



**HAL**  
open science

# Mécanique du contact aux échelles mésoscopiques

Julien Scheibert

► **To cite this version:**

Julien Scheibert. Mécanique du contact aux échelles mésoscopiques. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : . tel-00172935

**HAL Id: tel-00172935**

**<https://theses.hal.science/tel-00172935>**

Submitted on 18 Sep 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITE PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE**

Ecole Doctorale  
Chimie Physique et Chimie Analytique de Paris-Centre (ED 388)

Spécialité : Matière Condensée

Présentée par

**Julien SCHEIBERT**

Pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR de l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

**Mécanique du contact  
aux échelles mésoscopiques**

Soutenue le 28 Juin 2007

devant le jury composé de :

Mme Françoise Brochard-Wyart	Présidente du Jury
M. Didier Chatenay	Directeur de thèse
M. Georges Debrégeas	Co-directeur de thèse
M. Jean-Marc DiMeglio	Rapporteur
M. Christian Fréty	Examineur
M. Chaouqi Misbah	Rapporteur
M. Alexis Prevost	Invité
M. Olivier Ronsin	Examineur



# Remerciements

*Georges Debrégeas, par son enthousiasme, son engagement, et son intuition physique exceptionnelle, et Alexis Prevost, par sa disponibilité, sa patience infinie et son exigence du travail bien fait dans les moindres détails, ont fait de cette thèse une période humainement et scientifiquement très intense. Ma gratitude à leur égard est immense.*

*Je remercie ensuite, dans le désordre :*

*Elie Raphaël au Laboratoire des Fluides Organisés puis Jacques Meunier au Laboratoire de Physique Statistique pour m'avoir accueilli dans leurs unités respectives ; Elie Raphaël puis Didier Chatenay pour avoir accepté d'être mes directeurs de thèse officiels ; tous les étudiants, ITA et chercheurs que j'ai pu côtoyer au LFO puis au LPS, en particulier tout le monde en D22 ; les membres du jury, en particulier Jean-Marc Di Meglio et Chaouqi Misbah pour leurs rapports ; Pascal Silberzan et Axel Buguin à l'Institut Curie pour m'avoir initié à la microfabrication ; Joël Frelat au LMM pour m'avoir appris à utiliser Castem ; Liliane Léger au LFO pour m'avoir initié à la silanisation ; Hervé Willaime au MMN pour l'utilisation de son profilomètre ; Mokthar Adda-Bedia et Eytan Katzav au LPS pour leur calculs et nos fructueuses discussions ; Christian Frétigny et Antoine Chateauminois au PPMD pour nos intéressantes discussions et les comparaisons avec leurs modèles mécaniques ; Hélène Montès au PPMD pour sa disponibilité et son aide pour les mesures de  $G'$  et  $G''$  ; Alain Ponton et Benoît Ladoux à MSC pour leur aide pour les mesures de  $E$  ; Patrice Rey et Rodrigue Rousier au CEA-LETI pour les capteurs MEMS ; Jean-Marc Di Meglio pour son soutien lors de mon recrutement ATER ; les étudiants du Laboratoire de Géologie de l'ENS pour les pauses midi.*

*Je remercie sincèrement les nombreuses personnes que je n'ai pas cité explicitement ici, mais qui ont contribué, chacune à sa manière, à la réussite de cette thèse.*

*Merci à ma famille et à mes amis pour leur soutien.*

*Merci à Sara, pour tout...  
...et à Lorenzo pour la suite.*

*à mes grands-parents*



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Profil des contraintes sous charge normale</b>	<b>9</b>
1.1 Dispositif expérimental	10
1.1.1 Le microcapteur de forces	11
1.1.2 Le film élastomère	12
1.1.3 Parties mécaniques du dispositif	15
1.1.4 Préparation des substrats	15
1.1.5 Observation du contact	16
1.2 Contact normal sphère-plan	17
1.2.1 Résultats expérimentaux	17
1.2.2 Calcul des contraintes	21
1.2.3 Comparaison directe	26
1.3 Détermination des fonctions d'appareil du capteur MEMS	26
1.3.1 Fonction d'appareil en pression	26
1.3.2 Fonction d'appareil en cisaillement	33
1.3.3 Modification des contraintes par lubrification de l'interface	39
1.4 Contact normal cylindre-plan	39
1.4.1 Réalisation expérimentale	40
1.4.2 Calculs en éléments finis	43
1.4.3 Comparaison quantitative	44
1.4.4 Commentaires sur la procédure de mise en charge	47
<b>2 Profil des contraintes sous charge tangentielle</b>	<b>51</b>
2.1 Profils lors de la transition vers le glissement	52
2.1.1 Dispositif expérimental	52
2.1.2 Principe de la mesure de la dynamique du champ de contraintes	53
2.2 Glissement stationnaire en contact sphère-plan	59
2.2.1 Principe de la mesure	59
2.2.2 Résultats expérimentaux	61
2.3 Glissement stationnaire en contact cylindre-plan	63
2.3.1 Résultats expérimentaux	63
2.3.2 Modèle semi-analytique bidimensionnel quasi-statique	68
2.3.3 Comparaison quantitative	70
2.4 Régime de stick-slip	73

## Table des matières

---

2.5	Conclusion . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Analyse fréquentielle des contraintes lors du frottement d'un substrat de rugosité périodique</b>	<b>77</b>
3.1	Dispositif expérimental . . . . .	77
3.1.1	Réalisation d'une calotte sphérique d'élastomère rugueuse . . . . .	77
3.1.2	Réalisation des substrats de rugosité périodique par microphotolithographie . . . . .	78
3.2	Expériences réalisées . . . . .	80
3.2.1	Observation de la zone de contact . . . . .	80
3.2.2	Mesures mécaniques macroscopiques . . . . .	81
3.3	Analyse spectrale des contraintes globales et locales . . . . .	83
3.4	Modélisation des modulations de contrainte . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Mesures optiques à une interface rugueuse</b>	<b>93</b>
4.1	Mesure du champ de pression dans un contact sphère-plan rugueux sous charge normale . . . . .	94
4.1.1	Mesure optique de l'aire de contact réel . . . . .	94
4.1.2	Modèle de Greenwood-Williamson (GW) . . . . .	97
4.1.3	Profils de pression . . . . .	99
4.1.4	Modèle de Greenwood-Tripp . . . . .	101
4.1.5	Comparaison avec les résultats expérimentaux . . . . .	103
4.2	Mesure du champ de déplacement à l'interface . . . . .	106
4.2.1	Expérience réalisée . . . . .	106
4.2.2	Méthode de mesure . . . . .	107
4.2.3	Modèle de Cattaneo-Mindlin . . . . .	108
4.2.4	Comparaison avec les résultats expérimentaux . . . . .	112
4.2.5	Elasticité en cisaillement de la couche rugueuse . . . . .	117
	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Annexes au chapitre 1</b>	<b>125</b>
A.1	Résumé de la théorie du contact de Hertz . . . . .	125
A.2	Réponse visco-élastique du PDMS . . . . .	127
<b>B</b>	<b>Annexes au chapitre 2</b>	<b>129</b>
B.1	Modèle KA . . . . .	129
B.1.1	Formulation of the boundary value problem . . . . .	129
B.1.2	Resolution of the boundary value problem . . . . .	130
<b>C</b>	<b>Annexes au chapitre 4</b>	<b>137</b>
C.1	Correction au module de Young en épaisseur finie . . . . .	137

# Introduction

## Notion d'échelles spatiales en mécanique du contact

Lorsque l'on presse deux solides sous charge normale  $F_N$ , l'aire  $A_0$  de la zone de contact apparent dépend à la fois des propriétés mécaniques des deux solides et de leur forme au voisinage du contact. Dans de nombreuses situations pratiques, du fait de la rugosité des surfaces en regard, le contact réel (pour lequel la distance entre les deux objets est d'ordre moléculaire) est constitué d'une assemblée diluée de micro-contacts de taille micrométrique. Son aire  $A$  est alors très inférieure à celle du contact apparent  $A_0$  (voir Figure 1) et contrôle pour une large part les phénomènes de frottement [1, 2] et d'adhésion [3, 4].

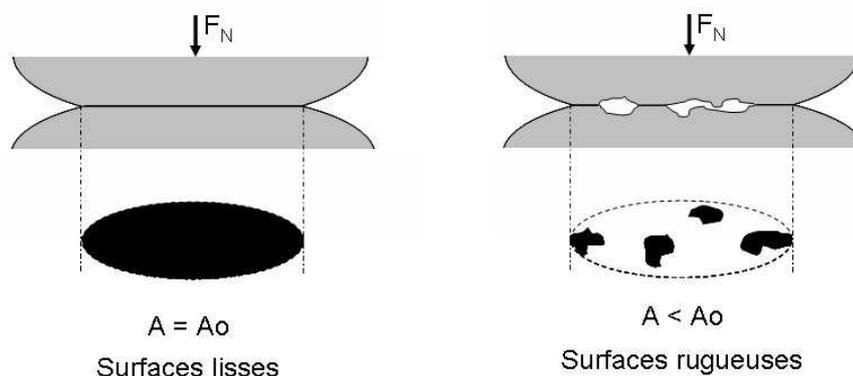


FIG. 1 – Aire  $A_0$  du contact apparent en pointillés et aire  $A$  de contact réel en noir pour une interface lisse et une interface rugueuse. Dans la plupart des situations pratiques,  $A \ll A_0$

Une description statistique de ces micro-contacts a permis à Bowden et Tabor [1] puis Greenwood et Williamson [5] de montrer que l'aire  $A$  est, pour une large gamme de systèmes, proportionnelle à la charge  $F_N$  et indépendante de l'aire apparente  $A_0$ . Cette propriété suffit à comprendre les lois empiriques de frottement d'Amontons-Coulomb [6], qui énoncent que (i) la force tangentielle  $F_{T_s}$  nécessaire pour mettre les deux solides en mouvement relatif est proportionnelle à  $F_N$  et indépendante de  $A_0$ , (ii) la force  $F_{T_d}$  nécessaire pour maintenir les deux solides en mouvement relatif à la vitesse  $V$  est également proportionnelle à  $F_N$ , indépendante de  $A_0$  et faiblement dépendante de  $V$ . La dynamique de frottement est alors essentiellement contrôlée par deux coefficients de frottement sta-

## Introduction

---

tique  $\mu_s = F_{Ts}/F_N$  et dynamique  $\mu_d = F_{Td}/F_N$ . L'évolution lente de  $\mu_s$  avec l'âge du contact et la faible dépendance en vitesse de  $\mu_d$  au cours du temps peuvent également être interprétées comme résultant d'une dynamique lente de croissance de  $A$  associée à différents mécanismes microscopiques [7, 8, 9].

De façon générale, l'étude des propriétés mécaniques du contact implique une double approche associée à deux échelles spatiales distinctes.

**A l'échelle macroscopique**, il s'agit de décrire l'équilibre mécanique des objets en contact. Cette approche nécessite d'introduire une équation constitutive empirique pour la réponse mécanique du contact (en pression et en cisaillement) qui traduit en moyenne le comportement microscopique de la jonction.

Ainsi par exemple, le calcul classique de Hertz [10, 11, 12] qui prédit les champs de contrainte et de déplacement de deux ellipsoïdes élastiques au contact sous charge normale, se situe dans l'hypothèse d'une interface incompressible, sans adhésion et parfaitement glissante [11, 12]. Ce calcul a été raffiné en remplaçant cette dernière hypothèse par une relation de type Coulomb (ou rigide-plastique), dans le cas d'une charge purement normale [13, 12] et d'une charge normale et tangentielle (modèle de Cattaneo-Mindlin [14, 15]). A l'inverse, Greenwood et Tripp [16] ont considéré le cas d'une interface glissante mais présentant une compressibilité non-linéaire dont les caractéristiques sont extraites du modèle statistique de Greenwood-Williamson pour une couche plane rugueuse. Enfin, le modèle Johnson-Kendall-Roberts (JKR) [17] fait l'hypothèse d'une force adhésive de contact qui modifie les champs de contrainte et de déplacement prédits par Hertz.

La *dynamique* microscopique du contact peut également être traduite en moyenne par une équation constitutive dépendante du temps. C'est l'approche adoptée par le modèle "state and rate" [18] qui postule une équation rhéologique ad-hoc afin de rendre compte de la dépendance logarithmique du coefficient de frottement dynamique en vitesse et en âge du contact. Ce modèle permet de prédire les principales caractéristiques de la transition entre glissement stationnaire et régime de "stick-slip".

**A l'échelle microscopique**, de nombreux modèles théoriques se sont attachés à décrire les processus à l'origine du comportement rhéologique moyen de la jonction. L'échelle pertinente de description dépend du type de matériau considéré ainsi que des détails de la géométrie et de la physico-chimie de l'interface.

Dans les modèles de Tabor et Greenwood précédemment évoqués, celle-ci est fixée par la taille des aspérités. Les propriétés de compressibilité de la couche résultent de la réponse élastique de chaque aspérité supposée sphérique et de la répartition statistique des hauteurs des sommets. Dans le même ordre d'idée, mais pour un contact sous charge tangentielle, Caroli et Nozières [19] associent la réponse mécanique d'une interface frottante aux forces de piégeage et de déformation élastique d'un grand nombre d'aspérités décrites comme des oscillateurs multistables.

Pour des matériaux durs, les phénomènes dissipatifs sont confinés dans une couche d'épaisseur moléculaire [20] où se localise le cisaillement lors du glissement : la réponse mécanique du contact reflète alors directement les propriétés rhéologiques de cette couche vitreuse quasi-bidimensionnelle. Pour des contacts impliquant des matériaux élastomères

en contact lisse, la dissipation résulte des processus d'adsorption et de désorption de chaînes polymère sur le substrat au cours du mouvement [21, 22, 23, 24]. L'échelle pertinente est alors fixée par la distance entre points de réticulation du réseau polymère.

Dans le cas de matériaux visco-élastiques, des processus dissipatifs peuvent également se produire dans le volume du fait des fluctuations de contraintes induites lors du frottement. Le coefficient de frottement dynamique est alors fonction des propriétés visco-élastiques du matériau massif aux fréquences de sollicitation auquel il est soumis ; ces dernières dépendent de la vitesse de glissement et des caractéristiques géométrique du contact et/ou de la rugosité des interfaces en regard [21, 9].

Du point de vue expérimental, ces modèles ont été testés selon deux approches principales. La première vise, à l'aide de machines à force de surface (SFA) [25, 26], à mesurer la réponse mécanique d'un contact unique de taille micrométrique. De telles expériences ne permettent pas de prendre en compte les phénomènes de couplages mécaniques entre micro-contacts pouvant exister au sein d'un contact étendu.

La seconde approche consiste à mesurer la réponse force/déplacement globale pour un contact étendu [27, 21]. L'interprétation de ces mesures impose de faire une hypothèse d'homogénéité des contraintes ou de postuler une forme particulière de leur répartition spatiale au sein du contact. Ces mesures très indirectes ne peuvent donc pas rendre compte de phénomènes impliquant des variations rapides des champs mécaniques. Cette limitation pose problème pour plusieurs raisons :

- la géométrie de fracture des contacts conduit naturellement à des singularités des champs de contraintes en leur bord.
- les lois de type Coulomb sont discontinues et sont donc elles-mêmes à l'origine de champs mécaniques non réguliers [14, 15]
- plusieurs modes de frottement mettent en jeu des échelles de déformations de petite taille par rapport au contact (ondes de Schallamach [28, 29], ondes de glissement [30, 31], fractures interfaciales [32])
- certaines instabilités de frottement, de type "stick-slip", pourraient être déclenchées par nucléation et croissance de zones glissantes ou adhésives [33].

Afin de faire le lien entre échelles macroscopique et microscopique, il semble donc essentiel de réaliser des mesures mécaniques résolues spatialement à l'échelle d'un contact étendu et suffisamment précises pour rendre compte de modifications des propriétés microscopiques de la jonction. Ce type de mesures, que nous qualifierons de mésoscopiques, a été jusqu'à présent peu développé. Récemment, Rubinstein, Cohen et Fineberg [32] ont développé une méthode d'imagerie originale pour observer à des échelles de la fraction du contact la dynamique interfaciale d'un contact rugueux formé par la jonction de deux blocs de PMMA (Poly-Méthylméthacrylate). Leur approche a permis d'observer l'existence de modes propagatifs lents, de type fracture, proche du seuil de glissement. Verneuil, Buguin et Silberzan [34] ont étudié le comportement mécanique d'un contact formé entre une bille de PDMS de taille millimétrique et un substrat du même matériau constitué d'un réseau de plots cylindriques de rayon de l'ordre du micron et espacés d'une dizaine de microns, obtenus par des techniques de micro-fabrication issues de la microfluidique [35]. Par interférométrie, ils ont pu reconstituer le profil de la distance bille/substrat qu'ils ont comparé au profil des contraintes prédit par la théorie de Hertz. Ce type de substrats

## Introduction

structurés a été initialement mis au point pour permettre la mesure des contraintes locales tangentiels exercées par des cellules épithéliales en contact avec le substrat [36], via la déflexion du sommet de chaque plot. L'utilisation de matériaux photo-élastiques, dont la biréfringence est induite par le champ de contrainte, a également permis d'imager les surfaces iso-contrainte de la contrainte principale de cisaillement [37, 38].

### Cas de la perception tactile humaine

Dans un tout autre cadre, cette approche mésoscopique du frottement apparaît pertinente pour la compréhension des phénomènes physiques associés à la perception tactile dynamique qui constitue l'une des motivations de cette thèse. Celle-ci implique un mouvement relatif de l'organe sensoriel, le doigt par exemple, et du substrat exploré qui permet d'obtenir des informations extrêmement fines inaccessibles lors d'un contact statique.

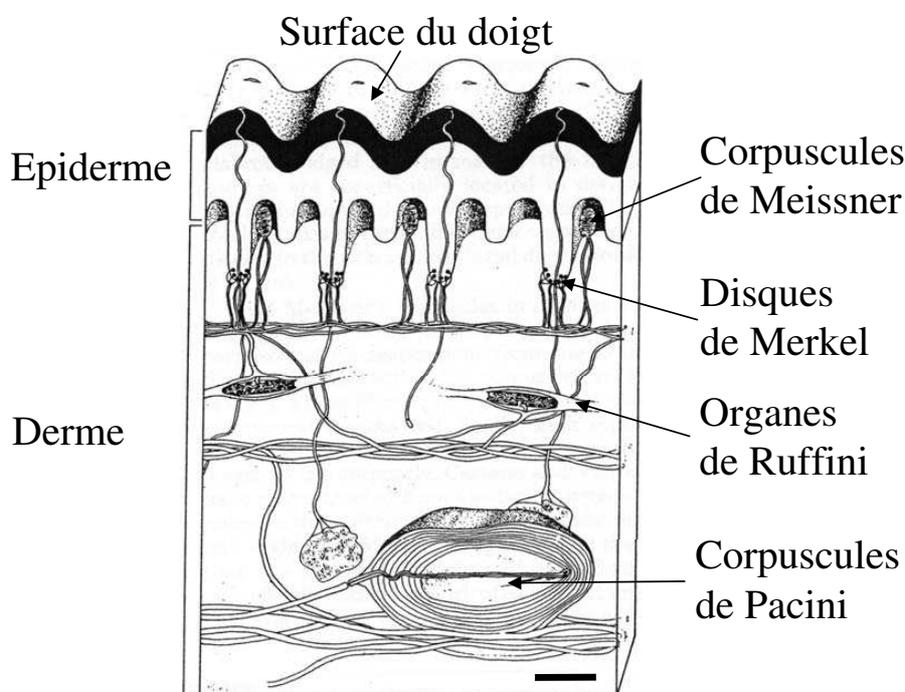


FIG. 2 – Coupe de la peau de l'extrémité d'un doigt humain (vue d'artiste d'après [39]). La peau est constituée d'une superposition de plusieurs couches de cellules qui ont des propriétés mécaniques différentes. Dans l'épaisseur de la peau se trouvent quatre types de terminaisons nerveuses mécano-sensibles répondant essentiellement à la déformation de la peau à l'endroit où elles se trouvent. A chaque type de terminaison correspond une profondeur moyenne d'implantation, un type de stimulation à laquelle elle est sensible, une gamme de sensibilité en amplitude et en fréquence et un codage de l'amplitude de stimulation (lorsqu'un seuil a été franchi) en terme de fréquence de potentiels d'action produits. Le trait noir en bas à droite représente environ  $200 \mu m$ .

Lorsqu'on effleure la surface d'un objet texturé avec l'extrémité du doigt, la peau

(épiderme+derme) est soumise à un champ de contraintes fluctuant qui dépend de façon encore mal comprise des propriétés mécaniques du doigt, des conditions d'exploration (essentiellement la force appliquée et la vitesse de glissement) et du détail de la texture du substrat (rugosité, coefficient d'adhésion, coefficient de frottement dynamique, rigidité du matériau et toutes leurs variations spatiales). Ces modulations de contrainte sont traduites au niveau des terminaisons mécano-sensibles, situées immédiatement sous l'épiderme, en signaux nerveux dont l'analyse conduit à la représentation tactile de l'objet (voir Figure 2 et le tableau de la Figure 3 qui décrit les principales caractéristiques de ces terminaisons nerveuses).

Type de terminaison nerveuse	Profondeur de localisation sous la surface de la peau (mm)	Densité de terminaisons nerveuses (/cm <sup>2</sup> )	Type de stimulus auquel la terminaison nerveuse répond	Déformation de la peau détectable (μm)	Réponse à un stimulus : gamme de fréquences (optimale, Hz)
Disque de Merkel	0.5	70	Pression	7	0.4-100 (7)
Corpuscule de Meissner	0.5	140	Vibration	4	2-200 (20-40)
Organe de Ruffini	1	9	Pression	40	7
Corpuscule de Pacini	2	21	Vibration	1	40-800 (200-300)

FIG. 3 – Tableau regroupant les caractéristiques physiques respectives des quatre types de terminaisons nerveuses impliquées dans la reconnaissance tactile, leur profondeur sous la surface de la peau, leur densité de répartition typique, le type de stimulus auquel elles sont sensibles, et la gamme fréquentielle typique à laquelle elles répondent (d'après [39]).

Ce mode de perception permet de réaliser des fonctions complexes telles que la détection de précurseurs de glissement impliquée dans la préhension d'objets fragiles, la reconnaissance et le classement de textures ou la détection d'aspérités individuelles de taille micrométrique. Comprendre le lien entre les propriétés de surface des objets et la représentation tactile associée suppose de pouvoir décrire l'ensemble des processus mécaniques aux échelles des terminaisons nerveuses. Cette approche pourrait permettre notamment de clarifier le rôle des empreintes digitales et la dépendance des performances du système tactile avec les conditions d'exploration.

### Travail de thèse

Afin de répondre à ces problématiques, j'ai développé durant ma thèse différentes méthodes expérimentales permettant des mesures résolues aux échelles mésoscopiques lors de la mise en contact et le frottement d'un matériau élastomère sur une surface rigide.

Une première approche a consisté à réaliser un système "biomimétique" du doigt humain en noyant, dans une membrane élastomère, un microcapteur de force dont la réalisation a été assurée par le CEA-LETI. Ce dispositif de type MEMS (Micro Electro Mechanical System [40]), permet de mesurer simultanément les forces s'exerçant dans trois directions orthogonales, sur une aire typique du  $mm^2$  avec une grande dynamique et une très bonne linéarité. Le LETI devait réaliser au cours de cette thèse des matrices linéaires de 10 à 30 microcapteurs similaires, permettant d'accéder à chaque instant au champ complet des contraintes dans la direction du mouvement. Malheureusement, des difficultés techniques rencontrées par le LETI n'ont pas permis la réalisation de ces matrices avant le terme de ma thèse et l'ensemble des expériences a été mené avec un capteur unique.

Dans le premier chapitre, ce dispositif est utilisé pour reconstituer point par point le champ des contraintes complet sous un contact statique en géométrie sphère-plan et cylindre-plan. Ces géométries simples permettent la comparaison directe des résultats de mesures avec des calculs analytiques ou en éléments finis. Elles ont permis de déterminer la fonction d'appareil du MEMS intégré à la membrane, qui est utilisée dans la suite du manuscrit.

Dans le deuxième chapitre, je montre comment, avec le même dispositif, sous hypothèse d'homogénéité des propriétés de surface de l'élastomère, il est possible de mesurer le champ des contraintes sous un contact en régime de charge transitoire et de glissement stationnaire. Dans le cas d'un contact quasi-bidimensionnel en géométrie cylindre-plan, ces mesures peuvent être comparées quantitativement aux résultats d'un modèle semi-analytique simple. Cette procédure est également adaptée à des régimes de "stick-slip réguliers", afin d'établir le champ moyen de relaxation associée à un événement individuel de glissement.

Dans le troisième chapitre j'étudie avec le même dispositif la dynamique temporelle de l'état de contrainte en un point de mesure, pour des situations de frottement non-stationnaires. Des substrats de rugosité périodique sont utilisés afin d'établir le lien entre le spectre spatial de la zone de contact réel et le spectre temporel du champ de contrainte induit au niveau du capteur lors du frottement.

Dans le quatrième chapitre, un dispositif optique original me permet, dans le cas d'un contact rugueux à une échelle suffisamment petite, de mesurer simultanément (i) le champ de pression par analyse de l'intensité lumineuse transmise à travers le contact (ii) le champ de déplacement dans le plan de l'interface, par une méthode de corrélation d'images. Ces résultats sont comparés quantitativement au modèle de Greenwood-Tripp pour le champ de pression sous charge normale, et au calcul de Cattaneo-Mindlin pour le champ de déplacement de surface lors de la transition charge-glissement.





# Chapitre 1

## Profil des contraintes sous charge normale

### Introduction

Depuis une dizaine d'années, plusieurs dispositifs ont été proposés pour réaliser des mesures de champ de pression à une interface. Ils sont le plus souvent basés sur des MEMS dont la déformation est évaluée par mesure capacitive ou piézo-résistive [40]. D'autres propositions se basent sur un microcircuit associé à un matériau sensible à la déformation : céramique magnéto-résistive [41], polymère piézo-électrique [42, 43], élastomère dont la conductivité dépend de sa déformation [44, 45] ou matériau électroluminescent sous pression [46]. Plusieurs objectifs ont motivé ces travaux, notamment la mesure biomimétique du toucher pour la robotique.

Parmi ces dispositifs, les MEMS présentent un certain nombre d'atouts. Issus de la micro-électronique, ils se prêtent facilement à la miniaturisation et la production de matrices. D'autre part, le caractère monocristallin du Silicium à partir desquels ils sont construits leur confère des propriétés de linéarité exceptionnelles.

Nous avons utilisé un dispositif réalisé par le LETI, qui offre, outre ces atouts, une mesure simultanée selon les 3 directions de l'espace. Le projet initial devait conduire à l'utilisation de matrices linéaires de ces capteurs, dont les dimensions auraient été par ailleurs réduites. Des difficultés techniques rencontrées par le LETI nous ont contraint à réaliser l'ensemble des expériences avec un capteur unique de dimension millimétrique.

Notre objectif est d'obtenir des mesures locales des contraintes pour un contact entre un film élastomère et un solide. Le dispositif MEMS est noyé dans un film élastomère dont l'épaisseur contrôle la taille de la zone de sensibilité en surface de la mesure. Cette taille est également limitée par la dimension latérale du MEMS. Nous avons donc cherché à étendre la dimension du contact frottant, tout en garantissant un bon contrôle de la zone de contact. Nous nous sommes ainsi placés préférentiellement dans une géométrie sphère-plan, ou parfois cylindre-plan pour permettre des comparaisons avec des modèles bidimensionnels. L'étendue des contacts réalisables est limitée par la planéité du film élastomère, son épaisseur et la pression de charge maximale avant rupture du MEMS. L'ensemble de ces contraintes nous a conduit à trouver un compromis fixant l'épaisseur de la couche élastomère à  $2\text{ mm}$  et un rayon de courbure du substrat de  $\sim 130\text{ mm}$ . Le

contact réalisé est alors au maximum de  $8\text{ mm}$  de diamètre.

Pour des contacts de cette dimension, les contraintes de cisaillement induites lors du frottement peuvent devenir importantes du fait des propriétés adhésives de l'élastomère. Nous avons donc également rendu la surface de ce dernier rugueux, ce qui a pour effet de réduire de façon importante les forces d'adhésion. Cette rugosité est de dimension suffisamment faible pour qu'à l'échelle de la zone de sensibilité du capteur, la surface puisse être considérée comme lisse.

Dans la partie 1.1, nous décrivons le dispositif expérimental. La partie 1.2 présente les profils de contrainte mesurés en géométrie sphère-plan ainsi que le champ de contrainte à la base du film calculé dans les mêmes conditions mécaniques par éléments finis. La partie 1.3 décrit la méthode de détermination des fonctions d'appareil du MEMS. Ces fonctions sont testées dans la partie 1.4 dans le cas de contacts cylindre-plan. La dernière partie évalue les possibilités offertes par ce dispositif de mesure pour discriminer des conditions de frottement et de mise en charge variés.

### 1.1 Dispositif expérimental

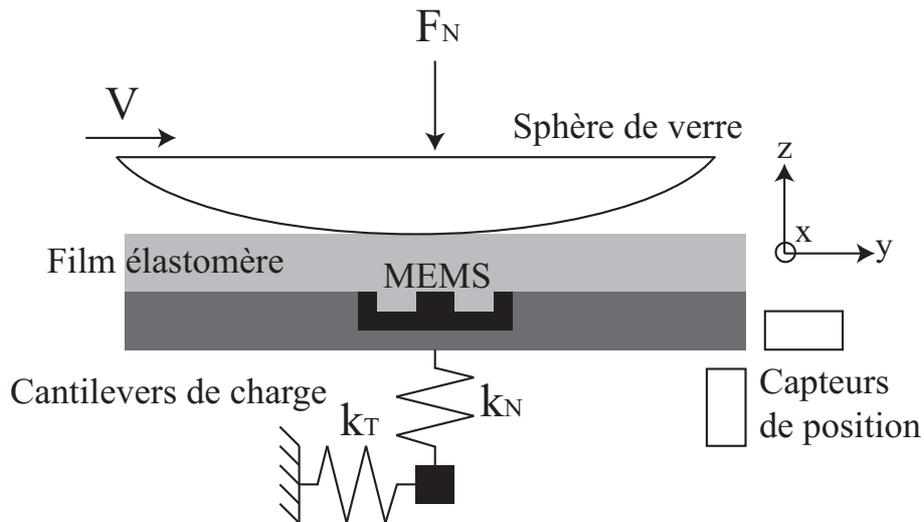


FIG. 1.1 – Schéma de principe du dispositif expérimental.

Nous avons développé un dispositif expérimental permettant de mettre au contact et de frotter contre un substrat rigide sphérique ou cylindrique un film élastomère plan, sous lequel nous avons noyé un microcapteur de force (voir Figure 1.1). De cette manière il est possible de mesurer, localement, les forces exercées sur le microcapteur. Ce montage permet en outre, comme dans les montages de tribologie plus classiques, de mesurer simultanément les forces macroscopiques normale et tangentielle sur le contact.

Nous détaillons dans ce qui suit les différents éléments constitutifs de ce dispositif : le système de mesure locale qui inclue le microcapteur de force et le film élastomère ; les éléments mécaniques du montage qui permettent de positionner le microcapteur par

rapport au substrat et de mesurer les forces macroscopiques; la géométrie et l'état de surface des substrats. Nous précisons enfin la méthode qui nous a permis d'imager le contact.

### 1.1.1 Le microcapteur de forces

Le microcapteur de force est de type MEMS (Micro Electro Mechanical Systems), fabriqué par des techniques de micro-fabrication dérivées de celles utilisées en micro-électronique, au LETI<sup>1</sup>.

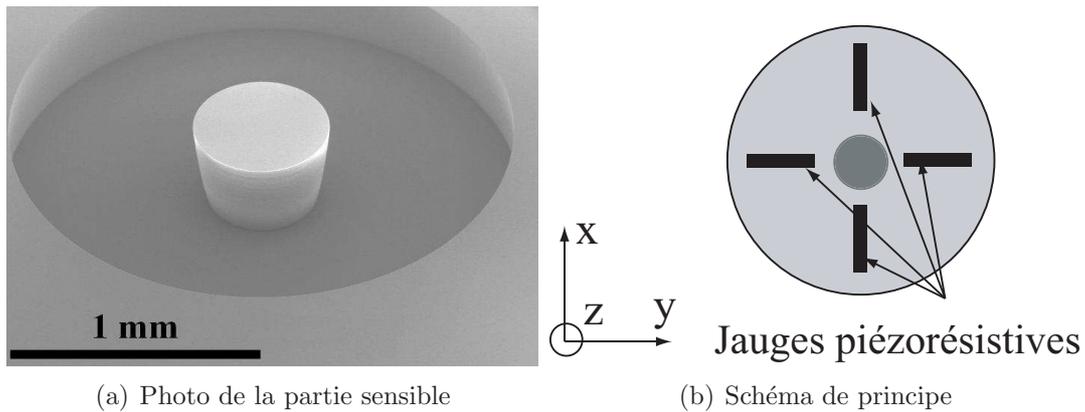


FIG. 1.2 – (a) Photo de la partie sensible du microcapteur de force. (b) Schéma de principe du microcapteur indiquant la position des jauges de déformation.

Il est constitué d'une membrane de silicium circulaire suspendue de rayon  $1\text{ mm}$ , d'épaisseur  $100\ \mu\text{m}$ , encastrée sur tout son périmètre. Elle est liée en son centre à une tige rigide cylindrique de silicium, qu'on appellera par la suite "clou", de rayon  $275\ \mu\text{m}$  et de longueur  $475\ \mu\text{m}$  (voir Figure 1.2). Quatre couples de jauges piézo-résistives, incluses dans la membrane et orientées selon deux axes orthogonaux  $x$  et  $y$ , permettent de mesurer, via un double pont de Wheatstone, les déformations de la membrane. Le LETI fournit une calibration en pression, réalisée dans une enceinte sous pression contrôlée variable, et une calibration en force tangentielle, celle-ci étant appliquée par contact sur l'extrémité haute du clou selon les deux directions  $x$  et  $y$ . Ces calibrations sont proportionnelles à la tension d'alimentation du pont de Wheatstone, que l'on prend égale à  $5\text{ V}$ , et sont donc exprimées en  $mV$  par  $V$  d'alimentation, en  $bar$  pour la pression et en  $N$  en cisaillement. Elles valent  $3.9\ mV/V/bar$  en pression et  $17\ mV/V/N$  en cisaillement. La réponse du capteur est linéaire jusqu'à des contraintes de plusieurs atmosphères, et présente une hystérèse négligeable.

La mesure se fait via quatre tensions de sortie du MEMS. La première sortie (resp. la deuxième) est proportionnelle à la force tangentielle exercée sur le clou selon l'axe  $x$  (resp. l'axe  $y$ ); la somme des deux autres sorties est proportionnelle à la pression exercée sur la membrane. Aux contraintes que nous avons utilisées, ces tensions sont de quelques  $mV$  au

<sup>1</sup>Laboratoire d'Electronique et des Techniques de l'Information, CEA, Pôle Minatec, Grenoble

maximum et sont donc amplifiées à l'aide d'un amplificateur bas-bruit, de gain en tension 500, fabriqué au laboratoire<sup>2</sup>. Un montage sommateur à amplificateur opérationnel permet de sommer les 2 tensions et d'obtenir ainsi une mesure de la pression. La visualisation et l'acquisition des deux signaux de force tangentielle et du signal de pression se fait sur un oscilloscope numérique 4 voies (Lecroy, WaveRunner 6050).

La surface d'un bloc métallique est creusée d'un trou de la forme du microcapteur, et dans lequel on l'ajuste. Une fois fixé dans ce trou, l'extrémité du clou se situe dans le même plan que la surface métallique, sur laquelle on viendra mouler un film élastomère. Pour faciliter l'observation du contact, la plaque métallique a été préalablement peinte en noir mat.

### 1.1.2 Le film élastomère

Le matériau élastomère utilisé est un polymère réticulé. Il s'agit du PDMS réticulé (PolyDiMéthySiloxane, Sylgard 184, Dow Corning, formule générale :  $-[(CH_3)_2Si - O-]_n$ ), très utilisé en photolithographie douce et en microfluidique.

#### Préparation

Il se présente sous la forme de deux composants : un fondu de polymère transparent et un agent réticulant. Le protocole adopté pour la préparation des échantillons de PDMS réticulés est le suivant :

- mélange du fondu et de l'agent réticulant, en proportion respective 10/1 (agitation manuelle à l'aide d'une spatule). Cette étape induit la formation de bulles d'air, qu'il faut éliminer.
- expulsion des plus grosses bulles d'air formées par centrifugation pendant 5 *min* à 3000 *tr/min*.
- dégazage sous vide partiel jusqu'à ce que l'on n'observe plus de bulles formées. Un agitateur magnétique facilite la nucléation des bulles.
- réticulation à température ambiante pendant 10 jours. Cette méthode est plus longue que la réticulation à chaud, mais réduit au maximum les contraintes résiduelles dans le matériau, liées à la diminution du volume lorsque l'on passe de la température de réticulation à la température ambiante.

#### Propriétés mécaniques

Nous avons caractérisé les propriétés mécaniques de nos échantillons en mesurant le module de Young  $E$  et les modules élastique  $G'(\omega)$  et de perte  $G''(\omega)$  en fonction de la pulsation de sollicitation  $\omega$  (voir Annexe A).

Le module de Young a été mesuré directement par un test de compression<sup>3</sup> d'un cylindre de PDMS de diamètre 25 *mm* et de hauteur 43 *mm*. Deux mesures successives sur le même échantillon ont donné une valeur  $E = 2.218 \pm 0.003$  *MPa*.

$G'(\omega)$  et  $G''(\omega)$  ont été mesurés dans un rhéomètre<sup>4</sup> adapté aux échantillons solides.

---

<sup>2</sup>Atelier d'électronique du LPS, Christophe Herrmann et Laurent Bonnet

<sup>3</sup>Avec l'aide d'Alexandre Saez, Benoît Ladoux et Alain Ponton, Laboratoire MSC, Université Paris 7

<sup>4</sup>Avec l'aide d'Hélène Montès, Laboratoire PPMD, ESPCI

L'extrapolation de  $G'(\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow 0$ , pour 4 échantillons, donne une valeur de  $E = 2.10 \pm 0.15 \text{ MPa}$ , compatible avec la mesure en compression. Par la suite, nous avons choisi la valeur  $E = 2.2 \pm 0.1 \text{ MPa}$ . Dans la gamme de fréquences 0-100 Hz, le rapport  $G'(\omega)/G''(\omega)$  reste supérieur à 10, ce qui nous permet d'affirmer que le PDMS possède un comportement rhéologique presque purement élastique.

Le coefficient de Poisson  $\nu$  n'a pas été mesuré. Nous avons considéré, suivant la littérature [47], que  $\nu$  est très proche de 0.5, c'est-à-dire que le PDMS est pratiquement un matériau incompressible.

### Moulage

Le moule est un parallélépipède de dimension  $50 \times 50 \times 2 \text{ mm}$  dont la base est constituée du support métallique dans lequel le capteur est enchâssé, et dont le couvercle est une plaque de PMMA dont la face interne a été rendue rugueuse par abrasion avec un mélange eau+poudre de Carbure de Silicium (le diamètre moyen des particules étant égal à  $37 \mu\text{m}$ ). Le mélange encore liquide PDMS-agent réticulant est versé dans le moule placé à la verticale pour permettre aux éventuelles bulles d'air formées de s'échapper du côté de la surface libre (Figure 1.3).

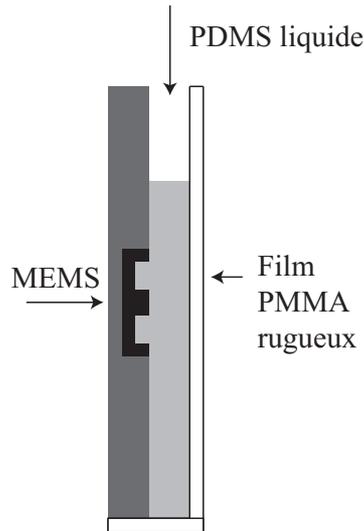


FIG. 1.3 – Schéma de principe de l'étape de moulage.

### Caractérisation de la topographie du film

Une fois réticulé et démoulé, on obtient un film rugueux en surface dont les dimensions latérales, choisies égales à  $50 \text{ mm}$ , sont grandes devant la taille maximale des contacts étudiés ( $\sim 8 \text{ mm}$ ) afin de s'affranchir d'éventuels effets de bord. Nous avons caractérisé la rugosité de ce film par profilométrie optique interférentielle (Profilomètre optique interférentiel M3D, Fogale Nanotech). La Figure 1.4 montre la topographie de surface type du film ainsi qu'un profil de hauteur selon une coupe horizontale de cette même topographie.

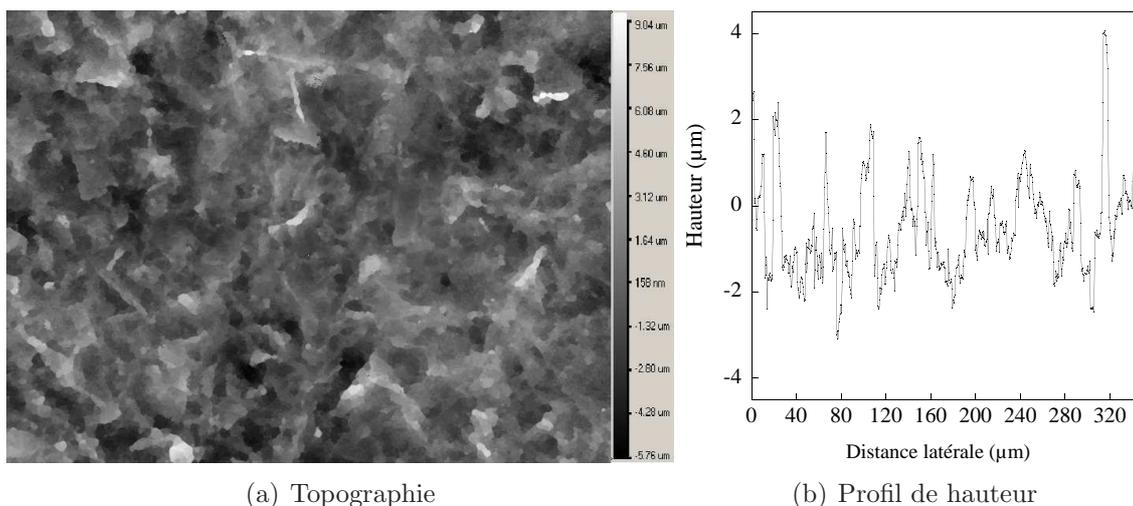


FIG. 1.4 – (a) Topographie de surface du PDMS, sur un rectangle de  $356.1 \mu m \times 268.7 \mu m$ , obtenue par profilométrie optique interférentielle. (b) Profil de hauteur selon une coupe horizontale de cette topographie.

A partir de 25 images de topographie contiguës de ce type, représentant une surface totale de  $2.4 mm^2$ , nous avons déterminé la distribution des hauteurs du film élastomère (Figure 1.5).

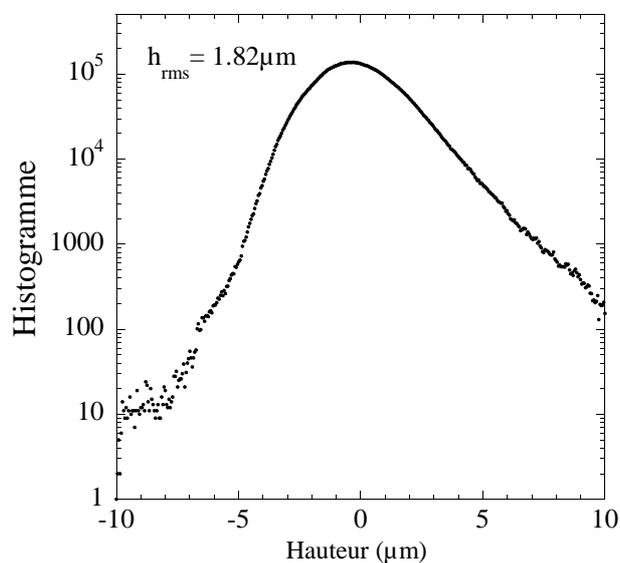


FIG. 1.5 – Représentation semi-logarithmique de la distribution des hauteurs à la surface du film de PDMS mesurée par profilométrie optique interférentielle, sur 25 zones, chacune de taille  $356.1 \mu m \times 268.7 \mu m$ .

La hauteur *rms* est de  $1.82 \pm 0.10 \mu m$ , et la distribution de hauteurs des sommets des aspérités, correspondant à la partie droite de la distribution, est approximativement

exponentielle. A ce stade, l'effet principal de cette rugosité de surface permet de réduire fortement les forces d'adhésion, puisque la force de séparation macroscopique n'est en pratique plus mesurable [48].

### 1.1.3 Parties mécaniques du dispositif

Le système MEMS + PDMS est monté sur un système de deux cantilevers orthogonaux<sup>5</sup>, eux mêmes montés sur deux platines de positionnement micrométrique.

Le cantilever de charge normale, monté en série avec l'élastomère, permet d'imposer une force normale  $F_N$  constante entre  $0 N$  et  $3 N$ . Sa raideur a été mesurée comme l'inverse de la pente de la dépendance linéaire de  $1/(4\pi^2 f^2)$  avec l'accroissement de masses accrochées à l'extrémité du cantilever, où  $f$  est la fréquence de résonance du système. Nous l'avons mesurée égale à  $k_N = 641 \pm 5 N.m^{-1}$ . Cette valeur est suffisamment faible pour que des défauts de parallélisme de l'ordre de  $10 \mu m$  sur  $2 cm$  induisent des variations relatives de  $F_N$  toujours inférieures à 2%. On déduit la mesure de la charge normale  $F_N$  en suivant les déflexions du cantilever grâce à un capteur de position capacitif Fogale Nanotech MCC30 dont la réponse a été calibrée à  $536 \pm 1 \mu m.V^{-1}$ . Cette valeur est lue sur un multimètre numérique.

Le cantilever de charge tangentielle, monté en série avec l'élastomère, permet de mesurer la force tangentielle  $F_T$  appliquée sur le contact. Sa raideur, mesurée de la même façon que pour  $k_N$ , est égale à  $k_T = 51100 \pm 700 N.m^{-1}$ . Cette valeur a été choisie grande par rapport à la raideur interfaciale<sup>6</sup>  $k_I$  afin de pouvoir imposer un déplacement et non pas une force. On mesure  $F_T$  de la même manière grâce à un capteur de position capacitif Fogale Nanotech MCC5 dont la réponse a été calibrée à  $25.55 \pm 0.40 \mu m.V^{-1}$ . Cette valeur est lue et enregistrée sur la dernière voie disponible de l'oscilloscope numérique.

Le montage inclut enfin un moteur linéaire (Newport, LTA-HS, contrôleur SMC100) qui permet d'imposer le déplacement relatif de l'élastomère par rapport au substrat à vitesse constante jusqu'à  $5 mm.sec^{-1}$ .

### 1.1.4 Préparation des substrats

Les substrats utilisés sont des lentilles sphériques ou cylindriques en verre optique BK7. L'énergie de surface du verre nu étant très élevée, toute pollution de sa surface, notamment par des chaînes libres du PDMS, est susceptible d'induire de fortes variations de l'énergie d'adhésion avec l'élastomère. Pour minimiser ces effets et obtenir des résultats en frottement le plus reproductibles possibles, nous avons utilisé une méthode couramment utilisée qui consiste à passiver le verre par greffage de molécules de silanes. Le résultat est une surface ayant une énergie d'adhésion dont la moyenne est abaissée, et dont les fluctuations spatiales sont fortement réduites.

Au terme de la réaction de greffage, à la surface du verre, les atomes d'hydrogène des silanols sont remplacés par des groupements  $-Si-(CH_3)_3$ , formant une couche d'épaisseur

<sup>5</sup>Atelier de mécanique du LPS, José Da Silva Quintas et Olivier Hombert

<sup>6</sup>Pour un contact de Hertz entre une sphère rigide de rayon  $R$  et un plan élastique semi-infini de module de Young  $E$ ,  $k_I = \frac{16}{9} E \sqrt{R} \delta^{1/2}$ , où  $\delta$  est le déplacement relatif des deux solides. Avec les valeurs numériques de notre expérience, pour  $\delta$  inférieur à  $50 \mu m$ ,  $k_I$  reste inférieur à  $10000 N.m^{-1}$ .

de l'ordre de quelques angstroms qui ne modifient pas la rugosité initiale du substrat. Les substrats silanisés sont hydrophobes : on passe d'un angle de contact inférieur à  $10^\circ$  sur du verre nettoyé à un angle de l'ordre de  $90^\circ$  sur du verre silanisé selon le protocole suivant que nous avons adopté pour nos substrats :

- dégraissage du verre par rinçage successif à l'acétone, à l'éthanol puis au méthanol
- nettoyage au plasma à oxygène pendant 30 secondes
- mise en cloche à vide à pression  $-0.1\text{ MPa}$ , en présence d'une goutte de 1H,1H,2H,2H-perfluorodecyltrichlorosilane (PFTS), en présence de dessicant, pendant 12 h
- rinçage éventuel à l'isopropanol si un dépôt blanc est visible

La surface de PDMS peut également être silanisée [49], dans les mêmes conditions, juste après démoulage en plaçant le système MEMS + PDMS dans la cloche de silanisation. Cette opération offre les mêmes avantages que la silanisation du substrat.

### 1.1.5 Observation du contact

L'observation de la zone de contact se fait en réflexion à l'aide du dispositif représenté sur la Figure 1.6.

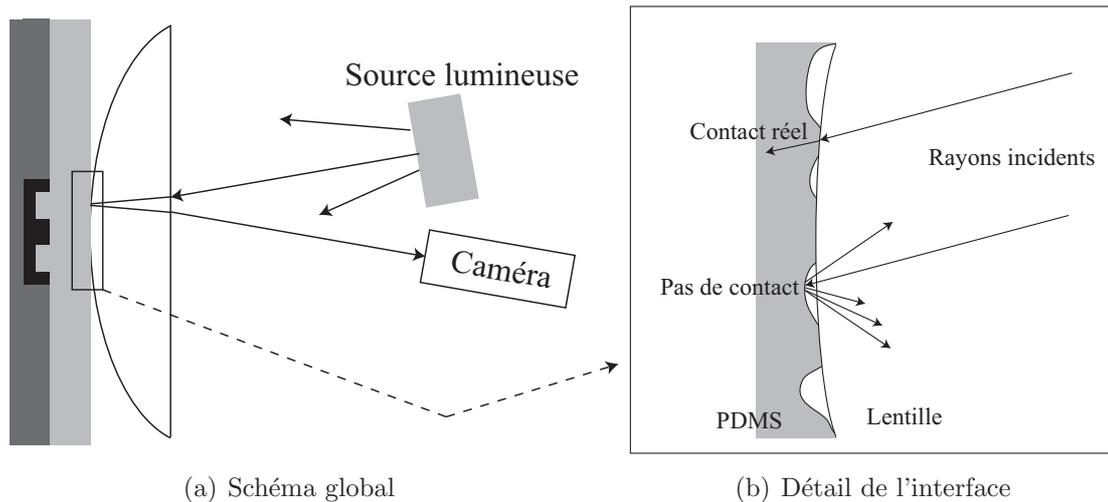


FIG. 1.6 – (a) Schéma de principe du dispositif d'observation du contact. (b) Représentation du parcours des rayons lumineux à l'interface. Ils subissent une réfraction dans les zones de contact intime. Ailleurs ils sont diffusés.

La zone de contact est éclairée à travers la lentille avec un angle d'incidence de l'ordre de  $10^\circ$ . Dans les zones de contact intime, les rayons lumineux traversent l'interface verre-PDMS par simple réfraction puis sont absorbés par le fond noir. Ailleurs, les rayons lumineux sont diffusés par l'interface air-PDMS, rugueuse à l'échelle du micron. Une caméra CCD 8 bit Cohu 4910 Series munie d'un objectif télécentrique 6X Navitar, est placée au maximum de l'intensité rétro-diffusée. L'image obtenue correspond à un fond clair rétro-diffusé, sur lequel les zones de contact réel apparaissent sombres. En pratique, cette observation est difficile à la verticale du capteur, car la lumière réfléchie par sa surface sature le capteur CCD.

## 1.2. Contact normal sphère-plan

La Figure 1.7 montre un exemple des images obtenues par ce dispositif (a) hors contact et (b) pour un contact sphère-plan. La différence entre ces deux images (c) met en évidence la zone de contact apparent.

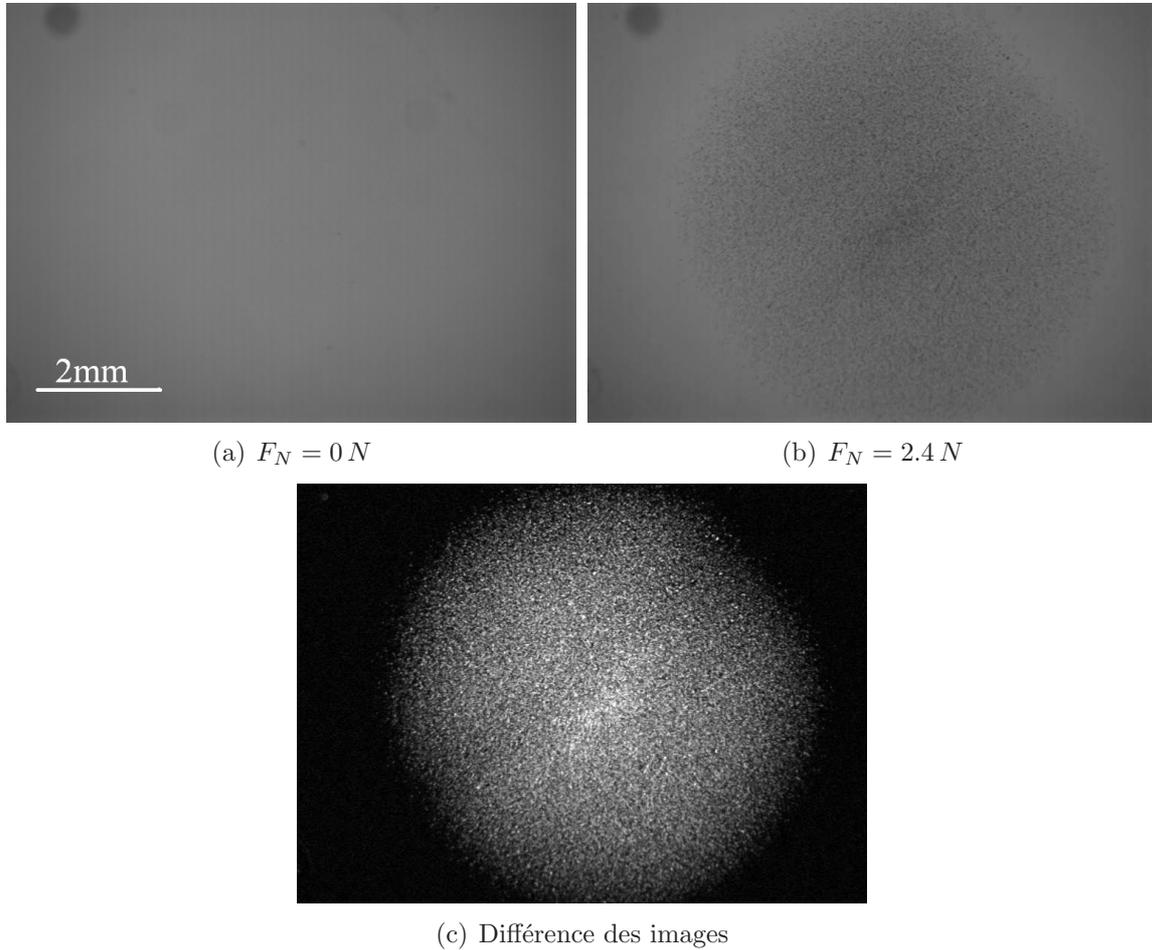


FIG. 1.7 – Images de l’interface (a) hors contact (b) en contact sous  $F_N = 2.49 N$  (c) Différence pixel à pixel entre ces deux images, mettant en évidence la zone de contact apparent.

## 1.2 Contact normal sphère-plan

### 1.2.1 Résultats expérimentaux

Nous avons réalisé, pour une force normale  $F_N$  appliquée entre  $0 N$  et  $2.75 N$ , un contact sous charge purement normale ( $F_T = 0$ ) entre une lentille sphérique de rayon de courbure  $129.2 mm$  et le film de PDMS décrit dans le chapitre 1.1.

### Observation du contact

Nous avons enregistré l'image de la zone de contact pour une série de valeurs de  $F_N$ . Chaque image résulte de la moyenne de 20 images successives dans les mêmes conditions, afin de s'affranchir du bruit d'acquisition de la caméra. La Figure 1.8 montre ces images, desquelles est soustraite l'image correspondant à la situation hors contact, pour huit valeurs de  $F_N$ . La zone de contact apparent est quasi-circulaire, comme attendu en géométrie sphère-plan, et d'aire croissante avec  $F_N$ .

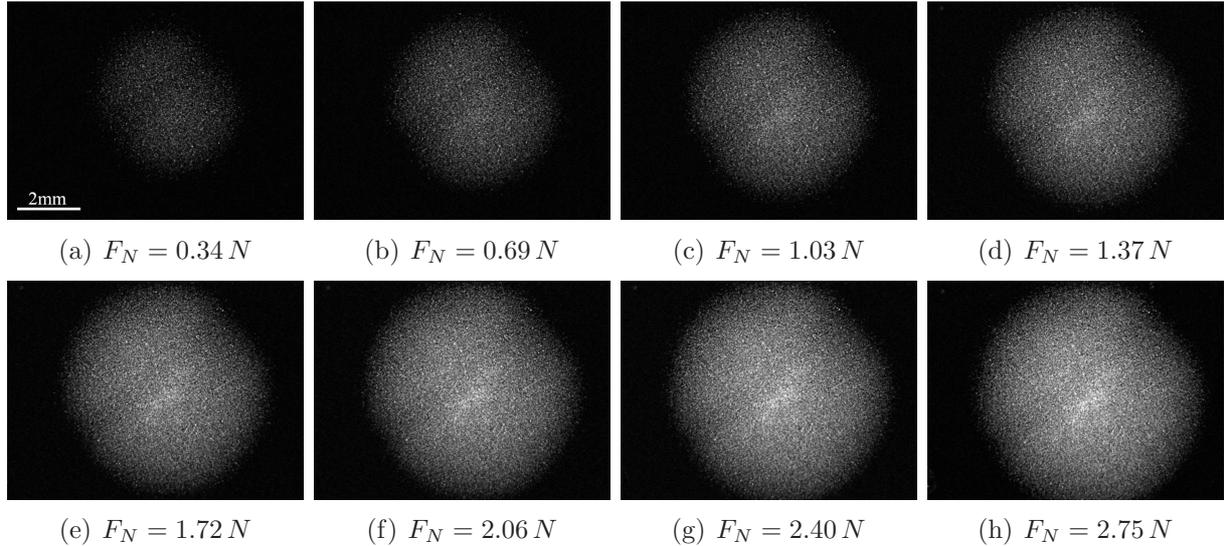


FIG. 1.8 – Différence entre les images en contact et hors contact, pour toutes les valeurs de  $F_N$  utilisées.

Une analyse quantitative de ce type d'images, obtenues en transmission, est proposé au Chapitre 4. A ce stade cette mesure ne vise qu'à offrir une simple estimation du rayon de contact apparent pour chaque valeur de  $F_N$ . Par un seuillage en intensité, on sélectionne les points les plus lumineux, qui se trouvent dans la zone de contact apparent. On détermine alors le contour à l'intérieur duquel se trouvent tous ces points, puis l'aire  $A_0$  correspondante.  $A_0$  varie essentiellement en fonction du seuil d'intensité choisi à la première étape. Le seuil utilisé en pratique (valeur égale à 5 sur 256 niveaux de gris) a été choisi assez élevé pour que le contour trouvé pour chaque  $F_N$  soit raisonnablement circulaire et assez faible pour que même aux plus faibles valeurs de  $F_N$  utilisées, des points de contact soient détectés. Pour chaque mesure, l'incertitude absolue est prise comme l'écart quadratique moyen sur les 3 valeurs correspondant aux seuils de valeur 3, 4 et 6.

La Figure 1.9 représente le rayon de contact mesuré  $a = \sqrt{A_0/\pi}$  en fonction de  $F_N$ . La courbe en trait plein montre la dépendance en  $F_N^{1/3}$  attendue pour un contact de Hertz, pour une épaisseur de couche infinie (voir Annexe A). Les deux courbes en pointillés correspondent aux résultats obtenus en épaisseur finie par Shull [50, 51], par un calcul en éléments finis pour deux conditions extrêmes de frottement : un coefficient de frottement nul ou infini. L'insert montre les mêmes courbes en coordonnées logarithmiques. Le bon

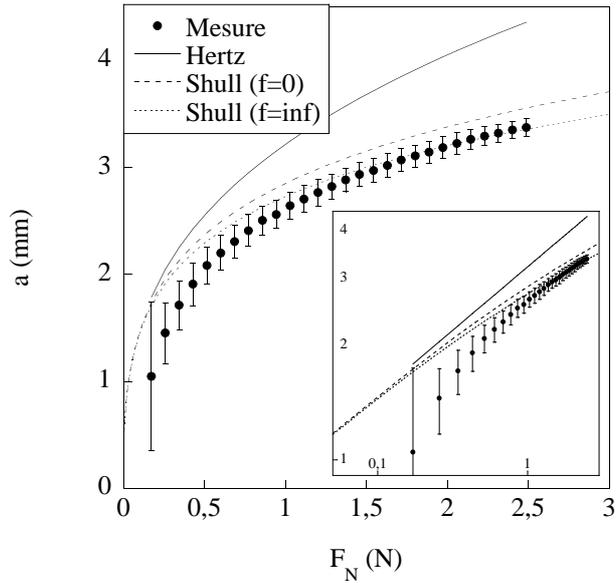


FIG. 1.9 – Rayon de contact en fonction de la charge normale appliquée. Les points correspondent aux valeurs mesurées par analyse d’image. Ces points s’écartent sensiblement du rayon de Hertz (trait plein) valable en milieu semi-infini. Ils se comparent correctement aux résultats d’un calcul en éléments finis pour un film d’épaisseur finie (pointillés) pour deux conditions de frottement à l’interface ( $h = 2\text{ mm}$  et  $E = 2.2\text{ MPa}$ ).

accord avec nos mesures montre la validité de cette estimation de la taille de la zone de contact.

### Mesures directe des contraintes

Pour une force normale donnée, nous avons réalisé une série de mises en contact pour différentes positions relatives de la zone de contact par rapport à celle du MEMS. En supposant que les propriétés de surface du film de PDMS sont homogènes, on peut alors reconstituer point par point le champ des tensions de sortie du MEMS lors de ce contact sphère-plan. Le fonctionnement des cantilevers ne permet pas d’imposer une charge purement normale, car toute déflexion du cantilever est accompagnée d’un faible déplacement tangentiel, qui doit être ensuite compensé par translation inverse pour garantir une force tangentielle globale nulle. Les profils de contrainte finaux peuvent néanmoins dépendre du détail de l’histoire des contraintes, du fait des microglissements induits. Une quantification de ces effets est présentée en fin de ce Chapitre pour deux procédures de mise en charge. Nous avons choisi celle qui minimise la contrainte tangentielle maximum atteinte :

1. Hors contact, on enregistre à l’oscilloscope numérique les signaux correspondant à  $F_T = 0$ , et à des contraintes nulles sur le MEMS pendant  $5\text{ sec}$ . On note également la tension, mesurée au voltmètre, correspondant à  $F_N = 0$ .
2. La mise en contact se fait progressivement en approchant le film élastique de la lentille à l’aide d’une platine de translation manuelle. On ajuste, par lecture au

voltmètre, la force normale  $F_N$  appliquée, avec une incertitude relative inférieure à 2%.

3. L'extrémité du cantilever de charge normale subit un déplacement de quelques  $mm$  selon l'axe  $z$ , mais aussi un déplacement selon l'axe  $y$  de l'ordre de  $100 \mu m$  au maximum. En termes de force, cela se traduit quand même par une force tangentielle  $F_T$  d'amplitude comparable à celle  $F_N$  au cours de la mise en charge progressive. Pour minimiser  $F_T$ , on renouvelle le contact en écartant manuellement le film du substrat puis on le laisse revenir au contact lentement. La force tangentielle est significativement diminuée, mais reste de l'ordre d'une fraction de  $F_N$ .
4. On translate alors le film élastique selon l'axe  $y$  à l'aide d'une vis micrométrique jusqu'à ce que  $F_T$  s'annule. Ce déplacement, de quelques  $\mu m$ , reste largement inférieur à celui qui serait nécessaire pour induire un glissement macroscopique.
5. On enregistre les signaux correspondant à  $F_T$  et aux contraintes exercées sur le MEMS dans cette situation, pendant  $5 sec$ . Les contraintes sont calculées par différence entre les valeurs moyennes de ces signaux et de ceux enregistrés à l'étape 1. L'incertitude associée sera la somme des deux écarts type correspondant.

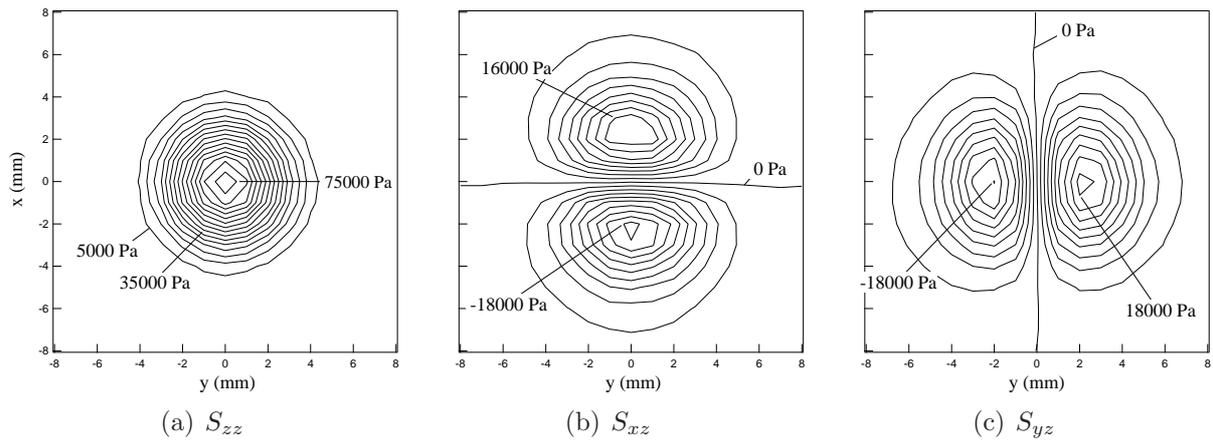


FIG. 1.10 – Champ de contraintes sous le film mesuré par le MEMS ( $F_N = 1.72 N$ ).

La Figure 1.10 montre les champs mesurés, exprimés en Pascals, pour une force normale appliquée de  $1.72 N$ . Les coefficients de calibration choisis pour passer des tensions mesurées aux contraintes exercées sont les suivantes. En pression, nous utilisons directement la valeur de  $3.9 mV/V/bar$  donnée par le LETI. En cisaillement, le LETI ne donnant pas de correspondance en termes de contraintes mais en terme de force, nous utilisons pour l'instant une valeur *ad hoc* de  $1.9 mV/V/bar$ , valeur proche de celle de chacune des deux voies correspondant à la pression. Une valeur exacte de ces calibrations sera déterminée aux Chapitres 1.3.1 et 1.3.2. Les valeurs de contrainte ainsi déterminées seront notées  $S_{zz}$ ,  $S_{xz}$  et  $S_{yz}$ , pour bien les différencier des valeurs du vrai champ de contrainte exercé sur le MEMS. Les lignes isocontrainte sont interpolées à partir  $17 * 17 = 289$  points de mesure répartis selon un réseau carré régulier de pas  $1 mm$ .

Qualitativement, le champ  $S_{zz}(x, y)$  correspondant à la pression est axisymétrique. Les champs  $S_{xz}(x, y)$  et  $S_{yz}(x, y)$  correspondant au cisaillement projeté sur  $x$  et  $y$  sont eux antisymétriques par rapport aux axes  $y$  et  $x$  respectivement. Ces propriétés sont compatibles avec la géométrie sphère-plan du contact formé. Dans ces conditions, les mesures peuvent être limitées au seul profil selon l'axe  $y$ . Cela permet également de diminuer considérablement le nombre de mesures à réaliser pour chaque  $F_N$ , et donc de réaliser des mesures moins espacées, tous les  $500 \mu m$ . La Figure 1.11 montre les profils mesurés pour huit valeurs de  $F_N$ .

Qualitativement toujours, on retrouve pour les profils les symétries observées pour la mesure du champ complet. Le signal correspondant au cisaillement dans la direction orthogonale au profil est quasi-nul, ce qui prouve que le profil réalisé passe bien par le centre du contact. Notons que les signaux de pression et de cisaillement dans la direction du profil ont des valeurs non nulles même en dehors du contact apparent (représenté par un trait noir sous chaque courbe). Cet élargissement est en partie lié au fait que la mesure se fait sous le PDMS, c'est-à-dire que l'on ne mesure pas un signal associé directement aux contraintes à l'interface, mais aux contraintes transmises à travers  $2 mm$  de matériau élastique. C'est également pour cela que des valeurs non-nulles des contraintes de cisaillement sont observées, même pour une force tangentielle totale  $F_T$  nulle : c'est l'intégrale spatiale de la contrainte de cisaillement sur tout le plan inférieur du film qui devra s'annuler pour assurer l'équilibre mécanique.

### 1.2.2 Calcul des contraintes

Nous avons réalisé des calculs élastiques en éléments finis (logiciel Castem 2000), en prenant en compte la géométrie particulière de nos expériences. Ce type de calcul est couramment utilisé pour modéliser la répartition des contraintes de contact, en statique linéaire, dans des géométries où un calcul analytique n'est pas réalisable. Joël Frelat<sup>7</sup> nous a initié à ce type de calculs numériques et nous a aidé à tester la qualité des résultats.

#### Calculs en éléments finis

La méthode des éléments finis permet de trouver des solutions approchées pour un système régi par des équations aux dérivées partielles, telles que les équations de l'élasticité linéaire, et soumis à des conditions aux limites connues. Elle repose sur la définition d'un maillage subdivisant le système étudié en sous-systèmes. Chaque sous-système, associé à une famille de fonctions, typiquement polynômiales, servant à interpoler le résultat est appelé élément. Le système, formulé sous forme intégrale, est discrétisé pour permettre une résolution par inversion matricielle.

Les calculs ont été menés en mode axisymétrique, pour un film élastique d'épaisseur constante  $h = 2 mm$ , de rayon  $20 mm$ , de module de Young  $E = 2.2 MPa$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.499$ , et pour une sphère de verre de rayon  $R = 129.2 mm$ , de module de Young  $E_{verre} = 10^6 MPa$ , et de coefficient de Poisson  $\nu_{verre} = 0.22$ .  $\nu$  est choisi le plus proche possible de 0.5, pour prendre en compte l'incompressibilité du PDMS, sans

---

<sup>7</sup>Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Paris 6, Paris

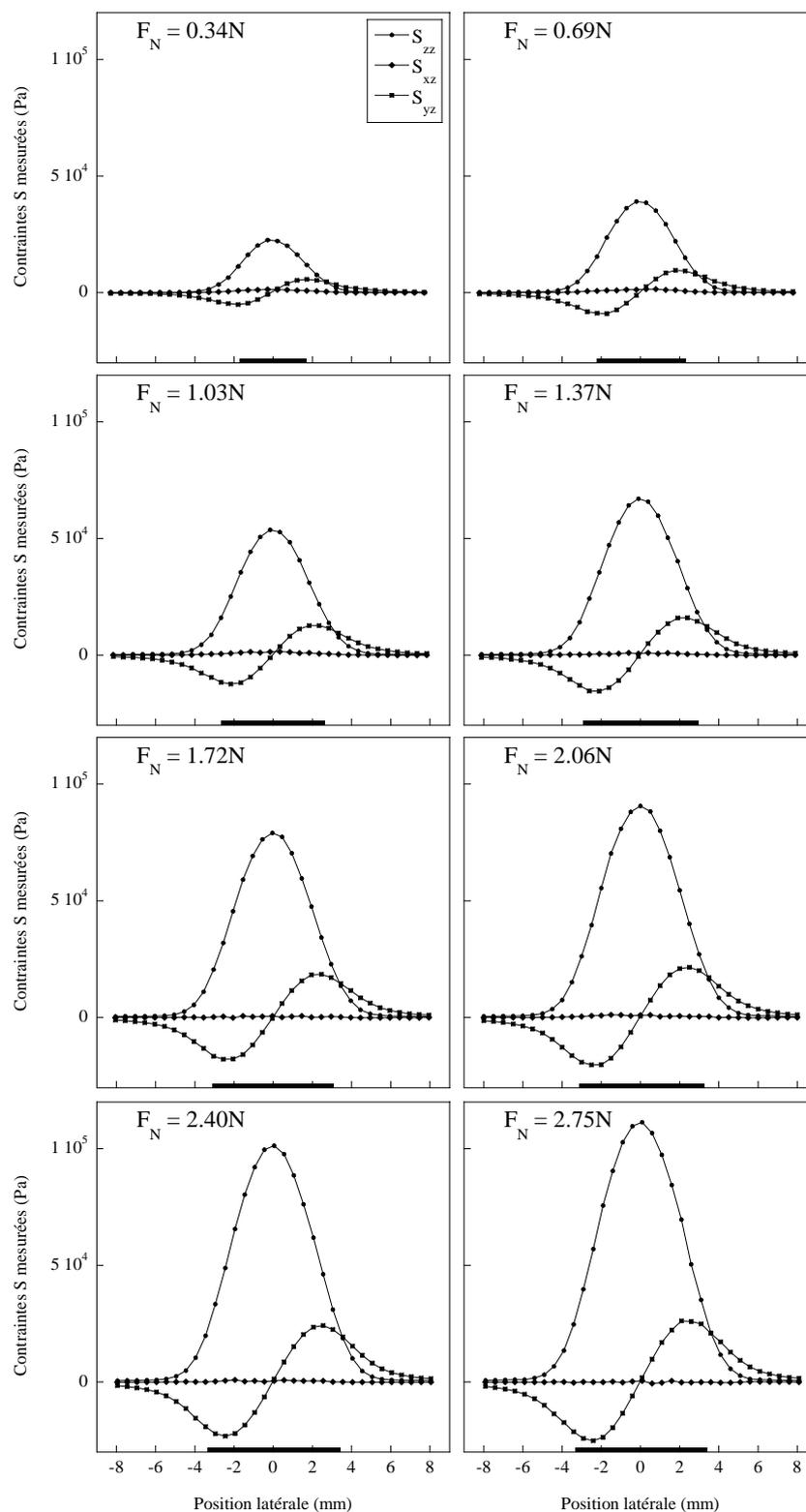


FIG. 1.11 – Champs de contrainte  $S_{zz}$ (●),  $S_{xz}$ (◆) et  $S_{yz}$ (■) mesurés sous le film par le MEMS. Le trait noir sur l'axe des abscisses représente le diamètre de la zone de contact apparent.

toutefois l'atteindre car sinon le calcul divergerait. Le rapport des modules de Young assure que la sphère est infiniment rigide par rapport au film élastique.

Les conditions aux limites sont : un déplacement nul à la base du film, traduisant l'adhésion parfaite de l'élastomère à son support rigide ; un contact unilatéral entre les deux solides, traduisant leur non-interpénétrabilité. Dans la zone de contact, deux conditions aux limites extrêmes ont été implémentées : un contact parfaitement glissant (coefficient de frottement  $f = 0$ ) et un contact parfaitement adhésif (coefficient de frottement  $f = \infty$ ) pour lequel tout déplacement latéral des points du film en contact avec la sphère est prohibé.

Les entrées du calcul sont la géométrie, les propriétés mécaniques des matériaux et le déplacement relatif vertical des deux solides. Les résultats sont le rayon de contact, la force exercée et les profils de contraintes sous le film.

Notons que comparer les mesures aux résultats des calculs en éléments finis revient à considérer que notre situation expérimentale est bien traduite par cette géométrie avec un film élastique à faces planes. Cela revient en fait à faire trois hypothèses (i) le PDMS est considéré comme un matériau purement élastique, hypothèse raisonnable au vu du rapport  $G'/G''$  (voir Annexe A) (ii) la rugosité de surface du PDMS modifie peu les contraintes exercées en surface par rapport au cas lisse, hypothèse raisonnable dès que le déplacement relatif vertical  $\delta_z$  entre le PDMS et le substrat ( $\delta_z > 15 \mu m$  pour nos conditions expérimentales) est très grand devant la rugosité *rms* [12] (iii) la topologie de la partie sensible du MEMS modifie peu les champs de contraintes sous le film PDMS par rapport à la situation où le support serait complètement plan, hypothèse raisonnable si l'on compare la taille verticale de la structure du MEMS (moins de  $500 \mu m$ ) à l'épaisseur du film ( $h = 2 mm$ ).

La Figure 1.12 montre la relation entre le rayon de contact et la force normale calculés pour les deux conditions de frottement : les points blancs correspondent à  $f = 0$ , les carrés blancs correspondent à  $f = \infty$ . Les points noirs correspondent aux résultats des mesures optiques de la Figure 1.9. On constate que, pour une même valeur de  $F_N$ , le rayon de contact est toujours plus faible pour  $f = \infty$  que pour  $f = 0$ . En effet, dans ce dernier cas, les points du film élastique sont autorisés à glisser pour relaxer les contraintes tangentielles à l'interface, ce qui élargit le contact.

La Figure 1.13 montre, pour  $F_N = 1.72 N$ , les profils de contraintes  $\sigma_{zz}^c$  et  $\sigma_{yz}^c$  calculés à la base du film élastique, pour les deux conditions limites, glissante et adhésive. Qualitativement, les courbes mesurées et les courbes calculées pour la même valeur de  $F_N$  sont similaires. On constate que les courbes varient sensiblement selon la condition de frottement adoptée. Les courbes pour  $f = \infty$  ont une largeur plus faible que celles pour  $f = 0$ , reflétant la largeur du contact en surface. Cependant, les intégrales de ces champs sur toute la surface inférieure du film sont les mêmes dans les deux cas, égales aux forces totales  $F_N = 1.72 N$  et  $F_T = 0 N$  imposées.

### Modèle semi-analytique

Frétnigny et Chateauminois [52] ont récemment développé un modèle semi-analytique (appelé par la suite modèle FC) permettant de calculer les champs de contrainte et de déformation pour un milieu élastique isotrope stratifié soumis à un chargement axisymé-

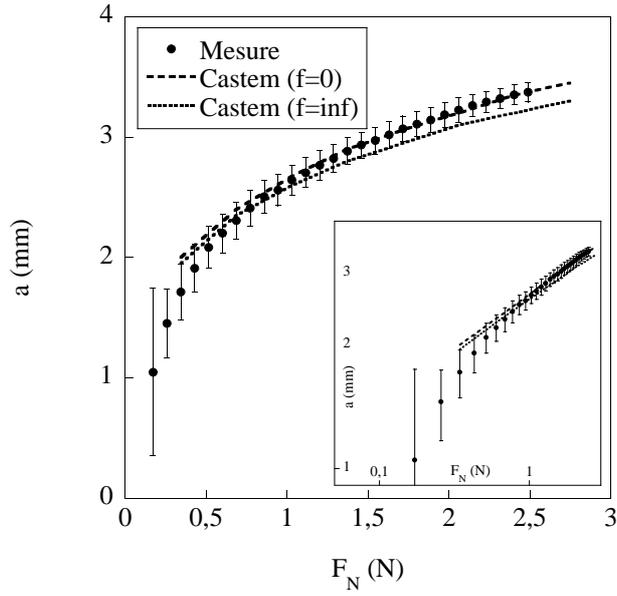


FIG. 1.12 – Rayon de contact calculé en fonction de la force normale calculée pour les deux conditions de frottement. Comparaison avec les points expérimentaux.

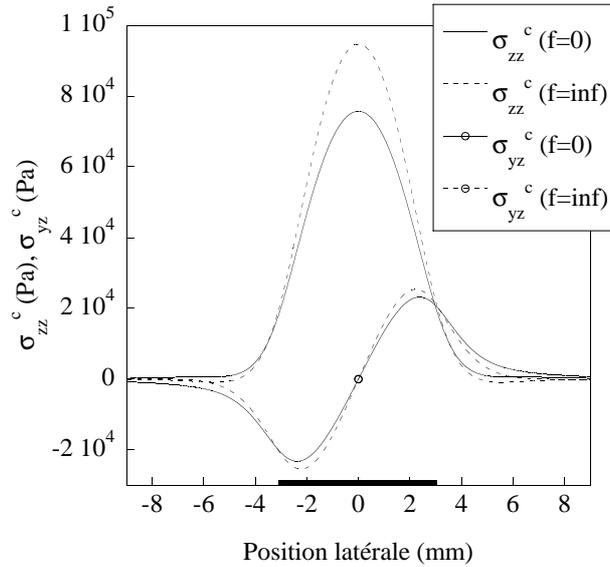


FIG. 1.13 – Profils de contraintes de pression  $\sigma_{zz}^c$  et de cisaillement  $\sigma_{yz}^c$  ( $\circ$ ) calculés pour un contact sphère-plan, sous charge normale  $F_N = 1.72N$ , pour  $f = 0$  (trait plein) et  $f = \infty$  (pointillés).

trique par un indenteur rigide, en l'absence de frottement. Nous avons pu comparer les résultats de leur modèle à nos résultats obtenus par éléments finis, dans le cas  $f = 0$ , au Chapitre 1.2.2, pour les mêmes paramètres mécaniques et géométriques.

La Figure 1.14 représente la dépendance du rayon de contact  $a$  avec la force normale

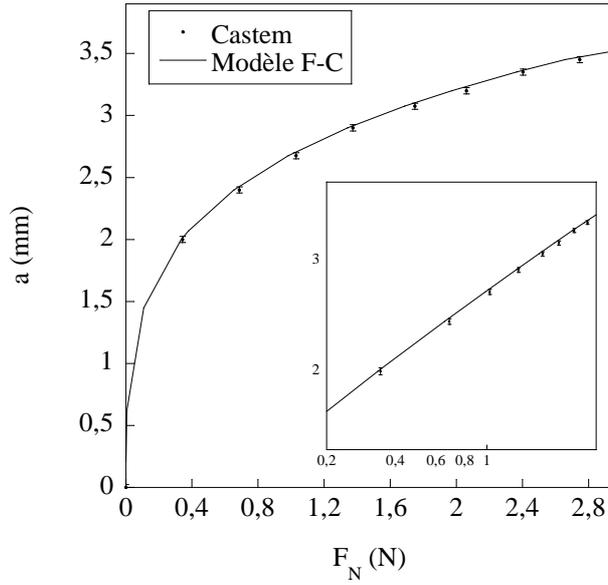


FIG. 1.14 – Dépendance du rayon de contact  $a$  en fonction de la force normale appliquée  $F_N$ , pour un coefficient de frottement nul. Les points correspondent aux résultats des calculs en éléments finis. La courbe correspond au résultat issu du modèle FC, pour les mêmes paramètres géométriques et mécaniques. L'insert montre la même courbe en échelle log-log.

appliquée. Elle montre que les résultats obtenus par ces deux méthodes sont compatibles.

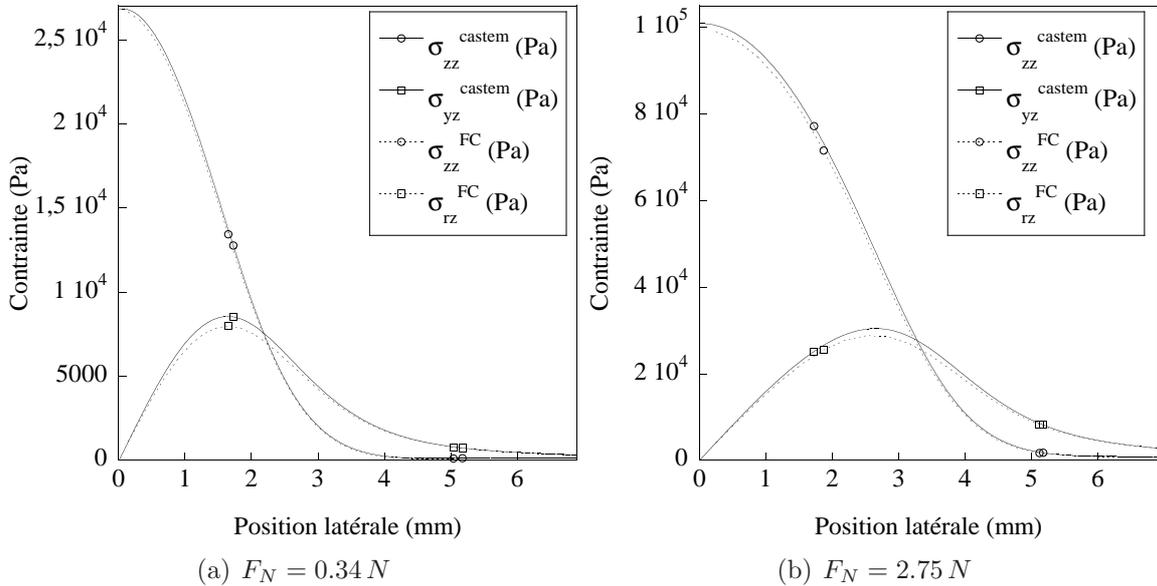


FIG. 1.15 – Champs de contrainte de pression ( $\circ$ ) et de cisaillement ( $\square$ ) sous le film élastique, calculés par éléments finis pour  $f = 0$  (trait plein), à partir du modèle FC (pointillés), pour 2 valeurs de  $F_N$ .

La Figure 1.15 représente, pour les deux valeurs extrêmes de  $F_N$  utilisées, les profils de contraintes sous la couche élastique calculés par les 2 méthodes. Ils diffèrent de moins de 2% en pression, et de moins de 7% en cisaillement, les résultats en éléments finis étant systématiquement supérieurs à ceux obtenus pour le modèle FC. Ce bon accord confirme la qualité des résultats obtenus en éléments finis pour  $f = 0$ .

### 1.2.3 Comparaison directe

Nous avons cherché à comparer directement les profils mesurés  $S_{zz}(x, y)$  et  $S_{yz}(x, y)$  obtenus pour les calibrations *ad hoc* définies précédemment au Chapitre 1.2.1 et ceux calculés par la méthode des éléments finis pour  $f = 0$  et  $f = \infty$ . Ceux-ci ont été déterminés pour une charge normale  $F_N$  croissante de 0.34 N à 2.75 N et sont représentés sur la Figure 1.16.

## 1.3 Détermination des fonctions d'appareil du capteur MEMS

La Figure 1.16 montre un bon accord qualitatif entre les données brutes issues du capteur MEMS et le champ des contraintes à la base du film calculé numériquement. On constate cependant que les profils mesurés en pression comme en cisaillement sont plus larges que les profils calculés. La différence observée est liée à la taille finie de la zone de sensibilité du MEMS. L'utilisation de ce capteur pour mesurer le champ de contraintes impose de déterminer la fonction d'appareil qui lui est associée. Nous décrivons par la suite la procédure de détermination de cette fonction pour les composantes de pression puis de cisaillement.

### 1.3.1 Fonction d'appareil en pression

#### Principe de la méthode

Nous faisons l'hypothèse qu'il existe une fonction d'appareil  $FA_{zz}$  telle que le champ des tensions mesurées par le MEMS pour la composante de pression  $U_{zz}$  puisse s'écrire en fonction du champ de contrainte normale à la base du film  $\sigma_{zz}(x, y)$  sous la forme :

$$U_{zz}(x, y) = FA_{zz}(x, y) \otimes \sigma_{zz}(x, y) \quad (1.1)$$

où  $\otimes$  représente un produit de convolution.

Par transformée de Fourier spatiale (notée  $\mathcal{F}$ ), l'équation (1.1) s'écrit :

$$\mathcal{F}\{U_{zz}\}(f_x, f_y) = (\mathcal{F}\{FA_{zz}\} \cdot \mathcal{F}\{\sigma_{zz}\})(f_x, f_y) \quad (1.2)$$

où  $f_x$  et  $f_y$  sont les fréquences spatiales associées aux directions  $x$  et  $y$  respectivement.  $FA_{zz}$  peut donc être exprimée sous la forme :

$$FA_{zz}(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{\mathcal{F}\{U_{zz}\}(f_x, f_y)}{\mathcal{F}\{\sigma_{zz}\}(f_x, f_y)} \right) (x, y) \quad (1.3)$$

### 1.3. Détermination des fonctions d'appareil du capteur MEMS

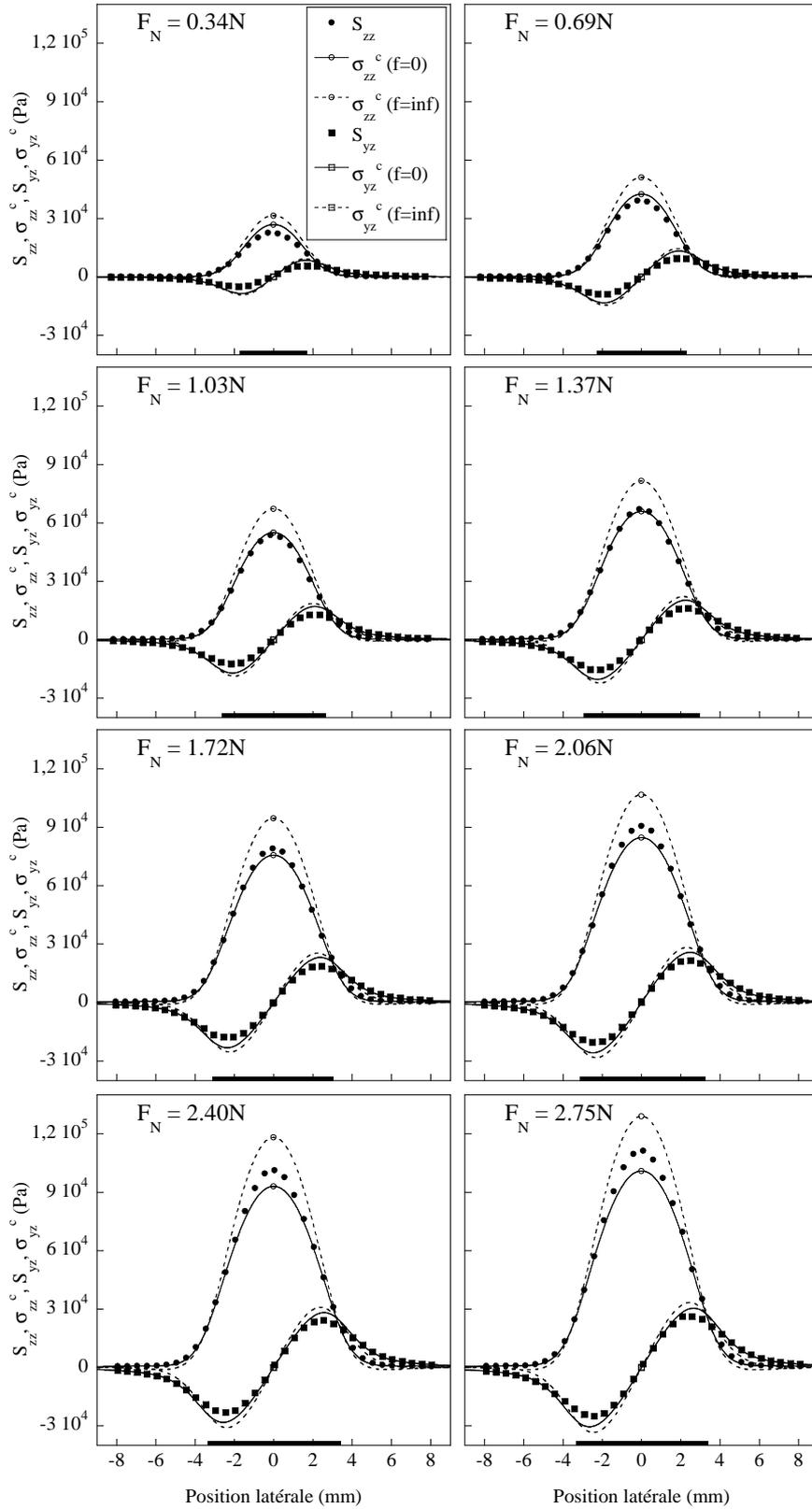


FIG. 1.16 – Comparaison entre les mesures  $S_{zz}$  ( $\bullet$ ) et  $S_{yz}$  ( $\blacksquare$ ) et les contraintes  $\sigma_{zz}^c$  ( $\circ$ ) et  $\sigma_{yz}^c$  ( $\square$ ) calculées avec Castem pour  $f = 0$  (trait plein) et  $f = \infty$  (pointillés).

Nous utiliserons la valeur  $\sigma_{zz}^c$  calculée par Castem à la base du film pour déterminer expérimentalement  $FA_{zz}$ . Le choix du type de sollicitation de la surface servant à extraire cette fonction est guidé par les deux contraintes suivantes :

- Les résultats du calcul doivent être peu dépendants de la valeur particulière du coefficient de frottement, que l'on ne contrôle pas expérimentalement.
- La reconstruction complète de  $FA_{zz}(x, y)$  par cette procédure de déconvolution numérique nécessite de prendre en compte la réponse du MEMS sur la plus large gamme de fréquences spatiales possibles. Pour cela, il faut choisir une situation de référence pour laquelle le champ  $\sigma_{zz}(x, y)$  présente des variations spatiales rapides.

La situation de référence choisie est l'indentation ponctuelle normale, qui est facilement réalisable numériquement comme expérimentalement. La surface en contact étant très faible, le détail des conditions de frottement influe peu sur les contraintes dans le film. D'autre part, il s'agit de la stimulation qui présente les variations spatiales les plus rapides.

### Indentation quasi-ponctuelle du film de PDMS

Expérimentalement, l'indenteur choisi est l'extrémité d'un fil métallique, de section circulaire de diamètre  $d = 500 \mu m$ , petit devant  $h = 2 mm$ , coupé perpendiculairement à son axe. Le fil est collé sur sa longueur entre deux lames de verre, l'extrémité ne dépassant que de quelques centaines de  $\mu m$ , ce qui permet de négliger sa flexion éventuelle. Il est fixé sur le même bâti à la place de la lentille sphérique (voir Chapitre 1.1).

La Figure 1.17 montre les variations de la tension  $U_{zz}$  en fonction de la force normale  $F_N$  appliquée lors d'un cycle de charge-décharge du contact au voisinage de la verticale du MEMS. La dépendance observée est linéaire, traduisant à la fois le caractère linéaire du

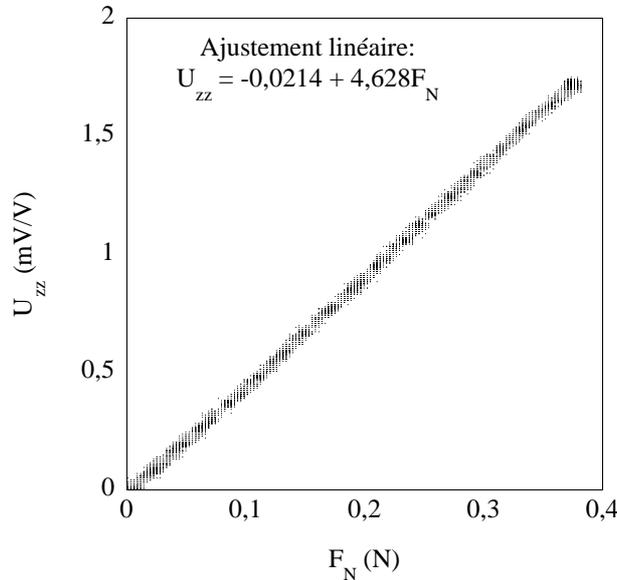


FIG. 1.17 – Tension de sortie  $U_{zz}$  du MEMS en fonction de  $F_N$  pour un cycle charge-décharge en indentation ponctuelle. Aucune hystérèse n'est observée : les points correspondant à la charge et à la décharge sont superposés.

### 1.3. Détermination des fonctions d'appareil du capteur MEMS

champ de contraintes dans un film élastique sous sollicitation quasi-ponctuelle et la réponse linéaire du capteur. Afin d'améliorer la précision de la mesure, la réponse du MEMS est caractérisée pour chaque position particulière par la pente extraite de l'ajustement linéaire de la courbe, exprimée en  $mV/V/N$ .

La Figure 1.18 montre le profil  $U_{zz}(0, y)$  correspondant à une  $F_N$  appliquée de  $1N$ . Un ajustement gaussien permet d'extraire une demi-largeur caractéristique de  $1.06\text{ mm}$ .

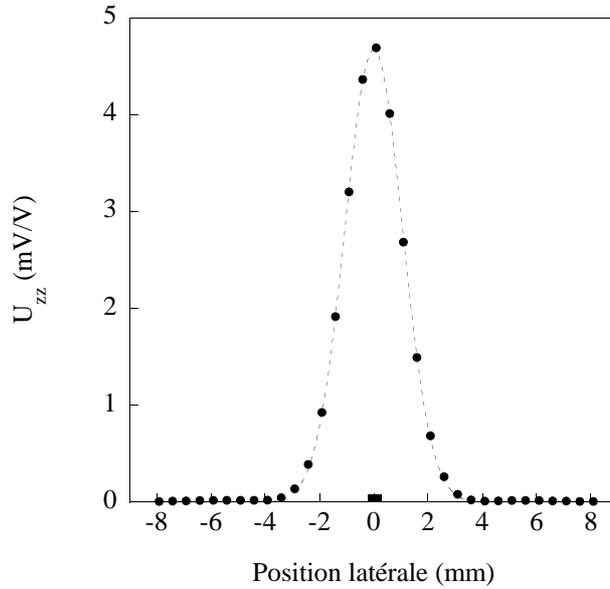


FIG. 1.18 – Profil  $U_{zz}(0, y)$  expérimental (●) pour une indentation ponctuelle sous charge ramenée à  $1N$ , et un ajustement gaussien de largeur  $1.06\text{ mm}$  (pointillés).

#### Calcul pour un poinçon circulaire

Le calcul des contraintes dans le cas de l'indentation d'un film élastique par un poinçon est aisé sous Castem, car on connaît a priori la zone de contact. Le calcul a été mené en mode axisymétrique, pour un film élastique de même géométrie et de mêmes propriétés mécaniques que pour le cas sphère-plan. Le poinçon, de diamètre  $500\text{ }\mu\text{m}$ , est supposé rigide. La Figure 1.19 montre le profil de pression calculé pour une force normale totale de  $1N$ , pour les deux valeurs extrêmes du coefficient de frottement.

Les deux conditions envisagées donnent des profils calculés très voisins, ce qui confirme la validité de notre choix de situation de référence. Un ajustement gaussien pour le cas  $f = 0$  donnerait une demi-largeur valant  $0.91\text{ mm}$ .

#### Déconvolution numérique

Le rapport des transformées de Fourier (Equation 1.3) est effectué numériquement par FFT (Fast Fourier Transform). Une difficulté apparaît à haute fréquence du fait de la décroissance rapide de  $\mathcal{F}\{\sigma_{zz}^c\}$ . Pour s'en affranchir, un bruit blanc d'amplitude environ 10 fois inférieure à celle de la plus faible composante pertinente est ajouté aux deux

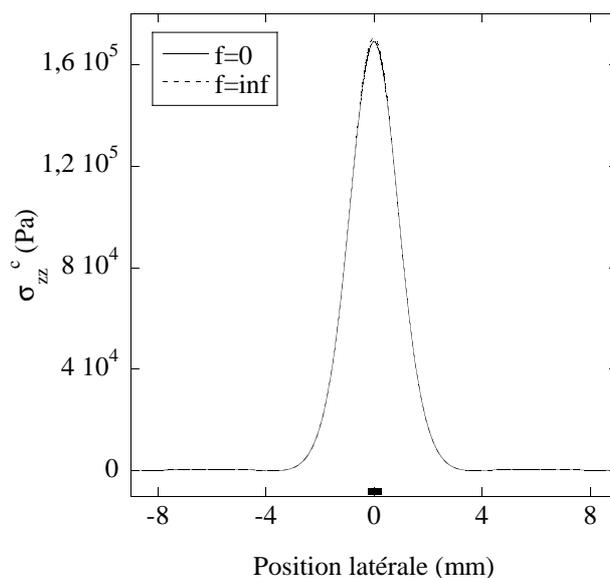


FIG. 1.19 – Profil de contrainte de pression calculé  $\sigma_{zz}^c$  pour une indentation par un poinçon circulaire de diamètre  $500 \mu m$ , sous force normale de  $1 N$ , pour les deux conditions de frottement  $f = 0$  (trait plein) et  $f = \infty$  (pointillés).

signaux avant d'effectuer les transformées de Fourier. La valeur particulière de ce bruit blanc est sans effet significatif sur le résultat obtenu.

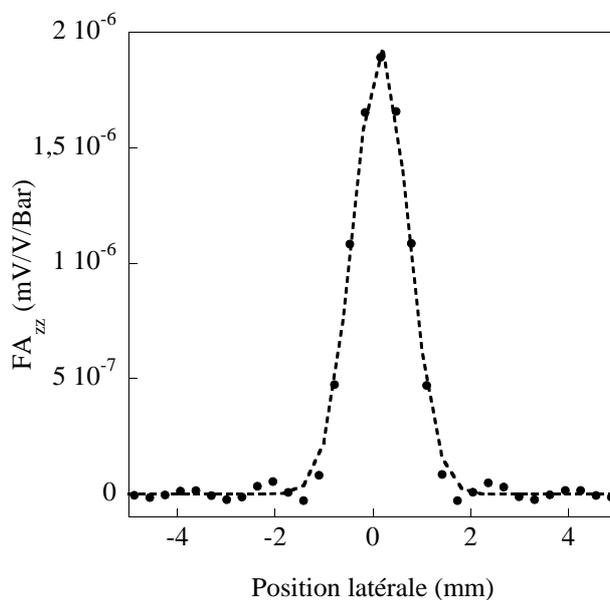


FIG. 1.20 – Profil  $FA_{zz}(0, y)$  de la fonction d'appareil en pression calculée à partir d'une situation d'indentation ponctuelle ( $\bullet$ ), et ajustement gaussien de demi-largeur  $561 \pm 5 \mu m$  (pointillés).

### 1.3. Détermination des fonctions d'appareil du capteur MEMS

La fonction  $FA_{zz}$  (voir Figure 1.20) est axisymétrique et son intégrale vaut  $3.78 \text{ mV/V/bar}$ . Cette valeur est cohérente avec les  $3.9 \text{ mV/V/bar}$  donnés par le LETI pour le capteur calibré à nu<sup>8</sup>.

L'ajustement de  $FA_{zz}(0, y)$  par une gaussienne donne une demi-largeur de  $561 \pm 5 \mu\text{m}$  définissant le rayon de la zone de sensibilité du MEMS. Des résultats très similaires sont obtenus pour des profils réalisés le long de l'axe  $x$  (valeur intégrale  $3.82 \text{ mV/V/bar}$  et demi-largeur  $565 \pm 5 \mu\text{m}$ ). Pour la suite, on considèrera que la fonction d'appareil en pression  $FA_{zz}$  correspond à une gaussienne intermédiaire, de demi-largeur  $563 \mu\text{m}$  et d'intégrale valant  $3.80 \text{ mV/V/bar}$ .

La Figure 1.21 montre la comparaison, pour l'indentation ponctuelle, de la mesure expérimentale  $S_{zz}$  et des profils calculés convolués par  $FA_{zz}$ , notés  $\sigma_{zz}^{cFA}$ , pour les deux conditions limites (glissante et adhésive). L'accord observé confirme la validité de la méthode de déconvolution. En particulier l'approximation gaussienne n'entraîne pas de perte d'information significative.

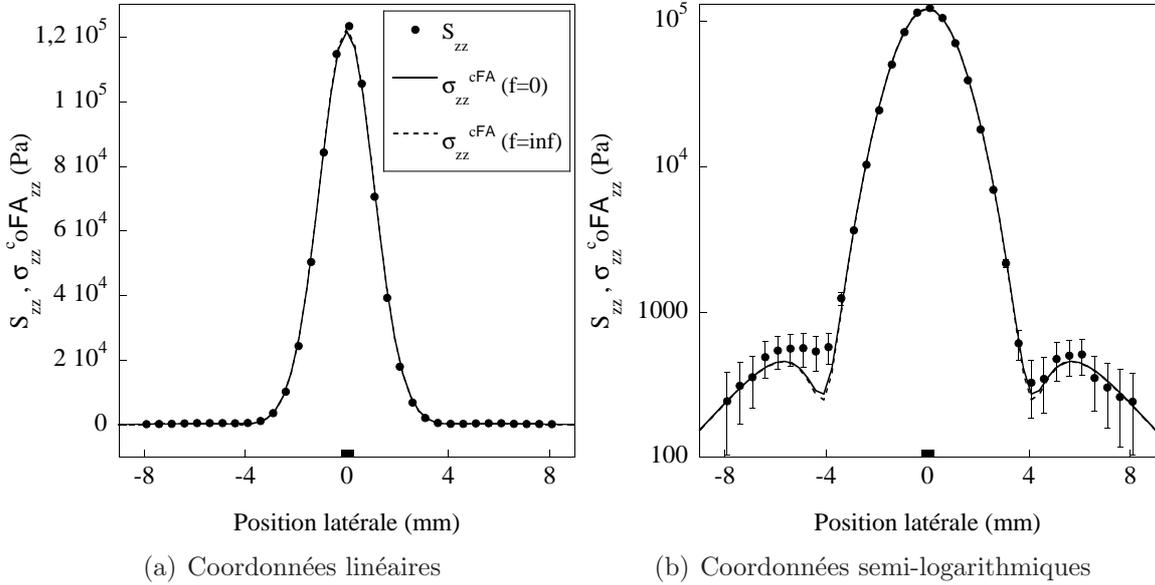


FIG. 1.21 – Profil mesuré  $S_{zz}(0, y)$  sous une force normale de 1 N et comparé aux profils  $\sigma_{zz}^{cFA}$  calculés par Castem puis convolués par  $FA_{zz}$ , en représentation (a) linéaire, et (b) semi-logarithmique.

#### Comparaison quantitative en géométrie sphère-plan

Connaissant la fonction d'appareil  $FA_{zz}$  pour la pression, nous pouvons désormais comparer profils calculés puis convolués  $\sigma_{zz}^{cFA}$  et mesurés  $S_{zz}(0, y)$  pour le contact sphère-plan (Fig. 1.22).

On constate que pour toutes les valeurs de  $F_N$  sauf la plus faible, les profils expérimentaux se situent, aux incertitudes près, entre les deux profils calculés correspondant aux

<sup>8</sup>Cette accord est confirmé par une expérience de mesure de la pression dans une cloche à vide par le capteur PDMS + MEMS, qui conduit à une valeur de  $3.914 \pm 0.007 \text{ mV/V/bar}$ .

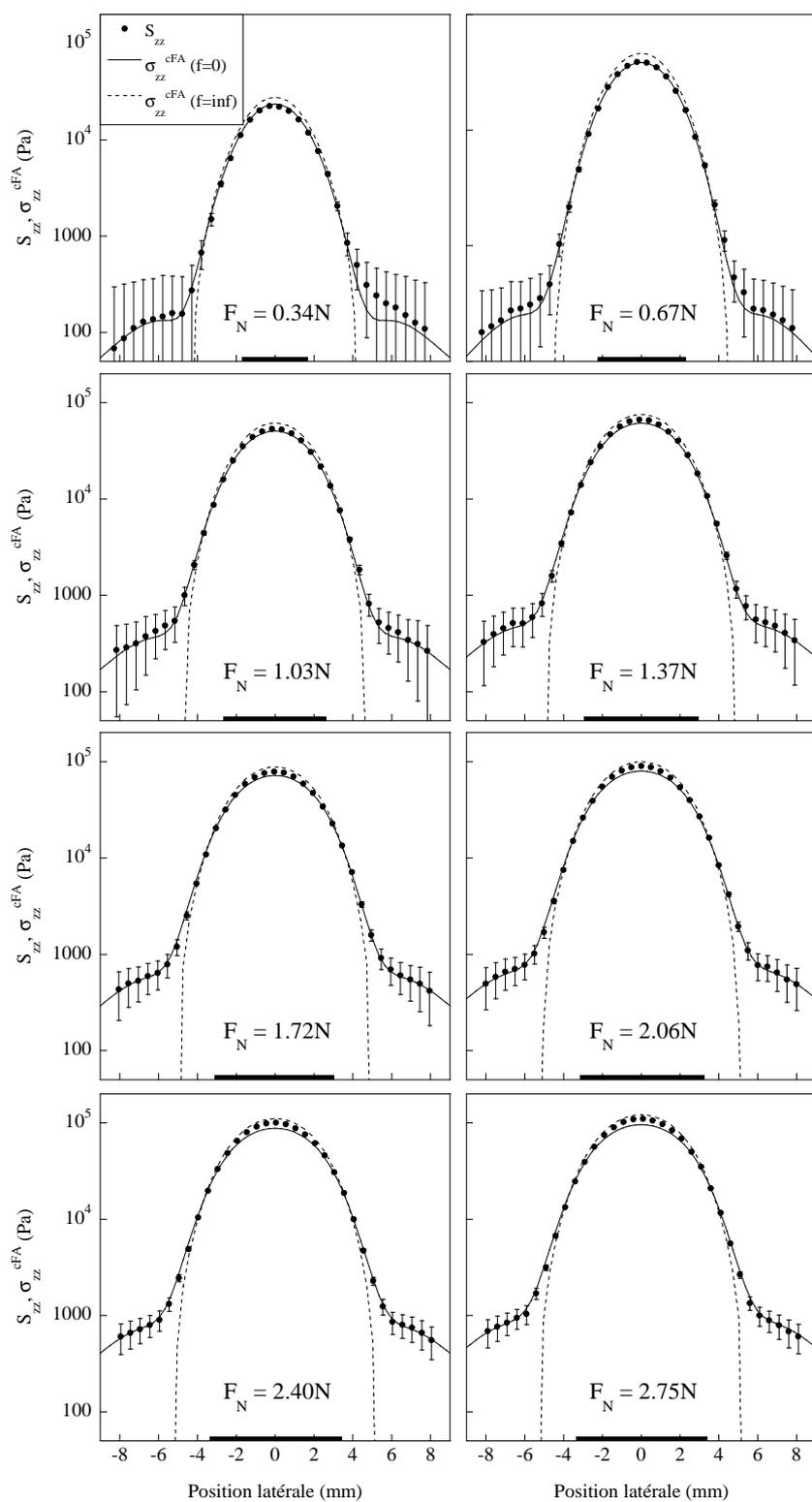


FIG. 1.22 – Comparaison entre les mesures  $S_{zz}$  ( $\bullet$ ) et les contraintes  $\sigma_{zz}^{cFA}$  calculées puis convoluées par  $FA_{zz}$ , pour un contact sphère-plan, pour les huit valeurs de  $F_N$ , pour les deux valeurs extrêmes du coefficient de frottement en représentation semi-log.  $f = 0$  (trait plein) et  $f = \infty$  (pointillés)

### 1.3. Détermination des fonctions d'appareil du capteur MEMS

valeurs extrêmes de  $f$ . Quantitativement, cet encadrement est le seul que l'on puisse attendre, car expérimentalement, on ne connaît pas exactement les conditions de frottement à l'interface. En particulier, on ne sait pas quelles zones ont éventuellement glissé au cours de la mise en charge. Notons d'ailleurs que si l'on calcule à partir des profils  $S_{zz}$  l'équivalent de l'intégrale surfacique  $\int_0^\infty S_{zz}(r)2\pi r dr$ , on retrouve les valeurs de  $F_N$  imposées à l'échelle macroscopique, comme on peut le voir dans le Tableau 1.1. L'accord quanti-

$F_N(N)$	$\int S_{zz}(N)$
$0.34 \pm 0.01$	$0.33 \pm 0.05$
$0.69 \pm 0.01$	$0.67 \pm 0.05$
$1.03 \pm 0.01$	$1.02 \pm 0.05$
$1.37 \pm 0.01$	$1.37 \pm 0.05$
$1.72 \pm 0.01$	$1.72 \pm 0.05$
$2.06 \pm 0.01$	$2.06 \pm 0.05$
$2.40 \pm 0.01$	$2.42 \pm 0.05$
$2.75 \pm 0.01$	$2.78 \pm 0.06$

TAB. 1.1 – Valeurs de  $F_N$  mesurées macroscopiquement comme la force exercée par le cantilever de charge normale, comparées aux intégrales des profils de pression mesurés  $S_{zz}$  par le MEMS.

tatif est donc considéré comme bon<sup>9</sup>, ce qui valide la fonction d'appareil  $FA_{zz}$  pour une large gamme de situations expérimentales, allant de l'indentation ponctuelle au contact sphère-plan pour différentes valeurs de  $F_N$ .

#### 1.3.2 Fonction d'appareil en cisaillement

Le même principe de détermination de la fonction d'appareil en cisaillement est mis en oeuvre en utilisant la composante tangentielle associée à l'indentation ponctuelle. La Figure 1.23 montre que la réponse du MEMS est là encore linéaire. Le profil reconstitué point par point de  $U_{yz}(0, y)$  est représenté sur la Figure 1.24 pour une force normale  $F_N = 1 N$ . Les calculs en élément finis donnent pour les contraintes de cisaillement les résultats de la Figure 1.25. On constate, comme pour la pression, que les deux profils correspondant aux deux valeurs extrêmes du coefficient de frottement sont quasiment identiques.

L'intégrale du champ de cisaillement sur le plan inférieur du film élastique étant nulle, les valeurs des transformées de Fourier de  $\sigma_{yz}^c$  et de  $U_{yz}$  en ( $f_x = 0, f_y = 0$ ) sont elles-mêmes nulles si bien que la fonction d'appareil  $FA_{yz}$  ne peut être définie qu'à une constante additive près. Celle-ci est fixée en prenant en compte une condition d'annulation quand  $x$  et  $y$  tendent vers l'infini. La Figure 1.26 montre la fonction d'appareil en cisaillement ainsi évaluée. L'intégrale de  $FA_{yz}$  donne une calibration en cisaillement selon l'axe  $y$

<sup>9</sup>Les écarts observables sont vraisemblablement liés à l'effet de la rugosité de surface, qui modifie légèrement le champ de pression par rapport au cas lisse calculé. Cet effet est d'autant plus important que la charge normale est faible (voir Chapitre 4 et [16]).

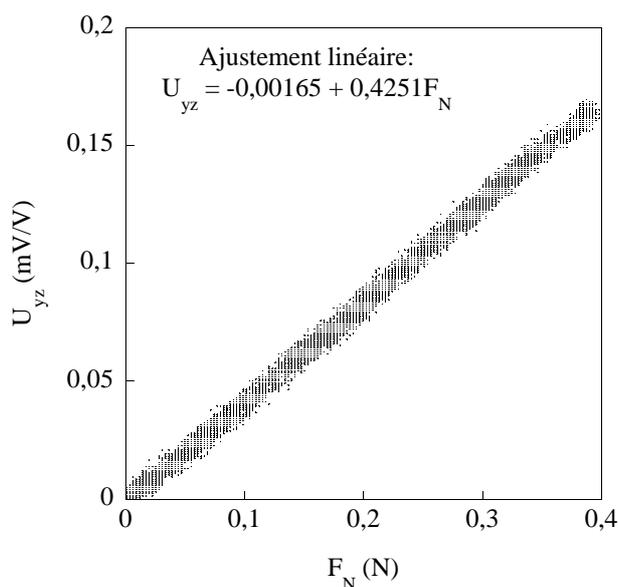


FIG. 1.23 – Tension de sortie  $U_{yz}$  du MEMS en fonction de  $F_N$  pour un cycle charge-décharge en indentation ponctuelle.

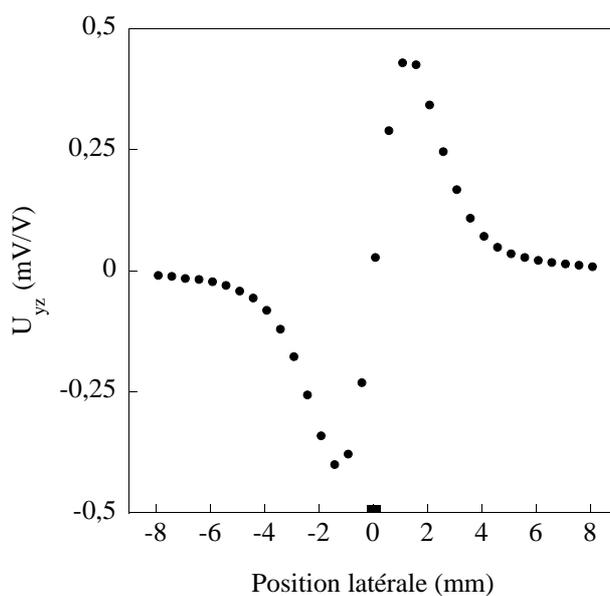


FIG. 1.24 – Profil  $U_{yz}(0, y)$  expérimental ( $\bullet$ ) pour une indentation ponctuelle sous charge ramenée à 1N.

valant  $1.48 \text{ mV/V/bar}$ . L'ajustement gaussien de  $FA_{yz}(0, y)$  fournit une demi-largeur de  $688 \pm 4 \mu\text{m}$  proche du rayon de la membrane du MEMS (voir Figure 1.26(a)). Il faut noter que la fonction  $FA_{yz}$  ainsi déterminée présente un pied rectangulaire qui ne peut être négligé : un simple ajustement gaussien conduit en effet à un écart significatif. A l'inverse, en prenant en compte ce pied rectangulaire (Figure 1.26(b)), le profil expérimental associé

### 1.3. Détermination des fonctions d'appareil du capteur MEMS

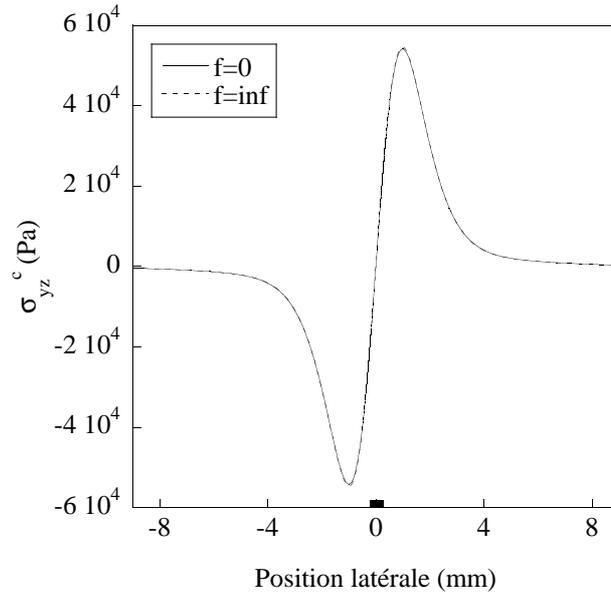


FIG. 1.25 – Profil de contraintes de cisaillement calculé  $\sigma_{yz}^c$  pour une indentation par un poinçon circulaire de diamètre  $500 \mu m$ , sous force normale de  $1 N$ , pour les deux conditions de frottement  $f = 0$  (trait plein) et  $f = \infty$  (pointillés). Les deux profils se recouvrent pratiquement.

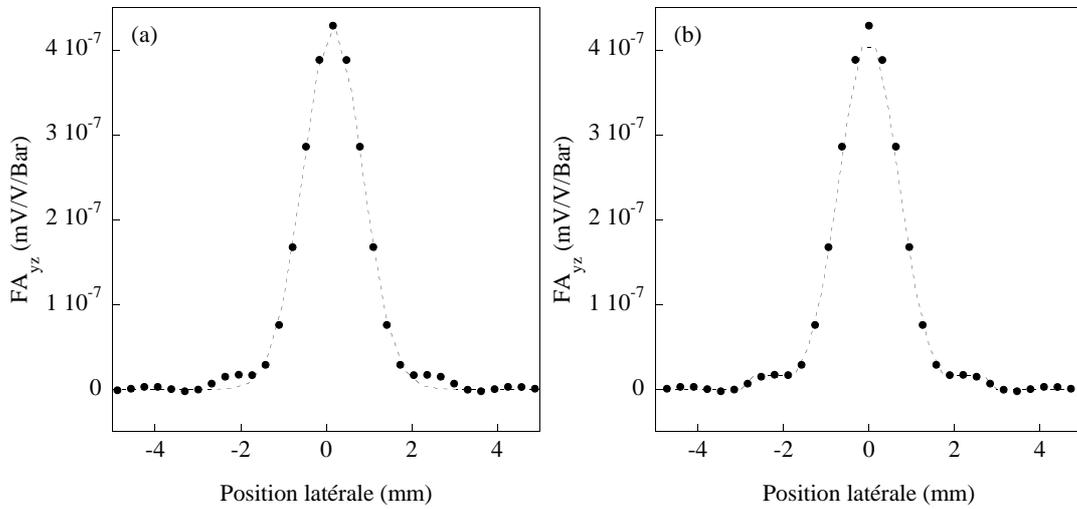


FIG. 1.26 – Profil  $FA_{yz}(0, y)$  de la fonction d'appareil en cisaillement calculée à partir d'une situation d'indentation ponctuelle ( $\bullet$ ). (a) la courbe en pointillés correspond à un ajustement gaussien de demi-largeur  $688 \pm 4 \mu m$ . (b) la courbe pointillée correspond à une reconstitution plus fidèle de  $FA_{yz}(0, y)$  par une gaussienne et un pied rectangulaire.

à l'indentation ponctuelle est très similaire au profil  $\sigma_{yz}^{cFA}$ , issu du calcul en éléments finis puis convolué par  $FA_{yz}$  (Figure 1.27).

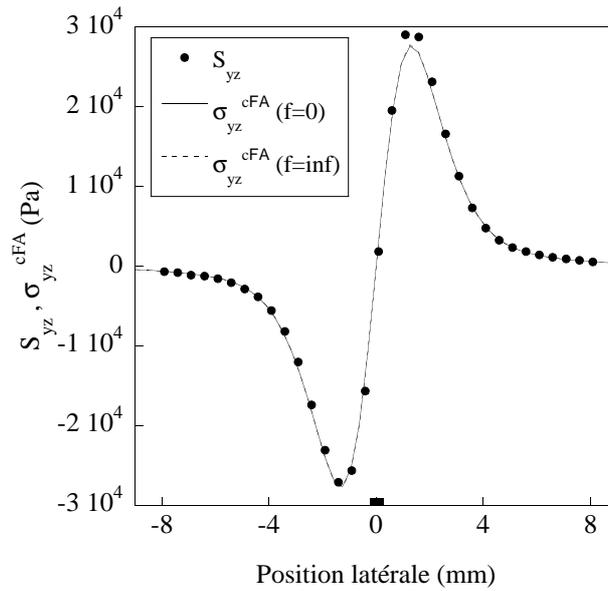


FIG. 1.27 – Profil mesuré  $S_{yz}(0, y)$  (●) comparé aux profils  $\sigma_{yz}^{cFA}$  calculés par Castem puis convolués par  $FA_{yz}$ , pour l’indentation ponctuelle.

### Comparaison quantitative en géométrie sphère-plan

Lorsque la fonction d’appareil  $FA_{yz}$  ainsi déterminée est appliquée aux situations de contact sphère-plan, les profils résultant de la convolution présentent une allure similaire aux résultats expérimentaux, mais surestiment de façon systématique, d’environ 20% la valeur des contraintes. Cet écart peut être interprété en considérant la taille finie du MEMS. Les gradients de pression à l’échelle de sa membrane produisent un couple dont les effets sont analogues à un cisaillement de signe opposé (voir Figure 1.28).

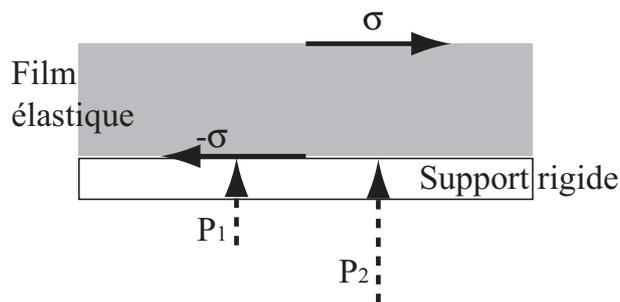


FIG. 1.28 – Schéma représentant les contraintes exercées sur un élément de film élastique à l’équilibre mécanique. Lorsqu’une contrainte tangentielle  $\sigma$  est exercée en surface du film, une contrainte  $-\sigma$  est exercée par le support rigide à la base du film. Le couple correspondant est compensé par un gradient de pression exercée par le support :  $P_2 > P_1$ .

Cet effet peut être estimé en évaluant le couple exercé sur la membrane dans le cas de l’indentation ponctuelle, à partir des résultats en éléments finis. La Figure 1.29 montre

### 1.3. Détermination des fonctions d'appareil du capteur MEMS

en indentation ponctuelle, le profil de cisaillement, le profil de différence de pression entre deux points séparés de  $1.9\text{ mm}$  et la différence entre ces deux profils. L'effet de gradient

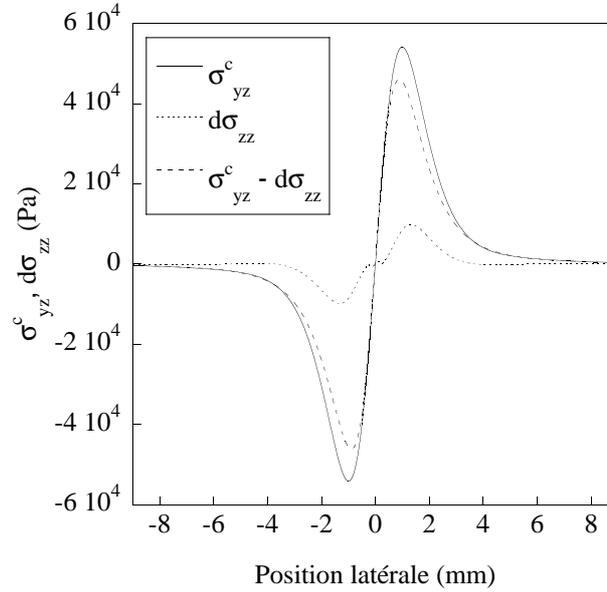


FIG. 1.29 – Indentation ponctuelle : profil de cisaillement (trait continu), profil de différence de pression entre deux points espacés de  $1.9\text{ mm}$  (trait pointillés) et différence entre ces deux profils (trait discontinu).

de pression conduit à une diminution de l'amplitude effective du profil de contrainte mesuré sans pour autant modifier significativement sa forme. Cet effet contredit l'hypothèse d'existence d'une fonction d'appareil en cisaillement. Mais il est possible, pour chaque classe de situations au sein de laquelle les gradients de pression varient peu, de déterminer de façon *ad hoc* une valeur de l'amplitude de la fonction d'appareil représentée à la Figure 1.26(b) qui permette de reproduire correctement l'ensemble des profils. Ainsi la Figure 1.30 montre, en contact sphère-plan, les profils  $\sigma_{yz}^{cFA}$  calculés puis convolués, et les profils expérimentaux, obtenus pour une calibration ajustée à  $1.82\text{ mV/V/bar}$ .

Cette nouvelle valeur est environ 1.23 fois plus grande que celle correspondant à l'indentation ponctuelle, ce qui est compatible avec l'ordre de grandeur estimé des effets de gradient de pression.

Notons que l'importance de ces problèmes de couplage entre gradient de pression et contrainte de cisaillement dépend de la dimension du capteur. Ils tendent à disparaître pour des capteurs de faible dimension. Une nouvelle génération de capteurs uniques, dont le diamètre de la membrane est de  $700\ \mu\text{m}$ , est actuellement en cours de réalisation au LETI et permettra d'améliorer significativement la détermination d'une véritable fonction d'appareil et la robustesse des mesures en cisaillement.

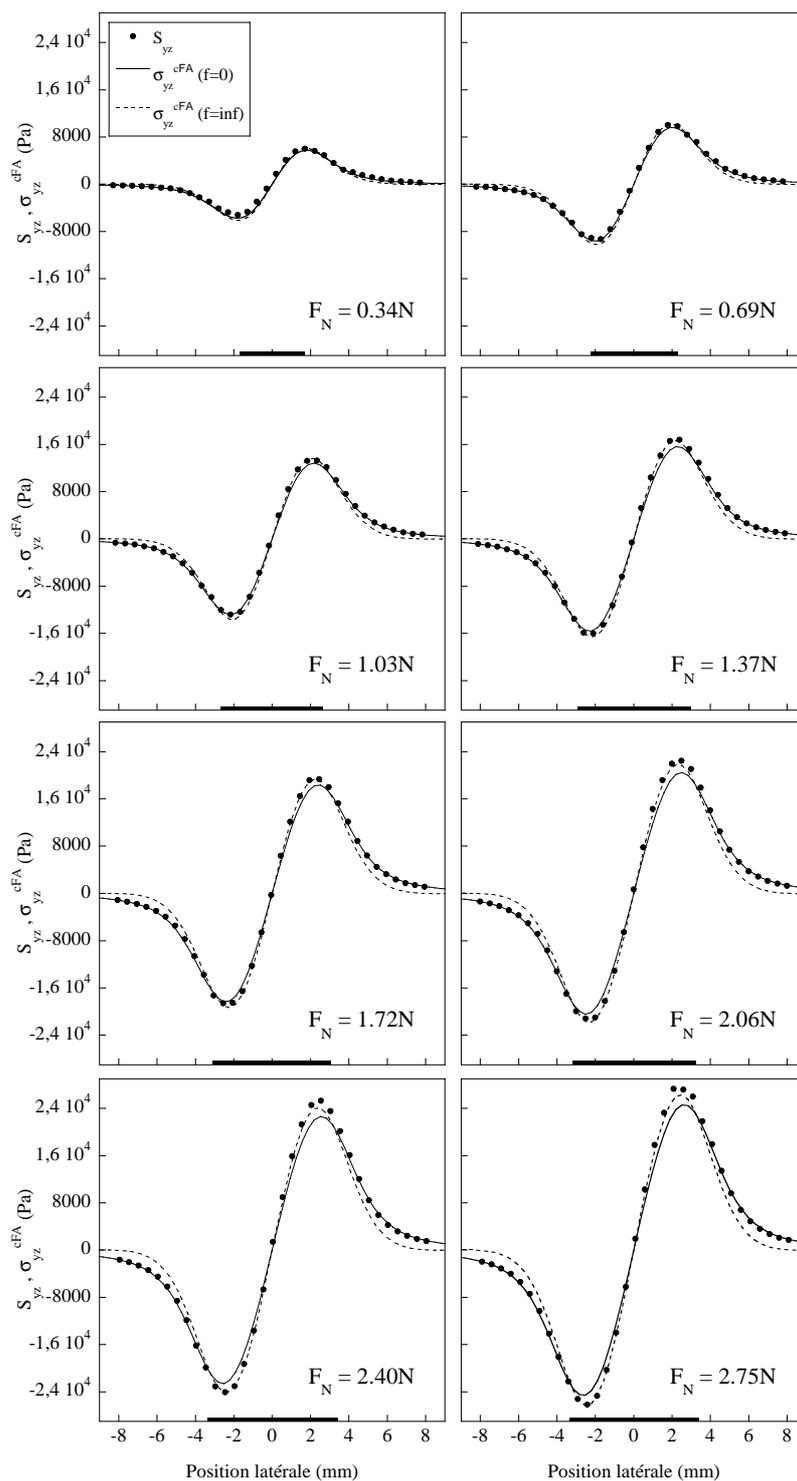


FIG. 1.30 – Comparaison entre les mesures  $S_{yz}$  ( $\bullet$ ) et les contraintes  $\sigma_{yz}^{cFA}$  calculées puis convoluées, pour un contact sphère-plan, pour les huit valeurs de  $F_N$ , pour les deux valeurs extrêmes du coefficient de frottement.  $f = 0$  (trait plein) et  $f = \infty$  (pointillés)

### 1.3.3 Modification des contraintes par lubrification de l'interface

Dans cette partie, nous évaluons les variations du champ des contraintes induites par la modification des conditions limites au niveau du contact. Une goutte de glycérol intercalée agit comme un lubrifiant en réduisant, lors de la mise en contact, le coefficient de frottement. Ces nouvelles conditions ne modifient pas les forces macroscopiques globales mais doivent perturber la répartition des contraintes au sein du contact.

La Figure 1.31 montre les profils  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  mesurés dans les deux cas d'un contact sphère-plan sous  $F_N = 2.75 N$ , soit sec soit lubrifié par du glycérol.

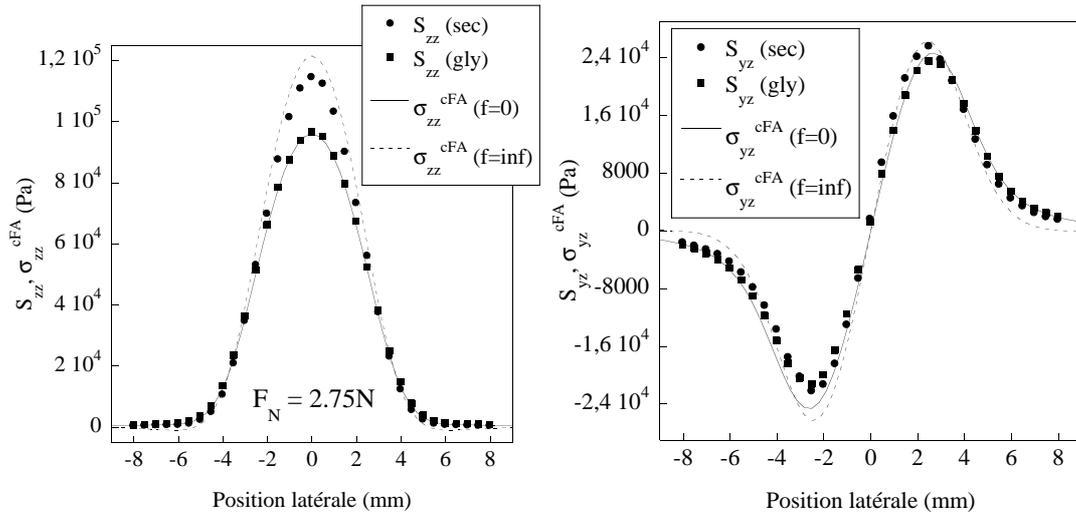


FIG. 1.31 – Profils  $S_{zz}$  (  gauche) et  $S_{yz}$  (  droite) mesurés en sphère-plan, sous charge normale  $F_N = 2.75 N$ , pour un contact sec (●) et pour un contact lubrifié par du glycérol (■). Les profils calculés puis convolués  $\sigma_{zz}^{cFA}$  et  $\sigma_{yz}^{cFA}$  sont présentés pour  $f = 0$  (trait plein) et pour  $f = \infty$  (pointillés).

Ces profils sont comparés aux profils calculés et convolués par les fonctions d'appareil correspondant au sphère-plan pour les deux conditions extrêmes de frottement. Comme attendu, on constate que les profils lubrifiés sont élargis par rapport aux profils secs et que corrélativement les amplitudes sont plus faibles. Le profil de pression lubrifié se superpose très bien au profil  $\sigma_{zz}^{cFA}$  correspondant à  $f = 0$ , ce qui confirme que la lubrification permet de simuler un contact parfaitement glissant.

## 1.4 Contact normal cylindre-plan

Les fonctions d'appareil sont ici utilisées dans le cadre d'une nouvelle géométrie de contact, cylindre-plan. Celle-ci nous offre un test pour les fonctions d'appareil calculées. Par ailleurs, cette géométrie nous permettra au Chapitre 2 une comparaison directe des champs de contrainte mesurés en régime de glissement stationnaire et calculés par un modèle semi-analytique.

### 1.4.1 Réalisation expérimentale

Un contact cylindre-plan est plus difficile à réaliser qu'un contact sphère-plan. Idéalement, on souhaite utiliser un cylindre très long, au risque d'être sensible aux imperfections de planéité du film élastique à grande échelle, et aux hétérogénéités des propriétés de surfaces. Nous avons donc choisi d'utiliser une lamelle de verre d'épaisseur  $150\ \mu\text{m}$  et de largeur  $8\ \text{mm}$ . Elle est collée sur une lentille de verre cylindrique plano-convexe de rayon de courbure  $129.2\ \text{mm}$ , perpendiculairement à son axe (voir Figure 1.32).

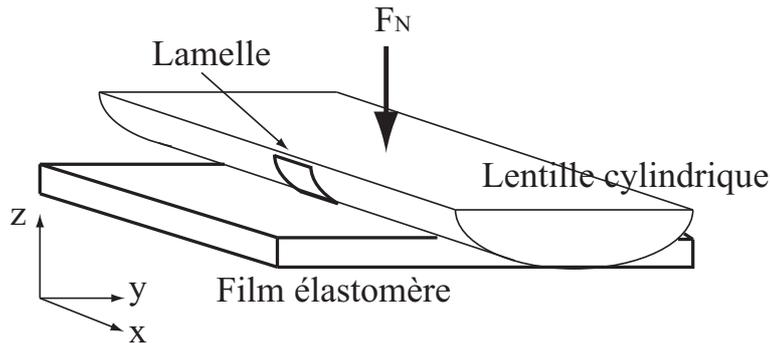


FIG. 1.32 – Schéma de principe de la mise en contact en géométrie cylindre-plan. La lamelle de verre est collée sur la lentille cylindrique. Le contact se fait contre le cylindre élastique au niveau de la lamelle.

Lorsque l'on presse cet ensemble sur le même film élastomère qu'au chapitre précédent, seule la lamelle entre en contact ce qui limite la longueur du contact à  $L = 8\ \text{mm}$ . Le champ de pression associé à cette géométrie, dans la limite d'un contact de largeur très inférieure à  $8\ \text{mm}$  correspond au profil d'indentation par un poinçon rectangulaire de largeur  $L = 8\ \text{mm}$  [12]. Il varie au centre du contact comme  $1/((L/2)^2 - x^2)^{1/2}$ . Le profil de pression transverse, dans la zone sensible du capteur de taille typique  $1\ \text{mm}$ , varie alors de moins de 4%. L'hypothèse d'invariance dans la direction transverse est donc raisonnable. Cependant, à plus forte pression, lorsque l'extension du contact dans la direction  $y$  devient comparable à  $L$ , les effets de bord aux quatre coins de la zone de contact deviennent non négligeables.

Après avoir réglé le parallélisme du film et de l'axe du cylindre, nous avons pu réaliser une série de contact, sous force purement normale, pour différentes valeurs de  $F_N$  appliquée entre  $0\ \text{N}$  et  $2.75\ \text{N}$ . Les images différentielles (voir Chapitre 1.1.5) correspondantes sont présentées sur la Figure 1.33. Pour toutes les valeurs de  $F_N$ , la zone de contact est raisonnablement rectangulaire, les inhomogénéités apparentes étant liées à des défauts de la lamelle collée.

La demi-largeur  $a$  du contact augmente lorsque  $F_N$  augmente. Par une analyse d'image identique à celle réalisée au Chapitre 1.2.1 pour le contact sphère-plan, nous avons pu estimer pour chaque situation  $A_0$  et la largeur moyenne du contact  $a = A_0/2L$  en fonction de  $F_N$  (voir Figure 1.34). Ces mesures sont à comparer aux valeurs attendues pour un contact de Hertz linéaire en épaisseur infinie.

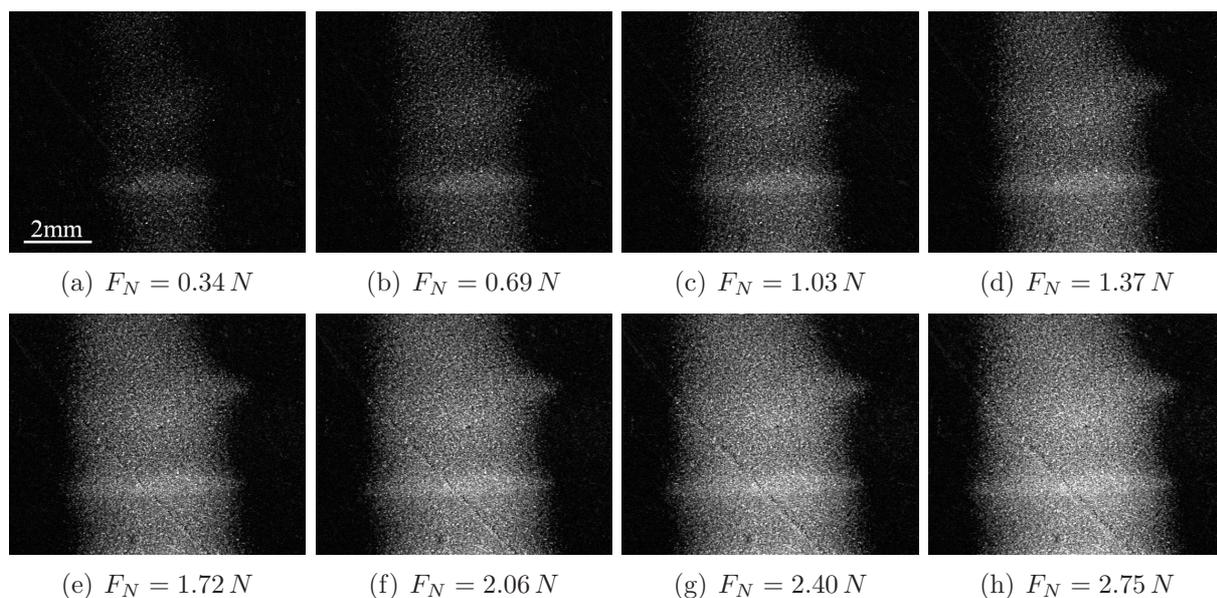


FIG. 1.33 – Images (différentielles) de la zone de contact apparente, pour toutes les valeurs de  $F_N$  utilisées, en contact cylindre-plan.

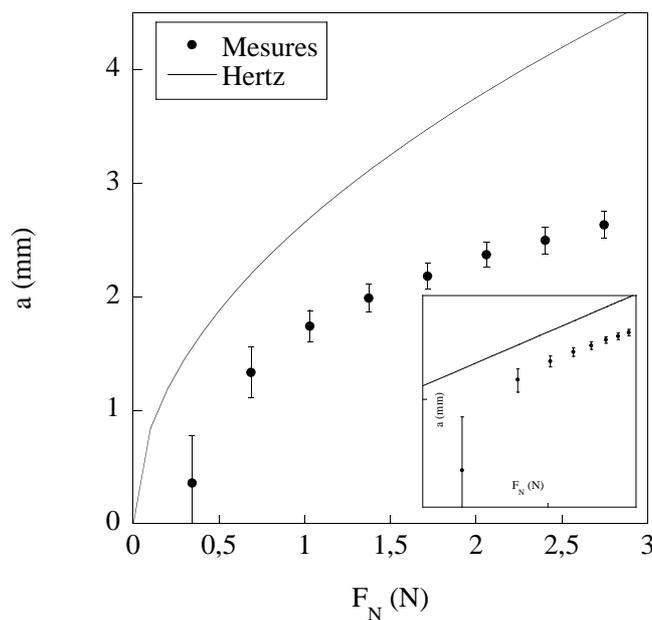


FIG. 1.34 – Demi-largeur mesurée du contact cylindre-plan en fonction de la charge normale  $F_N$  appliquée ( $\bullet$ ). Dépendance attendue pour un contact de Hertz (trait plein).

La Figure 1.35 montre les profils de contraintes  $S_{zz}$ ,  $S_{xz}$  et  $S_{yz}$  mesurés sous le film par le MEMS. Les profils  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  sont analogues à ceux obtenus en géométrie sphère-plan. Les valeurs très faibles des contraintes de cisaillement  $S_{xz}$  dans la direction transverse confirment que le parallélisme a été bien réglé.

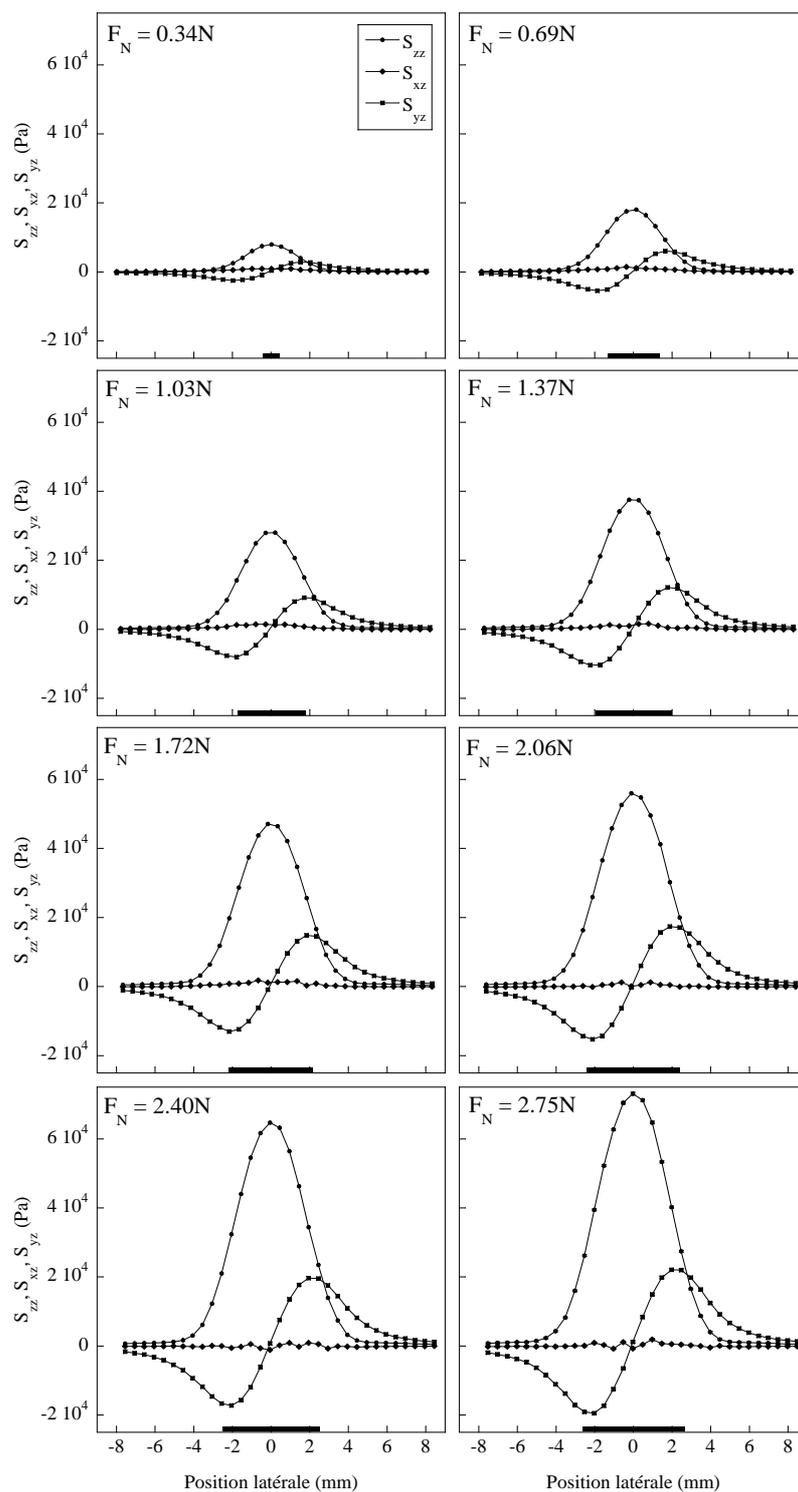


FIG. 1.35 – Champ des contraintes  $S_{zz}$  (●),  $S_{xz}$  (◆) et  $S_{yz}$  (■) mesuré à la base du film par le MEMS. Le trait noir sur l'axe des abscisses représente la taille de la zone de contact en surface.

En cylindre-plan, c'est la force normale par unité de longueur du contact qui est pertinente et non plus la force normale totale. La Figure 1.36 montre, pour chaque situation expérimentale le rapport  $F_N/L$  et l'intégrale des profils  $S_{zz}$  en fonction de  $F_N$ .

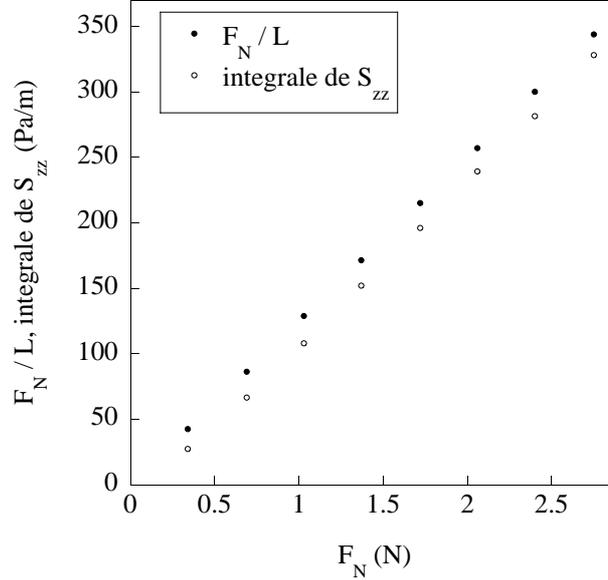


FIG. 1.36 – Valeurs de charge normale en contact cylindre-plan.  $F_N$  est la charge normale totale appliquée,  $F_N/L$ (●) est la charge linéique attendue sous l'hypothèse d'un contact invariant selon l'axe  $x$  et l'intégrale de  $S_{zz}$ (○) est la charge linéique effective dans la zone sur laquelle le MEMS fait ses mesures.

L'écart systématique entre ces deux grandeurs traduit le fait que la pression mesurée par le capteur au centre de la lamelle correspond au minimum du profil de pression transverse. Les valeurs de  $F_N/L$  correspondent à une situation où le contact serait invariant sur toute sa longueur  $L = 8 \text{ mm}$ . Les valeurs de l'intégrale des profils de pression sont systématiquement plus faibles, ce qui traduit l'hétérogénéité de la contrainte de pression le long de l'axe du cylindre. Pour la suite, nous supposons que les contraintes sont invariantes par translation selon l'axe  $x$  dans toute la zone de sensibilité du MEMS. La charge linéique utilisée pour effectuer les comparaisons avec les calculs numériques est prise égale à la valeur de l'intégrale des profils mesurés.

### 1.4.2 Calculs en éléments finis

Comme pour la géométrie sphère-plan, les calculs en éléments finis sont possibles en géométrie cylindre-plan. Les calculs ont été menés en mode de déformation plane, pour imposer une invariance selon l'axe transverse au cylindre. Le film élastique est d'épaisseur constante  $h = 2 \text{ mm}$ , de demi-largeur  $20 \text{ mm}$ , de module de Young  $E = 2.2 \text{ MPa}$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.499$ . Le cylindre de verre a un rayon de courbure  $R = 129.2 \text{ mm}$ , un module de Young  $E_{\text{verre}} = 10^6 \text{ MPa}$ , et un coefficient de Poisson  $\nu_{\text{verre}} = 0.22$ . Les enfoncements  $\delta$  pour lesquels le contact est soumis à une charge normale linéique correspondant aux expériences ont été obtenues par essais et erreurs.

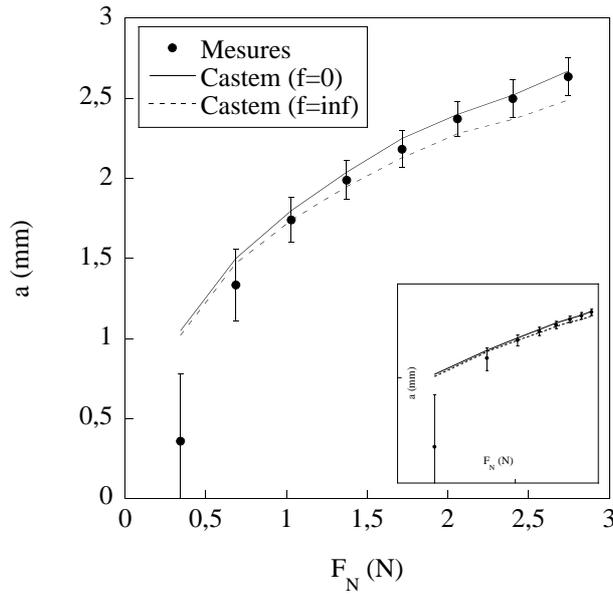


FIG. 1.37 – Demi-largeur calculée du contact cylindre-plan en fonction de la charge normale  $F_N$  appliquée, pour  $f = 0$  (trait plein) et pour  $f = \infty$  (pointillés). Demi-largeur mesurée ( $\bullet$ ).

La Figure 1.37 montre les valeurs de la demi-largeur  $a$  calculées pour toutes les valeurs de  $F_N$  exercées, pour les deux conditions extrêmes de frottement à l'interface. Ces valeurs sont en bon accord avec les valeurs mesurées par analyse d'image, sauf pour les charges les plus basses. Cet écart est interprété, comme en sphère-plan, par l'influence non-négligeable de la rugosité du film élastique pour les faibles enfoncements.

### 1.4.3 Comparaison quantitative

La Figure 1.38 montre les profils de pression mesurés  $S_{zz}$  et les profils calculés avec Castem puis convolués par la fonction d'appareil  $FA_{zz}$  obtenue au Chapitre 1.3.1, pour les deux conditions extrêmes de frottement. Pour toutes les valeurs de  $F_N$  exercées, l'accord est bon, ce qui signifie que  $FA_{zz}$  permet de reproduire le mode de mesure du MEMS également en géométrie cylindre-plan.

La Figure 1.39 représente les profils de cisaillement  $S_{yz}$  et les profils calculés avec Castem puis convolués par la fonction d'appareil  $FA_{yz}$  obtenue au Chapitre 1.3.2, pour une valeur de la calibration ajustée à  $1.59 \text{ mV/V/bar}$ . Pour toutes les valeurs de  $F_N$  exercées, l'accord est bon. Nous utiliserons par la suite cette calibration à  $1.59 \text{ mV/V/bar}$  pour le cisaillement en géométrie cylindre-plan.

## 1.4. Contact normal cylindre-plan

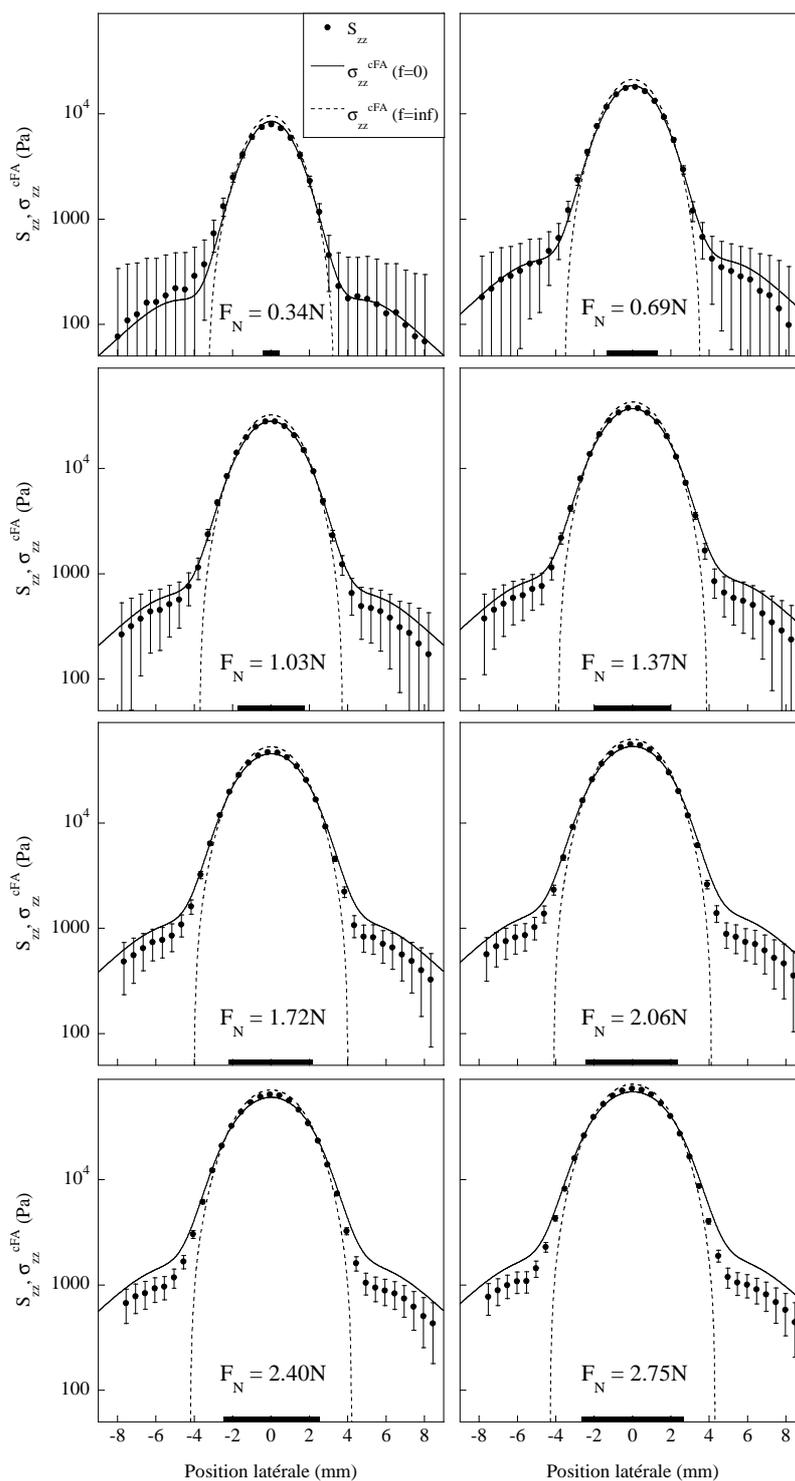


FIG. 1.38 – Comparaison entre les mesures  $S_{zz}$  ( $\bullet$ ) et les contraintes  $\sigma_{zz}^{cFA}$  calculées puis convoluées, pour un contact cylindre-plan, pour les huit valeurs de  $F_N$ , pour les deux valeurs extrêmes du coefficient de frottement en représentation semi-log.  $f = 0$  (trait plein) et  $f = \infty$  (pointillés)

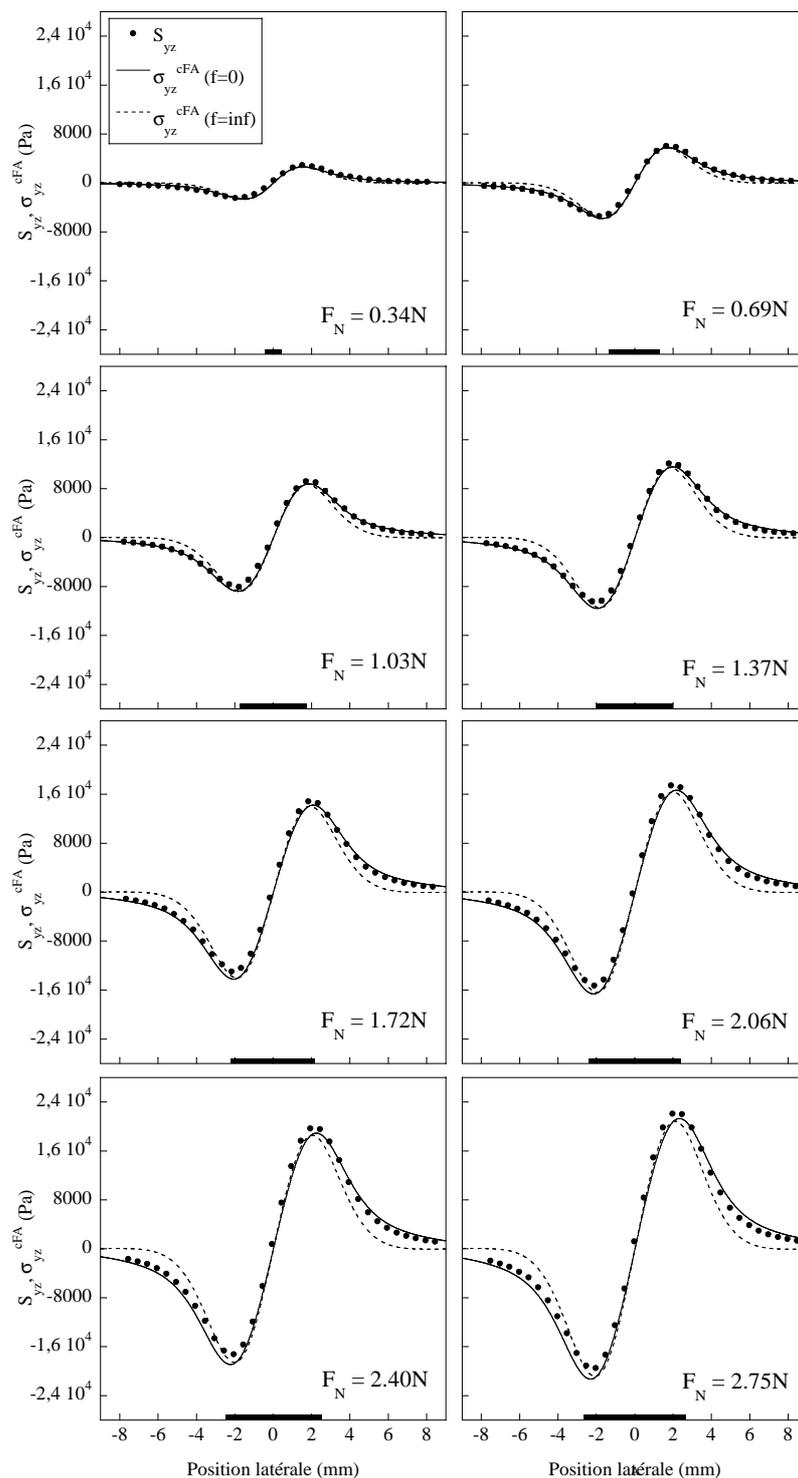


FIG. 1.39 – Comparaison entre les mesures  $S_{yz}$  ( $\bullet$ ) et les contraintes  $\sigma_{yz}^{cFA}$  calculées puis convoluées, pour un contact cylindre-plan, pour les huit valeurs de  $F_N$ , pour les deux valeurs extrêmes du coefficient de frottement.  $f = 0$  (trait plein) et  $f = \infty$  (pointillés)

### 1.4.4 Commentaires sur la procédure de mise en charge

Deux procédures de mise en charge ont été testées (voir Figure 1.4.4).

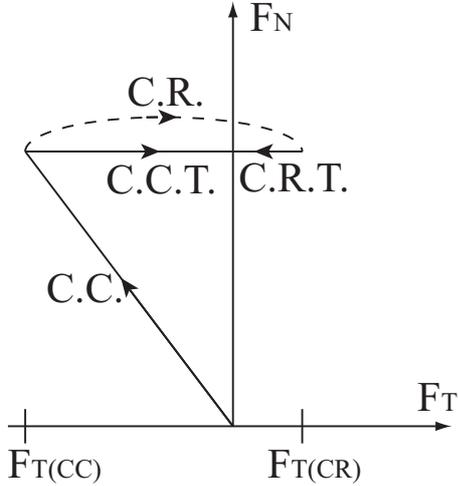


FIG. 1.40 – Représentation des deux procédures de mise en charge en termes des forces totales mises en jeu. La charge continue (C.C.) permet d’atteindre  $F_N$  mais induit une force tangentielle  $F_{T(CC)}$ . Dans la première procédure, la compensation par translation (C.C.T.) annule  $F_T$ . Dans la seconde procédure, le renouvellement du contact induit une force tangentielle résiduelle  $F_{T(CR)}$  faible qui est compensée par translation (étape C.R.T.).

La première procédure consiste à presser continûment (étape C.C.) la lentille cylindrique contre le film élastomère jusqu’à atteindre la charge de consigne. Cette mise en charge induit un faible déplacement relatif des deux objets, qui se traduit par une force tangentielle non nulle et négative. Celle-ci est compensée manuellement (étape C.C.T.) jusqu’à ramener la force tangentielle à zéro. La Figure 1.41 montre les profils de contrainte avant et après compensation.

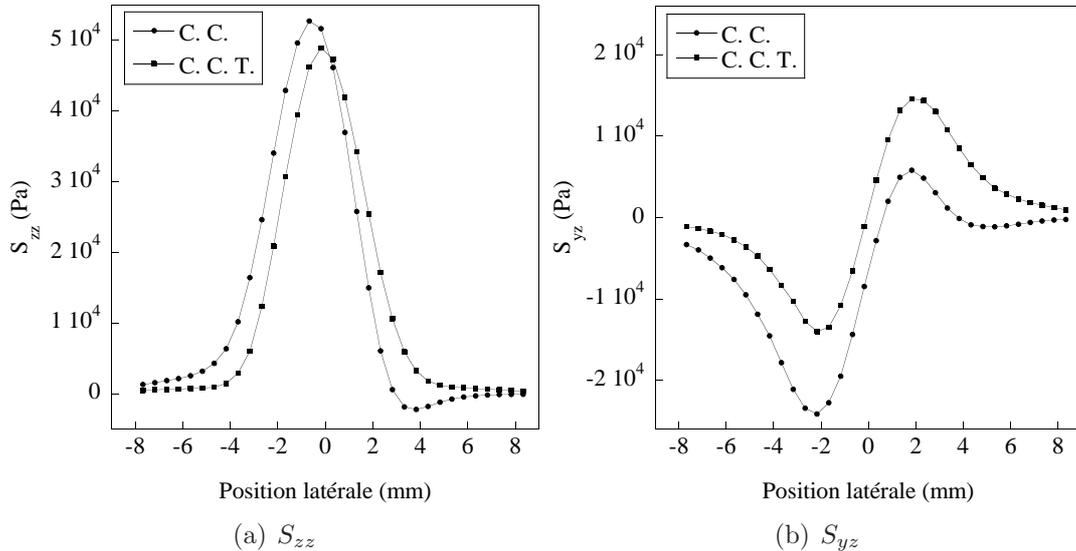


FIG. 1.41 – Mesures  $S_{zz}$  à gauche et  $S_{yz}$  à droite après une charge continue entre 0 N et 1.72 N (●), et après une translation supplémentaire selon  $y$  pour annuler  $F_T$  (■), en contact cylindre-plan.

## Chapitre 1. Profil des contraintes sous charge normale

La deuxième procédure consiste, après la charge initiale, à renouveler le contact en écartant manuellement le film de la lentille (étape C.R.). Cette action ne modifie pas la force normale finale mais réduit de façon importante la force tangentielle résiduelle. Celle-ci est de signe opposé par rapport à la première procédure. Elle est compensée de façon identique (étape C.R.T.). La Figure 1.42 montre les profils de contrainte avant et après compensation.

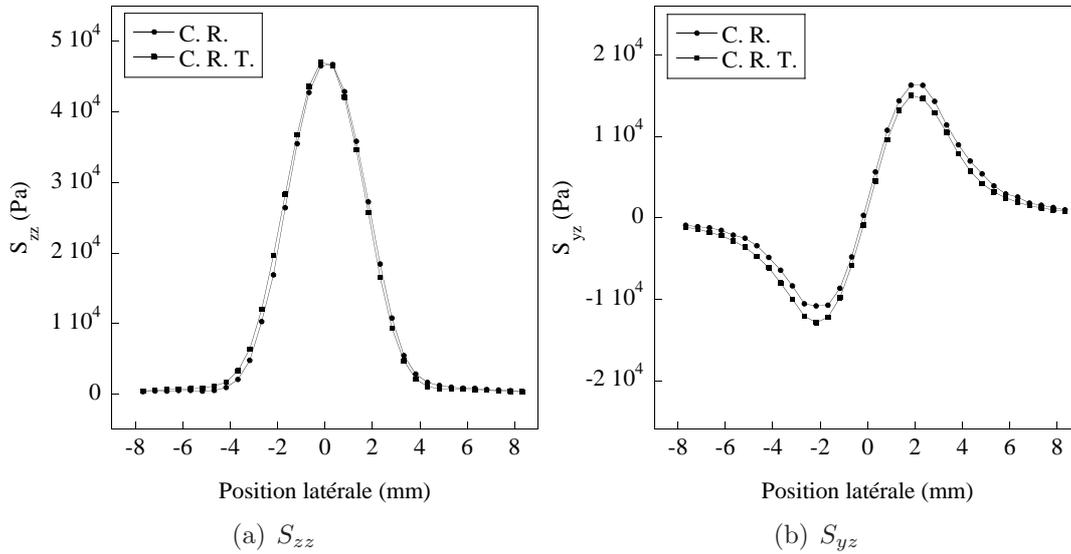


FIG. 1.42 – Mesures  $S_{zz}$  à gauche et  $S_{yz}$  à droite après un contact renouvelé à  $F_N = 1.72 N$  (●), et après une translation supplémentaire selon  $y$  pour annuler  $F_T$  (■), en contact cylindre-plan.

Au vu de ces résultats, la deuxième procédure a été privilégiée, car elle garantit que la force tangentielle maximale atteinte durant la séquence de mise en charge reste faible. Ces contraintes transitoires peuvent en effet induire des microglissements irréversibles et ainsi modifier les champs de contrainte finaux (voir Chapitre 4). Cette hystérèse peut être illustrée en évaluant la différence entre les deux profils de contrainte finaux issus de ces deux procédures (voir Figure 1.43). Bien que très faibles, des différences mesurables apparaissent aux frontières du contact.





# Chapitre 2

## Profil des contraintes sous charge tangentielle

### Introduction

Dans le Chapitre 1, nous avons décrit un dispositif de mesure des champs de contrainte associés à des contacts sous charge purement normale. Cette mesure est réalisée point par point, sous hypothèse d'invariance par translation des propriétés du film élastique à la base duquel sont évaluées les contraintes.

Pour mettre en oeuvre cette mesure sous charge tangentielle, nous nous plaçons tout d'abord en géométrie cylindres croisés. La charge tangentielle est imposée par la rotation autour de son axe du cylindre faisant office de substrat. Cette expérience, réalisée en différentes positions relatives au capteur permet d'obtenir l'évolution des profils jusqu'au régime de glissement stationnaire (Chapitre 2.1).

Afin d'étudier ce dernier régime de façon plus détaillée, nous avons développé une autre procédure, moins coûteuse en temps. Il s'agit d'enregistrer la séquence temporelle des contraintes lors du passage du substrat au dessus du capteur. La reconstruction du profil spatial est alors fondée sur l'équivalence temps-espace via la vitesse stationnaire de glissement. Nous décrivons tout d'abord la situation du glissement stationnaire en géométrie sphère-plan. La géométrie cylindre-plan est ensuite adoptée car elle offre la possibilité d'une comparaison directe avec des calculs semi-analytiques réalisés au laboratoire par l'équipe de Mokhtar Adda-Bedia. Ce calcul est fondé sur l'hypothèse standard dans le domaine de la mécanique du frottement qui postule la validité locale de la relation de Coulomb établissant la proportionnalité entre les contraintes normale et tangentielle à l'interface frottante.

A la fin de ce chapitre, nous montrons brièvement comment une procédure similaire permet de déterminer les modifications des champs de contrainte associées à un événement unique de glissement en régime de "stick-slip".

## 2.1 Profils lors de la transition vers le glissement

Le dispositif de mesure point par point utilisé dans le Chapitre 1 ne permet pas d'imposer une contrainte tangentielle car le contact se déplace alors par rapport au capteur.

### 2.1.1 Dispositif expérimental

Pour s'affranchir de ce problème, l'entraînement est assuré ici par un cylindre tournant, dont la position de l'axe peut être maintenue à une position déterminée  $y$  par rapport au capteur (voir Figure 2.1). Nous nous plaçons en géométrie cylindres croisés en recouvrant le micro-capteur de forces d'un film PDMS qui a la forme d'une calotte cylindrique, obtenue par moulage à l'aide d'une lentille plano-concave de rayon de courbure  $R = 130\text{ mm}$ . Un film de PMMA rugueux (voir Chapitre 1.1) est préalablement plaqué sur la lentille. On

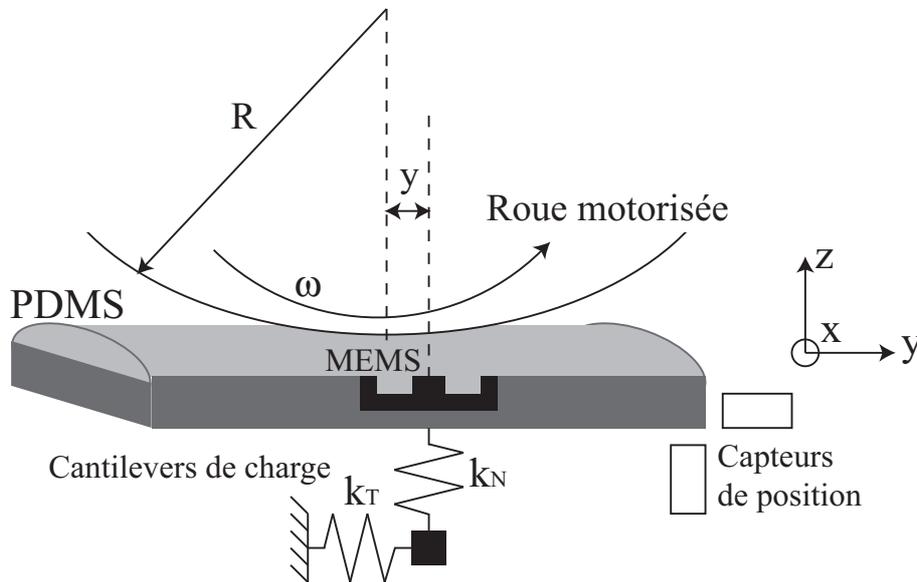


FIG. 2.1 – Schéma de principe de l'expérience de mesure de la dynamique des champs de contrainte. La géométrie est de type cylindre croisés entre une calotte cylindrique de PDMS et une roue motorisée sur la périphérie de laquelle le substrat est collé. La position  $y$  du centre du contact peut être choisie.

obtient ainsi un film élastomère plano convexe rugueux, d'épaisseur maximale  $2\text{ mm}$  de surface carrée  $50\text{ mm} \times 50\text{ mm}$  et de rayon de courbure  $R = 130\text{ mm}$ . Le MEMS se situe à la verticale de l'apex.

Le substrat est une lamelle de verre silanisée puis collée sur la périphérie d'une roue rigide de rayon  $117\text{ mm}$ , entraînée en rotation autour de son axe (vertical) par un moteur pas à pas (Micro-contrôle, SFMI, contrôleur TL17). Le pas du moteur correspond à un angle de  $0.001^\circ$ , c'est-à-dire à un déplacement de  $2.04\text{ }\mu\text{m}$  en périphérie de la roue. La fréquence des pas peut être imposée entre  $20\text{ Hz}$  et  $1760\text{ Hz}$ , ce qui correspond à une vitesse d'entraînement du substrat comprise entre  $41\text{ }\mu\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$  et  $3.6\text{ mm}\cdot\text{sec}^{-1}$ .

Le reste du montage mécanique est inchangé par rapport au Chapitre 1.1.3.

### 2.1.2 Principe de la mesure de la dynamique du champ de contraintes

Nous avons réalisé une série d'expériences de mise en charge du contact puis de mise en mouvement à vitesse angulaire constante de la roue. Le protocole adopté est le suivant :

- mise en contact du film élastique et du substrat sous force normale  $F_N$ .
- renouvellement du contact, pour minimiser les contraintes de cisaillement créées lors de la mise en charge normale progressive. Le centre du contact créé se situe à une distance  $y$  de la verticale du MEMS.
- rotation de la roue à vitesse angulaire  $\omega$  constante, durant laquelle la force tangentielle totale  $F_T$  et les signaux de sortie du MEMS sont enregistrés.
- translation le long de son axe du cylindre recouvrant le MEMS par pas de  $0.5\text{ mm}$  selon l'axe  $y$  sur une distance totale de  $15\text{ mm}$ .

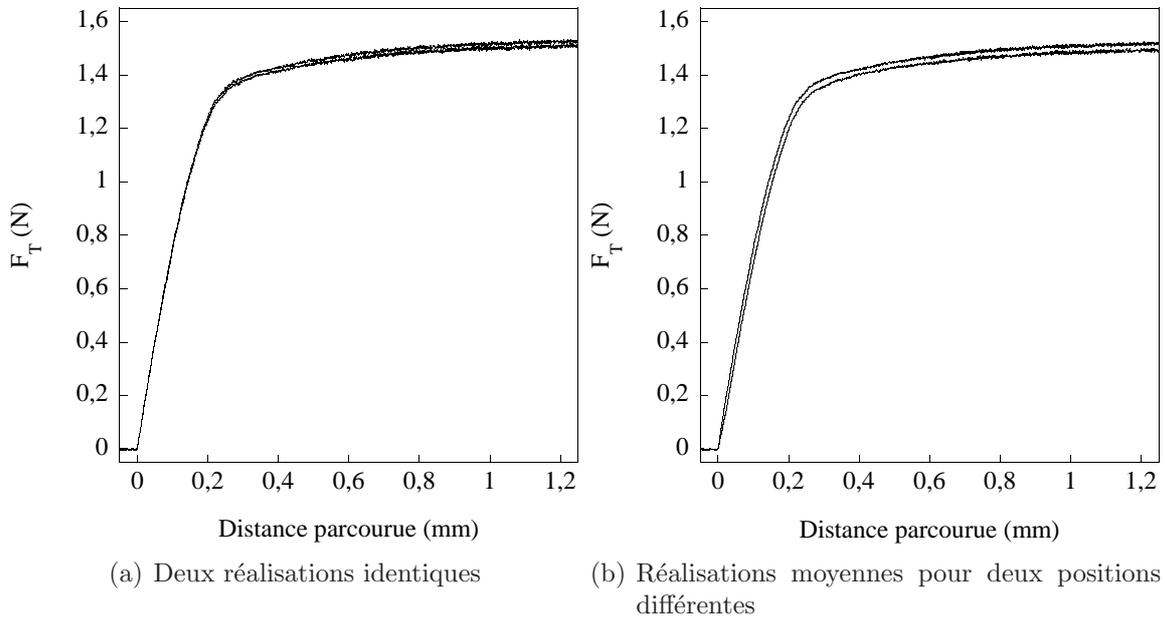


FIG. 2.2 – Evolutions de  $F_T$  en fonction de la distance parcourue par le substrat, illustrant la reproductibilité typique des expériences. (a) Reproductibilité dans les mêmes conditions expérimentales. (b) Reproductibilité pour deux positions différentes du contact par rapport au MEMS. Pour la représentation, les traces ont été lissées par une moyenne glissante de taille correspondant à un pas du moteur.

La Figure 2.2(a) représente l'évolution de  $F_T$  en fonction de la distance parcourue par le substrat, pour deux réalisations dans les mêmes conditions expérimentales. La Figure 2.2(b) représente l'évolution de  $F_T$  pour deux positions différentes du contact par rapport au MEMS. La force normale est  $F_N = 1.92\text{ N}$  et la vitesse d'entraînement de la périphérie de la roue est  $V = 0.255\text{ mm}\cdot\text{sec}^{-1}$ .

La bonne reproductibilité des mesures de  $F_T(t)$  pour différentes positions du contact nous autorise, pour toute valeur de  $F_T$ , à reconstruire à partir des différentes mesures les profils de contrainte instantanés. Cette procédure est illustrée à partir de la Figure 2.3, qui montre les évolutions des signaux  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  mesurés par le MEMS pour différentes

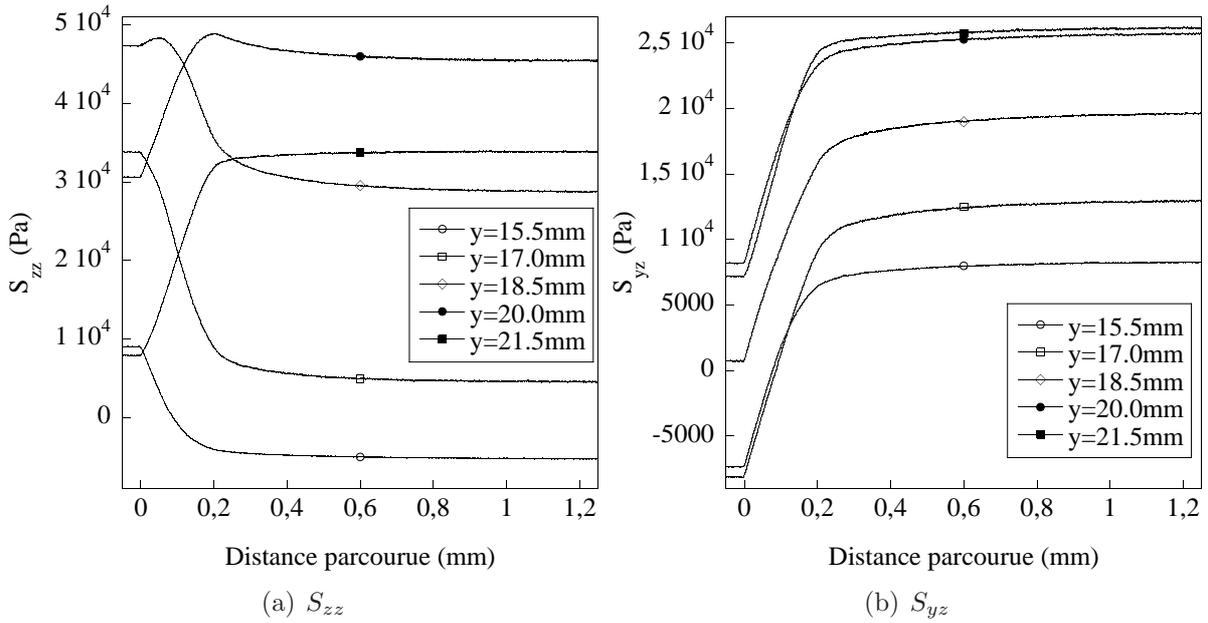


FIG. 2.3 – Evolutions de (a)  $S_{zz}$  et (b)  $S_{yz}$  (moyennée sur deux réalisations identiques) en fonction de la distance parcourue par le substrat, pour cinq positions différentes du contact  $y$  par rapport au MEMS. Pour la représentation, les traces ont été lissées par une moyenne glissante de taille correspondant à un pas du moteur.

positions  $y$  du contact. A chaque instant (associé à une valeur de  $F_T$ ) un profil spatial peut être obtenu en traçant, en fonction de  $y$ , la valeur de la contrainte instantanée.

La Figure 2.4 représente les points de l'évolution de  $F_T$  auxquels seront tracés les profils de contraintes par la suite. Lors de la charge tangentielle les contraintes se réorganisent, différemment pour chaque position  $y$ , avant d'atteindre des valeurs stationnaires. Outre les situations correspondant à la charge normale (point 1) et au glissement stationnaire (point 8), on considère 6 situations intermédiaires durant la charge tangentielle du contact (points 2 à 7). Les profils correspondants sont représentés sur la Figure 2.5.

L'évolution des contraintes induites par la charge tangentielle est mise en évidence sur la Figure 2.6, qui représente les mêmes profils que ceux présentés à la Figure 2.5 desquels a été soustrait le profil sous charge purement normale (point 1).

Au départ, les contraintes sont nulles car il s'agit de la situation de référence. Dès le point 2 apparaît un champ de contrainte additionnel dont l'allure est analogue à celle caractéristique d'un cisaillement en surface. L'allure du profil des variations reste qualitativement inchangée durant la charge : l'amplitude s'accroît au fur et à mesure que le cisaillement à l'interface augmente, puis se stabilise lorsque toute la zone de contact a atteint le glissement. Cette seule analyse ne permet pas de mettre clairement en évidence les détails de la transition charge-glissement.

La Figure 2.7 représente les profils de différence des contraintes entre deux points entre lesquels le substrat a parcouru  $20 \mu\text{m}$ , autour des 8 points choisis au cours de l'évolution. Ces champs différentiels sont quasiment invariants pour les 4 premiers points. A partir du point 5, à la fois l'allure et l'amplitude des champs différentiels varient fortement,

## 2.1. Profils lors de la transition vers le glissement

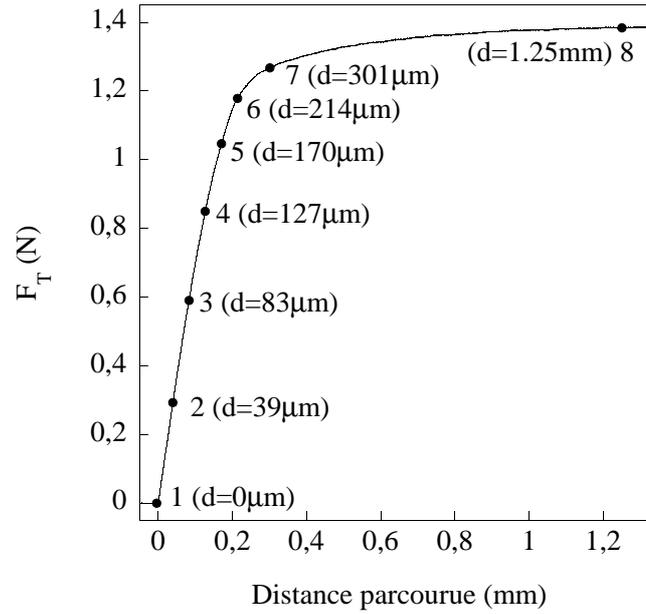


FIG. 2.4 – Evolution de  $F_T$  au cours du mouvement, en fonction de la distance  $d$  parcourue par le substrat, et les 8 points pour lesquels on représentera les profils de contraintes.

tendant vers un champ nul. On constate d'autre part sur la Figure 2.4 que l'évolution de  $F_T$  s'écarte sensiblement de la linéarité à partir du point 4.

L'interprétation de cette évolution nécessiterait de pouvoir décrire l'évolution du champ des contraintes transitoire. En milieu semi-infini le calcul de Cattaneo-Mindlin, décrit en détail au Chapitre 4 offre une solution exacte. Il montre que, dans le cas de deux cylindre de même rayon, le contact est constitué d'une zone circulaire non-glissante de rayon  $c$  entourée d'un anneau glissant. Le rayon  $c$  diminue au cours de la charge et est fixé par l'expression  $c = a \left(1 - \frac{F_T}{\mu F_N}\right)^{1/3}$  où  $\mu$  est le coefficient de frottement. Dans ce cadre l'évolution des profils, associée à la non linéarité de  $F_T$ , traduirait la mise en glissement progressive des bords du contact associée à la redistribution du champ des contraintes.

Nous ne disposons pas d'un modèle équivalent pour un film d'épaisseur finie, qui permettrait d'évaluer le champ des contraintes à la base du film. Dans la suite, nous nous limitons au cas plus simple du glissement stationnaire (correspondant au point 8 de la Figure 2.5), pour lequel une solution a pu être calculée et qui autorise donc une comparaison théorique. Ce régime est étudié dans la suite en géométrie sphère-plan puis cylindre-plan, par une méthode de reconstruction qui permet d'obtenir un profil complet en une seule expérience.

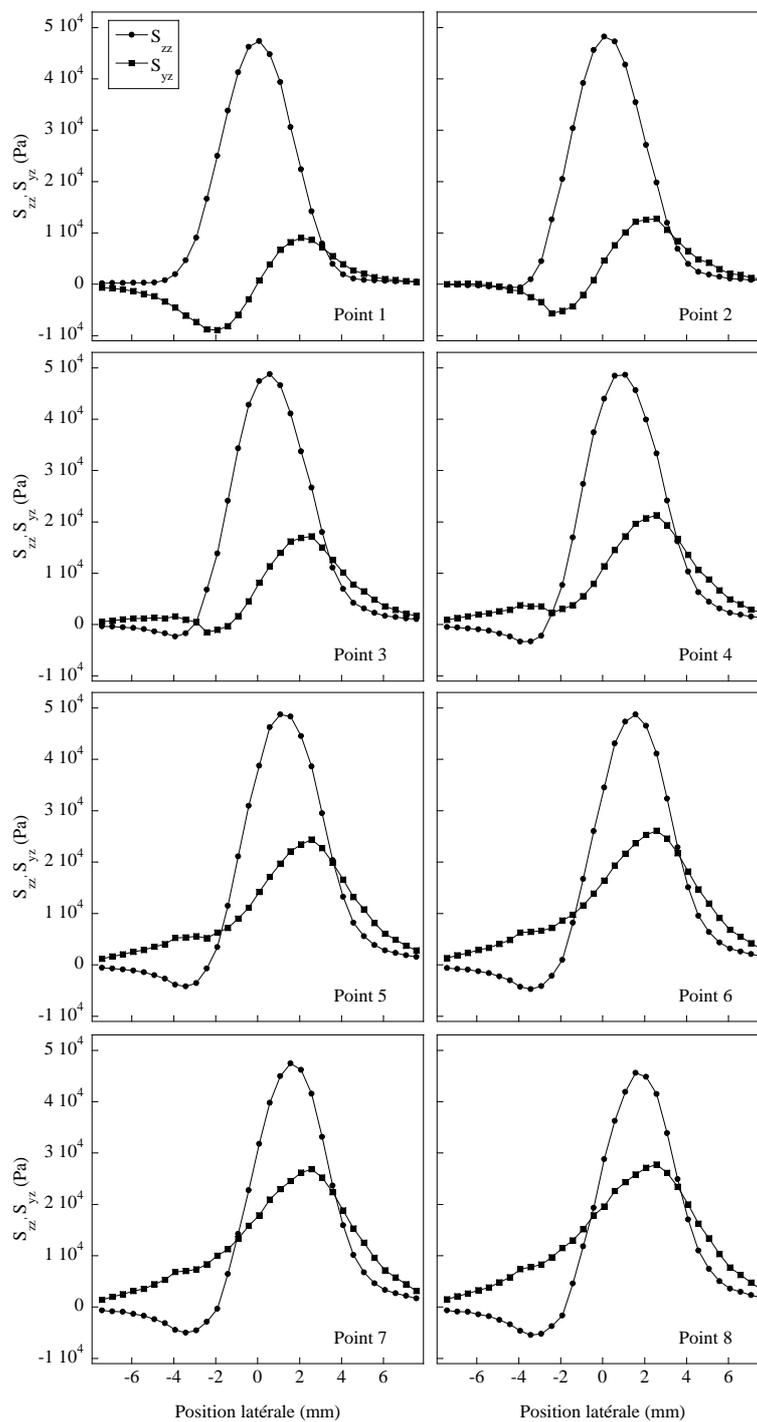


FIG. 2.5 – Profils de contraintes  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  mesurés par le MEMS pour 8 valeurs successives de la distance parcourue, lors de la charge tangentielle du contact. Avant la mise en mouvement,  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  prennent des valeurs non nulles qui correspondent au champ de contraintes exercées à la base du film sous charge purement normale.

## 2.1. Profils lors de la transition vers le glissement

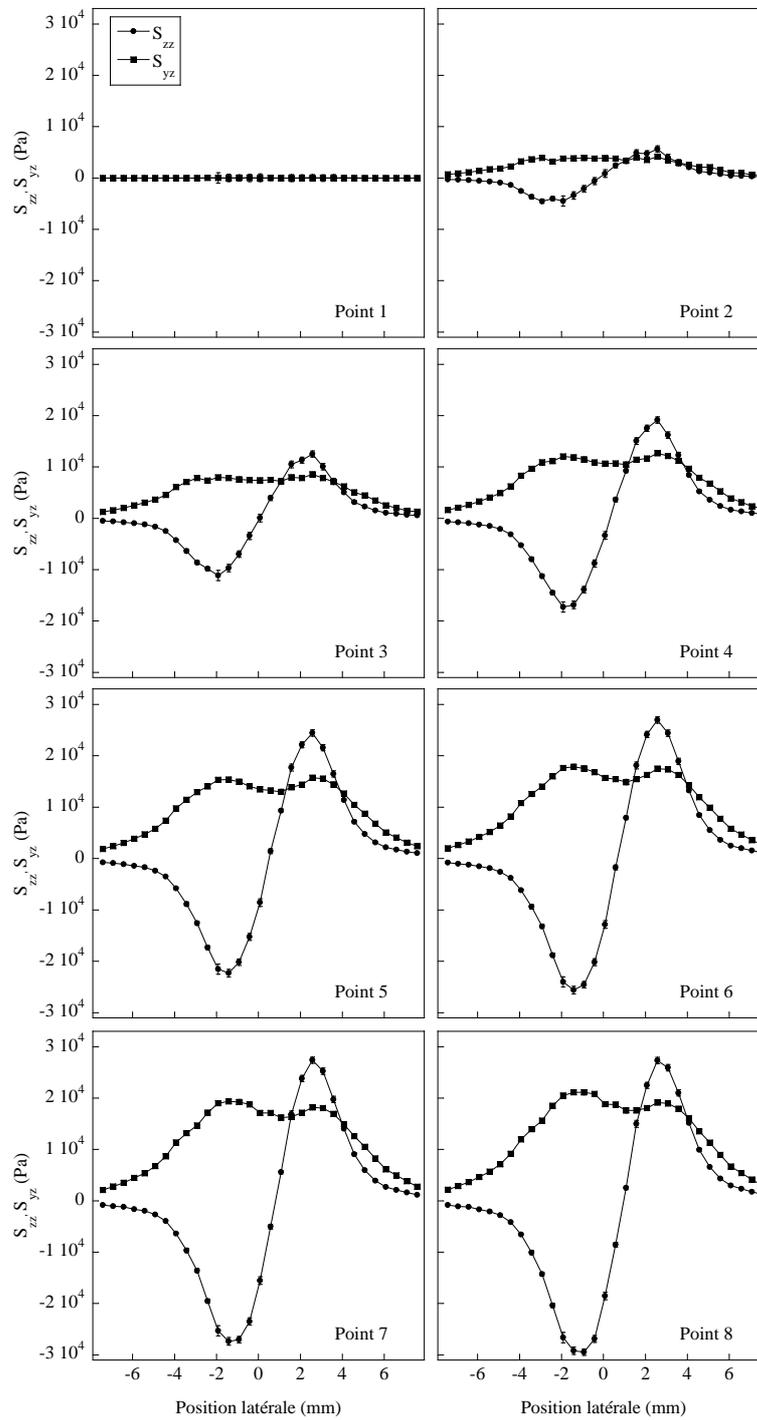


FIG. 2.6 – Profils des variations de contraintes  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  par rapport au profil sous charge purement normale.

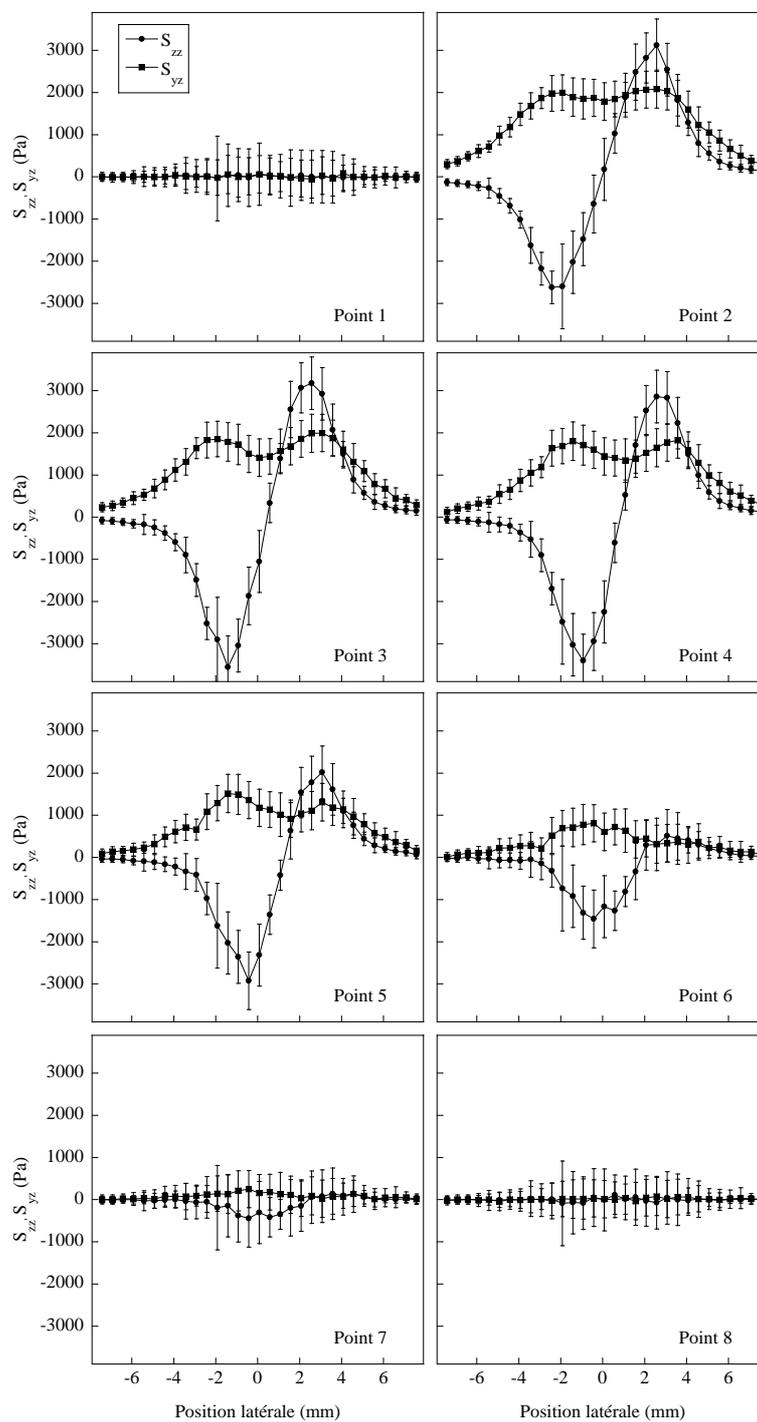


FIG. 2.7 – Profils des différentiels de contraintes  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  entre deux points espacés de  $20 \mu m$ , pour les 8 points le long de l'évolution.

## 2.2 Glissement stationnaire en contact sphère-plan

### 2.2.1 Principe de la mesure

Un contact sphère-plan est établi sous charge normale  $F_N$  comme décrit au Chapitre 1.2. La lentille est mise en mouvement via le moteur linéaire le long de l'axe  $y$ . Le réglage du parallélisme entre l'axe du moteur et la surface du film permet d'assurer qu'au cours du mouvement, la force normale  $F_N$  reste constante à moins de 4% près, pour toutes les expériences réalisées. La Figure 2.8 montre l'évolution de la force tangentielle  $F_T$  au cours du mouvement en fonction de la distance parcourue par le moteur, pour  $F_N = 1.72 N$  et  $V = 0.2 mm.sec^{-1}$ . Après une phase de charge transitoire que nous ne discuterons pas

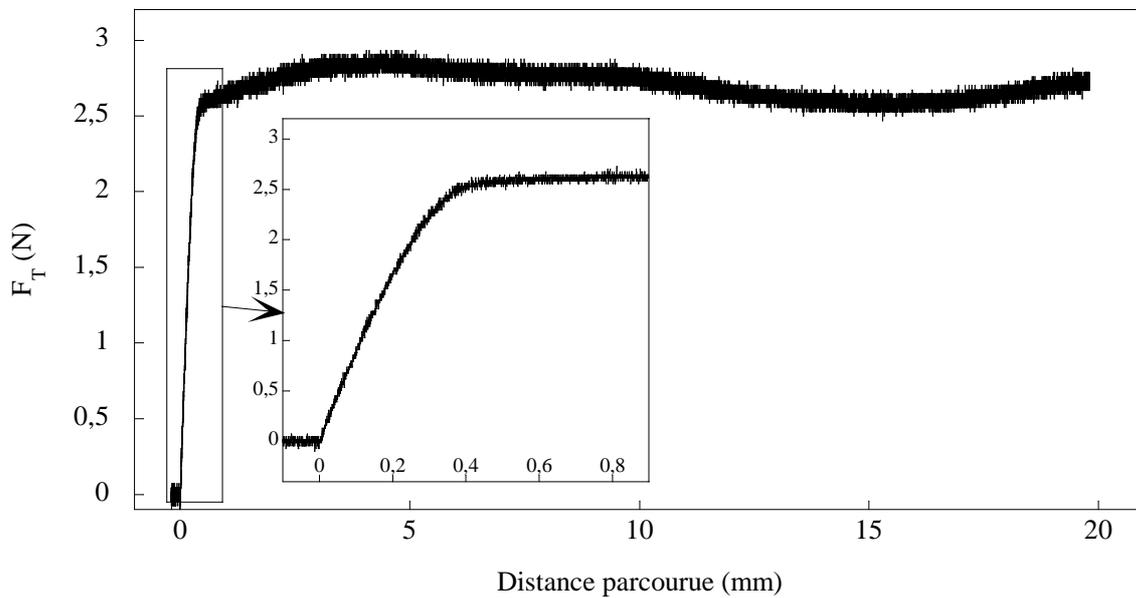


FIG. 2.8 – Evolution de  $F_T$  au cours du mouvement, en fonction de la distance parcourue par le moteur, pour un contact sphère-plan, sous charge normale  $F_N = 1.72 N$  constante et vitesse  $V = 0.2 mm.sec^{-1}$  constante.

pour l'instant (voir l'insert de la Figure 2.8), un régime de glissement est atteint. La force tangentielle  $F_T$  mesurée est quasiment constante dans ce régime : la déviation standard relative représente moins de 4% de la valeur moyenne valant  $F_T = 2.71 N$ <sup>1</sup>.

La Figure 2.9 montre, pour la même expérience, les signaux de sortie du MEMS  $S_{zz}$ ,  $S_{xz}$  et  $S_{yz}$  en fonction du déplacement relatif des deux solides. Le glissement étant stationnaire, cette expérience où le contact se déplace selon une trajectoire rectiligne au dessus du MEMS est équivalente à celle où, à un instant donné, on viendrait mesurer avec le MEMS les contraintes en tout point le long d'une ligne. Les profils de la Figure 2.9 sont

<sup>1</sup>Notons que les fluctuations de  $F_T$  au cours du mouvement sont décorréliées des fluctuations de  $F_N$ . Cela signifie que ces fluctuations sont dues à de faibles inhomogénéités des conditions de frottement à l'interface au cours du mouvement, et non pas à des défauts de parallélisme ou de planéité du film élastique.

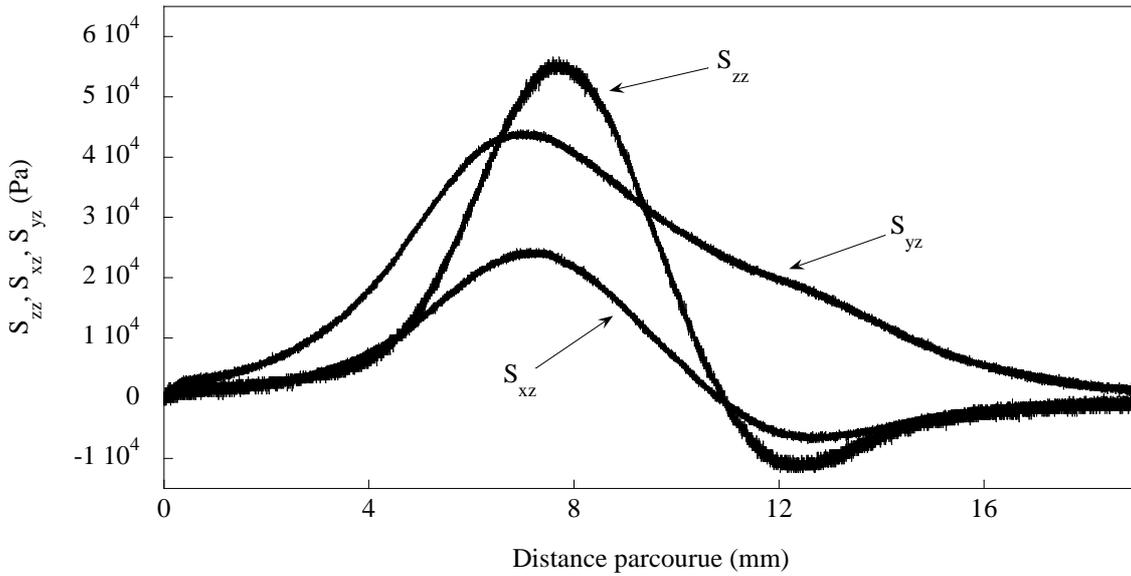


FIG. 2.9 – Evolution de  $S_{zz}$ ,  $S_{xz}$  et  $S_{yz}$  au cours du mouvement, en fonction de la distance parcourue par le moteur, pour un contact sphère-plan, sous charge normale  $F_N = 1.72 N$  constante et vitesse  $V = 0.2 mm.sec^{-1}$  constante.

donc également les profils de contrainte stationnaires existant à tout instant sous le film élastique, en régime de glissement. Il est dès lors possible de reconstruire ligne par ligne le champ de contraintes complet sous le film élastique en réalisant une série d'expériences de glissement stationnaire au dessus du MEMS suivant des trajectoires parallèles. Cette reconstruction n'étant justifiée que si tous les profils correspondent aux mêmes conditions mécaniques, nous devons faire l'hypothèse que les propriétés de frottement sont homogènes sur toute la surface du film élastomère explorée.

La Figure 2.10 montre les champs de contraintes reconstitués à partir de 33 lignes espacées de  $500 \mu m$ , en régime de glissement stationnaire, pour  $F_N = 1.72 N$  et  $V = 0.2 mm.sec^{-1}$ , en géométrie sphère-plan.

Si on considère la valeur moyenne de  $F_T$  sur chaque ligne, l'écart quadratique moyen de cette quantité sur toutes les lignes explorées représente moins de 6% de sa moyenne. La méthode de reconstitution des champs de contraintes en glissement stationnaire sur tout le plan à partir d'un seul capteur est donc valide dans cette limite.

Qualitativement, l'origine des axes ayant été choisie à la verticale du centre du contact avant mise en mouvement, on constate que les champs ont une amplitude maximale à l'avant du contact ( $y > 0$ ). Par rapport au contact sous charge normale, les champs  $S_{zz}$ ,  $S_{xz}$  et  $S_{yz}$  en glissement stationnaire ont perdu leur symétrie par rapport à l'axe  $x$ , la symétrie par rapport à l'axe  $y$  étant conservée. Par la suite, nous nous limiterons en géométrie sphère-plan, à mesurer les profils de contraintes selon l'axe  $x = 0$ .

## 2.2. Glissement stationnaire en contact sphère-plan

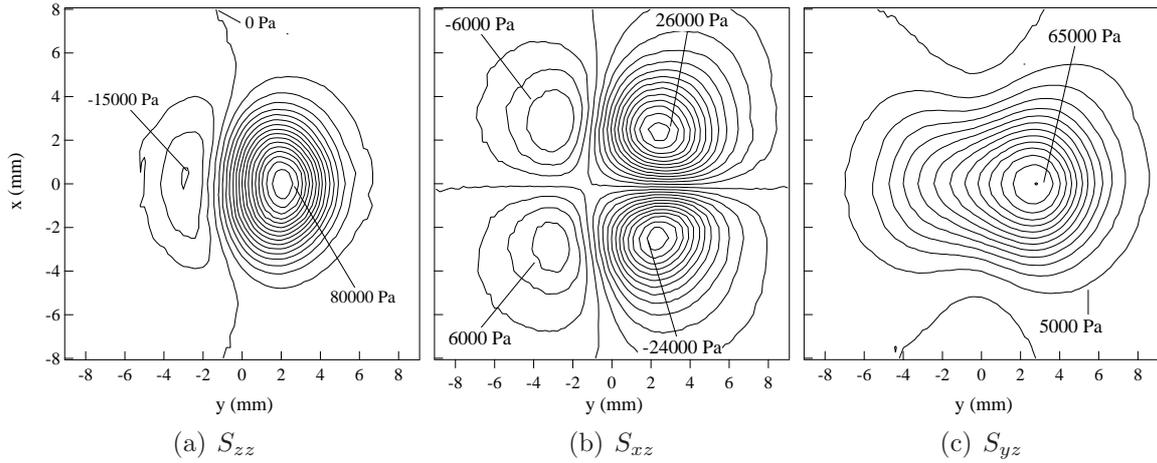


FIG. 2.10 – Champ de contraintes sous le film tel que mesuré par le MEMS en glissement stationnaire ( $F_N = 1.72\text{ N}$ ,  $V = 0.2\text{ mm}\cdot\text{sec}^{-1}$ ).

### 2.2.2 Résultats expérimentaux

Nous avons réalisé des expériences de glissement stationnaire pour les mêmes 8 valeurs de  $F_N$  qu'au Chapitre 1 et pour 4 valeurs de  $V$  : 0.1, 0.2, 0.4 et  $1\text{ mm}\cdot\text{sec}^{-1}$ . Pour chacune, nous avons mesuré les forces totales normale et tangentielle ainsi que les profils de contraintes  $S_{zz}$ ,  $S_{xz}$  et  $S_{yz}$ .

#### Mesures macroscopiques

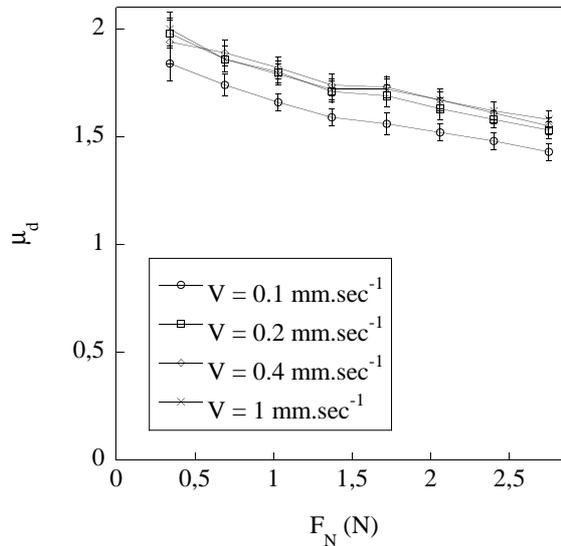


FIG. 2.11 – Valeurs du coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  calculé à partir des mesures de forces macroscopiques  $F_T$  et  $F_N$ , en fonction de  $F_N$ , pour toutes les vitesses imposées, en géométrie sphère-plan.

## Chapitre 2. Profil des contraintes sous charge tangentielle

---

La Figure 2.11 représente les valeurs mesurées du coefficient de frottement dynamique  $\mu_d = F_T/F_N$  en fonction de la charge normale  $F_N$  exercée, pour les 4 vitesses d'entraînement.

Nous constatons que  $\mu_d$  augmente très faiblement avec la vitesse  $V$ . A l'inverse, pour une même valeur de  $V$ ,  $\mu_d$  décroît significativement avec  $F_N$ . Pour un élastomère en frottement, la dissipation énergétique peut avoir deux origines : (i) une dissipation volumique visco-élastique associée aux variations temporelles de la déformation du matériau (ii) une dissipation interfaciale dépendante de l'énergie d'adhésion des deux substrats. L'absence d'hystérèse observable au cours d'un cycle de charge-décharge normale indique que la contribution d'origine adhésive ne peut expliquer les dépendances observées. Dans le cas d'un élastomère rugueux en frottement contre un substrat lisse, la fréquence caractéristique de modulation des contraintes est de l'ordre de  $V/a$  où  $a$  est le rayon de contact. Pour nos expériences, cette grandeur se situe dans la gamme  $0.03 - 0.3 Hz$ , un domaine fréquentiel où le module de perte  $G''(f)$  du PDMS varie en  $f^{1/4}$ . Ce faible exposant est compatible avec la faible dépendance de  $\mu_d$  en vitesse observée.

Pour une vitesse donnée, la dépendance de  $\mu_d$  en fonction de  $a$  traduit avant tout sa dépendance en fonction de la charge normale  $F_N$ . Celle-ci est difficile à prédire : la dissipation est principalement confinée dans la couche rugueuse pour laquelle le nombre d'aspérités sollicitées et l'amplitude de leur déformation individuelles dépendent de façon complexe de la charge moyenne appliquée à l'ensemble du contact.

### Mesures mésoscopiques

La Figure 2.12 montre les profils de contraintes mesurés à force normale donnée ( $F_N = 1.72 N$ ) pour 4 vitesses d'entraînement du moteur différentes, variant sur une décade de  $0.1$  à  $1 mm.sec^{-1}$ .

Pour  $V > 0.2 mm.sec^{-1}$ , les contraintes mesurées apparaissent indépendantes de  $V$ . En revanche, pour  $V < 0.2 mm.sec^{-1}$ , les courbes sont sensiblement différentes : le profil de pression est moins décalé vers les  $y > 0$  et son intégrale est plus faible. De même, le profil de contrainte de cisaillement présente une amplitude maximum et une intégrale plus faible. Ces modifications des profils, en forme et en intégrale peuvent être comprises à partir de la variation du coefficient de frottement. Pour la suite, nous ne montrerons plus que les profils correspondant à la vitesse  $V = 1.0 mm.sec^{-1}$ .

La Figure 2.13 montre les profils de contraintes mesurés pour  $V = 1.0 mm.sec^{-1}$ , pour toutes les 8 valeurs de  $F_N$ . Qualitativement, on peut interpréter l'allure de ces résultats en évaluant la différence entre les profils en glissement et ceux avant mise en mouvement (voir Figure 2.14). Ces profils différentiels illustrent l'effet principal de la mise en charge du contact, qui se traduit par une contrainte tangentielle sur l'ensemble du contact. L'équilibre mécanique du film nécessite l'existence d'un champ de pression antisymétrique à la base du film, pour compenser le couple créé par la contrainte tangentielle en surface.

## 2.3. Glissement stationnaire en contact cylindre-plan

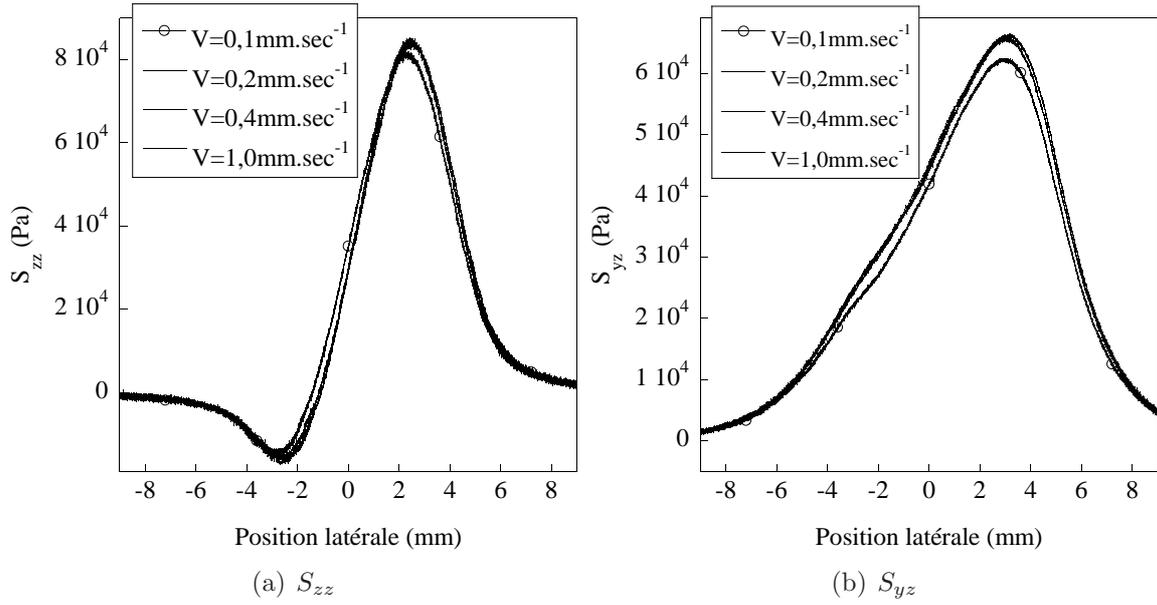


FIG. 2.12 – Champ des contraintes mesurées (a)  $S_{zz}$  et (b)  $S_{yz}$  sous le film en glissement stationnaire pour  $F_N = 1.72 N$  et pour 4 vitesses d’entraînement du moteur : 0.1, 0.2, 0.4 et  $1 \text{ mm}\cdot\text{sec}^{-1}$ . Pour la représentation, les traces ont été lissées par une moyenne flottante sur une taille  $2 \mu\text{m}$ . Pour les 3 plus grandes vitesses, les profils se placent quasiment sur la même courbe. En revanche, pour  $V = 0.1 \text{ mm}\cdot\text{sec}^{-1}$  (o) les profils s’écartent de ce comportement.

## 2.3 Glissement stationnaire en contact cylindre-plan

Afin de pouvoir comprendre quantitativement les résultats obtenus en glissement stationnaire, nous avons réalisé une série d’expériences analogues en géométrie cylindre-plan, pour laquelle nous disposons de résultats semi-analytiques obtenus par Eytan Katzav et Mokhtar Adda-Bedia<sup>2</sup> et qui seront décrits au Chapitre 2.3.2.

### 2.3.1 Résultats expérimentaux

La géométrie utilisée a été précédemment décrite au Chapitre 1.4. Les expériences de mise en glissement sont réalisées pour des vitesses comprises entre 0.2 et  $2.0 \text{ mm}\cdot\text{sec}^{-1}$ , et pour des charges normales comprises entre 0.34 N et 2.75 N.

#### Résultats macroscopiques

Le coefficient de frottement dynamique  $\mu_d = F_T/F_N$  est présenté pour l’ensemble des expériences sur la Figure 2.15. Il montre une dépendance en vitesse et force normale identique à celle obtenue en géométrie sphère-plan.

<sup>2</sup>Laboratoire de Physique Statistique de l’Ecole Normale Supérieure.

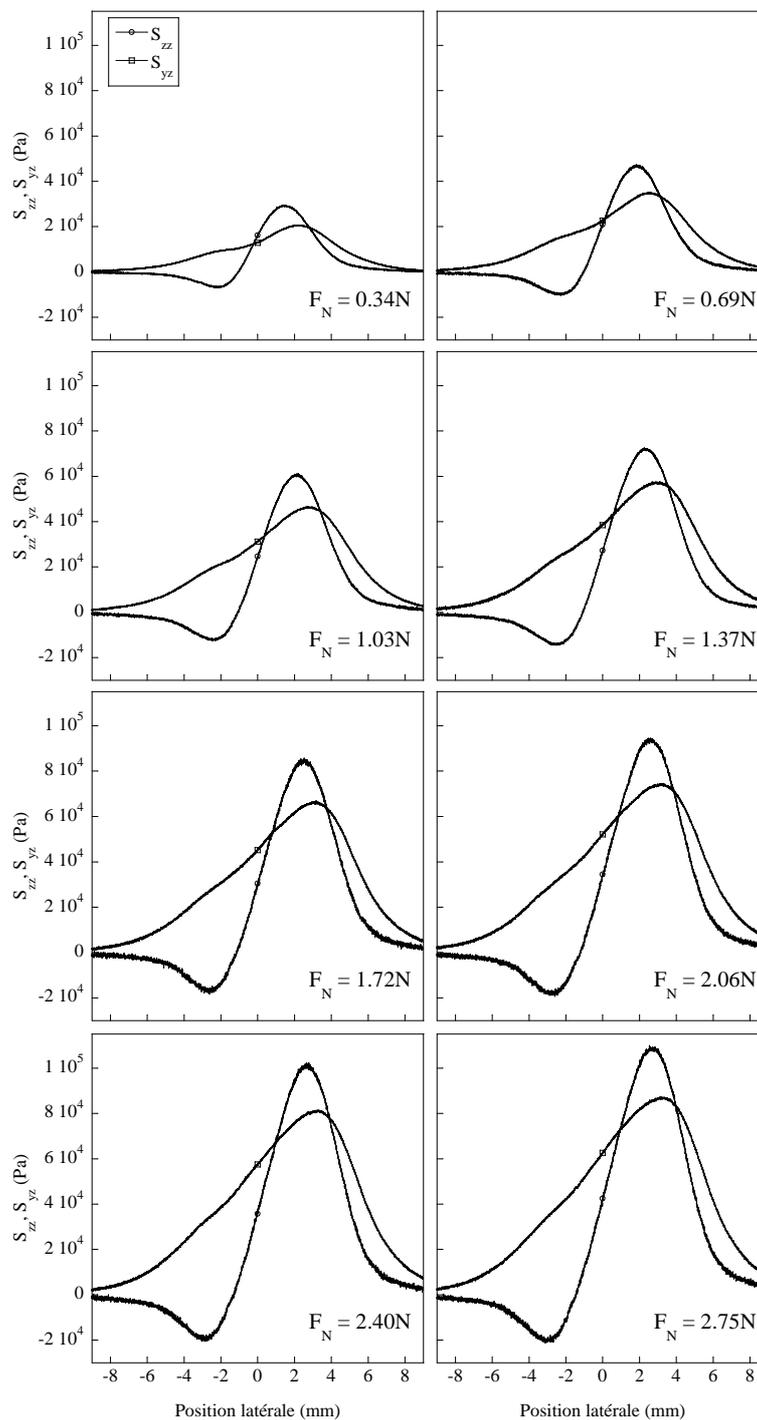


FIG. 2.13 – Champ des contraintes (a)  $S_{zz}$  et (b)  $S_{yz}$  sous le film élastique, en régime de glissement stationnaire à vitesse  $V = 1.0 \text{ mm} \cdot \text{sec}^{-1}$ , pour différentes valeurs de  $F_N$ . Pour la représentation, les traces ont été lissées par une moyenne flottante sur une taille  $8 \mu\text{m}$ .

### 2.3. Glissement stationnaire en contact cylindre-plan

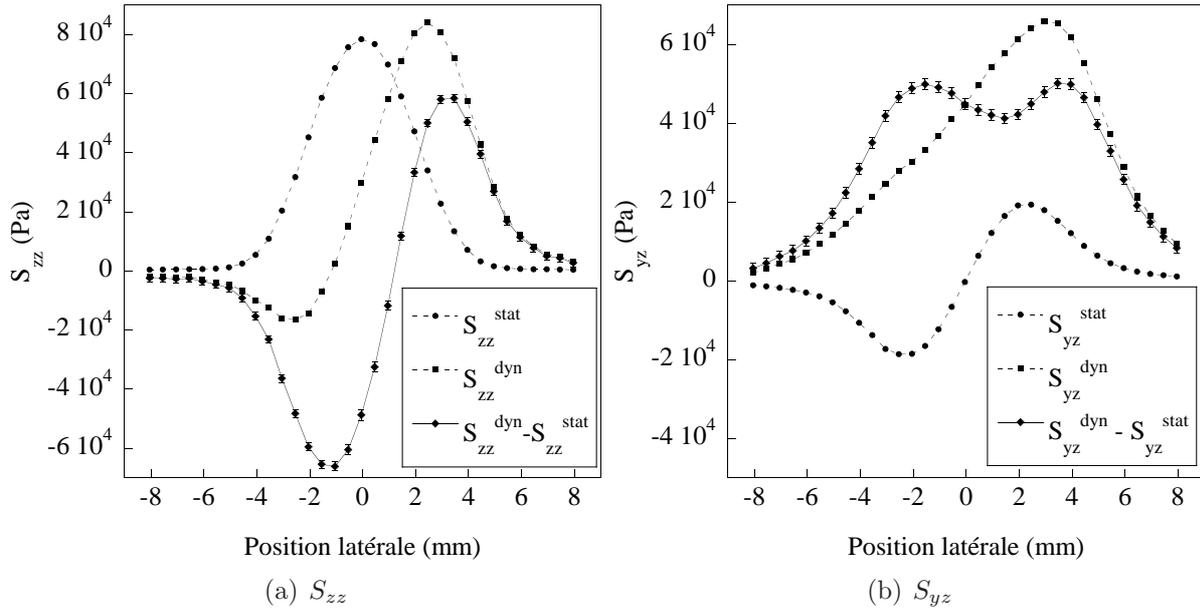


FIG. 2.14 – Profils des contraintes mesurées (a)  $S_{zz}$  et (b)  $S_{yz}$  (pour un contact sphère-plan sous charge normale  $F_N = 1.72 N$ ) avant mouvement ( $\bullet$ ), en glissement stationnaire à  $V = 1.0 mm.sec^{-1}$  ( $\blacksquare$ ), et la différence entre ces deux profils (trait plein).

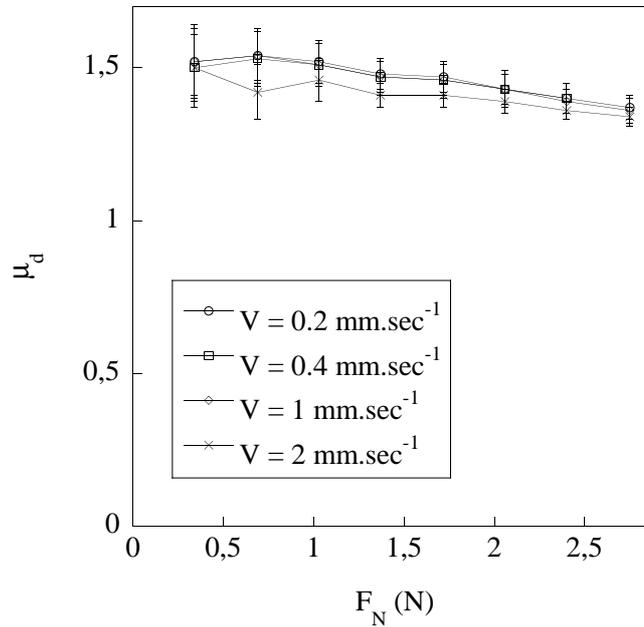


FIG. 2.15 – Valeurs du coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  calculé à partir des mesures de forces macroscopiques  $F_T$  et  $F_N$ , en fonction de  $F_N$ , pour toutes les vitesses imposées, en géométrie cylindre-plan.

Profils de contrainte

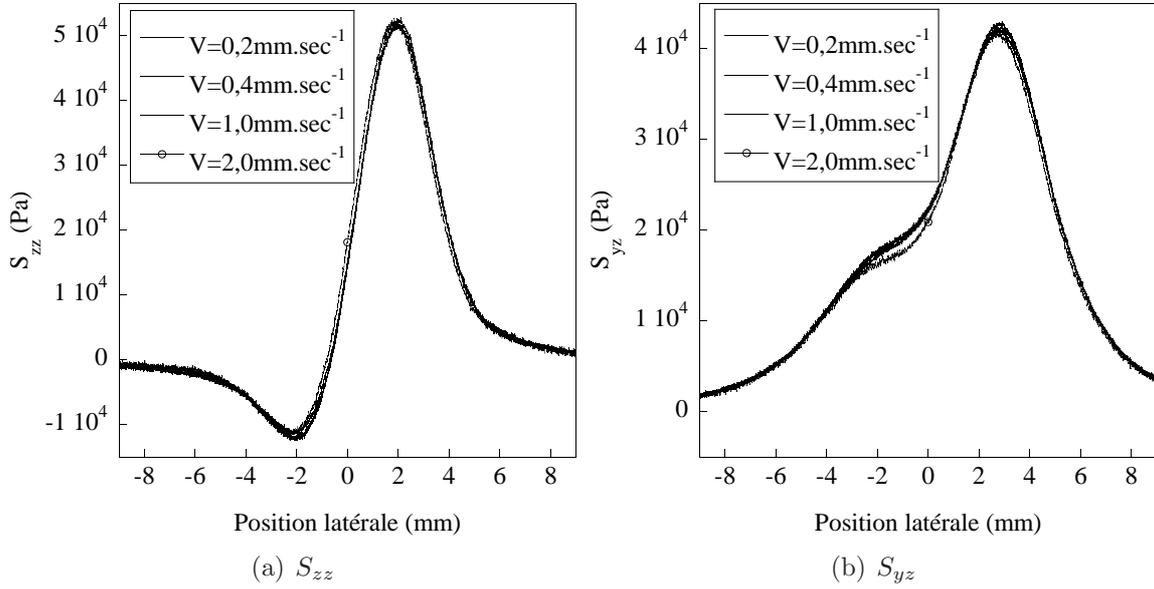


FIG. 2.16 – Champ des contraintes mesurées  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  sous le film en glissement stationnaire sous  $F_N = 1.72 N$ , pour 4 vitesses de glissement : 0.2, 0.4, 1.0 et 2.0  $mm.sec^{-1}$ . Les traces ont été lissées par une moyenne flottante sur une taille  $8 \mu m$ . Pour les 3 premières vitesses, les profils sont quasiment superposés. Pour  $V = 2.0 mm.sec^{-1}$  (o) les profils sont légèrement différents.

La Figure 2.16 représente les profils de contraintes  $S_{yz}$  et  $S_{yzz}$  mesurés, pour  $F_N = 1.72 N$  en géométrie cylindre-plan, pour 4 vitesses de glissement. Comme en géométrie sphère-plan, les profils de contraintes sont identiques dans la gamme 0.2 – 1  $mm.sec^{-1}$ . Pour  $V = 2.0 mm.sec^{-1}$ , le profil de pression est moins décalé vers les  $y > 0$ , et le profil de cisaillement a une intégrale plus faible, et un épaulement plus marqué à l’arrière du contact.

Sur la Figure 2.17 sont représentés les profils de contraintes mesurés pour  $V = 1.0 mm.sec^{-1}$ , pour toutes les valeurs de  $F_N$  explorées.

Nous avons pu estimer à partir de ces profils un coefficient de frottement dynamique effectif sous la forme :

$$\mu_d^{eff} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_{yz} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{zz} dy} \quad (2.1)$$

Les valeurs de  $\mu_d^{eff}$ , représentées sur la Figure 2.18, sont systématiquement supérieures à celles de  $\mu_d$ . Cette différence traduit l’hétérogénéité des contraintes le long de l’axe  $x$ . Nous considérerons néanmoins, comme au Chapitre 1, que les contraintes varient peu sur la zone de sensibilité du capteur, afin d’autoriser l’hypothèse d’invariance par translation pour le calcul des champs de contraintes.

### 2.3. Glissement stationnaire en contact cylindre-plan

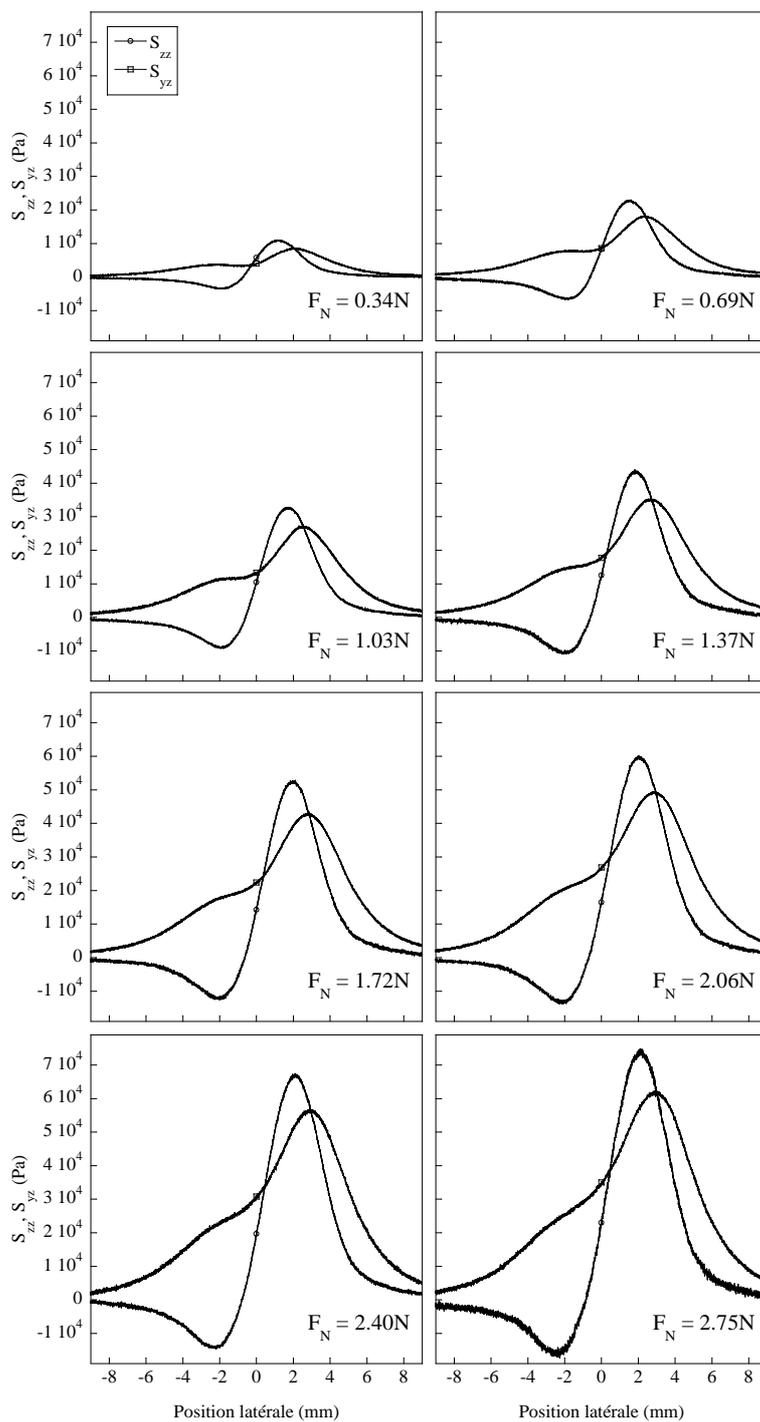


FIG. 2.17 – Champs de contraintes (a)  $S_{zz}$  et (b)  $S_{yz}$  sous le film élastique, en régime de glissement stationnaire à vitesse  $V = 1.0 \text{ mm} \cdot \text{sec}^{-1}$ , pour différentes valeurs de  $F_N$ , en géométrie cylindre-plan. Les traces ont été lissées par une moyenne flottante sur une taille  $8 \mu\text{m}$ .

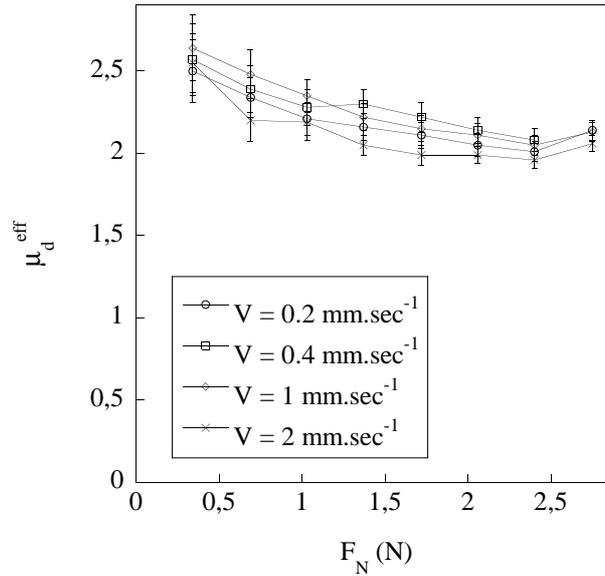


FIG. 2.18 – Valeurs du coefficient de frottement dynamique  $\mu_d^{eff}$  calculé à partir des intégrales des profils mesurés, en fonction de  $F_N$ , pour toutes les vitesses imposées, en géométrie cylindre-plan.

### 2.3.2 Modèle semi-analytique bidimensionnel quasi-statique

Ce modèle a été développé au LPS par Eytan Katzav et Mokhtar Adda-Bedia (modèle KA) pour interpréter nos mesures. Il s'agit d'un modèle semi-analytique, dont le détail des calculs est présenté en Annexe B. La géométrie est celle de notre expérience : un cylindre rigide de rayon  $R$  en glissement stationnaire sur un film d'élastomère d'épaisseur  $h$ , de module de Young  $E$ , solidaire du fond rigide sur lequel il repose. Les hypothèses physiques sont les suivantes :

- le film élastique est purement élastique et incompressible (coefficient de Poisson  $\nu = 0.5$ ),
- le régime de glissement est quasi-statique,
- la loi de frottement est de type Coulomb, avec une proportionnalité en tout point entre la contrainte de cisaillement  $\sigma$  et la contraintes de pression  $p$ .

Les valeurs de  $h$ ,  $E$  et  $R$  sont fixées aux valeurs expérimentales. Pour toutes valeurs du coefficient de frottement et de la force normale linéique, le modèle permet d'obtenir le champ de contraintes associé dans tout le volume du film élastique, le rayon de contact  $a$  et le décalage  $x_0$  du centre du contact par rapport à l'axe de symétrie du cylindre (voir Annexe B).

La Figure 2.19 illustre, pour une valeur donnée de la force normale linéique, les modifications des profils de contrainte sous le film lorsque le coefficient de frottement varie.

La Figure 2.20 illustre, pour une valeur donnée du coefficient de frottement, les modifications des profils de contrainte sous le film lorsque la force normale linéique varie.

### 2.3. Glissement stationnaire en contact cylindre-plan

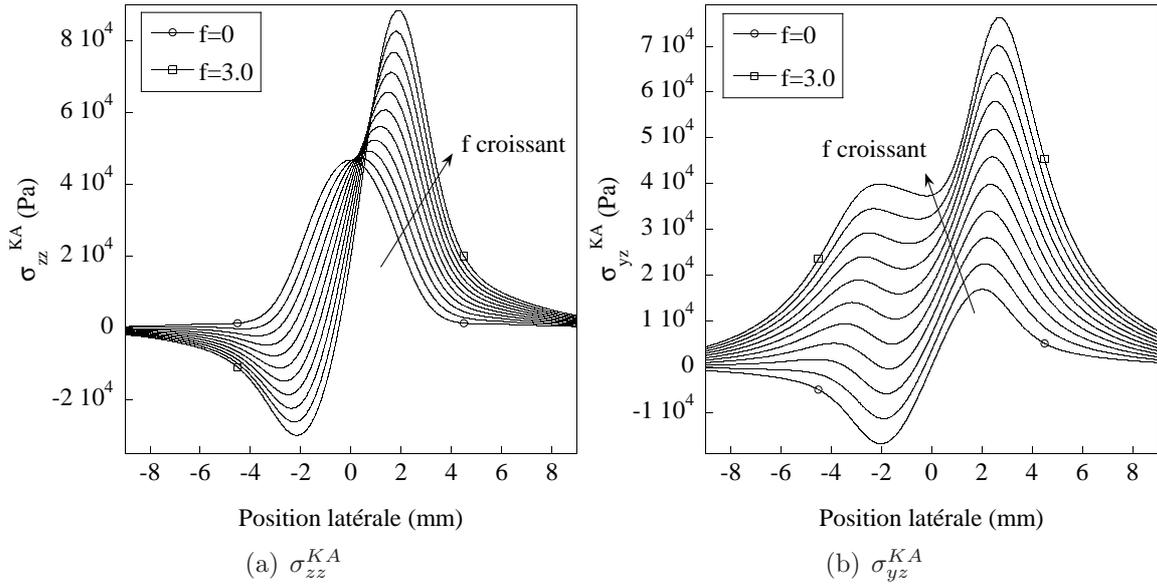


FIG. 2.19 – Champ de contraintes (a)  $\sigma_{zz}^{KA}$  et (b)  $\sigma_{yz}^{KA}$  calculés dans le cadre du modèle KA. Les profils correspondent à une même valeur de la charge normale linéique ( $CL = 200 \text{ Pa}\cdot\text{m}$ ), pour différentes valeurs de  $f$  allant de 0 ( $\circ$ ) à 3 ( $\square$ ), par pas de 0.3.  $E = 2.2 \text{ MPa}$ ,  $R = 130 \text{ mm}$ ,  $h = 2 \text{ mm}$ .

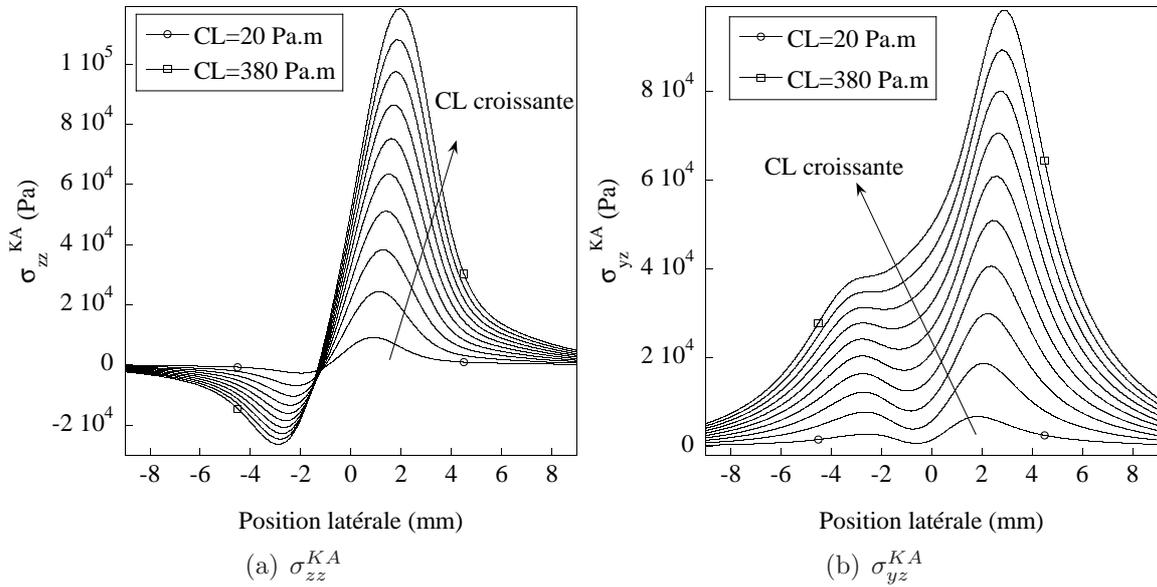


FIG. 2.20 – Champ de contraintes (a)  $\sigma_{zz}^{KA}$  et (b)  $\sigma_{yz}^{KA}$  calculés dans le cadre du modèle KA. Les profils correspondent à une même valeur  $f = 2.0$  du coefficient de frottement, pour différentes valeurs de la charge normale linéique  $CL$  allant de  $20 \text{ Pa}\cdot\text{m}$  ( $\circ$ ) à  $380 \text{ Pa}\cdot\text{m}$  ( $\square$ ), par pas de  $40 \text{ Pa}\cdot\text{m}$ .  $E = 2.2 \text{ MPa}$ ,  $R = 130 \text{ mm}$ ,  $h = 2 \text{ mm}$ .

### 2.3.3 Comparaison quantitative

Chaque réalisation expérimentale permet d'extraire une charge linéique par intégration du profil de pression et un coefficient de frottement effectif défini par l'équation 2.1. Ces deux paramètres déterminent une solution unique pour le modèle KA. Les profils de contrainte calculés à la base du film sont ensuite convolués par les fonctions d'appareil déterminées au Chapitre précédent (en cylindre-plan pour la fonction d'appareil en cisaillement  $FA_{yz}$ ).

Les Figures 2.21 et 2.22 montrent les résultats ainsi obtenus, comparés aux résultats des mesures pour une vitesse  $V = 1 \text{ mm} \cdot \text{sec}^{-1}$ .

L'accord quantitatif est bon pour les deux composantes, sans aucun paramètre ajustable, pour l'ensemble des forces normales appliquées. Certaines différences existent toutefois : le minimum local de la contrainte tangentielle au centre du contact est en particulier moins marqué expérimentalement. Elles paraissent cependant minimes au regard de la simplicité des hypothèses utilisées dans le modèle. Si l'hypothèse de quasi-staticité semble réaliste dans cette gamme de vitesse, les conditions aux limites sont a priori trop naïves. D'une part, l'existence d'une rugosité de taille finie peut perturber sensiblement le champ de pression notamment aux plus faibles forces normales (voir Chapitre 4). Plus encore, l'observation d'une dépendance importante du coefficient de frottement mesuré macroscopiquement avec la charge appliquée rend sujette à caution la validité d'une loi de Coulomb applicable localement. Le modèle KA ne permet cependant pas de tester l'effet d'un coefficient de frottement hétérogène au sein du contact.

### 2.3. Glissement stationnaire en contact cylindre-plan

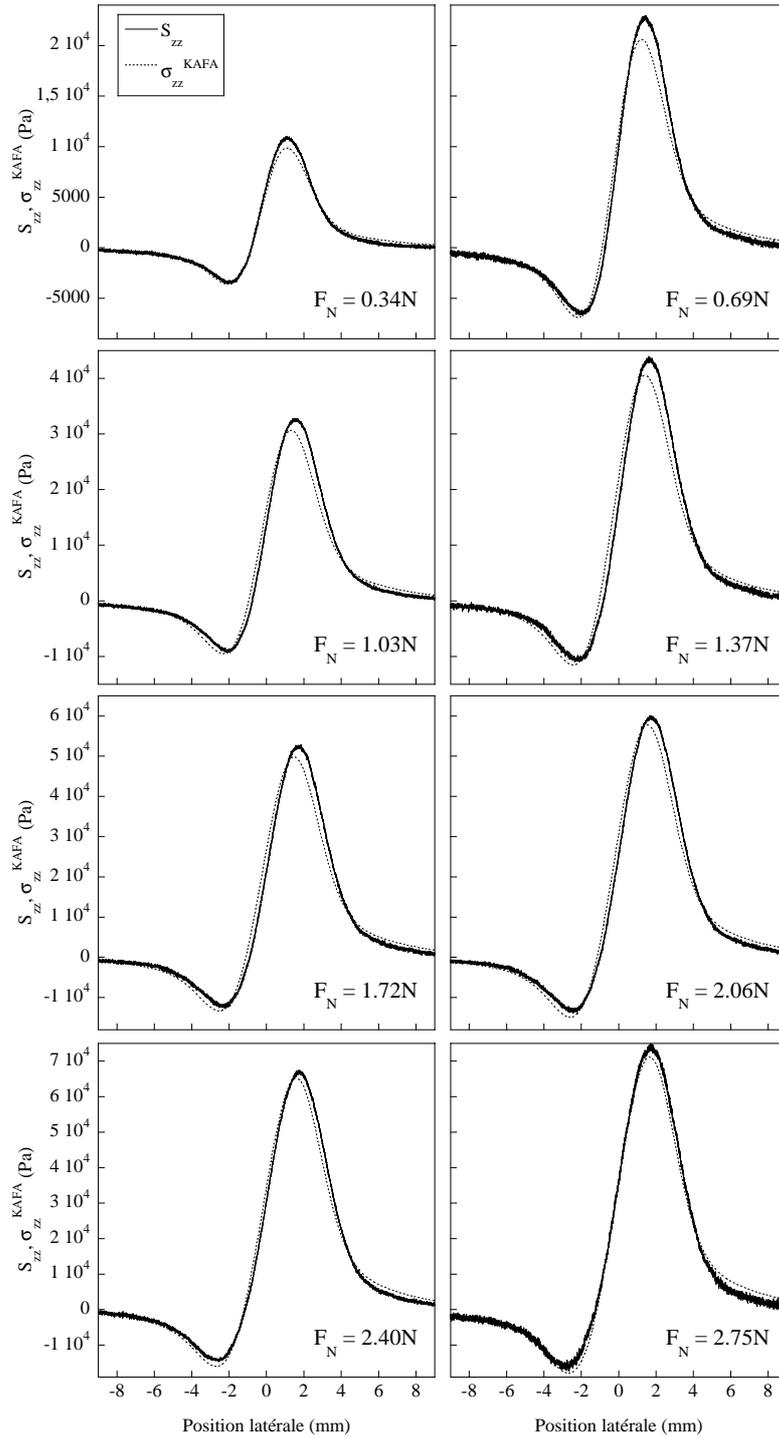


FIG. 2.21 – Champs de contraintes  $S_{zz}$  (trait plein) mesurés pour  $V = 1 \text{ mm} \cdot \text{sec}^{-1}$  comparé aux champs  $\sigma_{zz}^{Kafa}$  calculés à partir du modèle KA puis convolués par la fonction d'appareil  $FA_{zz}$  (pointillés), pour toutes les valeurs de  $F_N$  explorées, en géométrie cylindre-plan. Les traces expérimentales ont été lissées par une moyenne flottante sur une taille  $8 \mu\text{m}$ .

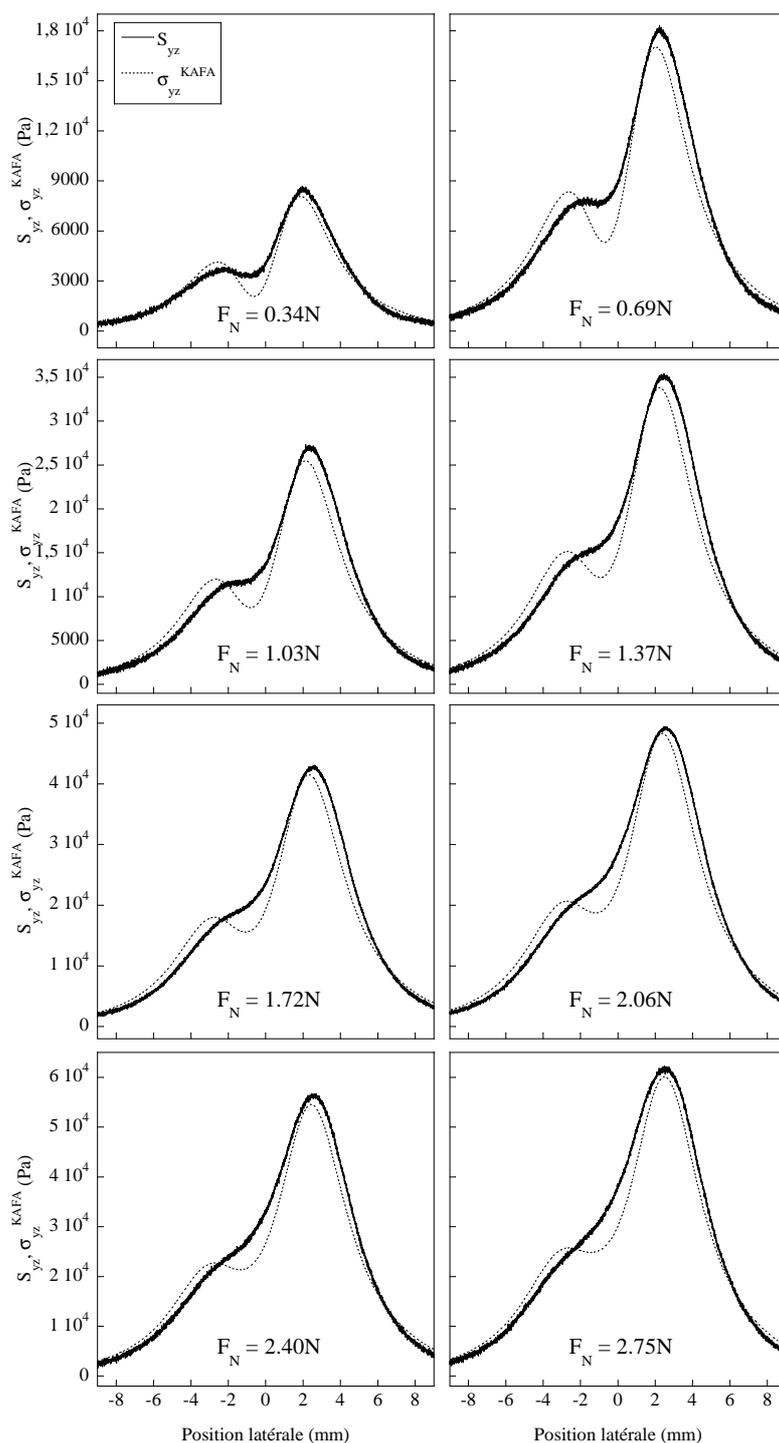


FIG. 2.22 – Champs de contraintes  $S_{yz}$  (trait plein) mesurés pour  $V = 1\text{ mm}\cdot\text{sec}^{-1}$  comparé aux champs  $\sigma_{yz}^{KAFA}$  calculés à partir du modèle KA puis convolués par la fonction d'appareil  $FA_{yz}$  (pointillés), pour toutes les valeurs de  $F_N$  explorées, en géométrie cylindre-plan. Les traces expérimentales ont été lissées par une moyenne flottante sur une taille  $8\ \mu\text{m}$ .

## 2.4 Régime de stick-slip

Nous illustrons dans ce paragraphe la possibilité de mesurer des variations non stationnaires mais périodiques des champs de contraintes par une méthode similaire à celle présentée dans ce chapitre. Lorsque l'on réalise des expériences de frottement avec un substrat de verre non silanisé, pour certaines conditions de charge normale et de vitesse, la dynamique présente une instabilité de "stick-slip". La force tangentielle présente une alternance de phases de charge durant laquelle le contact est collé, et de phases de relaxation rapide associées au glissement relatif des deux objets (voir Figure 2.23).

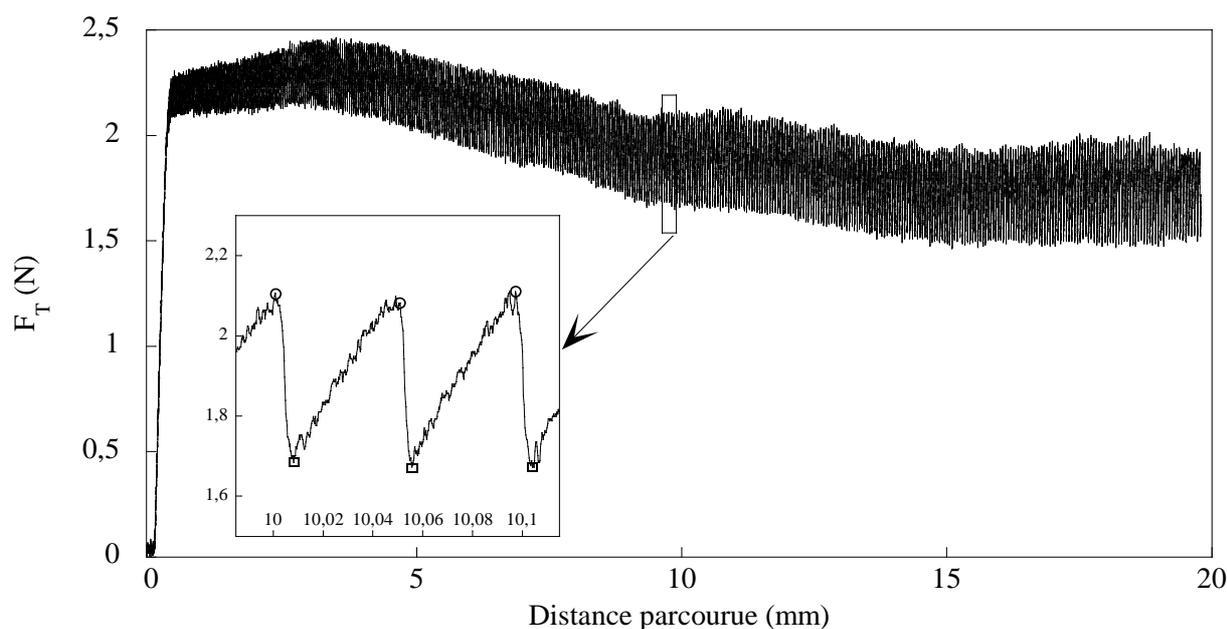


FIG. 2.23 – Evolution de  $F_T$  au cours du mouvement, en fonction de la distance parcourue par le moteur, pour un contact cylindre-plan, le substrat n'étant pas silanisé, sous charge normale  $F_N = 1.72 N$  constante et vitesse d'entraînement  $V = 0.1 mm.sec^{-1}$  constante. L'insert montre le détail de deux événements de glissement successifs. Les cercles correspondent aux situations juste avant glissement, les carrés aux situations juste après glissement. Pour la représentation, les traces sont lissées par une moyenne glissante de largeur  $0.8 \mu m$ .

En identifiant au sein de cette séquence les instants précédant immédiatement le glissement il est possible de reconstituer le champ de contraintes qui caractérise l'état du contact juste avant l'instabilité. Cette reconstruction utilise la même correspondance temps-espace que celle décrite au début de ce chapitre. De façon similaire, il est possible de reconstruire les profils des contraintes pour un contact qui vient de se recoller. La Figure 2.24 montre la différence entre des profils de contraintes associés à ces deux états particuliers.

Cette analyse suppose la régularité à la fois des temps de charge et de l'amplitude des relaxations de force tangentielle. Cette condition n'est que partiellement satisfaite en raison des inhomogénéités de l'interface : l'amplitude des variations de  $F_T$  est stable à  $\pm 22\%$  près, et la période du stick-slip est stable à  $\pm 14\%$  près. Afin de prendre en compte

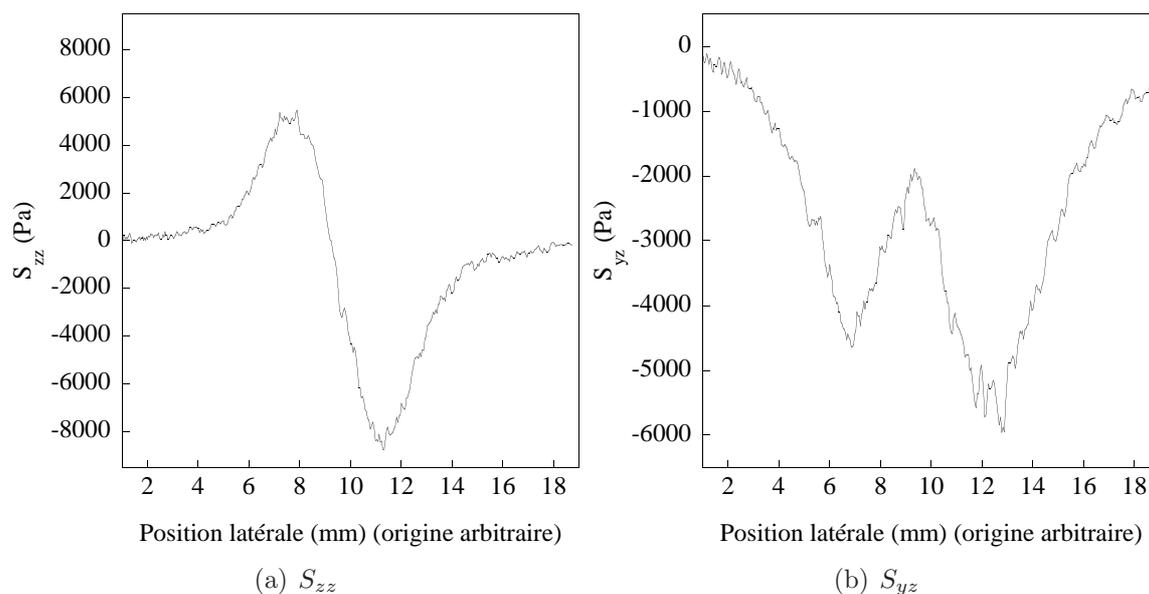


FIG. 2.24 – Profils de variations des contraintes (a)  $S_{zz}$  et (b)  $S_{yz}$  mesurées au cours d'un événement de glissement, en régime de stick-slip, en géométrie cylindre-plan, pour un substrat non silanisé, sous charge normale  $F_N = 1.72 N$  constante et vitesse d'entraînement  $V = 0.1 mm.sec^{-1}$  constante. Pour la représentation, les traces sont lissées par une moyenne glissante correspondant à 3 événements de glissement successifs.

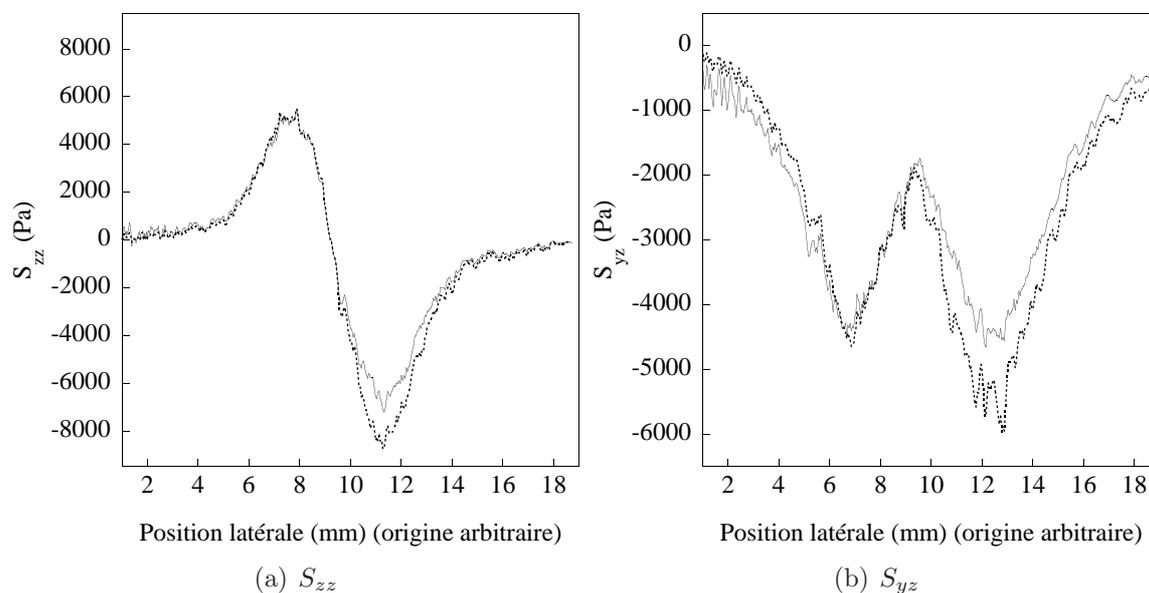


FIG. 2.25 – Profils de variations des contraintes  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  (pointillés), et profils normalisés par l'énergie dissipée à chaque événement de glissement (trait plein), pour la même expérience qu'à la Figure 2.24. Pour la représentation, les traces sont lissées par une moyenne glissante correspondant à 3 événements de glissement successifs.

ces variations, chaque point des profils de la Figure 2.24 a été pondéré par l'amplitude de la relaxation de  $F_T$ . Cette normalisation a pour effet de rendre plus symétrique les profils différentiels (voir Figure 2.25).

Notons que l'ensemble des états intermédiaires de contraintes associés à chaque valeur de la "phase" au cours du cycle de "stick-slip", peut être reconstitué de façon similaire.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu étendre la méthode de mesure des contraintes présentée au Chapitre 1 au régime de glissement stationnaire. Les profils ne sont plus obtenus point par point, mais à partir de l'équivalence entre le temps écoulé et la distance parcourue à vitesse constante. Nous avons pour cela dû faire l'hypothèse d'homogénéité des propriétés de surface du film élastomère le long de la trajectoire. Les profils obtenus peuvent être qualitativement décrits comme la superposition des profils associés à une charge purement normale et ceux correspondant à un cisaillement pur à l'interface (voir Figure 2.14). Quantitativement, nous avons pu confronter les résultats en géométrie cylindre-plan à ceux d'un modèle semi-analytique simple. Le bon accord observé montre qu'en première approche l'hypothèse d'une loi de Coulomb locale est valide. Ce résultat peut apparaître surprenant notamment compte tenu des fortes dépendances observées du coefficient de frottement dynamique avec la charge normale exercée.

Nous avons montré qu'en régime de stick-slip quasi-périodique, il est possible d'obtenir l'évolution du champ de contraintes au cours d'un cycle. Néanmoins, ce dispositif utilisant un unique capteur ne permet pas de manière générique des mesures de champ en régime non-stationnaire. Cette possibilité sera offerte avec l'utilisation des matrices de microcapteurs.



# Chapitre 3

## Analyse fréquentielle des contraintes lors du frottement d'un substrat de rugosité périodique

### Introduction

Les mesures des Chapitres 1 et 2 ont permis une analyse de la répartition spatiale des contraintes sous un contact, dans des situations invariantes dans le temps. En régime statique, il suffit de prendre des mesures point par point. En régime de glissement stationnaire, l'équivalence temps-espace permet de connaître le champ à partir d'une seule mesure temporelle. Nous nous intéressons à des régimes de frottement pour lesquels le champ de contraintes varie dans le temps. Nous analysons, pour un point donné dans la zone de contact, les évolutions des contraintes locales au cours du temps.

Dans ce chapitre, nous abordons le cas du frottement d'un substrat de rugosité périodique sous charge normale constante et à vitesse constante. Pour des échelles spatiales de rugosité de l'ordre de la dizaine de microns (taille très inférieure à celle du contact), un régime quasi-stationnaire est atteint macroscopiquement, c'est-à-dire une force tangentielle totale pratiquement constante. A l'échelle de la zone de sensibilité du MEMS, les contraintes sont en revanche fortement variables car le contact réel est constamment modifié lors du passage de la rugosité. Nous cherchons à établir le lien entre la structure spatiale de la rugosité et l'évolution temporelle des contraintes.

### 3.1 Dispositif expérimental

#### 3.1.1 Réalisation d'une calotte sphérique d'élastomère rugueuse

Le dispositif expérimental utilisé est identique à celui décrit dans le Chapitre 2 mais la géométrie du contact utilisée est cette fois celle d'un contact sphère molle-plan rigide. Le film de PDMS a la forme d'une calotte sphérique, tandis que le substrat est une lame de verre plane sur laquelle on dépose une couche de résine photolithographique lisse ou texturée en rugosité.

### Chapitre 3. Analyse fréquentielle des contraintes lors du frottement d'un substrat de rugosité périodique

---

La calotte sphérique est obtenue par moulage et réticulation du PDMS dans une lentille plano-concave en verre dont la surface concave a été abrasée avec la même technique que celle décrite précédemment. Une fois démoulée, la calotte est rendue solidaire du support métallique du MEMS par réticulation d'un film très fin de PDMS intercalé. Au final, le MEMS se situe sous un film sphérique rugueux en surface, de  $2\text{ mm}$  d'épaisseur maximale, au voisinage de la verticale de ce maximum<sup>1</sup>.

#### 3.1.2 Réalisation des substrats de rugosité périodique par microphotolithographie

Les substrats sont constitués de lames de verre de microscope (Menzel-Gläser, 0179D,  $76\text{ mm} \times 26\text{ mm} \times 1\text{ mm}$ ), dont la surface est texturée par microphotolithographie. La procédure adoptée pour créer une couche de résine texturée d'épaisseur  $1.5\text{ }\mu\text{m}$  (respectivement  $25\text{ }\mu\text{m}$ ), réalisée sous hotte à flux laminaire, est la suivante :

1. Nettoyage de la lame au plasma à oxygène pendant 2 min. La lame propre est laissée sur une plaque chauffante à  $95^\circ\text{C}$  jusqu'à l'étape suivante, pour éviter la formation d'un film d'eau à sa surface.
2. Dépôt de résine SU8-2002 MicroChem (resp. SU8-2035 MicroChem) puis passage à la tournette à  $3000\text{ tr/min}$  pendant 40 sec.
3. 1 min (resp. 6 min) sur la plaque chauffante à  $95^\circ\text{C}$  (opération dite de "soft bake").
4. Réticulation de la résine par exposition à un rayonnement UV pendant 6 min (resp. 12 min) à travers un masque obtenu par impression du motif désiré sur un film transparent (fabriqué par Laser Technologie). La dose totale d'UV reçue par les parties non masquées est de l'ordre de  $120\text{ mJ/cm}^2$  (resp.  $240\text{ mJ/cm}^2$ ). Les zones qui n'ont pas été exposées ne réticulent pas.
5. 2 min (resp. 6 min) sur la plaque chauffante à  $95^\circ\text{C}$  (opération dite de "post exposure bake").

Pour les substrats épais ( $25\text{ }\mu\text{m}$ ) une seule couche a été obtenue. Pour les substrats fins ( $1.5\text{ }\mu\text{m}$ ) une première couche homogène a été préalablement déposée sur la lame, en l'exposant aux U.V. en l'absence de masque. Le développement des substrats se fait ensuite de la façon suivante :

6. Trempage pendant 1 min (resp. 5 min) dans la solution de développement. La résine non réticulée part en solution.
7. Rinçage abondant à l'isopropanol.
8. Séchage sous flux d'air sec.
9. Cuisson pendant 15 min (resp. 30 min) sur la plaque chauffante à  $200^\circ\text{C}$  (opération dite de "hard bake").

---

<sup>1</sup>En pratique, le MEMS se situe à environ  $2\text{ mm}$  de la verticale du sommet de la calotte sphérique, du côté de l'avant du contact. Cela permet, en régime dynamique, de ne pas se trouver au niveau d'un minimum du champ des contraintes.

### 3.1. Dispositif expérimental

Nous avons ainsi réalisé une série de substrats de rugosité périodique : il s'agit de bandes rectangulaires parallèles d'épaisseur  $h$ , de largeur  $d$ , et de période spatiale  $\Lambda$ . Pour la suite, nous présenterons les résultats obtenus pour 4 substrats : 2 profonds ( $h \sim 25 \mu\text{m}$ ) et 2 fins ( $h \sim 1.5 \mu\text{m}$ ). Les valeurs moyennes des trois échelles spatiales qui caractérisent chacun des 4 substrats sont rassemblées dans le Tableau 3.1.

	Substrat 1	Substrat 2	Substrat 3	Substrat 4
$h$ ( $\mu\text{m}$ )	24.3	23.5	1.6	1.5
$\Lambda$ ( $\mu\text{m}$ )	100	150	100	340
$d$ ( $\mu\text{m}$ )	60	72	59	163

TAB. 3.1 – Caractéristiques des 4 substrats de rugosité périodique considérés.

La Figure 3.1 montre la topographie de surface du substrat 2 profond, ainsi qu'une coupe transverse selon une ligne orthogonale au motif périodique.

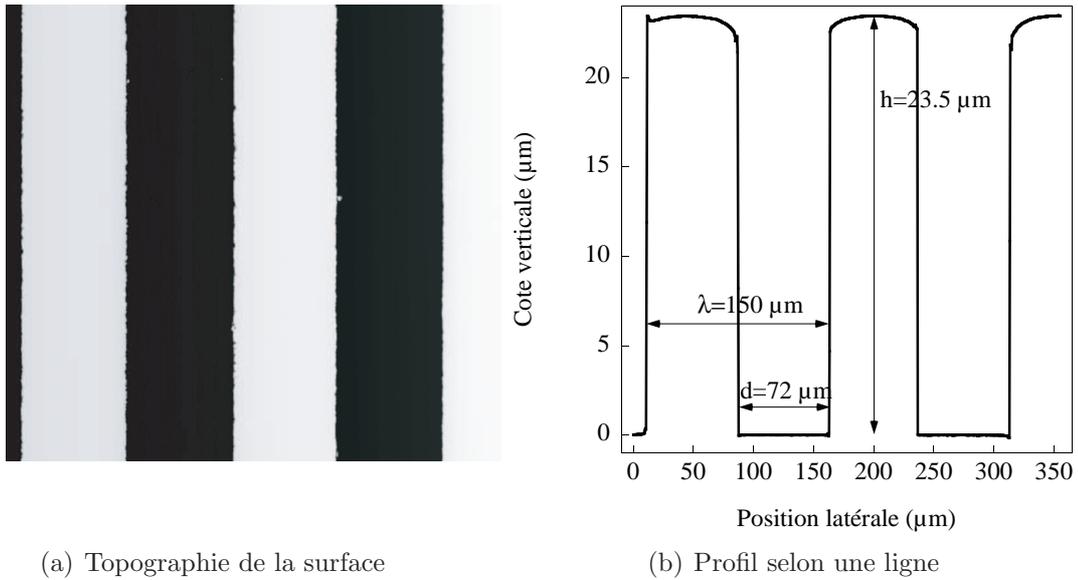


FIG. 3.1 – (a) Topographie de la surface du substrat 2, obtenue par profilométrie interférentielle, d'une zone de taille  $356.1 \times 268.7 \mu\text{m}^2$ . Les zones blanches correspondent aux surépaisseurs de résine, les zones noires au support en verre mis à nu. (b) Profil de hauteur selon une coupe horizontale.

La surface d'altitude nulle correspond à la lame de verre qui a été mise à nu au cours du développement sur toute l'épaisseur de la couche de résine, ce qui explique sa très faible rugosité. L'aspect bombé du sommet des bandes est vraisemblablement lié à l'attaque isotrope du développeur. Le pic apparent sur le bord gauche de la bande de gauche visible sur la coupe transverse est un artefact de mesure, associé à la difficulté de mesurer l'altitude lorsque le gradient de hauteur est important à l'échelle de quelques pixels.

## Chapitre 3. Analyse fréquentielle des contraintes lors du frottement d'un substrat de rugosité périodique

La Figure 3.2 montre la topographie de surface du substrat 3, et une coupe transverse selon une ligne orthogonale au motif périodique. La surface d'altitude nulle est cette fois

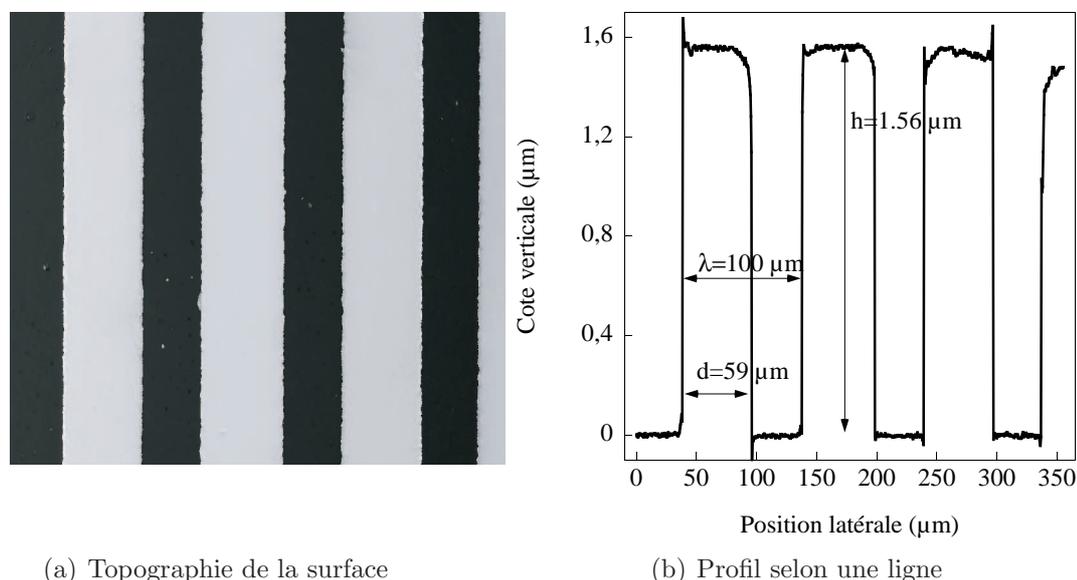


FIG. 3.2 – (a) Topographie de la surface du substrat 3, obtenue par profilométrie interférentielle, d'une zone de taille  $356.1 \times 268.7 \mu\text{m}^2$ . Les zones blanches correspondent aux surépaisseurs de résine, les zones noires au premier film de résine déposé et mis à nu. (b) Profil de hauteur selon une coupe horizontale.

aussi rugueuse que le sommet des bandes, car dans les deux cas il s'agit de résine réticulée ayant trempé dans le développeur. Les pics négatifs ou positifs au voisinage des forts gradients de hauteur sont des artefacts de mesure. Les bandes ont une largeur supérieure à la moitié de la période spatiale  $\Lambda$  pour deux raisons : le masque est lui-même légèrement asymétrique (lignes noires de largeur  $55 \mu\text{m}$  pour une période de  $100 \mu\text{m}$  ; le faisceau UV n'étant pas parfaitement parallèle, le voisinage immédiat des zones transparentes est également éclairé, ce qui élargit la taille des motifs réticulés de quelques microns.

Le film de PDMS et les substrats texturés ont été silanisés selon la procédure décrite au Chapitre 1.1, dans le but de rendre plus homogènes les propriétés adhésives des surfaces en contact.

## 3.2 Expériences réalisées

### 3.2.1 Observation de la zone de contact

La résine SU8-2002 se présente comme un matériau transparent à la lumière visible, ce qui permet l'observation du contact. L'ensemble de la zone de contact ne peut être analysée en raison des fortes réflexions sur la surface du MEMS. En revanche, nous avons pu obtenir des images agrandies du bord du contact.

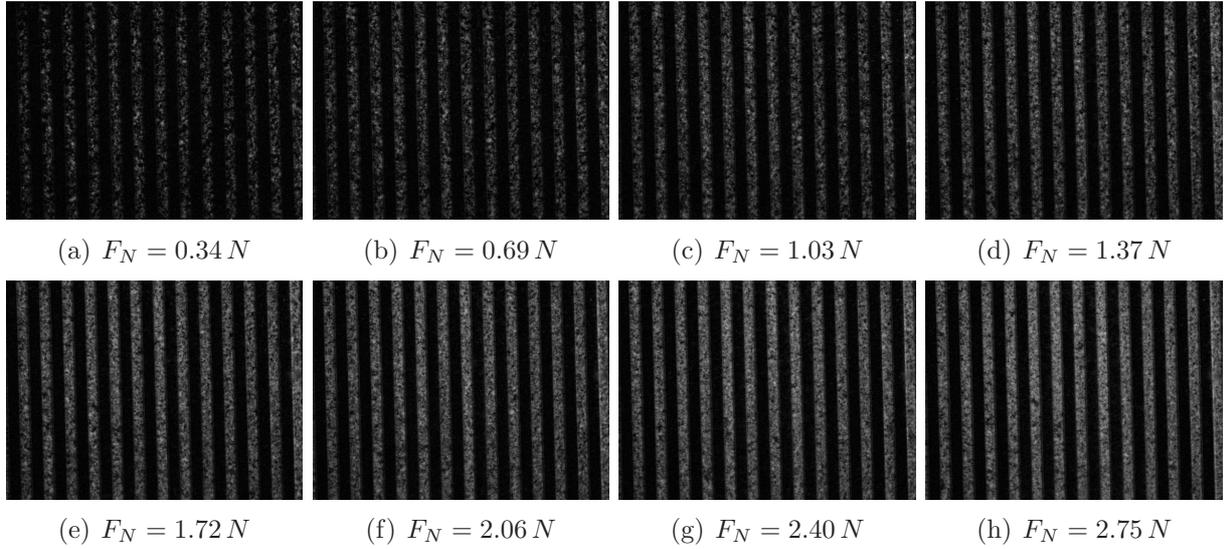


FIG. 3.3 – Différence entre les images en contact et hors contact, pour le substrat 2, sous charge normale, pour toutes les valeurs de  $F_N$  utilisées. Les zones blanches sont les zones de contact réel, les zones noires sont les zones hors contact.

La Figure 3.3 montre les images de la zone de contact entre le film élastique sphérique et le substrat 2 ( $h \sim 25 \mu m$ ,  $\Lambda = 150 \mu m$ ), sous charge normale, avant mise en mouvement relatif du substrat et de l'élastomère, pour 8 valeurs de  $F_N$ . On constate que pour toutes les valeurs de  $F_N$ , l'élastomère ne touche le substrat qu'au sommet des bandes en relief, car les sillons sont trop profonds. C'est également le cas pour le substrat 1, car les bandes sont encore plus rapprochées. Ceci reste vrai lors de la mise en mouvement relatif de l'élastomère et du substrat.

La Figure 3.4 montre les images de la zone de contact entre le film élastique sphérique et le substrat 3 ( $h \sim 1.5 \mu m$ ,  $\Lambda = 100 \mu m$ ), sous charge purement normale pour les mêmes valeurs de  $F_N$ . Dans ce cas, les sillons sont suffisamment peu profonds pour que l'élastomère vienne toucher le fond, même à la plus faible valeur de  $F_N$ . C'est également le cas pour le substrat 4. Ceci reste vrai lors de la mise en mouvement relatif de l'élastomère et du substrat.

### 3.2.2 Mesures mécaniques macroscopiques

Nous avons réalisé une série d'expériences de frottement entre le film élastomère et les 4 substrats, à vitesse  $V = 0.4 \text{ mm} \cdot \text{sec}^{-1}$  constante, et sous charge normale constante pour 8 valeurs de  $F_N$ . Nous avons enregistré au cours du temps la force tangentielle totale  $F_T(t)$  et les contraintes  $S_{zz}(t)$  et  $S_{yz}(t)$  mesurées par le MEMS. Chaque expérience a été renouvelée 5 fois pour des conditions expérimentales identiques.

La Figure 3.5 montre une évolution typique de  $F_T$  au cours d'une telle expérience, en fonction de la distance  $Vt$  parcourue par le moteur.

Après une période de charge initiale, la force totale  $F_T$  atteint une valeur quasi-stationnaire. Dans ce régime, des fluctuations périodiques de faible amplitude de  $F_T$  sont

### Chapitre 3. Analyse fréquentielle des contraintes lors du frottement d'un substrat de rugosité périodique

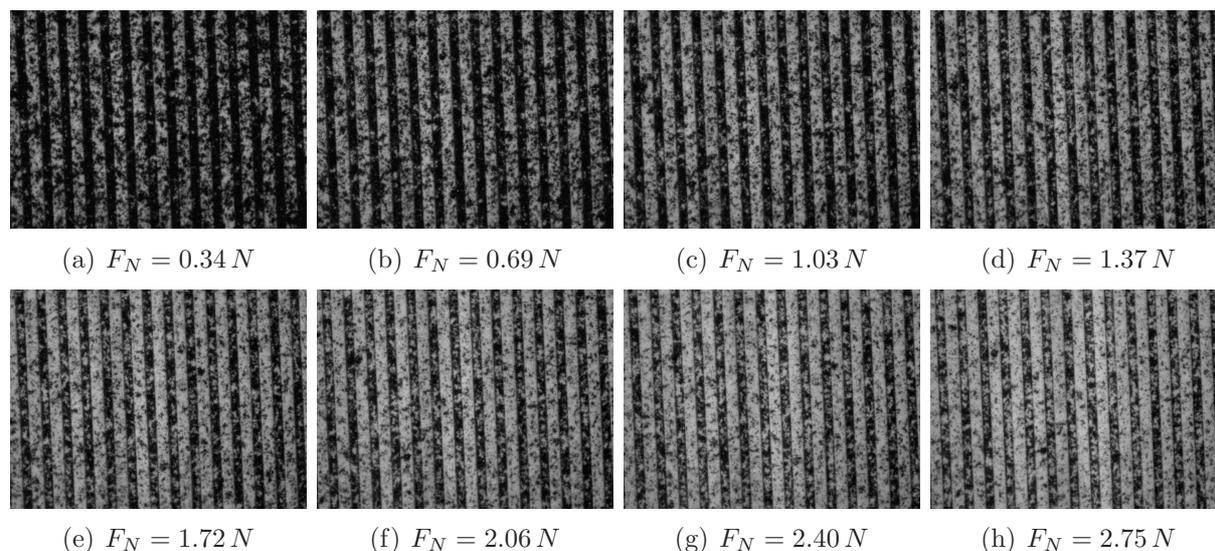


FIG. 3.4 – Différence entre les images en contact et hors contact, pour le substrat 3, sous charge normale, pour toutes les valeurs de  $F_N$  utilisées. Les zones blanches sont les zones de contact réel, les zones noires sont les zones hors contact.

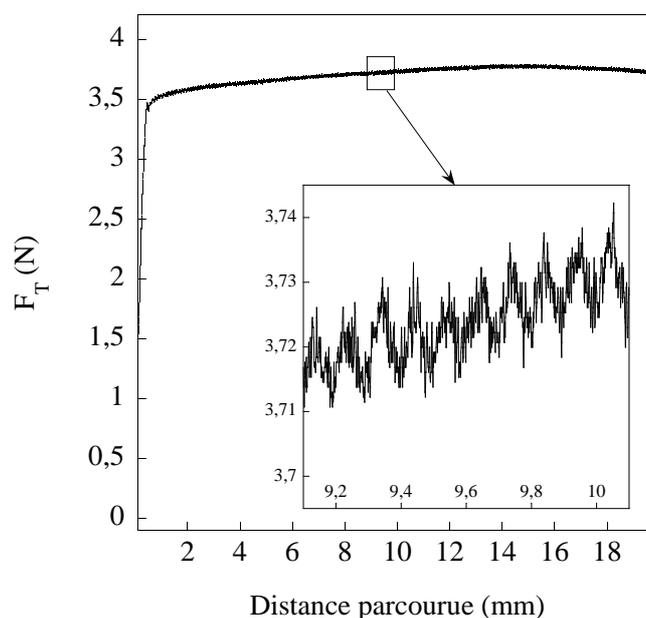


FIG. 3.5 – Evolution de  $F_T$  au cours du mouvement, en fonction de la distance  $Vt$  parcourue par le moteur, pour  $F_N = 1.92 N$  et  $V = 0.4 mm.sec^{-1}$ . L'insert montre que  $F_T$  présente des fluctuations périodiques. Pour la représentation, les traces sont lissées par une moyenne glissante de largeur  $1.6 \mu m$ .

déTECTABLES. L'écart relatif entre deux courbes  $F_T(Vt)$  réalisées dans les mêmes conditions expérimentales est inférieure à 1%.

### 3.3. Analyse spectrale des contraintes globales et locales

La Figure 3.6 représente les coefficients de frottement moyen  $\mu_d = \bar{F}_T/F_N$ , où  $\bar{F}_T$  est la valeur moyenne de  $F_T$  au cours du frottement, mesurés pour toutes les conditions expérimentales. Comme au Chapitre 2, nous constatons pour l'ensemble des substrats, une décroissance de  $\mu_d$  avec la charge normale  $F_N$ . Ce coefficient de frottement est significativement plus élevé pour les substrats dont la rugosité est d'amplitude faible.

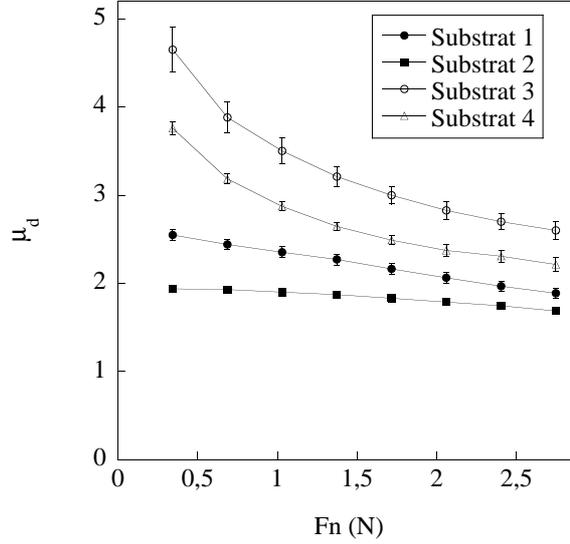


FIG. 3.6 – Coefficient de frottement dynamique  $\mu_d = \bar{F}_T/F_N$ , pour les 4 substrats, pour toutes les valeurs de  $F_N$ .

### 3.3 Analyse spectrale des contraintes globales et locales

L'analyse spectrale des signaux permet de révéler la présence d'une rugosité périodique. Pour chaque réalisation, nous considérons la moyenne des spectres calculés par FFT des signaux enregistrés. La Figure 3.7 montre le spectre moyen de  $F_T(Vt)$  en régime stationnaire sous charge normale  $F_N = 0.69 N$  pour le substrat 1. Ce spectre a été réalisé avec un fenêtrage de type FlatTop, qui assure la meilleure mesure de l'amplitude des composantes spectrales [53]. Il présente un pic marqué au voisinage de la fréquence spatiale correspondant à la longueur d'onde  $\Lambda = 100 \mu m$  de la rugosité du substrat 1. La contribution à basse fréquence traduit la forme de l'enveloppe du signal  $F_T(Vt)$ . Le bruit de fond est associé au bruit numérique de l'acquisition sur l'oscilloscope<sup>2</sup>, et possède une amplitude égale à celle mesurée pour un substrat couvert de résine lisse. Ces observations sont valables pour toutes les expériences réalisées.

<sup>2</sup>La valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de ce bruit varient linéairement avec la valeur du calibre utilisé. Notons que la bande passante globale du MEMS et de l'amplificateur étant de l'ordre de  $100 kHz$ , celle des capteurs de position de l'ordre de  $10 kHz$ , les mesures sont résolues temporellement à la fréquence d'acquisition, qui est de  $500 Hz$ .

### Chapitre 3. Analyse fréquentielle des contraintes lors du frottement d'un substrat de rugosité périodique

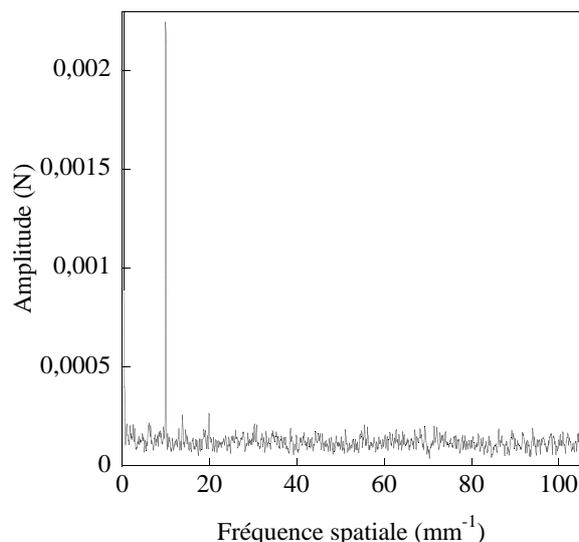


FIG. 3.7 – Module du spectre moyen de  $F_T(Vt)$  au cours de 5 expériences de frottement contre le substrat 1, sous  $F_N = 0.69 N$  et pour  $V = 0.4 mm.sec^{-1}$ . Le fenêtrage a été choisi de type FlatTop.

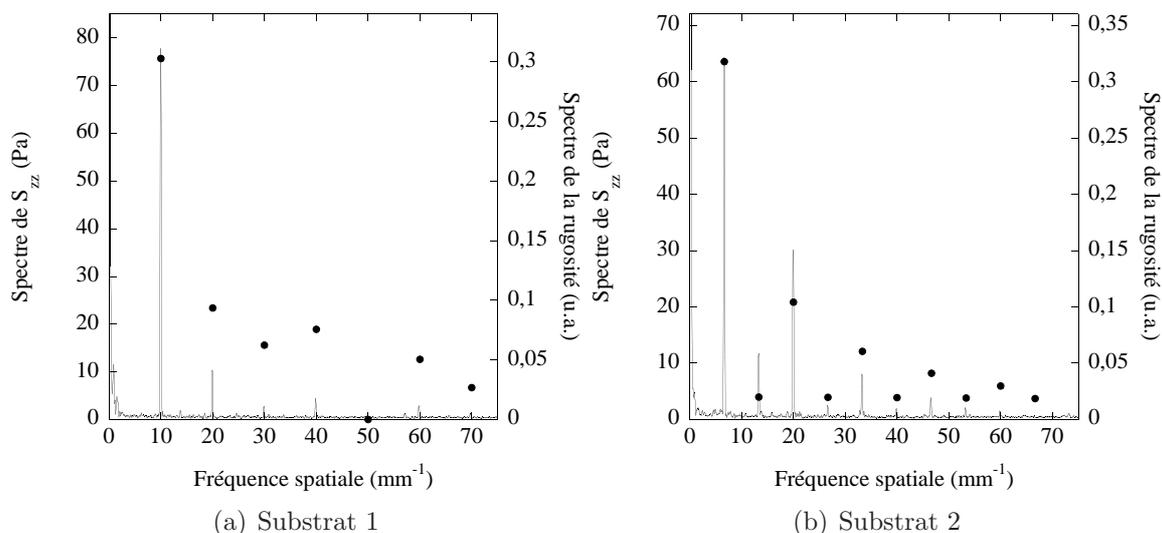


FIG. 3.8 – Superposition du spectre moyen de  $S_{zz}(Vt)$  et du spectre spatial de la rugosité du substrat correspondant, sous charge normale  $F_N = 0.69 N$ , à vitesse  $V = 0.4 mm.sec^{-1}$ . (a) Substrat 1 (b) Substrat 2. Le fenêtrage est de type FlatTop.

Nous nous intéressons à présent aux spectres des signaux mesurés à l'aide du capteur MEMS. Ces derniers exhibent, outre le pic fondamental à la fréquence spatiale de la rugosité, un certain nombre de ses harmoniques. Leurs amplitudes présentent une évolution avec l'indice de l'harmonique qui est qualitativement identique à celle du spectre spatial de la rugosité du substrat (voir la Figure 3.8 sur l'exemple du signal de pression). Ce

### 3.3. Analyse spectrale des contraintes globales et locales

dernier spectre est calculé analytiquement en assimilant la rugosité à un signal créneau de période  $\Lambda$  et de rapport  $d/\Lambda$ .

Ces mesures montrent que l'analyse spectrale des signaux de contrainte locale permet de discriminer de façon fine différents substrats de rugosité périodique distincte. En particulier, une faible différence du rapport  $d/\Lambda$  entre les substrats 1 et 2 se traduit par des amplitudes des harmoniques sensiblement différentes. De façon plus quantitative, nous cherchons à présent à caractériser l'amplitude des différents harmoniques en fonction de leur fréquence et de la charge moyenne appliquée. Il s'agira à terme de proposer une fonction permettant de prédire le spectre temporel mesuré en fonction des caractéristiques de la rugosité spatiale et des conditions macroscopiques du frottement.

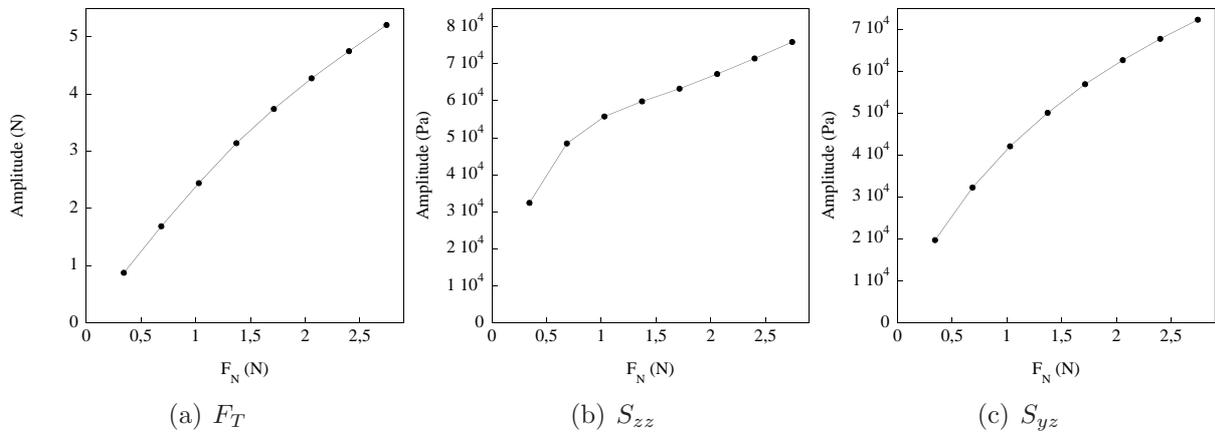


FIG. 3.9 – Amplitude du spectre à fréquence nulle en fonction de  $F_N$ , pour (a)  $F_T$ , (b)  $S_{zz}$  et (c)  $S_{yz}$ , pour le substrat 1, pour des expériences à  $V = 0.4 \text{ mm} \cdot \text{sec}^{-1}$ .

La Figure 3.9 montre, pour le substrat 1, la dépendance de la force tangentielle totale ainsi que de la valeur moyenne des signaux  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  avec la charge  $F_N$ . L'allure de ces évolutions est identique pour les 4 substrats. La croissance non-linéaire de  $F_T$  avec  $F_N$  traduit la dépendance du coefficient de frottement représentée à la Figure 3.6. La dépendance de la valeur moyenne des composantes  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  est non triviale. En effet, toute modification de  $F_N$  modifie à la fois la largeur du contact et la valeur du coefficient de frottement, et conduit à une modification globale des profils de contrainte tangentielle et normale (voir Chapitre 2). Les mesures traduisent ces évolutions en un point particulier du profil, et sont donc fortement dépendantes de la position exacte du capteur par rapport à la zone de contact.

L'amplitude du pic fondamental présente une dépendance avec la charge normale encore plus complexe, comme illustré à la Figure 3.10 pour le substrat 1. Ces évolutions présentent des caractéristiques non monotones et aucune corrélation claire ne peut être mise en évidence entre les composantes. Il en va de même pour tous les harmoniques mesurables et pour tous les substrats. Nous avons choisi de normaliser chaque spectre par son amplitude à fréquence nulle. La Figure 3.11 présente, pour chaque substrat, les spectres ainsi normalisés, moyennés sur l'ensemble des charges normales appliquées. Les barres d'erreur traduisent la dispersion des amplitudes pour les différentes charges normales.

### Chapitre 3. Analyse fréquentielle des contraintes lors du frottement d'un substrat de rugosité périodique

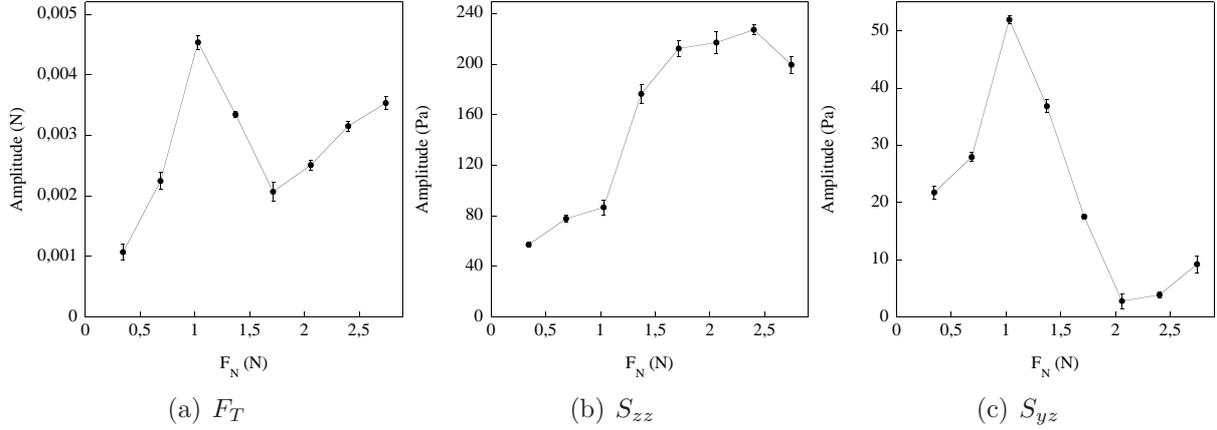


FIG. 3.10 – Amplitude du pic additionnel fondamental en fonction de  $F_N$ , pour (a)  $F_T$ , (b)  $S_{zz}$  et (c)  $S_{yz}$ , pour le substrat 1, pour des expériences à  $V = 0.4 \text{ mm} \cdot \text{sec}^{-1}$ .

### 3.4 Modélisation des modulations de contrainte

Nous proposons dans cette partie un modèle simple permettant de relier le spectre spatial de la rugosité d'un substrat et le spectre temporel des contraintes mesurées sous un film élastique en frottement contre lui.

Considérons un milieu élastique convexe en frottement stationnaire à vitesse donnée  $V$  sous charge normale constante contre un substrat rigide nominalelement plan. Pour un substrat lisse, le champ de pression en surface est noté  $P^L$  (voir Figure 3.12). On considère une mesure de pression au sein du milieu élastique, effectuée à une position donnée par rapport à la zone de contact. Le capteur fournit un signal  $S$  correspondant à la convolution du champ de pression de surface par une fonction de réponse  $FR$ <sup>3</sup>. Pour un substrat rugueux, le champ de pression  $P$  en surface est égal au champ  $P^L$  modulé par une fonction  $T$  dépendant de la rugosité :

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = P^L(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{u} - \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

où l'origine des coordonnées  $\mathbf{x} = (x, y)$  est choisie à la position du capteur et  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  caractérise la position du substrat. Notons qu'en régime de glissement stationnaire  $\mathbf{u} = \mathbf{V}t$ . Le signal mesuré s'écrit :

$$S(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{x}', \mathbf{u}) \cdot FR(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.2)$$

$$S(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} P^L(\mathbf{x}') \cdot T(\mathbf{u} - \mathbf{x}') \cdot FR(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.3)$$

$$S(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\mathbf{x}') \cdot T(\mathbf{u} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.4)$$

avec  $K = P^L \cdot FR$

<sup>3</sup>Expérimentalement  $FR$  correspond à la fonction de réponse spatiale à une indentation ponctuelle à la surface du substrat.

### 3.4. Modélisation des modulations de contrainte

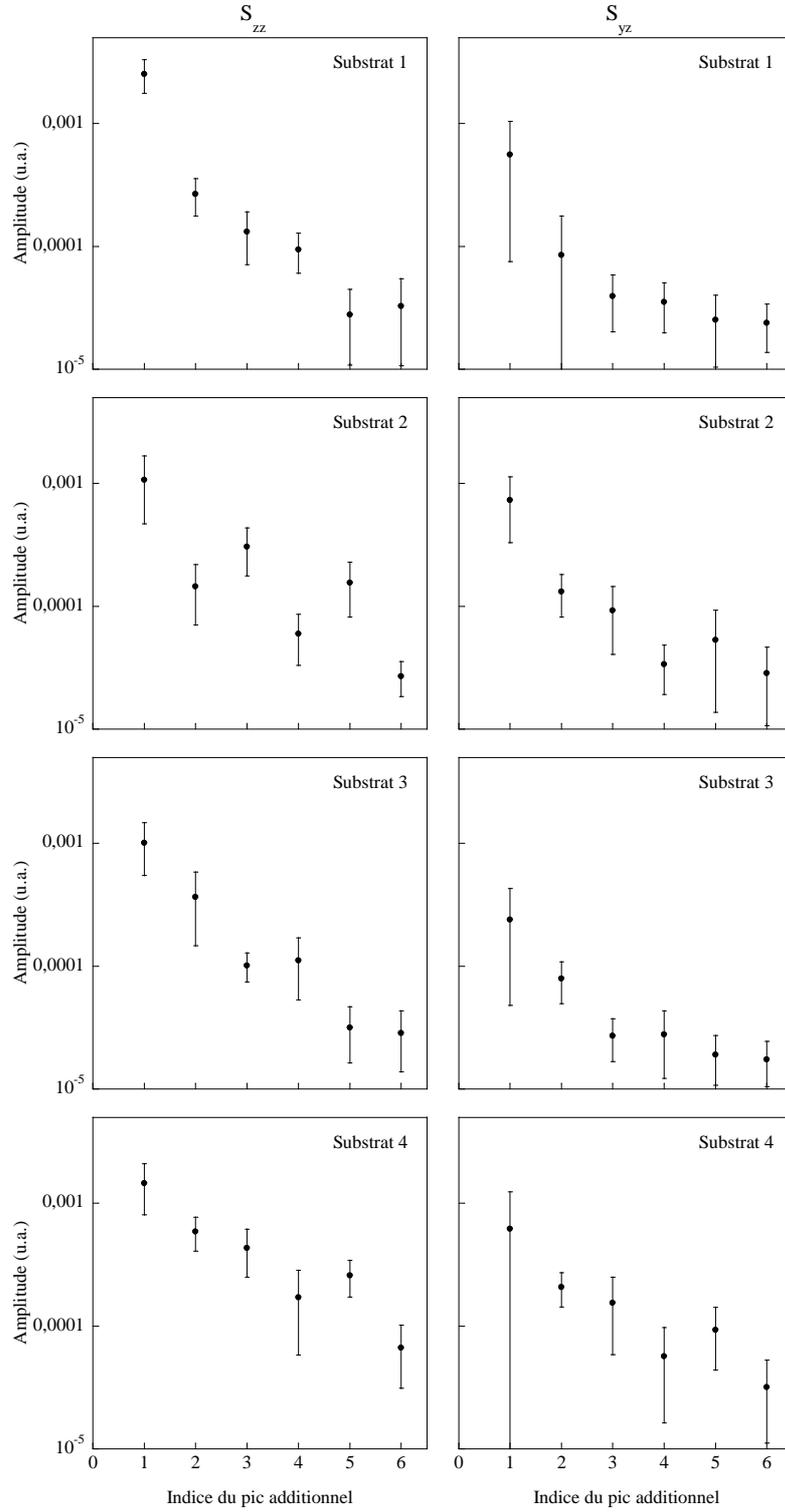


FIG. 3.11 – Amplitudes des harmoniques des spectres de  $S_{zz}$  et  $S_{yz}$  normalisés par l’amplitude à fréquence nulle. La barre d’erreur correspond, pour chaque harmonique, à l’écart quadratique moyen sur les 8 valeurs de  $F_N$ .

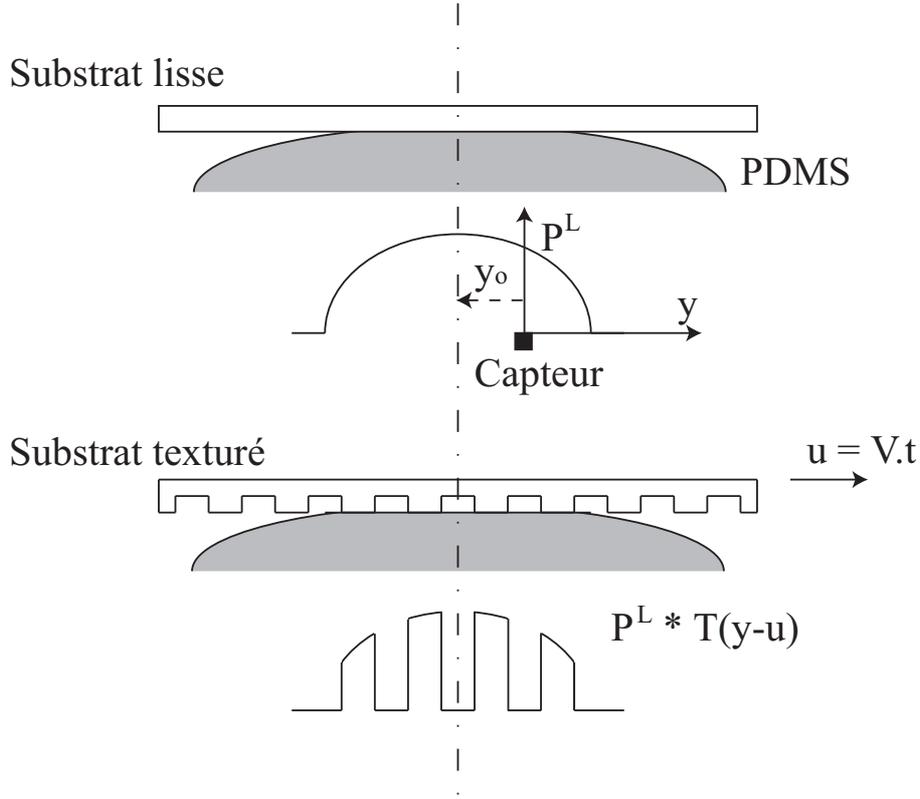


FIG. 3.12 – Schéma de la situation envisagée par le modèle. Le champ de pression de surface est  $P^L$  contre un substrat lisse. Un capteur mesure un signal associé aux contraintes sous le contact. Sa position définit l'origine des abscisses  $y$ . Le centre du contact se situe à l'abscisse  $y_0$ . Pour un substrat rugueux, le champ de pression est modulé par une fonction  $T$ .  $u$  traduit le déplacement du substrat.

Finalement le signal mesuré est :

$$S(\mathbf{u}) = K \otimes T(\mathbf{u}) \quad (3.5)$$

et sa transformée de Fourier est :

$$\tilde{S}(\mathbf{q}) = \tilde{K} \cdot \tilde{T}(\mathbf{q}) \quad (3.6)$$

avec  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ .

Cette formule générale exprime le fait que le spectre  $\tilde{S}$  du signal de pression mesuré sera égal au spectre  $\tilde{T}$  dépendant de la rugosité du substrat, multiplié par une "fonction de visibilité spectrale"  $\tilde{K}$ .  $\tilde{K}$  dépend à la fois de la fonction de réponse du capteur à une indentation ponctuelle, de la position du capteur par rapport à la zone de contact et du champ de pression nominal. Ce dernier dépend de la géométrie du bloc élastique, de la charge normale appliquée et du coefficient de frottement moyen.

### 3.4. Modélisation des modulations de contrainte

Nous avons testé cette relation pour des conditions voisines de celles de nos expériences, pour les substrats 1 et 2. Pour ces derniers, nous avons vu que l'élastomère ne vient jamais en contact entre les aspérités. La pression s'annule donc entre deux marches. Dans ce cas, nous faisons l'hypothèse que  $T$  peut être approximée par une fonction créneau s'annulant à la verticale des parties basses du substrat<sup>4</sup> et de moyenne unité<sup>5</sup>. La transformée de Fourier de  $T$  selon l'axe  $y$  du mouvement s'écrit alors :

$$\tilde{T}(0, q_y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi q_y d) \delta(q_y - \frac{n}{\Lambda}) \quad (3.7)$$

$FR$  est assimilée à une gaussienne normée de largeur typique  $\sigma = 1 \text{ mm}$ , tel que mesuré en indentation ponctuelle au Chapitre 1 (voir Figure 1.18) :

$$FR(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2}} \quad (3.8)$$

$$\tilde{FR}(\mathbf{q}) = e^{-2\pi^2\sigma^2\mathbf{q}^2} \quad (3.9)$$

Nous faisons également l'hypothèse que le champ de pression  $P^L$  est celui de Hertz, centré en  $\mathbf{x}_0 = (0, y_0)$ , défini pour toute charge normale  $F_N$ . On a donc :

$$P^L(\mathbf{x}) = p_0 \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{a^2}} \quad (3.10)$$

où

$$a = \left( \frac{3(1 - \nu^2)F_N R}{4E} \right)^{1/3} \quad (3.11)$$

$$p_0 = \left( \frac{6F_N E^2}{\pi^3 R^2 (1 - \nu^2)^2} \right)^{1/3} \quad (3.12)$$

Sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\tilde{P}^L(\mathbf{q}) = 2p_0 \left[ \frac{\text{sinc}(2\pi |\mathbf{q}| a) - \cos(2\pi |\mathbf{q}| a)}{\mathbf{q}^2} \right] e^{-2\pi i \mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_0} \quad (3.13)$$

La transformée de Fourier de  $K$  peut donc s'écrire comme suit :

$$\tilde{K}(\mathbf{q}) = \tilde{FR} \otimes \tilde{P}^L \quad (3.14)$$

L'évaluation de  $\tilde{K}(0, q_y)$  a été réalisée numériquement, pour différentes valeurs de  $F_N$ <sup>6</sup> et de  $y_0$ . La Figure 3.13 montre les variations d'amplitude du pic fondamental et des 5 premiers harmoniques, pour une force normale donnée correspondant à  $a = 2 \text{ mm}$ , et pour  $y_0$  croissant de 0 à  $3.5 \text{ mm}$  par pas de  $0.5 \text{ mm}$ .

<sup>4</sup>Le cas a priori plus réaliste où les bandes de résine sont considérées comme des poinçons linéaires de largeur  $d$ , aux arêtes desquels la pression diverge [12] a été testé. Les résultats diffèrent significativement par rapport aux mesures, vraisemblablement en raison de la courbure non nulle de la topographie de surface au sommet des aspérités.

<sup>5</sup>pour maintenir la valeur de la charge normale totale.

<sup>6</sup>dont on tire les valeurs de  $a$  et  $p_0$ , connaissant le module de Young  $E$  et le rayon de courbure  $R$  de la surface élastique.

### Chapitre 3. Analyse fréquentielle des contraintes lors du frottement d'un substrat de rugosité périodique

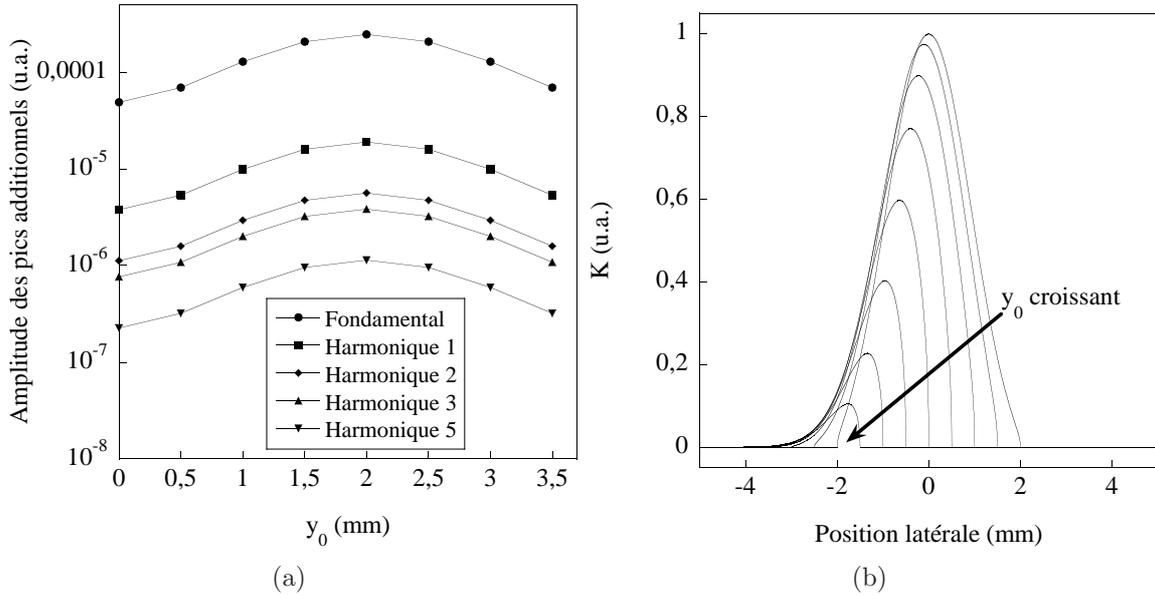


FIG. 3.13 – (a) Amplitude calculée des 6 premiers pics additionnels, pour le substrat 1, en fonction de  $y_0$ . Le rayon de contact est fixé à  $a = 2 \text{ mm}$ ,  $y_0$  augmente de 0 à  $3,5 \text{ mm}$  par pas de  $0,5 \text{ mm}$ . Le quatrième harmonique n'est pas représenté car il est extrêmement faible par rapport aux autres. (b) Allure de la fonction  $K$  pour les différentes valeurs de  $y_0$ .

La Figure 3.13(b) représente l'évolution de  $K$  pour différentes positions relatives  $y_0$  du capteur et du centre du contact. L'amplitude maximale est atteinte lorsque le capteur se trouve à la verticale du bord du contact. L'existence de bords francs pour la fonction  $K$  est à l'origine de sa grande largeur spectrale. Dans le cas d'une pression uniforme en surface, la fonction  $K$  s'identifie à la fonction de réponse gaussienne qui présente une coupure spectrale rapide.

Nous avons confronté les résultats numériques ainsi obtenus aux résultats expérimentaux pour les substrats profonds 1 et 2. La Figure 3.14 superpose, pour chaque substrat (i) le spectre du créneau représentant la topographie de surface (ii) les spectres expérimentaux normalisés et moyennés comme décrit au paragraphe 3.3 (iii) les spectres calculés pour  $y_0 = 1,5 \text{ mm}$ , normalisés de façon analogue aux spectres expérimentaux, moyennés sur 9 rayons de contact dans l'intervalle  $a = 2,00 \pm 0,04 \text{ mm}$ .

Malgré les nombreuses hypothèses effectuées, ce modèle permet d'estimer l'ordre de grandeur des variations relatives des amplitudes des différents harmoniques. Les résultats expérimentaux sont toutefois d'amplitude systématiquement plus élevée que les résultats du modèle.

Dans le cas des substrats 3 et 4, les aspérités sont suffisamment peu profondes pour que l'élastomère touche le fond des sillons entre bandes de résine. La modulation  $T$  du champ de pression correspondante est plus complexe que pour les substrats profonds car elle dépendra fortement de la valeur de  $F_N$ . En effet, la valeur de la pression et l'aire de contact au fond des sillons correspondront en première analyse à un contact de type Hertz

### 3.4. Modélisation des modulations de contrainte

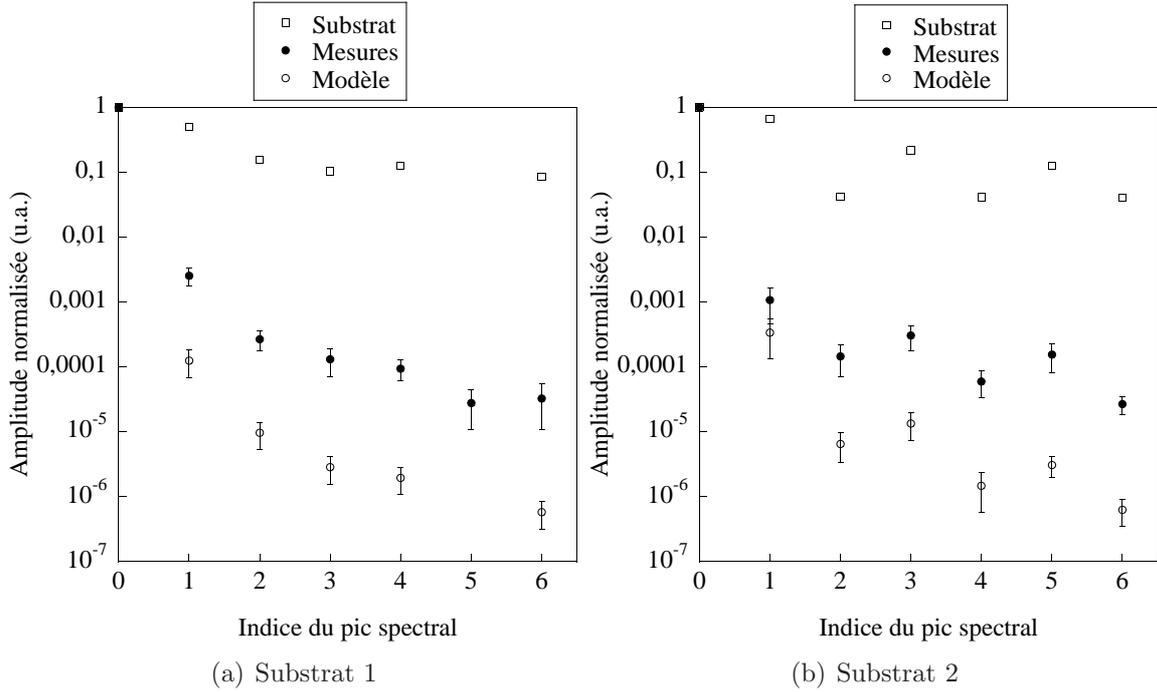


FIG. 3.14 – Spectres normalisés par l’amplitude du spectre à fréquence nulle. (a) Substrat 1 et (b) Substrat 2. Les carrés blancs correspondent à la rugosité du substrat. les points noirs correspondent au spectre expérimental moyenné. Les cercles blancs correspondent aux résultats du modèle pour  $y_0 = 1.5 \text{ mm}$  et pour 9 rayons de contact dans l’intervalle  $a = 2.00 \pm 0.04 \text{ mm}$ .

linéaire à l’échelle du sillon. Nous ne donnerons pas ici de proposition pour  $T$  dans ce cas.

Dans l’hypothèse d’une loi de frottement de Coulomb locale, la contrainte de cisaillement à la surface est partout proportionnelle à la pression. Le même raisonnement conduit à un résultat similaire en substituant au champ de pression  $P^L$  le champ de contrainte  $\mu_d P^L$ , et en considérant la fonction de réponse à un cisaillement de surface ponctuel. Dans ce cadre, le spectre de la force tangentielle totale peut être interprété en prenant une fonction de réponse de largeur infinie et la transformée de Fourier du champ de pression nominal  $\tilde{P}^L$  joue seul le rôle de filtre spectral.

## Conclusion

Nous avons étudié par analyse spectrale les signaux de contrainte locale associés au frottement de substrats de rugosité périodique de longueur d'onde de l'ordre de  $100\ \mu m$ . Chaque spectre mesuré présente la signature caractéristique des propriétés spectrales spatiales du substrat correspondant. La correspondance entre fréquence spatiale  $q$  de la rugosité et fréquence temporelle  $f$  des signaux de contrainte est contrôlée par la vitesse de glissement  $V$  par  $q = f/V$ . Les amplitudes des différents harmoniques dépendent de façon complexe de la charge normale, celle-ci modifiant à la fois la largeur du contact et la valeur du coefficient de frottement. Un modèle a été développé permettant de rendre compte des principaux ingrédients physiques nécessaires pour prédire quantitativement les amplitudes des harmoniques. Il fait apparaître une fonction  $\bar{K}$  agissant comme un filtre spectral, dont les propriétés dépendent à la fois de la fonction de réponse du capteur à une indentation ponctuelle de la surface et du champ de contrainte nominal correspondant au frottement sur un substrat lisse sous mêmes charges normale et tangentielle.

Cette vision simple peut être pertinente dans la compréhension de la perception tactile dynamique. Elle permet notamment de comprendre comment les conditions d'exploration d'un substrat (pression appliquée par le doigt, coefficient de frottement) peuvent modifier la sensibilité tactile à des rugosités fines du substrat. Nous pouvons alors proposer que l'ajustement dynamique de ces conditions au cours d'une exploration tactile permet d'optimiser la détection de la texture particulière en présence. Cette approche permet également de mettre en évidence une sensibilité variable au sein de la zone de contact, avec un maximum de sensibilité à sa frontière.

D'autre part, ce modèle offre une interprétation du rôle des empreintes digitales pour la perception tactile dynamique. Elles sont présentes dans certaines des zones les plus sensibles de l'organe tactile. En modulant le champ de pression nominal sur des longueurs d'onde de l'ordre de  $L = 500\ \mu m$ , elles produisent une amplification autour des fréquences  $f = V/L$  par rapport à une peau lisse. Pour une vitesse typique d'exploration de  $10\ cm.sec^{-1}$ , cette fréquence est de l'ordre de  $200\ Hz$ , proche de la fréquence de sensibilité maximale des terminaisons nerveuses de type Pacini. Dans ce cadre, les empreintes digitales pourraient permettre à la fois de réduire le seuil de détection et d'impliquer l'ensemble des terminaisons sensibles présentes sous le contact.

Pour tester plus avant ces hypothèses, il serait utile de pouvoir mesurer simultanément à la fois le profil des contraintes moyennes et les caractéristiques spectrales en tout point à travers le contact.

# Chapitre 4

## Mesures optiques à une interface rugueuse

### Introduction

Nous développons dans cette partie deux méthodes optiques permettant successivement de mesurer les champs de pression et de déplacement à une interface rugueuse sous charge normale et tangentielle. La mesure de la pression est fondée sur une mesure de l'aire de contact réel qui, dans la limite d'un grand nombre de micro-contacts, est proportionnelle à la charge normale exercée [5]. Les premières mesures directes de l'aire de contact ont été réalisées par Dieterich et Kilgore [54] par microscopie optique en transmission en géométrie plan-plan. Ils ont mis en évidence un accroissement linéaire de l'aire réelle de contact avec la charge normale appliquée pour un contact entre différents matériaux rigides (quartz, calcite, verre et plastique acrylique). Ils ont également mesuré la dynamique de croissance logarithmique de l'aire de contact réel résultant du fluage des aspérités sous contrainte [55].

En régime de frottement, Rubinstein, Cohen et Fineberg [32] ont récemment observé la propagation de fronts de détachement à l'interface entre deux blocs de PMMA rugueux soumis à un déplacement relatif proche du seuil de glissement. Leur méthode a consisté à éclairer à l'aide d'une nappe laser l'interface PMMA-air en réflexion totale et à enregistrer l'intensité transmise au niveau des micro-jonctions formées entre les deux blocs à l'aide d'une caméra rapide. Ils ont ainsi pu visualiser directement la propagation de 3 types de fronts de fracture essentiels pour la description de la rupture de l'interface.

Ces différentes expériences ont porté sur des systèmes relativement rigides. Il en résulte que la densité des micro-contacts reste faible, même à charge importante. Par ailleurs, les faibles déformations induites lors du cisaillement ne permettent pas une mesure du champ de déplacement à l'échelle de ces micro-contacts. Nous montrons dans cette partie comment l'utilisation d'un élastomère, de module environ 1000 fois inférieur à celui du PMMA permet d'obtenir des densités de contact suffisantes pour extraire une mesure statistique, résolue spatialement, de l'aire de contact réel. D'autre part, cette faible valeur du module élastique du PDMS conduit à des déplacements à l'interface, sous charge tangentielle, de l'ordre du micron, qui peuvent être mesurés par une méthode dite de DIC (Digital Image Correlation).

## 4.1 Mesure du champ de pression dans un contact sphère-plan rugueux sous charge normale

### 4.1.1 Mesure optique de l'aire de contact réel

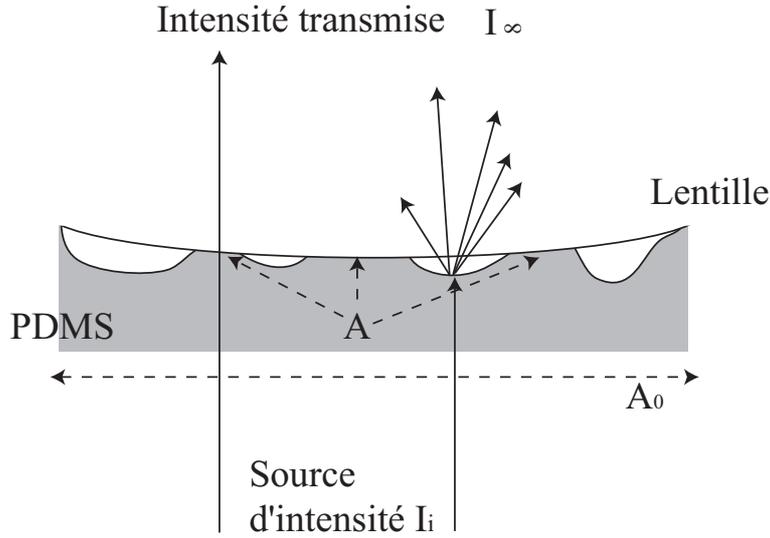


FIG. 4.1 – Schéma de principe de l'imagerie d'une interface multi-contact en vue de mesurer l'aire de contact réel. Au niveau des contact intimes, les rayons sont réfractés à l'interface PDMS-verre. Hors contact, ils sont diffusés par l'interface rugueuse.

La Figure 4.1 montre le schéma de principe de l'expérience réalisée pour la mesure de l'aire de contact réel. Une interface multi-contact, réalisée en pressant un bloc élastique rugueux contre un substrat rigide transparent, est éclairée en transmission par une source d'intensité  $I_i$ . Deux coefficients de transmission en intensité  $\alpha_c$  et  $\alpha_h$  sont associés respectivement aux zones de contact réel et aux zones hors contact. L'intensité transmise  $I_\infty$  correspondant à une aire de contact apparent  $A_0$  et à une aire de contact réel  $A$  s'écrit :

$$I_\infty = \alpha_c A I_i + \alpha_h (A_0 - A) I_i \quad (4.1)$$

On en déduit :

$$\frac{I_\infty - I_0}{I_0} = \frac{\alpha_c - \alpha_h}{\alpha_h} \frac{A}{A_0} \quad (4.2)$$

où  $I_0 = \alpha_h A_0 I_i$  correspond à l'intensité transmise lorsqu'aucun contact n'est réalisé.

Ce principe de mesure optique de l'aire de contact réel est appliqué à un contact étendu entre une lentille de verre sphérique plano-convexe de rayon de courbure  $R = 128.8 \text{ mm}$  et un bloc épais de PDMS rugueux de module de Young  $2.2 \pm 0.1 \text{ MPa}$ , d'épaisseur  $10 \text{ mm}$  et de surface  $5 \times 5 \text{ cm}$ . Ni la lentille ni la surface des blocs de PDMS n'ont été silanisées. Le dispositif expérimental complet est représenté sur la Figure 4.2. Un bloc de PDMS est fixé horizontalement sur un montage mécanique formé de deux cantilevers orthogonaux.

#### 4.1. Mesure du champ de pression dans un contact sphère-plan rugueux sous charge normale

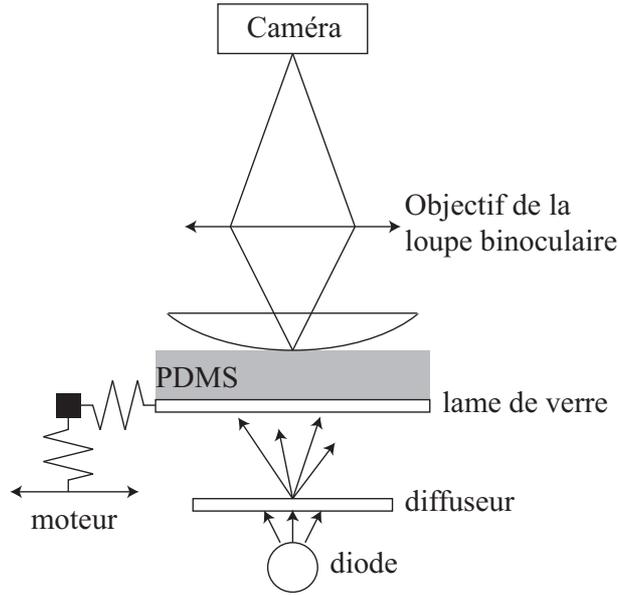


FIG. 4.2 – Schéma de principe du dispositif expérimental complet.

Le premier, de raideur<sup>1</sup>  $k_N = 689 \pm 5 \text{ N.m}^{-1}$ , permet d'imposer la charge normale  $F_N$ , mesurée à l'aide d'un capteur de position<sup>2</sup> calibré à  $405 \pm 3 \mu\text{m.V}^{-1}$ . Le second cantilever, de raideur<sup>1</sup>  $k_T = 9579 \pm 25 \text{ N.m}^{-1}$ , permet de mesurer la force tangentielle  $F_T$  au cours des expériences, à l'aide d'un capteur de position<sup>3</sup> calibré à  $27.29 \pm 0.05 \mu\text{m.V}^{-1}$ . Le support de cet ensemble peut être mis en translation rectiligne horizontale par un moteur à courant continu (Newport, LTA-HL, contrôleur SMC100). Le bloc de PDMS est éclairé par le bas, à travers son volume transparent, par une diode blanche, alimentée par une tension stabilisée réglable, munie d'un diffuseur. L'interface est imagée à l'aide d'une loupe binoculaire (Olympus, SZ11CTV). Les images sont enregistrées par une caméra numérique CCD 12bit (Hamamatsu C8484-05G) dont le capteur est constitué de  $1344 \times 1024$  pixels carrés, de côté correspondant à  $7.3 \mu\text{m}$  au grandissement utilisé.

La rugosité du film élastique a été caractérisée par profilométrie optique interférentielle. La distribution des hauteurs obtenue,  $\Phi(z)$ , est représentée sur la Figure 4.3(a). La déviation standard est de  $1.54 \pm 0.05 \mu\text{m}$ ; la distribution présente une queue exponentielle pour les aspérités les plus élevées et une queue de type gaussienne pour la partie profonde de la couche rugueuse. La densité spectrale de puissance  $C(q)$  de la rugosité<sup>4</sup> [56] est représentée sur la Figure 4.3(b). La rugosité est de type auto-affine ( $C(q) \sim q^{-2(H+1)}$ ) avec un exposant de Hurst  $H$  valant 0.55 et une longueur de coupure à basse fréquence d'environ  $40 \mu\text{m}$ , qui correspond au diamètre des billes de SiC utilisées pour abraser le moule [2].

<sup>1</sup> mesuré comme décrit au Chapitre 1.1.3

<sup>2</sup> Fogale, MCC20

<sup>3</sup> Fogale, MCC10

<sup>4</sup>  $C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x})h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ , où  $h(\mathbf{x})$  est l'altitude de la surface à la position  $\mathbf{x}$ . La surface nominale correspond à  $h = 0$ .  $\langle \dots \rangle$  représente une moyenne d'ensemble sur différentes surfaces de propriétés statistiques identiques

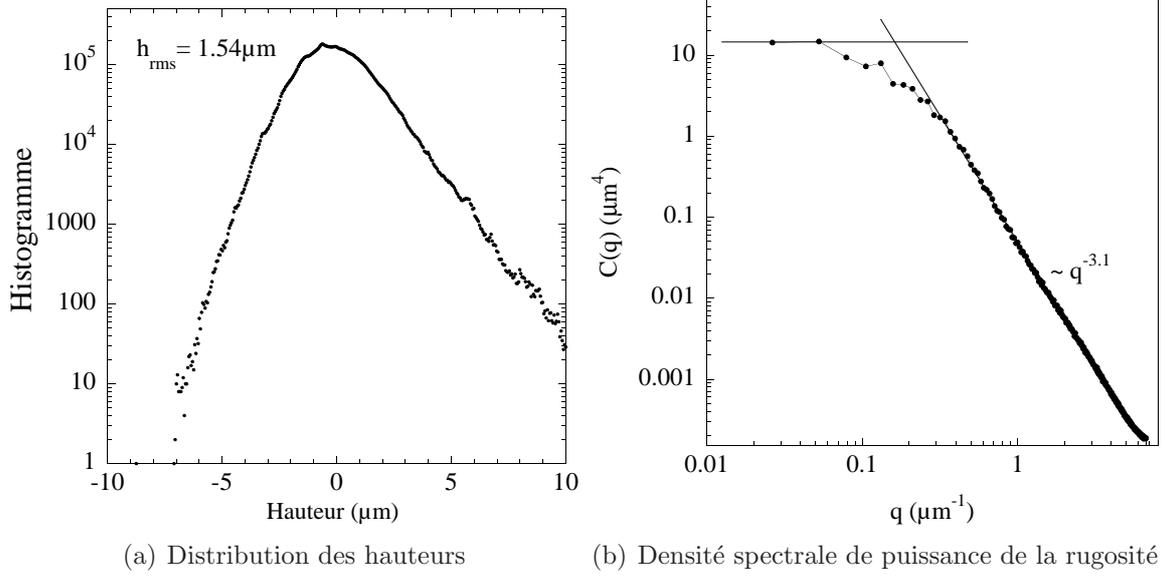


FIG. 4.3 – (a) Distribution des hauteurs à la surface du bloc de PDMS, mesurée par profilométrie optique, sur 27 zones, chacune de taille  $356.1\mu\text{m} \times 268.7\mu\text{m}$ . (b) Densité spectrale de puissance de la rugosité. La rugosité est de type auto-affine, avec une longueur de coupure à basse fréquence d'environ  $40\mu\text{m}$ .

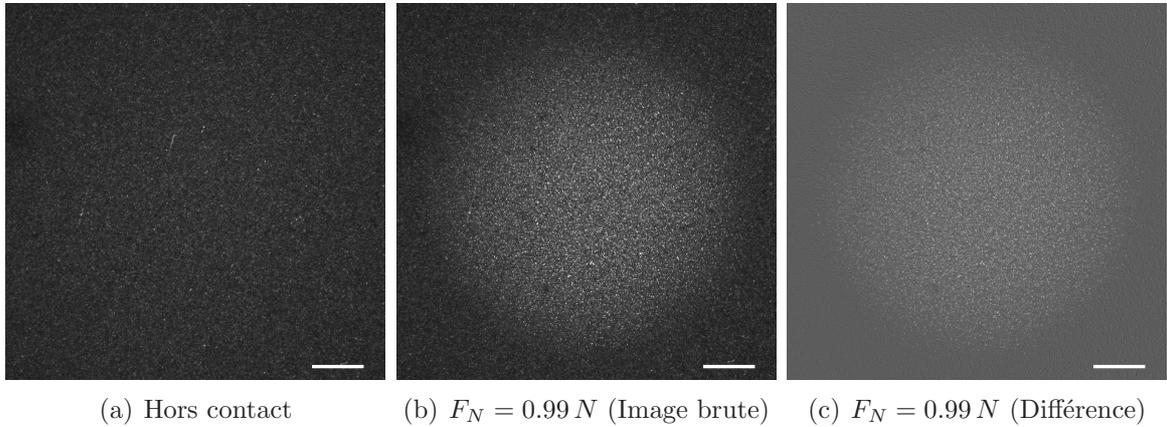


FIG. 4.4 – Exemple d'images réalisées à l'aide du dispositif expérimental décrit. (a) Hors contact (b) En contact sphère-plan sous charge normale  $F_N = 0.99 N$  (c) Différence entre ces deux images. Le trait blanc correspond à une longueur de  $1\text{mm}$ .

La Figure 4.4 présente deux images ainsi réalisées, hors contact, puis pour un contact sous charge purement normale  $F_N = 0.99 N$ . La troisième image correspond à la différence entre ces deux images, et met en évidence les zones de contact réel. L'image 1 servant à définir  $I_0$  présente des fluctuations spatiales de petite longueur d'onde dont la taille caractéristique est fixée par l'échelle de rugosité de la surface du bloc élastique. A ces inhomogénéités s'ajoutent celles de la source, ce qui se traduit par une enveloppe présentant

#### 4.1. Mesure du champ de pression dans un contact sphère-plan rugueux sous charge normale

un maximum à la verticale de la diode. Pour prendre en compte ces hétérogénéités, nous choisissons une zone carrée de côté  $150 \mu m$  sur laquelle l'intensité de l'image de référence est moyennée. Ce lissage permet de réduire fortement les fluctuations d'intensité liées à la rugosité ; à l'échelle de cette zone de lissage, l'intensité incidente est considérée comme constante.

Nous définissons en chaque pixel  $I_0(x, y)$  comme l'intensité de l'image hors contact ainsi lissée. Pour chaque image en situation de contact, l'intensité normalisée  $I_T(x, y)$  est définie en chaque pixel par :  $I_T(x, y) = \frac{I(x, y) - I_0(x, y)}{I_0(x, y)}$ .

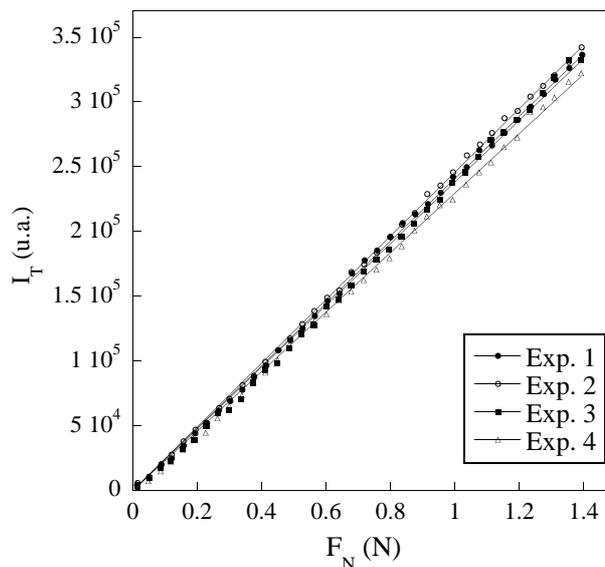


FIG. 4.5 – Evolution de la somme sur tous les pixels de l'intensité normalisée  $I_T$  en fonction de la charge normale  $F_N$  appliquée, pour 4 positions différentes de la zone de contact à la surface du bloc élastique.

La Figure 4.5 montre l'évolution de la somme sur tous les pixels de l'intensité normalisée  $I_T$  en fonction de la charge normale  $F_N$  appliquée, pour 4 positions différentes de la zone de contact à la surface du bloc élastique. La relation entre  $I_T$  et  $F_N$  apparaît linéaire sur l'ensemble de la gamme de forces appliquées. Ce résultat est compatible à la fois avec l'équation 4.2, qui stipule que l'intensité normalisée est proportionnelle à l'aire de contact réel, et avec le résultat classique pour des interfaces multi-contact qui énonce la proportionnalité entre l'aire de contact réel et la charge normale appliquée. Le modèle de Greenwood-Williamson [5], développé au paragraphe suivant, propose une interprétation de cette propriété fondée sur une description statistique de la couche rugueuse élastique.

##### 4.1.2 Modèle de Greenwood-Williamson (GW)

On considère une surface rugueuse caractérisée par un module de Young réduit  $E^* = E/(1 - \nu^2)$  et dont la hauteur des aspérités est distribuée selon une loi  $\phi(z)$  autour d'un plan de référence définissant  $z = 0$ . Les aspérités sont des calottes sphériques de rayon

## Chapitre 4. Mesures optiques à une interface rugueuse

de courbure  $\beta$  et de densité surfacique  $\eta$ . Une surface rigide lisse est mise en regard de la surface rugueuse à une distance  $u$  du plan de référence (voir Figure 4.6).

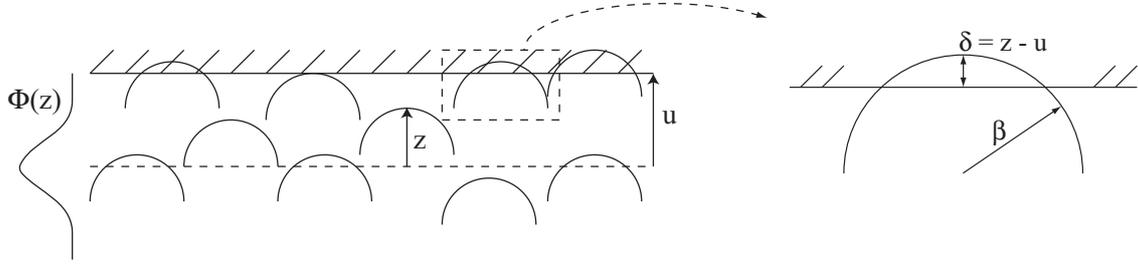


FIG. 4.6 – Modèle de rugosité de Greenwood-Williamson. Les aspérités sont toutes de même rayon de courbure  $\beta$ . Leurs sommets sont distribués selon la loi  $\Phi(z)$  où  $z = 0$  correspond à la surface nominale. On approche un plan rigide à la distance  $u$ . Les aspérités de hauteur  $z > u$  voient leur sommet se déplacer de  $\delta = z - u$ .

Considérons une surface élémentaire  $dS$ . Le nombre de contacts créés s'écrit :  $dN = \eta dS \int_u^\infty \phi(z) dz$ . Le résultat de l'analyse de Hertz pour le contact entre une sphère élastique et un plan indéformable est appliqué pour chaque aspérité dont le sommet est d'altitude  $z > u$  en prenant comme déplacement du sommet  $\delta = z - u$ . L'augmentation de l'aire de contact réel est alors  $\pi\beta\delta$  et la charge normale s'écrit  $4/3E^*\beta^{1/2}\delta^{3/2}$ . Il en résulte que l'aire réelle  $dA$  et la charge  $dF$  pour la surface élémentaire  $dS$  s'écrivent :

$$dA = \pi\eta dS \int_u^\infty (z - u)\phi(z) dz \quad (4.3)$$

$$dF = 4/3\eta E^* \beta^{1/2} dS \int_u^\infty (z - u)^{3/2} \phi(z) dz \quad (4.4)$$

$\Phi^*$  est définie comme la distribution standard des hauteurs d'aspérités, c'est-à-dire la distribution  $\Phi$  normalisée de telle sorte que sa déviation standard soit égale à 1.  $M_n$  est par ailleurs défini pour tout  $n$  comme :  $M_n(h) = \int_h^\infty (s - h)^n \phi^*(s) ds$ . Les expressions de  $dA$  et  $dF$  peuvent alors être réécrites sous la forme :

$$dA = \pi\eta\beta\sigma dS M_1(u/\sigma) \quad (4.5)$$

$$dF = 4/3\eta E^* \beta^{1/2} \sigma^{3/2} dS M_{3/2}(u/\sigma) \quad (4.6)$$

où  $\sigma$  est la déviation standard de la distribution  $\Phi$ .

La proportionnalité observée entre aire de contact réel et charge normale résulte d'une propriété des distributions de hauteur typiquement réalisées (gaussienne, exponentielle), pour lesquelles le rapport  $M_1/M_{3/2}(x)$  varie très faiblement avec  $x$ . Cette relation de proportionnalité est exacte dans le cas particulier d'une distribution de hauteurs exponentielle, qui correspond à notre situation expérimentale pour les aspérités les plus hautes de la couche rugueuse (voir Figure 4.3(a)). Ce modèle permet donc d'expliquer la linéarité obtenue entre la charge normale et l'aire de contact réel mesurée (voir Figure 4.5).

## 4.1. Mesure du champ de pression dans un contact sphère-plan rugueux sous charge normale

### 4.1.3 Profils de pression

Notre dispositif expérimental permet, à partir de la relation établie entre  $I_T$  et  $F_N$ , de mesurer la pression locale en tout point de l'image. Cette mesure implique néanmoins de considérer des éléments de surface d'aire  $dS$  pour lesquels le nombre d'aspérités est suffisamment grand pour rendre pertinente l'approche statistique de GW.

En situation de contact sphère-plan sous charge purement normale, le champ de pression possède une symétrie de révolution. Pour chaque image normalisée  $I_T$ , le centre de symétrie du contact est extrait par analyse d'image<sup>5</sup>. Ce centre de symétrie définit l'origine des coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  utilisées par la suite.

On réalise la moyenne de l'intensité sur des couronnes concentriques de rayon moyen croissant et de surface constante égale à 3000 pixels<sup>6</sup>. La Figure 4.7 montre les profils radiaux ainsi extraits pour 2 valeurs de  $F_N$ .

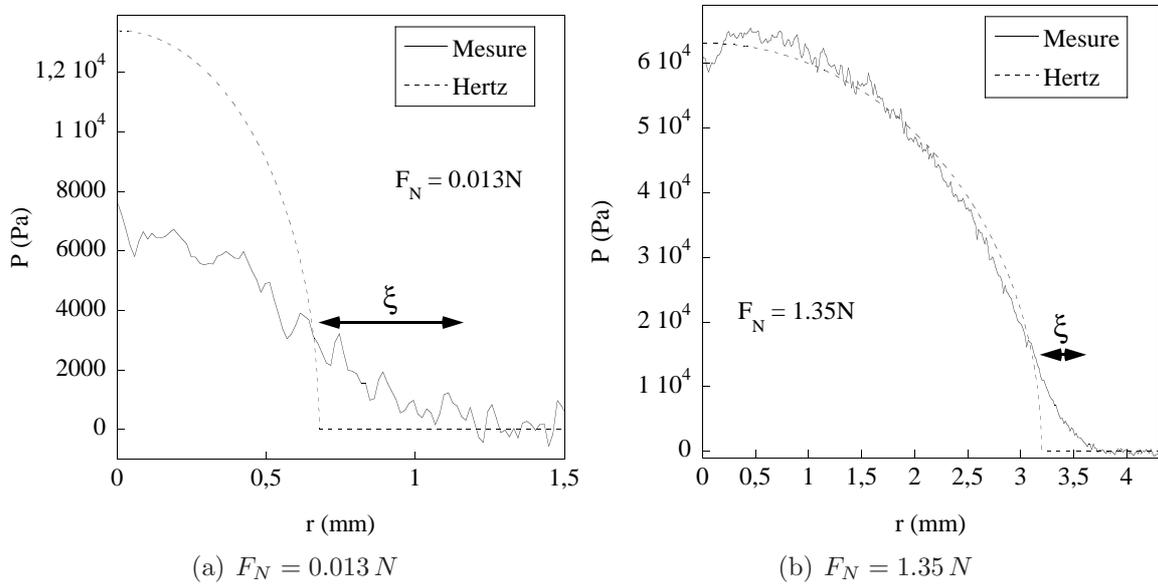


FIG. 4.7 – Profils radiaux de pression mesurés pour un contact sphère lisse-plan rugueux, pour 2 valeurs de  $F_N$ . Les courbes en pointillés correspondent au profil attendu pour un contact de Hertz dans la même géométrie, sous même charge normale, pour un module élastique corrigé pour tenir compte de l'épaisseur finie du bloc élastique.

Les profils en pointillés correspondent aux profils de Hertz dans le cas d'une interface lisse pour la même charge normale, et pour :

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - r^2/a^2} \quad (4.7)$$

<sup>5</sup>La position horizontale de ce centre de symétrie est déterminée en recherchant le maximum de la fonction de corrélation de  $I_T$  avec son image par un miroir vertical translatée verticalement. Une procédure similaire est utilisée pour déterminer la position verticale du centre de symétrie.

<sup>6</sup>Ce nombre fixe l'incertitude de mesure en pression. Ce choix résulte d'un compromis entre la valeur de cette incertitude et la résolution spatiale du profil.

où

$$p_0 = \left( \frac{6F_N E_c^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (4.8)$$

$$a = \left( \frac{9F_N^2}{16R E_c^{*2}} \right)^{1/3} \quad (4.9)$$

et où

$$E_c = E(1 + 1.133\chi + 1.283\chi^2 + 0.769\chi^3 + 0.0975\chi^4) \quad (4.10)$$

avec  $\chi = \frac{\sqrt{R\delta}}{h}$ ,  $h$  l'épaisseur du bloc élastique et  $\delta$  l'indentation.  $E_c$  est le module de Young corrigé pour tenir compte de l'épaisseur finie du bloc élastique (voir Annexe C).

Nous constatons qu'à faible charge, l'écart entre les mesures et la prédiction de Hertz est importante. A l'inverse, pour des charges importantes, l'essentiel du profil est proche de celui de Hertz, à l'exception d'un pied en périphérie du contact. Cette zone de raccord vers la pression nulle présente la même allure pour toutes les charges. Son extension  $\xi$  peut être estimée, à partir de considérations géométriques simples, à  $\xi \sim \sqrt{R\sigma}$  (où  $\sigma$  est l'épaisseur caractéristique de la couche rugueuse et  $R$  est le rayon de la lentille sphérique), qui est ici de l'ordre de  $500 \mu m$  (voir Figure 4.7). L'écart aux profils de Hertz tend à devenir faible quand cette longueur devient petite devant le rayon  $a$  du contact de Hertz équivalent. En notant que  $a/\xi \sim \sqrt{d/\sigma}$ , il apparaît que cette limite correspond également à un enfoncement du sommet de la sphère de l'ordre de l'épaisseur  $\sigma$  de la couche rugueuse.

Notons que le bruit observé sur les profils traduit le caractère statistique de l'aire de la surface de contact réel pour une pression donnée. Il n'est donc pas lié à une incertitude de la mesure optique. La relation établie par GW entre pression et aire de contact réel n'est valide que dans la limite d'une surface d'observation grande devant l'inverse de la densité surfacique des aspérités. Afin d'obtenir des profils de pression les plus réguliers possibles, nous avons réalisé plusieurs mises en contact sous même charge normale en différentes positions du bloc rugueux (voir Figure 4.8). Les profils présentés par la suite sont les résultats moyens pour 4 réalisations. Les barres d'erreur en pression correspondent à la dispersion des résultats issus de ces 4 expériences. Les barres d'erreur radiales traduisent la largeur des couronnes sur lesquelles les mesures sont effectuées.

L'écart aux profils de Hertz équivalents peut être estimé en comparant (voir Figure 4.9)  $p_0$  et  $a$  calculés par les équations 4.8 et 4.9 à la pression maximale  $p_{max}$  au centre des profils (déterminée par un ajustement quadratique de la partie centrale du profil) et au rayon de contact effectif défini comme :

$$a^* = 3\pi/4 \frac{\int_0^\infty rP(r)dr}{\int_0^\infty P(r)dr} \quad (4.11)$$

On constate qu'à faible charge,  $p_{max}$  est inférieur à  $p_0$  et  $a^*$  est légèrement supérieur à  $a$ . A forte charge, les valeurs expérimentales tendent vers leur équivalent en contact de Hertz.

#### 4.1. Mesure du champ de pression dans un contact sphère-plan rugueux sous charge normale

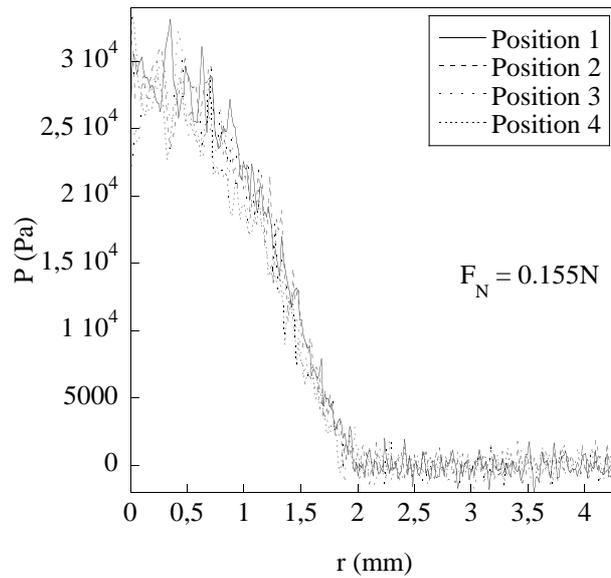


FIG. 4.8 – Profils radiaux de pression mesurée, pour  $F_N = 0.155N$ , pour les 4 positions différentes du contact sur la surface du bloc 1.

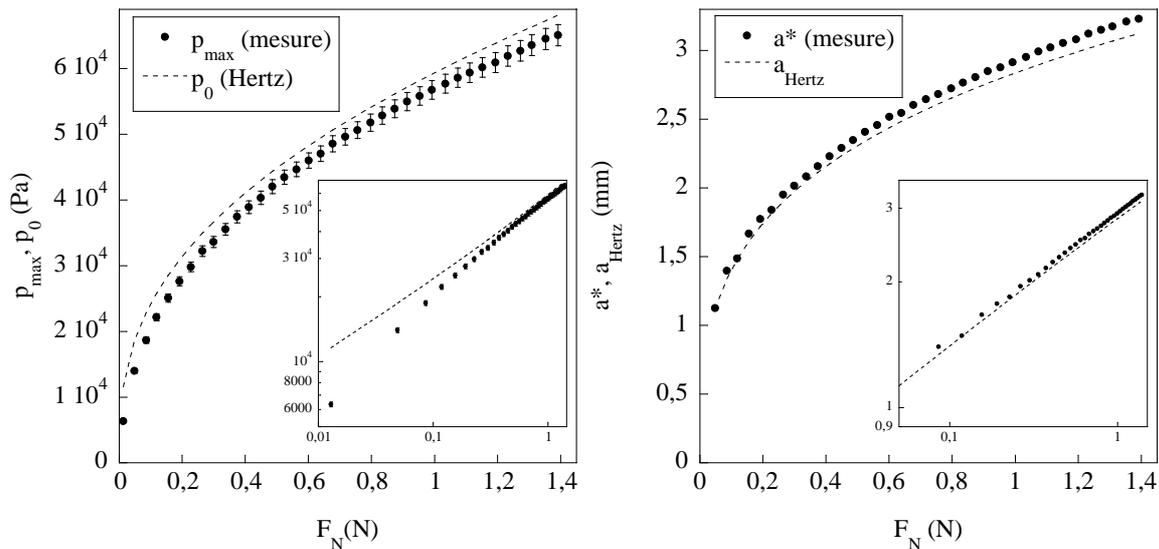


FIG. 4.9 – Comparaison des mesures expérimentales et des résultats de Hertz (corrigés de l'épaisseur finie) correspondant à la même charge normale exercée. (a) La valeur maximale  $p_{max}$  de la pression mesurée est inférieure à la pression  $p_0$  au centre du contact de Hertz. (b) Le rayon de contact  $a^*$  estimé à partir du champ de pression mesuré est supérieur au rayon de contact de Hertz  $a_{Hertz}$ .

#### 4.1.4 Modèle de Greenwood-Tripp

En 1967, Greenwood et Tripp [16] ont adapté le modèle de rugosité de Greenwood et Williamson [5] au cas du contact élastique d'une sphère lisse sur un plan rugueux, pour

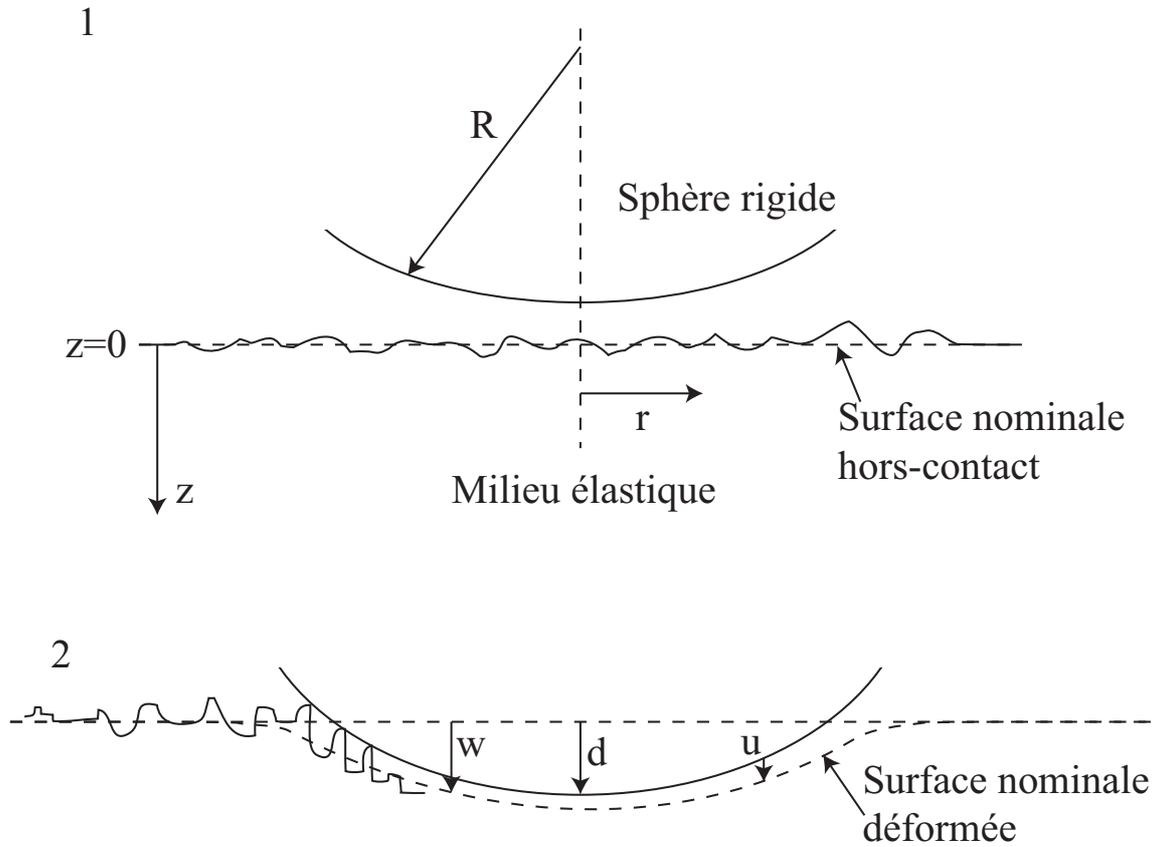


FIG. 4.10 – Schéma représentatif du système considéré rappelant la définition de quelques grandeurs. 1 : Hors contact. 2 : Sous indentation  $d$

des objets semi-infinis (voir Figure 4.10). On considère une sphère rigide de rayon  $R$ . On note  $u(r)$  la distance entre la surface de la sphère et la surface nominale du bloc élastique, à la distance radiale  $r$ . On note  $w(r)$  le déplacement de la surface nominale du bloc par rapport à la situation hors contact, défini par la relation  $u(r) = w(r) - d + \frac{r^2}{2R}$  où  $d$  représente l'altitude du sommet de la sphère par rapport à la surface nominale du bloc hors contact.

Pour un champ de pression  $p$  donnée, la déformation de la surface nominale résulte des équations de l'élasticité et s'écrit :

$$w(r) = \frac{6r}{4E} \int_0^\infty p(\xi r) L(\xi) d\xi \quad (4.12)$$

où

$$L(\xi) = \frac{2}{\pi} \xi K(\xi), \xi < 1 \quad (4.13)$$

$$L(\xi) = \frac{2}{\pi} K(1/\xi), \xi > 1 \quad (4.14)$$

et  $K(\xi)$  est l'intégrale elliptique de première espèce.

#### 4.1. Mesure du champ de pression dans un contact sphère-plan rugueux sous charge normale

A l'inverse, le modèle de Greenwood-Williamson permet de relier, via l'équation 4.6, le champ de pression à la déformation de la couche rugueuse :

$$p(r) = \lambda M_{3/2} \left( \left( w(r) - d + \frac{r^2}{2R} \right) / \sigma \right) \quad (4.15)$$

où  $\lambda = \frac{16}{9} \eta E^* \beta^{1/2} \sigma^{3/2}$ . La résolution de ce système d'équations fonctionnelles se fait itérativement. Les résultats peuvent être exprimés sous forme adimensionnée :

$$w^* = w / \sigma \quad (4.16)$$

$$u^* = u / \sigma \quad (4.17)$$

$$d^* = d / \sigma \quad (4.18)$$

$$\rho = r / \sqrt{2R\sigma} \quad (4.19)$$

$$p^* = p / \left( \frac{4E}{3} \sqrt{\sigma/8R} \right) \quad (4.20)$$

Les équations à résoudre deviennent alors :

$$p^*(\rho) = \mu M_{3/2}(w^* - d^* + \rho^2) \quad (4.21)$$

$$w^*(\rho) = \int_0^\infty \rho p^*(\rho\xi) L(\xi) d\xi, \rho > 0 \quad (4.22)$$

$$(4.23)$$

où  $\mu = \frac{8}{3} \eta \sigma \sqrt{2R\beta}$ .

#### 4.1.5 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Nous avons utilisé le logiciel Mathematica pour effectuer ce calcul, en utilisant la distribution expérimentale  $\Phi$  représentée à la Figure 4.3(a), pour différentes valeurs de  $\mu$ . Le calcul ne permet pas d'imposer a priori la valeur de la charge normale. Nous avons donc calculé en premier lieu les champs de pression associés à des valeurs de  $d$  entre -1 et 50. Pour chacun de ces résultats, la valeur de  $F_N$  est calculée par intégration du profil de pression numérique. Le profil correspondant à une charge normale donnée peut alors être obtenu de façon approchée par interpolation de la relation entre  $d$  et  $F_N$ .

La valeur de  $\mu$  peut être estimée directement en considérant que la distance caractéristique entre aspérités est donnée par la valeur de coupure  $l_0 = 40 \mu m$  de la densité spectrale de puissance de la rugosité (voir Figure 4.3(b)). La densité surfacique d'aspérités et leur rayon de courbure s'écrivent alors  $\eta \sim 1/l_0^2$  et  $\beta \sim l_0^2/\sigma$ , ce qui conduit à une valeur de  $\mu$  de l'ordre de  $\frac{8}{3} \eta \sigma \sqrt{2R\beta} \sim 40$ . Dans la gamme des charges exercées, les valeurs de  $\mu$  entre 5 et 100 produisent des profils numériques quasi-indiscernables. Nos résultats ne permettent donc pas de sélectionner la valeur du paramètre assurant le meilleur ajustement<sup>7</sup>.

La Figure 4.11 montre la comparaison, pour 8 valeurs de la charge normale correspondant à l'ensemble de la gamme explorée, des profils expérimentaux et numériques, pour

<sup>7</sup>Une valeur de  $\mu$  inférieure à 5 conduit à des enfoncements de la couche rugueuse tels que l'ensemble des aspérités est sollicité. Cet effet semble incompatible avec les observations du contact. A l'inverse, pour les valeurs de  $\mu$  supérieures à 100, la fraction d'aspérités sollicitées devient infime.

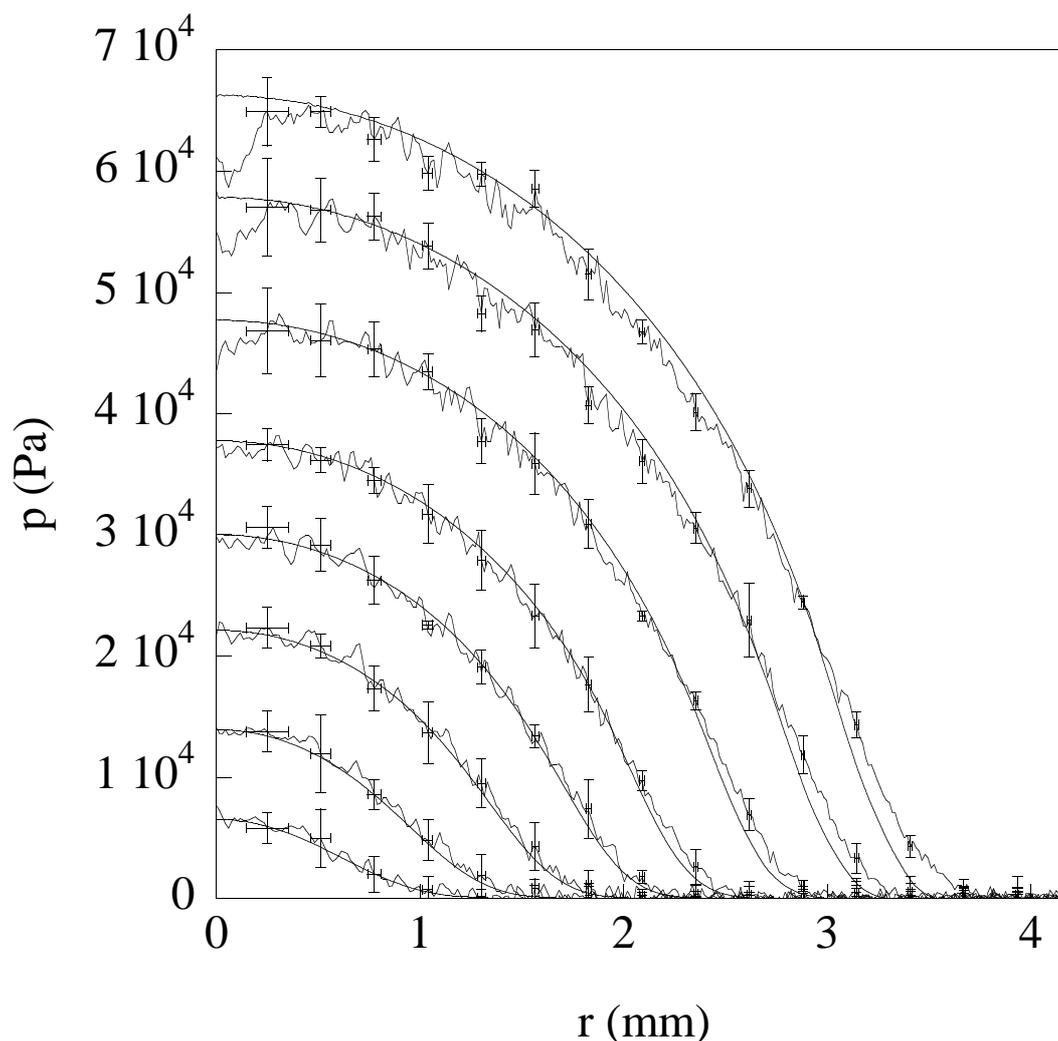


FIG. 4.11 – Profils de pression mesurés, comparés aux profils calculés à partir du modèle de Greenwood-Tripp, en utilisant la distribution de hauteur mesurée par profilométrie optique interférentielle, pour  $\mu = 40$ .

$\mu = 40$ . Compte tenu de la discussion précédente, ces ajustements peuvent être considérés comme étant effectués sans aucun paramètre ajustable. L'accord est satisfaisant sur l'ensemble de la gamme des charges exercées. Notons toutefois que le raccord vers la pression nulle paraît systématiquement plus raide sur les profils numériques<sup>8</sup>, ce qui indique que la valeur de  $\sigma$  est vraisemblablement sous-évaluée.

La distribution expérimentale a été implémentée car elle permettait un test direct du modèle de Greenwood-Tripp. Il est clair cependant que les hypothèses très simples du modèle, en particulier l'uniformité des rayons de courbure des aspérités, rendent difficiles les comparaisons directes sur un système réel. Par ailleurs, les mesures en profilométrie ne permettent pas de déterminer la distribution des seuls sommets des aspérités.

<sup>8</sup>Notons que cette tendance ne peut être corrigée par un ajustement de  $\mu$ .

#### 4.1. Mesure du champ de pression dans un contact sphère-plan rugueux sous charge normale

Pour illustrer la dépendance des profils avec la distribution  $\Phi$ , nous avons effectué ce même calcul numérique pour les distributions exponentielle et gaussienne, de déviation standard identique à celle mesurée, pour  $\mu = 40$  (voir Figure 4.12). Il apparaît que la distribution exponentielle rend compte de façon très correcte de nos mesures, alors que la distribution gaussienne produit un ajustement de mauvaise qualité. Ces observations montrent que les profils de pression sont très sensibles à la forme exacte de la distribution, offrant donc la possibilité de tester de façon fine le lien entre les caractéristiques statistiques d'une couche rugueuse et sa réponse mécanique au sein d'un contact.

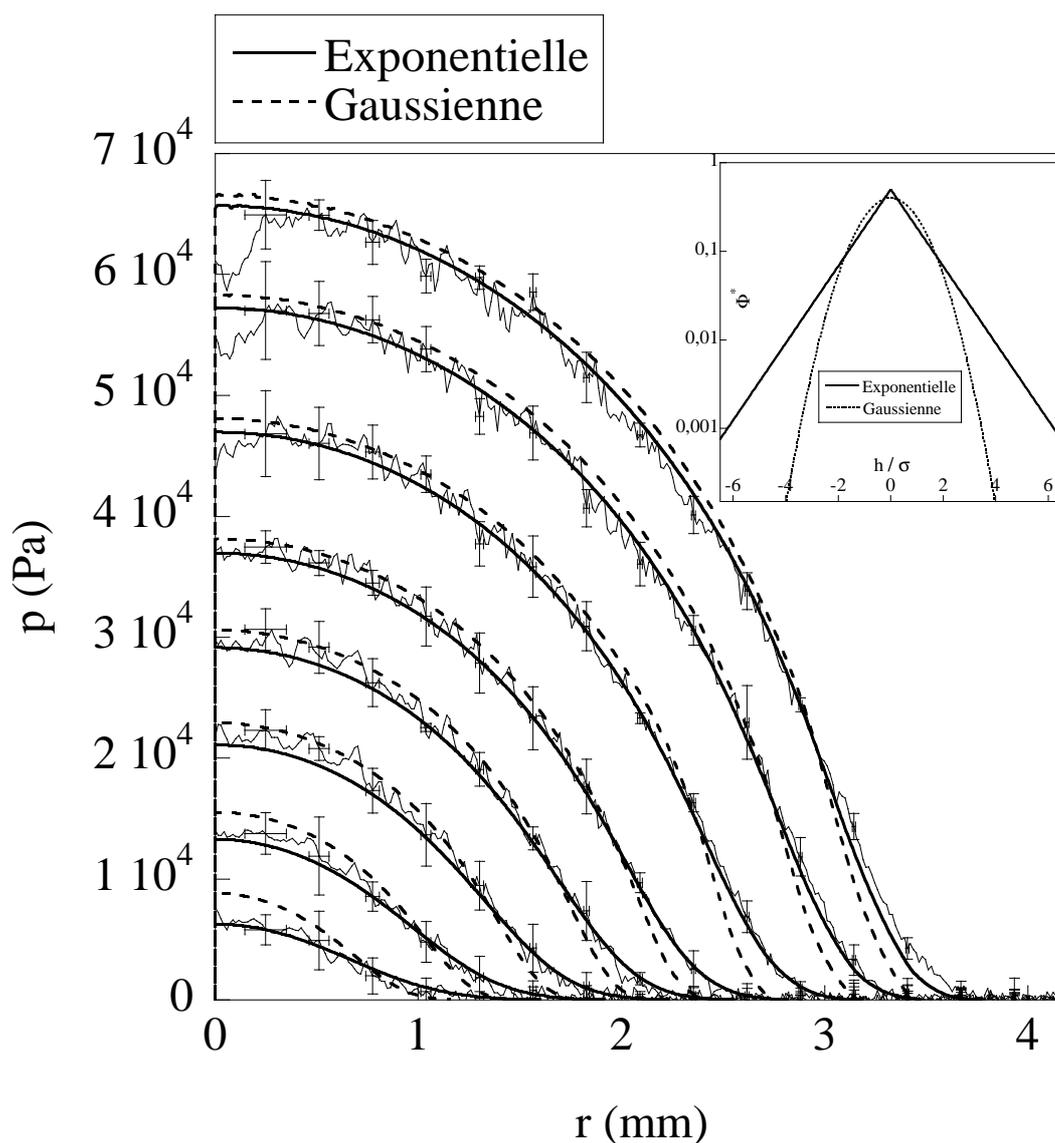


FIG. 4.12 – Profils de pression mesurés, comparés aux profils calculés à partir du modèle de Greenwood-Tripp, en utilisant soit une distribution exponentielle (trait) soit une distribution gaussienne (trait pointillé), pour  $\mu = 40$ . L'insert représente les distributions exponentielle et gaussienne utilisées.

## 4.2 Mesure du champ de déplacement à l'interface

La rugosité de l'interface induit sur les images brutes des fluctuations d'intensité. Lorsque l'on met en mouvement le bloc de PDMS par rapport à la lentille sphérique, ces fluctuations peuvent être utilisées comme traceurs du déplacement afin de déterminer le champ de déplacement de la surface rugueuse. Dans cette partie, cette approche est mise en oeuvre pour évaluer le champ de déplacement lors de la transition charge-glissement en contact sphère-plan. La méthode et les principaux résultats expérimentaux sont exposés dans la partie 4.2.2, puis comparés pour les mêmes conditions aux résultats du modèle de Cattaneo-Mindlin qui prédit l'évolution des champs mécaniques pour un contact sphère-plan sous charge normale et tangentielle (partie 4.2.3).

### 4.2.1 Expérience réalisée

Le montage expérimental est identique à celui décrit dans la première partie de ce chapitre. L'épaisseur du bloc de PDMS est cette fois de  $15\text{ mm}$ . Nous avons réalisé une expérience de mise en charge tangentielle en imposant, sous charge normale constante  $F_N = 0.33\text{ N}$ , un déplacement du bloc d'entraînement à vitesse constante  $V = 4\text{ }\mu\text{m}\cdot\text{sec}^{-1}$ . La force tangentielle  $F_T$ , enregistrée à une fréquence de  $1000\text{ Hz}$  au cours du mouvement, est représentée sur la Figure 4.13. Cette évolution est qualitativement identique à celle

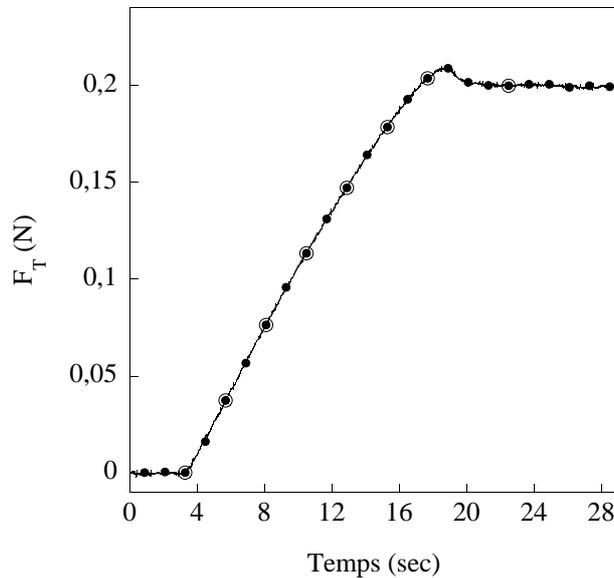


FIG. 4.13 – Evolution de la force tangentielle exercée sur le contact au cours de l'expérience de mise en mouvement, en fonction du temps écoulé. Les points noirs sont les points auxquels nous tracerons les résultats expérimentaux. Sont cerclés les points où nous représenterons le champ de déplacement complet.

mesurée au Chapitre 2.1 lors de l'étude de la transition charge-glissement à l'aide du microcapteur de force. On observe néanmoins un maximum de  $F_T$  supérieur à sa valeur

## 4.2. Mesure du champ de déplacement à l'interface

---

stationnaire, et une valeur des coefficients de frottement statique et dynamique significativement plus faibles.

Au cours du mouvement, les images sont enregistrées en moyenne toutes les  $150\text{ ms}$ <sup>9</sup>, durant les  $30\text{ sec}$  nécessaires pour atteindre un régime de glissement stationnaire.

### 4.2.2 Méthode de mesure

La méthode permettant de mesurer le champ de déplacement à la surface du bloc est inspirée de la méthode DIC (Digital Image Correlation) [57]. Le principe est de considérer une zone d'intérêt  $ZI_{ref}(\mathbf{x})$ , centrée en  $\mathbf{x} = (x, y)$ , d'une image de référence. On cherche alors dans l'image finale la sous-image  $ZI_f(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ , décalée de  $\mathbf{s} = (s_x, s_y)$ , qui présente avec  $ZI_{ref}$  la meilleure corrélation :

$$C(\mathbf{s}) = \frac{\sum ZI_{ref}(\mathbf{x}) \cdot ZI_f(\mathbf{x} - \mathbf{s})}{\sum ZI_{ref}(\mathbf{x}) \cdot \sum ZI_f(\mathbf{x})} \quad (4.24)$$

où la somme est effectuée sur tous les pixels des zones d'intérêt. Le déplacement est alors calculé comme la valeur de  $\mathbf{s}_0$  correspondant à ce maximum, déterminée à partir d'un ajustement gaussien de la fonction  $C(\mathbf{s})$ . Dans nos expériences, le calcul de la fonction de corrélation est réalisé sur la seule direction  $x$  du mouvement, ce qui permet d'alléger les calculs. Un champ de déplacement bidimensionnel a été évalué sur un exemple et ont montré que les déplacements transverses étaient au moins un ordre de grandeur inférieurs aux déplacements suivant la direction d'entraînement. Cette simplification ne pose pas de problème tant que le déplacement transverse reste faible devant la taille du pixel.

Le choix de la taille de la zone d'intérêt résulte d'un compromis entre la résolution spatiale du champ mesuré et la précision sur la valeur mesurée du déplacement. Cette zone est un carré de  $n = 20$  pixels de côté, soit  $146\ \mu\text{m}$ . Cette longueur est supérieure à la taille caractéristique des fluctuations d'intensité au sein des images (quelques pixels).

L'évaluation de l'incertitude de mesure peut se faire en évaluant le champ de déplacement mesuré pour deux situations identiques, prises à différents instants, de façon à prendre en compte d'éventuelles fluctuations de la source lumineuse ou du capteur CCD. La distribution des déplacements obtenus est représentée sur la Figure 4.14. Cet histogramme présente un écart quadratique moyen de  $250\text{ nm}$  qui définit donc l'incertitude sur le déplacement en chaque point de mesure. Notons cependant que cette valeur tend à s'accroître pour des déplacements importants, du fait des hétérogénéités spatiales de l'intensité de la source ou de l'augmentation de l'amplitude de la composante transverse du déplacement, qui tend à abaisser le maximum de la fonction de corrélation.

La Figure 4.15 montre, au cours de l'expérience, l'évolution du champ de déplacement mesuré par DIC, pour 8 instants successifs au cours de la charge tangentielle. Ces différents champs sont obtenus par comparaison avec la première image ( $F_T = 0$ ). La déformation des lignes verticales permet de visualiser les déplacements. Ceux-ci restant très faibles par rapport à la taille du contact, inférieurs à  $30\ \mu\text{m}$ , ils ont été multipliés par 30 pour la représentation. Notons que durant la charge, le champ de pression mesuré par la méthode

---

<sup>9</sup>La caméra utilisée n'ayant pas pu être déclenchée par un trigger externe, l'intervalle temporel entre deux images successives peut fluctuer d'environ 25% autour de sa valeur moyenne.

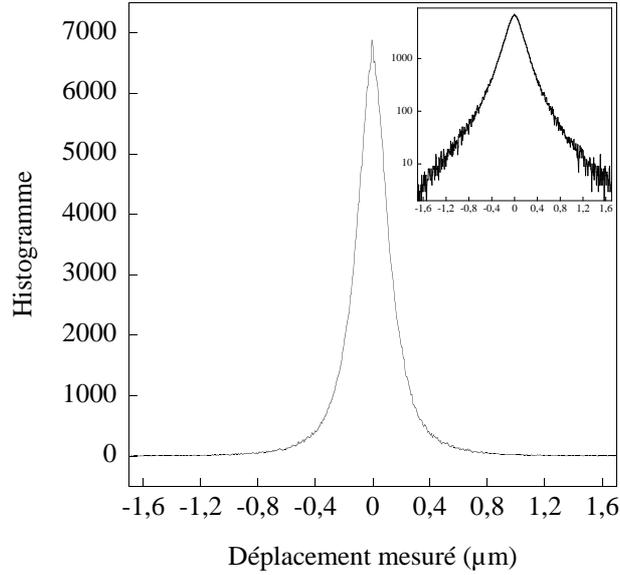


FIG. 4.14 – Histogramme des déplacements mesurés par DIC entre une image et elle-même, pour une situation hors-contact. L’insert montre la même distribution en coordonnées semi-log.

décrite au Chapitre 4.1, et donc la zone de contact apparent, reste pratiquement invariante. Cette dernière est indiquée par un cercle pointillé sur la première image de la série.

Ces tracés montrent l’existence d’une zone centrale non glissante circulaire, dont le rayon décroît continûment au cours de la phase de charge tangentielle. Au delà de la force maximale, le champ de déformation reste inchangé et l’ensemble des lignes subit une translation homogène à la vitesse d’entraînement du moteur. Nous reviendrons plus précisément sur ces phénomènes lors de la comparaison de ces résultats avec le modèle de Cattaneo-Mindlin, développé dans la partie suivante.

La Figure 4.16 représente le champ de déplacement pour une situation en charge, et le régime stationnaire, sous forme de courbes iso-déplacement. Ces cartes mettent en évidence le caractère anisotrope du champ de déplacement, qui présente néanmoins une symétrie centrale par rapport au centre du contact. Le déplacement est minimal sur l’axe central dans la direction du mouvement, et maximum sur l’axe transverse.

### 4.2.3 Modèle de Cattaneo-Mindlin

Le modèle de Cattaneo-Mindlin (CM) [14, 15] décrit les champs mécaniques pour un contact de Hertz lisse lors de la transition charge-glisement. Une sphère de rayon  $R$  est mise en contact sous charge normale  $F_N$  contre la surface plane d’un demi-espace élastique de module de Young réduit  $E^* = E/(1 - \nu^2)$ . La sphère rigide est maintenue fixe et une force tangentielle  $F_T$  est alors appliquée au bloc élastique. La distribution de pression au sein du contact est supposée indépendante de la force appliquée, et est donnée par l’expression de Hertz :

$$p(r) = p_0 \sqrt{1 - r^2/a^2} \quad (4.25)$$

## 4.2. Mesure du champ de déplacement à l'interface

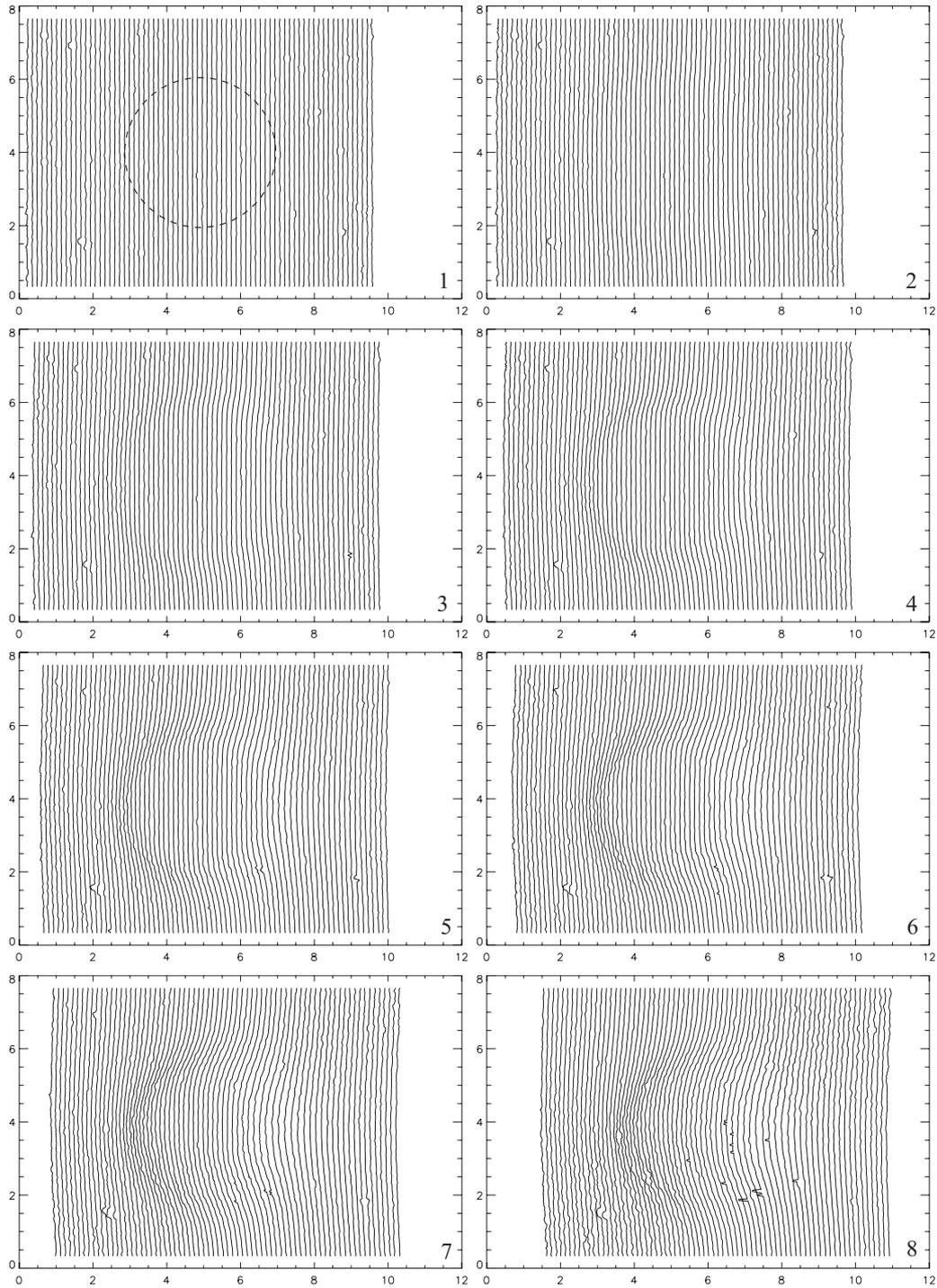


FIG. 4.15 – Champ de déplacement mesuré, pour les 8 points cerclés représentés sur la Figure 4.13 au cours de l'évolution. On suit une série de lignes verticales de pixels au cours de l'évolution. Pour la représentation, l'amplitude des déplacements est multipliée par un facteur 30. Les coordonnées spatiales sont en  $mm$ . Le cercle représente la zone de contact apparent.

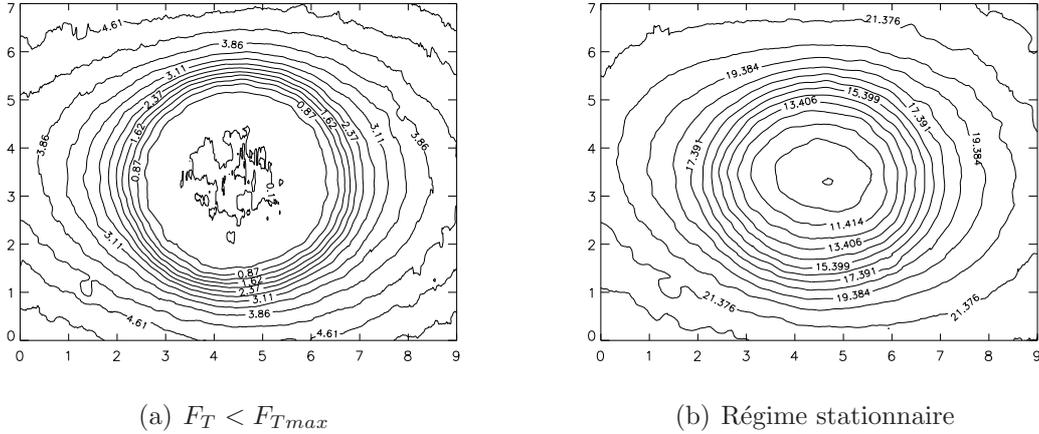


FIG. 4.16 – Champ de déplacement mesuré pour (a) une situation en charge et (b) en régime de glissement stationnaire, représenté par des lignes iso-déplacement. Les déplacements sont en microns. Les coordonnées spatiales sont en  $mm$ .

où

$$p_0 = \left( \frac{6F_N E^{*2}}{\pi^3 R^2} \right)^{1/3} \quad (4.26)$$

$$a = \left( \frac{3RF_N}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (4.27)$$

On note  $\delta_\infty$  le déplacement uniforme des points du bloc élastique distants du contact et  $u_x$  le champ de déplacement en surface suivant l'axe  $x$ , par rapport à la sphère (voir Figure 4.17). Le champ  $s_x = u_x - \delta_\infty$  représente donc le champ de déplacement en surface par rapport aux points distants. Le modèle fait l'hypothèse d'une loi de Coulomb locale : dans les régions sans glissement ( $u_x = 0$ ) la contrainte tangentielle  $q_x$  ne doit pas excéder  $\mu p$ , où  $\mu$  est le coefficient de frottement ; dans les régions glissantes  $q_x = \mu p$ .

Si l'on considère un contact de Hertz sans glissement, toute force tangentielle produit un champ de contrainte tangentielle qui diverge quand  $r$  tend vers  $a$  [12]. Même sous faible force tangentielle ( $F_T < \mu F_N$ ), la condition de Coulomb conduit donc à un glissement à la périphérie du contact. L'approche de Cattaneo-Mindlin consiste à faire l'hypothèse d'une zone non-glissante circulaire entourée d'un anneau glissant dont l'extension croît continûment avec la charge. Pour évaluer le champ de contraintes associé à cette situation, nous considérons tout d'abord la situation où la zone collante est réduite au point central du contact. La loi de Coulomb impose alors un champ de contrainte tangentielle (compte tenu du choix de l'orientation des axes et de la force  $F_T$ ) sous la forme :

$$q'(r) = -\mu p_0 (1 - r^2/a^2)^{1/2} \quad (4.28)$$

Une telle distribution des contraintes est associée à un champ de déplacement à l'intérieur du contact ( $r \leq a$ ) qui s'écrit :

$$s_{x,a}(r, \theta) = -\frac{\pi \mu p_0}{32Ga} [4(2 - \nu)a^2 - (4 - 3\nu)r^2 \cos^2 \theta - (4 - \nu)r^2 \sin^2 \theta] \quad (4.29)$$

## 4.2. Mesure du champ de déplacement à l'interface

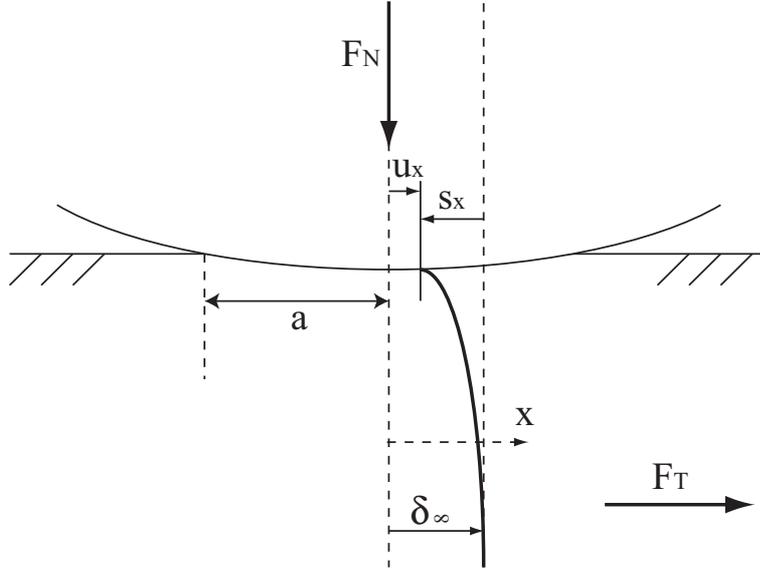


FIG. 4.17 – Schéma représentant la situation considérée dans le modèle de Cattaneo-Mindlin et reprenant les principales notations.

où  $G = E/(2(1 + \nu))$  est le module de cisaillement, et où  $\theta$  est la coordonnée angulaire ( $\theta = 0$  correspond à la direction de la force associée). Au centre du contact,  $u_x(r = 0) = 0$  et la longueur  $-s_x(r = 0)$  correspond au déplacement des points distants du contact.

En dehors du contact ( $r > a$ ), le champ de déplacement a été calculé par Illingworth (voir [58]) :

$$s_{x,a}(r, \theta) = -\frac{\mu p_0}{8Ga} \left[ (2 - \nu) \left\{ (2a^2 - r^2) \sin^{-1}(a/r) + ar(1 - a^2/r^2)^{1/2} \right\} + \frac{1}{2} \nu \left\{ r^2 \sin^{-1}(a/r) + (2a^2 - r^2)(1 - a^2/r^2)^{1/2}(a/r) \right\} \cos(2\theta) \right] \quad (4.30)$$

Si l'on considère à présent un champ de contrainte tangentielle additionnel  $q''$  sous la forme :

$$q''(r) = \mu p_0 \frac{c}{a} (1 - r^2/c^2)^{1/2} \quad (4.31)$$

le champ de déplacement associé à la contrainte  $q' + q''$  s'écrit, pour  $r < c$  :

$$s_x(r, \theta) = s_{x,a}(r, \theta) - \frac{c}{a} s_{x,c}(r, \theta) = -\frac{\pi \mu p_0}{8Ga} (2 - \nu) (a^2 - c^2) \quad (4.32)$$

Pour  $r > c$ , le déplacement est obtenu de la même manière en utilisant pour  $s_{x,a}$  et  $s_{x,c}$  l'expression donnée par l'équation 4.30.

Le champ de glissement  $u_x$  est donc uniformément nul pour  $r < c$  et strictement positif pour  $r > c$ . Compte tenu des valeurs de  $q = q' + q''$ , la condition de Coulomb est bien respectée sur l'ensemble du contact (voir Figure 4.18) Le rayon  $c$  de la zone non-glissante est déterminé en identifiant la force tangentielle à l'intégrale de la contrainte  $q(r)$ . Cette condition conduit à la relation :

$$\frac{c}{a} = \left( 1 - \frac{F_T}{\mu F_N} \right)^{1/3} \quad (4.33)$$

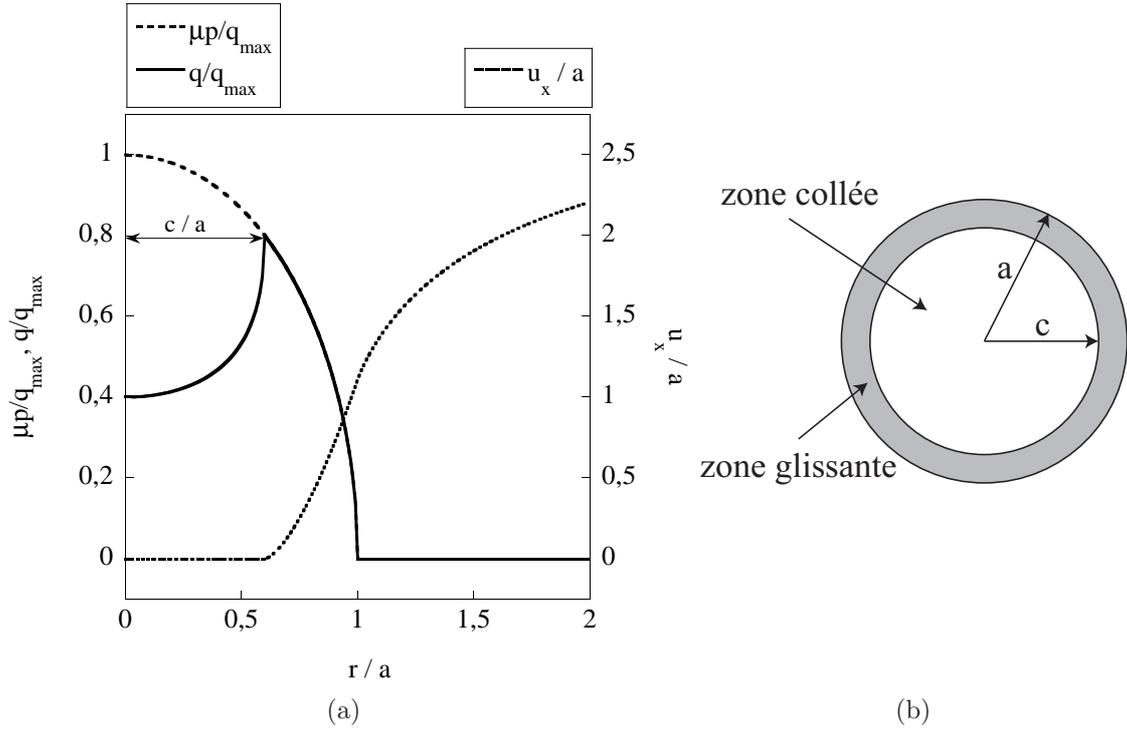


FIG. 4.18 – (a) Profils radiaux de  $\mu p/q_{\max}$ ,  $q/q_{\max}$  et  $u_x/a$  calculés, pour une valeur particulière de  $c$ . Pour  $c/a < 1$ ,  $u_x/a = 0$  et  $q/q_{\max} < \mu p/q_{\max}$ . Pour  $c/a > 1$ ,  $u_x/a \neq 0$  et  $q/q_{\max} = \mu p/q_{\max}$ . (b) Schéma de la zone de contact mettant en évidence les zones glissante et "collée".

#### 4.2.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux

Le modèle de Cattaneo-mindlin est effectué dans le cadre d'un contact lisse. Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que l'existence d'une rugosité de taille finie modifie le champ de pression de Hertz. Afin de permettre néanmoins une comparaison, nous utilisons pour le calcul le rayon de contact effectif  $a^*$  défini par l'équation 4.11 dont la valeur  $a^* = 2.19 \pm 0.01 \text{ mm}$  est constante tout au long de l'expérience<sup>10</sup>;  $a^*$  sera simplement noté  $a$  par la suite.

La comparaison entre les mesures de champ et les résultats du modèle CM est faite successivement sur les profils radiaux moyennés angulairement, puis sur les profils angulaires pour  $r = a$ . L'origine des coordonnées est choisie comme le centre de symétrie du champ des déplacements, évalué par une méthode analogue à celle décrite pour le champ de pression dans la partie précédente. Au cours de l'expérience, ce centre de symétrie varie de moins de  $15 \mu\text{m}$  et diffère de moins de  $50 \mu\text{m}$  du centre de symétrie du champ de pression.

Les profils radiaux pour le modèle CM sont obtenus en moyennant les équations 4.29 et

<sup>10</sup>Notons pour comparaison que le rayon de contact de Hertz  $a_H$  obtenu à partir de l'équation 4.27 vaut  $a_H = 2.09 \text{ mm}$ .

## 4.2. Mesure du champ de déplacement à l'interface

4.30 par rapport à  $\theta$ , ce qui conduit aux expressions suivantes des champs de déplacement :

$$u_{x,a}(r) = -\frac{\mu p_0}{8Ga}(2 - \nu) \left[ (2a^2 - r^2) \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) + ar \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right)^{1/2} \right], r > a \quad (4.34)$$

$$u_{x,a}(r) = -\frac{\mu p_0}{8Ga} \frac{\pi}{4} [2(2 - \nu)(2a^2 - r^2)], r < a \quad (4.35)$$

Le préfacteur peut être exprimé en fonction de  $R$ ,  $\mu$  et  $\nu$  uniquement, en notant l'identité (obtenue à partir des équations 4.27) :

$$\frac{p_0}{Ga} = \frac{2}{\pi R(1 - \nu)} \quad (4.36)$$

Le paramètre  $\mu$  est défini en régime de glissement stationnaire comme le rapport  $F_T/F_N$ . L'ajustement se fait donc sans paramètre ajustable, et sans autre paramètre mécanique que le coefficient de Poisson  $\nu$  et le rayon  $R$  de la sphère<sup>11</sup>. La Figure 4.19 représente les profils radiaux obtenus en régime de glissement stationnaire, exprimés en unités de  $a$ , ramenés à 0 au centre du contact pour compenser le mouvement d'ensemble du bloc au cours du temps. Les profils calculés ont été lissés sur une taille égale à celle de la boîte de corrélation utilisée lors de la DIC pour prendre en compte cet effet de moyennage dans la comparaison.

La courbe calculée présente une allure très semblable à celle obtenue expérimentalement. Il n'est pas possible de réduire le décalage en amplitude observé au voisinage de  $a$  par un ajustement de la force  $F_T$  qui résulterait d'une incertitude de mesure. La courbe en trait pointillé montre par exemple le résultat correspondant à une valeur de  $F_T$  réduite de 5%. De manière analogue, un ajustement de  $a$  autour de la valeur extraite du profil de pression ne permet pas de faire coïncider les deux profils.

En régime de charge transitoire, la même comparaison est mise en oeuvre en considérant cette fois l'équation 4.32 (Figure 4.20). La valeur de  $c$  est mesurée en chaque point à partir de la valeur de  $F_T$  correspondante via la relation 4.33. Le coefficient  $\mu$  est maintenant défini comme le coefficient de frottement statique  $F_{Tmax}/F_N$ .

Pour les profils expérimentaux, la valeur du déplacement en  $r = 0$  est ramenée à 0 afin de s'affranchir de la déformation élastique de la couche rugueuse (cet effet sera discuté plus loin). Les profils ont par ailleurs été décalés verticalement pour faciliter la lisibilité de la figure. A nouveau, les profils de déplacement sont bien reproduits par les résultats du modèle sans paramètre ajustable. En particulier la taille de la zone non glissante mesurée est très voisine de celle prédite par le modèle. Notons cependant que les profils calculés sont de façon systématique supérieurs à ceux mesurés dans la zone périphérique du contact. Cet écart peut être interprété comme résultant de l'existence d'une zone de pression non nulle pour  $r$  légèrement supérieur à  $a$ . Cette caractéristique du champ de pression, qui a été mise en évidence à la partie 4.1 (voir Figure 4.7), est associée à la rugosité du substrat et n'est donc pas prise en compte dans le modèle CM. Notons également que le raccord entre les zones glissante et non glissante est plus doux sur les profils expérimentaux. Cette

<sup>11</sup>En particulier l'identité 4.36 permet d'éliminer le module de Young  $E$  pour lequel l'incertitude de mesure est importante.

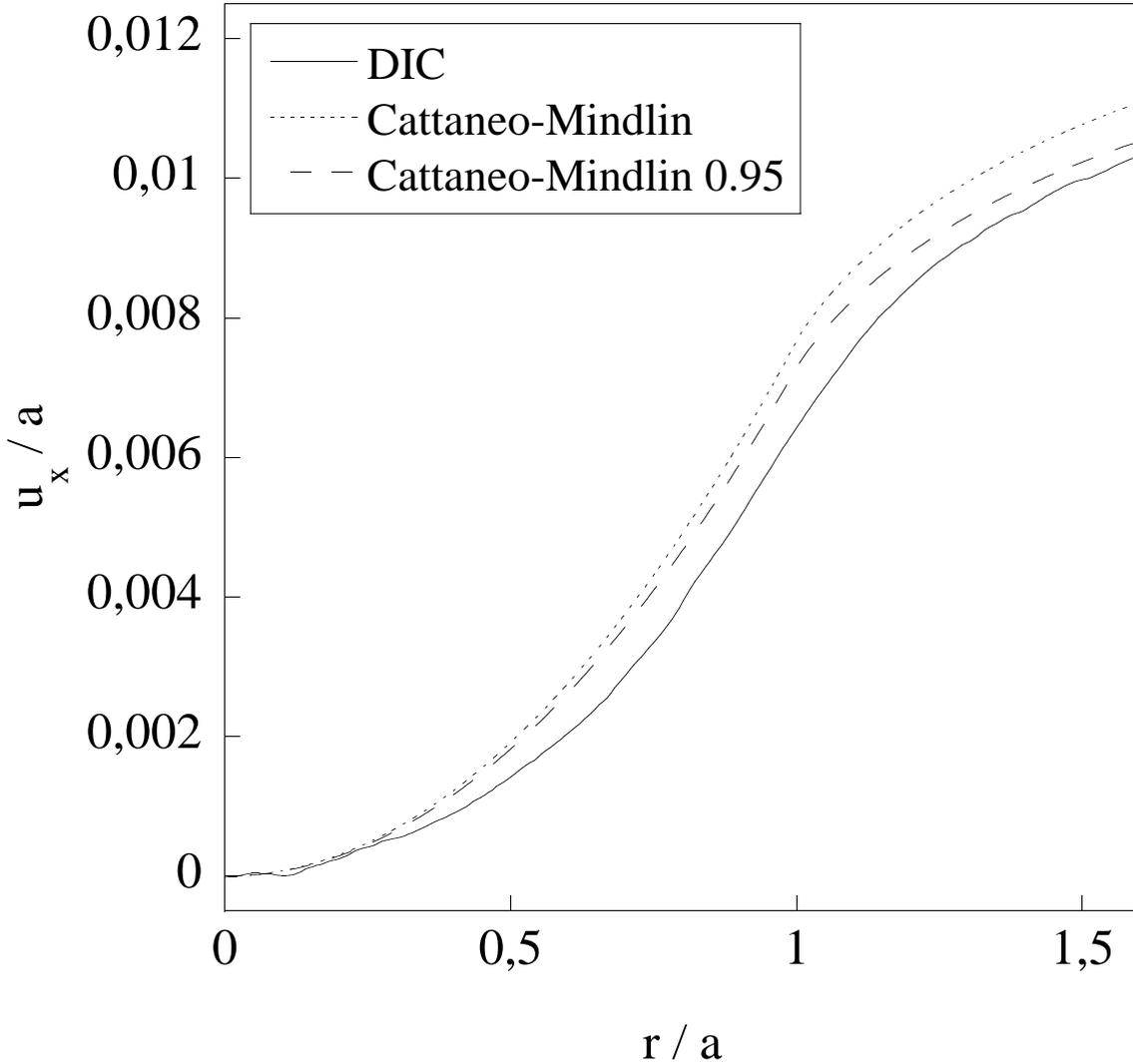


FIG. 4.19 – Profil radial du champ de déplacement en régime de glissement stationnaire : mesuré par DIC en trait plein, calculé à partir du modèle C-M en pointillés fin, calculé à partir du modèle C-M en supposant une erreur de 5% sur la valeur de  $F_{Tstat}$  en pointillés épais. La position latérale et le déplacement sont exprimés en unités de  $a$ .

différence ne peut être attribuée au lissage intrinsèque à la méthode de DIC puisqu'un lissage identique a été appliqué sur les profils calculés.

Avant de décrire les profils angulaires, il est utile de commenter la résolution qu'autorise la mesure radiale. Au paragraphe 4.2.2, nous avons indiqué que la résolution de mesure sur chaque boîte de corrélation était de  $250\text{ nm}$ . Chaque point des profils radiaux correspond à la moyenne du déplacement sur un nombre de boîtes indépendantes égal à  $N = 2\pi r / \lambda$  où  $r$  est la distance radiale et  $\lambda = 150\ \mu\text{m}$ . L'incertitude de mesure sur  $u(r)$  est alors égal à  $250\text{ nm} / \sqrt{N}$ . Pour  $r = a$  et  $N = 86$ , l'incertitude est de  $\pm 27\text{ nm}$ . La Figure 4.21 montre le profil radial de déplacement pour une force  $F_T = 0.07F_N$  et démontre que cette résolution est effectivement atteinte. La méthode décrite permet donc

## 4.2. Mesure du champ de déplacement à l'interface

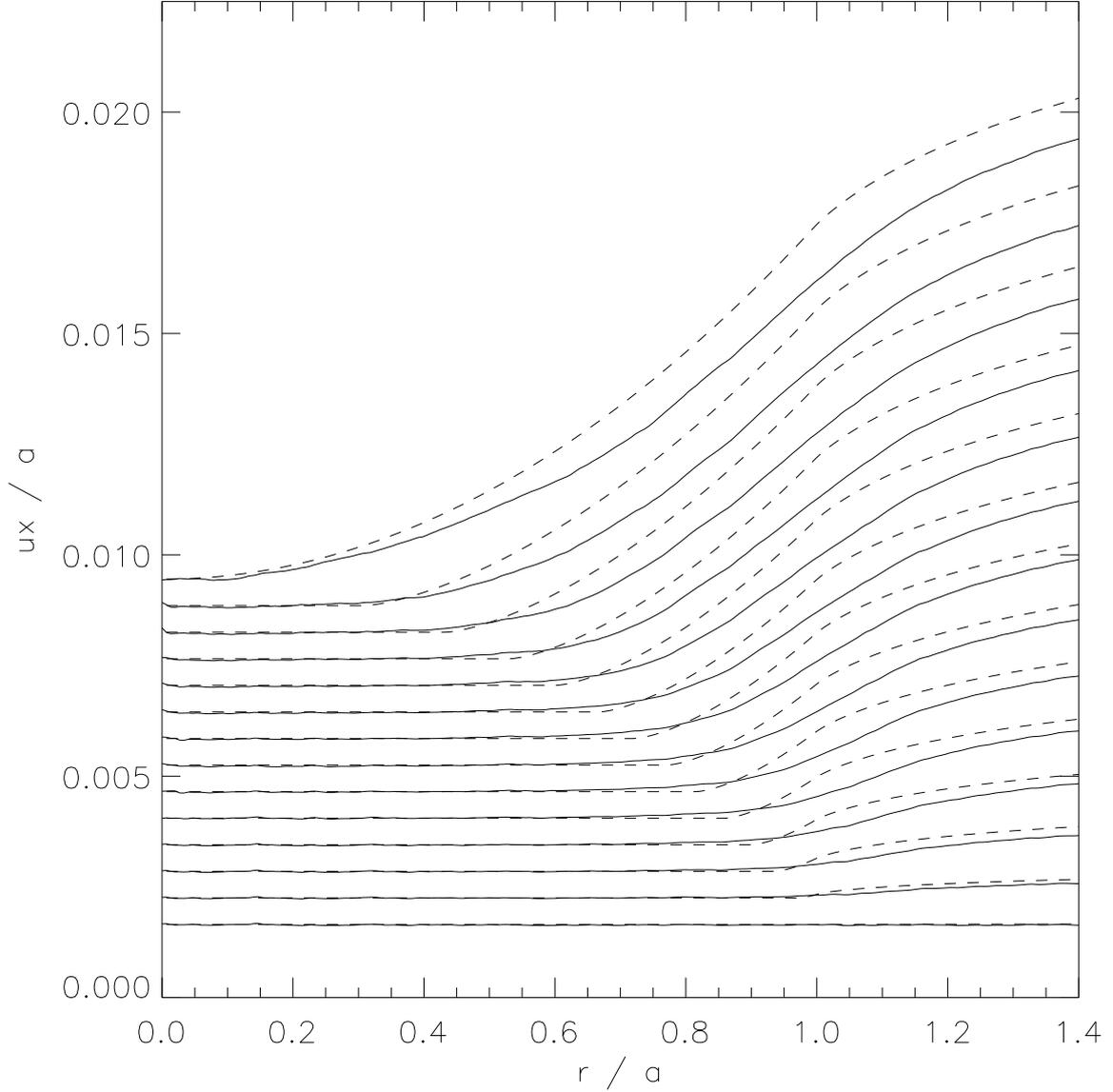


FIG. 4.20 – Profils radiaux du champ de déplacement mesurés par DIC en trait plein, et calculé à partir du modèle C-M en pointillés, pour les points de la charge représentés sur la Figure 4.13. La position latérale et le déplacement sont exprimés en unités de  $a$ . Les profils successifs sont décalés verticalement d'une valeur croissante pour la clarté de la représentation.

d'atteindre des résolutions autorisant la mesure d'effets extrêmement fins sur le champ de déplacement à l'interface.

La dépendance angulaire des champs de déplacement peut également être comparée pour  $r = a$  à partir de l'expression 4.29 prise en  $r = a$  :

$$s_{x,a}(r = a, \theta) = -\frac{\mu p_0 a}{32G} [2(2 - \nu) + \nu \cos 2\theta] \quad (4.37)$$

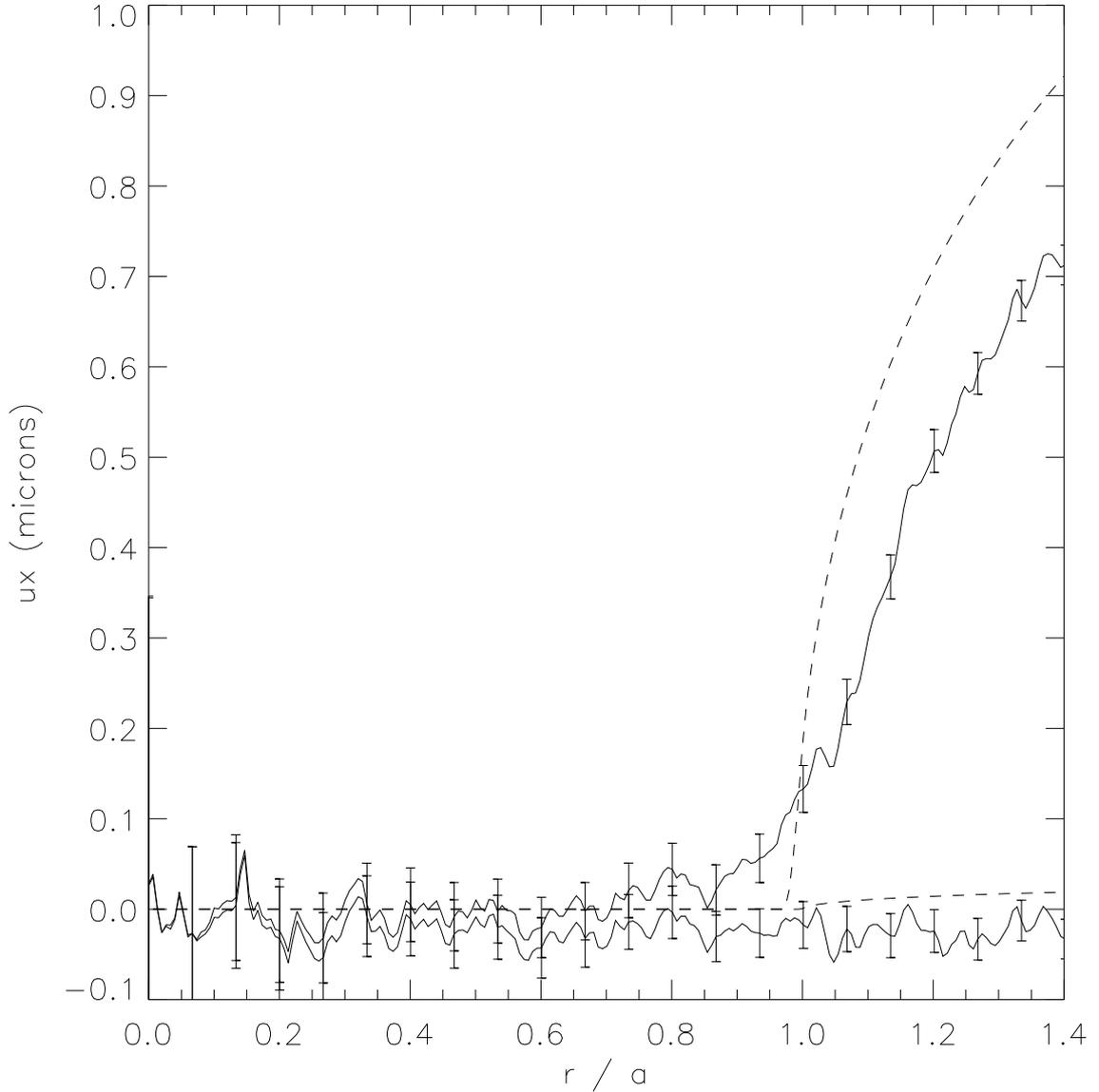


FIG. 4.21 – Profils radiaux de pression mesurés pour  $F_T = 0\text{ N}$  et  $F_T = 0.016\text{ N}$ . Le déplacement est donné en  $\mu\text{m}$ , pour illustrer la sensibilité de la mesure.

La Figure 4.22 montre les profils angulaires, dont la valeur moyenne est ramenée à 0, pour les mêmes valeurs de  $F_T$  qu'à la Figure 4.20, et pour une normalisation identique. De façon cohérente avec les observations faites sur les profils radiaux d'une surestimation par CM du déplacement moyen en  $r = a$ , les amplitudes de variations angulaires calculées sont supérieures à celles mesurées. La dépendance globale en  $\cos 2\theta$  est correctement reproduite, mais l'on notera cependant que le déplacement à l'avant du contact ( $\theta = 0$ ) est plus élevé qu'à l'arrière ( $\theta = \pi$ ). Nous n'avons pas à ce stade d'interprétation de cette asymétrie.

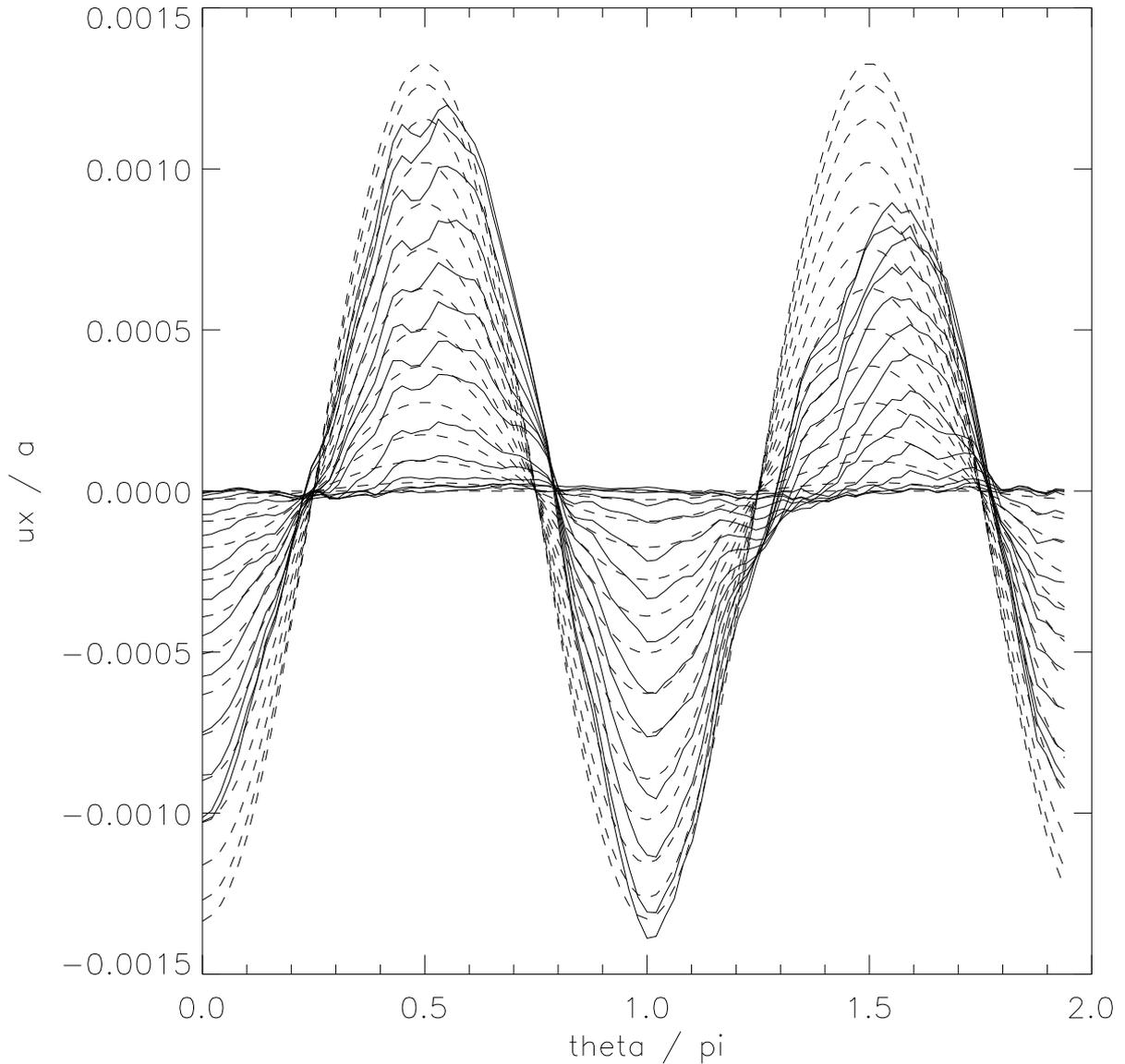


FIG. 4.22 – Profils angulaires du champ de déplacement mesurés par DIC en trait plein, et calculé à partir du modèle C-M en pointillés, pour les points de la charge représentés sur la Figure 4.13. L'angle est exprimé en  $rad/\pi$  et le déplacement est exprimé en unités de  $a$ . L'angle 0 correspond à la direction du mouvement. Pour chaque profil la valeur moyenne a été soustraite. Les profils expérimentaux correspondent à une moyenne sur  $0.87a < r < 1.13a$ . L'incertitude angulaire est de  $0.1 rad$ .

### 4.2.5 Elasticité en cisaillement de la couche rugueuse

La méthode de mesure présentée revient à évaluer en chaque point le déplacement moyen de la couche rugueuse, d'épaisseur typique  $\sigma = 1.28 \mu m$ . En effet les centres diffuseurs qui servent de traceurs pour la DIC sont répartis sur l'ensemble de l'épaisseur de

cette couche. Il en résulte que même en l'absence de glissement du sommet des aspérités en contact réel, un déplacement non nul peut être mesuré qui traduit le cisaillement élastique de la couche. Celui-ci peut être estimé de l'ordre de  $u_x/\sigma$ . La Figure 4.23(a) montre le déplacement moyen au centre du contact<sup>12</sup> ( $r < 0.15a$ ), en fonction de la force tangentielle appliquée. Au delà de  $F_{Tmax}$ , en régime de glissement stationnaire, la vitesse

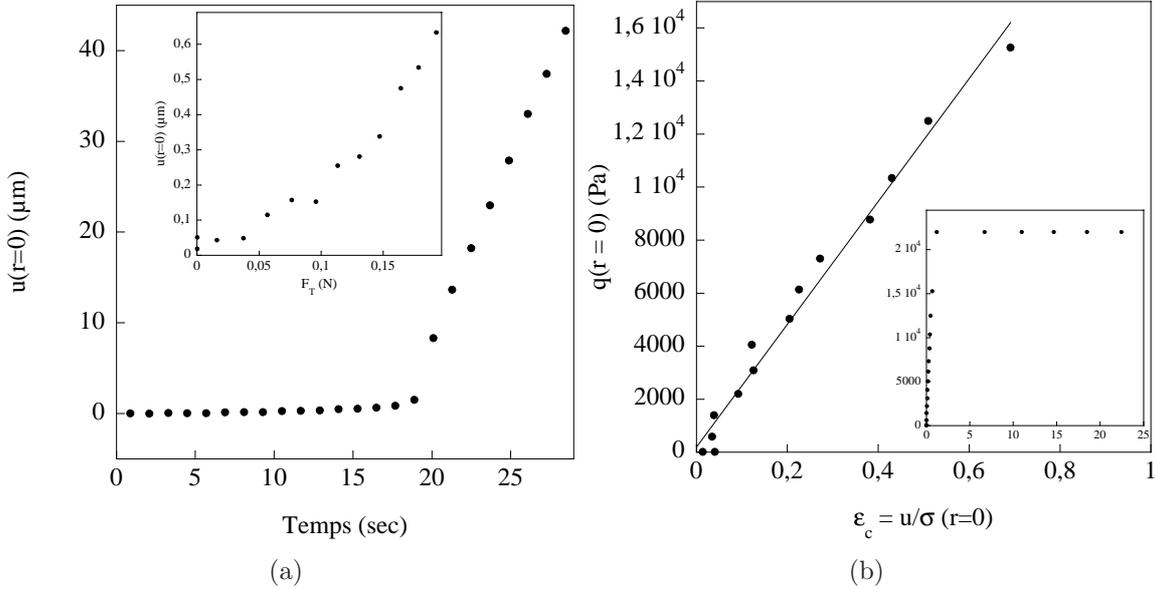


FIG. 4.23 – (a) Déplacement moyen au centre du contact au cours du temps. Après  $t = 19 \text{ sec}$ , on observe un déplacement macroscopique à vitesse  $V = 4 \mu\text{m}.\text{sec}^{-1}$  imposée par le moteur. L'insert représente le déplacement moyen au centre du contact en fonction de la force tangentielle appliquée au cours de la phase de charge. (b) Déformation moyenne  $\epsilon_c$  au centre du contact en fonction de la contrainte  $q(r = 0)$ . La relation est de type élasto-plastique : linéaire de pente  $23.6 \text{ kPa}$  à faible déformation ; le seuil en contrainte se situe à  $22 \text{ kPa}$ .

du centre du contact correspond exactement à la vitesse d'entraînement imposée. Durant la charge transitoire, lorsque la zone centrale est non glissante, la déformation élastique se traduit par un accroissement du déplacement avec la force tangentielle.

Il est tentant d'utiliser cette mesure de déplacement dans la zone non-glissante du contact pour évaluer les propriétés rhéologiques de cette couche. Nous faisons pour cela l'hypothèse que la contrainte au centre du contact est en première approximation donnée par CM et peut alors être évaluée à  $q(r = 0) = \mu p_0(1 - c/a)$  où  $\mu p_0 = 3\mu F_N/(2\pi a^2) = 22 \text{ kPa}$ . La Figure 4.23(b) montre l'évolution de cette contrainte au centre en fonction de la déformation estimée de la couche  $\epsilon_c = u(r = 0)/\sigma$ .

Ce graphe caractérise un comportement de type élasto-plastique de la couche rugueuse, avec un module de cisaillement effectif  $k_c = q(r = 0)/2\epsilon_c = 11.8 \text{ kPa}$  et un seuil en contrainte égal à  $22 \text{ kPa}$  (correspondant à une déformation de l'ordre de 1). Cette valeur est à comparer au module de cisaillement du matériau massif  $G = E/(2(1 + \nu)) = 0.73 \text{ MPa}$ .

<sup>12</sup>Cette grandeur a été soustraite des profils radiaux précédemment discutés.

Elle dépend a priori de la pression à laquelle est soumise la couche. Cette dépendance pourra être obtenue en analysant ces mesures pour différentes positions dans le contact (correspondants à différents points dans le profil de pression), et pour différentes charges normales.

Nous pouvons à présent identifier deux origines distinctes pour le désaccord observé entre nos mesures et les résultats du calcul du modèle CM, qui résultent toutes deux de la rugosité de la surface élastique. La première tient à la forme du champ de pression au sein du contact qui diffère du profil de Hertz supposé par CM, comme nous l'avons montré à la partie 4.1. La seconde est liée à la rhéologie en cisaillement de l'interface frottante ; CM fait l'hypothèse d'une réponse purement plastique dont le seuil est fixé en chaque point à  $\mu p$  ; la couche rugueuse présente au contraire un comportement élasto-plastique dont on peut supposer que le seuil est similaire mais dont le module de cisaillement est fini et a priori dépendant de la pression locale (comme observé par Berthoud et Baumberger pour une interface PMMA-PMMA [59]).

## Conclusion

Nous avons mis au point deux méthodes optiques permettant d'accéder simultanément aux champs de pression et de déplacement à l'interface d'un bloc élastomère rugueux. La donnée de ces deux champs suffit à caractériser de manière univoque l'état mécanique du bloc élastique. Ces mesures offrent des résolutions spatiales suffisantes pour mettre en évidence des modulations des champs de contrainte et de déplacement sur des échelles de l'ordre de  $100 \mu m$ .

La mesure du champ de pression a permis le premier test direct du modèle de Greenwood-Tripp pour un contact rugueux sphère-plan. L'ajustement de nos résultats à partir de ce modèle, effectué sans paramètre ajustable, conduit à un accord satisfaisant sur l'ensemble de la gamme des charges normales exercées. Un écart significatif est néanmoins observé, qui traduit les limites de ce modèle statistique pour décrire le comportement de couches rugueuses réelles. A cet égard, cette expérience offre un test simple pour des modèles raffinés de compressibilité d'une couche rugueuse.

La DIC se révèle être une technique puissante de mesure du champ de déplacement. La résolution sub-micronique atteinte nous a permis une comparaison quantitative avec le modèle de Cattaneo-Mindlin qui décrit la transition charge-glissement en géométrie sphère-plan. Là encore, l'accord est globalement satisfaisant ; les écarts constatés sont essentiellement liés à la rugosité de l'élastomère, qui modifie le champ de pression de Hertz et la loi de comportement de Coulomb au fondement du modèle. L'écart à Hertz est directement identifiable par la méthode de la première partie. La loi de comportement de la couche rugueuse, de type élasto-plastique, a quant à elle été mise en évidence en comparant le déplacement moyen de la couche et la contrainte tangentielle dans la zone centrale du contact, tout au long de la charge.

Plusieurs caractérisations rhéologiques d'une interface frottante PMMA-PMMA rugueuse ont été précédemment réalisées par application d'une force tangentielle continûment croissante [59] ou oscillante [60] sur le contact. La déformation de la couche est obtenue par une mesure quasi-nanométrique du déplacement en masse du patin frottant.

## Chapitre 4. Mesures optiques à une interface rugueuse

---

Cette méthode ne peut être mise en oeuvre que pour des systèmes rigides, pour lesquels la déformation macroscopique peut être considérée comme négligeable devant celle de l'interface frottante. Par ailleurs, elle implique de considérer un comportement homogène de l'ensemble du contact. Par contraste, la méthode mise en oeuvre ici permet d'identifier à la fois la déformation de la couche dans les zones collantes, et le champ de glissement dans le reste du contact (ainsi que le champ de déplacement en dehors du contact). Cette mesure est résolue spatialement et permet donc de mesurer des déformations inhomogènes au sein du contact.

Du point de vue théorique, il devrait être possible d'adapter l'approche de Cattaneo-Mindlin pour prendre en compte un champ de pression différent de celui de Hertz, et une loi de comportement de la couche déterminée empiriquement. La méthode de résolution s'apparenterait à celle développée par Greenwood-Tripp sous charge normale. Il s'agirait de déterminer itérativement le champ de contrainte de cisaillement et le champ de déplacement de la surface nominale qui garantisse à la fois l'équilibre mécanique macroscopique du bloc élastomère et la loi de comportement locale en cisaillement de la couche.

Cette technique de mesure optique du champ de déplacement peut être appliquée sans aucune modification à des situations dynamiques complexes (transition de stick-slip, force tangentielle oscillante, etc...), la fréquence accessible étant uniquement limitée par celle de l'acquisition des images par la caméra. Elle permettrait également de mesurer les champs de déplacement résiduels associés à un cycle en contrainte, par simple comparaison de deux images prises à la même contrainte tangentielle avant et après la séquence de charge.

# Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons développé deux dispositifs expérimentaux permettant des mesures locales de contrainte et de déplacement pour un contact étendu élastomère-verre.

Le premier dispositif est fondé sur un principe de fonctionnement biomimétique de l'extrémité du doigt humain : il est constitué d'un microcapteur de forces MEMS noyé sous un film de PDMS réticulé d'épaisseur millimétrique. Ce micro-capteur permet une mesure locale des trois composantes de la force moyennée sur une surface d'ordre millimétrique.

- Dans la première partie, nous avons déterminé les fonctions d'appareil qui permettent de relier les mesures effectuées à l'aide de ce capteur aux champs des contraintes à la base du film élastique. Ces fonctions ont été déterminées à partir des champs mesurés en réponse à une indentation quasi-ponctuelle de la surface du film élastique. Ces fonctions ont été ensuite testées dans le cas de contacts sphère-plan sous charge normale, en comparant les mesures aux résultats d'un calcul par éléments finis. La mesure du champ de pression apparaît robuste : elle permet notamment de différencier des conditions aux limites différentes (glissante et frottante). La mesure en contrainte tangentielle est elle perturbée par les gradients de pression qui peuvent s'exercer sur la membrane sensible du capteur et produisent un couple équivalent à une contrainte tangentielle. Cette mesure permet néanmoins de comparer les profils de contraintes tangentielles au sein d'une classe de contacts pour lesquels de tels gradients restent suffisamment faibles. Cet artefact devrait être réduit dans la prochaine génération de capteurs car il est directement lié à la taille finie de la membrane sensible dont le rayon sera réduit d'un facteur 3. Cette miniaturisation devrait permettre également, moyennant une réduction de l'épaisseur du film élastomère, d'améliorer la résolution spatiale de la mesure.
- Dans la deuxième partie, nous avons pu mesurer point par point l'évolution du champ des contraintes à la base du film lors d'une expérience de transition charge-glissement. Le régime stationnaire a été étudié de façon extensive en reconstruisant les profils de contraintes spatiaux à partir des séquences temporelles mesurées lors du passage du contact au dessus du capteur. En géométrie cylindre-plan, les profils obtenus ont pu être confrontés à un modèle semi-analytique développé au laboratoire par E. Katzav et M. Adda Bedia. Ce modèle, fondé sur une hypothèse de loi de comportement de Coulomb locale, permet de rendre compte correctement des

## Conclusion

---

champs mesurés, sans paramètre d'ajustement.

- Dans la troisième partie, nous nous sommes intéressés aux fluctuations de contraintes mesurées en un point du contact lors du frottement d'une surface de rugosité périodique de l'ordre de  $100\ \mu m$  de période. Le spectre temporel des signaux mesurés montre une signature caractéristique du spectre spatial de la surface frottée. Nous avons proposé un modèle simple permettant, sous certaines conditions, de prédire le spectre temporel du signal des contraintes locales à partir des caractéristiques spectrales de la rugosité du substrat. La fonction de filtrage spectral qui définit cette relation dépend de la fonction de réponse du capteur à une indentation ponctuelle de l'interface, mais également des caractéristiques de l'enveloppe du champ de pression en surface. En particulier, l'amplitude du spectre à fréquence élevée est maximale lorsque le capteur se trouve à la vertical du bord du contact.

Dans le cadre de la perception tactile, ce résultat suggère que les conditions d'exploration tactile (notamment la force normale exercée par le doigt sur le substrat) pourrait servir à moduler cette fonction de filtrage spectrale afin d'optimiser la détection des textures. En outre, cette approche suggère un rôle possible pour les empreintes digitales qui, en modulant l'enveloppe du champ de pression nominal, permettraient d'amplifier les fluctuations de contraintes autour des fréquences de résonance des terminaisons nerveuses sensibles aux vibrations.

- Dans la dernière partie, nous avons décrit une expérience d'imagerie optique par transmission au travers d'un contact élastomère-rugueux/sphère-lisse qui permet de mesurer simultanément les champs de pression (via la mesure de la distribution des aires de contact réel) et de déplacement à la surface du contact avec une résolution spatiale de l'ordre de  $100\ \mu m$ . Les profils de pression obtenus reproduisent très correctement les résultats du modèle de Greenwood-Tripp qui prédit le champ de pression à une interface rugueuse en géométrie de Hertz. La mesure du champ de déplacement permet d'atteindre une résolution de  $250\ nm$  : celle-ci a permis une comparaison extrêmement fine des profils de déplacement obtenus avec le modèle de Cattaneo-Mindlin qui décrit l'évolution des champs mécaniques dans un contact de Hertz lisse en régime de transition charge-glisserment. Cette résolution a permis également de mettre en évidence et de caractériser la déformation élastique locale de la couche rugueuse dans la zone du contact n'ayant pas encore glissée.

## Perspectives

Les possibilités de mesures offertes par le capteur MEMS sont aujourd'hui limitées par ses dimensions latérales et surtout par le fait que nous ne disposons que d'un seul point de mesure. Mais les résultats déjà obtenus permettent d'envisager les perspectives qu'offrira l'utilisation de barrettes de  $1 \times 10$  ou  $3 \times 10$  de ces capteurs sur des dimensions réduites d'un facteur 3, qui devraient être disponibles sous peu. D'une part, il deviendra possible d'étudier des phénomènes de glissement transitoires en suivant dynamiquement le champ des contraintes, ce que les méthodes de reconstruction des profils proposées ici ne permettent pas. Des analyses de corrélations temporelles et spatiales entre capteurs voisins pourraient

également permettre d'identifier le passage de défauts individuels sur le substrat. Dans le contexte de l'analyse spectrale des signaux de contraintes lors du frottement de surfaces rugueuses, un tel dispositif permettrait de tester directement les modèles de filtre spectral dont une version simple a été proposée au chapitre 3. En effet, nous aurions alors accès à la fois à l'enveloppe du champ de contraintes et aux modulations temporelles à toutes fréquences en différents points de mesures. Il serait également possible de tester l'effet d'une texturation régulière de la membrane polymère, simulant les empreintes digitales, sur l'amplitude du spectre temporel des contraintes en frottement.

Les méthodes de mesures optiques développées à la fin de ce document ne peuvent pas à ce stade être couplées aux mesures de contraintes par les capteurs MEMS, car elles supposent que les deux substrats en regard soient transparents. Il est cependant envisageable, au moins pour la mesure du champ des déplacements qui nécessite essentiellement l'existence de fluctuations d'intensité à l'interface au contact, de réaliser cette mesure à partir des images obtenues en réflexion.

A elles-seules, ces deux techniques optiques offrent cependant des possibilités importantes pour tester les modèles microscopiques de couche élastique. En particulier, il devrait être possible d'extraire des expériences de mise en charge, pour différentes charges normales, un comportement empirique du module élastique de la couche sous toute pression. Cette loi de comportement, qui permet de régulariser la loi de Coulomb, pourrait être implémentée dans un modèle de Cattaneo-Mindlin modifié à partir du champ de pression mesuré. Bien d'autres configurations peuvent également être étudiées avec peu de modification du montage actuel : les champs de glissement résiduels associés à un cycle de charge de faible amplitude, les processus de fluage sous contraintes stationnaires, la perte de symétrie du champ de glissement associé à une épaisseur de couche finie, et ses conséquences en terme de coefficient de friction.

Ces deux méthodes permettent également d'envisager une étude systématique de la réponse mécanique d'une couche rugueuse, en enfoncement et en cisaillement, en fonction de ses caractéristiques géométriques (les dimensions spatiales des aspérités) et statistiques (la distribution des hauteurs de la couche). Au delà des couches rugueuses aléatoires, il est également envisageable d'étudier la réponse d'une couche patternée permettant d'imposer la géométrie des défauts, sous forme de plots aléatoires de même taille par exemple [34]. L'imagerie de contact permettrait alors non plus de mesurer une déformation moyenne de la couche, mais de suivre le comportement individuel de défauts, afin de mettre en évidence d'éventuels comportements collectifs.

## Conclusion

---

# Annexe A

## Annexes au chapitre 1

### A.1 Résumé de la théorie du contact de Hertz

En 1896, Hertz a calculé le champ des contraintes associées à un contact élastique sans frottement entre deux objets lisses, dont on connaît la forme et les propriétés mécaniques [10]. Ce problème peut se ramener à l'étude du contact entre un plan rigide et un ellipsoïde élastique. Pour simplifier, nous présenterons les résultats dans le cas particulier d'une sphère élastique de module de Young  $E$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et de rayon de courbure  $R$  au contact avec un plan rigide (voir Figure A.1). Lorsque la sphère est pressée contre

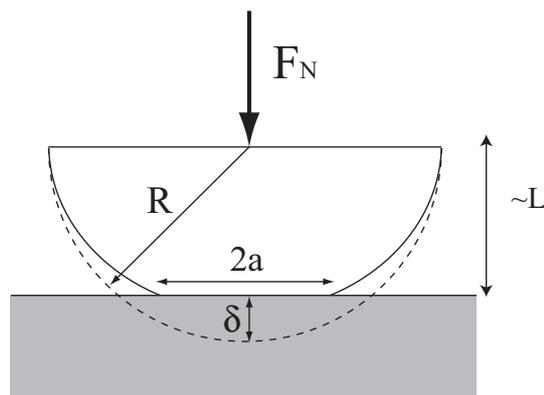


FIG. A.1 – Les grandeurs globales dans le problème du contact de Hertz entre une sphère élastique et un plan rigide.

le plan rigide sous charge normale  $F_N$ , elle s'enfonce d'une distance  $\delta$  pour former une zone de contact circulaire de rayon  $a$ . Lorsque  $a \ll R$ , pour des solides de taille  $L \gg a$ ,

## Annexes au chapitre 1

---

Hertz a démontré les relations suivantes :

$$a = \left( \frac{3(1 - \nu^2)F_N R}{4E} \right)^{1/3} \quad (\text{A.1})$$

$$\delta = \frac{a^2}{R} = \left( \frac{9(1 - \nu^2)^2 F_N^2}{16RE^2} \right)^{1/3} \quad (\text{A.2})$$

Le champ de pression à l'interface s'écrit alors en fonction de la distance  $r$  au centre du contact :

$$p(r) = p_0(1 - (r/a)^2)^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

où

$$p_0 = \left( \frac{6F_N E^2}{\pi^3 R^2 (1 - \nu^2)^2} \right)^{1/3} \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Réponse visco-élastique du PDMS

Le module élastique  $G'$  et le module de pertes  $G''$  du PDMS ont été mesurés dans un rhéomètre à plans parallèles, adapté à la mesure sur des échantillons solides (Dynamic Analyzer RDA II, Rheometrics) chez Hélène Montès, au Laboratoire de Physico-chimie des Polymères et des Milieux Dispersés de l'ESPCI. Les échantillons sont des pastilles cylindriques de rayon  $8mm$  et d'épaisseur  $2mm$  obtenues en poinçonnant un film plan de PDMS. Chaque échantillon est collé entre les deux plans du rhéomètre par une colle cyano-acrylate Loctite 406 et son promoteur d'adhésion Loctite Primer 770.

Les expériences consistent à réaliser une déformation sinusoidale d'amplitude imposée  $0.007$ , pour des pulsations  $\omega = 2\pi f$  avec  $f$  variant entre  $0.01Hz$  et  $10Hz$ . Chaque expérience a été réalisée à une température donnée  $T$  entre  $-50^\circ C$  et  $30^\circ C$  par pas de  $10^\circ C$ . Nous avons utilisé l'équivalence temps-température vérifiée pour les matériaux visco-élastiques [61] pour construire une courbe maîtresse ( $G'(\omega), G''(\omega)$ ). Le principe consiste à se donner une température de référence  $T_o$ , choisie comme la température d'utilisation de l'échantillon, et à traduire en fréquence chaque couple ( $G'/T, G''/T$ ) jusqu'à le raccorder avec ( $G'/T_o, G''/T_o$ ) [62]<sup>1</sup>

En choisissant  $T_o = 20^\circ C$ , nous avons obtenu la courbe maîtresse de la Figure A.2.

---

<sup>1</sup>Lorsque  $T_o$  est choisie égale à la température de transition vitreuse du matériau, cette transformation porte le nom de WLF.

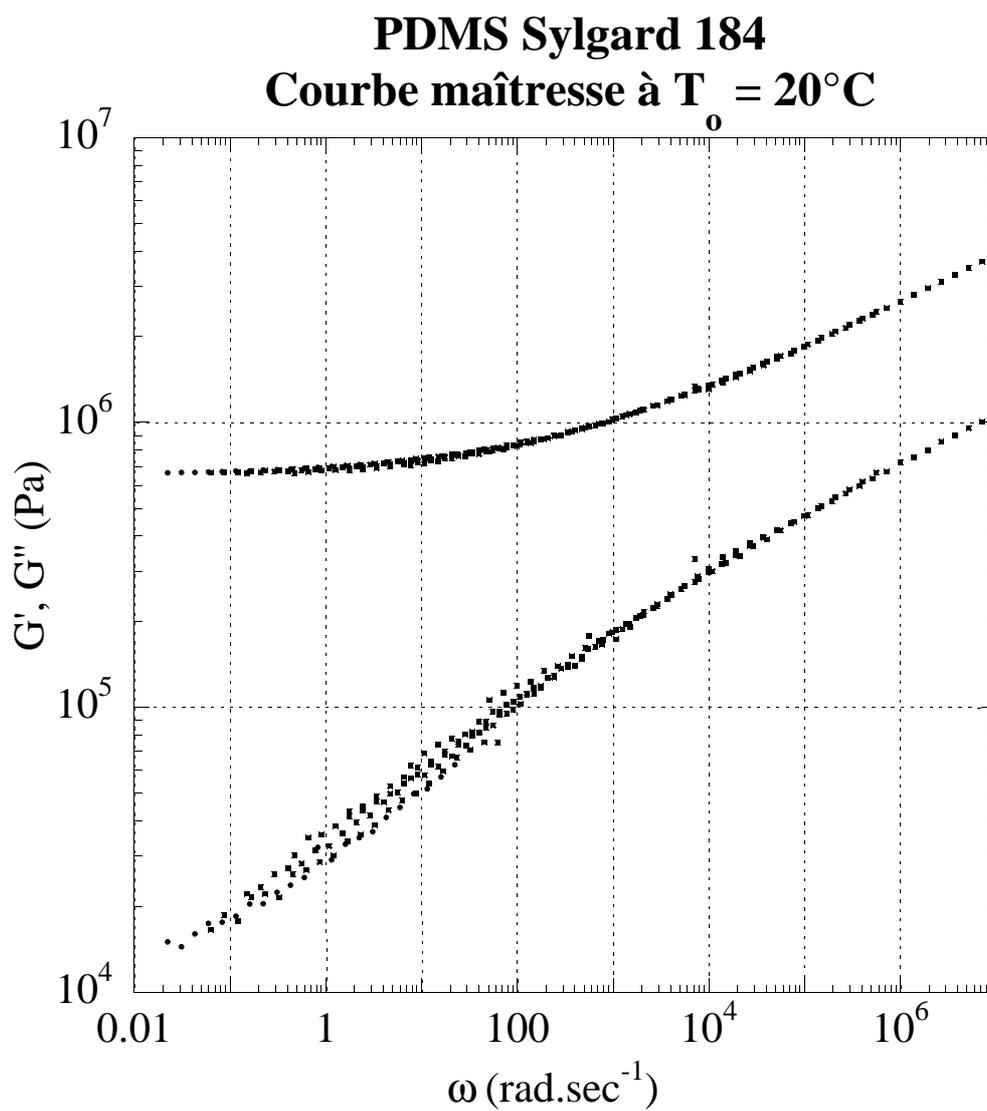


FIG. A.2 – Dépendance de  $G'$  et  $G''$  avec la pulsation de stimulation  $\omega$ , pour une température de  $20^\circ\text{C}$ .

# Annexe B

## Annexes au chapitre 2

### B.1 Modèle KA

We perform an elastostatic analysis of

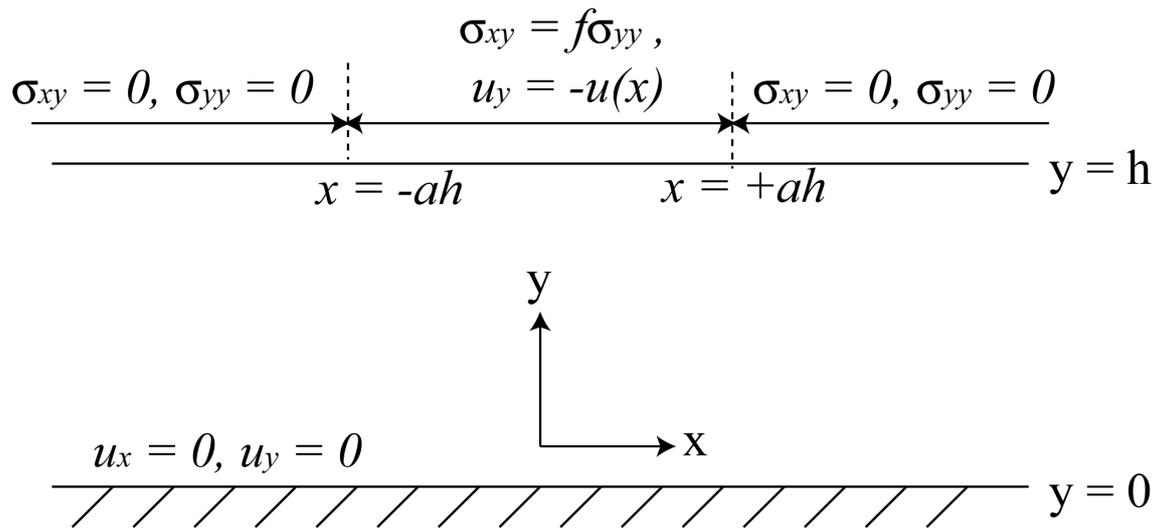


FIG. B.1 – The problem

#### B.1.1 Formulation of the boundary value problem

From a mathematical point of view, we model the system as a linear incompressible elastic solid (the thin layer whose thickness is  $h$ ) loaded by a circular rigid body (the indenter) moving at constant velocity  $v$  on its upper surface. An important assumption in our modelling is of quasi-static motion. This assumption is valid since the time it takes for waves to travel across the film is proportional to  $h/c$  which is much smaller than the characteristic time related to the motion of the indenter  $ah/v$ , where  $2 \times a \times h$  is the length of the contact zone. In reality  $a$  and actually also  $\delta$ , the maximum indentation, are selected by the total force applied by the indenter to the thin film.

To make the problem dimensionless, we rescale the coordinates  $x$  and  $y$  using  $h$ , we also rescale the displacements in the elastomeric film  $u_i$  using  $\mu h^2/2R$  ( $\mu$  is the shear modulus), and  $P$ , since we assume that our system is a linear incompressible elastic solid. And last, we rescale the stresses by  $\mu h/2R$ . Now, we can write the constitutive equation for the adhesive elastic layer as

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (\text{B.1})$$

The equilibrium equations in the film and the condition of incompressibility are

$$\nabla P = \Delta \vec{u}, \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (\text{B.3})$$

which when combined leads to a Laplace equation for the pressure in the layer,

$$\Delta P = 0. \quad (\text{B.4})$$

To complete the formulation of the problem, we specify the boundary conditions

$$u_x(x, 0) = u_y(x, 0) = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma_{xy}(x, 1) + f\sigma_{yy}(x, 1) = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma_{yy}(x, 1) = 0 \quad \text{for } |x| > a, \quad (\text{B.7})$$

$$u_y(x, 1) = -u(x) \quad \text{for } |x| < a, \quad (\text{B.8})$$

where the conditions (B.5) reflects the attachment of the elastic layer to the substrate  $y = 0$ . The rest of the conditions are a consequence of the continuity of displacement and traction at the interface  $y = 1$ . In particular, condition (B.6) follows from the assumption of a Coulomb-like friction law. Since the traction are free outside the area of contact the combination of (B.6) and (B.7) insures the shear free condition for  $|x| > a$ . Finally, Eq. (B.8) is the definition of  $u(x)$  which is just the displacement induced by the indenter. For a smooth indenter one expects a parabolic profile  $u(x) = 1 - \alpha(x - x_0)^2$ , where  $\alpha$  and  $x_0$  are selected by the system and therefore related to the total force applied by the indenter. When the indenter is not in motion, there is a frictionless contact zone which is equivalent to  $f = 0$ , and thus in this case one has  $x_0 = 0$ . The only control parameter of the problem is thus  $\alpha$ , which can be related to the physical parameters by

$$\alpha = \frac{h^2}{2R\delta}$$

where  $R$  is the radius of the indenter.

## B.1.2 Resolution of the boundary value problem

We begin by a sketch of the solution. In principle, in order to solve the problem, given a value of the friction coefficient  $f$ , one would have to prescribe the parameters  $a$ ,  $x_0$  and  $\alpha$  which are determined by the total force exerted by the indenter. However, from a

technical point of view it is more natural to pick a value of  $a$  (and  $f$ ), the contact size, and to solve the boundary value problem for  $\alpha$ ,  $x_0$  and the total force  $F$ . The next step would be to invert this result in order to get  $a$ ,  $x_0$  and  $\alpha$  as functions of  $F$  and  $f$ . The final step would be that of determining the physical observables  $\sigma_{yy}(x, 0)$  and  $\sigma_{xy}(x, 0)$  (at the bottom of the layer) for relevant values of the friction coefficient  $f$  and the applied total force  $F$ . Therefore, in the following, we will assume that  $f$  and  $a$  are given and we will determine everything in terms of them.

The strip geometry and the boundary conditions suggest the use of Fourier sine and cosine transforms [63]. Each function  $A(x, y)$  may be decomposed into

$$A(x, y) = \int_0^\infty A^{(c)}(k, y) \cos kx dk + \int_0^\infty A^{(s)}(k, y) \sin kx dk. \quad (\text{B.9})$$

Given the equilibrium equation (B.4) and the boundary conditions at  $y = 0$  (Eq. (B.5)) we can write the Fourier components of the pressure  $P^{(c)}$ ,  $P^{(s)}$  and the displacement fields  $u_x^{(c)}$ ,  $u_x^{(s)}$ ,  $u_y^{(c)}$ , and  $u_y^{(s)}$  in terms of just the four unknown functions  $a_c(k)$ ,  $a_s(k)$ ,  $b_c(k)$  and  $b_s(k)$

$$P^{(c)}(k, y) = a_c(k) \cosh(ky) + b_c(k) \sinh(ky), \quad (\text{B.10})$$

$$u_x^{(c)}(k, y) = \frac{1}{2k} [kb_s(k)y \cosh(ky) + (b_s(k) + ka_s(k)y) \sinh(ky)], \quad (\text{B.11})$$

$$u_y^{(c)}(k, y) = \frac{1}{2k} [ka_c(k)y \cosh(ky) - (a_c(k) - kb_c(k)y) \sinh(ky)], \quad (\text{B.12})$$

and

$$P^{(s)}(k, y) = a_s(k) \cosh(ky) + b_s(k) \sinh(ky), \quad (\text{B.13})$$

$$u_x^{(s)}(k, y) = -\frac{1}{2k} [kb_c(k)y \cosh(ky) + (b_c(k) + ka_c(k)y) \sinh(ky)], \quad (\text{B.14})$$

$$u_y^{(s)}(k, y) = \frac{1}{2k} [ka_s(k)y \cosh(ky) - (a_s(k) - kb_s(k)y) \sinh(ky)]. \quad (\text{B.15})$$

Furthermore, applying the boundary condition (B.6) at  $y = 1$  allows us to fix two other constants of integration, i.e. we can express  $a_c(k)$ ,  $a_s(k)$ ,  $b_c(k)$  and  $b_s(k)$  (and therefore every quantity of interest) in terms of just  $\sigma_c(k) \equiv \sigma_{yy}^{(c)}(k, 1)$  and  $\sigma_s(k) \equiv \sigma_{yy}^{(s)}(k, 1)$ . For example, by expressing  $\sigma_{yy}(x, 1)$  and  $u_y(x, 1)$  in terms of  $\sigma_s(k)$  and  $\sigma_c(k)$ , and plugging into the boundary conditions (B.7)–(B.8) we can get, by exploiting the parity properties of the sine and cosine functions, the following boundary conditions

$$\int_0^\infty \sigma_c(k) \cos kx dk = 0 \quad \text{for } |x| > a, \quad (\text{B.16})$$

$$\int_0^\infty \sigma_s(k) \sin kx dk = 0 \quad \text{for } |x| > a, \quad (\text{B.17})$$

$$\int_0^\infty [(1 + F(k))\sigma_c(k) + fG(k)\sigma_s(k)] \frac{\cos kx}{2k} dk = -\frac{1}{2} [u(x) + u(-x)] \quad \text{for } |x| < a, \quad (\text{B.18})$$

$$\int_0^\infty [-fG(k)\sigma_c(k) + (1 + F(k))\sigma_s(k)] \frac{\sin kx}{2k} dk = -\frac{1}{2} [u(x) - u(-x)] \quad \text{for } |x| < a, \quad (\text{B.19})$$

where  $F(k)$  and  $G(k)$  are given by

$$F(k) = -1 + \frac{\sinh(2k) - 2k}{\cosh(2k) + 1 + 2k^2}, \quad (\text{B.20})$$

$$G(k) = \frac{2k^2}{\cosh(2k) + 1 + 2k^2}. \quad (\text{B.21})$$

This problem can be solved [63]. The two first conditions are identically satisfied by representing

$$\sigma_c(k) = \frac{1}{\alpha} \int_0^a \phi(t) J_0(kt) dt, \quad (\text{B.22})$$

$$\sigma_s(k) = \frac{1}{\alpha} \int_0^a t \psi(t) J_1(kt) dt, \quad (\text{B.23})$$

where  $J_0(x)$  and  $J_1(x)$  are the Bessel function of the first kind. By differentiating the last two boundary conditions with respect to  $x$  and plugging in the representation (B.23)–(B.23) we get the following set of integral equations that fix the functions  $\phi(t)$  and  $\psi(t)$

$$\int_0^x \frac{\phi(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt + \int_0^a K_1(x, t) \phi(t) dt + f \int_0^a K_2(x, t) \psi(t) dt = u'(x) - u'(-x) \quad \text{for } |x| < a, \quad (\text{B.24})$$

$$\int_0^x \frac{x\psi(t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt + f \int_0^a L_1(x, t) \phi(t) dt - \int_0^a (1 + L_2(x, t)) \psi(t) dt = u'(x) + u'(-x) \quad \text{for } |x| < a, \quad (\text{B.25})$$

where

$$K_1(x, t) = \int_0^\infty F(k) J_0(kt) \sin kx dk \quad (\text{B.26})$$

$$K_2(x, t) = t \int_0^\infty G(k) J_1(kt) \sin kx dk \quad (\text{B.27})$$

$$L_1(x, t) = \int_0^\infty G(k) J_0(kt) \cos kx dk \quad (\text{B.28})$$

$$L_2(x, t) = t \int_0^\infty F(k) J_1(kt) \cos kx dk \quad (\text{B.29})$$

These are integral equations of Abel type that we can invert. As shown in [64] [65] the inversion of the equation

$$\int_0^{\zeta_0} \frac{\sigma(\zeta)}{\sqrt{\zeta_0 - \zeta}} d\zeta = \tau(\zeta_0) \quad \zeta_0 > 0 \quad (\text{B.30})$$

is given by

$$\sigma(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \left[ \int_0^\zeta \frac{\tau(\zeta_0)}{\sqrt{\zeta - \zeta_0}} \frac{d\zeta_0}{\pi} \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\tau(0)}{\sqrt{\zeta}} + \int_0^\zeta \frac{\tau'(\zeta_0)}{\sqrt{\zeta - \zeta_0}} d\zeta_0 \right] \quad (\text{B.31})$$

Applying this transformation gives,

$$\phi(x) + \int_0^a M_1(x, t)\phi(t) dt + f \int_0^a M_2(x, t)\psi(t) dt = \phi_0(x), \quad (\text{B.32})$$

$$\psi(x) + f \int_0^a N_1(x, t)\phi(t) dt - \int_0^a N_2(x, t)\psi(t) dt = \psi_0(x), \quad (\text{B.33})$$

where

$$M_1(x, t) = x \int_0^\infty kF(k)J_0(kt)J_0(kx) dk \quad (\text{B.34})$$

$$M_2(x, t) = xt \int_0^\infty kG(k)J_1(kt)J_0(kx) dk \quad (\text{B.35})$$

$$N_1(x, t) = - \int_0^\infty kG(k)J_0(kt)J_1(kx) dk \quad (\text{B.36})$$

$$N_2(x, t) = -t \int_0^\infty kF(k)J_1(kt)J_1(kx) dk \quad (\text{B.37})$$

and

$$\phi_0(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^x \frac{u''(t) + u''(-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = -4\alpha x \quad (\text{B.38})$$

$$\psi_0(x) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x \frac{u'(t) + u'(-t)}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt \right] = 0 \quad (\text{B.39})$$

Note here that by rescaling the functions  $\phi(x)$  and  $\psi(x)$  by a factor of  $\alpha$ , namely  $\phi(x) = \alpha\phi_1(x)$  and  $\psi(x) = \alpha\psi_1(x)$  we can eliminate  $\alpha$  from the integral equations, and so at the end  $x_0$  and  $\alpha$  could be determined directly from  $\phi_1(x)$  and  $\psi_1(x)$ , which would be solved without any dependence on  $\alpha$ . The equations we have to solve are

$$\phi_1(x) + \int_0^a M_1(x, t)\phi_1(t) dt + f \int_0^a M_2(x, t)\psi_1(t) dt = -4x, \quad (\text{B.40})$$

$$\psi_1(x) + f \int_0^a N_1(x, t)\phi_1(t) dt - \int_0^a N_2(x, t)\psi_1(t) dt = 0. \quad (\text{B.41})$$

In order to determine the two remaining parameters we have to go back to Eq. (B.25) and balance it directly at  $x = 0$ . This implies

$$4x_0 = f \int_0^a dt \left( \phi_1(t) \int_0^\infty G(k)J_0(kt) dk \right) - \int_0^a \psi_1(t) dt - \int_0^a dt \left( t\psi_1(t) \int_0^\infty F(k)J_1(kt) dk \right) \quad (\text{B.42})$$

which will determine  $x_0$ . Then, we plug in  $x = 0$  to the derivative of Eq. (B.18), and we get

$$\frac{1}{\alpha} = x_0^2 - \int_0^a dt \left( \phi_1(t) \int_0^\infty \frac{1 + F(k)}{2k} J_0(kt) dk \right) - f \int_0^a dt \left( t\psi_1(t) \int_0^\infty \frac{G(k)}{2k} J_1(kt) dk \right) \quad (\text{B.43})$$

## Annexes au chapitre 2

---

At this point the problem is basically solved, and any physical quantity can be expressed as a function of  $\phi_1(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $x_0$  and  $\alpha$ . A quantity of great interest is the total force applied to the upper layer

$$F = - \int_{-a}^a \sigma_{yy}(x, 1) dx = -\pi \int_0^a \phi_1(t) dt. \quad (\text{B.44})$$

Also, the pressure  $\sigma_{yy}(x, 0)$  and the shear  $\sigma_{xy}(x, 0)$  at the lower layer can be expressed (after proper dimensionalization by  $\mu$  (the shear modulus), by  $h$  (the width of the elastomer) and by  $R$  (the curvature of the indenter))

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{\mu h}{2R} \left[ \int_0^a [Z_1(x, t) + f Z_3(x, t)] \phi_1(t) dt + \int_0^a [-f Z_2(x, t) + Z_4(x, t)] t \psi_1(t) dt \right] \quad (\text{B.45})$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = \frac{\mu h}{2R} \left[ - \int_0^a [f Z_5(x, t) + Z_3(x, t)] \phi_1(t) dt + \int_0^a [Z_2(x, t) - f Z_6(x, t)] t \psi_1(t) dt \right] \quad (\text{B.46})$$

where the  $Z_i(x, t)$  are the following kernels (which do not depend on the resolution of the unknown quantities)

$$Z_1(x, t) = \int_0^\infty A(k) \cos(kx) J_0(kt) dk \quad (\text{B.47})$$

$$Z_2(x, t) = \int_0^\infty B(k) \cos(kx) J_1(kt) dk \quad (\text{B.48})$$

$$Z_3(x, t) = \int_0^\infty B(k) \sin(kx) J_0(kt) dk \quad (\text{B.49})$$

$$Z_4(x, t) = \int_0^\infty A(k) \sin(kx) J_1(kt) dk \quad (\text{B.50})$$

$$Z_5(x, t) = \int_0^\infty C(k) \cos(kx) J_0(kt) dk \quad (\text{B.51})$$

$$Z_6(x, t) = \int_0^\infty C(k) \sin(kx) J_1(kt) dk \quad (\text{B.52})$$

where  $A(k)$ ,  $B(k)$  and  $C(k)$  are given by

$$A(k) = \frac{2(\cosh(k) + k \sinh(k))}{\cosh(2k) + 1 + 2k^2}, \quad (\text{B.53})$$

$$B(k) = \frac{2k \cosh(k)}{\cosh(2k) + 1 + 2k^2}, \quad (\text{B.54})$$

$$C(k) = \frac{2(\cosh(k) - k \sinh(k))}{\cosh(2k) + 1 + 2k^2}. \quad (\text{B.55})$$



# Annexe C

## Annexes au chapitre 4

### C.1 Correction au module de Young en épaisseur finie

L'épaisseur finie du bloc élastique modifie le champ de pression interfacial par rapport à un contact de Hertz, d'autant plus que la charge normale exercée est importante. D'après *Dimitriadis et al.* [66], la correction à apporter à la relation force-déplacement  $F_N(\delta)$  pour un contact entre une sphère de rayon  $R$  et un film d'épaisseur  $h$  lié à sa base, indenté de la distance  $\delta$ , a pour expression :

$$F_N = \frac{16E}{9} R^{1/2} \delta^{3/2} [1 + 1.133\chi + 1.283\chi^2 + 0.769\chi^3 + 0.0975\chi^4] \quad (\text{C.1})$$

où  $\chi = \frac{\sqrt{R\delta}}{h}$ . Au cours des expériences réalisées au Chapitre 4.1,  $\delta < 150\mu\text{m}$ , soit  $\chi < 0.45$ , ce qui nous place dans le domaine de validité ( $\chi < 1$ ) de cette correction. Au Chapitre 4.1, elle a été utilisée sous la forme suivante :

$$F_N = \frac{16E_c}{9} R^{1/2} \delta^{3/2} \quad (\text{C.2})$$

où

$$E_c = E(1 + 1.133\chi + 1.283\chi^2 + 0.769\chi^3 + 0.0975\chi^4) \quad (\text{C.3})$$

est un module de Young effectif du bloc élastique.

Nous faisons alors l'hypothèse que le champ de pression conserve une forme Hertzienne malgré l'épaisseur finie du bloc de PDMS. Pour tester cette hypothèse, le modèle de Frétygny et Chateauminois (voir Chapitre 1.2.2) a été appliqué à la géométrie particulière de notre expérience. La relation  $F_N(\delta)$  obtenue dans le cadre du modèle FC s'écarte au maximum de 3% par rapport à celle proposée par Dimitriadis, dans la gamme de charge normale exercée au cours des expériences du Chapitre 4.1.

La Figure C.1 représente, pour la charge normale maximale appliquée, la dépendance de  $\left(\frac{p}{p_0}\right)^2$  avec  $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ . La quasi-parfaite linéarité de cette courbe montre que, même pour les conditions expérimentales les plus défavorables que nous ayons réalisées, le champ de pression conserve sa forme elliptique (Hertzienne).

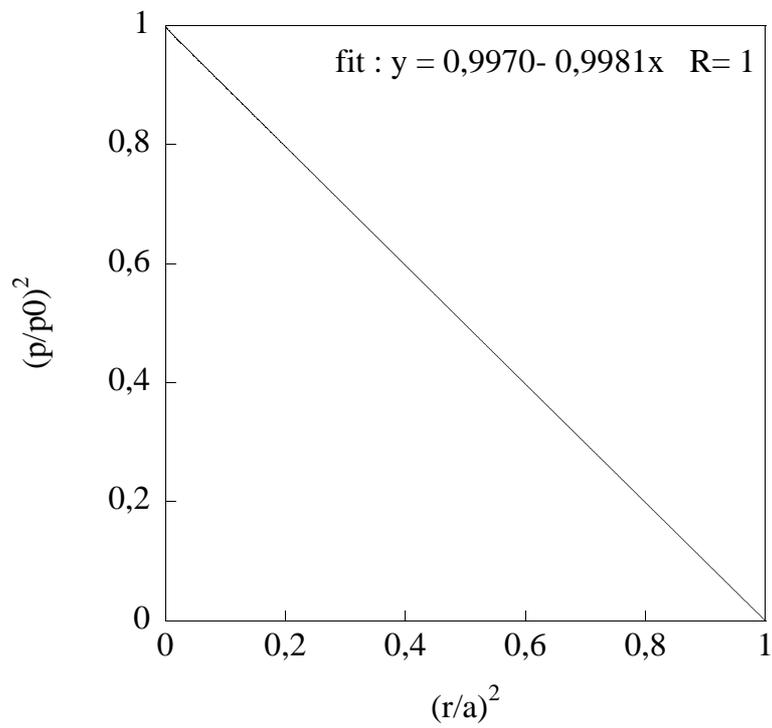


FIG. C.1 – Relation entre  $\left(\frac{p}{p_0}\right)^2$  et  $\left(\frac{r}{a}\right)^2$  pour  $F_N = 1.4 N$ , calculée à partir du modèle FC. La linéarité quasi-parfaite (voir fit) montre que le profil de pression possède une forme elliptique.

# Bibliographie

- [1] F. Bowden and D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford University Press, 1950.
- [2] B. N. J. Persson, O. Albohr, U. Tartaglino, A. I. Volokitin, and E. Tosatti, “On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. 17, no. 1, pp. R1–R62, 2005. Available from : <http://dx.doi.org/10.1088/0953-8984/17/1/R01>.
- [3] B. N. J. Persson and E. Tosatti, “The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids,” *J. Chem. Phys.*, vol. 115, pp. 5597–5610, Sept. 2001. Available from : <http://dx.doi.org/10.1063/1.1398300>.
- [4] A. Peressadko, N. Hosoda, and B. Persson, “Influence of surface roughness on adhesion between elastic bodies,” *Physical Review Letters*, vol. 95, p. 124301, 2005. Available from : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.124301>.
- [5] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson, “Contact of nominally flat surfaces,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, vol. 295, pp. 300–319, Dec. 1966. Available from : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1966.0242>.
- [6] B. Persson, *Sliding Friction*. Springer, 2000.
- [7] F. Heslot, T. Baumberger, B. Perrin, B. Caroli, and C. Caroli, “Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics : Experiments and a heuristic model,” *Phys. Rev. E*, vol. 49, pp. 4973–, June 1994. Available from : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.49.4973>.
- [8] P. Berthoud, T. Baumberger, T. G’Sell, and J.-M. Hiver, “Physical analysis of the state-and rate-dependent friction law : Static friction,” *Physical Review B*, vol. 59, pp. 14313–14327, June 1999. Available from : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.59.14313>.
- [9] O. Ronsin and K. L. Coeyrehourcq, “State, rate and temperature-dependent sliding friction of elastomers,” *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 457, pp. 1277–1294, June 2001. Available from : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2000.0718>.
- [10] H. Hertz, *Miscellaneous papers*. Macmillan, 1896.
- [11] L. Landau and E. Lifchitz, *Théorie de l’élasticité*. 1967.
- [12] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1985.

## Bibliographie

---

- [13] D. A. Spence, “The hertz contact problem with finite friction,” *Journal of Elasticity*, vol. 5, pp. 297–319, Nov. 1975. Available from : <http://dx.doi.org/10.1007/BF00126993>.
- [14] C. Cattaneo, “Sul contatto di due corpi elastici : distribution locale dei sforzi,” *Rendiconti dell’Accademia nazionale dei Lincei*, vol. 27, p. 214, 1938.
- [15] R. D. Mindlin, “Compliance of elastic bodies in contact,” *Trans. ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics*, vol. 16, p. 259, 1949.
- [16] J. A. Greenwood and J. H. Tripp, “The elastic contact of rough spheres,” *Trans. ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics*, vol. 34, p. 153, 1967.
- [17] K. L. Johnson, K. Kendall, and A. D. Roberts, “Surface energy and the contact of elastic solids,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, vol. 324, pp. 301–313, Sept. 1971. Available from : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1971.0141>.
- [18] J. Rice and A. Ruina, “Stability of steady frictional slipping,” *J. Appl. Mech.*, vol. 50, no. 2, pp. 343–349, 1983.
- [19] C. Caroli and P. Nozières, “Hysteresis and elastic interactions of microasperities in dry friction,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 4, pp. 233–246, Aug. 1998. Available from : <http://dx.doi.org/10.1007/s100510050374>.
- [20] T. Baumberger and C. Caroli, “Solid friction from stick-slip down to pinning and aging,” *Advances in Physics*, vol. 55, no. 3, pp. 279–348, 2006. Available from : <http://dx.doi.org/10.1080/00018730600732186>.
- [21] K. A. Grosch, “The relation between the friction and visco-elastic properties of rubber,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, vol. 274, pp. 21–39, June 1963. Available from : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1963.0112>.
- [22] A. Schallamach, “A theory of dynamic rubber friction,” *Wear*, vol. 6, no. 5, pp. 375–382, 1963. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648\(63\)90206-0](http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648(63)90206-0).
- [23] K. Vorvolakos and M. Chaudhury, “The effects of molecular weight and temperature on the kinetic friction of silicone rubbers,” *Langmuir*, vol. 19, pp. 6778–6787, Aug. 2003. Available from : <http://dx.doi.org/10.1021/la027061q>.
- [24] L. Bureau and L. Leger, “Sliding friction at a rubber/brush interface,” *Langmuir*, vol. 20, pp. 4523–4529, May 2004. Available from : <http://dx.doi.org/10.1021/la036235g>.
- [25] D. Tabor and R. H. S. Winterton, “The direct measurement of normal and retarded van der waals forces,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, vol. 312, pp. 435–450, Sept. 1969. Available from : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1969.0169>.
- [26] J. N. Israelachvili, “Adhesion forces between surfaces in liquids and condensable vapours,” *Surface Science Reports*, vol. 14, pp. 109–159, Feb. 1992. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/0167-5729\(92\)90015-4](http://dx.doi.org/10.1016/0167-5729(92)90015-4).

- 
- [27] L. Bureau, *Elasticité et rhéologie d'une interface macroscopique : du piégeage au frottement solide*. PhD thesis, Université Paris 7, 2002. Available from : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00001413/fr/>.
- [28] A. Schallamach, "How does rubber slide?," *Wear*, vol. 17, pp. 301–312, Apr. 1971. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648\(71\)90033-0](http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648(71)90033-0).
- [29] M. Barquins, "Energy dissipation in schallamach waves," *Wear*, vol. 91, pp. 103–110, Oct. 1983. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648\(83\)90110-2](http://dx.doi.org/10.1016/0043-1648(83)90110-2).
- [30] T. Baumberger, C. Caroli, and O. Ronsin, "Self-healing slip pulses along a gel/glass interface," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, pp. 075509–, Feb. 2002. Available from : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.88.075509>.
- [31] T. Baumberger, C. Caroli, and O. Ronsin, "Self-healing slip pulses and the friction of gelatin gels," *The European Physical Journal E - Soft Matter*, vol. 11, pp. 85–93, May 2003. Available from : <http://dx.doi.org/10.1140/epje/i2003-10009-7>.
- [32] S. M. Rubinstein, G. Cohen, and J. Fineberg, "Detachment fronts and the onset of dynamic friction," *Nature*, vol. 430, pp. 1005–1009, Aug. 2004. Available from : <http://dx.doi.org/10.1038/nature02830>.
- [33] F. Brochard-Wyart and P. de Gennes, "Naive model for stick-slip processes," *The European Physical Journal E - Soft Matter*, vol. 23, pp. 439–444, Aug. 2007. Available from : <http://dx.doi.org/10.1140/epje/i2007-10215-3>.
- [34] E. Verneuil, *Ecoulements et adhésion : rôle des microstructurations*. PhD thesis, Université Paris VI, 2005.
- [35] P. Tabeling, *Introduction à la microfluidique*. Collection Echelles, 2003.
- [36] O. du Roure, A. Saez, A. Buguin, R. H. Austin, P. Chavrier, P. Silberzan, and B. Ladoux, "Force mapping in epithelial cell migration," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 102, pp. 2390–2395, Feb. 2005. Available from : <http://www.pnas.org/cgi/content/abstract/102/7/2390>.
- [37] A. J. Rosakis, O. Samudrala, R. P. Singh, and A. Shukla, "Intersonic crack propagation in bimaterial systems," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 46, pp. 1789–1814, Oct. 1998. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096\(98\)00036-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5096(98)00036-2).
- [38] H. Fessler and E. Ollerton, "Contact stresses in toroids under radial loads," *British Journal of Applied Physics*, vol. 8, p. 387, 1957. Available from : [http://cnrs-iop.inist.fr/cgi-bin/sciserv.pl?collection=iop&journal=05083443&issue=v08i0010&article=387\\_csiturl](http://cnrs-iop.inist.fr/cgi-bin/sciserv.pl?collection=iop&journal=05083443&issue=v08i0010&article=387_csiturl).
- [39] I. Darian-Smith, *Handbook of Physiology, The nervous system III, The sense of touch : performance and peripheral neural processes*, ch. 17, p. 739.
- [40] J. W. Gardner, *Microsensors : Principles and Applications*. John Wiley & Sons Ltd, 1994.
- [41] R. Howe and M. Cutkosky, "Dynamic tactile sensing - perception of fine surface-features with stress rate sensing," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 9, pp. 140–151, 1993. Available from : <http://dx.doi.org/10.1109/70.238278>.

## Bibliographie

---

- [42] D. De Rossi, F. Carpi, and E. P. Scilingo, “Polymer based interfaces as bioinspired ‘smart skins’,” *Advances in Colloid and Interface Science*, vol. 116, pp. 165–178, Nov. 2005. Available from : <http://dx.doi.org/10.1016/j.cis.2005.05.002>.
- [43] C. Domenici and D. De Rossi, “A stress-component-selective tactile sensor array,” *Sensors and Actuators A : Physical*, vol. 31, pp. 97–100, Mar. 1992. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/0924-4247\(92\)80086-I](http://dx.doi.org/10.1016/0924-4247(92)80086-I).
- [44] S. Lacour, C. Tsay, and S. Wagner, “An elastically stretchable tft circuit,” *IEEE Electron Device Letters*, vol. 25, pp. 792–794, 2004. Available from : <http://dx.doi.org/10.1109/LED.2004.839227>.
- [45] T. Someya, T. Sekitani, S. Iba, Y. Kato, H. Kawaguchi, and T. Sakurai, “A large-area, flexible pressure sensor matrix with organic field-effect transistors for artificial skin applications,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 101, pp. 9966–9970, July 2004. Available from : <http://www.pnas.org/cgi/content/abstract/101/27/9966>.
- [46] V. Maheshwari and R. F. Saraf, “High-resolution thin-film device to sense texture by touch,” *Science*, vol. 312, pp. 1501–1504, June 2006. Available from : <http://dx.doi.org/10.1126/science.1126216>.
- [47] J. E. Mark, ed., *Polymer Data handbook*. Oxford University Press, 1999. Available from : [http://www.qmc.ufsc.br/~minatti/docs/20061/polymer\\_data\\_handbook.pdf](http://www.qmc.ufsc.br/~minatti/docs/20061/polymer_data_handbook.pdf).
- [48] K. N. G. Fuller and D. Tabor, “The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, vol. 345, pp. 327–342, Sept. 1975. Available from : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1975.0138>.
- [49] M. K. Chaudhury and G. M. Whitesides, “Direct measurement of interfacial interactions between semispherical lenses and flat sheets of poly(dimethylsiloxane) and their chemical derivatives,” *Langmuir*, vol. 7, pp. 1013–1025, May 1991. Available from : <http://dx.doi.org/10.1021/la00053a033>.
- [50] K. R. Shull, “Contact mechanics and the adhesion of soft solids,” *Materials Science and Engineering : R : Reports*, vol. 36, pp. 1–45, Jan. 2002. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/S0927-796X\(01\)00039-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0927-796X(01)00039-0).
- [51] K. R. Shull, D. Ahn, W.-L. Chen, C. M. Flanigan, and A. J. Crosby, “Axisymmetric adhesion tests of soft materials,” *Macromolecular Chemistry and Physics*, vol. 199, no. 4, pp. 489–511, 1998. Available from : [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-3935\(19980401\)199:4<489::AID-MACP489>3.0.CO;2-A](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1521-3935(19980401)199:4<489::AID-MACP489>3.0.CO;2-A).
- [52] C. Fretigny and A. Chateauminois, “Solution for the elastic field in a layered medium under axisymmetric contact loading,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, vol. 40, no. 18, pp. 5418–5426, 2007. Available from : <http://dx.doi.org/10.1088/0022-3727/40/18/S02>.
- [53] J. Max and J.-L. Lacoume, *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. 1996.

- 
- [54] J. H. Dieterich and B. D. Kilgore, “Imaging surface contacts : power law contact distributions and contact stresses in quartz, calcite, glass and acrylic plastic,” *Tectonophysics*, vol. 256, pp. 219–239, May 1996. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/0040-1951\(95\)00165-4](http://dx.doi.org/10.1016/0040-1951(95)00165-4).
- [55] J. H. Dieterich and B. D. Kilgore, “Direct observation of frictional contacts : New insights for state-dependent properties,” *Pure and Applied Geophysics*, vol. 143, pp. 283–302, Mar. 1994. Available from : <http://dx.doi.org/10.1007/BF00874332>.
- [56] P. Nayak, “Random process model of rough surfaces,” *ASME J. Lubr. Technol.*, vol. 93, pp. 398–407, 1971.
- [57] F. Hild, B. Raka, M. Baudequin, S. Roux, and F. Cantelaube, “Multiscale displacement field measurements of compressed mineral-wool samples by digital image correlation,” *Appl. Opt.*, vol. 41, pp. 6815–6828, Nov. 2002. Available from : <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-41-32-6815>.
- [58] K. L. Johnson, “Surface interaction between elastically loaded bodies under tangential forces,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences (1934-1990)*, vol. 230, pp. 531–548, July 1955. Available from : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1955.0149>.
- [59] P. Berthoud and T. Baumberger, “Shear stiffness of a solid-solid multicontact interface,” *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 454, pp. 1615–1634, June 1998. Available from : <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1998.0223>.
- [60] L. Bureau, T. Baumberger, and C. Caroli, “Jamming creep of a frictional interface,” *Phys. Rev. E*, vol. 64, pp. 031502–, Aug. 2001. Available from : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.64.031502>.
- [61] M. Fontanille and Y. Gnanou, *Chimie et physico-chimie des polymères*. Dunod, 2002.
- [62] J. Ferry, *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, 1980.
- [63] M. Adda-Bedia and M. B. Amar, “Fracture spacing in layered materials,” *Physical Review Letters*, vol. 86, pp. 5703–5706, June 2001. Available from : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.5703>.
- [64] L. Freund, *Dynamic Fracture Mechanics*. Cambridge University Press, 1990.
- [65] I. N. Sneddon and R. P. Srivastav, “The stress field in the vicinity of a griffith crack in a strip of finite width,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 9, pp. 479–488, May 1971. Available from : [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90049-8](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(71)90049-8).
- [66] E. K. Dimitriadis, F. Horkay, J. Maresca, B. Kachar, and R. S. Chadwick, “Determination of elastic moduli of thin layers of soft material using the atomic force microscope,” *Biophys. J.*, vol. 82, pp. 2798–2810, May 2002. Available from : <http://www.biophysj.org/cgi/content/abstract/82/5/2798>.



## Mécanique du contact aux échelles mésoscopiques

Deux méthodes expérimentales ont été développées pour mesurer, pour une interface multi-contacts élastomère / verre, les champs mécaniques en volume (micro-capteur de force MEMS noyé sous le film élastique) et à l'interface (imagerie de contact par transmission), résolus spatialement à une échelle intermédiaire entre celle du contact apparent et celle des micro-contacts.

La mesure MEMS a permis d'obtenir les champs de contrainte sous charge normale et en glissement stationnaire, en très bon accord avec des modèles mécaniques simples. Pour des substrats de rugosité périodique le lien entre spectre des contraintes et topographie de surface a pu être interprété en termes de filtrage spectral, pertinent pour comprendre la perception tactile.

La mesure optique a permis, en analysant la répartition spatiale de l'intensité, d'obtenir le champ de pression de surface. Sa dépendance avec les propriétés de la couche rugueuse a été confrontée au modèle de Greenwood-Tripp. Par suivi des aspérités, le champ de déplacement a été mesuré avec une résolution sub-micronique et a mis en évidence la coexistence de zones glissantes et adhérentes prédite par Cattaneo et Mindlin.

### Mots-clés :

*Frottement élastomère / verre, Interface multi-contacts, Capteur MEMS, Imagerie de contact, Photolithographie douce, Perception tactile*

## Contact mechanics at mesoscopic length scales

Two experimental methods have been developed to measure, for an elastomer / glass multi-contact interface, the mechanical fields inside the volume (MEMS force micro-sensor embedded under the elastic film) and at the interface (transmitted light contact imaging), at length scales intermediate between the apparent contact one and the micro-contacts one.

The MEMS measurement has allowed us to obtain the stress fields under normal load and in steady sliding regime, with a very good agreement with simple mechanical models. For periodically rough substrates the relation between the stress spectrum and the surface topography has been interpreted in terms of spectral filtering, relevant to understanding tactile perception.

The optical measurement has allowed us, by analysing the spatial distribution of the intensity, to obtain the interfacial pressure field. Its dependence with the rough layer properties has been confronted to the Greenwood-Tripp model. By tracking the asperities, the displacement field has been measured with a sub-micronic resolution and has shown the coexistence of slipping and sticking zones predicted by Cattaneo and Mindlin.

### Keywords :

*Elastomer / glass friction, Multi-contact interface, MEMS sensor, Contact imaging, Soft photolithography, Tactile perception*