



HAL
open science

Contribution à l'étude de la stabilité des oscillateurs harmoniques à transistors

Yaro Burian

► **To cite this version:**

Yaro Burian. Contribution à l'étude de la stabilité des oscillateurs harmoniques à transistors. Micro et nanotechnologies/Microélectronique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 1968. Français. NNT : . tel-00176197

HAL Id: tel-00176197

<https://theses.hal.science/tel-00176197>

Submitted on 2 Oct 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSES

présentées

à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse
pour l'obtention

du grade de Docteur ès Sciences Appliquées

par

Yaro BURIAN

Ingénieur et Maître ès Sciences
I.T.A., S. José dos Campos, Brésil

1^{re} THÈSE

**Contribution à l'étude de la stabilité
des oscillateurs harmoniques à transistors**

2^{me} THÈSE

Proposition donnée par la Faculté

Soutenues le 1^{er} Mars 1968 devant la Commission d'Examen

MM. J. LAGASSE

Président

I. GUMOWSKI
G. GIRALT
C. MIRA
G. GRATELOUP

} Examineurs

"Ce n'est pas dans la Science qu'est le Bonheur
mais dans l'acquisition de la Science"

Edgard POE

AVANT-PROPOS

Le présent travail a été effectué au Laboratoire de Genie Electrique de Toulouse sous la direction de Monsieur le Professeur LAGASSE. C'est grâce à l'appui de l'Institut Technique d'Aéronautique de S. Jose des Campos et du Conseil National de Recherches du Brésil que notre séjour en France a été possible.

Nous sommes heureux de rendre honneur et de témoigner notre attachement à Monsieur le Professeur LAGASSE qui a bien voulu nous recevoir dans son Laboratoire et nous faire bénéficier de son aide constante et généreuse.

Nous adressons ici toute notre reconnaissance à Monsieur GIRALT, Directeur de Recherches au C.N.R.S. qui, malgré ses multiples occupations nous a fait le grand honneur de s'intéresser à nos travaux et de participer au Jury.

Que Monsieur le Professeur GUMOWSKI trouve ici le témoignage de notre gratitude pour les précieux conseils qu'il nous a si aimablement prodigués.

Nous exprimons nos vifs remerciements à Monsieur MIRA, Maître de Conférences. Ses suggestions et critiques constructives nous ont été très utiles.

Nous devons beaucoup à Monsieur GRATELOUP, Maître de Conférences, qui, avec efficacité, a dirigé nos recherches. Nous ne saurions trop lui témoigner notre profonde reconnaissance.

Nous devons mentionner enfin le concours précieux du Service de Documentation du Laboratoire dans la réalisation matérielle de ce mémoire.

INTRODUCTION

L'étude des oscillations, en particulier des oscillations de nature électrique, a connu un important développement depuis la thèse de Barkhausen, il y a une soixantaine d'années. C'est à partir de cette époque d'ailleurs que les circuits oscillateurs électriques ont acquis une importance sans cesse croissante, de par la fonction essentielle qu'ils assurent au sein des systèmes électroniques de commande ou de télécommunications si largement développés depuis lors. En conséquence, l'étude de plus en plus précise du comportement de ces oscillateurs a revêtu un caractère d'extrême utilité et a suscité de nombreux travaux, tant du point de vue de l'analyse proprement dite que du point de vue de la synthèse de ces dispositifs. De plus, étant donné leur réalisation technologique relativement aisée et peu coûteuse et leur grande souplesse d'emploi pour l'observation concrète des oscillations, ils se sont révélés des supports expérimentaux extrêmement précieux pour les recherches fondamentales dans le domaine de la théorie des oscillations.

Les oscillations dans un circuit à triode ont été étudiées par Van der Pol, à partir d'une équation différentielle du second ordre à laquelle son nom est désormais rattaché (voir par exemple [1]). Il a développé, à cet effet, une méthode approchée de détermination des solutions périodiques de cette équation.

Un modèle mathématique pour l'étude d'un système physique est toujours construit moyennant certaines hypothèses simplificatrices ; ceci entraîne nécessairement des différences d'ordre quantitatif entre le comportement réel du système physique et le comportement théorique prévu à partir de son modèle. Le modèle est toutefois valable s'il y a concordance qualitative entre ces deux comportements. En ce sens, l'oscillateur

de Van der Pol ou certaines de ses généralisations, qui conservent l'ordre deux pour l'équation différentielle qui les représente, constituent des modèles convenables pour une très large classe d'oscillateurs couramment rencontrés en pratique. L'analyse de ces modèles a suscité de nombreux travaux et leurs comportements sont désormais précisés de façon à peu près complète, même si des expressions explicites de la solution en fonction du temps ne peuvent être écrites sous forme entière à l'aide des fonctions usuelles.

Le problème que nous allons traiter, en prenant comme exemple quelques oscillateurs particuliers à transistor, concerne l'étude d'une certaine classe de circuits oscillateurs dont le fonctionnement dynamique est décrit par des équations différentielles du troisième ordre, c'est-à-dire, qui sont des systèmes à 1,5 degré de liberté au sens de la Mécanique Classique.

Le passage à l'ordre 3 de l'équation différentielle du modèle peut avoir plusieurs causes. Nous considérons dans ce mémoire celle liée à l'existence d'un élément réactif indépendant ajouté à l'oscillateur soit pour permettre un régime de fonctionnement moins riche en harmoniques, soit pour améliorer la stabilité de l'amplitude d'oscillation (voir par exemple [2]).

L'expérience montre qu'il peut apparaître, pour certaines plages de valeurs de cet élément réactif, des oscillations intermittentes, de nature presque périodique en général ; on en déduit l'existence d'une deuxième condition de stabilité des oscillations périodiques, outre la condition d'un gain équivalent décroissant avec l'amplitude. Par ailleurs, on sait que des oscillations presque périodiques dans le cas de systèmes décrits par des équations différentielles autonomes sont possibles seulement si l'ordre de ces équations est au moins égal à 3. De plus, la stabi-

lité d'une solution périodique d'un système autonome à n degrés de liberté dépend effectivement de $2n-1$ conditions.

Dans le premier chapitre de notre mémoire, nous établissons un modèle du transistor en régime non linéaire, convenable pour caractériser son comportement en tant qu'élément actif d'un oscillateur harmonique. Pour cela, nous avons été amené à choisir parmi les diverses non linéarités du transistor, les caractéristiques non linéaires des courants émetteur, base et collecteur en fonction de la tension émetteur-base. Pour les applications dans lesquelles la distorsion introduite par ces caractéristiques non linéaires peut être négligée, telles que les circuits amplificateurs à bande étroite ou les oscillateurs harmoniques, il est possible de représenter le transistor par un modèle linéarisé équivalent, les diverses admittances étant des fonctions de l'amplitude de la tension sinusoïdale émetteur-base. Le comportement de ces admittances équivalentes est différent suivant le mode de polarisation du transistor : si cette polarisation est réalisée avec une composante continue de la tension émetteur base constante, les admittances équivalentes sont des fonctions croissantes de l'amplitude ; si la polarisation est effectuée de façon à assurer une composante continue du courant émetteur constante, ce sont des fonctions décroissantes de l'amplitude. Dans ce deuxième cas, le plus utilisé en pratique pour des raisons de stabilité thermique du circuit, la réalisation du circuit de polarisation exige la présence d'un élément réactif. Le comportement linéaire du circuit de polarisation du transistor est donc décrit, même aux fréquences basses, par une équation différentielle du premier ordre. Les paramètres linéarisés équivalents dépendent alors non seulement de l'amplitude de la tension sinusoïdale émetteur-base, mais aussi de la façon dont cette amplitude varie dans le temps.

Dans le deuxième chapitre, l'étude de l'oscillateur accordé à transistor à l'aide d'un modèle simplifié à 1 degré de liberté nous a permis de conclure qu'un fonctionnement de l'oscillateur sans saturation du transistor n'est possible que si la polarisation est effectuée à courant émetteur constant. Il y a donc, en plus de la stabilité thermique, une deuxième raison pour ce type de polarisation. L'observation expérimentale de ces oscillateurs montre un comportement avec oscillations intermittentes dès que la capacité du circuit de polarisation, nécessaire pour assurer une polarisation à courant émetteur constant, dépasse une certaine valeur critique ; nous devons donc conclure que le modèle simplifié à 1 degré de liberté ne permet pas de rendre compte de ce mode de comportement observé. Nous avons montré qu'à l'aide d'un raisonnement physique, utilisant les conclusions du premier chapitre, il est possible de faire apparaître une limite de stabilité liée à la valeur de la capacité du circuit de polarisation.

Pour compléter les résultats du deuxième chapitre, nous avons étudié dans le troisième chapitre les équations différentielles de l'oscillateur accordé à transistor à l'aide d'une modification de la méthode de Van der Pol. Il a été possible ainsi d'établir des équations différentielles simplifiées, du deuxième ordre, qui permettent l'étude du régime transitoire des oscillations au voisinage de l'oscillation entretenue permanente. Nous avons été en mesure d'expliquer la nature dangereuse de la limite de stabilité correspondante à la valeur critique de la capacité de polarisation : si cette capacité dépasse la valeur critique on obtient des oscillations intermittentes, comportement inacceptable en général, et non des oscillations avec un faible taux d'ondulation, ce qui pourrait être admis en pratique.

Le quatrième chapitre utilise les résultats précédents pour l'étude des montages oscillateurs à amplitude stabilisée comportant des circuits de stabilisation à redresseur ou à élément thermique ; sous certaines hypothèses, ces oscillateurs appartiennent aussi à la classe des systèmes à 1,5 degré de liberté. Nous avons montré que, selon la structure de l'atténuateur variable utilisé dans l'oscillateur, la deuxième condition de stabilité exige que la constante de temps du circuit de stabilisation de l'amplitude reste inférieure à une certaine valeur limite ou bien permet à cette constante de temps d'être arbitrairement élevée.

Dans le dernier chapitre nous exposons les résultats expérimentaux observés sur un montage oscillateur à amplitude stabilisée, en utilisant notamment les résultats théoriques du quatrième chapitre.

CHAPITRE 1

LE FONCTIONNEMENT NON LINEAIRE DU TRANSISTOR

1.1 INTRODUCTION

La réalisation de circuits oscillateurs harmoniques à transistor exige un comportement non linéaire de l'élément actif, susceptible de limiter l'amplitude de l'oscillation.

Abstraction faite des difficultés d'ordre technologique, il est possible de construire des oscillateurs à circuit accordé d'un type conventionnel (HARTLEY, COLPITTS, etc. [3]) à des fréquences arbitrairement basses. En conséquence, en première approximation, les non linéarités du transistor indépendantes de la fréquence doivent être suffisantes pour obtenir la limitation d'amplitude exigée. L'effet des non linéarités négligées dans cette première approximation serait de donner, particulièrement aux fréquences plus élevées d'oscillation, une meilleure concordance quantitative entre le modèle et le système physique.

En se limitant au modèle de premier ordre, les non linéarités qui nous intéressent doivent donc être celles indépendantes de la fréquence, à savoir :

- les caractéristiques non linéaires des courants émetteur et collecteur en fonction de la tension émetteur-base ;
- l'écrêtage du signal comme conséquence de l'inversion de la tension entre collecteur et base ;
- la variation des gains en courant avec la polarisation ;
- la variation des éléments extrinsèques du transistor avec la polarisation, principalement celle de la résistance de base r_{bb} .

Parmi ces effets non linéaires les deux premiers sont les plus importants. Les deux suivants sont dûs principalement à la conduction transversale dans la zone de base et à l'existence d'un courant de génération-recombinaison localisé au voisinage de la surface extérieure de la diode émetteur-base ; aux très forts courants, il est également nécessaire de tenir compte de la diminution de l'efficacité du taux d'injection.

Pour ce qui concerne la variation du gain en fonction du courant, la courbe de la figure 1.1 en donne l'allure type : il est donc possible de choisir un point de fonctionnement autour duquel le gain en courant reste très sensiblement constant. D'autre part, l'analyse théorique complète

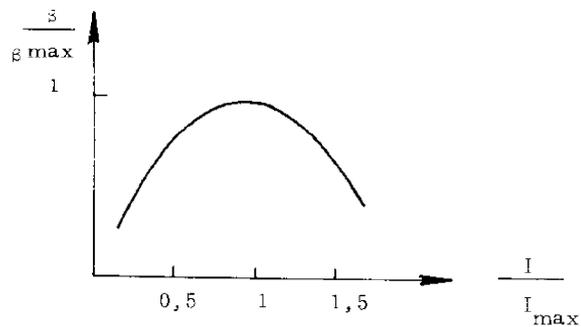


Figure 1.1

de ces phénomènes montre que c'est également au voisinage du maximum du gain β que les paramètres résistance d'entrée et transconductance sont les plus constants et très proches des valeurs prévues par l'analyse unidimensionnelle classique [4] [5] [6] [7].

L'écrêtage du signal, quelquefois observé dans les circuits oscillateurs à circuit accordé, est le plus souvent évité. En effet, la distorsion harmonique correspondante est à l'origine d'une grande riches-

se d'harmoniques dans l'oscillation, et, en conséquence, d'une mauvaise stabilité en fréquence [8].

Dans notre analyse du comportement non linéaire du transistor et de sa caractérisation en tant qu'élément actif des montages oscillateurs, nous nous limiterons donc à la première non linéarité, c'est-à-dire, aux caractéristiques non linéaires des courants émetteur et collecteur en fonction de la tension émetteur-base.

1.2 REPRESENTATION DU TRANSISTOR INTRINSÈQUE

Avec les hypothèses simplificatrices suivantes : résistivité négligeable du cristal constituant le transistor, en particulier de la zone de base, absence des phénomènes de surface, on établit un premier modèle du transistor, dit modèle unidimensionnel. Si, de plus, on fait abstraction des capacités de transition, on obtient le modèle du transistor intrinsèque qui compte tenu de la discussion du paragraphe précédent correspondra au comportement réel dans les conditions expérimentales fixées. Par ailleurs, pour des faibles niveaux d'injection de porteurs minoritaires de charge dans la base, le fonctionnement du transistor intrinsèque est décrit par une équation aux dérivées partielles linéaire, l'équation de continuité :

$$\frac{\delta p}{\delta t} = D_p \frac{\delta^2 p}{\delta x^2} - \mu_p \varepsilon \frac{\delta p}{\delta x} - \frac{p}{\tau_p}$$

où p représente la concentration en excès des porteurs minoritaires de charge dans la base, D_p la constante de diffusion, μ_p la mobilité, τ_p la durée de vie des porteurs minoritaires de charge et ε le champ électrique dans la base, fonction de la répartition des impuretés dans la base.

L'une des deux conditions aux limites est une fonction exponentielle, donc non linéaire, de la tension émetteur-base V_{eb} , l'autre est une constante moyennant l'hypothèse de l'effet Early négligeable, c'est-à-dire, d'une épaisseur effective de base indépendante de la tension collecteur-base :

$$p(0) = p_0 \left[\exp \frac{V_{eb}}{U_t} - 1 \right]$$

$$p(W) = 0$$

p_0 est une constante qui dépend du transistor, U_t est la tension thermodynamique

$$U_t = kT/q = 25 \text{ mV} \text{ à la température de } 300^\circ\text{K}$$

Les divers courants du transistor sont reliés par des équations linéaires à la variable indépendante p de l'équation de continuité. En effet, les courants émetteur I_e , collecteur I_c et base I_b sont donnés par

$$I_e = \left[-q A D_p \frac{\delta p}{\delta x} + q A \mu_p \epsilon \right]_{x=0}$$

$$I_c = \left[-q A D_p \frac{\delta p}{\delta x} + q A \mu_p \epsilon \right]_{x=W}$$

$$I_b = I_e - I_c$$

où q est la charge de l'électron et A l'aire de la jonction émetteur-base.

Par conséquent, à faible niveau d'injection et pour une modulation négligeable de l'épaisseur effective de la zone de base, d'une part les relations entre les courants émetteur, base et collecteur sont linéaires, d'autre part ces courants sont des fonctions non linéaires de la tension

émetteur-base V_{eb} .

Lorsque la tension V_{eb} est une fonction du temps $V_{eb}(t)$ les courants I_e , I_b , et I_c sont aussi des fonctions du temps. Soient $I_e(s)$, $I_b(s)$, $I_c(s)$ leurs transformées de LAPLACE respectives (s désignant la variable complexe). La résolution de l'équation de continuité à l'aide de la transformation de LAPLACE conduit aux relations suivantes, traduisant le comportement du transistor intrinsèque en fonction de $V_{eb}(t)$ sous les hypothèses mentionnées :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_c(s) = \alpha(s) \cdot I_e(s) \\ I_c(s) + I_b(s) = I_e(s) \\ I_e(s) = F(s) \cdot P(s) \end{array} \right.$$

$\alpha(s)$ et $F(s)$ sont des fonctions transcendantes de s , dépendant de divers paramètres physiques et géométriques du transistor.

$P(s)$ est la transformée de LAPLACE de la fonction

$$I_c \left\{ \exp \frac{V_{eb}(t)}{U_t} - 1 \right\}$$

où I_c est une constante qui dépend du transistor et U_t la tension thermodynamique

$$U_t = \frac{kT}{q} = 25 \text{ mV} \quad \text{à la température de } 300^\circ\text{K}$$

Le signe positif de la tension émetteur-base correspond à la polarisation directe de la jonction.

Modèle basse fréquence

Si la tension $v_{eb}(t)$ varie très lentement en fonction du temps, le modèle différentiel peut être remplacé par un modèle algébrique, et les relations (1.1) deviennent :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_c = \alpha_o I_e \\ I_c + I_b = I_e \\ I_e = I_o \left\{ \exp \left(\frac{v_{eb}(t)}{U_t} \right) - 1 \right\} \end{array} \right.$$

En fait, dans la région de fonctionnement qui a été définie au paragraphe précédent il est possible de décrire le comportement statique du transistor pour des forts signaux par un modèle particulièrement simple et tenant cependant compte de la nature bidimensionnelle de la zone de base. Il suffit [7] pour cela de remplacer dans (1.2) U_t par U'_t , avec

$$U'_t = mU_t$$

La valeur de m dépendant du type de transistor choisi devra être déterminée expérimentalement.

Dans le cas où v_{eb} varie très peu par rapport à une valeur moyenne v_{ebo} , on peut linéariser les relations (1.2) en utilisant le développement en série de l'exponentielle, limité aux deux premiers termes :

$$(1.3) \quad \exp\left(\frac{V_{ebo} + v}{U'_t}\right) \approx \exp\left(\frac{V_{ebo}}{U'_t}\right) \cdot \left(1 + \frac{v}{U'_t}\right)$$

Sous la condition $V_{ebo} \gg U'_t$, qui sera toujours supposée remplie dans la suite de notre mémoire, et avec les définitions :

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_e = I_{eo} + i_e \\ I_b = I_{bo} + i_b \\ I_c = I_{co} + i_c \end{array} \right.$$

I_{eo} , I_{bo} , I_{co} valeurs moyennes ou composantes continues de I_e , I_b , I_c , on obtient

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{eo} = I_o \exp \frac{V_{ebo}}{U'_t} \\ I_{co} + I_{bo} = I_{co} \\ I_{co} = \alpha_o I_{ec} \end{array} \right.$$

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} i_e = \frac{I_{e0}}{U_t} \cdot v = g_{11} \cdot v \\ i_c + i_b = i_e \\ i_c = \alpha_0 \cdot i_e = \alpha_0 \cdot g_{11} \cdot v = g_{21} \cdot v \end{array} \right.$$

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{11} = \frac{I_{e0}}{U_t} \\ g_{21} = \alpha_0 \frac{I_{e0}}{U_t} \end{array} \right.$$

La figure 1.2 représente un circuit équivalent du transistor obtenu à partir de ces relations. On note que la conductance d'entrée et la transconductance sont des fonctions linéaires du courant de polarisation du transistor

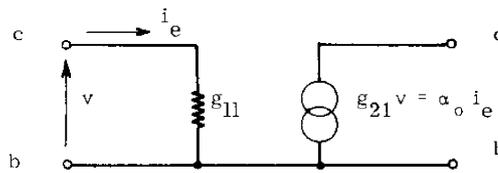


Figure 1.2
Circuit équivalent du transistor

Compte tenu de la limitation du développement en série de l'exponentielle à ses deux premiers termes, la validité de ce modèle linéaire est réduite au cas où la partie variable $v(t)$ de la tension

émetteur-base est très inférieure à ωU_t .

Dans le cas où la partie variable de V_{eb} est une fonction sinusoidale du temps : $v_e(t) = v \cos \omega t$; dont l'amplitude v n'est plus très petite par rapport à ωU_t , on peut substituer dans (1.1), à la fonction exponentielle, son développement en série de FOURIER. En effet [9], de la relation générale :

$$\exp(z \cos \theta) = I_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(z) \cos n\theta$$

dans laquelle $I_n(z)$ représente la fonction de BESSEL, modifiée de première espèce d'ordre n , on déduit ici :

$$\exp\left(\frac{v_{eb}}{U_t}\right) = \exp\left(\frac{v_{eb0}}{U_t}\right) \cdot \left[I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) \cos n \omega t \right]$$

avec $a = v/U_t$.

Avec les mêmes définitions que précédemment, on obtient :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{c0} = I_c \exp\left(\frac{v_{eb0}}{U_t}\right) \cdot I_0(a) \\ I_{cc} + I_{bc} = I_{e0} \\ I_{c0} = a_0 I_{e0} \end{array} \right.$$

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} i_e = I_0 \exp\left(\frac{V_{eb0}}{U_t'}\right) \cdot 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) \cos n\omega t \\ i_c + i_b = i_e \\ i_c = \alpha_0 i_e \end{array} \right.$$

Par rapport au cas "linéaire" précédent, la composante continue des divers courants est donc multipliée par $I_0(a)$ et la composante fondamentale par $2I_1(a)/a$. Il apparaît aussi des composantes harmoniques de fréquences multiples de la fréquence fondamentale. Le taux de distorsion correspondant est égal à :

$$D = \left[\frac{\sum_{n=2}^{\infty} I_n^2(a)}{I_1^2(a)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

expression qu'on peut réduire à la forme ci-dessous dans laquelle n'interviennent que les fonctions de BESSEL d'ordre 0 et 1 :

$$D = \left[\frac{I_0(2a) - I_0^2(a) - 2I_1^2(a)}{2I_1^2(a)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Dans certaines applications, on peut négliger la distorsion (amplificateurs à bande étroite, oscillateurs quasi sinusoidaux) et conserver seulement les deux premiers termes du développement en série (1.5). Dans ce cas, le transistor peut être représenté par un modèle non linéaire semblable à celui schématisé sur la figure 1.1, mais dans lequel les conductances g_{11} et g_{21} sont remplacées par les conductances équivalentes g_{11e} et g_{21e} pour les composantes fondamentales des courants i_e et i_c , fonctions de l'amplitude du signal d'entrée. Par rapport au cas "linéaire", ces conductances sont multipliées par $\gamma_{11}(a) / \gamma$ (pour a petit, ce facteur est approximativement égal à 1). Il est bon de noter par ailleurs, que le facteur $\gamma_{11}(a) / \gamma$ étant une fonction croissante de a , g_{11e} et g_{21e} croissent avec l'amplitude du signal. Le courant de polarisation i_{c0} est aussi une fonction croissante de l'amplitude du signal, par l'intermédiaire de $i_{e0}(a)$.

Ces conclusions s'appliquent dans le cas où $v_{e,b0}$ est indépendant de a , amplitude réduite du signal d'entrée, c'est à dire dans le cas où le transistor est polarisé à tension continue émetteur-base constante.

Cependant dans les applications pratiques, le plus souvent le transistor est polarisé à courant émetteur constant, afin d'assurer au circuit la stabilité thermique. L'expression de i_{e0} dans (1.9) indique qu'une polarisation à courant émetteur constant impose que la condition,

$$\exp\left(\frac{v_{e,b0}}{U_T}\right) \cdot i_{e0}(a) = \text{constante}$$

soit satisfaite, c'est-à-dire que la tension continue de polarisation émetteur-base $v_{e,b0}$ suive, en fonction de l'amplitude réduite a du signal

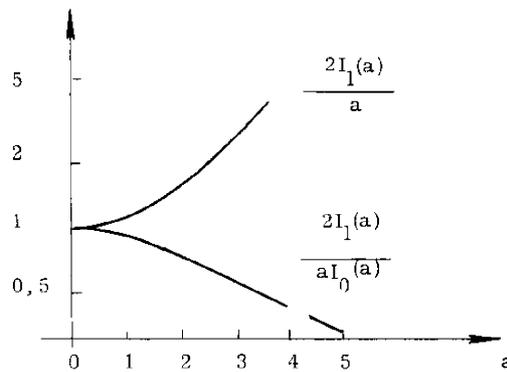
d'entrée, la loi

$$V_{ebo} = V_{ebo}(0) - U_t' \log I_0(a)$$

On constate aisément que, s'il en est ainsi, les conductances équivalentes g_{11e} et g_{21e} sont multipliées par $2I_1(a)/aI_0(a)$ par rapport au cas "linéaire" et deviennent des fonctions décroissantes de l'amplitude.

En résumé, les conductances g_{11e} et g_{21e} sont des fonctions croissantes ou décroissantes de l'amplitude selon que le transistor est respectivement polarisé à tension émetteur-base constant ou à courant émetteur constant.

La figure 1.3 représente l'allure des variations de $2I_1(a)/a$ et de $2I_1(a)/aI_0(a)$ en fonction de a



1.3 LES CIRCUITS DE POLARISATION

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que les admittances du transistor intrinsèque en régime non linéaire se comportent de façon tout à fait différente selon que la polarisation du transistor est faite à tension émetteur-base constante ou à courant émetteur constant. Comme nous l'avons souligné, la polarisation du transistor à courant émetteur constant est de loin la plus utilisée en pratique.

En fait, et bien qu'il soit possible de concevoir une grande variété de circuits de polarisation, ceux-ci se présentent en réalité dans la plupart des cas sous la forme schématisée sur la figure 1.4.

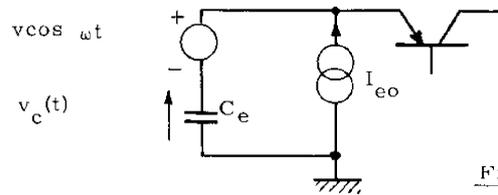


Figure 1.4

Circuit de polarisation

Analysons le comportement d'un tel système lorsque l'amplitude v du signal d'entrée varie.

Pour ne pas alourdir les calculs, nous limiterons cette analyse au cas des fréquences assez basses de fonctionnement, telles que les paramètres du transistor soient réels. Pour de telles fréquences, le comportement non linéaire du transistor est décrit par les relations (1.2)

Soit $x(t) = v_c(t)/U_+$ la tension réduite aux bornes du condensateur, $x(t)$ satisfait l'équation différentielle (1.11)

$$(1.11) \quad \dot{x} = \frac{I}{C_e U_t'} \left\{ I_{e0} - I_{\sigma} \exp(a \cos \omega t + x) \right\}$$

Pour a variable dans le temps d'une façon quelconque, (1.11) ne peut pas être intégrée sous une forme explicite. Par contre, pour $a = \text{constante}$, on peut écrire sous forme explicite la solution générale de (1.11). Une solution approchée dans le cas général peut être déterminée en assimilant la fonction $a(t)$ à une succession d'échelons.

Cas $a = \text{constante}$

Si l'amplitude réduite du signal d'entrée est constante, l'équation (1.11) admet pour solution générale :

$$(1.12) \quad x = -\log \left\{ k \exp\left(-\frac{I_{e0}}{C_e U_t'} t\right) + \frac{I_{\sigma} \cdot I_{\sigma}(a)}{I_{e0}} \right. \\ \left. + \frac{2I_{\sigma}}{C_e U_t'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(a) \cdot \left(\frac{I_{e0}}{C_e U_t'} \cos n\omega t + n \sin n\omega t\right)}{\frac{I_{e0}^2}{C_e U_t'} + (n\omega)^2} \right\}$$

où k est une constante, fonction de la valeur initiale de x .

En pratique, la capacité C_e est normalement choisie très grande. Si la condition :

$$(1.13) \quad \omega C_e \gg \frac{I_{e0}}{U_t}$$

est satisfaite, l'expression (1.12) se réduit à :

$$(1.14) \quad x = -\log \left\{ k \exp \left(-\frac{I_{e0}}{C_e U_t} t \right) + \frac{I_\sigma \cdot I_\sigma(a)}{I_{e0}} \right\}$$

En d'autres termes, si la condition (1.13) est satisfaite, la composante alternative de la tension aux bornes de la capacité est négligeable.

Dans ce cas simplifié, l'amplitude de la composante fondamentale des courants I_e et I_c est donnée par :

$$(1.15) \quad \begin{cases} I_{e1} = I_\sigma \cdot 2I(a) \cdot \left\{ k \exp \left(-\frac{I_{e0}}{C_e U_t} t \right) + \frac{I_\sigma I_\sigma(a)}{I_{e0}} \right\}^{-1} \\ I_{c1} = \alpha_0 I_{e1} \end{cases}$$

On en déduit les expressions approchées pour les conductances équivalentes g_{11e} et g_{21e}

$$(1.16) \quad \begin{cases} g_{11e} = \frac{2I(a)}{a} \cdot \frac{I_\sigma}{U_t} \left\{ k \exp \left(-\frac{I_{e0}}{C_e U_t} t \right) + \frac{I_\sigma I_\sigma(a)}{I_{e0}} \right\}^{-1} \\ g_{21e} = \alpha_0 g_{11e} \end{cases}$$

A la limite pour $t \rightarrow \infty$, on a :

$$(1.17) \quad \begin{cases} g_{11e} = \frac{2I_1(a)}{aI_0(a)} \cdot \frac{I_{e0}}{U_t} \\ g_{21e} = \alpha_0 g_{11e} \end{cases}$$

On retrouve évidemment les conductances équivalentes du transistor polarisé à courant émetteur constant.

De même, à partir de (1.14), pour $t \rightarrow \infty$ on peut écrire :

$$x \cdot U_t = V_{ebo}(a) = -U_t \log \frac{I_\sigma I_0(a)}{I_{e0}}$$

soit

$$V_{ebo}(a) = V_{ebo}(0) - U_t \log I_0(a)$$

On retrouve donc qu'à la limite la tension de polarisation suit la loi précédemment indiquée.

Cette variation de V_{ebo} en fonction de a peut être interprétée comme la conséquence du redressement du signal par la non linéarité non symétrique qui caractérise le transistor.

La loi de variation de $V_{ebo}(a)$ a fait l'objet d'une vérification expérimentale. La figure 1.5 représente le circuit utilisé et les résultats sont donnés sur la figure 1.6

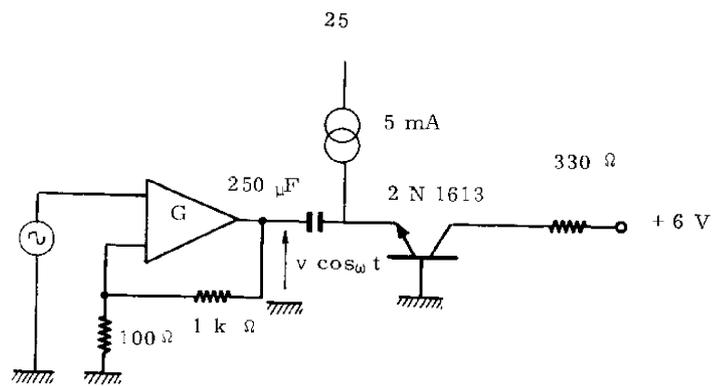


Figure 1.5
Circuit Experimental

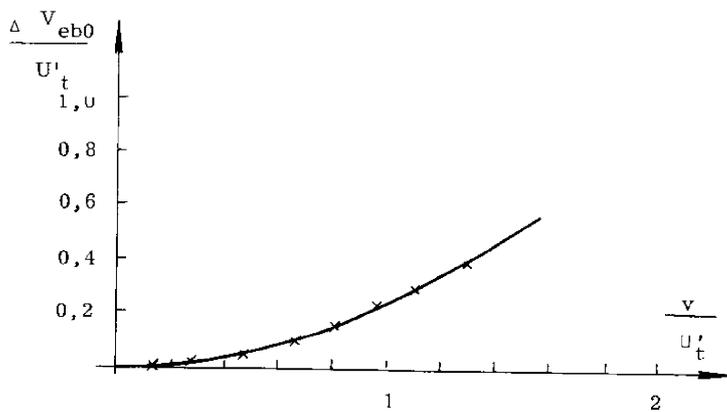


Figure 1.6

Cas où $a(t)$ est une succession d'échelons

En assimilant la fonction $a(t)$ à une succession d'échelons nous pouvons utiliser les résultats du cas $a = \text{constante}$ pour obtenir la solution $x(t)$ de (1.11), en adjoignant aux instants de discontinuité de $a(t)$, la condition de continuité correspondante pour x .

Nous allons traiter le cas suivant : l'amplitude réduite du signal conserve la valeur a_0 pendant un temps suffisant pour que la tension de polarisation soit donnée par :

$$x(t) = \log \frac{I_{e0}}{I_0 I_0(a_0)}$$

A l'instant $t = 0$, l'amplitude réduite $a = v/U_t'$ passe à la valeur a_1 . Il vient, d'après (1.14), (1.15) et (1.16) :

$$(1.19) \quad x(t) = \log \frac{I_{e0}}{I_0 I_0(a_1)} - \log \left\{ \left(\frac{I_0(a_0)}{I_0(a_1)} - 1 \right) \exp \left(- \frac{I_{e0}}{C_e U_t'} t \right) + 1 \right\} +$$

$$(1.20) \quad \begin{cases} I_{e1} = \frac{2I_0(a_1)}{I_1(a_1)} \cdot I_{e0} \cdot \left\{ \left(\frac{I_0(a_0)}{I_0(a_1)} - 1 \right) \exp \left(- \frac{I_{e0}}{C_e U_t'} t \right) + 1 \right\}^{-1} \\ I_{c1} = \alpha_0 I_{e1} \end{cases}$$

D'où les expressions des conductances équivalentes :

$$(1.21) \left\{ \begin{array}{l} g_{11e} = \frac{2I_1(a_1)}{a_1 I_0(a_1)} \cdot \frac{I_{e0}}{U_t} \cdot \left\{ \left(\frac{I_0(a_0)}{I_0(a_1)} - 1 \right) \exp \left(- \frac{I_{e0}}{C_e U_t} t \right) + 1 \right\}^{-1} \\ g_{21e} = \alpha_0 g_{11e} \end{array} \right.$$

Les résultats de cette analyse, schématisés de façon qualitative sur la figure 1.7, nous permettent de tirer les conclusions suivantes : si en régime permanent le transistor se comporte effective-

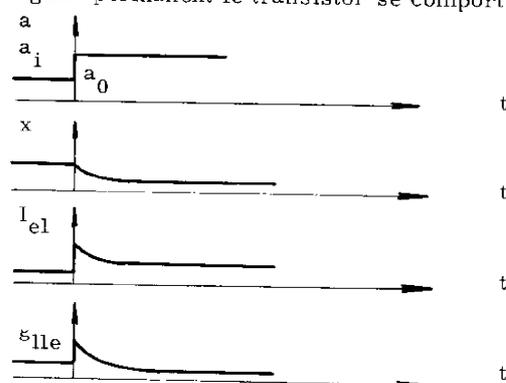


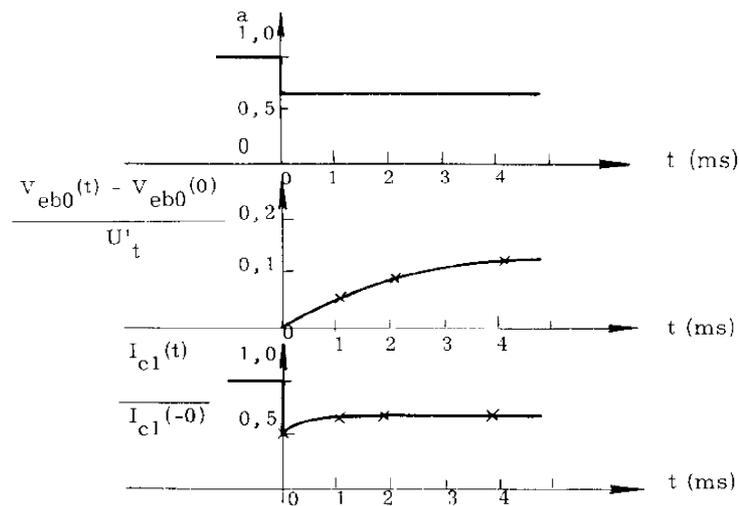
Figure 1.7

ment commepolarisé à courant émetteur constant, pour des variations rapides de l'amplitude du signal tout se passe comme s'il était polarisé à tension émetteur-base constante, donnée par :

$$V_{eb0} = U'_t \times (a) = U'_t \log \frac{I_{ec}}{I_{\sigma} I_{\sigma}(a_0)}$$

Les conductances g_{11e} et g_{21e} étant des fonctions croissantes ou décroissantes de a , selon que le transistor est polarisé respectivement à tension émetteur-base constante ou à courant émetteur constant, les variations rapides de l'amplitude du signal seront donc amplifiées et les variations lentes seront atténuées.

Une vérification expérimentale, à l'aide du circuit donné sur la figure 1.5 nous a permis d'obtenir les résultats schématisés sur la figure 1.8.



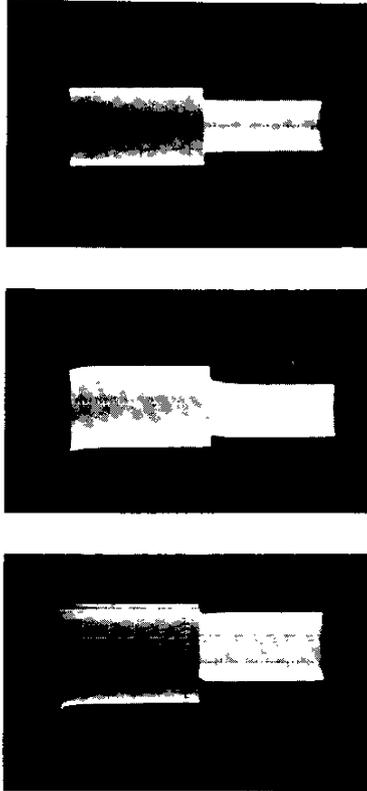


Figure 1.9

Les clichés ci-dessus, figure 1.9, représentent respectivement la tension du générateur à la sortie de l'amplificateur G , la tension émetteur-base du transistor, qui comporte en plus de la tension du générateur la composante redressée $x \cdot U'_t$ et le courant collecteur du transistor.

Dans le paragraphe suivant, la conclusion que les variations rapides de l'amplitude du signal sont amplifiées et les variations lentes sont atténuées va être précisée, pour des petites variations de l'amplitude, sous une autre forme.

1.4 GAIN EN MODULATION

1.4.1. Cas où la transconductance est indépendante du temps

Dans un domaine de fréquences assez basses, la transconductance du transistor g_{21e} est indépendante du temps ; son expression en fonction de a , selon que le transistor est polarisé à tension constante ou à courant constant s'écrit respectivement :

$$\frac{\alpha_0 I_{e0}}{U_t} = \frac{2 I_1(a)}{a} \quad ; \quad \frac{\alpha_0 I_{e0}}{U_t} = \frac{2 I_1(a)}{a I_0(a)}$$

Ces deux expressions sont de la forme $f(a) / a$.

La transconductance équivalente g_{21e} représente le gain du transistor entre l'amplitude de la tension sinusoïdale d'entrée et l'amplitude de la composante fondamentale du courant de sortie I_c . Pour ces deux signaux d'entrée et de sortie, le comportement du transistor est celui d'un organe non linéaire ayant une caractéristique de transfert non linéaire, indépendante du temps, c'est-à-dire purement algébrique, de la forme $f(a)$

Nous allons définir ce que nous appelons "le gain en modulation" d'un tel organe.

Pour une amplitude du signal d'entrée $a(1+m)$; avec m petit, l'amplitude du signal de sortie sera donnée pour m suffisamment petit par

$$f[a(1+m)] = f(a) + mf'(a) \cdot a$$

La variation relative du signal d'entrée étant m , la variation relative du signal de sortie sera :

$$\frac{m a f'(a)}{f(a)}$$

Nous appelons "gain en modulation" G_m le rapport entre la variation relative du signal de sortie et la variation relative du signal d'entrée, supposée petite :

$$G_m = \frac{a f'(a)}{f(a)}$$

Pour un transistor polarisé à tension constante ou à courant constant, les gains en modulation sont donnés respectivement par

$$(1.22) \quad G_h = \left[\frac{a I_o(a)}{I_1(a)} - 1 \right] \quad (\text{polarisation à tension constante})$$

$$G_b = \left[G_h - \frac{a I_1(a)}{I_o(a)} \right] \quad (\text{polarisation à courant constant})$$

La figure 1.10 représente l'allure des variations de G_h et G_b en fonction de a

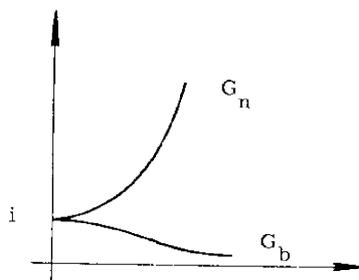


Figure 1.10

L'interprétation physique du gain en modulation est la suivante : soit un organe non linéaire, à caractéristique purement algébrique, dont le signal d'entrée est faiblement modulé en amplitude ; le gain en modulation représente le gain $\frac{a f'(a)}{f(a)}$ sur l'indice de modulation m dû à cet organe.

1.4.2. Cas où la transconductance est fonction du temps

L'analyse effectuée au § 1.3 montre que la transconductance d'un transistor polarisé à courant constant est une fonction du temps, si l'on tient compte du circuit de polarisation. L'expression de I_{c1} dans (1.20) indique clairement que l'amplitude de la composante fondamentale du signal de sortie varie avec le temps pour a constant. La caractéristique de transfert du transistor n'est donc pas purement algébrique. Nous allons substituer, dans ce cas, au gain en modulation, la fonction de transfert pour la modulation.

Nous considérons pour cela l'équation (1.20) , dans laquelle nous faisons

$$(1.23) \quad a_1 = a_0 (1 + m)$$

avec m petit. (1.20) peut être approchée par

$$(1.24) \quad I_{c1} = \alpha_D I_{e0} \cdot \frac{2I_1(a_0)}{I_0(a_0)} \left\{ 1 + m \left[G_b + (G_h - G_b) \exp \left(-\frac{I_{e0}}{C_e U' t} \right) \right] \right\}$$

où G_D et G_h sont les fonctions déjà définies.

Une variation relative m de l'amplitude du signal d'entrée petite et en forme d'échelon produit une variation relative de l'amplitude du signal de sortie exprimée en fonction du temps par :

$$(1.25) \quad m \left[G_b + (G_h - G_b) \exp \left(-\frac{I_{e0}}{C_e U' t} \right) \right]$$

Pour le système linéarisé en (1.24) , dont la réponse à un échelon m est donnée par (1.25) , on peut écrire [18] la fonction de transfert équivalente (1.26)

$$(1.26) \quad G_m(a, p) = G_b \cdot \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{1 + \frac{p}{\omega_2}}$$

avec

$$\omega_1 = \frac{G_b}{G_h} \cdot \frac{I_{ec}}{C_e U'_t}$$

$$\omega_2 = \frac{I_{ec}}{C_e U'_t}$$

La fonction de transfert (1.26) montre que si le signal d'entrée est faiblement modulé, le signal de sortie a un indice de modulation plus petit ou plus grand que l'indice de modulation du signal d'entrée, selon que la pulsation de modulation est inférieure ou supérieure à

$$\omega_2 \sqrt{(1 - G_b^2)/(G_h^2 - 1)}$$

1.5 SOMMAIRE

La considération des diverses non linéarités du transistor en vue des applications aux circuits oscillateurs nous a fait choisir les caractéristiques non linéaires des courants émetteur, base et collecteur en fonction de la tension émetteur-base. Le comportement non linéaire du transistor, caractérisé par des paramètres équivalents des composantes fondamentales des divers courants, dépend de la forme de polarisation du transistor. Pour les circuits pratiques, ces paramètres ne sont pas seulement des fonctions de l'amplitude du signal d'entrée, comme dans l'approximation classique du premier harmonique, mais ils dépendent aussi de la façon dont cette amplitude varie dans le temps.

C'est un modèle simplifié qui a été étudié. En particulier, d'une part les équations (1.2) pour les courants du transistor sont

modifiées, notamment dans le cas des courants élevés, si l'on tient compte des résistances extrinsèques du transistor, d'autre part la résistance de la source réelle de polarisation fournissant la composante continue I_{e0} du courant émetteur n'est pas infinie, ce qui entraîne une légère modification de l'équation (1.11) traduisant le comportement dynamique du circuit de polarisation.

CHAPITRE 2

ANALYSE D'UN OSCILLATEUR ACCORDE DECRIT PAR UN
MODELE A 1,5 DEGRE DE LIBERTE

2.1 INTRODUCTION

Des méthodes d'analyse développées en Mécanique non Linéaire pour l'étude des oscillations périodiques dans les systèmes autonomes et pour l'investigation de la stabilité de ces oscillations permettent de conclure que, dans le cas des oscillateurs à 1 degré de liberté la stabilité des oscillations périodiques dépend effectivement d'une seule condition.

L'analyse simplifiée d'un oscillateur à circuit accordé à transistor, considéré comme un système à 1 degré de liberté, montre que cette condition exige une polarisation du transistor à courant émetteur constant. Or, l'observation expérimentale du comportement d'un tel oscillateur met en évidence une deuxième condition de stabilité des oscillations périodiques.

Pour rendre compte du comportement observé, nous avons utilisé les résultats du chapitre précédent, obtenus à partir de la description du circuit de polarisation du transistor par une équation différentielle du premier ordre. Le modèle de l'oscillateur ainsi construit, avec 1,5 degré de liberté, permet de rendre compte du comportement observé du circuit, à savoir, l'existence de deux conditions de stabilité des oscillations périodiques.

2.2 L'OSCILLATEUR A CIRCUIT ACCORDE A TRANSISTOR

Nous nous proposons d'analyser le circuit oscillateur représenté sur la figure 2.1 sans les éléments de polarisation, et nous supposons que cet oscillateur peut être représenté par un modèle à 1 degré de liberté.

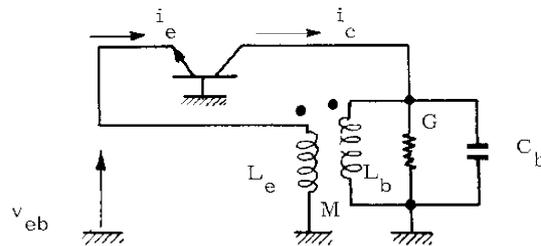


Figure 2.1

Circuit simplifié de l'oscillateur.

Avec les hypothèses suivantes :

- coefficient de qualité $Q = \sqrt{C_b / G^2 L_b}$ du circuit accordé élevé ;

- absence de saturation du transistor,

la tension d'oscillation est approximativement sinusoïdale et il est possible d'effectuer une analyse approchée du circuit à l'aide de la méthode de linéarisation équivalente [10]

Sous l'hypothèse d'une fréquence de l'oscillation suffisamment faible pour qu'on puisse convenablement utiliser le modèle basse fréquen-

lateur est celui de la figure 2.2

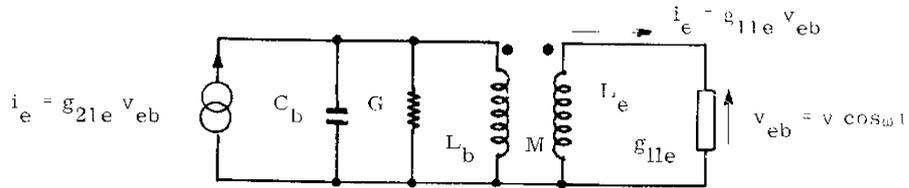


Figure 2.2

Circuit linéarisé équivalent de l'Oscillateur

Si on admet, finalement, un couplage parfait entre les bobines d'inductance L_b et L_e , disposées respectivement dans les circuits de collecteur et émetteur du transistor, condition exprimée analytiquement par la relation

$$M^2 = L_e L_b$$

l'équation différentielle linéarisée qui décrit le comportement de l'oscillateur s'écrit :

$$(2.1) \quad \ddot{v}_{eb} + \left[\frac{G}{L_b} - \frac{M}{L_b C_b} g_{21e} + \frac{L_e}{L_b C_b} g_{11e} \right] \dot{v}_{eb} + \frac{v_{eb}}{L_b C_b} = 0$$

Dans l'équation (2.1) g_{11e} et g_{21e} représentent respectivement la conductance d'entrée et la transconductance équivalentes du transistor pour les composantes fondamentales des courants émetteur et collecteur. Ces paramètres équivalents du transistor sont des fonctions de $a = v/U'_t$, ampli-

tude normalisée par rapport à U'_t de la composante fondamentale v de la tension émetteur-base V_{eb} .

2.3 ETUDE DE L'EQUATION (2,1)

Pour établir l'équation (2,1) nous avons utilisé le fait que, dans le cas de l'oscillateur de type classique considéré ici, en admettant un projet convenable du circuit, l'existence d'une oscillation presque sinusoidale est assurée [11]. Cette équation linéarisée équivalente permet d'obtenir des valeurs approchées de la fréquence et de l'amplitude de l'oscillation ainsi qu'une condition nécessaire de stabilité des oscillations.

Nous rappelons que la méthode de linéarisation équivalente [10] [12] consiste à chercher pour une équation de la forme

$$(2.2) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x})$$

une solution approchée sinusoidale :

$$x = a \cos(\omega t + \theta)$$

dont l'existence est connue expérimentalement ou assurée mathématiquement [13]. Dans ce but, on remplace $f(x, \dot{x})$ par la composante fondamentale de son développement en série de FOURIER. L'équation (2,2) sera donc approchée par :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x = & \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi \right] \cos(\omega t + \theta) \\ & + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi \right] \sin(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

L'hypothèse sur la forme de la solution permet d'écrire :

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{x}{a}$$

$$\sin(\omega t + \theta) \approx -\frac{\dot{x}}{a\omega_0}$$

d'où l'équation linéarisée équivalente de (2.2)

$$(2.3) \quad \ddot{x} + \lambda(a) \dot{x} + \omega_0^2(a) x = 0$$

avec

$$\lambda(a) = \frac{1}{\pi a \omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Psi, -a \omega_0 \sin \Psi) \sin \Psi \, d\Psi$$

$$\omega^2(a) = \omega_0^2 - \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Psi, -a \omega_0 \sin \Psi) \cos \Psi \, d\Psi$$

L'équation (2.3) possède une solution sinusoidale à condition que l'équation algébrique

$$(2.4) \quad \lambda(a) = 0$$

admette une racine positive simple, et la pulsation de cette solution est donnée par :

$$(2.5) \quad \omega = \omega(a)$$

Les conditions (2.4) et (2.5) pour la détermination de l'amplitude et de la fréquence de l'oscillation sont une extension des conditions de BARKHAUSEN. Un raisonnement physique montre que la condition de stabilité des oscillations est donnée par

$$(2.6) \quad \frac{d \lambda(a)}{da} < 0$$

Compte tenu de la relation $g_{21e} = \alpha_o g_{11e}$, la condition pour la détermination de l'amplitude de l'oscillation s'écrit :

$$(2.7) \quad g_{21e}(a) = \frac{\alpha_o L_b G}{\alpha_o M - L_e}$$

et la condition de stabilité de l'oscillation est :

$$(2.8) \quad \frac{dg_{21e}(a)}{da} < 0$$

La fréquence de l'oscillation est, en première approximation, la fréquence de résonance du circuit accordé.

On a vu, au chapitre précédent, que la transconductance équivalente g_{21e} est une fonction décroissante de l'amplitude dans le cas d'une polarisation du transistor à courant émetteur constant.

Donc, cette condition de stabilité (2.8) sera satisfaite si et seulement si le transistor est polarisé à courant constant. Il apparaît ainsi, dans le cas des circuits oscillateurs à transistor, en plus de la stabilisation thermique, une nécessité supplémentaire de polarisation à courant constant.

2.4 LIMITE DE VALIDITE DU MODELE ETUDIE

Compte tenu de la conclusion du paragraphe précédent sur la polarisation du transistor, le circuit de l'oscillateur apparaît maintenant comme schématisé sur la figure 2.2.

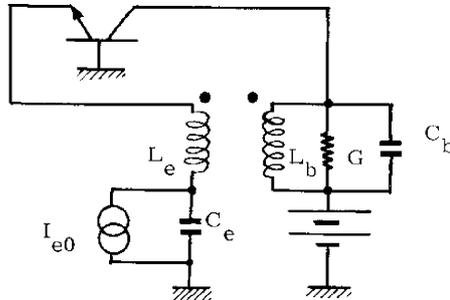


Figure 2.2

Circuit de l'oscillateur avec les éléments de polarisation

Du fait de l'existence de 3 éléments réactifs indépendants ce circuit est un système autonome à 1,5 degré de liberté, dont on sait qu'il peut produire des oscillations périodiques. Or, des systèmes à plus d'un degré de liberté pouvant être le siège d'oscillations presque périodiques (voir par exemple [14]), une vérification expérimentale s'impose pour déterminer les limites de validité du modèle simplifié étudié.

On trouve, effectivement, qu'à partir d'une valeur critique C_{e0} de la capacité de polarisation C_e , valeur qui est fonction, naturellement, des éléments du circuit, le système produit des oscillations intermittentes, de nature presque périodique en général.

Pour rendre compte de cette particularité de fonctionnement, observé expérimentalement aussi dans certains oscillateurs à tubes (voir par exemple [15] [16] [17]), il est nécessaire de modifier le modèle dynamique de l'oscillateur initialement adopté.

Dans l'analyse précédente, nous avons en fait admis explicitement que les paramètres équivalents du transistor sont uniquement fonction de l'amplitude et suivent donc instantanément ses variations. Cela

revient à admettre implicitement que la constante de temps du circuit de polarisation est d'une part élevée par rapport à la période de l'oscillation d'autre part petite par rapport à l'intervalle de temps séparant deux valeurs significativement distinctes de l'amplitude. Nous nous sommes placés dans une situation déjà signalée [18] [35], en nous libérant ainsi de l'influence du comportement dynamique du circuit de polarisation

Nous allons, par la suite, tenir compte du comportement dynamique de ce circuit, en utilisant les résultats du chapitre précédent. Le modèle de l'oscillateur adopté aura 1,5 degré de liberté.

2.5 SUR LA STABILITE DES OSCILLATIONS PERIODIQUES

Il est bien connu, et il a été exposé en particulier par MALKIN [19], que la stabilité d'une solution périodique pour un système autonome à n degrés de liberté dépend de $2n-1$ conditions. Un raisonnement physique va nous permettre d'établir les deux conditions de stabilité des oscillations périodiques d'un oscillateur à transistor polarisé à courant constant.

Nous allons considérer, d'une façon analogue à ce qui était fait pour les lampes [15], des perturbations de l'amplitude de l'oscillation comme étant des modulations de cette oscillation. L'amplitude de l'oscillation déterminée par (2.7) est une position d'équilibre et si celle est stable les modulations disparaissent avec le temps. L'étude de la stabilité locale peut être effectuée à l'aide d'équations linéarisées au voisinage de la position d'équilibre, par des méthodes d'analyse des systèmes linéaires, sauf dans certains cas particuliers.

L'oscillateur constitue un système à contre-réaction pour

une éventuelle modulation de l'oscillation, comme indiqué sur la figure 2.3.

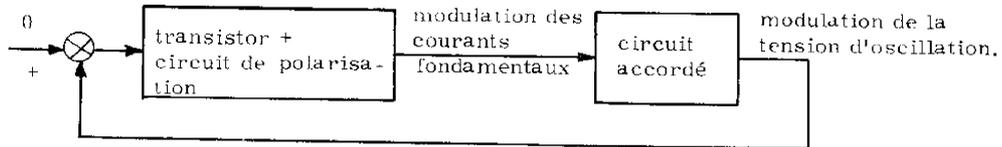


Figure 2.3

Système à contre-réaction pour la modulation

Nous avons défini au chapitre précédent, relation (1,26)

le gain linéarisé en modulation du transistor ; nous reproduisons ci-dessous son expression :

$$(2.9) \quad G_m(a,p) = G_b \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{1 + \frac{p}{\omega_2}}$$

avec

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_h = \frac{a I_o(a)}{I_i(a)} - 1 \\ G_b = G_h - \frac{a I_1(a)}{I_o(a)} \\ \omega_1 = \frac{G_b}{G_h} \cdot \frac{I_{eo}}{C_e U'_t} \\ \omega_2 = \frac{I_{eo}}{C_e U'_t} \end{array} \right.$$

D'un autre côté, la fréquence de l'oscillation, que nous supposons peu modifiée par le circuit de polarisation, est la fréquence

de résonance du circuit accordé. Le gain en modulation du circuit accordé est donc donné [20] par :

$$(2.11) \quad G_a(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_3}}$$

avec

$$(2.12) \quad \omega_3 = \frac{1}{2a L_b C_b} = \frac{\omega_0}{2Q}$$

où ω_0 est la pulsation d'oscillation.

Il s'agit donc d'étudier la stabilité de la position d'équilibre du système linéarisé donné sur la figure 2.3, dont l'équation caractéristique est

$$(2.13) \quad G_a(a, p) G_b(p) - 1 = 0$$

ou, compte tenu de (2.21) et (2.23)

$$G_b \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{p}{\omega_2}\right) \left(1 + \frac{p}{\omega_3}\right)} - 1 = 0$$

Cette équation caractéristique est du deuxième degré en p . Elle donne donc deux considérations de stabilité. Il est utile de rappeler que la stabilité d'une oscillation périodique dans un système à 1,5 degré

de liberté dépend effectivement de deux conditions. Ces conditions de stabilité sont :

$$(2.14) \quad G_b < 1$$

et

$$(2.15) \quad G_b \frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1} - \omega_2 - \omega_3 < 0$$

Le transistor étant polarisé à courant constant, la condition (2.14) est équivalente à la condition (2.8). En effet, si on écrit

$$g_{21e} = \frac{\alpha_0 I_{E0}}{U_t} \cdot \frac{f(a)}{a}$$

a étant l'amplitude réduite d'oscillation, la condition (2.8) correspond à :

$$\frac{d}{da} \frac{f(a)}{a} < 0$$

D'un autre côté, d'après les résultats du chapitre précédent, on a :

$$G_b = \frac{af'(a)}{f(a)}$$

Il vient alors :

$$G_b < 1$$

La condition (2.14) est donc satisfaite en conséquence du choix du type de polarisation. Quant à la condition (2.15), compte tenu des expressions données en (2.10) et (2.12) elle peut s'écrire :

$$(2.16) \quad C_e < \frac{I_1(a)}{aI_0(a) - 2I_1(a)} \cdot \frac{2\zeta}{\omega_0} \cdot \frac{I_{eo}}{U't} = \frac{I_1(a)}{aI_2(a)} \cdot \frac{2Q}{\omega_0} \cdot \frac{I_{eo}}{U't} = C_{eo}$$

Le résultat donné sous forme analytique en (2.29) rend compte du comportement expérimental observé sur les circuits oscillateurs à transistor polarisé à courant constant ; il exprime en effet l'existence d'une valeur limite de la capacité C_e au delà de laquelle les oscillations périodiques disparaissent.

2.6 SOMMAIRE

Bien que le circuit de l'oscillateur à transistor semble pouvoir être représenté par un modèle à 1 degré de liberté, nous avons montré qu'un modèle à 1,5 degré de liberté était nécessaire pour expliquer l'existence des oscillations intermittentes presque périodiques observées expérimentalement, en d'autres mots, pour mettre en évidence la limite entre oscillations périodiques et oscillations presque périodiques.

En faisant appel au gain en modulation déduit dans le premier chapitre, nous avons obtenu cette limite par application de la méthode de linéarisation équivalente.

La méthode utilisée présente cependant certaines insuffisances. Son application dans ce cas particulier pourrait être plus laborieuse si l'intégration explicite de l'équation (1.11) du chapitre précédent n'était

pas possible. En conséquence, la généralisation des résultats à d'autres systèmes peut présenter des difficultés de calcul. De plus, cette méthode permet seulement d'établir une condition suffisante de stabilité locale. Si la valeur limite C_{e0} de la capacité du circuit de polarisation C_e est dépassée, on ne peut pas affirmer que les oscillations deviennent modulées avec un faible taux de modulation, fonction continue de la différence $C_e - C_{e0}$, auquel cas la limite entre oscillations périodiques et presque périodiques est non dangereuse, ou au contraire, avec un fort indice de modulation, auquel cas la limite est dangereuse.

Dans le chapitre qui suit, nous exposerons une méthode de recherche de l'oscillation périodique et d'analyse de la stabilité basée sur les travaux de VAN DER POL, BOGOLYUBOV et MITROPOLSKI. Nous pourrions ainsi étudier le comportement de l'oscillateur au voisinage de la limite de stabilité.

CHAPITRE 3

ETUDE DE LA STABILITE DE L'OSCILLATION PERIODIQUE POUR

UN OSCILLATEUR ACCORDE A TRANSISTOR

3.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons montré que le circuit oscillateur accordé à transistor ne peut pas être représenté par un modèle à 1 degré de liberté. Le modèle utilisé à 1,5 degré de liberté fait apparaître une deuxième condition de stabilité de l'oscillation périodique, deuxième condition mise par ailleurs en évidence expérimentalement.

Pour compléter l'étude de l'oscillateur d'une part, et pour permettre l'extension des résultats à d'autres oscillateurs du même type d'autre part, il nous a paru essentiel de reprendre l'analyse des conditions de stabilité au moyen d'une méthode plus détaillée.

3.2 RECHERCHE D'UNE EXPRESSION EXPLICITE DE LA SOLUTION

Nous reprenons l'oscillateur à transistor, représenté avec ses circuits de polarisation sur la figure 3.1.

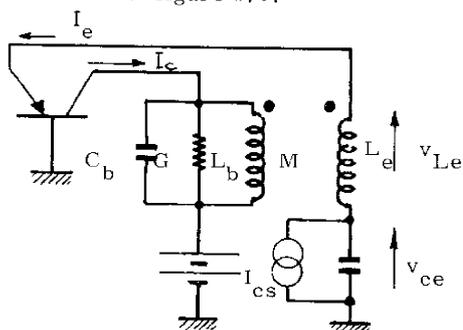


Figure 3.1

Circuit de l'oscillateur

Avec les mêmes hypothèses du chapitre 2, à savoir :

- limitation de l'amplitude de l'oscillation due à la décroissance de la transconductance équivalente pour les signaux forts et non à la saturation du transistor ;

- fréquence d'oscillation suffisamment faible pour que le transistor puisse être convenablement représenté par le modèle basse fréquence du chapitre 1, c'est-à-dire pour que les courants collecteur I_c et émetteur I_e aient pour expression :

$$I_c = \alpha_0 I_e = I_\sigma \exp \left(- \frac{V_{Le} + V_{ce}}{U'_t} \right)$$

où I_σ représente le courant de saturation du transistor et U'_t la tension thermodynamique équivalente

- couplage parfait entre les bobines d'inductance L_B et L_E disposées respectivement dans les circuits de collecteur et d'émetteur, traduite par la relation :

$$M^2 = L_B L_E$$

Comme indiqué dans notre note [21] le comportement de l'oscillateur est décrit par les équations

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = - \frac{\alpha_0 M L_E}{L_B C_B} \cdot \frac{I_\sigma}{U'_t} \frac{d}{dt} \exp(-x-u) - \frac{G}{C_h} \dot{x} \\ \dot{u} = \frac{I_\sigma}{C_e U'_t} \exp(-x-u) - \frac{I_{e0}}{C_e U'_t} \end{cases}$$

où x et u sont respectivement les tensions normalisées par rapport à U'_t qui apparaissent aux bornes de l'inductance L_e et de la capacité C_e

$$x = \frac{V_{Le}}{U'_t} \quad u = \frac{V_{Ce}}{U'_t}$$

et

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_b C_b}$$

Posant

$$u = y - \log \frac{I_{e0}}{I_\sigma}$$

les équations de l'oscillateur peuvent être écrites :

$$(3.1) \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = A \left\{ \dot{x} + B \left[\exp(-x-y) - 1 \right] \right\} \exp(-x-y) - \alpha \dot{x} = f(x, \dot{x}, y) \\ \dot{y} = B \left[\exp(-x-y) - 1 \right] = g(x, y) \end{cases}$$

avec

$$A = \frac{\alpha_0 M - L_e}{L_b C_b} \frac{I_{e0}}{U'_t}$$

$$\alpha = \frac{G}{C_b}$$

$$B = \frac{I_{e0}}{U'_t}$$

3.3 ETUDE DES EQUATIONS (3.1)

Nous nous proposons d'étudier les équations (3.1) à l'aide d'une modification de la méthode de VAN der POL, pour tenir compte de la variable y , variation de la tension de polarisation due au redressement de la tension de l'oscillation par la non linéarité du transistor.

Nous rappelons que la méthode de VAN der POL (voir par exemple [36]) permet de chercher pour une équation du type

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x})$$

une solution approchée de la forme

$$x \approx a \cos(\omega_0 t + \theta)$$

où a et θ sont des fonctions "lentement" variables dans le temps. Pour cela l'équation exacte est substituée par des équations "moyennes" de la forme :

$$\dot{a} \approx -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a\omega_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi = A(a)$$

$$\dot{\theta} \approx -\frac{1}{2\pi a \omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi = P(a)$$

Les amplitudes stables de l'oscillation sont déterminées

par les positions d'équilibre stables de l'équation $\dot{a} = A(a)$ c'est-à-dire par les racines positives simples de l'équation algébrique

$$A(a) = 0$$

telles que

$$A'(a) < 0$$

Par ailleurs, l'intégration de cette équation donne le régime transitoire au voisinage du régime permanent oscillatoire.

En général, la solution obtenue par la méthode de VAN der POL a le même caractère que la solution exacte. La justification de la méthode a été faite, entre autres, par BOGOLYUBOV et MITROPOLSKI [32]. Ils ont développé des méthodes d'analyse permettant l'obtention des approximations d'ordre supérieur et de plus présenté une méthode pour l'étude des oscillations harmoniques dans les systèmes à $n > 1$ degrés de liberté permettant l'obtention d'une famille de solutions particulières dépendant de deux paramètres, conditions initiales, $a(0)$ et $\phi(0)$, alors que la solution générale dépend de $2n$ paramètres.

Nous avons donc cherché à étudier les équations (3.1) du troisième ordre, de façon à tenir compte de 3 paramètres dans la solution.

Avec le changement de variables

$$(3.2) \begin{cases} x = Z \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \dot{x} = -Z \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

où z et ϕ sont les nouvelles variables, le système (3.1) s'é

$$(3.3) \quad \dot{Z} = - \frac{f(Z \cos \Psi, -Z \omega_0 \sin \Psi, y) \sin \Psi}{\omega_0}$$

$$(3.4) \quad \dot{y} = g(Z \cos \Psi, y)$$

$$(3.5) \quad \dot{\phi} = - \frac{f(Z \cos \Psi, -Z \omega_0 \sin \Psi, y) \cos \Psi}{Z \omega_0}$$

avec

$$\Psi = \omega_0 t + \phi$$

Nous supposons que les variables x , y et ϕ ont une partie lentement variable avec le temps, à laquelle se superposent des oscillations de faible amplitude :

$$Z = a + \text{oscillations de faible amplitude}$$

$$y = b + \text{oscillations de faible amplitude}$$

$$\phi = 0 + \text{oscillations de faible amplitude}$$

Nous négligeons les oscillations de faible amplitude, en substituant aux variables x, y et ϕ respectivement a, b et θ et aux équations exactes (3.3), (3.4) et (3.5) les équations moyennes (3.6), (3.7) et (3.8).

$$(3.6) \quad \dot{a} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Psi, -a \omega_0 \sin \Psi, b) \sin \Psi \, d\Psi = A(a, b)$$

$$(3.7) \quad \dot{b} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a \cos \Psi, b) \, d\Psi = B(a, b)$$

$$(3.8) \quad \dot{\theta} = \frac{1}{2\pi a \omega_0} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Psi, -a \omega_0 \sin \Psi, b) \cos \Psi \, d\Psi = P(a, b)$$

Les équations différentielles (3.6), (3.7) et (3.8) constituent un système du troisième ordre qui représente approximativement le système (3.1), mais dont les deux premières équations ne dépendent que de l'amplitude de l'oscillation a et de la tension de polarisation b . Nous avons donc ramené l'étude de l'oscillateur considéré, à 1,5 degré de liberté, à l'étude d'un système à 1 degré de liberté. En particulier [32] une singularité stable pour le système (3.6) et (3.7) en dehors d'un cas critique de LYAPUNOV et avec $a \neq 0$ correspondra à une solution périodique stable pour le système (3.1). L'équation (3.8) donne seulement la correction de fréquence.

Après évaluation de $A(a, b)$, $B(a, b)$ et $P(a, b)$ on obtient :

$$(3.9) \quad \dot{a} = \frac{a}{2} \left[A \exp(-b) \frac{2I_1(a)}{a} - \alpha \right]$$

$$(3.10) \quad \dot{b} = B \left[\exp(-b) I_0(a) - 1 \right]$$

$$(3.11) \quad \dot{\omega} = \frac{A B \exp(-b) \left[I_0(a) - \exp(-b) I_0(2a) \right]}{\dot{a} \omega_0}$$

Si la condition $A > \alpha$ est satisfaite, le système (3.9) et (3.10) présente dans le plan de phase (a, b) deux positions d'équilibre M et N , données respectivement par

$$(3.12) \quad M : a = b = 0$$

$$N : \begin{cases} a = a_0 & \text{tel que} & \frac{a_0 I_0(a_0)}{2 I_1(a_0)} = \frac{A}{\alpha} \\ b = b_0 = \log_e I_0(a_0) \end{cases}$$

Les équations aux variations au voisinage de la position d'équilibre N s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{1}{2} [A - \alpha] a \\ \dot{b} = -B_b \end{cases}$$

D'après LYAPUNOV, étant en dehors d'un cas critique, on peut conclure que cette position d'équilibre est instable, du type col.

Ce résultat traduit le caractère doux de l'oscillateur ; les oscillations prennent naissance à partir du bruit, sans nécessité d'une perturbation initiale assez forte.

Posant, au voisinage de la position d'équilibre

$$a = a_0 + \xi \quad ; \quad b = b_0 + \eta$$

on obtient les équations aux variations :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A \exp(-b_0) I_2(a_0) \xi - A \exp(-b_0) I_1(a_0) \eta \\ \dot{\eta} = B \exp(-b_0) I_1(a_0) \xi - B \exp(-b_0) I_0(a_0) \eta \end{cases}$$

Etant en dehors d'un cas critique, les conditions de stabilité pour la position d'équilibre N sont :

$$(3.13) \quad I_1^2(a_0) - I_0(a_0) I_2(a_0) > 0$$

$$(3.14) \quad \frac{A}{B} < \frac{I_0(a_0)}{I_2(a_0)}$$

La condition (3.13), identique à la condition (2.14) du chapitre précédent, est toujours satisfaite. Nous rappelons que ceci est une conséquence de la polarisation du transistor à courant émetteur constant. La condition (3.14), compte tenu de (3.12) peut être écrite :

$$(3.15) \quad \frac{\alpha}{\beta} < \frac{2I_1(a_0)}{a_0 I_2(a_0)}$$

Si on remplace la constante β par sa valeur et si on introduit le coefficient de qualité Q du circuit accordé, défini par

$$Q = \frac{\omega_0}{\alpha}$$

on obtient finalement :

$$(3.16) \quad C_e < \frac{2I_1(a_0)}{a_0 I_2(a_0)} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{I_{e0}}{U_t} = C_{e0}$$

La condition (3.16) impose donc une limite supérieure pour la capacité du circuit de polarisation. Nous retrouvons ainsi la condition de stabilité du chapitre précédent.

La figure 3.2 représente qualitativement un aspect possible du plan de phase (a, b) la condition (3.14) étant supposée satisfaite.

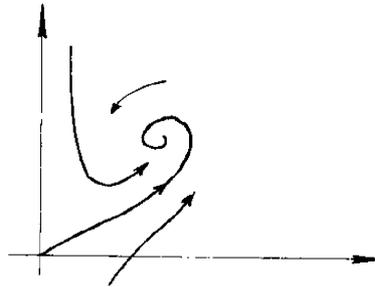


Figure 3.2

Dans le cas de la figure, la position d'équilibre N est un foyer stable : pendant le régime transitoire précédant l'oscillation périodique entretenue de l'oscillateur, l'amplitude de l'oscillation a oscille autour de la valeur de régime permanent.

Il est utile de noter que le passage du système (3.1) au système (3.3), (3.4) et (3.5) et suivants n'est pas théoriquement valable pour $z = 0$, et en conséquence pour $a = 0$, car le Jacobien du changement de variables (3.2) est nul dans ce cas. Les résultats obtenus représentent cependant approximativement le comportement expérimental du système, même dans ce cas.

3.4 ETUDE DE LA STABILITE DU CAS CRITIQUE DE LYAPUNOV RELATIF AUX EQUATIONS (3.9) et (3.10)

La limite supérieure C_{e0} de la capacité C_e est une valeur de bifurcation pour la position d'équilibre N du système (3.9); (3.10) entraînant la substitution d'un foyer stable par un foyer instable pour des valeurs de C_e supérieures à C_{e0} .

On sait (voir par exemple [22] [23]) qu'au delà d'une telle limite il peut apparaître un cycle limite de faible amplitude entourant le foyer instable ; plus précisément, un cycle limite dont l'amplitude est une fonction continue de $C_e - C_{e0}$. Dans ce cas, la limite de stabilité est non dangereuse. Physiquement, si C_e dépasse peu la valeur limite il apparaît une faible fluctuation sur l'amplitude de l'oscillation, pas toujours gênante pour les applications.

Au contraire, il peut apparaître un cycle limite de grande amplitude, ou encore le système peut évoluer hors de la région de valici-

té du modèle étudié. La limite est dangereuse et correspond physiquement au fonctionnement intermittent de l'oscillateur.

L'intérêt principal de l'étude de la stabilité du cas critique de LYAPUNOV est l'établissement de la nature des solutions des deux côtés de la valeur de bifurcation.

Pour étudier la stabilité du cas critique de LYAPUNOV relatif aux équations (3.9) et (3.10), avec deux racines imaginaires pures nous admettons que ce système a été mis, par un changement convenable de variables, sous la forme :

$$(3.17) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \sum f_i(x, y) \end{cases}$$

où les $f_i(x, y)$ sont des polynômes homogènes de degré $i \geq 2$ en x et y :

$$f_i(x, y) = a_{i0}x^i + a_{i+1}x^{i-1} + \dots + a_{0i}y^i$$

On peut étudier la stabilité du cas critique de LYAPUNOV à 2 racines imaginaires pures par la méthode des transformations ponctuelles de POINCARÉ-ANDRONOV [34] Avec le changement de variables :

$$(3.18) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

(3.17) peut être écrit, après élimination du temps,

$$(3.19) \quad \frac{d\rho}{d\theta} = - \frac{\rho \sin\theta \sum f_i(\rho \cos\theta - \rho \sin\theta)}{\rho - \cos\theta \sum f_i(\rho \cos\theta - \rho \sin\theta)}$$

Le deuxième membre de (3.19) est analytique en ρ pour ρ suffisamment petit, et peut être développé en série de puissances croissantes de ρ .

$$(3.20) \quad \frac{d\rho}{d\theta} = \rho R_1(\theta) + \rho^2 R_2(\theta) + \dots$$

où les R_i sont des polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$. Il est clair que dans le cas qui nous intéresse, R_1 est identiquement nul.

Soit une solution $\rho(\rho_0, 0)$ de (3.20), telle que

$$(3.21) \quad \rho(\rho_0, \theta) = \rho_0$$

D'après POINCARÉ, cette solution est analytique en ρ_0 pour ρ_0 suffisamment petit et peut être développée en série de puissances croissantes de ρ_0 , convergente pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Comme le système (3.20) admet la solution identiquement nulle, cette série n'a pas de terme constant. Il vient donc :

$$(3.22) \quad \rho(\rho_0, \theta) = \rho_0 u_1(\theta) + \rho_0^2 u_2(\theta)$$

Les $u_i(\theta)$ sont déterminés par substitution de (3.22) dans (3.20) et identification terme à terme par rapport aux puissances croissantes de ρ_0 , avec les conditions déduites de (3.21);

$$u_i(0) = 1$$

$$u_i(0) = 0 \text{ pour } i > 1$$

On considère la fonction

$$(3.23) \quad \Psi(\rho_0) = \alpha_1 \rho_0 + \alpha_2 \rho_0^2 + \dots$$

telle que

$$\alpha_j = u_j(2\pi) - u_j(0)$$

il vient

$$(3.24) \quad \Psi(\rho_0) = \rho_0 (u_0(2\pi) - u_0(0))$$

Etant donné que le changement de variables (3.18) est tel que, pour ρ suffisamment petit on a $\hat{\rho} > 0$, la condition de stabilité de la position d'équilibre $x = y = 0$ est $\Psi(\rho_0) < 0$ pour ρ_0 suffisamment petit. La stabilité est donc résolue par le premier α_j non nul de (3.23). On montre que le premier α_j non nul correspond nécessairement à j impair.

Pour le cas critique de LYAPUNOV à racines imaginaires pures, on a $\alpha_1 = 0$. Le problème de la stabilité est alors résolu par le signe de α_3 , à condition que α_3 soit différent de 0. Tous calculs faits, il vient :

$$(3.25) \quad \alpha_3 = \frac{a_{11}(a_{20} + a_{02}) + a_{21} + 3a_{03}}{3}$$

Il est bon de noter que la condition de stabilité trouvée par la méthode de linéarisation équivalente serait donnée par

$$a_{21} + 3a_{03} < 0$$

On constate évidemment qu'elle n'est pas valable dans le cas général.

Pour le système (3.8), (3.9), la singularité (a_0, b_0) est définie par (3.11). La condition de cas critique s'écrit :

$$(3.26) \quad \frac{\alpha}{B} = \frac{2\Gamma(a_0)}{1 - a_0 I_2(a_0)}$$

Après changement de variables afin de ramener le système (3.9) (3.10) à la forme (3.17), on trouve $\alpha_3 = 0$

Deux cas sont possibles. Soit, il existe un α_1 non nul et la position d'équilibre est un foyer stable ou instable suivant le signe de ce α_1 . Soit tous les α_i sont nuls et la position d'équilibre est un centre.

Dans le deuxième cas, il existe une intégrale première pour le système. IL n'est pas possible, en général, de montrer directement que tous les α_i sont nuls ; il en est ainsi dans notre cas. Dans ces conditions, la seule façon d'établir que la position d'équilibre est un centre consiste à trouver une intégrale première pour le système. Nous avons cherché cette intégrale première dans notre note [24] à l'aide du changement de variables :

$$(3.27) \quad \begin{cases} u = \log \frac{a}{a_0} \\ v = \frac{du}{dt} \end{cases}$$

Le système (3.9), (3.10), avec la condition (3.26) s'écrit alors :

$$(3.28) \quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = v + \frac{a}{2} - v - \frac{B}{2} f(u) \end{cases}$$

avec

$$f(u) = \left(1 - \frac{B}{A}\right) \frac{a_0 \exp u I_0(a_0 \exp u)}{I_1(a_0 \exp u)} - 2$$

et l'intégrale première cherchée est donnée par :

$$(3.29) \quad \int_0^u f(\xi) d\xi - \int_0^v \frac{\eta d\eta}{\left(\eta + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{B}{2} - \eta\right)} = \text{constante}$$

L'obtention de (3.29) permet donc de conclure que la position d'équilibre N dans le cas critique de LYAPUNOV (3.26) est un centre. L'allure des trajectoires de phase dans le plan (a, b) est donnée dans ce cas sur la figure 3.3.

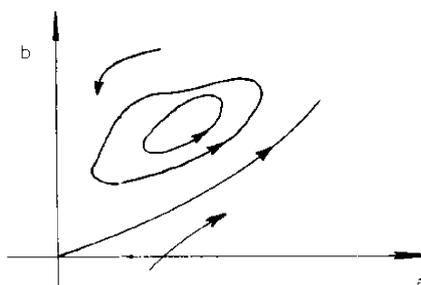


Figure 3.3.

La limite de stabilité des oscillations périodiques est donc dangereuse.

L'étude expérimentale du circuit confirme ce résultat. Pour $C_e > C_{e0}$ on obtient des oscillations intermittentes, et le transistor est saturé pendant une partie du cycle de l'amplitude de l'oscillation. La figure 3.4 représente le comportement du système dans ce cas. Il est évident que le système physique évolue hors de la région de validité du modèle utilisé.

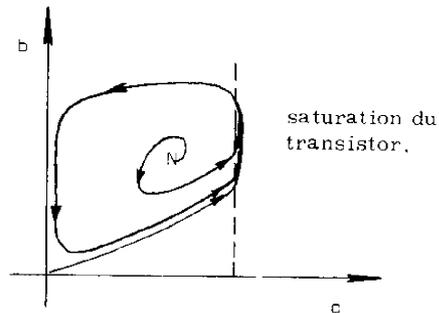


Figure 3.4

Le résultat très particulier -existence d'une intégrale première pour le système dans le cas critique de LYAPUNOV à racines imaginaires pures- caractérise le système représenté par les équations (3.9) et (3.10), avec la condition (3.25) comme théoriquement conservatif. On sait, cependant, que des petites modifications dans les équations (3.9) et (3.10) peuvent changer ce résultat. Or, ces équations ont été établies avec deux sortes d'hypothèses : d'une part, nous avons fait des simplifications concernant la structure du système physique, dont nous avons négligé par exemple la résistance extrinsèque de base du transistor et la conductance de la source de courant émetteur ; d'autre part, les équations (3.9)

et (3.13) sont une première approximation pour l'étude du système (3.1). L'extension des calculs aux termes d'ordre supérieur ne se justifie pas dans la mesure où les éléments négligés du circuit peuvent déjà modifier les résultats qualitatifs obtenus en première approximation.

Ces considérations expliquent le fait que l'expérience n'a pas permis de mettre en évidence le centre. Par contre, les hypothèses faites ont été suffisantes pour expliquer la nature dangereuse de la limite de stabilité.

3.5 SOMMAIRE

L'étude de l'oscillateur accordé à transistor à l'aide de la méthode de VAN der POL convenablement modifiée pour permettre de tenir compte de la tension de polarisation nous a permis de retrouver les conditions de stabilité des oscillations périodiques obtenues dans le chapitre 2, et, en outre, de conclure sur la nature dangereuses de la limite de stabilité exprimée par une valeur critique pour la capacité du circuit de polarisation.

Les résultats théoriques obtenus, en rendant compte du comportement observé expérimentalement, soulignent la validité du modèle dynamique à 1,5 degré de liberté adopté pour représenter le fonctionnement de l'oscillateur étudié.

CHAPITRE 4

LES OSCILLATEURS RC A AMPLITUDE STABILISEE

4.1 INTRODUCTION

L'utilisation des oscillateurs à circuit accordé est exceptionnelle dans le domaine des basses fréquences, de l'ordre de l'hertz jusqu'à quelques dizaines de khz, en raison principalement de la nécessité de faire appel dans ce domaine de fréquences à des inductances à noyau magnétique (fer ou ferrite) pour les circuits accordés. Non seulement le prix et l'encombrement de telles inductances sont assez élevés, mais, de plus, elles introduisent des non linéarités, qui, sauf dans le cas d'un projet très élaboré, nuisent à la stabilité de fréquence et augmentent la distorsion harmonique de l'oscillation [8].

D'un autre côté, pour un même domaine de variation $\delta_i = C_{\max} / C_{\min}$ de la capacité, le domaine de variation des fréquences f_{\max} / f_{\min} couvert par un oscillateur RC, proportionnel à δ_i , est plus étendu que celui obtenu avec un oscillateur à circuit accordé, auquel cas il est proportionnel à $\sqrt{\delta_i}$. Ceci constitue donc un avantage additionnel des oscillateurs RC [25].

L'expérience montre qu'il est difficile de construire un oscillateur RC à fréquence variable présentant un faible taux d'harmoniques tout en conservant une amplitude de l'oscillation constante, indépendante de la fréquence.

Ceci justifie l'introduction dans les oscillateurs RC à fréquence variable, d'éléments auxiliaires destinés à stabiliser l'amplitude de l'oscillation et à minimiser le taux de distorsion harmonique. Ces éléments auxiliaires comportent essentiellement un organe de "mesure" de l'amplitude de l'oscillation et un atténuateur à gain variable en fonction de cette ampli-

tude, comme indiqué schématiquement sur la figure 4.1.

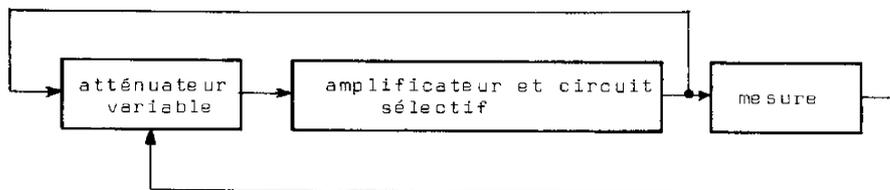


Figure 4.1 : Oscillateur à amplitude stabilisée

L'analyse du comportement dynamique de tels circuits oscillateurs à amplitude stabilisée conduit, moyennant certaines hypothèses que nous préciserons, à des équations différentielles de même ordre que celles obtenues dans le cas des oscillateurs à circuit accordé. Les non linéarités qui interviennent sont principalement dues à l'organe atténuateur et dépendent donc de sa structure.

Nous nous proposons d'établir des conditions suffisantes de stabilité pour le régime permanent périodique de ces oscillateurs RC. Nous montrerons que, selon le type de non linéarité de l'atténuateur, c'est-à-dire, selon sa structure, ces conditions peuvent imposer ou non une limite supérieure au temps de réponse du circuit de contrôle de l'amplitude de l'oscillation.

Nous illustrerons cette conclusion par quelques exemples.

4.2 LES OSCILLATEURS RC A AMPLITUDE STABILISEE

4.2.1. Etude des conditions de stabilité du régime permanent périodique

Le circuit à résistance-capacité représenté sur la figure 4.2 appelé souvent pont de WIEN, constitue un des circuits types de réaction externe dans les oscillateurs RC. Nous le prenons comme exemple pour notre étude.

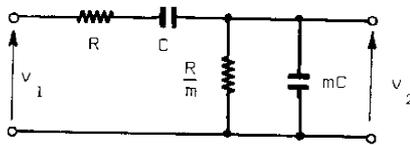


Figure 4.2 : Déphaseur de Wien

Sous l'hypothèse d'une impédance de charge élevée, le comportement dynamique de ce circuit est décrit par l'équation différentielle :

$$(4.1) \quad \ddot{v}_2 + \xi \omega_0 \dot{v}_2 + \omega_0^2 v_2 = \frac{1}{\alpha} \xi \omega_0 \dot{v}_1$$

avec

$$\omega_0 = (RC)^{-1}$$

$$\xi = \frac{1 + 2m}{m}$$

$$\alpha = 2m + 1$$

Sous forme symbolique, avec p : opérateur différentiel d/dt l'équation (4.1) devient :

$$(4.2) \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\xi \omega_0 p}{p^2 + \xi \omega_0 p + \omega_0^2}$$

L'association d'un tel circuit à un amplificateur de tension permet la construction d'un oscillateur. Avec les hypothèses suivantes :

- gain en tension A positif supérieur à α
- impédance d'entrée élevée, impédance de sortie faible
- limitation de l'amplitude de l'oscillation due à la saturation de l'amplificateur ;
- éléments réactifs de l'amplificateur négligeables ;

un tel oscillateur peut être représenté par le schéma bloc de la figure 4.3.

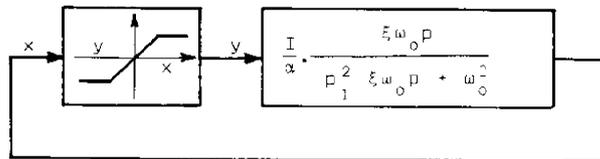


Figure 4.3. : Oscillateur RC

L'étude de ce système par la méthode du plan de phase est très commode [26] et permet de conclure que, sauf dans le cas où le gain en régime linéaire de l'amplificateur n'est que très légèrement supérieur à α , la forme de l'oscillation sera assez différente d'une sinusoïde.

Or, on sait qu'un régime de fonctionnement d'un oscillateur avec une grande richesse d'harmoniques a une influence néfaste sur la stabilité en fréquence des oscillations [8].

Par ailleurs, les tolérances inévitables dans les valeurs des composantes du circuit sélectif conduisent, pour un oscillateur à fréquen-

ce variable, à des variations de α avec la fréquence, ce qui empêche le choix d'un amplificateur de gain très légèrement supérieur à α dans toute la bande de fréquences.

L'obtention d'un faible taux d'harmoniques est donc liée nécessairement à l'emploi d'un circuit auxiliaire de stabilisation de l'amplitude de l'oscillation. La figure 4.4 donne un schéma possible d'un oscillateur à amplitude stabilisée.

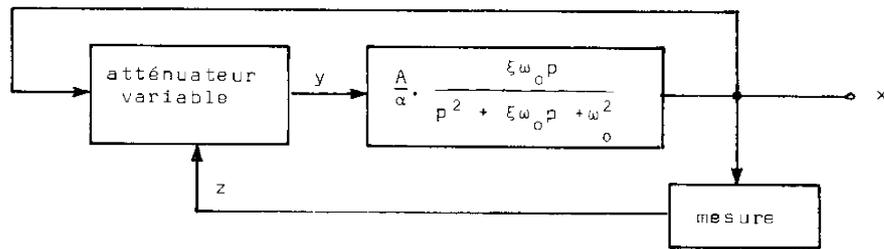


Figure 4.4. : Oscillateur RC à amplitude stabilisée.

Comme nous l'avons exposé dans notre note [27], le fonctionnement d'un tel oscillateur est représenté par les équations

$$(4.3) \quad y = f(x, Z)$$

$$(4.4) \quad \dot{Z} = g(x, Z)$$

$$(4.5) \quad \ddot{x} + \xi \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{A}{\alpha} \xi \omega_0 \dot{y}$$

L'équation (4.3), algébrique, décrit le comportement dynamique de l'atténuateur variable, supposé à largeur de bande infinie. Cette hypothèse simplificatrice entraîne la représentation de l'oscillateur par un modèle dynamique à 1,5 degré de liberté. Si ce modèle permet de rendre compte des comportements expérimentaux observés sur l'oscillateur, l'hypothèse est valable. Dans le cas contraire, il serait nécessaire de remplacer (4.3) par une équation différentielle [28].

L'équation (4.4) traduit le comportement du circuit de "mesure" qui, en général, peut être assimilé à un redresseur avec filtre, même si la variable z n'est pas électrique (elle peut en particulier être thermique, optique, etc...). La "mesure" de l'amplitude de l'oscillation sera traduite par la composante continue de z , que nous supposons, sans perte de généralité, positive et fonction croissante de l'amplitude.

On sait [29] que si x est une fonction périodique donnée du temps, de période τ , et s'il existe une constante χ telle que

$$(4.6) \quad \int_0^{\tau} g(x(t), \chi) dt = 0$$

(4.4), considérée comme indépendante, a une solution périodique, de même période τ , et la différence entre cette solution et χ est arbitrairement petite pour $t \rightarrow \infty$ et T suffisamment grand. La condition de stabilité de cette solution périodique est

$$(4.7) \quad \frac{d}{d\chi} \int_0^{\tau} g(x(t), \chi) dt < 0$$

Nous imposons à la fonction $g(x, z)$ de satisfaire les conditions (4.6) et (4.7), ce qui est le cas pour les oscillateurs considérés.

Soit par exemple, le redresseur quadratique présenté sur la figure 4.5.

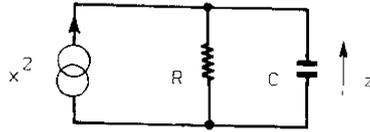


Figure 4.5. : Redresseur quadratique

Pour ce circuit on a :

$$T\dot{z} = Rx^2 - z$$

avec

$$T = RC$$

et, pour

$$x = a \cos \omega t$$

il vient

$$z = \frac{Ra^2}{2}$$

La condition (4.7) est vérifiée ; en effet,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{2\pi} [a^2 \cos^2 \omega t R - x] d\omega t = -2\pi < 0$$

Revenant au cas général, puisque le système physique est supposé présenter une oscillation périodique stable, (4.4) peut être considérée comme indépendante et l'ondulation résiduelle de z sera arbitrairement petite, à condition de pouvoir choisir pour la constante de temps T de l'élément de mesure une valeur suffisamment élevée.

En général, l'ondulation résiduelle de la tension de mesure

peut avoir une influence sur l'amplitude et la fréquence de l'oscillation et introduire dans cette oscillation des composantes harmoniques. On cherche donc à diminuer cette ondulation résiduelle en choisissant pour T une valeur assez élevée.

Les équations (4.3), (4.4) et (4.5) peuvent être étudiées à l'aide de la méthode modifiée de VANDER der POI, que nous avons exposée dans le chapitre 3, par des équations simplifiées en première approximation pour la composante continue de z et la composante fondamentale de x :

$$\begin{cases} x = a \cos \psi \\ z = b \end{cases}$$

Ces équations sont :

$$(4.8) \quad \dot{a} = \frac{\xi \omega_0 A a}{2 \pi \alpha} \int_0^{2\pi} f_x(a \cos \psi, b) \sin^2 \psi \, d\psi - \frac{\xi \omega_0 a}{2}$$

$$(4.9) \quad \dot{b} = \frac{1}{2 \pi T} \int_0^{2\pi} g(a \cos \psi, b) \, d\psi$$

On cherche normalement à construire l'oscillateur de type doux, c'est-à-dire, tel que la position d'équilibre correspondante à

$$a = 0$$

b : solution de l'équation algébrique $g(0, b) = 0$ soit une position d'équilibre instable. Il est, de plus, normalement exigé que l'oscillateur ait un seul régime oscillatoire stationnaire, correspondant à une singularité stable (a_0, b_0) pour le système d'équations (4.8) et (4.9) telle que $a_0 \neq 0$. L'étude de la stabilité d'une telle position d'équilibre conduit, en dehors d'un cas critique, aux conditions :

$$(4.10) \quad \frac{d}{da} \int_0^{2\pi} f_x(a \cos \psi, b) \sin^2 \psi d\psi \cdot \frac{d}{db} \int_0^{2\pi} g(a \cos \psi, b) d\psi - \frac{d}{db} \int_0^{2\pi} f_x(a \cos \psi, b) \sin^2 \psi d\psi \cdot \frac{d}{da} \int_0^{2\pi} g(a \cos \psi, b) d\psi > 0$$

$$(4.11) \quad aTA \frac{d}{da} \int_0^{2\pi} f_x(a \cos \psi, b) \sin^2 \psi d\psi + \frac{d}{db} \int_0^{2\pi} g(a \cos \psi, b) d\psi < 0$$

La condition (4.10) exprime, sous forme analytique, le fait qu'en régime stationnaire, le gain de la chaîne directe de l'oscillateur doit être plus petit ou plus grand que 1 selon que l'amplitude est plus grande ou plus petite que a_0 . L'existence de l'oscillation y , existence que nous avons implicitement admise, exige qu'elle soit satisfaite.

Pour la condition (4.11) deux cas sont à considérer.

Si

$$(4.12) \quad \frac{d}{da} \int_0^{2\pi} f_x(a \cos \psi, b) \sin^2 \psi d\psi \leq 0$$

compte tenu de la condition (4.7), il n'y a pas de limite supérieure pour la constante de temps T . Cela signifie que l'amplitude de l'oscillation est stable quelle que soit la valeur, arbitrairement élevée, de T . Par contre, si la condition (4.12) n'est pas remplie, la stabilité de l'amplitude de l'oscillation impose une limite supérieure à T .

En pratique, donc, on doit chercher à satisfaire (4.12)

Nous supposons par la suite que la caractéristique algébrique

de l'atténuateur $f(x, z)$ est analytique par rapport à x , de telle sorte qu'on peut lui substituer un développement en série de puissances croissantes de x :

$$(4.13) \quad f(x, z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(z) x^i$$

Les équations permettant la détermination de la singularité (a_0, b_0) s'écrivent

$$(4.14) \quad A \int_0^{2\pi} f_x(a_0 \cos \psi, b_0) \sin^2 \psi d\psi = \pi \alpha$$

$$(4.15) \quad \int_0^{2\pi} g(a_0 \cos \psi, b_0) d\psi = 0$$

Compte tenu de (4.13), l'équation (4.14) devient :

$$(4.16) \quad A \sum_{i=1, 3, 5, 7, \dots} \frac{f_i(b_0) i! a_0^{i-1}}{(i+1) \left(\frac{i-1}{2}!\right)^2 2^{i-2}} = \alpha$$

et dans le cas d'une amplitude de l'oscillation petite, cette équation peut être approchée par :

$$(4.17) \quad A f_1(b_0) = \alpha$$

Dans la condition (4.12) seuls interviennent les termes de degré i impair ≥ 3 de la série (4.13). Cette condition (4.12) s'écrit :

$$(4.18) \quad \sum_{i=3, 5, 7, \dots} \frac{f_i(b_0) (i-1)(i+1)! a_0^{i-2}}{2^i \left(\frac{i+1}{2}!\right)^2} \leq 0$$

et, soit dans le cas d'une amplitude de l'oscillation petite, soit, plus généralement, dans le cas où $f(x, z)$ est tel que $f_i(z) = 0$ pour tout $i \geq 3$

(4.18) se réduit à :

$$(4.19) \quad f_3(b_0) < 0$$

On peut donc énoncer le résultat suivant : un oscillateur à amplitude stabilisée tel que schématisé sur la figure 4.4, et dont l'atténuateur se comporte comme un élément non linéaire à caractéristique purement algébrique de la forme (4.13) sera stable si la condition (4.19) est satisfaite. En particulier, si, au voisinage du point $z = b_0$ la caractéristique non linéaire $f(x, z)$ est de degré 2 en x , la condition de stabilité (4.18) est nécessairement satisfaite ; si elle est de degré 3, elle impose que le coefficient du terme de degré 3 soit négatif [28].

4.2.2. Un exemple d'application

Pour illustrer ce résultat, nous considérons le circuit atténuateur donné sur la figure 4.6.

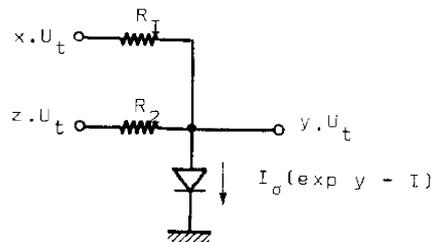


Figure 4.6. : Atténuateur

Pour ce circuit, on ne peut pas exprimer directement y sous forme explicite $f(x, z)$ à l'aide de fonctions élémentaire ; on peut, par contre, écrire la relation :

$$k_1 x = \exp y - 1 + (k_1 + k_2) y_0 - k_2 z$$

où les tensions sont normalisées par rapport à U_t et les k_i sont définies par

$$k_i = \frac{U_t}{R_i I_0}$$

Posant y_0 , fonction de z , solution de l'équation transcendante

$$(4.20) \quad \exp y_0 - 1 + (k_1 + k_2) y_0 = k_2 z$$

et $\delta y = y - y_0$ il vient :

$$(4.21) \quad x = \frac{\exp y_0}{k_1} (\exp \delta y - 1) + \left(\frac{k_2}{k_1} + 1 \right) \delta y$$

A partir de (4.21), les coefficients $f_i(z)$ du développement en série (4.12) s'expriment comme suit :

$$f_0(z) = y_0$$

$$f_1(z) = \frac{k_1}{\exp y_0 + k_1 + k_2}$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{2} \frac{k_1^2 \exp y_0}{(\exp y_0 + k_1 + k_2)^3}$$

$$f_3(z) = \frac{1}{6} \frac{2 \exp y_0 - (k_1 + k_2)}{k_1 (\exp y_0 + k_1 + k_2)^5}$$

d'où la condition approchée de stabilité (4.14) des oscillations périodiques :

$$2 \exp y_0 - (k_1 + k_2) < 0$$

ou encore, en posant $I_D = I_0 \exp y_0$ et en rappelant la définition des constantes,

$$(4.22) \quad \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} > 2 \frac{I_D}{U_T}$$

On peut donner pour ce résultat une interprétation physique.

En effet, I_D représente le courant de polarisation de la diode en régime permanent. Si la condition (4.22) n'était pas satisfaite, la conductance du circuit externe à la diode serait faible par rapport à la conductance de la diode pour des petits signaux et la diode serait donc polarisée presque à courant constant. Dans ce cas, sa conductance serait une fonction décroissante de l'amplitude du signal x . L'atténuation de l'atténuateur variable diminuerait avec l'amplitude, d'où la possibilité d'instabilité du régime oscillatoire.

4.3. OSCILLATEURS A PONT

Au lieu de disposer l'atténuateur variable dans la chaîne directe de l'oscillateur, on préfère en pratique profiter de l'excès de gain de l'amplificateur pour augmenter dans des proportions notables la sélectivité du circuit sélectif par un montage en pont. On montre qu'avec un montage

en pont qui augmente l'atténuation du circuit sélectif, on augmente dans la même proportion sa sélectivité [30]. Il est encore possible d'expliquer la stabilité en fréquence d'un oscillateur à pont, normalement présenté comme une conséquence de l'augmentation de la sélectivité du circuit sélectif, à partir de l'effet de contre-réaction négative appliquée à l'amplificateur [31].

Le circuit d'un oscillateur à pont peut être représenté par le schéma de la figure 4.7. Avec les notations de la figure,

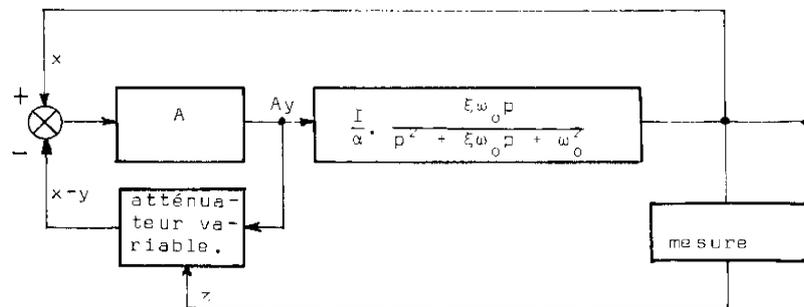


Figure 4.7. : Oscillateur à pont.

les équations qui représentent le fonctionnement de l'oscillateur sont :

$$(4.23) \quad x - y = h(z, Ay)$$

$$(4.24) \quad T\dot{z} = g(x, z)$$

$$(4.25) \quad \ddot{x} + \xi\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{A}{\alpha} \xi\omega_0 \dot{y}$$

Ces équations ne diffèrent des équations (4.3), (4.4) et (4.5) du cas précédent que par la forme de l'équation (4.23) qui définit y comme une fonction implicite. On peut réitérer pour (4.23) les mêmes remarques faites à propos de (4.3).

Comme premier exemple, nous allons considérer un oscillateur à pont comportant dans la boucle de contre réaction négative l'atténuateur variable schématisé sur la figure 4.8.

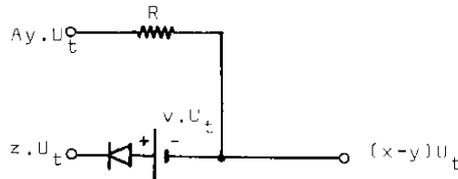


Figure 4.8. : Atténuateur variable

Il n'existe pas dans ce cas, non plus, d'expression explicite de y en fonction de x ; on peut écrire cependant :

$$(4.26) \quad 1 - \exp(v \cdot x - y - z) = k_1 x - k_2 y$$

où les tensions sont normalisées par rapport à U_t et les constantes k_i sont données par

$$k_1 = \frac{U_t}{RI_\sigma}$$

$$k_2 = \frac{(A+1) U_t}{RI_\sigma}$$

Posant y_0 , fonction de z et de v , solution de l'équation transcendante :

$$(4.27) \quad \exp(v - y_0 - z) = 1 + k_2 y_0$$

on trouve pour le développement en série (4.12)

$$f_0(z) = y_0$$

$$f_1(z) = \frac{\exp(v - y_0 - z) + k_1}{\exp(v - y_0 - z) + k_2}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2} \frac{\exp(v - y_0 - z) (k_2 - k_1)^2}{[\exp(v - y_0 - z) + k_2]^3}$$

$$f_3(z) = \frac{(k_2 - k_1)^3 |k_2 - 2\exp(v - y_0 - z)|}{6 [\exp(v - y_0 - z) + k_2]^5}$$

d'où la condition de stabilité (4.19) approchée :

$$2 \exp(v - y_0 - z) > k_2$$

ou encore, en posant de nouveau $I_p = I_0 \exp (v - y_0 - b_0)$ courant de polarisation de la diode en régime permanent :

$$(4.28) \quad \gamma \frac{I_p}{U_t} > \frac{A+1}{R}$$

On reconnaît dans le deuxième membre de l'inégalité (4.28) la conductance d'entrée de l'amplificateur, considéré comme amplificateur opérationnel de gain A avec une résistance de contre-réaction R . On constate que cette condition (4.28) exige une polarisation presque à courant constant de la diode, à l'opposé du résultat (4.22)

Par ailleurs, on peut voir que la condition (4.28) limite d'une façon assez sérieuse le projet de l'oscillateur, si bien qu'on ne doit pas utiliser un atténuateur variable comme celui de la figure 4.8 pour le projet d'un oscillateur à pont. En effet, l'équation (4.17) permet d'écrire

$$(4.29) \quad \frac{I_p}{U_t} = \frac{(A+1)\alpha - A}{R(A-\alpha)}$$

De (4.28) et (4.29) on déduit le domaine de variation de A en fonction de α , représenté sur la figure 4.9 :

$$(4.30) \quad \alpha < A < \frac{3(\alpha-1) + \sqrt{9\alpha^2 - 6\alpha + 9}}{2}$$

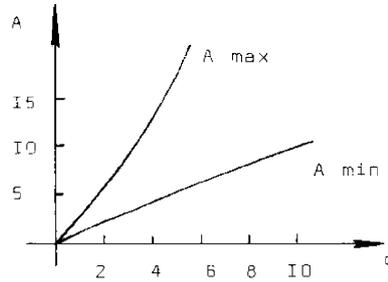


Figure 4.9.

Le circuit en pont multiplie la sélectivité du circuit sélectif [33] par le facteur A/α . La condition (4.30) montre que le maximum de ce facteur, pour toutes les valeurs de α , varie de 1,5 à $\sqrt{3}$.

Sur un deuxième exemple, nous allons montrer que par le choix d'un atténuateur variable un peu plus élaboré on obtient des conditions bien plus souples, permettant de profiter entièrement des qualités de multiplication de la sélectivité d'un montage en pont, la stabilité des oscillations restant assurée pour T arbitrairement élevée. Soit en effet le circuit atténuateur donné sur la figure 4.10.

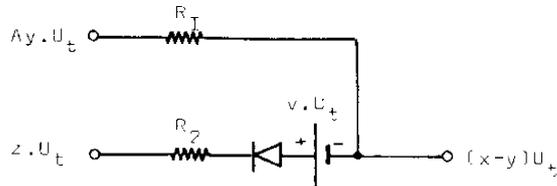


Figure 4.10 : Atténuateur variable

On établit pour ce circuit l'équation implicite :

$$(4.31) \quad \exp(v - \beta y + \gamma x - z) - 1 = k_2 y - k_1 x$$

$$\text{avec : } \beta = \frac{(A+1)R_2 + R_1}{R_1}$$

$$\gamma = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

$$k_1 = \frac{U_t}{R_1 I_0}$$

$$k_2 = \frac{(A+1) U_t}{R_1 I_0}$$

Tous calculs faits, on trouve pour le développement en série (4.13) avec y_0 solution de l'équation

$$(4.32) \quad \exp(v-z - \beta y_0) - 1 = k_2 y_0$$

$$f_0(z) = y_0$$

$$f_1(z) = \frac{\gamma \exp(v-z - \beta y_0) + k_1}{\beta \exp(v-z - \beta y_0) + k_2}$$

$$f_2(z) = \frac{\gamma^2 \exp(v-z - \beta y_0) \left[\frac{k_2}{\beta} - \frac{k_1}{\gamma} \right]^2}{2 \beta \left[\exp(v-z - \beta y_0) + \frac{k_2}{\beta} \right]^3}$$

$$f_3(z) = \frac{\gamma^3 \left[\frac{k_2}{\beta} - 2 \exp(v-z - \beta y_0) \right] \left[\frac{k_2}{\beta} - \frac{k_1}{\gamma} \right]^3}{6 \beta \left[\exp(v-z - \beta y_0) + \frac{k_2}{\beta} \right]^5}$$

Dans ce cas, en raison du plus grand nombre de paramètres et de leur disposition favorable dans les expressions, il est possible de satisfaire à la fois la condition de stabilité (4.19) des oscillations :

$$2 \exp (v - b_0 - y_0) > \frac{k_2}{\beta}$$

soit encore, en posant $I_p = I_0 \exp (v - b_0 - \beta y_0)$ courant de polarisation de la diode en régime permanent :

$$(4.31) \quad 2 \frac{I_p}{U_t} > \frac{A+1}{(A+1)R_2 + R_1}$$

et la condition (4.16) qui s'écrit :

$$(4.32) \quad \frac{R_1 + R_2 \frac{I_p}{U_t} + 1}{[R_1 + (A+1)R_2] \frac{I_p}{U_t} + A+1} = \frac{\alpha}{A}$$

Il suffit pour cela que l'on ait :

$$(4.33) \quad \frac{A - \alpha}{\alpha (A+1) - A} > \frac{R_2}{R_1} > \frac{\frac{(A+1)(A-\alpha)}{\alpha(A+1)} - 2}{3(A+1)}$$

ou, dans le cas d'un gain A très grand :

$$(4.34) \quad \frac{1}{\alpha - 1} > \frac{R_2}{R_1} > \frac{1}{3(\alpha - 1)}$$

La condition (4.31) traduit une polarisation presque à courant constant de la diode. Nous devons souligner que le choix du circuit atténuateur de la figure 4.10 a été guidé, à partir des conclusions de

l'analyse précédente, par le souci d'augmenter la résistance en série de la diode.

1.4 STABILISATION DE L'AMPLITUDE PAR LAMPE INCANDESCENTE

Dans un oscillateur à amplitude stabilisée par lampe incandescente, c'est la variation de la résistance de la lampe en fonction de la température qui est utilisée pour l'obtention d'un atténuateur variable. La mesure de l'amplitude est en fait la température du filament de la lampe, température qui dépend de la puissance dissipée.

La figure 4.11 représente un oscillateur à amplitude stabilisée par lampe incandescente. En admettant que le filament de la lampe se

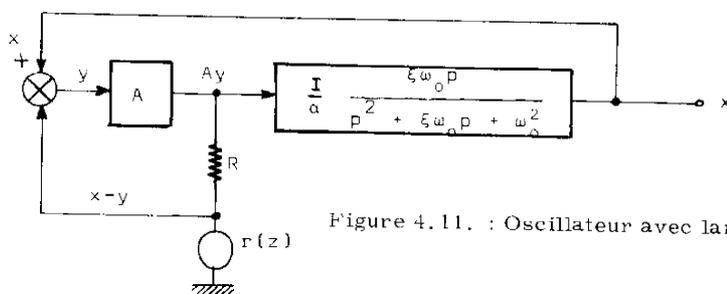


Figure 4.11. : Oscillateur avec lampe

comporte comme un circuit thermique à une seule constante de temps. Le comportement de l'oscillateur est décrit par le même système d'équations (4.23), (4.24) et (4.25), avec z représentant ici la température du filament. La seule différence est que g est maintenant fonction de Ay et de z , au lieu de x et z , ce qui ne change rien au problème de la stabilité

L'équation (4.23) s'écrit :

$$x - y = \frac{Ay}{1 + R/r(z)}$$

et il est possible d'expliciter y en fonction de x . Dans ce cas on peut utiliser directement la condition (4.12) et on constate qu'elle est toujours satisfaite, puisque y est linéaire en x .

Cette conclusion explique le fait qu'on n'a jamais remarqué l'existence d'oscillations automodulées sur un oscillateur à pont de WIEN à amplitude stabilisée par lampe, bien que ce soit un système ayant au moins 1,5 degré de liberté. On ne peut cependant pas en pratique profiter pleinement de ce résultat car il est très difficile de modifier la constante de temps thermique de la lampe.

4.5 SOMMAIRE

Sous certaines hypothèses, l'étude des oscillateurs RC à amplitude stabilisée montre que ces systèmes appartiennent aussi à la classe des oscillateurs à 1,5 degré de liberté. Il y a donc deux conditions de stabilité pour la solution périodique, dont la deuxième peut exiger que la constante de temps du circuit de stabilisation de l'amplitude soit inférieure à une certaine valeur limite. L'analyse effectuée fournit la possibilité de définir une structure du système telle que cette constante de temps puisse être arbitrairement élevée.

Dans le cas d'une utilisation de diodes semi-conductrices dans l'atténuateur variable, nous avons montré qu'il est possible de choisir le circuit de façon à satisfaire la condition de stabilité de l'amplitude de l'oscillation quelle que soit la constante de temps de l'élément α mesure

Et finalement, dans le cas où l'atténuateur variable est construit avec une lampe incandescente, on démontre que cette condition de stabilité est toujours satisfaite.

CHAPITRE 5

VERIFICATION EXPERIMENTALE

5.1 INTRODUCTION

Nous avons jugé utile de procéder à la réalisation et à l'étude expérimentale d'un oscillateur RC à amplitude stabilisée.

Cette réalisation doit nous permettre en effet de souligner d'une part la validité du modèle adopté pour l'étude de ces oscillateurs et de vérifier, d'autre part, sur un exemple, la possibilité d'accroître arbitrairement la constante de temps du circuit de stabilisation de l'amplitude sans détruire la stabilité du régime périodique harmonique ; ceci moyennant un projet convenable de la structure de l'élément atténuateur variable, conformément aux conclusions de l'analyse théorique.

Les hypothèses admises dans la théorie en ce qui concerne les admittances des divers amplificateurs n'ont été satisfaites que de façon approchée, sans toutefois altérer les résultats.

Le choix d'une fréquence fixe d'oscillation, pour des raisons de simplicité du montage, ne limite pas la généralité des conclusions : en effet, les éléments du circuit sélectif ont des tolérances normales de 20 % et il n'a pas été nécessaire de prévoir des ajustements de gain des amplificateurs.

5.2 DESCRIPTION DU MONTAGE EXPERIMENTAL UTILISE

Pour notre montage expérimental, nous avons conçu l'oscillateur RC à amplitude stabilisée représenté de façon détaillée, avec tous ses composants, sur la figure 5.1. En séparant clairement les diverses fonctions principales du montage, nous avons voulu souligner sa structure

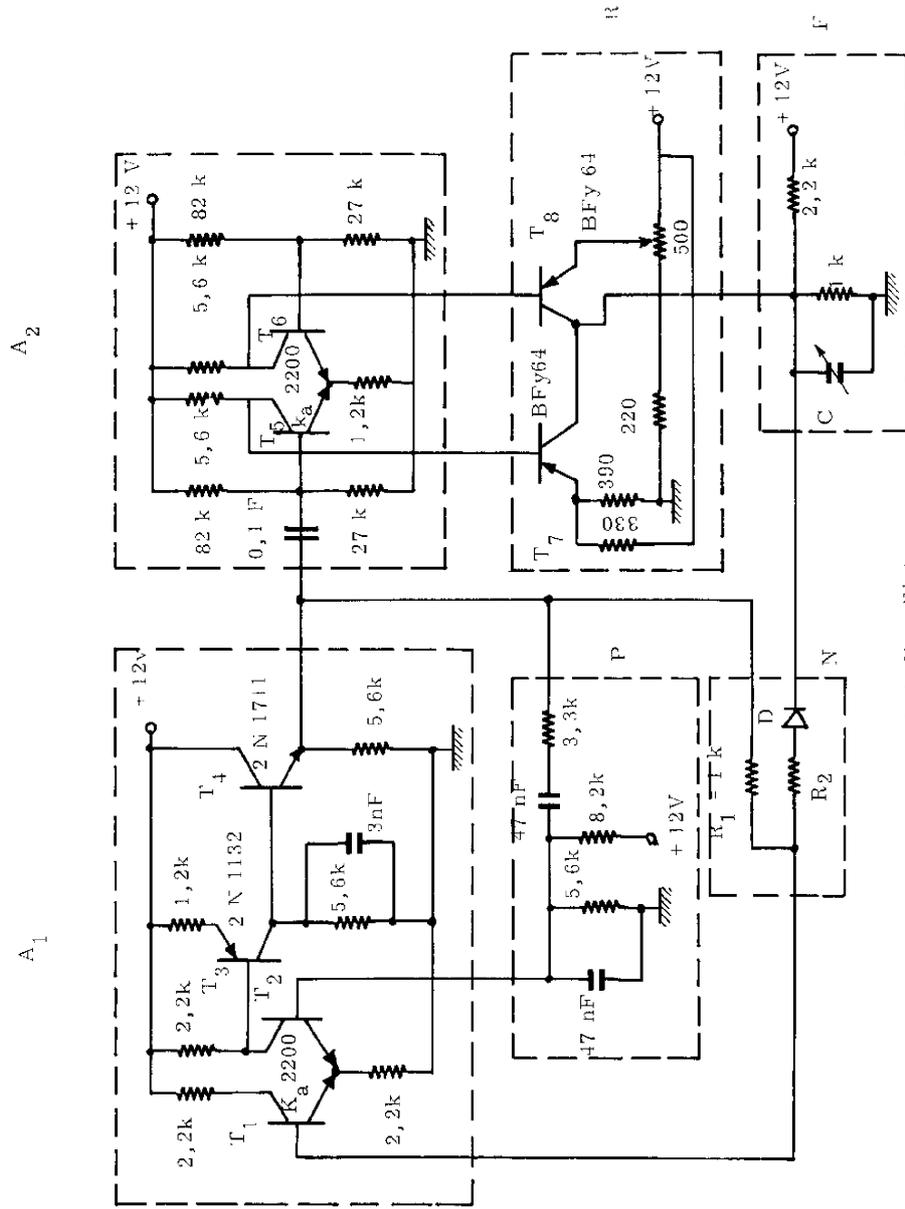


Figure 5.1. : Circuit de l'oscillateur.

indiquée sous forme de schéma-bloc sur la figure 5.2. On reconnaît ainsi les éléments constitutifs suivants : un amplificateur différentiel (A_1)

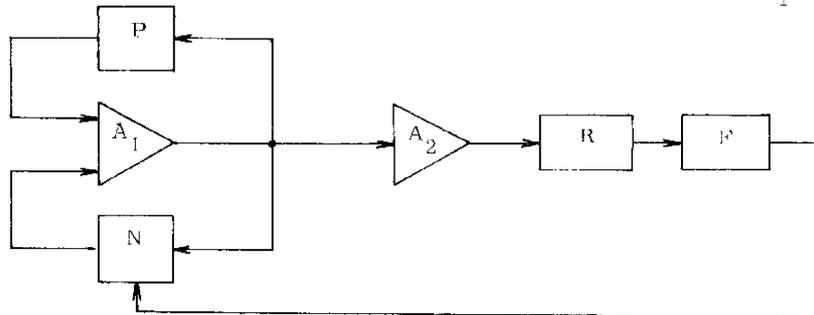


Figure 5.2

quadripôle [37]; un réseau de contre-réaction positive (P) ; un réseau de contre-réaction négative (N) ; un deuxième amplificateur (A_2) ; un redresseur (R) ; un filtre (F).

L'amplificateur différentiel est constitué par un étage à émetteurs couplés, avec sortie asymétrique. Les raisons du choix d'un tel circuit sont sa simplicité, sa bonne stabilité thermique et une faible sensibilité aux fluctuations de la source d'alimentation. Pour obtenir un gain suffisamment élevé, de l'ordre de 100, nous avons utilisé l'étage additionnel du transistor pnp T_3 qui permet, en outre, de ramener le niveau continu de sortie à une valeur convenable. La faible impédance de sortie est assurée par l'étage à émetteur asservi T_4 . La tension de sortie maximum de l'amplificateur est limitée par la saturation de T_3 à une valeur de l'ordre de 9 volts.

Le réseau de contre-réaction positive est un déphaseur de WIEN, calculé pour donner un déphasage nul à la fréquence choisie d'oscillation, 1 kHz. Nous avons employé un facteur en coefficient de 3 (le chapitre 1)

égal à 1, ce qui entraîne une atténuation de $\alpha = 3$ à la fréquence d'oscillation.

Le réseau de contre-réaction négative est constitué par les résistances R_1, R_2 , la diode D , suivant le modèle étudié dans le chapitre précédent.

Le deuxième amplificateur A_2 fournit une tension suffisante pour le fonctionnement du redresseur. Le signal à amplifier est pris à la sortie de l'amplificateur différentiel et non à la sortie du déphaseur de WIEN, pour éviter une charge additionnelle pour le déphaseur et pour profiter de la plus grande amplitude du signal.

Le redresseur est d'un type équilibré. De cette façon, la composante fondamentale est absente de la tension redressée et ne risque pas d'influer sur le fonctionnement du circuit, principalement dans le cas d'une constante de temps assez faible du filtre. Il est constitué par deux transistors fonctionnant en classe C : le courant redressé qui constitue une mesure de l'amplitude de l'oscillation est le courant collecteur.

Le filtre est constitué d'une section RC. Une tension continue de polarisation est prévue.

Le circuit a été construit avec des composants normales de tolérance 20 %.

”

° °

D'après la condition (4.35) du chapitre précédent, l'amplitude de l'oscillation sera stable quelle que soit la valeur, arbitrairement élevée, de la constante de temps du filtre τ si les inégalités (5.1) sont

satisfaites :

$$(5.1) \quad \frac{1}{3(\alpha - 1)} < \frac{R_2}{R_1} < \frac{1}{-1}$$

Dans notre montage, la variation de la constante de temps du filtre F est obtenue à l'aide de la capacité variable C.

Nous avons choisi d'effectuer des mesures dans les 2 cas suivants :

a) $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$
 $R_2 = 220\Omega$

Les 2 inégalités (5.1) sont satisfaites.

b) $R_1 = 1 \text{ K}\Omega$
 $R_2 = 0$

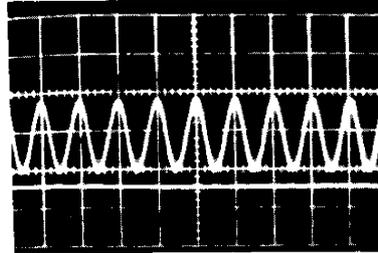
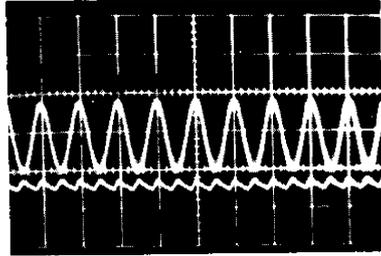
Seule la deuxième inégalité (5.1) est satisfaite ; la constante de temps c'est-à-dire, la capacité C doit être inférieure à une valeur limite pour que la stabilité de l'amplitude de l'oscillation soit assurée.

5.3 RESULTATS EXPERIMENTAUX

Sur les clichés présentés ci-après, il apparaît au-dessous de l'oscillation à la sortie de l'amplificateur différentiel, la tension redressée de mesure.

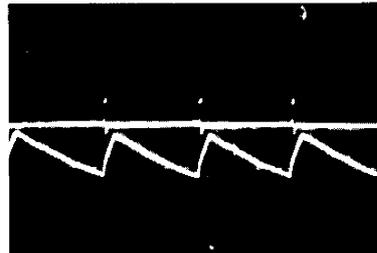
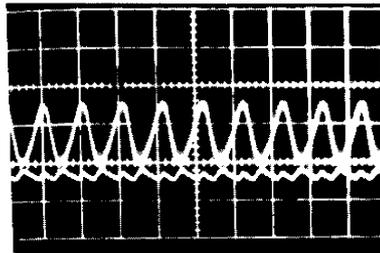
Les deux premiers clichés correspondent au cas $R_2/R_1 = 0,22$. Pour le premier $C=100\mu\text{F}$ et pour le deuxième $C=6000\mu\text{F}$. L'amplitude de l'oscillation n'a pas varié alors que la constante de temps a été multipliée par 60.

Les deux clichés suivants correspondent au cas $R_2 = 0$. Les valeurs de C correspondantes sont 100 et 300 μF , l'amplitude de



Echelles : oscillation : 100 mV/div.
 mesure : 10 mV/div.
 temps : 1 ms/div.

oscillation : 100 mV/div.
 mesure : 10 mV/div.
 temps : 1 mV/div.



Echelles : oscillation : 100 mV/div.
 mesure : 10 mV/div.
 temps : 1 ms/div.

oscillation : 5 V/div.
 mesure : 100mV/div.
 temps : 20ms/div.

l'oscillation est stable. Pour des valeurs de C supérieures, l'oscillation harmonique disparaît ; la limite de stabilité est dangereuse.

°
° °

Le montage expérimental réalisé nous a donc permis d'atteindre le but que nous nous étions proposé et que nous avons indiqué dans le paragraphe d'introduction de ce chapitre. Nous soulignons particulièrement l'intérêt des conclusions de l'analyse théorique pour ce qui concerne le choix de la structure de l'atténuateur à adopter.

Il est bon de noter que la réalisation d'un oscillateur avec des caractéristiques optimales, sur une longue durée de vie, exigerait un projet élaboré, notamment en ce qui concerne la stabilité thermique du montage et la minimisation de l'influence des diverses sources de bruit.

CONCLUSION

L'étude de certains circuits oscillateurs quasi sinusoidaux à transistor nous a amené à considérer les diverses non linéarités du transistor en vue de l'établissement d'un modèle convenable pour l'étude de ces oscillateurs. Nous avons écarté le cas des oscillateurs où l'amplitude est limitée par la saturation du transistor, ces oscillateurs ayant une moins bonne stabilité de fréquence notamment par rapport à des fluctuations des tensions d'alimentation et fonctionnant avec un taux d'harmonique plus élevé. En conséquence, nous avons choisi comme non linéarité dominante, surtout aux basses fréquences, la caractéristique non linéaire des courants émetteur et collecteur en fonction de la tension émetteur-base.

Le modèle non linéaire du transistor adopté comporte des paramètres équivalents pour les composantes fondamentales des divers courants ; ces paramètres dépendent non seulement de l'amplitude du signal d'entrée mais aussi de la façon dont cette amplitude varie dans le temps.

Nous avons montré qu'un oscillateur à transistor sans saturation doit être représenté par un système d'équations différentielles du troisième ordre. Ce modèle exige, en concordance avec le comportement observé expérimentalement, une condition additionnelle de stabilité des oscillations périodiques, outre la condition de transconductance équivalente du transistor fonction décroissante de l'amplitude qui serait suffisante pour un modèle à 1 degré de liberté. Cette condition additionnelle, qui apparaît sous la forme d'une limite supérieure pour la capacité C_e du circuit de polarisation du transistor, a pu être établie tout d'abord par la méthode de linéarisation équivalente ; cependant les conclusions restaient

ainsi particulières et incomplètes. Nous avons donc entrepris la recherche d'une expression explicite des solutions du système d'équations différentielles qui traduit le comportement dynamique du système. Cette expression a été obtenue par application de la méthode de VAN der POL avec la modification nécessaire pour la solution de notre problème. Il a été possible notamment d'étudier le comportement de l'oscillateur au voisinage de la limite de stabilité.

Sous certaines hypothèses les oscillateurs RC à amplitude stabilisée appartiennent aussi à la classe des oscillateurs à 1,5 degré de liberté. L'application à ces oscillateurs des méthodes utilisées pour l'étude des oscillateurs à transistor à circuit accordé a permis de mettre en évidence le type de structure à adopter pour un élément essentiel de ces oscillateurs, l'atténuateur variable, afin que la deuxième condition de stabilité soit satisfaite pour des constantes de temps du circuit de stabilisation de l'amplitude arbitrairement élevées. En particulier, l'oscillateur à pont de WIFEN à amplitude stabilisée par lampe incandescente possède une telle structure, ce qui explique le fait que, bien qu'ayant au moins 1,5 degré de liberté, de tels oscillateurs ne présentent pas d'oscillations intermittentes.

Les conclusions sur les oscillateurs à amplitude stabilisée ont été utilisées pour la réalisation d'un montage expérimental d'oscillateur à amplitude stabilisée, et les résultats de l'expérience ont confirmé les conclusions de la théorie.

Les résultats de nos travaux intéressent donc principalement la conception de montages oscillateurs, notamment à transistors et en basses fréquences. Il serait aisé d'appliquer les mêmes méthodes d'ana-

lyse aux oscillateurs à tubes qui présentent aussi parfois un comportement analogue d'oscillations intermittentes et peuvent être de même décrits par un modèle à 1,5 degré de liberté. En effet, ces oscillateurs fonctionnent le plus souvent en classe C, et en vue de rendre le comportement de ces oscillateurs de type "doux", c'est-à-dire afin d'obtenir une transconductance équivalente du tube fonction décroissante de l'amplitude de l'oscillation, la polarisation négative de grille est assurée par le redressement de la tension d'oscillation.

Pour l'extension des résultats aux oscillateurs fonctionnant à des fréquences plus élevées, il y a lieu de distinguer deux domaines de fréquence ; d'une part, les fréquences peu élevées, pour lesquelles les circuits oscillateurs utilisés conservent la même structure, alors qu'il n'est pas possible de caractériser le transistor par le modèle basse fréquence considéré dans notre étude ; d'autre part, les fréquences très élevées, pour lesquelles les circuits oscillateurs présentent une structure différente. Dans le premier cas, nous pensons pouvoir étendre par la suite les méthodes d'analyse développées dans notre mémoire. Dans le second cas, pour ce qui concerne la caractérisation du comportement du transistor en tant qu'élément actif de l'oscillateur, il est essentiel de considérer le temps de transit des porteurs minoritaires dans la base du transistor.

Un prolongement utile de notre travail pourrait résider dans l'étude des systèmes à 1,5 degré de liberté en régime non autonome, dans le but d'analyser leurs divers comportements possibles. Certaines oscillations parasites qui apparaissent dans les amplificateurs, en présence d'un signal d'entrée d'amplitude et de fréquence convenables, comme indiqué dans [37] paraissent entrer dans le cadre de cette analyse. Une étude appropriée, dans ce sens, pourrait présenter un intérêt pratique en ce qui concerne l'établissement de critères de stabilité globale pour ces amplificateurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W.A EDSON
"Vacuum Tube Oscillators", Willey, N. Y., 1953, p. 49.
- [2] W. A. EDSON
"Vacuum Tube Oscillators", Willey, N. Y., 1953, p. 151.
- [3] J. GROSZKOWSKI
"Frequency of Self-Oscillations", Pergamon Press, Oxford,
1964, p. 129.
- [4] E.J. CASSIGNOL - Y. BURIAN
C.R. Acad. Sci., t. 261, nov. 1965, p. 3995.
- [5] G. REY
C.R. Acad. Sci., t. 264, jan. 1967, p. 120.
- [6] G. REY
C.R. Acad. Sci., t. 265, déc. 1967, p. 1384.
- [7] G. REY
Thèse n° 314, Faculté des Sciences, Toulouse fév. 1968.
- [8] GROSZKOWSKI
"Frequency of Self-Oscillations", Pergamon Press, Oxford,
1964, p. 289.
- [9] A. PETITCLERC
"Electronique Physique des Semi-conducteurs", Gauthier-Villars
Paris, 1962, p. 401.

- [10] W.A. EDSON
"Vacuum Tube Oscillators", Willey, N.Y., 1953, p. 54.
- [11] J. GROSZKOWSKI
"Frequency of Self-Oscillations", Pergamon Press, Oxford,
1964, p. 147.
- [12] N. N. BOGOLYUBOV - J. A. MITROPOLSKI
"Les Méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations non
Linéaires", Gauthier-Villars, Paris, 1962, p. 115.
- [13] I. G. MALKIN
"Some Problems in the Theory of Non Linear Oscillations",
USA Atomic Energy Comission Publication.
- [14] I. GUMOWSKI
Thèse n° 166, Faculté des Sciences, Toulouse, 1960, p. 3.
- [15] W.A. EDSON
"Vacuum Tube Oscillators", Willey N.Y., 1953, p. 227.
- [16] W.R. Mac LEAN
Proc. IRE, vol 42, n° 12, p. 1784, déc. 1954.
- [17] H. J. REICH
Proc. IRE, vol. 51, n°2, p. 381, fév. 1963.
- [18] N. MINORSKY
"Nonlinear Oscillations", Van Nostrand, Princeton, 1962, p. 585.
- [19] I. G. MALKIN
"Some Problems in the Théory of Non Linear Oscillations"
USA Atomic Energy Commission Publication, p. 182.

- [20] P.R. AIGRAIN
Teare B.R., Williams E.M., Proc. IRE, vol. 37, p. 1152, 1949.
- [21] Y. BURIAN
C.R. Acad. Sci., t. 264, p. 850, Mars 1967.
- [22] A. ANDRONOV - A. VITT, S. E. KHAIKHIN
"Theory of Oscillators", Pergamon Press, Oxford, 1966, p. 409.
- [23] N. MINORSKY
"Nonlinear Oscillations", Van Nostrand, Princeton, 1962, p. 163.
- [24] Y. BURIAN
C.R. Acad. Sci, t. 265, p. 592, sept. 1967.
- [25] J. GROSZKOWSKI
"Frequency of Self Oscillations" Pergamon Press, Oxford, 1962,
p. 397.
- [26] A. ANDRONOV - A. VITT - S. E. KHAIKHIN
"Theory of Oscillators", Pergamon Press, Oxford, 1966, p. 343.
- [27] Y. BURIAN
C.R. Acad. Sci., t. 265, p. 1297, déc. 1967.
- [28] G. GRATELOUP
Thèse n° 253, Faculté des Sciences, Toulouse, 1965. pp 55-60.
- [29] N.N. BOGOLYUBOV - J.A. MITROPOLSKI
"Les Méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations Non
Linéaires", Gauthier-Villars, Paris, 1962, p. 378.
- [30] L.A. MEACHAM
Proc. IRE, vol. 26, p. 1278, oct. 1938.

- [31] E. J. POSTE - H. F. PIT
Proc. IRE, vol 39, p. 169, fév. 1951.
- [32] N. N. BOGOLYUBOV - J. A. MITROPOLSKI
"Les Méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations Non
Linéaires", Gauthier-Villars, Paris, 1962, p. 416.
- [33] W. A. EDSON
"Vacuum Tube Oscillators", Willey, N. Y. 1953, p. 138.
- [34] A. ANDRONOV - A. VITT - S. E. KHAIKHIN
"Theory of Oscillators", Pergamon Press, Oxford, 1966, p. 409.
- [35] A. N. DANILOV - V. A. MALYSHEV
Radiotekhnika i Elektronika, vol. 12, n°9, pp. 1583, sept. 1967
- [36] W. A. EDSON
"Vacuum Tube Oscillations", Willey, N. Y., 1953, p. 51
- [37] J. C. MARTIN
Thèse de Docteur ès Sciences Physiques, Faculté des Sciences
Toulouse, 1966.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	Page	1
<u>CHAPITRE PREMIER : LE FONCTIONNEMENT NON LINEAIRE DU TRANSISTOR</u>		7
1.1 - Introduction		9
1.2 - Représentation du transistor intrinsèque		11
1.3 - Les circuits de polarisation		21
1.4 - Gain en modulation		30
1.4.1. - Cas où la transconductance est indépendante du temps		30
1.4.2. - Cas où la transconductance est une fonction du temps		32
1.5 - Sommaire		34
<u>CHAPITRE II : ANALYSE D'UN OSCILLATEUR ACCORDE DECRIT PAR UN MODELE A 1,5 DEGRE DE LIBERTE</u>		37
2.1 - Introduction		39
2.2 - L'oscillateur à circuit accordé à transistor		40
2.3 - Etude de l'équation (2.1)		42
2.4 - Limite de validité du modèle étudié		44
2.5 - Sur la stabilité des oscillation périodiques		46
2.6 - Sommaire		50

<u>CHAPITRE III</u> : ETUDE DE LA STABILITE DE L'OSCILLATION PERIODIQUE POUR UN OSCILLATEUR ACCORDE A TRANSISTOR	53
3.1 - Introduction	55
3.2 - Recherche d'une expression explicite de la solution	55
3.3 - Etude des équations (3.1)	58
3.4 - Etude de la stabilité du cas critique de Lyapunov relatif aux équations (3.9) et (3.10)	65
3.5 - Sommaire	72
<u>CHAPITRE IV</u> : LES OSCILLATEURS RC A AMPLITUDE STABILISEE	73
4.1 - Introduction	75
4.2 - Les oscillateurs RC à amplitude stabilisée	77
4.2.1 - Etude des conditions de stabilité du régime permanent périodique	77
4.2.2 - Un exemple d'application	85
4.3 - Oscillateurs à pent	97
4.4 - Stabilisation de l'amplitude par lampe incandescente	95
4.5 - Sommaire	96
<u>CHAPITRE V</u> : VERIFICATION EXPERIMENTALE	99
5.1 - Introduction	101
5.2 - Description du montage expérimental utilisé	101
5.3 - Résultats expérimentaux	105

CONCLUSION 109

BIBLIOGRAPHIE 115

•