_2$$

$$\dot{q}_2 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i q_1(t - \tau_i) - 0.32Z_2 - 1.2q_2 + 1.9$$

$$\dot{Z}_3 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i Z_2(t - \tau_i) - 1.32Z_3 + 0.1u_3$$

$$\dot{q}_3 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i q_2(t - \tau_i) - 0.32Z_3 + 1.2q_3 + 1.9$$

$$\dot{Z}_4 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i Z_3(t - \tau_i) - 1.32Z_4$$

$$\dot{q}_4 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i q_3(t - \tau_i) - 0.32Z_4 + 1.2q_4 + 1.9$$

$$\dot{Z}_5 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i Z_4(t - \tau_i) - 1.32Z_5$$

$$\dot{q}_5 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i q_4(t - \tau_i) - 0.32Z_5 + 1.2q_5 + 1.9$$

$$\dot{Z}_6 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i Z_5(t - \tau_i) - 1.32Z_6$$

$$\dot{q}_6 = 0.9 \sum_{i=1}^3 a_i q_5(t - \tau_i) - 0.32Z_6 + 1.2q_6 + 1.9$$

Ces équations décrivent la dynamique du D.B.O. (Z_i) et du D.O. (q_i) dans chaque section ; les interconnexions entre les sections sont prises en compte par les retards distribués représentant la dispersion des polluants.

La concentration en D.B.O. des effluents qui se jettent dans chaque section constitue les variables de commande. Cette concentration en D.B.O. est inversement proportionnelle au niveau de traitement dans la station d'épuration, avant le rejet de l'effluent dans la rivière.

Alors pour contrôler la pollution de la rivière, il suffit de contrôler les rejets des stations d'épuration de façon à maintenir les concentration de D.B.O. et de D.O. à des niveaux acceptables.

Les retards purs sont approximés par une expansion en série de Taylor du 2ème ordre :

$$\text{Soit } Z_7(t) = Z_1(t - \tau_i)$$

$$\text{alors } Z_7(t) = Z_1(s) e^{-s\tau_i}$$

où s est une variable de Laplace

L'expansion en série de Taylor s'écrit :

$$Z_1(s) e^{-s\tau_i} = Z_1(s) (1 + s\tau_i + s^2 \tau_i^2/2)^{-1}$$

En ne conservant que les trois premiers termes

$$Z_1(t) = Z_7(t) + \tau_i \dot{Z}_7(t) + \tau_i^2/2 \ddot{Z}_7(t)$$

Introduisant deux variables d'état supplémentaires Z_7 et Z_8

$$\dot{Z}_7(t) = Z_8(t)$$

Il est alors possible de modéliser la variable de délais $Z_1(t - \tau_i)$

Etant donné que $\tau_i = 0$, il y aura deux retards dans chacune des équations. Alors en appliquant l'approximation précédente, nous obtenons un système de 52 variables d'état ; le premier sous-système contient 2 variables et les sous-systèmes 2 à 6 contiennent 10 variables d'état chacun.

Le problème de commande consiste à conduire les systèmes au régime permanent désiré:

concentration en mg/litre	
$Z_1^* = 2.10$	$q_1^* = 9.5$
$Z_2^* = 2.97$	$q_2^* = 7.3$
$Z_3^* = 2.47$	$q_3^* = 6.4$
$Z_4^* = 2.56$	$q_4^* = 5.7$
$Z_5^* = 2.47$	$q_5^* = 5.2$
$Z_6^* = 2.94$	$q_6^* = 4.7$

et la commande s'établira autour du régime permanent

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta u_1 + 28.90 \\ u_2 &= \delta u_2 + 12.90 \\ u_3 &= \delta u_3 + 10.40 \\ u_4 &= \delta u_4 + 11.60 \\ u_5 &= \delta u_5 + 9.50 \\ u_6 &= \delta u_6 + 10.50 \end{aligned}$$

le critère retenu :

$$J = \sum_{i=1}^6 \int_0^T ((Z_i - Z_i^*)^2 Q_i + (q_i - q_i^*)^2 S_i + \delta u_i^2) dt$$

avec $T = 8$ jours ; $Q_i = 2.0$; $S_i = 1.0$

Résultats :

Ce problème de commande optimale a été résolu suivant les deux algorithmes que nous avons présentés, sur le calculateur IBM 370/168 du CIRCE et les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

algorithme	Taille mémoire en K octets	Temps calcul secondes
Solution eq. Riccati globale uniquement	452 K	150 sec.
Principe de prédiction Eq. Riccati locale	186 K	80 sec.
Prédiction du vecteur adjoint	136 K	35 sec.

Il est à remarquer que les méthodes de décomposition-coordination sont

comparées avec la résolution globale de l'équation de Riccati uniquement.

La convergence du niveau coordonnateur basée sur le principe de prédiction, s'effectue dans cet exemple en 12 itérations pour une erreur < 0.0001

Malgré les restrictions que nous avons faites sur la convergence de l'algorithme utilisant au niveau inférieur la prédiction du vecteur adjoint, son emploi dans cet exemple, réduit considérablement l'occupation des moyens de calcul.

Les matrices T_1 et T_2 ont été calculées selon la méthode exposée en II-4 (remarque n° 3) en prenant $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$ et le système fut simulé.

Les figures II-3 et II-4 représentent respectivement les trajectoires des états Z_i (D.B.O.) et q_i (D.O.) pour les 6 sous-systèmes, la figure II-5 les variables de commande.

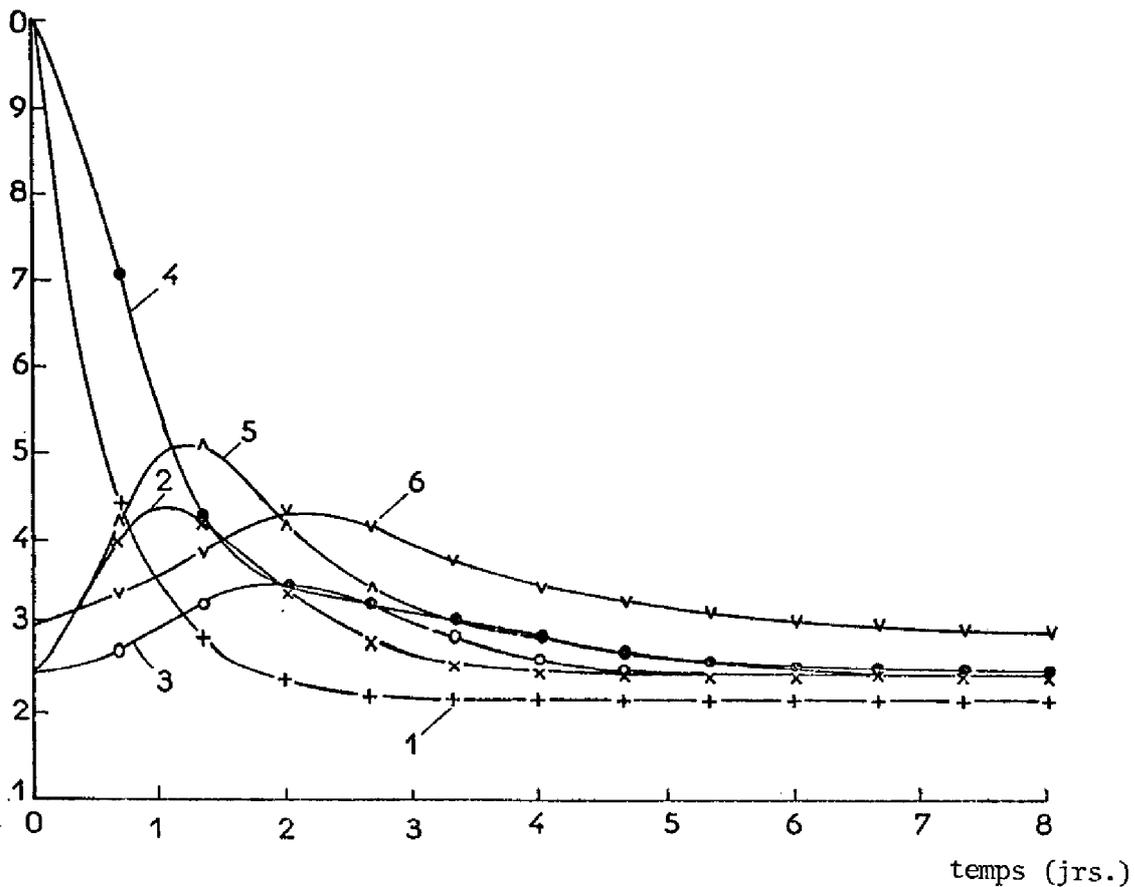


Figure II-3 : Trajectoire du D.B.O.

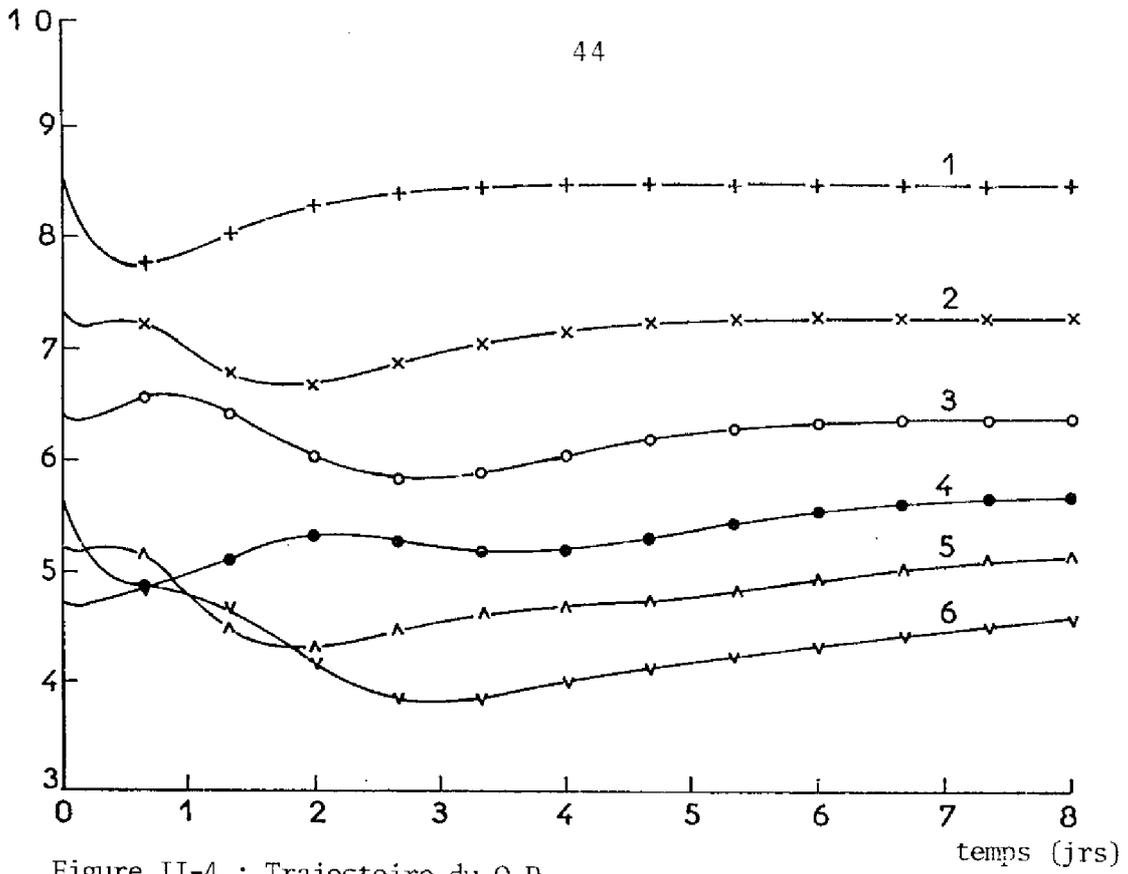


Figure II-4 : Trajectoire du O.D.

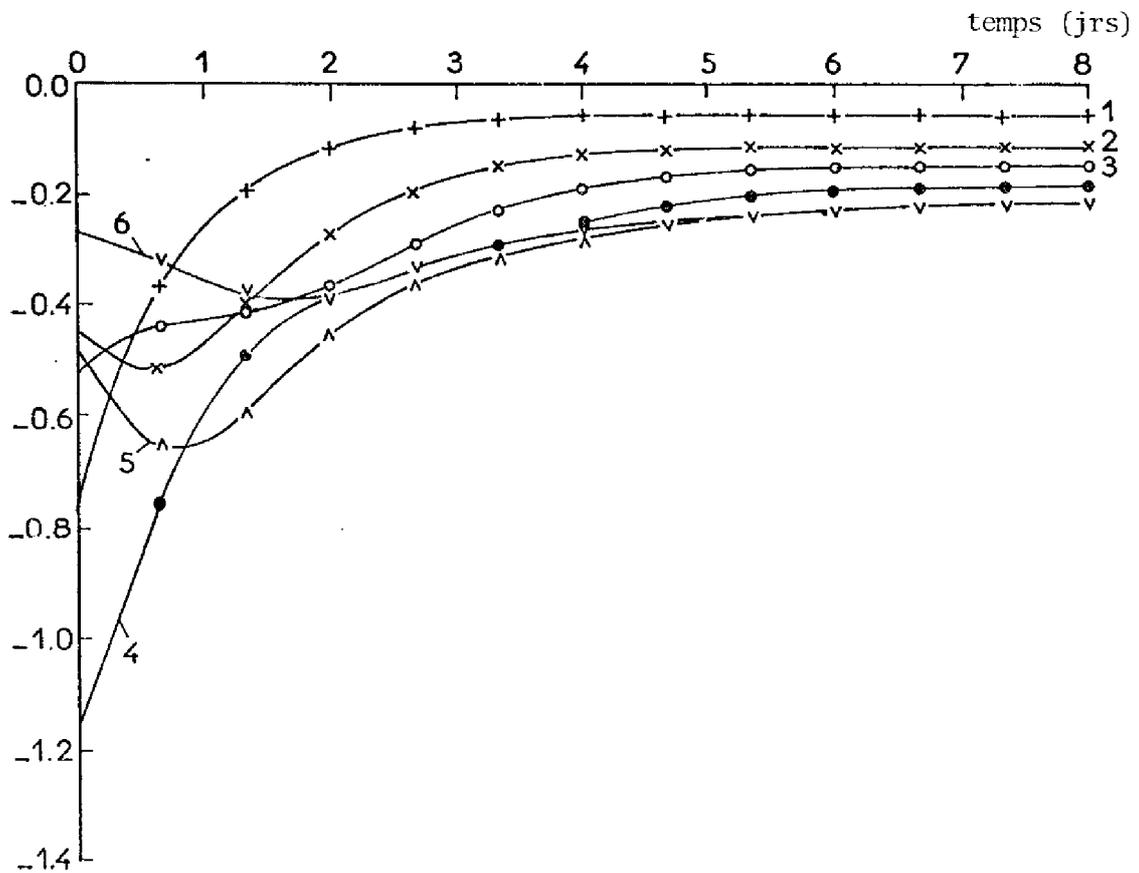


Figure II-5 : Trajectoire de la commande

Les conditions initiales correspondent au cas où une grande quantité de polluants est jetée dans les sections 1 et 4 de la rivière, les autres sections étant en régime permanent. On constate que les effets de la pollution sont atténués de façon satisfaisante.

II-6 - STRUCTURE DE COMMANDE HIERARCHISEE : STABILITE ET SOUS-OPTIMALITE

Les méthodes que nous avons présentées en (II-3-1) et (II-3-2) peuvent être envisagées de deux façons; soit comme des algorithmes de calcul hiérarchisé c'est-à-dire permettant de trouver la matrice des gains de contre réaction globale \hat{G} du système en décomposant la tâche de calcul et en évitant ainsi d'avoir à résoudre le problème globalement. Nous avons alors:

$$\hat{G} = \text{diagonale } (G_1, G_2, \dots, G_N) + T \quad (\text{II-27})$$

où G_i est la matrice de gain local du sous-système no. i

T est la matrice de gain telle que définie en (II.24)

La loi de commande obtenue peut être aussi interprétée comme définissant une structure de commande hiérarchisée ; les matrices de gain g_i forment des régulateurs locaux au niveau de chaque sous-système et la matrice de gain T joue dans ce cas le rôle de coordonnateur. Cette structure est représentée à la figure II-5 .

L'implantation sur un processus de cette structure de commande soulève certains problèmes. En effet l'adjonction d'un coordonnateur au second niveau implique la transmission entre les sous-systèmes et le niveau supérieur des trajectoires de tous les états et, en retour, des trajectoires des N vecteurs de commande.

Pratiquement, on doit prévoir des cas de fonctionnement dégradés de cette structure, les perturbations étant de deux natures :

1° : des perturbations causées par la rupture des lignes de transmissions entre le second niveau et le premier. Il s'agit alors de coupure des commandes.

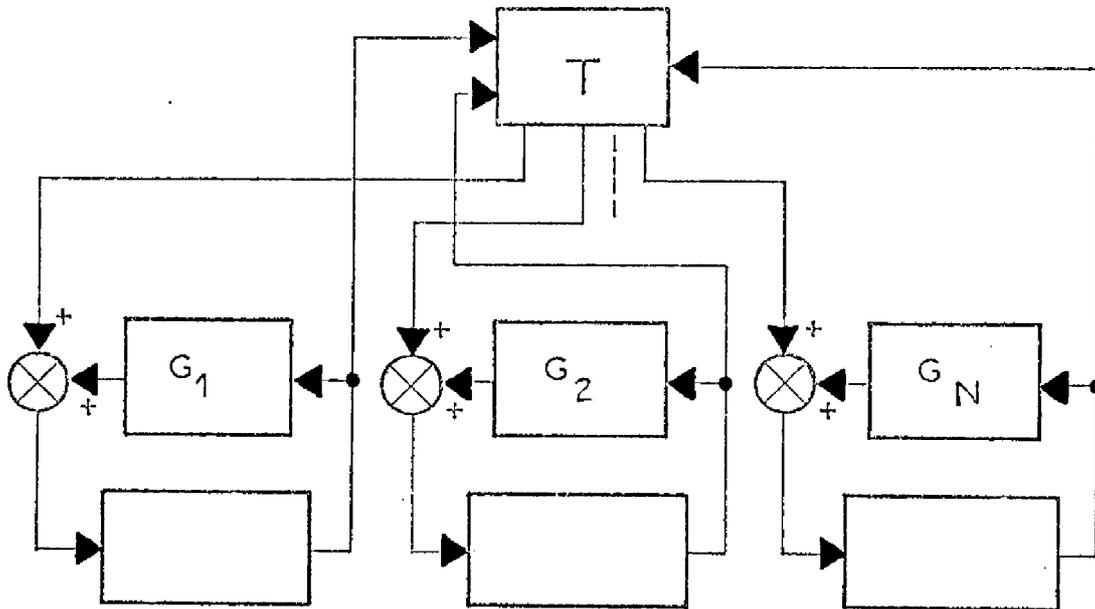


Figure II-5

2° : des perturbations causées par la rupture des lignes de transmissions entre le premier et le second niveau. Les observations sont alors manquantes.

Ces perturbations affectent à la fois la stabilité et l'optimalité du système de commande et il convient d'en étudier les conséquences. Ce problème peut être vu comme un cas particulier de l'étude des systèmes soumis à des perturbations de structure telle que définie par Siljak [45]. Dans cette section nous examinerons trois approches différentes à ce problème.

II-6-1 - Stabilité des systèmes soumis à des perturbations de structure

II-6-1-1 - Formulation du problème

Considérons le système (II.2) écrit sous une forme composée ($D=0$):

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} + C \underline{z} \quad (\text{II.28})$$

$$\underline{z} = L \underline{x} \quad (\text{II.29})$$

où A, B, C sont des matrices bloc-diagonales et L une matrice pleine.

La commande optimale obtenue en résolvant le problème par les méthodes de décomposition-coordination (II-2) s'écrit sous la forme :

$$\underline{u} = -R^{-1} B^T K \underline{x} - B^T \underline{\lambda} \quad (\text{II-30})$$

où K est la matrice bloc diagonale des solutions K_i de l'équation de Riccati, $K_i > 0$

Sachant que si $Q = D D^T$ où $Q = \text{diag}[Q_1, Q_2, \dots, Q_N]$ de (II-1) tel que la paire (A^*, D) est complètement observable ($A^* = A + CL$) et que $Q \geq 0$ et $R > 0$, on peut conclure que le système global en boucle fermée est asymptotiquement stable pour une implantation globale ou hiérarchisée de la commande.

De la même façon si pour les systèmes découplés ($C=0$) et commandés localement ($T=0$) nous supposons que chaque paire (A_i, D_i) où $Q_i = D_i D_i^T$ est complètement observable, ces sous-systèmes sont alors eux aussi asymptotiquement stables.

II-6-1-2- Cas où la commande est décentralisée.

Sous l'hypothèse [48] que, physiquement, le cas le plus défavorable au point de vue de la stabilité, est caractérisé par la coupure de toutes les liaisons entre le coordonnateur et les niveaux inférieurs, l'étude de la stabilité du système soumis aux perturbations de structure se ramène à l'étude de la stabilité du système en présence d'une commande décentralisée.

Cette hypothèse s'interprète d'un point de vue physique en considérant que la matrice de gain globale ($G + T$) tout en assurant le retour du système à son régime permanent, positionne les pôles du système en boucle fermée dans la partie grande du plan complexe. De la même façon, les matrices de gains locales G_i positionnent les pôles des sous-systèmes découplés dans la partie gauche du plan complexe. Dès lors la présence des interactions peut provoquer un déplacement des pôles vers le côté droit du plan et le rôle de la matrice de gain T est en quelque sorte de les recaler à gauche. Selon ce raisonnement le cas le plus défavorable serait quand toutes les liaisons sont coupées i.e. avec $T = 0$.

Le système composée (II-28) soumis à une commande décentralisée, s'écrit :

$$\dot{\underline{x}} = (A - BG) \underline{x} + CL \underline{x} \quad (\text{II-31})$$

En considérant la fonction de Lyapunov suivante :

$$v(t) = \underline{x}^T K \underline{x} \quad (\text{II-32})$$

Une condition suffisante pour conclure à la stabilité du système est que la dérivée $v(t)$ soit semi-définie négative i.e.

$$\dot{v}(t) = \underline{x}^T K \dot{\underline{x}} + \dot{\underline{x}}^T K \underline{x} \quad (\text{II-33})$$

telle que $v(t) \leq 0$

En remplaçant K et $\dot{\underline{x}}$ par (II-19) et (II-28) respectivement

$$\underline{x}^T (A^T K - G^T B^T K + L^T C^T K + KA - KBG + KCL) \underline{x} \leq 0 \quad (\text{II-34})$$

Sachant que : $RG = B^T K$

$$: A^T K + KA - KBR^{-1} B^T K + Q = 0$$

On peut écrire :

$$\underline{x}^T (L^T C^T K + KCL - Q - G^T R G) \underline{x} \leq 0 \quad (\text{II-35})$$

Ce qui sous une autre forme devient :

$$\underline{x}^T (L^T C^T K + KCL) \underline{x} \leq \underline{x}^T (Q + G^T R G) \underline{x} \quad (\text{II-36})$$

Une condition suffisante que la relation (II-38) soit satisfaite est donnée par :

$$2 \|L^T C^T K\| \leq \lambda_{\min}(Q + G^T R G) \quad (\text{II-37})$$

De plus, $\|L^T C^T K\| \leq \|L^T\| \cdot \|C^T K\|$ et la matrice L peut toujours être choisie telle que $\|L\| = 1$ nous avons alors

$$2 \|C^T K\| \leq \lambda_{\min}(Q + G^T R G) \quad (\text{II-38})$$

La condition (II-38) si elle est remplie nous permet donc de conclure à la stabilité du système soumis à une commande décentralisée et sous l'hypothèse faite précédemment, à la stabilité dans tous les cas de fonctionnement dégradé.

Il sera d'autant plus facile de satisfaire (III-38) que $\|C^T\|$ sera petite, i.e. que les couplages seront faibles.

Remarquons que cette condition revient en réalité à imposer une borne sur les couplages. Si la condition n'est pas remplie, il suffit d'augmenter le degré de stabilité du système jusqu'à la satisfaction de (II-38).

L'inconvénient de cette méthode vient du fait qu'il est difficile de caractériser la classe de système satisfaisant l'hypothèse préliminaire. Remarquons cependant que dans le cas où seules quelques liaisons sont coupées i.e.

$$T' = T - T'' = T - D T \quad (\text{II-39})$$

où T'' est la partie coupée de la matrice T

D est une matrice dont les éléments sur la diagonale sont soit 0 ou 1, les 0 correspondant aux liaisons perturbées.

Et suivant un développement similaire [48] la condition suffisante de stabilité s'écrit :

$$2\|A^T S\| + 2\|L^T C^T S\| + 2\|T''\| \cdot \|B^T S\| \leq \lambda_{\min}(G^T B^T S + S B G + T^T B^T S + S B T) \quad (\text{II-40})$$

et sachant que : $\|T''\| \leq \|D\| \cdot \|T\|$; $\|D\| = 1$

donc : $\|T''\| \leq \|T\|$

Le cas le plus restrictif est donc quand toutes les liaisons sont coupées et (II-40) s'écrit :

$$2\|A^T S\| + 2\|L^T C^T S\| + 2\|T\| \cdot \|B^T S\| \leq \lambda_{\min}(G^T B^T S + S B G + T^T B^T S + S B T) \quad (\text{II-41})$$

La satisfaction de cette condition permet de conclure directement à la stabilité du système soumis aux perturbations de structure que nous avons définies.

II-6-1-3 - Cas général

Plus récemment et selon une approche plus générale, Géromel et Bernussou [47] ont déterminé une condition suffisante de stabilité pour chaque sous-système de façon que la structure globale demeure stable quelles que soient les perturbations entre les deux niveaux.

Cette étude est basée sur la définition à l'aide des fonctions vectorielles de Lyapunov, d'un système de comparaison majorant l'ensemble des systèmes de comparaison correspondant à chaque perturbation de structure et à toutes leurs combinaisons possibles. On peut alors déterminer, connaissant la matrice T et les interconnexions, le degré de stabilité α_i nécessaire à chaque sous-système pour que l'ensemble de la structure demeure stable.

En modifiant pour chaque sous-système, le critère de la façon suivante

$$I_i = \int_0^{\infty} \exp(2\alpha_i t) (\|x_i\|_{Q_i}^2 + \|u_i\|_{R_i}^2) dt$$

il est possible de trouver une loi de contre-réaction locale imposant un degré de stabilité α_i à chaque sous-système [35].

L'avantage de cette méthode est que la construction du système de comparaison permet de travailler avec des modèles de dimension moindre que le système global. Cependant il n'est pas certain qu'il existe une solution à ce problème [56] et il semble difficile de définir la catégorie de système pour laquelle cette méthode est applicable. Comme précédemment il est préférable d'avoir des interconnexions faibles et on peut envisager avant d'appliquer cette technique de modifier le rôle du second niveau en déterminant la matrice de gain T de façon à réduire les effets des interconnexions soit :

$$T = B^0 C$$

où B^0 est la pseudo inverse de Moore-Penrose qui minimise $\|C-BT\|$ [44].

II-6-1-4 - Applications des méthodes fréquentielles

Dans les méthodes que nous avons présentées, la commande est calculée en utilisant les techniques de commande optimale et de ce fait le système en boucle fermée aura, pour revenir à des notions plus classiques de l'automatique, une marge de gain et une marge de phase plus grande qu'il ne serait nécessaire pour conclure à la stabilité [46] .

Pratiquement, pour des systèmes de dimensions réduites, l'application des méthodes fréquentielles, telles qu'étendues aux systèmes multivariables par MacFarlane [46] , et plus particulièrement du théorème d'indéfectibilité, permettent de déterminer d'une façon plus précise les conditions de stabilité en présence de perturbations de structure.

En appliquant cette approche Courdeuil dans [50] fait remarquer qu'en l'absence de coordination, même si le système est stable, les interactions jouent le rôle de perturbations inconnues et des erreurs de régime apparaissent au niveau des sous-systèmes. La solution proposée consiste à imposer au niveau local, la présence d'intégrateur sur les sorties des systèmes fortement couplés, si les conditions de stabilité le permettent.

II-6-2 - Sous-optimalité d'un système soumis à des perturbations de structure

Dans le cas où le système est asymptotiquement stable quelles que soient les perturbations pouvant se produire dans la structure de commande, l'étude de la détérioration du critère permet d'évaluer les performances d'une façon plus fine qu'un simple critère de stabilité.

Il est possible de démontrer [48] qu'il existe une limite inférieure de sous-optimalité qui peut être calculée a priori.

Le système aura un index de sous-optimalité ϵ tel que

$$0 < \epsilon < \frac{\|M(F_m(t))\|}{\lambda_m(Q+W)}$$

où $\|M(F_m(t))\|$ = norme de la matrice $F_m(t)$
 $\lambda_m(Q+W)$ = valeur propre minimum de la matrice
 $W = (G+T)^T R (G+T)$

$$F_m(t) = [-I + \lambda(t, t_0)]^T (Q+W) [-I + \lambda(t, t_0)] + 2(Q+W) [-I + \lambda(t, t_0)] \\ + \lambda(t, t_0)^T R T \lambda(t, t_0) - 2\lambda^T(t, t_0) (G+T)^T R T \lambda(t, t_0)$$

$$\lambda(t, t_0) = [I + \Gamma(t, t_0) \Phi(t, t_0)] = \Phi'(t, t_0) \Phi(t_0, t)$$

$$\Gamma(t, t_0) = \int_0^T \Phi(t, \tau) B T^T \Phi'(t, \tau) d\tau$$

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = (A - BG + CL - BT) \Phi(t, t_0)$$

$$\dot{\Phi}'(t, t_0) = (A - BG + CL) \Phi'(t, t_0)$$

Remarquons que le cas le plus défavorable est quand toutes les liaisons sont coupées entre les niveaux inférieurs et le coordonnateur.

II-6-3 - Application à la commande d'un système multi-machines

La méthode exposée en II-6-1-2 est appliquée dans cette section à un système composé de 11 machines connectées ensemble.

Le modèle mathématique de ce système est formé d'un ensemble d'équations différentielles non-linéaires [51]

$$M_i \ddot{\delta}_{ii} = P_i - \sum_{j=1}^n b_{ij} \sin \delta_{ij} \quad i=1, \dots, n$$

où δ_{ij} est la différence d'angle entre les machines i et j
 P_i est la puissance d'entrée
 M_i est l'inertie

Le système est rendu complètement commandable et complètement observable, en prenant la i ème machine comme référence et en soustrayant la i ème équation de l'équation de chaque machine. En linéarisant autour du point d'équilibre, le modèle du système, valable dans ce cas pour de faibles perturbations, s'écrit sous la forme $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$ où \underline{x} est le vecteur d'état de dimension $2(n-1)$. Les composantes des vecteurs d'état étant la déviation de l'angle et de la fréquence autour des valeurs nominales. La matrice A du modèle tel que considéré par Darwish [51] est donnée dans le tableau II.1.

Le critère retenu s'écrit :

$$\text{Min } I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u}) dt$$

Ce problème a été d'abord résolu par Hassan et Titli [52]. Les matrices de gain locales et la matrice de gain globale furent calculées.

La condition suffisante de stabilité (II-40) est vérifiée dans le cas où toutes les liaisons de coordination sont coupées (i.e. $T=0$).

$$1.88 < 2.321$$

Le système fut simulé dans les trois cas suivants :

- 1) quand le système est complètement coordonné
- 2) quand quelques liaisons sont coupées de sorte que le système est partiellement coordonné
- 3) quand le système est en commande décentralisée

Les figures II-6 , II-7 donnent les trajectoires des deux premiers états, et les figures II-8 et II-9 celles des deux premières commandes.

Le critère a été calculé :

cas 1)	1.79266
cas 2)	1.850366
cas 3)	1.898409

On constate d'après les courbes que la configuration n°3 est moins stable que celle des cas no. 1 et 2 .

Sur cet exemple, la condition suffisante (II-40) compte tenu des hypothèses faites en (II-6-2) nous permet d'étudier la robustesse du système commandé soumis à des perturbations de structure .

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	3.74383	0	5.37437	0	2.62699	0	4.05603	0	-1.64764	0	-2.7157	0	-6.33619	0	-14.37576	0	-12.59014	0	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	-140.367	0	9.60086	0	14.026	0	6.684	0	2.67515	0	1.51862	0	-1.99922	0	-7.02907	0	-9.53736	0	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	10.238	0	-116.061	0	6.21808	0	4.3133	0	0.41594	0	-1.06214	0	-4.6919	0	-11.74903	0	-11.52972	0	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	18.07436	0	7.65584	0	-13.972	0	4.075	0	1.7033	0	1.16285	0	-3.055	0	-7.66032	0	-10.25109	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	3.60455	0	5.98992	0	4.3135	0	-124.466	0	2.5982	0	-0.0644	0	-1.3065	0	-9.4617	0	-9.0164	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	1.96213	0	1.68471	0	1.2125	0	1.6449	0	-99.694	0	1.9443	0	-0.933	0	-9.1423	0	-9.939	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
0	10.2119	0	5.69336	0	7.5948	0	5.5155	0	11.7763	0	-166.755	0	5.63471	0	7.2399	0	-4.4116	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
0	-5.31102	0	0.03862	0	-0.397	0	0.4133	0	1.255	0	-0.689	0	-89.399	0	-6.811	0	-8.578	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
0	7.478	0	3.9759	0	5.6047	0	4.0148	0	6.0777	0	7.286	0	8.009	0	-141.137	0	-0.465	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	1.400	0	0.9652	0	0.8061	0	1.8019	0	1.577	0	0.5298	0	1.739	0	-1.011	0	-110.087	0	

TABLEAU II - 1

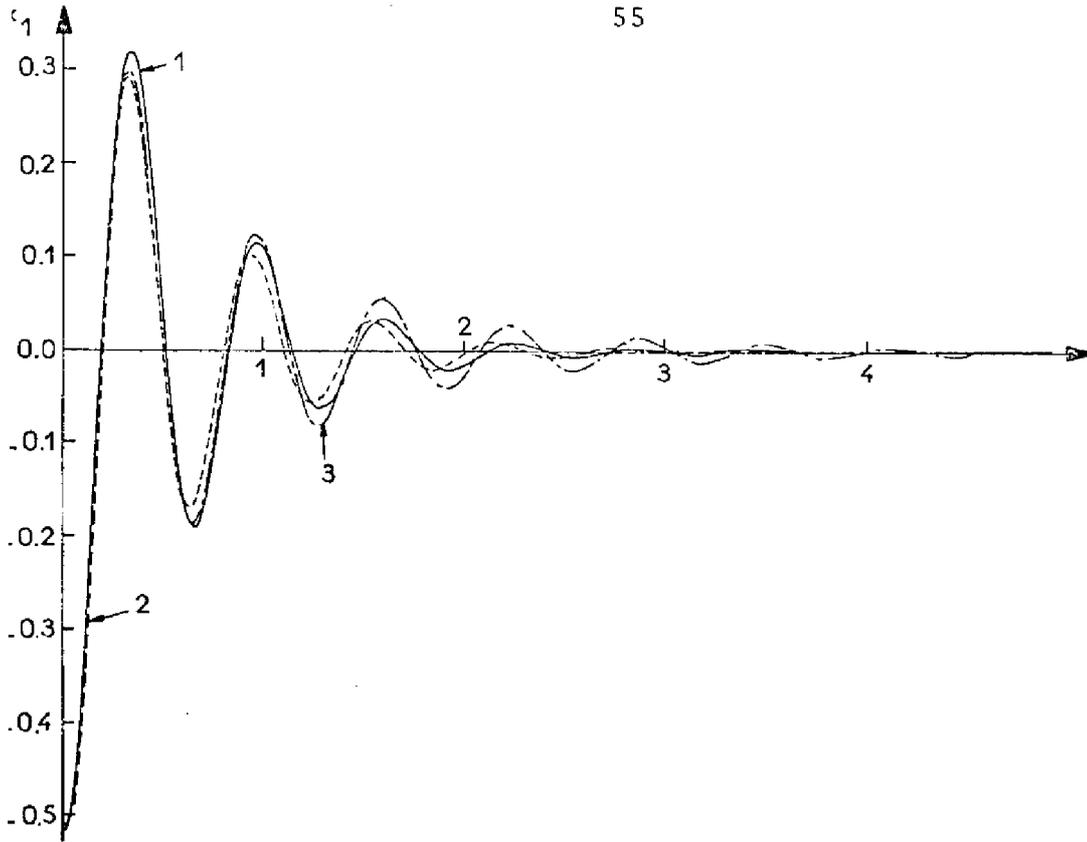


Figure II-6 Etat x_1

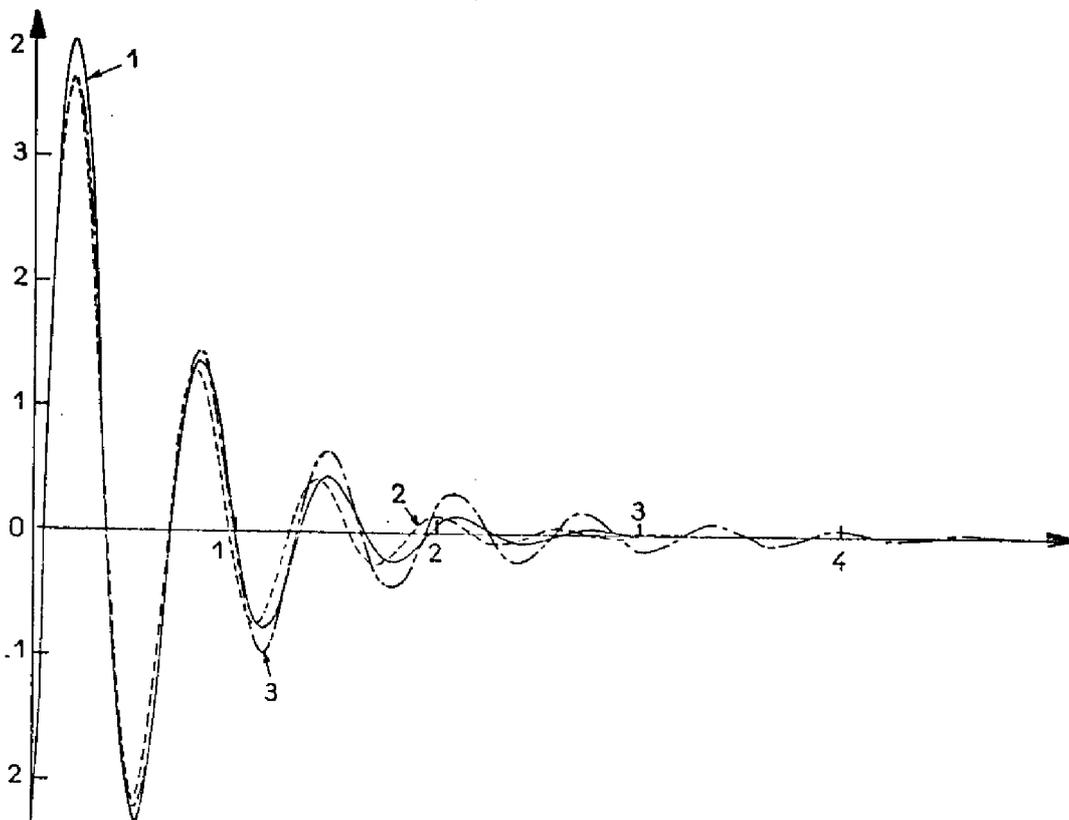


Figure II-7 Etat x_2

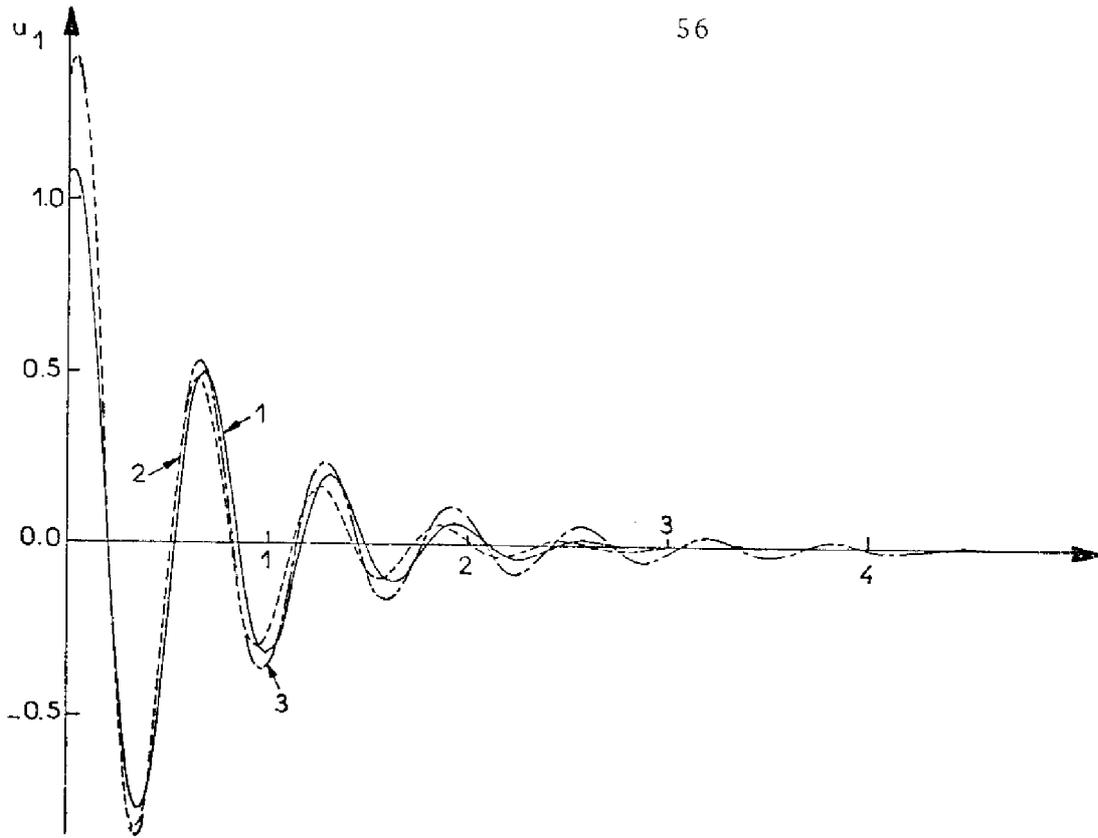


Figure II-8 : Commande u_1

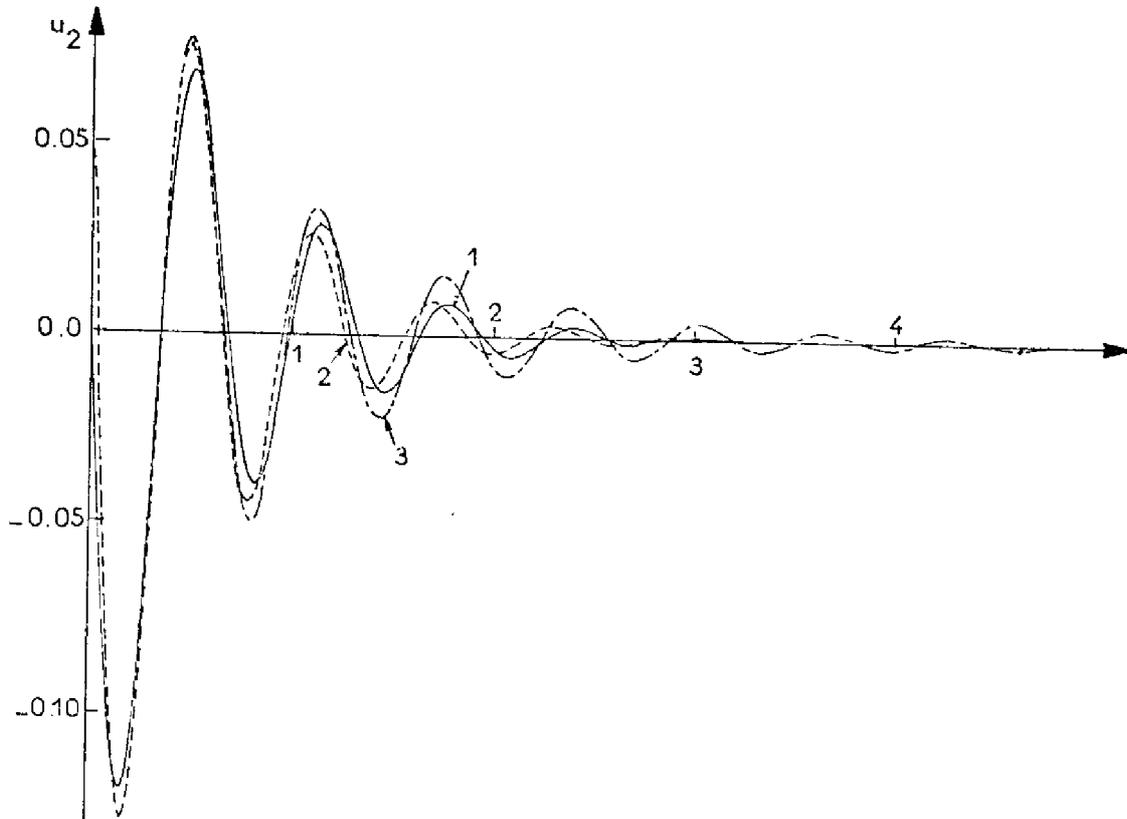


Figure II-9 : Commande u_2

II-7 - CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons étudié le problème de commande optimale des systèmes linéaires à critère quadratique et nous avons montré que les méthodes de décomposition-coordination, plus particulièrement celles basées sur le principe de prédiction de Takahara, permettent de calculer hors-ligne une structure de commande hiérarchisée en boucle fermée.

L'application des deux algorithmes que nous avons exposés à un système de dimension 52 nous a permis d'évaluer ces méthodes. Il ressort de cette étude un gain important tant au niveau de l'emplacement mémoire nécessaire que du temps calcul utilisé.

De plus nous avons montré qu'il est toujours possible de déterminer la matrice de coordination T par une méthode de calcul hors-ligne, sans avoir à résoudre le système global.

L'implantation d'une structure hiérarchisée de commande i.e. comprenant N régulations locales et une matrice de gain globale jouant le rôle de coordonnateur, pose de nouveaux problèmes au niveau de la fiabilité. Nous avons exposé différentes méthodes définissant des conditions suffisantes de stabilité et permettant d'évaluer la sous-optimalité du système dans le cas de fonctionnement dégradé de cette structure. Il semble possible, dans la majorité des cas, d'imposer aux sous-systèmes isolés un degré de stabilité tel que la structure globale demeure stable quelles que soient les perturbations se produisant entre les deux niveaux de commande. En fait il est connu que le problème de la stabilisation d'un système par l'application d'une commande décentralisée n'admet pas toujours une solution [56] .

C H A P I T R E I I I

COMMANDE HIERARCHISEE EN BOUCLE FERMEE DES SYSTEMES DYNAMIQUES NON LINEAIRES

- III-1 INTRODUCTION
- III-2 Commande hiérarchisée en boucle fermée par quasilinearisation
- III-3 Principe de prédiction modifié
- III-4 Application à la commande d'une machine synchrone
- III-5 CONCLUSION

III-1 - INTRODUCTION

L'extension des méthodes de décomposition-coordination que nous avons examinée dans les chapitres précédents, aux systèmes dynamiques non linéaires pose de nombreux problèmes.

En effet, la méthode de décomposition par le critère (méthode non admissible) ainsi que celle utilisant le principe de prédiction des interactions, sont basées, comme nous l'avons vu, sur le théorème de forte dualité de Lagrange. Dans le cas des systèmes non linéaires, le domaine admissible défini par l'équation dynamique du système, n'est pas convexe et il peut alors exister une marge de dualité entre la solution du problème dual et celle du problème primal.

Cependant, l'expérience montre que dans certains cas particuliers (Bauman (13), Smith et Sage (36), Calvet (8)), il est possible d'obtenir, malgré ces considérations, une solution exacte; en fait les conditions d'optimalité globale par décomposition-coordination sont des conditions suffisantes mais non nécessaires.

Parallèlement, le problème de l'obtention d'une loi de commande totalement en boucle fermée pour les systèmes non linéaires, n'a pas reçu jusqu'à présent de solution exacte même dans une approche globale.

Dans ce chapitre, nous étudierons différentes méthodes permettant de calculer une loi de commande en boucle fermée partielle pour les systèmes non linéaires interconnectés; cette commande pouvant être implantée d'une façon hiérarchisée dans certains cas.

Nous présenterons un premier algorithme basé sur la méthode de décomposition par le critère de Pearson [3]. Au niveau inférieur le problème avec conditions aux deux bouts défini par l'application des conditions nécessaires d'optimalité, est résolu en employant la procédure de quasilinearisation.

En utilisant la dernière approximation linéaire du problème, il est possible, comme le démontre Singh et Titli [29] de calculer une loi de commande en boucle fermée partielle.

Dans le cas où le critère est de type quadratique, Hassan et Singh [30] ont développé une technique utilisant le principe de prédiction des interactions modifié. En se basant sur la possibilité de procéder à l'expansion en série de Taylor de l'équation dynamique du modèle autour du point d'équilibre du système, On peut, en prédisant à la fois les interconnexions et les non-linéarités de l'équation de modèle, décomposer le système. La formulation du problème est modifiée de façon à faire coïncider les valeurs prédites pour les interconnexions et les non-linéarités avec celles obtenues par le calcul de la solution optimale.

Au niveau inférieur nous aurons à résoudre N sous-problèmes d'optimisation linéaire à critère quadratique et comme nous l'avons vu au chapitre II, il est alors simple de calculer une loi de commande en boucle fermée.

Nous étudierons comparativement ces deux méthodes en les appliquant au problème de la commande optimale de l'excitation d'une machine synchrone.

III-2 - COMMANDE HIERARCHISEE EN BOUCLE FERMEE PAR QUASILINEARISATION

III-2-1 - Structure de commande hiérarchisée

Considérons le problème de commande optimale suivant pour un système interconnecté :

$$\text{Minimiser par rapport à } \underline{u}_i \quad I = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_f} r_i(x_i(t), u_i(t), z_i(t)) dt \quad (\text{III-1})$$

avec, comme précédemment \underline{x}_i le vecteur d'état de dimension m_{xi} du sous-problème i , \underline{u}_i le vecteur de commande correspondant de dimension m_{ui} et \underline{z}_i , le vecteur d'interconnexion formé par la sortie des autres sous-systèmes de dimension m_{zi}

La fonctionnelle I doit être minimisée sous les contraintes définies par la dynamique des sous-systèmes soit :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}}_i &= f_i(\underline{x}_i(t), \underline{u}_i(t), \underline{z}_i(t)) & t_0 \leq t \leq t_f \\ \underline{x}_i(t_0) &= \underline{x}_{i_0} & i = 1 \text{ à } N \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-2})$$

et la relation d'interconnexion :

$$\underline{z}_i = \sum_{j=1}^N h_{ij}(\underline{x}_j) \quad (\text{III-3})$$

où h_{ij} sont des fonctions d'interconnexion.

L'application de la méthode de coordination par le critère de Pearson [3] (méthode non admissible), telle que nous l'avons exposée en I-2-2-2 nous permet d'envisager la solution de ce problème selon une structure à deux niveaux.

Rappelons brièvement que cette méthode est basée sur la formulation de la fonctionnelle duale $\varphi(\underline{\theta})$ qui doit être maximisée par rapport à $\underline{\theta}$, $t \in [t_0, t_f]$ où :

$$\varphi(\underline{\theta}) = \min_{\underline{x}, \underline{u}, \underline{z}} \mathcal{L}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{z}, \underline{\theta}) : \text{équation (III.2)}$$

avec

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{z}, \underline{\theta}) = \sum_{i=1}^N (r_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i, \underline{z}_i) + \underline{\theta}_i^T \underline{z}_i - \sum_{j=1}^N \underline{\theta}_i^T h_{ij}(\underline{x}_j)) \quad (\text{III-4})$$

et selon le théorème de forte dualité de Lagrange

$$\min_{\underline{u}_i} I = \max \varphi(\underline{\theta}) \quad i = 1 \text{ à } N \quad (\text{III-5})$$

sous les restrictions faites en I-2-3.

L'examen de l'équation III-4 nous permet de définir une structure de calcul à deux niveaux.

Pour une trajectoire $\underline{\beta}^{**}(t)$ donnée, $t \in [t_0, t_f]$, la fonction \mathcal{L} est séparable en N problèmes d'optimisation indépendants

$$\text{Min}_{\underline{x}_i, \underline{u}_i, \underline{z}_i} I_i = \int_{t_0}^{t_f} r_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i, \underline{z}_i) dt + \underline{e}_{i, z_i}^T - \sum_{j=1}^N \underline{e}_j^T h_{ji}(\underline{x}_i) \quad (\text{III-6})$$

$$\text{sous } \left. \begin{array}{l} \dot{\underline{x}}_i = f_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i, \underline{z}_i) \\ \underline{x}_i(t_0) = \underline{x}_{i_0} \end{array} \right\} \quad (\text{III-7})$$

Le niveau supérieur a alors pour tâche d'améliorer la trajectoire de $\underline{\beta}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_f$, selon une procédure itérative, par exemple suivant l'algorithme du gradient. De l'itération k à k+1

$$\underline{\beta}(t)^{k+1} = \underline{\beta}(t)^k + \alpha^k \cdot \underline{d}^k \quad (\text{III-8})$$

avec

$$\underline{d}^k = \nabla_{\underline{\beta}(t)} \Phi(\underline{\beta}) = \underline{z}_i - \sum_{j=1}^N h_{ij}(\underline{x}_j) \quad (\text{III-9})$$

où $\nabla_{\underline{\beta}(t)} \Phi(\underline{\beta})$ est le gradient de $\Phi(\underline{\beta})$.
et $\alpha^k > 0$ le pas d'itération

L'optimum est atteint quand $\underline{d}^k \longrightarrow 0$

III-2-2 - Résolution des sous-problèmes d'optimisation

Au niveau inférieur, les conditions nécessaires d'optimalité définissent un problème avec conditions aux deux bouts.

En effet, pour $\underline{\beta}(t)$ donné sur l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_f$ l'hamiltonien \mathcal{H}_i s'écrit :

$$\mathcal{H}_i = r_i(x_i, u_i, z_i) + p_i^T f_i(x_i, u_i, z_i) + e_i^T z_i - \sum_{j=1}^N e_j^T h_{ji}(x_i) \quad (\text{III-10})$$

Les conditions nécessaires d'optimalité nous permettent d'écrire :

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i, z_i) \quad (\text{III-11})$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial r_i}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i^T}{\partial x_i} p_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial h_{ji}^T}{\partial x_i} e_j \quad (\text{III-12})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial z_i} = 0 \quad (\text{III-13})$$

En faisant l'hypothèse supplémentaire qu'il est possible à partir des relations (III-13) d'écrire la commande u_i et la variable z_i comme des fonctions explicites de x_i et p_i i.e.

$$\left. \begin{aligned} u_i &= c_i(x_i, p_i) \\ z_i &= d_i(x_i, p_i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-14})$$

Les équations d'état et des vecteurs adjoints s'écrivent dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= a_i(x_i, p_i) \\ \dot{p}_i &= b_i(x_i, p_i) \end{aligned} \right\} \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (\text{III-15})$$

avec comme condition aux frontières :

$$x_i(t_0) = x_{i_0} \quad (\text{III-16})$$

$$p_i(t_f) = 0 \quad (\text{III-17})$$

Les problèmes avec conditions aux deux bouts définis par les relations (III-15) et (III-16), (III-17) peuvent être résolus en employant la procédure de quasilinearisation. Nous en rappelons brièvement les principales étapes :

Soit pour le sous-problème n° i, le vecteur \underline{y}_i formé par le vecteur d'état \underline{x}_i et le vecteur adjoint \underline{p}_i

$$\underline{y}_i = \begin{bmatrix} \underline{x}_i \\ \underline{p}_i \end{bmatrix} \quad (\text{III-18})$$

L'équation (III-13) s'écrit alors :

$$\dot{\underline{y}} = F(\underline{y}_i(t)) \quad (\text{III-19})$$

Et les conditions aux limites (III-16) et (III-17) peuvent s'écrire d'une façon plus générale :

$$\left. \begin{aligned} \underline{y}(t_0)^T A_0 &= \underline{b}_0^T \\ \underline{y}(t_f)^T A_f &= \underline{b}_f^T \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-20})$$

où A_0, A_f sont des matrices $2m_{x_i} \times m_{x_i}$ et $\underline{b}_0, \underline{b}_f$ des vecteurs de dimension m_{x_i}

L'équation différentielle non-linéaire (III-19) est résolue en procédant à sa linéarisation autour d'une trajectoire $\underline{y}^\circ(t)$, satisfaisant les conditions aux frontières (III-20).

En effet, l'expansion de III.19 en série de Taylor autour de $\underline{y}^\circ(t)$ s'écrit en négligeant les termes d'ordre deux et d'ordre supérieur :

$$\dot{\underline{y}} = F(\underline{y}^\circ) + J(\underline{y}^\circ) (\underline{y} - \underline{y}^\circ) \quad (\text{III-21})$$

où $J(\underline{y}^\circ)$ est le Jacobien de la fonction $F(\underline{y}(t))$, $t_0 \leq t \leq t_f$, évalué au point $\underline{y}^\circ(t)$.

Si la trajectoire $\underline{y}^\circ(t)$, tout en satisfaisant (III-20) et (III-21), ne résout pas avec une précision acceptable la

relation originale (III-19), il est possible de calculer une nouvelle trajectoire de linéarisation en résolvant le système différentiel linéaire (III-21).

De l'itération k à l'itération $k+1$, la solution de (III-21) s'écrit:

$$\underline{y}^{k+1} = \underline{M}^{k+1} + \hat{Y}^{k+1} \underline{c}^{k+1} \quad (\text{III-22})$$

avec \hat{Y}^{k+1} : matrice $2m_{x_i} \times 2m_{x_i}$, solution de l'équation homogène:

$$\frac{d}{dt} (\hat{Y}^{k+1}) = J(\underline{y}^k) \hat{Y}^{k+1} \quad (\text{III-23})$$

$$\text{avec } \hat{Y}^{k+1}(t_0) = \mathbb{1}$$

\underline{M}^{k+1} : vecteur de dimension $2m_{x_i}$, des solutions particulières de :

$$\frac{d}{dt} (\underline{M}^{k+1}) = J(\underline{y}^k) \underline{M}^{k+1} + F(\underline{y}^k) - J(\underline{y}^k) \underline{y}^k \quad (\text{III-24})$$

$$\text{avec } \underline{M}^{k+1}(t_0) = 0$$

\underline{c}^{k+1} : vecteur de dimension $2m_{x_i}$, des constantes d'intégration, obtenues à partir des relations (III-20) et (III-24) soit :

$$\begin{bmatrix} A_o^T \\ A_f^T \hat{Y}^{k+1} \end{bmatrix} \underline{c}^{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{b}_o \\ \underline{b}_f - A_f \underline{M}^{k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{III-25})$$

La nouvelle trajectoire $\underline{y}^{k+1}(t)$ est alors utilisée pour linéariser (III-17). Le test de convergence porte sur l'erreur entre

les trajectoires de linéarisation :

$$\epsilon^k(t) = \underline{y}^k(t) - \underline{y}^{k+1}(t)$$

McGill et Kenneth [28] ont montré que la séquence des solutions des équations différentielles linéarisées (III-21) converge (à un taux au moins quadratique) vers la solution de l'équation différentielle non-linéaire si :

- 1) les fonctions a_i et b_i de (III-15) sont continues
- 2) les dérivées partielles $\partial a / \partial x$, $\partial a / \partial p$, $\partial b / \partial x^2$, $\partial b / \partial x \partial p$ existent et sont continues. De plus elle doivent satisfaire la condition de Lipschitz par rapport à $[\underline{x}(t); \underline{p}(t)]^T$
- 3) la norme de la déviation de la trajectoire $\underline{y}^0(t)$ par rapport à la solution est suffisamment petite.

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que la trajectoire $\underline{y}^0(t)$ satisfasse les conditions aux frontières. Elle doit cependant être suffisamment proche de la solution pour favoriser la convergence ; ce qui suppose une bonne connaissance physique du système où que l'on se soit approché de la solution par une autre méthode.

Au niveau calcul, à chaque itération, nous devons intégrer $2m_x(m_x + 1)$ équations différentielles non linéaires et inverser une matrice $2m_x \times 2m_x$. De plus les trajectoires $\underline{y}^k(t)$ solutions de l'itération précédente doivent être gardées en mémoire.

Pour une étude plus détaillée nous nous référons à Bellman et Kanapa [38] et Galy [9].

II-2-3 - Obtention d'une loi de commande en boucle fermée

La procédure de quasilinearisation telle que nous venons de l'exposer fournit une loi de commande en boucle ouverte. Généralement une telle loi se révèle ^{très} sensible aux conditions initiales pour pouvoir envisager son implantation sur un processus.

Dans [29], Singh et Titli démontrent qu'il est possible à partir de l'équation linéarisée (III-22), d'obtenir une relation explicite entre les états \underline{x}_i et les vecteurs adjoints \underline{p}_i . En substituant pour \underline{p}_i dans l'équation (III-14), nous obtenons une commande \underline{u}_i fonction de l'état \underline{x}_i

En effet la solution (III-21) s'écrit :

$$\underline{y}(t_f) = \underline{\Phi}(t_f, t) \underline{y}(t) + \int_{t_0}^{t_f} \underline{\Phi}(t_f, \tau) [\underline{F}(\underline{y}(\tau) - \underline{J}(\underline{y}(\tau))) \underline{y}(\tau) d\tau \quad (\text{III-26})$$

où $\underline{\Phi}(t_f, t)$ est la matrice de transition d'état du système (III-21).

En partitionnant la matrice $\underline{\Phi}(t_f, t)$ nous pouvons écrire:

$$\underline{p}_i(t_f) = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_{121}(t_f, t) \\ \underline{\Phi}_{122}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_i(t) \\ \underline{p}_i(t) \end{bmatrix} + \underline{\omega}_{12}(t) \quad (\text{III-27})$$

où $\underline{\omega}_{12}(t)$ représente la partie intégrale correspondant à $\underline{p}_i(t)$

La condition $\underline{p}_i(t_f)$ étant nulle selon (III-17) alors:

$$\underline{p}_i(t) = -\underline{\Phi}_{122}^{-1}(t_f, t) \underline{\Phi}_{121}(t_f, t) \underline{x}_i(t) - \underline{\Phi}_{122}(t_f, t) \underline{\omega}_{12}(t) \quad (\text{III-28})$$

L'existence de $\underline{\Phi}_{122}^{-1}(t_f, t)$ est assurée parce que c'est le mineur principal d'une matrice de transition d'état [37]

En posant

$$\left. \begin{aligned} G'_i(t) &= -\bar{\Phi}_{22}^{-1}(t_f, t) \bar{\Phi}_{21}(t_f, t) \\ \text{et} \quad g'_i(t) &= -\bar{\Phi}_{22}(t_f, t) \underline{\omega}_{12}(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-29})$$

la relation (III-28) s'écrit :

$$\underline{p}_i(t) = G'_i(t) \underline{x}_i(t) + g'_i(t) \quad (\text{III-30})$$

La substitution de (III-30) and (III-14) permet d'écrire la commande comme une fonction explicite de $\underline{x}_i(t)$, i.e. :

$$\underline{u}_i(t) = C_i \left[\underline{x}_i(t), G'_i(t) \underline{x}_i(t) + g'_i(t) \right] \quad (\text{III-31})$$

et si (III-31) est linéaire, nous obtenons :

$$\underline{u}_i(t) = G_i(t) \underline{x}_i(t) + g_i(t) \quad (\text{III-32})$$

Obtention de $G'(t)$ et $q'(t)$:

La matrice $\hat{Y}^{k+1}(t)$ solution de l'équation différentielle (III-23) peut s'écrire en appliquant les propriétés des matrices de transition d'état [29] :

$$\hat{Y}^{k+1}(t) = \bar{\Phi}(t, t_0) \hat{Y}_i^{k+1}(t_0) = \bar{\Phi}(t, t_0) \quad (\text{III-33})$$

puisque $\hat{Y}_i^{k+1}(t_0) = \mathbf{1}$

Il est alors possible de calculer $\bar{\Phi}(t_f, t)$ en faisant

$$\bar{\Phi}(t_f, t) \bar{\Phi}(t, t_0) = \bar{\Phi}(t_f, t_0) \quad (\text{III-34})$$

$$\bar{\Phi}(t_f, t) = \bar{\Phi}(t_f, t_0) \bar{\Phi}(t_0, t)^{-1} = \hat{Y}^{k+1}(t_f) \left[\hat{Y}^{k+1}(t) \right]^{-1}$$

De la même manière la solution particulière $\underline{M}^{k+1}(t)$ s'écrit:

$$\underline{M}^{k+1}(t_f) = \bar{\Phi}(t_f, t) \underline{M}^{k+1}(t) + \int_t^{t_f} \bar{\Phi}(t_f, \tau) \left\{ F(\underline{Y}^k(\tau)) - J(\underline{Y}^k(\tau)) \cdot \underline{Y}^k(\tau) \right\} d\tau \quad (\text{III-35})$$

et en partitionnant $\underline{M}^{k+1} = \begin{bmatrix} \underline{m}_1 \\ \underline{m}_2 \end{bmatrix}$ nous obtenons :

$$\underline{q}_2'(t) = \underline{\Phi}_{22}^{-1}(t_f, t) \underline{m}_2(t_f) - G'(t) \underline{m}_1(t) + \underline{m}_2(t) \quad (\text{III-32})$$

En résumé, la connaissance de $\underline{\Phi}(t_f, t), \hat{Y}^{k+1}(t)$ et $\underline{M}^{k+1}(t)$ permet de déterminer $G(t), \underline{q}(t)$ à la dernière itération de la procédure de quasilinearisation et ce, sans augmenter trop le volume de calcul. Evidemment la commande n'est calculée qu'à la convergence du niveau supérieur, i.e. pour des trajectoires de $\underline{\beta}(t)$ optimales.

La structure de calcul résultante est donnée en figure III-1.

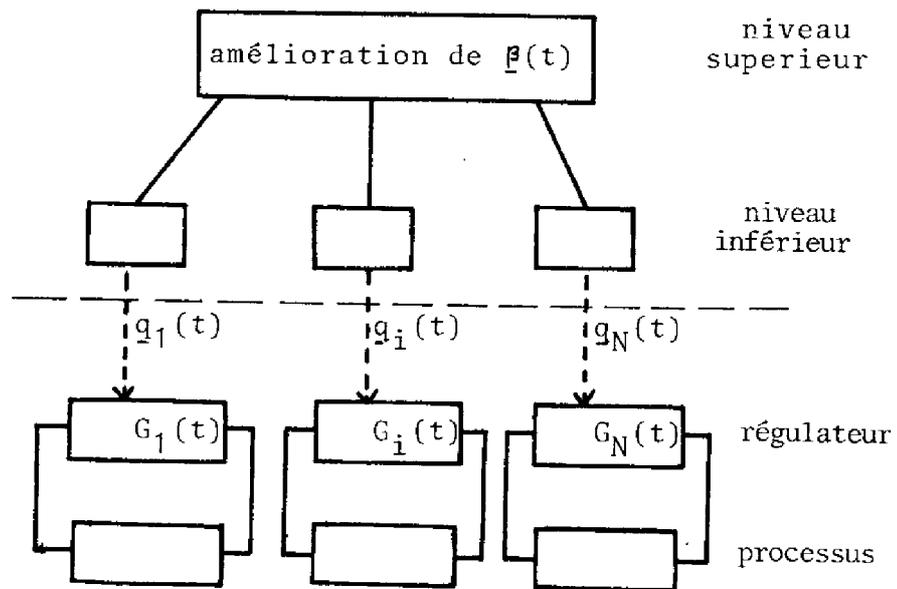


Figure III.3

Remarques :

1) La loi de commande obtenue (III-32) n'est pas rigoureusement en boucle fermée [8] puisque les matrices de gain $G_i(t)$ et les vecteurs de perturbations $q_i(t)$ sont fonctions par l'intermédiaire de $\hat{y}^{k+1}(t)$ et de $\underline{M}^{k+1}(t)$ des trajectoires de linéarisation $\underline{y}^{k+1}(t)$, qui dépendent des conditions initiales. Cependant comme l'ont montré les travaux de Calvet [8], l'implantation d'une telle loi de commande réduit considérablement la sensibilité aux conditions initiales.

2) Cette méthode que nous avons exposée dans le cas décomposé est évidemment applicable selon une approche globale. Cependant l'hypothèse (III-14), i.e. que la commande \underline{u} puisse être exprimée comme une fonction explicite de l'état \underline{x} et du vecteur adjoint $\underline{p}(t)$ est toujours nécessaire, à la synthèse d'une commande en boucle fermée partielle. Cette hypothèse, outre la convergence de la procédure de quasilinearisation, est la principale restriction d'applicabilité de cette méthode.

3) La décomposition de ce problème permet de définir une structure de commande décentralisée, les matrices G_i et les vecteurs q_i de III-32 sont calculés à la convergence du coordonnateur et tiennent compte des couplages entre les sous-systèmes (par la modification du critère des sous-problèmes (III-6)).

4) La même procédure peut être appliquée aux systèmes dynamiques linéaires. Dans ce cas, la solution est obtenue au niveau inférieur dès la première itération de la procédure de quasilinearisation.

III-3 - METHODE BASEE SUR LE PRINCIPE DE PREDICTION MODIFIE

Cette méthode, développée par Hassan et Singh [30] constitue une extension du principe de prédiction de Takahara aux systèmes non-linéaires.

Considérons le problème de régulation optimale autour d'un point d'équilibre, que nous supposerons à l'origine. Soit à

minimiser le critère

$$I = \sum_{i=1}^N \int_0^T \left(\frac{1}{2} \|\underline{x}_i\|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \|\underline{u}_i(t)\|_{R_i}^2 \right) dt \quad (\text{III-37})$$

où Q_i , R_i , $i = 1 \dots N$ sont des matrices supposées symétriques, semi définies et définies positives respectivement. Le temps final est fixé.

Sous les contraintes représentées par l'équation d'état du système :

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{III-38})$$

où \underline{x} : vecteur d'état de dimension m_x

\underline{u} : vecteur de commande de dimension m_u

Ayant supposé que le système possède au moins un point d'équilibre stable et que ce point est à l'origine i.e. $f(0,0)=0$

l'équation (III-38) s'écrit en considérant le développement en série de Taylor du premier ordre autour de l'origine :

$$\dot{\underline{x}}(t) = A^* \underline{x}(t) + B^* \underline{u}(t) + f(\underline{x}, \underline{u}) - A^* \underline{x}(t) - B^* \underline{u}(t) \quad (\text{III-39})$$

$$\text{où } A^* = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(t) \right|_{\substack{\underline{x}=\mathbf{0} \\ \underline{u}=\mathbf{0}}} \quad \text{et} \quad B^* = \left. \frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(t) \right|_{\substack{\underline{x}=\mathbf{0} \\ \underline{u}=\mathbf{0}}}$$

La paire $(A^*; B^*)$ est supposée représenter un système commandable.

L'équation (III-39) s'écrit de façon équivalente :

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t) + D(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{III-40})$$

où A et B sont constituées des N parties bloc-diagonales de A^* et B^* respectivement,

$$D(\underline{x}, \underline{u}) = C_1 \underline{x}(t) + C_2 \underline{u}(t) + f(\underline{x}, \underline{u}) - A^* \underline{x}(t) - B^* \underline{u}(t) \quad (\text{III-41})$$

avec C_1 et C_2 : parties hors-diagonales de A^* et B^* .

La méthode utilisée consiste à fixer les non-linéarités et les interconnexions dans l'équation (III-40) en utilisant une prédiction des trajectoires $\underline{x}^\circ(t), \underline{u}^\circ(t)$ fournies par un niveau supérieur. Le terme en $D(\underline{x}^\circ, \underline{u}^\circ)$ est alors connu et comme les matrices A et B sont blocs diagonales, le problème peut être décomposé en N sous-problèmes de minimisation indépendants.

Le niveau supérieur aura à faire coïncider à l'optimum, les valeurs prédites pour les interactions et les non-linéarités avec celles provenant de la résolution des sous-problèmes d'optimisation.

Ceci est obtenu en modifiant la formulation du problème de la manière suivante :

$$\text{Min}_{\underline{x}, \underline{u}, \underline{x}^\circ, \underline{u}^\circ} I = \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^T \left(\frac{1}{2} \|\underline{x}_i\|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \|\underline{u}_i(t)\|_{R_i}^2 \right) dt \quad (\text{III-42})$$

sous les conditions

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t) + D(\underline{x}^\circ, \underline{u}^\circ) \quad (\text{III-43})$$

$$\underline{x}(t) - \underline{x}^\circ(t) = 0 \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

$$\underline{u}(t) - \underline{u}^\circ(t) = 0 \quad (\text{III-44})$$

L'hamiltonien du problème (III-42) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i = & - \frac{1}{2} (\|\underline{x}(t)\|_Q^2 + \|\underline{u}(t)\|_R^2) + \underline{\lambda}^T(t) \cdot [A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) + D(\underline{x}^\circ, \underline{u}^\circ)] \\ & + \underline{\pi}^T(t) \cdot [\underline{x}(t) - \underline{x}^\circ(t)] + \underline{\rho}^T(t) \cdot [\underline{u}(t) - \underline{u}^\circ(t)] \end{aligned} \quad (\text{III-45})$$

avec $Q = \text{diag}(Q_i, i=1 \text{ à } N)$

$R = \text{diag}(R_i, i=1 \text{ à } N)$

$\underline{\lambda}(t)$ vecteur de variables duales associées à l'équation dynamique du modèle (III-43)

$\underline{\pi}(t), \underline{\rho}(t)$ paramètres de Lagrange associés aux contraintes égalité (III-44)

Les conditions nécessaires d'optimalité permettent d'écrire:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{u}} = 0 \quad \underline{u}(t) = R^{-1} [-B^T \underline{\lambda}(t) - \underline{\rho}(t)] \quad (\text{III-46})$$

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}}^\circ(t) &= A \underline{x}(t) + BR^{-1} [-B^T \underline{\lambda}(t) - \underline{\beta}(t)] + C_1 \underline{x}^\circ(t) + C_2 \underline{u}^\circ(t) + \\ &+ f(\underline{x}^\circ(t), \underline{u}^\circ(t)) - A^* \underline{x}^\circ(t) - B^* \underline{u}^\circ(t) \end{aligned} \quad (\text{III-47})$$

$$\text{avec } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

$$\underline{\dot{\lambda}}^\circ(t) = -Q \underline{x}(t) - A^T \underline{\lambda}(t) - \underline{\pi}(t) \quad (\text{III-48})$$

$$\text{avec } \underline{\lambda}(t_f) = 0$$

On a aussi les conditions

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{\pi}} = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{x}^\circ(t) = \underline{x}(t) \quad (\text{III-49})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{\beta}} = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{u}^\circ(t) = \underline{u}(t) = R^{-1} \begin{bmatrix} -B^T(t) \underline{\lambda}(t) \\ -\underline{\beta}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III-50})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{x}^\circ(t)} = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{\pi}(t) = \left[C_1^T + \frac{\partial f}{\partial \underline{x}(t)} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}^\circ, \underline{u}=\underline{u}^\circ} - A^{*T} \right] \underline{\lambda}(t) \quad (\text{III-51})$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{u}^\circ(t)} = 0 \quad \text{ou} \quad \underline{\beta}(t) = \left[C_2^T + \frac{\partial f}{\partial \underline{u}(t)} \Big|_{\underline{x}=\underline{x}^\circ, \underline{u}=\underline{u}^\circ} - B^{*T} \right] \underline{\lambda}(t) \quad (\text{III-52})$$

Pour des trajectoires $\underline{x}^\circ(t), \underline{u}^\circ(t)$, $\underline{\beta}(t)$ et $\underline{\pi}(t)$ données, les équations (II-46), (III-47) et (III-48) avec leurs conditions aux frontières constituent N sous problèmes d'optimisation indépendants et peuvent donc être traités simultanément au niveau inférieur.

Le niveau supérieur calcule, à partir des trajectoires \underline{x} , \underline{u} , $\underline{\lambda}$ résultantes, une nouvelle prédiction pour les variables à $\underline{x}^\circ(t)$, $\underline{u}^\circ(t)$, $\underline{\beta}(t)$, $\underline{\pi}(t)$ utilisant les relations (III-49) (III-52).

On obtient alors un algorithme itératif à deux niveaux représenté en figure III-2, avec $\underline{1}^{kT} = (\underline{x}^{\circ k}, \underline{u}^{\circ k}, \underline{\beta}^k, \underline{\pi}^k)$

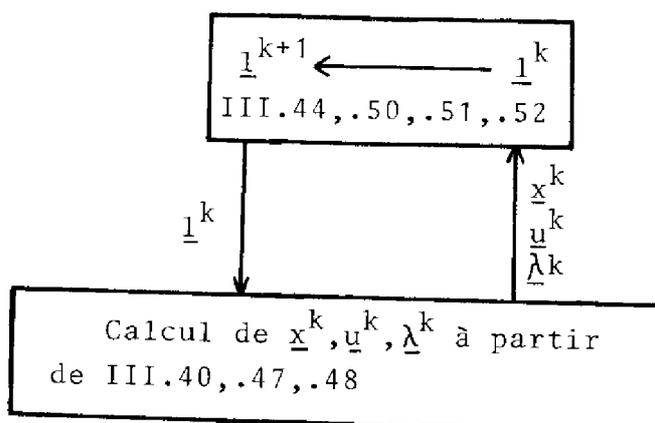


Figure III-2

L'initialisation de l'algorithme peut être faite en posant les vecteurs de prédiction égale à $\underline{x}^0(t) = \underline{u}^0(t) = \underline{\beta}(t) = \underline{\pi}(t) = 0$

La convergence est assurée lorsque

$$\max_t \|\underline{1}^k - \underline{1}^{k+1}\| \leq \epsilon$$

où ϵ est un nombre réel arbitrairement petit.

III-3-1- Loi de commande en boucle fermée :

Au niveau inférieur, pour des trajectoires $\underline{x}^0(t)$, $\underline{u}^0(t)$, $\underline{\beta}(t)$ et $\underline{\pi}(t)$ données, nous avons donc à résoudre N sous-problèmes indépendants avec conditions aux deux bouts (III-47)-(III-48). Ces problèmes sont parfaitement semblables à ceux traités en II-3-1 et leur résolution est obtenue en suivant un développement identique. Supposons que la solution soit de forme :

$$\underline{\lambda}(t) = K(t) + \underline{s}(t) \quad (\text{III-53})$$

où K est une matrice bloc-diagonale

$$\text{Alors } \dot{\underline{\lambda}}(t) = \dot{K}(t) \underline{x}(t) + K(t) \dot{\underline{x}}(t) + \dot{\underline{s}}(t) \quad (\text{III-54})$$

En substituant dans (III-46) nous obtenons :

$$K \dot{\underline{x}}(t) + \dot{K} \underline{x}(t) + \dot{\underline{s}}(t) = -Q \underline{x}(t) - A^T [K \underline{x}(t) + \underline{s}(t)] - \underline{\pi}(t) \quad (\text{III-55})$$

En remplaçant $\dot{\underline{x}}(t)$ par la relation (III-47), on peut écrire :

$$\left[K + A^T K + KA - KBR^{-1} B^T K + Q \right] \underline{x}(t) + \dot{\underline{s}}(t) - KBR^{-1} B^T \underline{s}(t) + A^T \underline{s}(t) \quad (\text{III-56})$$

$$-KBR^{-1} \underline{\beta}(t) + KC_1 \underline{x}^\circ(t) + KC_2 \underline{u}^\circ(t) + K f(\underline{x}^\circ, \underline{u}^\circ) - KA \underline{x}^\circ(t) - KB \underline{u}^\circ(t) + \underline{\pi}(t) = 0$$

Cette relation (III-56) doit être vraie quel que soit $\underline{x}(t)$, ce qui s'écrit alors :

$$\dot{K} + A^T K + KA - KBR^{-1} K + Q = 0 \quad (\text{III-57})$$

avec $K(T) = 0$

$$\dot{\underline{s}}(t) + A^T \underline{s}(t) - KBR^{-1} B^T \underline{s}(t) - KBR^{-1} \underline{\beta}(t) + KC_1 \underline{x}^\circ(t) + KC_2 \underline{u}^\circ(t) + K f(\underline{x}^\circ, \underline{u}^\circ, t) - KA \underline{x}^\circ(t) - KB \underline{u}^\circ(t) + \underline{\pi}(t) = 0 \quad (\text{III-58})$$

avec $\underline{s}(T) = 0$

La résolution de ce système d'équations (III-57), (III-58) est obtenue en intégrant à rebours chacune des équations à partir des conditions finales $K(T) = 0$ et $\underline{s}(T) = 0$ pour des trajectoires de $\underline{x}^\circ(t)$, $\underline{u}^\circ(t)$, $\underline{\beta}(t)$ et $\underline{\pi}(t)$ données.

A l'optimum, les trajectoires résultantes de $K(t)$, $\underline{x}(t)$, $\underline{s}(t)$ et $\underline{\beta}(t)$ permettent de calculer une loi de contre-réaction :

$$\underline{u}(t) = -R^{-1} \left[B^T K(t) \underline{x}(t) + B^T \underline{s}(t) + \underline{\beta}(t) \right] \quad (\text{III-59})$$

Cette loi comprend une partie en boucle fermée, fonction uniquement de l'état \underline{x} à l'instant t et une partie en boucle ouverte qui dépend des conditions initiales $\underline{x}_i(0)$ par l'intermédiaire des trajectoires de linéarisation $\underline{x}^\circ(t)$, $\underline{u}^\circ(t)$ et par les vecteurs $\underline{s}(t)$ et $\underline{\beta}(t)$.

Remarques :

1) L'équation matricielle de Riccati (III-57) n'est résolue qu'une seule fois, en l'occurrence à la première itération du coordonnateur. Les matrices A , B , $K(t)$ et Q étant blocs-diagonales, les gains de contre réactions obtenus $-R^{-1}B^TK(t)$ correspondent aux gains des sous-systèmes linéarisés (autour du point d'équilibre) et découplés (initialisation de $\underline{x}^o(t)=\underline{u}^o(t)=0$)

2) Cette méthode que nous avons exposée suivant une approche décomposée est aussi applicable dans une approche globale.

3) De plus, comme nous résolvons au niveau inférieur des problèmes d'optimisation linéaire à critère quadratique, la méthode de résolution par prédiction du vecteur adjoint exposée en (II-3-2) peut être utilisée [29].

III-3-2 - Considérations sur la convergence

Différentes études sur la convergence de cet algorithme ont été faites dans [30], †, et pour la version employant au niveau inférieur la méthode de résolution par prédiction du vecteur adjoint [19]. Nous rappellerons brièvement dans cette section leurs conclusions essentielles.

L'étude de la convergence d'un algorithme tel que celui présenté en III-3-1, se ramène indirectement à l'étude des propriétés des suites de vecteurs engendrées par l'application de G de $R^2(m_x \times m_u)$ dans $R^2(m_x \times m_u)$ soit :

$$l^k = G^k(l^o) \quad l^o \in R^2(m_x \times m_u)$$

Si la suite l^k est convergente, il sera possible de conclure à la stabilité de l'algorithme i.e. à la convergence vers des points fixes atteignables (localement et globalement).

Pour cela on peut utiliser la condition suffisante de convergence des suites numériques issues du théorème de Cauchy qui s'énonce de la façon suivante :

† F. MORA CAMINO, M. DE COLIGNY "Programmation non-linéaire: considération sur la stabilité et la convergence de certains algorithmes". Communiqué Privé, Juillet 1977.

La suite l^k est convergente si et seulement si il existe α fixé, $\alpha \in [0, 1]$ et il existe $K(\alpha) \in \mathbb{N}$ où \mathbb{N} est l'ensemble des entiers tel que :

$$|l^{k+1} - l^k| \leq \alpha |l^k - l^{k-1}| \quad \text{pour tout } k \geq K(\alpha)$$

Cette condition présente l'intérêt de ne supposer ni l'existence d'une limite pour la suite, ni d'en connaître la valeur.

L'étude des suites de vecteurs engendrés par l'algorithme permet de démontrer la stabilité de l'algorithme sous certaines conditions suffisantes ; cependant dans le cas général, ces conditions sont d'une part trop restrictives et se révèlent extrêmement difficiles à vérifier dans le cas général, d'autant plus que les majorants employés sont des fonctions implicites de T , l'horizon d'optimisation.

Dans le but d'obtenir des conditions moins restrictives, il est intéressant d'étudier certains cas particuliers de l'algorithme.

Dans le cas linéaire, cette méthode est identique à l'algorithme de Takahara, présentée par Pearson dans [3]. Une condition suffisante de stabilité globale est que $\|R^{-1}\| < 1$ sur un horizon d'optimisation $[0, T]$ avec T suffisamment petit.

Un autre cas particulier intéressant est quand la fonction de modèle f de (III-38) est quadratique. On peut montrer ^t alors qu'il est toujours possible de satisfaire la condition suffisante de stabilité en employant une technique de relaxation telle que :

$$l^{k+1}(t) = \alpha G(l^k(t)) + (1 - \alpha) l^k(t)$$

où $\alpha \in [0, 1]$

Cependant ce genre de procédé peut entraîner (si le α est très faible) une forte augmentation du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un point suffisamment proche du point fixe de l'algorithme ; les erreurs de calcul peuvent alors devenir prépondérantes et conduire à des instabilités numériques.

Ayant démontré la stabilité de l'algorithme, il reste à étudier la nature des points fixes stables de G (optimum local, global ou point selle). Ceci est réalisé en appliquant les conditions du 2ème ordre ; il sera donc nécessaire de vérifier que le Hessien du Lagrangien est semi-défini positif en ce point pour assurer que nous sommes en présence d'un optimum local.

III-4 - APPLICATION A LA COMMANDE D'UNE MACHINE SYNCHRONE

Dans cette section nous appliquerons comparativement les deux algorithmes présentés au problème de la commande optimale de l'excitation d'une génératrice synchrone telle que décrite par Mukhopadhyay dans [32]

La machine synchrone est supposée reliée par une ligne de transmission à un réseau infini. Pour les besoins de notre démonstration (i.e. de disposer de deux sous-systèmes commandables) nous allons supposer qu'il existe deux bobinages différents sur le rotor, commandable séparément et comme dans [32] nous supposons que les voltages appliqués au bobinage de la machine synchrone est directement accessible et constitue la commande. Les équations d'état s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= B_1 - A_1 x_2 - A_{21} x_3 \sin x_1 - \frac{1}{2} B_{21} \sin 2x_1 \\ &\quad - A_{22} x_4 \sin x_1 - (B_{22}/2) \sin 2x_1 \\ \dot{x}_3 &= u_1 - C_{11} x_3 + C_{21} \cos x_1 \\ \dot{x}_4 &= u_2 - c_{12} x_4 + C_{22} \cos x_1\end{aligned}$$

où x_1 est l'angle du rotor (en radians)
 x_2 est la vitesse angulaire
 x_3, x_4 sont les flux du champ magnétique
 u_1, u_2 voltage appliqué au bobinage

Le problème est de calculer les commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ à appliquer au système à la suite de perturbations, de façon à minimiser un critère de performance quadratique :

$$I = \frac{1}{2} \int_0^T (\| \underline{x} - \underline{x}_{co} \|_Q^2 + \| \underline{u} - \underline{u}_{co} \|_R^2) dt$$

où \underline{x}_{co} et \underline{u}_{co} sont respectivement les valeurs des états et des commandes en régime permanent

Q et R, les matrices des coefficients de pondération du critère

Le système est supposé initialement en régime permanent. La perturbation considérée est produite par un échelon dans la puissance d'entrée P_e , qui descend de 0.725 p.u. à 0.68 p.u. et revient à sa valeur originale après de 0.1 sec.

Nous supposons que la commande est disponible après 0.1 secondes. Les valeurs en régime permanent sont les suivantes ($P_e = 0.725$)

$$\begin{aligned} x_{co1} &= 0.7461 & x_{co3} &= 7.7438 \\ x_{co2} &= 0. & x_{co4} &= 7.7438 \\ u_{1co} &= 1.1 \\ u_{2co} &= 1.1 \end{aligned}$$

Les paramètres du modèle sont pris égaux à :

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.5406 & A_{21} &= 12.012 & A_{22} &= 12.012 \\ B_1 &= 78.3784 & B_{21} &= -48.048 & B_{22} &= -48.048 \\ C_{11} &= 0.3222 & C_{12} &= 0.3222 \\ C_{21} &= 1.9 & C_{22} &= 1.9 \end{aligned}$$

Les conditions initiales pour la perturbation considérée ($P_i=0.68$) s'écrivent :

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0.7347 \\ x_2(0) &= -0.2151 \\ x_3(0) &= 7.7443 \\ x_4(0) &= 7.7443 \end{aligned}$$

Suivant les valeurs proposées dans [32] l'horizon d'optimisation T est choisi égal à 2 secondes. Les termes diagonaux des matrices Q et R sont choisis respectivement égaux à [20, 20, 2, 2] et [1, 1]

Résultats

Nous avons testé deux types de décomposition. Dans le premier cas, le système est divisé en 2 sous-systèmes définis par

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ ; \ x_4]$$

Dans le deuxième cas, il est divisé en 3 sous-systèmes i.e.

$$[x_1 \ x_2 \ ; \ x_3 \ ; \ x_4]$$

L'application des algorithmes présentés en III-2 et III-3 a soulevé de nombreux problèmes.

Dans le cas de la méthode de décomposition par le critère, les deux types de décomposition envisagés font apparaître les variables de couplage z_i d'une façon linéaire dans le lagrangien des sous-problèmes 1, ce qui introduit une commande singulière au niveau inférieur. En effet, le système décomposé s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Sous système n}^\circ 1: \quad & \dot{x}_1 = x_2 \\ & \dot{x}_2 = B_1 - A_1 x_2 - A_{21} x_3 \sin x_1 - (B_{21}/2) \sin 2x_1 \\ & \quad - A_{22} z_1 \sin x_1 - (B_{22}/2) \sin 2x_1 \\ & \dot{x}_3 = u_1 - C_{11} x_3 + C_{21} \cos x_1 \\ \text{Sous système n}^\circ 2: \quad & \dot{x}_4 = u_2 - C_{12} x_4 + C_{22} \cos z_2 \end{aligned}$$

Il faut pour retrouver le problème initial ajouter les contraintes de couplage suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 - x_4 &= 0 \\ z_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Par la suite z_1 apparaîtra linéairement dans le lagrangien du sous-problème n° 1.

La modification proposée par Bauman, telle qu'exposée en I-2-2-2 i.e. de rendre les équations de couplage non-linéaires en les élevant au carré soit :

$$\begin{aligned} z_1^2 - x_4^2 &= 0 \\ z_2^2 - x_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

révèle l'existence d'instabilité dans les trajectoires du paramètre de Lagrange β_1 associé à cette contrainte égalité pour le sous-système n° 1 comme l'a constaté Galy dans [9] .

Donc, dans le cas particulier, nous n'avons pu résoudre le système que globalement en employant la procédure de quasilinearisation modifiée de façon à obtenir une loi de commande en boucle fermée.

La méthode basée sur le principe de prédiction, si elle ne pose pas de problème au niveau de la décomposition des sous-systèmes, connaît par contre de graves problèmes de convergence.

Comme il est expliqué dans [30], cette méthode converge d'autant plus rapidement que l'écart entre les valeurs de la matrice de pondération R et Q sont grands ; ce qui revient à pénaliser fortement la commande :

Cependant il est possible, en ajoutant dans le critère un terme de pénalisation supplémentaire égal à $\| \underline{u} - \underline{u}^o \|_H^2$

i.e. :
$$I = \sum_{i=1}^N \int_0^T \left(\frac{1}{2} \| \underline{x} - \underline{x}_{co} \|_Q^2 + \frac{1}{2} \| \underline{u} - \underline{u}_{co} \|_R^2 + \frac{1}{2} \| \underline{u} - \underline{u}^o \|_H^2 \right) dt$$
 d'étendre le domaine de convergence de l'algorithme.

Nous sommes parvenu, après de multiples essais, à résoudre le problème pour $Q = [20, 20, 2, 2]$, $R = [20, 20]$ et $H = [1, 1]$.

Ce problème de commande optimale, a été résolu selon les deux approches présentés, sur le calculateur IBM 370/168 du CIRCE et les résultats sont donnés dans le tableau III-1

	Temps calcul	Emplacement mémoire	Nombre d'itérations
Quasilinearisation approche globale R = Diag [1,1]	19 sec	184 K	5
Principe prédiction modifié approche décomposée R = diag [20, 20]	84 sec	158 K	34

Tableau III-1

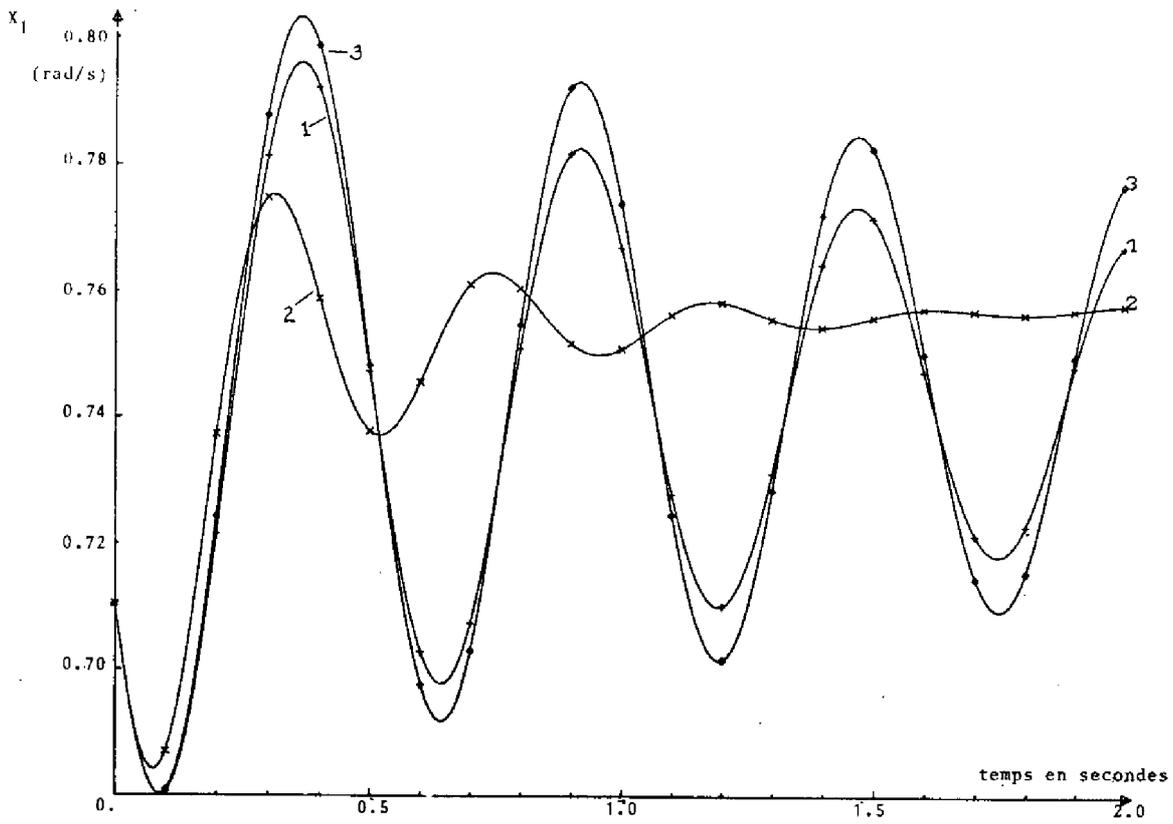
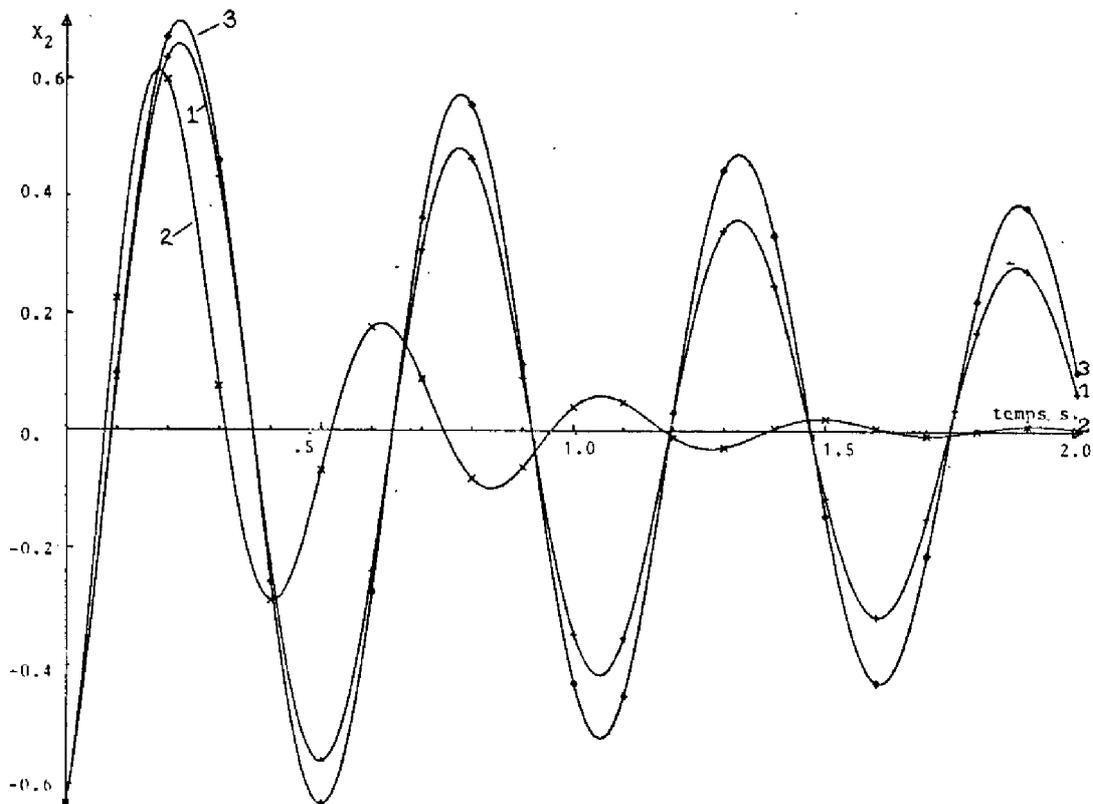
Ces résultats numériques sont difficilement comparables étant donné que les matrices de pondération de la commande sont différentes. D'après les essais que nous avons fait le nombre d'itération nécessaire à la résolution du problème ne varie pas selon le choix de la matrice R pour la procédure de quasilinearisation. Dans le cas de la méthode utilisant le principe de prédiction modifié, pour $R = \text{diag} [100, 100]$ la solution est obtenue après 6 itérations. Cependant les trajectoires obtenues sont inacceptables du point de vue physique (cf. ci-dessous)

Les figures III-3, III-4, III-5 et III-6 représentent respectivement les trajectoires des états x_1 , x_2 , x_3 et x_4 du système. Les figures III-7 et III-8 donnent les trajectoires des commandes u_1 et u_2 : la numérotation des courbes correspond aux trois cas suivants :

- courbe n° 1 : solution obtenue par le principe de prédiction modifié
 $Q = \text{diag} [20, 20, 2, 2]$ $R = \text{diag} [20, 20]$
 $H = \text{diag} [1, 1]$
- courbe n° 2 : solution par procédure de quasilinearisation (approche globale) $Q = \text{diag} [20, 20, 2, 2]$ $R = \text{diag} [1, 1]$
- courbe n° 3 : évolution du système libre, i.e. quand les commandes u_1 et u_2 sont gardées constantes

D'un point de vue physique, le choix des pondérations de la matrice R pour solutionner le problème est assez restreint comme le montre les trajectoires.

Compte tenu que l'expression du critère III-37 ne contient pas de terme particulier pondérant l'état du système à l'instant final T de l'horizon d'optimisation, cela suppose que le régime permanent du système est atteint à cet instant. La solution obtenue par la méthode du principe de prédiction modifié ne respecte pas cette hypothèse. Il faudrait alors soit introduire un terme dans le critère pénalisant l'état du système au temps T, soit augmenter l'horizon d'optimisation avec les risques que cela comporte au niveau de la convergence.

Figure III.3 Etat x_1 Figure III.4 : Etat x_2

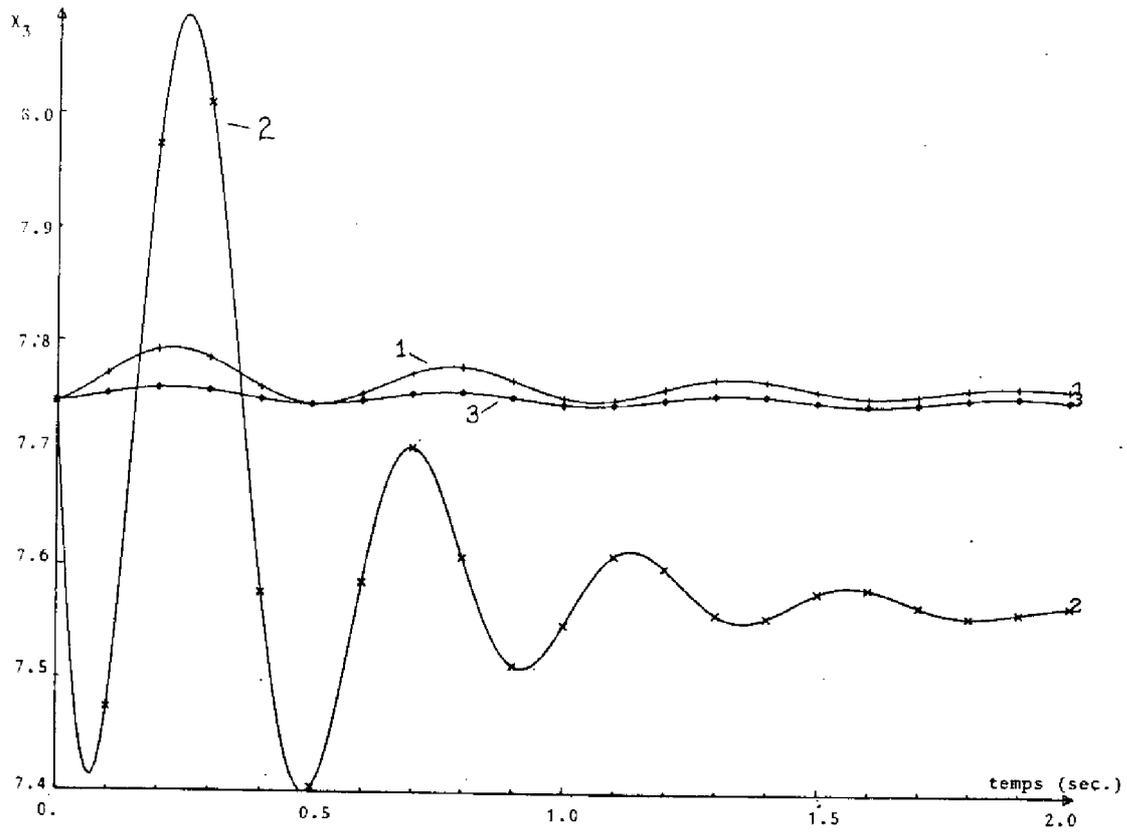


Figure III.5 : Etat x_3

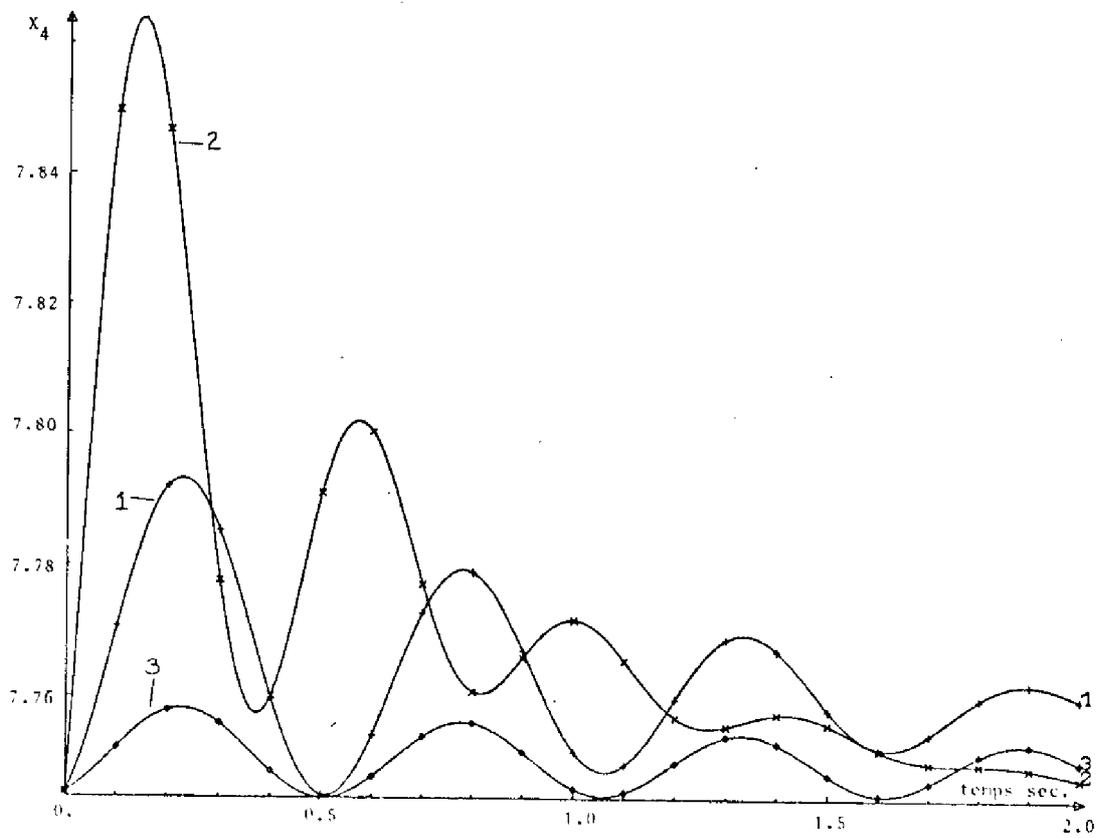


Figure III.6 : Etat x_4

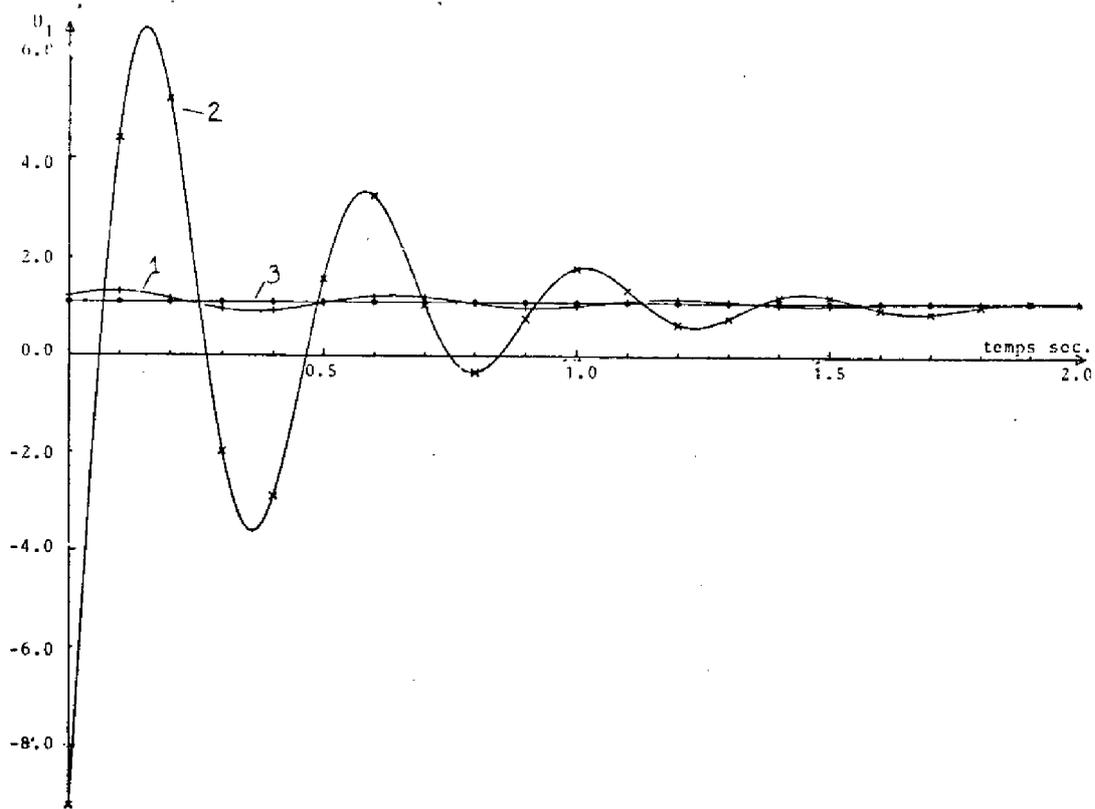


Figure III.7 : Commande u_1

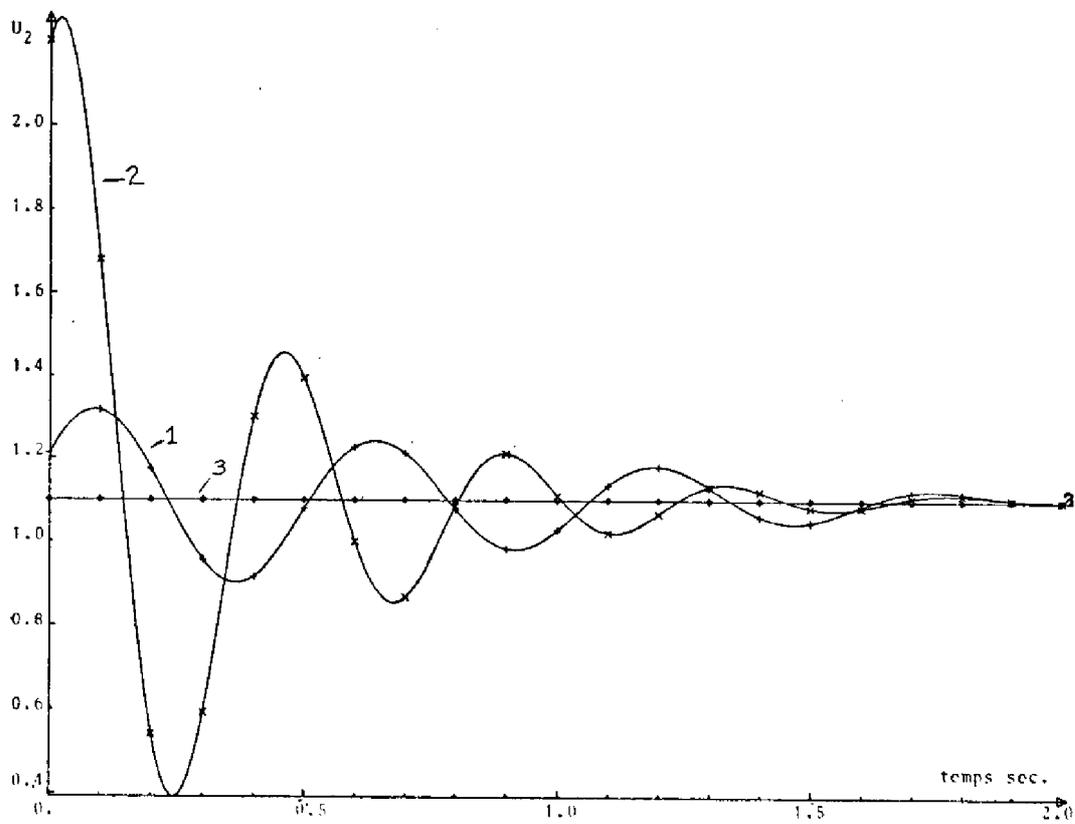


Figure III.8 : Commande u_2

III-5 - CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons montré comment les méthodes de décomposition-coordination peuvent être utilisées pour résoudre le problème de commande optimale des systèmes dynamiques non linéaires.

Les conditions d'applicabilité de la méthode de coordination par le critère sont connues théoriquement. Mais il est également connu que ces mêmes conditions sont trop restrictives. D'un point de vue pratique, il est peut être plus simple pour le moment de faire l'essai sur un système donné que de chercher des conditions moins restrictives ; notons cependant, certains développements récents dans ce domaine [40] .

La méthode basée sur le principe de prédiction modifié semble d'après nos essais applicable à un type très particulier de problème . En fait il est difficile de conclure quant aux propriétés d'un algorithme à partir de l'étude d'un seul cas. Dans cette optique il serait intéressant d'étudier des cas particuliers, par exemple quand la fonction du modèle f est quadratique.

Pour chacune des deux méthodes examinées, nous avons montré comment il est possible, de déterminer une loi de commande en boucle fermée partielle, qui peut être implantée d'une façon hiérarchisée ou globale. Une telle loi présente l'avantage de réduire considérablement la sensibilité de la commande aux conditions initiales. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

C H A P I T R E I V

AMELIORATION EN LIGNE DE LA LOI DE COMMANDE

- IV-1 INTRODUCTION
- IV-2 Présentation du problème
- IV-3 Approche selon le principe de prédiction modifié
- IV-4 Méthode de minimisation de l'hamiltonien
- IV-5 Mise en oeuvre hybride
- IV-6 CONCLUSION

IV-1 - INTRODUCTION

Nous avons présenté au chapitre précédent, des méthodes de résolution du problème de commande optimale des systèmes dynamiques non linéaires, qui permettent de calculer une loi de commande en boucle fermée partielle, soit

$$\underline{u}(t) = G(t) \underline{x}(t) + \underline{q}(t) \quad (\text{IV-1})$$

Le matrice de gain $G(t)$ pouvant être bloc diagonale dans le cas où le problème est résolu selon une approche décomposée. La loi de commande est alors décentralisée.

Cependant la trajectoire $\underline{q}(t)$ demeure fonction des conditions initiales et il convient d'étudier la sensibilité du critère pour différentes variations des conditions initiales. Il ressort d'une étude réalisée par Calvet [8] que l'implantation d'une loi de commande telle que définie en (IV-1) réduit considérablement la sensibilité du critère vis à vis des conditions initiales. Il est même possible de déterminer a priori le degré de sensibilité du critère aux variations des conditions initiales.

Malgré ces avantages, dans un cas pratique, la plage de variations des conditions initiales peut être très large et les perturbations altérant l'état du système peuvent se présenter d'une façon aléatoire. Il est alors intéressant de pouvoir améliorer la loi de commande en ligne, en agissant sur le terme en boucle ouverte $\underline{q}(t)$.

Dans ce chapitre nous étudierons la possibilité de modifier en ligne la commande en définissant un nouveau problème d'optimisation, chaque sous-système étant régulé localement par une boucle de contre-réaction.

Une première méthode possible pour résoudre ce problème est d'utiliser le principe de prédiction modifié tel qu'exposé en III-3 . Nous appliquerons cette méthode au problème traité en III-4 pour illustrer une approche décentralisée.

De plus, nous présenterons une méthode admissible qui améliore à chaque itération la trajectoire $\underline{q}(t)$. Cet algorithme sera appliqué au problème de la commande de l'excitation d'une machine synchrone. Nous présenterons dans une approche globale, la mise en oeuvre sur un système hybride de cette structure de commande.

IV-2 - PRESENTATION DU PROBLEME

A partir de la loi de commande (IV-1) obtenue par les méthodes décrites en chapitre III, il est possible de reformuler le nouveau problème d'optimisation suivant :

Soit à minimiser la fonctionnelle I :

$$\text{Min}_{\underline{q}} I = \int_{t_0}^{t_f} r(\underline{x}, G\underline{x} + \underline{q}, t) dt \quad (\text{IV-2})$$

sous les contraintes

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, G\underline{x} + \underline{q}, t) \quad (\text{IV-3})$$

$$\text{avec } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (\text{IV-4})$$

Les équations (IV-2) et (IV-3) sont écrites pour le système global les variables de couplage \underline{z} étant intégrées au système.

L'hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = r(\underline{x}, G\underline{x} + \underline{q}, t) + \underline{\lambda}^T f(\underline{x}, G\underline{x} + \underline{q}, t) \quad (\text{IV-5})$$

Les conditions nécessaires d'optimalité définissent comme précédemment un système d'équations différentielles à résoudre avec conditions aux deux bouts. Soit (IV-3) avec (IV-4) et

$$\dot{\underline{\lambda}} = -\partial \mathcal{H} / \partial \underline{x} \quad (\text{IV-6})$$

$$\text{avec } \underline{\lambda}(t_f) = 0 \quad (\text{IV-7})$$

$$\text{et } \partial \mathcal{H} / \partial \underline{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{q}(t) = v(\underline{x}, \underline{\lambda}, t) \quad (\text{IV-8})$$

La résolution en ligne de ce problème permettrait de modifier la commande $\underline{u}(t)$ par l'intermédiaire du vecteur $\underline{q}(t)$. Au niveau inférieur, N régulations locales (dans le cas d'une approche décomposée) définies par les boucles de contre-réaction G_i réalisent

une commande locale des sous-systèmes. Ces matrices ont été calculées pour les sous-systèmes couplés et pour des conditions initiales de référence (III-2-3, remarque n° 1).

Le niveau supérieur aura pour rôle de corriger les commandes locales en agissant sur les vecteurs de perturbations $q_i(t)$ lorsque la sous-optimalité du système devient trop forte i.e. pour des conditions initiales éloignées de la condition de référence.

Remarquons que la sensibilité du critère par rapport aux variations de l'état initial peut être évaluée a priori en utilisant la relation développée par Calvet [8] soit:

$$J = \frac{1}{2} \Delta X(t_0)^T SJ \Delta X(t_0) \quad (\text{IV-9})$$

$$\text{où : } SJ = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{bmatrix} S \\ GS \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xu} \\ r_{ux} & r_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ GS \end{bmatrix} \right\} dt \quad (\text{IV-10})$$

La matrice S est obtenue en utilisant la matrice de transition d'état du système définie précédemment en (III-26) et utilisée pour calculer les gains $G_i(t)$:

$$S = \Phi_{11}(t, t_0) + \Phi_{12}(t, t_0) \Phi_{22}(t, t_0)^{-1} \cdot \Phi_{21}(t, t_0) \quad (\text{IV-11})$$

Cette matrice peut être vue comme une matrice de sensibilité et sa détermination ne demande pas beaucoup de calcul supplémentaire si les matrices $G_i(t)$ ont été calculées.

IV-3 - APPROCHE SELON LE PRINCIPE DE PREDICTION MODIFIE

La méthode basée sur le principe de prédiction modifié que nous avons exposée en III-3 peut être utilisée pour améliorer la trajectoire $q(t)$.

En effet, ayant résolu le problème d'optimisation pour une première condition initiale, il suffit par la suite de ré-initialiser l'algorithme avec les trajectoires $\underline{x}^o(t)$, $\underline{u}^o(t)$, $\underline{\beta}(t)$, $\underline{\pi}(t)$ obtenues.

Dans cette seconde résolution la quantité de calcul est sensiblement réduite puisque nous n'avons pas à résoudre une deuxième fois l'équation de Riccati pour le système linéarisé.

Nous avons appliqué cette méthode au problème de la commande optimale d'une machine synchrone tel que défini en III-4. Les matrices de pondération du critère quadratique retenue ont été choisies de façon à demeurer dans le domaine où la convergence de l'algorithme est rapide soit :

$$Q = \text{diag} [10, 10, 1, 1] \quad \text{et} \quad R = \text{diag} [100, 100]$$

Les résultats sont donnés dans le table IV-1.

	conditions initiales	nombre d'itérations
Référence 1	$P^e = 0.68$	6
2	$P^e = 0.677$	2
3	$P^e = 0.67$	4
4	$P^e = 0.65$	6
5	$P^e = 0.615$	6

Tableau IV-1

Le nombre d'itérations indiqué correspond au passage de la condition initiale de référence 1 à chacune des conditions initiales, successives, soit de 1 à 2, de 1 à 3, de 1 à 4 et de 1 à 5.

Cette procédure réduit sensiblement le nombre d'itérations nécessaire au calcul de la nouvelle commande optimale pour des conditions suffisamment rapprochées de la condition de référence.

Les figures IV-1, IV-2, IV-3 et IV-4 donnent les trajectoires des états x_1 , x_2 et x_3 et de la commande u_1 respectivement.

En conclusion, l'application de cette méthode dans ce cas particulier permet de définir une structure de commande hiérarchisée. Chaque sous-système étant commandé localement :

$$u_1 = G_{11}x_1(t) + G_{12}x_2(t) + G_{13}x_3(t) + q_1(t)$$

$$u_2 = G_{21}x_4(t) + q_2(t)$$

le niveau supérieur assure alors la coordination de l'ensemble en modifiant le vecteur $q_i(t)$.

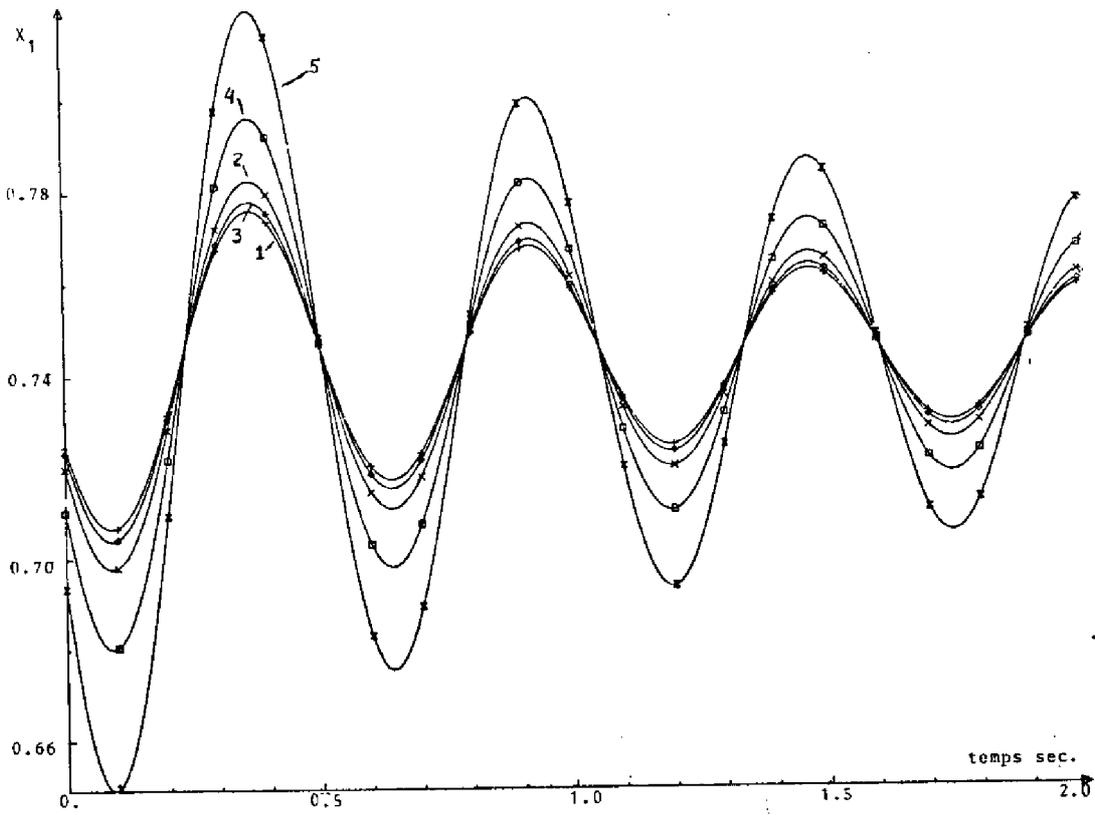


Figure IV.1 Etat x_1

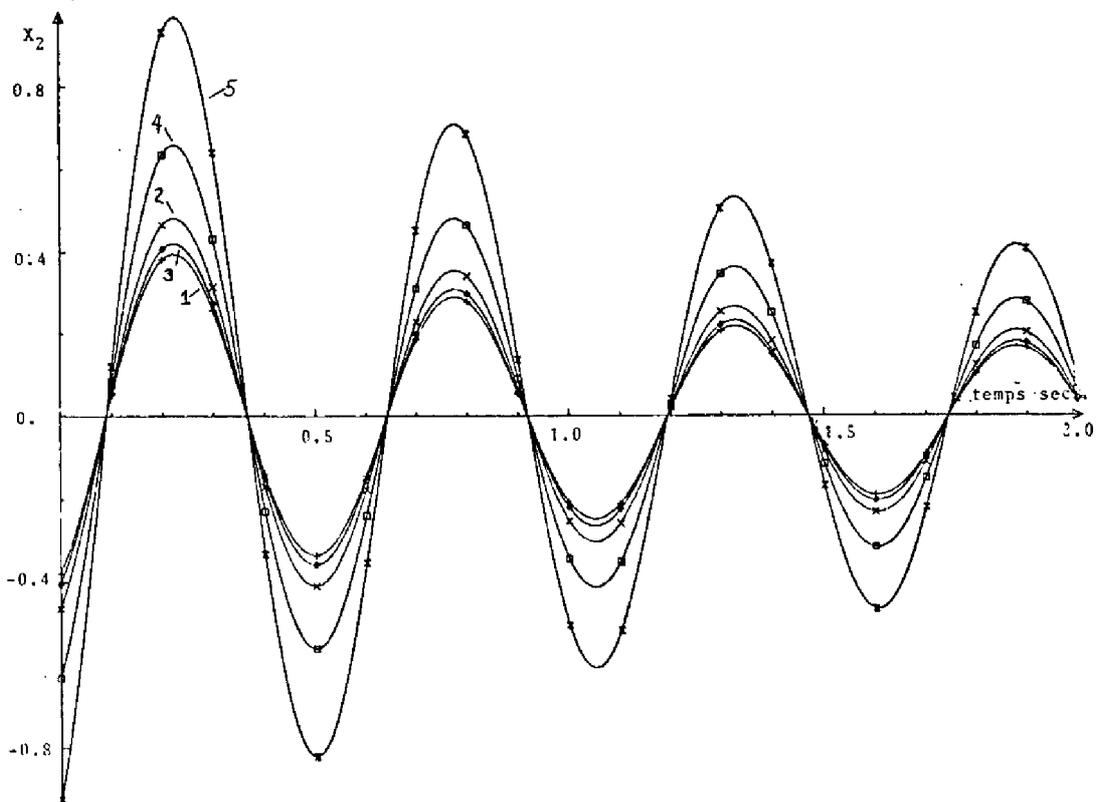


Figure IV.2 Etat x_2

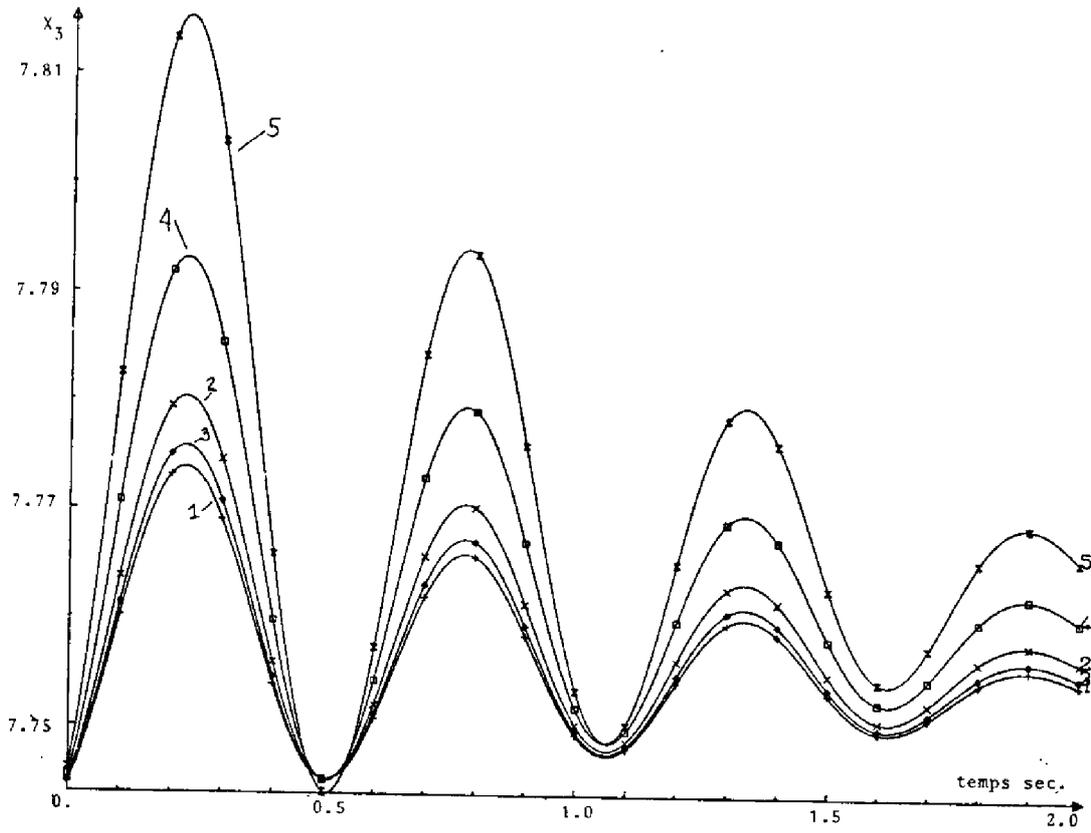


Figure IV.3 Etat x_3

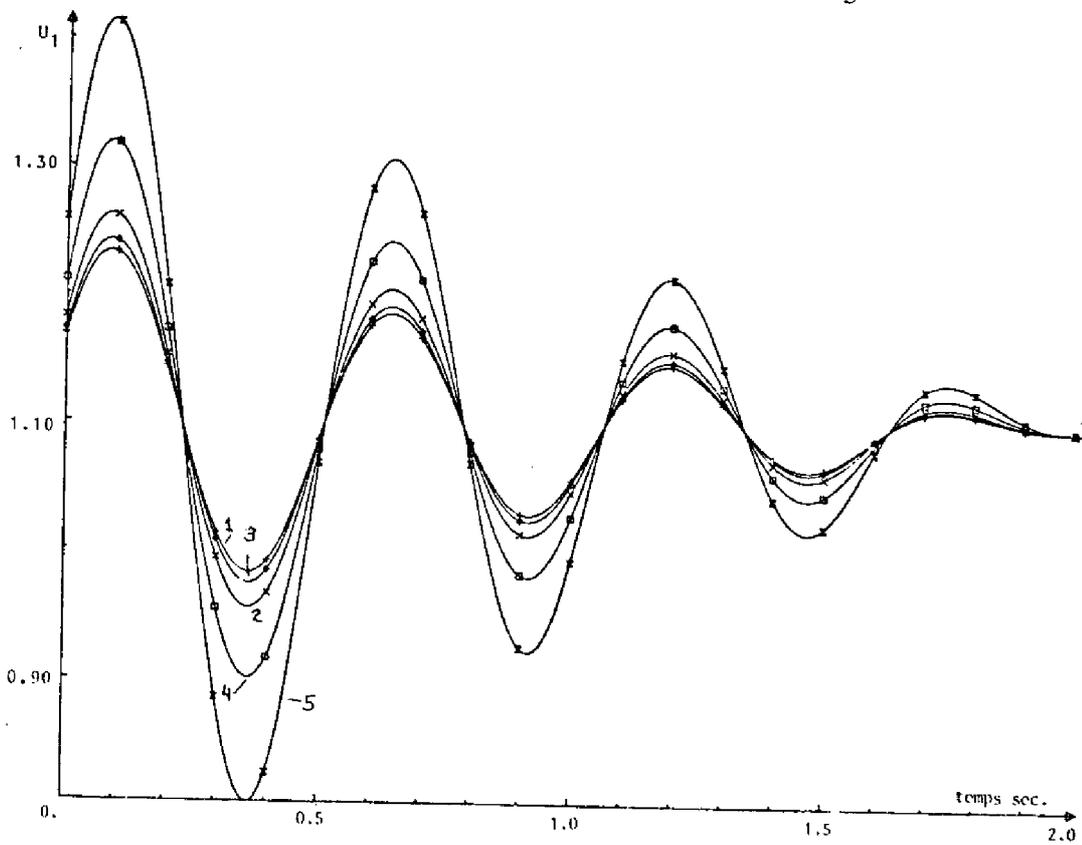


Figure IV.4 Commande u_1

Cependant, comme toutes les contraintes ne sont satisfaites qu'à la convergence de l'algorithme, l'application en ligne de cette méthode suppose que l'on dispose de suffisamment de temps pour obtenir la convergence ; ce qui limite l'application à des processus relativement lents, compte tenu de la quantité de calcul à exécuter au niveau supérieur.

IV-4 - METHODE DE MINIMISATION DE L'HAMILTONIEN

Pour le problème particulier que nous étudions, Calvet [8] a suggéré l'emploi d'une méthode itérative satisfaisant le contrainte définie par la dynamique du système à chaque itération. Il est alors possible d'appliquer la nouvelle trajectoire $\underline{q}(t)$ après chaque itération et la commande est améliorée en ligne.

Les conditions nécessaires d'optimalité définissent essentiellement un problème avec conditions aux deux bouts. Parmi les méthodes itératives possibles pour solutionner ce type de problème, il en existe deux types principaux.

IV-4-1 Méthode d'itération sur le vecteur adjoint

Cette méthode consiste à itérer sur les conditions initiales du vecteur adjoint $\underline{\lambda}(t_0)$ de façon à annuler les conditions finales $\underline{\lambda}(t_f) = 0$. A partir d'une condition initiale prédite du vecteur adjoint $\underline{\lambda}(t_0)$, les équations d'états et du système adjoint sont intégrées simultanément. La valeur finale $\underline{\lambda}(t_f)$ est alors utilisée pour calculer une nouvelle condition $\underline{\lambda}(t_0)$ suivant l'algorithme :

$$[\underline{\lambda}(t_0)]^{k+1} = [\underline{\lambda}(t_0)]^k + K[\underline{\zeta}(t_f)]^k \quad (\text{IV-12})$$

où $\underline{\zeta}(t_f) = \underline{\lambda}(t_f) - \underline{\lambda}^*(t_f)$
 $\underline{\lambda}^*(t_f)$ est la valeur optimale de $\underline{\lambda}(t_f)$ en occurrence = 0
 K est une matrice diagonale dont les coefficients sont constants ou adaptés à chaque itération en prenant

l'inverse de la matrice de sensibilité locale du vecteur $\underline{\epsilon}(t_f)$ par rapport à $\underline{\lambda}(t_0)$ soit :

$$, \left\{ s_{ij} \right\} = \frac{\delta \epsilon_j(t_f)}{\delta \lambda_i(t_0)} \quad (\text{IV-13})$$

Sur un système hybride, la répartition des tâches telle que donnée à la figure IV.5 est la suivante:

- le calculateur analogique intègre les équations d'état et du système adjoint.
- le calculateur numérique affiche les conditions initiales, détecte l'erreur sur $\underline{\lambda}(t_f)$, calcule la matrice K en inversant la matrice de sensibilité et détermine les nouvelles conditions initiales.

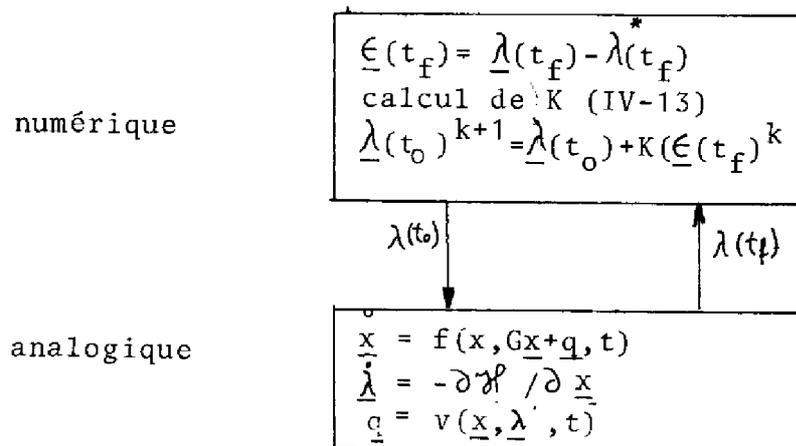


Figure IV.5

Remarquons que si la matrice K est choisie constante, la résolution de ce problème peut être entièrement effectuée sur un calculateur analogique.

Pour des systèmes non linéaires, on peut montrer que la convergence de cette algorithm est quadratique. Cependant, comme le fait remarquer Mezencev [41], les deux systèmes différentielles considérés, le modèle d'état et le système adjoint, sont si on les intègre dans une même direction, respectivement stables ou instables et inversement. Cette instabilité se traduit dans le cas où

on intègre les deux systèmes dans le sens direct, par une très grande sensibilité des conditions finales $\underline{\lambda}(t_f)$ du système adjoint par rapport aux conditions initiales $\underline{\lambda}(t_0)$. L'intégration par des méthodes numériques et plus encore sur un calculateur analogique se heurte à des problèmes de précisions importants qui rendent cette méthode difficile à appliquer.

IV-4-2 Méthodes d'itération sur la commande

Pour contourner les difficultés que nous venons de mentionner, la méthode d'itération sur la commande permet d'intégrer chaque itération dans le sens où elle est stable. A partir d'une trajectoire initiale de la commande $q_0(t)$, les équations d'état sont intégrées dans le sens direct, puis les équations du système adjoint dans le sens rétrograde. Les trajectoires de $\underline{x}^k(t)$ et $\underline{\lambda}^k(t)$ obtenues permettent de calculer une nouvelle commande $q(t)^{k+1}$ de façon à minimiser l'hamiltonien.

Parmi les techniques disponibles pour calculer la nouvelle trajectoire $q(t)$, nous avons retenu la méthode de minimisation de l'hamiltonien, telle que modifiée par Gibson et Lowinger [42]. Dans cette méthode la valeur extrême de l'hamiltonien est utilisée directement pour déterminer la commande (dans une technique du gradient classique, le déplacement s'effectue selon la pente), soit

$$\underline{q}(t)^{k+1} = \underline{q}(t)^k + I^k [\underline{q}(t)^{*k} - \underline{q}(t)^k] \quad (\text{IV-14})$$

où $q(t)^{*k}$ la commande obtenue par la recherche de l'optimum de l'hamiltonien en résolvant la relation (IV-8)

I^k facteur d'atténuation, constante positive ≤ 1

L'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que le choix du facteur d'atténuation I^k dépend des paramètres du système et peut demander une expérimentation assez longue.

Pour pallier à cet inconvénient, il est possible d'utiliser un algorithme d'interpolation linéaire permettant d'adapter le facteur d'atténuation I^k . Dans le cas d'une commande mono-variable, I^k est évalué selon :

$$I^k = P \operatorname{sg}(P) + I^1 \operatorname{sg}(-P) \tag{IV-15}$$

avec
$$P = I^{k-1} [\delta q(t)]^{k-1} / [\delta q(t)^{k-1} - \delta q(t)^k] \tag{IV-16}$$

$$\operatorname{sg}(P) = \begin{cases} 0 & \text{si } P \leq 0 \\ 1 & \text{si } P > 0 \end{cases}$$

$$\delta q(t)^k = q(t)^{*k} - q(t)^k \tag{IV-17}$$

Le facteur d'atténuation I^k devient alors variable dans le temps. Les nouvelles trajectoires $q(t)^{k+1}$ et $I(t)^k$ sont prédites en utilisant les valeurs précédentes $q(t)^k, \delta q(t)^k, \delta q(t)^{k-1}$ de telle façon que $\delta q(t)^{k+1}$ tende vers zéro.

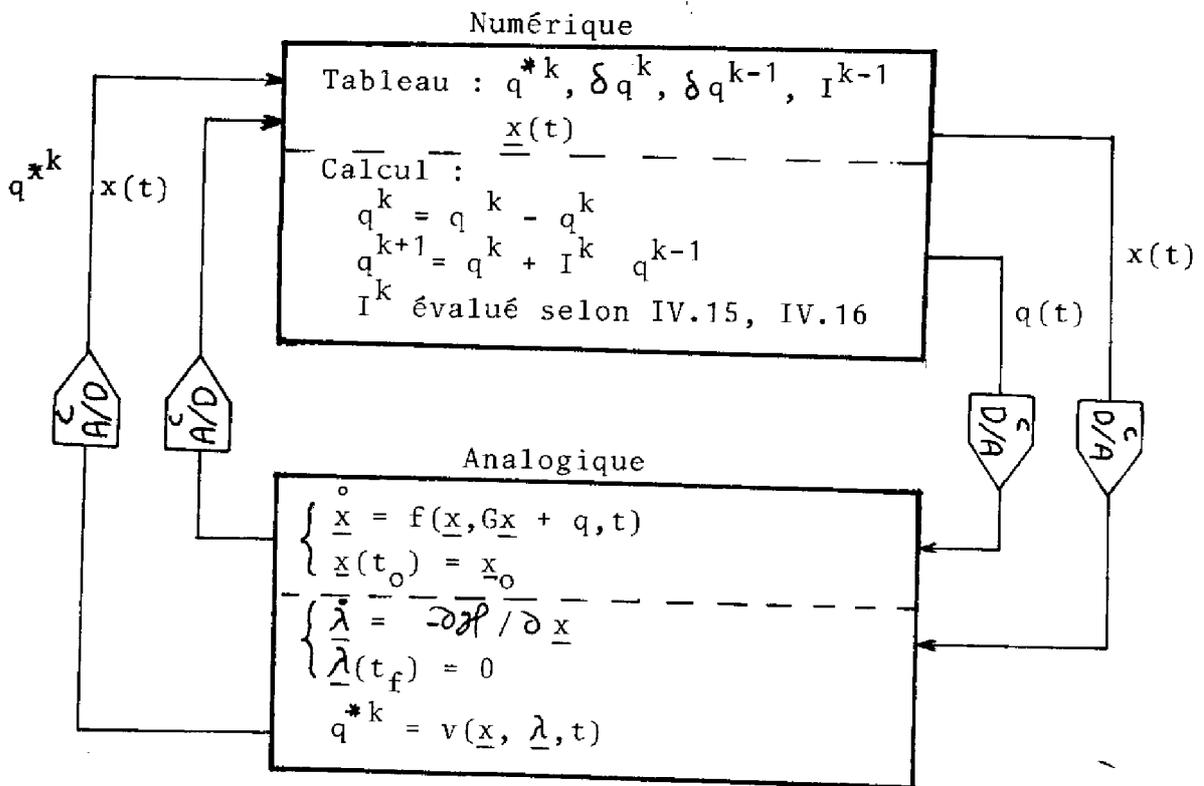


Figure IV.6

En nous référant à la figure IV-6, les principales étapes de l'algorithme de résolution sont les suivantes :

1) l'index d'itération du niveau supérieur est positionné égal à 1 ($k=1$) et la trajectoire $q^k(t)$ est initialisée.

2) le calculateur analogique intègre l'équation d'état (IV-3-), la trajectoire $q^*(t)$ de la commande est transmise par le calculateur numérique; simultanément les trajectoires résultantes $\underline{x}(t)$ sont mémorisées.

3) l'équation adjointe est intégrée à rebours; les trajectoires $\underline{x}(t)$ sont transmises au système adjoint et la nouvelle commande optimale q^{*k} est calculée et mémorisée par le calculateur numérique

4) la nouvelle trajectoire $q^{k+1}(t)$ est calculée en utilisant l'algorithme d'interpolation linéaire (relations IV-14, IV-15, IV-16 et IV-17)

5) calcul de l'erreur de prédiction de la commande

$$\epsilon_q = \int_{t_0}^{t_f} [q(t)^{k+1} - q(t)^k]^2 dt$$

Si $\epsilon_q \leq E_q$ où E_q est une constante choisie arbitrairement petite, retourner en 2

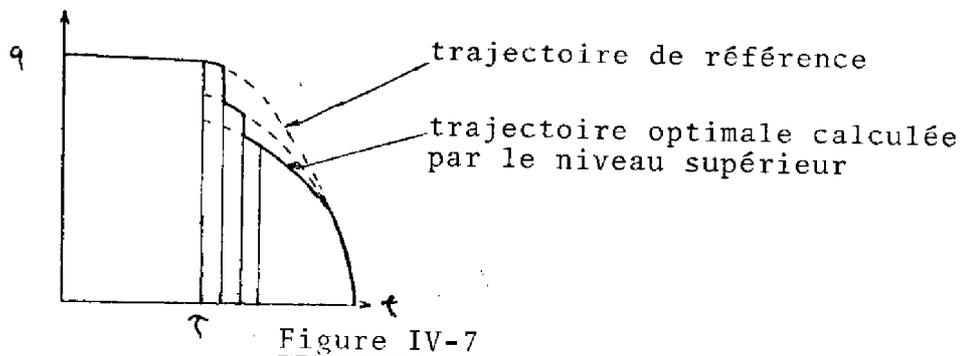
Sinon les trajectoires optimales de la commande $q(t)$ et des états sont atteintes.

Notons que cette approche que nous présentons pour une seule variable de commande, a été étendue au cas multivariable par Sewhoy et Gibson [43].

Cette approche permet donc de définir un second niveau pour améliorer la commande. Au niveau inférieur, chaque sous-système est régulé par des contre-réactions sur les états. Suite à une perturbation à l'instant τ affectant l'état du système, la technique que nous venons d'exposer peut être appliquée pour optimiser d'une façon itérative sur l'intervalle de temps $[\tau, T]$ la valeur du critère.

Ce niveau supérieur définit ainsi une contre réaction globale sur l'ensemble du système. Compte tenu du fait que les trajectoires $q_i(t)$ connues sont voisines de la solution optimale, nous pouvons espérer une vitesse de convergence rapide.

Toutefois, même si le niveau supérieur ne dispose pas du temps nécessaire pour converger entre chaque échantillonnage des variables d'état, on peut appliquer la commande calculée et espérer obtenir une amélioration de la commande en cours de fonctionnement [8], telle que représentée dans la figure IV-7



IV-5 - APPLICATION A LA COMMANDE DE L'EXCITATION D'UNE MACHINE SYNCHRONE

Cette méthode a été appliquée au problème de la commande d'une machine synchrone. Nous avons considéré le modèle original tel que proposé par Mukhopadhyay [32] et l'algorithme de calcul a été mis en oeuvre sur un système hybride.

Les équations d'état, telles que définies dans la section III-4 s'écrivent :

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (IV-18)$$

$$\dot{x}_2 = B_1 - A_1 x_2 - A_{21} x_3 \sin x_1 - (B_{21}/2) \sin 2x_1 \quad (IV-19)$$

$$\dot{x}_3 = G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 + q - C_{11} x_3 + C_{21} \cos x_1 \quad (IV-20)$$

Le critère à minimiser

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\|\underline{x} - \underline{x}_{co}\|_Q^2 + \|\underline{G}\underline{x} + q - u_{co}\|_R^2 \right] dt \quad (IV-21)$$

Les équations du système adjoint obtenues à partir de IV-6 sont les suivantes

$$-\dot{\lambda}_1 = Q_1(x_1 - x_{co1}) + RG_1 w - \lambda_2 (A_{21} x_3 \cos x_1 + B_2 \cos 2x_1 + \lambda_3 (G_1 - C_{21} \sin x_1)) \quad (\text{IV-22})$$

$$-\dot{\lambda}_2 = Q_2(x_2 - x_{co2}) + RG_2 w + \lambda_1 - \lambda_2 A_1 + \lambda_3 G_2 \quad (\text{IV-23})$$

$$-\dot{\lambda}_3 = Q_3(x_3 - x_{co3}) + RG_3 w - \lambda_2 A_{21} \sin x_1 + \lambda_3 (G_3 - C_{12}) \quad (\text{IV-24})$$

$$w = G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 + q \quad (\text{IV-25})$$

De plus, à partir de $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}$ nous pouvons alors écrire :

$$q = -\frac{\lambda_3}{R} - G_1 x_1 - G_2 x_2 - G_3 x_3 \quad (\text{IV-26})$$

Le problème a été d'abord résolu d'une façon globale en appliquant la procédure de quasilinearisation. En choisissant comme précédemment les termes de pondération suivants pour le critère $Q = \text{diag} [20, 20, 2]$ et $R = [1]$, la loi de commande s'écrit

$$u(t) = -29.69 x_1 + 1.73 x_2 - 5.03 x_3 + q(t) \quad (\text{IV-27})$$

Les gains de contre-réaction et le vecteur $q(t)$ étant calculés pour une condition initiale correspondant à une perturbation d'entrée $P_e = 0.68$ soit

$$x_1(t_0) = 0.7347$$

$$x_2(t_0) = -0.2151$$

$$x_3(t_0) = 7.7443$$

L'horizon de temps considéré est de 2 secondes.

Par la suite le problème a été implanté sur le système hybride (Mitra 15/EAI 680) du LAAS. Les détails du câblage analogique ainsi que du programme de commande sont donnés dans l'Annexe I.

Choisissant des conditions initiales éloignées des conditions de références nous avons simulé la commande en ligne de ce processus. Les conditions retenues correspondent à une perturbation très importante :

$$x_1 = 0.25$$

$$x_2 = -1.5$$

$$x_3 = 7.8$$

Les figures IV-8, IV-9 et IV-10 donnent les trajectoires des états x_1 , x_2 et x_3 respectivement, obtenues en simulant le système. La commande est formée d'une boucle de contre-réaction à laquelle est ajouté selon le cas

courbes n° 1 : trajectoire $q(t)$ correspondant aux conditions initiales de référence

courbes n° 2 : trajectoire $q(t)$ optimale, telle que calculée par le niveau supérieur.

On constate une amélioration faible, mais quand même appréciable, des trajectoires des vecteurs d'état, les différentes valeurs du critère obtenues dans chacun des cas sont les suivantes :

cas n° 1 : 38.20

cas n° 2 : 34.10

soit une amélioration de 12,1 %.

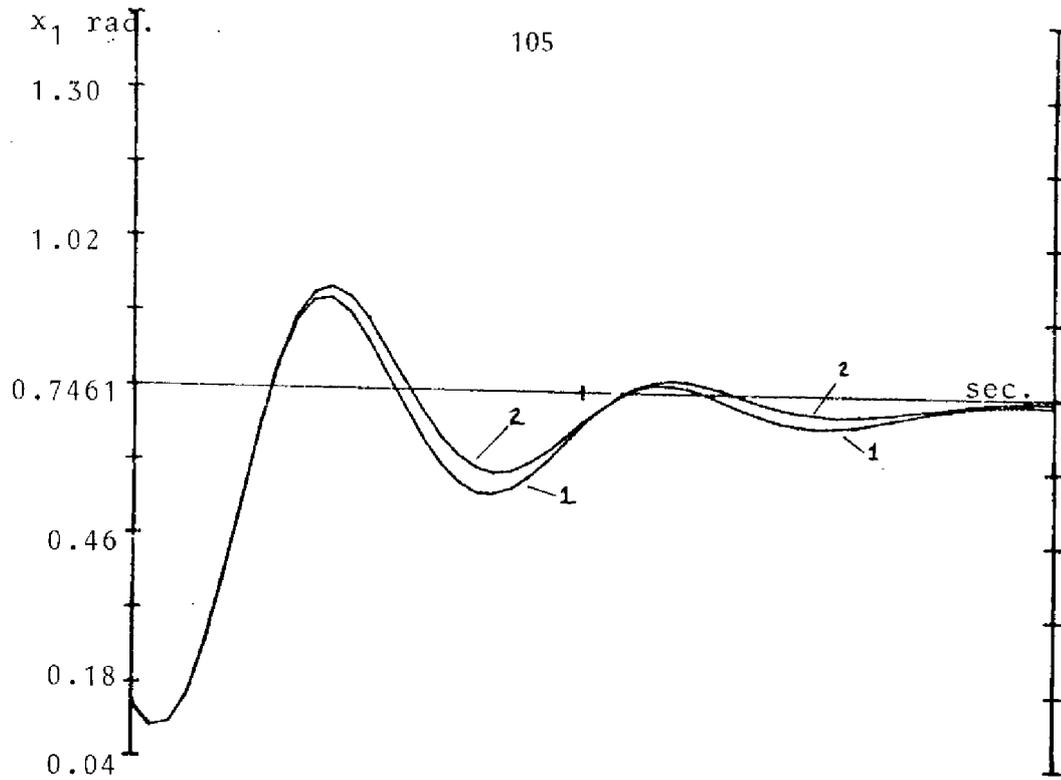


Figure IV.8 : Etat x_1

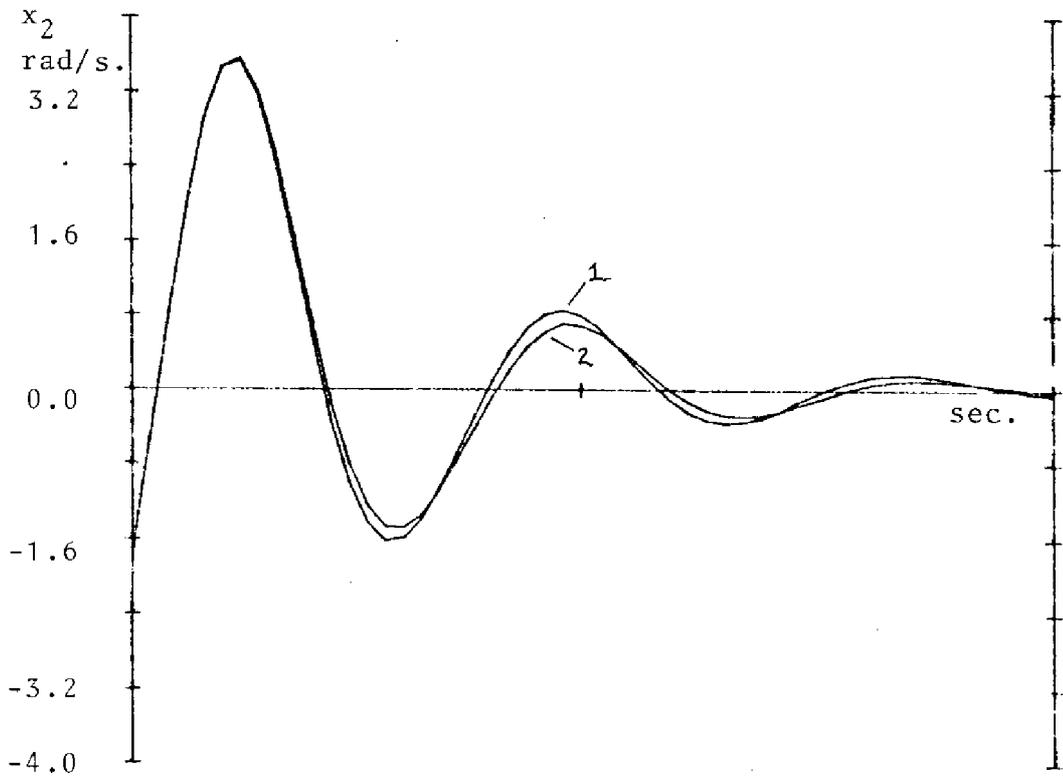


Figure IV.9 : Etat x_2

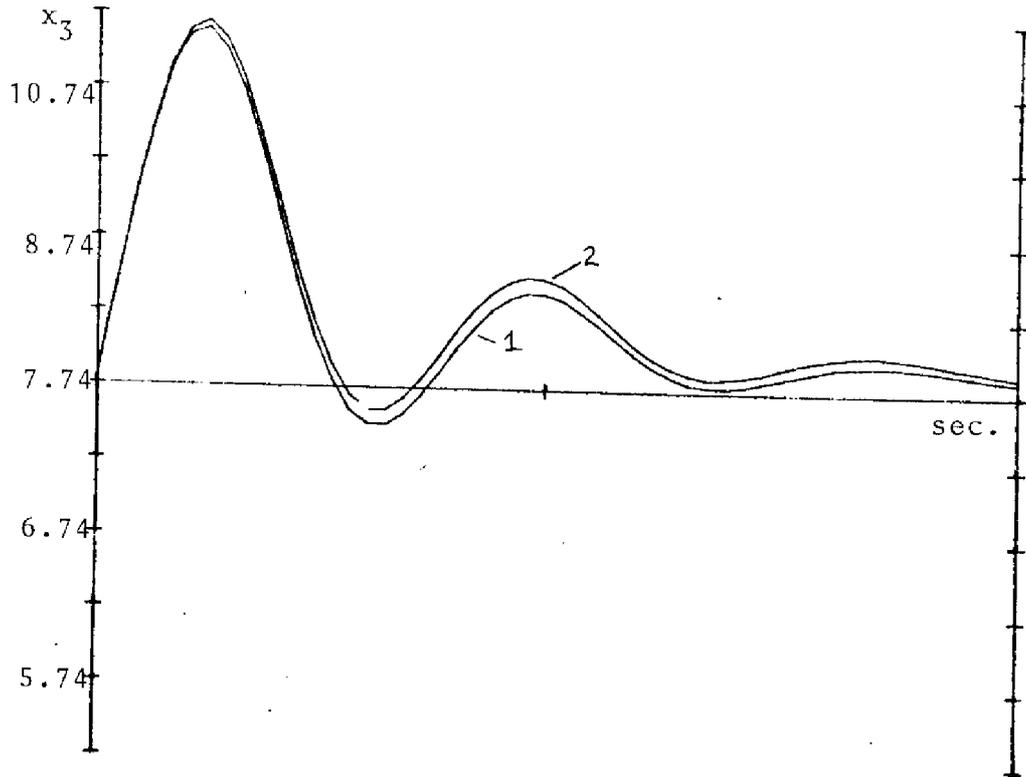


Figure IV.10: Etat x_3

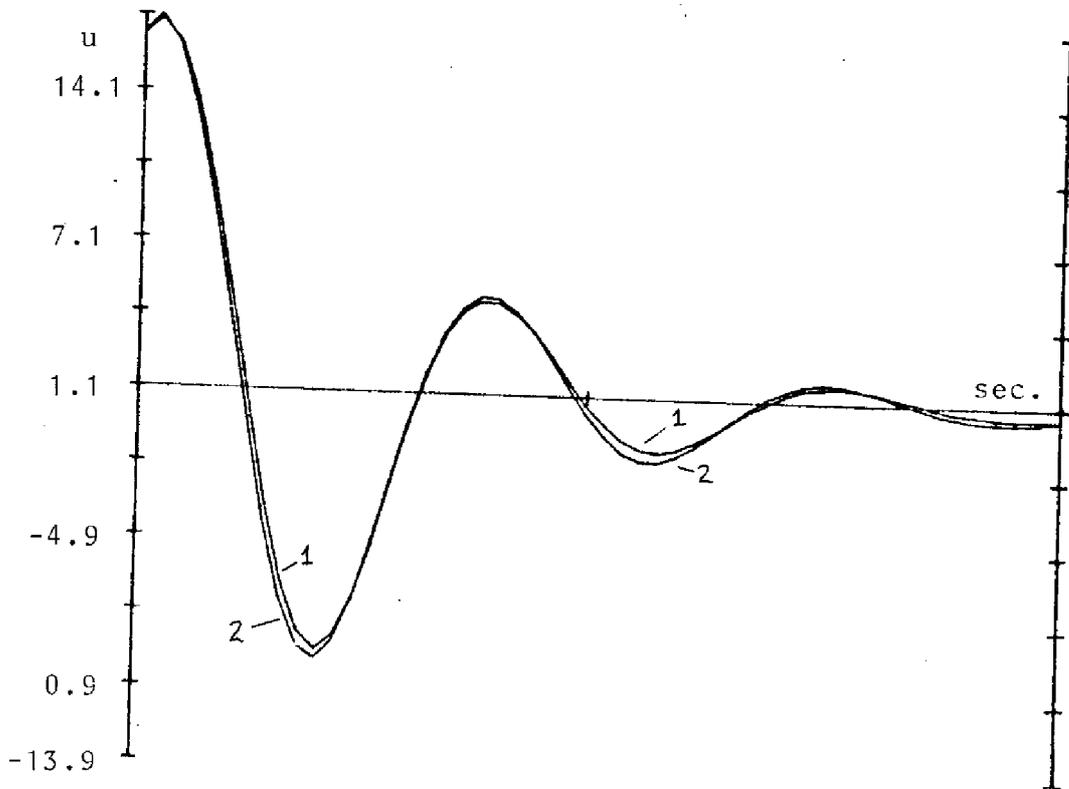


Figure IV.11: Commande u

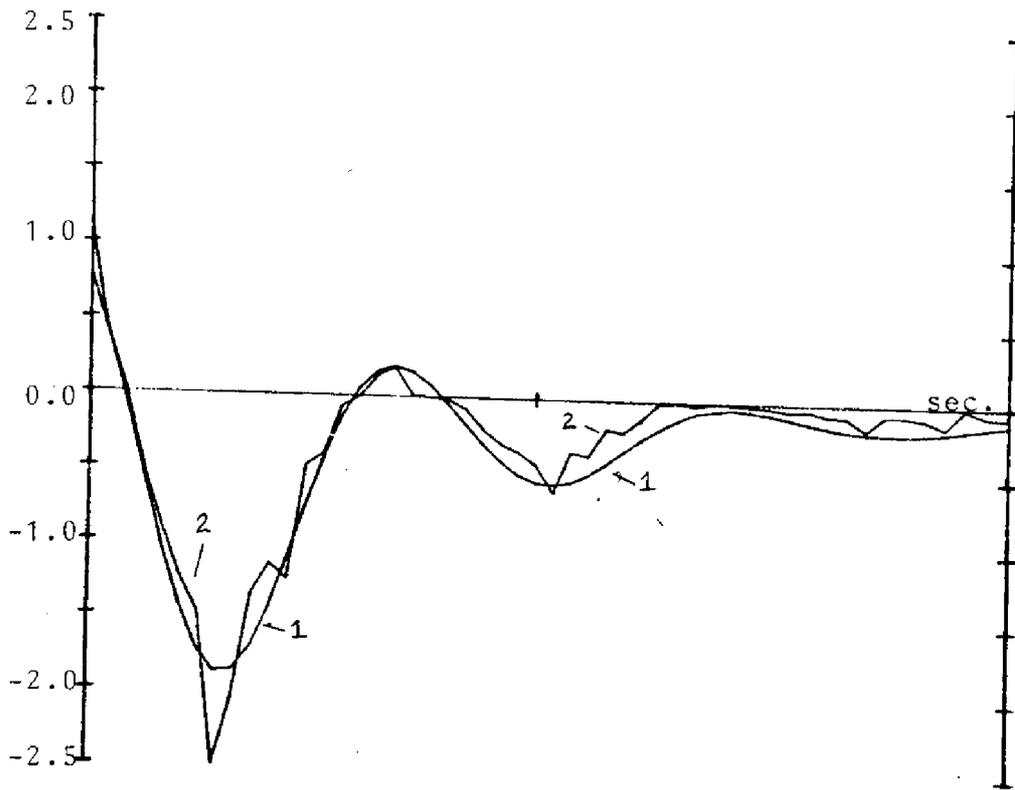


Figure IV.12: q^{*k} et q^{k+1}

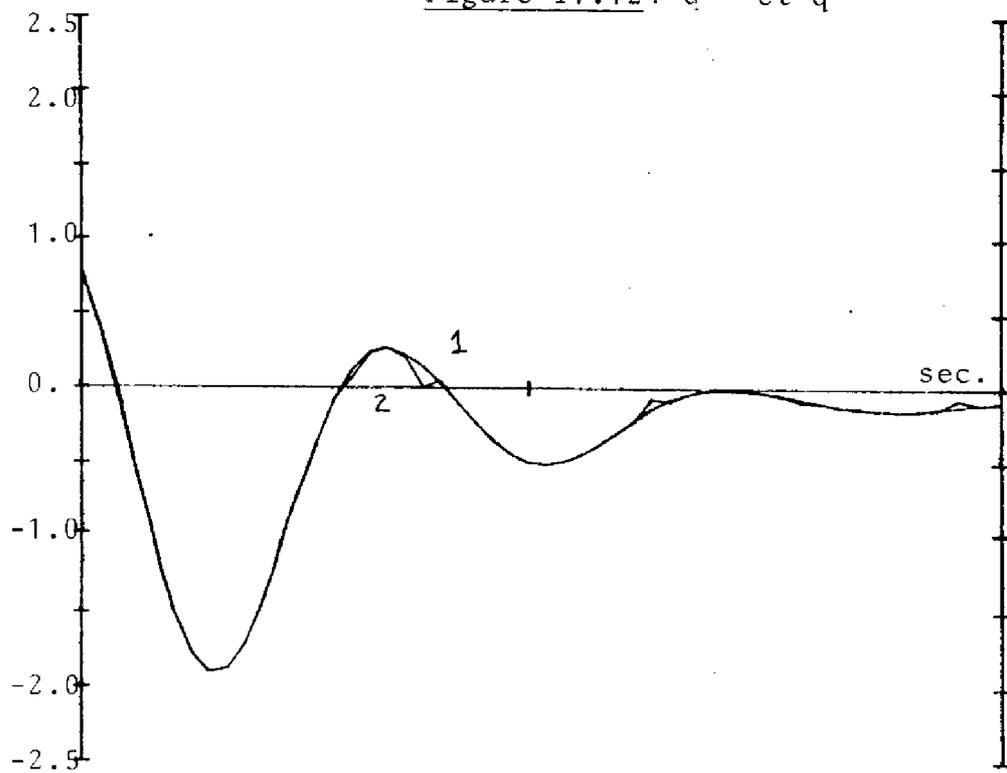


Figure IV.13: q^{*k} et q^{k+1}

La nouvelle trajectoire optimale $q(t)$ a été calculée par le niveau supérieur en 5 itérations, pour une erreur inférieure à 10^{-3} ; le facteur d'atténuation de l'algorithme d'interpolation étant initialisé à $I^1 = 0,5$.

* Les figures IV-12 et IV-13 représentent les trajectoires de $q(t)$ ($n^{\circ} 1$) et celle de $q(t)$ ($n^{\circ} 2$) après la première et la troisième itération respectivement.

Finalement la trajectoire de la commande $u(t)$ appliquée au système est donnée en figure IV-11, pour les deux cas considérés.

Dans cet exemple particulier, le vecteur $q(t)$ intervient pour une part relativement faible dans le calcul de la commande (environ 15 %). Etant donné qu'il est possible d'exprimer $q(t)$ comme une fonction explicite de $\underline{x}(t)$ et de $\underline{\lambda}(t)$ comme le montre (IV-26), une procédure à substitution directe telle que :

$$q(t)^{k+1} = -\lambda_3^k(t) - G_1 x_1(t)^k - G_2 x_2(t)^k - G_3 x_3(t)^k \quad (\text{IV-28})$$

permettrait une convergence plus rapide du niveau supérieur sans imposer de calculs supplémentaires, tout au plus des transferts d'information.

Au point de vue temps calcul, nous avons à distinguer à chaque itération, 3 phases de résolutions différentes; au niveau analogique l'intégration du modèle d'état suivie de l'intégration du système adjoint, puis au niveau numérique, le calcul de la nouvelle trajectoire $q(t)$.

Les intégrations analogiques peuvent être effectuées à de très grandes vitesses. En fait nous sommes limités par la rapidité des chaînes d'acquisition de données. Dans l'exemple traité, nous avons 50 points de discrétisation pour un horizon d'optimisation de 2 secondes ; soit une période d'échantillonnage égale à 0.040 sec. Les différents temps de calcul sont donnés dans le tableau suivant :

	temps en millième de secon- des	temps disponible; période d'échan- tillonnage
intégration du modèle d'état	5	 ↓
intégration du système adjoint	5	
calcul de $q(t)^{k+1}$	12	
TOTAL	22 mi.sec	40 mi. sec.

La durée de l'intégration est estimée pour un temps de transfert maximum de la chaîne d'acquisition de 100μ sec. par point de discrétisation (50 points x 100μ sec. = 5 mi. sec.) Le temps de calcul nécessaire pour obtenir une nouvelle trajectoire $q(t)$ a été mesuré expérimentalement ; nous avons obtenu 60 mi. sec. par itération. Considérant que le rapport entre la vitesse d'exécution d'un programme écrit en assembleur et un programme écrit en Fortran, se situe entre 5 et 20, le choix de 12 m/sec. constitue une limite maximum.

Dans cet exemple d'application il serait donc possible d'envisager l'implantation d'une structure de commande à deux niveaux, la nouvelle trajectoire de la commande étant appliquée au système après chaque itération (figure IV-7).

IV-6 - CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons examiné la possibilité d'améliorer en ligne la commande d'un système non linéaire. La méthode que nous proposons se divise en deux parties distinctes. Dans un premier temps, le problème est résolu hors-ligne pour la condition initiale la plus courante, en utilisant lorsque une approche décomposée est possible, soit la méthode de coordination par le critère, soit celle utilisant le principe de prédiction modifié.

La structure de commande obtenue est alors composée de N sous-systèmes régulés localement par une boucle de contre-réaction sur les états auxquels s'ajoutent N vecteurs de compensation, fonctions des conditions initiales du système. Cette structure, bien que comportant un terme en boucle ouverte, se révèle dans beaucoup de cas peu sensible aux conditions initiales.

Cependant, pour des conditions éloignées des conditions initiales de référence, la sous-optimalité de la loi de commande peut devenir prépondérante. Nous avons montré, qu'il est possible dans ce cas, de formuler un nouveau problème d'optimisation permettant de corriger la loi de commande en ligne.

La mise en oeuvre de cette structure de commande sur un système hybride nous a permis de démontrer qu'elle est réalisable. L'exemple considéré comprend seulement 3 variables d'état et une seule commande mais présente déjà à cause des non-linéarités, une certaine complexité à la réalisation.

L'algorithme utilisé, étant initialisé dans le voisinage de la solution, se révèle très stable et sa convergence rapide. Au niveau temps calcul, étant donné que le système considéré a une dynamique rapide, il est seulement possible d'effectuer une itération au niveau supérieur par période d'échantillonnage ; la nouvelle trajectoire de $q(t)$ est alors utilisée après chaque itération.

En conclusion, si le système étudié le justifie, l'introduction d'un second niveau d'optimisation se révèle efficace et fournit une commande optimale robuste pour le système. Cependant cette méthode présente l'inconvénient d'avoir à résoudre au niveau supérieur un problème d'optimisation du même ordre que le problème initial, le système étant traité globalement.

CONCLUSION GENERALE

Ainsi que nous venons de le voir, la mise en oeuvre des méthodes de décomposition-coordination pour résoudre le problème de la commande optimale des systèmes dynamiques de grande dimension se révèle un outil intéressant et même dans certains cas très efficace.

Dans la première partie de notre travail, nous avons examiné l'ensemble des méthodes de décomposition-coordination disponibles, compte tenu de notre objectif, c'est à dire l'application de ces méthodes à des systèmes dynamiques pouvant présenter des variables d'état dans la relation de couplage, nous avons retenu par la suite les méthodes de décomposition par le critère (méthode non-admissible) et mixte.

L'implantation "en ligne" de ces méthodes étant difficilement réalisable vu leur caractère non-admissible, nous avons examiné au chapitre II la possibilité de calculer "hors ligne" une loi de commande en boucle fermée pour des systèmes linéaires interconnectés à critère quadratique. L'application à un système de grande dimension (52 variables d'état) nous a permis de montrer l'efficacité des algorithmes de résolution utilisant le principe de prédiction des interactions. De plus, il est possible de trouver la matrice de gain de coordination par une méthode de calcul hors ligne.

L'implantation hiérarchisée de la loi de commande obtenue nécessite l'existence de liaisons entre les différents niveaux de commande et soulève le problème de la stabilité de ces structures dans les cas de fonctionnement dégradé, provenant soit de coupure de la commande, soit de la perte d'information sur le système. Les résultats dans ce domaine sont pour le moment assez fragmentaires. Cela semble cependant une voie de recherche intéressante et ce problème peut être relié à la notion plus générale de commande robuste.

Au chapitre III, nous avons examiné le problème de la commande optimale des systèmes non linéaires interconnectés. Malgré les incertitudes théoriques dans ce domaine, l'application de la méthode de décomposition par le critère nous a permis de définir une structure de résolution par calcul hiérarchisé. L'extension du principe de prédiction des interactions à ce problème fournit également un algorithme de résolution intéressant. L'application de ces méthodes a révélé des difficultés au niveau de la convergence des algorithmes proposés. Il semble cependant qu'il serait intéressant d'étudier le comportement de ces algorithmes sur des types de non-linéarité précises, par exemple quand la fonction de l'équation du modèle est quadratique. On peut espérer alors obtenir des conditions d'applicabilité plus précises.

Chacune de ces méthodes permet comme nous l'avons vu de déterminer une loi de commande en boucle fermée partielle qui peut être implantée d'une façon globale ou décentralisée. Cette structure de commande se révèle dans la plupart des cas peu sensible à des variations normales des conditions initiales. Cependant pour des systèmes pouvant être soumis à des perturbations importantes, nous avons montré au chapitre IV, comment il est possible d'améliorer en ligne la loi de commande. La mise en oeuvre de cette structure sur un système hybride a permis de constater l'efficacité de cette approche, même pour des systèmes ayant une dynamique rapide.

En conclusion, les méthodes de décomposition que nous avons étudiées présentent l'avantage de définir une tâche de coordination très simple dans la majorité des cas. Généralement, dans les applications, les sous-systèmes ont une réalité physique et la décomposition est le plus souvent utilisée dans le but d'obtenir une décentralisation de la commande. La nécessité de disposer dans ce cas de commandes locales assurant un fonctionnement adéquat de l'ensemble de la structure constitue un aspect intéressant des recherches sur les structures de commande hiérarchisée et demeure un problème qui n'a pas reçu de solution satisfaisante.

A N N E X E

ANNEXE I

MISE EN OEUVRE SUR SYSTEME HYBRIDE

I-1 Présentation du système hybride

Le système hybride du Service Informatique et Simulation du L.A.A.S. est composé d'un ordinateur numérique MITRA 15 couplé à un ordinateur analogique EAI-680. Les principales caractéristiques des composantes sont les suivantes [54], [55] :

- ordinateur numérique MITRA 15 de la C.I.I. disposant d'une mémoire de 64 Koctets (mots de 16 bits).
- ordinateur analogique EAI-680 à logique parallèle synchrone comportant les éléments suivants :
 - 90 amplificateurs dont 30 intégrateurs
 - générateur de fonction SIN, COS et LOG
 - 80 potentiomètres asservis et 12 potentiomètres manuels
 - 16 interrupteurs électroniques, 16 relais, 16 comparateurs etc...
- interface analogique formée d'une chaîne d'acquisition et de restitution Preston :
 - chaîne d'acquisition (conversion analogique/numérique)
16 échantillonneurs-bloqueurs pour 16 voies d'acquisitions fonctionnant à une cadence maximum de 80 KHz.
 - chaîne de restitution (conversion numérique/analogique)
5 voies de sorties équipées de double registre pouvant fonctionner à une cadence de 250 KHz.

- 24 potentiomètres numériques à doubles registres ayant une temps de positionnement de 4 secondes
- logiciel hybride permettant de programmer les différentes phases de commande en FORTRAN .

I-2 Schéma logique

Description du fonctionnement : chaque top d'horloge déclenche

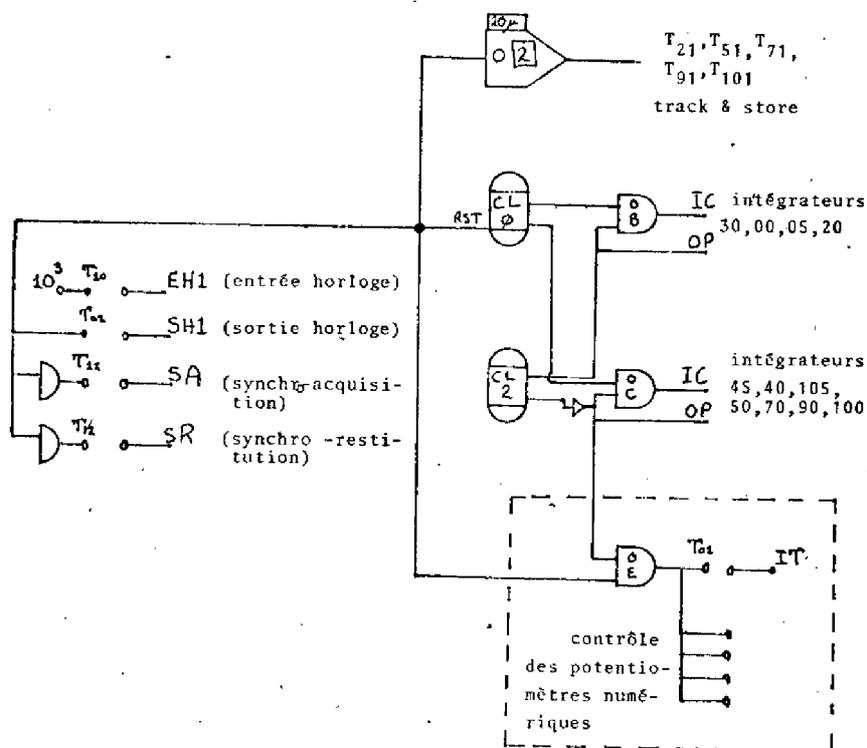
- le monostable des track & store
- l'interruption (IT) 10 qui commande les potentiomètres numériques

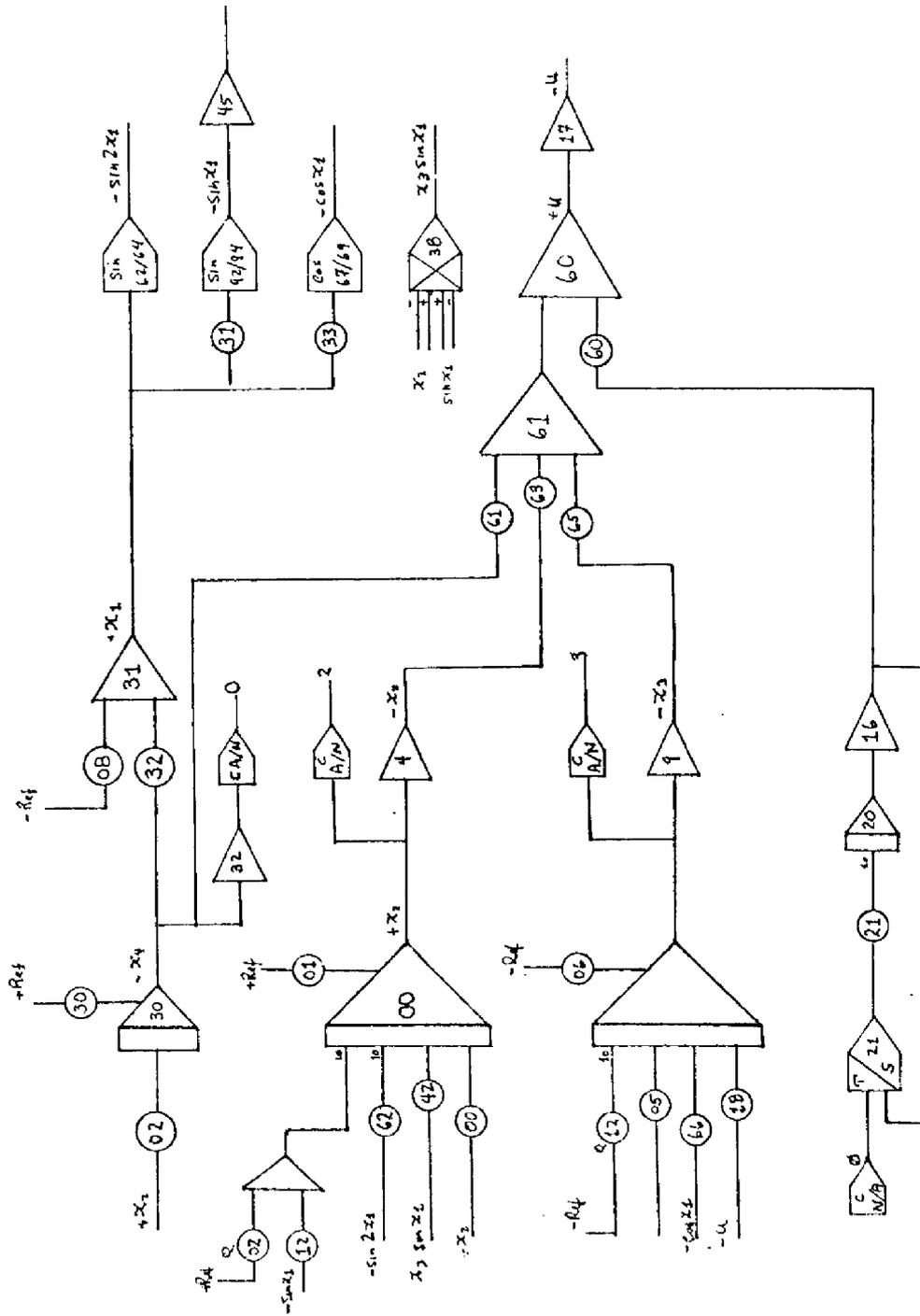
La control line 2 déclenche l'intégration des deux système

- état 1 : intégration du modèle d'état
- état 0 : intégration du système adjoint

La control line 1 provoque le passage IC - OP des intégrateurs:

- état 1 : IC
- au 1er top d'horloge - état 0 - OP





I - 3 : Schéma de câblage : modèle d'état

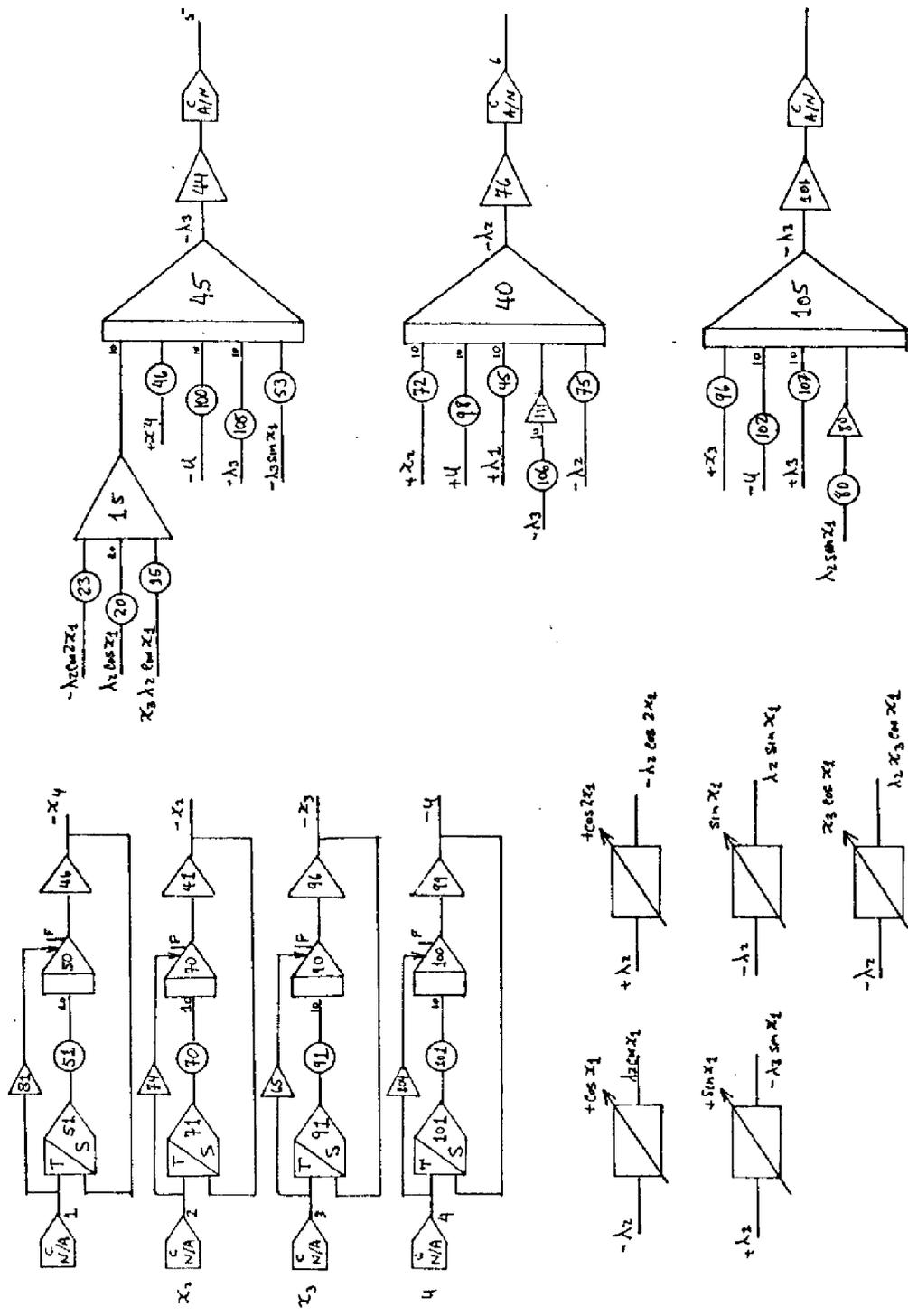


Schéma de câblage : système adjoint

B I B L I O G R A P H I E

- 1 Mesarovic M.D., Lefkowitz, I., Pearson, J.D.,
Advances in multilevel control
Symposium I.F.A.C., I.F.I.P., Tokyo, 1965.
- 2 Mesarovic, M.D., Macko, D., Takahara, Y.,
Theory of hierarchical multi-level systems
Academic Press, New-York, 1970.
- 3 Pearson, J.D.,
Dynamic Decomposition Technics
Optimization methods for large scale systems with
applications
D.A. Wismer Editor, Mac Graw Hill, 1977
- 4 Titli, A.,
Contribution à l'étude des structures de commande
hiérarchisée en vue de l'optimisation des proces-
sus complexes
Thèse d'état no d'ordre 495, 1972, Toulouse.
- 5 Bernhard
Commande optimale, décentralisation et jeux dynami-
ques
Paris, Dunod, 1975.
- 6 Titli, A., Galy, J., Singh, M.G.,
Méthodes de décomposition-coordination en calcul
des variations et couplage par variables d'état
Revue française d'automatique, informatique et re-
cherche opérationnelle, Avril 1976, p. 19-29.
- 7 Grateloup, G., Titli, A.,
Two level dynamic optimization methods
Jota, Vol 15 no 5, 1975.
- 8 Calvet, J.L.,
Optimisation par calcul hiérarchisée et coordination
en ligne des systèmes dynamiques de grandes dimen-
sions
Thèse de spécialité no. d'ordre 1824, 1976, Toulouse.
- 9 Galy, J.,
Optimisation dynamique par quasilinearisation et
commande hiérarchisée
Thèse de spécialité no. d'ordre 1495, 1973, Toulouse.
- 10 Boudarel, R., Del mas, J., Guichet, P.,
Commande optimale des processus
T4-Méthode variationnelles et leurs applications
Dunod, Paris, 1969.

- 11 Kirk,D.E.,
Optimal control theory,an introduction
Prentice-Hall,1970.
- 12 Sevely,Y.,
Systèmes et asservissements linéaires échantillon-
nées
Cours C3 automatiques,Maîtrise EEA
Dunod,Paris,1969
- 13 Bauman,E.J.,
Multilevel optimization techniques with application
to trajectory decomposition
Advances in control systems
T6 Academic Press,New-York and London,1968.
- 14 Cheneveaux,B.,
Contribution à l'optimisation hiérarchisée des systè-
mes dynamiques
Thèse de Docteur Ingénieur,no. d'ordre 4,1972,Nantes.
- 15 Takahara,Y.,
A multilevel structure for a class of dynamical op-
timisation problems
M.S. Thesis,Case Western reserve University,
Cleveland,U.S.A.,1965.
- 16 Singh,M.G.,Hassan,M.,Titli,A.,
Multi-level feedback control of interconnected dyna-
mical systems using the prediction principle
IEEE Trans. S.M.C. no 6,p.233-239,April 1976.
- 17 Singh,M.G.,
River pollution control
International Journal of Systems Sciences,
Vol.6,no 1,p.9-21,1975.
- 18 Geoffrion,
Duality in non-linear programming
SIAM Review 13(1),1971.
- 19 Hassan,M.,Hurteau,R.,Singh,M.G.,Titli,A.,
A three level costate prediction method for conti-
nuous dynamical systems
IFAC MVTs,Fredericton,1977.
- 20 Hassan,M.,Hurteau,R.,Singh,M.G.,Titli,A.,
A new three level algorithm for river pollution
control
IFAC,Le Caire,oct.1977.

- 21 Beck, M.B., Young, P.C., Singh, M.G.,
The modeling and control of pollution in a river
system
Proc. IFAC Symposium on water resource systems, Haifa,
1973.
- 22 Tamura, H.,
A discrete dynamic model with distributed transport
delays and its hierarchical optimisation for preserv-
ing stream quality
IEEE Transaction on systems, Man and cybernetics,
Vol. SMC 4, 1974.
- 23 Grateloup, G., Titli, A., De Coligny, M.,
On some extensions of dynamic hierarchical control
(at two level)
2nd formator symposium on mathematical methods for
theanalysis of large scale systems, Prague, Juin 1977.
- 24 Fossard, A.J., Clique, M., Imbert, N.,
Aperçu sur la commande hiérarchisée
Revue Rairo, no. Août 1972, J.3.
- 25 Javdan, M.R.,
On the use of Lagrange duality in multilevel optimal
control
- 26 Giffin, A.,
Electric letters, 5, 532, 1969.
- 27 Bellman, R.E., Kalaba, R.E.,
Quasilinearisation and non linear boundary problems
Modern analytic and computational methods in science
and mathematics
American Elsevier Publishing Company, Inc., New-York,
1965.
- 28 Mc Gill, R., Kenneth, P.,
A convergence theorem on the iterative solution of
non-linear two-point boundary value systems
Reprint of paper presented at the XIVth international
Astronautical Congress, Paris, France, 1965.
- 29 Singh, M.G., Titli, A.,
Closed loop hierarchical control for non-linear sys-
tems using quasilinearisation
Automatica, Vol. 11, 1975.
- 30 Hassan, M., Singh, M.G.,
The optimisation of non-linear systems using a new
two-level methods
Brief paper, Automatica, Vol. 12, p.354, 363.

- 31 Hassan, M., Singh, M.G.,
A two-level prediction algorithm for non-linear systems
Correspondance item, Automatica, Vol.13, p.95-96.
- 32 Mukhopadhyay, B.K., Maik, O.P.,
Optimal control of synchronous machine excitation
by quasilinearisation techniques
Proc. IEEE, Vol.119, no 1, January 1972.
- 33 Richetia, M.,
Analyse structurale des systemes complexes en vue
d'une commande hierarchisée
Thèse de Doctorat d'état, Toulouse, no. 674, 1975.
- 34 Lasdon, L.S.,
Duality and decomposition in mathematical programming
IEEE Trans SSC, Vol 4, no. 2, Juin 1968.
- 35 Bryson, A.E., Ho, Y.C.,
Applied optimal control
Blaisdell Publishing Company, 1969.
- 36 Smith, N.I., Sage, A.P.,
An introduction to hierarchical systems theory
Computers and Electrical Engineering, Vol 1, p.55-71,
1973.
- 37 Sevely, Y.,
Systemes et asservissements linéaires échantillonnées
Dunod, 1973.
- 38 Bellman, R.E.,
Quasilinearisation and non linear boundary value problems
Modern analytic and computational methods in science
and mathematic
American Elsevier Publishing Company, Inc, New-York,
1965.
- 39 Singh, M.G., Hassan, M., Calvet, J.L.,
Hierarchical optimization of non linear systems with
application to a synchronous machine
Int.Jour. Systems Science 1976, Vol 7, no 9, p.1041-1051.
- 40 Malinowski, K.B.,
Applicability of Lagrange multiplier method to the optimization of quadratic systems
IEEE, Trans. A-C, no 22, August 1977.

- 41 Mezencev, R. Thomas, Y., Abdallah, S.A.
Commande optimale d'un processus par voie hybride et
tenant compte de contrainte sur la commande et sur
l'état.
6th International Hybrid Computation Meetings.
- 42 Gibson, J.A., Lowinger, J.F.
A predictive Min-H method to improve convergence
to optimal solutions.
Int. Jour. Control, 1974, vol. 19, no. 3.
- 43 Sew Hoy, W., Gibson, J.A.,
An extension of the predictive Min-H method to mul-
tivariable control,
Int. Jour. Control, 1975, vol. 21, no. 5.
- 44 Rissanen, J.J.,
Performance Deterioration of optimum systems,
IEEE Trans. A. C., vol. AC 11, July 1966.
- 45 Siljak, D.D., Sundareshan, M.K.,
A multilevel optimization of large scale dynamic
systems,
IEEE Trans. A. C., vol. AC 21.
- 46 Mac Farlane, A.G.J.
A survey of some recent results in linear multiva-
riable feedback theory,
Automatica, vol. 8, 1972
- 47 Geromel, J.C., Bernussou, J.,
Stability of two levels control schemes subjected to
structural perturbations,
soumis pour publication
- 48 Hassan, M.F., Titli, A., Singh, M.G., Hurteau, R.,
Stability and performance of large scale hierarchi-
cal systems under certain structural perturbations.
soumis pour publication.
- 49 Langenhop, C.E.
On generalized inverses of matrices
SIAM J. Appl. Math., 15, pp. 1239-1246, 1967
- 50 Coeurdeuil, G.,
Contribution à l'étude des systèmes de commande
hiérarchiquement et application à un générateur de
vapeur,
Thèse Docteur-ingénieur, Nantes, 1975.
- 51 Darwish, M., Fantin, J.,
The application of Lyapunov methods to large power
systems using decomposition and aggregation techniques,
Int. Jour. Control, à paraître.

- 52 Hassan,M.,Titli,A.,
Closed loop hierarchical control for practical large
scale systems using the prediction principle,
Conference of statistics and computer science,
Cairo, 1976.
- 53 Burgat,C.,
Contribution à l'étude des propriétés de stabilité des
systèmes non-linéaires continues interconnectés,
Thèse Doctorat d'état, no. 739, U.P.S., 1976.
- 54 Courtiat,J.P.
Etude et réalisation d'un système hybride Mitra-15,
EAI-680,
Thèse Docteur ingénieur, U. P. S., 1976.
- 55 Gouyon,J.P.,
Système hybride CII-Mitra 15/EAI-680, utilisation du
système en Fortran,
Note technique LAAS-SIS no.76.T.31, 1976.
- 56 Aoki,M.,
On feedback stabilization of decentralised dynamics
systems,
Automatica, vol. 8, 1972.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : Méthode de décomposition-coordination : structures à deux niveaux	5
I-1 - Principes de décomposition-coordination	7
I-2 - Problème d'optimisation dynamique : approche hiérarchisée	9
I-2-1 - Formulation du problème : conditions d'optimalité	9
I-2-2 - Méthode de décomposition-coordina- tion	12
I-2-3 - Couplage par variable d'état	16
I-3 - Aspect dual de la décomposition	
I-4 - Conclusion	
CHAPITRE II : Système linéaire à critère quadratique : obtention d'une loi de commande en boucle fermée	23
II-1 - Introduction	25
II-2 - Application du principe de prédiction	27
II-3 - Résolution des N problèmes de minimisation indépendants	29
II-3-1 - Résolution par l'équation de Riccati	30
II-3-2 - Par prédiction du vecteur adjoint	32
II-4 - Loi de commande en boucle fermée	35
II-5 - Application au contrôle de la pollution d'une rivière	34
II-6 - Structure de commande hiérarchisée : stabi- lité et sous-optimalité	45
II-6-1 - Stabilité des systèmes soumis à des perturbations de structures	46
II-6-1-1 - Formulation du problème	46
II-6-1-2 - Cas où la commande est dé- centralisée	47
II-6-1-3 - Cas général	50
II-6-1-4 - Application des méthodes fréquentielles	51

II-6-2 - Sous-optimalité d'un système soumis à des perturbations de structure	51
II-6-3 - Application à la commande d'un système multi-machines	52
II-7 - CONCLUSION	57
<u>CHAPITRE III</u> : Commande hiérarchisée en boucle fermée des systèmes dynamiques non linéaires	59
III-1 - Introduction	61
III-2 - Commande hiérarchisée en boucle fermée par quasilinearisation	62
III-2-1 - Structure de commande hiérarchisée	62
III-2-2 - Résolution des sous-problèmes d'optimisation	64
III-2-3 - Obtention d'une loi de commande en boucle fermée	69
III-3 - Méthode basée sur le principe de prédiction modifié	72
III-3-1 - Loi de commande en boucle fermée	76
III-3-2 - Considération sur la convergence	78
III-4 - Application à la commande d'une machine synchrone	80
III-5 - Conclusion	88
<u>CHAPITRE IV</u> : Amélioration en ligne de la loi de commande	89
IV-1 - Introduction	91
IV-2 - Présentation du problème	92
IV-3 - Approche selon le principe de prédiction modifié	93
IV-4 - Méthode de minimisation de l'hamiltonien	97
IV-4-1 - Méthode d'itération sur le vecteur adjoint	97
IV-4-2 - Méthode d'itération sur la commande	99
IV-5 - Application à la commande de l'excitation d'une machine synchrone	102
IV-6 - Conclusion	106
CONCLUSION GENERALE	109
ANNEXE I	117
BIBLIOGRAPHIE	123