



HAL
open science

Physique de la saveur au-delà du Modèle Standard et dimensions supplémentaires

Julien Welzel

► **To cite this version:**

Julien Welzel. Physique de la saveur au-delà du Modèle Standard et dimensions supplémentaires. Physique mathématique [math-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2006. Français. NNT : . tel-00175294

HAL Id: tel-00175294

<https://theses.hal.science/tel-00175294>

Submitted on 27 Sep 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre 213-2006
LYCEN – T 2006-30

Thèse

présentée devant

l'Université Claude Bernard Lyon-I

pour l'obtention du

DIPLOME de DOCTORAT
Spécialité : Physique Théorique

(arrêté du 7 août 2006)

par

Julien WELZEL

**Physique de la saveur au-delà du
Modèle Standard et dimensions supplémentaires**

Soutenue le 6 novembre 2006
devant la Commission d'Examen

Jury :	M.	M.	Kibler	Président du jury
	M.	A.	Deandrea	Directeur de thèse
	M.	E.	Dudas	Rapporteur
	M.	F.	Delduc	Rapporteur
	Mme	S.	Davidson	
	M.	S.	Lavignac	



N° d'ordre 213-2006
LYCEN – T 2006-30

Thèse

présentée devant

l'Université Claude Bernard Lyon-I

pour l'obtention du

DIPLOME de DOCTORAT
Spécialité : Physique Théorique

(arrêté du 7 août 2006)

par

Julien WELZEL

**Physique de la saveur au-delà du
Modèle Standard et dimensions supplémentaires**

Soutenue le 6 novembre 2006
devant la Commission d'Examen

Jury :	M.	M.	Kibler	Président du jury
	M.	A.	Deandrea	Directeur de thèse
	M.	E.	Dudas	Rapporteur
	M.	F.	Delduc	Rapporteur
	Mme	S.	Davidson	
	M.	S.	Lavignac	

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse, Aldo Deandrea, avec qui j'ai partagé plus de 3 années de recherches pendant lesquelles j'ai énormément appris. J'ai apprécié son soutien, son optimisme et nos discussions de physique.

Je remercie ensuite les membres de mon jury de thèse, Sacha Davidson, Stephane Lavignac, Maurice Kibler et mes rapporteurs, Francois Delduc et Emilian Dudas.

Mes remerciements vont aussi à mes collaborateurs et en particulier Pierre Hosteins et Micaela Oertel avec qui j'ai beaucoup travaillé, beaucoup discuté et de ce fait beaucoup appris.

Je voudrais aussi remercier tous les membres du groupe de physique théorique de l'Institut de Physique Nucléaire de Lyon (IPNL) pour leur accueil ainsi que Mme Chosson et Sylvie Flores qui m'ont tous rendu le séjour l'IPNL très agréable humainement et très profitable scientifiquement.

Enfin, mes remerciements les plus chaleureux vont à ma famille, à Léna et à mes amis à qui je dédie cette thèse.

Summary

Even if the Standard Model (SM) of particle physics meets an extraordinary experimental success, some fundamental questions remain unanswered (origin of hierarchies, observed mixing pattern in neutrino and quark sectors...). We need to go beyond the SM and to find new principles/symmetries. The aim of this thesis is to study phenomenologies of supersymmetric and/or extradimensional models and to look at deviations from the SM, in the flavour sector.

First, we addressed the question of baryon- and lepton-number conservation through R -parity in low-energy supersymmetric models. Precisely, we studied its violation using experimental data and the rare kaon decay $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$ to derive upper limits on R -parity violating couplings involved in it. In this context we have pointed out the importance of R -parity conserving contributions and their interferences with R -parity violating ones.

In the second part, we studied effects of an extra dimension (space-like and compactified) on several examples: quantum electrodynamics and gauge invariance, strong and electroweak unification, neutrino masses and mixing angles. Typically, adding an extra dimension reduces the predictive power. However, we are still able to know generic behaviours (order of magnitude predictions). In particular, we pointed out the possibility of a weak neutrino mixing pattern (CKM-like) at high energy for a significative and reasonable parameter space. This opens up new perspectives in the study of flavour symmetries and bonds between quark and leptons.

Résumé

Malgrès le succès expérimental rencontré par le Modèle Standard (MS) de la physique des particules, certains phénomènes (les oscillations de neutrinos) et certaines questions fondamentales (l'origine des hiérarchies entre les différentes échelles caractéristiques) n'y trouvent pas de réponse. Il y a une nécessité d'aller au-delà du MS pour le compléter. Le sujet de cette thèse est d'étudier la phénoménologie des modèles *supersymétriques* ou *extra-dimensionnels* et les déviations de leurs prédictions par rapport à celles du MS dans le domaine de la *saveur*.

Tout d'abord, nous avons abordé la question de la conservation du nombre baryonique et leptonique *via* la conservation de la symétrie de R -parité dans les modèles supersymétriques de basse énergie. Plus précisément, nous nous sommes placés dans le cas où cette symétrie entre particules et 'super'-partenaires n'était pas conservée. En utilisant les données expérimentales disponibles pour la désintégration rare du kaon chargé en une paire de neutrino-antineutrino et un pion chargé, nous avons entre autres obtenu une limite supérieure sur la valeur permise de certains couplages caractérisant la violation de la R -parité. Nous avons montré l'intérêt de prendre aussi en compte les contributions conservant la R -parité, négligées jusqu'alors dans les autres études sur le sujet.

Dans une seconde partie, nous avons étudié l'impact de l'introduction d'une dimension spatiale supplémentaire, repliée sur elle-même. Les exemples choisis concernent l'électrodynamique quantique et l'invariance de jauge, l'unification des forces forte, faible et électromagnétique ainsi que l'origine de la valeur des masses et des angles de mélanges des neutrinos. Dans ce dernier cas, l'étude a été faite dans le cadre du MSSM à 5 dimensions. Typiquement, l'introduction de dimensions supplémentaires réduit le pouvoir prédictif. Cependant, des comportements généraux peuvent toujours être établis. Ainsi, nous avons pu mettre en évidence la possibilité d'un mélange leptonique faible (de type CKM) à haute énergie, pour une région significative et raisonnable de l'espace des paramètres, résultat offrant de nouvelles perspectives pour l'étude de l'origine de la saveur et des liens entre quarks et leptons.

Table des matières

I	La désintégration $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$	1
1	Introduction : la physique de la saveur au-delà du Modèle Standard	3
2	La désintégration $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$ dans le Modèle standard	5
2.1	Calcul dans le Modèle Standard	5
2.1.1	L'expansion en produit d'opérateurs	5
2.1.2	Le coefficient de Wilson du vertex effectif $Zd\bar{s}$	6
2.1.3	Elément de matrice hadronique	11
2.1.4	Taux de branchement : expression phénoménologique	12
2.2	Analyse numérique	13
2.2.1	Données expérimentales	13
2.2.2	Résultats et discussions des erreurs théoriques	14
2.2.3	Nouvelle physique	16
2.2.4	Actualisation	16
3	Interlude: Supersymétrie, MSSM, R-parité	17
3.1	Introduction	17
3.1.1	La supersymétrie et son introduction	17
3.1.2	Pourquoi la supersymétrie	18
3.2	La structure d'une théorie supersymétrique	21
3.2.1	L'algèbre supersymétrique et les supermultiplets	21
3.2.2	Théorie des champs supersymétrique	23
3.3	Les modèles supersymétriques à basse énergie	28
3.3.1	Les modèles $\mathcal{N} \geq 2$	29
3.3.2	La zoologie du Modèle Standard Supersymétrique Minimal	29
3.3.3	Le modèle	32
3.3.4	La brisure douce de la supersymétrie	32
3.3.5	La brisure électrofaible et les bosons de Higgs supersymétriques	33
3.4	La physique de la saveur dans une théorie supersymétrique	36

3.4.1	Squarks et sleptons	36
3.4.2	L'approximation d'insertion de masse	36
3.5	La R -parité	38
3.5.1	Introduction : nombre leptonique et baryonique	38
3.5.2	La R -parité	38
3.5.3	Les couplages violant la R -parité	39
3.5.4	Premières conséquences	41
3.5.5	Contraintes directes et indirectes	41
3.5.6	Le choix de la base	42
3.5.7	Conclusions	43
3.6	Récapitulatif des propriétés importantes	43
4	$K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$ dans le MSSM sans la R-parité	45
4.1	$K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$ dans le MSSM	45
4.1.1	Les nouvelles contributions	45
4.1.2	Paramétrisation	46
4.1.3	L'approximation d'insertion de masse	47
4.1.4	Neutralinos	48
4.1.5	Analyse numérique	50
4.2	Contribution violant la R -parité, contraintes	53
4.2.1	Taux de branchement total	53
4.2.2	Analyse et contraintes	55
5	Conclusions de la première partie	59
 II Effets à une boucle des dimensions supplémentaires		61
1	Introduction : la physique des dimensions supplémentaires	63
2	Interlude : modèles avec dimensions supplémentaires	65
2.1	Dimension supplémentaire compacte	65
2.1.1	Dimension spatiale ou temporelle?	65
2.1.2	Théorie des champs scalaires	66
2.2	Orbifold	68
2.2.1	Fermions chiraux	68
2.2.2	Parité Z_2	69
2.2.3	Localisation : <i>bulk</i> et <i>brane</i>	71
2.2.4	Brisure de symétrie	72

3	Les corrections radiatives à une boucle	75
3.1	<i>Interlude</i> : corrections radiatives et renormalisation	75
3.1.1	Les corrections radiatives en théorie quantique des champs	75
3.1.2	La renormalisation	77
3.1.3	Théorie effective des champs	79
3.2	Les corrections radiatives à 5 dimensions	84
3.2.1	Régularisations	84
3.2.2	L'électrodynamique quantique à 5 dimensions	87
3.2.3	La polarisation du photon $A_\mu^{(0)}$	89
3.2.4	Discussion: loi de puissance et unification des couplages de jauge	93
4	Application aux masses et mélanges de neutrinos	97
4.1	<i>Interlude</i> : superchamps, théorème de non-renormalisation . . .	97
4.1.1	Le formalisme des superchamps	97
4.1.2	Le théorème de non-renormalisation	102
4.2	Renormalisation du couplage κ	103
4.2.1	Masse des neutrinos	103
4.2.2	Résultat à 4 dimensions dans le MSSM	105
4.3	Calcul dans le "MSSM" à 5 dimensions	108
4.3.1	Description du modèle et du spectre	108
4.3.2	Résultats	110
4.4	Localisation des fermions du MS sur une brane	113
4.4.1	Analyse numérique des masses et angles de mélanges .	114
5	Conclusions de la deuxième partie	119
A	La désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$	129
A.1	$K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ dans le MS [9]	129
A.2	$K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ dans le MSSM [44, 46]	131
A.3	$K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ et la violation de R -parité [1]	136
B	Polarisation du photon	137
B.1	Régularisation par <i>cut-off</i>	137
B.2	Régularisation dimensionnelle	142
C	Self-énergie d'un superchamp chiral dans le MSSM à 5d	145
C.1	Sommation des modes de Kaluza-Klein	145

Introduction générale

Notre connaissance de la physique des particules est contenue dans ce que l'on appelle communément *le Modèle Standard* (MS). Celui-ci décrit avec beaucoup de succès les interactions électromagnétique, faible et forte entre les constituants de la matière quand l'impulsion mise en jeu est au plus de l'ordre de la centaine de GeV. Le MS est une application remarquable des théories quantiques des champs et des théories de jauge. La physique décrite est notamment invariante sous les symétries de Lorentz¹ et sous les symétries de *jauge* fondamentales représentées mathématiquement par les groupes $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Le comportement des particules entre elles est donné par la collection de leurs nombres quantiques (autrement appelés leurs "charges") associés à ces groupes de symétrie : *la couleur* C , *l'isospin faible* T_3 et *l'hypercharge* Y , respectivement. La charge électrique est alors donnée par la combinaison $Q = T_3 + Y/2$. En plus de ces charges, les particules de matière (les *fermions*), se distinguent par leurs masses et sont regroupées par *générations*. La structure des transitions entre générations de *quarks* est donnée dans le MS par la matrice unitaire de Cabibbo, Kobayashi et Maskawa (CKM) [4]. Toutes les transitions faibles entre quarks s'expriment en terme des 3 angles et de l'unique phase contenue dans cette matrice. Cette phase explique en particulier la violation de la symétrie CP dans les oscillations observées des mésons neutres K^0 - \bar{K}^0 . La physique de la *saveur* a pour objet d'étude les transitions entre les différents fermions (*i.e.* les différentes "saveurs"), les matrices de masses et les mécanismes à l'origine de leur structure.

Il reste encore un aspect important du MS à explorer expérimentalement : l'origine du mécanisme de la brisure de la symétrie électrofaible et son éventuel médiateur associé, le *boson de Higgs*. Cet aspect fera l'objet d'investigations intensives au collisionneur LHC en cours d'installation au CERN.

Les prédictions du MS ont jusqu'alors été vérifiées malgré les recherches de déviations. Certes, ses prédictions ne sont pas également justes pour toutes les observables mais nous sommes loin d'une déviation claire. Cependant, le

1. c'est-à-dire les symétries relativistes de l'espace-temps

MS se révèle insuffisant sur plusieurs points et il reste encore un certain nombre de problèmes observationnels et théoriques sans solutions.

Depuis 1998 avec l'expérience SuperKamiokande, la physique des neutrinos s'est enrichie avec la mise en évidence des oscillations entre saveurs de neutrinos lors de la propagation. Celles-ci sont caractérisées par les 3 masses² de neutrinos, 3 angles dits de "mélange" et éventuellement 3 phases (selon la nature³ du neutrino). Tout comme pour les quarks, une matrice unitaire regroupe ces angles et ces phases, la matrice de Maki, Nakagawa et Sakita (MNS) [5]. Dans le MS, par construction, le neutrino est une particule de masse nulle. Ces oscillations nécessitant des masses non-nulles, elles sont un signal fort de présence de *nouvelle physique*, c'est-à-dire d'un effet non décrit dans le MS.

Les masses de tous les fermions (12 au total) sont des paramètres libres, non-prédits par le MS. Nous n'avons aucun indice théorique concernant le nombre de génération, et nous ne connaissons pas de relations particulières entre-elles. De plus, ces masses sont très différentes : le quark *up* qui appartient à la première génération est 10^5 fois plus léger que le quark *top* classé dans la troisième génération. Ceci implique alors des valeurs très différentes aux *couplages de Yukawa* caractérisant leurs interactions avec le boson de Higgs. Comment peut-on générer une telle hiérarchie ? Dans le MS il n'y a aucune théorie de la saveur, juste une description ou une paramétrisation *via* les matrices CKM et MNS, c'est au-delà de ce modèle qu'il faut se tourner pour y trouver l'explication de ces différences entre les saveurs des fermions.

Il y a aussi des observations astrophysiques sans explication dans le cadre du MS. La *matière noire*⁴ présente dans les galaxies n'a pas les caractéristiques d'une particule du MS. De plus, une asymétrie matière-antimatière est observée dans l'univers. La phase dans CKM qui permet la violation de CP, une des conditions nécessaires relevées par A.Sakharov [6] pour générer l'asymétrie, n'est cependant pas suffisante pour en être à l'origine. Il doit donc exister d'autres violations de CP au-delà du MS.

En dehors des considérations expérimentales, il y a aussi un problème lié à l'énorme écart d'énergie entre l'échelle électrofaible, $\mathcal{O}(10^2)$ GeV, et l'échelle de Planck, $\mathcal{O}(10^{19})$ GeV. En effet, le MS n'ayant aucune symétrie pour protéger la masse du boson de Higgs celle-ci reçoit naturellement des corrections

2. Plus précisément, ce sont les différences de masses carrées qui importent dans les oscillations. La connaissance de 2 de ces différences suffit dans le cas à 3 saveurs de neutrinos.

3. c'est-à-dire si le neutrino est sa propre anti-particule (neutrino de *Majorana*) ou pas (neutrino de *Dirac*)

4. appelée ainsi car elle n'émet pas de radiations et n'est donc pas observable dans les télescopes

quantiques de l'ordre de la masse de Planck. Hors ceci est incompatible avec la nécessité d'avoir une masse du boson de Higgs de l'ordre de l'échelle de la brisure de symétrie électrofaible (dont il est le médiateur supposé). Il manque quelque chose au MS pour résoudre ce paradoxe.

D'un point de vue théorique, ces observations requièrent d'étendre le MS, par exemple avec de nouvelles interactions (effectives) et un nouveau contenu en particules. Ces nouvelles particules lourdes ne peuvent être produites qu'à haute énergie (au-delà de la centaine de GeV). Le MS est alors considéré de nos jours comme une *théorie effective* et ne nécessite plus d'obéir à la contrainte de *renormalisabilité*. Il existe une théorie plus fondamentale qui décrit la physique à plus haute énergie et qui apporte les solutions à une partie au moins des problèmes énoncés précédemment. Mais le succès du MS rend nécessaire que la limite de basse-énergie soit de la forme du MS c'est-à-dire qu'elle partage son contenu en particules légères et ses symétries. Une candidate possible, la théorie des cordes, donne par exemple une origine *dynamique* à la valeur observée des paramètres du MS : ce sont les caractéristiques propres comme la géométrie ou les symétries de la théorie qui les déterminent⁵.

Dans l'esprit d'une théorie effective des champs, on paramétrise la nouvelle physique par des *opérateurs non-renormalisables*, supprimés par une échelle de masse caractéristique. Ils sont construits avec le contenu en particule du MS et en respectant les symétries de celui-ci. Pour la physique des saveurs de quarks, ce sont des opérateurs de dimension 6 qui sont pertinents. Ils décrivent une interaction ponctuelle entre 4 fermions qui pourrait expliquer les changements de saveur dans certains processus rares. Pour la physique des masses et mélanges des neutrinos, indépendamment du mécanisme précis de leur origine, on introduit le seul opérateur possible de dimension 5. En effet, il décrit une interaction ponctuelle entre 2 champs de Higgs et 2 champs de neutrinos qui se traduit à la brisure électrofaible par un terme de masse (de Majorana) pour les neutrinos. Le sujet d'étude de cette thèse comprend, entre-autres, l'analyse de l'influence de ces nouveaux opérateurs et de leur origine.

Le manuscrit de la thèse comporte deux parties, indépendantes, mais qui se placent toutes les deux dans un cadre au-delà du MS pour en étudier les propriétés au niveau de la physique des saveurs.

- Dans la première partie qui correspond à la première année de thèse, j'ai utilisé la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$, observée mais rare, pour étudier

5. En pratique, nous ne connaissons pas encore les caractéristiques précises pour obtenir complètement le MS à basse énergie avec une prédiction de ses paramètres.

- les modèles supersymétriques sans la symétrie dite de " R -parité". Les résultats de ce travail effectué en collaboration avec A.Deandrea et M.Oertel (actuellement LUTh) ont été publiés dans la revue JHEP [1].
- L'introduction de dimension(s) supplémentaire(s) apportant beaucoup de nouveauté dans la construction de modèles, j'y ai consacré les deux années suivantes. En particulier, beaucoup de temps a été passé sur l'étude technique des corrections radiatives à une boucle et à son application à l'unification des couplages des interactions électrofaible et forte. Les résultats obtenus avec A.Deandrea, D.Davesne et T.Varin (IPNL) sont publiés dans la revue Phys.Rev.D [2].
 - Un autre travail est présenté dans cette seconde partie, en collaboration avec A.Deandrea, P.Hosteins (SPhT) et M.Oertel. Il concerne les corrections radiatives à la constante de couplage de l'opérateur de dimension 5 responsable des masses de neutrinos qui ont été calculées dans le cadre d'un modèle supersymétrique à 5 dimensions. Ce résultat permet d'aborder l'étude de l'évolution des masses et mélanges des neutrinos et de leur origine. Ce travail, offrant d'importantes perspectives, a été soumis à publication [3].

Des "interludes", nécessaires à la compréhension des résultats présentés, sont introduits au fur et à mesure. On pourra y trouver les aspects importants de la supersymétrie et des dimensions supplémentaires ainsi que le vocabulaire associé et les techniques utilisées. Enfin, des appendices ont été ajoutés dans lesquels on retrouve les détails techniques et les étapes intermédiaires de certains calculs présents dans le corps du manuscrit.

Première partie

La désintégration $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$

Chapitre 1

Introduction : *la physique de la saveur au-delà du Modèle Standard*

La physique de la saveur dans le MS n'est pas encore complètement déterminée à cause des difficultés expérimentales et théoriques liées à l'observation et à la compréhension des processus pertinents. En effet, les taux de branchements des processus intéressants sont en général faibles et sont difficiles à mesurer. De plus, l'extraction des éléments de la matrice CKM est en général rendue délicate à cause des effets non-perturbatifs (les effets de longue-distance) de la QCD qui sont encore mal maîtrisés. Se pose alors la question suivante : la matrice CKM peut-elle décrire avec ses 3 angles et sa seule phase toutes les désintégrations faibles et jusqu'à quelle précision ? Les modèles au-delà du MS ont en général une physique de la saveur beaucoup plus riche, par exemple à cause d'un contenu plus vaste en particules. Il nous faut alors comprendre pourquoi la description en terme de la matrice CKM est si efficace à la précision expérimentale actuelle et quelles sont les caractéristiques de la nouvelle physique des saveurs. Par exemple, les contributions à une boucle dans le MS exhibent la présence du mécanisme de Glashow, Iliopoulos et Maiani [7] (GIM) qui joue un rôle important dans la suppression des courants neutres changeant la saveur (FCNC). Quel est alors l'analogue de ce mécanisme dans les modèles au-delà du MS ? Pourquoi la matrice CKM décrit-elle si efficacement la physique de la saveur dans le MS ?

Dans la recherche de physique de la saveur dans le MS et au-delà certains processus comme les désintégrations des mésons K ou B sont riches d'informations et peuvent nous servir de guide. En particulier, c'est le cas des processus rares changeant la saveur comme les oscillations $K^0 - \bar{K}^0$ ou $B^0 - \bar{B}^0$ mais aussi de la désintégration du kaon en un pion et une paire neutrino/anti-neutrino, $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$. Ce dernier partage avec les autres processus FCNC une forte sensibilité à la physique de courte-distance et donc aux

extensions possibles du MS. Notamment, deux faits rendent cette désintégration très attractive : son taux de branchement est très faible, mesuré aux alentours de 10^{-10} et nous sommes capable de prédire précisément sa valeur dans le MS grâce à une astuce nous permettant de la rendre indépendante de notre méconnaissance de la physique hadronique. Ce processus est donc très utile pour trouver des signaux de nouvelle physique. Mais même avant de détecter des déviations par rapport à la prédiction standard, nous pouvons contraindre les paramètres de la physique au-delà du TeV par la comparaison de la valeur expérimentale à la prédiction précise dans le MS.

Ainsi, nous utiliserons ce mode de désintégration dans le cas où la nouvelle physique à l'échelle du TeV prend la forme de la supersymétrie (du MSSM) avec brisure de la symétrie de R -parité. Dans les extensions supersymétriques du MS, des particules scalaires portant des nombres quantiques de saveur font leur apparition et peuvent dès lors contribuer aux processus FCNC comme la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$. Celle-ci peut recevoir d'importantes contributions, mais seulement à l'ordre des boucles quand la R -parité est conservée. Elles peuvent être de l'ordre de grandeur de celles du MS, et nous le verrons, peuvent même saturer la limite expérimentale. En général, les modèles de nouvelle physique comportent beaucoup de nouveaux paramètres dans le secteur de la saveur et c'est le cas de la supersymétrie avec brisure de la symétrie de R -parité. Nous chercherons à contraindre les couplages des interactions violant la R -parité c'est-à-dire l'ampleur de la brisure de la R -parité intervenant dans ce processus. Mais la nouveauté de notre travail sera surtout d'introduire les interférences entre les différentes contributions au processus et d'en mesurer l'effet sur les limites supérieures que l'on peut déduire sur les couplages λ' violant la R -parité. Dans ce but, une mise à jour des prédictions théoriques a été effectuée.

Après une introduction à la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ dans le MS, nous donnons les résultats obtenus de la prédiction de son taux de branchement. Un interlude sur les modèles supersymétriques et la symétrie de R -parité fait suite. Enfin, l'essentiel du travail effectué est présenté avec quelques détails sur les contributions supersymétriques et sur l'obtention des contraintes.

Chapitre 2

La désintégration $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$ dans le Modèle standard

2.1 Calcul dans le Modèle Standard

2.1.1 L'expansion en produit d'opérateurs

Nous cherchons à calculer l'amplitude de transition de l'état initial K^+ vers l'état final $\pi^+ \nu \bar{\nu}$. Le formalisme de l'expansion en produit d'opérateurs¹ nous permet de représenter une telle amplitude comme ceci [9] :

$$\mathcal{A} = \langle K^+ | \pi^+ \nu \bar{\nu} \rangle = \sum_i \mathcal{C}_i(\mu, M_W) \langle \mathcal{Q}_i(\mu) \rangle \quad (2.1)$$

où $\langle \mathcal{Q}_i(\mu) \rangle$ sont des éléments de matrice d'opérateurs locaux et les \mathcal{C}_i sont des coefficients appelés les *coefficients de Wilson*. L'échelle d'énergie μ est l'échelle de *factorisation*. Elle correspond à une échelle d'énergie arbitraire où l'on effectue la factorisation (2.1), elle est donc choisie par commodité vis-à-vis des calculs.

Le calcul de l'amplitude \mathcal{A} est alors séparé en deux :

- une partie "longue-distance" contenue dans les éléments de matrice des opérateurs $\mathcal{Q}_i(\mu)$,
- une partie contenant la physique de "courte-distance" décrite par les coefficients de Wilson \mathcal{C}_i .

Nous pouvons aussi voir l'expression $\sum_i \mathcal{C}_i \mathcal{Q}_i$ comme étant le *hamiltonien effectif* du processus en question. Les \mathcal{Q}_i sont alors des *vertex effectifs* (des

1. Ce formalisme permet la description d'un opérateur non-local (par exemple l'échange d'une particule virtuelle) en terme d'une série d'opérateurs effectifs locaux (des interactions de contact). Une introduction phénoménologique se trouve dans [8].

interactions effectives) et les \mathcal{C}_i sont les *constantes de couplage* associées. À noter que l'amplitude physique doit être indépendante² de l'échelle μ ce qui implique que la dépendance en μ des coefficients de Wilson doit être annulée par celle des éléments $\langle \mathcal{Q}_i(\mu) \rangle$.

Pour le problème qui nous intéresse, à savoir la désintégration du kaon, nous pouvons réécrire l'amplitude (2.1) sous une forme un peu plus explicite :

$$\mathcal{A} = \langle \mathcal{H}_{eff} \rangle = \sum_i B_i \underbrace{V_{CKM}^i \eta_{QCD}^i}_{\text{courte distance}} F_i(m_q) \quad (2.2)$$

où B_i est la partie hadronique, non-perturbative (correspondant à la partie longue-distance/basse-énergie où on ne peut plus traiter la QCD de manière perturbative à cause de la grandeur de son couplage g_s). V_{CKM}^i est un produit d'éléments de matrice CKM issus de vertex entre états de quarks. Les η_{QCD}^i sont les corrections de QCD à la transition et $F_i(m_q)$ sont les fonctions à boucles électrofaibles entre quarks (et qui dépendent de leur masse). Ces trois dernières grandeurs caractérisent la physique à courte-distance/haute-énergie où les quarks ne sont plus confinés et où l'interaction forte (QCD) peut être décrite perturbativement (à l'échelle M_Z par exemple).

2.1.2 Le coefficient de Wilson du vertex effectif $Zd\bar{s}$

Dans $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$, la contribution au niveau de l'arbre entre les états de quarks correspondrait à une transition directe $\bar{s} \rightarrow \bar{d} + \nu\bar{\nu}$ et d'un quark u spectateur (qui n'interagit pas et se propage uniquement). Or, dans le Modèle Standard, il n'y a pas de courant neutre qui change la saveur à cause du mécanisme de GIM. **Il n'y a donc pas de contribution à cette désintégration au niveau de l'arbre.**

À une boucle en revanche, nous avons par exemple la transition entre d et s de la figure (2.1). Ces transitions entre saveurs de quarks sont rendues possibles grâce à la matrice CKM³ notée V dans la suite. Une première conséquence de ceci est que la désintégration de K^+ en π^+ et une paire $\nu\bar{\nu}$ sera **rare** car supprimée par plusieurs facteurs : le $1/16\pi^2$ venant de la boucle, les éléments de matrice CKM et les masses lourdes (M_W). Ce n'est pas le cas par exemple du canal de désintégration voisin $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$, figure (2.2).

2. Ceci n'est en général pas réalisé en pratique à cause de la troncation de la série perturbative à un ordre donné, à une ou deux boucles la plupart du temps. L'échelle μ est alors utilisée pour évaluer l'erreur introduite par la troncation.

3. Les transitions entre un quark de type "haut" et un quark de type "bas" de deux générations différentes sont pondérées par un élément de la matrice CKM qui est plus faible quand les générations sont éloignées.

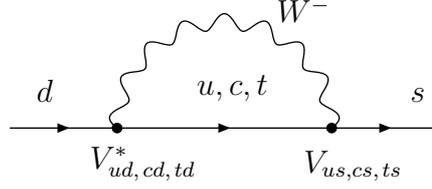


FIG. 2.1 – Exemple de transition à une boucle changeant la saveur : $d \rightarrow s$ (ou $\bar{s} \rightarrow \bar{d}$), ceci illustre le mélange des quarks par la matrice CKM.

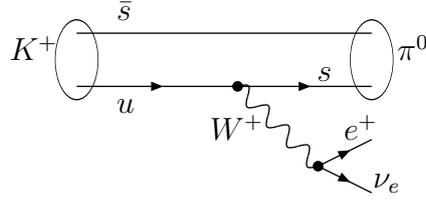


FIG. 2.2 – Diagramme à l'arbre de la transition $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$.

Pour calculer le taux de branchement de K^+ en $\pi^+ + \nu\bar{\nu}$, il nous faut d'abord calculer toutes les contributions à une boucle (diagrammes "boîtes" et "pengouins") de la transition des quarks $\bar{s} \rightarrow \bar{d} + \nu\bar{\nu}$ (ou de façon équivalente, $d \rightarrow s + \nu\bar{\nu}$). L'effet de celles-ci pourra être décrit sous la forme d'un vertex effectif entre Z , d et s , figure (2.3).

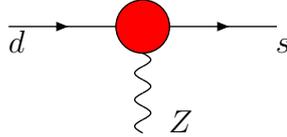


FIG. 2.3 – Le vertex effectif $Zd\bar{s}$

Ce vertex effectif a été calculé par Inami et Lim en 1981 [10], nous ne détaillerons pas tous les calculs :

$$\Gamma_{eff} = \sum_i \Gamma_i,$$

$$\Gamma_i = \sum_{u_j=c,t} \frac{1}{16\pi^2} \frac{g^3}{\cos\theta_w} V_{u_j s}^* V_{u_j d} F_i \left(\frac{m_{u_j}^2}{M_W^2} \right) (\bar{s}d)_{V-A} (\bar{\nu}\nu)_{V-A} \quad (2.3)$$

avec $(\bar{s}d)_{V-A} = \bar{s}_L \gamma^\mu d_L$ et $(\bar{\nu}\nu)_{V-A} = \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L$ (la notation $V - A$ signifie l'insertion de $\frac{1}{2}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$). La fonction $F(m_{u_j}^2/M_W^2)$ s'obtient à partir des diagrammes à une boucle de la figure (2.4).

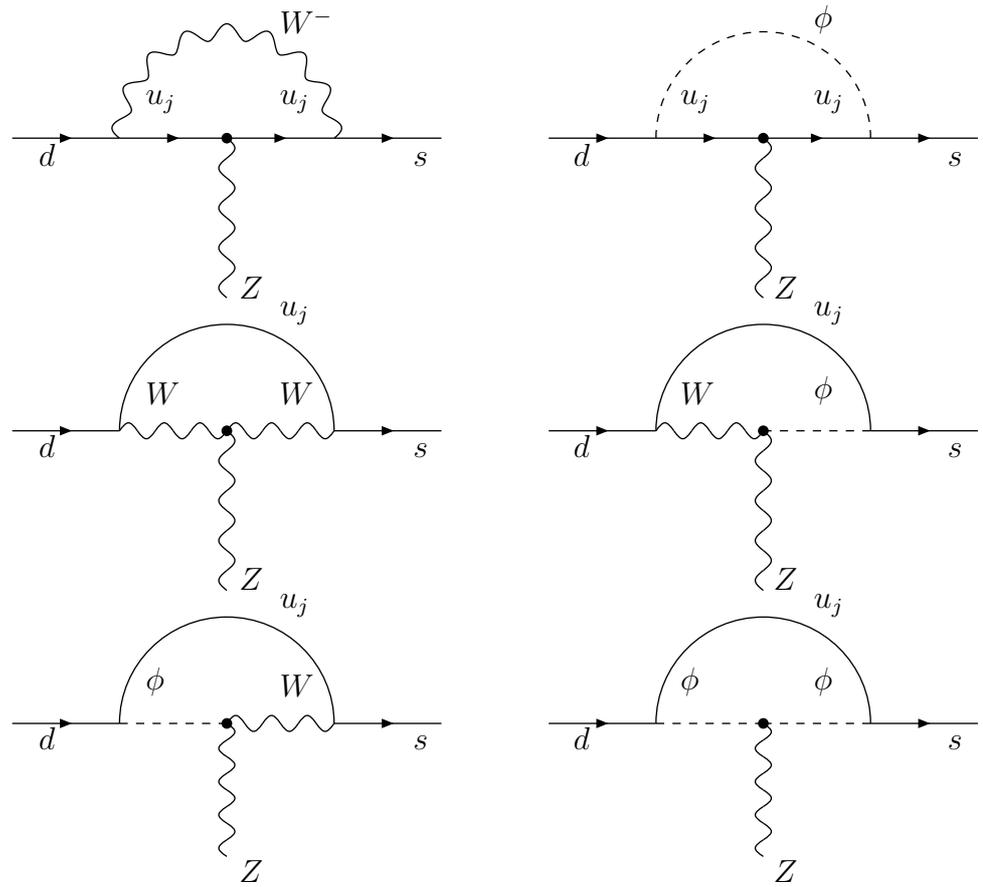


FIG. 2.4 – Diagrammes pingouins contribuant au vertex $Z d \bar{s}$. $u_j = c, t$ représente un quark haut lourd. Les ϕ sont les bosons de Goldstone qui apparaissent dans une jauge non-unitaire.

Les contributions venant des diagrammes "boîtes" peuvent aussi se factoriser sous cette forme (mais avec en plus une sommation sur la saveur du lepton échangé l), et nous définissons W_{ds}^l comme la somme de toutes les contributions (type "pengouin" et "boîte", sans oublier les corrections des self-énergies des fermions externes). Le hamiltonien effectif total pour la désintégration de K^+ en $\pi^+ + \nu\bar{\nu}$ est alors [15]:

$$H_{eff}^{SM} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{2\pi \sin^2 \Theta_W} \sum_{l=e,\mu,\tau} W_{ds}^l (\bar{s}d)_{V-A} (\bar{\nu}_l \nu_l)_{V-A}. \quad (2.4)$$

La fonction W_{ds}^l peut être séparée en deux parties, l'une dépend des propriétés du quark charm (masse et mélange), l'autre de celles du top :

$$W_{ds}^l = (V_{cs}^* V_{cd} \cdot X_c^l + V_{ts}^* V_{td} \cdot X_t^l) = (\lambda_c \cdot X_c^l + \lambda_t \cdot X_t^l) \quad (2.5)$$

X_t^l et X_c^l sont respectivement les fonctions à une boucle du quark top et celle du quark charm. La contribution du quark up a été négligé en partie à cause de l'unitarité de la matrice CKM⁴. En effet, on a :

$$V_{cs}^* V_{cd} \cdot X_c^l + V_{ts}^* V_{td} \cdot X_t^l + V_{us}^* V_{ud} \cdot X_u^l = V_{cs}^* V_{cd} \cdot (X_c^l - X_u^l) + V_{ts}^* V_{td} \cdot (X_t^l - X_u^l) \quad (2.6)$$

De plus, la masse du quark up est très petite devant celle du charm et du top⁵, et $X_u^l(x = \frac{m_u^2}{M_W^2}) \simeq 0$ quand $x \ll 1$. On peut donc ignorer la contribution du quark up à la désintégration. On dit qu'il y a une "suppression GIM forte" pour exprimer cette suppression venant du mécanisme de GIM. Le fait que go: Commande introuvable. dans cette désintégration les échelles pertinentes soient M_W , m_t ou au moins m_c traduit la nature "courte-distance" de ce processus. Une remarque cependant: le fait que la masse du quark charm soit aussi faible face à celle du top ne permet pas d'ignorer sa contribution. Les facteurs CKM λ_c et λ_t rendent les deux contributions du **même ordre de grandeur**.

Nous allons maintenant expliciter un peu plus ces fonctions à boucle pour les deux contributions importantes.

Contribution du top

La dépendance des diagrammes de type "boîte" à la masse des leptons chargés est négligeable car on a $m_t \gg m_l$ et nous pouvons donc la laisser de

4. $V_{CKM} V_{CKM}^\dagger = 1$

5. Pour rappel, on a $m_u \sim 1$ à 4 MeV, $m_c \sim 1$ à 1,4 GeV et $m_t \sim 175$ GeV

côté. La fonction X_t du secteur top vaut, à l'ordre α_s et à tous les ordres en $x = \frac{m_t^2}{M_W^2}$ [16]:

$$X_t(x) = X_0(x) + \frac{\alpha_s}{4\pi} X_1(x, \mu_t) = \eta_{QCD} X_0(x) \quad (2.7)$$

avec

$$X_0(x) = \frac{x}{8} \left(\frac{x+2}{x-1} + \frac{3x-6}{(x-1)^2} \ln x \right) \quad (2.8)$$

La quantité $\eta_{QCD} = 0,995$ est un facteur qui prend en compte les corrections de QCD. Sans ces corrections à l'ordre α_s , la fonction $X_t(x)$ dépend fortement de l'échelle (arbitraire) de renormalisation μ_t via $x = x(\mu_t) = \frac{m_t^2(\mu_t)}{M_W^2}$. Ceci introduit une grande incertitude, $\mathcal{O}(25\%)$. Quand on ajoute les corrections de QCD, $\mathcal{O}(\alpha_s)$, l'ambiguïté due à l'échelle de renormalisation est réduite à quelques % sur l'amplitude⁶. Ces corrections sont même minimisées pour le choix $\mu_t = m_t$, et pratiquement indépendante de m_t . On peut alors assimiler les corrections d'ordre supérieur à un facteur correctif. Dans le calcul numérique de cette fonction X_t , nous prendrons la masse \overline{MS} du quark top, $\overline{m}_t(\mu_t = m_t)$.

Contribution du charm

L'expression de X_c^l est beaucoup plus compliquée et peut se trouver en annexe. Dans le secteur du quark charm, on ne peut pas négliger la contribution du lepton τ dans les diagrammes de Feynman de type "boîte". En effet, les masses du charm et du tau sont voisines ($\sim 1,3$ et $\sim 1,7$ GeV respectivement). Le calcul de la contribution "charmée" s'en trouve plus compliquée. En revanche on a la hiérarchie $m_e < m_\mu \ll m_\tau$ entre les masses des leptons chargés. Les contributions des électrons et des muons ne seront alors pas très différentes l'une de l'autre comparées à la contribution des taus. On peut alors raisonnablement introduire une fonction $P_c(X)$ telle que :

$$P_c(X) = \frac{1}{|V_{us}|^4} \left(\frac{2}{3} X_c^e + \frac{1}{3} X_c^\tau \right) \quad (2.9)$$

De même que dans le secteur du quark top, il y'a une ambiguïté résiduelle due à l'échelle de renormalisation μ_c . Cependant, les corrections de QCD à une boucle dans le cas du charm restent encore très dépendantes de μ_c ce qui se traduit numériquement par une incertitude élevée sur la fonction

6. L'incertitude est évaluée en faisant varier μ_t entre 100 et 300 GeV à m_t fixé et en calculant le rapport $X_{max} - X_{min}/X_{central}$.

P_c , $\mathcal{O}(20\%)$ ⁷. Pourquoi cette différence avec le quark top? Nous avons les rapports $\frac{m_t}{M_W} = \mathcal{O}(1)$ et $\frac{m_c}{M_W} \ll 1$. Cette différence est importante dans la façon dont sont effectués les calculs. En effet, nous pouvons travailler à l'ordre le plus bas en m_c/M_W mais en même temps on a $\alpha_S \log \frac{m_c}{M_W} \gg 1$. Nous devons donc sommer tous les ordres de la théorie des perturbations en utilisant le groupe de renormalisation. Du côté du top, il n'y a pas de logarithmes grands, on peut donc appliquer la théorie des perturbations. Mais nous devons prendre en compte tous les ordres en m_t/M_W . On s'aperçoit alors que ces deux contributions représentent des cas limites complémentaires.

2.1.3 Élément de matrice hadronique

En général, la partie la moins bien connue et qui amène le plus d'erreurs théoriques sur les prédictions est due aux éléments de matrice hadronique. Nous pouvons nous affranchir de cette difficulté dans le cas de $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$. En effet, l'élément de matrice hadronique dans la désintégration est le même que celui de $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ quand la symétrie d'isospin⁸ est exacte, figure (2.5):

$$\langle \pi^+ | \bar{s}_L \gamma^\mu d_L | K^+ \rangle = \langle \pi^0 | \bar{s}_L \gamma^\mu u_L | K^+ \rangle \quad (2.10)$$

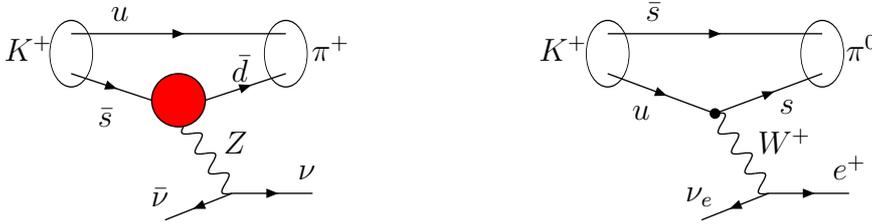


FIG. 2.5 – Transitions symétriques d'isospin, $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ et $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$.

Plutôt que de calculer cet élément de matrice par des techniques non-perturbatives sur réseau (avec de fortes erreurs théoriques), nous pouvons utiliser cette symétrie d'isospin et donc utiliser la valeur expérimentale du taux de branchement de $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$. En plus de facteurs dus aux vertex différents dans les 2 désintégrations, on ajoute un facteur correctif pour

7. quand $1 \text{ GeV} < \mu_c < 3 \text{ GeV}$

8. On parle ici de la symétrie d'isospin fort, $SU(2)_F$, qui est une symétrie de saveur des quarks. Sous cette symétrie u et d ou le proton et le neutron sont des doublets. Les pions π^+ , π^0 et π^- forment un triplet. Cette symétrie est légèrement brisée car les particules dans ces multiplets ont des masses proches mais différentes.

rendre compte de la légère brisure de la symétrie d'isospin. Au final, nous avons [17] :

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu})^{SM} = \frac{\bar{\kappa}_+}{3 |V_{us}|^2} \sum_l |W_{ds}^l|^2, \quad (2.11)$$

avec

$$\bar{\kappa}_+ = 0,901 \frac{3\alpha_e(m_Z)^2 B(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)}{2\pi^2 \sin^4(\theta_w)} \quad (2.12)$$

2.1.4 Taux de branchement : expression phénoménologique

Le taux de branchement de $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$ dépend, entre autre, des éléments de la matrice CKM. Il existe une façon de paramétrer cette matrice qui est très utile phénoménologiquement et qui est due à Wolfenstein [18]. Plutôt que d'avoir une matrice écrite en fonction de 3 angles et d'une phase, comme dans la paramétrisation standard [19], on l'écrit en fonction de l'ensemble $\{\lambda = |V_{us}| \sim 0,2, A = |V_{cb}|, \rho \text{ et } \eta\}$. Cette paramétrisation montre que la matrice CKM est quasi-diagonale, c'est-à-dire que les couplages entre les quarks de même famille sont proche de l'unité et qu'ils décroissent quand les familles sont plus éloignées. C'est une paramétrisation approchée, valable à un ordre donné en λ . A l'ordre λ^4 nous avons :

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A \\ A\lambda(1 - \rho - i\eta) & -A & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (2.13)$$

Nous utiliserons la paramétrisation de Wolfenstein pour la matrice CKM à l'ordre $\mathcal{O}(\lambda^6)$ pour écrire la quantité λ_t et à l'ordre $\mathcal{O}(\lambda^4)$ pour λ_c :

$$\begin{aligned} \lambda_t &= V_{ts}^* V_{td} = -\lambda |V_{cb}|^2 (1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) + \mathcal{O}(\lambda^6) \\ \lambda_c &= V_{cs}^* V_{cd} = -\lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^4) \end{aligned}$$

où

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right), \quad \bar{\eta} = \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right). \quad (2.14)$$

Le fait d'utiliser la paramétrisation à l'ordre $\mathcal{O}(\lambda^6)$ pour λ_t permet de rester cohérent avec la généralisation du triangle d'unitarité, figure (2.6). C'est important car les ajustements à partir des résultats expérimentaux sont donnés en terme de $\bar{\rho}$ et $\bar{\eta}$ (abscisse et ordonnée du point A sur la figure).

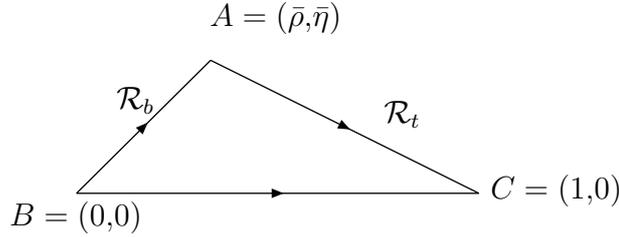


FIG. 2.6 – Le triangle d’unitarité. $\mathcal{R}_b = (\bar{\rho} + i\bar{\eta})$, $\mathcal{R}_t = (1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta})$.

Négliger dans λ_c les ordres supérieurs ou égaux à 4 en λ n’introduit qu’une erreur inférieure au pourcent mais permet de simplifier les calculs.

Sachant d’après les sous-sections précédentes que

$$Br^{SM} = \frac{\bar{\kappa}_+}{3\lambda^2} \left| \sum_l \lambda_c X_c^l + \lambda_t X_t \right|^2, \quad (2.15)$$

il résulte que l’équation du taux de branchement peut s’écrire, après quelques lignes de calcul, sous une forme simple :

$$\begin{aligned} Br^{SM} &= \bar{\kappa}_+ \left[\left(\frac{Im(\lambda_t) X_t}{\lambda} \right)^2 + \left(\lambda^4 P_c(X) \frac{Re(\lambda_c)}{\lambda} + \frac{Re(\lambda_t)}{\lambda} X_t \right)^2 \right] \\ &= \bar{\kappa}_+ \left[- |V_{cb}|^4 \bar{\eta}^2 X_t^2 + \left(\lambda^4 P_c(X) \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda |V_{cb}|^2 (1 - \bar{\rho}) X_t \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

qui est une ellipse dans le plan $(\bar{\rho}, \bar{\eta})$.

2.2 Analyse numérique

2.2.1 Données expérimentales

Le taux de branchement de la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ a été mesuré avec beaucoup de statistique par la collaboration E865 en 2003 [20] :

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e) = (5,13 \pm 0,15) \times 10^{-2}. \quad (2.17)$$

Cependant, ce résultat était très différent de celui du Particle Data Group (PDG) en 2004 [19],

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e) = (4,87 \pm 0,06) \times 10^{-2}, \quad (2.18)$$

qui n'avait pas inclu le résultat précédent (2.17). Aujourd'hui, le PDG donne la valeur expérimentale:

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)_{2006} = (4,98 \pm 0,07) \times 10^{-2}. \quad (2.19)$$

A l'époque de ce travail, nous avons utilisé pour notre analyse une valeur moyenne, où nous avons pris en compte les 2 mesures (avec leur pondération due au nombre d'événement) :

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e) = (5,08 \pm 0,13) \times 10^{-2}. \quad (2.20)$$

Cette nouvelle donnée de $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ a augmenté la valeur centrale par rapport au PDG04 de 4,4% (l'erreur a aussi augmenté). Avec les données $\alpha_e(m_Z) = 1/127,9$ et $\sin^2 \theta_W = 0,231$ nous avons

$$\bar{\kappa}_+ = (7,97 \pm 0,20) 10^{-6}. \quad (2.21)$$

Les éléments de matrice CKM (dans la paramétrisation de Wolfenstein) avaient été pris d'un ajustement de Stocchi [21] en 2004 et mis à jour suite à de nouvelles données sur la masse du top :

$$\begin{aligned} |V_{cb}| &= 0,04135 \pm 0,0007 \\ \lambda &= 0,22385 \pm 0,00355 \\ \bar{\rho} &= 0,190 \pm 0,046 \\ \bar{\eta} &= 0,3485 \pm 0,0275. \end{aligned}$$

Pour la contribution du charm et du top nous avons obtenu en accord avec [22], respectivement :

$$\begin{aligned} P_c(X) &= 0,39 \pm 0,07 \\ X_t &= 1,529 \pm 0,042 \end{aligned}$$

avec $\bar{m}_t = 168,1 \pm 4,1 \text{ GeV}^9$, $\bar{m}_c = 1,3 \pm 0,5 \text{ GeV}$ et $\alpha_S(M_Z^2) = 0,118 \pm 0,02$.

2.2.2 Résultats et discussions des erreurs théoriques

Résultat

Avec ces données, notre prédiction du taux de branchement de $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ dans le Modèle Standard est de :

$$Br^{SM} = (8,18 \pm 1,22) \times 10^{-11}. \quad (2.22)$$

9. La valeur dans le schéma \overline{MS} , $m_t(\bar{m}_t) = 168,1 \pm 4,1 \text{ GeV}$, correspond à la valeur expérimentale de la masse au pôle $m_t = 178,0 \pm 4,3 \text{ GeV}$ [23]. La relation entre la masse au pôle et la masse dans \overline{MS} peut se trouver dans [24].

La valeur centrale diffère légèrement de la prédiction de Buras *et al.* [22] à l'époque de ce travail, $Br^{SM} = (0,78 \pm 0,12) \times 10^{-10}$. Celle-ci est due à des valeurs d'éléments CKM différents et à l'inclusion des données de E865.

Notre prédiction théorique est compatible avec le résultat expérimental [25]

$$Br^{exp} = 1,47^{+1,3}_{-0,8} \times 10^{-10}, \quad (2.23)$$

même si la valeur centrale est deux fois plus faible que celle observée.

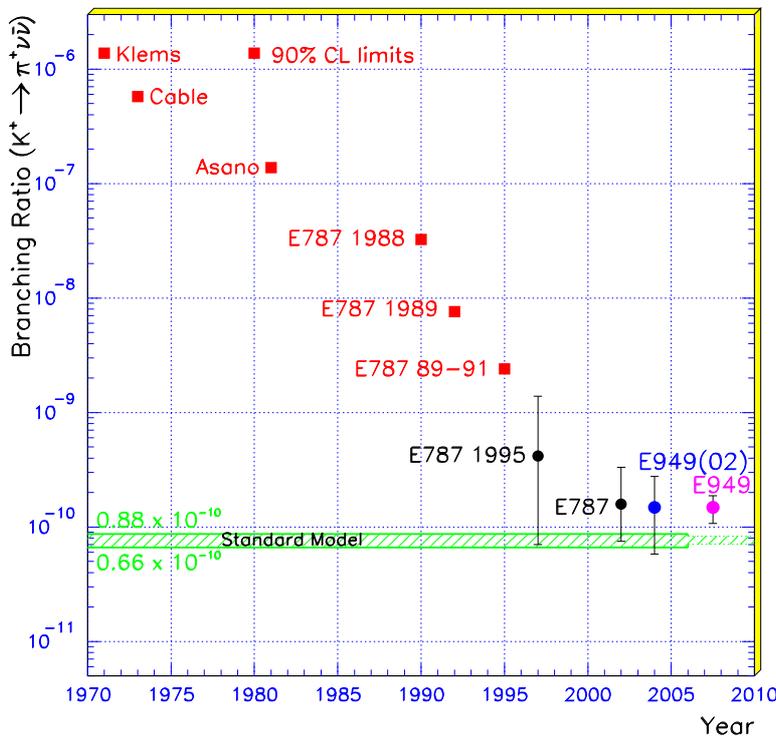


FIG. 2.7 – Mesure (ou limite supérieure) du taux de branchement de la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ par les différentes expériences, en fonction des années.

Discussion des erreurs

Dans le calcul des contributions des quarks top et charm, la masse des quarks est une donnée très importante. La masse du top est connue à 2,8% près alors que la précision sur la masse du charm est beaucoup moins bonne¹⁰,

¹⁰. La raison est qu'expérimentalement, on ne mesure jamais directement la masse des quarks, seulement des états liés (mésons, baryons), à cause du phénomène de confinement.

16,7% . Cette imprécision expérimentale sur la masse du charm est donc une importante source d'erreur. De même pour $\bar{\rho}$ et dans une moindre mesure $\bar{\eta}$. Les études des désintégrations des mésons B devraient continuer d'améliorer sensiblement ces incertitudes.

L'erreur théorique dans le secteur du charm, due à la dépendance en l'échelle de renormalisation, peut se réduire en calculant les ordres supérieurs des corrections de QCD. La prédiction de la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$ dans le MS est relativement précise puisque l'erreur totale théorique est d'environ 15% (à 1σ).

2.2.3 Nouvelle physique

Il est encore trop tôt pour spéculer sur la présence de nouvelle physique contribuant à cette désintégration car l'erreur expérimentale est encore grande. Mais il est intéressant de noter que des effets possibles de nouvelle physique pourraient être du même ordre de grandeur que ceux du MS sans être en désaccord avec la valeur expérimentale. La précision théorique de la prédiction $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$ est très importante pour découvrir des effets au-delà du MS et c'est ce qui rend cette désintégration très attractive. Nous verrons par la suite l'influence de la supersymétrie sur cette désintégration.

2.2.4 Actualisation

La valeur expérimentale donnée en 2006 par le Particle Data Group est :

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}) = (1,5_{-0,9}^{+1,3}) \times 10^{-10} \quad (2.24)$$

Elle n'a donc que très peu varié (valeur centrale et erreur) depuis notre analyse.

Le calcul des corrections de QCD à 2 boucles calculées en 2006 par Buras *et al.* [26] a permis de réduire sensiblement l'erreur sur la prédiction théorique. Le rapport de branchement est alors :

$$Br^{SM} = (8,0 \pm 1,1) \times 10^{-11} . \quad (2.25)$$

La principale source d'erreur restante est due aux éléments de matrice CKM c'est-à-dire de nature expérimentale.

Or notre connaissance actuelle de l'interaction forte à basse énergie est insuffisante. La limitation vient des techniques non-perturbatives qui sont mal connues et l'extraction de la valeur des masses des quarks s'en trouve affectée, d'où les incertitudes encore grande sur la valeur de ces masses. Ce n'est pas le cas du top car celui-ci n'est jamais observé confiné à cause de sa trop grande masse (il n'y a pas d'états liés avec le top).

Chapitre 3

Interlude: Supersymétrie, MSSM, R-parité

3.1 Introduction

3.1.1 La supersymétrie et son introduction

Tout d'abord, la supersymétrie est une symétrie dont l'effet est de transformer un état *bosonique* en un état *fermionique* et vice-versa, (donc $\Delta S = \pm 1/2$ où S est le spin). Si nous appelons Q le générateur de la supersymétrie qui réalise la transformation, alors très schématiquement

$$Q |boson\rangle = |fermion\rangle \quad (3.1)$$

$$Q |fermion\rangle = |boson\rangle. \quad (3.2)$$

Mais ceci n'est que l'aspect "physique des particules" de la supersymétrie qui est une symétrie tout à fait générale. Plus formellement, la supersymétrie a d'abord été introduite comme extension possible du groupe de Poincaré des symétries d'espace-temps.

En effet, à l'origine, on cherchait à combiner les symétries *externes* (d'espace temps, comme les translations) et *internes* (surtout globales) c'est-à-dire à étendre le groupe de Poincaré par des transformations internes. Il y a eu plusieurs essais dans les années 1960 mais en 1967, Coleman et Mandula montrèrent de façon formelle qu'il est impossible de combiner les deux types de symétries. C'est leur fameux *théorème no-go* [27]. En fait, il était sous-entendu que c'était impossible en utilisant des générateurs *bosoniques* (donc de spin entier) habituels. Mais en 1971, Golfand et Likhtman [28] réussirent l'extension du groupe de Poincaré en utilisant des charges *fermioniques*, donc de spin demi-entier. C'est la *supersymétrie*. La même année, Neveu, Schwarz [29]

puis Ramond [30] proposèrent des modèles supersymétriques à 2 dimensions pour obtenir des cordes supersymétriques qui expliqueraient l'origine des baryons. Quelques années plus tard, en 1973, Volkov et Akulov [31] appliquèrent la supersymétrie aux neutrinos (ils voulaient en faire le fermion de Goldstone associé à la brisure spontanée) mais il fut montré un peu plus tard que leur théorie du neutrino ne décrivait pas correctement les interactions de basse énergie observées expérimentalement. Indépendamment, en 1974, Wess et Zumino [32] proposèrent la première théorie des champs supersymétrique à 4 dimensions d'intérêt phénoménologique. Puis, Zumino Iliopoulos et Ferrara [33] montrèrent que la supersymétrie permettait de supprimer beaucoup de divergences des théories des champs usuelles. Ceci a rendu la supersymétrie très attractive et pendant un temps donné, elle fut beaucoup utilisée pour tenter d'unifier les bosons et les fermions connus. Par exemple pour unifier les particules de matière de spin $1/2$ avec les particules de jauge de spin 1 , ou les particules de matière et les champs de Higgs, dans les mêmes supermultiplets. Puis en 1976, deux groupes [34] découvrirent que la supersymétrie locale (la transformation de supersymétrie dépend alors des coordonnées dans l'espace-temps) incluait une description de la gravitation. C'est ce que l'on a appelé la *supergravité*.

Depuis, la phénoménologie de la supersymétrie a été énormément étudiée et les théories basées sur la supersymétrie se sont imposées comme les candidates les plus sérieuses pour la physique au-delà du MS.

3.1.2 Pourquoi la supersymétrie

Pourquoi introduire la supersymétrie en physique des particules? Les motivations de son introduction sont principalement d'ordre physique avant d'être esthétiques.

- En effet, la supersymétrie apporte quelque chose de très important dans les théories des champs : elle apporte une solution à la déstabilisation de la masse des scalaires et donc de celle du higgs sous les corrections radiatives. En effet, quand nous calculons la contribution d'une boucle fermionique comme celle de la figure (3.1 a), nous obtenons¹:

$$\Delta m_H^2 = -\frac{y_f}{16\pi^2} [2\Lambda^2 + 6m_f^2 \ln(\Lambda/m_f) + \dots], \quad (3.3)$$

où Λ est un cut-off ultraviolet utilisé pour restreindre les impulsions dans la boucle et qui est de l'ordre de l'échelle de la nouvelle physique au delà du MS.

1. Pour le calcul, nous avons pris la forme usuelle du couplage de Yukawa du boson de Higgs scalaire au fermion : $y_f H \psi \psi$.

Nous voyons que la masse du Higgs diverge et que si nous supposons le MS valable jusqu'à l'échelle de Planck, $M_p \simeq 10^{19}$ GeV, alors $\Lambda = \mathcal{O}(M_p)$ et cette correction est 10^{30} fois plus forte que la valeur raisonnable de la masse du Higgs au carré $(10^2 \text{ GeV})^2$! Cette constatation est la même si nous considérons plutôt une boucle d'un champ scalaire S, figure (3.1 b).

$$\Delta m_H^2 = \frac{\lambda_S}{16\pi^2} [\Lambda^2 - 2m_S^2 \ln(\Lambda/m_S) + \dots], \quad (3.4)$$

où λ_S est son couplage avec le boson de Higgs.

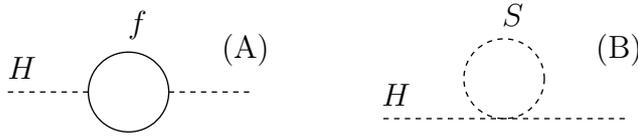


FIG. 3.1 – Corrections quantiques à une boucle à la masse-carrée du Higgs. (A) boucle de fermion, (B) boucle de boson scalaire.

La masse du Higgs ne peut pas être naturellement de l'ordre de 100 GeV, comme requis pour la brisure de la symétrie électrofaible, à cause des corrections radiatives qui la "poussent" vers l'échelle de masse la plus grande de la théorie.

Que nous apporte la supersymétrie dans ce cas? Si nous regardons de plus près les 2 équations précédentes, les deux contributions divergentes (leur terme $\propto \Lambda^2$) s'annulent si pour chaque fermion de notre théorie entrant dans la boucle nous avons aussi 2 scalaires avec $\lambda_S = y_f^2$. Nous verrons juste après que c'est exactement ce que la supersymétrie se propose d'apporter! Et de plus, à tous les ordres (c'est-à-dire quand nous considérons des corrections à plusieurs boucles) ceci est réalisé. Il nous reste alors une divergence logarithmique mais qui n'induit pas de problèmes d'ajustements fins. A ce jour, la supersymétrie fournit la résolution du problème de la hiérarchie la plus naturelle et la plus efficace.

- De plus, les données expérimentales penchent en faveur d'un Higgs relativement léger, $m_H = 85_{-28}^{+39}$ GeV [35].² Or un Higgs léger demande, pour stabiliser le vide électrofaible, que la physique à plus haute énergie partage beaucoup de choses en commun avec la supersymétrie [36]. Inversement, les calculs faits à partir du Modèle Standard Supersymétrique Minimal (voir

2. Cet ajustement combiné aux recherches directes au LEP II donne une masse du Higgs à peu près entre 114 et 124 GeV.

plus loin) donnent la prédiction $m_H \leq 130$ GeV qui est compatible avec les ajustements expérimentaux.

- Les deux premiers arguments ne concernent que le Higgs. Considérons maintenant les constantes de couplage qui caractérisent chaque force fondamentale. Si nous faisons évoluer les 3 couplages du Modèle Standard en fonction de l'énergie, nous observons qu'ils tendent tous à se croiser à la même échelle. Enfin presque, c'est quand nous ajoutons la supersymétrie dans les calculs d'évolution que les couplages se croisent quasi exactement au même point (autour de 2×10^{16} GeV). Personne n'est obligé de croire en une "Grande Unification" qui repose sur cette unification des couplages, mais il est très étonnant d'observer que la supersymétrie réalise l'unification aussi précisément. C'est tout de même un argument fort en faveur de la supersymétrie car les théories de Grande Unification ont beaucoup de caractéristiques et de prédictions intéressantes pour la physique de basse énergie (elles expliquent par exemple les nombres quantiques des particules comme leur charge électrique).

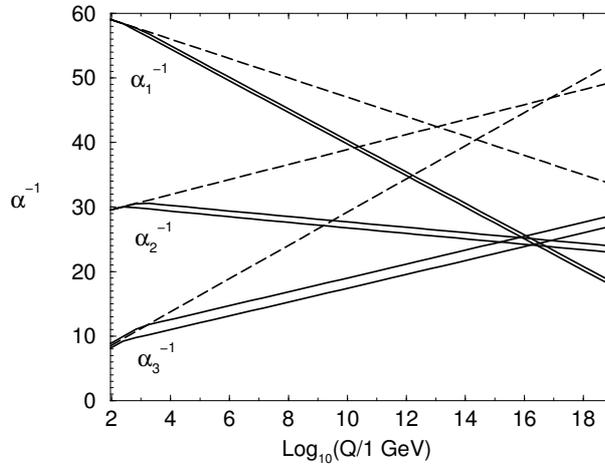


FIG. 3.2 – Evolution, en fonction du logarithme de l'énergie, des couplages de jauge inversés, $\alpha_a^{-1}(Q) = 4\pi/g_a^2$, dans le MS (tirets) et dans le MSSM (lignes pleines).

- Il y a aussi un argument de ce type en faveur de l'existence de la supersymétrie dans la nature. Les théories de cordes, qui fournissent à l'heure actuelle une des seules solutions au problème de la gravitation quantique, ne peuvent se passer de la supersymétrie sans souffrir de problème de stabilité du

vide. Là aussi la supersymétrie semble un ingrédient essentiel pour construire des théories cohérentes à haute énergie.

- Enfin, la supersymétrie peut aussi jouer un rôle dans l'explication de la matière noire (si la R -parité est conservée, voir plus loin). C'est une des seules théories qui possèdent dans son spectre de particules des candidats sérieux. Ils ont pour nom, *neutralino* et *gravitino*, et la supersymétrie prédit dans un cadre plausible leur stabilité. Ainsi, une fois créés, il ne se désintègrent pas et ne peuvent pas être observés directement. Leur nombre peut donc contribuer à la masse manquante sous la forme de matière noire.

Cette discussion montre que la supersymétrie est une symétrie très séduisante théoriquement, mais surtout très utile. Nous n'avons encore aucune preuve de son existence mais au vu de ce qu'elle apporte aux modèles en physique des particules, il est difficile d'y rester insensible. Nous n'avons donné que des arguments qualitatifs dans cette partie, nous allons maintenant entrer beaucoup plus dans le détail.

3.2 La structure d'une théorie supersymétrique

3.2.1 L'algèbre supersymétrique et les supermultiplets

Comme il a été dit précédemment, la supersymétrie combine des transformations spatio-temporelles du groupe de Poincaré et des transformations de symétrie interne (d'un groupe de jauge donné). La supersymétrie introduit des nouveaux générateurs Q_α , fermioniques, donc anticommutant entre eux (ce sont des spineurs): deux opérations de supersymétrie ne commutent donc pas entre elles. *A priori*, rien n'interdit l'introduction de plusieurs générateurs, mais dans la version simple de la supersymétrie il n'y a qu'un seul nouveau couple de générateurs, Q_α et $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$. C'est la "*supersymétrie $\mathcal{N} = 1$* " et c'est la seule dont nous parlerons dans cette partie. Si la raison est ici pédagogique, dans la section suivante nous donnerons les raisons physiques de ce choix.

La connaissance de l'algèbre de la supersymétrie (et d'une quelconque symétrie) se résume à la connaissance des relations de commutation et/ou d'anticommutation de tous ses générateurs (sa *superalgèbre de Lie*). Nous avons, en plus des relations de commutation issues de l'algèbre de Poincaré, des relations de commutation et d'anticommutation qui font intervenir les

3. Car les Q et \bar{Q} sont des spineurs donc des objets complexes qui se transforment de façons différentes sous le groupe de Lorentz et doivent être considérés par paire.

générateurs Q_α et $\bar{Q}^{\dot{\alpha}}$:

$$[P^\mu, Q_\alpha] = 0 = [P^\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] \quad (3.5)$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P^\mu \quad (3.6)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (3.7)$$

$$\{M_{\mu\nu}, Q_\alpha\} = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad (3.8)$$

$$\{M_{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} \quad (3.9)$$

Quelle est la signification des Q_α ? Tout d'abord, Q est une charge au sens du théorème de Noether c'est-à-dire qu'elle est la charge conservée de la symétrie. Elle commute donc avec le hamiltonien du système, cf (3.5). Elle possède un spin 1/2 et peut alors s'écrire sous la forme d'un spineur de Weyl⁴. On pourrait aussi écrire Q sous la forme d'un spineur de Majorana à 4 composantes. De plus, si nous regardons le commutateur (3.6), nous avons schématiquement $\{Q, \bar{Q}\} \sim P$ c'est-à-dire que Q^2 est une translation d'espace-temps. Q peut donc se voir comme la "racine carré" d'une translation dans l'espace-temps.

Nous allons maintenant étudier les représentations irréductibles de cet algèbre (*les supermultiplets*) et en détailler le contenu. En effet, nous voulons appliquer la supersymétrie à la physique des particules, il nous faut donc savoir comment ranger nos particules et quelles seront leurs propriétés de transformation. Dans le groupe de Poincaré, il y a 2 éléments invariants de Casimir : l'opérateur de spin $W^2 = W^\mu W_\mu$, avec $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}$ le vecteur de Pauli-Lubanski, et l'opérateur de masse $P^2 = P^\mu P_\mu$, où P^μ est la quadri-impulsion. Dans un multiplet du groupe de Poincaré, les particules ont la même masse et le même spin. Mais dans l'algèbre supersymétrique, W^2 n'est plus un invariant de l'algèbre. Nous avons

$$[P^2, Q_\alpha] = 0 \quad (3.10)$$

$$[W^2, Q_\alpha] \neq 0 \quad (3.11)$$

et donc, dans un supermultiplet les particules ont la même masse mais des **spins différents**. Nous pouvons tout de même corriger W pour obtenir un nouvel invariant dont les valeurs propres sont sous la forme $2j(j+1)m^4$ avec $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ le nombre quantique de *superspin*. Ce nouveau W est invariant donc chaque représentation irréductible peut être caractérisée par un couple $[m, j]$ et le lien entre le spin S et j est déduit de la relation :

4. Elle possède donc 2 composantes complexes.

$M_S = M_j, M_j + \frac{1}{2}, M_j - \frac{1}{2}, M_j$. Dans un même supermultiplet, on aura donc des particules de même masse et de même superspin. De plus, une propriété importante est qu'il y a égalité dans un supermultiplet entre le nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques : $n_B = n_F$.

Nous pouvons maintenant construire les différentes représentations :

▷ La représentation fondamentale $[m, 0]$ est appelée *supermultiplet chiral (ou scalaire)*. La valeur $j = 0$ implique $M_S = 0, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0$ donc ce supermultiplet contient 2 champs scalaires réels réunis sous la forme d'un champ scalaire complexe (le sfermion), ϕ et un champ fermionique de Weyl (de spin $1/2$), ψ . Ces champs ont la même masse. Pour que la supersymétrie soit préservée dans les boucles où les particules ne sont pas sur leur couche de masse (c'est-à-dire $P^2 \neq M^2$) il faut que les degrés de liberté fermioniques et bosoniques soient aussi équilibrés dans ce cas ('*off-shell*'). En effet, *off-shell* un fermion de Weyl possède 4 degrés de liberté de spin au lieu de 2 *on-shell*. Il faut donc ajouter au contenu de cette représentation un autre champ scalaire complexe mais qui ne se propage pas (on dit qu'il est *auxiliaire* et il n'a pas de terme cinétique). *On-shell*, nous utiliserons l'équation du mouvement $F = F^* = 0$ pour l'éliminer. Le contenu total du supermultiplet chiral est donc

$$\Psi = (\phi, \psi_\alpha, F). \quad (3.12)$$

▷ La seconde représentation que nous allons utiliser dans la suite est le *supermultiplet vecteur (ou de jauge)* $[m, 1/2]$. Son contenu en champ est obtenu de la même façon : un fermion de Weyl⁵ (le jaugino), λ_α^a , un boson de jauge (de masse nulle), A_μ^a , et comme pour le supermultiplet chiral, un champ scalaire réel auxiliaire, D^a .

$$\Phi = (\lambda_\alpha^a, A_\mu^a, D^a), \quad (3.13)$$

où a est un indice de la représentation adjointe du groupe de jauge.

C'est dans ces deux représentations (3.12) et (3.13) que les particules du MS et leurs superpartenaires seront rangés. Nous allons maintenant construire avec ces deux représentations une théorie des champs supersymétrique.

3.2.2 Théorie des champs supersymétrique

Avant de discuter de modèles en particulier et surtout de l'extension supersymétrique minimale du MS (le MSSM) nous allons d'abord présenter la structure générale d'une théorie des champs avec supersymétrie. Pour commencer progressivement, nous allons introduire le modèle de Wess et Zumino

5. où de façon équivalente un fermion de Majorana

sans interaction, juste pour voir comment concrètement se transforment les champs. Puis nous introduirons les interactions et ceci nous conduira à la notion nouvelle de *superpotentiel*. Enfin, nous discuterons des champs de jauge dans une théorie supersymétrique.

Le lagrangien libre globalement supersymétrique:

L'action la plus simple que l'on peut construire avec le supermultiplet chiral est celle du modèle de Wess-Zumino, sans masse et sans interaction. Dans le cas *on-shell* (sans F), qui est suffisant quand il n'y a pas d'interaction, nous avons simplement un fermion ψ et un boson scalaire ϕ :

$$S_{\text{libre}} = \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{scalaire}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}}) \quad (3.14)$$

$$\mathcal{L}_{\text{scalaire}} = -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = -i\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \quad (3.16)$$

Si on applique une transformation supersymétrique globale de paramètre ϵ_α , fermion de Weyl infinitésimal indépendant des coordonnées d'espace-temps ($\partial^\mu \epsilon_\alpha = 0$), sur le champ scalaire ϕ , le résultat doit être proportionnel au champ fermionique ψ :

$$\delta\phi = \epsilon^\alpha \psi_\alpha \quad \text{et} \quad \delta\phi^* = \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L}_{\text{scalaire}} = -\epsilon^\alpha (\partial^\mu \psi_\alpha) \partial_\mu \phi^* - \partial^\mu \phi \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}} (\partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) \quad (3.18)$$

A noter que le fermion infinitésimal ϵ_α a la dimension d'une masse à la puissance $-\frac{1}{2}$ contrairement à un fermion de Weyl usuel qui a la dimension (masse) $^{3/2}$:

$$[\phi] = 1, \quad [\psi] = \frac{3}{2}, \quad [\epsilon] = -\frac{1}{2}. \quad (3.19)$$

La théorie physique est invariante si l'action est invariante (principe de moindre action). Mais pour que l'action reste invariante sous une transformation de supersymétrie, il faut que la somme $\delta L_{\text{scalaire}} + \delta L_{\text{fermion}}$ soit nulle à une divergence totale près, qui ne contribuera pas à l'action. En considérant aussi la dimension des 3 champs dont nous disposons, nous voyons que les champs fermioniques se transforment comme:

$$\delta\psi_\alpha = i(\sigma^\mu \bar{\epsilon})_\alpha \partial_\mu \phi \quad \text{et} \quad \delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -i(\epsilon \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* \quad (3.20)$$

Mais est-ce que cette transformation correspond bien à une transformation de supersymétrie? Pour s'en convaincre il suffit de partir, soit d'un fermion

ψ soit d'un boson ϕ , et de leur appliquer 2 fois ces transformations. Nous avons la chaîne suivante :

$$\phi \rightarrow \psi \rightarrow \partial\phi, \quad \psi \rightarrow \partial\phi \rightarrow \partial\psi, \quad (3.21)$$

c'est-à-dire que dans les deux cas l'action de 2 transformations supersymétriques successives est équivalent à la dérivation donc à l'opérateur impulsion P (car $P^\mu \sim i \partial^\mu$). Nous retrouvons le résultat de la section précédente, $Q^2 \sim P$, et nos transformations réalisent bien l'algèbre supersymétrique.

Dans le cas *off-shell*, l'action S_{libre} est modifiée par l'ajout d'un terme comportant le champ F :

$$S_{libre} = \int d^4x (\mathcal{L}_{scalaire} + \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{aux}), \quad (3.22)$$

$$\mathcal{L}_{aux} = F^* F, \quad (3.23)$$

et les transformations de supersymétrie des champs ψ et ϕ s'en trouvent modifiées. Pour le champ scalaire F , sa transformation doit faire intervenir le champ ψ . Remarquons que la dimension du champ F est une masse au carré. Avec les lois de transformation suivantes,

$$\delta F = i \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}}^{\beta} \partial_\mu \psi_\beta \quad \text{et} \quad \delta F^* = -i \partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\beta}}^{\alpha} \epsilon_\alpha, \quad (3.24)$$

la variation du terme \mathcal{L}_{aux} donne :

$$\delta \mathcal{L}_{aux} = i \bar{\epsilon} (\bar{\sigma}^\mu) \partial_\mu \psi F^* - i \partial_\mu \bar{\psi} (\bar{\sigma}^\mu) \epsilon F. \quad (3.25)$$

Cette variation s'annule bien *on-shell* avec l'équation du mouvement $F = F^* = 0$. Pour compenser cette variation dans le cas *off-shell*, la loi de transformation de ψ devient :

$$\delta \psi_\alpha = i (\sigma^\mu \bar{\epsilon})_\alpha \partial_\mu \phi + \epsilon_\alpha F \quad \text{et} \quad \delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -i (\epsilon \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^* + \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} F^*. \quad (3.26)$$

Les transformations de ϕ sont inchangées. Nous pouvons vérifier que $\delta S = 0$ sans faire référence aux équations du mouvement et donc la supersymétrie est aussi réalisée *off-shell* avec ces lois de transformation.

Nous avons vu que le champ F était auxiliaire et ne servait qu'à l'utilisation *off-shell* de la supersymétrie. En fait, il a aussi un autre rôle. En effet, il ne faut pas oublier qu'aux échelles d'énergies accessibles actuellement nous n'avons pas observé de supersymétrie. Si la supersymétrie existe dans la nature, elle a dû forcément être brisée à un moment ou un autre. Le champ auxiliaire F , mais aussi le champ auxiliaire D , servent aussi à briser la supersymétrie *via* le mécanisme de Fayet-Iliopoulos [37] ou d'O'Raifeartaigh [38], respectivement.

Après cette section assez formelle, nous oublierons ces champs auxiliaires en utilisant à chaque fois les équations du mouvement pour les éliminer des équations.

Les interactions du multiplet chiral

Nous allons maintenant ajouter à notre théorie la possibilité de termes d'interaction entre ces deux types de champs qui composent les supermultiplets chiraux. Nous n'allons pas le démontrer mais le terme d'interaction le plus général, invariant sous les transformations de supersymétrie et renormalisable, que nous allons ajouter dans le lagrangien libre vu précédemment, s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2}W^{ij}(\phi)\psi_i\psi_j - V(\phi, \phi^*) + c.c. \quad (3.27)$$

La quantité W^{ij} ne doit dépendre que des champs ϕ (condition d'holomorphicité ou d'analyticité), pour assurer que la variation lors de la transformation de supersymétrie du premier terme de \mathcal{L}_{int} puisse être compensée par la variation d'un autre terme. Pour la même raison, W^{ij} doit être complètement symétrique. La seule forme possible pour W^{ij} est alors :

$$W^{ij} = \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi_i \partial\phi_j}, \quad (3.28)$$

où on définit le *superpotentiel* W que l'on écrit sous la forme générale :

$$W = \frac{1}{2}m^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \quad (3.29)$$

dans le cadre d'une théorie renormalisable.

Qu'est-ce que ce superpotentiel ? Tout d'abord, sa dimension est celle d'une masse au cube. Il fait intervenir la matrice de masse symétrique m^{ij} et la matrice totalement symétrique des couplages de Yukawa y^{ijk} entre un scalaire et 2 fermions. Il résume donc toutes les interactions qui ne sont pas de jauge. C'est, de plus, une fonction analytique des champs complexes ϕ_i c'est-à-dire qu'il est fonction de ϕ_i mais pas du complexe conjugué ϕ_i^* . Ceci est très important pour la suite.

De même, en imposant que \mathcal{L}_{int} soit invariant sous transformation de supersymétrie, on détermine la forme du potentiel V . En présence d'interaction, donc d'un superpotentiel non-nul, les équations du mouvement des champs auxiliaires F^i sont :

$$F_i = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi^i} = -W_i^*, \quad F^{*i} = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi_i} = -W^i. \quad (3.30)$$

Nous pouvons les utiliser pour écrire le lagrangien sans les champs F , comme dit plus haut. Le *potentiel scalaire* V de la théorie est :

$$V = W_i^*W^i = F_i F^{*i}, \quad (3.31)$$

qui est automatiquement non-négatif puisque c'est la somme de carrés. Si nous employons la forme générale (3.29) du superpotentiel, nous avons alors le lagrangien général pour un supermultiplet chiral en interaction :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{chiral} &= -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi^* - i\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \\
 &- \frac{1}{2} m^{ij} \psi_i \psi_j - \frac{1}{2} m_{ij}^* \bar{\psi}^i \bar{\psi}^j \\
 &- V - \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k - \frac{1}{2} y_{ijk}^* \phi^* \bar{\psi}^j \bar{\psi}^k.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Théorie de jauge supersymétrique

Le MS, qui est la théorie qui nous intéresse et que nous voulons "supersymétriser", a, en dehors des champs fermioniques chiraux (les quarks, les leptons), des champs de jauge de spin 1 (bosons W , Z , gluons,...). Dans la section dédiée à l'algèbre supersymétrique nous avons vu que le supermultiplet vecteur pouvait accueillir de tels champs de jauge. Voyons donc comment se comporte un tel supermultiplet, sans et avec interaction.

Le supermultiplet vecteur contient un boson de jauge A_a^μ , de masse nulle, un fermion de Weyl, le jaugino λ_a , également de masse nulle, ainsi qu'un champ scalaire réel auxiliaire D_a qui est l'analogie du champ F précédent. Ce supermultiplet est dans la représentation adjointe du groupe de jauge (de constantes de structure f^{abc}). La forme du lagrangien est complètement déterminée par la condition d'invariance de jauge et la renormalisabilité :

$$\mathcal{L}_{jauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} D^a D^a, \tag{3.33}$$

où les dérivées covariantes de jauge D_μ et $F_{\mu\nu}^a$ sont donnés par :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \tag{3.34}$$

$$D_\mu \lambda^a = \partial_\mu \lambda^a - g f^{abc} A_\mu^b \lambda^c, \tag{3.35}$$

comme habituellement pour une théorie de jauge. Ce lagrangien est déjà supersymétrique et les transformations de supersymétrie de paramètre ϵ pour les champs du supermultiplet vecteur sont :

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu \lambda^a + \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu \epsilon), \tag{3.36}$$

$$\delta \lambda_\alpha^a = -\frac{i}{2\sqrt{2}} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_\alpha D^a, \tag{3.37}$$

$$\delta D^a = \frac{i}{\sqrt{2}} (\bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a - D_\mu \bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu \epsilon). \tag{3.38}$$

Sans interaction avec aucun supermultiplet chiral, l'équation du mouvement pour le champ D^a est simplement $D^a = 0$ que nous obtenons directement du Lagrangien (3.33). Il n'a pas de terme cinétique et ne se propage donc pas.

Dans le MS, les champs de jauge interagissent avec les fermions chiraux. Dans notre version supersymétrique il nous faut donc considérer les interactions entre le supermultiplet chiral et le supermultiplet vecteur. Comme dans le cas non-supersymétrique, les dérivées usuelles ∂^μ des fermions sont maintenant à remplacer par des dérivées covariantes de jauge D^μ . De plus, le lagrangien doit comporter des termes supplémentaires qui traduisent les interactions entre supermultiplets chiraux et vecteurs. Les lois de transformation supersymétriques du supermultiplet chiral changent pour prendre en compte la variation des nouveaux termes. L'équation du mouvement pour D^a est alors (les T^a sont les générateurs du groupe de jauge selon lesquels les supermultiplets chiraux se transforment et g est la constante de couplage) :

$$D^a = -g(\phi^* T^a \phi) + C_{FI}, \quad (3.39)$$

et le potentiel scalaire complet est :

$$V = F_i F^{*i} + \frac{1}{2} \sum_a D^a D^a = W_i^* W^i + \frac{1}{2} \sum_a g^2 (\phi^* T^a \phi)^2. \quad (3.40)$$

La constante C_{FI} (terme de Fayet-Iliopoulos) n'est présente que si le groupe de jauge est abélien. Ce potentiel scalaire est aussi automatiquement non-négatif et s'avère très important pour la brisure de symétrie. Nous parlons de termes F et de termes D pour faire référence respectivement au premier et deuxième terme du potentiel. Ce potentiel est complètement déterminé par les couplages de Yukawa (*via* le terme F) et par les interactions de jauge (*via* le terme D).

3.3 Les modèles supersymétriques à basse énergie

Nous allons maintenant appliquer les différents résultats obtenus. Le Modèle Standard fonctionne très bien, nous allons donc juste lui offrir une promotion en le "supersymétrisant" et en conservant toutes ses caractéristiques. Le modèle minimal que nous pouvons obtenir est le MSSM (*Minimal Supersymmetric Standard Model*). Nous présenterons son contenu en particules (la nomenclature des nouvelles particules), nous décrirons la brisure effective de supersymétrie (brisure dite "douce") et nous expliquerons comment la symétrie électrofaible peut se briser.

3.3.1 Les modèles $\mathcal{N} \geq 2$

Comme nous l'avons déjà dit dans la section (3.2.1), *a priori* le nombre de générateurs supersymétriques Q_α que nous pouvons introduire peut être supérieur ou égal à 1 (nous parlerons de supersymétrie $\mathcal{N} \geq 1$). Après tout, les théories supersymétriques $\mathcal{N} \geq 2$ possèdent d'avantages de supersymétries et de ce fait il se trouve qu'elles possèdent moins de divergences ce qui les rend très intéressantes. En effet, dans le cas $\mathcal{N} = 2$ il n'y a qu'un nombre fini de diagrammes qui divergent et dans le cas $\mathcal{N} = 4$ il n'y en a plus du tout ! Une théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 4$ est intrinsèquement finie. Tout naturellement, nous aimerions donc construire un modèle $\mathcal{N} = 4$ englobant le MS. Malheureusement, à basse énergie (autour du TeV), les modèles $\mathcal{N} \geq 2$ ne sont pas réalistes. Ils ne permettent pas la violation de la parité que nous observons dans les interactions faibles. Un supermultiplet d'une théorie supersymétrique $\mathcal{N} \geq 2$ possède toujours les 2 hélicités opposées donc les particules "gauches" et "droites" siègent dans le même supermultiplet. Ce qui implique qu'elles ont les mêmes interactions (car elles sont dans la même représentation du groupe de jauge). C'est malheureusement une conclusion contraire aux observations expérimentales qui nous disent par exemple que l'électron "gauche" (qui fait partie d'un doublet dans le MS) n'a pas la même interaction avec le boson W que l'électron "droit" (qui est un singulet d'isospin faible nul et qui ne "ressent" pas l'interaction faible). Les modèles $\mathcal{N} \geq 2$ ne peuvent donc pas décrire la physique des particules à basse énergie.

3.3.2 La zoologie du Modèle Standard Supersymétrique Minimal

Pour englober le MS, les supermultiplets dont nous disposons le cas minimal $\mathcal{N} = 1$ sont :

- le supermultiplet chiral qui comprend un fermion de spin 1/2 et un boson de spin 0,
- le supermultiplet vecteur qui comprend un boson de spin 1 et un fermion de spin 1/2.

Pouvons nous ranger toutes nos particules du MS dans ces multiplets ? Autrement dit, pouvons nous associer les quarks et leptons aux bosons W , Z , au photon, etc ?

Malheureusement non car cela poserait des problèmes pour la conservation des nombres quantiques. En effet, les bosons de jauge et les fermions n'ont pas les mêmes propriétés de transformation sous les groupes de jauge et donc ne possèdent pas les même nombres quantiques. La supersymétrie ne

modifie pas ces nombres, on ne peut donc pas associer un boson de jauge à un fermion connu ou inversement. Cela poserait aussi des problèmes pour la conservation d'autres nombres comme le nombre leptonique car les bosons de jauge que nous connaissons ont un nombre leptonique nul contrairement aux leptons. Il nous faut donc inventer des (super)partenaires à toutes les particules connues! Le tableau suivant, (3.1), donne à chaque particule connue le nom, le spin et l'abréviation de son spartenaire.

Particule	Spartenaire	Spin
quarks q → top t → bottom b ...	squarks \tilde{q} stop \tilde{t} sbottom \tilde{b} ...	0
leptons l → neutrino ν_e → muon μ ...	sleptons \tilde{l} sneutrino $\tilde{\nu}_e$ smuon $\tilde{\mu}$...	0
bosons de jauge → photon γ → boson Z → boson B → boson W → gluon g	jauginos photino $\tilde{\gamma}$ zino \tilde{Z} bino \tilde{B} wino \tilde{W} gluino \tilde{g}	1/2
bosons de Higgs $H_i^{\pm,0}$	higgsinos $\tilde{H}_i^{\pm,0}$	1/2

TAB. 3.1 – Les particules du MSSM.

Avant de passer aux sections suivantes, nous allons formuler plusieurs remarques. Tout d'abord nous avons aussi, outre les nouveaux spartenaires, au moins deux doublets de bosons de Higgs. Pourquoi a-t-il fallu aussi ajouter des bosons de Higgs? Dans l'étude des théories de champs supersymétriques nous avons introduit la notion de superpotentiel. Celui-ci résume toutes les interactions possibles des particules (mais qui ne font pas intervenir les bosons de jauge) donc en particulier les interactions de Yukawa avec les champs de Higgs. Ce superpotentiel ne peut pas être fonction de champs complexes conjugués. Or dans le MS, pour donner une masse aux quarks type "up"

nous utilisons un terme QU^cH^* . Comme en supersymétrie ce genre de terme est interdit nous devons utiliser un nouveau champ de Higgs, d'hypercharge $Y = -1$, et le coupler simplement (sans conjugaison complexe): QU^cH_u . Ce nouveau champ, après brisure électrofaible nous laissera donc d'autres bosons de Higgs dont certains seront chargés (voir plus loin). Ce nouveau doublet de Higgs est aussi nécessaire pour annuler les possibles *anomalies*⁶.

Deuxièmement, nous savons bien que dans le MS un fermion droit subit un traitement différent d'un fermion gauche. Ils auront en supersymétrie chacun un supermultiplet avec chacun un spartenaire. Par exemple $q_L \rightarrow \tilde{q}_L$ et $q_R \rightarrow \tilde{q}_R$. Ces deux squarks sont bien différents et pour les identifier nous laisserons l'indice de chiralité L ou R tout en sachant qu'il n'a pas de sens physique pour une particule scalaire (spin 0 donc une seule hélicité $\lambda = 0$).

Troisièmement, pourquoi avons nous fait le choix d'avoir des spartenaires de spin inférieur? *A priori* nous aurions pu associer à tous les fermions du MS des spartenaires de spin 1 et aux bosons de jauge de spin 1 des spartenaires de spin 3/2. Cependant, introduire une particule de spin 1 signifie introduire une nouvelle interaction et implique un modèle non-minimal. De plus, introduire des particules de spin >1 rend la théorie non-renormalisable⁷.

Enfin, les $\tilde{\gamma}$, \tilde{Z} , \tilde{W} , \tilde{H} ne s'observent pas directement. En effet, il ne peut apparaitre expérimentalement que des combinaisons de ces jauginos et higgsinos: celles-ci ont pour nom les *neutralinos* et les *charginos*:

- Les neutralinos $\tilde{N}_{1,2,3,4}^0$ ⁸ sont de charge électrique nulle et mélangent en particulier les fermions \tilde{B} , \tilde{W}^0 , \tilde{H}_u^0 et \tilde{H}_d^0 .
- Les charginos $\tilde{C}_{1,2}^\pm$ ⁹ sont chargés électriquement et mélangent les \tilde{W}^\pm et les \tilde{H}^\pm .

Ces mélanges sont dûs au fait que les jauginos et higgsinos possèdent les mêmes nombres quantiques et ne sont pas distinguables séparément.

6. Les anomalies viennent de la brisure des symétries classiques du lagrangien par les corrections quantiques à boucles. Pour les éliminer il faut introduire des conditions extérieures comme des conditions sur l'hypercharge ou modifier le contenu en particule.

7. En analysant en théorie des champs ce qui rend les diagrammes divergents, on aboutit à une condition pour qu'un terme du lagrangien soit renormalisable: $\Delta = 4 - d - \sum_i n_i (s_i + 1) \geq 0$ où d est le nombre de dérivées, n_i est le nombre de champs du type i dans le terme d'interaction et s_i leur spin. Si le spin est trop élevé on tombe inévitablement sur des termes non-renormalisables.

8. Notés aussi dans la littérature $\tilde{\chi}_{1,2,3,4}^0$.

9. Notés aussi souvent $\tilde{\chi}_{1,2}^\pm$.

3.3.3 Le modèle

Le MSSM est l'extension supersymétrique minimale du MS. Les quarks et les leptons sont alors mis dans des superchamps chiraux avec leurs superpartenaires et ces superchamps forment des supermultiplets chargés sous $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ de la même façon que les multiplets du MS. Les bosons de jauge sont quant à eux placés avec leurs superpartenaires fermioniques dans des superchamps vecteurs.

Le superpotentiel le plus général, mais minimal, du MSSM est alors :

$$\mathcal{W} = \mathcal{Y}_u U^c Q H_u + \mathcal{Y}_d D^c Q H_d + \mathcal{Y}_e E^c L H_d + \mu H_u H_d. \quad (3.41)$$

La notation ψ^c signifie que les champs du supermultiplet sont des champs conjugués de charge. Les champs conjugués apparaissent car nous avons choisi de ne travailler qu'avec des champs gauches. Les champs droits s'obtiennent justement par cette opération de conjugaison. De plus, les indices de $SU(2)$ ont été supprimés pour ne pas alourdir l'expression. Nous avons en fait $\mu(H_u)_\alpha(H_d)_\beta\epsilon^{\alpha\beta}$, $(\mathcal{Y}_u)^{ij}U_{ai}^c Q_{j\alpha}^a(H_u)_\beta\epsilon^{\alpha\beta}$, ...

Les \mathcal{Y} sont les matrices de Yukawa, 3×3 dans l'espace des saveurs et sont sans dimension. Elles donnent les masses des quarks et leptons ainsi que les angles et phases de CKM après la brisure électrofaible.

Les deux champs de higgs, H_u et H_d , ont été introduit pour respecter la condition d'analyticité du superpotentiel¹⁰ et donner une masse aux particules "up" et "down" ainsi que pour la condition d'annulation des anomalies. Mais une fois que nous avons deux superchamps de higgs, un terme qui couple les deux peut *a priori* exister. Ce terme (le couplage μ) donne cependant naissance au "problème μ " : phénoménologiquement, il est de l'ordre du TeV alors que dans le MSSM rien ne le force à être aussi bas. Dans un modèle plus fondamental, μ pourrait être lié à l'échelle de brisure de la supersymétrie [39].

Une fois que ce superpotentiel a été écrit, nous pouvons trouver toutes les interactions possibles (mais non de jauge) entre les particules et écrire le lagrangien d'interaction, grâce à la formule (3.27), ainsi que le potentiel effectif de la théorie, formule (3.40).

3.3.4 La brisure douce de la supersymétrie

Il reste à introduire dans le modèle la brisure de la supersymétrie car celle-ci n'est pas observée aux énergies accessibles actuellement. Mais le mécanisme et l'échelle réelle de la brisure sont encore inconnues. Ce que nous pouvons faire c'est paramétrer à basse énergie cette brisure. Ceci se fait en ajoutant

10. C'est-à-dire l'absence de champs complexes conjugués ϕ^* .

des termes au lagrangien qui brise explicitement la supersymétrie. La forme générale de ce lagrangien de brisure \mathcal{L}_{douce} est :

$$\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_{douce} = -\frac{1}{2}(M_\lambda \lambda^a \lambda^a + c.c) - m_{ij}^2 \phi_j^* \phi_i + \left(\frac{1}{2} b_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} a_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + c.c\right) \quad (3.42)$$

Il brise bien la supersymétrie car seuls les scalaires (ϕ_i) et les jauginos (λ^a) ont un terme de masse. La brisure, bien qu'explicite, est dite "douce" ("soft" en anglais) car on peut montrer qu'elle n'introduit pas de divergences quadratiques. Tous les modèles de brisure, qu'ils aient leur origine dans les théories des cordes ou de supergravité, conduisent à basse énergie à cette forme générale de \mathcal{L}_{douce} . Avec les supermultiplets du MSSM, \mathcal{L}_{douce} s'écrit :

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{douce} &= \frac{1}{2}(M_3 \tilde{g}\tilde{g} + M_2 \tilde{W}\tilde{W} + M_1 \tilde{B}\tilde{B} + c.c) \\ &+ \tilde{Q}^\dagger m_Q^2 \tilde{Q} + \tilde{U}^\dagger m_{\tilde{U}}^2 \tilde{U} + \tilde{D}^\dagger m_D^2 \tilde{D} + \tilde{L}^\dagger m_L^2 \tilde{L} + \tilde{E}^\dagger m_E^2 \tilde{E} \\ &+ (\tilde{U}^c a_U \tilde{Q} H_u - \tilde{D}^c a_D \tilde{Q} H_d - \tilde{E}^c a_E \tilde{L} H_d + c.c) \\ &+ m_{H_u}^2 H_u^* H_u + m_{H_d}^2 H_d^* H_d + (b H_u H_d + c.c) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Les masses M_3 , M_2 , M_1 des jauginos sont en général complexes, ce qui introduit 6 paramètres. Les m_Q , m_L , $m_{\tilde{u}}, \dots$, sont les matrices de masse des squarks et sleptons, hermitiennes et de taille 3×3 dans l'espace des saveurs, ce qui fait 45 paramètres inconnus. Les couplages a_U , a_D, \dots , sont des couplages trilineaires, 3×3 et complexes donc caractérisés par 54 paramètres. Enfin, les couplages bilinéaires des higgs introduisent 4 paramètres. En tout, \mathcal{L}_{douce} introduit une centaine nouveaux paramètres inconnus ! L'introduction de la supersymétrie nécessite donc beaucoup de paramètres même si en contrepartie fait intervenir très peu de principes. Ce nombre de paramètres "soft" peut cependant être diminué grâce à des symétries ou des hypothèses supplémentaires à haute énergie (l'universalité des masses des scalaires par exemple). La mesure des paramètres de brisure douce permettra de tester les modèles de plus haute énergie et ces hypothèses.

3.3.5 La brisure électrofaible et les bosons de Higgs supersymétriques

Le potentiel scalaire

Le secteur de Higgs du MSSM contient 2 doublets complexes :

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_u^- \end{pmatrix}, H_d = \begin{pmatrix} H_d^+ \\ H_d^0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

La brisure électrofaible est donc un peu plus complexe que dans le cas du Modèle Standard (à 1 seul doublet). Au niveau classique c'est-à-dire au niveau de l'arbre, le potentiel scalaire effectif s'écrit, après plusieurs simplifications que nous ne détaillerons pas :

$$V = (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)|H_u^0|^2 + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2)|H_d^0|^2 - b(H_u^0 H_d^0 + c.c) + \frac{1}{8}(g_2^2 + g_1^2)(|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2. \quad (3.45)$$

Les termes proportionnels à $|\mu|^2$ tirent leur origine des termes F et le terme proportionnel aux couplages de jauge (g_1, g_2) des termes D . Les autres termes viennent de \mathcal{L}_{soft} (en omettant les autres scalaires qui ne joueront aucun rôle ici). Une brisure spontanée de la symétrie électrofaible ne peut exister avec cette forme de potentiel que si le paramètre b vérifie :

$$b^2 > (|\mu|^2 + m_{H_u}^2)(|\mu|^2 + m_{H_d}^2), \quad (3.46)$$

et de plus, pour que le potentiel soit limité inférieurement, il faut :

$$2b < 2|\mu|^2 + m_{H_u}^2 + m_{H_d}^2. \quad (3.47)$$

Ces conditions ne sont valables qu'au niveau de l'arbre. Quand la brisure de la symétrie a lieu, les deux champs H_u^0 et H_d^0 développent une *v.e.v*¹¹ :

$$\langle H_u^0 \rangle = v_u, \quad \langle H_d^0 \rangle = v_d, \quad (3.48)$$

qui sont reliées à celle du MS par :

$$v^2 = v_u^2 + v_d^2 = \frac{2m_Z^2}{(g_2^2 + g_1^2)}. \quad (3.49)$$

On définit aussi le paramètre $\tan \beta$ par :

$$\tan \beta = \frac{v_u}{v_d}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. \quad (3.50)$$

Au minimum du potentiel,

$$\frac{\partial V}{\partial H_u^0} = \frac{\partial V}{\partial H_d^0} = 0, \quad (3.51)$$

nous avons alors les deux relations :

$$|\mu|^2 + m_{H_u}^2 = b \tan \beta - \frac{m_Z}{2} \cos 2\beta, \quad (3.52)$$

$$|\mu|^2 + m_{H_d}^2 = b \cot \beta + \frac{m_Z}{2} \cos 2\beta. \quad (3.53)$$

Elles sont très importantes car elles lient une quantité mesurable, m_Z , à des paramètres de brisure douce. Nous pouvons aussi noter que la phase de μ n'est pas déterminée.

11. une valeur dans le vide non nulle : $v = \langle 0 | \phi | 0 \rangle$

Les bosons de Higgs supersymétriques

Les deux doublets complexes comptent 8 degrés de liberté donc 8 scalaires réels. Le mécanisme de Higgs, quand la brisure électrofaible se réalise, en utilise 3 pour donner une masse aux 2 bosons W et au Z . Il reste alors 5 bosons de Higgs qui restent dans le spectre :

- ↔ 2 sont neutres et pairs sous une transformation de CP , h^0 et H^0 ,
- ↔ un est neutre et impair sous CP , A^0 ,
- ↔ les 2 derniers sont chargés, H^\pm .

Les masses de ces bosons de Higgs supersymétriques sont au niveau de l'arbre :

$$2m_{h^0, H^0}^2 = m_{A^0}^2 + m_Z^2 \mp \sqrt{(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4m_{A^0}^2 m_Z^2 \cos^2 2\beta}, \quad (3.54)$$

$$m_{A^0}^2 = \frac{2b}{\sin 2\beta}, \quad (3.55)$$

$$m_{H^\pm}^2 = m_{A^0}^2 + m_W^2 \quad (3.56)$$

et de plus la masse du h^0 est bornée supérieurement par :

$$m_{h^0} < |\cos 2\beta| m_Z. \quad (3.57)$$

En particulier, cette dernière relation nous donne $m_{h^0} < m_Z$.

Or ces relations ne sont valables qu'à l'arbre. Nous avons déjà vu que les masses des scalaires de Higgs subissent des corrections radiatives importantes au niveau d'une boucle. On a pour la masse de h au carré :

$$\Delta m_h^2 = \frac{3m_t^4}{4\pi^2 v^2} \ln \left(\frac{m_{\tilde{t}_1} m_{\tilde{t}_2}}{m_t^2} \right) + \frac{3m_t^4}{8\pi^2 v^2} f(m_{\tilde{t}_1}^2, m_{\tilde{t}_2}^2, \mu, \tan \beta), \quad (3.58)$$

où $m_{\tilde{t}_{1,2}}$ sont les masses physiques des stops (qui sont des mélanges des états \tilde{t}_R et \tilde{t}_L) et $f(m_{\tilde{t}_1}^2, m_{\tilde{t}_2}^2, \mu, \tan \beta)$ est une fonction que l'on peut retrouver explicitement dans la référence [40]. La correction Δm_h^2 dépend quartiquement de la masse du top, ce qui la rend importante. En prenant en compte cette correction, la masse du boson de Higgs supersymétrique le plus léger, h , pour des masses de sparticules autour d'un TeV, est :

$$m_h \lesssim 130 \text{ GeV}. \quad (3.59)$$

Ce boson de Higgs supersymétrique le plus léger a donc toutes les caractéristiques nécessaires pour être le boson de Higgs favorisé par les ajustements des données électrofaibles. Ceci constitue une prédiction importante de la supersymétrie.

3.4 La physique de la saveur dans une théorie supersymétrique

3.4.1 Squarks et sleptons

Dans un modèle supersymétrique comme le MSSM, les matrices de masse des squarks et des sleptons sont de taille 6×6 .¹² Dans le secteur des quarks et squarks on peut définir une base appelée "*super-CKM*" dans laquelle la structure en saveur des vertex quark-squark-jauginos, $q - \tilde{q} - \tilde{W}$, est la même que celle des vertex quark-quark-boson de jauge, $q - q - W$. C'est un choix de base particulier dans laquelle les matrices de masse des quarks sont diagonales. On a ainsi pour les squarks les matrices de masse suivantes :

$$M_{\tilde{d}}^2 \simeq \begin{pmatrix} (m_d^2)_{LL} & (m_d^2)_{LR} \\ (m_d^2)_{LR}^\dagger & (m_d^2)_{RR} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

et

$$M_{\tilde{u}}^2 \simeq \begin{pmatrix} (m_u^2)_{LL} & (m_u^2)_{LR} \\ (m_u^2)_{LR}^\dagger & (m_u^2)_{RR} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Les $(m^2)_{--}$ sont des matrices 3×3 dans l'espace des saveurs et les indices L et R font référence à la chiralité des partenaires fermioniques.

3.4.2 L'approximation d'insertion de masse

Etant donné le grand nombre de paramètres inconnus impliqués dans les processus changeant la saveur, il est utile de faire appel au formalisme de l'**insertion de masse**. Celui-ci est une paramétrisation des quantités intervenant dans les FCNC dans les modèles supersymétriques. Les insertions de masse sont définies dans la base *super-CKM*, dans laquelle les couplages de Yukawa des quarks bas et haut sont diagonaux et le couplage des gauginos neutres est diagonal en saveur. Dans cette base, les matrices de masse des squarks ne sont pas diagonales, voir (3.60, 3.61), le changement de saveur est alors relié à la non-diagonalité des propagateurs de sfermions. On note en général Δ_{ij}^f les éléments non-diagonaux, responsables des changements de saveur, apparaissant dans les matrices de masse des sfermions. Les propagateurs des sfermions sont alors développés en série de $(\delta_{ij}^f) = \Delta_{ij}^f/m_{\tilde{f}}$ qui sont appelés *insertions de masse*. Clairement, la validité de cette approximation dépend de la taille du paramètre d'expansion (δ_{ij}^f) . Phénoménologiquement,

12. On réunit dans une seule et même matrice de masses les masses des sfermions "gauches" et "droits" c'est-à-dire issus des fermions gauches et droits.

les contraintes requièrent que ces paramètres soient petits, il est donc généralement suffisant de ne garder que le premier terme de l'expansion. L'information expérimentale sur les FCNC ou les observables qui violent CP se répercute en limite supérieure sur ces δ .

L'utilisation de l'approximation d'insertion de masse est très pratique car il n'est pas nécessaire de diagonaliser les matrices de masse complètes des squarks pour effectuer une analyse de processus changeant la saveur dans le MSSM. Il est suffisant de connaître le (les) seul(s) élément(s) contribuant à un processus donné.

En termes des insertions de masse, et en prenant tous les éléments diagonaux approximativement égaux à m_d^2 , la matrice de masse des squarks bas est¹³ :

$$\frac{M_d^2}{m_d^2} \simeq \begin{pmatrix} (\delta_{ij}^d)_{LL} & (\delta_{ij}^d)_{LR} \\ (\delta_{ij}^d)^*_{LR} & (\delta_{ij}^d)_{RR} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

où les $(\delta_{ij}^d)_{--}$ sont des blocs 3×3 et les éléments diagonaux de M_d^2/m_d^2 valent approximativement 1. Tous les éléments sont *a priori* complexes, il y a donc 30 nouveaux paramètres. Les valeurs des $(\Delta)_{ij}$ peuvent être relativement différentes. De plus, dans le cas du MSSM, seules les insertions de masse de type LL changent la saveur, les autres la conservent (donc $i = j$). Dans ce cas, pour réaliser un changement de saveur LR (ou RL) il faut introduire une double insertion de masse : une fois pour changer la saveur avec une insertion de type LL , puis un changement LR conservant la saveur.

Comment l'approximation d'insertion de masse fonctionne ? Soit une matrice A hermitienne $n \times n$, séparée en $A = A^0 + A^1$ où $A^0 = \text{diag}(a_1^0, \dots, a_n^0)$ et A^1 n'a que des éléments en dehors de la diagonale. Si A est diagonalisée par $UAU^\dagger = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ et si f est une fonction arbitraire, au premier ordre nous avons

$$U_{ki}^* f(a_k) U_{kj} \simeq \delta_{ij} f(a_i^0) + A_{ij}^1 \frac{f(a_i^0) - f(a_j^0)}{a_i^0 - a_j^0} \quad (3.63)$$

Pour des squarks approximativement dégénérés et des éléments de A^1 petits on peut remplacer la différence par la dérivée de la fonction. Cette expression permet de réécrire les propagateurs en une partie diagonale en saveur et une insertion de masse A_{ij}^1 , dépendante de la saveur.

13. On a la même chose pour la matrice de masse des squarks hauts, mais avec les $(\delta_{ij}^u)_{LL}$ reliés aux $(\delta_{ij}^d)_{LL}$ par une rotation CKM.

3.5 La R -parité

3.5.1 Introduction : nombre leptonique et baryonique

Une question très importante dans la physique au-delà du MS, supersymétrique en particulier, est la conservation du nombre baryonique B et du nombre leptonique L . Dans le MS, les symétries baryonique $U(1)_B$ et leptonique $U(1)_L$ sont des symétries *accidentelles* du Lagrangien (défini comme la somme de tous les termes renormalisables, invariant sous $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, construit avec le contenu en particule standard). Ce n'est *a priori* plus le cas quand on permet l'introduction de termes non-renormalisables donc dans une théorie qui étend le MS.

B et L sont à la base des nombres quantiques fermioniques, associés aux quarks et leptons. Mais en supersymétrie, chaque fermion possède un associé bosonique. De ce fait, ceux-ci portent aussi une charge B ou L . Des processus "médiés" par des squarks ou des sleptons peuvent donc conduire à une violation de B et/ou de L . Ceci est extrêmement dangereux car on sait notamment que le proton est très stable et donc, la violation de B et/ou L , si elle a lieu, est fortement contrainte. Elle est en général problématique si elle se fait à trop basse énergie.

Y'a t'il un moyen d'interdire ces nouvelles interactions supersymétriques violant B et/ou L ? Peut-on imposer une symétrie? Si on décide de permettre la violation de B et L , quelles sont les contraintes auxquelles elle est soumise? Si ces violations sont contrôlées, peuvent-elles apporter des solutions à des problèmes phénoménologiques importants? Sans entrer dans tous les détails et sans chercher à passer en revue tous les aspects, nous allons néanmoins aborder les grandes lignes et placer notre travail sur le mode de désintégration $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$ dans ce cadre.

3.5.2 La R -parité

La conservation séparée de B et L ne suffit pas à interdire les interactions "médiées" par les spins 0. Pour éliminer les interactions indésirables, on peut imposer la *symétrie discrète de R -parité*. Aux particules ordinaires on associe la parité $+1$, aux particules supersymétriques on associe la parité -1 . En demandant que cette parité se conserve à chaque vertex, on exclut les interactions entre 2 particules ordinaires et 1 sparticule. Cette symétrie de R -parité garanti que les particules supersymétriques ne puissent pas être échangée entre quarks et leptons ordinaires, comme sur la figure (3.3)

La valeur de la R -parité d'une particule se construit à l'aide des nombres baryonique et leptonique mais aussi du spin (car c'est le spin qui différencie

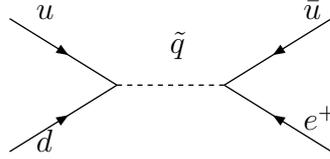


FIG. 3.3 – *Echange d'un squark entre quarks et leptons ordinaires, interdit quand on impose la symétrie de R-parité. Sans cette R-parité, ce diagramme contribuerait à la désintégration du proton.*

les quarks et leptons des squarks et sleptons) :

$$R_p = (-1)^{2S}(-1)^{3B+L} = (-1)^{2S}(-1)^{3(B-L)} \quad (3.64)$$

La quantité $(-1)^{3B+L}$ est appelée la *parité de matière*. Les bosons et fermions ont une parité de matière opposée. Le fait que l'on puisse remplacer $(-1)^{3B+L}$ par $(-1)^{3(B-L)}$ montre que la *R-parité* peut être conservée même si la différence $B - L$ est conservée alors que B et L ne le sont pas.

Plutôt qu'une symétrie discrète, peut-on imposer une symétrie continue qui joue le même rôle? Oui, on peut imposer l'invariance du MSSM sous une symétrie continue $U(1)_R$, telle que $R = 0$ pour les quarks et leptons et $R = \pm 1$ pour les squarks et sleptons. Seulement, cette "R-symétrie" comme on l'appelle, n'est pas phénoménologiquement viable. Celle-ci rendrait les gluinos sans masse ce qui impliquerait l'existence de "R-hadrons" légers qui n'ont jamais été observés. On préfère alors imposer la parité associée à cette R-symétrie c'est à dire uniquement l'invariance sous le sous-groupe Z_2 : c'est la *R-parité*.

Quelle peut être l'origine fondamentale de cette *R-parité*? La symétrie de *R-parité* peut être vue d'un point de vue formel comme une symétrie de réflexion dans le superspace, $\theta \rightarrow -\theta$ (*cf* le dernier chapitre de la 2ème partie). Mais plus concrètement, c'est peut être une symétrie résiduelle de la brisure de supersymétrie dans théorie à plus de 4 dimensions.

3.5.3 Les couplages violant la *R-parité*

Le superpotentiel du MSSM est :

$$\mathcal{W} = \mu H_u H_d + \mathcal{Y}_{ij}^e H_d L_i E_j^c + \mathcal{Y}_{ij}^d H_d Q_i D_j^c + \mathcal{Y}_{ij}^u H_u Q_i U_j^c \quad (3.65)$$

où \mathcal{Y}_{ij}^e , \mathcal{Y}_{ij}^d , \mathcal{Y}_{ij}^u sont les couplages de Yukawa. Uniquement à partir de considérations d'invariance de jauge, d'invariance de Lorentz et de renormalisabilité, nous pouvons introduire dans le superpotentiel (3.65) d'autres termes

qui n'ont pas de correspondance avec le MS mais qui ne conservent pas la R -parité. Ces termes sont :

$$\mathcal{W}_{RPV} = \mu_i H_u L_i + \frac{1}{2} \lambda_{ijk} L_i L_j E_k^c + \lambda'_{ijk} L_i Q_j D_k^c + \frac{1}{2} \lambda''_{ijk} U_i^c D_j^c D_k^c, \quad (3.66)$$

où $\lambda, \lambda', \lambda''$ sont des couplages sans dimension. Les deuxième et troisième termes violent uniquement L et le dernier terme viole uniquement B . Dans la notation, une fois encore nous n'avons pas fait apparaître les indices de $SU(2)$. Quand on écrit un terme $L_i L_j E_k^c$, il faut lire $(\epsilon_{ab} L_i^a L_j^b) E_k^c = (N_i E_j - E_i N_j) E_k^c$. Etant renormalisables, les termes de \mathcal{W}_{RPV} ne sont pas supprimés par une échelle de masse grande. Ceux-ci induisent donc des effets de violation de B et/ou de L potentiellement importants.

Les termes d'interaction résultant du 3ème terme (celui qui nous intéresse pour $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$) sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{LiQjD^ck} = & -\lambda'_{ijk} (\tilde{\nu}_{iL} \bar{d}_{kR} d_{jL} + \tilde{d}_{jL} \bar{d}_{kR} \nu_{iL} + \tilde{d}_{kR}^* \bar{\nu}_{iR}^c d_{jL} \\ & - \tilde{l}_{iL} \bar{d}_{kR} u_{jL} - \tilde{u}_{jL} \bar{d}_{kR} l_{iL} - \tilde{d}_{kR}^* \bar{l}_{iR}^c u_{jL}) + \text{h.c} \end{aligned} \quad (3.67)$$

qui correspond à des vertex entre 2 particules et une sparticule et qui violent B et L , comme schématisé sur la figure (3.4).

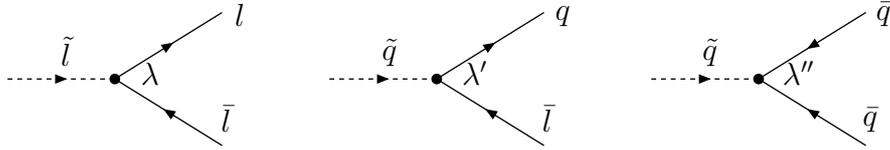


FIG. 3.4 – 3 types de vertex ne conservant pas la R -parité, faisant intervenir les 3 couplages λ_{ijk} , λ'_{ijk} et λ''_{ijk} (les autres vertex ne sont pas montrés)

Les paramètres λ sont en tout au nombre de $9+27+9=45$ (à cause de l'antisymétrie des deux premiers indices de λ et λ'' nécessaire par invariance de jauge).

Une remarque: tant que la supersymétrie n'est pas brisée, la violation de la R -parité peut être paramétrée par les couplages trilineaires seulement. En présence de termes de brisure douce, le potentiel scalaire et le superpotentiel fournissent deux sources indépendantes de violation bilinéaire de la R -parité. Ces deux sources ne peuvent pas être simultanément éliminées. Si on redéfinit les superchamps de manière à faire disparaître le terme bilinéaire de (3.66), des termes bilinéaires violant R_p feront leur apparition dans le potentiel scalaire [41].

3.5.4 Premières conséquences

Si cette R -parité est conservée, elle implique plusieurs choses importantes :

- les sparticules sont produites par paires, par exemple : $\bar{p}p \rightarrow \tilde{q}\tilde{g}X$,
 $e^+e^- \rightarrow \tilde{\mu}^+\tilde{\mu}^-$,
- une sparticule se désintègre en une autre sparticule (ou en un nombre impair de sparticules), par exemple : $\tilde{q} \rightarrow q\tilde{g}$, $\tilde{\mu} \rightarrow \mu\tilde{\gamma}$,
- la sparticule la plus légère, la LSP, est stable.

Dans le MSSM, par définition, la R -parité est conservée et la sparticule la plus légère est stable donc ne peut pas se désintégrer. Cette LSP a un grand intérêt car pourrait constituer la majorité de la matière noire froide favorisée par les modèles cosmologiques de formation des structures (galaxies,...). En effet, au fur et à mesure du refroidissement de l'Univers (son expansion) les particules se sont désintégrées, ont formé des baryons, atomes etc, sauf les neutrinos et la LSP. Cette dernière nous paraît "invisible" car elle n'interagit que très peu avec la matière et elle contribue alors à la densité relique de matière noire dont les bornes sont, d'après des mesures récentes de WMAP [42], $0,094 < \Omega_{MN}h^2 < 0,129$ (à 2σ). L'existence d'une LSP est une prédiction très importante mais sa contribution totale à la densité de matière noire dépend des paramètres du MSSM. Parmi les candidats à cette LSP, il y a le neutralino et la gravitino.

L'introduction de la violation de la R -parité nous fait perdre cette propriété du modèle d'avoir une LSP stable.

3.5.5 Contraintes directes et indirectes

Dans le cas où la R -parité est violée, les termes de \mathcal{W}_{RPV} , eq (3.66), donneront des contributions à tous les processus, y compris ceux changeant la saveur. Par exemple, la désintégration du proton, $b \rightarrow s\gamma$, les oscillations $B - \bar{B}$ ou la désintégration rare $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$. Phénoménologiquement, il faut pouvoir s'assurer que ces contributions soient supprimées et donc que les couplages soient petits. En utilisant les résultats expérimentaux et en calculant les contributions qui ne conservent pas R_p , on peut en déduire des contraintes quantitatives sur les λ , λ' et λ'' . Cependant, l'extraction de ces contraintes est très difficile car en pratique un grand nombre de ces couplages intervient dans un processus donné. Il faut donc faire appel à des hypothèses simplificatrices, et parmi celles-ci il y a l'*hypothèse de couplage dominant*. Cette hypothèse consiste à supposer que, dans un processus donné, il n'y a qu'un seul couplage violant la R -parité qui domine sur tous les autres. Ceci équivaut à dire que chacun des couplages λ , λ' ou λ'' ne contribue en gros qu'une seule fois. On obtient des limites modérément fortes dans la

plupart des cas, $\lambda, \lambda', \lambda'' < (10^{-2} - 10^{-1}) \times m_{\bar{q}}/(100 \text{ GeV})$, impliquant une dépendance linéaire dans la masse des sparticules. Son utilisation est assez restreinte¹⁴ et en général on postule plutôt la dominance d'un produit de 2 (voire 4 couplages). Les processus concernés qui contraignent des produits de couplages sont notamment :

- les processus hadroniques changeant la saveur, comme les oscillations de mésons neutres,
- les désintégrations leptoniques ou semileptoniques de B ou de K (comme $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$),
- les processus violant B ou L , etc.

Cette hypothèse de travail revient aussi à dire qu'il existe une hiérarchie entre les violations de B et L ou entre les différentes générations de quarks et leptons. Ceci n'est pas choquant car dans le MS il existe déjà une forte hiérarchie entre les couplages de Yukawa.

Les implications générales sur les modèles théoriques des limites expérimentales que l'on peut obtenir sont :

- les deux premières générations sont les plus contraintes (il faut savoir aussi qu'il y a de meilleures données expérimentales généralement),
- les limites les plus fortes sont sur les produits $\lambda'\lambda''$ (qui participent à la désintégration du proton par exemple) ce qui suggère une incompatibilité en une violation simultanée de B et de L ,
- il existe en général une forte hiérarchie entre les couplages $\lambda, \lambda', \lambda''$.

3.5.6 Le choix de la base

En l'absence de R -parité et de la conservation du nombre leptonique, il n'y a *a priori* pas de distinction entre le champ de Higgs d'hypercharge $Y = -1$ (H_d) et les superchamps leptoniques (L_i) qui ont les mêmes interactions de jauge. Les valeurs des couplages violant la R -parité dépendent de la base dans laquelle sont définis les superchamps H_d et L_i . Il existe cependant un choix particulier de base dans laquelle le mélange H_d - L_i induit par les termes bilinéaires est paramétré de manière économique et physique. Il est aussi possible de définir un ensemble complet de quantités indépendantes de la base et qui paramétrisent les effets de violation de R_p [43].

De plus, quand on étudie les limites sur les couplages violant la R -parité, il est également nécessaire de définir la base dans laquelle on travaille. C'est d'autant plus vrai lorsque l'on utilise l'hypothèse de couplage dominant. Si

14. Elle concerne les interactions de jauge par courant chargé/neutre, la désintégration $\beta\beta_{0\nu}$ et l'oscillation neutron/anti-neutron

une hiérarchie entre les couplages est issue d'une symétrie de saveur à haute-énergie, alors il paraît naturel de travailler dans la base des états de saveur. La plupart du temps, sans hypothèse de structure de saveur à haute énergie, les couplages pour les superchamps de quarks (resp. de leptons) sont définis dans la base "super-CKM" (resp. "super-MNS").

3.5.7 Conclusions

Sans la symétrie de R -parité, les modèles supersymétriques sont difficilement viables¹⁵ à cause des processus violant B et/ou L . Mais puisque cette symétrie n'a pas encore de justification fondamentale, il est raisonnable d'étudier et de discuter quantitativement de sa possible violation à travers les nombreuses contraintes existantes venant de l'astrophysique jusqu'aux accélérateurs. Le but des études sur les contributions violant la R -parité est donc de savoir combien celles-ci, paramétrées par les coefficients λ_{ijk} , λ'_{ijk} et $\lambda''_{ijk} (+\mu_i)$, peuvent être tolérées dans le superpotentiel et dans les termes de brisure de supersymétrie.

La phénoménologie de la violation et de la conservation de la R -parité sont très différentes et très riches, sa discussion est centrale à tout modèle supersymétrique.

3.6 Récapitulatif des propriétés importantes

- Les particules sont rangées dans des supermultiplets de 2 types (en ce qui concerne les modèles minimaux) :
 - le supermultiplet chiral, qui comprend un fermion de Weyl, un scalaire complexe et un scalaire auxiliaire;
 - le supermultiplet vecteur, qui comprend un boson de jauge, un fermion de Weyl (le jaugino) et un scalaire auxiliaire.
- Les interactions de jauge entre supermultiplets sont déterminées par les dérivées covariantes dans les termes cinétiques. Les autres interactions sont déterminées par le superpotentiel qui comprend au niveau renormalisable les termes de masse, de Yukawa et éventuellement des termes violant la R -parité.
- La R -parité est une symétrie discrète entre particule et superparticule qui protège des courants neutres changeant la saveur au niveau de l'arbre:

$$R_p = (-1)^{3(B-L)+2S}$$

¹⁵. car ceci dépend bien sûr de la valeur des couplages violant la R -parité et donc des symétries de saveur éventuelles

- La violation de la R -parité est paramétrée par 3 familles de couplages : λ , λ' , λ'' qui permettent respectivement la violation de L , L , et enfin B .

Chapitre 4

$K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$ dans le MSSM sans la R -parité

4.1 $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$ dans le MSSM

4.1.1 Les nouvelles contributions

Les particules supersymétriques modifient le hamiltonien effectif (2.4) à travers les contributions de nouveaux diagrammes en boîte et en pingouin les faisant intervenir. À une boucle, les différentes contributions aux processus $\Delta F \neq 0$ (changeant la saveur) peuvent se grouper en 3 classes (la figure (4.1) donne quelques exemples) :

- les échanges de higgs et W ou quarks, qui contient le MS comme sous-ensemble,
- les échanges de gluinos et squarks,
- les échanges de charginos ou neutralinos et squarks.

Les contributions potentiellement dominantes seront dues à la dernière catégorie.

Pour la suite, nous regroupons sous le terme "*contribution du MSSM*" toutes ces contributions, sans celles qui violent la R -parité car elles seront discutées plus tard. Le terme "*contribution SUSY*" fera référence aux contributions venant d'échange de particule(s) supersymétrique(s) (le MS est exclu), mais toujours sans violation de R -parité.

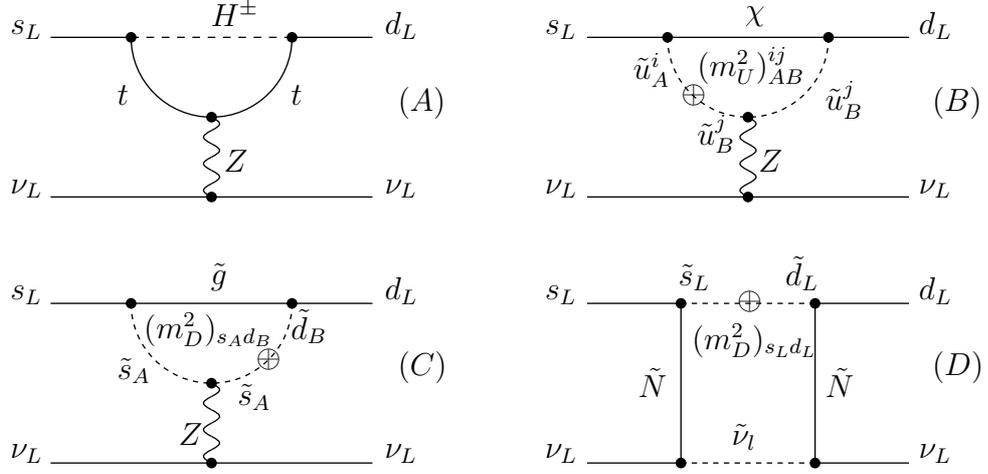


FIG. 4.1 – Exemples de nouveaux diagrammes. (A)=contribution d'un higgs chargé; (B)=contribution d'un chargino; (C)=contribution d'un gluino; (D)=contribution d'un neutralino

4.1.2 Paramétrisation

La détermination des contributions SUSY est basée sur le même principe que celles du MS. Il y a les diagrammes de type pingouin et boîte donnant lieu à un vertex $Z d \bar{s}$ effectif. Sous certaines hypothèses, l'hamiltonien effectif résultant peut être écrit de la même façon que l'équation (2.4), mais où la fonction X_t est remplacée par [44] :

$$X_{new} = r_K e^{-i\theta_K} X_t \quad (4.1)$$

et nous avons

$$H_{eff}^{MSSM} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{2\pi \sin^2 \Theta_W} \sum_{l=e,\mu,\tau} Z_{ds}^l (\bar{s}d)_{V-A} (\bar{\nu}_l \nu_l)_{V-A}, \quad (4.2)$$

avec $Z_{ds}^l = \lambda_t X_{new} + \lambda_c X_c^l$.

Les fonctions r_K et θ_K mesurent la quantité de nouvelle physique. Elles dépendent des masses des nouvelles particules et des nouveaux couplages. Toute la nouvelle physique proportionnelle à λ_c est incluse dans X_{new} , donnant une contribution à r_K et θ_K . Suivant les résultats du chapitre 2, le taux de branchement de la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ peut alors être exprimée

sous la forme :

$$\begin{aligned}
Br(K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}) &= \frac{\bar{\kappa}_+}{3\lambda^2} (Im(Z_{ds}^l)^2 + Re(Z_{ds}^l)^2) \\
&= \frac{\bar{\kappa}_+}{3\lambda^2} \left[(r_K X_t |V_{cb}|^2 R_t)^2 + \left(\lambda^4 P_c \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 |V_{cb}|^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2 \lambda^4 P_c X_t r_K R_t \cos(\beta + \theta_K) \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

où R_t et β sont introduits *via* $\bar{\rho} = 1 - R_t \cos \beta$ et $\bar{\eta} = R_t \sin \beta$.

Afin d'écrire le hamiltonien effectif sous cette forme, nous avons supposé qu'un seul opérateur de dimension 6 contribuait : l'opérateur $\bar{s}_L \gamma^\mu d_L \bar{\nu}_L^l \gamma_\mu \nu_L^l$. En effet, nous sommes dans le cas où la R -parité est conservée, il n'y a pas de violation du nombre leptonique et baryonique (les neutrinos et antineutrinos finals ont la même saveur). De plus, le contenu en particules est minimal et correspond à celui du MSSM. Pour que l'analyse décrite au chapitre 2 puisse être réutilisée, nous supposons par ailleurs que

- l'unitarité de la matrice CKM à 3 générations est maintenue,
- les contributions de nouvelle physique aux désintégrations semileptoniques du B au niveau de l'arbre qui sont utilisées pour déterminer $|V_{cb}|$ sont négligeables,
- les contributions de nouvelle physique intervenant dans $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$ sont elles aussi négligeables.

En étant un peu plus explicite, X_{new} peut être écrit sous une forme où apparaissent les contributions des différentes particules entrant dans les boucles :

$$X_{new} = X_t^{(MS)} + X_{H^\pm} + X_{\tilde{C}} + X_{\tilde{N}}, \tag{4.4}$$

On a respectivement les contributions du MS dans $X_t^{(MS)}$, celles des Higgs chargés et des quarks hauts, celles des charginos et des quarks hauts (et les sleptons chargés dans les diagrammes à boîte) ainsi que celles des neutralinos et des quarks bas (avec des sneutrinos dans les diagrammes à boîte). La contribution des gluinos a été négligée à cause de leur masse élevée associées à plusieurs propagateurs de squarks.

4.1.3 L'approximation d'insertion de masse

En utilisant l'approximation d'insertion de masse [45], on peut formuler une paramétrisation des quantités violant la saveur et violant CP indépen-

dante du modèle. Les matrices de masse des quarks/squarks seront alors diagonalisées de façon perturbative et les calculs seront faits en utilisant les insertions de masse, comme décrit au chapitre 3. Dans la plupart des cas, le premier ordre suffit. Cependant, Colangelo et Isidori [46] ont montré que pour les diagrammes avec une boucle chargino/squark, il était nécessaire d'aller au-delà pour prendre en compte tous les effets potentiellement importants.

Nous définissons des paramètres R reliés aux paramètres d'insertion de masse par [44]:

$$R_{s_L d_L}^D = \frac{(m_D^2)_{LL12}}{\lambda_t m_{\tilde{d}_L}^2} = \frac{(\delta_{12}^D)_{LL}}{\lambda_t} \quad (4.5)$$

$$R_{s_L d_L}^U = \frac{(m_U^2)_{LL12}}{\lambda_t m_{\tilde{u}_L}^2} = \frac{(\delta_{12}^U)_{LL}}{\lambda_t} \quad (4.6)$$

$$R_{s_L t_R}^U = \frac{(m_U^2)_{LR23}}{\lambda_t m_t m_{\tilde{u}_L}} V_{td} = \frac{(\delta_{23}^U)_{LR}}{\lambda_t m_t} V_{td} m_{\tilde{u}_L} \quad (4.7)$$

$$R_{t_R d_L}^U = \frac{(m_U^2)_{RL31}}{\lambda_t m_t m_{\tilde{u}_L}} V_{ts}^* = \frac{(\delta_{31}^U)_{RL}}{\lambda_t m_t} V_{ts}^* m_{\tilde{u}_L} \quad (4.8)$$

Les quantités $m_{\tilde{d}_L}^2$ (resp. $m_{\tilde{u}_L}^2$) sont les masses au carré des squarks bas (resp. haut) des deux premières générations et $(m_D^2)_{ij}$ (resp. $(m_U^2)_{ij}$) sont les éléments hors-diagonaux des matrices de masse des squarks.

Nous pouvons alors écrire les contributions de charginos/squarks et neutralino/squarks à X_{new} en séparant les paramètres d'insertion de masse et les fonctions à une boucle :

$$X_{\tilde{C}} = C^0 + C_{LL} R_{s_L d_L}^U + C_{LR} R_{s_L t_R}^U + C_{RL} R_{t_R d_L}^U \quad (4.9)$$

$$X_{\tilde{N}} = \tilde{N} R_{s_L d_L}^D \quad (4.10)$$

4.1.4 Neutralinos

La valeur de $R_{s_L d_L}^D$ peut être importante (sa limite supérieure est donnée plus loin), la contribution des neutralinos est donc elle aussi potentiellement importante et doit être prise en compte. Les fonctions à une boucle et les diagrammes des contributions de (4.9) sont donnés en annexe. Comme exemple, nous allons détailler ici la contribution à X_{new} des diagrammes pingouins comportant l'échange d'un neutralino, figure (A.2).

les diagrammes pingouins

Les deuxième et troisième diagrammes de la figure, (B) et (C), comportent un vertex squark-squark- Z et s'annulent avec les contributions ve-

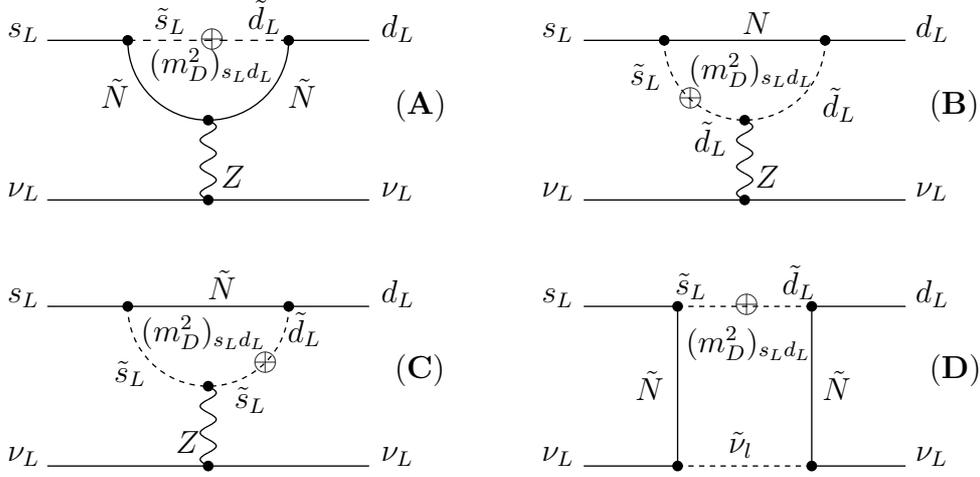


FIG. 4.2 – Diagrammes avec un neutralino virtuel contribuant au calcul de la fonction N

nant de la self-énergie des quarks externes. Le diagramme (A) donne¹:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{N})_{nm}^{Pen} = & -\frac{1}{2} \mathbf{j}(x_{n\tilde{d}_L}, x_{m\tilde{d}_L}, 1) \sqrt{x_{n\tilde{d}_L} x_{m\tilde{d}_L}} W_n^T(d_L) [W_{n4} W_{4m}^\dagger - W_{n3} W_{3m}^\dagger] W_m^*(d_L) \\
 & -\frac{1}{4} \mathbf{k}(x_{n\tilde{d}_L}, x_{m\tilde{d}_L}, 1) W_n^T(d_L) [W_{n4}^* W_{4m}^T - W_{n3}^* W_{3m}^T] W_m^*(d_L) \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Ce résultat inclut la matrice unitaire W qui diagonalise la matrice de masse $M_{\tilde{N}}$ des neutralinos :

$$M_{\tilde{N}} = W^T \text{diag}(M_{\tilde{N}_1}, M_{\tilde{N}_2}, M_{\tilde{N}_3}, M_{\tilde{N}_4}) W, \quad M_{\tilde{N}_n} > 0 \quad (4.12)$$

Explicitement, ($s_{\theta_W} = \sin \theta_W$, $s_\beta = \sin \beta$ etc)

$$M_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z s_{\theta_W} c_\beta & M_Z s_{\theta_W} s_\beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_{\theta_W} c_\beta & -M_Z c_{\theta_W} s_\beta \\ -M_Z s_{\theta_W} c_\beta & M_Z c_{\theta_W} c_\beta & 0 & -\mu \\ M_Z s_{\theta_W} s_\beta & -M_Z c_{\theta_W} s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

On a introduit la notation $W_n(x) = T_3(x) W_{n2} + \tan \theta_W \frac{Y(x)}{2} W_{n1}$, où $T_3(x)$ est la troisième composante de l'isospin faible et $Y(x)$ l'hypercharge de la particule x . Les W_{ni} sont les éléments de la matrice W .

1. Les règles de Feynman utilisées dans le calcul sont celles de H.Haber et G.Kane [47].

L'intégration sur l'impulsion virtuelle circulant dans la boucle donne les fonctions \mathbf{j} et \mathbf{k} :

$$\mathbf{j}(x) = \frac{x \log x}{x-1} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{x^2 \log x}{x-1} \quad (4.14)$$

où on définit une fonction à n arguments à partir d'une fonction à $n-1$ arguments :

$$f(x, y, z_1, \dots, z_{n-2}) = \frac{f(x, z_1, \dots, z_{n-2}) - f(y, z_1, \dots, z_{n-2})}{x - y} \quad (4.15)$$

Enfin, $x_{n\tilde{d}_L}$ est une notation condensée qui exprime le rapport $m_{\tilde{N}_n}^2 / m_{\tilde{d}_L}^2$.

Ce résultat diffère légèrement du résultat de [44] par un signe moins devant la fonction \mathbf{k} . L'influence numérique de ce signe est cependant minime devant la contribution numérique des charginos.

résultat final

Les diagrammes à boîte de la figure (A.2) donnent quant-à-eux :

$$\begin{aligned} (\tilde{N})_{nm}^{Box} &= x_{W\tilde{d}_L} \left[\mathbf{k}(x_{n\tilde{d}_L}, x_{m\tilde{d}_L}, x_{\tilde{\nu}_L\tilde{d}_L}, 1) W_n^T(d_L) W_n^*(\nu_L) W_m^T(\nu_L) W_m^*(d_L) \right. \\ &\quad \left. + 2\mathbf{j}(x_{n\tilde{d}_L}, x_{m\tilde{d}_L}, x_{\tilde{\nu}_L\tilde{d}_L}, 1) \sqrt{x_{n\tilde{d}_L} x_{m\tilde{d}_L}} W_n^T(d_L) W_n(\nu_L) W_m^\dagger(\nu_L) W_m^*(d_L) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Le résultat final de la contribution des neutralinos est donné par la somme de tous les termes :

$$\tilde{N} = \sum_{n,m=1..4} \left((\tilde{N})_{nm}^{Pen} + (\tilde{N})_{nm}^{Box} \right) \quad (4.17)$$

à multiplier par le paramètre R correspondant, $R_{s_L d_L}^D$.

4.1.5 Analyse numérique

La structure en saveur des modèles supersymétriques est inconnue et les paramètres R sont des quantités *a priori* complexes. Malheureusement, la valeur du taux de branchement est fortement influencée par ces paramètres de saveurs. Il est cependant possible d'obtenir des limites supérieures sur ceux-ci en utilisant différentes mesures expérimentales. Depuis les analyses de [44, 46, 48], la situation expérimentale n'a pas énormément changé. Il

n'y a pas de mise à jour réellement nécessaire, seules les futures expériences pourront améliorer de façon significative notre connaissance de ces quantités δ ou R . Nos limites obtenues à partir des données du PDG 2004, de m_t et des éléments CKM du chapitre 2 sont² :

$$\begin{aligned} R_{s_L d_L}^D &\prec (-105 - 56i) \frac{m_{\tilde{d}_L}}{500 \text{ GeV}} \\ R_{s_L d_L}^U &\prec (-105 - 56i) \frac{m_{\tilde{u}_L}}{500 \text{ GeV}} \\ |R_{s_L t_R}^U| &< \min\left(219 \left(\frac{m_{\tilde{u}_L}}{500 \text{ GeV}}\right)^3, 43\right) \\ |R_{t_R d_L}^U| &< 41 \left(\frac{m_{\tilde{u}_L}}{500 \text{ GeV}}\right)^2 \end{aligned}$$

Seules les valeurs centrales ont été prises en compte. Si on inclut les incertitudes sur les éléments CKM et sur m_t , alors ces limites sur les R deviennent légèrement plus élevées.

En faisant varier les paramètres du MSSM (masses, $\tan\beta$ etc.) dans les régions permises par les contraintes expérimentales, les auteurs de [44] ont trouvé pour r_K et θ_K les intervalles typiques (figures 4.3 et 4.4) :

$$0.5 < r_K < 1.3, \quad -25^\circ < \theta_K < 25^\circ. \quad (4.18)$$

Les paramètres entrants étaient :

- $\tan\beta$ entre 2 et 6
- μ entre -300 et 300 GeV
- M_2 entre 100 et 300 GeV
- $m_{\tilde{t}_R}$ entre 150 et 300 GeV
- $m_{\tilde{Q}_L}$ entre 200 et 500 GeV
- $m_{\tilde{L}_L}$ entre 100 et 300 GeV

Cette analyse n'est pas restreinte à un modèle particulier. Elle reste valide pour une extension supersymétrique générale du MS (conforme avec les hypothèses de la deuxième section de ce chapitre) qui permet de nouvelles sources de violation de la saveur et de CP (donc au-delà du CMSSM/mSUGRA dans lesquels les termes de brisure douce sont universels et dont les contributions sont proportionnelles aux angles CKM). Il faut cependant savoir que ces intervalles sur r_K et θ_K ne sont pas exclusifs, ils indiquent seulement les valeurs les plus probables. Notre propre analyse à partir de données plus récentes

2. Pour les deux premières limites, le signe " \prec " signifie que la limite supérieure de la partie réelle (resp. la partie imaginaire) des paramètres R est la partie réelle (resp. la partie imaginaire) du second membre.

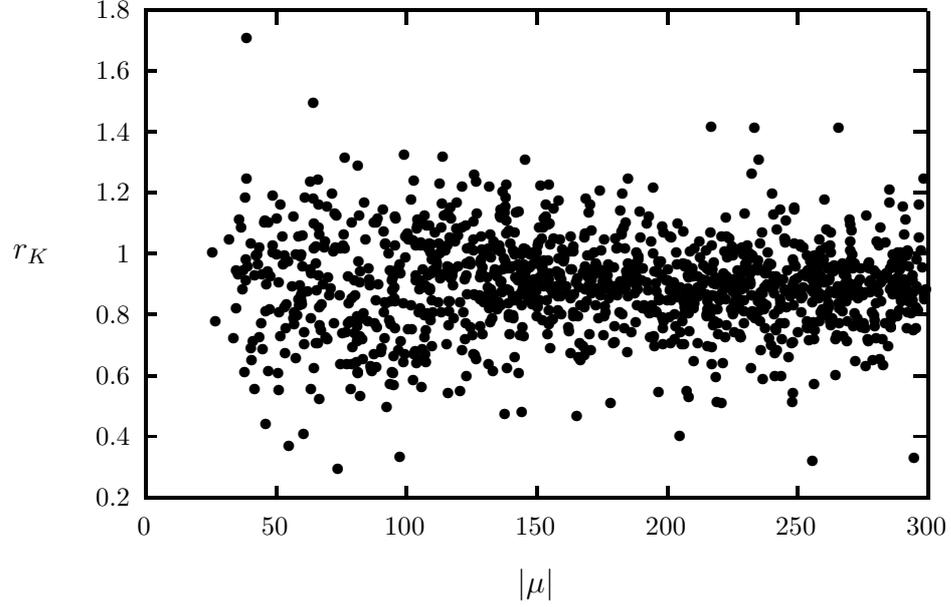


FIG. 4.3 – Valeurs possibles de r_K obtenues en faisant varier les paramètres R de 0 à leur limite supérieure, en fonction de $|\mu|$.

reste en accord avec ces intervalles, tout en les rendant plus probables. Sur un certain nombre de points, nous avons comparé la valeur avec les anciens paramètres et nos paramètres mis à jour et nous avons constaté que les r_K et θ_K étaient globalement plus faibles dans le second cas.

Ensuite, variant r_K et θ_K à l'intérieur de ces intervalles, nous pouvons prédire le taux de branchement dans le MSSM de $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$. Nous obtenons :

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu})^{MSSM} = (8,18^{+4,26}_{-5,23}) \times 10^{-11}. \quad (4.19)$$

c'est-à-dire une variation d'environ 50% de la valeur centrale du taux de branchement dans le MS. En permettant des intervalles plus large, quoique moins probables, nous pouvons obtenir un taux de branchement de $K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}$ de $1,55 \times 10^{-10}$ (avec $r_K = 1,5$ et $\theta_K = -30^\circ$). Ainsi, les contributions du MSSM pourraient suffire à obtenir la valeur centrale expérimentale, sans que l'on ait besoin d'introduire de violation de la R -parité. Mais il faut bien sûr garder en mémoire que le taux de branchement (4.19) n'est qu'une estimation. La valeur précise des contributions supersymétriques nous reste inconnue. De plus, nous n'avons pas réellement effectué une analyse systématique en incluant par exemple les erreurs sur les éléments de matrice CKM. Cependant, les résultats précédents nous montrent que les corrections dues aux particules supersymétriques peuvent être du même ordre de grandeur que celles

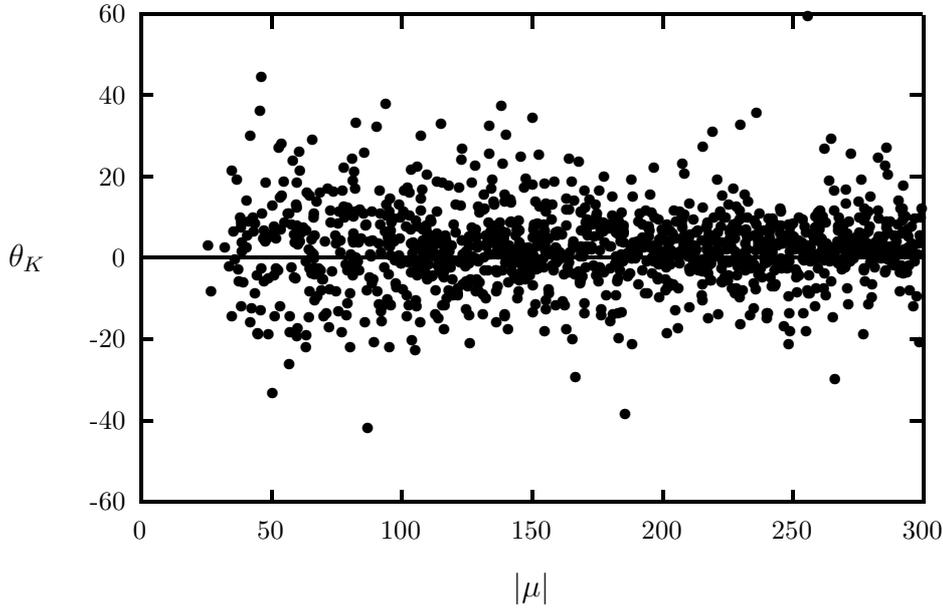


FIG. 4.4 – Valeurs possibles de θ_K (en degrés) obtenues en faisant varier les paramètres R de 0 à leur limite supérieure, en fonction de $|\mu|$.

du MS^3 . Ainsi, il paraît aussi nécessaire de les prendre en compte dans une analyse où l'on cherche à obtenir des contraintes sur les couplages violant la R -parité.

4.2 Contribution violant la R -parité, contraintes

4.2.1 Taux de branchement total

Dans cette section, nous allons introduire les contributions supplémentaires au processus $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ venant des termes brisant la symétrie de R -parité. Ainsi, en utilisant la valeur expérimentale du taux de branchement, nous allons pouvoir en déduire des contraintes sur les couplages des interactions violant la R -parité (les λ'_{ijk}). Les termes supplémentaires introduits dans le superpotentiel (3.66) donnent lieu à des nouveaux termes d'interaction entre particules et sparticules. Ces termes induisent une contribution au niveau de l'arbre à $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ par échange d'un squark.

$$\mathcal{L} \supset \dots - \lambda'_{ijk} (\tilde{d}_{kR}^c \bar{\nu}^c_i d_{jL} + \tilde{d}_{jL} \bar{\nu}_i d_{kL}) + \dots \quad (4.20)$$

3. Il est aussi tout à fait possible qu'il y ait des interférences destructives entre les contributions du MS et celles venant des nouvelles particules. La valeur dans le $MSSM$ serait alors plus basse que dans le MS , comme on le voit dans le résultat (4.19).

Les diagrammes correspondant sont donnés dans la figure (4.5)

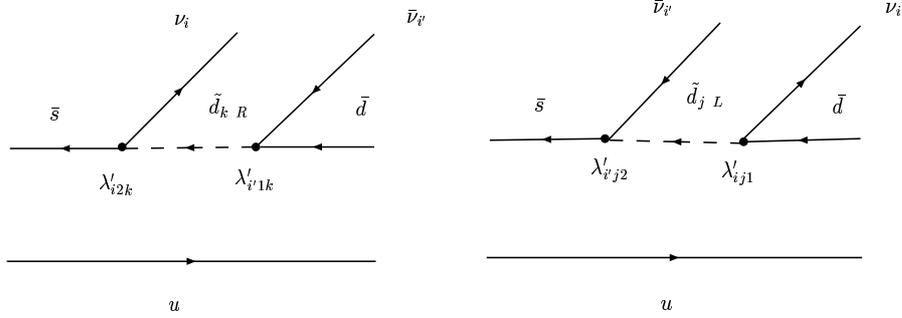


FIG. 4.5 – Diagrammes des contributions violant la R -parité au processus $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$.

Les λ'_{ijk} seront définis dans la base "super-CKM" discutée au chapitre 3. En incluant ces nouvelles contributions à l'analyse précédente, le taux de branchement pour la désintégration rare $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ s'écrit :

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}) = \frac{\bar{\kappa}_+}{3\lambda^2} \left(\sum_l |Z_{ds}^l + \frac{\epsilon_{ll}}{4\Delta (200 \text{ GeV})^2}|^2 + \sum_{m \neq l} \frac{|\epsilon_{ml}|^2}{16\Delta^2 (200 \text{ GeV})^4} \right) \quad (4.21)$$

où la somme est à faire sur les saveurs des ν et $\bar{\nu}$, et Δ est un facteur numérique donné par:

$$\Delta = \frac{G_f \alpha(m_Z)}{\sqrt{2}\pi \sin^2(\theta_w)} = 8,88 \times 10^{-8} \text{ GeV}^{-2} \quad (4.22)$$

L'erreur expérimentale sur Δ est inférieure au pourcent donc négligeable en comparaison de celles sur les autres facteurs (comme $\bar{\kappa}_+$).

Les couplages violant la R -parité sont contenus dans les ϵ_{ij} définis comme suit:

$$\epsilon_{ij} = \sum_n \left(\frac{\lambda'_{i2n} \lambda'_{j1n}}{m_{\tilde{d}_{nR}}^2} - \frac{\lambda'_{in1} \lambda'_{jn2}}{m_{\tilde{d}_{nL}}^2} \right) (200 \text{ GeV})^2. \quad (4.23)$$

La référence de 200 GeV a été choisie pour la masse typique d'un squark. Les λ'_{ijk} sont *a priori* complexes, les phases des ϵ_{ij} nous sont inconnues.

Nous pouvons remarquer que contrairement au MS ou au MSSM, les contributions violant la R -parité peuvent conduire à un neutrino et un anti-neutrino de saveur différente (dernier terme de 4.21). Ceci est attendu compte tenu de la violation du nombre leptonique que nous avons maintenant permis. Dans le cas où les états finals du neutrino et de l'anti-neutrino ont la

même saveur, il y a interférence avec les contributions MSSM (premier terme de 4.21). Expérimentalement, la saveur des neutrinos et anti-neutrinos n'est pas mesurée, en principe il faut donc prendre toutes les contributions.

4.2.2 Analyse et contraintes

Nous allons maintenant contraindre les couplages λ'_{ijk} intervenant dans le processus $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$. Il ne sera pas possible d'établir des limites pour chacun de ces 27 λ' , mais en faisant des hypothèses raisonnables, il sera possible de contraindre certaines combinaisons. Nous procéderons à une analyse en 3 étapes.

Ordre de grandeur des λ'_{ijk}

Tout d'abord, nous allons mettre de côté toutes les contributions qui conservent R_p et que nous avons étudiées auparavant. Ceci, dans le but d'estimer grossièrement l'ordre de grandeur des couplages λ'_{ijk} . Le taux de branchement résultant des seules contributions à l'arbre violant la R -parité est:

$$Br^{R_p} = \frac{\bar{K}_+}{48\lambda^2 \Delta^2 (200 \text{ GeV})^4} \sum_{i,j} |\epsilon_{ij}|^2 . \quad (4.24)$$

En comparant directement avec la valeur centrale expérimentale (2.23), il est possible d'en tirer une limite supérieure sur la somme des ϵ_{ij} :

$$\sum_{i,j} |\epsilon_{ij}|^2 < 5,6 \times 10^{-10} . \quad (4.25)$$

Cette valeur correspond à des masses de squarks en unité de 200 GeV. En mettant la référence des masses de squark à 100 GeV, nous avons plutôt:

$$\sum_{i,j} |\epsilon_{ij}|^2 < 0,4 \times 10^{-10} . \quad (4.26)$$

Cette limite est inférieure d'au moins un ordre de grandeur aux limites supérieures obtenues jusqu'alors: $2,3 \times 10^{-9}$ [49] et plus récemment $2,3 \times 10^{-10}$ [41]. Ceci montre à quel point les données sur $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ se sont améliorées depuis et montre que ces λ'_{ijk} sont petits, $\mathcal{O}(10^{-2} - 10^{-3})$. Il est donc justifié d'inclure aussi les contributions à une boucle du MSSM, mais pas la contribution à une boucle des interactions violant la R -parité.

Interférences nulles

Puisque l'apport de notre travail est d'ajouter les contributions du MSSM à ces contributions à l'arbre, voyons ce que deviennent les limites supérieures. Ce sont des limites supérieures que nous cherchons à obtenir, nous allons donc prendre le cas où la contribution du MSSM (incluant le MS comme sous-ensemble) est minimale. Ceci correspond à peu près à $r_K = 0,5$ et $\theta_K = 25^\circ$. Ainsi, nous laissons un maximum de place aux contributions violant la R -parité. Pour simplifier un peu la discussion avant de passer à l'analyse complète, nous allons mettre de côté les interférences. La limite supérieure précédente (4.25) (évaluée sans le MSSM) peut être légèrement améliorée :

$$\sum_{i,j} |\epsilon_{ij}|^2 < 4,5 \times 10^{-10} . \quad (4.27)$$

Cette limite peut être transformée en limite sur le produit de 2 couplages λ' , en mettant naïvement tous les couplages à zéro sauf un seul produit (voir le chapitre 3 et la discussion concernant l'hypothèse de produit dominant) :

$$\left| \frac{\lambda'_{i2n} \lambda'_{j1n}}{m_{\tilde{d}n_R}^2} \right| < 2,1 \times 10^{-5} \quad (4.28)$$

$$\left| \frac{\lambda'_{in1} \lambda'_{jn2}}{m_{\tilde{d}n_L}^2} \right| < 2,1 \times 10^{-5} \quad (4.29)$$

Les masses de squarks sont toujours en unités de 200 GeV.

Analyse globale, interférences non nulles

Bien sur, des contraintes réalistes doivent s'obtenir en prenant en compte la possibilité d'interférences entre contributions conservant R_p et contributions violant R_p . Cependant, cela rend l'extraction de limite beaucoup plus délicate. Nous allons nous placer dans le cas où les neutrinos/antineutrinos sont dans le même état de saveur final, $\epsilon_{ij} = 0$ si $i \neq j$.⁴ L'équation générale vérifiée par les ϵ_{ii} peut s'écrire sous la forme:

$$\sum_{i=e,\mu,\tau} \left(Re(\epsilon_{ii}) + \frac{\alpha_i}{2} \right)^2 + \sum_{i=e,\mu,\tau} \left(Im(\epsilon_{ii}) + \frac{\beta}{2} \right)^2 \leq R^2 , \quad (4.30)$$

Pour un ϵ_{ii} donné (en supposant tous les autres nuls), cette équation décrit un disque dans le plan complexe. Les valeurs des paramètres sont explicitées

4. La violation de la saveur leptonique est fortement contrainte, et pour simplifier l'extraction des limites, nous négligeons donc la contribution du cas $\epsilon_{ij} \neq 0$ si $i \neq j$.

dans le tableau suivant, dans le cas d'interférences avec le MS ($r_K = 1$ et $\theta_K = 0$, première ligne du tableau) où avec le MSSM (cas 'minimal', $r_K = 0.5$ et $\theta_K = 25^\circ$, deuxième ligne):

α_i	c_e, c_μ	c_τ	β	R^2
$c_i (2,0 \times 10^{-5})$	1	0,9	$5,8 \times 10^{-6}$	$(1,9 \times 10^{-5})^2$
$c_i (1,2 \times 10^{-5})$	1	0,81	$5,5 \times 10^{-6}$	$(2,2 \times 10^{-5})^2$

Les paramètres α et β dépendent des données CKM et des fonctions à boucle X_t (X_{new}) et X_c^l . Les c_i sont les corrections à α dues à la dépendance implicite aux masses leptoniques m_i . Et enfin, le rayon R contient le terme

$$\frac{48\lambda^2 \Delta^2}{\bar{\kappa}_+ (200 \text{ GeV})^{-4}} (Br^{exp} - Br^{th})$$

ainsi que α, β . Le détail est donné en annexe.

Dans le cas de ϵ_{11} , la figure (4.6) nous montre les contraintes résultantes sur la partie réelle et imaginaire. Les contraintes sur ϵ_{22} et ϵ_{33} s'obtiennent de la même manière et sont similaires.

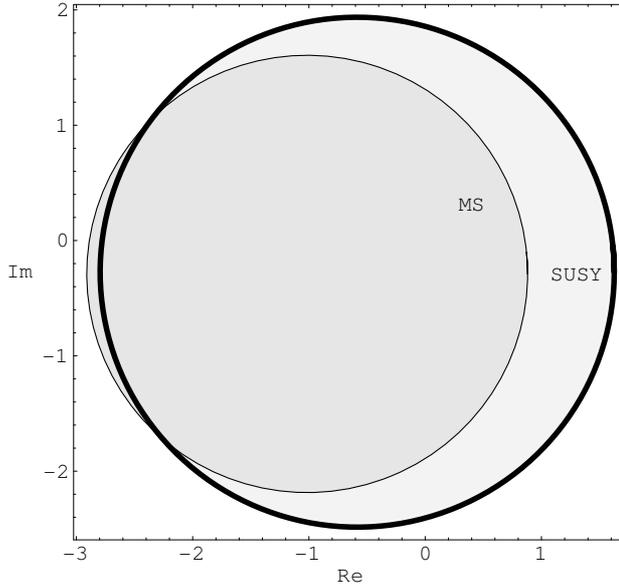


FIG. 4.6 – L'intérieur du disque est la région permise (dans le MS ou dans le MSSM) pour $Re(\epsilon_{11})$ et $Im(\epsilon_{11})$, en unité de 10^{-5} et pour une masse référence des squarks à 200 GeV.

Pour avoir une idée plus précise de l'influence des interférences par rapport au cas précédent, nous pouvons choisir le point de coordonnées ($Re(\epsilon_{11})=-2$,

$\text{Im}(\epsilon_{11})=-2$) qui donne à peu près la valeur maximale de $|\epsilon_{11}|$. Il donne :

$$|\epsilon_{11}| = 2,8 \times 10^{-5}$$

On peut déduire, de la même manière que précédemment, des limites sur des produits de couplages violant la R -parité⁵:

$$\left| \frac{\lambda'_{i2n} \lambda'_{i1n}}{m_{\tilde{d}_{nR}}^2} \right| < 2,8 \times 10^{-5} \quad (4.31)$$

$$\left| \frac{\lambda'_{in1} \lambda'_{in2}}{m_{\tilde{d}_{nL}}^2} \right| < 2,8 \times 10^{-5} \quad (4.32)$$

Ces limites sont 30% plus grandes que les limites (4.28), (4.29). Ceci montre clairement que les interférences ont une influence réellement significative.

L'influence de la masse référence des squarks bas sur les limites précédentes est montrée sur la figure (4.7). Des squarks bas de l'ordre de 400 GeV par exemple donnent à peu près une limite supérieure de l'ordre de 10^{-4} sur les produits $|\lambda'_{i2n} \lambda'_{i1n}|$ et $|\lambda'_{in1} \lambda'_{in2}|$.

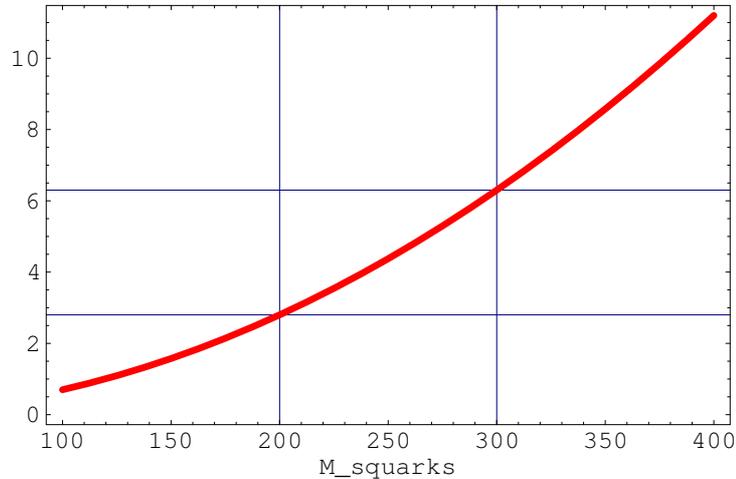


FIG. 4.7 – Valeur en unité de 10^{-5} de la limite supérieure sur $|\lambda'_{i2n} \lambda'_{i1n}|$ et $|\lambda'_{in1} \lambda'_{in2}|$ en fonction de la masse typique des squarks bas.

⁵. Le cas $i=\tau$ donne des limites légèrement plus basses à cause du facteur correctif $c_\tau = 0,81$, mais les limites (4.31), (4.32) peuvent être utilisées pour les 3 saveurs.

Chapitre 5

Conclusions de la première partie

Dans cette partie, nous avons étudié la désintégration rare $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ pour les informations qu'elle procure sur la physique de la saveur dans le Modèle Standard et au-delà. C'est en effet une désintégration sensible à la physique de courte-distance, elle permet de sonder la physique à des énergies plus grandes que celles accessibles expérimentalement auprès des collisionneurs.

Dans le cadre particulier des modèles supersymétriques minimaux sans la symétrie de R -parité, nous avons déterminé les limites supérieures des nouveaux couplages intervenants dans le processus. Pour aller plus loin que les analyses précédentes sur cette désintégration, nous avons inclu les contributions à une boucle et les interférences possibles avec la partie qui ne conserve pas la R -parité. L'analyse est rendue difficile par le nombre de paramètres inconnus ainsi que par l'extraction des couplages. Cependant, on peut conclure que les interférences entre ces deux parties sont importantes et réhaussent la limite supérieure sur les produits de couplages des interactions violant la R -parité, par rapport au cas où elles sont ignorées. C'est le résultat principal de cette partie plus que la valeur elle-même de la limite qui est elle susceptible de varier en fonction de l'amélioration des données expérimentales. Cependant, nous avons mis à jour les paramètres et les prédictions importantes pour ces limites. En particulier, nous avons pris en compte certaines mesures de la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$ qui n'avaient pas été incluses dans d'autres travaux de l'époque.

Les limites ont été obtenues avec les valeurs centrales des mesures expérimentales des éléments de la matrice CKM, des masses de quarks et du taux de branchement de $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$. L'analyse a été effectuée avec les paramètres supersymétriques minimisant la contribution globale conservant la R -parité. Pour ces raisons, la limite obtenue n'est pas une limite supérieure absolue, seulement une estimation raisonnable. Nous pourrions alors amé-

liorer nos résultats en prenant en compte les erreurs expérimentales et en réalisant l'analyse avec des paramètres supersymétriques étendus.

La désintégration voisine $K_L^0 \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$ partageant les mêmes attraits n'a cependant pas pu être utilisée pour obtenir des contraintes similaires car elle n'a pas encore été observée et les limites supérieures expérimentales sont encore loin de la prédiction théorique dans le MS.

Deuxième partie

Effets à une boucle des dimensions supplémentaires

Chapitre 1

Introduction : *la physique des dimensions supplémentaires*

Les premières idées concernant la physique des dimensions supplémentaires datent des travaux de Kaluza et Klein (KK) aux alentours de 1920 [50] dans lesquels on retrouve une tentative d'unifier l'électromagnétisme de Maxwell et la gravitation d'Einstein. Ceux-ci proposèrent une théorie avec une cinquième dimension compacte (repliée sur elle-même et non pas infinie comme les 4 autres). Le photon était alors généré par la 5ème composante de la métrique de l'espace-temps.¹ Ainsi, l'électromagnétisme pouvait se décrire géométriquement comme la gravitation.

Depuis, il y a eu diverses tentatives d'unification de la gravitation et des interactions forte et électrofaible dans une théorie quantique consistante. Parmi ces théories, il y a notamment les théories des (super)cordes. Celles-ci décrivent les particules observées comme des modes d'excitation de cordes très petites mais de taille finie², vivant dans un espace-temps à 10 ou 11 dimensions. De plus ces théories ont la particularité d'inclure la supersymétrie comme ingrédient nécessaire pour des raisons de stabilité³. Pendant un temps, il était conventionnel de supposer que les dimensions supplémentaires étaient très petites, de l'ordre de la longueur de Planck, $l_{Pl} \sim 10^{-33}$ cm $\sim 10^{-19}$ GeV⁻¹.

Depuis un peu moins de 10 ans, il a été réalisé que des dimensions supplémentaires beaucoup plus grandes pouvaient être permises sans qu'il y ait de conflits avec l'expérience. Ainsi, une dimension supplémentaire très grande

1. Le graviton à 5D g_{MN} se décompose en un graviton à 4D $g_{\mu\nu}$, un boson vecteur $g_{\mu 5}$ et un scalaire g_{55} .

2. Dans l'approche des théories de cordes, les objets sont finis et l'espace est continu. Dans d'autres théories de gravitation quantique, c'est l'espace lui-même que l'on discrétise.

3. La supersymétrie permet d'éliminer les modes tachyoniques.

de taille $R \sim 1 \text{ TeV}^{-1}$ pourrait tout à fait être découverte aux collisionneurs tels que le LHC. Dès lors, il y a eu une activité considérable dans l'étude de modèles qui incorporent des nouvelles dimensions spatiales. De plus, ces modèles apportent de nouvelles perspectives d'étude des énigmes actuelles de la physique des particules telles que : le problème de la hiérarchie de jauge, la physique de la saveur et du neutrino, la matière noire etc.

L'attrait pour les théories extra-dimensionnelles vient de la richesse dans la construction de modèles qui permettent de générer des phénoménologies très différentes les unes des autres [51].

La suite de cette seconde partie comporte 3 chapitres.

- Dans le premier, nous allons aborder les rudiments des modèles avec des dimensions supplémentaires. Nous commencerons par étudier l'effet de la compactification sur les champs et le spectre de masse à 4 dimensions. Puis nous introduirons la notion d'orbifold, très importante pour la construction de modèles réalistes (c'est-à-dire incluant des fermions chiraux).

- Un des effets les plus importants des théories quantiques des champs est la dépendance des quantités physiques en l'échelle d'impulsion. Cet effet a été observé expérimentalement dans le cas du couplage de l'interaction forte mais concerne tous les paramètres d'une théorie donnée. Par ailleurs, l'extrapolation à haute énergie des constantes de couplage des 3 interactions forte, faible et électromagnétique montre la possibilité d'une grande unification des interactions [52]. En 1998 [53], les corrections quantiques aux couplages de jauge dans un contexte extra-dimensionnel ont été calculées et un comportement en loi de puissance, et non plus logarithmique, a été mis en évidence. Dans la première moitié du second chapitre nous introduirons le principe de la renormalisation et des théories effectives. La seconde moitié nous nous concentrerons alors sur les différentes régularisations possibles. Nous donnerons les résultats du calcul de la polarisation du photon dans une régularisation par *cut-off* invariante de jauge. Ce chapitre se termine sur une discussion autour de l'unification des couplages de jauge en loi de puissance.

- Le mélange observé dans le secteur des neutrinos et sa différence avec le secteur des quarks (mélange faible, masses hiérarchiques) est une invitation à une étude des corrections quantiques aux masses et angles de mélange des neutrinos. Le comportement typique en loi de puissance peut apporter un regard nouveau sur l'origine de la structure du secteur des neutrinos. Dans le dernier chapitre, nous présentons les résultats concernant de calcul de ces corrections quantiques à une boucle dans un modèle supersymétrique à 5 dimensions. Leur utilisation permet l'analyse des paramètres du secteur des neutrinos à basse et haute énergie dont nous présenterons les résultats les plus immédiats.

Chapitre 2

Interlude: modèles avec dimensions supplémentaires

2.1 Dimension supplémentaire compacte

2.1.1 Dimension spatiale ou temporelle?

Tout d'abord, il nous faut préciser de quel type de dimensions supplémentaires nous parlons. A D dimensions, si on suppose que notre théorie respecte la symétrie de Lorentz à D dimensions, on a la relation de dispersion pour l'impulsion à D dimensions (pour une particule de masse nulle):

$$P^2 = 0 = g_{MN}P^M P^N, \quad (2.1)$$

Si on décompose la relation précédente en prenant une métrique plate de la forme (choisissons le cas d'une seule dimension supplémentaire)

$g_{MN} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, \pm 1)$, alors

$$P^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 \pm p_5^2 \quad (2.2)$$

c'est à dire que $p_\mu p^\mu = \mp p_5^2$. Si la dimension supplémentaire est choisie du type temporelle, alors du point de vue quadridimensionnel, nous avons une particule massive de masse $m^2 = -p_5^2$. La particule est ce que l'on appelle un *tachyon* et pose de sérieux problèmes de causalité.

En général, nous prendrons des dimensions supplémentaires uniquement **spatiales**.

2.1.2 Théorie des champs scalaires

Prenons l'exemple d'une théorie des champs scalaire à $(4 + d)$ dimensions, avec un seul champ scalaire $\Phi(x^M)$ où $M = \underbrace{0,1,2,3}_\mu; \underbrace{5,6,\dots,4+d}_d$. Les coordonnées supplémentaires sont appelées y^d plutôt que x^d . L'action décrivant une telle théorie est alors définie en terme d'une densité lagrangienne de dimension $(4 + d)$,

$$S = \int d^M x \mathcal{L}_D(x^M) = \int dx^\mu dy^d \mathcal{L}_D(x^\mu, y^d) \quad (2.3)$$

avec

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} \partial_M \Phi^\dagger \partial^M \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^\dagger \Phi. \quad (2.4)$$

La dimension du champ Φ est $[\Phi] = [m]^{1+d/2}$, ce qui a une importante conséquence pour la renormalisabilité de la théorie extra-dimensionnelle. En effet, à cause du changement de dimensionalité de Φ , la plupart des termes d'interaction du lagrangien (en dehors du terme de masse) auront des couplages avec une dimension. Par exemple le terme d'interaction à 4 champs, renormalisable à 4D, aura un couplage λ de dimension $[m]^{-2d}$ rendant l'interaction non-renormalisable.

Lorsque les dimensions supplémentaires sont compactes, comme c'est le cas dans tous les exemples que nous prendrons, on peut décomposer le champ Φ en série de Fourier (il y a une périodicité des dimensions supplémentaires)

$$\Phi(x^\mu, y^d) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_d=-\infty}^{+\infty} \phi^{(n)}(x^\mu) \exp(in.y/R) \quad (2.5)$$

avec $n = (n_1, n_2, \dots, n_d) \in Z^d$ et les rayons R sont identiques pour les d dimensions. Simplifions l'exemple pour avoir des expressions moins lourdes et prenons le cas d'une seule dimension supplémentaire compacte. Topologiquement, cette dimension est circulaire, de périodicité $2\pi R$, et on appelle l'espace de cette dimension " S^1 " (la sphère unidimensionnelle). On a

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_{n \in Z} \phi^{(n)}(x^\mu) e^{iny/R} \quad (2.6)$$

Les $\phi^{(n)}(x^\mu)$ sont les modes d'excitation de Fourier du champ et on les appelle les "*modes de Kaluza-Klein*". L'impulsion dans la 5ème dimension est alors discrète¹ et vaut $p_5 = \frac{n}{R}$. Le champ $\Phi(x^\mu, y)$ se décompose donc en une infinité de champs $\phi^{(n)}(x^\mu)$ à quatre dimensions (ils ne dépendent que de x^μ).

1. comme un champ classique dans une boîte où les fréquences sont discrètes ou encore une fonction d'onde dans un puit de potentiel carré

Pour identifier la limite de basse énergie de la théorie, nous pouvons effectuer la réduction dimensionnelle de notre théorie à 5d en l'écrivant comme une théorie effective à 4d uniquement fonction des modes $\phi^{(n)}$. Nous intégrons donc l'action (2.3) sur la 5ème dimension :

$$S = \int d^4x \int dy \mathcal{L}_{5D}(x^\mu, y) = \int d^4x \mathcal{L}_{eff4D}(x^\mu) \quad (2.7)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff4D}(x^\mu) &= \int dy \mathcal{L}_{5D}(x^\mu, y) \\ &= \sum_{n \in Z} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^{(n)})^\dagger (\partial^\mu \phi^{(n)}) - \frac{1}{2} \underbrace{\left(m^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)}_{m_n^2} \phi^{(n)\dagger} \phi^{(n)} \\ &= \sum_{n \in Z} \mathcal{L}_{4D}^{(n)}(x^\mu) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nous obtenons une somme infinie de lagrangiens de champs scalaires décrivant un mode de Kaluza-Klein du champ initial $\Phi(x^M)$. Dans les applications phénoménologiques, il est équivalent et très utile de travailler avec cette dernière forme. On peut échanger notre théorie initiale, à 5 dimensions, contre une théorie à 4d d'une infinité de champs aux propriétés identiques (même nombres quantiques) mais aux masses de plus en plus élevées, $m_n^2 = m_0^2 + \frac{n^2}{R^2}$. Le mode $\phi^{(0)}$ est le mode fondamental de masse m_0 et est indépendant de R .

Quand R^{-1} est très grand devant m_0 , alors à basse énergie ($E = \mathcal{O}(m_0)$) il apparaît uniquement ce mode fondamental et notre monde est approximativement quadri-dimensionnel. Le mode fondamental sera le seul mode cinématiquement accessible, aucun autre mode ne pourra être excité ou produit. L'appréciation de l'impact des excitations de Kaluza-Klein dépend ainsi de l'énergie accessible expérimentalement et de l'échelle de compactification $1/R$. Si on applique cette remarque à notre connaissance de la physique des particules, on pourrait par exemple dire que notre Modèle Standard et son contenu en particule seraient une description de basse énergie d'une théorie plus fondamentale à (4+d) dimensions. La taille des dimensions supplémentaires seraient suffisamment petites pour qu'aucun signe expérimental n'ait pu être déjà observé. Cette possibilité ouvre d'importantes "portes" à la physique au-delà du MS pour résoudre des problèmes qui n'ont pas eu de réponse satisfaisantes jusqu'alors dans un contexte quadri-dimensionnel.

En résumant, *un champ (une particule) qui se propage aussi dans une dimension supplémentaire compacte de rayon R est équivalent à une "tour"*

infinie d'états (de modes) de Kaluza-Klein, de masses $m_n^2 = m_0^2 + \frac{n^2}{R^2}$. Ceci s'applique pour chaque dimension supplémentaire accessible au champ. La figure (2.1) schématise la tour des états de KK.

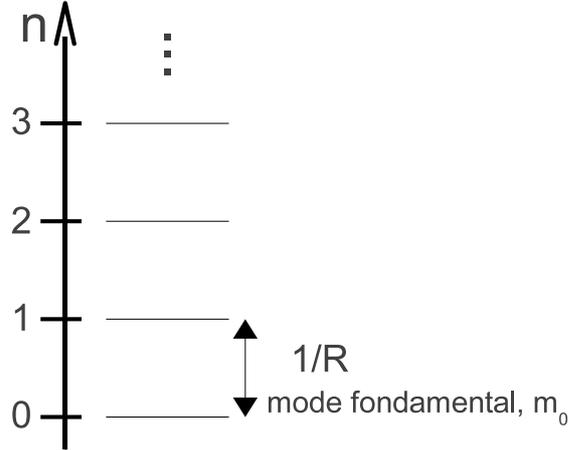


FIG. 2.1 – Spectre des états de Kaluza-Klein d'un champ qui se propage dans une cinquième dimension circulaire de rayon R .

Ces modes de Kaluza-Klein interviennent dans les calculs des corrections quantiques, par exemple dans les couplages de jauge, *via* la production virtuelle dans les boucles.

2.2 Orbifold

2.2.1 Fermions chiraux

La construction précédente pose cependant quelques problèmes phénoménologiques lorsqu'elle est appliquée aux fermions. Une théorie à D dimensions où D est impair ne permet pas d'obtenir des fermions chiraux. En effet, à 4d dimensions, la chiralité est obtenue par projection en utilisant la matrice γ^5 . À 5d (les conclusions sont les mêmes dans le cas d'un nombre impair de dimension), l'équation de Dirac s'écrit

$$(i\Gamma^M \partial_M - m)\psi(x^M) = 0 \quad (2.9)$$

et $\Gamma^M = (\gamma^\mu, \gamma^5)$. La matrice γ^5 est incluse parmi les matrices de Dirac (on dit qu'elle fait partie de l'algèbre de Clifford). Or, il n'y a pas d'autres matrices γ avec les mêmes propriétés jouées par γ^5 à 4d, c'est-à-dire à la fois

l'anticommutation avec toutes les matrices de Dirac γ^μ et $(\gamma)^2 = 1$. On ne peut donc plus définir de chiralité et le spineur de Dirac à 4 composantes est la représentation fondamentale des fermions. En conséquence, après réduction dimensionnelle, la théorie à 4d contient des fermions gauches et droits avec les mêmes interactions (théorie "vector-like", comme la QED ou la QCD) ce qui pose problème pour les interactions faibles. Dit d'une autre façon, un fermion chiral, c'est à dire tel que² $\gamma^5\psi = \pm\psi$, n'est pas solution de l'équation de Dirac à 5d.

Dans le cas d'un nombre total pair de dimensions, on peut construire l'équivalent de la matrice γ^5 , définir des opérateurs de projection et donc obtenir des fermions chiraux. Après réduction à 4d cependant, la propriété de chiralité est perdue.

Cependant, on peut toujours introduire une autre contrainte extérieure sur les fermions en se basant sur la géométrie des dimensions supplémentaires (les conditions aux bords) pour qu'au moins les modes zéro soient chiraux.

2.2.2 Parité Z_2

Nous pouvons ajouter à notre théorie la symétrie $y \rightarrow -y$ c'est-à-dire une parité Z_2 . Nous resterons dans l'exemple d'une seule extra-dimension puisque c'est la cas qui est étudié dans cette thèse. Dans ce cas, on dit que l'on compactifie sur un *orbifold* S^1/Z_2 . Il y a une identification des points comme illustré dans la figure (2.2). La physique est équivalente (l'action est invariante) des 2 côtés et l'intervalle pertinent est $[0, \pi R]$.

champs scalaires

La condition imposée sur les champs (scalaires dans un premier temps) est alors³: $\Phi(-y) = \pm\Phi(y)$. D'après la section précédente, une dimension supplémentaire compactifiée sur un cercle S^1 permettait de décomposer un champ en une somme infinie de modes :

$$\Phi(x^\mu, y) = \phi^{(0)} + \sum_{n \in Z^*} \phi_+^{(n)}(x^\mu) \cos(ny/R) + \sum_{n \in Z^*} \phi_-^{(n)}(x^\mu) \sin(ny/R) \quad (2.10)$$

2. cette condition est équivalente à $\psi_{L,R} = (1 \mp \gamma^5)\psi_{L,R}/2$

3. D'une façon générale, $\Phi(x, \tau(y)) = T\Phi(x, y)$ où les $\tau(y)$ sont les points fixes ($y = \tau(y)$) et où $T \subset G$, groupe d'une symétrie globale. Cette condition générale correspond à une compactification à la Scherk et Schwarz.

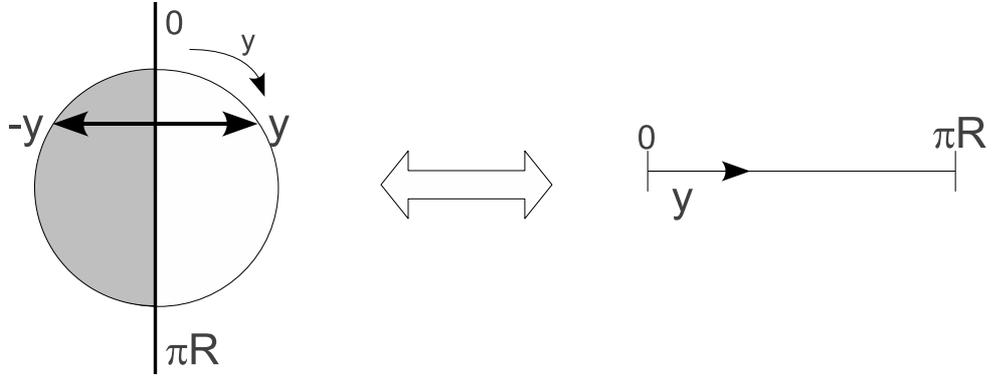


FIG. 2.2 – Identification des points $y \rightarrow -y$ lors de la compactification sur un orbifold S^1/Z_2 .

Un champ pair sous l'opération de parité, $\Phi_+(-y) = +\Phi_+(y)$, s'écrira alors

$$\Phi_+(x^\mu, y) = \phi^{(0)} + \sum_{n>0} \phi_+^{(n)}(x^\mu) \cos(ny/R) \quad (2.11)$$

et un champ impair, $\Phi_-(-y) = -\Phi_-(y)$:

$$\Phi_-(x^\mu, y) = \sum_{n>0} \phi_-^{(n)}(x^\mu) \sin(ny/R). \quad (2.12)$$

L'opération de parité permet de projeter les deux états, et seul le champ pair possède un mode fondamental, figure (2.3).

champs fermioniques

Pour les fermions, si on impose

$$\Psi(-y) = \pm \gamma^5 \Psi(y), \quad (2.13)$$

un champ fermionique général s'écrit alors (si on prend le signe +) :

$$\Psi(x^\mu, y) = \psi_L^{(0)}(x^\mu) + \sum_{n \geq 1} \psi_L^{(n)}(x^\mu) \cos(ny/R) + \sum_{n \geq 1} \psi_R^{(n)}(x^\mu) \sin(ny/R) \quad (2.14)$$

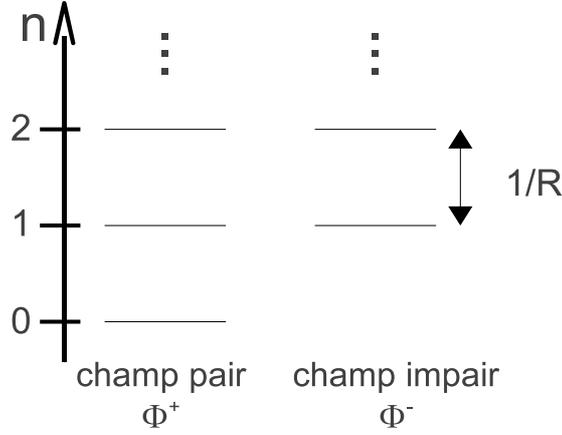


FIG. 2.3 – Tour des états de Kaluza-Klein d'un champ pair et d'un champ impair sous l'opération de parité de l'orbifold.

On observe que le mode fondamental est chiral⁴ et que les modes pairs sous $y \rightarrow -y$ ont la même chiralité. Du lagrangien de Dirac à 5D⁵,

$$\mathcal{L}_{fermions}^5 = i\bar{\Psi}\Gamma^M\partial_M\Psi, \quad (2.15)$$

on obtient par la réduction dimensionnelle le lagrangien effectif à 4 dimensions :

$$\mathcal{L}_{fermions}^{eff4D} = i\bar{\psi}_L^{(0)}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L^{(0)} + \sum_{n>0}\bar{\psi}_D^{(n)}[i\gamma^\mu\partial_\mu]\psi_D^{(n)} + \left(\frac{n}{R}\bar{\psi}_L^{(n)}\psi_R^{(n)} + h.c\right) \quad (2.16)$$

Nous obtenons donc **un mode zéro chiral** ainsi qu'une **tour infinie de modes massifs de type Dirac** ($\psi_D = \psi_L + \psi_R$).

2.2.3 Localisation : bulk et brane

Un orbifold implique l'existence de ce que l'on appelle des *points fixes*, sous-espaces invariants sous la (les) opération(s) de parité. Dans S^1/Z_2 , on a 2 points fixes : les points $y = 0$ et $y = \pi R$. Sur ces points (ou sous-espaces, appelés "*branes*", diminutif de membrane), on peut localiser (fixer) des champs qui n'ont alors pas d'excitation de KK (ils restent à 4 dimensions).

4. $\gamma^5\psi_L^0 = -\psi_L^0$

5. Il n'y a pas de terme de masse car il n'est pas permis dans un orbifold à cause de la parité. Pour donner une masse aux fermions à 4d, les modes zéro, on introduit une interaction de type Yukawa.

Le *bulk* est l'espace-temps entier. Une particule est dite "dans le bulk" si elle est capable de se propager aussi dans toutes les dimensions supplémentaires.

Sur les branes on peut aussi localiser des interactions. Par exemple, tout le MS pourrait être sur une brane (particules et interactions) et l'effet d'une dimension supplémentaire pourrait être ressentie uniquement par la gravitation (graviton et interaction dans le bulk), comme dans le scénario des dimensions supplémentaires de grande taille [54]. À noter aussi que la présence de brane brise l'invariance par translation le long des dimensions supplémentaires. Ainsi, si nous sommes sur la brane et que nous avons une énergie suffisante pour produire des modes de KK, une partie de l'énergie pourrait "s'échapper" dans le bulk.

Une vision schématique du bulk et des branes est proposée dans la figure (2.4).

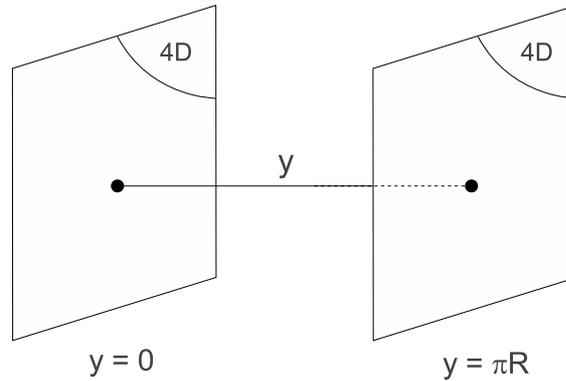


FIG. 2.4 – Schéma des branes localisées aux points fixes et du bulk, dans le cas d'une dimension supplémentaire compactifiée sur un orbifold S^1/Z_2 .

2.2.4 Brisure de symétrie

Un autre intérêt de l'orbifold (c'est-à-dire l'introduction d'une parité) est la brisure de symétrie : symétrie de jauge ou supersymétrie. Par exemple, si dans un supermultiplet chiral on assigne des parités opposées au scalaire et au fermion, alors seulement l'un des deux aura un mode zéro. En conséquence, à des échelles inférieures à $1/R$ la supersymétrie est brisée. De même, la symétrie de jauge à 5d du bulk peut être brisée dans la théorie effective à 4d par la compactification si on associe des parités différentes aux composantes supplémentaires des bosons de jauge 4d. À 5d par exemple, la 5ème compo-

sante du boson A^M disparaîtrait du spectre à basse énergie et la symétrie de jauge du bulk ne serait pas apparente.

La compactification des extra-dimensions peut aussi introduire des conditions aux bords non-triviales. Ce mécanisme est connu sous le nom de brisure à la Scherk-Schwarz [55].

Le lecteur intéressé peut se référer au cours [56] et à la bibliographie s'y trouvant pour plus de détails sur les différents mécanismes de brisure de symétrie basés sur les extra-dimensions.

Chapitre 3

Les corrections radiatives à une boucle

3.1 *Interlude*: corrections radiatives et renormalisation

Les paramètres du lagrangien dans une théorie classique correspondent aux masses et constantes de couplages physiques mesurées. Au niveau quantique, cette interprétation se révèle fautive et il faut prendre en compte les corrections des ordres supérieurs de la théorie des perturbations (comptés en nombre de ‘boucle’ dans les diagrammes de Feynman), c’est-à-dire les *corrections quantiques* ou *radiatives*. En plus de changer l’interprétation des paramètres du lagrangien classique, la quantification introduit la nécessité d’une *renormalisation* des ces paramètres.

3.1.1 Les corrections radiatives en théorie quantique des champs

Le module carré d’une amplitude de probabilité d’un processus donné peut s’exprimer en terme de ce que l’on appelle des *fonctions de Green* qui s’écrivent [57] :

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T(\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n)) | \Omega \rangle \quad (3.1)$$

où $|\Omega\rangle$ est le vide complet de la théorie (l’état fondamental du hamiltonien complet) et $T(\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n))$ est le produit chronologique des champs écrit en représentation de Heisenberg¹. On peut réécrire (3.1) d’une façon plus

1. C’est-à-dire la représentation dans laquelle les opérateurs dépendent du temps mais pas les fonctions d’onde.

pratique pour le calcul perturbatif, grâce aux formalismes de l'intégration fonctionnelle et de l'intégrale de chemin²

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \quad (3.2)$$

où N est un facteur de normalisation³.

Toute l'information d'une théorie quantique des champs est contenue dans ses fonctions de Green $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$. L'expression (3.2) conduit à la série des diagrammes de Feynman lorsque l'exponentielle est développée. Par exemple, dans une théorie de champs scalaires avec une interaction de type

$$-\frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

dans le lagrangien et en supposant que λ soit petit (pour justifier le développement perturbatif), on a :

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}} = e^{i \int d^4x \mathcal{L}_0} \left(1 - i \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \dots \right) \quad (3.3)$$

où \mathcal{L}_0 est le lagrangien libre. Ce développement donne les contributions dites "à l'arbre" (le premier terme), "à une boucle" (le deuxième terme), etc. En effet, il y a une intégration sur une coordonnée intermédiaire que l'on représente schématiquement sous forme d'une boucle.

L'amplitude associée à un diagramme de Feynman à une boucle peut faire intervenir des intégrations divergentes sur l'impulsion virtuelle⁴. Par exemple, dans le cas du terme à une boucle de la fonction de Green⁵ à 4 points $G^{(n)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, on a le diagramme de la figure (3.1). Ce diagramme comprend l'intégrale suivante⁶ :

$$\mathcal{I} \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p+k)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \sim \int \frac{d^4k}{k^4} \sim \int_0^\infty \frac{dk}{k} \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

L'apparition de la divergence dans l'UV (quand l'impulsion virtuelle tend vers l'infini), et donc la dépendance en la physique de courte-distance, nécessite de redéfinir les paramètres du lagrangien initial classique *via* la renormalisation.

2. L'élément d'intégration $\mathcal{D}\phi$ est une notation qui correspond à l'intégration sur tous les champs $\phi(x_i)$, $\mathcal{D}\phi = \prod d\phi(x_i)$.

3. Ce facteur correspond en fait aux diagrammes de type vide-vide et s'écrit

$$N = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi(x)]}$$

4. On travaille en général plutôt dans l'espace des impulsions.

5. plus précisément la fonction de Green 1PI

6. Les impulsions sont euclidiennes.

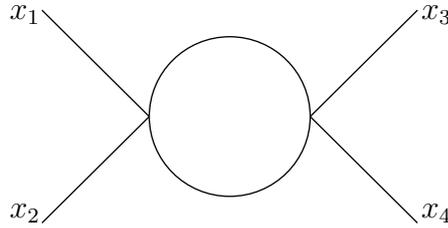


FIG. 3.1 – Diagramme à une boucle contribuant à la fonction de Green à 4 points d'une théorie scalaire avec interaction quartique.

3.1.2 La renormalisation

régularisation et renormalisation

La procédure de renormalisation d'une théorie quantique des champs comporte deux étapes importantes : la régularisation des intégrales divergentes et la renormalisation proprement dite des paramètres du lagrangien.

- On exprime tout d'abord l'intégrale divergente \mathcal{I} par une intégrale convergente fonction d'un paramètre et telle que l'on retrouve l'intégrale initiale dans une certaine limite de ce paramètre, appelé *le régulateur* :

$$\mathcal{I} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{I}(\epsilon) = \mathcal{I}_{div} + \mathcal{I}_{finie} \quad (3.5)$$

où $\mathcal{I}_{div} \rightarrow \infty$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ et \mathcal{I}_{finie} est indépendante de ϵ . C'est ce que l'on appelle la régularisation. Il existe différentes façons de régulariser, les plus connues sont [57] :

- **La régularisation par cut-off** où l'on coupe l'intégration à une échelle d'impulsion Λ . Les divergences apparaissent en puissance de Λ et logarithme de Λ .
- **La régularisation dimensionnelle**. L'intégration est faite à $4 - \epsilon$ dimensions où $\epsilon \rightarrow 0$ et les divergences apparaissent alors sous la forme de puissance de $\frac{1}{\epsilon}$.
- **La régularisation de Pauli et Villars** dans laquelle, pour chaque particule circulant dans la boucle, on introduit une particule lourde et fictive de masse M . Là aussi on a des divergences en $\log M/\mu$ ou en puissance de M .

Physiquement, une régularisation est une modification de la théorie à courte-distance qui nous permet de calculer les corrections quantiques. La régularisation introduit une échelle d'impulsion au-delà de laquelle on modifie les

interactions (la physique de courte-distance). La quantification d'une théorie classique des champs introduit donc une échelle intrinsèque.

- Ensuite, on absorbe la partie divergente dans la définition d'un paramètre libre du lagrangien (dans notre exemple, λ). C'est ce qu'on appelle la renormalisation. Après renormalisation, les quantités observables sont exprimées en termes de paramètres mesurés expérimentalement. Notre ignorance sur la physique à courte distance est donc cachée dans ces paramètres libres de la théorie, déterminés par l'expérience. Dans une théorie *renormalisable*, il n'y a qu'un nombre fini d'amplitudes (de diagrammes) divergentes (et un nombre égal de paramètres) et les constantes de couplage ont une dimension positive (ex: ϕ^3) ou nulle (ex: QED). En principe⁷, la dépendance au régulateur disparaît totalement des calculs. Dans une théorie *non-renormalisable* toutes les amplitudes sont divergentes à un ordre donné de la théorie des perturbations (l'expansion de 3.2). Une théorie avec des constantes de couplage de dimension négative n'est pas renormalisable, les prédictions ne sont pas indépendantes du régulateur.

L'étape de la renormalisation est arbitraire car la séparation entre la partie convergente et divergente de l'amplitude l'est aussi. Quand on fixe la définition des paramètres renormalisés, on fixe ce que l'on appelle les *conditions de renormalisation* ou les *prescriptions de renormalisation*. Cela revient à spécifier l'échelle arbitraire à laquelle la renormalisation est faite. On doit aussi fixer un choix de la partie divergente et se placer dans un *schéma de renormalisation* donné (par exemple \overline{MS}). Ce schéma peut être ou non dépendant de l'échelle de renormalisation. Quand on renormalise en pratique, on introduit⁸ des contre-termes qui éliminent les parties infinies: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Ren} + \mathcal{L}_{c.t} \Leftrightarrow \mathcal{L}_{Ren} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_{c.t}$. Ils sont déterminés par les conditions de renormalisation et le schéma de renormalisation que l'on s'est fixé.

Une remarque: les constantes de couplage et les masses ne sont pas les seules à être renormalisées, il y a aussi les champs eux-mêmes: $\phi_0 = \sqrt{Z}\phi_R$.

Equation du groupe de renormalisation

La procédure de renormalisation n'est pas unique, on peut choisir des conditions de renormalisation différentes pour définir la même théorie. Par ceci on entend que les fonctions de Green 'nues' restent indépendantes de M et λ (si λ est la constante de couplage et M l'échelle de renormalisation).

7. En pratique, il peut rester une dépendance résiduelle à un nombre de boucle donné car la plupart du temps nous ne savons pas sommer tous les ordres.

8. Disons plutôt que l'on a séparé le lagrangien initial, "nu", en une partie avec les paramètres finis renormalisés (physiques) et une partie avec les contretermes.

L'équation de Callan-Symanzik est l'équation vérifiée par les fonctions de Green, exprimant cette indépendance (ou la liberté du choix des conditions de renormalisation) :

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) \right] G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; M, \lambda) = 0 \quad (3.6)$$

La fonction $\beta(\lambda)$ et la fonction $\gamma(\lambda)$ compensent le changement d'échelle $M \rightarrow M + \delta M$. Dans une théorie avec plus d'une constante de couplage il y a une fonction "bêta" pour chacune, et dans une théorie avec plusieurs champs (donc plusieurs masses) il y a autant de fonction γ que de champs (de masses). Plus précisément, concernant la fonction $\beta(\lambda)$ on a :

$$\beta(\lambda) = M \frac{\partial}{\partial M} \lambda \Big|_{\lambda_0, \Lambda} \quad (3.7)$$

La fonction bêta est le *taux de variation* du couplage renormalisé à l'échelle M , correspondant au couplage "nu" λ_0 et au *cut-off* Λ (au régulateur). La résolution de l'équation de Callan-Symanzik conduit notamment aux *équations du groupe de renormalisation* pour le(s) couplage(s).

$$\log \left(\frac{M}{M_0} \right) = t = \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t, \lambda)} \frac{dx}{\beta(x)} \quad (3.8)$$

où M_0 est une échelle de masse fixe et $\bar{\lambda}(t=0, \lambda) = \lambda$ est la condition initiale à $M = M_0$. On peut réécrire cette équation autrement,

$$\beta(\bar{\lambda}) = \frac{\partial \bar{\lambda}(t, \lambda)}{\partial t} \quad (3.9)$$

$\bar{\lambda}(t, \lambda)$ est le couplage effectif dépendant de l'échelle M et de sa valeur initiale à une échelle M_0 . Son évolution est donnée par sa fonction bêta. En théorie quantique des champs, on ne parle donc plus de "constante de couplage" mais de "constante de couplage à une échelle (d'impulsion) donnée".

Selon le signe de la fonction bêta on a des évolutions différentes et donc des comportements différents. Par exemple, dans le cas de la théorie QCD la fonction bêta du couplage est négative et la théorie est asymptotiquement libre à haute échelle d'impulsion.

3.1.3 Théorie effective des champs

introduction

Le principe d'une théorie effective est d'être *une description appropriée de la physique* c'est-à-dire une description *utile* et *adaptée* à la région de

l'espace des paramètres qui concerne un phénomène étudié [58]. Utile au sens pratique, c'est-à-dire que les calculs se font plus simplement que dans la théorie complète. Adaptée car les phénomènes qui sont pris en compte sont seulement les phénomènes dominants. La théorie effective est certes approchée, mais en pratique beaucoup plus efficace.

La physique des particules comporte beaucoup de particules aux propriétés différentes mais surtout de masses très disparates. De plus, les expériences font intervenir des énergies très variées, si bien que l'on ne sonde pas la matière avec la même précision et à la même échelle. Une description sous forme de théories effectives est donc capitale, et même *indispensable* pour pouvoir interpréter les résultats expérimentaux et faire des prédictions. En physique des particules, le paramètre pertinent est l'échelle de longueur (ou de masse) caractéristique du système étudié. Par exemple, dans une théorie de gravitation quantique les particules connues ont des masses extrêmement petites devant la masse typique qui est la masse de Planck, $M_{Pl} \simeq 10^{19}$ GeV. Ceci revient à dire que l'interaction gravitationnelle, caractérisée par la constante de Newton G_N , ne joue qu'un rôle mineur à l'échelle typique⁹ des autres interactions entre ces particules. Pour l'étude des interactions des particules connues aux échelles de longueur accessibles expérimentalement aujourd'hui, on peut alors effectuer la simplification $G_N = 0$ (ou $M_{Pl} \rightarrow \infty$) et donc ignorer les effets de gravitation quantique. Ce qui nous sauve bien car à l'heure actuelle nous n'avons toujours pas de théorie quantique de la gravitation!¹⁰

théorie quantique des champs effective

La théorie quantique des champs (QFT) est le cadre théorique actuel dans lequel nous décrivons la physique (des particules) aux échelles du Fermi et moins. Comme nous venons d'en discuter, pour correctement prédire et reproduire la phénoménologie observée nous n'avons besoin "que" d'une description effective de la "réalité". Nous allons donc maintenant présenter comment obtenir et utiliser une théorie quantique des champs effective (EQFT).

Une théorie quantique des champs effective est construite en masquant et modifiant les effets de courte-distance, ce qui revient à ignorer les particules trop lourdes pour être produites. Elles disparaissent du spectre des particules mais leurs effets non-triviaux apparaissent dans les interactions de dimension supérieure à 4, supprimées par une puissance d'une échelle de masse caractéristique (la masse typique des particules lourdes). Plus précisément, dans la

9. Disons le Fermi, ou en terme de masse $\mathcal{O}(100 \text{ GeV})$.

10. Bien que plusieurs pistes sérieuses aient été explorées, comme la théorie des cordes, dont nous parlerons plus loin.

théorie effective, on remplace les interactions non-locales¹¹ dues aux échanges virtuels de particules lourdes par un ensemble d'interactions locales, construit pour donner la même physique à basse-énergie (longue-distance), c'est-à-dire celle qui nous intéresse. En réalisant ceci, nous avons donc volontairement modifié la physique de courte-distance (haute-énergie, "UV") et notre théorie effective n'est une description valable qu'à des échelles en dessous de la masse des particules lourdes de la théorie initiale. Le comportement UV est donc différent, et il faut s'assurer que notre théorie effective reste néanmoins consistante (les symétries importantes à basse-énergie doivent être respectées, comme par exemple la symétrie de jauge). Cette modification de la partie courte-distance de la théorie n'est donc pas sans conséquences : la théorie effective résultante est *non-renormalisable*¹². Cependant, quand les masses des particules lourdes sont très élevées (comparées à celles des particules légères que l'on a gardé dans le spectre), la théorie effective est alors approximativement *renormalisable*. C'est ce qui explique le succès de l'électrodynamique quantique (QED) et du modèle standard (MS) (construit uniquement à partir des termes renormalisables). Le domaine d'utilisation d'une théorie effective a nécessairement une borne supérieure en énergie au-delà de laquelle elle n'a plus de sens.

En poussant le principe de théorie effective à l'extrême, nous pouvons même associer une théorie effective à chaque nouvelle échelle de masse, comme sur la figure (3.2). Les bornes supérieures et inférieures du domaine de validité sont données par les masses des particules voisines de celle de la particule. Pour une impulsion inférieure à la masse d'une particule donnée, on enlève celle-ci du spectre. Pour une impulsion tout juste supérieure, on l'inclue. Cette façon de faire est souvent utilisée en QCD car les quarks ont des masses très différentes, et selon l'énergie on travaille avec une QCD à 4, 5 ou 6 saveurs de quarks.

Toutes les théories effectives (et leurs paramètres) sont reliées entre elles de proche en proche et de telle manière qu'elles donnent la même physique aux bornes de leur domaine de validité. À l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, cette condition implique l'égalité des paramètres des interactions entre particules légères (les constantes de couplage sont continues au passage d'une théorie à une autre). Les effets de boucle et les échanges virtuels de particules lourdes apportent des corrections, ainsi que des nouvelles interactions. On appelle *matching conditions* ou *conditions de raccordement* les relations entre les couplages imposées par la condition que les deux

11. La non-localité est due à la propagation de la particule lourde, le résultat peut être développé en puissance de p/M pour donner la tour infinie d'interaction dans la théorie effective.

12. quand la tour d'interaction est tronquée

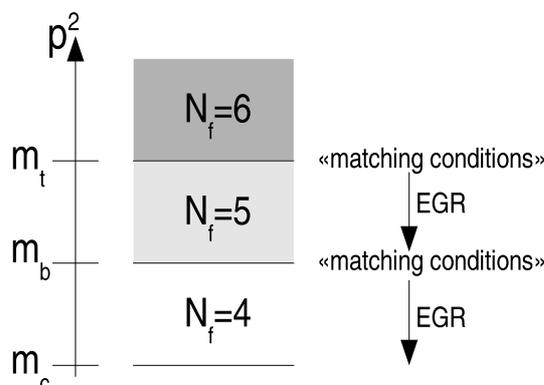


FIG. 3.2 – "Cascade" de théorie effective et liens entre elles. N_f correspond par exemple au nombre de quarks dans la théorie effective. Les "EGR" sont les équations d'évolution du groupe de renormalisation.

théories effectives décrivent la même physique à leur borne commune¹³. Les équations du groupe de renormalisation servent à relier les différentes bornes entre les différentes théories effectives que l'on peut construire. En effet, en commençant par la masse M de la particule la plus lourde de la théorie renormalisable et fondamentale, nous pouvons calculer les conditions de raccordement à $\mu = M$ pour les paramètres décrivant la théorie effective sans cette particule. Puis, en utilisant les EGR, nous faisons évoluer la valeur de ces paramètres jusqu'à $\mu = M'$, la masse la plus lourde juste après M . Nous connaissons alors les conditions de raccordement pour les paramètres de la théorie effective sans ces 2 particules, et de nouveau nous faisons évoluer les paramètres jusqu'à la prochaine masse de particule etc. C'est une utilisation dite *top-down* des théories effectives, QCD en est l'exemple typique. Les calculs sont rendus plus simples. C'est la procédure de raccordement qui détermine la taille des termes non-renormalisables associés aux particules lourdes. L'évolution par le groupe de renormalisation dans la théorie effective incorpore les termes en $\log(M)$ de la théorie complète.

Il y a une autre façon d'utiliser l'idée de théorie effective, et c'est ce qui correspond à ce qui est fait en physique au-delà du MS. La cascade de théories effectives précédente peut être vue dans l'autre sens, de la basse vers la haute énergie, *bottom-up*. Dans ce cas, nous ne connaissons pas la physique

¹³. Autrement dit, les conditions aux bords sont la différence entre le calcul dans la théorie complète et la théorie effective.

à plus haute énergie et la théorie plus fondamentale¹⁴. Nous utilisons alors la théorie effective des champs comme une description de la physique à *une certaine échelle d'énergie E et avec une certaine précision (ou incertitude) ϵ* . Nous ne connaissons pas ce qui se passe à des énergies arbitrairement hautes mais nous pouvons paramétrer cette ignorance en écrivant dans le lagrangien une "tour" d'interactions, de dimension 2 à infinie. Ces interactions renormalisables mais aussi non-renormalisables sont construites avec le contenu en particules légères et les symétries de basse énergie. Il y a un nombre fini de paramètres qui décrivent les interactions de dimension $k - 4$, et les coefficients de chacun de ces termes d'interaction de dimension $k - 4$ sont de l'ordre (ou inférieurs) à M^{-k} , où $E < M$ et M est une échelle de masse indépendante de k . Ceci assure que seul un nombre fini de paramètres sont requis pour calculer les quantités physiques à une énergie E et une précision ϵ . Les contributions des interactions de dimension k sont proportionnelles à

$$\left(\frac{E}{M}\right)^k$$

donc à une précision ϵ donnée, nous pouvons négliger toutes les interactions de dimensions supérieures à k_ϵ .

$$\epsilon \sim \left(\frac{E}{M}\right)^{k_\epsilon} \Leftrightarrow k_\epsilon \sim \frac{\log \epsilon}{\log E/M}$$

Plus on monte en énergie, plus il faut inclure d'interactions de dimension >4 pour garder la même précision.

Finalement, ce qui importe plus que la renormalisabilité c'est de pouvoir calculer les observables physiques à une énergie et une précision donnée. Pour cela, il faut un nombre fini de paramètres et un nombre fini d'interactions, c'est tout. Et puisque la renormalisabilité n'est en fin de compte pas un critère fondamental pour la phénoménologie au-delà du Modèle Standard, nous devons plutôt voir notre MS comme un modèle effectif, auquel on peut ajouter une tour d'interactions non-renormalisables. On voit aussi que la renormalisation et la théorie effective sont des concepts reliés entre eux. Les effets inconnus de la physique à courte-distance peuvent être imités en ajoutant des nouveaux opérateurs dans le lagrangien initial (le lagrangien "nu"). Cela revient en fait à modifier d'une part les paramètres "nus" du lagrangien renormalisable, et d'autre part à ajouter des opérateurs de dimensions supérieures ou égales à 5, supprimés par des puissances de l'échelle caractérisant

14. qui peut aussi être vue comme une théorie effective d'une théorie encore plus fondamentale...

la physique de courte distance. Dans les deux cas, on utilise l'indépendance de la physique à longue-distance des détails de la physique à courte distance. La dépendance au *cut-off* (au régulateur d'une façon générale) est incorporée dans les paramètres renormalisés de la même façon que la dépendance aux masses des particules lourdes est incorporée dans les paramètres de basse énergie de la théorie effective. Le groupe de renormalisation est simplement le raccordement de la théorie à l'échelle μ avec la théorie avec l'échelle $\mu - d\mu$, sans changement du contenu en particule.

3.2 Les corrections radiatives à 5 dimensions

3.2.1 Régularisations

Quand la 5ème dimension est compacte, la composante de l'impulsion dans la 5ème dimension est discrète, de valeur $p_5 \propto \frac{n}{R}$, n entier. De ce fait, l'intégration dans l'espace des phases à 5d devient une somme discrète d'intégrations dans l'espace des phases à 4d:

$$\int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} [\dots] = \frac{1}{2\pi R} \sum_{k_5} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\dots] \quad (3.10)$$

Calculer les corrections radiatives (à une boucle) à 5d d'une observable donnée revient donc en pratique à calculer une tour infinie de corrections radiatives à 4d. Celles-ci se distinguent par la présence dans la boucle de modes de Kaluza-Klein de plus en plus massif. La somme discrète et l'intégration apportent toutes deux des divergences dans le calcul : il faut régulariser l'ensemble. Il y a plusieurs façon de s'y prendre et nous allons en énumérer quelques-unes en les commentant. Les détails explicites et les résultats pour la polarisation du photon seront donnés dans la sous-section suivante (et les détails sont exposés en annexe). Dans toutes ces régularisations, les calculs faisant intervenir les matrices γ de Dirac sont effectués avant de définir la régularisation de l'intégrale.

régularisation "mixte"

L'une des premières idées que l'on pourrait avoir si on voulait régulariser une expression comme (3.10) serait par exemple de régulariser l'intégrale par la régularisation dimensionnelle et de couper la somme à un mode N très grand :

$$\sum_{k_5} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\dots] \longrightarrow \sum_{k_5}^{\Lambda_5} \mu^\epsilon \int \frac{d^{4-\epsilon} k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} [\dots] \sim a \frac{\Lambda_5}{\epsilon} + \textit{termes finis} \quad (3.11)$$

Ainsi, le terme divergent est proportionnel au *cut-off* Λ_5 de la somme multiplié par le pôle en $1/\epsilon$ de la régularisation dimensionnelle. Mais il faut faire attention à l'utilisation de cette méthode car couper la somme revient à couper l'intégration sur la 5ème composante de l'impulsion virtuelle. Comme toute régularisation par *cut-off*, la symétrie de jauge (ici à 5d) est généralement brisée. De plus, nous modifions différemment la physique UV dans les 4 dimensions infinies et la 5ème dimension compacte. Mais c'est un choix de régularisation utile dans les calculs de corrections quantiques à des observables physiques (par exemple à la correction du paramètre ρ [59]).

régularisation dimensionnelle

Dans cette façon de régulariser, on effectue la somme infinie et on régularise l'intégrale divergente par la régularisation dimensionnelle [60]. Aucune symétrie n'est brisée mais le résultat ne donne que les divergences logarithmiques en dimension 4; les divergences en puissance sont masquées.

régularisation avec *cut-off* sur le temps propre

Nous pouvons aussi effectuer la somme d'abord et régulariser l'intégrale à 4d ensuite par un *cut-off* sur le *temps propre* [60, 53] c'est-à-dire sur l'intégrale obtenue en utilisant la formule¹⁵ :

$$\frac{1}{A(k)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\zeta \rightarrow 0}^{\infty} dt t^{n-1} e^{-A(k)t} \quad (3.12)$$

Techniquement, le résultat obtenu n'est fonction que d'un seul paramètre divergent, ζ . Là aussi il faut être prudent dans l'utilisation de cette régularisation car la symétrie de jauge à 4d est brisée en général même si le résultat donne la bonne forme de la divergence. La coupure est cependant dite plus 'douce' car elle correspond en fait à une décroissance exponentielle de l'impulsion virtuelle dans l'intégrale initiale (grâce à un facteur $e^{-\frac{M^2}{\Lambda^2}}$).

"régularisation" par les modes d'enroulement

Plus qu'une régularisation, c'est en fait une soustraction de la partie divergente (un schéma de renormalisation):

A chaque diagramme à boucle de la théorie compactifiée on soustrait le diagramme correspondant de la théorie non-compactifiée.

15. Cette formule vient directement de la définition de la fonction Γ et de sa forme intégrale [61].

Les divergences UV s'annulent car les deux théories sont les mêmes à courte-distance (elles possèdent les mêmes divergences). Cela revient à supprimer la contribution du 'mode d'enroulement nul' qui est un diagramme où la boucle a une "taille" nulle (le propagateur interne ne s'enroule pas autour de la 5ème dimension, il est contractible jusqu'à zéro). En effet, la formule de sommation de Poisson permet de réécrire la somme sur les états de Kaluza-Klein m en une somme sur des 'modes d'enroulement' n :

$$\frac{1}{2\pi R} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(m/R) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi Rn) \quad (3.13)$$

où f et F sont reliées par une transformation de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx} F(k) \quad (3.14)$$

La prescription consiste donc à enlever $f(0)$, les termes restants sont tous finis ainsi que leur somme. C'est une "régularisation" utile dans le cas de corrections quantiques à une observable, par exemple les corrections à une boucle à la masse des états de KK [62]

régularisation par *cut-off* global

Si nous voulions éviter de régulariser différemment les 4 dimensions infinies et la 5ème dimension, nous pourrions imposer un seul *cut-off* sur l'intégrale initiale à 5d. En général, la symétrie de jauge (les *identités de Ward*) n'est plus respectée. Cependant, il existe une méthode pour définir un *cut-off* sur l'intégration tout en préservant l'invariance de jauge dans le calcul [63].

Dans un calcul général de corrections radiatives (polarisation, correction de vertex, etc.) plusieurs types d'intégrales sur l'impulsion virtuelle (ou sur le temps propre) interviennent :

$$\mathcal{K}_{ab} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^{2a}}{(k^2 - m^2)^b} \quad (3.15)$$

En introduisant 2 paramètres auxiliaires α et β , nous pouvons par dérivation obtenir les intégrales nécessaires en fonction d'une seule :

$$\mathcal{K}_{ab}(\alpha, \beta) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^{2a}}{(\alpha k^2 - \beta m^2)^b} \quad (3.16)$$

$$\mathcal{K}_{(a+1)(b+1)} = \frac{\partial \mathcal{K}_{ab}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\beta=1} \quad (3.17)$$

...

Ainsi, le *cut-off* est défini une fois pour toutes sur une intégrale bien choisie et la régularisation de toutes les autres intégrales s'effectue de façon cohérente vis-à-vis de la première. L'invariance de jauge est alors conservée¹⁶. Nous pouvons appliquer cette régularisation par *cut-off* aux intégrales à 4 dimensions sur l'impulsion virtuelle, eq (3.10) [2]. Nous obtenons la forme logarithmique habituelle en $\log \frac{\Lambda^2}{M^2}$ pour chaque intégrale. Ensuite, la somme sur les modes de Kaluza-Klein est coupée à $n = \Lambda R$ qui correspond grossièrement au mode le plus lourd que l'on garde dans le spectre à l'échelle d'impulsion Λ (on découple les modes de masse $M > \Lambda$ à leur seuil). Nous obtenons typiquement :

$$\mathcal{I} \sim \sum_n^{\Lambda R} \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2 + n^2/R^2} \right) \sim A \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right) + B\Lambda R + C \log (\Lambda^2 R^2) + \dots \quad (3.18)$$

Cette régularisation de l'intégration et de la somme sur les modes de Kaluza-Klein a l'avantage d'être adaptée à la philosophie d'une théorie effective des champs, de conserver les symétries fondamentales et de donner la forme des divergences (logarithmiques et/ou en puissance). Elle ne permet cependant pas d'obtenir la partie finie à cause des dérivations. Son utilisation est alors restreinte aux calculs d'équation du groupe de renormalisation.

3.2.2 L'électrodynamique quantique à 5 dimensions

Nous allons maintenant discuter de ces corrections radiatives et de leurs régularisations dans un modèle "pédagogique", l'électrodynamique quantique (QED) à 5 dimensions. L'action de QED généralisée à 5d est :

$$\mathcal{S} = \int d^M x \left(-\frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} + \bar{\Psi} (i\gamma^M D_M - m_e) \Psi \right) \quad (3.19)$$

où

$$\begin{aligned} M, N &= (0, 1, 2, 3, 5) = (\mu, 5) \\ \gamma^M &= (\gamma^\mu, i\gamma^5) \\ D_M &= (\partial_\mu - i\tilde{e}A_\mu, \partial_5 - i\tilde{e}A_5) \end{aligned}$$

En faisant le choix d'une compactification sur S^1 , suffisante pour ce que nous cherchons à montrer, nous avons les décompositions de Fourier suivantes des

16. La régularisation préserve la structure tensorielle en $q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu$ de la polarisation du boson de jauge et vérifie aussi l'annulation entre la correction du vertex et la self-énergie de l'électron (dans QED), voir plus loin.

champs Ψ , A_μ et A_5 :

$$\Psi(x^M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi^{(n)}(x^\mu) e^{inx^5/R} \quad (3.20)$$

$$A_\mu(x^M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_\mu^{(n)}(x^\mu) e^{inx^5/R} \quad (3.21)$$

$$A_5(x^M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_5^{(n)}(x^\mu) e^{inx^5/R} . \quad (3.22)$$

Pour obtenir le lagrangien effectif à 4 dimensions, avec lequel il est plus facile de travailler, nous intégrons sur la coordonnée x^5 . Il reste alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_4 = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{(-n)\mu\nu} F_{\mu\nu}^{(n)} \right) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \bar{\psi}^{(-n)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M_n) \psi^{(n)} \\ & + \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \int d^4x e \bar{\psi}^{(-n)} \gamma^\mu A_\mu^{(n-m)} \psi^{(m)} + \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \int d^4x i e \bar{\psi}^{(-n)} \gamma^5 A_5^{(n-m)} \psi^{(m)} \\ & + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x -\frac{1}{2} \partial^\mu A_5^{(-n)} \partial_\mu A_5^{(n)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \frac{-in}{R} A^{(-n)\mu} \partial_\mu A_5^{(n)} \\ & + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \frac{n^2}{R^2} A_\mu^{(-n)} A^{(n)\mu} \right) + \int d^4x \mathcal{L}_{\text{fixation-de-jauge}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nous avons défini $e = \frac{\tilde{e}}{\sqrt{2\pi R}}$ le couplage effectif *sans dimensions* de la théorie effective à 4 dimensions. La matrice de masse M_n des "électrons" vaut $(m_e + i\gamma^5 n/R)$ et son carré, $M_n^\dagger M_n$, vaut $(m_e^2 + n^2/R^2)\mathbb{I}$.

Quelques remarques sur le modèle :

- La théorie à 4d obtenue n'est pas uniquement une infinité de fois le lagrangien de l'électrodynamique quantique ordinaire. En effet, la cinquième composante du champ de jauge initial (à 5d) reste dans le spectre et interagit avec les fermions $\psi^{(n)}$ (4ème terme de 3.23). Ce champ scalaire est cependant de masse nulle et ceci s'explique par l'invariance de jauge initiale à 5d qui exclut l'existence d'un terme de masse pour A^M et donc pour A^5 . Cette protection de la masse du champ scalaire est à l'origine de modèles dans lesquels le boson de Higgs est identifié avec la cinquième composante d'un boson de jauge se propageant dans 5 dimensions [64]. Ainsi, le higgs voit sa masse stabilisée par

la symétrie de jauge. Pour se débarrasser de A_5 , on peut introduire une symétrie Z_2 sous laquelle A_5 est impair (ce sera le cas dans le prochain chapitre).

- La non-renormalisabilité de la théorie initiale (3.19) se traduit dans (3.23) par la présence d'une infinité de champs.
- Le sous-lagrangien ne contenant que les modes zéro des bosons, $A_\mu^{(0)}$ et $A_5^{(0)}$, est invariant de jauge $U(1)$ sous les transformations locales (à 4d) suivantes :

$$\begin{aligned} A_\mu^{(0)} &\rightarrow A_\mu^{(0)} + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x^\mu) \\ A_5^{(0)} &\rightarrow A_5^{(0)} \\ \psi^{(n)} &\rightarrow e^{-i\theta(x^\mu)} \psi^{(n)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2.3 La polarisation du photon $A_\mu^{(0)}$

Nous allons donner ici les résultats pour la polarisation du photon, $A_\mu^{(0)}$, en utilisant les régularisations des intégrales suivant les possibilités exposées précédemment. Le calcul est réalisé dans le modèle précédent. L'expression de la polarisation du photon à une boucle est alors :

$$i\Pi^{\mu\nu}(p) = -e^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m_n} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m_n} \right] \quad (3.25)$$

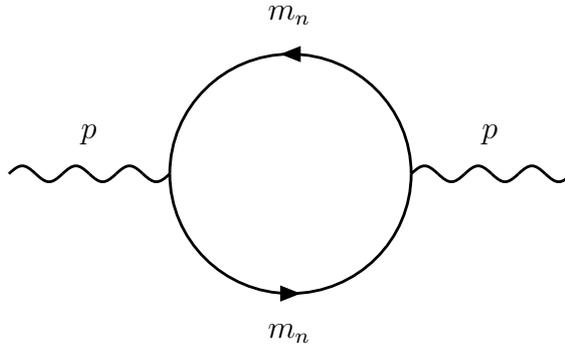


FIG. 3.3 – Diagramme à une boucle de la polarisation du photon dans lequel la paire d'électrons virtuels se propagent dans la 5ème dimension.

Nous utiliserons $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ où e est le couplage effectif à 4 dimensions entre l'électron et le photon. De plus, dans le calcul nous allons explicitement séparer les contributions de la boucle de fermions de modes nuls et celles de

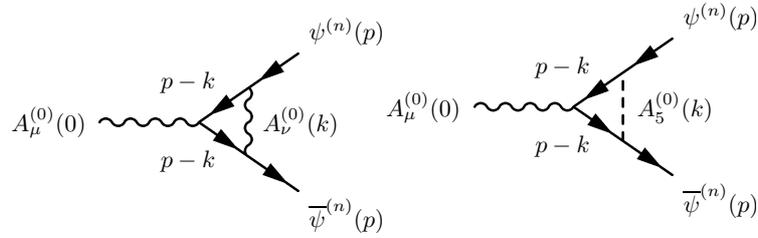
modes non-nuls. Dans l'exemple choisi de QED à 5d sur le cercle S^1 , il n'y aucune raison particulière de le faire. En revanche, dans d'autres modèles (d'autres compactifications et localisations des particules), les interactions des modes nuls et des modes non-nuls peuvent être différentes. La distinction des contributions doit être faite. Pour garder un aspect général à notre exemple particulier et par anticipation de la dernière section nous appellerons b' le facteur numérique venant des règles de Feynman des modes de Kaluza-Klein non-nuls et b celui des modes nuls. Dans notre modèle actuel, les deux coefficients sont égaux et valent $4/3$. Enfin, la notation \sum'_n signifie que l'on somme sur tous les modes (de $n = -\infty$ à $n = +\infty$) sauf le mode fondamental $n = 0$ (et en général, un prime sur une quantité exprime qu'elle ne concerne que la contribution des modes non-nuls).

régularisation avec *cut-off* global [2]

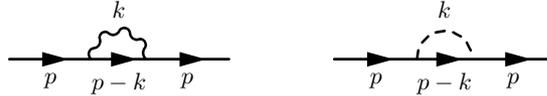
Pour être cohérent avec une approche effective donnant un sens physique à *cut-off*, la somme sur les états de KK est coupée à $n = \Lambda R$ et les modes $M > \Lambda$ sont découplés. La procédure de régularisation respecte les identités de Ward entre la correction du vertex $A_\mu^{(0)}$ et la self-énergie du n -ième "électron" :

$$\Gamma_\mu(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p) \quad (3.26)$$

Les contributions à $\Gamma_\mu(p,p)$ peuvent être décomposées en 2 parties représentées par les diagrammes suivants :



De même, nous avons les deux types de contributions suivantes à $\Sigma(p)$:



La transversalité du photon est aussi conservée (*i.e.* sa structure de Lorentz en $p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu$) et nous avons :

$$\Pi'_{\mu\nu}(p^2) |_{div} = \frac{\alpha}{4\pi} b' (p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \sum'_n{}^{\Lambda R} \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2 + n^2/R^2} \right) \quad (3.27)$$

qui est la contribution divergente de $(2\Lambda R - 1)$ modes non-nuls de Kaluza-Klein¹⁷. Dans le cas où $\Lambda R \gg 1$ et $m_0^2 \ll 1/R^2$ la somme des logarithmes s'écrit :

$$\sum_n^{\Lambda R}{}' \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2 + n^2/R^2} \right) \simeq 2 \log \left(\prod_{n \geq 1}^{\Lambda R} \frac{\Lambda^2 R^2}{n^2} \right) \quad (3.28)$$

En utilisant

$$\prod_{k=1}^N k^s = (N!)^s, \quad (3.29)$$

nous avons

$$\prod_{n \geq 1}^{\Lambda R} \frac{\Lambda^2 R^2}{n^2} = \frac{(\Lambda^2 R^2)^{\Lambda R}}{(\Lambda R!)^2}. \quad (3.30)$$

Enfin, avec la formule de Stirling pour $(N!)$ nous obtenons

$$\log(N!) = N \log N - N + \frac{1}{2} \log N + \log \sqrt{2\pi} + \dots \quad (3.31)$$

et nous en déduisons que :

$$\sum_n^{\Lambda R}{}' \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2 + n^2/R^2} \right) \simeq 2(2\Lambda R - \log \Lambda R). \quad (3.32)$$

À une échelle d'énergie Λ , les $(2\Lambda R - 1)$ modes non-nuls donnent donc la contribution totale à la partie divergente :

$$\Pi'_{\mu\nu}(p^2) |_{div} = \frac{\alpha}{4\pi} b'(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) [4\Lambda R - \log(\Lambda^2 R^2)] \quad (3.33)$$

Le mode fondamental $n = 0$ donne quant-à-lui la contribution logarithmique habituelle :

$$\Pi^0_{\mu\nu}(p^2) |_{div} = \frac{\alpha}{4\pi} b(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right) \quad (3.34)$$

régularisation avec *cut-off* sur le temps propre [53, 60]

Nous n'allons ici nous préoccuper que de la partie invariante de jauge telle que

$$\Pi_{\mu\nu}(p^2) = \Pi(p^2)(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2). \quad (3.35)$$

¹⁷. Dans $(2\Lambda R - 1)$ le facteur 2 est dû à la dégénérescence entre un mode n et un mode $-n$ et le -1 au fait que l'on a exclu le mode zéro.

Nous supposons ainsi que la partie non-physique peut être ignorée sans incidence. La somme sur les états de Kaluza-Klein est effectuée avant l'intégration sur le temps propre (et avant la régularisation de l'intégrale divergente). Pour les modes non-nuls, leur contribution à $\Pi(p^2)$ est :

$$\Pi'(p^2) = \frac{g^2}{12\pi^2} \int_0^1 dx 6x(1-x) \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-tx(1-x)p^2} \left[\theta_3 \left(\frac{it}{\pi R^2} \right) - 1 \right] \quad (3.36)$$

L'intégration sur t est régularisée par un *cut-off* aux deux bornes¹⁸ :

$$\Pi'(0) |_{reg} = \frac{\alpha}{4\pi} b' \int_{\Lambda^{-2}}^{R^2} \frac{dt}{t} \left[\theta_3 \left(\frac{it}{\pi R^2} \right) - 1 \right] \quad (3.37)$$

et quand $\Lambda R \gg 1$,

$$\Pi'(0) \sim -\frac{\alpha}{4\pi} b' \log \Lambda^2 R^2 + \frac{\alpha}{4\pi} b' 2\sqrt{\pi} \Lambda R \quad (3.38)$$

Si on fait un choix particulier pour les deux *cut-off*, $R \rightarrow \pi R/4$ et $\Lambda^{-2} \rightarrow \pi \Lambda^{-2}/4$, on obtient :

$$\Pi'(0) \sim -\frac{\alpha}{4\pi} b' \log \Lambda^2 R^2 + \frac{\alpha}{4\pi} b' 4\Lambda R \quad (3.39)$$

régularisation dimensionnelle [60]

La régularisation dimensionnelle conserve l'invariance de jauge, nous pouvons alors écrire la polarisation du photon sous la forme :

$$\Pi_{\mu\nu}(p^2) = \Pi(p^2)(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2). \quad (3.40)$$

Avec $M_n^2 = m_0^2 + n^2/R^2$, la contribution des modes non-nuls s'écrit :

$$\Pi'(p^2) = \alpha(2\pi)^\epsilon \frac{b'}{4\pi} \int_0^1 dx 6x(1-x) \sum_n' \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1-\epsilon/2}} e^{-\pi t[M_n^2 + x(1-x)p^2]/\mu^2} \quad (3.41)$$

La somme des intégrales sur le *temps propre* t donne

$$\sum_n' \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\epsilon}} e^{-\pi t[M_n^2 + x(1-x)p^2]/\mu^2} = \frac{1}{\epsilon} - \log \frac{(2 \sinh[\pi \mu \sqrt{m_0^2 + x(1-x)p^2}])^2}{\pi e^\gamma (m_0^2 + x(1-x)p^2)} \quad (3.42)$$

18. Une régularisation infrarouge est aussi nécessaire car on a négligé la masse du mode zéro.

et on en déduit donc :

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{b'\alpha}\Pi'(p^2) &= -\frac{2}{\epsilon} - \log(4\pi) + \gamma + \int_0^1 dx 6x(1-x) \\
&\times \left[\log\left(\frac{m_0^2 + x(1-x)p^2}{\mu^2}\right) \right. \\
&- (2\pi R)\sqrt{m_0^2 + x(1-x)p^2} \\
&\left. - \log(1 - e^{-(2\pi R)\sqrt{m_0^2 + x(1-x)p^2}}) \right]. \tag{3.43}
\end{aligned}$$

3.2.4 Discussion : loi de puissance et unification des couplages de jauge

Discussion

Nous pouvons faire plusieurs observations :

- Les deux régularisations par *cut-off* exhibent un comportement en **puissance de Λ** (linéaire dans notre cas à 5d). Ce comportement en loi de puissance se retrouve aussi en régularisation dimensionnelle mais uniquement dans la partie finie et en fonction de l'échelle d'impulsion $\sqrt{p^2}$.
- Les modes $n > 0$ apportent une loi de puissance ainsi qu'une évolution logarithmique de **signe opposé à celle du mode zéro**.
- Dans les régularisations par *cut-off*, le résultat n'est valable que dans la limite $\Lambda \gg R^{-1}$.
- Le résultat (3.32) se retrouve après avoir redéfini les cutoff IR et UV dans (3.38) par un facteur $\pi/4$.

Lors de la régularisation, le *cut-off* Λ introduit n'a pas de signification physique précise dans la théorie. À la fin de la procédure, on voudrait pouvoir associer Λ à une échelle de masse de notre théorie, typiquement l'échelle à laquelle de nouveaux opérateurs (*i.e.* de la "nouvelle physique") sont à inclure. Cependant, l'identification de Λ ne peut pas se faire précisément avec la seule connaissance de la théorie effective. Il faut une information extérieure, par exemple un raccordement avec la théorie plus fondamentale. De façon pratique, une régularisation par *cut-off* donne une indication de la présence de corrections en loi de puissance, mais les coefficients de ces corrections ne peuvent pas être obtenus sans connaître les détails de la théorie complète. Dans le calcul précédent, (3.38) il faut une information supplémentaire pour définir le *cut-off* UV. En introduisant *a posteriori* un facteur $\pi/4$, on retrouve le résultat du calcul dans la théorie effective à 4 dimensions avec un nombre

fini de modes, (3.32). Dans [65], la condition imposée est telle que les évolutions des couplages dans la théorie effective à 4d tendent, dans la limite de grand rayon, vers le même résultat que dans la théorie non-compactifiée à $4 + \delta$ dimensions¹⁹.

Les termes dépendant du *cut-off* peuvent donc être modifiés par une re-définition du *cut-off* plus ou moins arbitraire dans la théorie effective à 4d. Les corrections quantiques en loi de puissance sont très sensibles aux effets de seuil de la physique "UV", c'est-à-dire au-delà du domaine de validité de la théorie, contrairement au cas des théories renormalisables. En général, aucune prédiction précise ne peut alors être faite sans une théorie complétant le modèle à $D \geq 5$ dimensions²⁰ ou des hypothèses sur cette physique UV. Néanmoins, le comportement général d'une quantité et son ordre de grandeur restent accessibles.

Illustration par les couplages de jauge

Le comportement nouveau en loi de puissance est très intéressant pour la phénoménologie. Des calculs précédents on peut déduire l'évolution du couplage de jauge²¹ en fonction de l'échelle $\Lambda \gg R^{-1}$, à partir de R^{-1} :

$$\alpha(\Lambda)^{-1} = \alpha^{-1}(R^{-1}) + \frac{b' - b}{4\pi} \log \Lambda^2 R^2 - \frac{b'}{\pi} \Lambda R \quad (3.44)$$

Connaissant les b et b' pour les 3 couplages associés à $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$, nous pouvons connaître les valeurs de ces couplages en fonction de Λ à un R donné. La formule pour la fonction bêta d'un couplage de jauge dans une théorie générale est :

$$\beta_i = \frac{b_i}{4\pi} \alpha_i^2 \quad (3.45)$$

$$b(g_i) = -\frac{11}{3} C_2(G_i) + \frac{2}{3} \sum_{ferm} T(R_f) + \frac{1}{3} \sum_{scal} T(R_s) \quad (3.46)$$

19. Dans la limite de grand rayon la compactification n'a plus d'effet et les divergences sont les mêmes que dans la théorie équivalente non-compactifiée (la sommation discrète devient une intégration).

20. Dans quelques cas particuliers [66], on retrouve une prédictivité équivalente aux théories de Grande Unification renormalisables.

21. Dans le cas abélien, les identités de Ward permettent de connaître la correction totale au couplage de jauge uniquement à partir de la polarisation du boson de jauge. Les contributions dues à l'auto-énergie du fermion et au vertex fermion-fermion-boson s'annulent entre elles. Dans le cas supersymétrique, c'est le théorème de non-renormalisation qui le permet.

où $C_2(G) = N$ dans le cas de $SU(N)$ et $T(R) = T(S) = 1/2$ pour les fermions et scalaires dans la représentation fondamentale. On en déduit alors dans le cas du MSSM (avec la normalisation $g_1^2 = \frac{3}{5}g_Y^2$) :

$$b(g_1) = 11; b(g_2) = 1; b(g_3) = -3 \quad (3.47)$$

et pour les modes $n > 0$ [53],²²

$$b'(g_1) = 3/5 + 4\eta; b'(g_2) = -3 + 4\eta; b'(g_3) = -6 + 4\eta \quad (3.48)$$

lorsque seuls les bosons de jauge, les bosons de Higgs et η générations de fermions ont accès à la 5ème dimension.

En extrapolant à haute énergie, on trouve les évolutions tracées sur les figures (3.4,3.5) pour différents choix de régularisation (et $\eta = 0$). Pour ce qui est de la régularisation dimensionnelle, ce sont les évolutions des charges effectives quand $q^2 \gg R^{-2}$ qui sont tracées [57] :

$$\alpha_{eff}(q^2) = \frac{\alpha(R^{-1})}{1 - [\Pi(q^2) - \Pi(R^{-2})]} \quad (3.49)$$

Dans le cas d'une évolution logarithmique, l'influence des nouveaux états à l'échelle d'unification M_{GUT} peut être négligée car ils donnent de petites corrections. Cependant, dans le cas d'une évolution en loi de puissance, la présence de nouveaux modes lourds à l'échelle du *cut-off* peut changer la prédiction de l'échelle d'unification. On observe sur ces figures (3.4) et (3.5) des exemples de sensibilité au *cut-off* de la prédiction de M_{GUT} . Cette sensibilité se répercute sur les prédictions typiques des modèles grand-unifiés, comme par exemple la désintégration du proton et de l'unification du couplage de Yukawa du quark b et de celui du lepton chargé τ .

Pour illustrer la discussion, nous obtenons les résultats suivants quand $R^{-1} = 10^3$ GeV :

- Dans la régularisation par *cut-off* invariante de jauge raisonnant en terme de théorie effective à 4d [2] et dans l'approche de [53], $M_{GUT} \simeq 2.4 \times 10^4$ GeV.
- Avec la condition particulière de [65], $M_{GUT} \simeq 3.6 \times 10^4$ GeV.
- Dans la régularisation dimensionnelle [60], $M_{GUT} \simeq 1.8 \times 10^4$ GeV

²². Les modes $n \geq 1$ appartiennent à des représentations de supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ à 4d, leur fonction bêta générale est :

$$b'(g_i) = -2C_2(G_i) + 2 \sum_{ferm} T(R_f) + 2 \sum_{scal} T(R_s)$$

où la somme est sur les fermions du MS et le nombre de doublets de higgs.

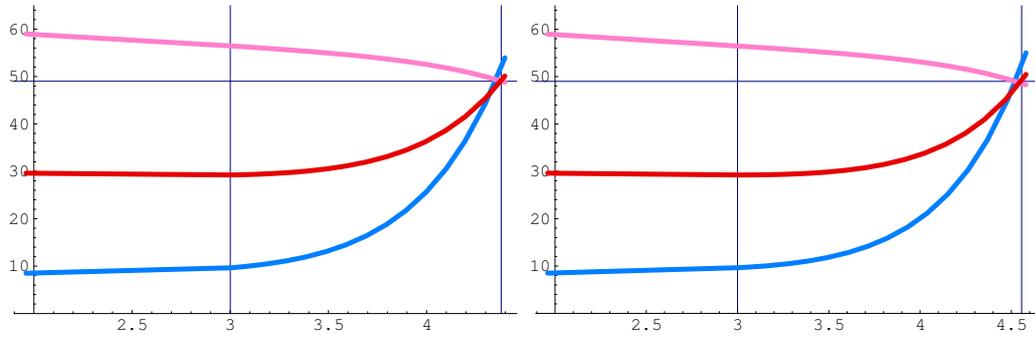


FIG. 3.4 – Unification des couplages de jauge à 5d, dans la régularisation par cut-off de [53] et celle de [2] (à gauche) et avec la modification proposée par [65] (à droite). La quantité $\alpha^{-1} = 4\pi/g^2$ est tracée en fonction de $\log(\Lambda/m_Z)$ pour $R^{-1} = 10^3$ GeV.

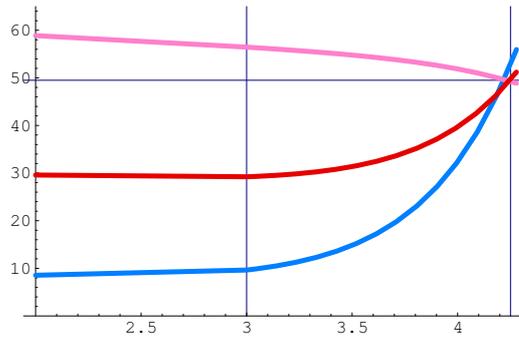


FIG. 3.5 – Unification des couplages de jauge à 5d, dans la régularisation dimensionnelle [60]. La quantité $\alpha_{eff}^{-1}(q^2)$ est tracée en fonction de $\frac{1}{2} \log(q^2/m_Z^2)$ pour $R^{-1} = 10^3$ GeV.

Chapitre 4

Application aux masses et mélanges de neutrinos

4.1 *Interlude*: superchamps, théorème de non-renormalisation

4.1.1 Le formalisme des superchamps

Le formalisme des ‘superchamps’ pour la supersymétrie $N = 1$ à $D = 4$ se révèle très utile car la supersymétrie y est manifeste. Ces superchamps décrivent les champs quantiques, leurs superpartenaires ainsi que les champs auxiliaires en un seul objet contenant la structure supersymétrique. Les calculs directement avec les superchamps sont plus simples qu’avec les composantes des superchamps (les champs fermioniques, scalaires, les bosons vecteurs, etc.) car un seul ‘supergraphe’ contient plusieurs graphes de champs standards. Nous ferons ici une courte revue de ce formalisme, en se basant sur le livre de Wess et Bagger [67] et celui de West [68].

superchamp et superespace

Les superchamps sont des objets vivants dans le superespace qui correspond à notre espace-temps standard et à l’ajout de deux coordonnées spinorielles anticommutantes (à deux composantes), θ_α et $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. Dans le superespace,

l'intégration sur les variables θ et $\bar{\theta}$ est définie telle que¹

$$\int d^2\theta = 0, \quad (4.1)$$

$$\int d^2\bar{\theta} = 0, \quad (4.2)$$

$$\int d^2\theta \theta^2 = 1, \quad (4.3)$$

$$\int d^2\bar{\theta} \bar{\theta}^2 = 1. \quad (4.4)$$

Les éléments d'intégration sont :

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \quad (4.5)$$

$$d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} d\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \quad (4.6)$$

$$d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta} \quad (4.7)$$

$$d^8z = d^4x d^4\theta \quad (4.8)$$

De plus, dans le superspace, les fonctions $\delta(\theta) = \theta^2$ et $\delta(\bar{\theta}) = \bar{\theta}^2$ agissent comme des distributions delta de Dirac.

Un superchamp est un champ fonction de x^μ , θ , $\bar{\theta}$ et son expansion est finie (ceci est dû à la nature anticommutante des coordonnées θ , $\bar{\theta}$) :

$$\begin{aligned} F(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta^2 m(x) + \bar{\theta}^2 n(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\ &+ \theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \theta\bar{\theta}^2\lambda(x) + \theta^2\bar{\theta}^2 d(x) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ce superchamp contient 16 degrés de liberté bosoniques et 16 degrés de liberté fermioniques². Pour réduire ce nombre afin d'assigner des superchamps aux particules du MS, nous pouvons imposer des contraintes particulières.

superchamp chiral

Un superchamp chiral (gauche) $\phi(x, \theta, \bar{\theta})$ obéit à la contrainte :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\phi = 0 \quad (4.10)$$

1. À noter que l'intégration et la dérivation sont identiques pour les variables anticommutantes, dites de "Grassmann".

2. Ce superchamp général forme une représentation réductible de l'algèbre supersymétrique.

où l'opérateur différentiel $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ s'écrit :

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\partial_{\mu} \quad (4.11)$$

Lorsque que l'on développe le superchamp chiral, on obtient les champs usuels en coefficients des termes en θ et $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned} \phi(x,\theta,\bar{\theta}) = & \phi(x) + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\partial_{\mu}\phi(x) + \frac{1}{4}\theta^2\bar{\theta}^2\partial^2\phi(x) \\ & + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_{\mu}\psi(x)\sigma^{\mu}\bar{\theta} \\ & + \theta^2F(x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

On retrouve bien les composantes du multiplet chiral, à savoir un spineur ψ , un scalaire ϕ et un champ auxiliaire F .

De même, on définit un superchamp antichiral (droit) par la contrainte

$$D_{\alpha}\phi = 0 \quad (4.13)$$

où l'opérateur différentiel D_{α} s'écrit :

$$D_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \quad (4.14)$$

Un produit de superchamps chiraux reste un superchamp chiral, ce qui n'est pas le cas d'un terme comme $\bar{\Phi}\Phi$. En revanche, sa composante selon $\theta^2\bar{\theta}^2$ se transforme comme une dérivée totale. L'action renormalisable la plus générale pour une théorie de champs chiraux est alors :³

$$\begin{aligned} S = & \int d^8z \bar{\Phi}_i\Phi_i \\ & + \int d^8z \left[\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3!}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \right] \delta(\bar{\theta}) + h.c. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La première ligne correspond à la contribution cinétique des superchamps Φ c'est-à-dire au terme "D" du superchamps $\bar{\Phi}_i\Phi_i$ (sa composante $\theta^2\bar{\theta}^2$). La seconde ligne correspond à celle du terme "F" du superpotentiel (sa composante θ^2) contenant les termes de masse (m_{ij} , symétrique) et les couplages de Yukawa (λ_{ijk} , symétrique).

3. Le lagrangien est invariant sous une transformation de supersymétrie, à une divergence totale près

superchamp vecteur

On peut définir un autre type de superchamps, le superchamp vecteur, par la contrainte d'hermiticité :

$$V = V^\dagger \quad (4.16)$$

L'expansion en terme des coordonnées θ et $\bar{\theta}$ donne alors :

$$\begin{aligned} V = & C(x) + i\theta\chi(x) - i\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ & + \frac{i}{2}\theta^2[M(x) + iN(x)] - \frac{i}{2}\bar{\theta}^2[M(x) - iN(x)] - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\ & + i\theta^2\bar{\theta}[\bar{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi(x)] - i\bar{\theta}^2\theta[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\chi}(x)] \\ & + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2[D(x) + \frac{1}{2}\partial^2C(x)] \end{aligned} \quad (4.17)$$

où C, D, M, N sont des champs scalaires réels, χ est un spineur (de Weyl) et v_μ un champ vectoriel identifié au boson de jauge.

La généralisation supersymétrique de la transformation de jauge abélienne est donnée par

$$V \rightarrow V + i(\Lambda - \bar{\Lambda}) \quad (4.18)$$

où Λ est un superchamp chiral. Dans la jauge de Wess-Zumino, cette transformation se résume à une transformation de jauge ordinaire pour le champ vectoriel v_μ et les autres champs C, M, N et χ sont éliminés. Il reste alors comme expression du développement de V :

$$V_{WZ} = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + i\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}^2D(x) \quad (4.19)$$

On retrouve les composantes du supermultiplet vu au chapitre 2 de la première partie : un boson vecteur v_μ , un fermion de Weyl λ (le jaugino) et un champ auxiliaire D .

Le superchamp de force associé au superchamp vecteur est donné par les superchamps (anti-)chiraux invariants de jauge :

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}^2D_\alpha V \quad (4.20)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}D^2\bar{D}_{\dot{\alpha}}V. \quad (4.21)$$

Le champ de force tensoriel usuel $F_{\mu\nu}$ se trouve dans la composante θ de W_α . Le Lagrangien cinétique d'un superchamp vecteur libre est alors :

$$\mathcal{L}_{jauge} = \frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha |_{\theta^2} + \frac{1}{4}\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}} |_{\bar{\theta}^2} \quad (4.22)$$

qui nous donne le lagrangien supersymétrique en terme des champs composantes :

$$\mathcal{L}_{jauge} \sim -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + j_{auginos} \quad (4.23)$$

théorie de jauge supersymétrique (cas abélien)

Un superchamp (anti-)chiral se transforme sous une transformation de jauge abélienne selon :

$$\Phi_l \rightarrow e^{-iQ_l\Lambda}\Phi_l \quad (4.24)$$

$$\bar{\Phi}_l \rightarrow e^{iQ_l\bar{\Lambda}}\bar{\Phi}_l \quad (4.25)$$

où Q_l est la charge du superchamp sous la symétrie et Λ est un superchamp chiral. Pour que la partie cinétique du lagrangien précédent, eq. (4.15), soit invariante, nous devons la modifier :

$$\mathcal{L}_{cin} = \bar{\Phi}_l e^{i2Q_l V} \Phi_l \quad (4.26)$$

Nous avons alors l'action suivante (renormalisable) la plus générale, dans le cas d'une symétrie de jauge abélienne :

$$\begin{aligned} S = \int d^8z & [\bar{\Phi}_l e^{i2Q_l V} \Phi_l + \frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha \delta(\bar{\theta}) + \frac{1}{4}\bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \delta(\theta) \\ & + (\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3!}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k)\delta(\bar{\theta}) + h.c.] \end{aligned} \quad (4.27)$$

théorie de jauge supersymétrique (cas non-abélien)

Dans le cas non-abélien, les générateurs du groupe de jauge forment l'algèbre de Lie suivante :

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (4.28)$$

où les f^{abc} sont les constantes de structure et les générateurs T^a sont normalisés tels que

$$Tr(T^a T^b) = k \delta^{ab}, \quad k > 0 \quad (4.29)$$

Les transformations des superchamps chiraux se généralisent en

$$\Phi_i \rightarrow e^{-i\Lambda_{ij}} \Phi_j \quad (4.30)$$

$$\bar{\Phi}_i \rightarrow e^{i\bar{\Lambda}_{ij}} \bar{\Phi}_j \quad (4.31)$$

avec

$$\Lambda_{ij} = T_{ij}^a \Lambda_a \quad (4.32)$$

Pour assurer l'invariance de jauge du terme cinétique chiral, le superchamp vecteur doit lui se transformer selon :

$$e^{2gV} \rightarrow e^{-i\bar{\Lambda}} e^{2gV} e^{i\Lambda} \quad (4.33)$$

où $V = T^a V^a$. Le superchamp de force se réécrit :

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar{D}^2 e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV} \quad (4.34)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4} D^2 e^{-2gV} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{2gV} \quad (4.35)$$

et doit se transformer selon

$$W_\alpha \rightarrow e^{-i\Lambda} W_\alpha e^{i\Lambda} \quad (4.36)$$

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{i\bar{\Lambda}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} e^{-i\bar{\Lambda}} \quad (4.37)$$

L'action la plus générale (renormalisable) est alors :

$$S_{SYM} = S_{jauge} + S_{mat} \quad (4.38)$$

$$S_{jauge} = \int d^8z \frac{Tr}{16k^2} (W^\alpha W_\alpha \delta(\bar{\theta}) + \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \delta(\theta)) \quad (4.39)$$

$$S_{mat} = \int d^8z \left[\bar{\Phi}_l e^{i2Q_l V} \Phi_l + \left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!} \lambda_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \delta(\bar{\theta}) \right] \quad (4.40)$$

La quantification de cette action introduit un terme de fixation de jauge, $\int d^8z \mathcal{L}_{GF}$, et un terme de fantômes de Faddeev-Popov, $\int d^8z \mathcal{L}_{FP}$, que nous ne détaillerons pas. On peut les trouver ainsi que les règles de Feynman dans [69].

4.1.2 Le théorème de non-renormalisation

Nous allons présenter ici un théorème très important des théories supersymétriques, connu sous le nom de *théorème de non-renormalisation*. Il peut être énoncé comme suit :

"dans une théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$, il n'y a pas de contribution à la renormalisation de la masse et à la renormalisation des constantes de couplage, en dehors de celles dues à la renormalisation des superchamps."

Autrement dit, le superpotentiel n'est renormalisé qu'indirectement *via* la renormalisation des superchamps seulement.

4.2 Renormalisation du couplage κ

4.2.1 Masse des neutrinos

L'interaction effective

Comme discuté au chapitre précédent, l'effet à basse énergie d'une nouvelle physique à haute énergie (nouvelles particules, nouvelles interactions) se décrit à basse énergie par une tour d'interactions effectives. Celles-ci sont paramétrées par des opérateurs non-renormalisables, organisés par dimension :

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{MS} + \frac{\mathcal{O}_5}{M} + \frac{\mathcal{O}_6}{M^2} + \dots \quad (4.41)$$

où M est une échelle caractéristique de l'interaction (par exemple la masse d'une particule lourde virtuelle). En particulier, l'effet d'un mécanisme de génération de la masse des neutrinos à une énergie M peut se paramétrer à beaucoup plus basse énergie par l'interaction effective suivante :

$$-\frac{1}{4M}\kappa^{AB}(\epsilon_{ij}H_iL_j^A)(\epsilon_{kl}H_kL_l^B) + h.c. \quad (4.42)$$

Cet opérateur de dimension 5 est par ailleurs le seul opérateur de dimension 5 que l'on peut construire avec les symétries du MS et son contenu en particules. Lors de la brisure de la symétrie électrofaible $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, le champ de Higgs développe une valeur dans le vide non-nulle, v , et cette interaction devient équivalente à :

$$-\frac{v^2}{4M}\kappa^{AB}(\nu^A\nu^B) + h.c. \quad (4.43)$$

c'est-à-dire un terme de masse (de Majorana) pour les neutrinos. Les limites expérimentales⁴ nous donnent l'ordre de grandeur $M = \mathcal{O}(10^{13} - 10^{14})$ GeV en supposant que $\kappa = \mathcal{O}(1)$.

L'origine des masses

Un des exemples les plus simples à l'origine de l'opérateur (4.42) est le mécanisme de la balançoire ('*seesaw mechanism*' [70]). C'est un mécanisme minimal, sans nouvelles interactions de jauge, renormalisable et qui requiert uniquement l'introduction de neutrinos lourds droits N_i . Ces nouveaux neutrinos droits se couplent aux neutrinos gauches *via* un couplage de Yukawa

4. On a une idée de l'ordre de grandeur de la masse d'un neutrino en prenant $m_\nu \sim \sqrt{\Delta m_{23}^2} \sim 5 \times 10^{-2}$ eV. La valeur dans le vide du champ de Higgs est de l'ordre de 200 GeV.

(et donnent donc une masse de Dirac, m_D). Les neutrinos droits peuvent former entre-eux un terme de masse de Majorana, de masse $M \gg m_W$. Dans le mécanisme de *seesaw* minimal, le lagrangien du secteur des neutrinos contient alors :

$$\underbrace{- (Y_\nu)_{ij} H \bar{N}_i \begin{pmatrix} \nu \\ L \end{pmatrix}_j}_{\text{“masse de Dirac” / couplage de Yukawa}} \quad \underbrace{- \frac{1}{2} \bar{N}_i \mathcal{M}_{ij} \bar{N}_j}_{\text{“masse de Majorana”}} \quad (4.44)$$

Si nous combinons ces deux types de masse dans une matrice de masse générale, nous obtenons :

$$(\nu_L, N) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M \end{pmatrix}}_{M_{seesaw}} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

ce qui nous donne, en diagonalisant, la matrice de masse effective des neutrinos gauches :

$$\mathcal{M}_\nu = M_D \frac{1}{M} M_D^T \ll M_{quarks, leptons}, \quad (4.46)$$

où M_D et M sont des matrices 3×3 dans l'espace des saveurs. Sous forme de diagramme, le mécanisme de la balançoire est représentée sur la figure (4.1).

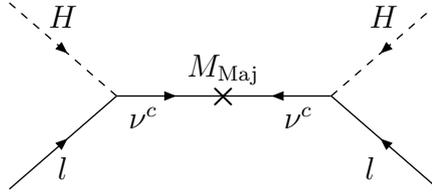


FIG. 4.1 – Diagramme de Feynman du mécanisme de *seesaw* de type I, responsable possible de la masse des neutrinos.

Il existe d'autres mécanismes de *seesaw*, non-minimaux, dans lesquels sont ajoutés des champs supplémentaires. Le mécanisme précédent est souvent appelé le *mécanisme de seesaw de type I* et n'est pas la seule possibilité d'obtenir l'opérateur effectif (4.42). Dans le *mécanisme de seesaw de type II* ce sont des Higgs lourds triplets de $SU(2)_L$ qui sont échangés et dans le *double seesaw*, ce sont d'autres neutrinos (en plus des 3 du mécanisme type I) que l'on ajoute, mais qui ne se couplent pas aux neutrinos gauches. Le mécanisme se produit grâce au couplage avec les neutrinos droits.

Il existe une alternative au seesaw dans le cas d'une théorie supersymétrique avec violation de la R -parité. En effet, comme le nombre leptonique n'est pas conservé, il n'est pas étonnant que la supersymétrie sans R -parité puisse apporter une explication aux masses et mélanges des neutrinos. Par exemple, au niveau de l'arbre nous pouvons avoir un terme de masse de la forme :

$$(M_\nu)_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{m_{SUSY}} \quad (4.47)$$

où μ_i est le couplage bilinéaire entre les champs leptoniques et le champ de Higgs haut, cf partie 2 eq. (3.66). Au niveau d'une boucle il y a beaucoup de possibilités. Par exemple, une boucle de slepton-lepton donnerait [41] :

$$(M_\nu)_{ij} \sim \frac{1}{8\pi^2} \lambda_{ink} \lambda_{jkn} \frac{m_{l_n} m_{l_k}}{m_{SUSY}}, \quad (4.48)$$

L'importance relative des contributions possibles dépend du modèle. Dans ce contexte, nous pouvons établir une hiérarchie entre les masses, en générant par exemple une masse à l'arbre grâce au terme (4.47) et les deux autres par des termes du genre (4.48).

4.2.2 Résultat à 4 dimensions dans le MSSM

théorie de jauge supersymétrique générale

On rappelle que pour une théorie de jauge supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ générale on a le lagrangien suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \int d^4\theta \sum_{i,j=1}^{N_\Phi} \bar{\Phi}^{(i)} [e^{2g \cdot V}]_{ij} \Phi^{(j)} + \left(\frac{1}{4} \int d^2\theta \sum_{n=1}^{N_g} W_\alpha^n W^{n\alpha} + h.c. \right) \\ & + \left(\int d^2\theta \mathcal{W} + h.c. \right) + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{GF} \end{aligned} \quad (4.49)$$

où \mathcal{W} est le superpotentiel de forme générale :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N_\Phi} m_{ij} \Phi^{(i)} \Phi^{(j)} + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{N_\Phi} \lambda_{ijk} \Phi^{(i)} \Phi^{(j)} \Phi^{(k)} + (\mathcal{W}_{NR}). \quad (4.50)$$

Les fonctions d'onde des superchamps chiraux reçoivent 2 types de corrections : les corrections faisant intervenir une boucle de superchamps chiraux, figure (4.2) et celles faisant intervenir une boucle de superchamps chiral et vecteur, figure (4.3).

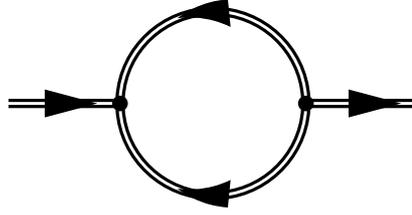


FIG. 4.2 – Contribution d'une boucle de superchamps chiraux à la self-énergie d'un superchamp chiral

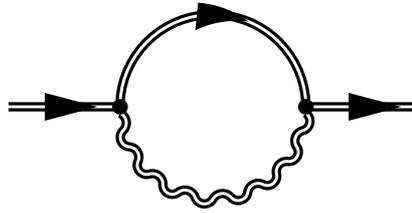


FIG. 4.3 – Contribution d'une boucle de superchamps chiral et vecteur à la self-énergie d'un superchamp chiral. Les superchamps chiraux sont représentés par des doubles lignes droites et les superchamps vecteurs par des doubles lignes ondulées.

Le résultat total à une boucle de la renormalisation de la fonction d'onde d'un superchamp chiral est :

$$-\delta Z_{ij}^{1loop} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\sum_{k,l=1}^{N_\Phi} \lambda_{ikl}^* \lambda_{jkl} - 4 \sum_{n=1}^{N_g} g_n^2 C_2(R_n^{(i)}) \delta_{ij} \right) \frac{1}{\epsilon} \quad (4.51)$$

où δZ_{ij} est défini comme ceci :

$$\Phi_{nu}^{(i)} = \sum_{j=1}^{N_\Phi} Z_{ij}^{1/2} \Phi^{(j)} \quad (4.52)$$

$$\delta Z_{ij} = Z_{ij} - 1_{ij} \quad (4.53)$$

Le facteur de théorie des groupes $C_2(R)$ est défini par

$$C_2(R) \delta_{ab} = \sum_A (T^A T^A)_{ab} , \quad (4.54)$$

où les T^A sont les représentations matricielles des générateurs du groupe de jauge correspondant à la représentation irréductible R du champ Φ . À la

place du pôle en $\frac{1}{\epsilon}$ on pourrait avoir $\log\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)$ où Λ est un *cut-off* et μ l'échelle arbitraire de renormalisation.

MSSM

Dans le cas du MSSM, on a un superpotentiel qui contient les termes de Yukawa suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{Yukawa} = & (Y_e)_{\alpha\beta}(E^\alpha)^c H_a^{(1)} \epsilon^{ab} L_b^\beta \\ & + (Y_d)_{\alpha\beta}(D^\alpha)^c H_a^{(1)} \epsilon^{ab} Q_b^\beta \\ & + (Y_u)_{\alpha\beta}(U^\alpha)^c H_a^{(2)} (\epsilon^T)^{ab} Q_b^\beta\end{aligned}\quad (4.55)$$

et l'opérateur de dimension 5 responsable de la masse des neutrinos s'écrit :

$$\mathcal{W}_\kappa = -\frac{1}{4}\kappa_{\alpha\beta} L_a^\alpha \epsilon^{ab} H_b^{(u)} L_c^\beta \epsilon^{cd} H_d^{(u)}\quad (4.56)$$

Dans l'article [75], une méthode a été développée pour obtenir l'expression de la fonction bêta du couplage d'un opérateur quelconque, à partir des constantes de renormalisation des fonctions d'onde (dans une théorie supersymétrique). Le résultat pour l'opérateur de dimension 5 et son coefficient κ est [72] :

$$\beta_\kappa = -\delta Z_{H^{(u)}} \cdot \kappa - \frac{1}{2} \delta Z_L^T \cdot \kappa - \frac{1}{2} \kappa \delta Z_L\quad (4.57)$$

$$= \alpha \kappa + X^T \cdot \kappa + \kappa \cdot X\quad (4.58)$$

où X est une matrice, $Z_{H^{(u)}}$ et Z_L sont respectivement les constantes de renormalisation des fonctions d'onde du supermultiplet de Higgs haut et du supermultiplet leptonique. Ces constantes de renormalisation s'obtiennent en calculant les corrections au propagateur $\bar{\Phi}\Phi$.

D'après l'équation (4.51), les constantes de renormalisation de $Z_{H^{(2)}}$ et Z_L sont [72] :

$$-(16\pi^2)\delta Z_{H^{(u)}} = 6\text{Tr}(Y_u^\dagger \cdot Y_u) - \frac{3}{5}g_1^2 - 3g_2^2\quad (4.59)$$

$$-(16\pi^2)\delta Z_L = 2Y_e^\dagger \cdot Y_e - \frac{3}{5}g_1^2 - 3g_2^2\quad (4.60)$$

On en déduit donc

$$X = \frac{1}{16\pi^2} Y_e^\dagger \cdot Y_e\quad (4.61)$$

$$\alpha = \frac{1}{16\pi^2} \left(6\text{Tr}(Y_u^\dagger \cdot Y_u) - \frac{6}{5}g_1^2 - 6g_2^2 \right)\quad (4.62)$$

La fonction bêta de la constante de couplage κ est alors :

$$(16\pi^2)\beta_\kappa = \left(6\text{Tr}(Y_u^\dagger \cdot Y_u) - \frac{6}{5}g_1^2 - 6g_2^2\right)\kappa + [Y_e^T \cdot Y_e^*]\kappa + \kappa [Y_e^\dagger \cdot Y_e] \quad (4.63)$$

L'évolution de κ est complexe, dirigée principalement par l'évolution du couplage de Yukawa du top ainsi que de celle des couplages de jauge. On retrouve les analyses du secteur des neutrinos dans les références [73, 74].

4.3 Calcul dans le "MSSM" à 5 dimensions

Le but est de reproduire le calcul précédent mais dans un modèle comportant une dimension supplémentaire. L'évolution des paramètres contenus dans κ , compte-tenu de la loi de puissance discutée au chapitre précédent, pourra être plus rapide et la structure de κ fortement modifiée.

4.3.1 Description du modèle et du spectre

Notre modèle est le MSSM dans lequel nous ajoutons une dimension spatiale supplémentaire, compactifiée sur l'orbifold S^1/Z_2 et accessible dans un premier temps à toutes les particules. Ce modèle ou sa réduction à 4d n'est valable que jusqu'à une certaine échelle M au-delà de laquelle un modèle plus fondamental (éventuellement renormalisable) doit prendre place. Ce type de modèle permet l'unification des couplages, on peut donc imaginer qu'à l'échelle M , la symétrie de jauge soit étendue dans un modèle de grande unification.

D'après notre discussion au chapitre 2, à chaque superchamp nous associerons une tour infinie de modes de Kaluza-Klein de masse $\sim n/R$ où R^{-1} est un peu plus grand que le TeV. Les modes $n \geq 1$ forment des représentations de la supersymétrie $\mathcal{N} = 1$ à 5d que nous pouvons réarranger en représentations de supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ à 4d. En effet, la supercharge à 5 dimensions (qui est un spineur de Dirac) peut être décomposée en 2 supercharges, spineurs de Majorana, formant une superalgèbre $\mathcal{N} = 2$ à 4d. Donc à un superchamp vecteur V du MSSM, nous associerons des modes de Kaluza-Klein formant un *hypermultiplet vecteur* $\Omega = (V, \chi)$ où χ est un nouveau superchamp chiral appartenant à la représentation adjointe du groupe de jauge du boson vecteur. De même, à chaque superchamp chiral Φ du MSSM, nous associerons un hypermultiplet $\Sigma = (\Phi, \Phi^c)$ où Φ^c est le superchamp chiral miroir de Φ . Une description d'une théorie supersymétrique $\mathcal{N} = 1$ à 5d non compactifiée et de ses règles de Feynman se trouve dans la référence [69]. Nous avons adapté cette description à notre modèle, le MSSM sur S^1/Z_2 , et

le lagrangien détaillé se trouve en annexe à partir duquel nous avons effectué les calculs.

La parité Z_2 introduite permet, après réduction dimensionnelle de notre modèle initial à 5d, de ne garder que les superchamps V et Φ du MSSM. Autrement dit, seuls ces superchamps sont pairs et possèdent des modes zéro. Les superchamps χ et Φ^c sont en revanche impairs. Nous brisons donc une supersymétrie sur la brane reliant V à χ et Φ à Φ^c . Leurs décompositions de Fourier sont les suivantes :

$$V(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[V^{(0)}(x) + \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} V^{(n)}(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \right] \quad (4.64)$$

$$\chi(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sum_{n \geq 1} \chi^{(n)}(x) \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (4.65)$$

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \left[\Phi^{(0)}(x) + \sqrt{2} \sum_{n \geq 1} \Phi^{(n)}(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \right] \quad (4.66)$$

$$\Phi^c(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sum_{n \geq 1} \Phi^{c(n)} \sin\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (4.67)$$

La seconde supersymétrie, celle du MSSM "habituel" à 4d, est brisée de façon douce par les termes explicités au chapitre 3 de la première partie. De plus, cette parité définit dans notre modèle la chiralité nécessaire pour les quarks et leptons.

À des échelles d'énergie très inférieures à R^{-1} , les excitations de Kaluza-Klein sont invisibles et la physique se réduit au MSSM à 4 dimensions. En revanche, pour $E \gg R^{-1}$, nous avons une infinité d'états de Kaluza-Klein à inclure dans le calcul des corrections quantiques. Cependant, à une échelle d'énergie E donnée, seul un nombre fini de ces modes peuvent être considérés, les modes de masse supérieure à E se découplent.

Les termes d'interaction entre 3 superchamps chiraux (ou plus) sont interdits dans notre modèle par les symétries du bulk (invariance de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, invariance de Lorentz à 5d et supersymétrie $\mathcal{N} = 2$ à 4d). En revanche, sur les branes, nous pouvons localiser ces interactions de Yukawa (et l'interaction effective 4.42). Nous avons fait le choix de placer ces interactions au point fixe $y = 0$:

$$S_{brane} = \int d^8z dy \delta(y) \left\{ \left(\frac{1}{6} \tilde{\lambda}_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k + \frac{1}{4} \tilde{\kappa}_{ij} L_i H_u L_j H_u \right) \delta(\bar{\theta}) + \text{h.c.} \right\} \quad (4.68)$$

Nous allons maintenant donner les résultats du calcul dans ce modèle, les détails et les étapes intermédiaires de calcul étant renvoyés en annexe.

4.3.2 Résultats

Self-énergie d'un superchamp chiral

Tout d'abord nous allons chercher à calculer l'équivalent du résultat (4.51) dans une théorie de jauge supersymétrique générale à 5D avec une interaction de brane entre superchamps chiraux de la forme $\lambda\Phi\Phi\Phi\delta(y)$, cf Eq.4.68. Nous ne calculerons que les constantes de renormalisation des superchamps fondamentaux car ce sont celles-ci qui interviennent dans les fonctions beta des couplages. Les superchamps externes auront donc des modes de Kaluza-Klein nuls. Nous pouvons distinguer plusieurs types de contributions :

- Les contributions des termes du bulk (modes $n > 0$) consistent en une boucle de V et Φ ou une boucle de χ et Φ . Dans ces 2 sous-contributions, les modes de Kaluza-Klein dans la boucle sont identiques, figure (4.4).
- Les contributions des termes de branes des modes non-nuls comprennent un diagramme dans le superspace avec une boucle de Φ , mais les sommes de Kaluza-Klein sont cette fois de nature différente de celles du bulk. On a une boucle de modes non-nuls qui ne sont pas contraints à être identiques, il faut donc sommer sur les 2 indices. De plus, on a aussi une boucle avec un mode zéro et une somme sur un mode $n > 0$ ⁵, figure (4.5).
- Enfin, aux deux types de contributions précédentes il faut ajouter celle des modes strictement nuls dans la boucle.

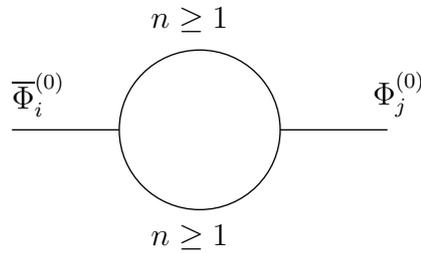


FIG. 4.4 – Modes de Kaluza-Klein dans la boucle des termes du bulk.

Au total, nous obtenons pour la self-énergie d'un superchamp chiral :

$$-(16\pi^2) \delta Z_{\Phi}^{5D} = \left(-8 \sum_{n=1}^{N_g} g_n^2 C_2(R_n^{(i)}) \delta_{ij} \right) \Lambda R + \left(2\pi \sum_{k,l=1}^{N_{\Phi}} \lambda_{ikl}^* \lambda_{jkl} \right) \Lambda^2 R^2 . \quad (4.69)$$

5. Ceci vient de la décomposition de la double somme :

$$\sum_{n \geq 0, m \geq 0} [\dots] - [\dots]_{n=0, m=0} = \sum_{n \geq 1, m \geq 1} [\dots] + \sum_{n \geq 0} [\dots]_{m=0} + \sum_{m \geq 0} [\dots]_{n=0}$$

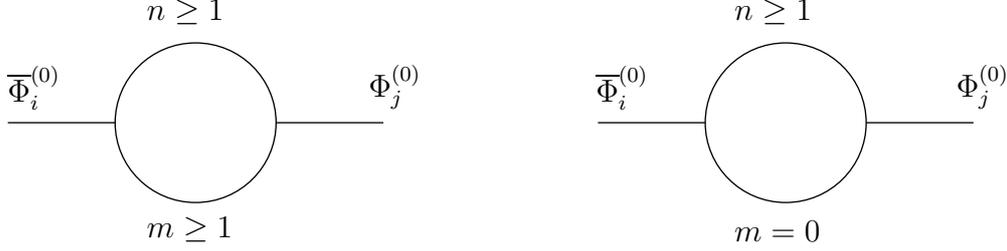


FIG. 4.5 – Modes de Kaluza-Klein dans la boucle induits par le terme de brane.

Ce résultat s'applique aussi bien aux superchamps de matière qu'aux superchamps de Higgs. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
-(16\pi^2) \delta Z_{H_u} &= 12\pi \text{Tr}(Y_u^\dagger Y_u) \Lambda^2 R^2 - \left(\frac{6}{5}g_1^2 + 6g_2^2\right) \Lambda R \\
-(16\pi^2) \delta Z_{H_d} &= 4\pi [3\text{Tr}(Y_d^\dagger Y_d) + \text{Tr}(Y_e^\dagger Y_e)] \Lambda^2 R^2 - \left(\frac{6}{5}g_1^2 + 6g_2^2\right) \Lambda R \\
-(16\pi^2) \delta Z_L &= 4\pi (Y_e^\dagger Y_e) \Lambda^2 R^2 - \left(\frac{6}{5}g_1^2 + 6g_2^2\right) \Lambda R \\
-(16\pi^2) \delta Z_{EC} &= 8\pi (Y_e^* Y_e^T) \Lambda^2 R^2 - \left(\frac{24}{5}g_1^2\right) \Lambda R \\
-(16\pi^2) \delta Z_{Dc} &= 8\pi (Y_d^* Y_d^T) \Lambda^2 R^2 - \left(\frac{8}{15}g_1^2 + \frac{32}{3}g_3^2\right) \Lambda R \\
-(16\pi^2) \delta Z_Q &= 4\pi (Y_u^\dagger Y_u + Y_d^\dagger Y_d) \Lambda^2 R^2 - \left(\frac{2}{15}g_1^2 + 6g_2^2 + \frac{32}{3}g_3^2\right) \Lambda R \\
-(16\pi^2) \delta Z_{Uc} &= 8\pi (Y_u^* Y_u^T) \Lambda^2 R^2 - \left(\frac{32}{15}g_1^2 + \frac{32}{3}g_3^2\right) \Lambda R
\end{aligned}$$

Fonctions β

Avec l'équation générale (4.57) nous en déduisons directement la fonction bêta du couplage κ :

$$\begin{aligned}
(16\pi^2)\beta_\kappa &= \left(\left(-\frac{12}{5}g_1^2 - 12g_2^2\right) \Lambda R + 24\pi \text{Tr}(Y_u^\dagger \cdot Y_u) \Lambda^2 R^2 \right) \kappa \\
&+ \left([Y_e^T Y_e^*] \kappa + \kappa [Y_e^\dagger Y_e] \right) 4\pi \Lambda^2 R^2
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Cette fonction bêta nous donne l'évolution de κ en fonction de Λ , à partir de l'échelle d'énergie $\mu = R^{-1}$, selon l'équation différentielle :

$$\beta_\kappa^{5D} = \frac{d\kappa(\Lambda)}{d \log(\Lambda R)} \tag{4.71}$$

De même, nous pouvons déduire à partir des équations suivantes les fonctions beta des différents couplages de Yukawa :

$$\begin{aligned}\beta_{Y_d} &= -\frac{1}{2}\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}(\delta Z_{D^c}^T Y_d + Y_d\delta Z_Q + Y_d\delta Z_{H_d}) \\ \beta_{Y_u} &= -\frac{1}{2}\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}(\delta Z_{U^c}^T Y_u + Y_u\delta Z_Q + Y_u\delta Z_{H_u}) \\ \beta_{Y_e} &= -\frac{1}{2}\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}(\delta Z_{E^c}^T Y_e + Y_e\delta Z_L + Y_e\delta Z_{H_d})\end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}(16\pi^2)\beta_{Y_d} &= Y_d(3\text{Tr}(Y_d^\dagger Y_d) + \text{Tr}(Y_e^\dagger Y_e) + 3Y_d^\dagger Y_d + Y_u^\dagger Y_u)4\pi\Lambda^2 R^2 \\ &- Y_d\left(\frac{14}{15}g_1^2 + 6g_2^2 + \frac{32}{3}g_3^2\right)\Lambda R\end{aligned}\quad (4.72)$$

$$\begin{aligned}(16\pi^2)\beta_{Y_u} &= Y_u(3\text{Tr}(Y_u^\dagger Y_u) + 3Y_u^\dagger Y_u + Y_d^\dagger Y_d)4\pi\Lambda^2 R^2 \\ &- Y_u\left(\frac{26}{15}g_1^2 + 6g_2^2 + \frac{32}{3}g_3^2\right)\Lambda R\end{aligned}\quad (4.73)$$

$$\begin{aligned}(16\pi^2)\beta_{Y_e} &= Y_e(3\text{Tr}(Y_d^\dagger Y_d) + \text{Tr}(Y_e^\dagger Y_e) + 3Y_e^\dagger Y_e)4\pi\Lambda^2 R^2 \\ &- Y_e\left(\frac{18}{5}g_1^2 + 6g_2^2\right)\Lambda R\end{aligned}\quad (4.74)$$

Discussion

Numériquement, les fonctions β seront surtout dominées par les divergences quadratiques en ΛR . Par rapport au cas quadri-dimensionnel l'évolution sera alors très rapide. Cependant, cette forte dépendance au *cut-off* est doublement dangereuse : d'un côté elle altère fortement la prédictivité (la physique de la saveur dans notre modèle est très sensible à la physique au-delà de Λ) et de l'autre côté elle nous amène très vite au domaine non-perturbatif de la théorie, tel que $\frac{y_t(M_{NP})^2}{4\pi} \geq 1$.

Sur la figure (4.6) on observe même que le couplage de Yukawa du top diverge avant que l'unification des couplages de jauge n'ai lieu. La non-perturbativité est atteinte au bout de quelques ΛR et limite fortement l'analyse de la physique de la saveur dans ce modèle.

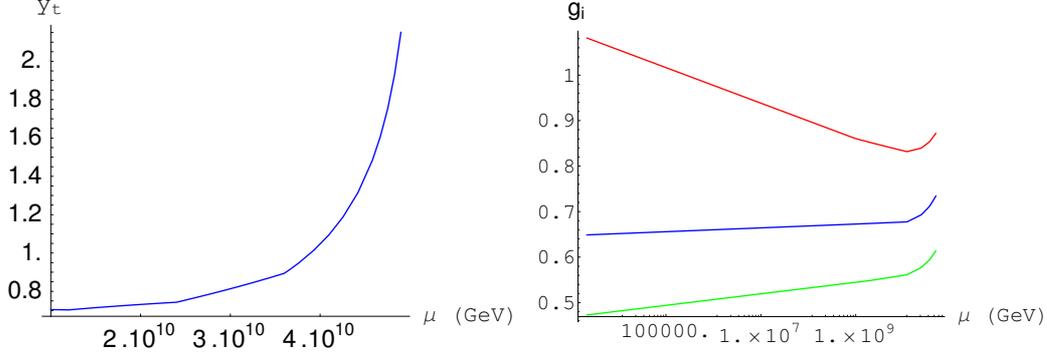


FIG. 4.6 – Couplage de Yukawa du quark top (à gauche) et couplages de jauge (à droite). Nous avons pris $R^{-1} \sim 10^{10} \text{ GeV}$.

4.4 Localisation des fermions du MS sur une brane

Pour éviter ces divergences quadratiques tout en localisant sur la brane les interactions de Yukawa et l'opérateur effectif de la masse des neutrinos, nous pouvons interdire l'accès à la 5ème dimension aux fermions du MS (et à leurs champs associés). Ainsi, en l'absence d'excitations de KK pour ces champs, nous n'avons plus de double sommation d'états de KK dans une boucle et donc plus de divergences quadratiques. A la place, nous aurons des divergences au plus **linéaires**. Le higgs ayant toujours accès à la cinquième dimension, cette fois les constantes de renormalisation seront différentes entre superchamps de matière et superchamps de Higgs. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 -(16\pi^2) \delta Z_{\Phi}^f &= \left(-16 \sum_{n=1}^{N_g} g_n^2 C_2(R_n^{(i)}) \delta_{ij} + 4 \sum_{k,l=1}^{N_{\Phi}} \lambda_{ikl}^* \lambda_{jkl} \right) \Lambda R \quad (4.75) \\
 -(16\pi^2) \delta Z_H &= \left(-8 \sum_{n=1}^{N_g} g_n^2 C_2(R_n^{(i)}) \delta_{ij} \right) \Lambda R + \left(\sum_{k,l=1}^{N_{\Phi}} \lambda_{ikl}^* \lambda_{jkl} \right) \log \Lambda R
 \end{aligned}$$

Comme dans le contexte précédent nous pouvons directement obtenir les constantes de renormalisation pour chaque superchamps du MSSM et en déduire les diverses fonctions bêta :

$$(16\pi^2) \beta_{\kappa} = \left(-\frac{18}{5} g_1^2 - 18 g_2^2 \right) \kappa \Lambda R + 6 \text{Tr}(Y_u^{\dagger} \cdot Y_u) \kappa + (\kappa 4 Y_e^{\dagger} \cdot Y_e + 4 Y_e^T \cdot Y_e^* \kappa) \Lambda R. \quad (4.76)$$

et pour les couplages de Yukawa :

$$(16\pi^2)\beta_{Y_d} = Y_d(3\text{Tr}(Y_d^\dagger Y_d) + \text{Tr}(Y_e^\dagger Y_e)) \quad (4.77)$$

$$+ Y_d \left(-\frac{19}{15}g_1^2 - 9g_2^2 - \frac{64}{3}g_3^2 + 12Y_d^\dagger Y_d + 4Y_u^\dagger Y_u \right) \Lambda R$$

$$(16\pi^2)\beta_{Y_u} = 3Y_u \text{Tr}(Y_u^\dagger Y_u) \quad (4.78)$$

$$+ Y_u \left(-\frac{43}{15}g_1^2 - 9g_2^2 - \frac{64}{3}g_3^2 + 12Y_u^\dagger Y_u + 4Y_d^\dagger Y_d \right) \Lambda R$$

$$(16\pi^2)\beta_{Y_e} = Y_e(3\text{Tr}(Y_d^\dagger Y_d) + \text{Tr}(Y_e^\dagger Y_e)) \quad (4.79)$$

$$+ Y_e \left(-\frac{33}{5}g_1^2 - 9g_2^2 + 12Y_e^\dagger Y_e \right) \Lambda R$$

Nous voyons clairement que les divergences en fonction ΛR ont été réduites et la limite de validité de notre modèle est ainsi repoussée.

4.4.1 Analyse numérique des masses et angles de mélanges

Le but de cette sous-section est de présenter quelques résultats intéressants obtenus dans notre modèle et qui concernent les masses des neutrinos et leurs angles de mélanges.

L'étude numérique des corrections quantiques aux paramètres du secteur des neutrinos (masses, angles de mélanges et phases) dans ce nouveau contexte peut être effectuée avec le package Mathematica 'REAP' [73] après y avoir inclu nos fonctions bêta. Les équations d'évolution analytiques approchées des paramètres se trouvent dans les références [74, 76]. Elles s'adaptent aisément à nos résultats.

Les masses

L'évolution des masses de la figure (4.7) montre tout d'abord une des premières spécificités de notre modèle. On observe un comportement général pour les 3 masses : une décroissance quasi-identique aboutissant à une réduction d'un facteur d'ordre 5 au plus. Ceci est relativement indépendant du choix des paramètres à basse-énergie pour la raison suivante. Analytiquement, l'évolution des masses est donnée par un coefficient universel négatif et proportionnel à ΛR :

$$\frac{dm_i}{d(t = \ln \Lambda R)} = \frac{1}{16\pi^2} [\alpha + 4\Lambda R y_\tau^2 a_i] m_i \quad (4.80)$$

$$\sim \frac{1}{4\pi^2} \Lambda R \left(-\frac{18}{5}g_1^2 - 18g_2^2 \right) m_i \quad (4.81)$$

Dans le MSSM à 4d, la somme des coefficients α et C reste d'ordre 1, tout en restant positive.

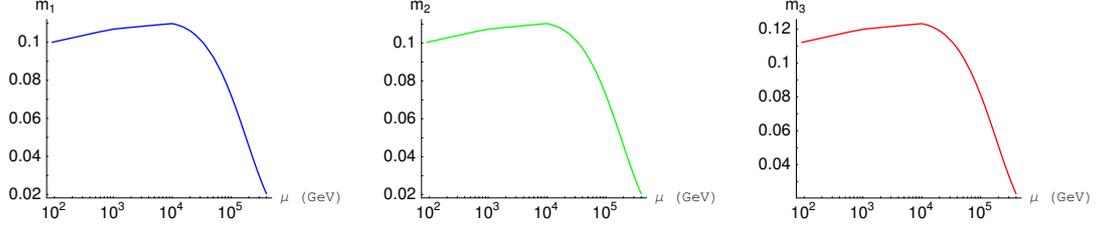


FIG. 4.7 – Evolution des 3 masses pour le choix $R^{-1} = 10^4 \text{ GeV}$, $m_1 = 0.1 \text{ eV}$, $\theta_{13} = 0$ et des phases nulles à M_Z .

De même, les différences de masses au carré suivent les mêmes évolutions. Cependant, dans un cas particulier, l'évolution de Δm_{sol}^2 est moins triviale. En effet, quand m_1 n'est pas petit devant m_2 (*i.e.* $\sqrt{\Delta m_{sol}^2} \ll m_1$), la dominance des contributions dans l'équation d'évolution de Δm_{sol}^2 peut s'inverser et on observe la "bosse" de la figure (4.8).

$$\frac{d}{dt} \Delta m_{sol}^2 = \frac{1}{8\pi^2} \left[\alpha \Delta m_{sol}^2 + 4\Lambda R y_\tau^2 \left[2s_{23}^2 (m_2^2 c_{12}^2 - m_1^2 s_{12}^2) + \mathcal{O}(\theta_{13}) \right] \right] \quad (4.82)$$

Ce comportement se produit aussi dans le MSSM à 4d, mais sur des échelles

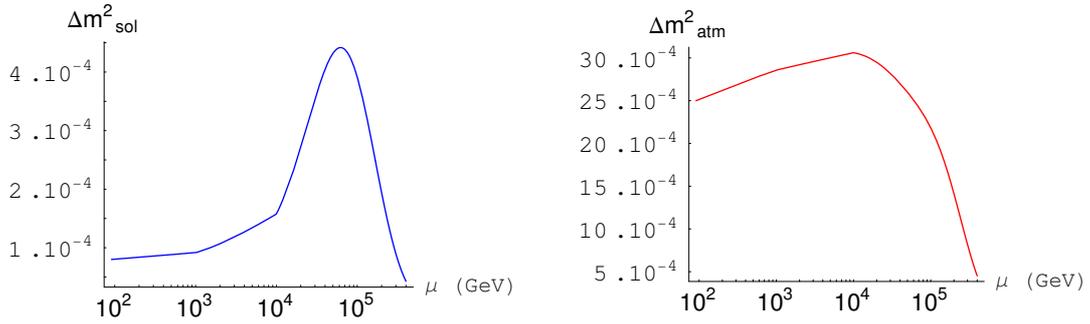


FIG. 4.8 – Evolution de Δm_{sol}^2 et Δm_{atm}^2 pour le choix $\tan \beta = 50$, $R^{-1} = 10^4 \text{ GeV}$, $m_1 = 0.1 \text{ eV}$ et des phases nulles à M_Z .

d'énergie plus longues. Pour Δm_{atm}^2 , l'évolution dans le MSSM à 4d augmente sa valeur typiquement de l'ordre d'un facteur 4, c'est à dire à l'opposé de ce que qui se produit dans notre modèle (réduction typique d'un facteur 5).

Les angles de mélanges

Dans la figure (4.9) nous observons l'influence importante du paramètre $\tan\beta$ sur l'angle θ_{12} . Ceci est vrai en général pour les autres angles de mélanges qui sont proportionnels au carré de y_τ lui même proportionnel à $\tan\beta$ ($1/\cos\beta$ en fait). L'angle θ_{12} est connu pour avoir l'évolution la plus forte dans le MSSM à 4D. Il est même possible de réduire cet angle à haute énergie à quelques degrés [74]. Nous reproduisons aussi cet effet dans notre modèle mais sur un intervalle d'énergie beaucoup plus court, $\Lambda \sim 40R^{-1}$.

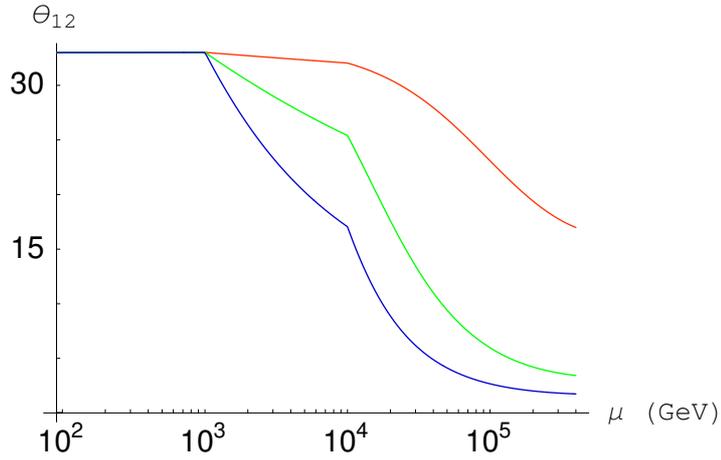


FIG. 4.9 – Evolution de θ_{12} pour différentes valeurs de $\tan\beta$: $\{10,30,50\}$, $R^{-1} = 10^4 GeV$, $m_1 = 0.1 eV$, $\theta_{13} = 0$ et des phases nulles à M_Z .

Le modèle que nous étudions permet de réaliser cela aussi avec l'angle θ_{23} ce qui est inédit, figure (4.10). En effet, dans le MSSM à 4d θ_{23} évolue de façon logarithmique à un bon degré d'approximation (de même que θ_{13}), le sens de l'évolution étant donné par le signe de Δm_{atm}^2 . L'évolution n'est cependant pas suffisante pour amener θ_{23} à des valeurs basses à haute énergie. L'angle θ_{13} qui dans le MSSM à 4d évolue grossièrement de façon logarithmique, varie ici plus fortement.

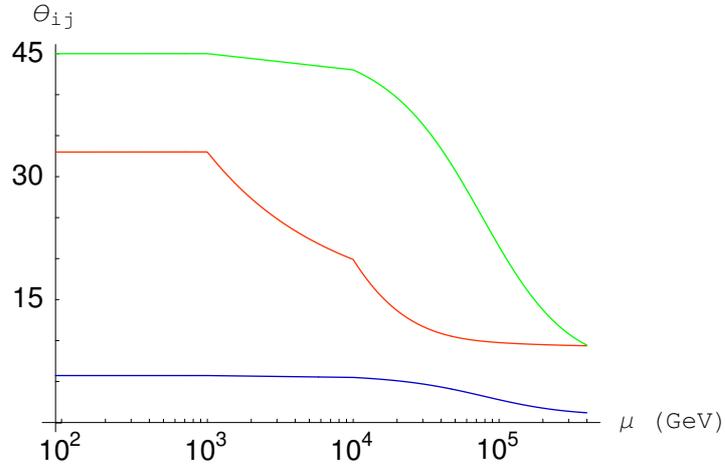


FIG. 4.10 – Les évolutions des 3 angles de mélanges sont représentées : θ_{23} (courbe supérieure), θ_{12} (courbe intermédiaire) et θ_{13} (courbe inférieure). Les paramètres choisis sont fixés aux valeurs suivantes : $\tan \beta = 50$, $R^{-1} = 10^4 \text{ GeV}$, $m_1 = 0.1 \text{ eV}$, phases nulles à M_Z .

Comme l'illustre la figure (4.10), il semble que dans notre modèle à 5d des scénarios tels que $\{\theta_{12} = \theta_{23} = \epsilon, \theta_{13} = \epsilon^2\}$ ou $\{\theta_{12} = \theta_{23} = \theta_{13} = \epsilon\}$ soient réalisables à haute énergie ($4 \times 10^3 \text{ GeV}$), annonçant ainsi la possibilité de symétries de saveurs.

Chapitre 5

Conclusions de la deuxième partie

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés à l'impact au niveau d'une boucle de l'introduction d'une dimension supplémentaire compacte. Dans un premier temps, nous avons passé en revue différentes régularisations. En particulier, nous avons présenté une régularisation par *cut-off* préservant les symétries, qui a été développée récemment dans le groupe dans lequel cette thèse a été faite. Cette régularisation a été appliquée à l'exemple de la polarisation du photon dans un modèle "pédagogique", l'électrodynamique quantique à 5 dimensions compactifiée sur le cercle S^1 . Nous avons ainsi retrouvé la loi de puissance caractérisant l'évolution typique des couplages de jauge d'une théorie extra-dimensionnelle. Notre résultat est basé sur une approche effective où la somme des états de KK est tronquée au mode $n = \Lambda R$.

Puis, nous avons discuté de l'influence de la régularisation sur la prédictivité des modèles extra-dimensionnels en l'illustrant numériquement par l'exemple de l'unification des constantes de couplages, sensible au choix de régularisation.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à l'étude phénoménologique des corrections quantiques au couplage κ de l'opérateur effectif non-renormalisable de dimension 5, responsable possible des masses et mélanges des neutrinos. Ces corrections quantiques ont été calculées dans le MSSM à 5d compactifiée sur l'orbifold S^1/Z_2 pour deux localisations différentes des champs.

Dans le premier contexte, toutes les particules ont accès à la 5ème dimension. Cependant, ce scénario devient rapidement non-perturbatif et l'étude de l'évolution des masses et angles de mélanges des neutrinos s'en trouve limitée. En effet, les fonctions bêta du couplage κ et des couplages de Yukawa dépendent quadratiquement du *cut-off*, ce qui implique par ailleurs une forte

dépendance à la physique UV.

L'origine des divergences quadratiques remontant aux interactions de Yukawa localisées sur la brane $y = 0$ et aux fermions ayant accès à la 5ème dimension, le cas où les 3 générations de fermions du MS sont contraints aux 4 dimensions infinies a été étudié. Le domaine de validité de ce scénario étant beaucoup plus grand tout en restant perturbatif jusqu'à l'unification des constantes de couplages, nous avons pu aborder l'analyse numérique de l'évolution des masses et angles de mélanges des neutrinos. Cette analyse, bien que préliminaire, a mis en évidence des effets très intéressants et annonce des possibles symétries de saveurs inaccessibles au MSSM à 4d. En particulier, les masses des neutrinos sont typiquement réduites d'un facteur au plus d'ordre 5 et les angles de mélanges peuvent "s'unifier" pour certaines points de l'espace des paramètres à des valeurs basses à haute énergie.

L'analyse peut encore être approfondie et révéler d'autres effets intéressants, en faisant intervenir d'autres paramètres, par exemple les phases. De plus, nous pouvons aussi tester explicitement la viabilité de symétries de saveurs inédites et explorer des liens avec le mélange du secteur des quarks (dans une extension de grande unification de notre modèle par exemple). Ce travail aura donc permis d'ouvrir de nouvelles portes à l'étude de la physique de la saveur à haute énergie.

Conclusion générale

La physique au-delà du Modèle Standard et sa phénoménologie est un domaine très actif dans lequel la notion de symétrie en particulier est centrale à toute étude. Les modèles construits pour prolonger le MS à des énergies plus élevées comportent en général davantage de symétries. Qu'elles soient internes comme dans les modèles de grande unification agrandissant la symétrie de jauge, ou externes dans les modèles extra-dimensionnels où la symétrie de Lorentz est étendue à 5 ou plus dimensions, l'objectif est de faire apparaître l'ordre sous-jacent au foisonnement de propriétés observées du monde des particules. La supersymétrie joue un rôle particulier car elle relie le monde bosonique au monde fermionique jusqu'alors distincts, permettant ainsi un lien entre symétries internes et externes.

Les différences observées entre les saveurs de fermions (les différentes générations) demeurent inexplicées dans le MS. Leurs origines est un aspect important de la Physique au-delà du MS. Dans cette thèse, nous avons étudié différentes possibilités de "nouvelles physiques" et notamment des variations de modèles supersymétriques. Le but était l'exploration du secteur de la saveur par la désintégration changeant la saveur $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$, dans la première partie, ou par les masses et mélanges des neutrinos dans la seconde partie.

Ainsi, nous avons d'une part montré l'intérêt de l'analyse complète à une boucle du processus $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ pour imposer des contraintes sur les couplages de nouvelles interactions violant la symétrie de R -parité. Les limites obtenues ont par la même occasion été mises à jour. Elles ne prennent cependant pas en compte les diverses erreurs expérimentales des paramètres intervenant dans le calcul du processus (masses, éléments de matrice CKM...).

D'autre part, dans le cas de modèles extra-dimensionnels nous avons étudié la régularisation des intégrales intervenant dans le calcul des corrections quantiques. Les couplages de jauge et leur unification illustrent les problèmes de prédictivité inhérents à ces modèles. Nous avons discuté d'une nouvelle façon de régulariser par un *cut-off* et de son application à l'électrodynamique quantique à 5 dimensions pour retrouver l'évolution en loi de puissance.

Enfin, nous étudié le secteur des neutrinos dans un modèle supersymé-

trique à 5 dimensions possédant le contenu en particules et interactions du MSSM. Nous avons calculé les corrections quantiques à une boucle au couplage κ de l'interaction effective à l'origine de la masse des neutrinos. Ces corrections quantiques aux divers paramètres de saveurs (Yukawa, κ) ont des comportements radicalement différents dans notre modèle par rapport au cas standard du MSSM à 4 dimensions. Les effets nouveaux annoncent des symétries de saveurs inédites et demandent une analyse plus approfondie, autant du côté du modèle que du côté des divers paramètres de saveurs.

Bibliographie

- [1] A. Deandrea, J. Welzel and M. Oertel, “ $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$ from standard to new physics,” JHEP **0410** (2004) 038 [arXiv:hep-ph/0407216].
- [2] T. Varin, J. Welzel, A. Deandrea and D. Davesne, “Power law in a gauge-invariant cut-off regularisation,” Phys. Rev. D **74** (2006) 121702 [arXiv:hep-ph/0610130].
- [3] A. Deandrea, J. Welzel, P. Hosteins and M. Oertel, “Quantum corrections to the effective neutrino mass operator in 5D MSSM,” arXiv:hep-ph/0611172.
- [4] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963). M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [5] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 870.
- [6] A. D. Sakharov, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5** (1967) 32 [JETP Lett. **5** (1967 SOPUA,34,392-393.1991 UFNAA,161,61-64.1991) 24].
- [7] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D **2** (1970) 1285.
- [8] A. J. Buras, Lect. Notes Phys. **558** (2000) 65 [arXiv:hep-ph/9901409].
- [9] G. Buchalla, A. J. Buras and M. E. Lautenbacher, Rev. Mod. Phys. **68** (1996) 1125 [arXiv:hep-ph/9512380].
- [10] T. Inami and C. S. Lim, Prog. Theor. Phys. **65** (1981) 297 [Erratum-ibid. **65** (1981) 1772].
- [11] A. J. Buras, M. Gorbahn, U. Haisch and U. Nierste, arXiv:hep-ph/0603079.
- [12] A. J. Buras, T. Ewerth, S. Jager and J. Rosiek, Nucl. Phys. B **714** (2005) 103 [arXiv:hep-ph/0408142].
- [13] A. J. Buras, F. Schwab and S. Uhlig, arXiv:hep-ph/0405132.
- [14] A. J. Buras, A. Romanino and L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **520** (1998) 3 [arXiv:hep-ph/9712398].
- [15] G. Buchalla and A. J. Buras, Nucl. Phys. B **548** (1999) 309 [arXiv:hep-ph/9901288].
- [16] G. Buchalla and A. J. Buras, Nucl. Phys. B **400** (1993) 225.
G. Buchalla and A. J. Buras, Nucl. Phys. B **398** (1993) 285.

- G. Buchalla and A. J. Buras, Nucl. Phys. B **412** (1994) 106 [arXiv:hep-ph/9308272].
- [17] W. J. Marciano and Z. Parsa, Phys. Rev. D **53** (1996) 1.
- [18] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1945.
- [19] S. Eidelman et al, Phys. Lett. **B592**, 1 (2004) and pdg.lbl.gov.
- [20] A. Sher *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 261802; AIP Conf. Proc. **698** (2004) 381 [arXiv:hep-ex/0305042].
- [21] M. Ciuchini *et al.*, JHEP **0107** (2001) 013 [arXiv:hep-ph/0012308]; A. Stocchi, arXiv:hep-ph/0405038; A. Stocchi, private communication for the values with the most recent top quark mass; see also www.utfit.org for details on the CKM fit.
- [22] A. J. Buras, F. Schwab and S. Uhlig, arXiv:hep-ph/0405132.
- [23] P. Azzi *et al.* [CDF Collaborattion], arXiv:hep-ex/0404010.
- [24] Y. Kiyo and Y. Sumino, Phys. Rev. D **67** (2003) 071501 [arXiv:hep-ph/0211299].
- [25] S. C. Adler *et al.* [E787 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 2204 [arXiv:hep-ex/9708031]; S. Adler *et al.* [E787 Collaboration], arXiv:hep-ex/0403034; V. V. Anisimovsky *et al.* [E949 Collaboration], arXiv:hep-ex/0403036.
- [26] A. J. Buras, M. Gorbahn, U. Haisch and U. Nierste, arXiv:hep-ph/0603079.
- [27] S. R. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.
- [28] Yu. A. Golfand and E. P. Likhtman, JETP Lett. **13** (1971) 323 [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **13** (1971) 452].
- [29] A. Neveu and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B **31** (1971) 86.
- [30] P. Ramond, Phys. Rev. D **3**, 2415 (1971).
- [31] D. V. Volkov and V. P. Akulov, Phys. Lett. B **46**, 109 (1973).
- [32] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974).
- [33] J. Iliopoulos and B. Zumino, Nucl. Phys. B **76**, 310 (1974). S. Ferrara, J. Iliopoulos and B. Zumino, Nucl. Phys. B **77**, 413 (1974).
- [34] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, Phys. Rev. D **13**, 3214 (1976). S. Deser and B. Zumino, Phys. Lett. B **62** (1976) 335.
- [35] LEP ElectroWeak Working Group, <http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/>.
- [36] J. R. Ellis and D. Ross, Phys. Lett. B **506** (2001) 331 [arXiv:hep-ph/0012067].
- [37] P. Fayet and J. Iliopoulos, Phys. Lett. B **51**, 461 (1974).
- [38] L. O’Raifeartaigh, Nucl. Phys. B **96**, 331 (1975).
- [39] G. F. Giudice and A. Masiero, Phys. Lett. B **206**, 480 (1988).

- [40] J. R. Ellis, arXiv:hep-ph/0203114.
- [41] R. Barbier *et al.*, Phys. Rept. **420** (2005) 1 [arXiv:hep-ph/0406039].
- [42] M. Battaglia, A. De Roeck, J. R. Ellis, F. Gianotti, K. A. Olive and L. Pape, Eur. Phys. J. C **33** (2004) 273 [arXiv:hep-ph/0306219].
- [43] S. Davidson and J. R. Ellis, Phys. Rev. D **56** (1997) 4182 [arXiv:hep-ph/9702247].
S. Davidson and J. R. Ellis, Phys. Lett. B **390** (1997) 210 [arXiv:hep-ph/9609451].
S. Davidson, Phys. Lett. B **439** (1998) 63 [arXiv:hep-ph/9808425].
- [44] A. J. Buras, A. Romanino and L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **520** (1998) 3 [arXiv:hep-ph/9712398].
- [45] L. J. Hall, V. A. Kostelecky and S. Raby, Nucl. Phys. B **267** (1986) 415.
- [46] G. Colangelo and G. Isidori, JHEP **9809** (1998) 009 [arXiv:hep-ph/9808487].
- [47] H. E. Haber and G. L. Kane, Phys. Rept. **117** (1985) 75.
- [48] F. Gabbiani, E. Gabrielli, A. Masiero and L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **477** (1996) 321 [arXiv:hep-ph/9604387]; M. Misiak, S. Pokorski and J. Rosiek, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **15** (1998) 795 [arXiv:hep-ph/9703442].
- [49] D. Choudhury and P. Roy, Phys. Lett. B **378** (1996) 153 [arXiv:hep-ph/9603363].
- [50] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921** (1921) 966. O. Klein, Z. Phys. **37** (1926) 895 [Surveys High Energ. Phys. **5** (1986) 241].
- [51] C. Csaki, arXiv:hep-ph/0404096. Y. A. Kubyshin, arXiv:hep-ph/0111027. V. A. Rubakov, Phys. Usp. **44**, 871 (2001) [Usp. Fiz. Nauk **171**, 913 (2001)] [arXiv:hep-ph/0104152]. A. Perez-Lorenzana, J. Phys. Conf. Ser. **18**, 224 (2005) [arXiv:hep-ph/0503177].
- [52] H. Georgi, H. R. Quinn and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 451.
- [53] K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, Nucl. Phys. B **537** (1999) 47 [arXiv:hep-ph/9806292].
K. R. Dienes, E. Dudas and T. Gherghetta, Phys. Lett. B **436** (1998) 55 [arXiv:hep-ph/9803466].
- [54] I. Antoniadis, Phys. Lett. B **246** (1990) 377; N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, Phys. Lett. B **429** (1998) 263 [arXiv:hep-ph/9803315].
- [55] J. Scherk and J. H. Schwarz, Phys. Lett. B **82** (1979) 60.
- [56] M. Quiros, arXiv:hep-ph/0302189.

- [57] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction To Quantum Field Theory,”
- [58] H. Georgi, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43** (1993) 209.
- [59] J. F. Oliver, arXiv:hep-ph/0403095.
- [60] D. M. Ghilencea, *Phys. Rev. D* **70** (2004) 045011 [arXiv:hep-th/0311187].
- [61] I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik “*Table of integrals, series and products*”
- [62] H. C. Cheng, K. T. Matchev and M. Schmaltz, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 036005 [arXiv:hep-ph/0204342].
- [63] T. Varin, D. Davesne, M. Oertel and M. Urban, arXiv:hep-ph/0611220.
- [64] L. J. Hall, Y. Nomura and D. R. Smith, *Nucl. Phys. B* **639**, 307 (2002) [arXiv:hep-ph/0107331].
- [65] T. Kobayashi, J. Kubo, M. Mondragon and G. Zoupanos, *Nucl. Phys. B* **550** (1999) 99 [arXiv:hep-ph/9812221].
- [66] A. Hebecker and A. Westphal, *Annals Phys.* **305**, 119 (2003) [arXiv:hep-ph/0212175].
- [67] J. Wess and J. Bagger, “Supersymmetry and supergravity,”
- [68] P. C. West, “Introduction to supersymmetry and supergravity,”
- [69] T. Flacke, “Covariant quantisation of $N = 1$, $D = 5$ supersymmetric Yang-Mills theories in 4D superfield formalism,” DESY-THESIS-2003-047
- [70] P. Minkowski, *Phys. Lett. B* **67** (1977) 421;
 M. Gell-Mann, P. Ramond, R. Slansky, Talk given at the 19th Sanibel Symposium, Palm Coast, Florida, 25 February-2 March, 1979, preprint CALT-68-709, hep-ph/9809459;
 M. Gell-Mann, P. Ramond, R. Slansky, in: *Supergravity*, North-Holland, Amsterdam, 1980, P. 315;
 T. Yanagida, in: *Proceedings of the Workshop on Unified Theories and Baryon Number in the Universe*, Tsukuba, Japan, 13-14 February, 1979, P. 95;
 S. Glashow, in: *Quarks and Leptons*, Cargèse Lectures, 9-29 July 1979, Plenum, New York, 1980, P. 687;
 R.N. Mohapatra, G. Senjanovic, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 912.
- [71] P. C. West, *Phys. Lett. B* **137** (1984) 371.
- [72] S. Antusch and M. Ratz, *JHEP* **0207** (2002) 059 [arXiv:hep-ph/0203027].
- [73] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner, M. Ratz and M. A. Schmidt, *JHEP* **0503**, 024 (2005) [arXiv:hep-ph/0501272].

- [74] S. Antusch, J. Kersten, M. Lindner and M. Ratz, Nucl. Phys. B **674** (2003) 401 [arXiv:hep-ph/0305273].
- [75] S. Antusch, M. Drees, J. Kersten, M. Lindner and M. Ratz, Phys. Lett. B **519**, 238 (2001) [arXiv:hep-ph/0108005].
- [76] J. A. Casas, J. R. Espinosa, A. Ibarra and I. Navarro, Nucl. Phys. B **573** (2000) 652 [arXiv:hep-ph/9910420].

Annexe A

La désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$

Cette annexe consiste en un "formulaire" pour la désintégration $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ dans le Modèle Standard, dans une extension supersymétrique typique comme le MSSM (*cf* première partie) avec ou sans la symétrie de R -parité.

A.1 $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ dans le MS [9]

Taux de branchement

Le taux de branchement dans le MS peut s'écrire sous la forme :

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu})^{SM} = \frac{\bar{\kappa}_+}{3\lambda^2} \left| \sum_l \lambda_c X_c^l + \lambda_t X_t \right|^2, \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\lambda = |V_{us}| \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\kappa}_+ = 0.901 \frac{3\alpha_e(m_Z)^2 B(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)}{2\pi^2 \sin^4(\theta_w)} \quad (\text{A.3})$$

$$\lambda_c = V_{cs}^* V_{cd} = -\lambda \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (\text{A.4})$$

$$\lambda_t = V_{ts}^* V_{td} = -\lambda |V_{cb}|^2 (1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) + \mathcal{O}(\lambda^6) \quad (\text{A.5})$$

$$= -\lambda |V_{cb}|^2 R_t e^{-i\beta} \quad (\text{A.6})$$

Les fonctions X_c^l et X_t sont les fonctions à boucle du charm et du top respectivement. Elles sont données dans les sous-sections suivantes. Phénoménologiquement nous pouvons écrire le taux de branchement précédent en fonction

de la paramétrisation de Wolfenstein, ce qui nous donne :

$$Br^{SM} = \bar{\kappa}_+ \left[- |V_{cb}|^4 \bar{\eta}^2 X_t^2 + \left(\lambda^4 P_c(X) \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda |V_{cb}|^2 (1 - \bar{\rho}) X_t \right)^2 \right] \quad (\text{A.7})$$

Contribution à une boucle du top

Numériquement, l'influence de la masse des leptons dans les diagrammes en boîte sont négligeables. La fonction X_t vaut alors (à l'ordre α_s et à tous les ordres en $x = \frac{m_t^2}{M_W^2}$):

$$X_t(x) = X_0(x) + \frac{\alpha_s}{4\pi} X_1(x, \mu_t) = \eta_{QCD} X_0(x) \quad (\text{A.8})$$

avec

$$X_0(x) = \frac{x}{8} \left(\frac{x+2}{x-1} + \frac{3x-6}{(x-1)^2} \ln x \right) \quad (\text{A.9})$$

La correction de QCD est :

$$\begin{aligned} X_1(x) = & - \frac{29x - x^2 - 4x^3}{3(1-x)^2} - \frac{x + 9x^2 - x^3 - x^4}{(1-x)^3} \ln x \\ & + \frac{8x + 4x^2 + x^3 - x^4}{2(1-x)^3} \ln^2 x - \frac{4x - x^3}{(1-x)^2} L_2(1-x) \\ & + 8x \frac{\partial X_0(x)}{\partial x} \ln \mu^2 / M_W^2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

où $\mu = \mathcal{O}(m_t)$ et $L_2(1-x) = \int_1^x dt \frac{\ln t}{1-t}$. Le facteur de QCD, η_{QCD} , vaut 0.995 quand on prend $m_t = m_t^{\overline{MS}}(m_t)$.

Contribution à une boucle du charm

La fonction à une boucle du charm est :

$$X_c^l = C_{NLO} - 4B_{NLO}^{(1/2)} \quad (\text{A.11})$$

où C_{NLO} and $B_{NLO}^{(1/2)}$ correspondent respectivement aux diagrammes pingouins et aux diagrammes en boîte. On a :

$$\begin{aligned} C_{NLO} = & \frac{x(m)}{32} K_c^{\frac{24}{25}} \left[\left(\frac{48}{7} K_+ + \frac{24}{11} K_- - \frac{696}{77} K_{33} \right) \left(\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu)} + \frac{15212}{1875} (1 - K_c^{-1}) \right) \right. \\ & + \left(1 - \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right) (16K_+ - 8K_-) - \frac{1176244}{13125} K_+ - \frac{2302}{6875} K_- + \frac{3529184}{48125} K_{33} \\ & \left. + K \left(\frac{56248}{4375} K_+ - \frac{81448}{6875} K_- + \frac{4563698}{144375} K_{33} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

avec

$$K = \frac{\alpha_s(M_W)}{\alpha_s(\mu)} \quad K_c = \frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m)} \quad (\text{A.13})$$

$$K_+ = K^{\frac{6}{25}} \quad K_- = K^{-\frac{12}{25}} \quad K_{33} = K^{-\frac{1}{25}} \quad (\text{A.14})$$

D'autre part, on a :

$$B_{NL}^{(1/2)} = \frac{x(m)}{4} K_c^{\frac{24}{25}} \left[3(1 - K_2) \left(\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu)} + \frac{15212}{1875}(1 - K_c^{-1}) \right) - \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{r \ln r}{1-r} - \frac{77}{3} + \frac{15212}{625} K_2 + \frac{4364}{1875} K K_2 \right] \quad (\text{A.15})$$

Les autres quantités sont : $K_2 = K^{-1/25}$, $m = m_c$, $r = m_l^2/m_c^2(\mu)$, $\mu = \mathcal{O}(m_c)$. Pour connaître la contribution du charm, il nous faut en plus :

$$\alpha_s(\mu) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}} \left[1 - \frac{\beta_1 \ln \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}}{\beta_0^2 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}} \right] \quad (\text{A.16})$$

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}f \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3}f \quad (\text{A.17})$$

Ici, dans le cas du charm, $f = 4$ et $\Lambda = \Lambda_{MS}^{(4)}$.

A.2 $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ dans le MSSM [44, 46]

- x_{ij} dénote le rapport de deux masses carrées (par exemple : $x_{i\bar{t}_R} = M_{\tilde{C}_i}^2/M_{\tilde{t}_R}^2$),
- $\mathbf{j}(x_1, \dots, x_n)$ and $\mathbf{k}(x_1, \dots, x_n)$ sont les fonctions à une boucle

$$\mathbf{j}(x) = \frac{x \log x}{x-1} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{x^2 \log x}{x-1} \quad (\text{A.19})$$

où on définit une fonction à n arguments à partir d'une fonction à $n-1$ arguments :

$$f(x, y, z_1, \dots, z_{n-2}) = \frac{f(x, z_1, \dots, z_{n-2}) - f(y, z_1, \dots, z_{n-2})}{x-y} \quad (\text{A.20})$$

Les singularités de ces fonctions dans le cas d'arguments égaux deviennent des dérivations.

Taux de branchement

Le taux de branchement dans le cas d'un modèle supersymétrique général avec le contenu en particule du MSSM s'écrit :

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}) = \frac{\bar{\kappa}_+}{3\lambda^2} \left(\left| \sum_l Z_{ds}^l \right|^2 \right) \quad (\text{A.21})$$

avec

$$Z_{ds}^l = \lambda_t(X_t + X_{H^\pm} + X_{\tilde{C}} + X_{\tilde{N}}) + \lambda_c X_c^l \quad (\text{A.22})$$

Contribution à une boucle des charginos

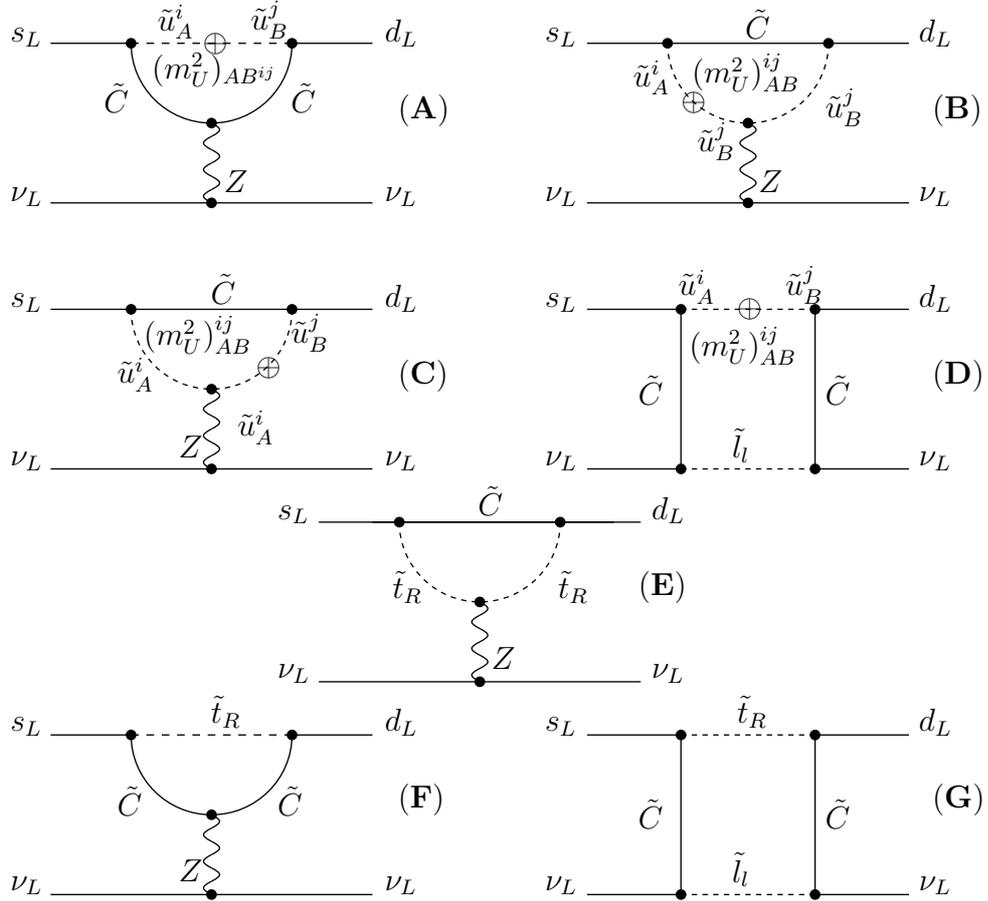


FIG. A.1 – Contribution des charginos à une boucle (les corrections aux self-énergies des quarks externes ne sont pas montrées).

On décompose $X_{\tilde{C}}$ en fonction des paramètres d'insertion de masse :

$$X_{\tilde{C}} = C_{RR}^0 + C_{LL} R_{s_L d_L}^U + C_{LR} R_{s_L t_R}^U + C_{RL} R_{t_R d_L}^U \quad (\text{A.23})$$

avec

$$R_{s_L d_L}^U = \frac{(m_U^2)_{LL}}{\lambda_t m_{\tilde{u}_L}^2} = \frac{(\delta_{12}^U)_{LL}}{\lambda_t} \quad (\text{A.24})$$

$$R_{s_L t_R}^U = \frac{(m_U^2)_{LR}}{\lambda_t m_t m_{\tilde{u}_L}} V_{td} = \frac{(\delta_{23}^U)_{LR}}{\lambda_t m_t} V_{td} m_{\tilde{u}_L} \quad (\text{A.25})$$

$$R_{t_R d_L}^U = \frac{(m_U^2)_{RL}}{\lambda_t m_t m_{\tilde{u}_L}} V_{ts}^* = \frac{(\delta_{31}^U)_{RL}}{\lambda_t m_t} V_{ts}^* m_{\tilde{u}_L} \quad (\text{A.26})$$

On note

- $g_t = \frac{m_t}{\sqrt{2} M_W \sin \beta}$ le couplage du quark top
- U et V sont les matrices unitaires 2×2 qui diagonalisent la matrice de masse des charginos :

$$M_{\tilde{C}} = U^T \text{diag}(M_{\tilde{C}_1}, M_{\tilde{C}_2}) V, \quad M_{\tilde{C}_i} > 0 \quad (\text{A.27})$$

$$M_{\tilde{C}} = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} M_W \sin \beta \\ \sqrt{2} M_W \cos \beta & \mu \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

1- contribution RR

$$C_{RR}^0 = \sum_{i,j=1,2} ((C^0)_{ij}^{Pen} + (C^0)_{ij}^{Box}) \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} (C^0)_{ij}^{Pen} &= \frac{g_t^2}{8} V_{2j}^\dagger V_{i2} \left(\mathbf{k}(x_{i\tilde{t}_R}, x_{j\tilde{t}_R}) V_{j1} V_{i1}^\dagger - 2 \mathbf{j}(x_{i\tilde{t}_R}, x_{j\tilde{t}_R}) \sqrt{x_{i\tilde{t}_R} x_{j\tilde{t}_R}} U_{i1} U_{1j}^\dagger \right) \\ (C^0)_{ij}^{Box} &= \frac{g_t^2}{2} x_{W\tilde{t}_R} \mathbf{j}(x_{i\tilde{t}_R}, x_{j\tilde{t}_R}, x_{\tilde{e}_L\tilde{t}_R}) V_{2j}^\dagger V_{i2} U_{i1} U_{1j}^\dagger \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

2- contribution LL

$$C_{LL} = \sum_{i,j=1,2} ((C_{LL})_{ij}^{Pen} + (C_{LL})_{ij}^{Box}) \quad (\text{A.31})$$

$$(C_{LL})_{ij}^{Pen} = -\frac{1}{8} V_{1j}^\dagger V_{i1} \left(\mathbf{k}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, 1) V_{j2} V_{i2}^\dagger - 2 \mathbf{j}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, 1) \sqrt{x_{i\tilde{u}_L} x_{j\tilde{u}_L}} U_{i2} U_{2j}^\dagger \right) \quad (\text{A.32})$$

$$(C_{LL})_{ij}^{Box} = \frac{1}{2} x_{W\tilde{u}_L} \mathbf{j}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, x_{\tilde{e}_L\tilde{u}_L}, 1) V_{1j}^\dagger V_{i1} U_{i1} U_{1j}^\dagger \quad (\text{A.33})$$

3- contributions LR et RL

$$C_{LR} = \sum_{i,j=1,2} ((C_{LR})_{ij}^{Pen} + (C_{LR})_{ij}^{Box}) \quad (\text{A.34})$$

$$C_{RL} = \sum_{i,j=1,2} ((C_{RL})_{ij}^{Pen} + (C_{RL})_{ij}^{Box}) \quad (\text{A.35})$$

$$(C_{LR})_{ij}^{Pen} = -\frac{m_t g_t}{8m_{\tilde{u}_L}} V_{2j}^\dagger V_{i1} \times \quad (\text{A.36})$$

$$\left(\mathbf{k}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, x_{\tilde{t}_R\tilde{u}_L}) V_{j1} V_{i1}^\dagger - \mathbf{k}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{\tilde{t}_R\tilde{u}_L}, 1) \delta_{ij} \right. \\ \left. - 2\mathbf{j}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, x_{\tilde{t}_R\tilde{u}_L}) U_{i1} U_{1j}^\dagger \sqrt{x_{i\tilde{u}_L} x_{j\tilde{u}_L}} \right)$$

$$(C_{LR})_{ij}^{Box} = -\frac{m_t g_t}{2m_{\tilde{u}_L}} x_{W\tilde{u}_L} \mathbf{j}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, x_{\tilde{t}_R\tilde{u}_L}, x_{\tilde{e}_L\tilde{u}_L}) V_{2j}^\dagger V_{i1} U_{i1} U_{1j}^\dagger \quad (\text{A.37})$$

$$(C_{RL})_{ij}^{Pen} = -\frac{m_t g_t}{8m_{\tilde{u}_L}} V_{1j}^\dagger V_{i2} \times \quad (\text{A.38})$$

$$\left(\mathbf{k}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, x_{\tilde{t}_R\tilde{u}_L}) V_{j2} V_{i2}^\dagger - \mathbf{k}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{\tilde{t}_R\tilde{u}_L}, 1) \delta_{ij} \right. \\ \left. - 2\mathbf{j}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, x_{\tilde{t}_R\tilde{u}_L}) U_{i2} U_{2j}^\dagger \sqrt{x_{i\tilde{u}_L} x_{j\tilde{u}_L}} \right)$$

$$(C_{RL})_{ij}^{Box} = -\frac{m_t g_t}{2m_{\tilde{u}_L}} x_{W\tilde{u}_L} \mathbf{j}(x_{i\tilde{u}_L}, x_{j\tilde{u}_L}, x_{\tilde{t}_R\tilde{u}_L}, x_{\tilde{e}_L\tilde{u}_L}) V_{1j}^\dagger V_{i2} U_{i2} U_{2j}^\dagger \quad (\text{A.39})$$

Contribution à une boucle des neutralinos

On note $X_{\tilde{N}} = \tilde{N} R_{s_L d_L}^D$ avec $R_{s_L d_L}^D = \frac{(m_D^2)_{LL}}{\lambda_t m_{\tilde{d}_L}^2} = \frac{(\delta_{12}^D)_{LL}}{\lambda_t}$

$$\tilde{N} = \sum_{n;m=1..4} \left([\tilde{N}]_{nm}^{Pen} + [\tilde{N}]_{nm}^{Box} \right) \quad (\text{A.40})$$

Les fonctions à une boucle comportant les neutralinos sont :

$$[\tilde{N}]_{nm}^{Pen} = -\frac{1}{2} \mathbf{j}(x_{n\tilde{d}_L}, x_{m\tilde{d}_L}, 1) \sqrt{x_{n\tilde{d}_L} x_{m\tilde{d}_L}} W_n^T(d_L) [W_{n4} W_{4m}^\dagger - W_{n3} W_{3m}^\dagger] W_m^*(d_L) \\ - \frac{1}{4} \mathbf{k}(x_{n\tilde{d}_L}, x_{m\tilde{d}_L}, 1) W_n^T(d_L) [W_{n4}^* W_{4m}^T - W_{n3}^* W_{3m}^T] W_m^*(d_L) \quad (\text{A.41})$$

$$[\tilde{N}]_{nm}^{Box} = x_{W\tilde{d}_L} \left\{ \mathbf{k}(x_{n\tilde{d}_L}, x_{m\tilde{d}_L}, x_{\tilde{\nu}_L\tilde{d}_L}, 1) W_n^T(d_L) W_n^*(\nu_L) W_m^T(\nu_L) W_m^*(d_L) \right. \\ \left. + 2\mathbf{j}(x_{n\tilde{d}_L}, x_{m\tilde{d}_L}, x_{\tilde{\nu}_L\tilde{d}_L}, 1) \sqrt{x_{n\tilde{d}_L} x_{m\tilde{d}_L}} W_n^T(d_L) W_n(\nu_L) W_m^\dagger(\nu_L) W_m^*(d_L) \right\} \quad (\text{A.42})$$

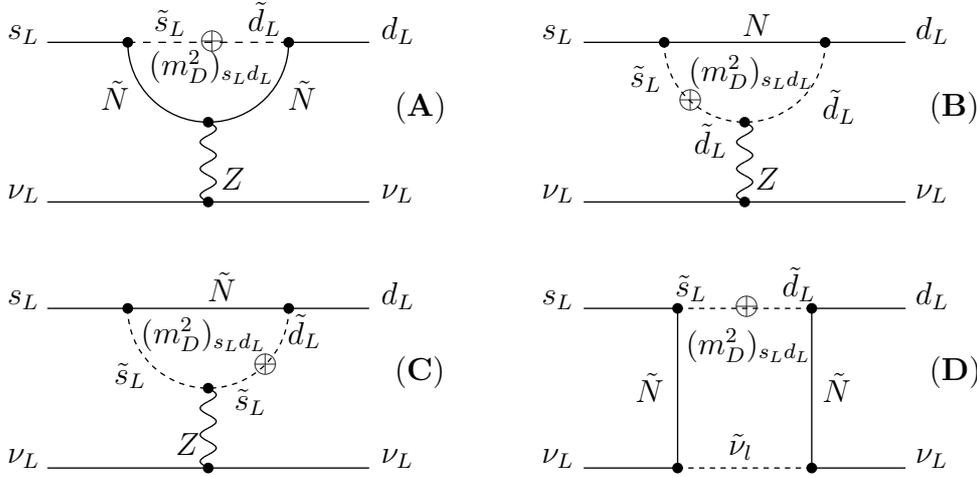


FIG. A.2 – Diagrammes à une boucle avec un neutralino virtuel.

Ce résultat dépend de la matrice W qui diagonalise la matrice de masse des neutralinos :

$$M_{\tilde{N}} = W^T \text{diag}(M_{\tilde{N}_1}, M_{\tilde{N}_2}, M_{\tilde{N}_3}, M_{\tilde{N}_4}) W, \quad M_{\tilde{N}_n} > 0 \quad (\text{A.43})$$

Explicitement, ($s_{\theta_W} = \sin \theta_W$, $s_\beta = \sin \beta$ etc)

$$M_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z s_{\theta_W} c_\beta & M_Z s_{\theta_W} s_\beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_{\theta_W} c_\beta & -M_Z c_{\theta_W} s_\beta \\ -M_Z s_{\theta_W} c_\beta & M_Z c_{\theta_W} c_\beta & 0 & -\mu \\ M_Z s_{\theta_W} s_\beta & -M_Z c_{\theta_W} s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

On a introduit la notation $W_n(x) = T_3(x) W_{n2} + \tan \theta_W \frac{Y(x)}{2} W_{n1}$, où $T_3(x)$ est la troisième composante de l'isospin faible et $Y(x)$ l'hypercharge de la particule x . Les W_{ni} sont les éléments de la matrice W .

Contribution à une boucle des higgs chargés

La contribution des higgs chargés est simplement donnée par :

$$X_{H^\pm} = X_{H^\pm} \left(x_H = \frac{M_W^2}{m_{H^\pm}^2} \right) = \frac{m_t^2}{8M_W^2 \tan^2 \beta} x_H \left(\frac{1}{(x_H - 1)} - \frac{\ln(x_H)}{(x_H - 1)^2} \right) \quad (\text{A.44})$$

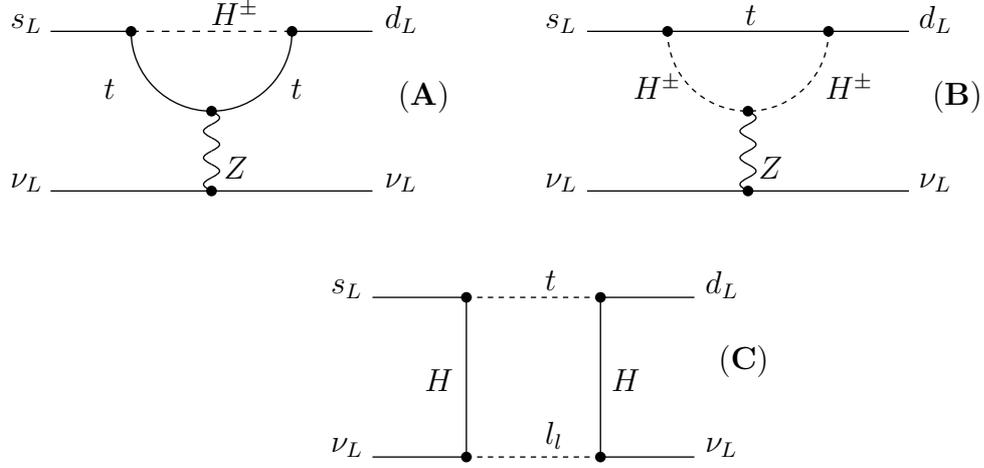


FIG. A.3 – Diagrammes pour la contribution des higgs chargés

A.3 $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ et la violation de R -parité [1]

Taux de branchement total

Le taux de branchement de $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ dans un modèle supersymétrique du type MSSM mais sans symétrie de R -parité s'écrit

$$Br(K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}) = \frac{\bar{\kappa}_+}{3\lambda^2} \left(\sum_l |Z_{ds}^l + \frac{\epsilon_{ll}}{\Delta}|^2 + \sum_{m \neq l} \frac{|\epsilon_{ml}|^2}{\Delta^2} \right) \quad (\text{A.45})$$

où

$$\Delta = \frac{G_f \alpha(m_Z)}{4\sqrt{2}\pi \sin^2(\theta_w)} \quad (\text{A.46})$$

et

$$\epsilon_{ij} = \sum_n \left(\frac{\lambda'_{i2n} \lambda'_{j1n}}{m_{\tilde{d}_R}^2} - \frac{\lambda'_{in1} \lambda'_{jn2}}{m_{\tilde{d}_L}^2} \right) \quad (\text{A.47})$$

Ce taux de branchement peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_{i=e,\mu,\tau} (Re(\epsilon_{ii}) + a_i)^2 + \sum_{i=e,\mu,\tau} (Im(\epsilon_{ii}) + b)^2 \geq R^2, \quad (\text{A.48})$$

où

$$a_i = \Delta [\lambda_c X_c^i + X_t r_K \lambda |V_{cb}|^2 \cos(\theta_K + \beta)] \quad (\text{A.49})$$

$$b = \Delta [X_t r_K \lambda |V_{cb}|^2 \sin(\theta_K + \beta)] \quad (\text{A.50})$$

$$R^2 = \sum_i a_i^2 + b^2 + \frac{3\lambda^2 \Delta^2 (Br^{exp} - Br^{MSSM})}{\bar{\kappa}_+} \quad (\text{A.51})$$

Annexe B

Polarisation du photon

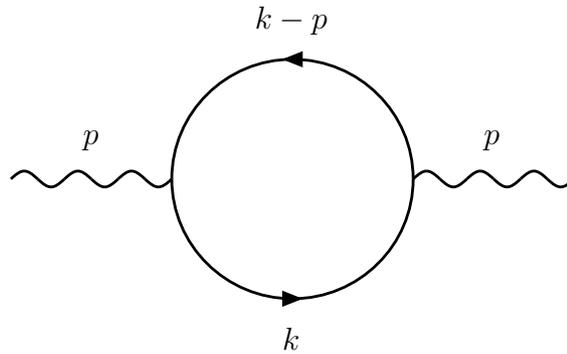


FIG. B.1 – Diagramme à une boucle de la polarisation du photon dans QED.

B.1 Régularisation par *cut-off*

QED à 4 dimensions

A 4d, la polarisation du photon à l'ordre d'une boucle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 i\Pi_{\mu\nu}(p^2) &= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m} \right) \\
 &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N_{\mu\nu}}{(k^2 - m^2)[(k-p)^2 - m^2]}
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

où

$$N_{\mu\nu} = k_\mu(k_\nu - p_\nu) + k_\nu(k_\mu - p_\mu) - g_{\mu\nu}k(k-p) + g_{\mu\nu}m^2 \tag{B.2}$$

En utilisant l'astuce de Feynman pour l'intégration (intégration sur x et changement de variable $l = k + xp$) et en effectuant la rotation de Wick, $l^0 = il_E^0$, on obtient [57] :

$$\Pi_{\mu\nu}(p^2) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{N'_{\mu\nu}}{(l_E^2 + \Delta^2)^2} \quad (\text{B.3})$$

avec

$$N'_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}l_E^2 + m^2 + x(1-x)p^2\right)g_{\mu\nu} - 2x(1-x)p_\mu p_\nu \quad (\text{B.4})$$

et

$$\Delta^2 = m^2 - x(1-x)p^2 \quad (\text{B.5})$$

On définit alors les deux parties $\Pi_1(p^2)$ et $\Pi_2(p^2)$ telles que :

$$\Pi_{\mu\nu}(p^2) = \Pi_1(p^2)g_{\mu\nu} - \Pi_2(p^2)p_\mu p_\nu \quad (\text{B.6})$$

Explicitement,

$$\Pi_1(p^2) = -4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}l_E^2 + m^2 + x(1-x)p^2}{(l_E^2 + \Delta^2)^2} \quad (\text{B.7})$$

$$\Pi_2(p^2) = 4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{2x(1-x)}{(l_E^2 + \Delta^2)^2} \quad (\text{B.8})$$

Quand l'invariance de jauge (la transversalité du photon) est préservée la structure tensorielle est factorisable :

$$\Pi_{\mu\nu}(p^2) = \Pi(p^2)(p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}p^2). \quad (\text{B.9})$$

et on a exactement

$$\Pi_1(p^2)p^2 = \Pi_2(p^2) = \Pi(p^2) \quad (\text{B.10})$$

$$= 4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{2x(1-x)}{(l_E^2 + \Delta^2)^2}. \quad (\text{B.11})$$

Si on appelle \mathcal{I} l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta^2)^2} \quad (\text{B.12})$$

Celle-ci peut se réécrire en utilisant la formule du temps propre de Schwinger :

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty dt t^{n-1} e^{-At} \quad (\text{B.13})$$

On a alors

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty dt t \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} e^{-(l_E^2 + \Delta^2)t} \quad (\text{B.14})$$

L'évaluation de l'intégration intermédiaire sur l_E donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} e^{-l_E^2 t} = \left(\frac{1}{4\pi t} \right)^2 \quad (\text{B.15})$$

d'où

$$\mathcal{I} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\Delta^2 t} \quad (\text{B.16})$$

et

$$\Pi_2(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{4}{3} \int_0^1 dx 6x(1-x) \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\Delta^2 t} \quad (\text{B.17})$$

De la même façon, en utilisant

$$\int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} l_E^2 e^{-l_E^2 t} = \frac{1}{8\pi^2 t^2} \quad (\text{B.18})$$

on a :

$$\Pi_1(p^2) = -4 \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left(\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\Delta^2 t} + [m^2 + x(1-x)p^2] \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\Delta^2 t} \right) \quad (\text{B.19})$$

Il faut alors régulariser l'intégration divergente sur t . Ceci peut être fait en changeant la borne inférieure par un *cut-off* dimensionné ζ ou $1/\Lambda^2$, avec Λ de la dimension d'une masse. Malheureusement, avec cette procédure nous ne vérifions pas l'équation (B.10). Il reste un terme résiduel en $\frac{g_{\mu\nu} e^2}{4\pi^2} \Lambda^2$ dans (B.9) qui n'est pas physique car le photon doit rester transverse c'est-à-dire de masse nulle. Hormis ce terme indésirable, on retrouve la divergence logarithmique attendue en $\log(\Lambda^2/\Delta^2)$.

QED à 5 dimensions

A 5 dimensions, quand la dimension supplémentaire est compacte et circulaire, on a :

$$i\Pi_{\mu\nu}(p^2) = -e^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left(\gamma_\mu \frac{1}{\not{k} - m_n} \gamma_\nu \frac{1}{\not{k} - \not{p} - m_n} \right) \quad (\text{B.20})$$

En suivant les mêmes étapes intermédiaires que précédemment, nous avons :

$$\Pi_2(p^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{4\pi} \frac{4}{3} \int_0^1 dx 6x(1-x) \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\Delta_n^2 t} \quad (\text{B.21})$$

et

$$\Pi_1(p^2) = -4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left(\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\Delta_n^2 t} + [m_n^2 + x(1-x)p^2] \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\Delta_n^2 t} \right) \quad (\text{B.22})$$

où cette fois

$$\Delta_n^2 = m_n^2 - x(1-x)p^2 = m^2 + n^2/R^2 - x(1-x)p^2. \quad (\text{B.23})$$

Nous allons maintenant présenter plusieurs façon de procéder.

Première méthode [53]

Définissons une intégrale $\mathcal{S}(\zeta, \rho)$ telle que

$$\mathcal{S}(\zeta, \rho) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_\zeta^\rho \frac{dt}{t} e^{-n^2/R^2 t} \quad (\text{B.24})$$

En utilisant

$$\theta_3(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\pi\tau n^2} \quad (\text{B.25})$$

on a

$$\mathcal{S}(\zeta, \rho) = \int_\zeta^\rho \frac{dt}{t} \theta_3\left(\frac{it}{\pi R^2}\right) \quad (\text{B.26})$$

Si on suppose $\zeta, \rho \gg R^{-2}$,

$$\mathcal{S}(\zeta, \rho) \simeq \int_\zeta^\rho \frac{dt}{t} \sqrt{\frac{\pi R^2}{t}} = -2\sqrt{\frac{\pi R^2}{\rho}} + 2\sqrt{\frac{\pi R^2}{\zeta}} \quad (\text{B.27})$$

d'où, si on réécrit les *cut-offs*, $\zeta = 1/\Lambda^2$, $\rho = 1/\mu^2 \gg \zeta$,

$$\Pi_2(0) \simeq \frac{\alpha}{4\pi} \frac{8}{3} \sqrt{\pi} \Lambda R \quad (\text{B.28})$$

Si on élimine la partie qui brise l'invariance de jauge, on peut dire que :

$$\Pi(0) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{8}{3} \sqrt{\pi} \Lambda R \quad (\text{B.29})$$

Seconde méthode

Soit

$$\mathcal{T}\{\xi, \delta\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-\pi(n^2+\delta)t} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{t} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} \right) e^{-\pi \delta t} \quad (\text{B.30})$$

La formule de resommation de Poisson nous donne l'égalité suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} = \sqrt{\frac{1}{t}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi m^2 / t} \quad (\text{B.31})$$

On en déduit en séparant le terme $m = 0$

$$\mathcal{T}\{\xi, \delta\} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} e^{-\pi \delta t} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} e^{-\pi m^2 / t - \pi \delta t} \quad (\text{B.32})$$

La première intégrale vaut par définition de la fonction Gamma incomplète :

$$\int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} e^{-\pi \delta t} = \sqrt{\pi \delta} \Gamma[-1/2, \xi \pi \delta] \quad (\text{B.33})$$

et

$$\Gamma[-1/2, a \rightarrow 0] \simeq \frac{2}{\sqrt{a}} - 2\sqrt{\pi} + \mathcal{O}(a) \quad (\text{B.34})$$

La seconde est en réalité finie quand $\xi \rightarrow 0$ et on a :

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} e^{-\pi m^2 / t - \pi \delta t} = \sqrt{\pi \delta} \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{3/2}} e^{-\pi^2 \delta m^2 / u - u} \quad (\text{B.35})$$

Une des fonctions de Bessel peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$K_{\nu}(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t - z^2 / 4t}}{t^{\nu+1}} dt \quad (\text{B.36})$$

et en particulier,

$$K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad (\text{B.37})$$

On a donc pour la seconde intégrale, avec $z = \sqrt{4\pi^2 m \delta}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} e^{-\pi m^2 / t - \pi \delta t} = \frac{1}{m} e^{-2\pi m \sqrt{\delta}} \quad (\text{B.38})$$

La somme donne quand $\delta > 1/\sqrt{2\pi}$:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} e^{-2\pi m \sqrt{\delta}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(e^{-2\pi \sqrt{\delta}})^m}{m} = \log(1 - e^{-2\pi \sqrt{\delta}}) \quad (\text{B.39})$$

Au final, l'intégrale $\mathcal{T}\{\xi, \delta\}$ vaut :

$$\mathcal{T}\{\xi, \delta\} = \frac{2}{\sqrt{\xi}} - 2\pi \sqrt{\delta} + 2 \log(1 - e^{-2\pi \sqrt{\delta}}) \quad (\text{B.40})$$

En utilisant $\mathcal{T}\{1/(\Lambda^2 R^2), \delta = m^2 R^2 - x(1-x)p^2 R^2\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\alpha} \frac{3}{8} \Pi_2(p^2) &\simeq \sqrt{\pi} \Lambda R - \int_0^1 dx \, 6x(1-x) \pi \sqrt{m^2 R^2 - x(1-x)p^2 R^2} \\ &+ \int_0^1 dx \, 6x(1-x) \log(1 - e^{-2\pi R \sqrt{m^2 - x(1-x)p^2}}) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

En accord avec la méthode précédente pour les termes indépendants de p^2 et avec [60].

B.2 Régularisation dimensionnelle

On définit cette fois

$$\mathcal{R}_\epsilon(\delta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{1-\epsilon/2}} e^{-\pi(n^2+\delta)t} = \int_0^\infty \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t} \right) e^{-\pi \delta t} \quad (\text{B.42})$$

En utilisant aussi la formule de sommation de Poisson et en séparant le terme $m = 0$ on obtient

$$\mathcal{R}_\epsilon(\delta) = \int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2-\epsilon/2}} e^{-\pi \delta t} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2-\epsilon/2}} e^{-\pi m^2/t - \pi \delta t} \quad (\text{B.43})$$

Le premier terme est par définition

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^{3/2-\epsilon/2}} e^{-\pi \delta t} = (\pi \delta)^{(1-\epsilon)/2} \Gamma(\epsilon/2 - 1/2) \quad (\text{B.44})$$

$$= \sqrt{\pi \delta} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \log \pi \delta\right) (-2\sqrt{\pi} + \mathcal{O}(\epsilon)) \quad (\text{B.45})$$

$$= -2\pi \sqrt{\delta} + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{B.46})$$

Le second terme est fini quand $\epsilon \rightarrow 0$ et donne en utilisant la fonction de Bessel $K_{1/2}$:

$$2 \sum_{m=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2-\epsilon/2}} e^{-\pi m^2/t-\pi\delta t} = 2 \log(1 - e^{-2\pi\sqrt{\delta}}) \quad (\text{B.47})$$

Au final,

$$\mathcal{R}_\epsilon(\delta) = -2\pi\sqrt{\delta} + 2 \log(1 - e^{-2\pi\sqrt{\delta}}) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (\text{B.48})$$

Remarque : $\mathcal{R}_\epsilon(\delta)$ est finie, alors que les méthodes précédentes donnent une divergence linéaire. Ceci était en effet attendu car la régularisation dimensionnelle est connue pour ne garder que les divergences logarithmiques et masquer les divergences en puissances. Le calcul dans la théorie non-compactifiée est une intégrale finie pour un nombre impair de dimensions et partage les mêmes divergences dans la limite de grand rayon que la théorie compactifiée.

Pour en déduire $\Pi(p^2)$, grâce à l'invariance de jauge préservée par la régularisation dimensionnelle, il suffit de connaître $\Pi_2(p^2)$. L'intégration initiale étant effectuée à $D = 4 - \epsilon$ dimensions, nous avons :

$$\Pi_2(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{4}{3} \int_0^1 dx \, 6x(1-x) \mu^\epsilon (4\pi)^{-\epsilon/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{1-\epsilon/2}} e^{-\Delta_n^2 t} \quad (\text{B.49})$$

avec

$$\Delta_n^2 = m^2 + n^2/R^2 - x(1-x)p^2. \quad (\text{B.50})$$

On peut donc insérer $\mathcal{R}_\epsilon(m^2 R^2 - x(1-x)p^2 R^2)$ dans l'expression précédente de $\Pi_2(p^2)$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \Pi(p^2) &= \frac{\alpha}{4\pi} \frac{8}{3} \int_0^1 dx \, 6x(1-x) \\ &\times \left(-\pi \sqrt{m^2 R^2 - x(1-x)p^2 R^2} + \log(1 - e^{-2\pi \sqrt{m^2 R^2 - x(1-x)p^2 R^2}}) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

Il n'y a pas de terme en $\log(p^2/\mu^2)$ car les logarithmes apportés par les modes non-nuls et le mode fondamental sont de signes opposés. Dans les compactifications sur des orbifolds, la fonction bêta des modes non-nuls peut être différente de celle des modes nuls et il n'y a pas toujours une annulation exacte.

Annexe C

Self-énergie d'un superchamp chiral dans le MSSM à 5d

Nous allons ici expliciter un peu plus les résultats des sommations sur les modes de Kaluza-Klein intervenant dans le calcul de la self-énergie d'un superchamp chiral, section (4.3) 2ème partie.

C.1 Sommation des modes de Kaluza-Klein

Contribution du bulk

La contribution du bulk fait intervenir des sommes sur les diagrammes de la figure C.1

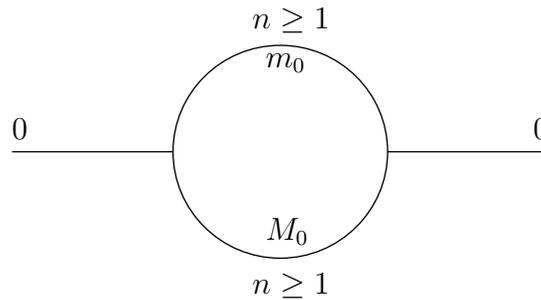


FIG. C.1 –

Chaque diagramme nous donne une contribution proportionnelle à l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I}_{nm} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_0^2 - n^2/R^2} \frac{1}{k^2 - M_0^2 - n^2/R^2} \quad (\text{C.1})$$

En utilisant les manipulations typiques vu dans l'annexe 2 (paramètres de feynman, rotation de Wick, formule du temps propre, introduction de la fonction θ_3), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \sum_{n,m \geq 1} \mathcal{I}_{nm} = \int_0^1 dx \sum_{n,m \geq 1} \int \frac{dt}{t} e^{-\Delta t} \\ &= \int_0^1 dx \int_{UV}^{IR} \frac{dt}{t} \left[\frac{1}{2} \theta_3 \left(\frac{it}{\pi R^2} \right) - \frac{1}{2} \right]\end{aligned}\quad (\text{C.2})$$

où

$$\Delta = (m_0^2 + n^2/R^2)x + (M_0^2 + n^2/R^2)(1-x) \simeq n^2/R^2 \quad (\text{C.3})$$

La forme approchée de la fonction $\theta_3(x)$ quand $IR, UV \gg R^{-2}$ nous donne alors:

$$\mathcal{K} \simeq \int_0^1 dx \int_{UV}^{IR} \frac{dt}{t} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi R^2}{t}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.4})$$

$$= \int_{UV}^{IR} dt \left(\frac{\sqrt{\pi} R}{2t^{3/2}} - \frac{1}{2t} \right) \quad (\text{C.5})$$

On intègre ensuite sur le temps propre t :

$$\mathcal{K} = -\frac{\sqrt{\pi} R}{\sqrt{IR}} + \frac{\sqrt{\pi} R}{\sqrt{UV}} - \frac{1}{2} \log \frac{IR}{UV} \quad (\text{C.6})$$

Si on prend comme forme de régulateurs $UV = r\Lambda^{-2}$ et $IR = rR^2$, alors :

$$\mathcal{K} = -\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} \Lambda R - \frac{1}{2} \log \Lambda^2 R^2 \quad (\text{C.7})$$

Avec le choix particulier, $r = \pi/4$, nous avons finalement

$$\mathcal{K} = -2 + 2\Lambda R - \frac{1}{2} \log \Lambda^2 R^2 \quad (\text{C.8})$$

$$\simeq 2\Lambda R - \frac{1}{2} \log \Lambda^2 R^2 \quad (\text{C.9})$$

Termes de branes

Dans les termes de branes, les modes de KK circulant dans la boucle ne sont pas contraints à être égaux. D'une façon générale on a donc une double sommation à effectuer. Les modes fondamentaux et les modes $n \geq 1$ étant normalisés différemment, il faut décomposer cette double somme :

$$\sum_{n \geq 0, m \geq 0} [\dots] = \sum_{n \geq 1, m \geq 1} [\dots] + 2 \times \sum_{n \geq 0} [\dots]_{m=0} + [\dots]_{n=0, m=0} \quad (\text{C.10})$$

Modes de KK différents (figure C.2)

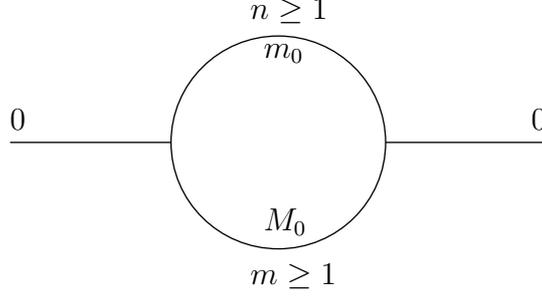


FIG. C.2 –

De même que précédemment, on peut écrire que la contribution sera proportionnelle à :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} &= \int_0^1 dx \sum_{n,m \geq 1} \int \frac{dt}{t} e^{-\Delta t} \\
 &= \int_0^1 dx \int_{UV}^{IR} \frac{dt}{t} \left[\frac{1}{2} \theta_3 \left(\frac{itx}{\pi R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{2} \theta_3 \left(\frac{it(1-x)}{\pi R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad (\text{C.11})
 \end{aligned}$$

où cette fois

$$\Delta = (m_0^2 + n^2/R^2)x + (M_0^2 + m^2/R^2)(1-x) \simeq n^2x/R^2 + m^2(1-x)/R^2 \quad (\text{C.12})$$

Toujours en utilisant la forme approchée de la fonction $\theta_3(x)$, on a :

$$\mathcal{G} \simeq \int_0^1 dx \int_{UV}^{IR} \frac{dt}{t} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi R^2}{xt}} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi R^2}{(1-x)t}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.13})$$

Après avoir développé le produit des 2 termes entre parenthèses, l'intégration sur x peut se faire en utilisant les 2 intégrales suivantes :

$$\int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi, \quad \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \quad (\text{C.14})$$

on a alors

$$\mathcal{G} = \int_{UV}^{IR} dt \left(\frac{\pi^2 R^2}{4t^2} - \frac{\sqrt{\pi} R}{t^{3/2}} + \frac{1}{4t} \right) \quad (\text{C.15})$$

Ce qui nous donne au final :

$$\mathcal{G} = \frac{\pi^2 R^2}{4} \frac{1}{UV} - \frac{\pi^2 R^2}{4} \frac{1}{IR} + \frac{2\sqrt{\pi} R}{\sqrt{IR}} - \frac{2\sqrt{\pi} R}{\sqrt{UV}} + \frac{1}{4} \log \frac{IR}{UV} \quad (\text{C.16})$$

Si on prend comme régulateurs $UV = r\Lambda^{-2}$ et $IR = rR^2$, alors :

$$\mathcal{G} = \frac{\pi^2}{4r}\Lambda^2 R^2 - \frac{\pi^2}{4r} + \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}} - \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{r}}\Lambda R + \frac{1}{4}\log \Lambda^2 R^2 \quad (\text{C.17})$$

et avec le même choix que pour l'intégrale du 'bulk' \mathcal{K} , $r = \pi/4$,

$$\mathcal{G} = \pi\Lambda^2 R^2 - \pi + 4 - 4\Lambda R + \frac{1}{4}\log \Lambda^2 R^2 \quad (\text{C.18})$$

$$\simeq \pi\Lambda^2 R^2 - 4\Lambda R + \frac{1}{4}\log \Lambda^2 R^2 \quad (\text{C.19})$$

Une seule tour d'excitation de KK, figure C.3

Nous avons à compter 2 fois¹ la somme sur $n \geq 1$ et $m = 0$, schématisé dans la figure suivante.

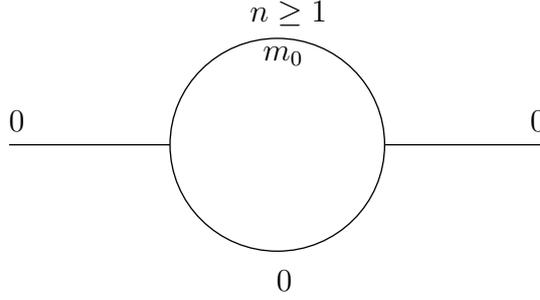


FIG. C.3 –

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int_0^1 dx \sum_{n \geq 1} \int \frac{dt}{t} e^{-\Delta t} \\ &= \int_0^1 dx \int_{UV}^{IR} \frac{dt}{t} \left[\frac{1}{2} \theta_3 \left(\frac{itx}{\pi R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

où

$$\Delta = (m_0^2 + n^2/R^2)x \simeq n^2 x/R^2 \quad (\text{C.21})$$

En utilisant la forme approchée de la fonction $\theta_3(x)$, on a :

$$\mathcal{H} \simeq \int_0^1 dx \int_{UV}^{IR} \frac{dt}{t} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi R^2}{xt}} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{C.22})$$

1. Ceci n'est valable que dans le cas de l'approximation $M_0 \sim m_0 \ll R^{-1}$

et après intégration sur x ,

$$\mathcal{H} = \int_{UV}^{IR} dt \left(\sqrt{\pi R^2} \frac{1}{t^{3/2}} - \frac{1}{2t} \right). \quad (\text{C.23})$$

D'où

$$\mathcal{H} = 2\sqrt{\frac{\pi R^2}{UV}} - 2\sqrt{\frac{\pi R^2}{IR}} - \frac{1}{2} \log \frac{IR}{UV}. \quad (\text{C.24})$$

Si $UV = r\Lambda^{-2}$ et $IR = rR^2$,

$$\mathcal{H} = 2\sqrt{\frac{\pi}{r}}\Lambda R - 2\sqrt{\frac{\pi}{r}} - \frac{1}{2} \log \frac{IR}{UV}, \quad (\text{C.25})$$

et toujours avec le choix particulier $r = \pi/4$, on a :

$$\mathcal{H} = 4\Lambda R - 4 - \frac{1}{2} \log \Lambda^2 R^2 \quad (\text{C.26})$$

$$\simeq 4\Lambda R - \frac{1}{2} \log \Lambda^2 R^2. \quad (\text{C.27})$$

NOM : WELZEL (avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant) Prénoms : Julien		DATE de SOUTENANCE 6 novembre 2006		
TITRE : Physique de la saveur et au-delà du Modèle Standard et dimensions supplémentaires				
Numéro d'ordre : 213-2006				
DIPLOME DE DOCT.	DOCTEUR- INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT	DOCTORAT DE 3e CYCLE	Spécialité : Physique Théorique
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
Cote B.I.U. - Lyon : T 50/210/19 / et bis			CLASSE :	
RESUME : <p>Malgré le succès expérimental rencontré par le Modèle Standard (MS) de la physique des particules, certains phénomènes (les oscillations de neutrinos) et certaines questions fondamentales (l'origine des hiérarchies entre les différentes échelles caractéristiques) n'y trouvent pas de réponse. Il y a une nécessité d'aller au-delà du MS pour le compléter. Le sujet de cette thèse est d'étudier la phénoménologie des modèles supersymétriques ou extra-dimensionnels et les déviations de leurs prédictions par rapport à celles du MS dans le domaine de la saveur.</p> <p>Tout d'abord, nous avons abordé la question de la conservation du nombre baryonique et leptonique via la conservation de la symétrie de R-parité dans les modèles supersymétriques de basse énergie. Plus précisément, nous nous sommes placés dans le cas où cette symétrie entre particules et `super'-partenaires n'était pas conservée. En utilisant les données expérimentales disponibles pour la désintégration rare du kaon chargé en une paire de neutrino-antineutrino et un pion chargé, nous avons entre autres obtenu une limite supérieure sur la valeur permise de certains couplages caractérisant la violation de la R-parité. Nous avons montré l'intérêt de prendre aussi en compte les contributions conservant la R-parité, négligées jusqu'alors dans les autres études sur le sujet.</p> <p>Dans une seconde partie, nous avons étudié l'impact de l'introduction d'une dimension spatiale supplémentaire, repliée sur elle-même. Les exemples choisis concernent l'électrodynamique quantique et l'invariance de jauge, l'unification des forces forte, faible et électromagnétique ainsi que l'origine de la valeur des masses et des angles de mélanges des neutrinos. Dans ce dernier cas, l'étude a été faite dans le cadre du MSSM à 5 dimensions. Typiquement, l'introduction de dimensions supplémentaires réduit le pouvoir prédictif. Cependant, des comportements généraux peuvent toujours être établis. Ainsi, nous avons pu mettre en évidence la possibilité d'un mélange leptonique faible (de type CKM) à haute énergie, pour une région significative et raisonnable de l'espace des paramètres, résultat offrant de nouvelles perspectives pour l'étude de l'origine de la saveur et des liens entre quarks et leptons.</p>				
MOTS-CLES : Supersymétrie – Neutrinos – Extra-dimensions - Saveur				
Laboratoire de recherche : Institut de Physique Nucléaire de Lyon				
Directeurs de recherches : Aldo Deandrea				
Président du jury : M. Kibler Composition du jury : F. Dudas - F. Delduc - S. Davidson - S. Lavignac				149 pages