



HAL
open science

Contribution à des études de modélisation d'identification et de conduite numérique en fermentation continue

Joseba Quevedo

► **To cite this version:**

Joseba Quevedo. Contribution à des études de modélisation d'identification et de conduite numérique en fermentation continue. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1976. Français. NNT: . tel-00176768

HAL Id: tel-00176768

<https://theses.hal.science/tel-00176768>

Submitted on 4 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée

devant L'UNIVERSITÉ PAUL SABATIER DE TOULOUSE (SCIENCES)

en vue de l'obtention

du Grade de DOCTEUR de Spécialité E.E.A. - Option "Automatique"

par

Joseba QUEVEDO

Ingénieur T.F.P.P. de Mondragon (Espagne)

Maître ès Sciences

CONTRIBUTION A DES ÉTUDES DE MODÉLISATION D'IDENTIFICATION ET DE CONDUITE NUMÉRIQUE EN FERMENTATION CONTINUE

Soutenue le 17 Septembre 1976 devant la Commission d'Examen :

MM. Y. SEVELY

Président

G. DURAND
J.-L. ABATUT
G. ALENGRIN
J. RETEGUI

}
Examineurs

Gure Herriko langile jator
trebe ta sufritu horri
bide berriak behar zaizkio
dudarik gabe ageri,
bere burua osatu dezan
arinduz daukan lan hori.
Uxatuz zapalketa ta hemanaz
indarra nortasumari.
Era honetan izango baida
benetako zerbitzari,
eta hemango dizkio frutu
ederrak Aberriari.
Bene benetan burruka hortan
dabilen jende denari
laguntza moduz nere lan hau
nahi nieke gaur eskeini.

ZABALEGI

"La puissance physique moyenne de la force de travail humaine atteint à peine 20 watts, son temps de réaction sensorielle est de l'ordre du dixième de seconde, sa mémoire est limitée et peu sûre. C'est seulement par son potentiel de création et son ouverture à l'égard de la culture que l'homme est de loin supérieur à ses créations les plus puissantes".

Radovan RICHTA

AVANT-PROPOS

Ce travail a été effectué au LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE ET D'ANALYSE DES SYSTEMES du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE, et nous tenons tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur LAGASSE de nous y avoir accueilli.

La présentation de ce mémoire nous donne l'occasion d'exprimer notre plus profonde gratitude à Monsieur le Professeur SEVELY pour avoir bien voulu nous accueillir au sein de l'équipe "Systèmes à Paramètres Répartis. Unités Pilotes" et diriger ainsi notre recherche. Nous sommes très sensible à l'attention qu'il nous a accordée dans notre travail de recherche et à la confiance exprimée dans notre tâche d'enseignant.

Nous tenons à remercier Monsieur le Professeur DURAND, qui nous a permis d'effectuer nos travaux dans les locaux du Laboratoire du Génie Biochimique de l'I.N.S.A.T. qu'il dirige, pour s'être intéressé à notre travail et faire partie de notre jury d'examen.

Nos remerciements s'adressent également aux membres du L.G.B. et en particulier à Monsieur GOMA, qui nous ont apporté un appui constant dans cette discipline, qui est la Biochimie, tout au long de notre étude.

Que Messieurs ALENGRIN et ABATUT trouvent ici l'expression de notre reconnaissance pour leur aide efficace et désintéressée et pour faire partie de notre jury.

Nous voudrions exprimer aussi notre reconnaissance à Monsieur RETEGUI, Directeur de l'Ecole Professionnelle Polytechnique de MONDRAGON pour nous avoir encouragé à entreprendre ces études

universitaires et pour avoir accepté de participer à notre jury.

Nous tenons à exprimer à tous les membres de notre équipe de recherche et tout particulièrement BOUDON, RIBOT et POURCIEL toute notre sympathie pour les rapports amicaux qu'ils ont su entretenir.

Nous ne saurions terminer sans exprimer notre reconnaissance à Messieurs les Professeurs SEVELY, MASCART et LACOSTE pour les liens qu'ils ont créés entre l'E.P.P. de MONDRAGON et l'Université Paul Sabatier.

---o0o---

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

X	Concentration en biomasse $g.l^{-1}$
S	Concentration en substrat $g.l^{-1}$
r	Concentration en oxygène dissous $mg.l^{-1}$
μ	Taux de croissance h^{-1}
\underline{q}	Vecteur des paramètres du taux de croissance
Y_C	Rendement pour la croissance en biomasse
m_C	Coefficient de maintenance h^{-1}
R_C	Rendement global de conversion
\underline{p}	Vecteur des paramètres
\underline{L}	Debit d'alimentation $l.h^{-1}$
V	Volume du fermenteur l
S_e	Concentration du substrat à l'entrée $g.l^{-1}$
D	Taux de dilution h^{-1}
\underline{F}	Taux d'alimentation $g.l^{-1}.h^{-1}$
\bar{X}	Symbole caractérisant la variable X en régime permanent
\underline{x}	Vecteur des variables d'état
\underline{u}	Vecteur des variables de commande
\underline{z}	Vecteur des variables de sortie
\underline{f}	Vecteur des expressions contenant des termes non-linéaires
\underline{v}	Vecteur des perturbations du système
\underline{w}	Vecteur du bruit de mesure
\underline{y}	Vecteur de l'état et des paramètres (IIe chapitre)
$\dot{\underline{y}}$	Dérivée de \underline{y}
δ	Impulsion de Dirac
O_K	Suite d'observations de \underline{z} entre t_0 et t_k .
$p(\underline{y}/O_K)$	Densité de probabilité conditionnelle de \underline{y} connaissant les observations O_K
$\hat{\underline{y}}$	Estimateur de \underline{y}
$E[\underline{y}/O_K]$	Espérance mathématique conditionnelle
$E[(\underline{y}-\hat{\underline{y}})(\underline{y}-\hat{\underline{y}})^T/O_K]$	Moment centré d'ordre deux
$\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}^T}, \frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{y}^T}$	Matrices Jacobiennes

H^T	Matrice H transposée
$[W]^{-1}$	Matrice W inversée
J, C	Critères d'optimisation
F_{MAX}, F_{MIN}	Valeurs extrêmes de F $g.l^{-1}.h^{-1}$
D_{MAX}, D_{MIN}	Valeurs extrêmes de D h^{-1}
S_{lim}	Concentration limite en S $g.l^{-1}$
α, β	Dérivées partielles de μ par rapport à X et S respectivement
$\mathbb{1}$	Matrice unité
Λ	Matrice diagonale
λ	Mode du système

---o0o---

INTRODUCTION

La notion même d'optimisation d'un processus de fermentation recouvre des aspects extrêmement variés. Sa mise en oeuvre est un exemple de démarche interdisciplinaire à laquelle l'automaticien ne participe que depuis peu.

Il s'agit au départ d'isoler un "bon" micro-organisme c'est-à-dire qui ait un rendement élevé, une activité biologique importante et qui soit le plus résistant possible. Il s'agit ensuite de joindre à la source carbonée retenue pour des raisons économiques, un milieu nutritif convenable. Ceci est affaire de biologistes et de biochimistes et il n'est pas douteux que le succès final de l'optimisation dépend en très grande partie de ces études.

Mais même avec une excellente souche et un milieu nutritif parfaitement adapté on peut réaliser des fermentations médiocres. La mission de l'automaticien est de tirer le meilleur parti possible du "matériau" résultant des travaux des biochimistes. Ce "meilleur parti" se traduira par l'extrémalisation d'un critère dont la définition est d'ailleurs un point très important, aussi important que la mise en oeuvre de la commande qui en découle.

Il n'est pas possible de dresser ici un bilan exhaustif de l'apport de l'automatique à cette branche d'activité promise, croyons-nous, à un grand avenir, que sont les fermentations industrielles. On peut toutefois l'analyser dans ses grandes lignes : le bioréacteur où a lieu la production de biomasse et/ou de métabolites se présente à nous comme un système d'une telle complexité - au niveau des réactions élémentaires - qu'il est impossible, du moins pour l'instant, d'en déduire un modèle mathématique exploitable. L'automaticien en est réduit à considérer des modèles de croissance macroscopiques caractérisés par un petit nombre de paramètres qui constituent des modèles d'action - au sens de la théorie de la modélisation - c'est-à-dire des expressions mathématiques utiles pour l'élaboration d'une loi de commande.

Sur le plan biochimique cela suppose qu'un certain nombre de facteurs de croissance des micro-organismes seront fixés et ne se représenteront sur le modèle que par l'intermédiaire de ces paramètres. En ce qui concerne notre étude par exemple, la température et le PH seront régulés, les sels minéraux et l'oxygène dissous seront en excès.

Le processus de fermentation est alors décrit par un ensemble d'équations différentielles non linéaires du premier ordre permettant de définir les variables d'état (concentration en micro-organismes, en substrat carboné, en métabolites) avec ses variables de commande (taux de délution et d'alimentation pour une fermentation continue) et ses paramètres qu'il faut identifier (le vieillissement de la souche, des perturbations sur les conditions opératoires nécessitent des mises à jour périodiques de cette identification paramétrique).

L'objet de notre étude est une unité pilote de fermentation sur méthanol : il s'agit de fabriquer en continu de la biomasse pour en extraire des protéines. C'est un des procédés parmi d'autres auxquels on a pensé lorsque les fermentations sur hydrocarbures ont posé des problèmes de rentabilité économiques.

Notre mémoire comporte trois chapitres.

Dans le premier nous étudions la modélisation de notre unité à température et PH constants, toutes les composantes de l'alimentation, à part le substrat carboné, étant en excès. Nous faisons une analyse comparée - par méthode graphique - des fonctionnements en discontinu et en continu.

Le deuxième chapitre traite de l'identification paramétrique du modèle retenu par une méthode stochastique de filtrage non linéaire. Nous avons également appliqué cette méthode à d'autres types de fermentation pour comparer nos résultats à ceux obtenus par d'autres techniques à l'intérieur de l'équipe (en particulier unité de fermentation sur n-alcanes de l'IFP dans le cadre d'un contrat de la DGRST (1)).

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la conduite du pilote par ordinateur numérique : nous avons obtenu la solution de l'optimisation statique - l'extremum du critère étant obtenu par la méthode de SPHERA permettant l'utilisation en multivariable des suites de Fibonacci - et de l'accélération des transitoires par commande modale. Le pilote a été effectivement connecté au ordinateur et conduit numériquement par cette dernière technique.

(1) Notre étude a été financée en partie par la DGRST, Comité Automatisation, organisme que nous tenons à remercier ici (contrat n° 73 7 1075 - 75 7 1269).

CHAPITRE 1

MODELISATION

I. INTRODUCTION

Modéliser un processus et en particulier le processus de la fermentation consiste à établir des équations mathématiques qui représentent à tout instant, avec une certaine approximation, le comportement réel du système.

Les équations du modèle sont établies à partir des relations physico-chimiques et biochimiques connues de la fermentation.

Les dernières décrivent le comportement des microorganismes. La complexité et le grand nombre de réactions des organismes unicellulaires a conduit dans la plupart des travaux (Teissier, 1936 ; Monod, 1942 [I-5] ; Moser, 1958 ; Contois, 1959 [I-8] ; Kono, 1968 [I-1] ; Andrews 1968 [I-11] ; Goma et Ribot, 1975 [I-2, I-3] ; Perrut*, 1975 [I-9] ; etc) à considérer le comportement macroscopique des microorganismes en fonction de l'état de la fermentation. Lorsque l'on considère les réactions propres des microorganismes (comportement microscopique) on aboutit à des relations assez complexes à caractère structural (Dunn, 1968 ; Erickson, 1969 ; Shall, 1972 ; Peringer, 1974 [I-4] ; etc ..).

Quant aux relations physico-chimiques elles se réduisent, si la température et le PH (variables dites d'environnement) restent constants à l'équation bilan matière :

accumulation = ce qui entre + ce qui est produit - ce qui sort -

ce qui est consommé

appliquée aux variables qui définissent l'état du système à tout instant : la biomasse (X) et les substrats (s et r).

* Précisons, à la demande même de son auteur, que le modèle proposé par M.Perrut l'a été dans des conditions bien particulières pour une croissance sur n-alcanes d'une souche de "candida tropicalis" isolée par l'IFP. L'utilisation dans ce mémoire de ce modèle de croissance à d'autres fins est une extrapolation, de notre part, non motivée de caractère essentiellement académique.

Nous nous sommes proposé de modéliser l'unité pilote de fermentation sur méthanol (L.G.B - L.A.A.S.) en comparant quelques modèles dérivés du comportement macroscopique des microorganismes à partir des essais réalisés en discontinu et continu.

I.1. THEORIE

I.1.1. Les relations biochimiques

A. La cinétique de croissance

La croissance microbienne exprime l'activité des réactions de synthèse des cultures microbiennes. On peut y distinguer un certain nombre de phases qui sont admises par tous les spécialistes. Les phases sont :

- a) une phase de latence à croissance nulle
- b) une phase d'accélération du taux de croissance
- c) une phase exponentielle à taux de croissance constant
- d) une phase de ralentissement où le taux de croissance décroît et,
- e) une phase d'arrêt à taux de croissance nul.

MONOD [1-5] démontre que la phase de latence (figure 1.1.) est indépendante des autres phases de croissance. Dans le présent mémoire nous nous limiterons à étudier les relations biochimiques à comportement "macroscopique" qui présentent les phases c) et d).

Les phases a) et b) caractérisant le démarrage de chaque fermentation sont sans intérêt pour les fermentations en continu où le temps d'opération est supérieur normalement au millier d'heures.

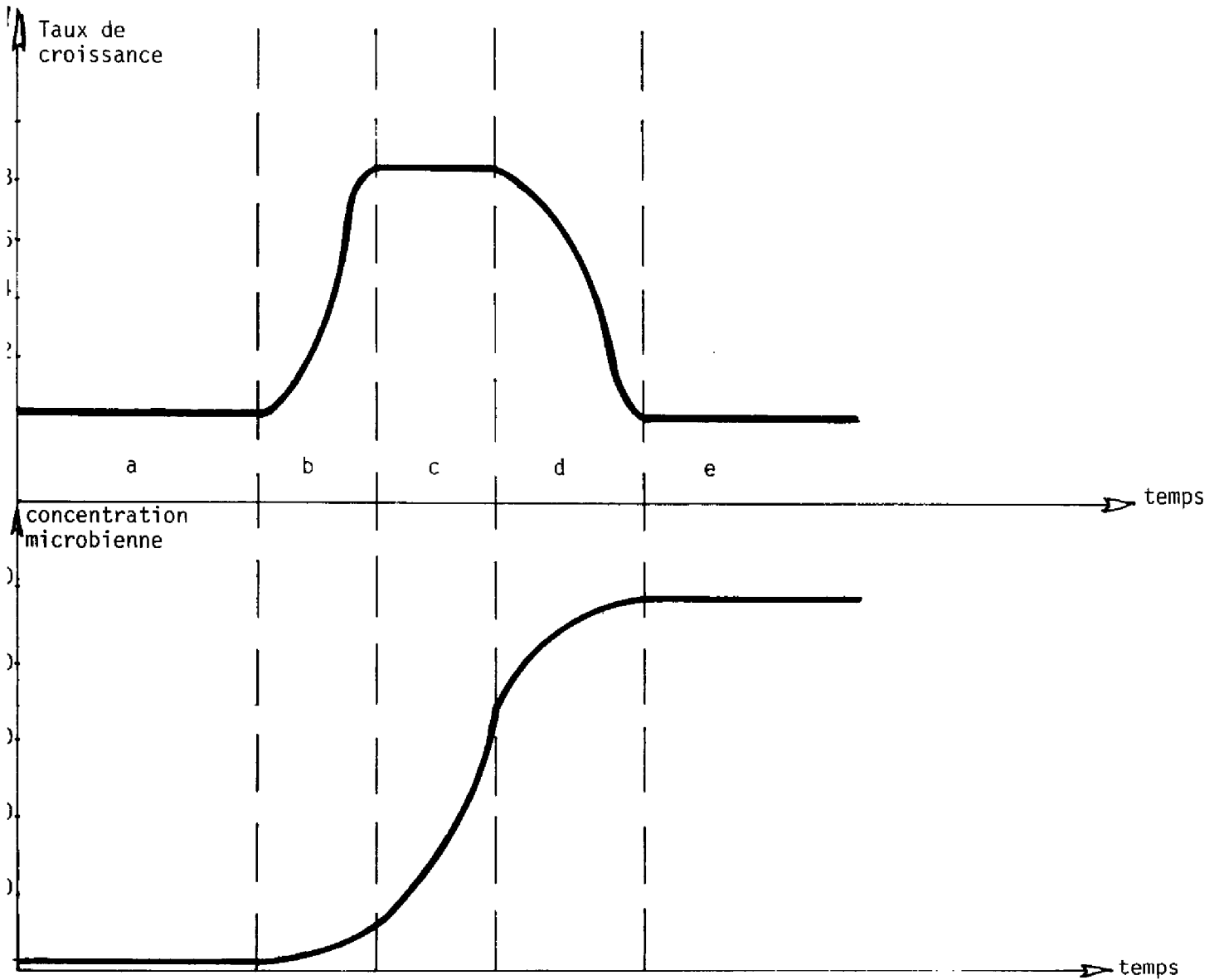


FIGURE 1.1. Les phases de croissance d'une culture microbienne en fermentation discontinue. Ces lettres désignent les différentes phases.

L'accroissement des bactéries dans un milieu nutritif, à un instant donné, est proportionnel à leur nombre :

$$\frac{dX}{dt} = \mu \cdot X \quad (1.1.)$$

μ est le taux de croissance. Les auteurs qui étudient le comportement "macroscopique" de la croissance, considèrent que le taux de croissance est fonction de l'état du milieu de fermentation. L'état de la fermentation, à température et pH constants, est défini par les concentrations microbiennes (X), du substrat (S), dans notre cas le méthanol, et de l'oxygène dissous (r).

Quelques auteurs considèrent qu'en excès d'oxygène, le taux de croissance n'est fonction que du substrat S :

$$\mu = f(S) \quad (1.2)$$

Ainsi, MONOD [I-5] pour qui "la croissance microbienne est uniquement limitée par l'appauvrissement du milieu en l'un des substrats", a proposé une loi désormais célèbre.

$$\mu = \mu_M \cdot \frac{S}{K_S + S} \quad (1.3)$$

μ_M est le taux de croissance maximal, et
 K_S est égale à S lorsque $\mu = \mu_M/2$

ANDREWS [I-11] et EDWARDS [I-6 et I-7] observent pour quelques substrats que la croissance peut être aussi limitée par un excès de concentration du substrat dans le milieu et proposent la loi suivante

$$\mu = \mu_M \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_S + S}{S} \frac{1}{K_I}} \quad (1.4)$$

où K_S est la constante de limitation et K_i la constante d'inhibition du substrat. Remarquons que la valeur maximale du taux de croissance est obtenue pour $S = \sqrt{K_S K_i}$

$$\mu_{MAX} = \mu_M \frac{1}{1 + 2 \sqrt{\frac{K_S}{K_i}}} \quad (1.5)$$

D'autres auteurs considèrent que le taux de croissance est aussi fonction de la concentration microbienne.

Nous nous contenterons d'en donner deux expressions qui peuvent être présentées sous la forme d'une relation plus générale

$$\mu = \mu_M \cdot \frac{S}{K \cdot g(X) + S} \quad (1.6)$$

Ainsi pour CONTOIS [I-8] : $g(X) = X$, c'est-à-dire la concentration en biomasse défavorise la croissance et pour PERRUT [I-9] : $g(X) = \frac{1}{X}$, ce qui revient à dire qu'à l'inverse de CONTOIS, X facilite la croissance microbienne.

B. La cinétique de disparition du substrat

En général, les auteurs sont d'accord pour la description de la cinétique de dégradation du milieu en substrat. Il y a deux types de consommation de substrat dans les fermentations qui ne produisent pas de métabolites.

D'une part, la consommation nécessaire à l'élaboration de cellules nouvelles : si Y_C représente le rendement du processus de fabrication des nouvelles cellules par rapport au substrat ainsi consommé, on a :

$$Y_C = \frac{dX}{-(dS)_N} \quad \text{d'où} \quad \frac{(dS)_N}{dt} = - \frac{1}{Y_C} \cdot \frac{dX}{dt} \quad (1.7)$$

$()_N$ traduit la production de nouvelles bactéries.

D'autre part, la consommation de substrat nécessaire au maintien des cellules dans un état viable. Cette consommation $(dS)_m$ sera proportionnelle à la concentration des cellules vivantes dans ^{dt}le milieu.

$$\frac{(dS)_m}{dt} = - m_C X \quad (1.8)$$

m_C est appelé coefficient de maintenance : son existence même est très controversée. Certains, et non des moindres (MONOD [I-5]) considérant que ce terme n'existe pas ou qu'il est négligeable pour les micro-organismes étudiés. D'autres, plus nombreux chaque jour, considérant qu'il n'est pas nul et peut être évalué si l'on dispose de bons capteurs.

Nous supposerons quant à nous qu'il existe quitte à le négliger si l'expérience le montre ou si la précision des calculs le justifie.

Le rendement global de conversion de substrat en biomasse est défini par

$$R_C = - \frac{dX}{(dS)_N + (dS)_M} = \frac{1}{\frac{1}{Y_C} + \frac{m_C}{\mu}} \quad (1.9)$$

1.1.2. Equations. Bilan du processus de la fermentation

Nous allons appliquer l'équation bilan matière à chacune des variables d'état d'un processus de fermentation en excès d'oxygène et suffisamment homogénéisé en fonctionnement continu.

Si S_e est la concentration du substrat à l'entrée du fermenteur, L le débit d'alimentation en milieu nutritif et V le volume utile du réacteur, on peut écrire :

BILAN SUR X

Ce qui entre = 0

Ce qui sort = $L \cdot X \cdot dt$

Ce qui est produit = $V \cdot \mu \cdot X \cdot dt$

Ce qui est consommé = 0

d'où l'expression :

$$V \cdot dX = (V \cdot \mu \cdot X - L \cdot X) dt \quad (1.10)$$

soit en divisant par $V \cdot dt$

$$\frac{dX}{dt} = \mu \cdot X - D \cdot X \quad (1.11)$$

où, $D = \frac{L}{V}$ appelé taux de dilution, sera exprimé en h^{-1}

BILAN SUR S

Ce qui entre = $L \cdot S_e \cdot dt$

Ce qui sort = $L \cdot S \cdot dt$

Ce qui est produit = 0

Ce qui est consommé = $(V \cdot \frac{1}{Y_C} \cdot \mu \cdot X + V \cdot m_C \cdot X) \cdot dt$

$$d'où : V \cdot dS = (L \cdot S_e - L \cdot S - \frac{V}{Y_C} \cdot \mu \cdot X - V \cdot m_C \cdot X) dt$$

soit encore :

$$\frac{dS}{dt} = F - D \cdot S - \frac{1}{Y_C} \cdot \mu \cdot X - m_C \cdot X \quad (1.12)$$

$F = D \cdot S_e$: est appelé taux d'alimentation
on l'exprime en général en $g \cdot l^{-1} \cdot h^{-1}$

Résumé :

Les équations

$$\frac{dX}{dt} = (\mu - D) \cdot X$$

$$\frac{dS}{dt} = F - DS - \frac{\mu X}{Y_C} - m_C X$$

$$\mu = \mu(X, S)$$

représentent les équations de tout processus de fermentation homogène en excès d'oxygène, de sels minéraux, etc, et plus généralement de tout élément autre que la source carbonée. Les variables d'état en sont X et S. Les variables de commande sont, en ce qui nous concerne, F et D, la température et le PH qui modifient les valeurs des paramètres intervenant dans ces équations étant supposées régulées.

ETUDES GRAPHIQUES

En discontinu

La fermentation en discontinu peut être étudiée comme un cas particulier du continu, en annulant D et par la suite F.

Les équations (1.11) et (1.12) deviennent :

$$\frac{dX}{dt} = \mu \cdot X \quad (1.13)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{Y_C} \mu \cdot X - m_C \cdot X \quad (1.14)$$

à partir de ces équations on obtient :

$$\frac{dS}{dX} = \frac{-\left(\frac{1}{Y_C} \mu \cdot X + m_C X\right)}{\mu \cdot X} = \left(\frac{1}{Y_C} + \frac{m_C}{\mu}\right) \quad (1.15)$$

qui n'est autre que l'inverse de l'expression du rendement R_C obtenu en (1.9), soit :

$$-\frac{dS}{dX} = \frac{1}{Y_C} + \frac{m_C}{\mu} = \frac{1}{R_C} \quad (1.16)$$

Si on trace un plan, $-\frac{dS}{dX}$ en ordonné et μ^{-1} en abscise, on obtient une droite de pente le coefficient de maintenance (m_C) et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{Y_C}$.

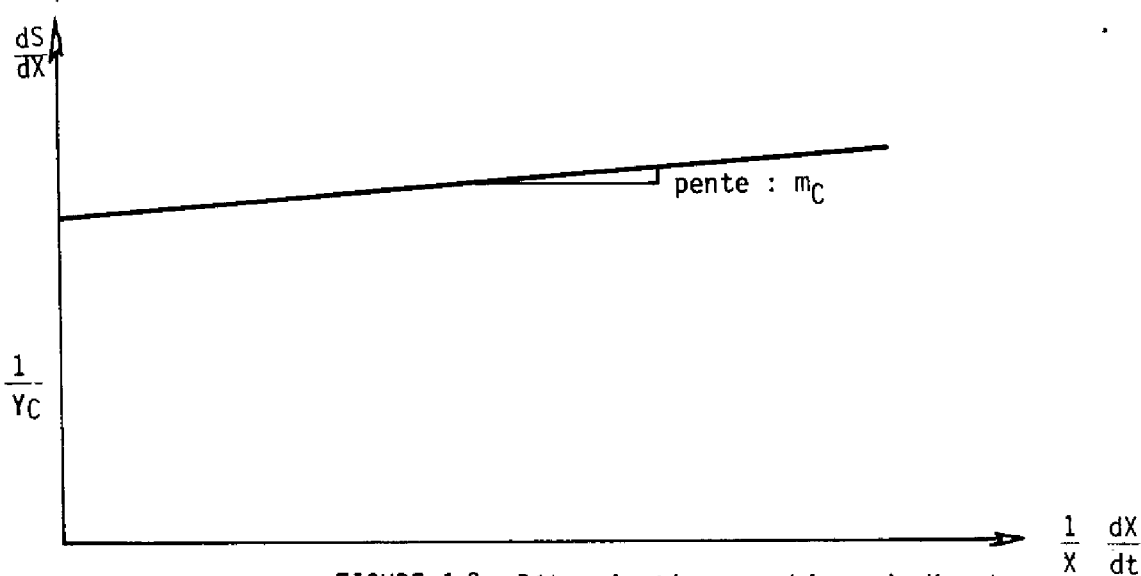


FIGURE 1.2. Détermination graphique de Y_C et m_C à partir d'une fermentation en discontinu.

La figure 1.3. représente l'évolution temporelle de la biomasse X , du substrat S et de μX , expression souvent appelée "activité biologique", dans un cas général et sans tenir compte de la phase de latence. Lorsque on trace μX en fonction de X , on obtient une courbe ayant l'allure de celle représentée sur la figure 1.4. La pente de la droite

joignant l'origine à un point appartenant à la courbe est le taux de croissance. De cette courbe nous pouvons déduire le taux de croissance maximal.

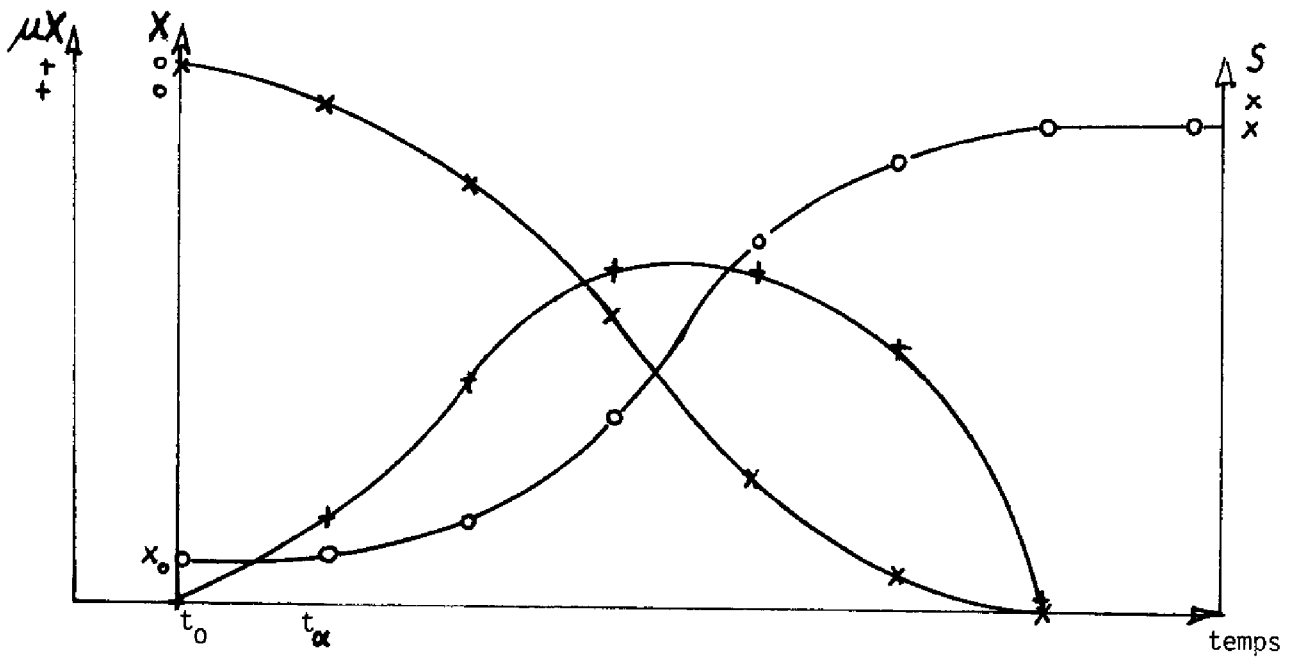


FIGURE 1.3. Dynamique en discontinu

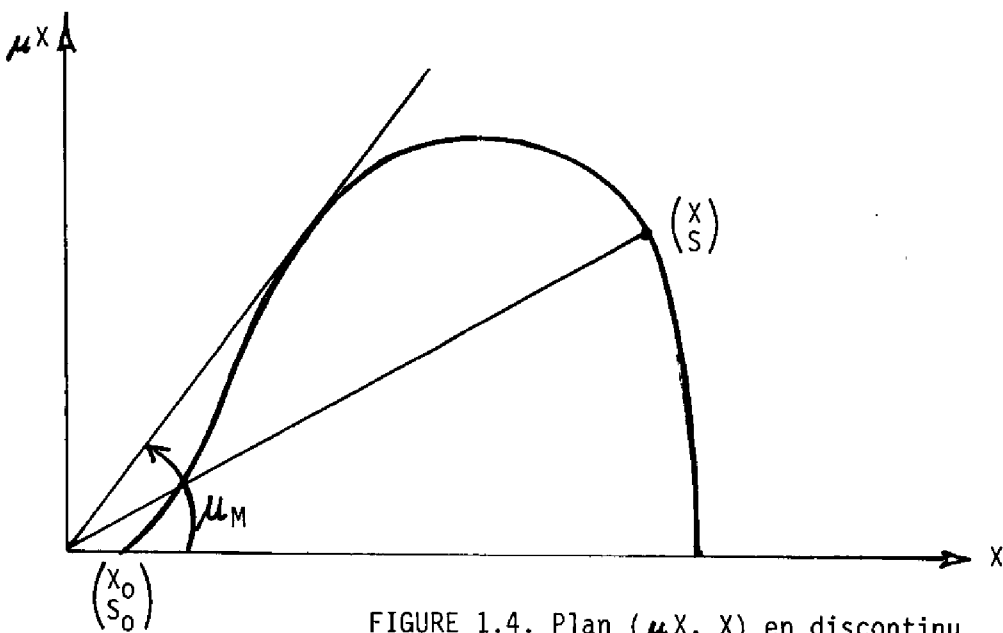


FIGURE 1.4. Plan $(\mu X, X)$ en discontinu.

Cas où $m_C = 0$

Si le terme de maintenance est nul - ou négligeable - on obtient à partir de (1.13) et (1.14) :

$$\frac{dS}{dt} = - \frac{1}{Y_C} \cdot \frac{dX}{dt} \quad (1.17)$$

Si on intègre les deux membres de cette équation entre l'instant initial t_0 postérieur à la phase de latence et un instant quelconque : t_x , on a

$$S - S_0 = \frac{1}{Y_C} (X_0 - X)$$

$$\text{ou encore} \quad S_0 + \frac{X_0}{Y_C} = S + \frac{X}{Y_C} \quad (1.18)$$

En continu

La figure 1.5a permet une illustration graphique de l'équation d'évolution de la biomasse en continu. Elle regroupe la courbe μX en fonction de X (fig. 1.4.) et la droite DX de pente D . Lorsque D passe de D_0 à D_1 par exemple sous forme d'échelon à S_e constant (figure 1.5b), $\frac{dX}{dt}$ est représenté à chaque instant par le segment MN (figure 1.5a)

$$MH = MN - NH$$

$$\text{où } MH = X$$

$$NH = DX$$

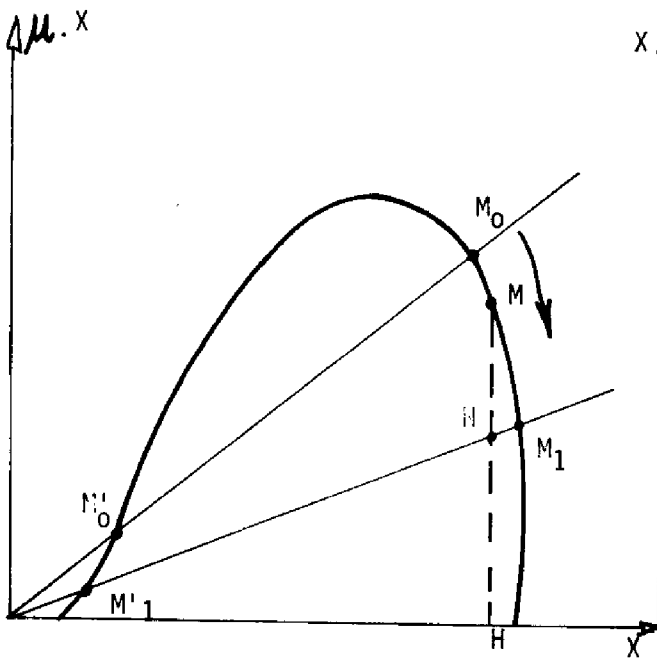


FIGURE 1.5a. Etude en continu

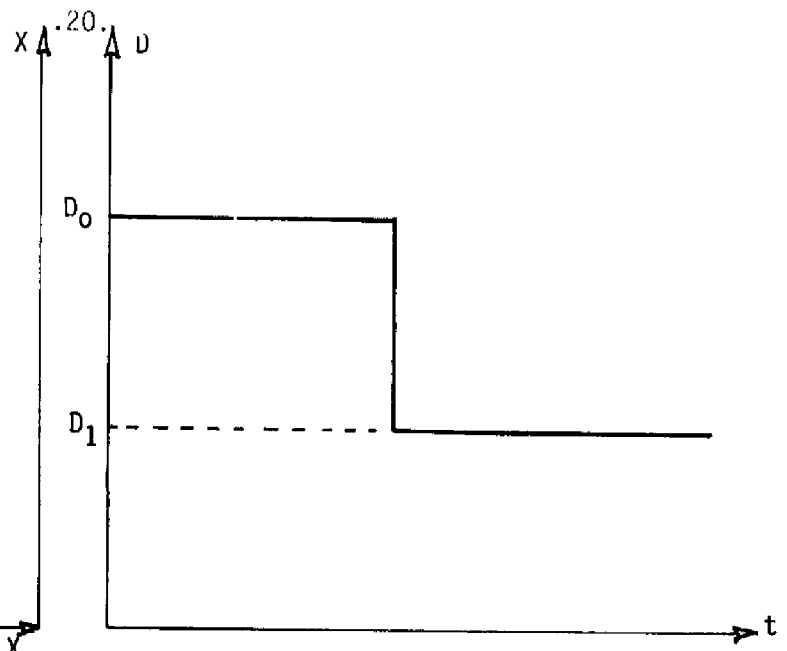


FIGURE 1.5b. Changement de D.

En régime permanent, les accroissements de la biomasse et du substrat sont nuls et le point d'équilibre stable (s'il existe, voir le troisième chapitre) sera le point M_1 d'intersection de la courbe μX et de la droite DX .

$$\text{En ce point : } \frac{dX}{dt} = 0 \text{ et } \frac{dS}{dt} = 0$$

$$\text{d'où } D = \mu \quad (1.19)$$

$$F = \mu S + \frac{\mu X}{Y_C} + m_C \cdot X \quad (1.20)$$

Dans le cas où $m_C = 0$

$$D = \mu$$

$$F = \mu \cdot \left(S + \frac{X}{Y_C} \right)$$

$$\text{or } F = D \cdot S_e$$

$$\text{d'où : } S_e = S + \frac{X}{Y_C} \quad \forall X, S \quad (1.21)$$

Si on considère que la courbe de la figure 1.5 a a été tracée point par point à partir des régimes d'équilibre obtenus à S_e constant et en faisant varier le taux de dilution (fig. 1.5b). La courbe de la figure 1.5a) sera identique à celle obtenue dans le fonctionnement discontinu (1.4) si

$$S_e = S_0 + \frac{X_0}{YC} \quad (1.22)$$

Remarque. en régime permanent l'ordonnée du point d'équilibre stable (figure 1.5a) représente la productivité de la fermentation, définie par $P = DX$.

Ainsi le taux de dilution qui maximise la productivité, sera obtenu par la droite qui joint le sommet de la courbe (1.5a) à l'origine.

1.2. TECHNIQUES DE LA FERMENTATION

1.2.1. Les microorganismes, le milieu et la préparation des levains.

Les microorganismes utilisés sont des Pseudomonas Spec1 qui sont conservés sur gelose nutritive.

La composition du milieu minéral est la suivante en g/litre

K Cl	0,08 g/l
Na H ₂ PO ₄	0,08 g/l
(NH ₄) ₂ H PO ₄	2, g/l
Mg SO ₄	0,4 g/l
Na ₂ H PO ₄	0,42 g/l
Ca Cl ₂	0,03 g/l
KH ₂ PO ₄	0,4 g/l

et des facteurs de croissance.

La préparation des levains, qui est la phase préalable à chaque fermentation, consiste à préparer dans un récipient (Erlenmeyer), 1 litre du milieu défini ci-dessus, 5 g de méthanol plus les microorganismes provenant du Laboratoire de Génie Biochimique (INSA). On place le récipient dans une chambre à température constante pendant 24 à 48 heures.

1.2.2. Description de l'Unité Pilote de Fermentation.

Nous allons résumer ici les caractéristiques de l'unité pilote de fermentation qui ont été déjà décrites largement dans la thèse de BOUDON [I-10].

Le fermenteur a une capacité de 30 litres et il est agité par une turbine (fig. 1.6) couplée à un moteur à vitesse variable en position verticale. La vitesse d'agitation a été de 1300 tours par minute dans toutes nos fermentations, valeur fixée par des essais d'homogénéisation du milieu de culture réalisés sur le pilote.

REGULATEURS

. La régulation du volume utile du fermenteur se fait par un capteur de pression différentielle ACB (Schlumberger) qui délivre une tension proportionnelle au niveau de milieu et par un régulateur réalisé au L.A.A.S. qui commande une électrovanne agissant par tout ou rien sur le débit de sortie du milieu.

. La régulation de pH se réalise par un régulateur SETRIC qui commande une pompe d'alimentation d'ammoniaque quand le pH du milieu baisse. Le capteur est une électrode INGOLD stérilisable.

. La régulation de température se fait par un régulateur tout ou rien qui commande un circuit d'eau chaude à 60° C. Un circuit de réfrigération (eau à 2°C) évacue en permanence les quantités de chaleur provenant de la réaction biochimique et de l'agitation (il est bien évident que la régulation qui en résulte ne peut convenir qu'à un dispositif de laboratoire, le chauffage pour une réaction exothermique étant exclu !...).

L'alimentation en milieu minéral et en substrat est réalisée par une pompe doseuse double tête à pistons, dont la longueur de course est commandée en tension par un moteur actionnant un vernier. La commande des débits d'alimentation peut se faire manuellement ou par le calculateur PDP-8 (DIGITAL EQUIPEMENT) couplé au système. Nous reviendrons sur le couplage de calculateur dans le chapitre 3.

CAPTEURS

L'analyse en ligne du méthanol se réalise par un chromatographe en phase vapeur (CARLE Instruments, Inc.) et par un intégrateur des pics (réalisé au LAAS) qui intègre le signal délivré par le chromatographe, obtenant ainsi une tension qui est proportionnelle à la concentration en méthanol.

Ce dispositif opère en ligne, grâce à un programmeur qui déclenche toutes les 10 minutes, l'injection d'un prélèvement de milieu de culture dans le chromatographe.

Enfin, l'analyse en continu de la biomasse se fait par un turbidimètre (conçu et réalisé au LAAS) qui délivre une tension fonction de l'opacité de la solution qui le traverse en permanence.

Cette solution est le milieu de fermentation dilué 10 fois par l'eau.

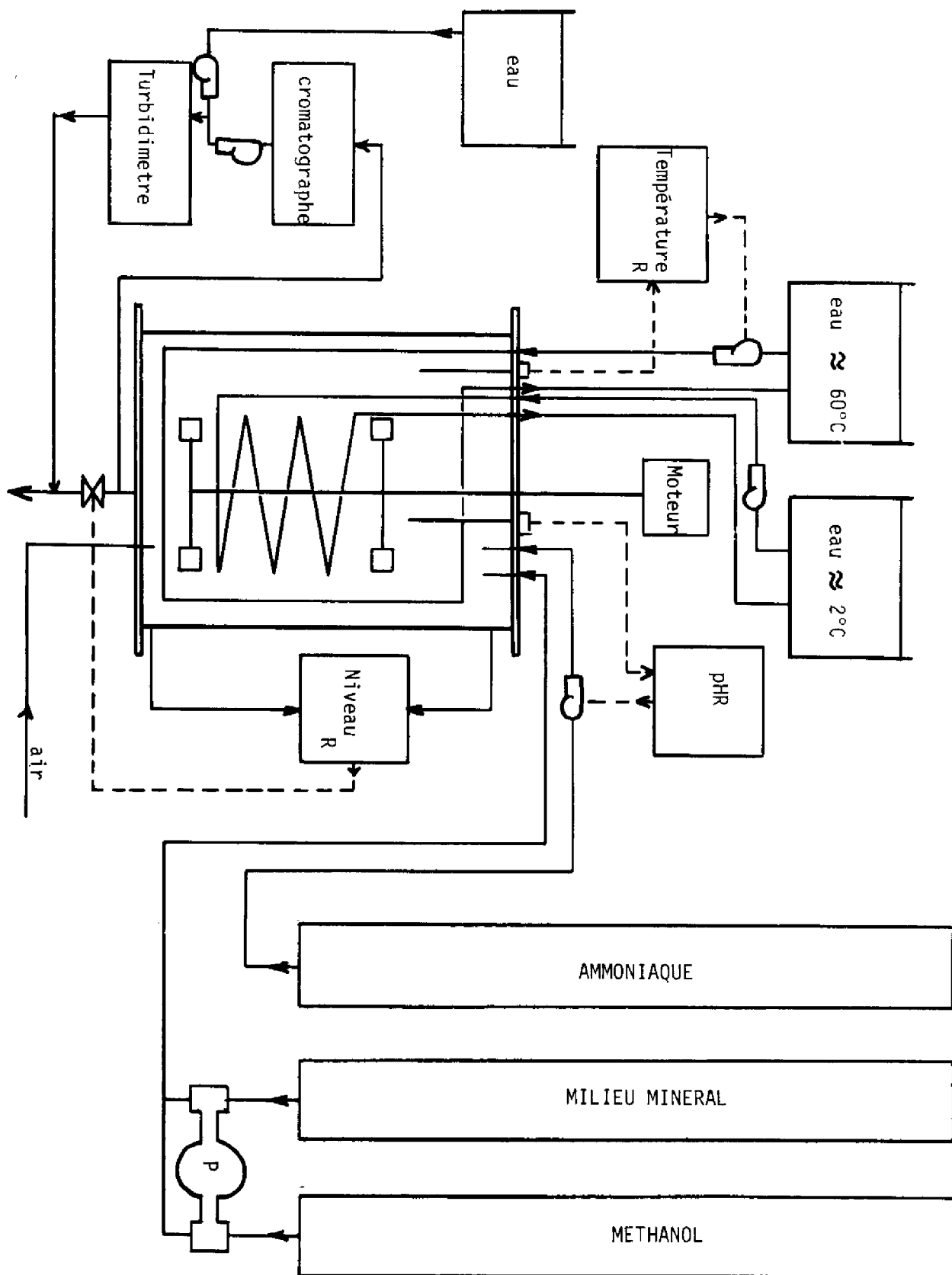


FIGURE 1.6. Schéma de l'unité pilote de fermentation

Un système de deux pompes à impulsions (VOLUMATIC) délivrent 2,7 litres par heure d'eau du robinet et 0,3 litres par heure de milieu de culture qui sont mélangés avant de traverser le capteur. Ce système ne comportant pas de recyclage n'a été utilisé qu'en fermentation continue.

Lorsque nous avons étudié les fermentations en discontinu, l'analyse de la biomasse a été réalisée par la même méthode dans un analyseur hors ligne.

Nous avons constaté, contrairement à BOUDON, que la mesure d'opacité par turbidimétrie est proportionnelle à la concentration microbienne obtenue par pesée de la masse sèche (figure 1.7).

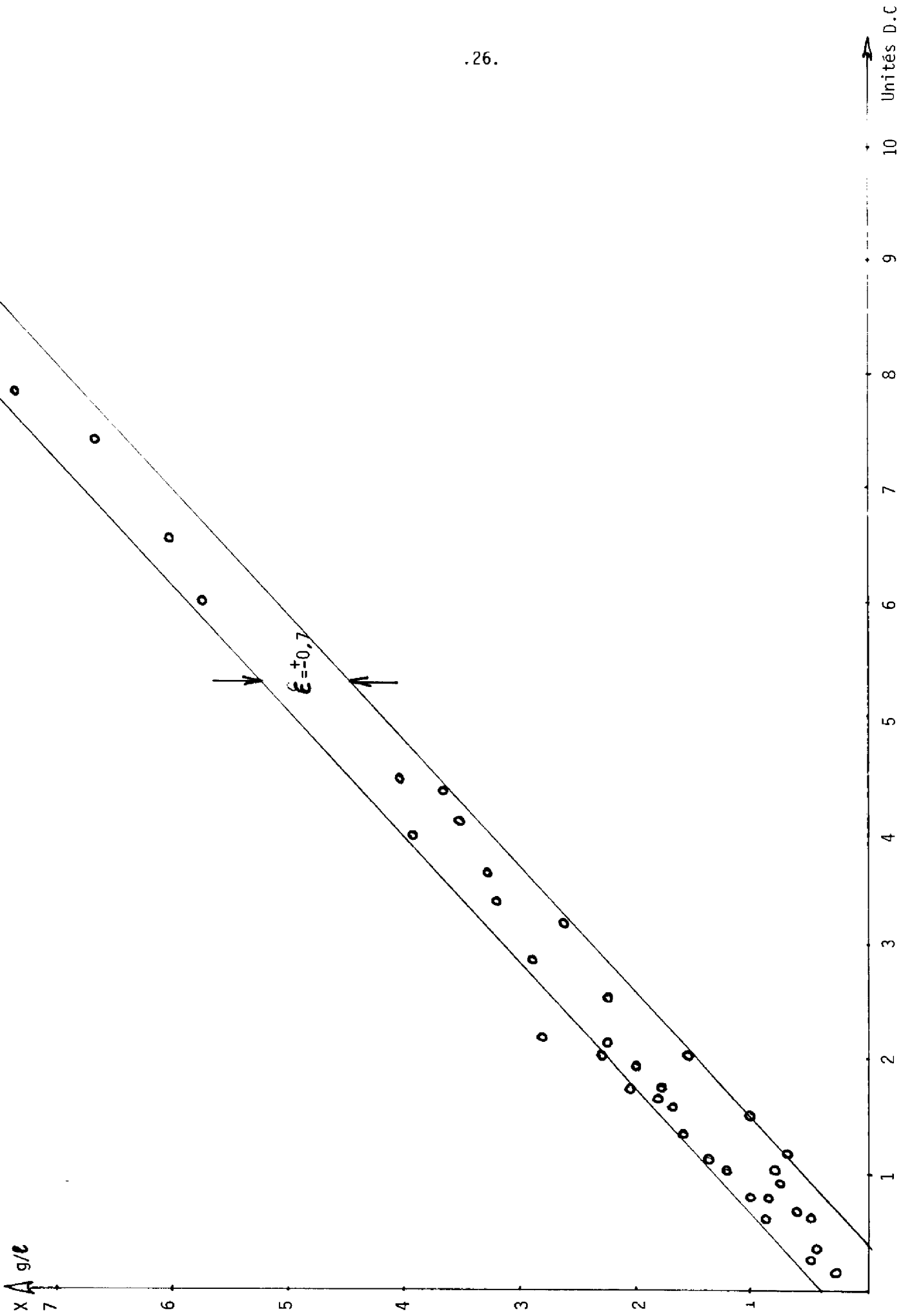
L'erreur absolue de dispersion est de $\pm 0,7$ g/l

1.3. RESULTATS ET DISCUSSION

1.3.1. Fermentations en discontinu

Nous avons réalisé 4 fermentations en discontinu dans les conditions opératoires suivantes :

Température :	$30 \pm 0,5^\circ \text{C}$
pH :	$6,7 \pm 0,1$ unités
Vitesse d'agitation :	1300 ± 50 tours par minute
Débit d'air en excès :	$1 \text{ m}^3/\text{heure}$
Volume utile :	26 litres



Les concentrations initiales de la biomasse et du substrat ont été :

Essai n°	Inoculum	Méthanol
1	0,75 g/l	10,5 g/l
2	1,25 g/l	25 g/l
3	0,40 g/l	24 g/l
4	0,40 g/l	20 g/l

TABLEAU 1.1. Conditions Opératoires

Des mesures hors ligne de la biomasse ont été réalisées toutes les 30 minutes (la turbidimétrie automatique nécessitant 0,31/h sans possibilité de recyclage était inutilisable en discontinu).

Le substrat a été mesuré en ligne toutes les 10 minutes par le chromatographe-intégrateur ; nous avons profité des prélèvements chaque demi-heure en vue de la mesure de X, pour analyser hors ligne la concentration en méthanol dans un autre dispositif plus précis.

Le calcul des données ($\frac{dX}{dt}$ et $\frac{dS}{dt}$) a été fait par lissage polynomial, en utilisant le programme numérique réalisé par RIBOT [1-2]. Les mesures bruitées de X sont lissées par un polynôme de degré n (à dé-

finir par l'utilisateur).

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \quad (1.23)$$

Les coefficients de ce polynôme sont déterminés en minimisant la somme des carrés des écarts entre les valeurs expérimentales de X et les valeurs du polynôme aux instants d'échantillonnage :

$$J = \sum_{i=0}^N (X_i - P(t_i))^2 \quad (1.24)$$

On procède de même pour S. Les dérivées sont calculées en dérivant les polynômes par rapport au temps, ainsi :

$$\frac{dX}{dt} = \mu X = \frac{dP(t)}{dt} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots + n a_n t^{n-1} \quad (1.25)$$

La figure 1.8 montre les résultats (biomasse et substrat) correspondant à la première fermentation.

Les degrés des polynômes ont été définis en observant l'adaptation des polynômes aux mesures bruitées de X et S, ainsi dans ce premier essai les polynômes de X et S sont de 9ème et 6ème degré respectivement.

Nous avons tracé dans le plan $(\frac{dX}{dt}, X)$ (fig. 1.9) les valeurs obtenues par lissage des fermentations E1 et E2.

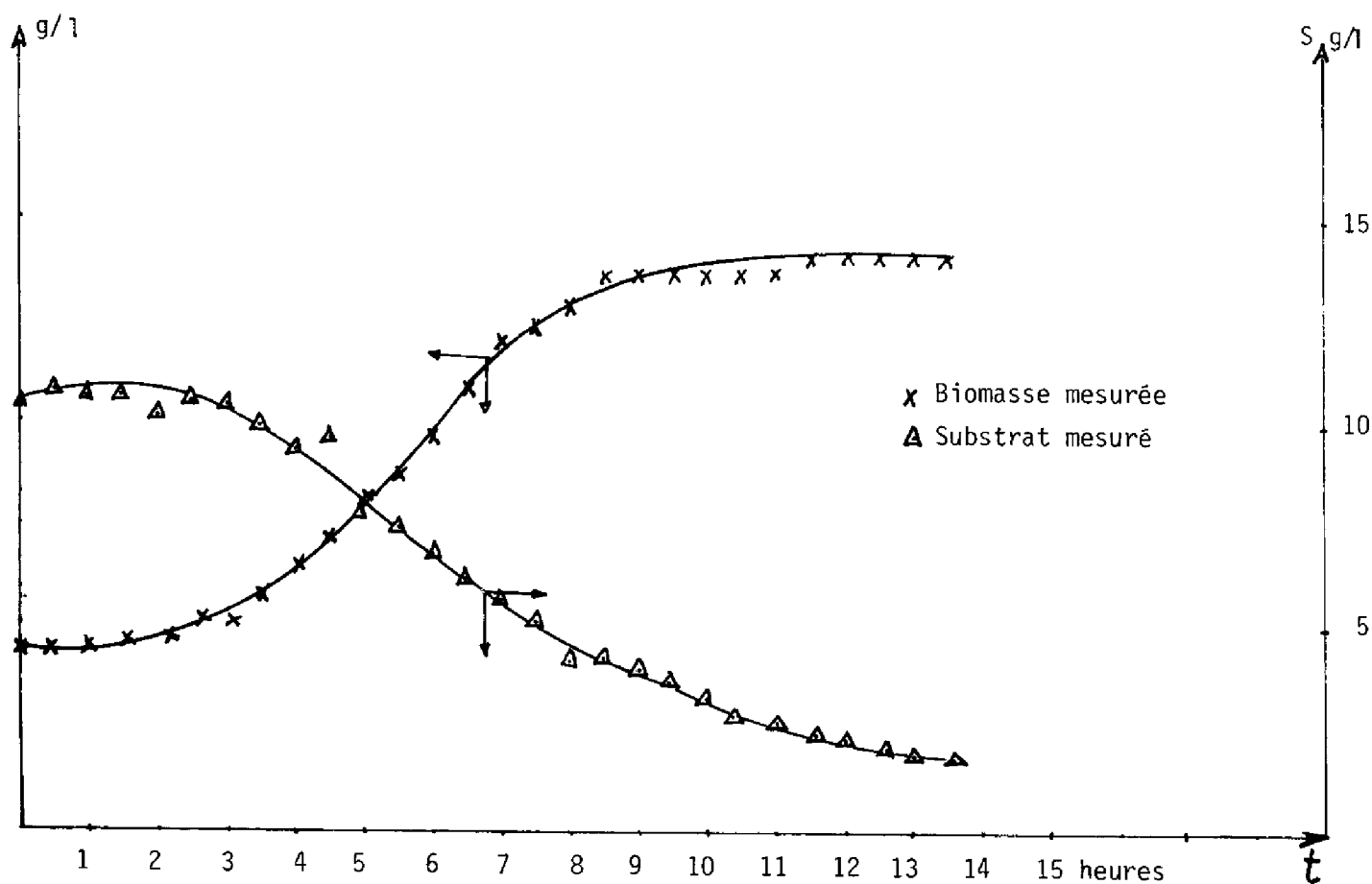


FIGURE 1.8. Lissage polynomial de E_1

On remarque :

- 1) que la droite de plus grande pente (μ MAXIMUM) est à peu près la même pour les deux fermentations.
- 2) que les concentrations de substrat qui donnent lieu au taux de croissance maximum sont très proches des valeurs initiales

$$\begin{array}{llll}
 \text{Essai n}^\circ 1 & S(t_0) = 10,5 \text{ g/l} & \text{et} & S(t_\alpha) = 10 \text{ g/l} \\
 \text{Essai n}^\circ 2 & S(t_0) = 25 \text{ g/l} & \text{et} & S(t_\beta) = 24 \text{ g/l}
 \end{array} \quad (1.26)$$

t_α et t_β sont les temps correspondant à $\mu = \mu_{\text{MAXIMUM}}$.

3) que dans la plage 0-25 g/l de méthanol, il n'y a pas de caractère inhibiteur (d'après les résultats de E-2). (1.26)

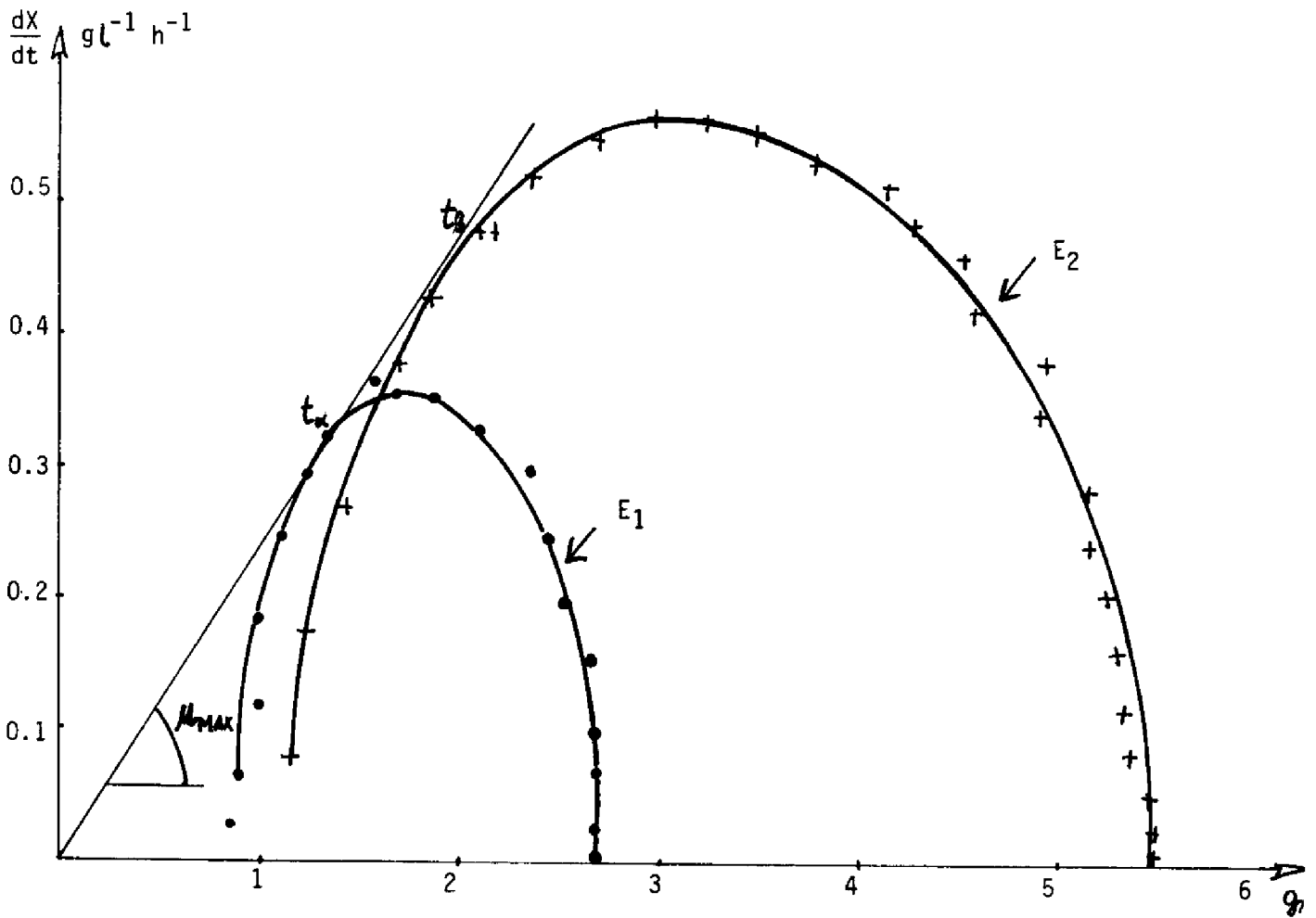


FIGURE 1.9. E1 et E2 dans les plans $(\frac{dX}{dt}, X)$

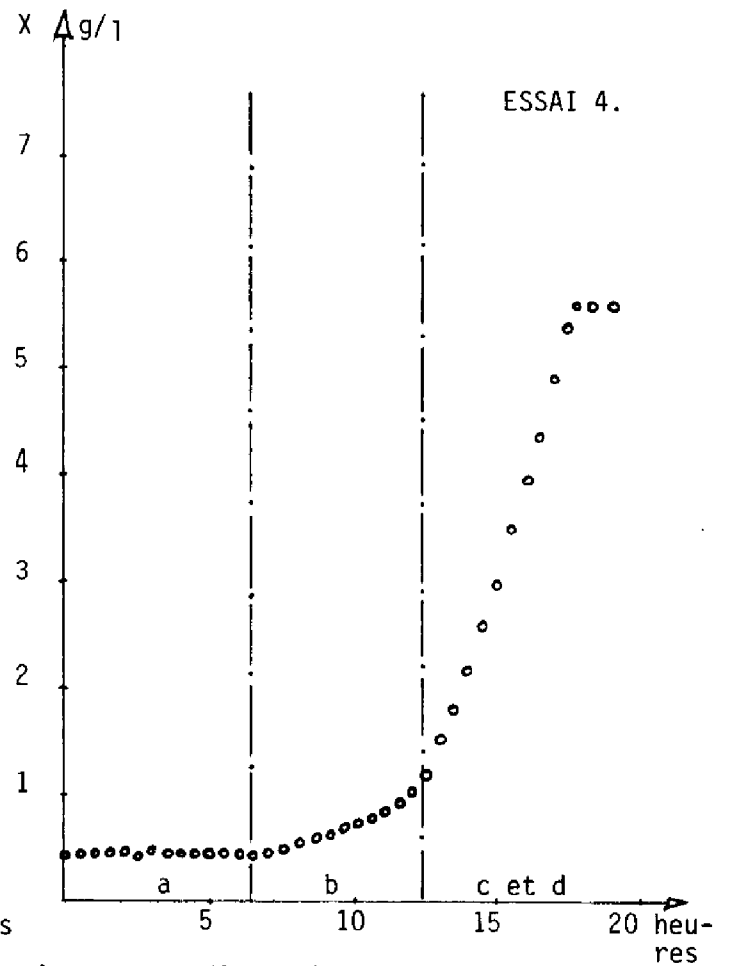
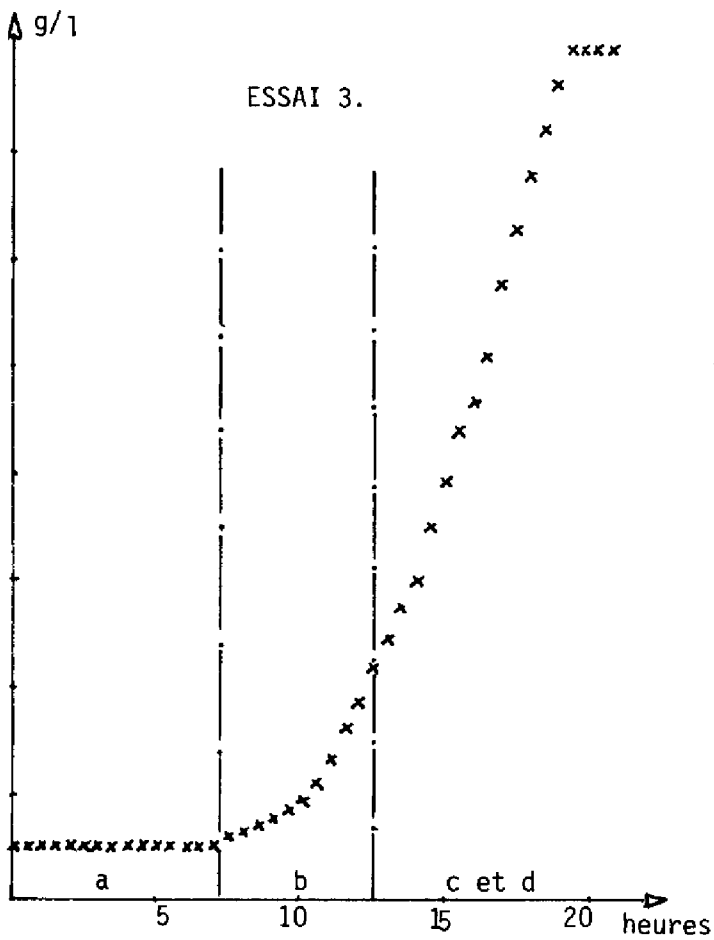
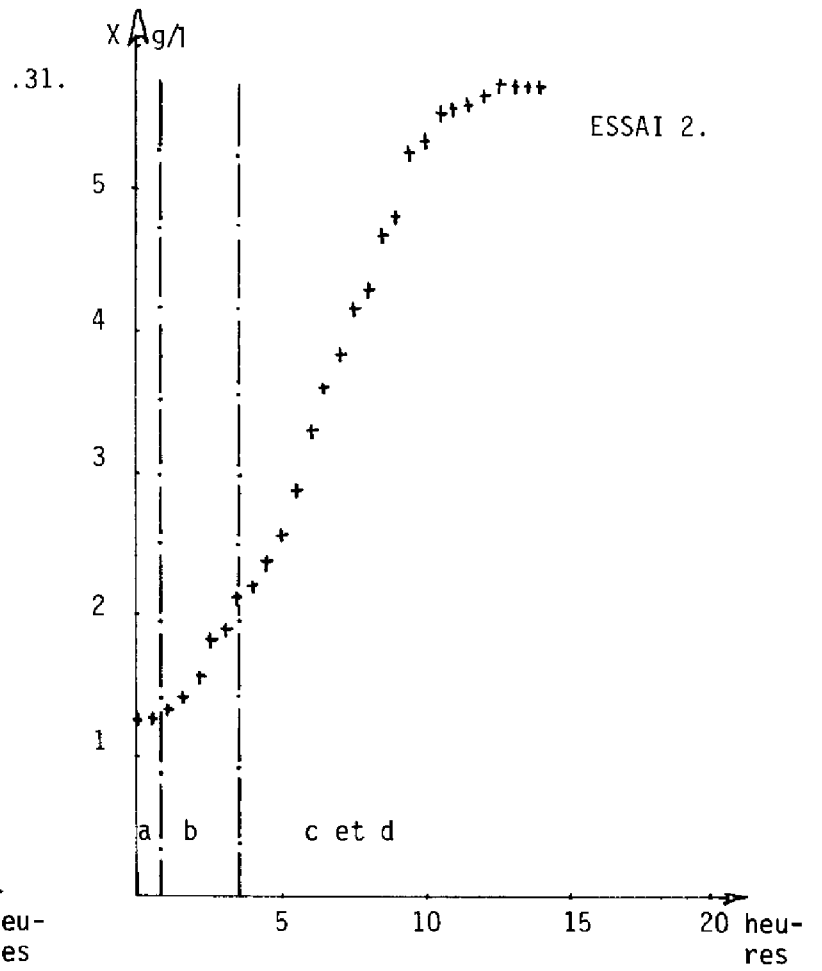
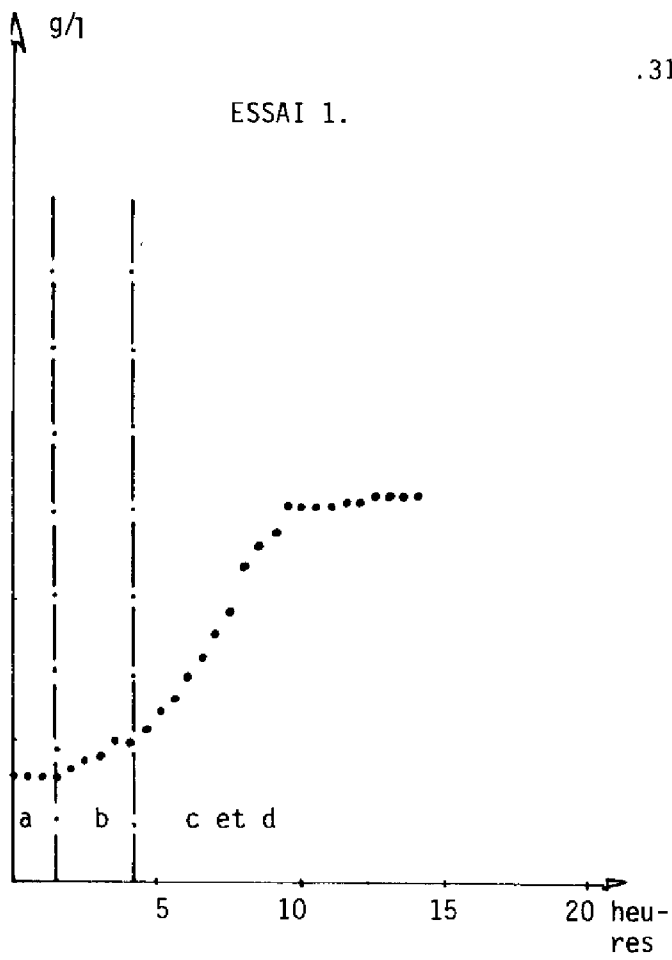


FIGURE 1.10. Les phases de la croissance en discontinu.

On constate dans les quatre fermentations, une phase de latence qui varie entre 1 et 10 heures (fig. 1.10), une phase d'accélération où le taux de croissance augmente rapidement vers une valeur très élevée avant de redescendre rapidement vers une valeur plus "stable" qui fera l'objet de la modélisation (figure 1.11). Remarquons que la phase exponentielle est presque inexistante et c'est surtout la phase de limitation ou ralentissement que nous allons étudier.

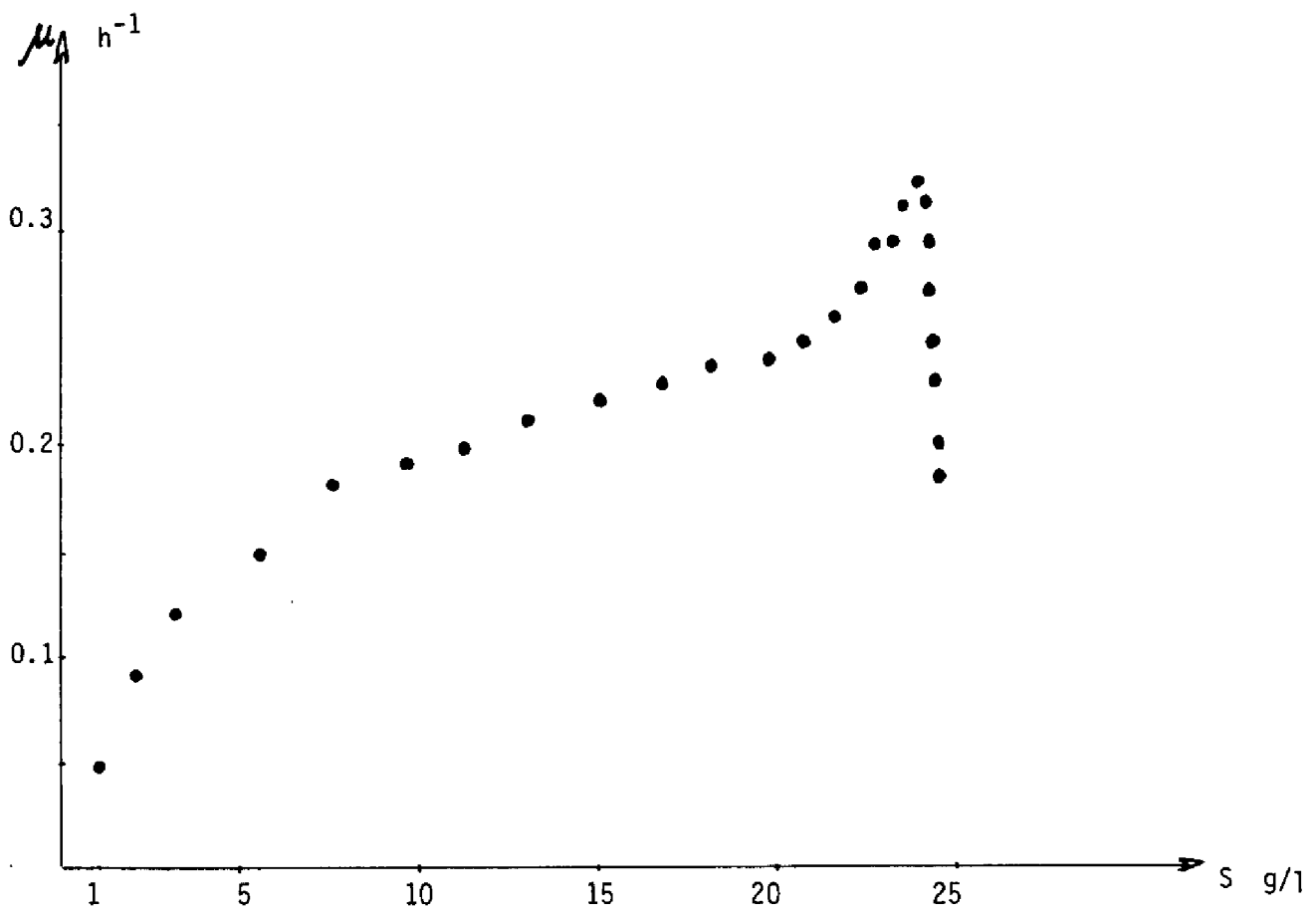


FIGURE 1.11. μ en fonction de S (Fermentation E_3)

Pour définir la loi la plus appropriée à la cinétique de croissance des fermentations et compte tenu des résultats (1-26), on a écarté les relations qui traduisent le caractère inhibiteur de la souche et on a testé les relations de MONOD, CONTOIS et PERRUT définies plus haut.

Si on inverse l'expression du taux de croissance (1.3) on obtient :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_M} + \frac{K_S}{\mu_M} \cdot \frac{1}{S} \quad (1.27)$$

Equation d'une droite dans le plan $(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{S})$ de pente $\frac{K_S}{\mu_M}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{\mu_M}$.

Si on remplace l'ordonnée $\frac{1}{S}$ par $\frac{X}{S}$, on obtient une droite pour la loi de CONTOIS, de pente $\frac{A}{\mu_M}$.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_M} + \frac{A}{\mu_M} \cdot \frac{X}{S} \quad (1.28)$$

De même pour la relation de PERRUT dans le plan $(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{XS})$ on obtient :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_M} + \frac{A}{\mu_M} \cdot \frac{1}{XS} \quad (1.29)$$

On observe que les relations de MONOD et CONTOIS s'adaptent bien aux résultats obtenus par lissage polynomial (figures 1.12 et 1.13) tandis que la relation de PERRUT proposée, il est vrai, par son auteur, pour une croissance microbienne sur hydrocarbures, n'est pas du tout vérifiée là.

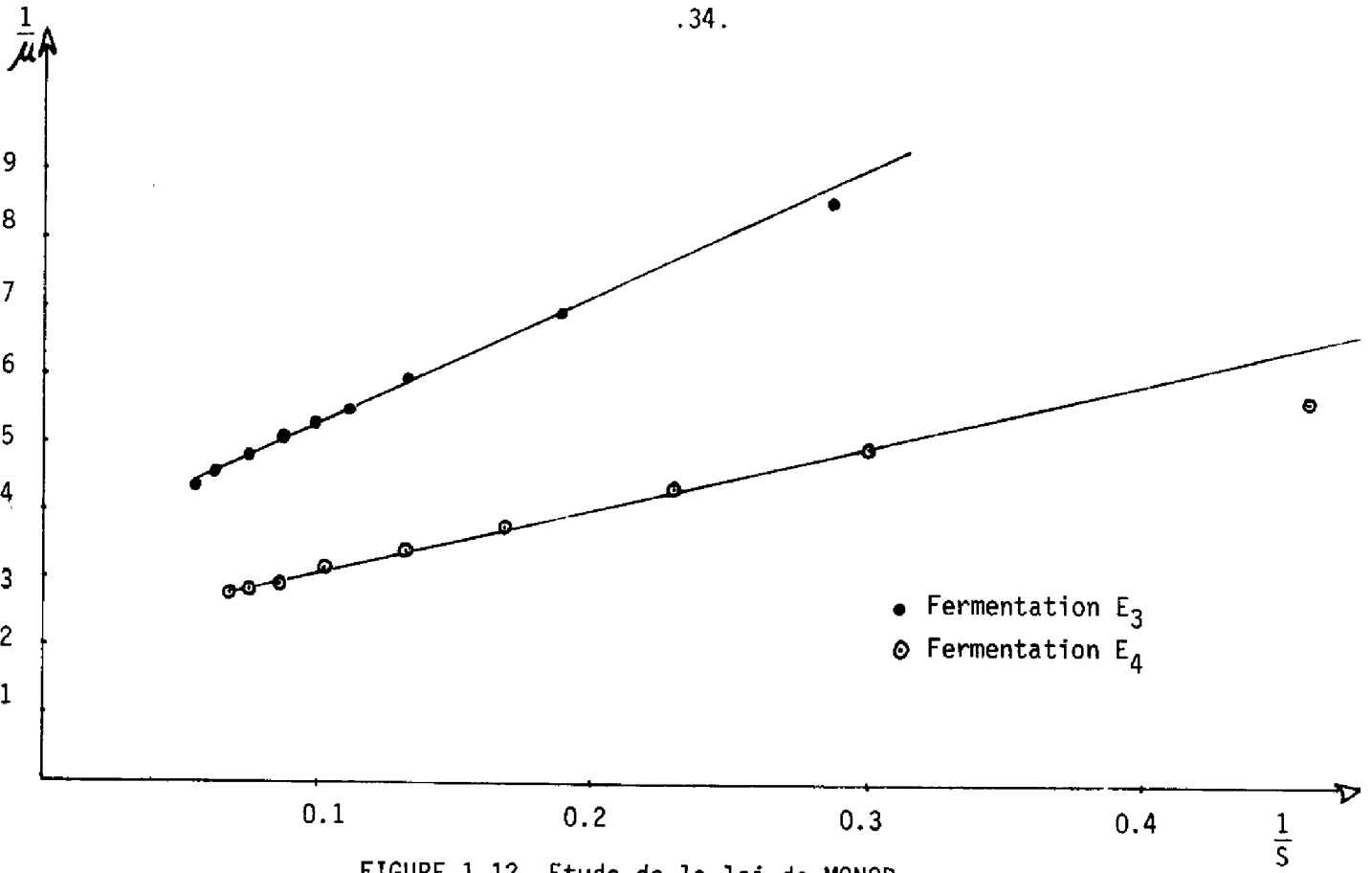


FIGURE 1.12. Etude de la loi de MONOD

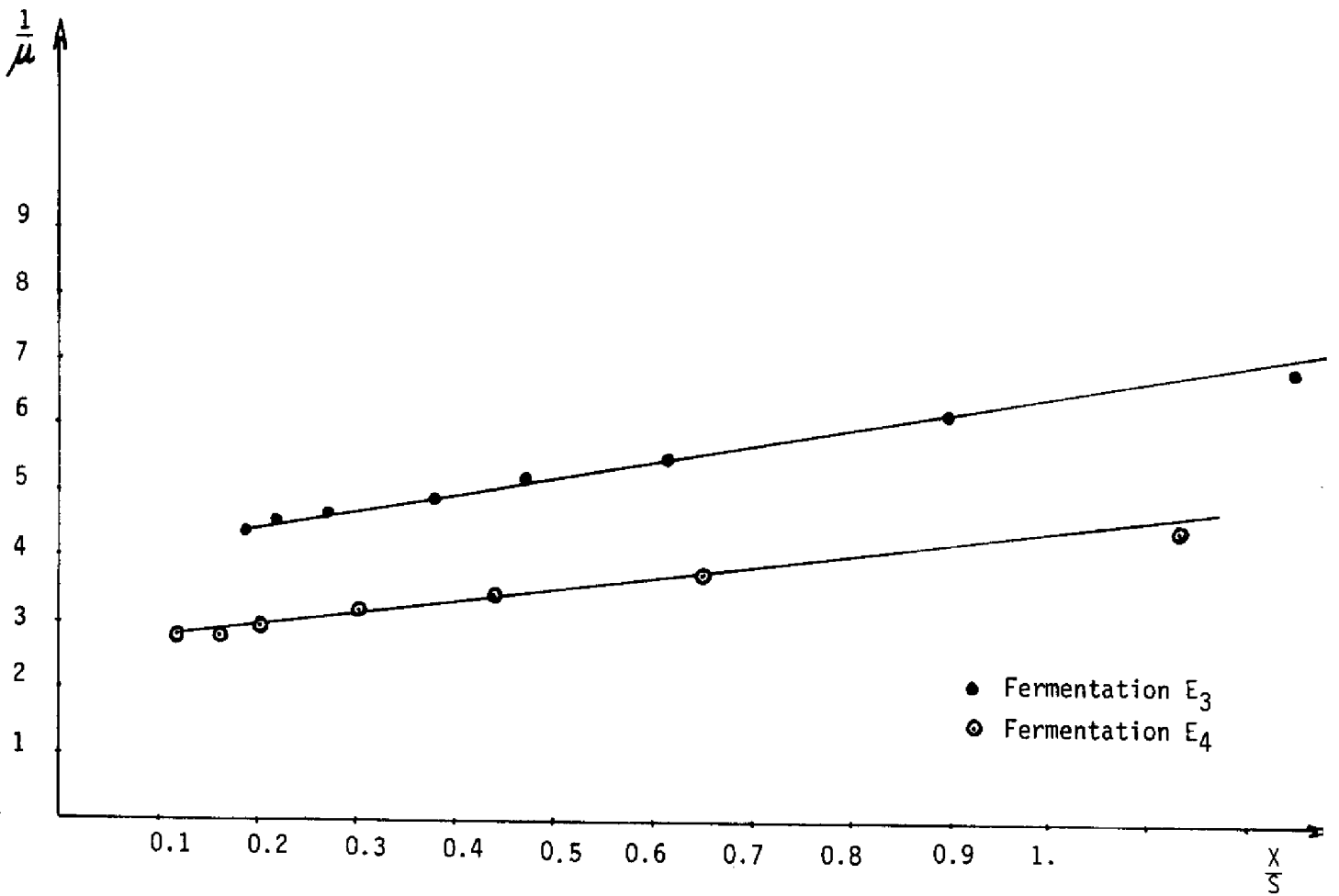


FIGURE 1.13. Etude de la loi de CONTOIS

Remarquons aussi que ces droites ne se superposent pas, ce qui traduit les variations des paramètres d'une fermentation à une autre et prouve la nécessité d'avoir une méthode d'estimation des paramètres (voir chapitre 2).

Le rendement global R_C de conversion de substrat en biomasse ne varie guère dès la phase exponentielle jusqu'à l'arrêt de la fermentation. Ainsi, si on trace X en fonction de S , on obtient bien une droite de pente égale au rendement (au signe près), ce qui démontre le caractère numériquement peu significatif du terme de maintenance et que le rendement global peut être défini par Y_C . (fig. 1.14).

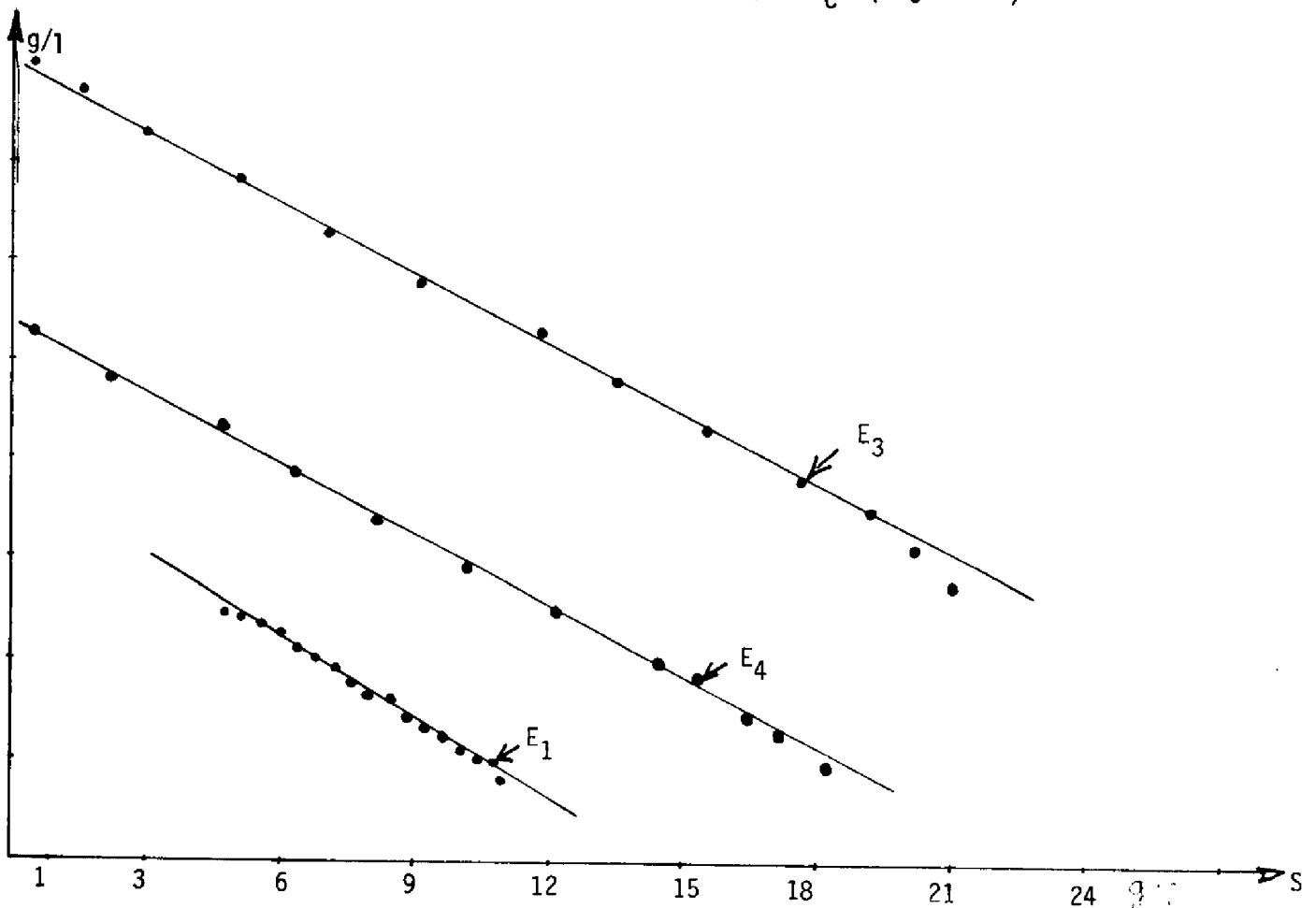


FIGURE 1.14. Biomasse en fonction du substrat dans 3 fermentations.

Finalement la figure 1.15 montre dans le plan $(\frac{dX}{dt}, X)$ les résultats de l'expérience E.3. Si on considère $m_C \neq 0$, cette allure correspondrait en continu à la courbe de productivité DX en fonction de X . pour une concentration constante de substrat à l'entrée

$$S_e = S_0 + \frac{X_0}{Y_C} = 24 + \frac{0,4}{Y_C} = 25 \pm 1 \text{ g/l} \quad (1.30)$$

L'optimum de productivité ($D.X$) serait égal à $1,05 \text{ g/L}^{-1}\text{h}^{-1}$ pour un taux de dilution de : $0,18 \text{ h}^{-1}$.

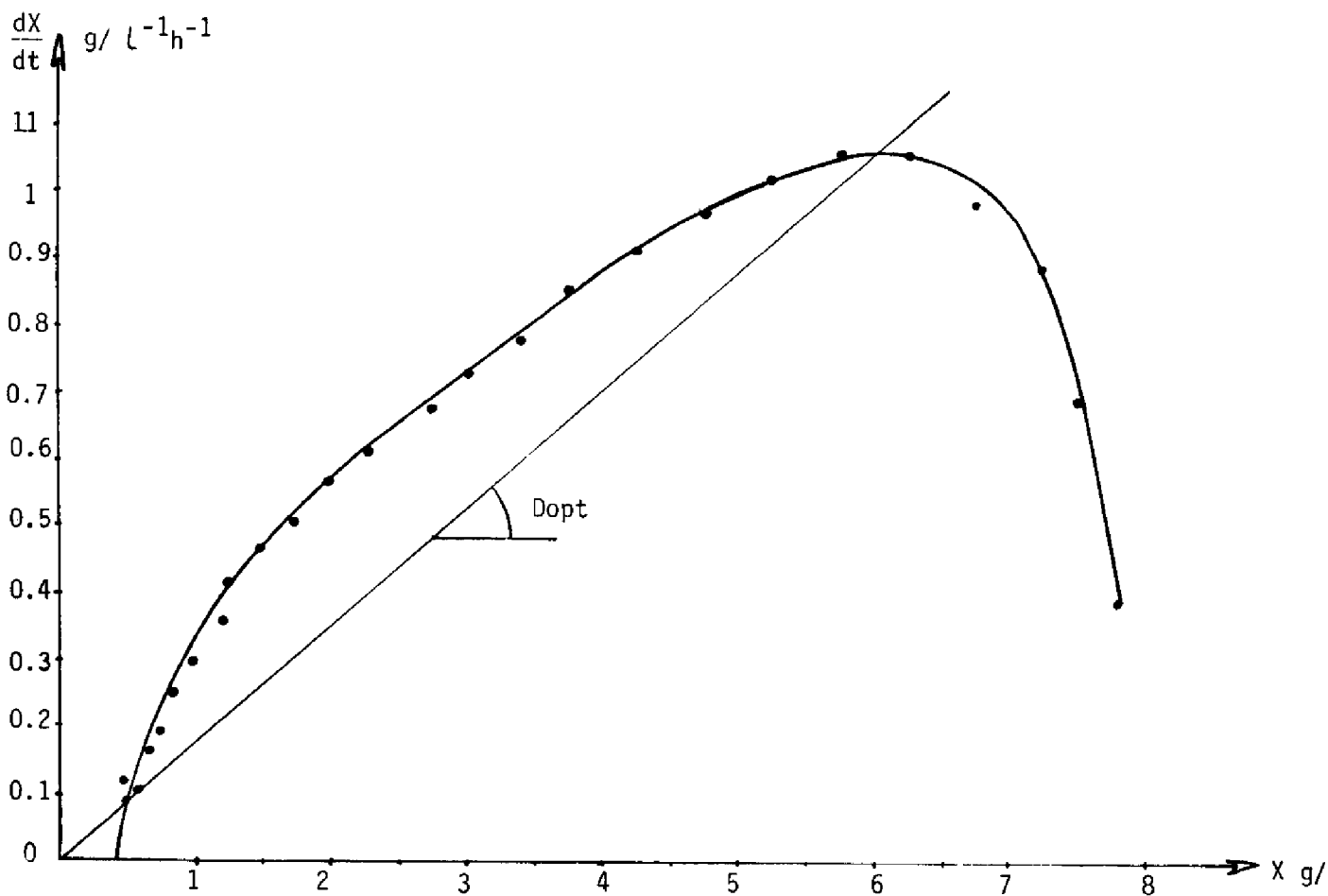


FIGURE 1.15. Fermentation E₃

1.3.2. Fermentations en continu.

Un certain nombre de considérations importantes sur la modélisation, ayant été définies dans le paragraphe précédent nous nous sommes proposé de vérifier si les résultats obtenus en discontinu sont en accord avec le comportement en régime permanent de la fermentation en continu.

Rappelons que les équations du modèle en régime permanent, donnent les expressions algébriques suivantes :

$$(\mu - D) \cdot X = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dX}{dt} = 0 \quad (1.31)$$

$$F - DS - \frac{\mu X}{Y_C} - m_C X = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad (1.32)$$

Il suffit de remplacer le taux de croissance (μ) par le taux de dilution (D), pour appliquer au processus les expressions (1.28) et (1.29), ainsi pour :

la loi de MONOD $\frac{1}{D} = \frac{1}{\mu_M} + \frac{K_S}{\mu_M} \cdot \frac{1}{S} \quad (1.33)$

et la loi de CONTOIS $\frac{1}{D} = \frac{1}{\mu_M} + \frac{A}{\mu_M} \cdot \frac{X}{S} \quad (1.34)$

Quant à l'inverse du rendement global de la fermentation continue en état d'équilibre, il est défini par :

$$\frac{1}{R_C} = \frac{F - DS}{DX} = \frac{1}{Y_C} + \frac{m_C}{D} \quad (1.35)$$

Le tableau 1.2, nous représente les valeurs moyennes expérimentales des variables de commande et d'état obtenues en régime permanent dans une même fermentation continue. Le début de cette manipulation coïncide avec l'arrêt de la fermentation en discontinu E4.

Palier	\bar{D}_h^{-1}	$F_{g1}^{-1}h$	\bar{X}_g	$\bar{\xi}_{g1}^{-1}$
n° 1	0,23	5,5	5,5	6
n° 2	0,18	2,2	3	2,5

TABLEAU 1.2. Valeurs expérimentales
en continu.

Si on applique (1.35) on observe que le rendement des deux paliers est semblable aux valeurs en discontinu (figure 1.14). Et les résultats expérimentaux présentés sur les figures (1.16) et (1.17) montrent un bon accord avec les résultats de E4 en discontinu.

Remarquons finalement, que l'étude en continu du processus a été réalisée grâce à une technique de commande numérique qui nous a permis d'attendre rapidement les états d'équilibre et de diminuer les perturbations. Cette commande en boucle fermée sera étudiée dans le troisième chapitre.

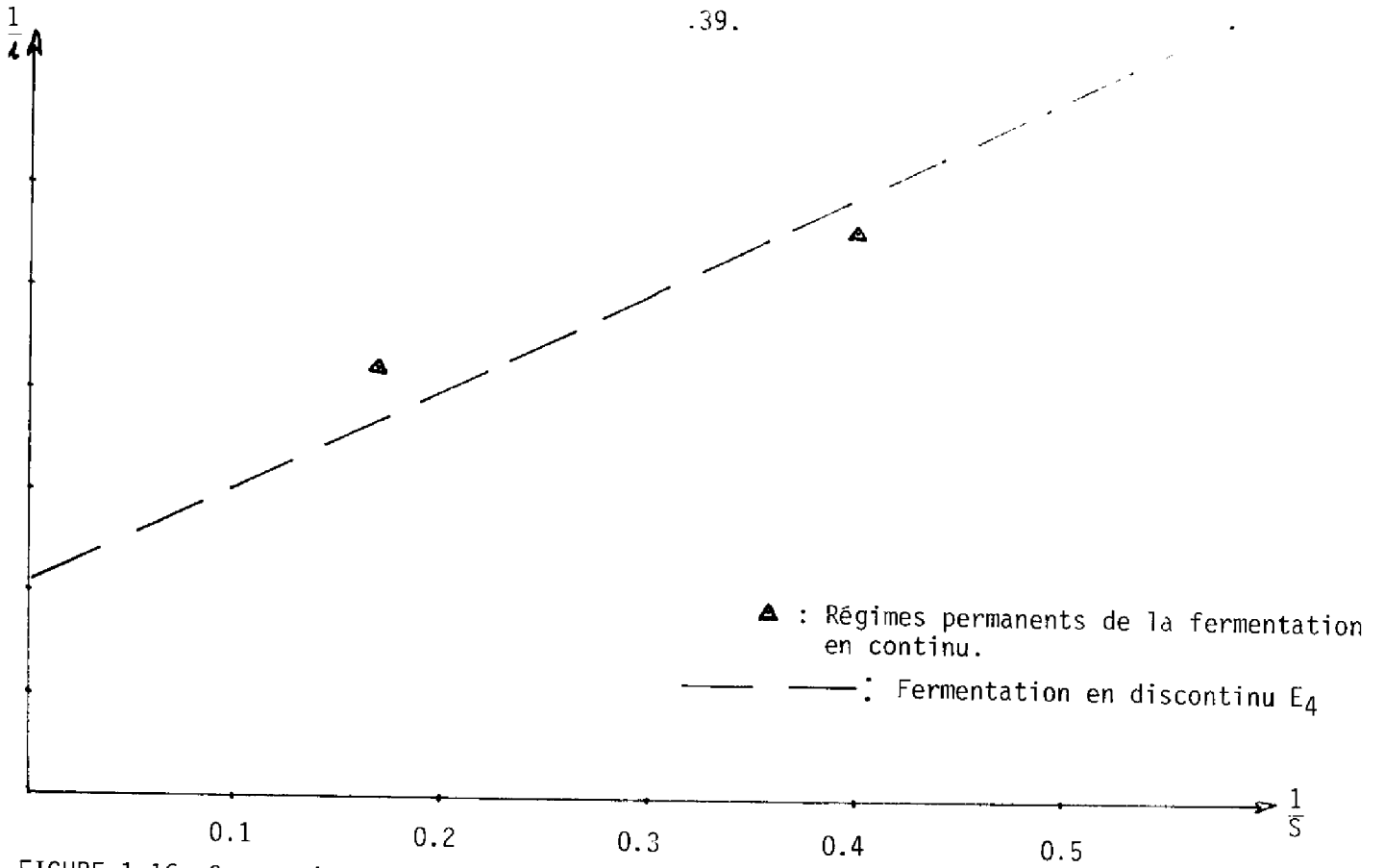


FIGURE 1.16. Comparaison des résultats en continu et discontinu pour une structure de MONOD.

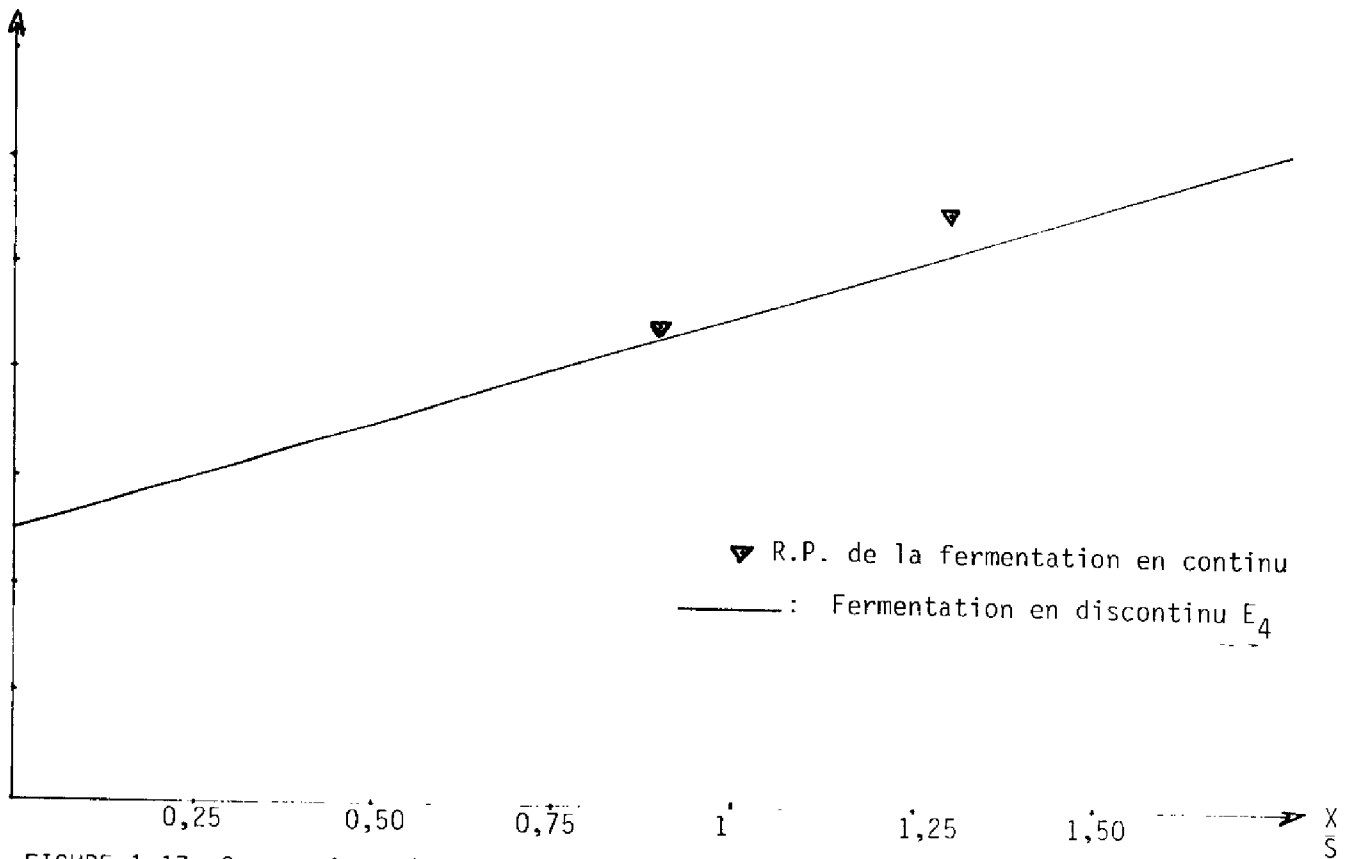


FIGURE 1.17. Comparaison des résultats en continu et discontinu pour une structure de CONTOIS.

CONCLUSION.

L'étude de quelques fermentations sur notre pilote de fermentation, nous a permis de mettre en évidence quelques propriétés essentielles de la culture :

- 1) il n'existe pas de caractère inhibiteur du méthanol sur une plage assez large de fonctionnement,
- 2) la phase exponentielle observée en fonctionnement discontinu est très réduite,
- 3) les lois de croissance de MONOD et CONTOIS représentent au même degré d'approximation, les expérimentations réalisées et,
- 4) la consommation pour le maintien en survie des microorganismes n'a pas été observée dans ces expériences, cependant nous conserverons ce terme même si le coefficient de maintenance est nul ou voisin de zéro.

Ces caractéristiques nous ont permis de modéliser notre processus, malgré le nombre limité d'expériences réalisées. Nous nous proposons maintenant d'identifier les paramètres intervenant dans le modèle.

BIBLIOGRAPHIE DU 1ER CHAPITRE

- I.1. KONO T. (1968) - "Kinetics of microbial cell growth"
Biotechnology and Bioengineering. Volume 10, pages
105-131.

- I.2. GOMA G et RIBOT D (1975 - "Modélisation et identifica-
tion des paramètres de la croissance en continu de Can-
dida Lipolytica sur n-aleanes".
Colloque : Automatisation des processus de fermentation
(AFCET). Paris.

- I.3. GOMA G. (1975) - "Contribution à l'étude des fermenta-
tions sur hydrocarbures - transfert de matière - lors
de croissance"
Thèse de doctorat d'état, L.G.B. Toulouse III.

- I.4. PERINGER P., BLACHERE H., CORRIEU G., LANE A.G., (1974)
"A generalized mathematical model for the growth kinetics
of Saccharomyces ecrevisial with experimental determina-
tion of parameters"
Biotech. and Bioeng. Vol. 16, pages 431-454.

- I.5. MONOD J (1942) - "Recherche sur la croissance des cultu-
res bactériennes"
Editions Herman, Paris.

- I.6. EDWARDS V. (1970) - "The influence of high substrate con-
centration on microbial kinetics"
Biotech. and Bioeng. Vol. 12, pages 679-712.

- I.7. KO R.Y. et EDWARDS V. (1975) - "Transient Kinetics of yeast growth in batch and continuous culture with an inhibitory carbon and energy source"
Biotech and Bioeng. Vol. 17, pages 965-983.
- I.8. CONTOIS D.E. (1959) - "Relationship between population density and specific growth rate of continuous cultures"
Journal de Gen. Microbiol. Vol. 21, pages 40-50.
- I.9. BINET D., DESMARQUES T. J., PERRUT M (1975) - "Modélisation d'une culture continue biétagée."
Colloque : Automatisation des processus de fermentation (AFCET), Paris.
- I.10. BOUDON J (1975) - "Conduite numérique d'une unité pilote de fermentation continue"
Thèse de doctorat de 3ème cycle - LA.A.S. Toulouse III.
- I.11. ANDREWS J.F (1968) - "A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates ?"
Biotech and Bioeng. Vol. 10. pages 707-723.

CHAPITRE II

ESTIMATION PARAMETRIQUE PAR FILTRAGE NON LINEAIRE

INTRODUCTION

Un des problèmes essentiels dans l'optimisation des bioréacteurs est la connaissance des paramètres du modèle choisi pour représenter le processus de fermentation.

Ainsi, par exemple, nous avons défini les consignes des variables d'environnement, température et pH, aux valeurs qui maximisent le paramètre μ_M [I-10].

L'identification des paramètres de la fermentation par des méthodes analytiques n'est pas facile même dans le cas des modèles simples. L'approximation faite pour modéliser les réactions bactériennes, la non-linéarité du système, le nombre de variables de sortie et d'entrée ainsi que des paramètres à identifier, le bruit de mesure des capteurs enfin ne facilitent pas la mise en oeuvre des méthodes analytiques d'identification paramétrique.

Dans une première phase de notre étude d'identification nous avons réalisé un algorithme d'identification par régression non linéaire (méthode analytique dite déterministe) basée sur la méthode itérative du gradient qui a été appliquée sans succès II-9

Par contre, la méthode stochastique d'estimation des paramètres par filtrage non linéaire (analytique elle aussi) qui consiste à estimer simultanément l'état et les paramètres d'un modèle (dit stochastique) qui caractérise le système avec une certaine probabilité, compte tenu des approximations réalisées, nous a donné des résultats très satisfaisants.

Faisons un petit bilan historique des méthodes stochastiques : c'est à la moitié de notre siècle que la notion de probabilité a été développée dans l'analyse des systèmes. Les problèmes de l'imprécision des appareils de mesure équipant les processus d'une part et de la recherche des modèles représentatifs des processus, de plus en plus complexes, d'autre part, ont conduit à introduire la notion aléatoire de bruit de mesure et des perturbations aléatoires non prévisibles par le modèle.

Après les premiers travaux de WIENER (1942) sur la représentation fonctions d'autocorrélation et sur la connaissance fréquentielle des processus aléatoires linéaires invariants, le filtrage a connu un grand succès avec la théorie de KALMAN et BUCY [II-1.2] (1960) sur la représentation des systèmes linéaires stochastiques de même que les travaux de STRATONOVICH, KUSHNER, BUCY, JAZWINSKY [II-3] et autres [II-4.5.7] sur la théorie du filtrage appliquée aux systèmes non linéaires.

Les premières, mais fondamentales, applications ont été développées dans la navigation spatiale et plus tard dans les domaines de l'économie, télécommunications, etc ..

Les méthodes probabilistiques ou stochastiques n'ayant pas, à notre connaissance, été appliquées à l'estimation des paramètres des processus de fermentation, nous nous sommes proposé de le faire dans le cadre plus général des recherches d'application des théories récentes à des processus réels.

II.1. THEORIE DU F.N.L.

II.1.1. Modèle stochastique

Les méthodes stochastiques considèrent le vecteur des variables d'état (\underline{x}) comme un vecteur de variables aléatoires dont les propriétés sont définies à partir des propriétés statistiques du bruit de mesure ; les dérivées temporelles ($\frac{dx}{dt}$) sont des variables aléatoires, fonction de l'état, des variables de commande (\underline{u}) et des perturbations agissant sur le système (\underline{v}).

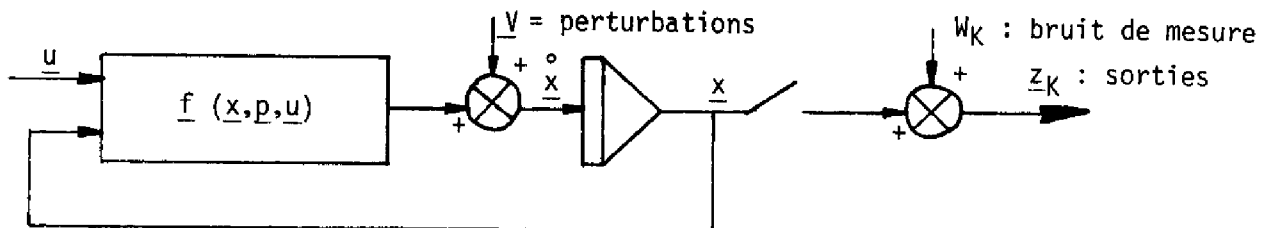


FIGURE 2.1. Représentation du modèle stochastique

Les équations du modèle stochastique de la fermentation sont décrits par :

$$(2.1.) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = f_1 (X, S, p, D) + V_1 (t) \\ \frac{dS}{dt} = f_2 (X, S, p, D, F) + V_2 (t) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{f} (\underline{x}, \underline{u}, \underline{p}) + \underline{V} (t) \end{cases}$$

$$(2.2.) \quad \begin{cases} z_1 (t_k) = X (t_k) + W_1 (t_k) \\ z_2 (t_k) = S (t_k) + W_2 (t_k) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \underline{z} (t_k) = \underline{x} (t_k) + \underline{W} (t_k)$$

(2.1) correspond aux équations dynamiques du système, $v_1(t)$ et $v_2(t)$ sont des variables aléatoires qui perturbent le processus ; f_1 et f_2 sont des fonctions non linéaires dont les expressions ont été établies au chapitre 1.

Les équations discrètes (2.2) sont les équations d'observation : nous avons considéré le cas où les variables de sortie z_1 et z_2 sont les variables d'état (X et S) auxquelles s'ajoute le bruit de mesure défini par w_1 et w_2 .

HYPOTHESES

Le problème de l'estimation paramétrique par filtrage non linéaire nécessite dans le cas général, les hypothèses suivantes :

. Le vecteur $\underline{v}(t)$ sera considéré comme un vecteur de variables aléatoires à distribution gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance T .

$$(2.3) \quad E \left[\underline{v}(t) \right] = \underline{0} \quad \text{et} \quad E \left[\underline{v}(t_i) \underline{v}^T(t_j) \right] = T \cdot \delta(t_i - t_j), \quad T \in \mathbb{R}^2$$

. Le vecteur $\begin{bmatrix} w_1 | k \\ w_2 | k \end{bmatrix}$ est une séquence blanche gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance R .

$$(2.4) \quad E \left[\underline{w} | k \right] = \underline{0} \quad \text{et} \quad E \left[\underline{w} | k \underline{w}^T | l \right] = R \cdot \delta_{lk}, \quad R \in \mathbb{R}^2$$

. Le vecteur $\hat{y} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{s} \\ \hat{p} \end{bmatrix}$ constitué par les variables d'état et les paramètres à estimer aura à l'instant initial une distribution gaussienne autour de l'estimateur initial de l'état et des paramètres, si nous appelons \hat{x}_0 et \hat{s}_0 les estimations à l'instant initial t_0 de l'état et \hat{p}_0 celles des paramètres, nous avons :

$$(2.5) \quad E \left[\underline{y}(t_0) \right] = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{s}_0 \\ \hat{p}_0 \end{bmatrix} = \hat{y}_0 \quad \text{et} \quad E \left[(\underline{y}(t_0) - \hat{y}_0) (\underline{y}(t_0) - \hat{y}_0)^T \right] = P_0$$

. Enfin les vecteurs $\underline{y}(t_0)$, $\underline{v}(t_j)$ et $\underline{w} \mid_I$ ne doivent pas être corrélés entre eux, quel que soit l'instant t_j .

2.1.2. Définition d'un critère d'estimation

Toutes les méthodes stochastiques recherchent le "meilleur" estimateur de l'état en connaissant la suite des mesures bruitées $\{\underline{z}(t_0), \underline{z}(t_1) \dots, \underline{z}(t_k), \dots\}$ au sens d'un critère d'optimalité choisi.

Même si notre but est l'estimation des paramètres du modèle, nous verrons plus tard que la méthode d'estimation par filtrage non linéaire nous conduit à l'estimation simultanée de l'état et des paramètres par une nouvelle formulation du problème, proposée par KOOP et ORFORD [II. - 6] (1963).

Dans le cas du filtrage non linéaire, le critère d'optimalité est la minimisation de l'erreur d'estimation quadratique moyenne.

$$\min E \left[((\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)) (\underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t))^T \right] \quad (2.6)$$

$\hat{\underline{x}}(t)$ est l'estimateur de l'état à l'instant t .

BUCY [II-2] démontre que l'estimateur optimal au sens de ce critère est donné par la moyenne conditionnelle, dans le cas des systèmes non linéaires stochastiques.

$$\underline{x}(t_k) = E \left[\underline{x}(t_k) \mid \underline{z}(t_0), \underline{z}(t_1), \dots, \underline{z}(t_k) \right] = E \left[\underline{x}(t_k) \mid 0_{t_k} \right] \quad (2.7)$$

0_{t_k} est la suite d'observations entre t_0 et t_k .

Cet estimateur est dit à minimum de variance : il est égal à l'espérance mathématique du vecteur d'état, compte tenu des mesures bruitées jusqu'à l'instant t_k .

Si, dans le cas des systèmes linéaires, la densité de probabilité $p(\underline{x}(t) | O_t)$ est gaussienne, compte tenu des hypothèses faites en (2.1.1), dans le cas des modèles non linéaires qui nous occupe, elle ne conserve pas ce caractère gaussien.

2.1.3. Filtrage non linéaire continu-discret

Le problème de la recherche de l'estimation optimal de la moyenne conditionnelle à l'instant t_k , à partir de la suite :

$$O_l = \{ \underline{z}(t_w), 0 \leq w \leq l \} \quad (2.8)$$

est un problème de lissage (ou d'interpolation) si $t_k < t_l$, de filtrage si $t_k = t_l$ et de prédiction (ou d'extrapolation) si $t_k > t_l$.

Si le problème de la prédiction est relié au calcul numérique en temps réel, de même que le problème du lissage au calcul en temps différé ou hors ligne, le problème du filtrage peut être associé, selon les moyens dont on dispose, aux deux types de calcul.

L'estimation des paramètres par FNL n'est pas, en général, une technique d'identification en ligne avec les minicalculateurs actuels et classiques. Les langages de programmation peu évolués (Assembleur dans le minicalcuteur PDP-8 couplé aux unités de fermentation) pour résoudre ces types de problèmes (calcul matriciel, intégrations, etc ...) et la capacité limitée nous ont conduit à une mise en oeuvre off-line de la méthode d'estimation par filtrage non linéaire continu-discret, sur calcuteur IBM 370-65.

Continu, parce que les équations de la dynamique du modèle sont continues et discret parce que les équations d'observation sont discrètes.

L'estimation simultanée de l'état et des paramètres, par cette méthode se fait si l'on considère que le vecteur \underline{p} est constant mais mal connu et que l'on peut donc décrire son évolution par :

$$\hat{\underline{p}} = \underline{0} + \underline{v}_p(t) \quad (2.9)$$

Le vecteur $v_p(t)$ représente le vecteur des perturbations des paramètres. Ainsi, le nouveau vecteur de perturbations $\underline{v}^T = [v_1 \ v_2 \ v_p]$ devra avoir une distribution gaussienne.

$$(2.10) \quad E[\underline{v}(t)] = \underline{0} \text{ et } E[\underline{v}(t_i) \underline{v}^T(t_j)] = Q \cdot \delta(t_i - t_j), \quad Q \in \mathbb{R}^{2+n}$$

n étant le nombre des paramètres.

Ce qui nous conduit à considérer le vecteur d'état augmenté :

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{p} \end{bmatrix}$$

d'où la nouvelle configuration des équations dynamiques.

$$\dot{\underline{y}} = \begin{bmatrix} \circ \\ \underline{X} \\ \circ \\ \underline{S} \\ \circ \\ \underline{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X, S, D, \underline{P}) \\ f_2(X, S, D, F, \underline{P}) \\ \underline{0} \end{bmatrix} \underline{y} + \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_p(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Formulation du problème de filtrage non linéaire continu-discret.

La connaissance de l'évolution temporelle de $p(\underline{x}(t) | \underline{0}_\tau)$ avec la suite d'observations $\underline{0}_\tau = \{z(t_m) \ t_m \in \tau\}$ est divisée en deux phases :

a) Détermination de la densité de probabilité conditionnelle $p(\underline{y}(t_z) | 0_k)$: elle satisfait l'équation de diffusion de FOKKER-PLANCK :

$$\frac{\partial P(\underline{y}(t_z) | 0_k)}{\partial t} = \mathcal{L} P(\underline{y}(t_z) | 0_k) \quad (2.12)$$

où $\mathcal{L}[\cdot]$ est l'opérateur défini par

$$\mathcal{L}[\cdot] = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f_i(\cdot))}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 (Q_{ij}[\cdot])}{\partial y_i \partial y_j} \quad (2.13)$$

La résolution de l'équation de FOKKER-PLANCK nous donnera la densité de probabilité du prédicteur à un pas : $p(\underline{y}(t_{k+1}) | 0_k)$ dont on aura besoin dans la seconde phase

b) Correction du prédicteur à un pas compte tenu de la dernière observation $\underline{z}(t_{k+1})$:

Il s'agit d'exprimer la loi de probabilité de $\underline{y}(t_{k+1})$ connaissant les mesures jusqu'à l'instant t_{k+1} :

$$0_{k+1} = \{ \underline{z}(t_M), t_M \leq t_{k+1} \}$$

Notons que la probabilité $p(\underline{y}(t_{k+1}) | 0_{k+1})$ peut s'écrire sous la forme : $p(\underline{y}(t_{k+1}) | 0_{k+1}) = p(\underline{y}(t_{k+1}) | 0_k, \underline{z}(t_{k+1}))$

Et, si on applique le théorème de BAYES à cette nouvelle expression, on obtient :

$$P(\underline{y}(t_{k+1}) | 0_k, \underline{z}(t_{k+1})) = \frac{P(\underline{y}(t_{k+1}), 0_k, \underline{z}(t_{k+1}))}{P(0_k, \underline{z}(t_{k+1}))}$$

$$= \frac{p(\underline{z}(t_{k+1}), 0_k) \cdot p(\underline{y}(t_{k+1}) | 0_k)}{P(\underline{z}(t_{k+1}) | 0_k)} \quad (2.14)$$

où le terme $p(\underline{y}(t_{k+1}) | 0_k)$ est le résultat obtenu dans la première phase et $p(\underline{z}(t_{k+1}), \underline{y}(t_{k+1}), 0_k)$ peut être déterminé à partir de l'équation d'observation (2.2) sachant que :

$$p(\underline{z}(t_{k+1}) | \underline{y}(t_{k+1}), 0_k) = p(\underline{z}(t_{k+1}) | \underline{y}(t_{k+1})) \quad (2.15)$$

Nous pouvons développer, le terme du dénominateur de (2.14) d'après la formulation de CHAPMAN-KOLMOGORON :

$$p(\underline{z}(t_{k+1}) | 0_k) = \int_{\underline{y}(t_k)}^{\underline{y}(t_{k+1})} p(\underline{z}(t_{k+1}) | \underline{y}(t_z)) \cdot p(\underline{y}(t_z) | 0_k) \cdot d\underline{y}(t_z)$$

$$t_k \leq z < t_{k+1} \quad (2.16)$$

où nous retrouvons des termes connus.

Une fois déterminée l'expression (2.14), on revient à la première phase et on calcule $p(\underline{y}(t_{k+2}) | 0_{k+1})$ et ainsi de suite.

APPROXIMATIONS.

Nous avons dit dans le paragraphe II.1.2., que ce n'est que dans le cas linéaire que la densité de probabilité conditionnelle $p(\underline{y}(t) | 0_t)$ est gaussienne, dans ce cas la connaissance est donnée

par l'évolution des deux premiers moments et inversement, la connaissance de l'évolution de l'estimateur optimal (ou moment d'ordre un) et de la variance de l'erreur d'estimation (ou moment centré d'ordre deux) détermine complètement la connaissance de $p(\underline{y}(t) | 0_t)$ (les équations du filtre linéaire ont été déterminés par KALMAN et BUCY [II.2.]).

Dans le cas non-linéaire, la détermination de la densité de probabilité conditionnelle nécessite la connaissance de tous les moments, en nombre infini. On ne pourra qu'approcher l'évolution de cette probabilité et les équations du filtrage non linéaire nous donnerons donc toujours un estimateur sous-optimal.

Parmi les méthodes d'approximation connues, nous avons choisi la méthode qui développe les équations de la dynamique du modèle non linéaires en série de TAYLOR autour de l'estimateur jusqu'au second ordre ; ainsi pour la fonction f_i , nous avons :

$$f_i(\underline{y}, \underline{u}) = f_i(\hat{\underline{y}}, \underline{u}) + \frac{\partial f_i(\hat{\underline{y}}, \underline{u})}{\partial \underline{y}^T} \cdot (\underline{y} - \hat{\underline{y}}) + \frac{1}{2} (\underline{y} - \hat{\underline{y}})^T \cdot \frac{\partial^2 f_i(\hat{\underline{y}}, \underline{u})}{\partial \underline{y}^T \partial \underline{y}} \cdot (\underline{y} - \hat{\underline{y}}) + \dots \quad (2.17)$$

ce qui nous conduit au filtrage non linéaire, dit tronqué au second ordre, où les moments supérieurs à deux seront négligés

a) les équations d'évolution des deux premiers moments ($\hat{\underline{y}}$ et P) deviennent dans la première phase :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{y}(t)}{dt} = \underline{f}(\hat{\underline{y}}(t), \underline{u}) + \frac{1}{2} \left\{ P : \frac{\partial^2 \underline{f}(\underline{y}(t), \underline{u})}{\partial \underline{y}^T \partial \underline{y}} \right\} \text{ avec } t_{k-1} \leq t < t_k \quad (2.18) \\ \frac{dP}{dt} = \left[\frac{\partial \underline{f}(\hat{\underline{y}}(t), \underline{u})}{\partial \underline{y}^T} \right] \cdot P + P \left[\frac{\partial \underline{f}(\underline{y}(t), \underline{u})}{\partial \underline{y}^T} \right]^T + Q \quad (2.19) \end{array} \right.$$

$$\text{où } \hat{y}(t) \hat{=} E \left[\underline{y}(t) \mid 0_{k-1} \right]$$

$$P \hat{=} E \left[(\underline{y}(t) - \hat{y}(t)) (\underline{y}(t) - \hat{y}(t))^T \mid 0_{k-1} \right]$$

$$\text{et } \left\{ P : \frac{\partial^2 f(y(t), u)}{\partial y^T \cdot \partial y} \right\} \hat{=} \left[\begin{array}{c} \text{trace} \left[\frac{\partial^2 f_1(\underline{y}(t), \underline{u})}{\partial y^T \cdot \partial y} \cdot (\underline{y} - \hat{y}) (\underline{y} - \hat{y})^T \right] \\ \text{trace} \left[\frac{\partial^2 f_2(\underline{y}(t), \underline{u})}{\partial y^T \cdot \partial y} \cdot (\underline{y} - \hat{y}) (\underline{y} - \hat{y})^T \right] \end{array} \right]$$

b) l'actualisation de l'évolution des moments se fait à une observation $z(t_k)$:

$$\hat{y}_{k|k} = E \left[\underline{y}(t_k) \mid 0_k \right] = \hat{y}_{k|k-1} + P_{k|k-1} \cdot H_k^T \cdot \left[W_k \right]^{-1} \cdot (z(t_k) - \hat{z}_{k|k-1}) \quad (2.20)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} \cdot H_k^T \cdot \left[W_k \right]^{-1} \cdot H_k \cdot P_{k|k-1} \quad (2.21)$$

$$\text{où } P_{k|L} \hat{=} E \left[(\underline{y}(t_k) - \hat{y}_k) (\underline{y}(t_k) - \hat{y}_k)^T \mid 0_L \right] \quad L \leq k$$

$$H_k \hat{=} \frac{\partial z(t_k)}{\partial \underline{y}}$$

$$\hat{z}_{k|k-1} \hat{=} H_k \cdot \hat{y}_{k|k-1}$$

$$\text{et } W_k \hat{=} H_k \cdot P_{k|k-1} \cdot H_k^T + R_k$$

Le schéma bloc de la figure (2.2) représente l'évolution de l'estimateur (moment d'ordre 1) à partir de l'instant t_k . Par le bloc de retour $k = k+1$ on montre bien le caractère récurrent des équations du filtre.

Le gain du processus d'innovation est défini par le produit matriciel $P_{k|k-1} \cdot H_k^T \left[W_k \right]^{-1}$. Si ce gain est grand, l'erreur entre les observations traitées et les sorties estimées sera

petite et vice-versa. Le bloc nommé intégration réalise l'intégrale de l'équation d'évolution (2.18).

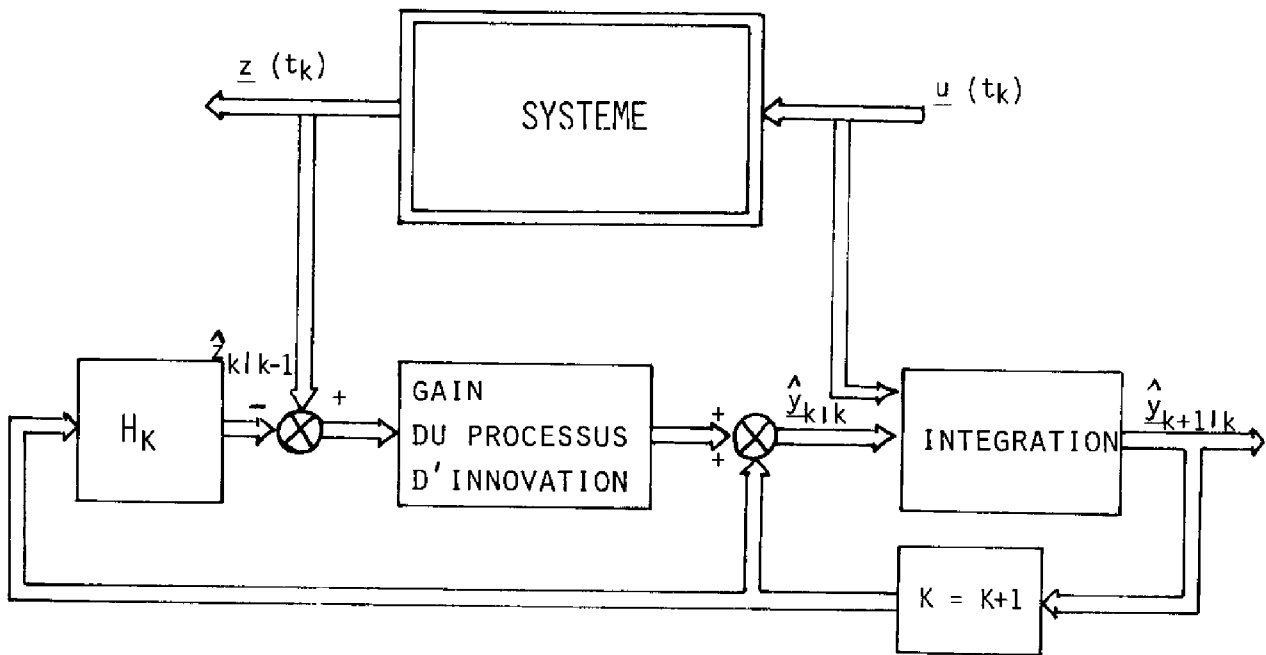


FIGURE 2.2. Représentation des équations du filtre sur l'estimateur $\underline{y}(t)$

Signification des matrices Q, R et P₀

La matrice de covariance du bruit de mesure R traduit le degré de confiance accordé aux observations du système : ainsi, il y a une très bonne précision des appareils de mesure (R faible), le gain du processus d'innovation augmente, ce qui donne un poids déterminant

aux observations dans l'estimation de l'état et des paramètres par rapport à l'initialisation. Pour les appareils de mesure qui ont une mauvaise précision (R fort), on constate une diminution du gain et par suite, les observations corrigent très légèrement les prédicteurs à un pas, définis en (2.18).

Dans ce cas, la détermination de l'estimateur initial \hat{y}_0 et de la matrice P_0 jouent un rôle prépondérant dans l'évolution de l'estimateur.

La matrice Q apparaît dans l'équation (2.19) qui définit l'évolution du moment d'ordre 2 entre deux instants de mesure. Cette matrice reflète les imprécisions d'adaptation du modèle choisi et aussi toute variation temporelle des paramètres, non prévue dans la dynamique des paramètres ($\dot{p} = 0$).

Une augmentation de Q occasionne à travers $P_{k+1|k}$ une augmentation du gain du processus d'innovation et par conséquent un poids plus fort de l'observateur. Et, si on considère $P_{k|k} = 0$, ce qui suppose une connaissance parfaite du vecteur $y(t_k)$, l'existence de Q fait écarter P de la valeur zéro provoquant une dégradation dans la connaissance de $y(t)$.

Finalement la matrice P_0 définira la vitesse de convergence du filtre de même que le vecteur initial \hat{y}_0 . Si l'erreur initiale $y_0 - \hat{y}_0$ est grande et/ou P_0 est grande, le gain du processus d'innovation sera fort et par suite l'estimation de $y(t)$ sera sensible aux observations.

Les hypothèses décrites dans II.1.1. de même que les valeurs numériques des matrices P_0 , Q et R doivent être analysées pour chaque processus en particulier.

Notons que la détermination de ces matrices est la principale difficulté du filtrage non linéaire ; plusieurs méthodes apparaissent dans des travaux de stochastique [II.8.] pour obtenir R, Q et P_0 , mais aucune méthode analytique n'a encore été trouvée.

La convergence de la méthode étudiée ne peut pas être démontrée par des moyens analytiques. Nous devons vérifier son existence sur chaque processus.

a) soit en constatant que la connaissance du vecteur $y(t)$ représenté par la matrice de covariance de l'erreur d'estimation P est sensiblement améliorée et en vérifiant que l'écart entre la mesure et l'estimation de la sortie $\hat{z}(t)$ est acceptable.

b) soit par simulation : on simule d'abord le processus par son modèle stochastique avec le vecteur p , puis on applique la méthode d'estimation par F.N.L. en calculant \hat{p} et on compare les paramètres estimés aux valeurs réelles (p).

c) soit en comparant avec les résultats obtenus par d'autres méthodes d'identification paramétrique.

2.2. APPLICATION AUX PROCESSUS DE FERMENTATION

2.2.1. Unité pilote de méthanol

Dans une première étape de notre étude, nous sommes partis des travaux de M. BOUDON sur la modélisation de cette unité de méthanol, en prenant comme expression du taux de croissance la loi d'ANDREWS.

Le modèle stochastique associé a pour expression :

$$\frac{dX}{dt} = \mu_M \frac{1}{1 + \frac{KS}{S} + \frac{S}{K_i}} - D \cdot X + V_1 \quad (2.22)$$

$$\frac{dS}{dt} = F - DS - \frac{\mu_M}{Y_C} \cdot \frac{1}{1 + \frac{KS}{S} + \frac{S}{K_i}} \cdot X - m_C \cdot X + V_2 \quad (2.23)$$

$$\frac{d\mu_M}{dt} = 0 + V_3 \quad (2.24)$$

$$\frac{dKS}{dt} = 0 + V_4 \quad (2.25)$$

$$\frac{d(1/K_i)}{dt} = 0 + V_5 \quad (2.26)$$

$$\frac{dY_C}{dt} = 0 + V_6 \quad (2.27)$$

$$\frac{dm_C}{dt} = 0 + V_7 \quad (2.28)$$

Rappelons que nos propres expériences menées par la suite ne nous ont pas permis de confirmer le caractère inhibiteur du méthanol à l'intérieur du domaine des concentrations considéré. La mise en oeuvre de la méthode a pu toutefois être conservée en considérant K_i infini à tout instant ($1/K_i = 0$)

$$V_5 = 0 \text{ et } E \left[\left(\frac{1}{K_i} - \hat{\frac{1}{K_i}} \right) \left(\frac{1}{K_i} - \hat{\frac{1}{K_i}} \right)^T \mid \theta_1 \right] = 0 \quad \forall 1 \quad (2.29)$$

ce qui équivaut à considérer la loi de MONOD comme un cas particulier de celle d'ANDREWS.

Discussion sur la nature des variables du modèle stochastique

A partir de l'étude réalisée sur le pilote de méthanol, nous allons débattre sur les hypothèses (2.1.1) permettant la résolution du problème de filtrage non linéaire.

Les mesures en ligne de la biomasse par turbidimétrie (z_1) et du substrat par le chromatographe-intégrateur (z_2) sont bruitées. La nature de ces bruits, nous n'avons pas pu la caractériser sur le plan stochastique (en particulier sont-ils gaussiens ou non ?). La représentation de la fermentation par un modèle et plus particulièrement des réactions de croissance par une relation simple du type MONOD, CONTONIS n'est pas toujours vérifiée, mais nous pouvons choisir le modèle mathématique le plus proche de la réalité et considérer les imprécisions de ce modèle comme des perturbations aléatoires où la nature de sa distribution est inconnue.

La condition de la probabilité gaussienne de $\underline{x}(t_0)$ n'est pas vérifiée ici, où l'état initial est toujours défini positif et il varie dans chaque fermentation pour de multiples raisons : étude d'une fermentation en discontinu à forte ou faible concentration initiale de méthanol, démarrage d'une fermentation avec une culture qui contient plus ou moins de bactéries, et en continu, étude à différentes concentrations de X et S.

Finalement le vecteur des paramètres $\underline{p}(t_0)$ peut être considéré comme une distribution autour de la moyenne d'un vecteur, dont les valeurs ont été définies par les expérimentations précédentes.

Nous constatons donc que la plupart des hypothèses, dans l'état actuel des connaissances, n'ont pas été vérifiées, ce qui montre le caractère approché du filtre et la nécessité d'étudier la convergence du filtre expérimentalement.

Evaluation des matrices P₀, Q et R.

Nous avons vu l'importance des matrices P₀, Q et R dans les équations du filtre et ci-dessus la difficulté de les définir. Nous nous proposons ici d'évaluer les variances diagonales de P₀, Q et R en considérant nuls les termes des covariances croisées. Pour simplifier l'écriture, nous noterons les moments d'ordre un et deux centrés de $y(t)$ par des indices indiquant l'ordre des équations du modèle stochastique : ainsi, par exemple, l'estimateur du substrat et la variance seront :

$$\hat{y}_2 = \hat{S} = E [S(t)]$$

$$\text{et } P(2,2) = E [(S(t) - \hat{S}) | (S(t) - \hat{S}^T)]$$

Evaluation de la matrice R

Les termes R (1,1) et R(2,2) sont les variances de bruits de mesure de opacité (X) et de l'intégrateur des pics du chromatographe (S). Dans le cas d'une distribution gaussienne, on peut les relier à une intervalle de confiance.

Lors d'un fonctionnement en chemostat (D constant) nous avons mesuré dans un intervalle de confiance à 90 %, les valeurs extrêmes en régime permanent de X et S. Soit par exemple [X_p X_m] l'intervalle de confiance sur la variable X, la valeur moyenne sera :

$$\bar{X} \approx \frac{X_p + X_m}{2} \quad (2.30)$$

Et, la variance de l'erreur de mesure, s'évaluera par :

$$R(1,1) \approx \left(\frac{x_p - x_m}{2} \right)^2 \quad (2.31)$$

Les valeurs obtenues pour les capteurs en ligne sont :

$$R(1,1) \approx 0,10$$

$$R(2,2) \approx 0,15$$

Evaluation de la matrice P_0 et du vecteur \hat{y}_0

Tout d'abord, nous prenons l'estimateur initial de l'état \hat{x}_0 égal aux sorties du processus z_0 .
D'après l'évolution possible de la souche bactérienne sur méthanol, les paramètres du modèle à estimer peuvent varier grossièrement entre :

$$\begin{aligned} 0.2 &< \mu_{MAX} < 0.6 \\ 3 &< K_S < 4 \\ 0.2 &< Y_C < 0.6 \\ 0. &< m_C < 0.2 \end{aligned}$$

Le vecteur \underline{p}_0 et les termes correspondants de la matrice P_0 peuvent être définis en première approximation par :

$$\begin{aligned} \hat{y}_{3_0} &= 0.4 & \text{et} & & P(3,3)_0 &= 0.04 \\ \hat{y}_{4_0} &= 3.5 & \text{et} & & P(4,4)_0 &= 0.25 \\ \hat{y}_{6_0} &= 0.4 & \text{et} & & P(6,6)_0 &= 0.04 \\ \hat{y}_{7_0} &= 0.1 & \text{et} & & P(7,7)_0 &= 0.01 \end{aligned}$$

Nous aurons un ordre de grandeur de $P(1,1)_0$ et $P(2,2)_0$ à partir des simulations numériques.

Evaluation de Q

Cette matrice est la plus délicate à évaluer de par sa définition même. Nous pouvons annuler les termes diagonaux correspondant aux paramètres si les perturbations sur la dynamique des paramètres est négligeable (c'est-à-dire on suppose les paramètres constants). Les termes $Q(1,1)$ et $Q(2,2)$ devront être définis dans chaque application. Nous avons trouvé de bons résultats du filtre pour des valeurs comprises entre 0,01 et 0,001.

SIMULATION NUMERIQUE

Dans le but de mieux définir la matrice P_0 du filtre et de démontrer expérimentalement la validité et la convergence de la méthode, nous avons simulé le processus de la fermentation comme étant parfaitement représenté par le modèle ($Q = 0$), les variables des sorties sont X et S auxquelles on a ajouté un bruit pseudo-aléatoire ($R \neq 0$).

Le taux de croissance a été simulé par la loi d'ANDREWS, avec les paramètres : $\mu_M = 0,7$; $K_S = 0,2$; $K_i = 5$; $Y_C = 0,5$; $m_C = 0$. Le bruit pseudoaléatoire a été réalisé par un sous programme numérique de la bibliothèque du LAAS ; il a une distribution gaussienne à moyenne nulle et de variance égale à 0,05, ce qui a produit dans l'essai réalisé une erreur de mesure supérieure à 10 % pour la biomasse et à 5 % pour le substrat.

La méthode d'estimation par F.N.L. que nous avons alors testée nous a donné des résultats satisfaisants (fig.2.3) sur les paramètres μ_M , K_S et Y_C , en supposant connus m_C et K_i . L'expérience simulée consistant en un fonctionnement en discontinu à partir des conditions initiales $X_0 = 0,1 \text{ g/l}$ et $S_0 = 2 \text{ g/l}$. Les valeurs atteintes sont

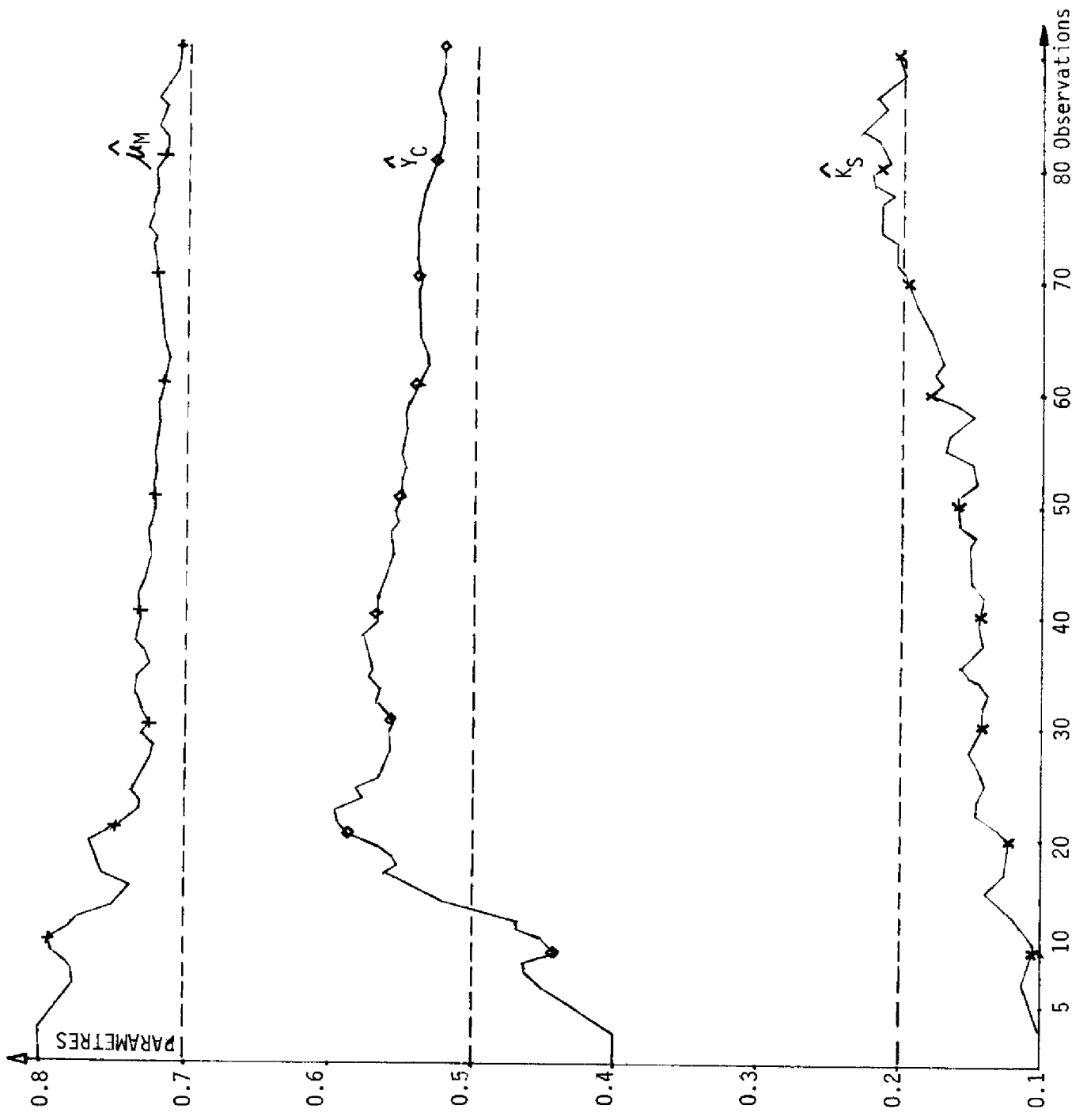


FIGURE 2.3. Evolution et convergence des paramètres estimés par filtrage non linéaire.

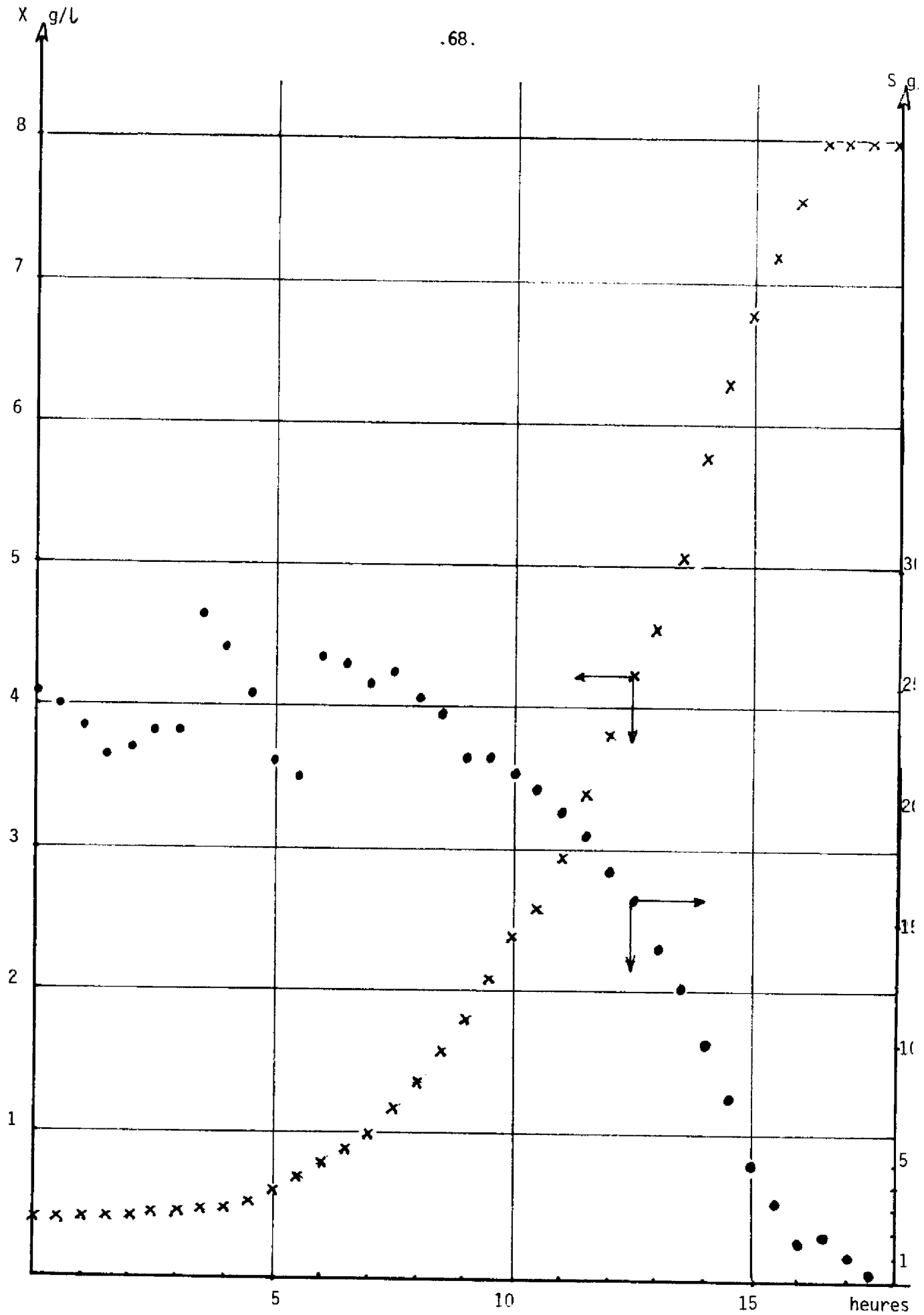


FIGURE 2.4. Evolution de l'état de E_3

Le paramètre K_S n'a pas pu être estimé à cause du petit nombre d'observations. On rappelle que dans la simulation numérique, ce paramètre ne converge qu'après 70 à 80 observations. Donc K_S a dû être fixé, dans le filtre, à la valeur obtenue par méthodes graphiques afin de comparer les valeurs des autres paramètres.

La convergence des paramètres estimés (fig. 2.5 et 2.6) à partir des valeurs initiales différentes est très satisfaisante et concorde toujours bien avec les résultats obtenus par la méthode graphique.

	FILTRAGE NON LINEAIRE	METHODE GRAPHIQUE
μ_M	0.3	0.33
K_S	4	4
Y_C	0.3 ± 0.015	0.25
m_C	0.05 ± 0.01	≈ 0

2.1. TABLEAU DES PARAMETRES

Fermentation en discontinu E4

Cette manipulation offre aussi un nombre d'observations assez faible mais suffisant tout de même pour que l'estimation des paramètres (μ_M , Y_C et m_C) converge bien par F.N.L.

A partir de valeurs initiales quelconques de ces paramètres (pas trop éloignées de la valeur réelle de m_C) et en fixant K_S à la valeur donnée par la méthode graphique ($K_S = 4,6$) on obtient le tableau de résultats 2.2. qui représente les estimations de l'état

PARAMETRES
 $Y_C \cdot m_C$

.70.

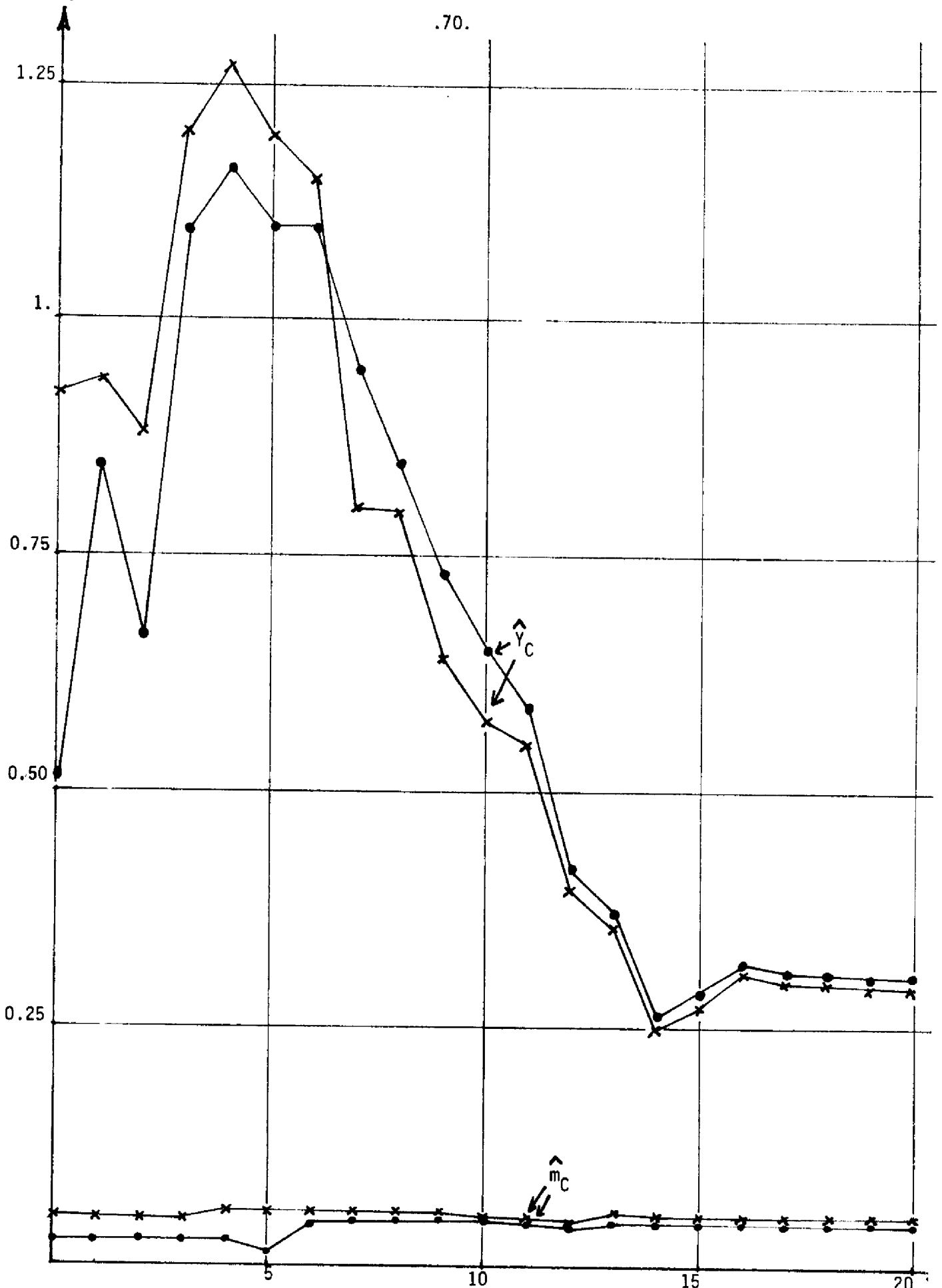


FIGURE 2.5. Estimation de Y_C et m_C par F.N.L. (E_3)

Observat

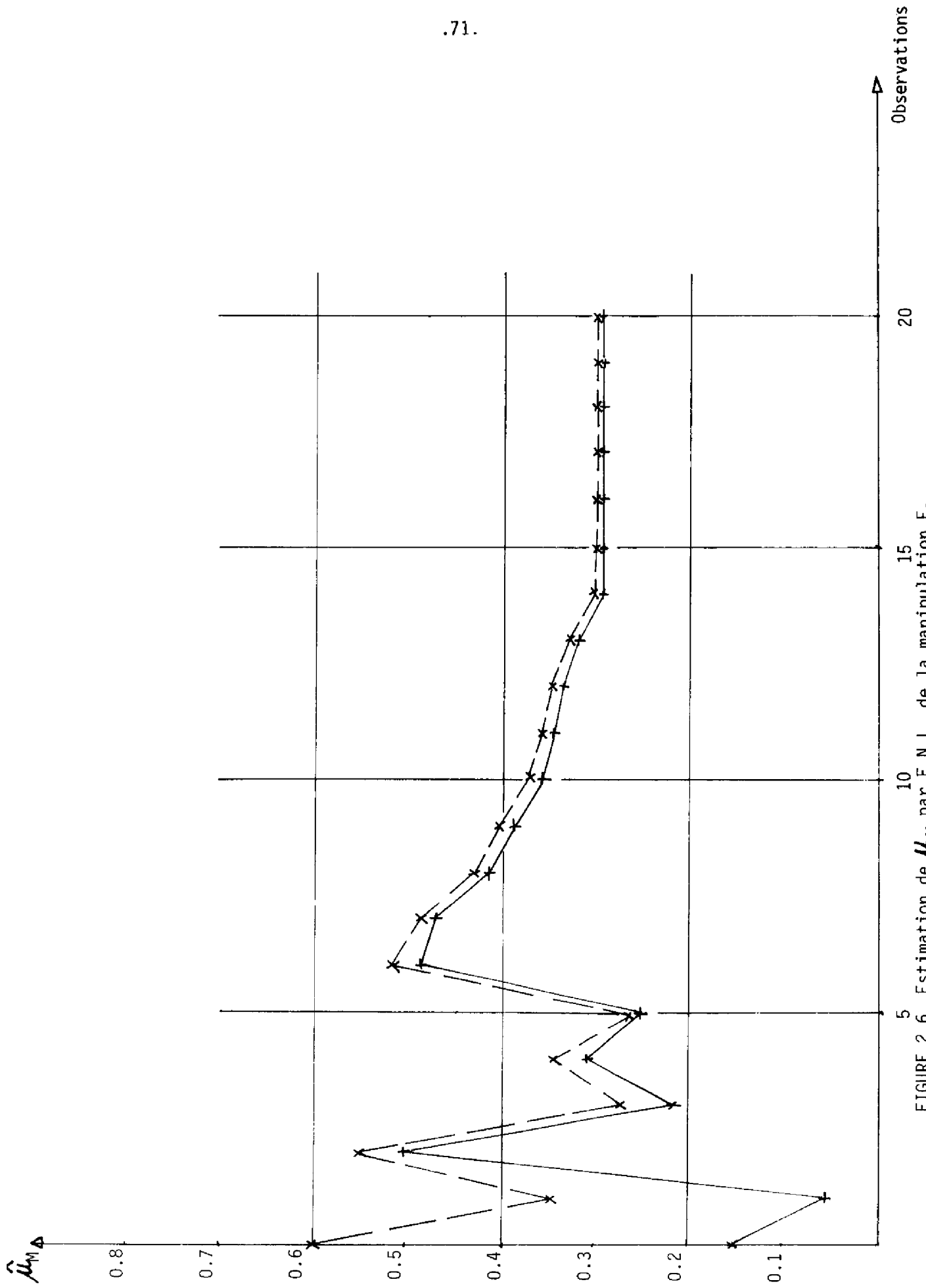


FIGURE 2.6. Estimation de μ_M par F.N.L. de la manipulation E_3

et des paramètres ainsi que les valeurs des variables de sortie bruitées en fonction du temps. Les valeurs ainsi obtenues, ne diffèrent que de très peu de celles trouvées précédemment.

La figure 2.7 représente l'évolution temporelle des termes diagonaux de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation P en coordonnées semi-logarithmiques. A partir de P_0 on note une bonne convergence malgré le nombre relativement faible des points expérimentaux.

2.2.2. Unité pilote sur n-alcanes

Cette étude rentre dans le cadre de la collaboration entre le LAAS et LGB (INSA) d'une part, et l'Institut Français de Pétrole d'autre part. Le LAAS étant chargé, entre autre, de l'identification paramétrique nous avons appliqué la méthode d'estimation par F.N.L. aux données obtenues sur le pilote à n-alcanes de l'I.F.P. à RUEIL.

Notre objectif principal était à élargir le domaine d'application de la méthode d'estimation que nous avons développée pour le méthanol à d'autres procédés de fermentation.

Le manque de fiabilité de l'appareillage en ligne a exigé de la part de D. RIBOT [II.10] un prétraitement des observations qui lui étaient communiquées.

Le procédé de fermentation en question, consiste en la production en continu des levures *candida-tropicalis* sur fermenteurs à double limitation de substrat (hydrocarbures (n-alcanes) et d'oxygène.)

MESURE X	ESTIME S	MESURE S	ESTIME	MUM	KS	1/KI	YC	MC	TEMPS
0.40000	0.40000	20.00000	20.00000	0.70000	4.60000	0.0	0.10000	0.05000	0.0
0.42000	0.38362	19.90000	19.86922	0.48968	4.60062	0.0	0.17988	0.04986	0.50000
0.45000	0.42476	19.80000	19.71221	0.29344	4.60088	0.0	0.16945	0.04958	1.00000
0.50000	0.46998	19.60000	19.55105	0.20120	4.60087	0.0	0.16396	0.04943	1.50000
0.55000	0.51535	19.40000	19.36955	0.17115	4.60081	0.0	0.16354	0.04932	2.00000
0.60000	0.56369	19.16000	19.14663	0.16717	4.60077	0.0	0.16554	0.04920	2.50000
0.67000	0.61935	18.90000	18.89175	0.16874	4.60073	0.0	0.16879	0.04900	3.00000
0.78000	0.69575	18.53000	18.55668	0.18308	4.60071	0.0	0.17553	0.04861	3.50000
0.90000	0.79265	18.08000	18.13927	0.20205	4.60062	0.0	0.18403	0.04801	4.00000
1.00000	0.90731	17.50000	17.61590	0.22506	4.60039	0.0	0.19239	0.04741	4.50000
1.20000	1.06215	16.80000	16.96482	0.25165	4.59964	0.0	0.20337	0.04636	5.00000
1.40000	1.26341	15.84000	16.11791	0.28486	4.59776	0.0	0.21518	0.04520	5.50000
1.70000	1.53132	14.70000	15.05570	0.32110	4.59368	0.0	0.22862	0.04361	6.00000
2.10000	1.88954	13.30000	13.73056	0.36041	4.58551	0.0	0.24414	0.04151	6.50000
2.50000	2.32315	11.70000	12.15080	0.39586	4.57214	0.0	0.25717	0.04004	7.00000
2.90000	2.80115	10.00000	10.37750	0.42062	4.55522	0.0	0.26486	0.04002	7.50000
3.40000	3.33979	8.00000	8.36978	0.44094	4.53110	0.0	0.27022	0.04145	8.00000
3.90000	3.89016	6.00000	6.26621	0.45233	4.50645	0.0	0.27243	0.04427	8.50000
4.35000	4.40077	4.00000	4.19747	0.45656	4.48274	0.0	0.27178	0.04905	9.00000
4.85000	4.86265	2.15000	2.34968	0.46097	4.45271	0.0	0.27348	0.05636	9.50000
5.30000	5.21854	0.69000	0.97590	0.46705	4.41145	0.0	0.27975	0.07138	10.00000
5.40000	5.36876	0.20000	0.26356	0.46788	4.40662	0.0	0.28146	0.07562	10.50000

TABLEAU 2.2. Estimation sur l'état et les paramètres (E4)

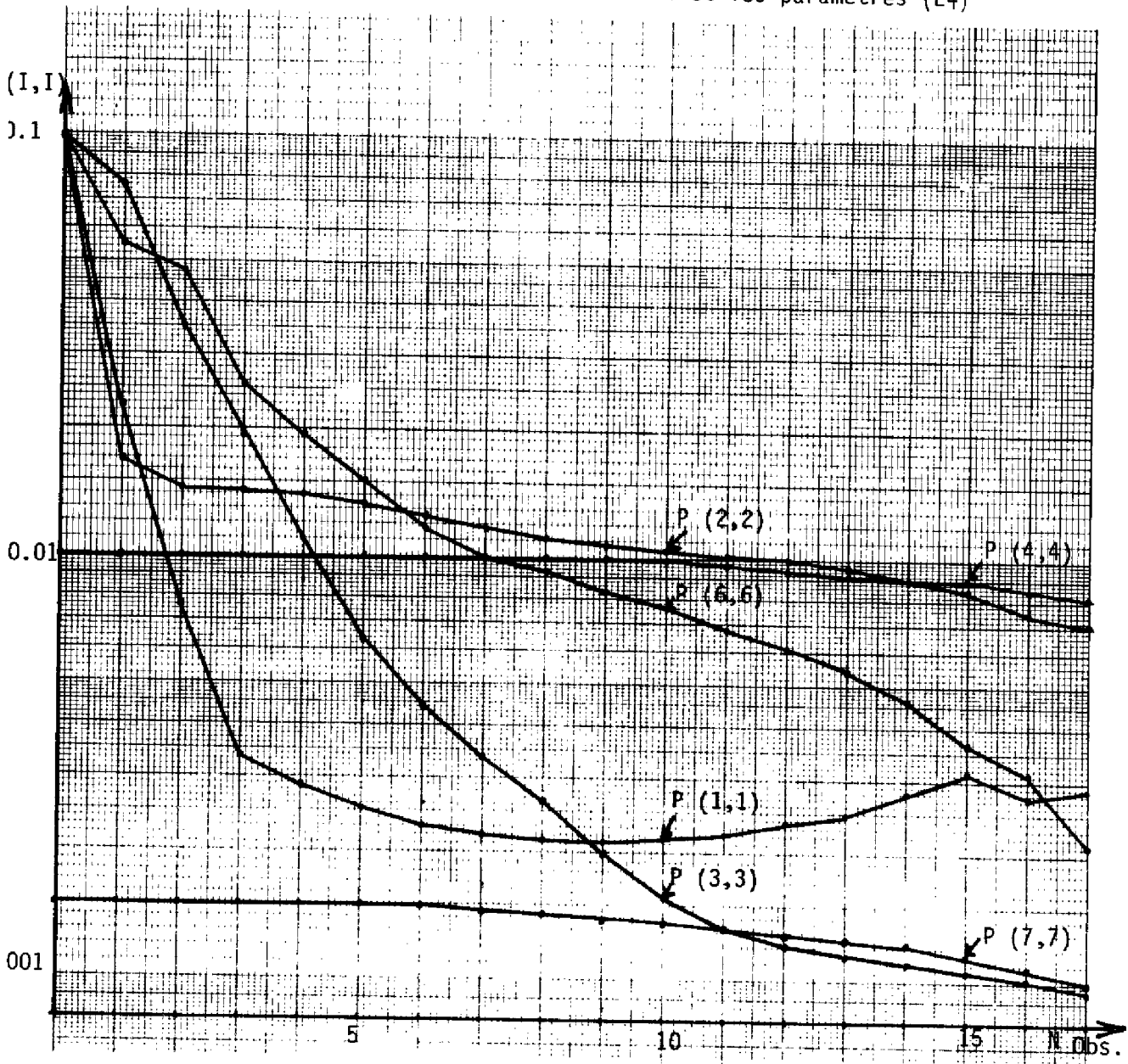


FIGURE 2.7. Evolution des termes diagonaux de la matrice P.

Le modèle mathématique de ce type de procédés est la résultante des bilans matières sur la biomasse (X), les hydrocarbures (S) et l'oxygène (r) dissous dans le milieu de fermentation :

$$\frac{dX}{dt} = (\mu - D) X \quad (2.32)$$

$$\frac{dS}{dt} = F - DS - \frac{\mu X}{Y_C} - m_C X \quad (2.33)$$

$$\frac{dr}{dt} = B (r_0 - r) - \frac{\mu X}{Y_O} \quad (2.34)$$

$$\mu = f(X, S, r, P) \quad (2.35)$$

où B est un coefficient d'aération et d'agitation de la culture

r_0 est la concentration à l'équilibre sans biomasse
et Y_0 est le rendement en biomasse par rapport à l'oxygène.

Remarquons que dans ce procédé, le taux de croissance est fonction de l'oxygène dissous, .

Les variables de sortie sont les variables d'état :

$$z_1 (t) = X(t) \quad (2.36)$$

$$z_2 (t) = S(t) \quad (2.37)$$

$$z_3 (t) = r(t) \quad (2.38)$$

Plusieurs modèles caractérisant le taux de croissance ont été proposés dans la littérature, entre autres :

$$\mu = \mu_{MAX} \frac{1}{\frac{K_S + 1}{S}} \cdot \frac{1}{\frac{K_r + 1}{r}} \quad (2.39) \text{ loi de MONOD-MONOD}$$

$$\mu = \mu_{MAX} \frac{1}{\frac{A X + 1}{S}} \cdot \frac{1}{\frac{K_r + 1}{r}} \quad (2.40) \text{ loi de CONTOIS-MONOD}$$

$$\mu = \mu_{\text{MAX}} \frac{1}{A \frac{X}{S} + 1} \cdot \frac{1}{B \frac{X}{r} + 1} \quad (2.41) \text{ loi de CONTOIS-CONTOIS}$$

Vu la rapide réponse de la concentration en oxygène dissous aux variables de commande dans les enregistrements dont nous disposons, nous avons dû abandonner l'estimation de la variable r ; d'autre part nous avons retenu la loi de CONTOIS-MONOD pour le taux de croissance.

Nous avons ainsi appliqué la méthode d'identification par FNL à l'estimation des paramètres du taux de croissance, Y_C et m_C , en modifiant tout simplement la loi du taux de croissance.

Le principe de l'estimation par F.N.L. qui consiste à considérer les paramètres comme partie intégrante de l'état du système, nous conduit alors au système d'équations :

$$\frac{dX}{dt} = \mu_M \cdot \frac{1}{A \frac{X}{S} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{K_r}{r} + 1} - D) X + V_1 \quad (2.42)$$

$$\frac{dS}{dt} = F - D \cdot S - \frac{\mu_M}{Y_C} \cdot \frac{1}{A \frac{X}{S} + 1} \cdot \frac{1}{\frac{K_r}{r} + 1} \cdot X - m_C \cdot X + V_2 \quad (2.43)$$

$$\frac{d\mu_M}{dt} = 0 + V_3 \quad (2.44)$$

$$\frac{dA}{dt} = 0 + V_4 \quad (2.45)$$

$$\frac{dK_r}{dt} = 0 + V_5 \quad (2.46)$$

$$\frac{dY_C}{dt} = 0 + V_6 \quad (2.47)$$

$$\frac{dm_C}{dt} = 0 + V_7 \quad (2.48)$$

$$z_1 = X + W_1 ; z_2 = S + W_2 \text{ et } z_3 = r + W_3 \quad (2.49 - 50 - 51)$$

Observons qu'à chaque échelon effectué sur une des variables d'entrée (correspondant à un essai), la variable r atteint une valeur dès les premiers instants (grande vitesse de réponse) et puis elle varie de façon négligeable en fonction des variations de μX (faibles). Voir à titre d'exemple, la dynamique des variables de sortie de l'essai n° 9 (fig.2.8).

Ainsi si on considère la concentration de l'oxygène dissous invariable dans un essai, on a :

$$r(t) \simeq \bar{r} : \text{constante}$$

$$\mu = \mu_M \frac{1}{A \frac{X}{S} + 1} \cdot \frac{r}{r + K} \simeq K \cdot \frac{1}{A \frac{X}{S} + 1} \quad (2.52)$$

$$\text{avec } K = \frac{\mu_M \cdot \bar{r}}{K + \bar{r}}$$

Il est impossible d'estimer séparément les paramètres μ_M et K_r . On pourrait théoriquement y parvenir si l'on disposait d'un nombre d'essais suffisant correspondant à des valeurs différentes de \bar{r} , toutes choses étant égales par ailleurs ; comme cela n'était pas le cas, nous avons fixé K_r à une valeur arbitraire et nous avons ainsi identifié μ_M pour

$$\hat{Y}_5 = \hat{K}_r \text{ et } P(5,5) = Q(5,5) = 0$$

Initialisation de P_{O_2} , Q et R

Les termes diagonaux de la matrice R ont pu être évalués à partir des enregistrements de X et S .

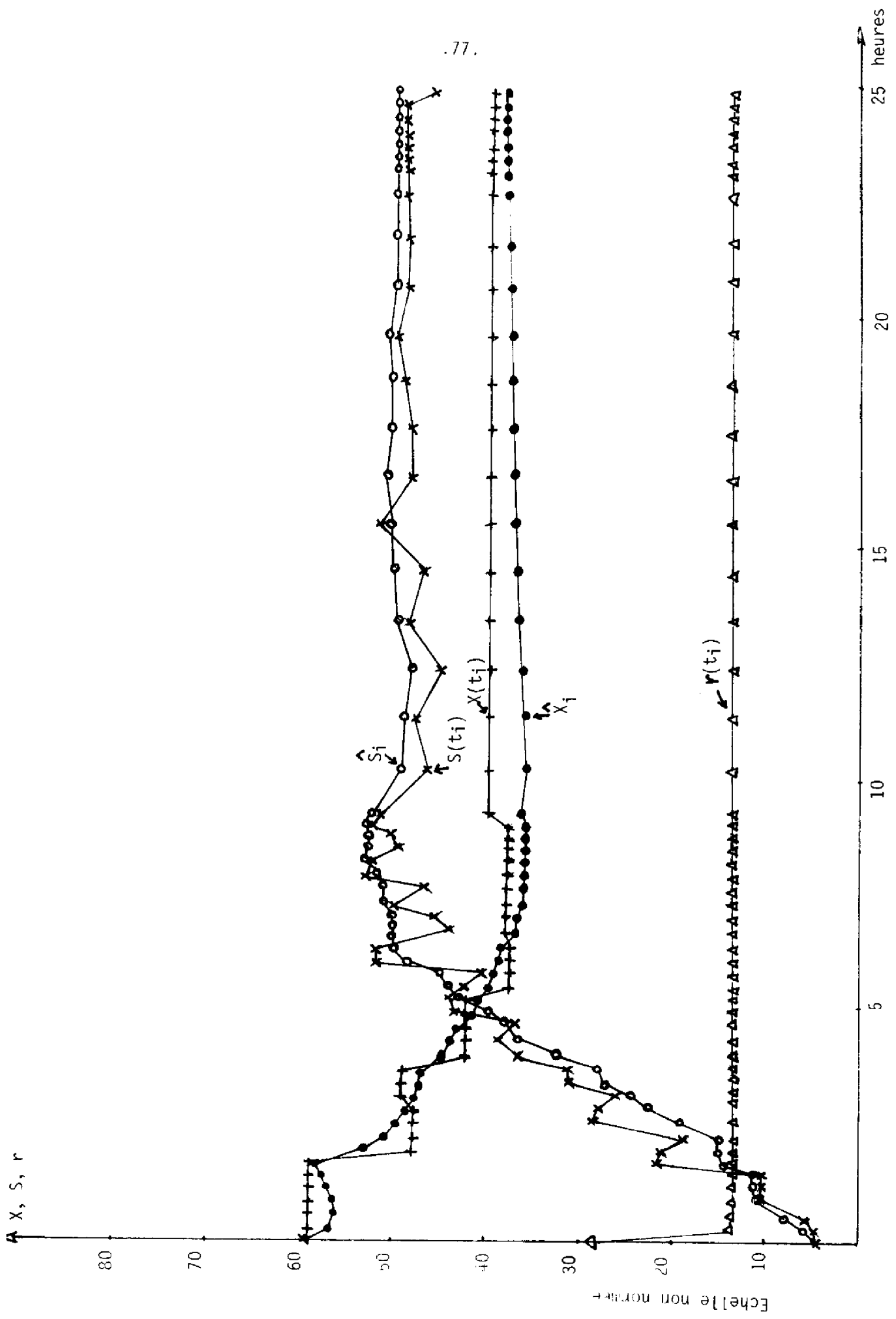


FIGURE 2.8. EVOLUTION DE L'ETAT EN FONCTION DU TEMPS

$$\begin{aligned} R(1,1) &\approx 0,15 \\ R(2,2) &\approx 0,10 \end{aligned}$$

Nous avons posé les termes $Q(I, I) = 0$ pour $I = 3$ à 7. $Q(1,1)$, et $Q(2,2)$ et la matrice P_0 ont été définis, après quelques essais de résolution numérique du filtre par :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.015 & & & & & & \\ & 0.015 & & & & & \\ & & 0.006 & & & & \\ & & & 0.0002 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0.005 & \\ & & & & & & 0.004 \end{bmatrix} \quad \text{et } Q = \begin{bmatrix} 0.01 & & & & & & \\ & 0.01 & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

Les figures 2.9 et 2.10 montrent l'évolution des paramètres : $\hat{\mu}_M$, \hat{A} , \hat{Y}_C et \hat{m}_C pour différentes valeurs initiales, estimés par F.N.L.

Des variations trop importantes sur les paramètres estimés au cours de plusieurs essais réalisés dans le fonctionnement en continu démontrent que le modèle retenu n'est pas valable. Cependant notre objectif étant de généraliser la méthode d'estimation par F.N.L. à d'autres procédés, nous sommes satisfaits de ce point de vue, des résultats obtenus sur ce pilote.

2.3. Programmation numérique de la méthode.

L'algorithme de programmation du filtre qui a été conçu en langage FORTRAN-IV, résout numériquement les équations différentielles du filtre non linéaire par la méthode d'intégration de

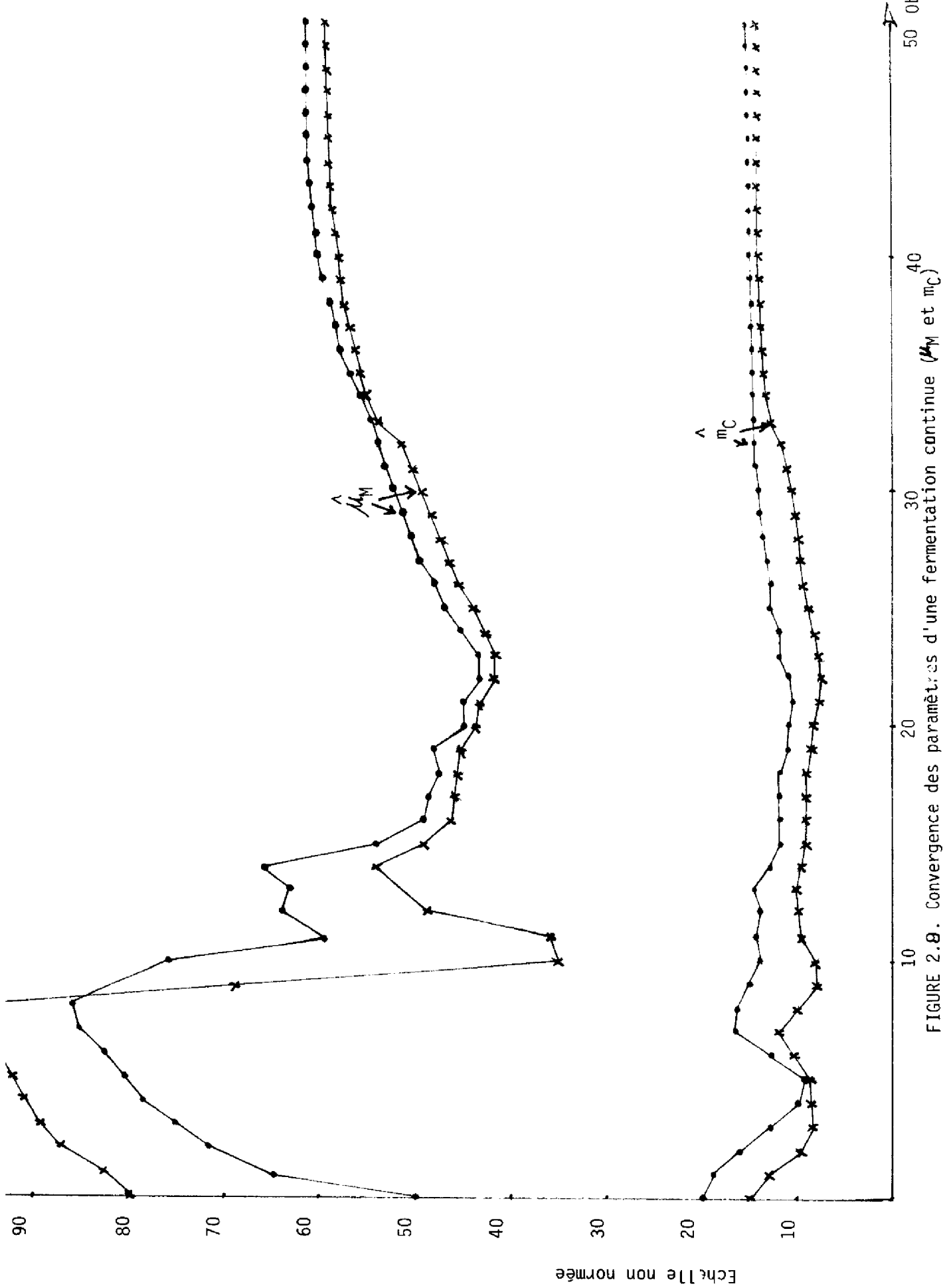


FIGURE 2.8. Convergence des paramètres d'une fermentation continue (μ_M et m_C)

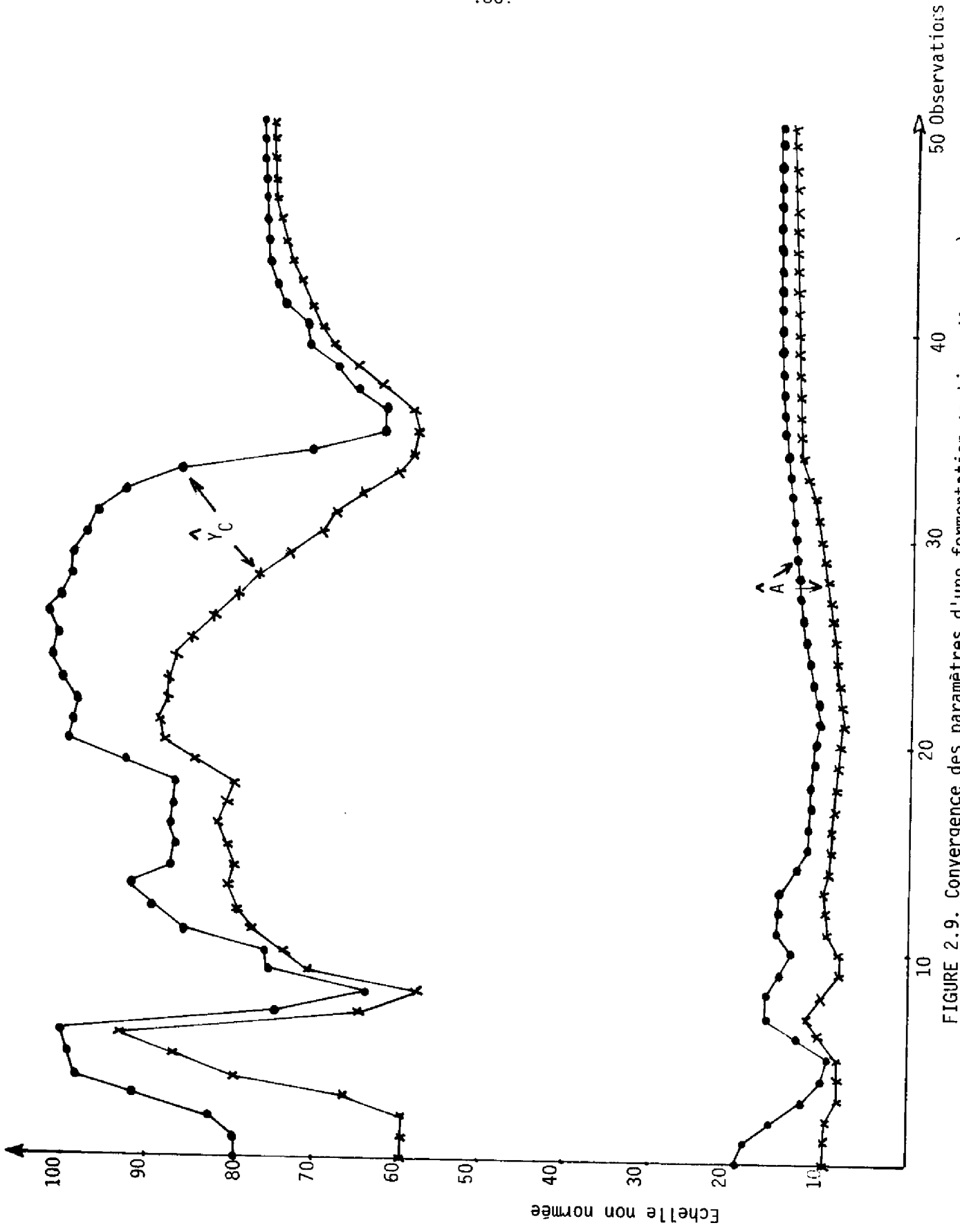


FIGURE 2.9. Convergence des paramètres d'une fermentation continue (A et Y_C)

RUNGE-KUTTA.4 dans le sous-programme appelé INTEGRA à partir de l'estimateur initial \hat{Y}_0 et des matrices P_0 et Q .

Un pas d'intégration de 0.05 heures nous a donné de bons résultats dans toutes les applications réalisées.

A chaque instant d'observation t_i , l'estimateur $\hat{Y}(t_i)$ et la matrice $P(t_i) = P_i$ sont recalés par les équations matricielles (2.20) et (2.21) dans le sous-programme RECAL et les valeurs ainsi obtenues sont renvoyées au sous-programme INTEGRA jusqu'à la dernière observation (voir organigramme 2.11).

Le sous-programme DERIV contient les expressions analytiques des dérivées première et seconde des équations dynamiques non linéaires et des équations d'observation. On assignera aux dérivées premières des équations dynamiques la variable à deux dimensions $D1F(I,J)$ ainsi la dérivée première de f_1 par rapport au substrat (S) sera $D1F(1,2)$. La variable $D1H(I,J)$ sera la dérivée première des équations d'observation, elle vaut dans notre cas :

$$\frac{\partial h}{\partial y^T} = D1H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \textcircled{11} & & & & \end{bmatrix}$$

Enfin, les variables $D2F1(I,J)$ et $D2F2(I,J)$ désigneront les dérivées seconde de f_1 et f_2 par rapport à la variable I et à la variable J .

Cet algorithme peut être appliqué à l'estimation des paramètres de tout procédé de fermentation soit en continu, soit en discontinu caractérisé par le taux de croissance à double limitation selon la loi de CONTOIS-MONOD (2.40) ou à un seul substrat décrit par la loi d'ANDREWS.

Il est bien entendu possible à partir des 2 cas ci-dessus de traiter en plus les modèles de MONOD et de CONTOIS seulement : MONOD comme cas particulier de ANDREWS ($K_i = \infty$), CONTOIS à partir de de CONTOIS-MONOD ($K_r=0$).

Pour passer de l'un des modèles à l'autre, il suffit d'utiliser la variable MOD définie ci-dessous :

- MOD = 0 correspondra au modèle de croissance de ANDREWS
- MOD = 1 correspondra au modèle de croissance de CONTOIS-MONOD

Cet algorithme a été conçu pour un maximum de 5 paramètres et 2 variables d'état à estimer. Le nombre de variables de sortie ne doit pas être supérieur à 3.

Ainsi, l'estimateur de l'état et des paramètres est défini pour chaque modèle comme suit :

Y (I, J)	MOD = 0	MOD = 1
Y (1, J)	$\hat{X}(t_j)$	$\hat{X}(t_j)$
Y (2, J)	$\hat{S}(t_j)$	$\hat{S}(t_j)$
Y (3, J)	$\hat{\mu}_M(t_j)$	$\hat{\mu}_M(t_j)$
Y (4, J)	$K_S(t_j)$	$A(t_j)$
Y (5, J)	$K_i(t_j)$	$K_r(t_j)$
Y (6, J)	$\hat{Y}_C(t_j)$	$\hat{Y}_C(t_j)$
Y (7, J)	$\hat{m}_C(t_j)$	$\hat{m}_C(t_j)$

TABLEAU 2.3. Définition du vecteur de l'estimateur.

Les termes diagonaux des matrices P_0 , Q et R doivent être définis au début du programme. Si nous récapitulons sur ce point, ce que l'expérience nous a appris, nous conseillerons aux utilisateurs de :

1) mettre les termes $Q (I,I)$ correspondant aux paramètres égaux à zéro.

2) placer dans la matrice R , des valeurs légèrement supérieures aux variances des bruits de mesure obtenues pour un intervalle de confiance de 90 % en régime permanent.

3) donner à $Q (1,1)$ et $Q (2,2)$ des valeurs comprises entre 0.01 et 0,001.

4) si le nombre d'observations est important (supérieur à 50), placer des valeurs relativement semblables à celles de la matrice P_0 retenue pour la simulation de l'unité de fermentation et, si le nombre est faible augmenter tous les termes.

5) et, finalement de tester la méthode et d'étudier la convergence des paramètres et de la matrice P .

Remarquons que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation est définie semi-positive, c'est-à-dire qu'elle ne doit avoir aucun terme négatif.

Remarquons aussi que le temps de calcul de l'algorithme est proportionnel à l'intervalle de temps auquel on applique la méthode, à période d'intégration constante, bien entendu. Ainsi, pour 0,05 heures de période, le temps de calcul d'un ordinateur IBM 370-65 est de 1 seconde par heure de fermentation. L'occupation

mémoire de cet algorithme est de 150 K octets (compilateur FORTRAN compris). Dans les applications réalisées, les variables d'entrée : D, F restaient constantes pendant le régime transitoire et nous n'avions qu'à définir les variables de sortie et le temps à chaque observation :

$$ZM (1, T) = X (t_j)$$

$$ZM (2, I) = S (t_j)$$

$$ZM (3, I) = r (t_j)$$

$$ZM (4, I) = t_j$$

Si dans une nouvelle application, les variables d'entrée varient au cours d'un essai, il suffit de remplacer dans l'algorithme la variable D, qui définit le taux de dilution par D(I) et F (taux d'alimentation) par F (I), I étant le temps à chaque observation et de les définir au début du programme.

Finalement, un calcul annexe est fait en fin de programme, où on détermine point par point la fonction d'autocorrélation de l'erreur d'estimation de la sortie $\underline{z} (t)$.

Dans le cas du filtrage linéaire, cette fonction doit être non corrélée.

$$E \left[(\underline{z} (t_k) - \hat{\underline{z}}_k) (\underline{z} (t_j) - \hat{\underline{z}}_j)^T \right] = S \delta_{kj} \quad (2.53)$$

Si, dans le cas du filtrage non linéaire tronqué au second ordre, cette propriété ne peut pas être démontrée l'examen de la fonction d'autocorrélation peut nous donner cependant un bon état de concordance entre les sorties estimées et mesurées.

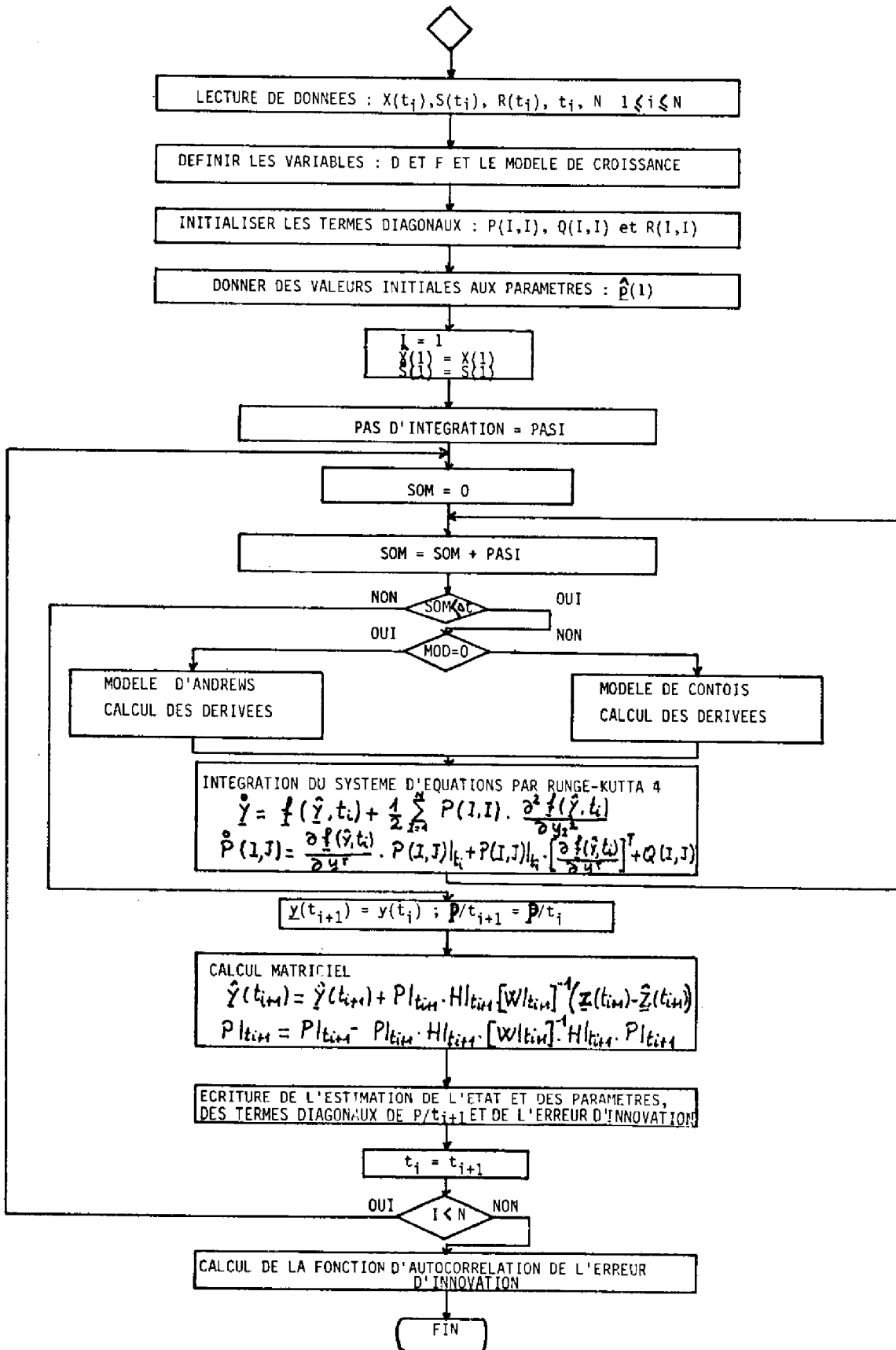


FIGURE 2.11. Organigramme de l'algorithme du F.N.L.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons étudié et mis en oeuvre une méthode stochastique d'estimation simultanée de l'état et des paramètres du modèle de la fermentation.

Nous avons démontré en simulation la validité de la méthode et étudié sa vitesse de convergence .

Nous l'avons alors appliquée à la détermination des paramètres de notre pilote de méthanol puis d'un pilote sur n-aleanes.

---o0o---

BIBLIOGRAPHIE DU 2ème CHAPITRE.

- II.1 KALMAN R.E. (1960) - "A new approach to linear filtering and prediction problems".
Trans. ASME - Vol. 82 D.
- II.2 KALMAN R.E. et BUCY R.S. (1961) - "New results in linear filtering and prediction".
Trans. ASME - Vol. 83 D.
- II.3 JAZWINSKY A.H. (1970) - "Stochastic processes and filtering theory" Academic Press.
- II.4 CONTINENTE G. (1974) - "Identification et régulation adaptative d'un processus industriel de polymérisation"
Thèse de docteur-ingénieur, LAAS. Toulouse.
- II.5 CASTELL CASTAN B. (1974) - "Estimation des paramètres de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles par décomposition fonctionnelle et filtrage non linéaire".
Thèse de docteur-ingénieur. LAAS - Toulouse.
- II.6 KOOP R.E. et ORFORD R.J. (1963) - "Linear regression applied to system identification for adaptative control systems"
AIAA Journal. pages 2300.2306.
- II.7 ALENGRIN G (1974) - "La théorie du filtrage non linéaire et ses applications du traitement du signal et à l'identification en Automatique".
Thèse de docteur ès Sciences Physiques LAAS, Toulouse III.

- II.8 LEGRAND W. (1973) - "Analyse des problèmes de modélisation et de sensibilité en filtrage linéaire. Applications à l'étude des problèmes de poursuite par radar".
Thèse de docteur-ingénieur, GESSY, Toulouse.
- II.9 SEVELY Y, BOUDON J., QUEVEDO J. (1975) - "Modélisation, identification, optimisation et conduite numérique d'une unité de fermentation continue".
3er Congreso de Informatica y Automatica, Madrid.
- II.10 RIBOT D. - "Etude et réalisation d'un programme conversationnel d'identification des paramètres d'une fermentation à double limitation".
Note interne du LAAS. Toulouse.

CHAPITRE III

COMMANDE OPTIMALE

INTRODUCTION

Nous avons déjà indiqué, dans l'introduction générale le sens qu'il faut donner, dans notre travail, au terme d'optimisation : il s'agit pour l'automation d'agir sur un nombre de variables, aussi réduit que possible, dites variables de commande afin d'extrémaliser un critère malgré les perturbations, les autres variables d'entrée étant "simplement" régulées autour de valeurs déterminées en laboratoires, sinon une fois pour toutes du moins pour un laps de temps assez long.

C'est ainsi qu'en ce qui nous concerne pour une fermentation continue, les variables de commande sont le taux de dilution et d'alimentation, les variables régulées étant la température, le PH, la vitesse d'agitation, l'aération, la composition du milieu minéral, etc ...

Pour des raisons de simplicité de mise en oeuvre et parce que justifiée sur le plan économique nous avons retenu la technique de l'optimisation statique. Nous lui avons associé une technique de commande par retour d'état pour accélérer les transitoires vers les nouveaux états d'équilibre lorsque les perturbations en ont modifié la position.

L'une et l'autre de ces techniques s'appuient sur la connaissance du modèle mathématique ce qui justifie les études des chapitres précédents sur la modélisation et l'estimation des paramètres.

III.1. OPTIMISATION STATIQUE

Nous décrirons tout d'abord quelques critères de type technique et/ou économique qui se sont dégagés de discussions que nous avons eues à ce sujet avec des industriels, puis nous verrons que la position du problème d'optimisation statique sous forme mathématique exclue dans le cas général tout essai de solution analytique et finalement nous étudierons une méthode de recherche minimale à deux variables (méthode SPHERA [III-5] basée sur l'utilisation de la série de Fibonacci) mise en oeuvre au LAAS par X. RUIZ [III.6] et adaptée par nous-mêmes au problème de l'optimisation statique de l'unité de fermentation sur méthanol pour différentes valeurs des paramètres du modèle mathématique.

III.1.1. Critères d'optimisation

Sans faire une étude exhaustive des critères possibles, nous allons en citer quelques uns, déjà présentés dans [III-10] :

1) maximiser la productivité P définie par :

$$P = D.X \text{ gl}^{-1}\text{h}^{-1} \quad (3.1)$$

qui exprime la quantité de biomasse produite par litre du fermenteur utile et par unité de temps.

2) maximiser le rendement global R :

$$R = \frac{DX}{F - DS} \quad (3.2)$$

R définit le rapport de la biomasse produite au substrat consommé.

3) Le rendement W , dit apparent, est certainement plus significatif du point de vue économique dans la mesure où la quantité de substrat $D.S$ est irrécupérable. L'objectif est alors de maximiser :

$$W = \frac{DX}{F} \quad (3.3)$$

4) Si la maximalisation simultanée de la productivité et du rendement est incompatible, on peut combiner les deux objectifs en les pondérant et maximiser :

$$J = a DX + b \frac{DX}{F} \quad (3.4)$$

5) ou encore minimiser :

$$J = \alpha + \beta \cdot \frac{1}{DX} + \gamma \cdot \frac{F}{DX} \quad (3.5)$$

Le terme α qui n'intervient d'ailleurs pas dans l'optimisation, représente les frais, considérés comme fixes, de l'installation.

6) La concentration en substrat résiduel est un facteur important, en particulier au niveau de la séparation des divers constituants de la fermentation. L'on peut en tenir compte dans le critère en supposant par exemple une relation linéaire entre la concentration résiduelle et le coût de l'extraction de la biomasse. On dit alors minimiser :

$$J = \alpha + \beta \cdot \frac{1}{DX} + \gamma \cdot \frac{F}{DX} + \delta \cdot S \quad (3.6)$$

La méthodologie nous important seule ici, nous travaillerons par la suite sur ces critères sans nous occuper des valeurs réelles des coefficients. Remarquons que l'optimisation des fermenteurs par modèle mathématique a été très peu développée jusqu'à présent dans la littérature. [III-1.2.3.4 et 12]

III.1.2. Position du problème. Hypothèses.

L'extrémalisation des critères proposés ne sera acquise que par action des variables de commande définies plus haut : D et F. Comme nous l'avons signalé, nous excluons donc toute optimisation basée sur le choix de la souche de fermentation, des dimensions du réacteur, de la composition du milieu minéral, de la température, du pH ou de la concentration d'oxygène dissous (que nous considérons en excès dans notre modèle).

Soit à optimiser un critère défini par :

$$J = h(X, S, D, F) \quad (3.7)$$

sous les contraintes égalités définies par le modèle en régime permanent :

$$\mu(X, S) - D = 0 \quad (3.8)$$

$$F - DS - \frac{\mu X}{Y_C} - m_C \cdot X = 0 \quad (3.9)$$

et sous contraintes inégalités concernant les variables d'action : ainsi, le taux de dilution ne devra pas être supérieur au taux de croissance maximum, sinon le temps de séjour des bactéries dans le fermenteur serait insuffisant pour la croissance et X tendrait vers zéro (WASH-OUT).

De plus dans le cas général nous pouvons considérer qu'il existe une limite physique au taux d'alimentation (F_{\max}).

D'où les contraintes :

$$0 < D \leq \mu_{\max} \quad (3.10)$$

$$0 < F \leq F_{\max} \quad (3.11)$$

une dernière classe des contraintes, peut apparaître sur les variables d'état de la fermentation en continu ; ainsi par exemple on peut exiger que la concentration en substrat soit inférieure ou égale à une concentration limite pour que soit possible les séparations des produits de la fermentation, d'où :

$$0 < S \leq S_{\text{limite}} \quad (3.12)$$

Simplifications et Hypothèses

L'équation (3.9) nous montre pour un vecteur de commande $\underline{u} = \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix}$ constant, une relation linéaire entre X et S , ainsi :

$$X = \frac{F - D \cdot S}{\frac{D}{Y_C} + m_C} \quad (3.13)$$

si on remplace dans (3.8), la concentration en biomasse par cette dernière expression, on a $D = \mu(D, F, S)$; dans la plupart des cas, du moins dans tous les cas que nous avons étudiés, la variable d'état S peut être explicitée analytiquement en fonction du vecteur de commande et des paramètres.

$$S = g(D, F) \quad (3.14)$$

Ainsi, pour la loi de MONOD :

$$S = \frac{K_S \cdot D}{\mu_M - D} \quad (3.15)$$

pour celle de CONTOIS :

$$S = \frac{A \cdot D \cdot X}{\mu_M - D} = \frac{A \cdot D \cdot (F - D \cdot S)}{(\mu_M - D) \left(\frac{D}{Y_C} + m_C \right)} ;$$

d'où

$$S = \frac{A \cdot D \cdot F}{(\mu_M - D) \left(\frac{D}{Y_C} + m_C \right) + AD^2} \quad (3.16)$$

et, pour celle d'ANDREWS :

$$S = \frac{K_i}{2} \left(\left(\frac{\mu_M}{D} - 1 \right) - \sqrt{\left(\frac{\mu_M}{D} - 1 \right)^2 - 4 \frac{K_S}{K_i}} \right) \quad (3.17)$$

Remarquons que les lois de croissance à double limitation exposées dans le second chapitre conduisent aussi à une expression explicite de la variable S en fonction du vecteur de commande.

Si maintenant, on remplace les expressions obtenues pour X et S dans le critère, nous aurons le problème :

soit à optimiser par action sur D et F le critère :

$$J = h'(D, F) \quad (3.18)$$

sous les contraintes inégalité :

$$0 < D \leq \mu_{MAX} \quad (3.19)$$

$$0 < F \leq F_{MAX} \quad (3.20)$$

Le problème de l'optimisation statique d'une unité de fermentation est ramené à la recherche mathématique à 2 dimensions de l'optimum du critère dans le domaine défini par les contraintes. A ces contraintes sur la commande il convient d'ailleurs, comme nous l'avons déjà expliqué, d'ajouter celle sur l'état :

$$0 < S \leq S_{\text{lim}} \quad (3.21)$$

qui sera étudiée séparément.

Hypothèse

Nous supposerons que dans le domaine à deux dimensions défini par (3.19) et (3.20) le critère possède un et seulement un optimum. Cette hypothèse, très restrictive sur le plan théorique, ne l'est pas en pratique pour nous car, pour tous les types de critères exposés (III.1.1) cette condition est vérifiée.

III.1.3. Méthode de Recherche de l'Optimum

Les méthodes de recherche de l'extrémum d'une fonction d'une ou plusieurs variables relèvent de deux grandes catégories : méthodes heuristiques et méthodes analytiques.

Par méthodes heuristiques on entend celles qui ne font appel qu'à la seule connaissance du critère - et non pas à ses dérivées - leur principe est simple : explorer l'espace des variables par essais successifs, la recherche à chaque pas étant orientée par les résultats des essais précédents.

Par méthodes analytiques on entend celles qui font appel à la fonction objectif et à ses dérivées - au moins celles du premier ordre, rarement au-delà du deuxième ordre.

Dans une première phase nous avons étudié, pour un critère productivité, la méthode analytique de FLETCHER et POWELL [III-7] qui nécessite la connaissance de la dérivée première du critère par rapport aux variables de commande. Acceptable pour un critère aussi simple, cette méthode s'est révélée inapplicable en pratique avec des critères plus compliqués et avec l'introduction de multiples contraintes sur la commande et sur l'état. Nous avons alors étudié l'application de la méthode SPHERA [III-6] qui présente de nombreux avantages pour la résolution de notre problème.

La méthode SPHERA à deux dimensions consiste :

- 1) à la recherche sur une circonférence de rayon donné R de la direction locale de l'optimum,
- 2) puis à la recherche de l'optimum existant dans cette direction sur un segment de longueur déterminée.

Ces deux phases font appel à la méthode classique dite de la suite de FIBONACCI à une dimension et sont reprises successivement à chaque pas de recherche.

Soit, dans un repère orthogonal, A de coordonnées (D_j, F_j) le point initial de la recherche. Un point P de la circonférence de centre A et de rayon R a pour coordonnées

$$D = D_j + R \cdot \cos \theta \quad (3.22)$$

$$F = F_j + R \cdot \sin \theta \quad (3.23)$$

Il suffit de déterminer l'angle θ_{opt} dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ tel que D et F qui en résultent correspondent à la valeur minimale du critère sur la circonférence.

Une fois défini θ_{opt} , on cherche dans la direction de cet angle le meilleur point par la même méthode, soit B ce point. On recommence ces deux procédures à partir de B jusqu'à ce que la valeur optimale du critère sur la circonférence soit supérieure à celle du centre (dans ce cas, on peut diminuer le rayon R et continuer la recherche).

Analyse de la méthode

Cette méthode :

- 1) ne suppose, comme toutes les méthodes de recherche heuristique aucune connaissance analytique dans le sens indiqué du critère h' (D, F).
- 2) converge très rapidement vers l'optimum
- 3) permet de rechercher le minimum du critère (on peut toujours se ramener à un minimum) dans le domaine défini par les contraintes. Cette recherche est notre contribution au programme SPHERA existant. Les contraintes (3.19) et (3.20) nous permettent de calculer à partir du point (D_i, F_i) l'intervalle L, limité par A et la contrainte rencontrée dans la direction θ_{opt} , sur lequel va porter la recherche (cf. sur la figure 3.1 les intervalles L_1 et L_2).
- 4) la programmation de la méthode est très simple et surtout l'occupation mémoire est minime ce qui rend possible son implantation sur mini ou microcalculateur.
- 5) une procédure de sécurité est disponible dans le cas où l'on se trouve dans une vallée en recherchant le véritable minimum de la fonction.

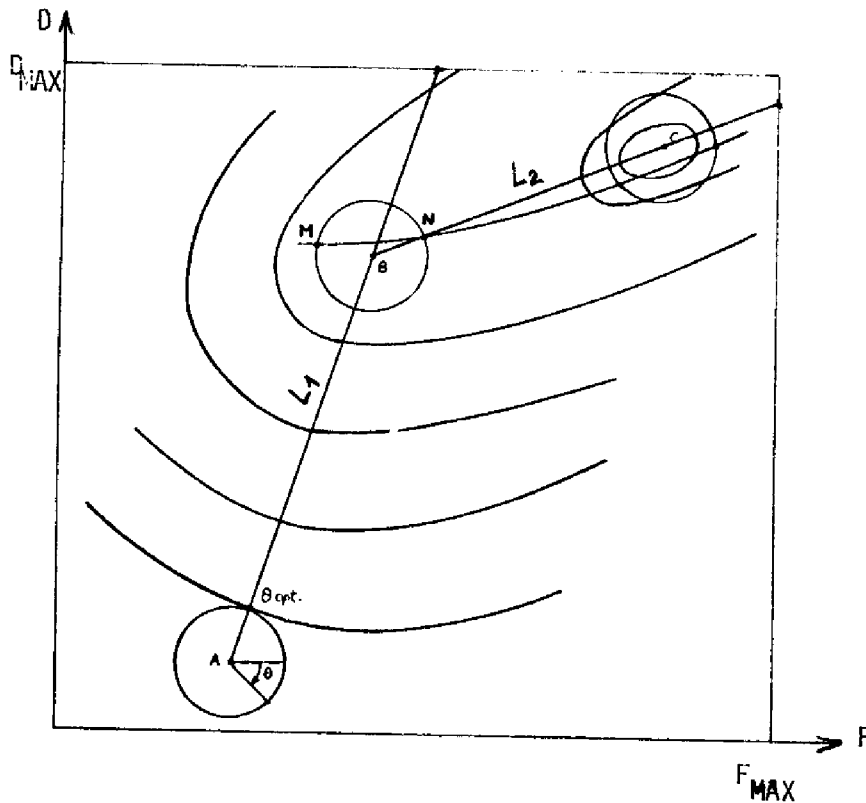


FIGURE 3.1. Recherche d'un minimum par la méthode Sphera dans le plan (D, F).

Si le point B par exemple (cf. figure 3.1.) appartient à une vallée la méthode de recherche de Fibonacci à une dimension, pour une fonction unimodale, nous donnera l'un des deux minimums sur la circonférence de rayon R et de centre B.

La procédure en question, est basée sur le fait que, si le rayon R est suffisamment petit, l'autre minimum, celui qui n'a pas été obtenu, se trouve presque en opposition de phase

$$\theta' = \theta_{opt} \pm \pi \quad (3.24)$$

Donc, à chaque recherche sur la circonférence on calculera la valeur du critère pour un angle déphasé de π radians par rapport à l'optimum obtenu et le minimum de ces deux dernières mesures (M, N), nous donne la nouvelle direction recherchée.

La contrainte sur l'état (3.21) est prise en compte à la fin du programme de recherche de l'optimum, de la façon suivante : si le point optimal recherché par la méthode SPHERA a une concentration en substrat qui satisfait la contrainte, il est clair que l'optimum obtenu à l'intérieur du domaine \mathcal{D} délimité par les contraintes sur les variables de commande, est l'optimum recherché.

Si par contre, la contrainte n'est pas vérifiée, l'optimum se situera sur la frontière de cette contrainte (contrainte saturée)

$$S = S_{lim} \quad (3.25)$$

(le cas $S = 0$ est irréaliste en optimisation)

On cherchera alors l'optimum du critère appartenant à la portion de la courbe $S = S_{lim}$ située à l'intérieur du domaine \mathcal{D} d'équation.

$$g(D, F) = S_{lim} \quad (3.26)$$

A cet effet il est nécessaire de calculer les coordonnées des points d'intersection de la trajectoire $S = S_{lim}$ et de la frontière de \mathcal{D} . On déterminera pour cela l'intervalle correspondant à une variable et, à partir de (3.26), celui qui en résulte pour l'autre variable. Remarquons que cette étude est analytique pour la plupart des lois de croissance et en particulier pour toutes les lois exposées. Pour déterminer l'intervalle sur D par exemple, nous calculons à partir de (3.26) D_α correspondant à $F = F_{min}$ et D_β correspondant à $F = F_{max}$

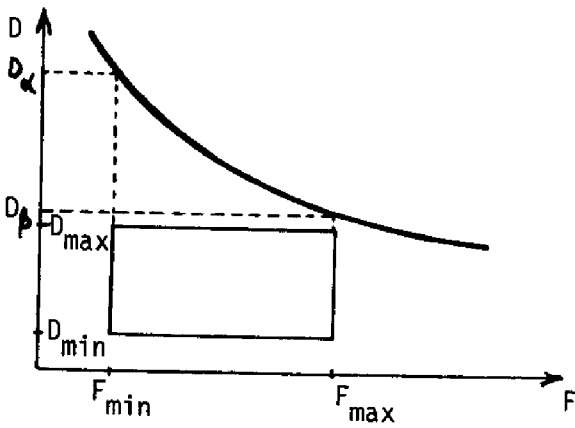
$$g(D, F_{min}) = S_{lim} \longrightarrow D_\alpha$$

$$g(D, F_{max}) = S_{lim} \longrightarrow D_\beta$$

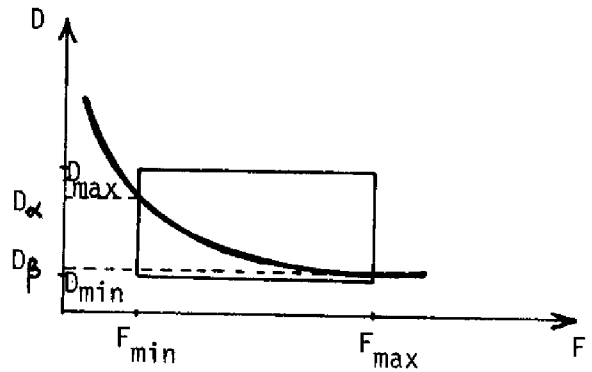
L'intervalle du taux de dilution sera alors :

$$\left\{ \text{Max} [D_\alpha, D_{min}] , \text{Min} [D_\beta, D_{max}] \right\}$$

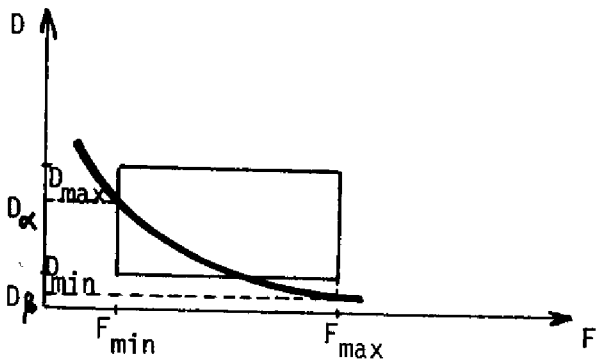
Nous présentons ci-dessous (figures 3.2a à d) des exemples illustratifs correspondant à une structure de croissance du type CONTOIS :



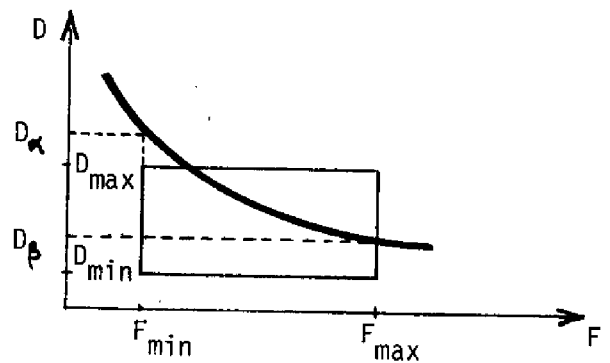
3.2a $D \in [D_{\min}, D_{\max}]$



3.2b $D \in [D_{\beta}, D_{\alpha}]$



3.2c $D \in [D_{\min}, D_{\alpha}]$



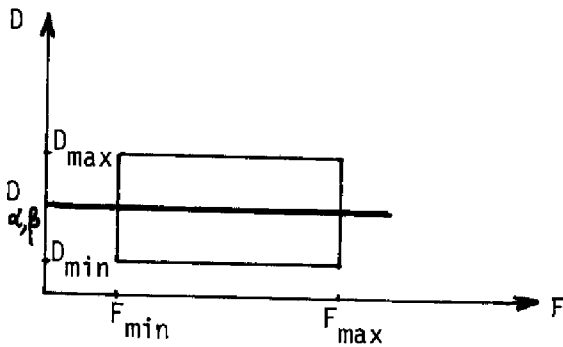
3.2d $D \in [D_{\beta}, D_{\max}]$

Remarquons que dans le cas où le taux de croissance ne dépend que de la concentration en substrat $\mu = f(S)$, les trajectoires $S = S_{lim}$ correspondent à des taux de dilution constants en régime permanent puisque :

$$D = \mu = f(S_{lim})$$

L'intervalle recherché est alors évident (fig. 3.2e)

$$L = F_{MAX} - F_{MIN}$$



3.2e

III.1.4. Résultats et sensibilité aux variables des paramètres.

Nous avons appliqué cette méthode de recherche au problème de l'optimisation statique de l'unité de fermentation sur méthanol. Les paramètres du modèle mathématique ayant varié d'une fermentation à une autre, nous nous sommes proposé d'étudier les variations de l'optimum en fonction de ces paramètres (c'est le problème, fondamental en automatique, de la sensibilité aux variations des paramètres).

Le critère d'optimisation statique retenu est :

$$\min J = \alpha + \beta \frac{F}{DX} + \gamma \frac{1}{DX} + \delta.S \quad (3.29)$$

qui recouvre, dans sa généralité, des critères plus simples, par exemple maximalisation

- de la productivité si $\beta = \delta = 0$
- du rendement apparent si $\gamma = \delta = 0$, et
- d'une combinaison de la productivité et du rendement apparent si $\delta = 0$.

Dans une première phase, nous avons étudié le problème suivant :

$$\text{soit à minimiser } C = 1 + 5 \frac{F}{DX} + \frac{1}{DX} + 5 S \quad * \quad (3.30)$$

sous les contraintes égalité :

$$\mu_M \frac{1}{A \frac{X}{S} + 1} - D = 0 \quad (3.31)$$

$$F - DS - \frac{\mu_M}{Y_C} \cdot \frac{X}{A \frac{X}{S} + 1} - m_C \cdot X = 0 \quad (3.32)$$

avec les paramètres :

$$\mu_M = 0,3 ; A = 0,6 ; Y_C = 0,2 \text{ et } m_C = 0,05$$

et sous les contraintes inégalité :

$$\begin{aligned} 0 < D &\leq \mu_M \\ 0 < F &\leq 8 \\ 0 < S &\leq S_{lim} \end{aligned}$$

Le tableau 3.1 montre l'évolution du critère (C) ainsi que des variables d'état (X, S) et de commande (D, F), dans la recherche d'un minimum en ne tenant pas compte de la contrainte sur l'état (nous avons pris comme conditions initiales $D_i = 0.15$ et $F_i = 4$).

* Les coefficients du critère ont été fixés de façon arbitraire.

Chaque ligne du tableau ci-dessous représente les résultats obtenus par la méthode de Fibonacci à une dimension chaque fois qu'elle est appliquée dans la méthode SPHERA ; ainsi la première ligne donne le minimum du critère sur la circonférence de rayon $R = 0.01$ et de centre ($D_i = 0.15$; $F_i = 4$) ; la ligne suivante indique le minimum dans la direction définie au pas précédent sur le segment à l'intérieur des contraintes de commande ; la troisième ligne est le résultat de la première procédure de rayon toujours $R = 0.01$ et de centre le minimum précédemment trouvé et ainsi de suite jusqu'au moment où le critère augmente.

Observons que l'optimum est presque atteint dès la quatrième ligne.

D=	0.14961	F=	3.09121	X=	4.49219	S=	2.69854	C=	45.56520
D=	0.06430	F=	2.24507	X=	5.98181	S=	0.97904	C=	38.20188
D=	0.06447	F=	2.27855	X=	6.01371	S=	0.98078	C=	38.19189
D=	0.08403	F=	1.57596	X=	3.21783	S=	0.75118	C=	37.59667
D=	0.08377	F=	1.57191	X=	3.21068	S=	0.75412	C=	37.59627
D=	0.08324	F=	1.55355	X=	3.22135	S=	0.74222	C=	37.59593
D=	0.08301	F=	1.56872	X=	3.20233	S=	0.74064	C=	37.59588
D=	0.08303	F=	1.56817	X=	3.23843	S=	0.74362	C=	37.59588
D=	0.08332	F=	1.56584	X=	3.25393	S=	0.74362	C=	37.59593

TABLEAU 3.1. Résultats de la recherche.

Le programme teste à ce moment là, la valeur de la concentration en substrat résiduel, si elle est inférieure à la concentration limite (S_{lim}), le minimum est donné par la 8ème ligne du tableau 3.1. ; si par contre, elle lui est supérieure, l'optimum se trouvera sur la contrainte $S = S_{lim}$ où la méthode effectuera sa recherche.

Supposons par exemple que $S_{lim} = 0,7$ g/l on obtient alors :

$$D_{opt.} = 0.08217 ; F_{opt.} = 1.48247 ; X_{opt.} = 3.09303 ; S_{opt.} = 0.70000$$

$$CRITERE = 37.60905$$

Dans une seconde phase, nous avons étudié pour le même problème que précédemment, sans contrainte sur l'état, la sensibilité de l'optimum aux variations de chaque paramètre.

A partir des valeurs moyennes trouvées par identification de notre unité de fermentation, nous avons fait varier un par un, chacun des paramètres, tout en gardant les autres constants et égaux à :

$$\mu_M = 0.3 ; A = 0.6 ; Y_C = 0.3 \text{ et } m_C = 0.05 \quad (3.33)$$

Les plages de variation des paramètres, ont été :

$$0.2 \leq \mu_M \leq 0.5$$

$$0.1 \leq A \leq 1.1$$

$$0.2 \leq Y_C \leq 0.7$$

$$0.01 \leq m_C \leq 0.11$$

Les figures 3.3, 3.4, 3.5 et 3.6 représentent la sensibilité du critère et de la commande optimale aux variations de μ_M , A, Y_C et m_C respectivement.

Dans la figure 3.3 on observe une augmentation à peu près linéaire de D et F en fonction de μ_M tandis que le coût diminue plus sensiblement aux valeurs faibles.

L'évolution de ces variables en fonction de A (cf. figure 3.4) est, comme il était prévisible, opposée.

On remarque dans la figure 3.5 que le taux de dilution optimal est constant quelle que soit la valeur de Y_C et que la diminution du coût du critère est très sensible ; ainsi pour une variation de $Y_C = 0.2$ à $Y_C = 0.7$, le coût du critère diminue de presque 50 %.

La figure 3.6 nous montre la nécessité d'une bonne connaissance de m_C pour bien définir la commande optimale.

Finalement, il est possible grâce à ces figures de déterminer les consignes optimales de la commande et le coût du critère pour une valeur quelconque d'un paramètre (comprise dans la plage de variation) si les autres paramètres sont constants et égaux à (3.33), ainsi et à titre d'exemple pour l'ensemble des paramètres :

$$\mu_M = 0.4 ; A = 0.6 ; Y_C = 0.3 \text{ et } m_C = 0.05$$

on obtient :

$$D \text{ optimal} = 0.101 \text{ h}^{-1}$$

$$F \text{ optimal} = 1,265 \text{ gl}^{-1} \text{ h}^{-1}$$

MUM=0.20	*** D OPT.=0.06192	F OPT.=0.74550	X OPT.=3.46240	S OPT.=0.93157	CRITERE=32.37179**
MUM=0.23	*** D OPT.=0.06057	F OPT.=1.00174	X OPT.=3.36379	S OPT.=0.86233	CRITERE=31.20869**
MUM=0.25	*** D OPT.=0.07492	F OPT.=1.05411	X OPT.=3.31537	S OPT.=0.80529	CRITERE=30.27008**
MUM=0.29	*** D OPT.=0.08097	F OPT.=1.10316	X OPT.=3.26686	S OPT.=0.75695	CRITERE=29.49312**
MUM=0.32	*** D OPT.=0.08596	F OPT.=1.15211	X OPT.=3.20636	S OPT.=0.71783	CRITERE=28.83690**
MUM=0.35	*** D OPT.=0.09282	F OPT.=1.19809	X OPT.=3.16312	S OPT.=0.68306	CRITERE=28.27359**
MUM=0.41	*** D OPT.=0.09804	F OPT.=1.24068	X OPT.=3.12300	S OPT.=0.65158	CRITERE=27.78352**
MUM=0.44	*** D OPT.=0.10330	F OPT.=1.28490	X OPT.=3.09249	S OPT.=0.62493	CRITERE=27.35233**
MUM=0.47	*** D OPT.=0.10870	F OPT.=1.32524	X OPT.=3.06560	S OPT.=0.60151	CRITERE=26.96926**
MUM=0.50	*** D OPT.=0.11401	F OPT.=1.36397	X OPT.=3.01792	S OPT.=0.57994	CRITERE=26.62617**
MUM=0.50	*** D OPT.=0.11357	F OPT.=1.40424	X OPT.=2.99752	S OPT.=0.56092	CRITERE=26.31665**

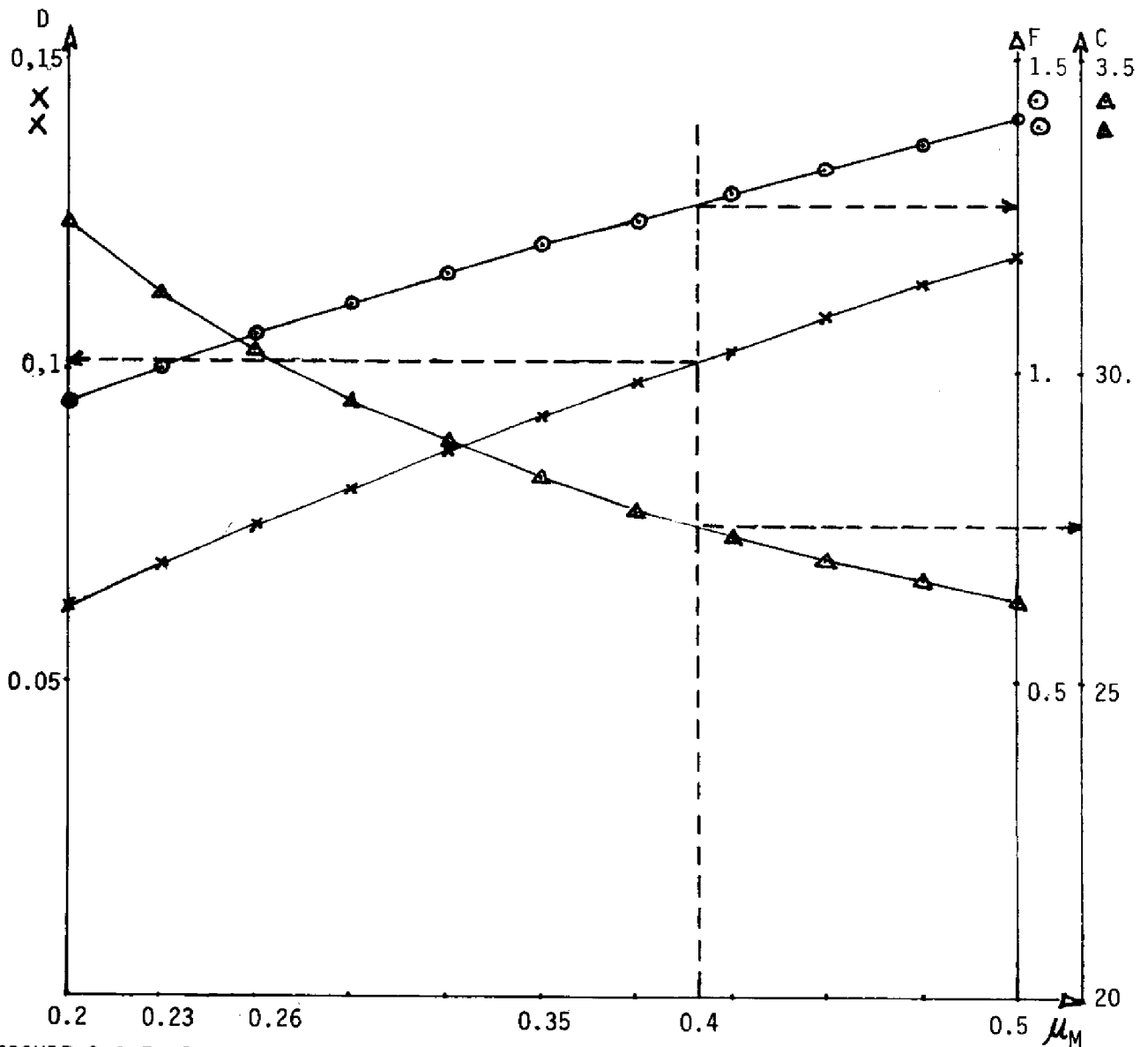


FIGURE 3.3. Evolution du critère et de la commande optimale aux variations de μ_M .

= 0.1	*** D OPT.=0.12874	F OPT.=2.22259	X OPT.=4.54709	S OPT.=0.34174	CRITERE=23.40170*
= 0.20	*** D OPT.=0.11050	F OPT.=1.69674	X OPT.=3.95500	S OPT.=0.45941	CRITERE=25.19659*
= 0.30	*** D OPT.=0.10007	F OPT.=1.45401	X OPT.=3.44734	S OPT.=0.54775	CRITERE=26.39389*
= 0.40	*** D OPT.=0.09286	F OPT.=1.30393	X OPT.=3.26621	S OPT.=0.62155	CRITERE=27.47000*
= 0.50	*** D OPT.=0.08741	F OPT.=1.19924	X OPT.=3.13720	S OPT.=0.68612	CRITERE=28.41310*
= 0.60	*** D OPT.=0.08300	F OPT.=1.11971	X OPT.=3.03071	S OPT.=0.74330	CRITERE=29.25255*
= 0.70	*** D OPT.=0.07930	F OPT.=1.05706	X OPT.=2.94225	S OPT.=0.79535	CRITERE=30.04143*
= 0.80	*** D OPT.=0.07635	F OPT.=1.00713	X OPT.=2.86542	S OPT.=0.84541	CRITERE=30.78474*
= 0.90	*** D OPT.=0.07357	F OPT.=0.95549	X OPT.=2.80423	S OPT.=0.89152	CRITERE=31.49207*
= 1.00	*** D OPT.=0.07130	F OPT.=0.90999	X OPT.=2.75102	S OPT.=0.93559	CRITERE=32.16330*
= 1.10	*** D OPT.=0.06918	F OPT.=0.86913	X OPT.=2.70324	S OPT.=0.97702	CRITERE=32.81160*

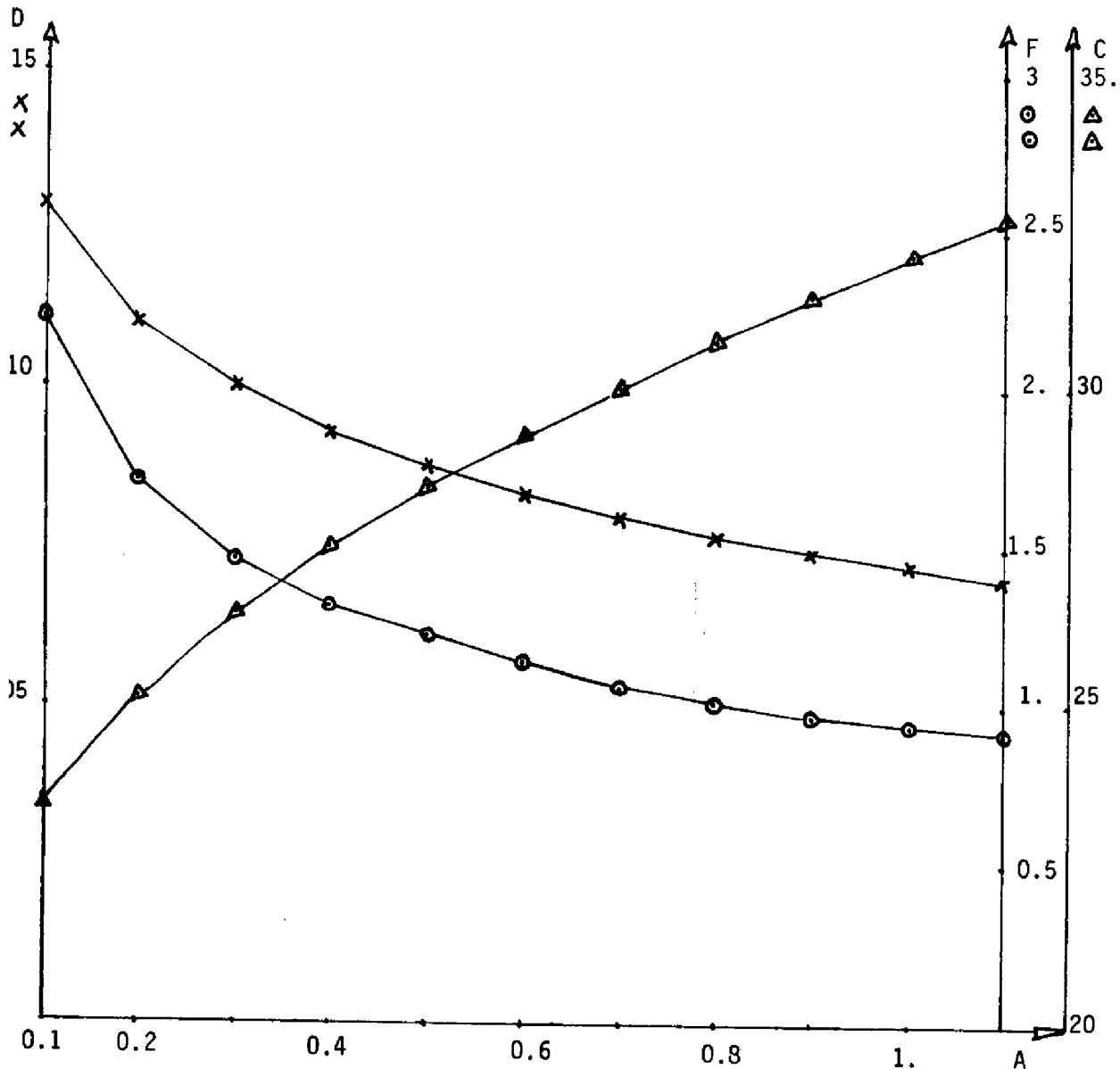


FIGURE 3.4. Evolution du critère et de la commande optimale aux variations de A.

YC= 0.20	*** D OPT.=0.08303	F OPT.=1.55817	x OPT.=3.23543	S OPT.=0.74362	CRITERE=37.59566*
YC= 0.25	*** D OPT.=0.08295	F OPT.=1.27847	x OPT.=3.23971	S OPT.=0.74261	CRITERE=32.59569*
YC= 0.30	*** D OPT.=0.08300	F OPT.=1.11971	x OPT.=3.23671	S OPT.=0.74330	CRITERE=29.26255*
YC= 0.35	*** D OPT.=0.08293	F OPT.=0.99362	x OPT.=3.24772	S OPT.=0.74443	CRITERE=26.66161*
YC= 0.40	*** D OPT.=0.08305	F OPT.=0.89530	x OPT.=3.23554	S OPT.=0.74317	CRITERE=25.09566*
YC= 0.45	*** D OPT.=0.08304	F OPT.=0.82170	x OPT.=3.23997	S OPT.=0.74410	CRITERE=23.70699*
YC= 0.50	*** D OPT.=0.08292	F OPT.=0.76065	x OPT.=3.23901	S OPT.=0.74232	CRITERE=22.59590*
YC= 0.55	*** D OPT.=0.08299	F OPT.=0.71315	x OPT.=3.24257	S OPT.=0.74403	CRITERE=21.65679*
YC= 0.60	*** D OPT.=0.08304	F OPT.=0.67201	x OPT.=3.23907	S OPT.=0.74384	CRITERE=20.92921*
YC= 0.65	*** D OPT.=0.08297	F OPT.=0.63690	x OPT.=3.23321	S OPT.=0.74261	CRITERE=20.25619*
YC= 0.70	*** D OPT.=0.08306	F OPT.=0.60725	x OPT.=3.23455	S OPT.=0.74306	CRITERE=19.73674*

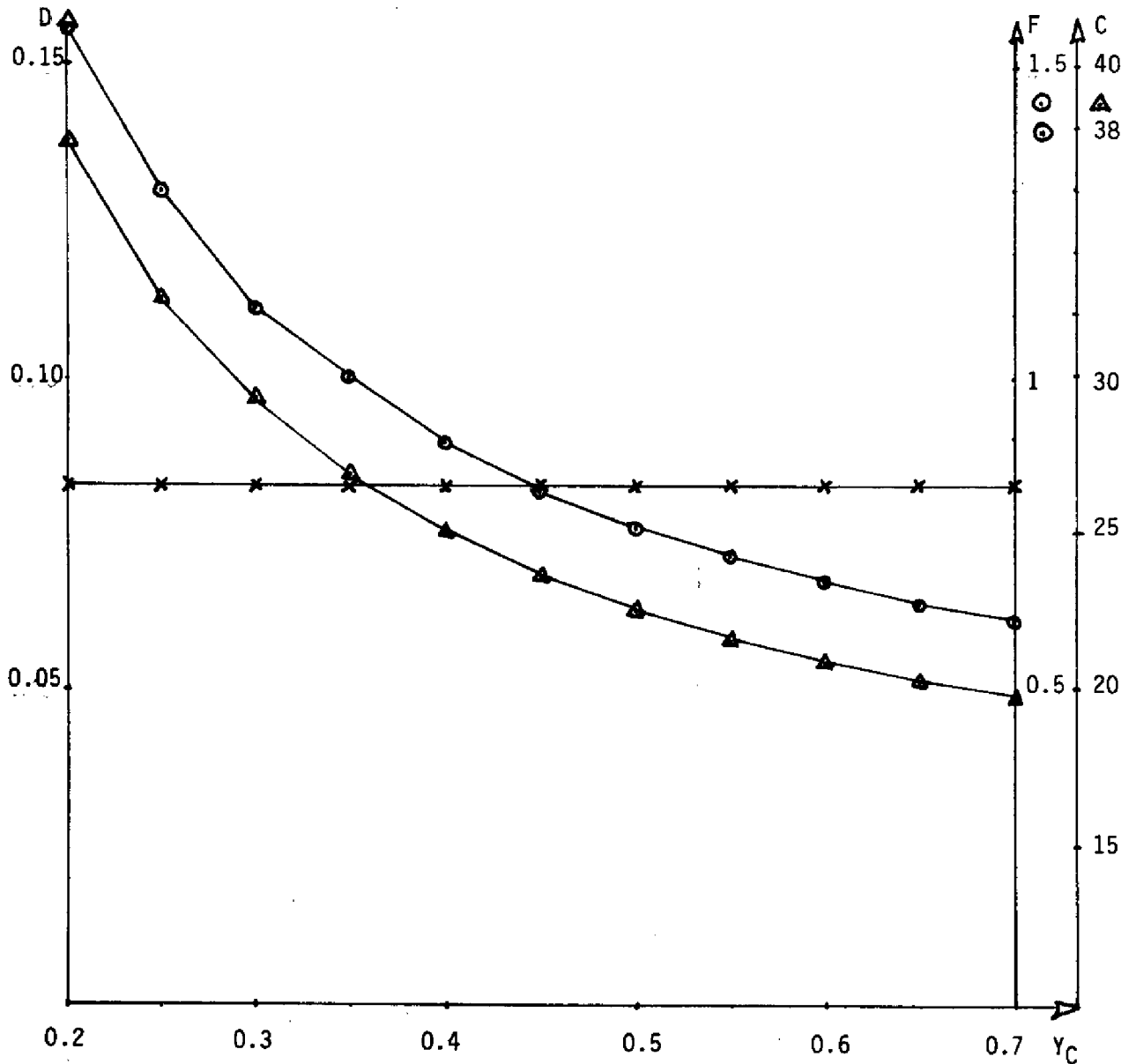


FIGURE 3.5. Evolution de critère et de la commande optimale aux variations de Y_c

MC= 0.01	*** D OPT.=0.04309	F OPT.=1.07269	X OPT.=4.79114	S OPT.=0.68334	CRITERE=26.16460*
IC= 0.02	*** D OPT.=0.05783	F OPT.=1.08575	X OPT.=4.91168	S OPT.=0.70375	CRITERE=27.15159*
IC= 0.03	*** D OPT.=0.06811	F OPT.=1.09723	X OPT.=4.07809	S OPT.=0.71875	CRITERE=27.94379*
IC= 0.04	*** D OPT.=0.07623	F OPT.=1.10857	X OPT.=3.57950	S OPT.=0.73169	CRITERE=28.63531*
IC= 0.05	*** D OPT.=0.08300	F OPT.=1.11971	X OPT.=3.23571	S OPT.=0.74330	CRITERE=29.26255*
IC= 0.06	*** D OPT.=0.08882	F OPT.=1.13058	X OPT.=2.98735	S OPT.=0.75389	CRITERE=29.84419*
IC= 0.07	*** D OPT.=0.09379	F OPT.=1.14265	X OPT.=2.74920	S OPT.=0.76384	CRITERE=30.39134*
IC= 0.08	*** D OPT.=0.09842	F OPT.=1.15067	X OPT.=2.53360	S OPT.=0.77156	CRITERE=30.91110*
IC= 0.09	*** D OPT.=0.10247	F OPT.=1.15985	X OPT.=2.35026	S OPT.=0.77893	CRITERE=31.40871*
IC= 0.10	*** D OPT.=0.10626	F OPT.=1.16959	X OPT.=2.20102	S OPT.=0.78681	CRITERE=31.88762*
IC= 0.11	*** D OPT.=0.10932	F OPT.=1.17674	X OPT.=2.08855	S OPT.=0.79303	CRITERE=32.35066*

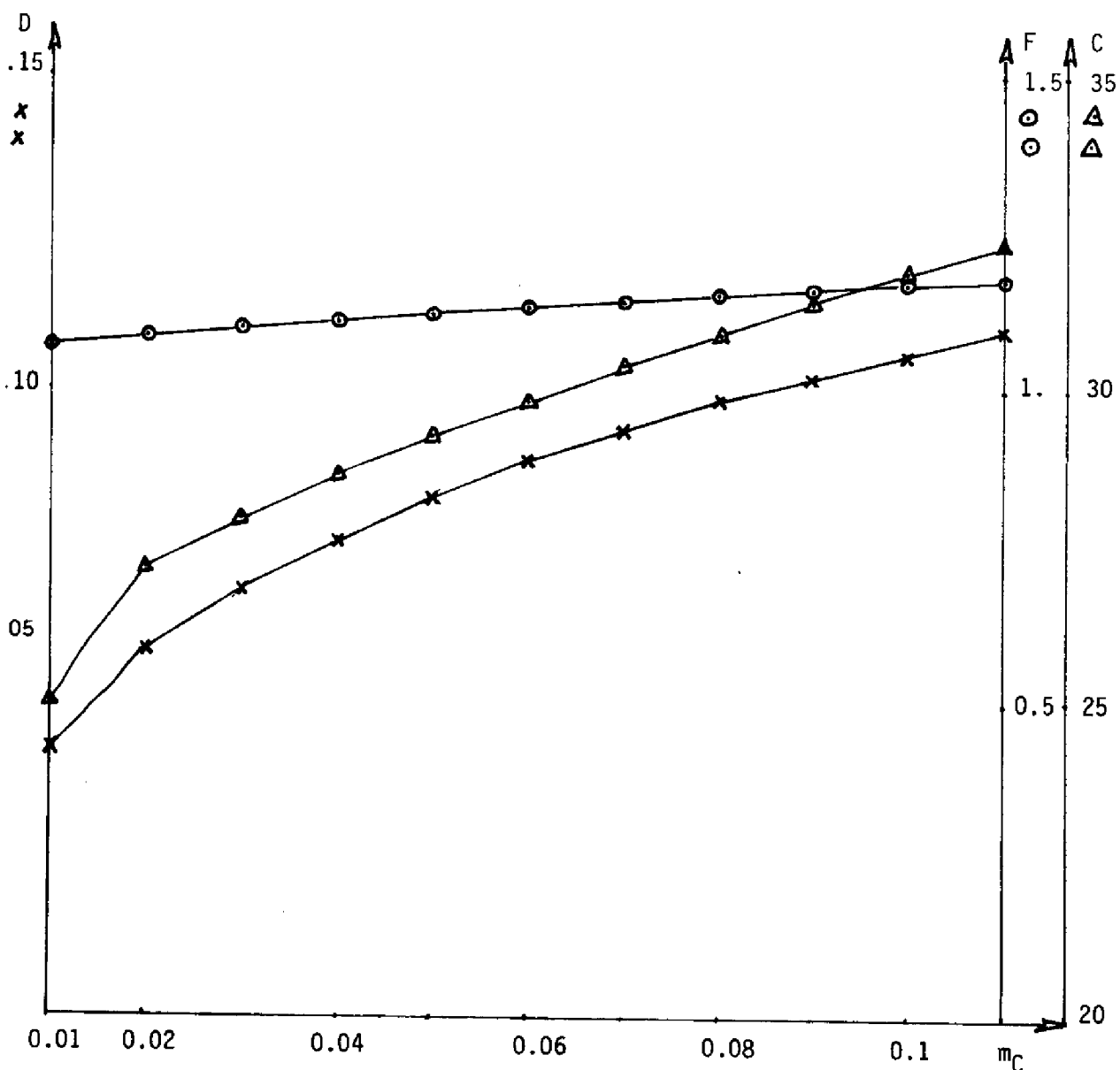


FIGURE 3.6. Evolution du critère et de la commande optimale aux variations de m_C

III.2. Etude de la stabilité

Après identification des paramètres du modèle de la fermentation (chapitre II) nous avons étudié et mis en oeuvre, dans le paragraphe précédent l'algorithme d'une méthode heuristique qui permet la recherche du point optimal d'une unité de fermentation continue en excès d'oxygène, il nous reste à étudier la position d'équilibre du point de fonctionnement en question et de façon plus générale à définir le domaine stable du système [III.8, III.9]. Cette étude est intéressante à deux points de vue.

1) pour se rendre compte sur le plan théorique si le système peut être commandé en boucle ouverte par la technique classique du chemostat (qui consiste, rappelons-le, à fixer les variables de commande en fonction de l'état final désiré et à laisser évoluer le système vers cet état),

2) parce que l'approche retenue (première méthode de Lyapunov) est la première étape de la méthode mise en oeuvre pour l'accélération des transitoires par commande modale et qui sera traitée au paragraphe III.3.

Etude de la stabilité par la 1ère méthode de Lyapunov

Il est bien connu que la première méthode de Lyapunov permet de conclure quant à la stabilité locale d'un système non-linéaire à partir de celle du système linéarisé lorsque les valeurs propres de ce dernier ne sont pas à partie réelle nulle (lorsque l'une au moins des valeurs propres est à partie réelle nulle - cas critique de Lyapunov - il est nécessaire de pousser le développement en série au voisinage de l'équilibre au-delà du premier ordre).

Soit \bar{X} , \bar{S} , \bar{D} , \bar{F} un point d'équilibre ; on pose :

$$X = \bar{X} + x ; S = \bar{S} + s ; D = \bar{D} + d \text{ et } F = \bar{F} + f \quad (3.34)$$

où x , s , d et f sont les écarts des variables d'état et de commande par rapport au point d'équilibre.

Dans le cas général, où le taux de croissance dépend des variables X et S ; $\mu = g(X, S)$ on définira α et β par :

$$\alpha = \frac{\partial \mu}{\partial X} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\partial \mu}{\partial S}$$

ce qui nous conduit à l'expression :

$$\mu = \bar{\mu} + \alpha \cdot x + \beta \cdot s + O^2(x, s) \quad (3.35)$$

$\bar{\mu}$ représente le taux de croissance correspondant à l'état d'équilibre et $O^2(x, s)$ l'ensemble des termes de degré supérieur ou égal à deux.

$\bar{\mu}$, α et β ont été calculés pour quelques lois de croissance connues et figurent dans le tableau ci-dessous :

LOI de	$\bar{\mu}$	α	β
MONOD	$\frac{\mu_M \cdot \bar{S}}{K_S + \bar{S}}$	0	$\frac{\mu_M \cdot K_S}{(K_S + \bar{S})^2}$
CONTOIS	$\frac{\mu_M \cdot \bar{S}}{A\bar{X} + \bar{S}}$	$-\frac{\mu_M \cdot A \cdot \bar{S}}{(A\bar{X} + \bar{S})^2}$	$\frac{\mu_M \cdot A \cdot \bar{X}}{(A\bar{X} + \bar{S})^2}$
ANDREWS	$\frac{\mu_M \cdot \bar{S}}{\bar{S}^2/K_i + \bar{S} + K_S}$	0	$\frac{\mu_M (K_S - \bar{S}^2/K_i)}{(K_S + \bar{S} + \bar{S}^2/K_i)^2}$
PERRUT	$\frac{\mu_M \cdot \bar{X} \cdot \bar{S}}{A + \bar{X} \cdot \bar{S}}$	$\mu_M \cdot \frac{A \cdot \bar{S}}{(A + \bar{X} \cdot \bar{S})^2}$	$\mu_M \cdot \frac{A \cdot \bar{X}}{(A + \bar{X} \cdot \bar{S})^2}$

TABLEAU 3.3. Expressions de $\bar{\mu}$, α et β pour quelques lois de croissance.

Le système (3.39) est l'expression linéarisée littérale du système non linéaire d'équation 3.36, 3.37 et 3.38.

$$\begin{cases} \dot{X} = f_1(X, S, D) = (\mu - D) \cdot X & (3.36) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{S} = f_2(X, S, D, F) = F - D \cdot S - \frac{\mu X}{Y_C} - m_C \cdot X & (3.37) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = g(X, S) & (3.38) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X} & \frac{\partial f_1}{\partial S} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X} & \frac{\partial f_2}{\partial S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial D} & \frac{\partial f_1}{\partial F} \\ \frac{\partial f_2}{\partial D} & \frac{\partial f_2}{\partial F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Les coefficients des matrices Jacobien ayant pour expression :

$$\frac{\partial f_1}{\partial X} = \frac{\partial \mu}{\partial X} \cdot \bar{X} + \bar{\mu} - \bar{D} = \frac{\partial \mu}{\partial X} \cdot X \quad (\text{en régime permanent } \bar{D} = \bar{\mu})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = \frac{\partial \mu}{\partial S} \cdot \bar{X}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X} = -\frac{\bar{X}}{Y_C} \frac{\partial \mu}{\partial X} - \frac{\mu}{Y_C} - m_C$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = -\bar{D} - \frac{\bar{X}}{Y_C} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial S}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial D} = -\bar{X}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial F} = 0$$

$$\frac{\lambda f_2}{\partial D} = -\bar{S}$$

$$\frac{\lambda f_2}{\partial F} = 1$$

ce qui conduit à l'expression du système linéarisé :

$$\dot{\underline{y}} = A \underline{y} + B \underline{u} \quad (3.40)$$

où

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} d \\ f \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha \bar{X} & \beta \bar{X} \\ -\frac{\alpha \bar{X} - \bar{D}}{Y_C} - m_C & -D - \frac{\beta \bar{X}}{Y_C} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -\bar{X} & 0 \\ -\bar{S} & 1 \end{bmatrix}$$

Remarquons que la matrice de commande est indépendante de α , β donc des paramètres du modèle .

L'équation caractéristique qui permet le calcul des valeurs propres de la matrice dynamique (A), modes du système en boucle ouverte, est :

$$\det [\lambda I - A] = \lambda^2 + \lambda \left(\bar{D} + \bar{X} \left(\frac{\beta}{Y_C} - \alpha \right) \right) + \bar{D} \cdot \bar{X} \left(\frac{\beta}{Y_C} - \alpha \right) + m_C \cdot \bar{X} \cdot \beta = 0 \quad (3.41)$$

Si l'on néglige $\beta \cdot m_C \cdot X^{(*)}$, les racines de cette équation sont évidentes :

$$\lambda_1 = -D \quad (3.42)$$

$$\lambda_2 = -\bar{X} \left(\frac{\beta}{Y_C} - \alpha \right) \quad (3.43)$$

Compte tenu des expressions de α et β pour les quatre lois de croissance étudiées, nous présentons ici, les résultats de l'étude de stabilité.

LOI DE	STABLE	INSTABLE
MONOD	OUI	NON
CONTOIS	OUI	NON
ANDREWS	pour $S < \sqrt{K_S \cdot K_i}$	pour $S > \sqrt{K_S \cdot K_i}$
PERRUT	si $S < \frac{X}{Y_C}$	si $S > \frac{X}{Y_C}$

Nous remarquons que, quelle que soit la loi retenue pour notre unité de fermentation (MONOD ou CONTOIS), le système est stable. La dynamique varie en fonction du point de fonctionnement, mais reste lente.

Exemple : Si le modèle est défini par la loi de CONTOIS avec :

$$\mu_M = 0,3 ; A = 0,6 ; Y_C = 0,3 \text{ et } m_C = 0,05$$

(*) : M. RIBOT [III.10] a étudié le cas où ce terme est conservé et il démontre que les résultats obtenus ne sont pas modifiés qualitativement quelle que soit la loi de croissance.

et si on considère le point d'équilibre :

$$\bar{D} = 0,083 \text{ h}^{-1} ; \bar{F} = 1,119 \text{ gl}^{-1}\text{h}^{-1} ; \bar{X} = 3,238 \text{ gl}^{-1} \text{ et } \bar{S} = 0,743 \text{ gl}^{-1}$$

on obtient les valeurs propres du système en boucle ouverte :

$$\lambda_1 = - 0,083 \text{ h}^{-1}$$

et

$$\lambda_2 = - 0,942 \text{ h}^{-1}$$

III.3. COMMANDE PAR RETOUR D'ETAT

III.3.1. Théorie et simulation

La linéarisation des équations réalisée pour l'étude de la stabilité, va nous permettre la synthèse d'une loi de commande par retour d'état, afin de réguler le système autour du point de fonctionnement optimal trouvé par l'optimisation statique.

Si on diagonalise le système linéarisé (3.39) en faisant la transformation :

$$\underline{y} = T. \underline{y}' \quad (3.44)$$

(T est une matrice modale, dont les vecteurs colonne sont proportionnels aux vecteurs propres de A), nous avons :

$$\dot{\underline{y}}' = T^{-1}. A. T. \underline{y}' + T^{-1}. B. \underline{u} \quad (3.45)$$

$$\dot{\underline{y}}' = \Lambda \underline{y}' + B'. \underline{u} \quad (3.46)$$

Λ est la nouvelle matrice dynamique diagonalisée.

Si on applique, le retour d'état :

$$\underline{u} = -K.\underline{y} = -K'.\underline{y}' \quad (3.47)$$

d'où $K' = K.T$

nous avons $\underline{\dot{y}}' = \Lambda - B' K' \underline{y}' \quad (3.48)$

Nous déterminons K' de façon que $B' K'$ soit diagonale et égale à :

$$B' K' = \Lambda - \Lambda_d \quad (3.49)$$

Λ_d étant une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres désirées. On en déduit, si $B' = T^{-1}B$ est inversible, ce qui est le cas dans notre problème :

$$K' = [B']^{-1} . (\Lambda - \Lambda_d) = B^{-1} T (\Lambda - \Lambda_d) \quad (3.50)$$

Et, compte tenu de (3.47) :

$$K = B^{-1} T (\Lambda - \Lambda_d) T^{-1} \quad (3.51)$$

On en déduit, la loi de commande (en négligeant le terme de maintenance) :

$$d = \frac{1}{\frac{D + \alpha \bar{X}}{\beta} - \frac{\bar{X}}{\gamma_C}} \left[\left((\lambda_1 - \lambda_{d1}) \cdot \frac{\bar{D} + \alpha \bar{X}}{\beta \bar{X}} - (\lambda_2 - \lambda_{d2}) \cdot \frac{1}{\gamma_C} \right) \cdot x + \right. \\ \left. + (\lambda_1 + \lambda_{d2} - \lambda_2 - \lambda_{d1}) \cdot s \right] \quad (3.52)$$

et,

$$f = \frac{1}{\frac{\bar{D} + \alpha \bar{X}}{\beta} - \frac{\bar{X}}{Y_C}} \left[\left[\left(\bar{S} + \frac{\bar{X}}{Y_C} \right) \left(\frac{\bar{D} + \alpha \bar{X}}{\beta X} \right) (\lambda_1 - \lambda_{d1}) - \frac{\bar{D}}{\beta Y_C} (\lambda_2 - \lambda_{d2}) \right] \cdot x + \right. \\ \left. + \left[\left(\bar{S} + \frac{\bar{X}}{Y_C} \right) (\lambda_1 - \lambda_{d1}) - \frac{\bar{D}}{\beta} (\lambda_2 - \lambda_{d2}) \right] \cdot s \right] \quad (3.53)$$

λ_{d1} et λ_{d2} étant les valeurs propres désirées pour le système bouclé :

Maintenant, si l'on décale de la même quantité λ_0 les deux valeurs propres du système en boucle ouverte, la loi de commande prend une forme extrêmement simple et indépendante de la matrice A, donc de l'expression du taux de croissance :

$$\lambda_1 - \lambda_{d1} = \lambda_2 - \lambda_{d2} = -\lambda_0$$

On a alors :

$$K = B^{-1} \cdot T \cdot \begin{bmatrix} -\lambda_0 & 0 \\ 0 & -\lambda_0 \end{bmatrix} \cdot T^{-1} = -\lambda_0 \cdot B^{-1} = \frac{\lambda_0}{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \bar{S} & -\bar{X} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

d'où la loi de commande générale pour tout processus de fermentation en excès d'oxygène :

$$\left\{ \begin{array}{l} d = -\frac{\lambda_0}{X} x \end{array} \right. \quad (3.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = -\lambda_0 \frac{\bar{S}}{X} x - \lambda_0 s \end{array} \right. \quad (3.56)$$

La mise en oeuvre de cette commande peut se faire à partir du schéma de la figure 3.7.

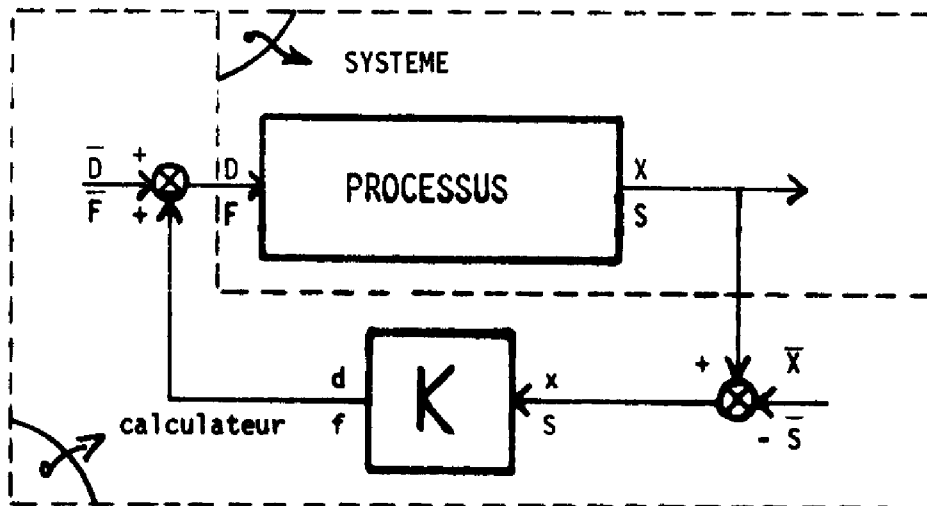


FIGURE 3.7. Commande par retour d'état

En simulation l'application de cette loi de commande, nous a donné de très bons résultats, bien que le système soit fortement non linéaire.

Si les commandes calculées violent les contraintes, nous limitons leurs amplitudes aux valeurs limites permises.

Nous avons simulé dans un premier temps le processus de la fermentation caractérisé par la loi de croissance d'ANDREWS en boucle ouverte (sans régulation), à partir des différentes conditions initiales. L'état désiré étant $X_f = 2 \text{ g/l}$ et $S_f = 0,5 \text{ g/l}$, nous avons calculé les valeurs des variables de commande en régime permanent :

$$D = \mu_M \frac{S_f}{S_f^2 / K_1 + S_f + K_S} \quad (3.57)$$

$$F = D \cdot S_f + \frac{D \cdot X_f}{Y_C} + m_C \cdot X_f \quad (3.58)$$

avec $\mu_M = 0,7$; $K_S = 0,2$; $K_1 = 5$; $Y_C = 0,5$ et $m_C = 0$

La figure 3.8 montre les résultats obtenus dans le plan de phase (X, S). Les états initiaux qui se trouvent à droite de la ligne en pointillé permettent d'arriver à l'état désiré tandis que pour ceux situés à gauche de la frontière l'état final est un "lavage" de la fermentation (WASH-OUT).

La figure 3.9. nous montre, également dans le plan de phase, le même système mais avec une commande par retour d'état calculée par les expressions (3.55) et (3.56) avec $\lambda_0 = -2$; nous remarquons qu'à partir des mêmes états initiaux on atteint toujours l'état désiré et que le temps en régime transitoire pour aller du point initial à l'état final a été réduit dans un rapport supérieur à 5 (entre deux points des trajectoires il s'est écoulé 1 heure de fermentation).

III.3.2. Résultats sur l'unité de methanol

Pour appliquer cette loi de commande sur notre unité de fermentation, nous avons utilisé le mini-calculateur PDP-8 couplé aux pilotes de fermentation du L.G.B.

Le calculateur PDP-8, possède une mémoire de 12K mots de 12bits. Il est équipé d'une télétype, associée à un lecteur perforateur mécanique de ruban, d'un lecteur rapide de ruban perforé et d'un ensemble de lignes entrées/sorties logiques et analogiques. M. RIBOT [III.11] a développé un moniteur temps réel qui assure la gestion des tâches ou programmes et le traitement des interruptions associées aux différents périphériques.

La programmation d'une tâche est faite en langage assembleur PDP-8. La tâche de la commande par retour d'état est très simple et identique à quelques coefficients près pour les deux unités de fermentation.

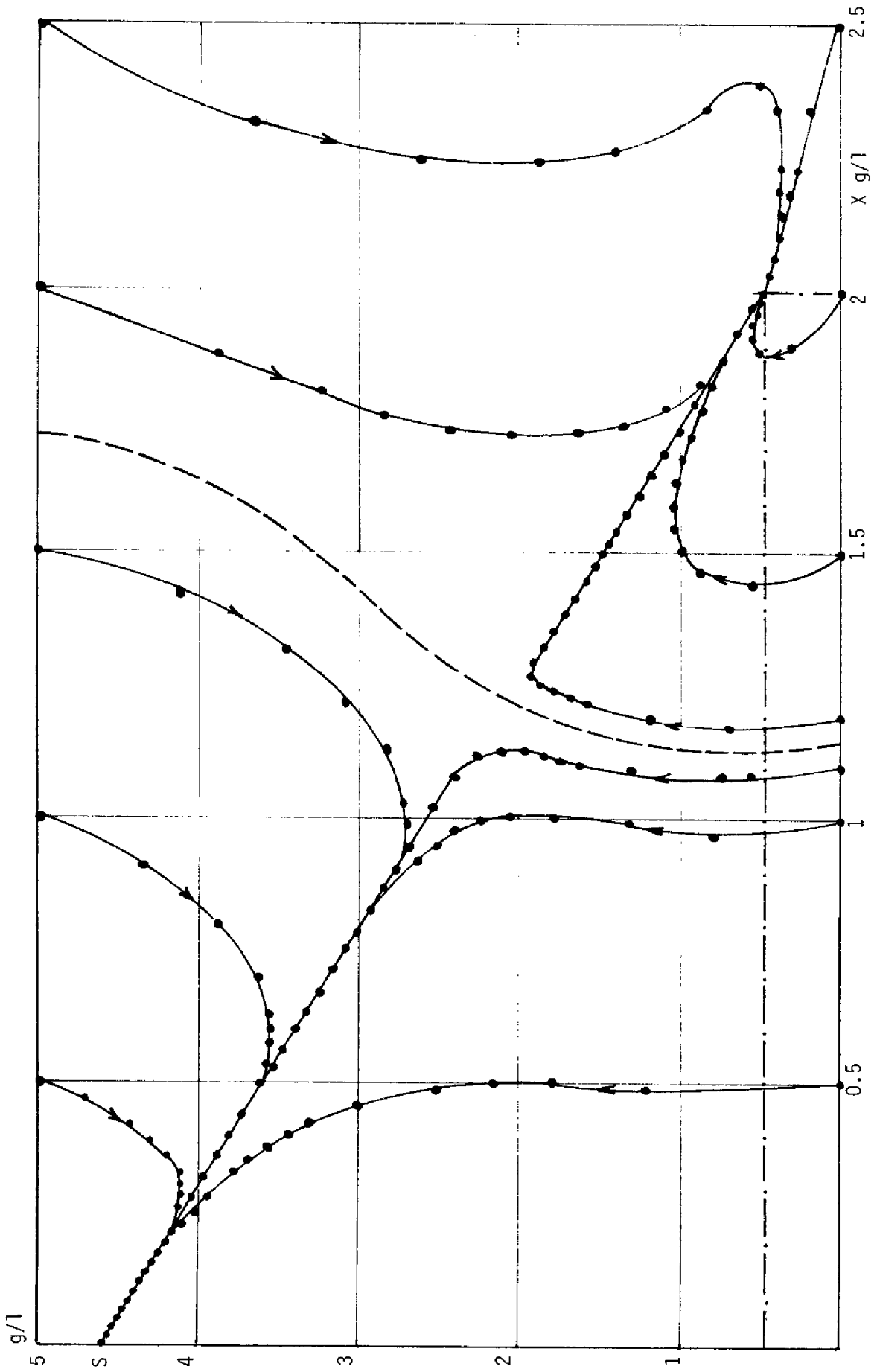


FIGURE 3.8. Simulation du système en boucle ouverte.

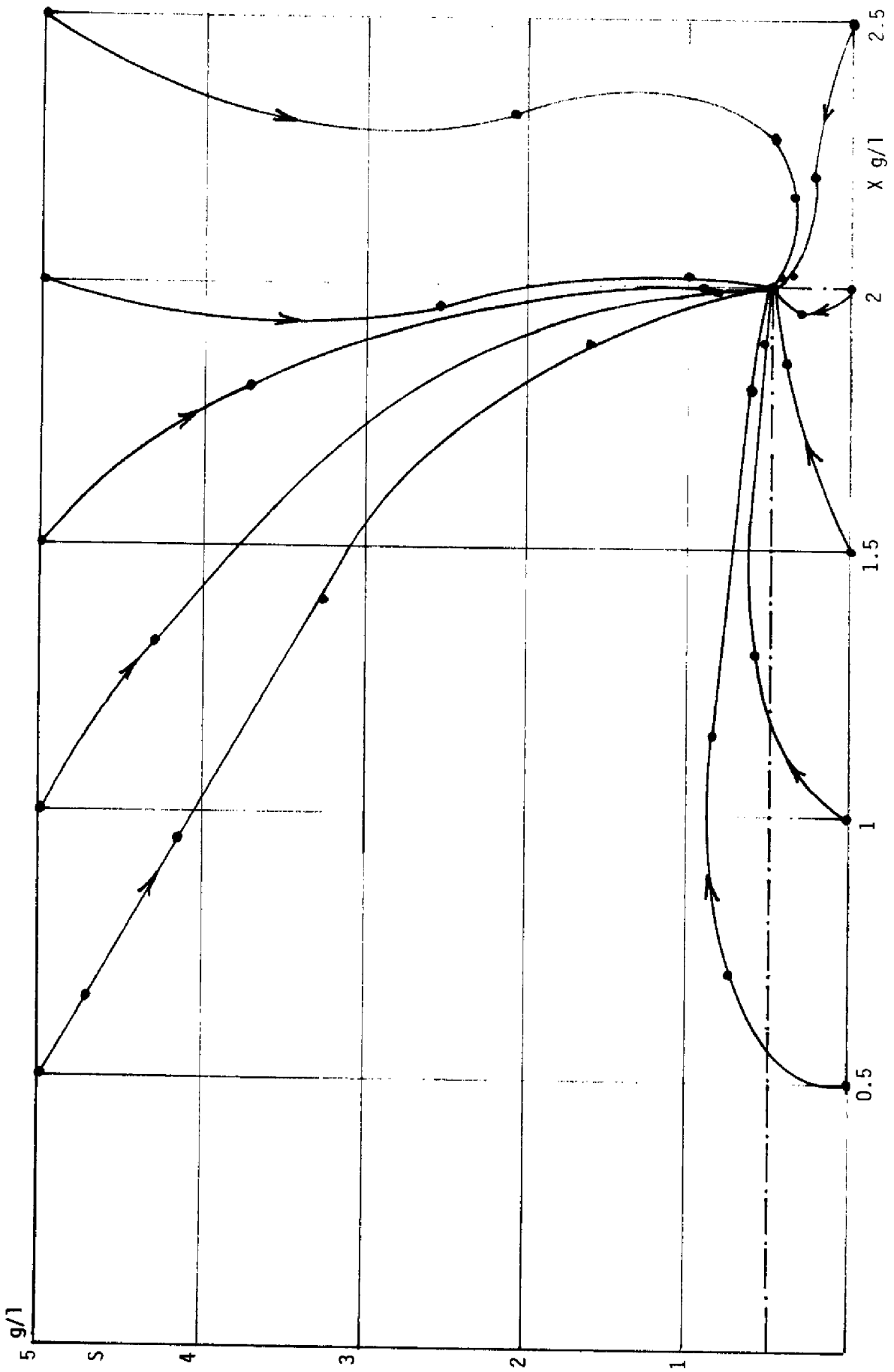


FIGURE 3.9. Simulation du système en boucle fermée ($\lambda_0 = -2$)

Le calculateur ayant accès aux variables X , S par les capteurs, il fixe le taux de dilution et d'alimentation définis par la commande:

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \bar{D} - \frac{\lambda_0}{\bar{X}} \cdot (X - \bar{X}) \end{array} \right. \quad (3.59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \bar{F} - \frac{\lambda_0 \cdot \bar{S}}{\bar{X}} \cdot (X - \bar{X}) + \lambda_0 \cdot (S - \bar{S}) \end{array} \right. \quad (3.60)$$

Les valeurs λ_0 , \bar{D} , \bar{F} , \bar{X} et \bar{S} sont affichées grâce au moniteur temps réel, et le calculateur délivre deux tensions qui commandent les débits de milieu minéral et de méthanol assurés par la pompe à double tête d'alimentation. Remarquons que la tâche en question n'occupe que 300 mots (les calculs sont faits en flottant).

Les courbes des figures 3.10 et 3.11 illustrent la réponse de l'état du système et l'évolution de la commande respectivement. Après une fermentation en discontinu (E4) permettant d'arriver à une concentration importante en biomasse, nous avons essayé de réguler les variables d'état de façon arbitraire.

Dans le premier essai, par exemple on a désiré maintenir la concentration en biomasse initiale, tout en augmentant la concentration en substrat et dans le deuxième, on a voulu diminuer les deux concentrations X et S .

Dans le premier cas $\lambda_0 = -0,2$ tandis que dans le second $\lambda_0 = -0,5$; ce qui explique en partie la plus grande précision de l'état obtenu dans le second régime permanent. En effet, la matrice de retour K est proportionnelle du déplacement des modes du système linéarisé (λ_0). Si λ_0 est grand, des petites variations sur l'état se répercuteront fortement sur les variables de commande qui essaieront de corriger ces écarts.

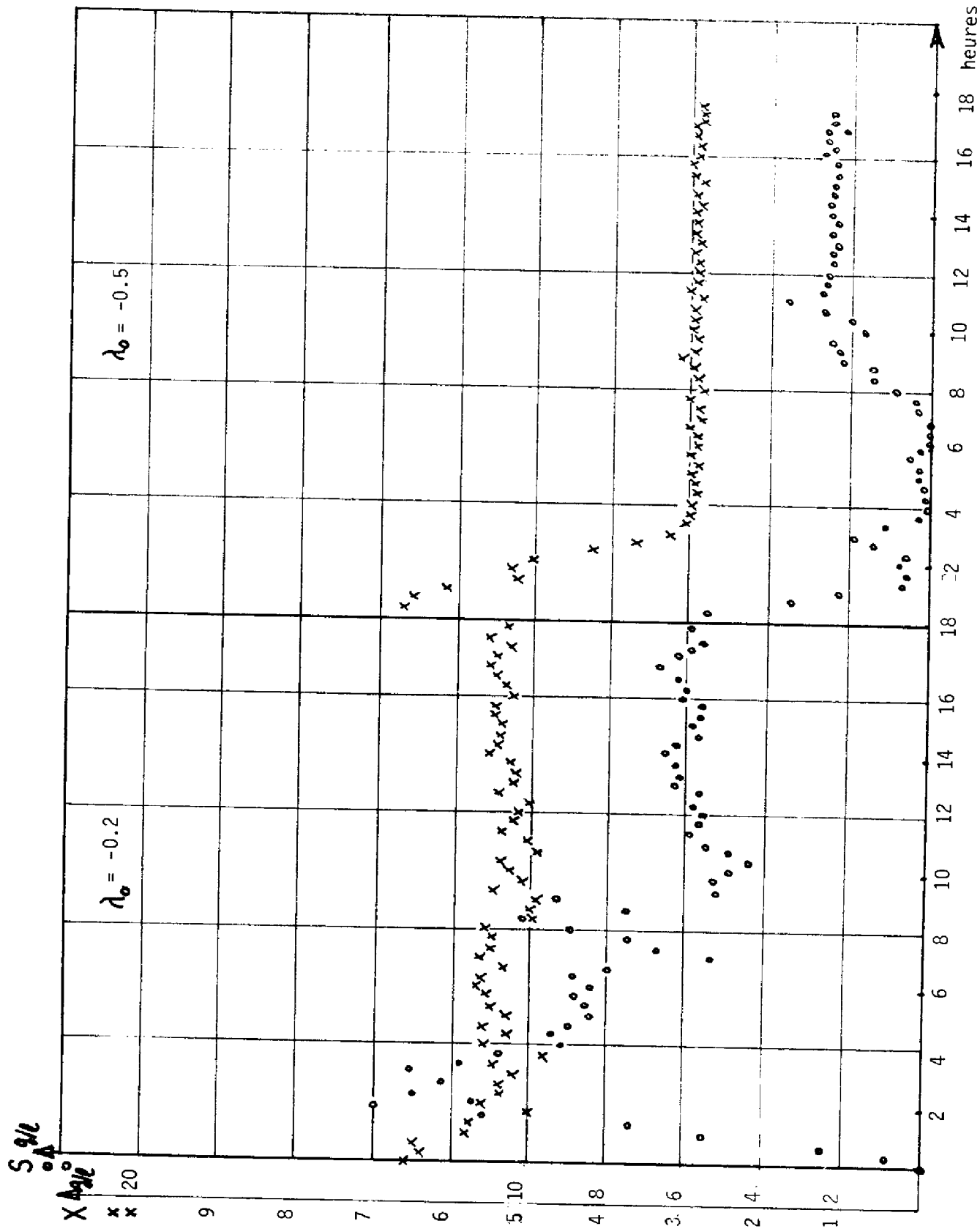


FIGURE 3.10. Evolution de l'état en commande modale.

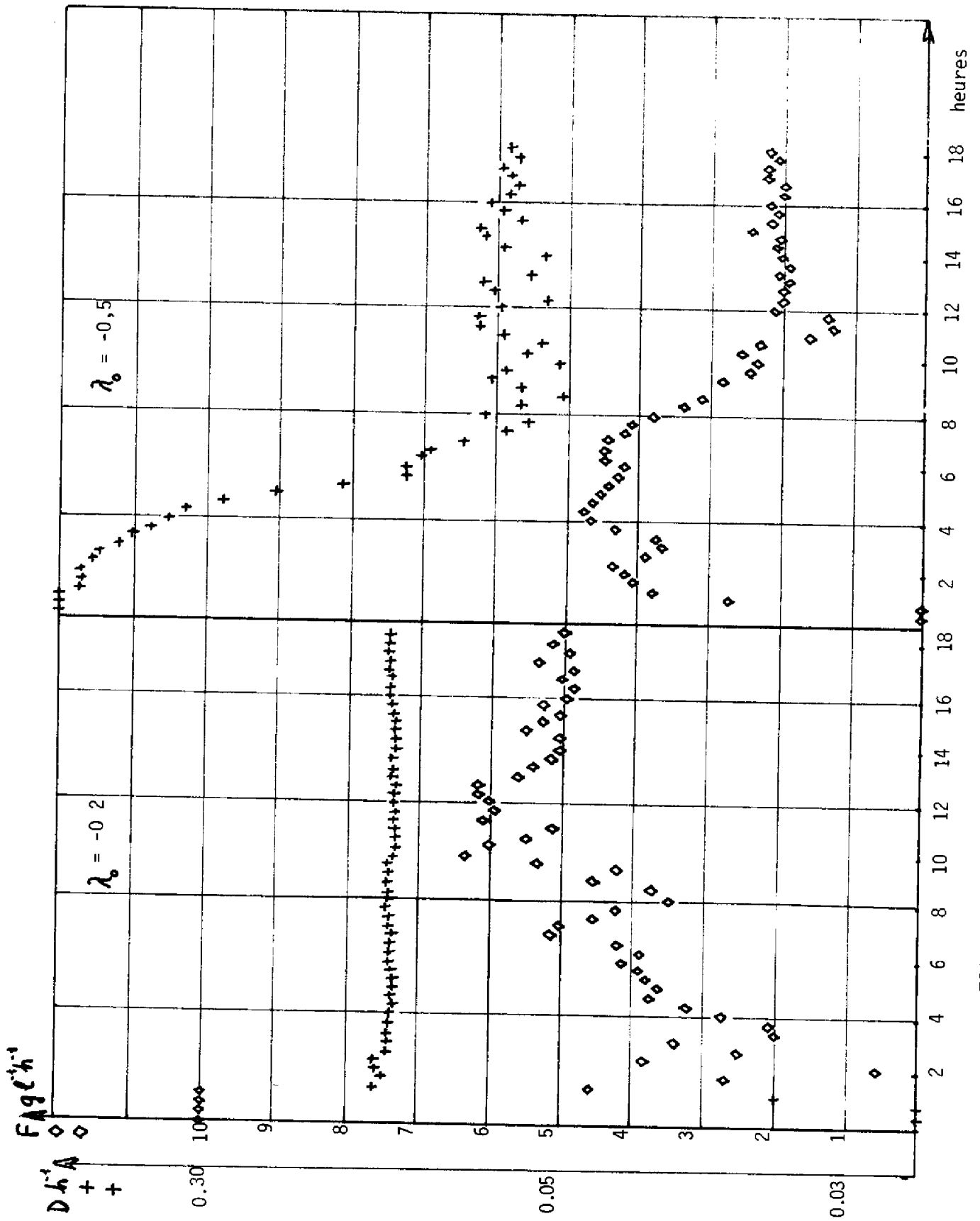


FIGURE 3.11. Evolution de la commande par retour de l'état

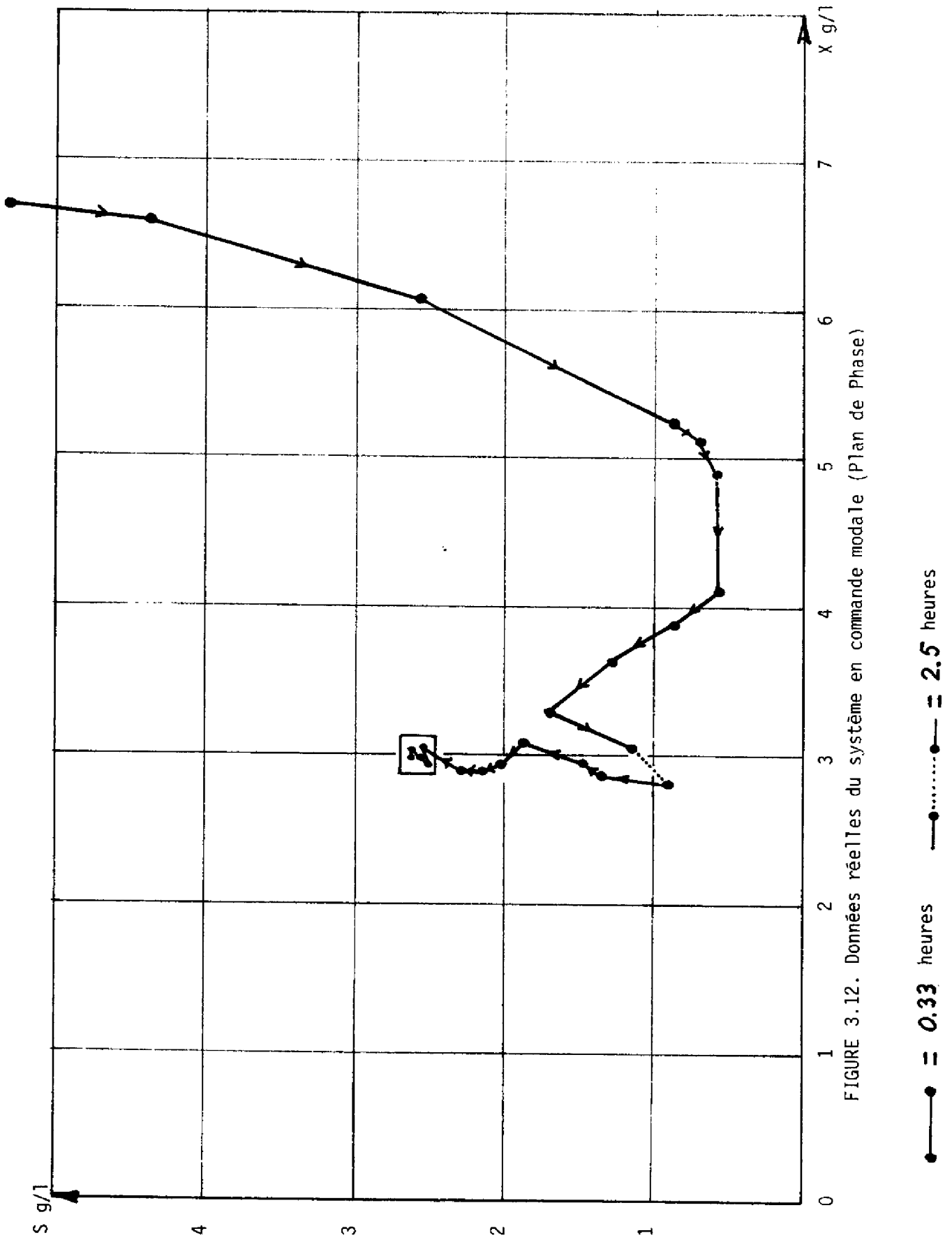


FIGURE 3.12. Données réelles du système en commande modale (Plan de Phase)

Enfin, la figure 3.12 montre dans le plan de phase l'évolution du deuxième échelon visible sur les figures 3.10 et 3.11. Le régime permanent est assez rapidement atteint (9 heures).

CONCLUSION

Nous avons étudié dans ce chapitre les deux aspects d'une commande optimale d'un processus de fermentation :

L'optimisation statique par la recherche d'un algorithme simple et rapide (le temps d'exécution est inférieur à 0,4 secondes sur IBM 370-65) permettant la connaissance du point de fonctionnement optimal compte tenu des contraintes physiques du système.

L'aspect dynamique , en étudiant la position du point d'équilibre (stabilité) et la synthèse d'une loi de commande définie à partir du système linéarisé. Cette loi a été appliquée avec succès en simulation et en pratique sur le processus permettant ainsi de réguler l'état aux valeurs calculées par l'optimisation statique et d'accélérer les transitoires.

---o0o---

BIBLIOGRAPHIE DU 3ème CHAPITRE.

- III.1. KING R.E, ARAGONA J., CONSTANTINIDES A. (1974). -
"Specific Optimal control of a batch fermentor".
INT. J. CONTROL, Vol. 20, N° 5, pages 869-879.
- III.2. BOURDAUD D., FOULARD C. (1974). - "Identification and
Optimisation of batch culture fermentation process"
The first European on computer process control in fermentation. INRA (DIJON)
- III.3. TAKAMATSU T., HASHIMOTO I., SHIOYA S., MIZUHARA K.,
KOIKE T., OHNO H . (1972) "Theory and practice of optimal
in continuous fermentation process".
I.F.A.C.
- III.4. G. d'ANS, GOTTLIEB D., KOKOTOVIC P.V. (1972). - "Optimal
control of bacterias growth"
I.F.A.C.
- III.5. RICHALET J., RAULT A., POULIQUEN R. (1974). - "Identifica-
tion des processus par la méthode du modèle
Gordon & Breach
- III.6. RUIZ X. (1976). - "Identification et commande sous-optimale
d'un four à diffusion.
Thèse de doctorat 3ème cycle. LAAS. Toulouse.
- III.7. FLETCHER R., POWELL M. (1963). - "A rapid descent method
for minimization".
Computer Journal. 6.2. pages 163-168.

- III.8. SEVELY Y. RIBOT D., QUEVEDO J., POURCIEL J.B. (1976). - "Automation-Informatique en fermentation". Colloque sur l'informatique au service de l'industrie chimique, PARIS.
- III.9. RIBOT D, SEVELY Y. (1975). - "Conduite numérique et optimisation d'un pilote de fermentation continue". Colloque "Automatisation des processus de fermentation". AFCET, Paris.
- III.10. RIBOT D. (1976) - "Commande numérique et optimisation d'une unité pilote de fermentation". Thèse de doctorat d'ingénieur. LAAS. Toulouse III.
- III.11. RIBOT D. (1976). - "Etude et réalisation d'un moniteur temps réel adapté au PDP-8". Note interne LAAS, Toulouse.
- III.12. CONSTANTINIDES A., SPENCER J., ELMER L., GADEN (1970). "Optimization of batch fermentation process". Biotech. Bioeng. vol 12, pages 1081-1098.

CONCLUSION

Le travail que nous présentons ici constitue l'essentiel de notre contribution, à l'intérieur de l'équipe SPRUP (1) du LAAS, à l'automatisation par ordinateur de processus réels et plus précisément à l'étude et l'optimisation d'une unité de fermentation continue sur méthanol. L'essentiel seulement, car une partie non négligeable de notre activité a concerné tous les aspects pratiques de mises au point d'appareillage et de programmes, de maintenance de l'environnement analytique de l'unité, autant de tâches qui ne peuvent pas être prises en compte dans la rédaction d'une thèse. Comme on peut transparaître que très partiellement la nécessaire mise au courant, même élémentaire, même partielle d'un domaine scientifique, nouveau pour nous, aussi complexe que la biochimie.

L'étude du processus de fermentation et du modèle retenu à partir des expériences, tant en discontinu qu'en continu, sur l'unité pilote, fait l'objet du premier chapitre. Soulignons à ce propos que le nombre, limité, d'essais de fermentations utilisables ne traduit que très imparfaitement la part de notre activité qui leur a été consacrée. Une étroite collaboration avec les biochimistes a été nécessaire et très enrichissante pour nous.

Nous avons pu nous rendre compte que si la participation des biochimistes était absolument fondamentale, l'automaticien grâce aux améliorations considérables qu'il apporte à l'expérimentation - en particulier par le ordinateur - grâce aussi à sa méthodologie d'approche des problèmes participait de façon active à leur résolution.

(1) Equipe "Système à paramètres répartis - Unités Pilotes".

L'aspect le plus personnel de notre recherche a abouti à l'estimation des paramètres de la fermentation par filtrage non linéaire. Cette approche stochastique, qui a fait l'objet d'études théoriques au LAAS, est, à notre connaissance, originale pour ce type de processus.

En ce qui concerne la conduite proprement dite, nous avons retenu la "philosophie" d'approche déjà préconisée dans l'équipe : optimisation statique et accélération des transitoires par commande modale. Nous avons testé, pour la recherche de l'extrémum du critère, la méthode SPHERA, après avoir explicité ce critère uniquement en fonction des variables de commande : cette méthode nous a donné toute satisfaction.

Nous avons pu vérifier à nouveau l'intérêt de la loi de commande modale retenue, proposée par le Professeur SEVELY, qui en dehors de sa simplicité présente l'avantage d'être indépendante de l'expression du taux de croissance retenu et des paramètres (il n'en est bien entendu pas de même pour le calcul de points de consigne que l'on se propose d'atteindre).

Nous avons effectivement implanté sur calculateur de processus cette loi et conduit l'unité pilote : Nous ne pensons pas pour autant qu'il faille considérer ce travail comme terminé. Nous espérons au contraire qu'un effort conjugué en instrumentation (capteurs basés sur les bilans thermiques et gazeux) et en informatique temps réel (équipement des bioréacteurs en microcalculateurs) permettront d'accentuer encore l'impact de l'automatique dans le domaine des fermentations.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
I. MODELISATION	7
INTRODUCTION	9
I.1. Théorie	10
I.1.1. Les relations biochimiques	10
I.1.2. Equations - Bilan .	14
I.2. Techniques de la fermentation	21
I.2.1. Les microorganismes, le milieu et la préparation des levains.	21
I.2.2. Description de l'unité pilote	22
I.3. Résultats et discussion	25
CONCLUSION	40
II. ESTIMATION PARAMETRIQUE PAR FILTRAGE NON LINEAIRE	43
INTRODUCTION	45
II.1. Théorie du F.N.L.	48
II.1.1. Modèle stochastique	48
II.1.2. Définition d'un critère d'estimation	50
II.1.3. Filtrage non linéaire continu-discret.	51
II.2. Application aux processus de fermentation	59
II.2.1. Unité pilote de méthanol	59
II.2.2. Unité pilote sur n-alcanes	72
II.3. Programmation numérique de la méthode.	78
CONCLUSION	86

III. COMMANDE OPTIMALE	89
INTRODUCTION	91
III.1. <i>Optimisation statique</i>	92
III.1.1. <i>Critères d'optimisation</i>	92
III.1.2. <i>Position du problème - Hypothèses</i>	94
III.1.3. <i>Méthode de recherche de l'optimum</i>	97
III.1.4. <i>Résultats et sensibilité aux variations des paramètres.</i>	103
III.2. <i>Etude de la stabilité</i>	112
III.3. <i>Commande par retour d'état</i>	117
III.3.1. <i>Théorie et simulation</i>	117
III.3.2. <i>Application au pilote sur méthanol.</i>	121
CONCLUSION	128
CONCLUSION	131