



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions

Vincent Guillemaud

► **To cite this version:**

Vincent Guillemaud. Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2007. Français. NNT: . tel-00169178

**HAL Id: tel-00169178**

**<https://theses.hal.science/tel-00169178>**

Submitted on 1 Sep 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PROVENCE, AIX-MARSEILLE I  
U.F.R. M.I.M.  
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
*Spécialité : Mathématiques Appliquées*

par

**Vincent GUILLEMAUD**

sous la direction de M. Jean-Marc HÉRARD

*Titre :*

**Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques  
par une approche bifluide à deux pressions**

*Organisme d'accueil :*

**Commissariat à l'Énergie Atomique - Centre de Saclay**

soutenue publiquement le 27 mars 2007

### JURY

<b>M. Alain FORESTIER</b>	Ingénieur, CEA Saclay	<i>Rapporteur</i>
<b>M. Thierry GALLOUËT</b>	Professeur, Université d'Aix-Marseille I	<i>Président du jury</i>
<b>M. Sergey GAVRILYUK</b>	Professeur, Université d'Aix-Marseille III	<i>Examineur</i>
<b>M. Philippe HELLUY</b>	Professeur, Université de Strasbourg	<i>Rapporteur</i>
<b>M. Jean-Marc HÉRARD</b>	Ingénieur, EDF Chatou	<i>Directeur de thèse</i>
<b>M. Samuel KOKH</b>	Ingénieur, CEA Saclay	<i>Encadrant</i>



**Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques  
par une approche bifluide à deux pressions**







## Remerciements

De l'automne 2003 à l'automne 2006, cette thèse a été réalisée au Commissariat à l'Énergie Atomique de Saclay. Au-delà des facilités matérielles fournies par cette institution, certaines personnes ont contribué à créer un climat favorable à l'achèvement de ce projet. Avant d'entrer dans le vif du sujet, je tiens tout d'abord à leur exprimer ma gratitude.

Dans un premier temps, mes remerciements s'adressent aux différents membres de mon jury de thèse. Ces dernières années, j'ai fait leur connaissance par le biais de leurs publications. Leurs travaux ont inspiré mes recherches. C'est aujourd'hui un honneur de les voir évaluer cette thèse. Je remercie donc tout d'abord mes rapporteurs, messieurs Forestier et Helluy, pour leur patiente relecture de ce manuscrit. En tant qu'examineurs, je remercie messieurs Gallouët et Gavriyuk pour leur participation à ce jury. En tant qu'encadrants, je remercie enfin messieurs Hérard et Kokh pour la direction qu'ils ont su donner à ma thèse, le premier dans le cadre de l'université de Provence, le second dans le cadre du Commissariat à l'Énergie Atomique.

Au quotidien, j'ai de plus bénéficié d'un environnement de qualité au sein du Laboratoire d'Étude Thermique des Réacteurs du CEA Saclay. Par son accueil chaleureux et sa compétence, chacun des membres de ce laboratoire a favorisé le développement de mes recherches. Je les prie tous ici de croire à ma reconnaissance.

Mes derniers remerciements s'adressent enfin à mes proches. Dans les quelques pages qui suivent, vous découvrirez ce qui m'a occupé ces dernières années. En résumé, il y est question d'histoires de coeur qui ne font pas dans la dentelle, plutôt dans l'accidentel. Je vous laisse vous y retrouver. En premier lieu, je remercie mes parents et ma soeur pour l'affection qu'ils m'ont témoignée et le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de mes études. Dans le désordre, je remercie enfin Guillaume, Romain, Augustin, Xavier, Elise, François, Thomas, Sophie et Marianne, chacun pour la chaleur de son amitié.





# Sommaire

<b>Avant-propos : contexte, objectifs et principaux résultats</b>	<b>1</b>
<b>I Un modèle bifluide à deux pressions pour les écoulements diphasiques</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2 Entropie et lois de fermeture pour les écoulements diphasiques sans transfert de masse</b>	<b>15</b>
2.1 Lois de comportement et hypothèses . . . . .	15
2.2 Définition d'une entropie . . . . .	17
2.3 Construction d'une inégalité d'entropie . . . . .	19
2.4 Admissibilité des solutions régulières bornées . . . . .	21
<b>Annexe A</b>	<b>25</b>
<b>3 Entropie et lois de fermeture pour les écoulements diphasiques en transition de phase</b>	<b>27</b>
3.1 Lois de comportement et hypothèses . . . . .	27
3.2 Définition d'une entropie . . . . .	28
3.3 Construction d'une inégalité d'entropie . . . . .	30
3.4 Modélisation des coefficients d'échanges interfaciaux . . . . .	33
3.5 Admissibilité des solutions régulières bornées . . . . .	35
<b>4 La partie convective</b>	<b>39</b>
4.1 Nature de la partie convective . . . . .	40
4.2 Nature des champs caractéristiques et définition des produits non-conservatifs . . . . .	42
4.2.1 Nature du champ caractéristique associé à la vitesse interfaciale . . . . .	42
4.2.2 Nature des champs caractéristiques associés aux sous-systèmes de type Euler . . . . .	46
4.3 Le problème de Riemann : étude champ par champ . . . . .	48
4.3.1 Connexions à travers les ondes de choc . . . . .	49
4.3.2 Connexions à travers les détente . . . . .	50
4.3.3 Connexion à travers l'onde de fraction volumique . . . . .	51
<b>5 Dynamique des transferts interfaciaux</b>	<b>61</b>
5.1 Dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements sans transition de phase . . . . .	62
5.1.1 Equilibres et contraintes . . . . .	62
5.1.2 Stabilité non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipitesse . . . . .	65
5.1.3 Stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipitesse . . . . .	67
5.2 Dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements en transition de phase . . . . .	69
5.2.1 Equilibres et contraintes . . . . .	69
5.2.2 Stabilité non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équipitesse . . . . .	73
5.2.3 Stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équipitesse . . . . .	74

<b>6</b>	<b>Une méthode de relaxation instantanée pour la simulation des modèles bifluides partiellement équilibrés</b>	<b>81</b>
6.1	Projection sur l'équilibre isobare . . . . .	82
6.1.1	Equilibres et contraintes . . . . .	82
6.1.2	Stabilité de l'équilibre isobare . . . . .	83
6.1.3	Nature du système relaxé . . . . .	85
6.2	Projection sur l'équilibre isobare équivitesse . . . . .	87
6.2.1	Equilibres et contraintes . . . . .	87
6.2.2	Stabilité de l'équilibre isobare équivitesse . . . . .	88
6.2.3	Nature du système relaxé . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Schémas numériques</b>	<b>95</b>
7.1	Approximation des systèmes de lois de conservation sous forme conservative : quelques rappels . . . . .	96
7.1.1	La discrétisation Volumes Finis . . . . .	96
7.1.2	Le schéma de Godunov . . . . .	97
7.1.3	Le schéma de Rusanov . . . . .	98
7.1.4	Le schéma VFRoe-ncv . . . . .	98
7.2	Approximation de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations . . . . .	99
7.2.1	La discrétisation Volumes Finis . . . . .	100
7.2.2	Une adaptation non-conservative du schéma de Rusanov . . . . .	101
7.2.3	Une adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv . . . . .	103
7.3	Approximation des transferts interfaciaux . . . . .	108
7.3.1	Un schéma d'intégration pour la dynamique des transferts interfaciaux sans transition de phase . . . . .	109
7.3.2	Un schéma d'intégration pour la dynamique des transferts interfaciaux avec transition de phase . . . . .	113
7.4	Conditions aux limites . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>121</b>
8.1	Validation des schémas de calcul . . . . .	121
8.1.1	Simulation de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations . . . . .	121
8.1.2	Simulation de la relaxation instantanée . . . . .	123
8.1.3	Simulation de la dynamique des transferts interfaciaux . . . . .	123
8.2	Simulation d'écoulements diphasiques en géométries complexes . . . . .	125
8.2.1	Dépréssurisation d'une enceinte . . . . .	125
8.2.2	Dépréssurisation d'un assemblage de crayons de combustible . . . . .	126
8.3	Comparaison des modèles à une et deux pressions . . . . .	126
8.3.1	Simulation des parties convectives . . . . .	127
8.3.2	Simulation d'un écoulement liquide-gaz sans transition de phase . . . . .	128
8.3.3	Simulation d'un écoulement liquide-vapeur en transition de phase . . . . .	129
<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>175</b>
<b>II</b>	<b>Un modèle de turbulence simple pour les écoulements diphasiques</b>	<b>177</b>
<b>10</b>	<b>Introduction</b>	<b>179</b>
<b>11</b>	<b>Entropie et lois de fermeture pour les écoulements diphasiques turbulents en transition de phase</b>	<b>185</b>
11.1	Définition d'une entropie . . . . .	185
11.2	Construction d'une inégalité d'entropie . . . . .	187
11.3	Modélisation des coefficients d'échange . . . . .	188

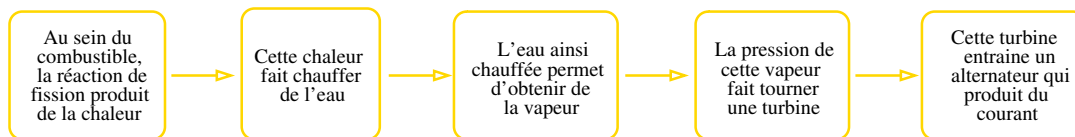
<b>12 La partie convective</b>	<b>191</b>
12.1 Nature de la partie convective . . . . .	192
12.2 Nature des champs caractéristiques et définition des produits non-conservatifs . . . . .	193
12.2.1 Nature du champ caractéristique associé à la vitesse interfaciale . . . . .	193
12.2.2 Nature des champs caractéristiques associés aux sous-systèmes de type Euler turbulent . . . . .	196
12.3 Le problème de Riemann : étude champ par champ . . . . .	197
12.3.1 Connexions à travers les ondes de choc . . . . .	198
12.3.2 Connexions à travers les détentes . . . . .	200
12.3.3 Connexion à travers l'onde de fraction volumique . . . . .	201
<b>13 Dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements diphasiques turbulents en transition de phase</b>	<b>209</b>
13.1 Equilibres et contraintes . . . . .	209
13.2 Stabilité de l'équilibre liquide-vapeur . . . . .	210
<b>14 Schémas numériques</b>	<b>213</b>
14.1 La discrétisation Volumes Finis . . . . .	214
14.2 Différentes adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov . . . . .	214
14.3 Différentes adaptations non-conservatives du schéma VFRoe-ncv . . . . .	217
<b>15 Résultats numériques</b>	<b>221</b>
15.1 Simulation de la partie convective . . . . .	221
15.2 Simulation des transferts interfaciaux . . . . .	223
<b>16 Conclusion</b>	<b>239</b>
<b>III Une procédure de reconstruction pour la topologie diphasique</b>	<b>241</b>
<b>17 Couplage entre un modèle bifluide à deux pressions et une équation de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale</b>	<b>243</b>
17.1 Introduction . . . . .	243
17.2 Entropie et lois de fermeture . . . . .	246
17.3 La partie convective . . . . .	250
17.4 Dynamique des transferts interfaciaux . . . . .	251
17.5 Reconstruction topologique . . . . .	252
17.6 Schémas numériques . . . . .	252
17.7 Résultats numériques . . . . .	253
17.8 Conclusion . . . . .	255
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>259</b>



# Avant-propos : contexte, objectifs et principaux résultats

Lors du fonctionnement des systèmes énergétiques, nombreux sont les procédés industriels à faire intervenir plusieurs constituants au sein d'un même écoulement. Lorsque ces différents constituants sont immiscibles, on parle d'écoulements à plusieurs phases. De tels écoulements multiphasiques apparaissent notamment en aéronautique où l'on étudie la combustion des mélanges d'air et de carburant dans les moteurs. De tels écoulements interviennent également dans l'industrie chimique lors de certaines opérations de décantation ou de distillation. Dans cette thèse, on s'intéresse davantage aux écoulements liquide-vapeur rencontrés en ingénierie nucléaire. De tels écoulements font intervenir une même espèce sous la forme de deux phases différentes. On parle alors d'écoulements en transition de phase.

Dans l'industrie nucléaire, de telles transitions de phase sont utilisées pour produire du courant. De manière analogue aux centrales électriques classiques, une centrale nucléaire est une machine thermique qui possède une source froide et une source chaude. Comme pour toutes les centrales électriques, la source chaude s'identifie à un combustible, la source froide à un milieu extérieur, typiquement une rivière ou l'air ambiant. De manière générale, les centrales électriques réalisent la conversion de la chaleur produite par le combustible en un mouvement de rotation pour un alternateur. Cette alternateur produit alors du courant. La spécificité des centrales nucléaires tient au combustible utilisé. Ce combustible est constitué de matières fissiles, généralement de l'uranium faiblement enrichi ou un mélange d'uranium et de plutonium. Une réaction de fission se produit spontanément au sein de ce combustible. Il s'agit de la réaction en chaîne. Cette réaction dégage de la chaleur. Cette chaleur demande alors à être récupérée pour mettre en rotation l'alternateur. Pour réaliser cette conversion thermomécanique, on utilise un fluide caloporteur. Dans l'industrie nucléaire, l'eau est généralement le fluide caloporteur retenu. Cette eau chauffée par la réaction de fission permet d'obtenir de la vapeur. La pression existant au sein de cette vapeur met en rotation une turbine sur laquelle est fixée l'alternateur. Ce principe de fonctionnement pour les centrales nucléaires se résume au diagramme suivant :



Pour utiliser l'eau comme fluide caloporteur dans les centrales nucléaires, deux concepts différents de réacteur se distinguent dans l'industrie. Le premier s'appuie sur la notion de réacteur à eau bouillante (REB). Suivant ce concept, l'eau entre en ébullition au sein même du réacteur nucléaire. Un seul circuit hydraulique alimente donc simultanément le réacteur et la turbine. Ce premier concept est schématisé à la figure 1. Pour des raisons de sécurité, un deuxième concept est maintenant plus largement utilisé. Il s'agit des réacteurs à eau pressurisée (REP) pour lesquels un circuit primaire contenant le réacteur échange de la chaleur avec un circuit secondaire contenant la turbine. Ce second concept est schématisé à la figure 2. Pour ce second concept de réacteur, l'eau contenue dans le circuit primaire est maintenue sous pression. Dans un régime de fonctionnement nominal, cette eau contenue dans le circuit primaire est constamment liquide

à une température et une pression d'environ 300 °C et 155 bar. La capacité de l'eau liquide à emmagasiner de la chaleur étant supérieure à celle de la vapeur, l'eau liquide contenue dans le circuit primaire est maintenue sous pression pour refroidir au mieux le combustible nucléaire. Au niveau du générateur de vapeur, cette chaleur du circuit primaire vaporise l'eau liquide du circuit secondaire. Cette vapeur se propage alors dans le circuit secondaire pour mettre en rotation la turbine. Pour des raisons de sûreté, ce second concept de réacteur est maintenant préféré car il assure un meilleur confinement du réacteur nucléaire. A l'heure actuelle, ce type de réacteur à eau pressurisée équipe l'intégralité du parc nucléaire français et 80 % du parc européen.

Pour optimiser ces systèmes énergétiques dans des régimes nominaux ou accidentels, une connaissance précise des écoulements liquide-vapeur est nécessaire. En ce qui concerne les réacteurs à eau sous pression, on s'intéresse par exemple à la rupture du circuit de refroidissement primaire. Dans ce scénario d'accident, la rupture du circuit de refroidissement primaire induit une brusque dépressurisation du fluide caloporteur. Cette brusque dépressurisation du fluide caloporteur peut conduire à la vaporisation de l'eau liquide baignant le combustible nucléaire. La vapeur emmagasinant moins de chaleur que l'eau liquide, le combustible nucléaire peut dès lors se trouver insuffisamment refroidi, puis entrer en fusion et enfin altérer la structure du réacteur. Pour éviter ces extrémités, on se demande comment limiter la formation des poches de vapeur au niveau du combustible, le temps d'arrêter la réaction en chaîne ou de représsuriser le milieu par le biais d'un circuit de secours. Depuis la fin des années 1970, d'importantes recherches ont été menées dans l'industrie nucléaire pour réaliser la simulation sur ordinateur de tels écoulements en transition de phase. De telles simulations numériques visent à compléter les études expérimentales. C'est dans ce contexte qu'a été lancé en 2001 le projet de co-développement NEPTUNE qui vise à coordonner les efforts en modélisation et simulation numérique des différents partenaires : le Commissariat à l'Energie Atomique (CEA), Electricité de France (EDF), AREVA-NP et l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN). Un tel projet a vocation à la conception et au développement d'outils de simulation en thermohydraulique pour l'analyse de sûreté des réacteurs nucléaires en fonctionnement. Un tel projet ambitionne également à terme de fournir un support à la conception des futures installations nucléaires.

Pour simuler numériquement ces transitions de phase, une modélisation mathématique des écoulements liquide-vapeur doit tout d'abord être proposée. Dans le cadre du projet NEPTUNE, plusieurs approches sont envisagées pour décrire cette transition liquide-vapeur. Ces différentes approches se distinguent par leurs échelles d'observation. A l'échelle des interfaces séparant le liquide de la vapeur, une première approche simule l'évolution de la topologie diphasique (bulles, gouttes, etc). A l'échelle des installations industrielles, une seconde approche identifie différemment le mélange diphasique à un fluide thermodynamiquement équilibré. Dans cette thèse, on s'intéresse à une échelle d'observation intermédiaire. Il s'agit de l'approche bifluide. A cette échelle intermédiaire, l'approche bifluide ne distingue pas la topologie de l'écoulement diphasique, mais perçoit néanmoins les déséquilibres moyens entre les phases. Dans le cadre de cette approche bifluide, une hypothèse d'équilibre hydrostatique est fréquemment retenue au sein du mélange. Cette hypothèse suppose l'existence d'un équilibre partiel entre les pressions de chaque phase. Une telle hypothèse conduit au modèle bifluide standard à une pression. Dans cette thèse, cette hypothèse d'équilibre hydrostatique n'est pas formulée. On considère différemment une modélisation bifluide à deux pressions indépendantes. Dans le cadre du projet NEPTUNE, ce doctorat de mathématiques est donc une contribution à la modélisation et à la simulation numérique des écoulements liquide-vapeur en transition de phase par une approche bifluide à deux pressions.

De tels écoulements liquide-vapeur sont décrits par le modèle de Baer et Nunziato. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\alpha_k$ ,  $\rho_k$ ,  $P_k$ ,  $E_k$  et  $u_k$  respectivement la fraction volumique, la densité, la pression, l'énergie totale et la vitesse de la phase  $k$ . Soit  $P_i$ ,  $V_i$  et  $E_i$  respectivement la pression, la vitesse et l'énergie totale associées aux interfaces. A l'échelle bifluide, le modèle de Baer et Nunziato décrit l'évolution des écoulements liquide-

Figure 1: principe de fonctionnement d'un réacteur à eau bouillante (REB).

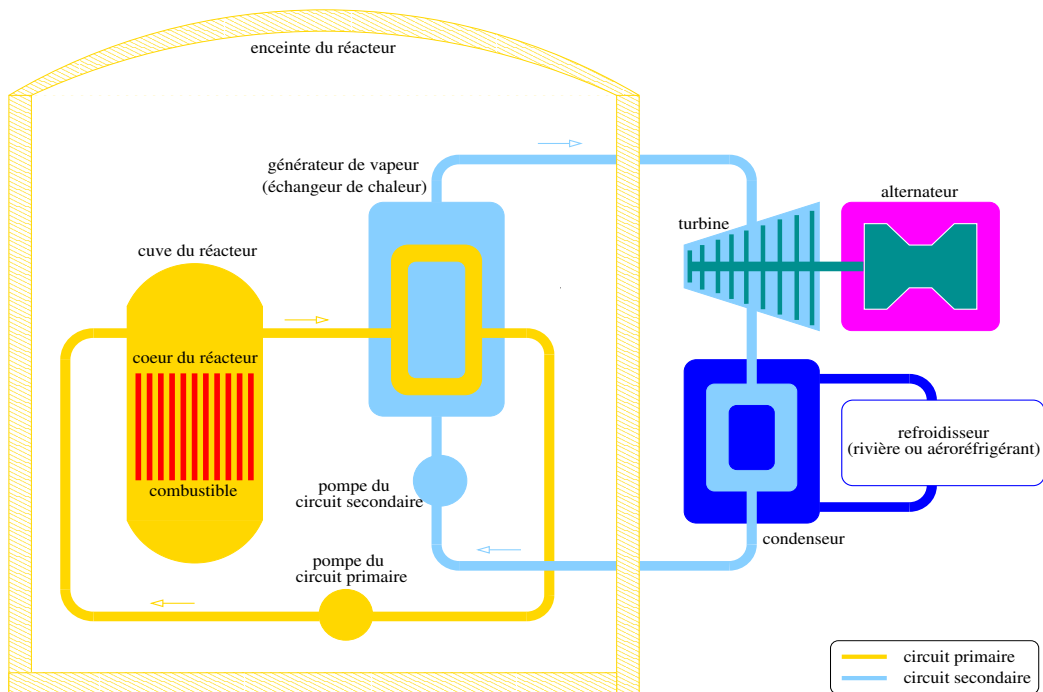
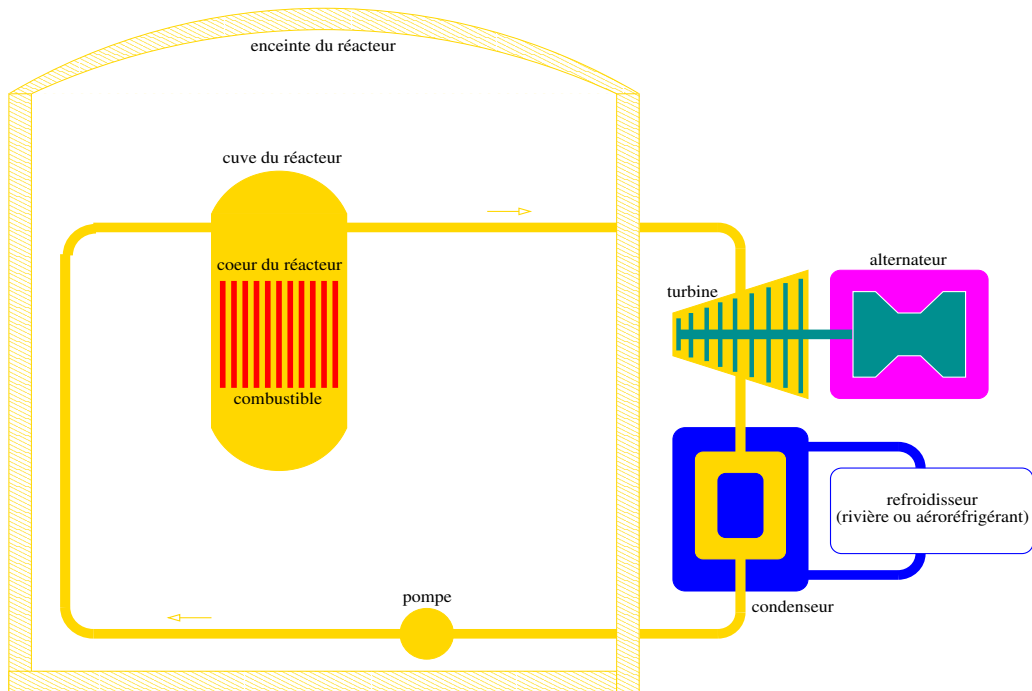


Figure 2: principe de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisée (REP).



vapeur au moyen d'un système constitué de sept équations aux dérivées partielles. Ce système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_2 + V_i \cdot \nabla \alpha_2 = \delta_2, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 u_2) = \Gamma_2, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \rho_2 u_2 \otimes u_2) + \nabla (\alpha_2 P_2) - P_i \nabla \alpha_2 = D_2 + \Gamma_2 V_i, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 E_2) + \nabla \cdot [\alpha_2 (\rho_2 E_2 + P_2) u_2] + P_i \partial_t \alpha_2 = \Phi_2 + D_2 \cdot V_i + \Gamma_2 E_i, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 u_1) = \Gamma_1, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \rho_1 u_1 \otimes u_1) + \nabla (\alpha_1 P_1) - P_i \nabla \alpha_1 = D_1 + \Gamma_1 V_i, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 E_1) + \nabla \cdot [\alpha_1 (\rho_1 E_1 + P_1) u_1] + P_i \partial_t \alpha_1 = \Phi_1 + D_1 \cdot V_i + \Gamma_1 E_i, \end{array} \right. \quad (\text{A})$$

où  $D_k$  désigne pour  $k = 1, 2$ , le transfert de quantité de mouvement entre les phases (la traînée),  $\Phi_k$  le transfert de chaleur,  $\Gamma_k$  le transfert de masse et  $\delta_k$  le terme source de fraction volumique. Dans le cadre de la combustion des poudres, ce modèle a initialement été proposé pour décrire la transition de la déflagration à la détonation lors de l'accumulation des grains d'explosif. On s'intéresse ici à la transposition de ce modèle dans le cadre des écoulements liquide-vapeur. Dans cette thèse, on cherche à analyser les capacités prédictives de ce modèle pour décrire certaines transitions diphasiques lors de l'accumulation de poches de vapeur au sein de la phase liquide. De manière pratique, cette thèse s'organise en trois parties. La partie I s'intéresse tout d'abord aux propriétés du modèle de Baer et Nunziato. Dans le cadre de ce modèle bifluide à deux pressions, les parties II et III étudient respectivement par la suite l'implémentation d'un modèle de turbulence et l'implémentation d'une procédure de reconstruction pour la topologie diphasique. Ces deux dernières parties traitent indépendamment de modifications apportées au modèle de Baer et Nunziato. Chacune de ces deux dernières parties peut donc être lue indépendamment à la suite de la partie I.

## Résumé de la partie I

Dans cette première partie de thèse, on s'intéresse aux propriétés du modèle de Baer et Nunziato. Ce modèle se présente sous la forme du système ouvert (A). Pour clore ce système, on se place tout d'abord dans un cadre thermodynamique classique. On postule l'existence d'une entropie strictement concave et strictement croissante dans chaque phase. Pour décrire les écoulements liquide-vapeur, on postule par ailleurs l'existence d'un équilibre triple isobare isotherme équipotentiel monovariant entre les phases. Dans ce cadre thermodynamique, diverses modélisations sont ensuite proposées pour les grandeurs interfaciales et les termes d'échange entre les phases. Ces différentes modélisations pour les interactions diphasiques dotent le modèle bifluide à deux pressions d'une inégalité d'entropie. Ces fermetures sont particulièrement nouvelles en ce qui concerne la modélisation des transferts énergétiques par des termes de relaxation. On rappelle ensuite la nature hyperbolique du modèle de Baer et Nunziato. Cette hyperbolicité du modèle bifluide à deux pressions contraste avec la nature elliptique en temps du modèle bifluide à une pression. Le système (A) se présente par ailleurs sous une forme non-conservative. Dans le cadre des solutions faibles, les différents produits non-conservatifs  $V_i \cdot \nabla \alpha_k$ ,  $P_i \nabla \alpha_k$ ,  $P_i V_i \cdot \nabla \alpha_k$  ne sont pas définis au sens des distributions. De nouvelles modélisations sont alors mises en avant pour la vitesse et la pression interfaciales qui définissent localement ces différents produits non-conservatifs. A titre d'exemple, ces nouvelles modélisations pour la vitesse interfaciale sont telles que  $V_i$  ne présente pas simultanément des discontinuités avec la fraction volumique. Une structure très particulière est alors mise à jour pour la partie convective du système (A). Cette structure identifie plusieurs régimes d'écoulement sur- et sous-critiques pour les écoulements diphasiques en transition de phase. De tels régimes présentent des analogies avec le comportement fluvial ou torrentiel des écoulements en rivière. En ce qui concerne les transferts interfaciaux, les stabilités linéaire et non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur sont finalement établies.

## Résumé de la partie II

Cette seconde partie de thèse s'intéresse à la modélisation de la turbulence pour les écoulements liquide-vapeur en transition de phase. Pour décrire ce phénomène, on étudie l'implémentation d'un modèle de turbulence simple au sein du modèle bifluide à deux pressions. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $K_k$  l'énergie cinétique turbulente de la phase  $k$ . Cette modélisation de la turbulence consiste en l'ajout des équations (B) au modèle de Baer et Nunziato :

$$\forall k = 1, 2, \quad \partial_t (\alpha_k \rho_k K_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k K_k u_k) + \frac{2}{3} \alpha_k \rho_k K_k \nabla \cdot u_k = \mathcal{P}_k + \mathcal{D}_k + \varepsilon_k. \quad (\text{B})$$

Dans cette équation d'évolution pour l'énergie cinétique turbulente,  $\mathcal{P}_k$ ,  $\mathcal{D}_k$  et  $\varepsilon_k$  caractérisent respectivement la production, la diffusion et la dissipation de la turbulence. On étudie dans cette seconde partie de thèse les modifications induites par cette modélisation de la turbulence sur les propriétés du modèle de Baer et Nunziato. Cette modélisation de la turbulence ne modifie ni l'inégalité d'entropie, ni la nature hyperbolique, ni la stabilité des équilibres liquide-vapeur associées au modèle bifluide à deux pressions. En ce qui concerne la définition des solutions faibles pour ce modèle bifluide turbulent, l'équation (B) apporte cependant les nouveaux produits non-conservatifs  $2\alpha_k \rho_k K_k \nabla \cdot u_k / 3$ . Diverses relations de saut sont alors comparées pour définir ces produits non-conservatifs. Au final, une telle modélisation de la turbulence n'influe que sur la dynamique des transferts interfaciaux. On retrouve alors les tendances expérimentales. Les différents transferts interfaciaux augmentent avec l'intensité de la turbulence.

## Résumé de la partie III

Dans cette troisième partie de thèse, on s'intéresse enfin à une procédure de reconstruction pour la topologie diphasique. On cherche à déterminer l'évolution de la surface d'échange disponible entre le liquide et la vapeur. Soit  $a_i$  la densité volumique d'aire interfaciale. On étudie dans cette troisième partie de thèse le couplage du modèle de Baer et Nunziato avec l'équation d'évolution (C) pour la densité d'aire interfaciale :

$$\partial_t a_i + V_i \cdot \nabla a_i = \Psi. \quad (\text{C})$$

Dans cette équation d'évolution pour la densité d'aire interfaciale, le terme source  $\Psi$  caractérise l'opérateur de reconstruction topologique. Dans un premier temps, on cherche à mesurer l'influence de cette procédure de reconstruction topologique sur les propriétés du modèle bifluide à deux pressions. L'inégalité d'entropie, la nature hyperbolique et la stabilité des équilibres liquide-vapeur associées au modèle de Baer et Nunziato ne sont pas modifiées par cette procédure de reconstruction topologique. Une modélisation particulière est ensuite proposée pour l'opérateur  $\Psi$ . Pour décrire les phénomènes de coalescence et de fragmentation, cette nouvelle modélisation pour l'opérateur  $\Psi$  assimile la reconstruction topologique à une procédure d'optimisation. En résumé, une telle procédure de reconstruction pour la topologie diphasique n'agit que sur la dynamique des transferts interfaciaux. Les tendances expérimentales sont alors retrouvées. Les différents transferts interfaciaux s'accroissent avec la surface d'échange disponible entre le liquide et la vapeur.

Pour simuler l'ensemble des modèles étudiés dans cette thèse, une méthode numérique est par ailleurs développée en parallèle des études théoriques menées aux parties I, II et III. Cette méthode numérique s'appuie sur une approche à pas fractionnaires dans un formalisme Volumes Finis. Pour effectuer chacune des étapes de cette méthode à pas fractionnaires, de nouvelles adaptations non-conservatives sont tout d'abord présentées pour certains solveurs de Riemann approchés. De telles adaptations non-conservatives pour ces schémas numériques réalisent l'approximation des différentes parties convectives non-conservatives rencontrées dans cette thèse. A la différence du cadre non-conservatif standard, il est à noter que l'ensemble

de ces schémas converge vers une même solution. Un nouveau schéma d'intégration est par ailleurs proposé pour approcher la dynamique des transferts interfaciaux. L'ensemble de notre méthode numérique se caractérise alors par la préservation des équilibres liquide-vapeur.

Pour simuler les écoulements en transition de phase, un logiciel a finalement été codé sur les bases de cette méthode numérique en parallèle de ce manuscrit de thèse. Ce logiciel permet la simulation de l'ensemble des modèles étudiés dans cette thèse sur tout type de maillage multidimensionnel structuré ou non-structuré. A titre d'exemple, on propose pour finir cette introduction une application de ce logiciel à la simulation d'un écoulement liquide-vapeur dans une géométrie complexes. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, on s'intéresse ici aux accumulations de vapeur dans un circuit hydraulique caractérisant la jonction de deux canalisations. Le résultat de cette simulation est reportée à la figure 3. Une telle simulation montre une accumulation de vapeur au sein d'un tourbillon dans la conduite verticale. La paroi située à proximité de ce tourbillon connaît des fluctuations thermiques. De telles contraintes thermiques peuvent à terme déboucher sur une usure prématurée des matériaux. On parle de fatigue thermique. Dans la conception des installations nucléaires, une telle simulation peut alors apporter un support au dimensionnement des circuits de refroidissement.

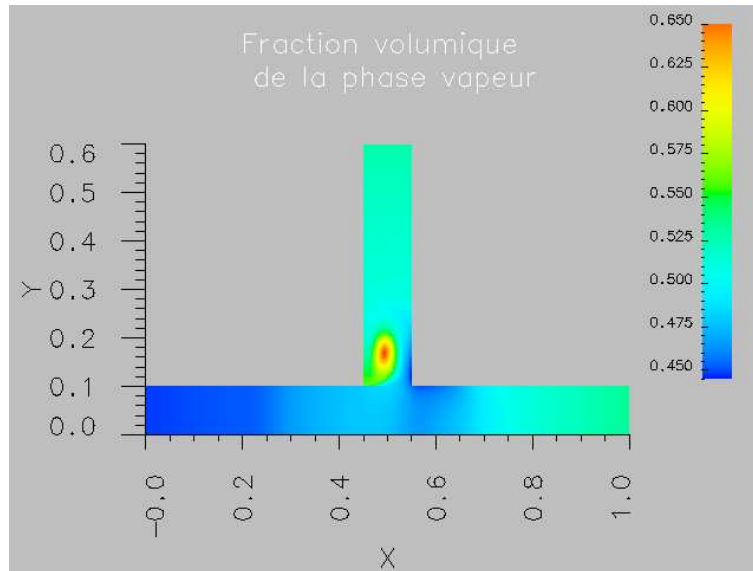


Figure 3: simulation d'un écoulement liquide-vapeur en transition de phase par le biais du modèle de Baer et Nunziato.

## **Première partie**

# **Un modèle bifluide à deux pressions pour les écoulements diphasiques**



# Chapitre 1

## Introduction

Depuis une trentaine d'années, d'importantes recherches sont menées dans le domaine de l'énergie nucléaire pour simuler numériquement les écoulements diphasiques. Que l'on s'intéresse aux réacteurs à eau bouillante ou à eau pressurisée, ces études sont nécessaires pour des raisons de sûreté. De telles études doivent également fournir à terme un support à la conception des installations nucléaires de demain. L'ensemble de ces recherches doit permettre une réduction des nécessaires mais coûteuses validations expérimentales. Dans le cadre du projet NEPTUNE, une nouvelle approche est envisagée pour simuler les écoulements diphasiques. Cette nouvelle approche s'appuie sur un formalisme bifluide à deux pressions. Cette première partie de thèse est une contribution à l'étude de ces modélisations.

Qu'entend-on par une approche bifluide à deux pressions pour décrire les écoulements diphasiques ? Pour définir ces notions, il nous faut tout d'abord détailler les caractéristiques des écoulements rencontrés en ingénierie nucléaire. Qu'il s'agisse d'une configuration nominale pour les réacteurs à eau bouillante ou accidentelle pour les réacteurs à eau pressurisée, on s'intéresse à des écoulements diphasiques de type liquide-vapeur à faible nombre de Mach. Ces écoulements présentent d'importants déséquilibres entre les phases. Les interfaces séparant les deux fluides sont alors le lieu d'intenses transferts énergétiques.

Plusieurs approches existent dans la littérature pour décrire ces phénomènes. Ces différentes approches se distinguent par leurs échelles d'observation. A petite échelle, la simulation directe décrit finement la topologie de l'écoulement en résolvant directement les équations locales instantanées. A une échelle grossière, l'approche homogène identifie le mélange diphasique à un unique fluide supposé thermodynamiquement équilibré. Nous nous plaçons à une échelle intermédiaire qui ne distingue plus la topologie de l'écoulement, mais perçoit toujours l'ensemble des déséquilibres moyens entre les phases. Il s'agit de l'approche bifluide. Cette approche bifluide consiste en l'application d'un opérateur de moyenne aux équations locales instantanées. La dérivation de ces modèles moyennés à partir des équations locales instantanées est largement attribuable aux travaux d'Ishii [67], Delhaye, Achard [31], Drew et Lahey [34]. Cette procédure de dérivation est résumée dans le rapport interne CEA [7].

A ce stade, six équations de bilan moyen sont disponibles. Ces bilans moyens décrivent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale pour chacune des phases. Sept variables s'avèrent néanmoins nécessaires pour décrire le mélange diphasique : une vitesse et deux grandeurs thermodynamiques pour chaque phase, ainsi qu'un titre pour le mélange. Une hypothèse supplémentaire doit donc être formulée pour clore le système. Une part importante de la littérature [99] est consacrée aux modèles à six équations. Ces modèles postulent une relation algébrique entre les pressions de chaque phase. On parle encore de modèles à une pression. En guise de fermeture, une autre partie de la communauté scientifique [8, 48, 71] postule une septième équation d'évolution sur le titre ou fraction volumique du mélange. Cette septième équation d'évolution sur la fraction volumique vient s'ajouter aux six équations de bilan précédentes. Ces modèles évoluent avec deux pressions indépendantes. On parle alors de modèles bifluides à deux pressions. Nous nous y consacrons par la suite.

Le postulat d'une septième équation portant sur la fraction volumique du mélange diphasique pour clore le modèle bifluide n'est pas nouveau. Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur, une telle fermeture est déjà en germe dans le papier de Ransom et Hicks [89] daté de 1984. Dans le contexte des écoulements gaz-particules, c'est néanmoins à Baer et Nunziato [8] que revient l'élaboration en 1986 du premier modèle bifluide à deux pressions comptant sept équations. Ce modèle décrit spontanément certains phénomènes de bifurcation, telle la transition de la déflagration à la détonation. Il est couramment utilisé en combustion dans l'étude des écoulements à poudre. On se référera à ce propos aux travaux de Kapila et al. [71].

Diverses adaptations ont dès lors été proposées pour étendre le cadre d'application du modèle de Baer et Nunziato aux écoulements de type liquide-gaz. Que l'on s'intéresse aux écoulement à bulles [45], aux instabilités de Rayleigh-Taylor [49], ou aux écoulements en transition de phase [78], l'ensemble des modèles bifluides à deux pressions de la littérature s'écrit sous la forme générique proposée par Glimm, Saltz et Sharp [48]. Ces différents modèles se distinguent par leur modélisation des termes d'interaction entre les phases. Nous allons y revenir.

Soit  $d$  la dimension de l'espace physique ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ). La formulation générique du modèle bifluide à deux pressions étudié dans cette première partie de thèse s'écrit dans un cadre multidimensionnel sous la forme compacte

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = S(W) + \nabla \cdot D(W, \nabla W). \quad (1.1)$$

La variable d'état inconnue  $W = W(t, x)$  est une application de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^{5+2d}$ . Le flux  $F$  est une application régulière de  $\mathbb{R}^{5+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{5+2d} \times \mathbb{R}^d$ . Les interactions entre les phases sont liées au tenseur interfacial  $C$ , application régulière de  $\mathbb{R}^{5+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{5+2d} \times \mathbb{R}^{5+2d} \times \mathbb{R}^d$ , et au terme source  $S$ , application régulière de  $\mathbb{R}^{5+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{5+2d}$ . Les effets diffusifs sont regroupés dans l'application régulière  $D(W, \nabla W) \in \mathbb{R}^{5+2d} \times \mathbb{R}^d$ . Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\alpha_k, \rho_k, P_k, e_k$  et  $u_k$  respectivement la fraction volumique, la densité, la pression, l'énergie interne spécifique et la vitesse de la phase  $k$ . On introduit pour  $k = 1, 2$ , la masse partielle  $m_k = \alpha_k \rho_k$  et l'énergie totale spécifique  $E_k = e_k + |u_k|^2/2$ . Les fractions volumiques sont astreintes à la contrainte de saturation

$$\sum_k \alpha_k = 1. \quad (1.2)$$

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions du système (1.1) dans l'espace admissible

$$\Omega = \{W \in \mathbb{R}^{5+2d} / \forall k = 1, 2, \alpha_k \in ]0, 1[, \rho_k > 0, P_k > 0\}. \quad (1.3)$$

Nous aurons souvent recours par la suite à la formulation monodimensionnelle (1.4) de ce système dont les différents termes sont détaillés ci-dessous :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = S(W) + \partial_x [D(W, \partial_x W)]. \quad (1.4)$$

Dans le cadre monodimensionnel du système (1.4), la variable d'état  $W$  et le flux  $F$  s'écrivent respectivement

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ m_2 \\ m_2 u_2 \\ m_2 E_2 \\ m_1 \\ m_1 u_1 \\ m_1 E_1 \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 u_2 \\ m_2 u_2^2 + \alpha_2 P_2 \\ (m_2 E_2 + \alpha_2 P_2) u_2 \\ m_1 u_1 \\ m_1 u_1^2 + \alpha_1 P_1 \\ (m_1 E_1 + \alpha_1 P_1) u_1 \end{pmatrix}.$$

Les effets diffusifs sont regroupés dans le tenseur

$$D(W, \partial_x W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \Sigma_2 \\ \alpha_2 \Sigma_2 \cdot u_2 - \alpha_2 F_{T_2} \\ 0 \\ \alpha_1 \Sigma_1 \\ \alpha_1 \Sigma_1 \cdot u_1 - \alpha_1 F_{T_1} \end{pmatrix},$$

où  $\Sigma_k$  et  $F_{T_k}$  désignent respectivement le tenseur des contraintes visqueuses et le flux de chaleur de la phase  $k$ . Au cours du processus de moyenne duquel dérivent les modèles bifluïdes, plusieurs termes d'interaction apparaissent entre les phases. Les interactions d'ordre un sont regroupées dans le tenseur interfacial  $C$ . Les interactions d'ordre zéro sont regroupées dans le terme source  $S$ . De la même manière qu'on définit pour chaque phase des grandeurs caractéristiques, on associe similairement aux interfaces une pression interfaciale  $P_i$ , une vitesse interfaciale  $V_i$  et une énergie interne spécifique interfaciale  $e_i$ . Soit  $E_i = e_i + V_i^2/2$  l'énergie totale spécifique interfaciale. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $D_k$ ,  $\Phi_k$ ,  $\Gamma_k$  et  $\delta_k$  respectivement le transfert de quantité de mouvement entre les phases (la traînée), le transfert de chaleur, le transfert de masse et le terme source de fraction volumique. Les différents termes d'interaction entre les phases s'écrivent alors

$$C(W) \partial_x W = \begin{pmatrix} V_i \partial_x \alpha_2 \\ 0 \\ -P_i \partial_x \alpha_2 \\ -P_i V_i \partial_x \alpha_2 \\ 0 \\ -P_i \partial_x \alpha_1 \\ -P_i V_i \partial_x \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad S(W) = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \Gamma_2 \\ D_2 + \Gamma_2 V_i \\ -P_i \delta_2 + D_2 V_i + \Phi_2 + \Gamma_2 E_i \\ \Gamma_1 \\ D_1 + \Gamma_1 V_i \\ -P_i \delta_1 + D_1 V_i + \Phi_1 + \Gamma_1 E_i \end{pmatrix}.$$

Pour cette définition des interactions diphasiques, la préservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie totale et de la saturation (1.2) du mélange s'écrit

$$\sum_k \Phi_k = 0, \quad \sum_k \Gamma_k = 0, \quad \sum_k D_k = 0, \quad \sum_k \delta_k = 0. \quad (1.5)$$

Nous disposons à ce stade d'une formulation générique ouverte du modèle bifluïde à sept équations.

Comme nous l'avons déjà précisé plus haut, l'ensemble des modèles bifluïdes à sept équations de la littérature se distinguent par leurs modélisations des termes d'interaction entre les phases. Si une certaine unanimité règne quant à la modélisation de la traînée et du terme source de fraction volumique par des modèles de relaxation :

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} D_k = K_U (u_{k'} - u_k), & K_U(W) > 0, \\ \delta_k = K_P (P_k - P_{k'}), & K_P(W) > 0, \end{cases}$$

il n'en va pas de même pour les transferts de chaleur ou de masse. Différents modèles sont par ailleurs proposés pour les grandeurs interfaciales  $P_i$ ,  $V_i$ . Certaines de ces modélisations sont présentées ci-dessous.

Dans le cadre des écoulements gaz-particules étudiés par Baer et Nunziato [8], le couple  $(P_i, V_i)$  est tout d'abord identifié aux couples  $(P_k, u_{k'})$ , où l'indice  $k' = 3 - k$ ,  $k = 1$  ou  $2$ , désigne la phase solide. La vitesse interfaciale est alors associée à la vitesse de déplacement des particules. Dans le cadre des écoulements à bulles, Gavriluk et Saurel effectuent un choix similaire dans [45]. Le couple  $(P_i, V_i)$  est identifié aux couples  $(P_k, u_{k'})$ , où l'indice  $k' = 3 - k$ ,  $k = 1$  ou  $2$ , désigne la phase gazeuse. La vitesse interfaciale est donc à nouveau associée à la vitesse de déplacement des inclusions. Si l'on s'intéresse maintenant aux instabilités de Rayleigh-Taylor, Glimm, Saltz et Sharp [48, 49] préconisent différemment l'emploi du couple

$$V_i = \alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_2, \quad P_i = \alpha_2 P_1 + \alpha_1 P_2.$$



Ce modèle résulte de l'étude en similitude des couches de mélange diphasiques. Lorsqu'une phase est évanescence, les grandeurs interfaciales s'identifient à la phase qui disparaît. Un modèle aux tendances inverses est proposé par Saurel et Abgrall dans [93]. Ce modèle s'écrit

$$V_i = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_2, \quad P_i = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2.$$

Cette fois, lorsqu'une phase disparaît, les caractéristiques interfaciales s'identifient aux propriétés de la phase qui reste. Une première question se pose alors naturellement : parmi ces modèles, lequel choisir ?

Par ailleurs, si ces quelques termes comme la traînée, la vitesse ou la pression interfaciales commencent à être bien documentés dans la littérature, il n'en va pas de même pour les transferts énergétiques. La majorité des modèles bifluïdes à sept équations prévoit la future implémentation d'un transfert de masse et de chaleur, mais en précise rarement les modalités. Or plusieurs questions se posent qui revêtent une importance capitale pour nos applications en ingénierie nucléaire. Comment modéliser les énergies interfaciales ? Comment modéliser les transferts de chaleur et de masse ? Ces deux types de transfert sont-ils liés ? Autant de questions pour lesquelles une réponse passe par l'application d'une procédure de modélisation systématique au modèle bifluïde à sept équations.

Lors de la fermeture des modèles diphasiques, une procédure de modélisation systématique est parfois employée dans la littérature. Cette procédure de modélisation classique en thermomécanique des milieux continus [46] s'appuie sur la définition d'une entropie pour ces systèmes d'EDP. La modélisation des termes inconnus s'effectue de manière à rendre positive la production d'entropie de ces systèmes. Cette procédure de modélisation est aussi bien utilisée dans le cadre de la simulation directe [76, 20] que dans le cadre du modèle homogène [15]. Elle a même déjà été appliquée au modèle bifluïde à sept équations par Lhuillier [78], Gallouët, Hérard et Seguin [42]. Ces différents auteurs ont alors retrouvé la forme générale des termes d'interaction précédemment cités. On se propose ici d'étendre cette procédure de modélisation au cadre des écoulements liquide-vapeur en transition de phase.

Selon Gallouët, Hérard et Seguin [42], la construction d'une entropie pour le modèle à sept équations induit par ailleurs un lien entre la vitesse et la pression interfaciales. Ces deux grandeurs ne peuvent plus être modélisées séparément. Pour un coefficient  $\beta \in [0, 1]$ , ce lien entre la vitesse et la pression interfaciales s'écrit

$$V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \quad P_i = \mu(\beta) P_1 + (1 - \mu(\beta)) P_2, \quad \mu(\beta) = \frac{a_2 (1 - \beta)}{a_1 \beta + a_2 (1 - \beta)}.$$

Les  $a_k$  y désignent des coefficients thermodynamiques positifs caractéristiques de la phase  $k$ . Sans transferts interfaciaux, la partie convective du modèle bifluïde à sept équations se présente alors sous une forme non-conservative. L'équation portant sur la fraction volumique s'écrit par exemple

$$\partial_t \alpha_2 + V_i \partial_x \alpha_2 = 0.$$

Pour définir sans ambiguïté les relations de saut de cette partie convective, Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin préconisent dans [27] d'associer la vitesse interfaciale à un champ linéairement dégénéré. Cette modélisation de la vitesse interfaciale associe l'onde de fraction volumique à une discontinuité de contact. Pour cette modélisation de la vitesse interfaciale, les interfaces du mélange diphasique demeurent toujours infiniment minces lorsque le système n'est soumis qu'aux effets convectifs. Pour vérifier cette propriété, différentes définitions du coefficient  $\beta$  sont mises en avant dans [27]. L'ensemble de ces modélisations s'écrit

$$\beta = 0, \quad \beta = 1, \quad \beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Certaines de ces définitions coïncident avec les modèles décentrés de Baer et Nunziato [8] ( $\beta = 0$  ou  $\beta = 1$ ). L'ensemble de cette procédure de modélisation est ici réexaminée dans le cadre des écoulements liquide-vapeur en transition de phase.

Notre étude du modèle bifluide à sept équations s'organise de la manière suivante. Si dans un premier temps on ne s'intéresse qu'aux écoulements liquide-gaz sans transition de phase, c'est pour mieux rappeler la procédure de modélisation via la construction d'une inégalité d'entropie pour les systèmes d'EDP. Divers modèles sont proposés pour les termes d'interaction entre les phases. L'ensemble de ces modèles est comparé à la littérature. Ce premier chapitre fait la synthèse de notre analyse bibliographique. L'extension de cette procédure de modélisation au cadre des écoulements liquide-vapeur est effectuée dans un second temps. Un nouveau modèle est alors proposé pour le transfert de masse. Ce deuxième chapitre achève notre travail de modélisation. Le modèle bifluide à sept équations est dès lors complètement fermé. On s'intéresse par la suite à ses propriétés mathématiques. La partie convective de ce modèle bifluide à sept équations est notre premier objet d'étude. Au chapitre 4, on s'intéresse à la nature, à la définition des solutions faibles, ainsi qu'au problème de Riemann associés à cette partie convective. Le chapitre 5 est consacré à l'étude des transferts interfaciaux avec ou sans transition de phase. On y étudie la stabilité des équilibres diphasiques. En vue d'une comparaison des modèles bifluides à une et deux pressions, une méthode de relaxation instantanée est par la suite proposée au chapitre 6. Cette méthode de relaxation instantanée nous permet d'envisager la simulation des sous-modèles bifluides partiellement équilibrés par le biais du modèle à sept équations. Une méthode numérique est enfin élaborée au chapitre 7 pour approcher les solutions de ces différents modèles bifluides. Une fois cette méthode numérique implémentée dans un logiciel, plusieurs simulations sont alors réalisées au chapitre 8. L'ensemble de ces simulations illustre les aptitudes de ce logiciel à traiter des écoulements liquide-vapeur en déséquilibre dans des configurations industrielles.



## Chapitre 2

# Entropie et lois de fermeture pour les écoulements diphasiques sans transfert de masse

A l'introduction de cette première partie de thèse, la formulation générique du modèle bifluide à deux pressions a été présentée. Ce modèle est ouvert. On s'intéresse ici à sa fermeture dans le cadre des écoulements diphasiques sans transfert de masse. Certaines de ces fermetures prennent la forme de lois de comportement. Il s'agit des lois d'état caractéristiques des propriétés thermodynamiques de chaque phase. Les autres fermetures concernent la modélisation des interactions diphasiques. Pour clore les modèles diphasiques, une procédure de modélisation est parfois rencontrée dans la littérature [76, 20, 15]. Suivant les travaux de Germain [46], classiques en thermomécanique des milieux continus, cette procédure de modélisation consiste tout d'abord en la définition d'une entropie pour ces systèmes d'EDP. Les différents termes inconnus sont ensuite modélisés de manière à rendre positive la production d'entropie de ces systèmes. Cette procédure de modélisation a déjà été appliquée à la fermeture du modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse ni de chaleur par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Pour le même type d'écoulements liquide-gaz sans transfert de masse mais avec transfert de chaleur, on se propose dans ce chapitre d'énoncer les hypothèses sur les lois d'état. On se place dans un cadre classique où une entropie strictement concave est définie dans chaque phase. La modélisation des interactions diphasiques est ensuite effectuée en deux étapes. On définit tout d'abord une entropie pour le modèle bifluide à sept équations. On construit ensuite une inégalité d'entropie pour ce système. L'ensemble des modèles usuels de la littérature est alors retrouvé par ce biais.

### 2.1 Lois de comportement et hypothèses pour les écoulements diphasiques sans transfert de masse

Pour fermer le modèle bifluide à sept équations, deux lois de comportement doivent tout d'abord être introduites. Ces deux lois d'état caractérisent les propriétés thermodynamiques de chaque phase. Dans les ouvrages de référence [19, 38], une hypothèse est formulée concernant ces lois de comportement. Cette hypothèse définit pour chaque phase l'entropie  $s_k$  et sa transformée de Legendre associée : la température  $T_k$ . Pour  $k = 1, 2$ , on introduit le volume spécifique  $\tau_k = 1/\rho_k$  de la phase  $k$ . Cette hypothèse s'énonce pour chaque phase de la manière suivante.

**Hypothèse 1.** *Pour décrire les propriétés thermodynamiques de la phase  $k$ , toute équation d'état admet une entropie  $s_k(\tau_k, e_k)$  définie sur l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\tau_k, e_k)} = \{(\tau_k, e_k) / \tau_k > 0, P_k(\tau_k, e_k) > 0\}$ . Cette entropie est de classe  $C^2$  sur  $\mathcal{D}_{(\tau_k, e_k)}$ . Cette entropie est strictement croissante et strictement concave de matrice*

hessienne définie négative sur  $\mathcal{D}_{(\tau_k, e_k)}$  :

$$\forall (\tau_k, e_k) \in \mathcal{D}_{(\tau_k, e_k)}, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2 - \{0\}, \quad \left( \frac{\partial s_k}{\partial \tau_k} \right)_{e_k} > 0, \quad \left( \frac{\partial s_k}{\partial e_k} \right)_{\tau_k} > 0, \quad (\nabla^2 s_k \cdot X, X) < 0.$$

Cette entropie  $s_k(\tau_k, e_k)$  satisfait la relation de Gibbs

$$ds_k = \frac{P_k}{T_k} d\tau_k + \frac{1}{T_k} de_k.$$

Aux frontières de l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\tau_k, e_k)}$ , cette entropie  $s_k(\tau_k, e_k)$  vérifie par ailleurs

$$\lim_{\substack{\tau_k \rightarrow 0 \\ P_k(\tau_k, e_k) > 0}} s_k(\tau_k, e_k) = -\infty, \quad \lim_{\substack{P_k(\tau_k, e_k) \rightarrow 0 \\ \tau_k > 0}} s_k(\tau_k, e_k) = -\infty.$$

L'hypothèse 1 est classique. Cette hypothèse a notamment été utilisée par Godlewski et Raviart [52] dans le cadre de la dynamique des gaz. Cette hypothèse caractérise entre autre l'inversibilité du changement de variables  $(\tau_k, e_k) \longrightarrow (P_k/T_k, 1/T_k)$ , la matrice

$$\nabla^2 s_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_k/T_k}{\partial \tau_k} & \frac{\partial P_k/T_k}{\partial e_k} \\ \frac{\partial 1/T_k}{\partial \tau_k} & \frac{\partial 1/T_k}{\partial e_k} \end{bmatrix}$$

étant définie négative. Cette hypothèse a de multiples implications. Nous en listons quelques unes à la proposition 1.

**Proposition 1.** Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\hat{\gamma}_k$  et  $c_k$  le coefficient thermodynamique et la vitesse du son respectivement définis par les relations

$$\hat{\gamma}_k P_k = \left[ \frac{P_k}{\rho_k} - \rho_k \left( \frac{\partial e_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} \right] \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \quad c_k^2 = \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\rho_k}.$$

- L'entropie  $s_k$  vérifie l'équation

$$\rho_k \left( \frac{\partial s_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial s_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} = 0. \quad (2.1)$$

- La température  $T_k$  s'écrit de manière équivalente

$$T_k = \left( \frac{\partial s_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}.$$

- La fonction  $\sigma_k : (\tau_k, E_k, u_k) \longrightarrow s_k(\tau_k, E_k - u_k^2/2)$  est strictement concave de matrice hessienne définie négative sur le domaine  $\mathcal{D}_{(\tau_k, E_k, u_k)} = \{(\tau_k, E_k, u_k) / \tau_k > 0, P_k(\tau_k, E_k - u_k^2/2) > 0\}$ .

- La vitesse du son  $c_k$  est réelle.

**Démonstration.** L'ensemble de la proposition 1 a déjà été démontré par Godlewski et Raviart. Dans [52], leur démonstration s'appuie sur la définition de la température, suivie de quelques manipulations sur les fonctions thermodynamiques. Seule la démonstration du quatrième point est ici rappelée. Cette démonstration fournit un exemple d'application intéressant de l'hypothèse 1. Par définition, le carré de la vitesse du son s'écrit

$$c_k^2 = - \left( \frac{\partial s_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} \left( \frac{\partial s_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} = \left( \frac{\partial P_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} = - \frac{1}{\rho_k^2} \frac{\partial}{\partial \tau_k} \left[ \left( \frac{\partial s_k}{\partial \tau_k} \right)_{e_k} \left( \frac{\partial s_k}{\partial e_k} \right)_{\tau_k}^{-1} \right]_{s_k}.$$

Développons à  $s_k$  fixée la dérivée partielle par rapport à  $\tau_k$ . Le carré de la vitesse du son se réécrit sous la forme

$$c_k^2 = -\frac{1}{\rho_k^2} \left( \frac{\partial s_k}{\partial e_k} \right)_{\tau_k}^{-1} \left[ \frac{\partial^2 s_k}{\partial \tau_k^2} + 2 \left( \frac{\partial e_k}{\partial \tau_k} \right)_{s_k} \frac{\partial^2 s_k}{\partial \tau_k \partial e_k} + \left( \frac{\partial e_k}{\partial \tau_k} \right)_{s_k}^2 \frac{\partial^2 s_k}{\partial e_k^2} \right].$$

Suivant l'hypothèse 1, l'entropie  $s_k(\tau_k, e_k)$  admet une hessienne définie négative. Cette entropie admet par ailleurs une température

$$T_k = \left( \frac{\partial s_k}{\partial e_k} \right)_{\tau_k}^{-1}$$

strictement positive. La vitesse du son est donc de carré positif, ce qui conclut la preuve. ■

L'hypothèse thermodynamique fondamentale 1 est fréquemment utilisée dans la littérature. De nombreuses lois d'état la satisfont. L'exemple 1 vérifie cette hypothèse pour une loi d'état de type gaz parfait.

**Exemple 1.** Pour  $k = 1, 2$ , soit  $C_{v_k} > 0$  la capacité calorifique à volume constant et  $\gamma_k > 1$  un coefficient thermodynamique caractéristique de la phase  $k$ . La loi d'état des gaz parfaits s'écrit pour la phase  $k$  :

$$s_k(\tau_k, e_k) = C_{v_k} \ln [e_k \tau_k^{(\gamma_k - 1)} (\gamma_k - 1)]. \quad (2.2)$$

L'entropie  $s_k(\tau_k, e_k)$  est définie sur le cône ouvert  $\mathcal{D}(\tau_k, e_k) = \{(\tau_k, e_k) / \tau_k > 0, e_k > 0\}$ . Cette entropie est de classe  $C^2$  sur  $\mathcal{D}(\tau_k, e_k)$ . Pour  $(\tau_k, e_k) \in \mathcal{D}(\tau_k, e_k)$ , calculons le gradient de cette entropie :

$$\left( \frac{\partial s_k}{\partial e_k} \right)_{\tau_k} = \frac{C_{v_k}}{e_k} = \frac{1}{T_k} > 0, \quad \left( \frac{\partial s_k}{\partial \tau_k} \right)_{e_k} = \frac{C_{v_k} (\gamma_k - 1)}{\tau_k} = \frac{P_k}{T_k} > 0.$$

L'entropie  $s_k(\tau_k, e_k)$  est strictement croissante sur  $\mathcal{D}(\tau_k, e_k)$ . Calculons la matrice hessienne de la fonction  $s_k(\tau_k, e_k)$  :

$$\nabla^2 s_k = \begin{bmatrix} -\frac{C_{v_k} (\gamma_k - 1)}{\tau_k^2} & 0 \\ 0 & -\frac{C_{v_k}}{e_k^2} \end{bmatrix}.$$

Cette matrice hessienne est définie négative sur  $\mathcal{D}(\tau_k, e_k)$ . L'entropie  $s_k(\tau_k, e_k)$  est donc strictement concave sur le cône ouvert  $\mathcal{D}(\tau_k, e_k)$ . Cette entropie satisfait par ailleurs

$$\lim_{\substack{\tau_k \rightarrow 0 \\ e_k > 0}} s_k(\tau_k, e_k) = -\infty, \quad \lim_{\substack{e_k \rightarrow 0 \\ \tau_k > 0}} s_k(\tau_k, e_k) = -\infty.$$

La loi d'état des gaz parfaits vérifie donc l'hypothèse 1.

## 2.2 Définition d'une entropie pour les écoulements diphasiques sans transfert de masse

A la section précédente, plusieurs lois de comportement ont été spécifiées pour caractériser les propriétés thermodynamiques de chaque phase. Ces lois de comportement induisent des liens entre les différentes variables thermodynamiques de l'écoulement. Ces lois d'état ferment partiellement le modèle bifluide à sept équations. De nombreux termes demeurent néanmoins inconnus. Ces termes inconnus caractérisent les interactions diphasiques. La modélisation de ces termes nécessite la définition d'une entropie pour le système (1.1). On construit dans cette section une entropie pour le modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse.

Suivant les ouvrages de référence [52, 98, 97], la définition d'un couple entropie – flux d'entropie pour les systèmes d'EDP s'effectue conjointement à la construction d'une loi de conservation supplémentaire. A la suite du travail entamé par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42], on applique ce procédé au modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse. Soit  $\eta = \sum_k m_k s_k$  et  $F_\eta = \sum_k m_k s_k u_k$ . L'entropie de mélange  $\eta$  satisfait l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta + \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) (u_k - V_i) \cdot \nabla \alpha_k &= \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k - \sum_k \frac{1}{T_k} \nabla \cdot (\alpha_k F_{T_k}) \\ &+ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k. \end{aligned}$$

La construction d'une entropie pour le système (1.1) est alors immédiate.

**Proposition 2.** *Soit  $\eta = \sum_k m_k s_k$  et  $F_\eta = \sum_k m_k s_k u_k$ . Le couple  $(\eta, F_\eta)$  est un couple entropie – flux d'entropie pour le système (1.1) à la condition que la vitesse et la pression interfaciales satisfassent la relation*

$$\frac{1}{T_2} (P_i - P_2) (u_2 - V_i) - \frac{1}{T_1} (P_i - P_1) (u_1 - V_i) = 0. \quad (2.3)$$

Ce résultat n'est pas nouveau. Il a déjà été présenté par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Nous l'avons juste replacé dans le cadre de l'hypothèse 1 en introduisant la notion de température. En résumé, la proposition 2 induit un lien entre la vitesse et la pression interfaciales qui ne peuvent plus être modélisées séparément.

Dans la littérature, nombreux sont les auteurs à modéliser la vitesse interfaciale par une combinaison convexe des vitesses phasiques :

$$V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \quad \beta \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

Nous avons listé certaines de ces modélisations dans le tableau 2.1. Suivant la proposition 2, un lien existe entre la vitesse et la pression interfaciales. La pression interfaciale s'écrit dès lors comme une combinaison convexe des pressions phasiques :

$$P_i = \mu(\beta) P_1 + (1 - \mu(\beta)) P_2, \quad \mu(\beta) = \frac{T_2 (1 - \beta)}{T_2 (1 - \beta) + T_1 \beta} \in [0, 1]. \quad (2.5)$$

Parmi l'ensemble des couples  $(P_i, V_i)$  listés dans le tableau 2.1, seuls les modèles de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27, 42], ainsi que les modèles complètement décentrés de Baer et Nunziato [8] repris par Gavriluk et Saurel dans [45] vérifient cette propriété. Nous nous intéresserons tout particulièrement à ce type de modélisations qui dotent le modèle bifluide à sept équations d'une entropie. La forme précise du coefficient  $\beta$  sera détaillée au chapitre 4, lorsque nous construirons des relations de saut pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.

**Remarque 1.** *A titre comparatif, un autre lien  $(P_i, V_i)$  est proposé par Massoni, Saurel, Nkonga et Abgrall dans [81]. Ce lien entre la vitesse et la pression interfaciales s'écrit*

$$P_i = \sum_k \alpha_k P_k + m_k (u_k - V_i)^2. \quad (2.6)$$

*Cette relation découle de l'analyse des invariants de Riemann associés à la partie convective du système (1.4). (Cette analyse est effectuée à la section 4.2). De manière générale, ce nouveau lien (2.6) entre la vitesse et la pression interfaciales est incompatible avec la relation (2.3) qui définit une entropie pour le modèle bifluide à sept équations. La relation (2.6) entre la vitesse et la pression interfaciales ne sera pas prise en compte à l'avenir.*

Tableau 2.1: quelques couples interfaciaux  $(P_i, V_i)$  issus de la littérature.

Référence des modèles interfaciaux	Vitesse interfaciale	Pression interfaciale
Baer et Nunziato [8] Kapila et al. [71] Gavrilyuk et Saurel [45]	$V_i = u_1$ $V_i = u_2$	$P_i = P_2$ $P_i = P_1$
Glimm, Saltz et Sharp [49, 48]	$V_i = \alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_2$	$P_i = \alpha_2 P_1 + \alpha_1 P_2$
Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27, 42]	$V_i = u_1$ $V_i = u_2$ $V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$	$P_i = P_2$ $P_i = P_1$ $P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_2 T_2 + m_1 T_1}$
Saurel et Abgrall [93]	$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$	$P_i = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$
Lhuillier [78]	$V_i = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2$	$P_i = \alpha_2 P_1 + \alpha_1 P_2$
Ransom et Hicks [89]	$V_i = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2$	$P_i = \frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$

### 2.3 Construction d'une inégalité d'entropie pour les écoulements diphasiques sans transfert de masse

A la section précédente, un couple entropie – flux d'entropie a été construit pour le modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse. Ce couple entropique satisfait l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta = & \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k - \sum_k \frac{1}{T_k} \nabla \cdot (\alpha_k F_{T_k}) \\ & + \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Au second membre, plusieurs termes sont inconnus. Ces termes inconnus caractérisent la diffusion et les transferts interfaciaux. Il s'agit du tenseur des contraintes visqueuses  $\Sigma_k$ , du flux de chaleur  $F_{T_k}$ , de la traînée  $D_k$ , du transfert de chaleur  $\Phi_k$ , et du terme source de fraction volumique  $\delta_k$ . Une procédure de modélisation systématique est parfois utilisée dans la littérature diphasique [76, 20, 78]. Cette procédure de modélisation consiste à rendre positive la production d'entropie du système (i.e. le second membre de l'équation (2.7)). Nous montrons dans cette section l'adéquation de ce processus de fermeture avec les modèles existants.



En ce qui concerne la modélisation de la diffusion, deux approches ont été portées à notre attention pour modéliser le flux de chaleur et les contraintes visqueuses. Suivie par Lhuillier dans [78], la première approche est globale. Cette première approche étudie les processus de diffusion sur l'ensemble du mélange diphasique. Un flux de chaleur et des contraintes visqueuses sont alors définis à l'échelle du mélange. Cette première approche ne distingue pas les phénomènes de diffusion au sein des phases. On s'intéresse ici à une seconde approche plus fréquemment retenue dans la littérature. Cette seconde approche sépare nettement la diffusion dans l'une et l'autre phase. Une telle approche étend généralement au cadre diphasique les modèles standard de la littérature monophasique. Que l'on s'intéresse aux écoulements à poudre [8], ou aux écoulements liquide-gaz [42], la loi de Fourier et la loi de Newton sont alors souvent reconduites dans chaque phase pour le flux de chaleur et le tenseur des contraintes visqueuses. Ces fermetures s'écrivent

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} \Sigma_k = -\frac{2}{3} \mu_k (\nabla \cdot u_k) \text{Id} + \mu_k (\nabla u_k + (\nabla u_k)^t), & \text{(loi de Newton)} \\ F_{T_k} = -\kappa_{T_k} \nabla T_k, & \text{(loi de Fourier)} \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $\mu_k \geq 0$  et  $\kappa_{T_k} \geq 0$  désignent respectivement la viscosité et la conductivité thermique de la phase  $k$ .

En ce qui concerne les interactions diphasiques, la modélisation des transferts interfaciaux s'effectue généralement par des termes de relaxation. Que l'on s'intéresse aux écoulements à poudre [8], aux écoulements à bulles [45], ou aux écoulements en transition de phase [78], la traînée est toujours liée à un écart de vitesse, et le terme source de fraction volumique à un écart de pression. Quelques rares publications [8, 78] s'intéressent au transfert de chaleur qu'elles modélisent par un écart de température. Cet ensemble de fermetures pour les transferts interfaciaux se résume aux modèles

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} \delta_k = K_P (P_k - P_{k'}), & K_P(W) > 0, \\ D_k = K_U (u_{k'} - u_k), & K_U(W) > 0, \\ \Phi_k = K_T (T_{k'} - T_k), & K_T(W) > 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

$k' = 3 - k,$

Les fonctions de relaxation  $K_P$ ,  $K_U$ ,  $K_T$ , ou coefficients de transfert interfaciaux diffèrent entre les applications. Nous en donnerons une formulation précise au prochain chapitre dans le cadre des écoulements liquide-vapeur en transition de phase.

Muni de ces lois de fermeture, le modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse est maintenant doté de l'inégalité d'entropie

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta - \sum_k \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_k \kappa_{T_k} \nabla T_k}{T_k} \right) &= \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k + \sum_k \frac{\alpha_k \kappa_{T_k} (\nabla T_k)^2}{T_k^2} \\ &+ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'ensemble des fermetures issues de la littérature est donc compatible avec la procédure de modélisation qui consiste à rendre positive la production d'entropie du modèle bifluide à deux pressions.

**Remarque 2.** Pour doter le modèle bifluide à sept équations d'une inégalité d'entropie, plusieurs modèles de relaxation ont été retenus dans cette section pour les transferts interfaciaux. Suivant les travaux de Baer et Nunziato [8], le terme source de fraction volumique  $\delta_k$  a par exemple été lié à un écart de pression entre les phases :

$$\forall k = 1, 2, \quad k' = 3 - k, \quad \delta_k = K_P (P_k - P_{k'}), \quad K_P > 0.$$

Spécifique du modèle bifluide à sept équations, ce terme de relaxation en pression n'apparaît pas dans les modélisations bifluides standard à une pression. Dans cette remarque, on s'intéresse à l'interprétation physique de ce terme source pour la fraction volumique. Suivant Andrianov, Warnecke [6], Saurel et Le Métayer [94], une analogie existe entre le modèle bifluide à sept équations et le système d'Euler utilisé dans un cadre monodimensionnel pour décrire les écoulements compressibles dans les tuyères. Soit  $\rho$ ,  $P$ ,

$u$ ,  $E$  respectivement la densité, la pression, la vitesse et l'énergie totale spécifiques associés à un écoulement monophasique compressible dans une tuyère de section  $A$ . Suivant Andrianov et Warnecke [5], cet écoulement monophasique est décrit dans un cadre monodimensionnel par le système

$$\begin{cases} \partial_t A = 0, \\ \partial_t(A\rho) + \partial_x(A\rho u) = 0, \\ \partial_t(A\rho u) + \partial_x(A\rho u^2 + AP) - P\partial_x A = 0, \\ \partial_t(A\rho E) + \partial_x[A(\rho E + P)u] = 0. \end{cases}$$

Toujours dans un cadre monodimensionnel, le modèle bifluide à sept équations s'écrit par ailleurs avec le seul terme source de fraction volumique :

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} \partial_t \alpha_k + V_i \partial_x \alpha_k = K_P (P_k - P_{k'}), \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k P_k) - P_i \partial_x \alpha_k = 0, \\ \partial_t(\alpha_k \rho_k E_k) + \partial_x[\alpha_k (\rho_k E_k + P_k) u_k] + P_i \partial_t \alpha_k = 0. \end{cases}$$

Formellement, la fraction volumique  $\alpha_k$  joue le rôle d'une section variable dans le temps pour les écoulements diphasiques. Dans le contexte bifluide moyenné, on parle alors de porosité pour le mélange diphasique. Suivant la modélisation retenue pour le terme source  $\delta_k$ , les variations de fraction volumique sont pilotées par l'écart de pression entre les phases. Pour  $k = 1, 2$  et  $k' = 3 - k$ , lorsque la pression  $P_k$  est supérieure à  $P_{k'}$ , la phase  $k$  a tendance à se dilater : la fraction volumique  $\alpha_k$  augmente. Inversement, lorsque la pression  $P_k$  est inférieure à  $P_{k'}$ , la phase  $k$  a tendance à se contracter : la fraction volumique  $\alpha_k$  diminue. Dans le cadre des écoulements de type gaz-particules, de tels mécanismes expliquent la formation des bouchons de poudre lors de la transition de la déflagration à la détonation [8, 71]. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, on cherche à déterminer si de tels mécanismes peuvent similairement prévoir des accumulations de vapeur dans les réacteurs.

## 2.4 Admissibilité des solutions régulières bornées

Aux sections précédentes, plusieurs lois de fermeture ont été proposées pour clore le modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse. La notion d'admissibilité a par ailleurs été définie à l'introduction de cette première partie de thèse par la donnée de l'ensemble

$$\Omega = \{W \in \mathbb{R}^{5+2d} / \forall k = 1, 2, \alpha_k \in ]0, 1[, \rho_k > 0, P_k > 0\},$$

où  $d$  désigne la dimension de l'espace physique. A titre préliminaire, on s'intéresse dans cette section à l'admissibilité des solutions régulières bornées du système (1.1) sans transfert de masse ni diffusion. Ce travail a déjà été entamé par Gallouët, Hérard et Seguin. Dans [42], ces auteurs se sont surtout intéressés à l'influence du terme source de fraction volumique. Nous poursuivons ici leur étude en considérant de plus un transfert de chaleur et de quantité de mouvement.

Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\tilde{\gamma}_k$  et  $\hat{\gamma}_{i_k}$  les deux coefficients thermodynamiques respectivement définis par les relations

$$\tilde{\gamma}_k = \left[ \rho_k \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right]^{-1}, \quad \hat{\gamma}_{i_k} P_k = \tilde{\gamma}_k P_k + \tilde{\gamma}_k (P_i - P_k).$$

Pour des solutions régulières du système (1.1) sans diffusion ni transfert de masse, les équations portant

sur les fractions volumiques, les masses partielles et les pressions s'écrivent de manière équivalente

$$\forall k = 1, 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_k + V_i \cdot \nabla \alpha_k = K_P (P_k - P_{k'}), \\ \partial_t m_k + u_k \cdot \nabla m_k + m_k \nabla \cdot u_k = 0, \\ \partial_t P_k + u_k \cdot \nabla P_k + \widehat{\gamma}_k P_k \nabla \cdot u_k + \frac{\widehat{\gamma}_{i_k} P_k}{\alpha_k} (u_k - V_i) \cdot \nabla \alpha_k \\ \quad = \frac{\widehat{\gamma}_{i_k} P_k}{\alpha_k} K_P (P_{k'} - P_k) + \frac{\widetilde{\gamma}_k}{\alpha_k} \left[ K_T (T_{k'} - T_k) + K_U (u_{k'} - u_k) \cdot (V_i - u_k) \right]. \end{array} \right.$$

L'admissibilité des fractions volumiques, des masses partielles et des pressions est successivement étudiée aux propositions 3, 4 et 5.

**Proposition 3.** Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\mathcal{D}$  un domaine borné de l'espace physique. On note  $\partial\mathcal{D}$  la frontière de ce domaine,  $n$  sa normale extérieure. Soit  $V_i$ ,  $\nabla \cdot V_i$  et  $\widetilde{K}_P$  des applications de  $L^\infty(]0, T[ \times \mathcal{D})$ . On considère un coefficient d'échange  $K_P$  de la forme

$$K_P = \alpha_1 \alpha_2 \widetilde{K}_P. \quad (2.11)$$

Pour des conditions initiales et aux limites admissibles,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k = 1, 2, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \alpha_k(t = 0, x) \in ]0, 1[, \\ \forall k = 1, 2, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \partial\mathcal{D} / V_i \cdot n < 0, \quad \alpha_k(t, x) \in ]0, 1[, \end{array} \right.$$

les solutions régulières bornées de l'équation

$$\partial_t \alpha_k + V_i \cdot \nabla \alpha_k = K_P (P_k - P_{k'})$$

évoluent dans l'intervalle  $[0, 1]$  sur l'ensemble du domaine  $[0, T] \times \mathcal{D}$  :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}, \quad \alpha_k(t, x) \in [0, 1].$$

**Démonstration.** La proposition 3 a déjà été montrée par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Nous en rappelons ici brièvement la démonstration. Soit  $\pi = \alpha_1 \alpha_2$ . Le principe du maximum sur les fractions volumiques est vérifié lorsque le produit  $\pi$  est positif. L'équation d'évolution portant sur le produit  $\pi$  s'écrit

$$\partial_t \pi + V_i \cdot \nabla \pi = \pi (\alpha_1 - \alpha_2) \widetilde{K}_P (P_2 - P_1).$$

L'application du lemme 1 présenté à l'annexe A assure la positivité de ce produit. ■

Pour une modélisation particulière (2.11) du coefficient d'échange  $K_P$ , la proposition 3 assure un principe du maximum sur les fractions volumiques. Une telle modélisation (2.11) du coefficient d'échange  $K_P$  est par exemple proposée au chapitre 3 dans le cadre des écoulements liquide-vapeur. La proposition 3 n'assure cependant pas l'admissibilité des fractions volumiques. Certaines solutions peuvent être amenées à toucher les bords de l'espace admissible  $\alpha_k = 0$  ou  $\alpha_k = 1$ . On s'intéresse maintenant à la positivité des masses partielles.

**Proposition 4.** Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\mathcal{D}$  un domaine borné de l'espace physique. On note  $\partial\mathcal{D}$  la frontière de ce domaine,  $n$  sa normale extérieure. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $u_k$  et  $\nabla \cdot u_k$  des applications de  $L^\infty(]0, T[ \times \mathcal{D})$ . Pour des conditions initiales et aux limites admissibles,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k = 1, 2, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad m_k(t = 0, x) > 0, \\ \forall k = 1, 2, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \partial\mathcal{D} / u_k \cdot n < 0, \quad m_k(t, x) > 0, \end{array} \right.$$

les solutions régulières bornées de l'équation

$$\partial_t m_k + u_k \cdot \nabla m_k + m_k \nabla \cdot u_k = 0$$

demeurent positives sur l'ensemble du domaine  $[0, T] \times \mathcal{D}$  :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}, \quad m_k(t, x) \geq 0.$$

La démonstration de la proposition 4 est une application directe du lemme 1 présenté à l'annexe A. Cette proposition 4 assure la positivité des masses partielles. L'admissibilité de ces masses partielles n'est cependant pas acquise. Certaines solutions peuvent présenter des densités nulles. On s'intéresse maintenant à l'admissibilité des pressions. A la proposition 5, la positivité de ces pressions n'a pu être établie qu'en l'absence de transfert thermique. La proposition 5 n'est donc valable qu'en présence du terme source de fraction volumique et de la traînée.

**Proposition 5.** Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\mathcal{D}$  un domaine borné de l'espace physique. On note  $\partial\mathcal{D}$  la frontière de ce domaine,  $n$  sa normale extérieure. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $u_k, \nabla \cdot u_k, \hat{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k, 1/\alpha_k$  des applications de  $L^\infty(]0, T[ \times \mathcal{D})$ . Pour  $k = 1, 2$ , on suppose le coefficient thermodynamique  $\tilde{\gamma}_k$  positif dans  $L^\infty(]0, T[ \times \mathcal{D})$ . Soit  $V_i$  et  $K_U \geq 0$  des applications de  $L^\infty(]0, T[ \times \mathcal{D})$ . Pour  $k = 1, 2$  et  $k' = 3 - k$ , on suppose l'application  $\delta_k : (P_k, t, x) \longrightarrow [K_P(P_k - P_{k'})](P_k, t, x)$  dans l'espace  $L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T[ \times \mathcal{D})$ . Pour des conditions initiales et aux limites admissibles,

$$\begin{cases} \forall k = 1, 2, \forall x \in \mathcal{D}, & P_k(t = 0, x) > 0, \\ \forall k = 1, 2, \forall t \in [0, T], \forall x \in \partial\mathcal{D} / u_k \cdot n < 0, & P_k(t, x) > 0, \end{cases}$$

les solutions régulières bornées de l'équation

$$\partial_t P_k + u_k \cdot \nabla P_k + \hat{\gamma}_k P_k \nabla \cdot u_k + \frac{\hat{\gamma}_{i_k} P_k}{\alpha_k} (u_k - V_i) \cdot \nabla \alpha_k = -\frac{\tilde{\gamma}_{i_k} P_k}{\alpha_k} \delta_k + \frac{\tilde{\gamma}_k}{\alpha_k} K_U (u_{k'} - u_k) \cdot (V_i - u_k) \quad (2.12)$$

demeurent positives sur l'ensemble du domaine  $[0, T] \times \mathcal{D}$  :

$$\forall k = 1, 2, \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}, \quad P_k(t, x) \geq 0.$$

**Démonstration.** A la section 2.2, une modélisation particulière de la vitesse interfaciale a été adoptée. Cette modélisation (2.4) de la vitesse interfaciale assure la positivité du terme

$$\frac{\tilde{\gamma}_k}{\alpha_k} K_U (u_{k'} - u_k) \cdot (V_i - u_k)$$

au second membre de l'équation (2.12). L'application du lemme 1 à l'équation (2.12) assure la positivité des pressions. ■

Pour établir la proposition 5, plusieurs hypothèses thermodynamiques se sont avérées nécessaires concernant le caractère borné des coefficients  $\hat{\gamma}_k, \tilde{\gamma}_k, \hat{\gamma}_{i_k}$  et la positivité du coefficient  $\tilde{\gamma}_k, k = 1, 2$ . Ces hypothèses sont par exemple vérifiées pour une modélisation (2.13) de la pression interfaciale, en imposant une loi d'état de type gaz parfait (2.2) dans les deux phases :

$$P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_2 T_2 + m_1 T_1}. \quad (2.13)$$

La proposition 5 n'assure cependant pas l'admissibilité des pressions. Certaines solutions peuvent conduire à l'apparition du vide. L'ensemble des résultats présentés aux propositions 3, 4 et 5 nous apparaît dès lors relativement faible. Ces trois propositions n'assurent qu'une admissibilité partielle des solutions régulières bornées au modèle bifluide à sept équations sans diffusion ni transfert de masse. Certaines de ces solutions peuvent toucher le bord de l'espace admissible  $\Omega$ . Ces trois propositions utilisent par ailleurs la régularité des solutions sans jamais l'assurer. Suivant les travaux de Dafermos [28], quand bien même ces solutions ne seraient pas amenées à rester régulières, l'ensemble de ces propositions peut néanmoins être valable sur un temps court. Mais rien n'assure que ces solutions restent bornées sur cet intervalle de temps.

En conclusion, plusieurs lois de fermeture ont été proposées dans ce chapitre pour clore le modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse. Certaines de ces fermetures se présentent sous la forme de lois de comportement. Ces lois d'état caractérisent les propriétés thermodynamiques de chacune des phases.

On s'est placé dans le cadre classique où une entropie strictement concave est définie dans chaque phase. Les autres fermetures découlent de notre analyse bibliographique. Elles concernent la modélisation des interactions diphasiques. Nous avons montré l'adéquation des modèles de la littérature avec la procédure de modélisation qui consiste à définir une inégalité d'entropie pour le modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse. Nous verrons au prochain chapitre comment appliquer cette procédure de modélisation à la fermeture du modèle bifluide à sept équations avec transfert de masse. Muni de cette inégalité d'entropie, la stabilité de l'équilibre isobare isotherme équivitesse sera étudiée à la section 5.1. Doté de cette structure dissipative, certaines solutions faibles de la partie convective associée au système (1.4) seront par ailleurs sélectionnées section 4.3 au regard d'un critère entropique.

# Annexe A

Dans cette annexe, un lemme de positivité est présenté. Ce lemme nous permet d'étudier l'admissibilité de certaines fonctions telles les pressions, les masses partielles ou encore les fractions volumiques. Ce lemme est classique. Gallouët, Hérard et Seguin en utilise une version très semblable dans [42]. Notre démonstration s'inspire de leurs travaux.

**Lemme 1.** Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\mathcal{D}$  un domaine borné de l'espace physique. On note  $\partial\mathcal{D}$  la frontière de ce domaine,  $n$  sa normale extérieure. Soit  $\phi \in L^\infty(]0, T[ \times \mathcal{D})$  une application régulière bornée de  $]0, T[ \times \mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $u$  et  $\nabla \cdot u$  deux applications de  $L^\infty(]0, T[ \times \mathcal{D})$ . Soit  $F \in L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T[ \times \mathcal{D})$  une application régulière bornée de  $\mathbb{R} \times ]0, T[ \times \mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $G \in L^\infty(\mathbb{R} \times ]0, T[ \times \mathcal{D})$  une application régulière bornée et positive de  $\mathbb{R} \times ]0, T[ \times \mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Pour des conditions initiales et aux limites positives,

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}, & \phi(t=0, x) \geq 0, \\ \forall t \in [0, T], \forall x \in \partial\mathcal{D}/u \cdot n < 0, & \phi(t, x) \geq 0, \end{cases} \quad (\text{a.1})$$

la solution de l'équation

$$\partial_t \phi + u \cdot \nabla \phi = F(\phi, t, x) \phi + G(\phi, t, x) \quad (\text{a.2})$$

demeure positive sur l'ensemble du domaine  $[0, T] \times \mathcal{D}$  :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}, \quad \phi(t, x) \geq 0.$$

**Démonstration.** Soit  $\phi$  une application régulière bornée de  $[0, T] \times \mathcal{D}$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit pour tout  $t \in [0, T]$  l'application

$$\|\phi\|(t) = \left( \int_{\mathcal{D}} [\phi(t, x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

L'application  $\phi$  est décomposée sur le domaine  $[0, T] \times \mathcal{D}$  en une composante positive  $\phi^+$  et négative  $\phi^-$ . Ces deux composantes satisfont

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}, \quad \phi = \phi^+ - \phi^-, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi^+ \geq 0, \\ \phi^- \geq 0, \\ \phi^+ \cdot \phi^- = 0. \end{cases}$$

La multiplication de l'équation (a.2) par  $(-\phi^-)$  conduit à la relation

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}, \quad \partial_t (\phi^-)^2 + u \cdot \nabla (\phi^-)^2 = 2F(\phi, t, x) (\phi^-)^2 - 2G(\phi, t, x) (\phi^-).$$

L'intégration de cette égalité sur le domaine  $\mathcal{D}$  conduit à la relation

$$\forall t \in [0, T], \quad \partial_t \|\phi^-\|^2 = \int_{\mathcal{D}} (2F(\phi, t, x) + \nabla \cdot u) (\phi^-)^2 dx - \int_{\mathcal{D}} 2G(\phi, t, x) (\phi^-) dx - \int_{\partial\mathcal{D}} u \cdot n (\phi^-)^2 dx.$$

L'intégration de cette égalité sur un intervalle  $[0, t]$  avec  $t \leq T$  conduit à la relation

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\phi^-\|^2(t) - \underbrace{\|\phi^-\|^2(0)}_{=0 \text{ (voir (a.1))}} = \int_0^t \left( \int_{\mathcal{D}} (2F(\phi, s, x) + \nabla \cdot u) (\phi^-)^2 dx \right. \\ \left. - \underbrace{\int_{\mathcal{D}} 2G(\phi, s, x) (\phi^-) dx}_{\geq 0 \text{ (par hypothèse)}} - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}} u \cdot n (\phi^-)^2 dx}_{\geq 0 \text{ (voir (a.1))}} \right) ds.$$

On obtient aisément l'inégalité

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\phi^-\|^2(t) \leq \int_0^t \int_{\mathcal{D}} (2|F(\phi, s, x)| + |\nabla \cdot u|) (\phi^-)^2 dx ds.$$

Par hypothèse, les applications  $F$  et  $\nabla \cdot u$  sont supposées bornées. Il existe donc une constante  $M$  strictement positive telle que

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\phi^-\|^2(t) \leq M \int_0^t \|\phi^-\|^2(s) ds.$$

Le lemme de Gronwall termine cette démonstration :

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\phi^-\|(t) = 0 \quad \implies \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}, \quad \phi(t, x) \geq 0.$$

■

## Chapitre 3

# Entropie et lois de fermeture pour les écoulements diphasiques en transition de phase

Dans le cadre de la transition de phase, les différentes fermetures du modèle bifluide à deux pressions sont réexaminées dans ce chapitre pour les écoulements liquide-vapeur. En ce qui concerne les propriétés thermodynamiques de chaque phase, on s'est placé au chapitre précédent dans le cadre classique où une entropie strictement concave est définie pour chaque constituant du mélange. Une transition de phase n'apparaît cependant pas spontanément entre deux fluides quelconques, mais entre un liquide et sa vapeur. Suivant les travaux de Callen [19], on considère ici des lois d'état particulières pour lesquelles un équilibre liquide-vapeur monovariant peut de plus exister entre les phases. Ce cadre thermodynamique est détaillé à la première section de ce chapitre. On s'intéresse ensuite à la fermeture des interactions diphasiques. Au chapitre précédent, une procédure de modélisation a été développée dans le cadre des écoulements liquide-gaz sans transfert de masse. Cette procédure de modélisation consiste à rendre positive la production d'entropie du modèle bifluide à deux pressions. Suivant les travaux de Lhuillier [78], cette procédure de modélisation est ici étendue au cadre des écoulements en transition de phase.

### 3.1 Lois de comportement et hypothèses pour les écoulements diphasiques en transition de phase

Pour fermer le modèle bifluide à sept équations, les différentes propriétés thermodynamiques de chaque phase doivent tout d'abord être spécifiées. Pour  $k = 1, 2$ , rappelons la définition de la pression  $P_k$ , de la température  $T_k$ , de l'énergie interne  $e_k$  et du volume spécifique  $\tau_k$  de la phase  $k$ . Au chapitre précédent, suivant l'hypothèse 1, l'existence d'une entropie  $s_k$  a été postulée dans chaque phase. Cette hypothèse revêt un caractère monophasique. Une transition de phase n'apparaît cependant qu'entre un liquide et sa vapeur. Pour discriminer les lois d'état utilisables dans chaque phase, une seconde hypothèse est alors formulée suivant les travaux de Callen [19]. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $g_k$  le potentiel de Gibbs défini par la relation

$$g_k(P_k, T_k) = e_k(P_k, T_k) + P_k \tau_k(P_k, T_k) - T_k s_k(P_k, T_k).$$

Cette seconde hypothèse stipule la différence des volumes spécifiques respectivement associés à un liquide et sa vapeur, ainsi que l'existence d'un équilibre triple isobare isotherme équipotentiel monovariant pour les écoulements diphasiques en transition de phase.

**Hypothèse 2.** *Pour décrire les propriétés thermodynamiques d'un mélange liquide-vapeur, tout couple de lois d'état présente des volumes spécifiques différents :*

$$\forall (P_1, T_1, P_2, T_2) \in \mathbb{R}_+^4, \quad \tau_1(P_1, T_1) \neq \tau_2(P_2, T_2).$$



A l'équilibre isotherme  $T_1 = T_2 = T$ , il existe de plus un unique équilibre isobare  $P_1 = P_2 = P$  solution de l'équation

$$g_1(P, T) = g_2(P, T).$$

Pour les écoulements diphasiques en transition de phase, cette seconde hypothèse établit une relation de compatibilité entre les différentes lois d'état susceptibles de décrire un liquide et sa vapeur. De nombreux couples de lois d'état satisfont cette seconde hypothèse. Cette seconde hypothèse est vérifiée à l'exemple 2 pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases.

**Exemple 2.** Pour  $k = 1, 2$ , soit  $C_{v_k} > 0$  la capacité calorifique à volume constant et  $\gamma_k > 1$  un coefficient thermodynamique caractéristique de la phase  $k$ . Pour une loi d'état de type gaz parfait (2.2) dans les deux phases, le potentiel de Gibbs s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad g_k(P_k, T_k) = \gamma_k C_{v_k} T_k - C_{v_k} T_k \ln \left[ \frac{T_k^{\gamma_k} [(\gamma_k - 1) C_{v_k}]^{\gamma_k}}{P_k^{\gamma_k - 1}} \right].$$

Les coefficients thermodynamiques  $C_{v_k}$  et  $\gamma_k$  sont supposés vérifier la relation

$$(\gamma_1 - 1) C_{v_1} \neq (\gamma_2 - 1) C_{v_2}. \quad (3.1)$$

A l'équilibre isotherme  $T_1 = T_2 = T$ , il existe alors un unique équilibre isobare  $P_1 = P_2 = P$  solution de l'équation

$$g_1(P, T) = g_2(P, T).$$

Cet unique état d'équilibre isobare s'exprime en fonction de la température d'équilibre :

$$P(T) = \left[ \frac{[C_{v_1} (\gamma_1 - 1)]^{\gamma_1 C_{v_1}}}{[C_{v_2} (\gamma_2 - 1)]^{\gamma_2 C_{v_2}}} (e^{-1} T)^{\gamma_1 C_{v_1} - \gamma_2 C_{v_2}} \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} - (\gamma_2 - 1) C_{v_2}}}.$$

La monovariance de l'équilibre triple isobare isotherme équipotentiel est ainsi vérifiée. Suivant la relation (3.1), les volumes spécifiques respectivement associés au liquide et à sa vapeur sont par ailleurs toujours différents au voisinage de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel. Pour un couple de lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, l'hypothèse 2 est donc satisfaite au voisinage de l'équilibre triple isobare isotherme équipotentiel.

### 3.2 Définition d'une entropie pour les écoulements diphasiques en transition de phase

Pour caractériser les propriétés d'un mélange liquide-vapeur, un cadre thermodynamique a été proposé à la section précédente. Dans ce cadre thermodynamique, on s'intéresse à la fermeture du modèle bifluide à deux pressions pour les écoulements en transition de phase. Cette fermeture du modèle bifluide à sept équations est envisagée de manière à doter le système (1.1) d'une inégalité d'entropie. A titre préliminaire, une entropie est tout d'abord construite dans cette section.

D'après les ouvrages de référence [52, 98, 97], la définition d'un couple entropie – flux d'entropie pour ce système d'EDP passe par la construction d'une loi de conservation supplémentaire. Suivant le travail de Gallouët, Hérard et Seguin [42] rappelé au chapitre précédent, on applique ici ce procédé au modèle bifluide à sept équations avec transfert de masse. Dans la formulation (1.1) de ce modèle bifluide à sept équations, on rappelle que  $V_i$ ,  $P_i$  et  $e_i$  désigne respectivement la vitesse, la pression et l'énergie interne spécifique interfaciales. Pour  $k = 1, 2$ , on introduit le potentiel de changement de phase

$$\theta_k = g_k - \frac{(u_k - V_i)^2}{2}.$$

Tableau 3.1: différents couples  $(P_i, V_i)$  en accord avec la relation (2.3).

Baer et Nunziato [8] Gavrilyuk et Saurel [45] Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27]	$\beta = 1$	$V_i = u_1$	$P_i = P_2$
Baer et Nunziato [8] Gavrilyuk et Saurel [45] Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27]	$\beta = 0$	$V_i = u_2$	$P_i = P_1$
Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27]	$\beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$	$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$	$P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_2 T_2 + m_1 T_1}$

Soit  $\eta = \sum_k m_k s_k$  et  $F_\eta = \sum_k m_k s_k u_k$ . L'entropie de mélange  $\eta$  satisfait l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta + \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) (u_k - V_i) \cdot \nabla \alpha_k &= \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k - \sum_k \frac{1}{T_k} \nabla \cdot (\alpha_k F_{T_k}) \\ &+ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k. \end{aligned}$$

Dans le cadre des écoulements en transition de phase, la construction d'une entropie pour le système (1.1) est alors immédiate et attendue. La proposition 2 présentée au chapitre précédent dans le cadre des écoulements liquide-gaz n'est pas modifiée par l'introduction du transfert de masse. Le couple  $(\eta, F_\eta)$  constitue toujours un couple entropie – flux d'entropie pour le système (1.1) à la condition que la vitesse et la pression interfaciales satisfassent la relation

$$\frac{1}{T_2} (P_i - P_2) (u_2 - V_i) - \frac{1}{T_1} (P_i - P_1) (u_1 - V_i) = 0. \quad (2.3)$$

Dans la littérature, la vitesse interfaciale est souvent modélisée par une combinaison convexe des vitesses phasiques :

$$V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \quad \beta \in [0, 1].$$

Au chapitre précédent, certaines de ces modélisations ont été listées dans le tableau 2.1. Ces modélisations dépendent des applications envisagées. Suivant la proposition 2, le lien existant entre la vitesse et la pression interfaciales conduit à la relation

$$P_i = \mu(\beta) P_1 + (1 - \mu(\beta)) P_2, \quad \mu(\beta) = \frac{T_2 (1 - \beta)}{T_2 (1 - \beta) + T_1 \beta} \in [0, 1].$$

De manière analogue au chapitre précédent, la pression interfaciale s'écrit dès lors comme une combinaison convexe des pressions phasiques. L'ensemble des couples  $(P_i, V_i)$  de la littérature à vérifier cette relation entre la vitesse et la pression interfaciales est rappelé dans le tableau 3.1. On se restreindra par la suite à ce type de modélisations qui dotent le modèle bifluide à sept équations d'une entropie. La forme précise du coefficient  $\beta$  sera détaillée au chapitre 4, lorsque nous construirons des relations de saut pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Le modèle  $\beta = 1/2$  est néanmoins discuté dès la prochaine section. Ce modèle a spécifiquement été introduit par Lhuillier dans [78] pour traiter des écoulements liquide-vapeur en transition de phase.

### 3.3 Construction d'une inégalité d'entropie pour les écoulements diphasiques en transition de phase

Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur, un couple entropie – flux d'entropie a été construit à la section précédente pour le modèle bifluide à sept équations avec transfert de masse. Ce couple entropique satisfait l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta = & \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k - \sum_k \frac{1}{T_k} \nabla \cdot (\alpha_k F_{T_k}) \\ & + \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Au second membre, le tenseur des contraintes visqueuses  $\Sigma_k$ , le flux de chaleur  $F_{T_k}$ , la traînée  $D_k$ , le transfert de chaleur  $\Phi_k$ , le transfert de masse  $\Gamma_k$ , le terme source de fraction volumique  $\delta_k$  et l'énergie interne spécifique interfaciale  $e_i$  sont inconnus. Pour modéliser ces différents termes, on recourt à la procédure de modélisation utilisée au chapitre 2 dans le cadre des écoulements liquide-gaz. Cette procédure de modélisation consiste à rendre positive la production d'entropie du modèle bifluide à deux pressions. Les différentes fermetures issues de cette procédure de modélisation sont confrontées dans cette section aux modèles de la littérature.

Pour modéliser les phénomènes de diffusion, les différentes fermetures mises en avant à la section 2.3 dans le cadre des écoulements liquide-gaz sont ici reconduites dans le cadre de la transition de phase. Ces fermetures consistent à adopter dans chaque phase la loi de Newton et la loi de Fourier pour clore le tenseur des contraintes visqueuses  $\Sigma_k$  et le flux de chaleur  $F_{T_k}$ . Ces différentes fermetures (2.8) ont été rappelées au chapitre précédent. L'introduction du transfert de masse n'affecte pas ces modélisations standard des processus de diffusion. Chacun de ces effets diffusifs apporte une contribution positive au second membre de l'équation (3.2).

En ce qui concerne les interactions diphasiques, la modélisation de la traînée et du terme source de fraction volumique s'effectue généralement par des termes de relaxation. Que l'on s'intéresse à la combustion des poudres [8] ou aux écoulements liquide-vapeur [93, 42, 78], la traînée est toujours liée à un écart de vitesse, et le terme source de fraction volumique à un écart de pression. Les différents modèles élaborés au chapitre 2 dans le cadre des écoulements diphasiques sans transfert de masse sont alors reconduits dans le contexte de la transition de phase. Ces modèles s'écrivent

$$\begin{aligned} \forall k = 1, 2, & \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_k = K_P (P_k - P_{k'}), \quad K_P(W) > 0, \\ D_k = K_U (u_{k'} - u_k), \quad K_U(W) > 0. \end{array} \right. \\ k' = 3 - k, & \end{aligned}$$

Chacun de ces termes apporte une contribution positive au second membre de l'équation (3.2). Les différentes fonctions de relaxation  $K_P$ ,  $K_U$  ou coefficients d'échange interfaciaux seront bientôt précisés.

En ce qui concerne les transferts de chaleur et de masse, différentes modélisations ressortent de notre étude bibliographique. Ces différentes modélisations dépendent de l'approche envisagée pour décrire la transition de phase. Dans le cadre standard des modèles bifluides à une pression, un couplage est fréquemment postulé entre ces deux transferts interfaciaux qui ne sont plus indépendants. Définissons pour  $k = 1, 2$ , l'enthalpie phasique aux interfaces  $h_{i_k}$ . Ce couplage entre les transferts de chaleur et de masse s'écrit

$$\sum_k \Phi_k + h_{i_k} \Gamma_k = 0, \quad \sum_k \Gamma_k = 0, \quad \sum_k \Phi_k \neq 0. \quad (3.3)$$

Ce couplage dresse un bilan énergétique moyen sur l'ensemble des interfaces. La dérivation conditionnelle de ce bilan énergétique moyen à partir des équations locales instantanées est par exemple décrite par Ishii dans [67] et résumée dans le rapport interne CEA [7]. Staedtke et al. recourent systématiquement à cette fermeture dans les rapports du projet ASTAR [99]. Une telle modélisation des transferts énergétiques s'avère

néanmoins incompatible avec la formulation (1.1) du modèle bifluide à sept équations. Cette fermeture (3.3) des transferts énergétiques ne vérifie pas l'ensemble des relations (1.5) pour les transferts interfaciaux ( $\sum_k \Gamma_k = 0$  et  $\sum_k \Phi_k = 0$ ). Cette fermeture (3.3) des transferts énergétiques ne sera pas prise en compte à l'avenir. Dans le cadre non-standard du modèle bifluide à sept équations, seules quelques rares publications abordent la modélisation des transferts énergétiques. De manière générale, les transferts de chaleur et de masse sont indépendants. Nous allons successivement détailler la modélisation du transfert de chaleur puis du transfert de masse.

En ce qui concerne le transfert de chaleur, sa modélisation s'effectue généralement par un terme de relaxation. Que l'on s'intéresse à la combustion des poudres [8] ou aux écoulements liquide-vapeur [78], ce transfert thermique est toujours lié à un écart de température. Le modèle de transfert thermique élaboré au chapitre précédent dans le cadre des écoulements sans transfert de masse est alors reconduit dans le contexte de la transition de phase. Ce modèle s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad k' = 3 - k, \quad \Phi_k = K_T (T_{k'} - T_k), \quad K_T(W) > 0.$$

Ce modèle apporte une contribution positive au second membre de l'équation (3.2). La fonction de relaxation  $K_T$  ou coefficient d'échange interfacial sera bientôt précisé.

En ce qui concerne le transfert de masse, seuls deux modèles distincts ont été portés à notre attention. Ces deux modèles décrivent des phénomènes différents. Dans le cadre des écoulements à poudre [8], un flux de masse et une énergie interfaciale sont associés à la phase solide indiquée 1. Ce flux de masse et cette énergie interfaciale s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= K_\Gamma \left[ \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \left[ (e_1 - e_2) - T_2 (s_1 - s_2) + \frac{T_2}{\rho_1} \left( \frac{\vartheta_1}{T_1} - \frac{\vartheta_2}{T_2} \right) \right] + P_2 \right], \quad K_\Gamma(W) > 0, \\ e_i &= e_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pour obtenir cette expression du flux de masse, Baer et Nunziato [8] recourent à une thermodynamique généralisée pour décrire les différents constituants du mélange. Dans le cadre de cette thermodynamique généralisée, l'énergie libre  $f_k = e_k - T_k s_k$  est une fonction de la température  $T_k$ , de la densité  $\rho_k$  et de la fraction volumique  $\alpha_k$ ,  $k = 1, 2$ . Dans cette expression (3.4) du flux de masse, le coefficient thermodynamique  $\vartheta_k$  est associé à une dérivée partielle de l'énergie libre :

$$\forall k = 1, 2, \quad \vartheta_k = m_k \left( \frac{\partial f_k}{\partial \alpha_k} \right)_{T_k, \rho_k}.$$

Dans cette expression du flux de masse, la fonction de relaxation  $K_\Gamma$  désigne le coefficient d'échange interfacial. Pris conjointement, cette modélisation du transfert de masse et de l'énergie interfaciale n'apporte généralement pas une contribution positive au second membre de l'équation (3.2). Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur, une thermodynamique propre aux interfaces est différemment introduite par Lhuillier dans [78]. Cette thermodynamique propre aux interfaces se caractérise par une température  $T_i$ , une pression  $P_i$ , une entropie  $s_i$ , un potentiel  $g_i$  et un volume spécifique  $\tau_i$  :

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 T_2 + \alpha_2 T_1, & P_i &= \alpha_1 P_2 + \alpha_2 P_1, \\ s_i &= \alpha_1 s_2 + \alpha_2 s_1, & g_i &= \alpha_1 g_2 + \alpha_2 g_1, & \tau_i &= \alpha_1 \tau_2 + \alpha_2 \tau_1. \end{aligned}$$

Le transfert de masse et l'énergie interfaciale s'expriment alors respectivement

$$\begin{aligned} \forall k = 1, 2, \quad k' = 3 - k, \quad \Gamma_k &= K_\Gamma \left[ g_{k'} - g_k + s_i (T_{k'} - T_k) - \tau_i (P_{k'} - P_k) \right], \quad K_\Gamma(W) > 0, \\ e_i &= g_i + T_i s_i - P_i \tau_i. \end{aligned}$$

Dans cette expression du flux de masse, la fonction  $K_\Gamma$  désigne à nouveau le coefficient d'échange interfacial. Pris conjointement, ces deux modèles n'apportent toujours pas une contribution positive au second

membre de l'équation (3.2). Nous sommes donc amenés à proposer de nouveaux modèles pour le transfert de masse et l'énergie interfaciale qui rendent positive la production d'entropie du modèle bifluide à sept équations.

Raisonnons par analogie avec les modélisations existantes des grandeurs interfaciales et des termes de transfert. De la même manière que la vitesse et la pression interfaciales sont généralement associées à une combinaison convexe des vitesses ou des pressions phasiques, on modélise l'énergie interfaciale  $e_i$  par une combinaison convexe des potentiels de changement de phase :

$$e_i = v \theta_1 + (1 - v) \theta_2, \quad v \in [0, 1].$$

De la même manière que la traînée, le transfert thermique ou encore le terme source de fraction volumique sont généralement associés à un écart de vitesse, de température ou de pression, on modélise le transfert de masse par un terme de relaxation entre les potentiels de changement de phase :

$$\forall k = 1, 2, \quad k' = 3 - k, \quad \Gamma_k = K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k), \quad K_\theta(W) > 0. \quad (3.5)$$

Pris conjointement, ces deux modèles apportent une contribution positive au second membre de l'équation (3.2). Ils sont donc compatibles avec la procédure de modélisation qui consiste à rendre positive la production d'entropie du système (1.1). La fonction de relaxation  $K_\theta$  ou coefficient d'échange interfacial sera bientôt précisé.

Récapitulons l'ensemble des modélisations que nous adoptons pour la diffusion et les différents termes d'interaction entre les phases. Les transferts interfaciaux sont génériquement associés à des écarts entre les variables phasiques. Ces transferts interfaciaux sont modélisés par des termes de relaxation. Ces modèles de relaxation s'écrivent respectivement

$$\forall k = 1, 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_k = K_P (P_k - P_{k'}), \quad K_P(W) > 0, \\ D_k = K_U (u_{k'} - u_k), \quad K_U(W) > 0, \\ \Phi_k = K_T (T_{k'} - T_k), \quad K_T(W) > 0, \\ \Gamma_k = K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k), \quad K_\theta(W) > 0. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Les grandeurs interfaciales sont génériquement associées à des combinaisons convexes des variables phasiques. Ces grandeurs interfaciales s'écrivent respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \quad \beta \in [0, 1], \\ P_i = \mu(\beta) P_1 + (1 - \mu(\beta)) P_2, \quad \mu(\beta) = \frac{T_2 (1 - \beta)}{T_2 (1 - \beta) + T_1 \beta} \in [0, 1], \\ e_i = v \theta_1 + (1 - v) \theta_2, \quad v \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Pour décrire les processus de diffusion, on considère dans chaque phase les lois de Fourier et de Newton (2.8) pour le flux de chaleur et les contraintes visqueuses. Muni de cet ensemble de fermetures, le modèle bifluide à sept équations avec transfert de masse est doté de l'inégalité d'entropie

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta - \sum_k \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_k \kappa_{T_k} \nabla T_k}{T_k} \right) &= \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k + \sum_k \frac{\alpha_k \kappa_{T_k} (\nabla T_k)^2}{T_k^2} \\ &+ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

L'ensemble des fermetures (3.6), (3.7) et (2.8) est donc compatible avec la procédure de modélisation qui consiste à rendre positive la production d'entropie du système (1.1). Ces modèles n'induisent aucun couplage entre les différents termes de transfert ou de diffusion. Chacun apporte une contribution positive au second membre de l'équation (3.8). En s'inspirant de la théorie d'Onsager [85, 86] reprise par

Séro-Guillaume et Rimbart dans [96], on pourrait envisager de tels couplages qui soient compatibles avec l'inégalité d'entropie. Nous nous en abstenons néanmoins par la suite. Les processus de diffusion seront par ailleurs négligés à l'avenir.

**Remarque 3.** *A notre connaissance, la modélisation (3.5) du transfert de masse est nouvelle. Cette modélisation du transfert de masse s'inscrit dans une description bifluide moyennée des écoulements diphasiques. Dans un contexte équivalente lié à la simulation directe des écoulements diphasiques, un modèle très semblable a été proposé par Caro dans [20]. Ce modèle s'écrit*

$$\forall k = 1, 2, \quad k' = 3 - k, \quad \Gamma_k = K_\Gamma (g_{k'} - g_k), \quad K_\Gamma(W) > 0.$$

*Notre modélisation (3.5) du transfert de masse peut donc sûrement être vue comme l'extension au cadre bifluide moyenné à deux vitesses du modèle proposé par Caro dans le cadre de la simulation directe.*

**Remarque 4.** *Dans le tableau 2.1, plusieurs modélisations de la vitesse interfaciale ont été listées. L'ensemble de ces modélisations associe la vitesse interfaciale à une combinaison convexe des vitesses physiques :  $V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2$ ,  $\beta \in [0, 1]$ . Ces différents modèles se distinguent par leur définition du coefficient  $\beta$ . Dans [78], Lhuillier considère qu'un transfert de masse ne peut pas avoir lieu au sein d'un mélange liquide-vapeur à l'équilibre thermodynamique en raison d'un simple déséquilibre cinématique entre les phases. Cet auteur préconise l'emploi du coefficient  $\beta = 1/2$ . Pour notre définition  $\theta_k = g_k - (u_k - V_i)^2 / 2$  du potentiel de changement de phase, seul ce coefficient  $\beta = 1/2$  annule effectivement la contribution de l'écart de vitesse au transfert de masse  $\Gamma_k = K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k)$ . Si cette analyse nous semble pertinente à l'échelle des interfaces, nous considérons différemment qu'à l'échelle bifluide moyennée, le déséquilibre des vitesses peut avoir une influence sur le transfert de masse. Nous ne retenons donc pas a priori le modèle  $\beta = 1/2$  pour la vitesse interfaciale. La forme précise du coefficient  $\beta$  sera discutée au chapitre 4, lorsque nous construirons des relations de saut pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.*

### 3.4 Modélisation des coefficients d'échanges interfaciaux pour les écoulements diphasiques en transition de phase

A la section précédente, diverses modélisations des interactions diphasiques ont été adoptées pour clore le modèle bifluide à sept équations. Les transferts interfaciaux ont notamment été associés à des termes de relaxation. Ces différents modèles pour la traînée  $D_k$ , le flux de chaleur  $\Phi_k$ , le flux de masse  $\Gamma_k$  et le terme source de fraction volumique  $\delta_k$  sont présentés à la relation (3.6). L'intensité de ces transferts interfaciaux dépend des fonctions de relaxation  $K_P$ ,  $K_U$ ,  $K_T$ ,  $K_\theta$  ou coefficients d'échange. Diverses modélisations pour ces coefficients d'échange ressortent de la littérature. Nous en étudions dans cette section l'applicabilité à notre définition des transferts interfaciaux pour le modèle bifluide à sept équations.

Lorsqu'une synthèse bibliographique est tentée sur le sujet, trois difficultés majeures apparaissent qu'il faut clairement identifier. La première est liée à la variété des phénomènes de transfert. Une kyrielle de modèles distincts existe dans la littérature. Ces modèles dépendent des applications envisagées. Dans le cadre des écoulements gaz-particules par exemple, différents modèles sont utilisés suivant que l'on s'intéresse à la combustion des poudres [8] ou à la torréfaction du café [63]. Il convient donc tout d'abord d'identifier clairement un domaine d'application. Nous nous focaliserons à l'avenir sur les écoulements liquide-vapeur en transition de phase.

Mais quand bien même cette première restriction est effectuée, une seconde difficulté apparaît. Cette seconde difficulté est liée à la formulation des modèles proposés. De manière générale, ces modèles se présentent sous la forme de corrélations expérimentales qui ont des gammes d'applications limitées. Nous en donnons ici l'exemple sur le coefficient de traînée  $K_U$ . Dans le contexte des écoulements à phase dispersée, le modèle de Drew et Passman [35] est fréquemment retenu. Ce modèle nécessite l'introduction de

la densité d'aire interfaciale  $a_i$  et du coefficient de frottement  $C_f$ . Ce modèle s'écrit

$$K_U = \frac{1}{8} a_i C_f \rho_1 |u_1 - u_2|.$$

L'indice 1 y désigne la phase continue. Deux paramètres  $a_i$  et  $C_f$  sont introduits dans cette définition du coefficient d'échange  $K_U$ . La modélisation de ces paramètres requiert des hypothèses supplémentaires. Pour prendre en compte le profil des inclusions, Ishii et Mishima [68] font par exemple dépendre le coefficient de frottement  $C_f$  du rapport de forme  $r_S/r_f$ , où  $r_S$  désigne le rayon de Sauter et  $r_f$  le rayon de traînée. Mais quoiqu'il en soit, la validité de ce modèle est par construction limitée aux écoulements à phase dispersée. Qu'en est-il pour d'autres régimes d'écoulements ?

Enfin, quand bien même on dispose de certains résultats expérimentaux pour les coefficients d'échange, une troisième difficulté apparaît. Ces résultats expérimentaux ne sont pas nécessairement transposables dans notre cadre d'étude. Pour les modèles bifluïdes, l'ensemble des campagnes expérimentales a été mené dans le cadre standard des modèles à une pression. Dans ce cadre, flux de masse et flux de chaleur sont généralement liés par la relation (3.3). De manière générale, les transferts de chaleur et de masse sont indépendants pour le modèle à sept équations. Dans le cadre des modèles bifluïdes à une pression, il n'existe par ailleurs pas d'équivalent du terme source de fraction volumique  $\delta_k$ . Pour les écoulements liquide-vapeur en transition de phase, nous sommes donc amenés à proposer de nouveaux modèles pour les coefficients d'échange interfaciaux du modèle bifluïde à sept équations.

En ce qui concerne la modélisation de ces coefficients d'échange pour le modèle bifluïde à sept équations avec transition de phase, certaines analyses dimensionnelles ont déjà été réalisées par Lhuillier dans [78]. Mais outre ces analyses dimensionnelles, nous retenons également de son travail l'hypothèse d'un faible écart de l'écoulement liquide-vapeur par rapport aux conditions de saturation. Nous proposons ici de traduire cette hypothèse en termes mathématiques en supposant l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse localement stable. Dans un premier temps, on introduit les coefficients thermodynamiques

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{uu} &= \sum_k \frac{1}{m_k}, & \mathcal{A}_{pp} &= \sum_k \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & \mathcal{A}_{tt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \\ \mathcal{A}_{\theta\theta} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] - \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k). \end{aligned}$$

On modélise ensuite les différentes fonctions de relaxation

$$K_U = \frac{1}{\tau_U \mathcal{A}_{uu}}, \quad K_P = \frac{1}{\tau_P \mathcal{A}_{pp}}, \quad K_T = \frac{1}{\tau_T \mathcal{A}_{tt}}, \quad K_\theta = \frac{1}{\tau_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta}}. \quad (3.9)$$

Dans cette modélisation des coefficients d'échange interfaciaux,  $\tau_U$ ,  $\tau_P$ ,  $\tau_T$  et  $\tau_\theta$  sont des échelles de temps caractéristiques du retour à l'équilibre des vitesses, pressions, températures et potentiels de changement de phase. Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, nous vérifierons numériquement à la section 5.2 que cette modélisation (3.9) des coefficients d'échange induit la stabilité linéaire de certains équilibres isobares isothermes équipotentiels et équivitesses.

Dans la modélisation (3.9) des coefficients d'échange, quatre échelles de temps caractéristiques ont néanmoins été introduites. Ces échelles de temps nécessitent une fermeture. De manière générale, ces échelles de temps sont des fonctions de la variable d'état  $W$ . Ces échelles de temps dépendent de la configuration des écoulements diphasiques. Nous cherchons ici à établir une plage de valeurs pour chacun de ces temps de relaxation. Certaines informations existent dans la littérature sur la dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements en transition de phase. Ces informations s'appuient généralement sur des données expérimentales. On en donne ici un bref aperçu. Suivant le modèle de traînée étudié par Ishii et Mishima dans [68] pour les écoulements à phase dispersée, une petite application numérique situe le temps de relaxation en vitesse  $\tau_U$  dans l'intervalle  $[10^{-3}, 10^{-1}]$  s. Dans le contexte des écoulements à poudre,

les résultats expérimentaux de Baer et Nunziato nous permettent de situer le temps de relaxation en pression  $\tau_P$  dans l'intervalle  $[10^{-3}, 10^{-1}]$  s. Pour une dépressurisation rapide d'un écoulement liquide-vapeur en transition de phase (flashing), Bilicki, Giot et Kwidzinski [15] situent différemment  $\tau_P$  aux alentours de  $10^{-4}$  s. Les différents échelles de temps  $\tau_T$  et  $\tau_\theta$  caractéristiques des transferts énergétiques nous sont fournies par Bilicki, Kwidzinski et Ali Mohammadein [16]. Ces auteurs situent les échelles de temps caractéristiques  $\tau_T$  et  $\tau_\theta$  dans l'intervalle  $[10^{-3}, 1]$  s. L'ensemble de ces échelles de temps caractéristiques est regroupé dans le tableau 3.2. A l'avenir, ces différentes échelles de temps caractéristiques seront identifiées à des constantes de l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s. Ce résumé des échelles de temps en vigueur dans la littérature termine notre travail de modélisation. Le modèle bifluide à sept équations est maintenant totalement fermé.

**Remarque 5.** *Dans cette section, plusieurs modèles viennent d'être proposés pour les coefficients d'échange interfaciaux. Ces modèles diffèrent de la littérature. Leur construction s'appuie sur notre traduction mathématique de l'hypothèse formulée par Lhuillier dans [78]. Cette hypothèse stipule la stabilité locale des équilibres isobares isothermes équipotentiels et équivitesses. Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, cette stabilité locale de certains équilibres liquide-vapeur sera numériquement vérifiée à la section 5.2. Comme cette nouvelle modélisation (3.9) des coefficients d'échange est néanmoins sujette à caution, nous essaierons à l'avenir d'obtenir des résultats qui soient indépendants de la forme donnée aux fonctions de relaxation.*

Tableau 3.2: différentes échelles de temps caractéristiques pour les transferts interfaciaux au sein des écoulements diphasiques en transition de phase.

Temps caractéristique de retour à l'équilibre des vitesses	Ishii et Mishima [68]	$10^{-3} \text{ s} \leq \tau_U \leq 10^{-1} \text{ s}$
Temps caractéristique de retour à l'équilibre des pressions	Baer et Nunziato [8] Bilicki, Giot et Kwidzinski [15]	$10^{-3} \text{ s} \leq \tau_P \leq 10^{-1} \text{ s}$ $\tau_P = 10^{-4} \text{ s}$
Temps caractéristique de retour à l'équilibre des températures	Bilicki, Kwidzinski et Ali Mohammadein [16]	$10^{-3} \text{ s} \leq \tau_T \leq 1 \text{ s}$
Temps caractéristique de retour à l'équilibre des potentiels	Bilicki, Kwidzinski et Ali Mohammadein [16]	$10^{-3} \text{ s} \leq \tau_\theta \leq 1 \text{ s}$

### 3.5 Admissibilité des solutions régulières bornées

Aux sections précédentes, la fermeture du modèle bifluide à deux pressions a été réalisée dans le cadre des écoulements en transition de phase. A l'introduction de cette première partie de thèse, la notion d'admissibilité a par ailleurs été définie par la donnée de l'ensemble

$$\Omega = \{W \in \mathbb{R}^{5+2d} / \forall k = 1, 2, \alpha_k \in ]0, 1[, \rho_k > 0, P_k > 0\},$$

où  $d$  désigne la dimension de l'espace physique. A titre préliminaire, cette section s'intéresse à l'admissibilité des solutions régulières bornées du système (1.1) sans diffusion. Un tel travail a déjà été entamé au



chapitre précédent dans le cadre des écoulements diphasiques sans transition de phase. Cette étude est ici poursuivie en considérant de plus un transfert de masse.

Pour  $k = 1, 2$ , rappelons tout d'abord la définition des deux coefficients thermodynamiques

$$\tilde{\gamma}_k = \left[ \rho_k \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right]^{-1}, \quad \hat{\gamma}_k P_k = \tilde{\gamma}_k P_k + \tilde{\gamma}_k (P_i - P_k).$$

Dans le cadre des solutions régulières du système (1.1) sans diffusion, les équations portant sur les fractions volumiques, les masses partielles et les pressions s'écrivent de manière équivalente

$$\forall k = 1, 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_k + V_i \cdot \nabla \alpha_k = K_P (P_k - P_{k'}), \\ \partial_t m_k + u_k \cdot \nabla m_k + m_k \nabla \cdot u_k = K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k), \\ \partial_t P_k + u_k \cdot \nabla P_k + \hat{\gamma}_k P_k \nabla \cdot u_k + \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} (u_k - V_i) \cdot \nabla \alpha_k \\ \quad = \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} K_P (P_{k'} - P_k) + \frac{\tilde{\gamma}_k}{\alpha_k} \left[ K_T (T_{k'} - T_k) + K_U (u_{k'} - u_k) \cdot (V_i - u_k) \right] \\ \quad + K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k) \left[ \frac{\tilde{\gamma}_k P_k}{m_k} + \frac{\tilde{\gamma}_k}{\alpha_k} \left( e_i - e_k - \frac{P_k}{\rho_k} + \frac{(u_k - V_i)^2}{2} \right) \right]. \end{array} \right.$$

Par rapport au chapitre précédent, l'équation portant sur les fractions volumiques n'est pas modifiée par l'introduction du transfert de masse. La proposition 3 établie au chapitre précédent dans le cadre des écoulements diphasiques sans transfert de masse peut donc être directement transposée dans le cadre des écoulements liquide-vapeur en transition de phase. On s'intéresse par la suite à la positivité des pressions. De manière analogue au chapitre précédent, cette positivité des pressions ne peut être établie qu'en l'absence du transfert thermique et du transfert de masse. La proposition 5 établie au chapitre précédent dans le cadre des écoulements liquide-gaz se transpose alors directement au cadre des écoulements liquide-vapeur en transition de phase. On s'intéresse pour finir à la positivité des masses partielles.

**Proposition 6.** Soit  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\mathcal{D}$  un domaine borné de l'espace physique. On note  $\partial\mathcal{D}$  la frontière de ce domaine,  $n$  sa normale extérieure. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $u_k$ ,  $\nabla \cdot u_k$  et  $\tilde{K}_\theta$  des applications de  $L^\infty(]0, T[ \times \mathcal{D})$ . On considère un coefficient d'échange  $K_\theta$  de la forme

$$K_\theta = m_1 m_2 \tilde{K}_\theta. \quad (3.10)$$

Pour des conditions initiales et aux limites admissibles,

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall k = 1, 2, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad m_k(t = 0, x) > 0, \\ \forall k = 1, 2, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \partial\mathcal{D} / u_k \cdot n < 0, \quad m_k(t, x) > 0, \end{array} \right.$$

les solutions régulières bornées de l'équation

$$\partial_t m_k + u_k \cdot \nabla m_k + m_k \nabla \cdot u_k = K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k)$$

demeurent positives sur l'ensemble du domaine  $[0, T] \times \mathcal{D}$  :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{D}, \quad m_k(t, x) \geq 0.$$

La démonstration de la proposition 6 est une application directe du lemme 1 présenté à l'annexe A. En résumé, pour une modélisation particulière (3.10) du coefficient d'échange  $K_\theta$ , cette proposition 6 assure la positivité des masses partielles. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\bar{\gamma}_k$  le coefficient thermodynamique défini par la relation

$$\bar{\gamma}_k = \rho_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} - \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k).$$

---

Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur, une telle modélisation (3.10) du coefficient d'échange  $K_\theta$  a justement été adoptée à la section précédente :

$$K_\theta = m_1 m_2 \frac{1}{\tau_\theta (m_2 \bar{\gamma}_1 + m_1 \bar{\gamma}_2)}.$$

La proposition 6 n'assure cependant pas l'admissibilité des masses partielles. Certaines solutions peuvent présenter des densités nulles sur les bords de l'espace admissible.

En conclusion, plusieurs lois de fermeture ont été proposées dans ce chapitre pour clore le modèle bifluide à deux pressions avec transition de phase. Un cadre thermodynamique a tout d'abord été élaboré pour décrire les écoulements liquide-vapeur. Ce cadre thermodynamique postule notamment l'existence d'un équilibre triple isobare isotherme équipotentiel monovariant entre les phases. Une telle hypothèse nous permet de discriminer les lois d'état susceptibles de décrire un liquide et sa vapeur. Un jeu de fermetures a ensuite été proposé pour modéliser l'ensemble des interactions diphasiques. Ce jeu de fermetures dote le modèle bifluide à sept équations d'une inégalité d'entropie. Ce jeu de fermetures diffère particulièrement de la littérature en ce qui concerne la modélisation du transfert de masse. A ce stade, le modèle bifluide à sept équations est totalement fermé. Ce modèle est par ailleurs doté d'une structure dissipative. Muni de cette inégalité d'entropie, la stabilité des équilibres liquide-vapeur sera étudiée à la section 5.2.



## Chapitre 4

# La partie convective

Aux précédents chapitres de modélisation 2 et 3, plusieurs lois de fermeture ont été proposées pour clore le modèle bifluide à sept équations. Le système (1.1) est maintenant totalement fermé. Ce système est par ailleurs doté d'une inégalité d'entropie. Dans ce chapitre, l'étude mathématique du système (1.1) est entamée par l'analyse de la partie convective  $\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = 0$ . Ni les termes d'interaction entre les phases, ni la diffusion ne sont ici implémentés. Nous en gardons néanmoins la trace via l'inégalité d'entropie. Dans le cadre des solutions faibles, cette simplification est réalisée afin de construire des solutions analytiques de référence aux problèmes posés par la partie convective. Cette étude continue sera par ailleurs réutilisée dans un cadre discret au chapitre 7 où une procédure numérique est élaborée pour réaliser la simulation du modèle bifluide à sept équations.

Dans ce chapitre, on se restreint à un cadre monodimensionnel. Dans ce cadre monodimensionnel, la partie convective du modèle bifluide à sept équations  $\partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = 0$  s'écrit sous la forme développée

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_2 + V_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 P_2) - P_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 E_2) + \partial_x [\alpha_2 (\rho_2 E_2 + P_2) u_2] - P_i V_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 P_1) + P_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 E_1) + \partial_x [\alpha_1 (\rho_1 E_1 + P_1) u_1] + P_i V_i \partial_x \alpha_2 = 0. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Deux propriétés caractérisent cette partie convective. Dans un premier temps, cette partie convective est dotée d'une entropie  $\eta(W)$  concave, mais non-strictement concave. Cette partie convective ne peut par ailleurs pas être mise sous une forme conservative en raison du produit non-conservatif  $C(W) \partial_x W$ . Dans ce cadre non-conservatif, on ne peut pas appliquer le théorème de Godunov-Mock qui nous aurait permis de conclure à l'hyperbolicité du système (4.1). Déterminer la nature du système (4.1) devient l'objet de la première partie de ce chapitre. Pour déterminer la nature de ce système, on analyse sa structure propre. L'analyse de cette structure propre nous permet de conclure à la nature hyperbolique résonante de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations. Ce travail constitue un rappel dans la mesure où il a déjà été présenté par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Ce travail est ici replacé dans le cadre de l'hypothèse 1.

Par la suite, on cherche à définir les solutions faibles du système (4.1). Définir ces solutions faibles revient à attribuer une nature aux différents champs caractéristiques du système (4.1) et à donner un sens aux produits non-conservatifs  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$ . Les différentes grandeurs interfaciales  $P_i$ ,  $V_i$  de même que les fractions volumiques  $\alpha_k$  peuvent effectivement présenter simultanément des discontinuités pour lesquelles les relations de saut du système (4.1) sont ambiguës (voir [29]). A la deuxième partie de ce

chapitre, diverses modélisations pour les grandeurs interfaciales  $P_i, V_i$  sont alors mises en avant. Ces modélisations particulières pour la vitesse et la pression interfaciales définissent localement tous les produits non-conservatifs du système (4.1). La mise en avant de ces modélisations particulières pour les grandeurs interfaciales  $P_i, V_i$  constitue le rappel des résultats présentés par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin dans [27]. Ce travail est ici complété par la proposition de nouveaux modèles pour le couple interfacial  $(P_i, V_i)$ .

Dans ce cadre, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude du problème de Riemann pour le système (4.1). Ce problème s'avère extrêmement compliqué. Nous nous restreignons à l'étude des connexions onde par onde en imposant des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases. Ce travail a déjà été entamé par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Nous le rappelons brièvement. Ce travail est ensuite complété par une étude approfondie de l'onde associée à la fraction volumique. Différents régimes d'écoulement sont alors mis à jour pour le mélange diphasique.

## 4.1 Nature de la partie convective

Dans cette section, on s'intéresse à la nature de la partie convective associée au modèle bifluide à deux pressions. Pour déterminer la nature de cette partie convective, on analyse la structure propre du système (4.1). Pour étudier cette structure propre, plusieurs coefficients thermodynamiques demandent tout d'abord à être introduits. Pour  $k = 1, 2$ , ces différents coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial s_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & B_k &= \frac{\widehat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), \\ \zeta_k &= \frac{(u_k - V_i) \left[ B_k - \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) \right]}{\rho_k \left[ (u_k - V_i)^2 - c_k^2 \right]}, & \xi_k &= \frac{c_k^2 \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) - (u_k - V_i)^2 B_k}{(u_k - V_i)^2 - c_k^2}, \\ H_{s_k} &= (-1)^k A_k (u_k - V_i), & H_{u_k} &= (-1)^k \frac{P_k - P_i}{m_k}, & H_{P_k} &= (-1)^k B_k (u_k - V_i). \end{aligned}$$

Soit  $X = (\alpha_2, s_2, u_2, P_2, s_1, u_1, P_1)^T$ . Dans le cadre des solutions régulières, la partie convective du modèle bifluide à sept équations se réécrit de manière équivalente

$$\frac{\partial X}{\partial t} + H(X) \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad H(X) = \begin{pmatrix} V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{s_2} & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{u_2} & 0 & u_2 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ H_{P_2} & 0 & \rho_2 c_2^2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ H_{s_1} & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ H_{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & \tau_1 \\ H_{P_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 c_1^2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

La nature du système (4.1) dépend des propriétés associées à la matrice  $H$ . On détermine tout d'abord ses valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= V_i, \\ \lambda_1 &= u_2 - c_2, & \lambda_2 &= u_2, & \lambda_3 &= u_2 + c_2, \\ \lambda_4 &= u_1 - c_1, & \lambda_5 &= u_1, & \lambda_6 &= u_1 + c_1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ses vecteurs propres à droite respectivement associés sont regroupés dans la matrice colonne

$$(R_p)_{p \in \{0, \dots, 6\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & -\rho_2 c_2 & 0 & \rho_2 c_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\zeta_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\xi_1 & 0 & 0 & 0 & -\rho_1 c_1 & 0 & \rho_1 c_1 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Deux sous-systèmes de type Euler couplés par une équation sur la fraction volumique se dégagent de cette structure propre. Regroupé dans la matrice colonne (4.3), l'ensemble des vecteurs propres à droite engendre généralement l'espace  $\mathbb{R}^7$  excepté le long des variétés  $V_i = u_k \pm c_k$ ,  $k = 1, 2$ . Il s'agit du phénomène de résonance pour lequel l'ensemble des vecteurs propres n'est plus complet. La nature du système (4.1) est alors résumée à proposition 7.

**Proposition 7.** *Sous l'hypothèse thermodynamique fondamentale 1, la partie convective du modèle bifluide à sept équations est hyperbolique résonante sur l'espace des états admissibles  $\Omega \subset \mathbb{R}^7$ . Cette partie convective admet toujours sept valeurs propres réelles. Ses vecteurs propres à droite engendrent l'espace  $\mathbb{R}^7$ , excepté le long des variétés  $V_i = u_k \pm c_k$ ,  $k = 1, 2$ .*

**Démonstration.** La proposition 7 a déjà été démontrée par Gallouët, Hérard et Seguin. Dans [42], leur démonstration s'appuie sur les ouvrages de référence [52, 98]. Cette démonstration est ici brièvement rappelée. On la replace dans le cadre de l'hypothèse 1. Dans un premier temps, la nature du système (4.1) est indépendante du jeu de variables utilisé pour déterminer sa structure propre. On peut donc indifféremment travailler en variable  $X$  ou  $W$ . Une fois passé en variable  $X$ , le caractère réel des vitesses soniques  $c_k$  découle de l'hypothèse 1. Ce caractère réel des vitesses soniques a été établi à la proposition 1 sous l'hypothèse 1. Le spectre de la matrice  $H$  est donc toujours réel sur l'espace admissible  $\Omega$ . L'étude des vecteurs propres à droite termine cette démonstration. ■

La proposition 7 n'est pas nouvelle. Elle a déjà été présentée par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Nous l'avons juste replacée dans le cadre de l'hypothèse 1. Cette proposition 7 est indépendante de la modélisation retenue pour la vitesse interfaciale.

En résumé, la partie convective du modèle bifluide à sept équations est presque partout hyperbolique sur l'espace admissible  $\Omega \subset \mathbb{R}^7$ , excepté le long des variétés  $V_i = u_k \pm c_k$ ,  $k = 1, 2$ . Suivant la dénomination proposée par Goatin et Lefloch dans [50], ces variétés de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^7$  sont appelées variétés de résonance. Aux précédents chapitres de fermeture 2 et 3, une modélisation standard de la vitesse interfaciale a été adoptée. Cette modélisation standard de la vitesse interfaciale associe  $V_i$  à une combinaison convexe des vitesses phasiques :  $V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2$ ,  $\beta \in [0, 1]$ . Pour nos applications à la simulation des écoulements diphasiques à faible nombre de Mach, les phénomènes de résonance sont donc marginaux pour lesquels l'écart de vitesse entre les phases doit être de l'ordre de grandeur des vitesses soniques  $c_k$ ,  $k = 1, 2$ . On ne s'appesantira pas sur ces problèmes de résonance à l'avenir.

**Remarque 6.** *Dans la littérature, de tels phénomènes de résonance affectent d'autres modélisations "hyperboliques" des écoulements diphasiques compressibles. Que l'on considère le modèle à huit équations de Ransom et Hicks [89], ou encore le modèle à six équations de Romenski et Toro [91], plusieurs vecteurs propres se recouvrent sur des variétés de résonance lorsque l'écart de vitesse entre les phases est de l'ordre de grandeur des vitesses soniques. Pour le modèle bifluide à sept équations, nous montrerons à la section 4.3 que différents régimes d'écoulement existent pour le mélange diphasique de part et d'autre des variétés de résonance  $V_i = u_k \pm c_k$ ,  $k = 1, 2$ . Le phénomène de résonance nous apparaîtra alors comme un mécanisme de transition entre différents régimes d'écoulement diphasique.*

## 4.2 Nature des champs caractéristiques et définition des produits non-conservatifs

A la section précédente, la nature hyperbolique résonante de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations a été établie. La structure propre de cette partie convective a par ailleurs été détaillée. Cette partie convective est constituée de deux sous-systèmes Euler que vient coupler une équation sur la fraction volumique. Cette partie convective se présente par ailleurs sous une forme non-conservative. Dans cette section, on cherche à définir les solutions faibles de cette partie convective. L'attribution d'une nature aux différents champs caractéristiques est alors envisagée conjointement à la définition des produits non-conservatifs pour le système (4.1).

### 4.2.1 Nature du champ caractéristique associé à la vitesse interfaciale

Dans un premier temps, on s'intéresse à la nature du 0-champ caractéristique associé à la vitesse interfaciale  $V_i$ . A la traversée de la 0-onde, les différentes grandeurs interfaciales  $P_i$ ,  $V_i$  de même que les fractions volumiques  $\alpha_k$  peuvent présenter simultanément des discontinuités. La connexion à travers la 0-onde n'est donc pas classique pour le système (4.1) qui présente les trois produits non-conservatifs  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$  (voir [29]). Dans cette section, on se propose de résumer les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27] qui mettent en lien la définition de ces produits non-conservatifs avec la nature du 0-champ caractéristique.

#### Modélisation de la vitesse interfaciale par un champ linéairement dégénéré et fermeture du produit non-conservatif $V_i \partial_x \alpha_k$ .

Aux précédents chapitres de fermeture 2 et 3, une classe générale de modèles a été retenue pour la vitesse et la pression interfaciales. Ces deux grandeurs interfaciales s'écrivent respectivement

$$\begin{cases} V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, & \beta \in [0, 1], \\ P_i = \mu P_1 + (1 - \mu) P_2, & \mu = \frac{T_2 (1 - \beta)}{T_1 \beta + T_2 (1 - \beta)} \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4.4)$$

Une telle définition de la vitesse et de la pression interfaciales dote le modèle bifluide à sept équations d'une inégalité d'entropie. Deux cas se distinguent alors suivant que le 0-champ caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda_0 = V_i$  est vraiment non-linéaire ou linéairement dégénéré. Dans l'hypothèse où le 0-champ caractéristique est vraiment non-linéaire, certaines conditions initiales peuvent faire apparaître une détente. Une telle détente épaissit les interfaces en une zone de mélange. Ce phénomène semble contraire aux observations expérimentales. A la suite de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], le 0-champ caractéristique est donc supposé linéairement dégénéré :

$$\forall W \in \Omega, \quad \nabla V_i \cdot R_0 = 0. \quad (4.5)$$

Cette modélisation (4.5) de la vitesse interfaciale définit implicitement le produit non-conservatif  $V_i \partial_x \alpha_k$ . En effet, lorsque la fraction volumique saute à la traversée de la 0-discontinuité de contact, le 0-invariant de Riemann  $V_i$  est constant. Inversement à la traversée des  $p$ -ondes,  $p \in \{1, \dots, 6\}$ , la fraction volumique est constante. Le produit non-conservatif  $V_i \partial_x \alpha_k$  est donc localement bien défini.

En ce qui concerne la définition du deuxième produit non-conservatif  $P_i \partial_x \alpha_k$ , une modélisation similaire de la pression interfaciale pourrait être adoptée. Une telle modélisation de la pression interfaciale associerait similairement  $P_i$  à un 0-invariant de Riemann. D'après la relation (4.4), un lien existe néanmoins entre la vitesse et la pression interfaciales qui ne peuvent pas être modélisées séparément. La question se pose alors de trouver un coefficient  $\beta : \Omega \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie le système surcontraint

$$\forall W \in \Omega, \quad \begin{cases} \nabla V_i \cdot R_0 = 0, & V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \\ \nabla P_i \cdot R_0 = 0, & P_i = \mu(\beta) P_1 + (1 - \mu(\beta)) P_2. \end{cases}$$

A l'heure actuelle, aucune solution n'a été trouvée à ce problème qui identifie la pression interfaciale à un 0-invariant de Riemann. Cette contrainte est donc relaxée par la suite. Le produit non-conservatif  $P_i \partial_x \alpha_k$  sera défini ultérieurement.

A ce stade, une modélisation générique de la vitesse interfaciale peut néanmoins être proposée. Cette modélisation générique de la vitesse interfaciale est simultanément compatible avec le caractère linéairement dégénéré du 0-champ caractéristique et la définition d'une inégalité d'entropie pour le modèle bifluide à sept équations. Une telle modélisation générique de la vitesse interfaciale est présentée à la proposition 8. Cette proposition 8 généralise les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27].

**Proposition 8.** Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\chi_k(\rho_k, P_k)$  un coefficient thermodynamique positif qui satisfait l'équation

$$\rho_k \left( \frac{\partial \chi_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \widehat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial \chi_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} = 0. \quad (4.6)$$

Le 0-champ caractéristique associé à la vitesse interfaciale

$$V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \quad \beta = \frac{m_1 \chi_1}{m_1 \chi_1 + m_2 \chi_2} \in [0, 1], \quad (4.7)$$

est linéairement dégénéré à la condition que les deux coefficients thermodynamiques  $(\chi_1, \chi_2) \neq (0, 0)$  vérifient la relation

$$\left( \frac{\partial \chi_2}{\partial P_2} \right)_{\rho_2} \left( \frac{\partial e_2}{\partial P_2} \right)_{\rho_2}^{-1} (P_i - P_2) (u_2 - V_i) - \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial P_1} \right)_{\rho_1} \left( \frac{\partial e_1}{\partial P_1} \right)_{\rho_1}^{-1} (P_i - P_1) (u_1 - V_i) = 0. \quad (4.8)$$

La pression interfaciale s'écrit alors

$$P_i = \mu P_1 + (1 - \mu) P_2, \quad \mu = \frac{m_2 \chi_2 T_2}{m_1 \chi_1 T_1 + m_2 \chi_2 T_2} \in [0, 1]. \quad (4.9)$$

**Démonstration.** La proposition 8 s'intéresse à la nature du 0-champ caractéristique. Sa démonstration se ramène à l'étude de la quantité  $\nabla V_i \cdot R_0$  pour tout  $W \in \Omega$ . Suivant la définition (4.7) de la vitesse interfaciale, de laborieux calculs nous permettent d'établir successivement les relations

$$\begin{aligned} \nabla V_i \cdot R_0 = & \frac{(u_1 - u_2)}{m_1 \chi_1 + m_2 \chi_2} \left[ -\rho_1 \rho_2 \chi_1 \chi_2 + \sum_{k=1}^2 \alpha_k m_{3-k} \chi_{3-k} \right. \\ & \left. \left( A_k \left( \frac{\partial \rho_k \chi_k}{\partial s_k} \right)_{P_k} - \xi_k \left( \frac{\partial \rho_k \chi_k}{\partial P_k} \right)_{s_k} - \chi_k \left( B_k - \frac{(P_k - P_i)}{\alpha_k} \right) [(u_k - V_i)^2 - c_k^2]^{-1} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\nabla V_i \cdot R_0 = \frac{(u_1 - u_2)}{m_1 \chi_1 + m_2 \chi_2} \left[ -\rho_1 \rho_2 \chi_1 \chi_2 + \sum_{k=1}^2 m_{3-k} \chi_{3-k} \left( \rho_k \chi_k + \left( \frac{\partial \chi_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k) \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \nabla V_i \cdot R_0 = & -\frac{1}{m_1 \chi_1 + m_2 \chi_2} \left[ \left( \frac{\partial \chi_2}{\partial P_2} \right)_{\rho_2} \left( \frac{\partial e_2}{\partial P_2} \right)_{\rho_2}^{-1} (P_i - P_2) (u_2 - V_i) \right. \\ & \left. - \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial P_1} \right)_{\rho_1} \left( \frac{\partial e_1}{\partial P_1} \right)_{\rho_1}^{-1} (P_i - P_1) (u_1 - V_i) \right]. \end{aligned}$$



Suivant la relation (4.8), le 0-champ caractéristique est donc linéairement dégénéré :

$$\forall W \in \Omega, \quad \nabla V_i \cdot R_0 = 0.$$

Pour doter le modèle bifluide à sept équations d'une entropie, un lien a par ailleurs été établi aux chapitres 2 et 3 entre la vitesse et la pression interfaciales. Ce lien vient d'être rappelé dans cette section sous la forme des relations (4.4). L'expression (4.9) de la pression interfaciale découle de cette relation de compatibilité entre  $P_i$  et  $V_i$ . ■

La proposition 8 est un résultat nouveau. Cette proposition 8 associe les modélisations de la vitesse interfaciale à une famille à deux paramètres  $(\chi_1, \chi_2)$ . Plusieurs modèles de la littérature sont retrouvés par ce biais. On retrouve notamment les modèles envisagés par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], de même que les modèles totalement décentrés utilisés par Baer et Nunziato [8] et repris par Gavriluk et Saurel dans [45]. Dans le cadre de cette modélisation à deux paramètres, ces différents modèles pour la vitesse interfaciale se réécrivent :

$$V_i = u_1, \quad (\chi_1, \chi_2) = (1, 0), \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Baer et Nunziato,} \\ \text{Gavriluk et Saurel,} \\ \text{Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin,} \end{array} \right. \quad (4.10a)$$

$$V_i = u_2, \quad (\chi_1, \chi_2) = (0, 1), \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Baer et Nunziato,} \\ \text{Gavriluk et Saurel,} \\ \text{Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin,} \end{array} \right. \quad (4.10b)$$

$$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad (\chi_1, \chi_2) = (1, 1), \quad \text{Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin.} \quad (4.10c)$$

Par la suite, on s'intéressera particulièrement au modèle (4.10c) qui associe la vitesse interfaciale à la vitesse du centre de masse pour le mélange diphasique.

**Remarque 7.** Aux précédents chapitres de modélisation 2 et 3, l'existence d'une entropie  $s_k$  a été postulée dans chacune des phases  $k = 1$  ou  $2$ . Suivant la proposition 1, cette entropie  $s_k$  vérifie pour  $k = 1, 2$ , l'équation (4.6). On rappelle par ailleurs l'expression de la température. Toujours suivant la proposition 1, cette température s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad T_k = \left( \frac{\partial s_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}.$$

Pour une modélisation à deux paramètres (4.7) de la vitesse interfaciale, identifions le couple  $(\chi_1, \chi_2)$  au couple  $(s_1, s_2)$ . Cette modélisation particulière de la vitesse interfaciale s'écrit

$$V_i = \frac{m_1 s_1 u_1 + m_2 s_2 u_2}{m_1 s_1 + m_2 s_2}. \quad (4.11)$$

Soit  $\eta = \sum_k m_k s_k$  et  $F_\eta = \sum_k m_k s_k u_k$ . Une telle modélisation de la vitesse interfaciale vérifie l'égalité

$$F_\eta = V_i \eta.$$

On rappelle que la relation (4.8) assure le caractère linéairement dégénéré du 0-champ caractéristique associé à la vitesse interfaciale. Pour la modélisation particulière (4.11) de la vitesse interfaciale, cette relation (4.8) se réécrit

$$\frac{1}{T_2} (P_i - P_2) (u_2 - V_i) - \frac{1}{T_1} (P_i - P_1) (u_1 - V_i) = 0.$$

Cette relation (4.8) s'identifie alors à la relation de compatibilité (4.4) entre la vitesse et la pression interfaciales. Aux précédents chapitres de fermeture 2 et 3, la relation de compatibilité (4.4) a été établie pour doter le modèle bifluide à sept équations d'une entropie (voir proposition 2). Un lien existe donc entre le

caractère linéairement dégénéré du 0-champ caractéristique et la définition du couple entropique  $(\eta, F_\eta)$  pour le modèle bifluide à sept équations. Comme néanmoins la positivité des entropies  $s_k$  dépend des lois d'état utilisées dans chaque phase, le coefficient

$$\beta = \frac{m_1 s_1}{m_1 s_1 + m_2 s_2}$$

n'appartient pas nécessairement à l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous ne nous appesantirons donc pas à l'avenir sur la modélisation (4.11) de la vitesse interfaciale. Cette modélisation (4.11) de la vitesse interfaciale ne dote pas nécessairement le modèle bifluide à sept équations d'une inégalité d'entropie. Cette modélisation (4.11) de la vitesse interfaciale peut également poser des problèmes de définition.

### Définition des relations de saut à la traversée de l'onde $V_i$ et définition du produit non-conservatif $P_i \partial_x \alpha_k$ .

Au paragraphe précédent, plusieurs modèles (4.10) viennent d'être proposés pour la vitesse interfaciale. Ces modèles (4.10) associent la 0-onde à un champ linéairement dégénéré. Ces modèles (4.10) définissent localement le produit non-conservatif  $V_i \partial_x \alpha_k$ . L'ensemble de ces modèles (4.10) est simultanément compatible avec la construction d'une inégalité d'entropie pour le modèle bifluide à sept équations. Dans ce paragraphe, on étudie les connexions à la traversée de la 0-onde. On rappelle le travail de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27] qui vise à définir le dernier produit non-conservatif  $P_i \partial_x \alpha_k$ .

A la proposition 8, la nature linéairement dégénérée du 0-champ caractéristique a été établie. Cette nature linéairement dégénérée du 0-champ caractéristique associe la 0-onde à une discontinuité de contact. La préservation des 0-invariants de Riemann s'identifie alors aux relations de Rankine-Hugoniot à la traversée de l'onde  $V_i$ . Ces relations de saut s'écrivent

$$[V_i] = 0 \quad \text{et} \quad \forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} [m_k (u_k - V_i)] = 0, \\ [m_k u_k (u_k - V_i) + \alpha_k P_k] - [P_i \partial_x \alpha_k] = 0, \\ [m_k E_k (u_k - V_i) + \alpha_k P_k u_k] - V_i [P_i \partial_x \alpha_k] = 0. \end{cases}$$

La notation  $[\cdot]$  y désigne la différence entre les états à droite et à gauche de la 0-onde. Pour les modélisations (4.10) des grandeurs interfaciales, l'élimination du produit non-conservatif  $[P_i \partial_x \alpha_k]$  ne fournit que cinq 0-invariants de Riemann. Pour la modélisation particulière (4.10c) de la vitesse interfaciale, ces cinq 0-invariants de Riemann s'écrivent par exemple

$$\begin{aligned} I_0^1 &= V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, & I_0^3 &= e_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{(I_0^2)^2}{2m_1^2}, & I_0^5 &= \sum_k \frac{(I_0^2)^2}{m_k} + \alpha_k P_k. \\ I_0^2 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1), & I_0^4 &= e_2 + \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{(I_0^2)^2}{2m_2^2}, & & \end{aligned} \quad (4.12)$$

Pour un 0-champ caractéristique linéairement dégénéré, le recours à la loi de conservation supplémentaire  $\partial_t \eta + \partial_x F_\eta = 0$  fournit une nouvelle relation de saut. Cette nouvelle relation de saut s'écrit

$$-V_i \left[ \sum_k m_k s_k \right] + \left[ \sum_k m_k s_k u_k \right] = 0. \quad (4.13)$$

La démonstration de ce résultat figure à l'annexe 4.C de la thèse soutenue par Seguin [95]. Le dernier produit non-conservatif  $P_i \partial_x \alpha_k$  se trouve alors implicitement défini par la donnée du sixième 0-invariant de Riemann. Pour la modélisation particulière (4.10c) de la vitesse interfaciale, ce sixième 0-invariant de Riemann s'écrit par exemple

$$I_0^6 = s_2 - s_1. \quad (4.14)$$

A ce stade, diverses modélisations (4.10) de la vitesse interfaciale ont été retenues pour clore le modèle bifluide à sept équations. Ces modélisations (4.10) de la vitesse interfaciale associent l'onde de fraction volumique à une discontinuité de contact. Les ondes de fraction volumique seront donc toujours associées à des interfaces infiniment minces pour le mélange diphasique. Ces modélisations particulières (4.10) de la vitesse interfaciale définissent par ailleurs l'ensemble des produits non-conservatifs du système (4.1) sans recourir à la théorie développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29]. La partie convective du modèle bifluide à sept équations est maintenant totalement fermée. Les connexions à la traversée de la 0-onde ont ainsi pu être explicitées.

## 4.2.2 Nature des champs caractéristiques associés aux sous-systèmes de type Euler

A la section 4.1, la structure propre associée à la partie convective du modèle bifluide à sept équations a été présentée. Deux sous-systèmes de type Euler couplés par une équation sur la fraction volumique ressortent de cette structure propre. L'onde de fraction volumique a été étudiée à la section précédente. On s'intéresse dans cette section aux propriétés des sous-systèmes de type Euler.

### Nature des champs caractéristiques.

Pour étudier la nature des champs caractéristiques associés aux sous-systèmes de type Euler, deux coefficients thermodynamiques demandent tout d'abord à être introduits. Pour  $k = 1, 2$ , ces deux coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\Upsilon_k = 1 + \frac{\rho_k}{c_k} \left( \frac{\partial c_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k}.$$

Dans la littérature [52, 98], ces coefficients  $\Upsilon_k$  sont généralement supposés strictement supérieurs à 1 (voir remarque 8). Suivant Menikoff et Plohr [82], cette propriété des coefficients  $\Upsilon_k$  caractérise la convexité des courbes isentropiques dans le plan  $(P_k, \rho_k)$ ,  $k = 1, 2$ . Sous cette hypothèse, la nature des champs caractéristiques associés aux sous-systèmes de type Euler est présentée à la proposition 9.

**Proposition 9.** *Pour  $k = 1, 2$ , supposons les coefficients thermodynamiques  $\Upsilon_k > 1$ . Les 2- et 5-champs caractéristiques respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_2 = u_2$  et  $\lambda_5 = u_1$  sont linéairement dégénérés. Sous l'hypothèse thermodynamique fondamentale 1, les 1-, 3-, 4- et 6-champs caractéristiques respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_1 = u_2 - c_2$ ,  $\lambda_3 = u_2 + c_2$ ,  $\lambda_4 = u_1 - c_1$  et  $\lambda_6 = u_1 + c_1$  sont vraiment non-linéaires.*

**Démonstration.** La proposition 9 a déjà été démontrée par Gallouët, Hérard et Seguin. Dans [42], leur démonstration s'appuie sur les ouvrages de référence [52, 98]. Cette démonstration est ici brièvement rappelée. Cette démonstration consiste en l'étude des quantités  $\nabla \lambda_p \cdot R_p$  pour  $p \in \{1, \dots, 6\}$ . Cette démonstration est ici replacée dans le cadre de l'hypothèse 1. Suivant les ouvrages de référence [52, 98], la nature des  $p$ -champs caractéristiques ne dépend pas de la variable utilisée pour calculer  $\nabla \lambda_p \cdot R_p$ . On peut donc indifféremment établir la nature des champs caractéristiques en variable  $X$  ou  $W$ . Par commodité, nous utilisons la structure propre associée à la variable  $X$ . Un calcul simple montre que les 2- et 5-champs caractéristiques sont linéairement dégénérés :

$$\forall W \in \Omega, \quad \nabla \lambda_p \cdot R_p = 0, \quad p = 2 \text{ ou } 5.$$

En ce qui concerne les 1-, 3-, 4- et 6-champs caractéristiques,

$$\forall W \in \Omega, \quad \nabla \lambda_p \cdot R_p = 1 + \rho_k c_k \left( \frac{\partial c_k}{\partial P_k} \right)_{s_k}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 1 \text{ ou } 3, \\ k = 1 & \text{pour } p = 4 \text{ ou } 6. \end{cases}$$

Sous l'hypothèse thermodynamique fondamentale 1, la proposition 1 nous permet de réécrire cette relation

$$\forall W \in \Omega, \quad \nabla \lambda_p \cdot R_p = \Upsilon_k, \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 1 \text{ ou } 3, \\ k = 1 & \text{pour } p = 4 \text{ ou } 6. \end{cases}$$

Par hypothèse, les coefficients thermodynamiques  $\Upsilon_k$  ont été supposés strictement supérieurs à 1 pour  $k = 1, 2$ . Les 1-, 3-, 4- et 6-champs caractéristiques sont donc vraiment non-linéaires. ■

La proposition 9 a déjà été présentée par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Nous l'avons juste replacée dans le cadre de l'hypothèse 1. Ce résultat s'avère indépendant de la modélisation retenue pour la vitesse interfaciale. En résumé, par rapport au cadre monophasique standard, la structure des sous-systèmes de type Euler n'est pas modifiée par l'introduction d'une équation de couplage sur la fraction volumique.

**Remarque 8.** *A la proposition 9, une nouvelle hypothèse thermodynamique a été formulée. Pour  $k = 1, 2$ , cette nouvelle hypothèse thermodynamique stipule le coefficient  $\Upsilon_k$  strictement supérieur à 1. Cette hypothèse est standard. Elle est généralement admise. Voilà pourquoi nous ne nous sommes pas appesantis sur le sujet dans les chapitres de fermeture 2 et 3. L'immense majorité des lois d'état vérifie cette hypothèse. Pour une loi d'état de type gaz parfait (2.2),  $\Upsilon_k$  s'identifie par exemple à la constante  $(\gamma_k + 1) / 2 > 1$ . Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur, cette hypothèse peut néanmoins être mise en défaut dans certaines régions thermodynamiques situées au-dessus de la courbe de saturation. Pour décrire les mélanges liquide-vapeur dans ces régimes supercritiques, certaines lois d'état très particulières de type Bethe-Zel'dovich-Thompson peuvent être utilisées. Ces lois d'état très particulières ne vérifient plus l'hypothèse  $\Upsilon_k > 1$  (voir par exemple [24]). Ceci sort néanmoins complètement du cadre de nos applications qui s'intéressent aux transitions liquide-vapeur en dessous de la courbe de saturation. Pour  $k = 1, 2$ , l'hypothèse  $\Upsilon_k > 1$  sera donc toujours postulée par la suite.*

### Invariants de Riemann et relations de saut.

La fraction volumique étant constante de part et d'autre de la 0-discontinuité de contact, la partie convective du modèle bifluide à sept équations se réduit localement à deux sous-systèmes conservatifs de type Euler. Dans ce paragraphe, on détaille les relations de saut et les invariants de Riemann associés à ces deux sous-systèmes. Ce travail constitue le rappel des résultats déjà présentés par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42].

Pour définir les invariants de Riemann associés aux sous-systèmes de type Euler, deux coefficients thermodynamiques demandent tout d'abord à être introduits. Pour  $k = 1, 2$ , ces deux coefficients  $\Psi_k(P_k, s_k)$  sont définis par la relation

$$\left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial P_k} \right)_{s_k} = -\frac{1}{\rho_k c_k}.$$

On note  $I_p$  l'ensemble des six  $p$ -invariants de Riemann linéairement indépendants associés à la  $p$ -onde. Pour  $p \in \{1, \dots, 6\}$ , les différents ensembles  $I_p$  s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} I_1 &= \{\alpha_2, s_2, u_2 - \Psi_2, s_1, u_1, P_1\}, & I_4 &= \{\alpha_2, s_2, u_2, P_2, s_1, u_1 - \Psi_1\}, \\ I_2 &= \{\alpha_2, u_2, P_2, s_1, u_1, P_1\}, & I_5 &= \{\alpha_2, s_2, u_2, P_2, u_1, P_1\}, \\ I_3 &= \{\alpha_2, s_2, u_2 + \Psi_2, s_1, u_1, P_1\}, & I_6 &= \{\alpha_2, s_2, u_2, P_2, s_1, u_1 + \Psi_1\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La préservation des 2- et 5-invariants de Riemann s'identifie alors respectivement aux relations de saut à la traversée des 2- et 5-discontinuités de contact. En ce qui concerne les 1-, 3-, 4- et 6-champs vraiment non-linéaires, les relations de saut à la traversée d'un choc de vitesse  $\lambda$  s'écrivent

$$\forall k = 1, 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} [\alpha_k] = 0, \\ [m_k (u_k - \lambda)] = 0, \\ [m_k u_k (u_k - \lambda) + \alpha_k P_k] = 0, \\ [m_k E_k (u_k - \lambda) + \alpha_k P_k u_k] = 0, \\ [\rho_{k'}] = 0, \quad [u_{k'}] = 0, \quad [P_{k'}] = 0, \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2 \quad \text{pour } p = 1 \text{ ou } 3, \\ k = 1 \quad \text{pour } p = 4 \text{ ou } 6. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

La notation  $[\cdot]$  y désigne la différence entre les états à droite et à gauche du choc. Par rapport au cadre monophasique standard, les invariants de Riemann et les relations de saut associés aux deux sous-systèmes

de type Euler ne sont pas modifiés par l'introduction d'une équation de couplage sur la fraction volumique. Ces relations de saut et ces invariants de Riemann seront réutilisés à la prochaine section dans l'étude du problème de Riemann associé au système (4.1).

En conclusion, la partie convective du modèle bifluide à sept équations est maintenant complètement fermée. Pour les modélisation (4.10) de la vitesse interfaciale, tous les produits non-conservatifs du système (4.1) sont localement bien définis. A la différence des travaux présentés par Dal Maso, Lefloch et Murat [29], aucune information extérieure n'a été apportée au système (4.1) pour définir ses produits non-conservatifs. Ceci a d'importantes conséquences numériques. Nous le constaterons à la section 8.1.1 où un modèle usuel de la littérature (le modèle de Glimm, Saltz et Sharp [48]) est comparé à un modèle de type (4.10) pour les grandeurs interfaciales. Dans le cadre non-conservatif du modèle de Glimm, Saltz et Sharp [48], deux schémas numériques différents convergeront vers deux solutions distinctes. Dans le cadre des modélisations (4.10) pour la vitesse et la pression interfaciales, deux schémas numériques différents convergeront vers une même solution.

### 4.3 Le problème de Riemann : étude champ par champ

Maintenant que sont définies les solutions faibles de la partie convective associée au modèle bifluide à deux pressions, on s'intéresse dans cette section au problème de Riemann pour le système (4.1). Soit  $W_L$  et  $W_R$  deux états admissibles de  $\Omega$ . Le problème de Riemann pour le système (4.1) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = 0, \\ W(t=0, x) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (4.17)$$

En raison de la nature hyperbolique résonante et non-conservative du système (4.1), ce problème de Riemann sort du cadre classique présenté par Godlewski, Raviart, Serre ou Smoller dans les ouvrages de référence [52, 98, 97]. Les différents résultats présentés par ces auteurs ne s'appliquent pas ici. Ces résultats ont été établis pour des systèmes de lois de conservation conservatifs et strictement hyperboliques (typiquement le système d'Euler). Nous pouvons néanmoins nous inspirer de leur démarche pour entamer l'étude du problème de Riemann (4.17).

Dans la littérature classique [52, 98, 97], l'étude du problème de Riemann se décompose généralement en deux étapes. La première est consacrée à l'étude des connexions à travers chaque onde. C'est ce que nous appelons l'étude champ par champ. Etant donné un état admissible  $W_l$  situé à gauche d'une onde, on cherche à déterminer s'il existe un état  $W_r$  à sa droite qui soit unique et admissible. Des critères de sélection sont souvent introduits dans cette étape en cas de multiplicité. La seconde étape consiste en la connexion des différentes courbes d'onde. Idéalement, les conditions de connexion champ par champ doivent alors se réexprimer en une condition globale sur les états initiaux d'existence, unicité, et admissibilité de la solution faible au problème de Riemann.

Dans notre cadre néanmoins, une distinction s'opère dès la première étape avec le cadre classique. Certains champs peuvent se recouvrir au niveau des variétés de résonance. Au niveau de ces variétés de résonance, la définition des connexions à la traversée d'une superposition d'ondes pose problème. De telles connexions ont par exemple été étudiées par Goatin et Lefloch dans [50]. Nous ne sommes pas parvenus pour l'instant à transposer leurs résultats dans le cadre du problème de Riemann (4.17). A titre d'étude préliminaire, on se propose dans cette section de détailler les connexions champ par champ en dehors des variétés de résonance. Pour se fixer les idées, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est retenue dans chaque phase. On se restreint à la modélisation (4.10c) de la vitesse et de la pression interfaciales :

$$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_1 T_1 + m_2 T_2}. \quad (4.10c)$$

Dans ce cadre, l'étude des connexions onde par onde associées à la partie convective du modèle bifluide à sept équations a déjà été entamée par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Nous procédons tout d'abord au rappel de leurs résultats (connexions à travers les ondes de choc, connexions à travers les détente). Une étude approfondie de l'onde  $V_i$  associée à la fraction volumique est par la suite proposée. Cette étude met à jour différents régimes d'écoulement pour le mélange diphasique.

### 4.3.1 Connexions à travers les ondes de choc

A la section précédente, diverses relations de saut ont été établies dans un cadre général pour les ondes de choc associées aux champs vraiment non-linéaires du système (4.1). On considère ici des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $v_k = u_k - \lambda$  la vitesse relative de la phase  $k$  par rapport à un choc de vitesse  $\lambda$ . Dans ce contexte, les relations de saut (4.16) se réécrivent

$$\forall k = 1, 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} [\alpha_k] = 0, \\ [\rho_k v_k] = 0, \\ [\rho_k v_k^2 + P_k] = 0, \\ \left[ \left( \frac{\gamma_k}{\gamma_k - 1} \right) \frac{P_k}{\rho_k} + \frac{v_k^2}{2} \right] = 0, \\ [\rho_{k'}] = 0, \quad [u_{k'}] = 0, \quad [P_{k'}] = 0, \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2 \quad \text{pour } p = 1 \text{ ou } 3, \\ k = 1 \quad \text{pour } p = 4 \text{ ou } 6. \end{array} \right.$$

L'étude des connexions à travers les chocs du modèle bifluide à sept équations se ramène à l'étude des connexions à travers les chocs d'un système Euler monophasique standard. Cette étude a déjà été présentée par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. On la rappelle ici brièvement.

Pour étudier les connexions à travers les chocs du modèle bifluide à sept équations, deux coefficients thermodynamiques demandent tout d'abord à être introduits. Pour  $k = 1, 2$ , ces deux coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\varkappa_k = \frac{\gamma_k + 1}{\gamma_k - 1}.$$

On se focalise sur les propriétés d'une phase  $k$  en particulier. La paramétrisation en  $z_k$  des courbes de choc passant par  $W_l$  s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} (\rho_k)_r = z_k (\rho_k)_l, \\ (v_k)_r = \frac{1}{z_k} (v_k)_l, \\ (P_k)_r = \frac{\varkappa_k z_k - 1}{\varkappa_k - z_k} (P_k)_l, \end{array} \right. \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2 \quad \text{pour } p = 1 \text{ ou } 3, \\ k = 1 \quad \text{pour } p = 4 \text{ ou } 6. \end{array} \right.$$

Etant donné un état admissible  $W_l$  situé à gauche d'un choc, un état admissible  $W_r$  peut toujours lui être connecté par la droite pour des paramètres d'onde  $z_k$  dans l'intervalle  $[z_k^{-1}, z_k]$ ,  $k = 1, 2$ . Cet état  $W_r$  n'est cependant pas unique. L'inégalité d'entropie  $-\lambda [\eta] + [F_\eta] \geq 0$  sélectionne alors les chocs admissibles. A titre indicatif, on peut vérifier que cette inégalité d'entropie sélectionne les mêmes chocs que le critère géométrique de Lax.

En résumé, à tout état admissible  $W_l$  situé à gauche d'un choc peut donc être connecté un unique état admissible  $W_r$  par la droite. Ces diverses connexions à la traversée des chocs satisfont les inégalités

$$\forall k = 1, 2, \quad z_k^{-1} \leq \frac{(\rho_k)_r}{(\rho_k)_l} \leq z_k \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{(P_k)_r}{(P_k)_l} \leq +\infty, \quad \text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} k = 2 \quad \text{pour } p = 1 \text{ ou } 3, \\ k = 1 \quad \text{pour } p = 4 \text{ ou } 6. \end{array} \right.$$

### 4.3.2 Connexions à travers les détente

A la section précédente, plusieurs invariants de Riemann (4.15) ont été présentés dans un cadre général. Pour  $p \in \{1, 3, 4, 6\}$ , ces invariants de Riemann  $I_p$  caractérisent les champs vraiment non-linéaires du système (4.1). Ces  $p$ -invariants de Riemann sont constants à la traversée des  $p$ -détentes. L'étude des connexions à travers les détente du modèle bifluide à sept équations se ramène alors à l'étude des connexions à travers les détente d'un système Euler monophasique standard. Dans ce cadre, ce paragraphe résume les résultats déjà présentés par Gallouët, Hérard et Seguin [42].

Pour  $p \in \{1, 4\}$ , la préservation des  $p$ -invariants de Riemann à la traversée d'une  $p$ -détente s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} (s_k)_r = (s_k)_l, \\ (u_k - \Psi_k)_r = (u_k - \Psi_k)_l, \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 1, \\ k = 1 & \text{pour } p = 4. \end{cases}$$

A tout état admissible  $W_l$  situé à gauche d'une 1- ou 4-détente peut donc être connecté un unique état conditionnellement admissible  $W_r$  par la droite. Cet état conditionnellement admissible  $W_r$  satisfait la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad (u_k)_r - (u_k)_l = \int_{(P_k)_r}^{(P_k)_l} \frac{1}{\rho_k c_k} dP_k, \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 1, \\ k = 1 & \text{pour } p = 4. \end{cases}$$

Pour  $p \in \{3, 6\}$ , la préservation des  $p$ -invariants de Riemann à la traversée d'une  $p$ -détente s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} (s_k)_r = (s_k)_l, \\ (u_k + \Psi_k)_r = (u_k + \Psi_k)_l, \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 3, \\ k = 1 & \text{pour } p = 6. \end{cases}$$

A tout état admissible  $W_l$  situé à gauche d'une 3- ou 6-détente peut donc être connecté un unique état conditionnellement admissible  $W_r$  par la droite. Cet état conditionnellement admissible  $W_r$  satisfait la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad (u_k)_r - (u_k)_l = \int_{(P_k)_l}^{(P_k)_r} \frac{1}{\rho_k c_k} dP_k, \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 3, \\ k = 1 & \text{pour } p = 6. \end{cases}$$

Fort de ces connexions à travers les champs vraiment non-linéaires, un théorème peut d'ores et déjà être établi. Ce théorème stipule l'existence et l'unicité d'une solution faible entropique au problème de Riemann (4.17) dans le cas particulier  $(\alpha_2)_R = (\alpha_2)_L$ .

**Théorème 1.** *Soit  $W_L, W_R$  deux états admissibles voisins tels que  $(\alpha_2)_R = (\alpha_2)_L$ . Le problème de Riemann (4.17) admet une unique solution faible entropique admissible constituée de sept états constants séparés par des ondes simples, à la condition que*

$$\forall k = 1, 2, \quad \left| (u_k)_R - (u_k)_L \right| \leq \int_0^{(P_k)_L} \frac{1}{\rho_k c_k} dP_k + \int_0^{(P_k)_R} \frac{1}{\rho_k c_k} dP_k.$$

Ce théorème a déjà été présenté par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Sa démonstration se ramène à l'étude du problème de Riemann pour le système d'Euler. On se reportera aux ouvrages de référence [52, 98] pour une présentation détaillée de cette démonstration. Ce théorème 1 présente un intérêt dans l'étude des conditions aux limites pour le modèle bifluide à sept équations. Dans le cadre des méthodes de volumes fictifs, en présence de parois ou de frontières libres, la fraction volumique extérieure au domaine de calcul est souvent identifiée à la fraction volumique intérieure (voir section 7.4). On dispose alors d'une solution exacte à ces problèmes de Riemann posés sur les frontières du domaine de calcul. Comme néanmoins  $(\alpha_2)_R$  diffère généralement de  $(\alpha_2)_L$ , un tel résultat ne peut pas être généralisé. Le prochain paragraphe s'intéresse en conséquence aux connexions à travers la 0-onde.

### 4.3.3 Connexion à travers l'onde de fraction volumique

A la section précédente, la nature linéairement dégénérée du 0-champ caractéristique a été établie. Cette nature linéairement dégénérée du 0-champ caractéristique associe la 0-onde à une discontinuité de contact. A la traversée de cette 0-onde, les 0-invariants de Riemann sont constants. Pour des thermodynamiques générales, ces 0-invariants de Riemann ont été détaillés aux relations (4.12) et (4.13) pour la modélisation (4.10c) de la vitesse et de la pression interfaciales. On considère ici des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases. Dans ce contexte, ces six 0-invariants de Riemann se réécrivent :

$$\begin{aligned}
 I_0^1 = V_i &= \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, & I_0^2 = Q &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1), \\
 I_0^3 = \phi_1 &= \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \right) \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{Q^2}{2m_1^2}, & I_0^4 = \phi_2 &= \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \right) \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{Q^2}{2m_2^2}, \\
 I_0^5 = R &= Q^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) + \alpha_2 P_2 + \alpha_1 P_1, & I_0^6 = T &= \frac{(P_2 \rho_2^{-\gamma_2})^{C_{v_2}}}{(P_1 \rho_1^{-\gamma_1})^{C_{v_1}}}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Soit  $W_l$  un état admissible non-résonant situé à gauche de la 0-onde tel que  $(\alpha_2)_l = (\alpha_2)_R \in ]0, 1[$  et  $(V_i)_l \neq (u_k)_l \pm (c_k)_l$ ,  $k = 1, 2$ . Dans cette section, on cherche à déterminer s'il est possible de connecter à  $W_l$  un unique état admissible  $W_r$  par la droite tel que  $(\alpha_2)_r = (\alpha_2)_R \in ]0, 1[$ . L'étude de cette connexion en dehors des variétés de résonance se ramène à la résolution du système algébrique

$$\forall p \in \{1, \dots, 6\}, \quad I_0^p(W_r) = I_0^p(W_l). \tag{4.19}$$

La résolution de ce système a déjà été entreprise par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Nous en poursuivons l'étude dans ce paragraphe, toujours en dehors des variétés de résonance. Une structure très particulière est alors mise à jour pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Cette structure particulière de la partie convective révèle plusieurs régimes d'écoulement pour le mélange diphasique.

Au vu de la définition (4.18) des 0-invariants de Riemann, une première simplification est tout d'abord réalisée. Cette première simplification exprime les pressions et les vitesses phasiques en fonction des masses partielles :

$$\forall k = 1, 2, \quad (P_k)_r = \frac{1}{(\alpha_k)_R} \left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \left( \phi_k - \frac{Q^2}{2(m_k)_r^2} \right) (m_k)_r, \quad (u_k)_r = V_i + (-1)^k \frac{Q}{(m_k)_r}.$$

L'étude des connexions à travers la 0-onde se réduit alors à la résolution en variable  $((m_1)_r, (m_2)_r)$  du système non-linéaire

$$\left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} \right) \phi_2 (m_2)_r + \left( \frac{\gamma_2 + 1}{2\gamma_2} \right) \frac{Q^2}{(m_2)_r} + \left( \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} \right) \phi_1 (m_1)_r + \left( \frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} \right) \frac{Q^2}{(m_1)_r} = R, \tag{4.20a}$$

$$\frac{\left[ (\alpha_2)_R^{\gamma_2 - 1} (m_2)_r^{-\gamma_2 + 1} \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} \right) \left( \phi_2 - \frac{Q^2}{2(m_2)_r^2} \right) \right]^{C_{v_2}}}{\left[ (\alpha_1)_R^{\gamma_1 - 1} (m_1)_r^{-\gamma_1 + 1} \left( \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} \right) \left( \phi_1 - \frac{Q^2}{2(m_1)_r^2} \right) \right]^{C_{v_1}}} = T. \tag{4.20b}$$

La résolution de ce système est détaillée ci-dessous. Cette résolution du système (4.20) se décompose en cinq étapes. Dans un premier temps, on détermine le domaine d'admissibilité des solutions. Par la suite, les ensembles de solutions  $S_a$  et  $S_b$  respectivement associés aux équations (4.20a) et (4.20b) sont successivement présentés. L'intersection de ces ensembles  $S_a$  et  $S_b$  fournit l'ensemble  $S = S_a \cap S_b$  des solutions du système (4.20). Un critère de sélection est alors proposé qui assure l'unicité de la connexion à travers la 0-onde.



### Domaine d'admissibilité et régimes d'écoulement.

Soit  $W_l$  un état admissible situé à gauche de la 0-onde. Un tel état admissible définit des 0-invariants de Riemann  $\phi_1, \phi_2, R, T$  strictement positifs. Pour  $k = 1, 2$ , on peut alors introduire dans chaque phase les masses partielles minimales et critiques

$$\mu_{k_0} = \sqrt{\frac{Q^2}{2\phi_k}}, \quad m_{k_0} = \sqrt{\frac{Q^2}{2\phi_k} \left( \frac{\gamma_k + 1}{\gamma_k - 1} \right)} \geq \mu_{k_0}. \quad (4.21)$$

Afin d'éviter l'apparition du vide dans l'une ou l'autre phase, les solutions du système (4.20) sont recherchées dans l'ouvert  $] \mu_{2_0}, +\infty[ \times ] \mu_{1_0}, +\infty[$ . On rappelle que les connexions à travers la 0-onde sont ici étudiées en dehors des variétés de résonance  $V_i = u_k \pm c_k, k = 1, 2$ . En raison de l'équivalence

$$\forall k = 1, 2, \quad (m_k)_r = m_{k_0} \iff ((u_k)_r - (V_i)_r)^2 = (c_k)_r^2 \iff (V_i)_r = (u_k)_r \pm (c_k)_r,$$

le domaine d'admissibilité des solutions au système (4.20) est restreint à la réunion d'intervalle  $(] \mu_{1_0}, m_{1_0}[ \cup ] m_{1_0}, +\infty[) \times (] \mu_{2_0}, m_{2_0}[ \cup ] m_{2_0}, +\infty[)$ . Pour  $k = 1, 2$ , différents régimes d'écoulement critiques, sous-critiques et sur-critiques se distinguent alors sur ce domaine d'admissibilité. Pour  $k = 1, 2$ , ces différents régimes d'écoulement critiques, sous-critiques et sur-critiques sont respectivement définis par la donnée des ensembles

$$\begin{aligned} C_k &= \{ m_k / m_k = m_{k_0} \iff (u_k - V_i)^2 = c_k^2 \}, \\ S \cup B_k &= \{ m_k / m_k > m_{k_0} \iff (u_k - V_i)^2 < c_k^2 \}, \\ S \cup P_k &= \{ m_k / m_k < m_{k_0} \iff (u_k - V_i)^2 > c_k^2 \}. \end{aligned}$$

### L'ensemble des solutions $S_a$ .

Pour  $k = 1, 2$ , introduisons la fonction positive  $S_k : m_k \longrightarrow S_k(m_k)$  définie par

$$S_k(m_k) = \left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \phi_k m_k + \left( \frac{\gamma_k + 1}{2\gamma_k} \right) \frac{Q^2}{m_k}.$$

L'équation (4.20a) se réécrit

$$\sum_k S_k((m_k)_r) = R.$$

La fonction  $\sum_k S_k(m_k)$  est strictement convexe. Cette fonction admet un minimum en  $(m_{1_0}, m_{2_0})$ . L'équation (4.20a) admet donc des solutions à la condition que

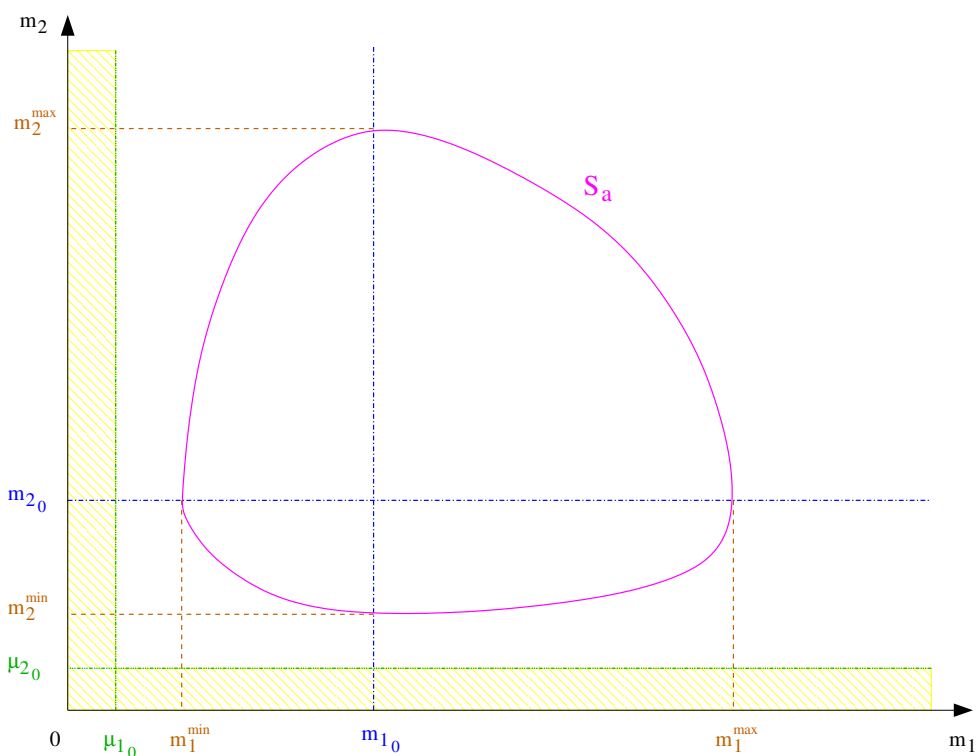
$$R \geq \sum_k S_k(m_{k_0}) = \sum_k \left[ 2\phi_k Q^2 \frac{(\gamma_k + 1)(\gamma_k - 1)}{\gamma_k^2} \right]^{1/2}. \quad (4.22)$$

Cette condition portant sur les 0-invariants de Riemann est toujours vérifiée pour un état admissible  $W_l$  situé à gauche de la 0-onde. L'équation (4.20a) admet donc toujours des solutions : l'ensemble  $S_a$  n'est pas vide. Introduisons pour  $k = 1, 2$  et  $k' = 3 - k$ , les deux racines explicites  $m_k^{\max}$  et  $m_k^{\min}$  de l'équation  $S_k(m_k) = R - S_{k'}(m_{k'})$  avec  $m_k^{\max} \geq m_k^{\min}$ . Ces deux racines vérifient les relations  $m_k^{\max} m_k^{\min} = m_{k_0}^2$  et  $S_k(m_k^{\max}) = S_k(m_k^{\min})$ . L'ensemble de ces définitions est illustré sur la figure 4.1.

### L'ensemble des solutions $S_b$ .

Pour  $k = 1, 2$ , introduisons la fonction positive  $S'_k : m_k \longrightarrow S'_k(m_k)$  définie par

$$S'_k(m_k) = \left[ (\alpha_k)_R^{\gamma_k - 1} m_k^{-\gamma_k + 1} \left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \left( \phi_k - \frac{Q^2}{2m_k^2} \right) \right]^{C_{v_k}}.$$

Figure 4.1: l'ensemble  $S_a$ .Tableau 4.1: les variations de la fonction  $S'_k(m_k)$ .

$m_k$	$\mu_{k_0}$	$m_{k_0}$			$+\infty$
$\frac{dS'_k}{dm_k}$	0	+	0	-	0
$S'_k(m_k)$	0	$S'_k(m_{k_0})$			0

L'équation (4.20b) se réécrit

$$S'_2((m_2)_r) = T S'_1((m_1)_r).$$

Pour  $k = 1, 2$ , les variations de la fonction positive  $S'_k(m_k)$  sont reportées dans le tableau 4.1. L'étude de ces variations assure l'existence de solutions à l'équation (4.20b). L'ensemble  $S_b$  n'est donc pas vide. Cet ensemble  $S_b$  est généralement constitué de deux branches. Une telle structure pour l'ensemble  $S_b$  est reportée sur les figures 4.3(a) et 4.3(b) selon que  $T S'_1(m_{1_0})$  est supérieur ou inférieur à  $S'_2(m_{2_0})$ .

**L'ensemble des solutions**  $S = S_a \cap S_b$ .

L'intersection  $S = S_a \cap S_b$  des différents ensembles de solutions  $S_a$  et  $S_b$  peut maintenant être réalisée. Cette intersection des ensembles  $S_a$  et  $S_b$  achève la résolution du système (4.20). Le système (4.20) admet conditionnellement les quatre solutions admissibles

- $(m_1, m_2)_1 \in S \cup \mathcal{B}_1 \cap S \cup \mathcal{B}_2$  à la condition que

$$\begin{cases} S'_2(m_{2_0}) \geq T S'_1(m_1^{\max}) & \text{si } T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_{2_0}), \\ T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_2^{\max}) & \text{si } S'_2(m_{2_0}) \geq T S'_1(m_{1_0}); \end{cases}$$

- $(m_1, m_2)_2 \in S \cup \mathcal{P}_1 \cap S \cup \mathcal{B}_2$  à la condition que

$$\begin{cases} S'_2(m_{2_0}) \geq T S'_1(m_1^{\min}) & \text{si } T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_{2_0}), \\ T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_2^{\max}) & \text{si } S'_2(m_{2_0}) \geq T S'_1(m_{1_0}); \end{cases}$$

- $(m_1, m_2)_3 \in S \cup \mathcal{B}_1 \cap S \cup \mathcal{P}_2$  à la condition que

$$\begin{cases} S'_2(m_{2_0}) \geq T S'_1(m_1^{\max}) & \text{si } T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_{2_0}), \\ T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_2^{\min}) & \text{si } S'_2(m_{2_0}) \geq T S'_1(m_{1_0}); \end{cases}$$

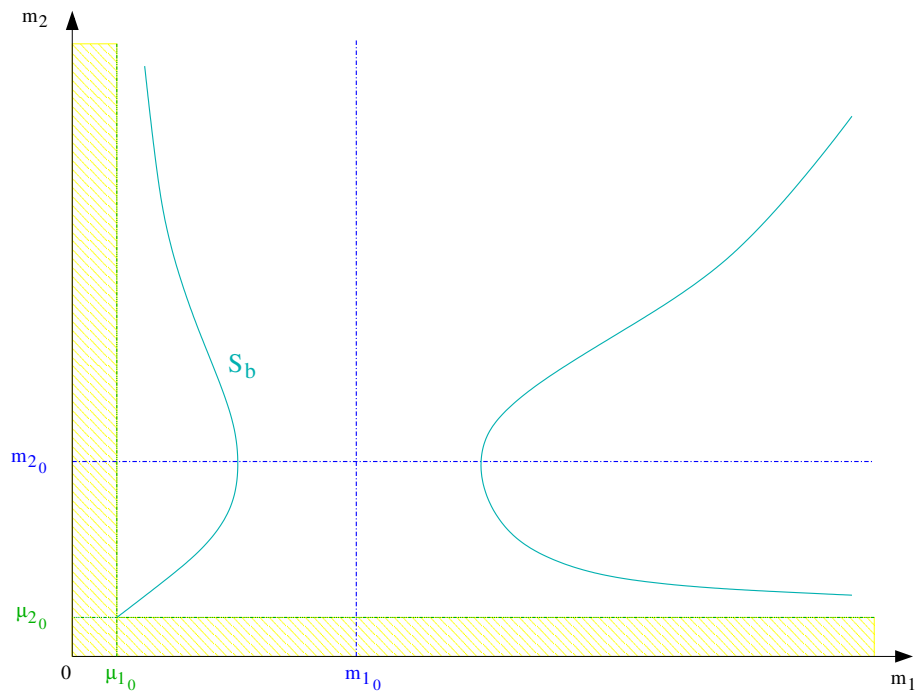
- $(m_1, m_2)_4 \in S \cup \mathcal{P}_1 \cap S \cup \mathcal{P}_2$  aux conditions que

$$\begin{cases} R \leq \sum_k S_k(\mu_{k_0}), \\ \text{et } \begin{cases} S'_2(m_{2_0}) \geq T S'_1(m_1^{\min}) & \text{si } T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_{2_0}), \\ T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_2^{\min}) & \text{si } S'_2(m_{2_0}) \geq T S'_1(m_{1_0}). \end{cases} \end{cases}$$

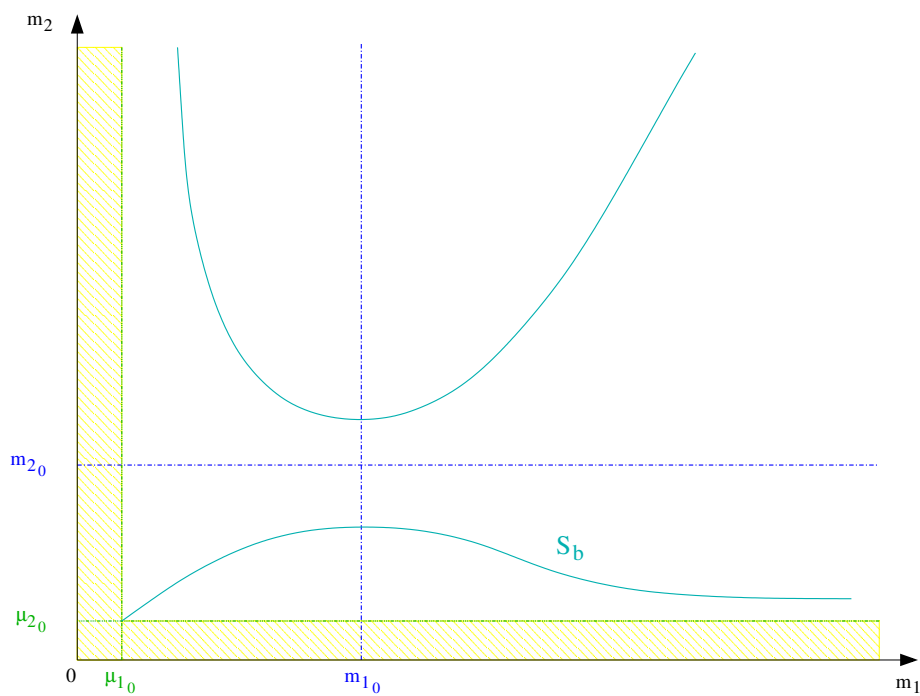
Ces quatre solutions sont reportées sur les figures 4.4(a) et 4.4(b) selon que  $T S'_1(m_{1_0})$  est supérieur ou inférieur à  $S'_2(m_{2_0})$ . Ces quatre solutions appartiennent chacune à un régime d'écoulement différent pour le mélange diphasique. Diverses conditions d'existence apparaissent dans la définition de ces solutions, pour lesquelles nous n'avons généralement pas d'interprétation. Seule la condition d'existence  $R \leq \sum_k (\mu_{k_0})$  s'explique pour la quatrième solution  $(m_1, m_2)_4 \in S \cup \mathcal{P}_1 \cap S \cup \mathcal{P}_2$  par l'apparition du vide dans les régimes sur-critiques. Cette situation est reportée sur la figure 4.4. Les trois premières solutions ne connaissent pas ce problème. Leur admissibilité est assurée dès leur existence acquise.

### Critère de sélection.

Au paragraphe précédent, quatre solutions ont été construites pour le système (4.20). Chacune de ces solutions appartient à un régime d'écoulement différent pour le mélange diphasique. Une multiplicité de connexions s'avère donc possible à la traversée de la 0-onde pour lesquelles un critère de sélection doit être proposé. Dans la littérature portant sur les systèmes hyperboliques résonants, Goatin et Lefloch [50] à la suite d'Isaacson et Temple [66] ont déjà postulé un tel critère de sélection qui discrimine les solutions de part et d'autre des variétés de résonance. Ce critère de sélection stipule dans notre cadre que la 0-courbe d'onde ne peut pas traverser les variétés  $V_i = u_k \pm c_k \iff m_k = m_{k_0}$ ,  $k = 1, 2$ , hors résonance. Suivant ce critère, à tout état admissible  $W_l$  situé à gauche de la 0-onde peut donc être conditionnellement connecté hors résonance un unique état admissible  $W_r$  par la droite. Cet état  $W_r$  appartient au même régime d'écoulement que  $W_l$ .

Figure 4.2: l'ensemble  $S_b$ .

(a) Dans le cas  $T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_{2_0})$ .



(b) Dans le cas  $T S'_1(m_{1_0}) \leq S'_2(m_{2_0})$ .

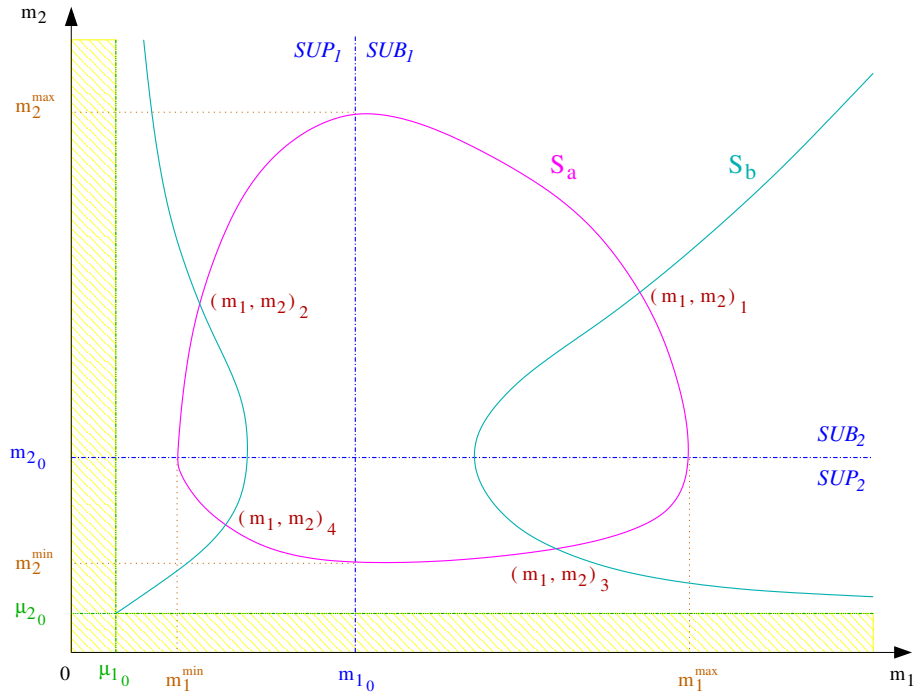
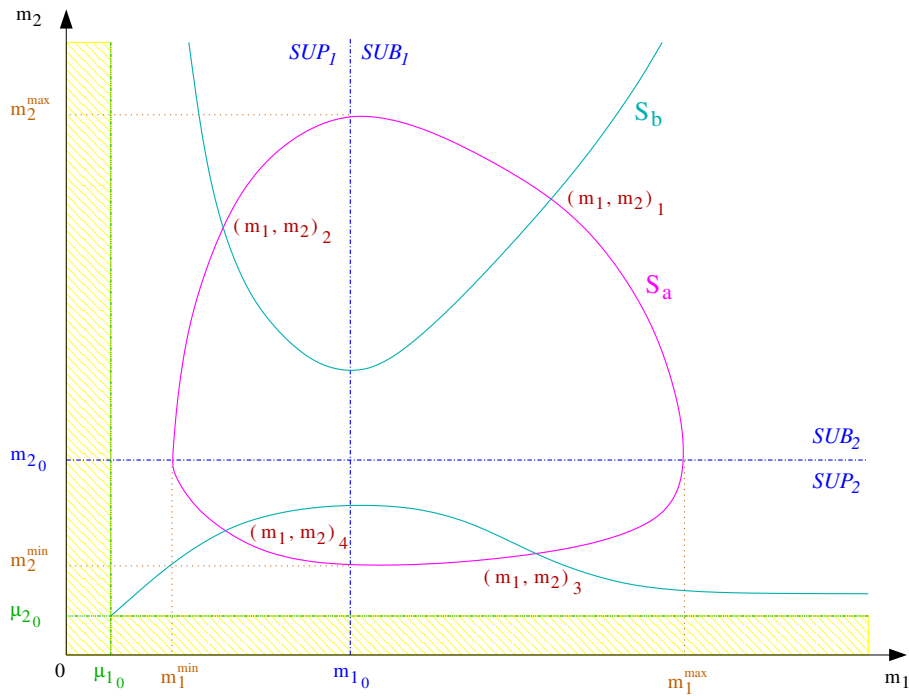
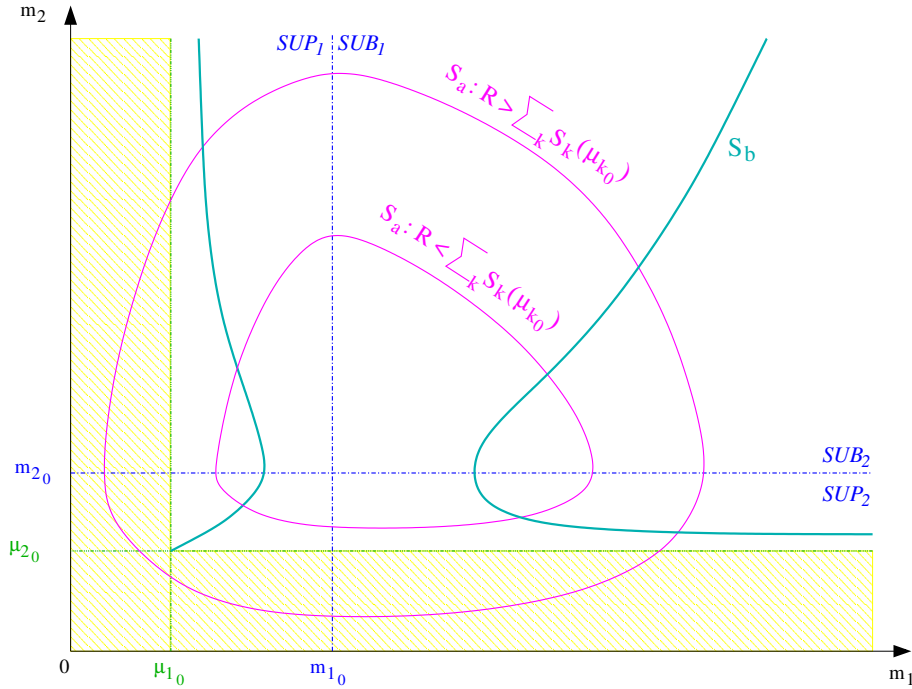
Figure 4.3: l'ensemble des solutions  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$ .(a) Dans le cas  $T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_{2_0})$ .(b) Dans le cas  $T S'_1(m_{1_0}) \leq S'_2(m_{2_0})$ .

Figure 4.4: l'apparition progressive du vide dans les régimes sur-critiques  $SUP_1 \cap SUP_2$ .

**Remarque 9.** A titre complémentaire, étudions les variations des masses partielles le long de la 0-courbe d'onde. Pour  $k = 1, 2$ , on introduit les fonctions positives

$$\mathcal{H}_k(m_k) = C_{v_k} \left[ \alpha_k^{\gamma_k - 1} m_k^{-\gamma_k} \left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \right]^{C_{v_k}} \left( \phi_k m_k - \frac{Q^2}{2m_k} \right)^{C_{v_k} - 1}.$$

Soit  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  les deux fonctions positives respectivement définies par les relations

$$\mathcal{F}(m_1, m_2) = (\gamma_2 - 1) \frac{\mathcal{H}_2(m_2)}{\alpha_2} \left( \phi_2 m_2 - \frac{Q^2}{2m_2} \right) + T (\gamma_1 - 1) \frac{\mathcal{H}_1(m_1)}{\alpha_1} \left( \phi_1 m_1 - \frac{Q^2}{2m_1} \right),$$

$$\mathcal{G}(m_1, m_2) = \gamma_2 \mathcal{H}_2(m_2) + T \gamma_1 \mathcal{H}_1(m_1).$$

Paramétrées par la fraction volumique  $\alpha_2$  en dehors des variétés de résonance, les variations des masses partielles le long de la 0-courbe d'onde s'écrivent respectivement

$$\frac{dm_2}{d\alpha_2} = \frac{\mathcal{F}(m_1, m_2)}{\mathcal{G}(m_1, m_2)} \left[ \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} \right) \phi_2 - \left( \frac{\gamma_2 + 1}{2\gamma_2} \right) \frac{Q^2}{m_2^2} \right]^{-1},$$

$$\frac{dm_1}{d\alpha_2} = - \frac{\mathcal{F}(m_1, m_2)}{\mathcal{G}(m_1, m_2)} \left[ \left( \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} \right) \phi_1 - \left( \frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} \right) \frac{Q^2}{m_1^2} \right]^{-1}.$$

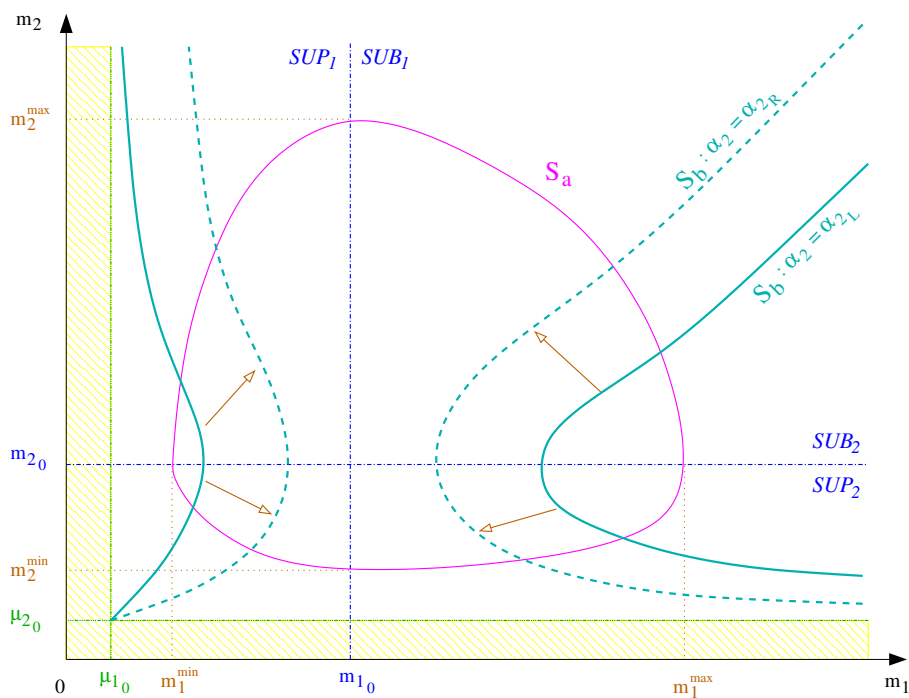
Dans le cas  $T S'_1(m_{1_0}) \geq S'_2(m_{2_0})$ , ces différentes variations sont illustrées sur les figures 4.6(a) et 4.6(b), selon que  $(\alpha_2)_R$  est supérieure ou inférieure à  $(\alpha_2)_L$ . Les différents régimes d'écoulement sur- et sous-critiques dans chaque phase nous apparaissent alors comme l'extension au cadre diphasique des régimes torrentiels et fluviaux pour les écoulements en rivière. On se référera à ce sujet au travail réalisé par

*Chinnayya, Leroux et Seguin dans [23]. Leur étude met à jour d'analogues inversions de comportement pour le système de Saint-Venant avec gradient de fond de part et d'autre des variétés de résonance. Dans notre contexte, la résonance s'interprète alors similairement comme un mécanisme de transition entre les différents régimes d'écoulement pour le mélange diphasique.*

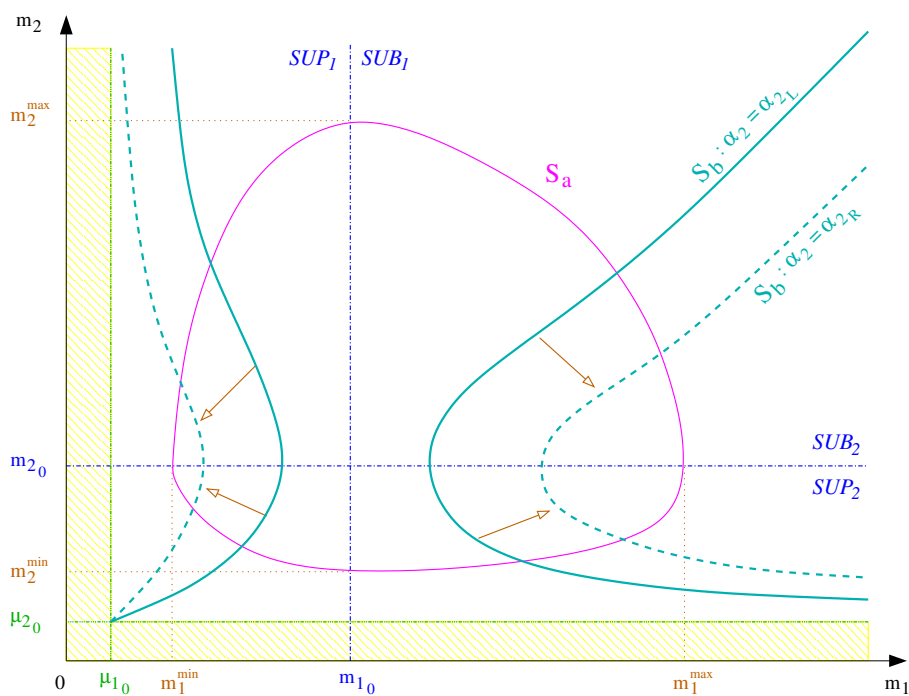
Cette remarque conclut notre étude champ par champ hors résonance de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations. En résumé, muni des critères de sélection portant sur la croissance de l'entropie à travers les chocs et la préservation des régimes d'écoulement à la traversée de l'onde  $V_i$ , tout état admissible  $W_l$  situé à gauche d'une  $p$ -onde,  $p \in \{0, \dots, 6\}$ , peut être conditionnellement connecté à un unique état admissible  $W_r$  par la droite. Cette étude champ par champ a été l'occasion d'une présentation détaillée des différentes conditions d'existence, admissibilité et non-résonance pour la connexion à travers chaque onde.

Pour conclure, différents résultats ont été obtenus dans ce chapitre qui s'intéresse aux propriétés de la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Certains de ces résultats existaient déjà dans la littérature. Nous avons étendu leur domaine d'application. D'autres sont nouveaux. Ils constituent notre contribution à l'étude des écoulements diphasiques compressibles. Dans un premier temps, la nature hyperbolique résonante du système (4.1) a été établie. Ce résultat n'est pas nouveau. Il a déjà été présenté par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Nous l'avons replacé dans le cadre de l'hypothèse thermodynamique fondamentale 1. Pour nos applications à la simulation des écoulements diphasiques à faible nombre de Mach, les différentes résonances de la partie convective ont alors été identifiées à des phénomènes marginaux. On s'est ensuite intéressé à la définition des solutions faibles pour ce système non-conservatif. Une nature a été attribuée à chacun des champs caractéristiques qui définit simultanément tous les produits non-conservatifs de cette partie convective sans recourir à la théorie développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29]. Ce travail a déjà été présenté par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin dans [27]. Nous l'avons resitué dans le cadre de l'hypothèse 1 pour finalement proposer de nouvelles modélisations pour la vitesse interfaciale. De telles modélisations pour la vitesse interfaciale ramènent le système (4.1) à un cadre "presque conservatif". Nous en verrons quelques conséquences numériques au chapitre 8. Par la suite, l'étude du problème de Riemann associé à cette partie convective a été entamée dans un cadre simplifié. Cette étude s'appuie à nouveau sur les travaux de Gallouët, Hérard et Seguin [42]. En imposant des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, l'étude des connexions onde par onde a été réalisée hors résonance. Une structure très particulière a alors été mise à jour pour l'onde de fraction volumique qui distingue plusieurs régimes d'écoulement sur- et sous-critiques pour le mélange diphasique. Ces travaux constituent une première étape dans la résolution du problème de Riemann associé à la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Il convient maintenant d'étudier les connexions à travers les superpositions d'ondes au niveau des variétés de résonance. Un tel travail pourrait permettre à terme la transcription des conditions onde par onde en une condition globale sur les états initiaux pour obtenir l'existence, l'unicité et l'admissibilité d'une solution faible au problème de Riemann (4.17). D'un point de vue pratique, ceci demande encore beaucoup de travail. A l'heure actuelle, il n'existe pas de solveur de Godunov pour approcher la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Plusieurs solveurs de Riemann approchés seront alors étudiés au chapitre 7 pour simuler numériquement cette partie convective.

Figure 4.5: variations des masses partielles le long de la 0-courbe d'onde suivant les régimes d'écoulement.



(a) Dans le cas  $\alpha_{2R} \geq \alpha_{2L}$ .



(b) Dans le cas  $\alpha_{2R} \leq \alpha_{2L}$ .





## Chapitre 5

# Dynamique des transferts interfaciaux

Au chapitre précédent, l'étude mathématique du modèle bifluide à sept équations a été entamée par l'analyse de la partie convective  $\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = 0$ . Cette analyse est poursuivie dans ce chapitre par l'étude des transferts interfaciaux. Ces transferts interfaciaux satisfont le système dynamique

$$\frac{dW}{dt} = S(W). \quad (5.1)$$

Dans ce chapitre, ni la convection ni la diffusion ne sont prises en compte, phénomènes dont nous gardons néanmoins la trace via l'inégalité d'entropie. Dans l'étude des interactions diphasiques, cette simplification est ici réalisée afin d'étudier indépendamment les problèmes posés par les transferts interfaciaux. Au chapitre 7, la construction d'une procédure numérique pour simuler le modèle bifluide à sept équations réutilisera par ailleurs cette étude.

Lors de la fermeture du modèle bifluide à sept équations, plusieurs modèles de relaxation ont été proposés pour les transferts interfaciaux. Ces différents modèles de relaxation pour les transferts interfaciaux dotent le système (1.1) d'une inégalité d'entropie. Ces modèles de relaxation pour les transferts de fraction volumique, de quantité de mouvement, de chaleur et de masse s'écrivent respectivement

$$\forall k = 1, 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_k = K_P (P_k - P_{k'}), \quad K_P(W) > 0, \\ D_k = K_U (u_{k'} - u_k), \quad K_U(W) > 0, \\ \Phi_k = K_T (T_{k'} - T_k), \quad K_T(W) > 0, \\ \Gamma_k = K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k), \quad K_\theta(W) > 0. \end{array} \right. \\ k' = 3 - k,$$

Dans cette formulation des interactions diphasiques, les fonctions de relaxation  $K_P$ ,  $K_U$ ,  $K_T$ ,  $K_\theta$  caractérisent l'intensité des transferts interfaciaux. A la section 3.4, une analyse bibliographique a été menée sur ces coefficients d'échange. Cette analyse bibliographique a soulevé plusieurs problèmes. Les corrélations usuellement en vigueur dans la littérature pour les coefficients d'échange ne s'appliquent généralement pas dans le cadre du modèle bifluide à sept équations pour lequel nous ne disposons que de rares résultats expérimentaux. Dans ce contexte, rechercher des solutions analytiques au système (5.1) pour d'hypothétiques formulations des coefficients d'échange ne nous semble pas judicieux. Dans ce chapitre, on s'intéresse donc davantage à la caractérisation des solutions du système (5.1) le plus indépendamment possible des fonctions de relaxation. Ce travail consiste à déterminer les équilibres du système (5.1), puis à analyser leur stabilité.

Dans l'étude des transferts interfaciaux, deux cas se distinguent nettement suivant que l'on considère des écoulements avec ou sans transition de phase. Cette distinction structure ce chapitre. On s'intéresse dans un premier temps aux écoulements sans transfert de masse. Sous l'hypothèse 1, l'existence d'un équilibre isobare isotherme équivitesse est tout d'abord montrée. La stabilité non-linéaire de cet équilibre isobare isotherme équivitesse est ensuite établie. Ce travail constitue le rappel des résultats présentés par

Dellacherie dans [32]. On montre à cette occasion l'admissibilité des trajectoires associées au système (5.1). A titre complémentaire, la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipitesse est étudiée pour finir. Cette stabilité linéaire nous permet de caractériser la dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements diphasiques sans transfert de masse. La seconde partie de ce chapitre s'intéresse aux écoulements en transition de phase. Cette seconde partie constitue notre contribution à l'étude des interactions entre un liquide et sa vapeur. Sous les hypothèses 1 et 2, on montre tout d'abord l'existence d'un équilibre isobare isotherme équipotentiel équipitesse. La stabilité non-linéaire de cet équilibre liquide-vapeur est ensuite établie. Ce travail constitue l'extension au cadre bifluide moyenné des résultats obtenus par Caro [20] dans le cadre de la simulation directe. Ce travail s'appuie sur une généralisation de la procédure d'optimisation présentée par Barberon et Helluy dans [10]. Rappelons par ailleurs que diverses modélisations (3.9) des coefficients d'échange  $K_P, K_U, K_T, K_\theta$  ont été proposées à la fin du chapitre 3. Ces modélisations (3.9) des coefficients d'échange caractérisent l'intensité des transferts interfaciaux pour les écoulements en transition de phase. Muni de ces fermetures (3.9) pour les coefficients d'échange, la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équipitesse est établie pour finir. Cette stabilité linéaire de l'équilibre liquide-vapeur nous permet d'assurer l'admissibilité des trajectoires au voisinage de certains équilibres isobares isothermes équipotentiels équipitesses. Sans perte de généralité, l'ensemble des études menées dans ce chapitre est présenté dans un cadre monodimensionnel.

## 5.1 Dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements sans transition de phase

Dans cette première section, on s'intéresse à la dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements sans transition de phase. Pour ces écoulements de type liquide-gaz, le transfert de masse n'est pas activé. Soit  $\rho = \sum_k m_k$ ,  $\rho V = \sum_k m_k u_k$ ,  $\rho E = \sum_k m_k E_k$  respectivement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale du mélange. Le système (5.1) décrivant la dynamique des transferts interfaciaux se réécrit dans ce contexte sous la forme développée

$$\begin{cases} d_t m_2 = 0, & d_t m_1 = 0, & d_t \rho V = 0, & d_t \rho E = 0, \\ d_t \alpha_2 = K_P (P_2 - P_1), \\ d_t m_2 u_2 = K_U (u_1 - u_2), \\ d_t m_2 E_2 = K_P (P_1 - P_2) P_i + K_U (u_1 - u_2) V_i + K_T (T_1 - T_2). \end{cases} \quad (5.2)$$

Dans cette section, on cherche à caractériser les solutions du système (5.2) dans l'espace admissible  $\Omega$ .

### 5.1.1 Equilibres et contraintes pour les écoulements diphasiques sans transition de phase

Aux précédents chapitres de modélisation, plusieurs coefficients d'échange ont été présentés. Ces coefficients d'échange sont tous strictement positifs sur l'espace admissible  $\Omega$ . Les équilibres du système (5.2) s'identifient alors à la variété isobare isotherme équipitesse

$$\mathbb{E}_{PTU} = \{W \in \mathbb{R}^7 / P_1 = P_2, T_1 = T_2, u_1 = u_2\}.$$

Plusieurs invariants ressortent par ailleurs de la formulation (5.2) du système dynamique. Il s'agit des masses partielles  $m_1, m_2$ , de la quantité de mouvement  $\rho V$  et de l'énergie totale  $\rho E$  du mélange. De tels invariants sont préservés le long des trajectoires. Les solutions du système (5.2) évoluent continûment sous les contraintes

$$\begin{cases} m_1(W) = m_1, & m_2(W) = m_2, \\ \sum_k m_k u_k(W) = \rho V, & \sum_k m_k E_k(W) = \rho E. \end{cases} \quad (5.3)$$

La question se pose alors de savoir dans quelle mesure équilibres et contraintes sont compatibles. Ce paragraphe est donc logiquement consacré à la résolution du système algébrique (5.3) sur la variété d'équilibre

$\mathbb{E}_{PTU}$ . Suivant notre analyse bibliographique, ce problème de la compatibilité des contraintes (5.3) avec l'équilibre isobare isotherme équivitesse a déjà été résolu par Dellacherie dans [32]. Cette compatibilité de l'équilibre isobare isotherme équivitesse avec les contraintes (5.3) découle d'une procédure d'optimisation appliquée à l'entropie du modèle bifluide à sept équations. Dans cette section, on rappelle cette procédure d'optimisation. On adopte cependant une formulation légèrement différente qui se prête davantage à une généralisation au transfert de masse. Cette procédure d'optimisation sera prochainement réutilisée dans le cadre des écoulements liquide-vapeur.

Pour établir la compatibilité des contraintes (5.3) avec l'équilibre isobare isotherme équivitesse, plusieurs coefficients thermodynamiques demandent tout d'abord à être introduits. Pour des masses partielles  $m_1$  et  $m_2$  strictement positives, soit  $\tau = 1/\rho$  le volume spécifique de mélange. On définit pour  $k = 1, 2$ , les fractions massiques, énergétiques et cinématiques de chaque phase par les relations

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{m_k}{\rho} = \frac{\alpha_k \tau}{\tau_k} \longrightarrow \sum_k x_k = 1, \\ y_k &= \frac{m_k E_k}{\rho} = x_k E_k \longrightarrow \sum_k y_k = E, \\ q_k &= \frac{m_k u_k}{\rho} = x_k u_k \longrightarrow \sum_k q_k = V. \end{aligned}$$

Pour des masses partielles  $m_k$  strictement positives, les fractions massiques  $x_k$  appartiennent à l'ouvert  $]0, 1[$ . Ces fractions massiques sont des invariants du système dynamique (5.2). Rappelons pour  $k = 1, 2$ , la définition des fonctions  $\sigma_k$  introduites à la proposition 1 :

$$\sigma_k : (\tau_k, E_k, u_k) \longrightarrow s_k \left( \tau_k, E_k - \frac{u_k^2}{2} \right).$$

Sous l'hypothèse 1, ces fonctions  $\sigma_k$  sont définies sur l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\tau_k, E_k, u_k)} = \{(\tau_k, E_k, u_k) / \tau_k > 0, P_k(\tau_k, E_k - u_k^2/2) > 0\}$ . Ces fonctions  $\sigma_k$  sont strictement concaves de matrice hessienne définie négative sur  $\mathcal{D}_{(\tau_k, E_k, u_k)}$ . Soit  $Z = (\alpha_2, y_2, q_2)^t$  le vecteur des fractions. A partir de l'entropie spécifique de mélange  $\eta/\rho = \sum_k x_k s_k$ , on introduit la fonction

$$\varphi_{(\tau, E, V, x_2)} : Z \longrightarrow x_2 \sigma_2 \left( \frac{\alpha_2 \tau}{x_2}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{q_2}{x_2} \right) + (1 - x_2) \sigma_1 \left( \frac{(1 - \alpha_2) \tau}{1 - x_2}, \frac{E - y_2}{1 - x_2}, \frac{V - q_2}{1 - x_2} \right).$$

Sous l'hypothèse 1, cette fonction  $\varphi_{(\tau, E, V, x_2)}$  est définie sur l'ouvert

$$\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2)} = \left\{ Z \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha_2 \in ]0, 1[, P_2 \left( \frac{\alpha_2 \tau}{x_2}, \frac{y_2}{x_2} - \frac{q_2^2}{2x_2^2} \right) > 0, \right. \\ \left. P_1 \left( \frac{(1 - \alpha_2) \tau}{1 - x_2}, \frac{E - y_2}{1 - x_2} - \frac{(V - q_2)^2}{2(1 - x_2)^2} \right) > 0 \right\}.$$

On note  $\overline{\mathcal{D}}_{(\alpha_2, y_2, q_2)}$  l'adhérence de cet ouvert et  $\partial \mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2)}$  sa frontière. Les propriétés de la fonction  $\varphi_{(\tau, E, V, x_2)}$  sont présentées à la proposition 10.

**Proposition 10.** *Dans le cadre de l'hypothèse 1, on considère des lois d'état et des invariants  $(\tau, E, V, x_2)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2)}$  soit un ouvert convexe, borné, de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^3$ . Sous l'hypothèse 1, la fonction  $\varphi_{(\tau, E, V, x_2)}(Z)$  est strictement concave sur  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2)}$  et*

$$\forall Z_0 \in \partial \mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2)}, \quad \lim_{Z \rightarrow Z_0} \varphi_{(\tau, E, V, x_2)}(Z) = -\infty.$$

**Démonstration.** Soit  $A = (A_1, A_2, A_3)^t$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . On définit le vecteur  $B = (\tau A_1, A_2, A_3)^t$ . Sous l'hypothèse 1, la proposition 1 assure le caractère défini négatif de la forme quadratique

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2)}, \quad \left( \nabla^2 \varphi_{(\tau, E, V, x_2)} \cdot A, A \right) = \sum_k \frac{1}{x_k} \left( \nabla^2 \sigma_k \cdot B, B \right).$$

La fonction  $\Phi_{(\tau,E,V,x_2)}(Z)$  est donc strictement concave sur  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ . Sous l'hypothèse 1, rappelons que pour tout  $k = 1, 2$ ,

$$\lim_{\substack{\tau_k \rightarrow 0 \\ P_k(\tau_k, e_k) > 0}} s_k(\tau_k, e_k) = -\infty, \quad \lim_{\substack{P_k(\tau_k, e_k) \rightarrow 0 \\ \tau_k > 0}} s_k(\tau_k, e_k) = -\infty.$$

Ces différentes propriétés pour les entropies phisiques se transcrivent pour la fonction  $\Phi_{(\tau,E,V,x_2)}$  sous la forme

$$\forall Z_0 \in \partial\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}, \quad \lim_{Z \rightarrow Z_0} \Phi_{(\tau,E,V,x_2)}(Z) = -\infty.$$

Ce dernier point termine la démonstration de la proposition 10. ■

Compte tenu du comportement de la fonction  $\Phi_{(\tau,E,V,x_2)}$  au voisinage de la frontière  $\partial\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ , on définit sur l'adhérence  $\overline{\mathcal{D}}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$  le prolongement par continuité

$$\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)} : Z \longrightarrow \begin{cases} \Phi_{(\tau,E,V,x_2)}(Z) & \text{si } Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}, \\ -\infty & \text{si } Z \in \partial\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}. \end{cases}$$

A la proposition 10, la stricte concavité de la fonction  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}(Z)$  sur l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$  vient d'être établie sous l'hypothèse 1. On s'intéresse maintenant à l'existence d'un extremum pour cette fonction. Un tel maximum est identifié à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$  sur la variété d'équilibre isobare isotherme équivitesse. Ce résultat est présenté au théorème 2.

**Théorème 2.** *Dans le cadre de l'hypothèse 1, on considère des lois d'état et des invariants  $(\tau, E, V, x_2)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$  soit un ouvert convexe, borné, de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^3$ . Sous l'hypothèse 1, la fonction  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  admet un unique maximum isobare isotherme équivitesse admissible dans  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ . Ce maximum est l'unique solution isobare isotherme équivitesse du système algébrique des contraintes (5.3).*

**Démonstration.** A la proposition 10, la stricte concavité de la fonction  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}(Z)$  sur l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$  vient juste d'être montrée sous l'hypothèse 1. Sur le fermé  $\overline{\mathcal{D}}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ , la fonction  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}(Z)$  admet donc un unique maximum. Deux cas se présentent suivant que ce maximum est atteint sur la frontière ou à l'intérieur du domaine  $\overline{\mathcal{D}}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ . Pour notre définition du prolongement par continuité  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  sur  $\partial\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ , ce maximum ne peut pas être atteint sur la frontière du domaine  $\overline{\mathcal{D}}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ . L'unique maximum de la fonction  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  est donc atteint à l'intérieur de l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ . Cet unique maximum est alors admissible. Calculons le gradient de la fonction  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  :

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}, \quad \nabla \overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)} = \begin{bmatrix} \tau \left( \frac{\partial \sigma_2}{\partial \tau_2} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial \tau_1} \right) \\ \left( \frac{\partial \sigma_2}{\partial E_2} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial E_1} \right) \\ \left( \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} \right) \end{bmatrix}.$$

Les différentes dérivées partielles intervenant dans le gradient de la fonction  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  s'expriment grâce à l'hypothèse 1

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}, \quad \forall k = 1, 2, \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial \tau_k} = \frac{P_k}{T_k}, \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial E_k} = \frac{1}{T_k}, \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial u_k} = -\frac{u_k}{T_k}.$$

Le gradient de  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  s'annule à l'équilibre isobare isotherme équivitesse. L'unique maximum de la fonction  $\overline{\Phi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  dans l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$  correspond donc à un état d'équilibre isobare isotherme équivitesse admissible. Ce maximum est l'unique état d'équilibre isobare isotherme équivitesse compatible avec

les invariants  $(\tau, E, V, x_2)$ . Il est donc l'unique solution isobare isotherme équivitesse admissible du système algébrique des contraintes (5.3). ■

En résumé, suivant les travaux de Dellacherie [32], la compatibilité des contraintes (5.3) avec l'équilibre isobare isotherme équivitesse vient d'être établie au théorème 2. Cette compatibilité des contraintes (5.3) avec l'équilibre isobare isotherme équivitesse est indépendante de la modélisation retenue pour les transferts interfaciaux. Seule l'hypothèse 1 doit être vérifiée en ce qui concerne les lois d'état utilisées dans chaque phase. L'état d'équilibre isobare isotherme équivitesse est alors conditionnellement admissible (l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2)}$  doit être de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^3$ ). Cette admissibilité conditionnelle de l'état d'équilibre isobare isotherme équivitesse est illustrée à l'exemple 3 où une loi d'état de type gaz parfait est adoptée dans les deux phases.

**Exemple 3.** Soit  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $E, V$  les invariants du système (5.2) tels que  $\varepsilon = E - V^2 / 2 > 0$ . Une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans chaque phase. On impose les coefficients thermodynamiques  $\gamma_1 > 1$ ,  $\gamma_2 > 1$ ,  $C_{v_1} > 0$  et  $C_{v_2} > 0$ . Ces deux lois d'état vérifient l'hypothèse 1. Le système algébrique des contraintes (5.3) admet alors une unique solution isobare isotherme équivitesse sur la variété d'équilibre  $\mathbb{E}_{PTU}$ . Cette unique solution isobare  $P_1 = P_2 = P$ , isotherme  $T_1 = T_2 = T$  et équivitesse  $u_1 = u_2 = u$  s'écrit explicitement

$$\begin{cases} u &= V, \\ \alpha_2 &= \frac{m_2 C_{v_2} (\gamma_2 - 1)}{m_1 C_{v_1} (\gamma_1 - 1) + m_2 C_{v_2} (\gamma_2 - 1)}, \\ T &= \left( \frac{m_1 C_{v_1} + m_2 C_{v_2}}{m_1 + m_2} \right)^{-1} \varepsilon, \\ P &= \left( \frac{m_2 C_{v_2} (\gamma_2 - 1) + m_1 C_{v_1} (\gamma_1 - 1)}{m_2 C_{v_2} + m_1 C_{v_1}} \right) \rho \varepsilon. \end{cases}$$

Cet unique état d'équilibre isobare isotherme équivitesse est admissible à la condition que les invariants du système (5.2) satisfassent la relation  $\varepsilon = E - V^2 / 2 > 0$ . Cette contrainte prévient l'apparition du vide.

### 5.1.2 Stabilité non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équivitesse pour les écoulements diphasiques sans transition de phase

A la section précédente, la compatibilité des contraintes (5.3) avec l'équilibre isobare isotherme équivitesse a été établie sous l'hypothèse 1 pour les écoulements diphasiques sans transition de phase. Cette compatibilité entre équilibres et contraintes assure à chaque trajectoire du système (5.2) de croiser une fois la variété d'équilibre  $\mathbb{E}_{PTU}$ . La question se pose maintenant de caractériser cet équilibre. On s'intéresse dans cette section à sa stabilité. La convergence des solutions associées au système (5.2) sur la variété  $\mathbb{E}_{PTU}$  est alors établie. Ce résultat de stabilité non-linéaire constitue un rappel dans la mesure où il a déjà été présenté par Dellacherie dans [32]. La démonstration de ce résultat consiste en la construction d'une fonction de Lyapunov pour le système (5.2), puis en l'application du théorème de Lyapunov. Cette démonstration est ici brièvement rappelée. Cette démonstration sera prochainement étendue au cadre des écoulements liquide-vapeur en transition de phase.

Dans un premier temps, rappelons qu'à la section précédente une fonction  $\bar{\Phi}_{(\tau, E, V, x_2)}$  a été introduite à partir de l'entropie spécifique de mélange  $\eta/\rho$ . Cette application est ici identifiée à une fonction de Lyapunov pour le système dynamique (5.2). Un tel résultat est présenté à la proposition 11.

**Proposition 11.** Dans le cadre de l'hypothèse 1, on considère des lois d'état et des invariants  $(\tau, E, V, x_2)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2)}$  soit un ouvert convexe, borné, de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^3$ . Sous l'hypothèse 1, la fonction  $\bar{\Phi}_{(\tau, E, V, x_2)}$  est une fonction de Lyapunov pour le système dynamique (5.2).

**Démonstration.** Soit  $Z = (\alpha_2, \gamma_2, q_2)'$  le vecteur des fractions. Sous l'hypothèse 1 à la proposition 10, la fonction  $\bar{\Phi}_{(\tau, E, V, x_2)}(Z)$  a été identifiée à une fonction strictement concave sur le domaine  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2)}$ .

On a alors montré l'existence d'un unique maximum admissible isobare isotherme équivitesse  $Z_{\text{eq}}$  pour la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  dans l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ . Intéressons-nous maintenant aux variations temporelles de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}$ . Suivant le travail effectué au chapitre 2, les variations temporelles de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  s'écrivent

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}, \quad \frac{d\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}}{dt}(Z) = \frac{1}{\rho} \left[ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) D_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k \right].$$

Diverses modélisations des transferts interfaciaux ont par ailleurs été proposées au chapitre 2. Ces modélisations particulières pour les transferts interfaciaux induisent

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)} - \{Z_{\text{eq}}\}, \quad \frac{d\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}}{dt}(Z) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}}{dt}(Z_{\text{eq}}) = 0.$$

La fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  est donc une fonction de Lyapunov pour le système (5.2). ■

Maintenant la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  identifiée à une fonction de Lyapunov pour le système (5.2), nous pouvons désormais conclure à la convergence des trajectoires sur la variété isobare isotherme équivitesse. Un tel résultat a déjà été présenté par Dellacherie dans [32]. Nous le rappelons au théorème 3. Nous y établissons par ailleurs l'admissibilité des trajectoires associées au système dynamique (5.2).

**Théorème 3.** *Dans le cadre de l'hypothèse 1, on considère des lois d'état et des invariants  $(\tau, E, V, x_2)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$  soit un ouvert convexe, borné, de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^3$ . Toute trajectoire bornée du système dynamique (5.2) converge vers l'unique solution isobare isotherme équivitesse du système algébrique (5.3). Cette trajectoire est continûment admissible.*

**Démonstration.** La démonstration du théorème 3 consiste en l'application du théorème de Lyapunov à la fonction de Lyapunov  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}$ . Dans un premier temps, les trajectoires du système dynamique (5.2) converge vers l'unique maximum global de la fonction strictement concave  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}(Z)$ . Suivant le théorème 2, cet unique maximum global de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}$  coïncide avec l'unique solution isobare isotherme équivitesse admissible du système algébrique (5.3). Cet unique maximum admissible se situe à l'intérieur du domaine  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ . Pour tout  $Z_0 \in \partial\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ , rappelons par ailleurs que

$$\lim_{Z \rightarrow Z_0} \bar{\varphi}_{(\tau,E,V,x_2)}(Z) = -\infty.$$

Les trajectoires bornées du système dynamique (5.2) ne peuvent donc pas sortir de l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2)}$ . Ces trajectoires sont continûment admissibles. Ce dernier point conclut la démonstration du théorème 3. ■

En résumé, suivant les travaux de Dellacherie [32], un premier résultat de stabilité non-linéaire vient d'être établi dans cette section pour l'équilibre isobare isotherme équivitesse. Ce résultat stipule la convergence des trajectoires associées au système (5.2) vers l'équilibre isobare isotherme équivitesse. Un tel résultat ne dépend pas des modélisations retenues pour les coefficients d'échange ou les grandeurs interfaciales. Dans le cadre de l'hypothèse 1, ce résultat est également indépendant des lois d'état utilisées dans chaque phase. Ce résultat s'interprète de la manière suivante. En présence d'inhomogénéités au sein du mélange diphasique, la réorganisation de l'écoulement s'effectue spontanément de manière à résorber les déséquilibres entre les phases. Numériquement, la projection sur la variété d'équilibre  $\mathbb{E}_{PTU}$  coïncide alors avec l'intégration du système (5.2) sur temps long. Pour caractériser la dynamique des transferts interfaciaux, on s'intéresse par la suite à la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équivitesse.

**Remarque 10.** *Au théorème 3, l'admissibilité des trajectoires associées au système dynamique (5.2) vient d'être établie. Les fractions volumiques associées à ces trajectoires évoluent continûment dans l'ouvert  $]0, 1[$ . Dans le cadre de nos applications à la simulation des écoulements diphasiques industriels, certaines configurations à phases séparées peuvent néanmoins apparaître. De telles situations sont par exemple rencontrées lors de la sédimentation des mélanges. De telles configurations monophasiques ne peuvent pas être décrites par le système dynamique (5.2). Les modèles bifluides posent donc des problèmes de dégénérescence vers les systèmes monophasiques. De notre point de vue, ce phénomène est normal. Les*

modèles bifluïdes sont issus d'un processus de moyenne diphasique. Ces modèles bifluïdes sont destinés à décrire des mélanges. Dès lors qu'il n'y a pas suffisamment d'échantillons pour définir correctement les procédures de moyenne diphasique (i.e. lorsqu'une des phases disparaît), les modèles bifluïdes ne semblent plus adaptés.

### 5.1.3 Stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équivitesse pour les écoulements diphasiques sans transition de phase

A la section précédente, la stabilité non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équivitesse a été établie sous l'hypothèse 1. Un tel résultat de stabilité non-linéaire s'avère très général. Ce résultat de stabilité non-linéaire ne caractérise qu'une propriété globale de l'équilibre isobare isotherme équivitesse. Il ne fournit aucune autre information sur la dynamique des transferts interfaciaux que leur tendance à rétablir l'équilibre sur temps long. Il est alors légitime d'étudier à quelle vitesse ces déséquilibres se résorbent entre les phases. Dans cette section, la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équivitesse est établie en conséquence. Pour établir cette stabilité linéaire, on étudie l'évolution des écarts par rapport à l'équilibre isobare isotherme équivitesse. Cette étude continue des écarts à l'équilibre sera par ailleurs réutilisée dans un cadre discret au chapitre 7 où un nouveau schéma de relaxation est proposé pour simuler les transferts interfaciaux.

Soit  $\Delta u = u_2 - u_1$ ,  $\Delta P = P_2 - P_1$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1$  respectivement l'écart de vitesse, de pression et de température entre les phases. Soit  $X = (m_2, m_1, E, V, \Delta u, \Delta P, \Delta T)^t$ . Pour étudier l'évolution des écarts à l'équilibre  $\Delta u$ ,  $\Delta P$ ,  $\Delta T$ , plusieurs coefficients thermodynamiques sont tout d'abord introduits. Ces différents coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{uu} &= \sum_k \frac{1}{m_k}, & \mathcal{A}_{pu} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), \\ \mathcal{A}_{pp} &= \sum_k \frac{\widehat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & \mathcal{A}_{pt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \\ \mathcal{A}_{tu} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), & \mathcal{A}_{tt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \\ \mathcal{A}_{tp} &= \sum_k \frac{1}{\alpha_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{P_k} + \widehat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k). \end{aligned}$$

Ces différents coefficients thermodynamiques interviennent dans la réécriture du système dynamique (5.2) en variable  $X$  :

$$\begin{cases} d_t m_2 = 0, & d_t m_1 = 0, & d_t V = 0, & d_t E = 0, \\ d_t \Delta u = -K_U \mathcal{A}_{uu} \Delta u, \\ d_t \Delta P = -K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u - K_P \mathcal{A}_{pp} \Delta P - K_T \mathcal{A}_{pt} \Delta T, \\ d_t \Delta T = -K_U \mathcal{A}_{tu} \Delta u - K_P \mathcal{A}_{tp} \Delta P - K_T \mathcal{A}_{tt} \Delta T. \end{cases} \quad (5.4)$$

Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'évolution des écarts à l'équilibre au voisinage de la variété  $\mathbb{E}_{PTU}$ . On procède à la linéarisation du système dynamique (5.4) au voisinage de l'équilibre isobare isotherme équivitesse. Soit  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{PTU}$ . Soit  $\mathcal{A}_{PTU}$  la matrice

$$\mathcal{A}_{PTU} = \begin{bmatrix} -K_U \mathcal{A}_{uu} & 0 & 0 \\ -K_U \mathcal{A}_{pu} & -K_P \mathcal{A}_{pp} & -K_T \mathcal{A}_{pt} \\ -K_U \mathcal{A}_{tu} & -K_P \mathcal{A}_{tp} & -K_T \mathcal{A}_{tt} \end{bmatrix}.$$

L'application au système dynamique (5.4) du théorème d'Hartman et Grobman [87] en  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{PTU}$  conduit



au problème linéarisé

$$d_t(X - X_{\text{eq}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{PTU}(X_{\text{eq}}) \end{pmatrix} \cdot (X - X_{\text{eq}}).$$

Cette linéarisation du système dynamique (5.4) au voisinage de la variété  $\mathbb{E}_{PTU}$  nous permet de conclure à la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équivitesse. Un tel résultat est énoncé à la proposition 12.

**Proposition 12.** Soit  $r > 0$ . Soit  $m_1 > 0, m_2 > 0, E, V$  les invariants du système (5.4). Soit  $X_{\text{eq}} = (m_1, m_2, E, V, 0, 0, 0)^t \in \mathbb{E}_{PTU}$  l'unique solution isobare isotherme équivitesse du système algébrique (5.3). Soit  $\mathcal{B}(X_{\text{eq}}, r)$  la boule centrée en  $X_{\text{eq}}$  de rayon  $r$ . On suppose les coefficients thermodynamiques  $\mathcal{A}_{pp}, \mathcal{A}_{pt}, \mathcal{A}_{tp}, \mathcal{A}_{tt}$  en accord avec les relations

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{pp}(X_{\text{eq}}) > 0, \quad \mathcal{A}_{tt}(X_{\text{eq}}) > 0, \quad \mathcal{A}_{pt}(X_{\text{eq}}) \mathcal{A}_{tp}(X_{\text{eq}}) > 0, \\ \mathcal{A}_{pp}(X_{\text{eq}}) \mathcal{A}_{tt}(X_{\text{eq}}) - \mathcal{A}_{pt}(X_{\text{eq}}) \mathcal{A}_{tp}(X_{\text{eq}}) > 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Soit  $X(0) = (m_1, m_2, E, V, \Delta u(0), \Delta P(0), \Delta T(0))^t \in \mathcal{B}(X_{\text{eq}}, r)$  une condition initiale admissible au système (5.4) située dans un voisinage de  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{PTU}$ . La solution du problème linéarisé associé au système (5.4) est bornée :

$$\forall r > 0, \quad \exists M > 0 \quad / \quad \forall t \geq 0, \quad X(t) - X_{\text{eq}} \in \mathcal{B}(X_{\text{eq}}, Mr).$$

Cette solution bornée préserve les invariants  $m_1, m_2, E, V$ . Cette solution bornée converge vers  $X_{\text{eq}}$ .

**Démonstration.** Soit  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{PTU}$ . La démonstration de la proposition 12 se ramène à l'étude du spectre associé à la matrice  $\mathcal{A}_{PTU}(X_{\text{eq}})$ . Sur la variété  $\mathbb{E}_{PTU}$ , la matrice  $\mathcal{A}_{PTU}$  ne dépend pas de la modélisation retenue pour la vitesse ou la pression interfaciales qui vérifient à l'équilibre isobare équivitesse  $V_i = u_1 = u_2$  et  $P_i = P_1 = P_2$ . Les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{A}_{PTU}(X_{\text{eq}})$  s'expriment alors explicitement

$$\begin{cases} \lambda_u &= -K_U \mathcal{A}_{uu}, \\ \lambda_p &= \frac{1}{2} \left[ - (K_P \mathcal{A}_{pp} + K_T \mathcal{A}_{tt}) - \left( (K_P \mathcal{A}_{pp} - K_T \mathcal{A}_{tt})^2 + 4 K_P K_T \mathcal{A}_{pt} \mathcal{A}_{tp} \right)^{1/2} \right], \\ \lambda_t &= \frac{1}{2} \left[ - (K_P \mathcal{A}_{pp} + K_T \mathcal{A}_{tt}) + \left( (K_P \mathcal{A}_{pp} - K_T \mathcal{A}_{tt})^2 + 4 K_P K_T \mathcal{A}_{pt} \mathcal{A}_{tp} \right)^{1/2} \right]. \end{cases}$$

Pour des coefficients d'échange  $K_P, K_T, K_U$  strictement positifs, la matrice  $\mathcal{A}_{PTU}(X_{\text{eq}})$  est définie négative à la condition que les différents coefficients thermodynamiques  $\mathcal{A}_{pp}, \mathcal{A}_{pt}, \mathcal{A}_{tp}, \mathcal{A}_{tt}$  vérifient les relations (5.5). Sous cette condition (5.5), l'état d'équilibre  $X_{\text{eq}}$  est asymptotiquement stable. Ce dernier point termine la démonstration de la proposition 12. ■

La stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équivitesse est un résultat nouveau. Ce résultat apporte une information supplémentaire sur la dynamique des transferts interfaciaux. Nous savions déjà que les déséquilibres entre les phases avaient tendance à se résorber sur temps long. Nous savons maintenant que les faibles déséquilibres se résorbent rapidement. Un tel résultat est indépendant de la modélisation retenue pour les coefficients d'échange et les grandeurs interfaciales. Pour établir cette stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équivitesse, plusieurs conditions thermodynamiques se sont néanmoins avérées nécessaires en ce qui concerne les lois d'état utilisées pour décrire le mélange diphasique. Ces conditions thermodynamiques (5.5) sont vérifiées à l'exemple 4 où une loi d'état de type gaz parfait est adoptée dans les deux phases.

**Exemple 4.** Soit  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{PTU}$  un état d'équilibre isobare isotherme équivitesse. Pour décrire le mélange diphasique, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques  $\gamma_2 > 1, \gamma_1 > 1, C_{v_2} > 0$  et  $C_{v_1} > 0$ . A l'équilibre isobare  $P_1 = P_2 = P$ , isotherme  $T_1 = T_2 = T$  et équivitesse  $u_1 = u_2 = u$ , les différents coefficients thermodynamiques non-nuls intervenant

dans la matrice  $\mathcal{A}_{PTU}(X_{\text{eq}})$  s'écrivent

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{uu}(X_{\text{eq}}) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \\ \mathcal{A}_{pp}(X_{\text{eq}}) = \left( \frac{\gamma_2}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \right) P, & \mathcal{A}_{pt}(X_{\text{eq}}) = \frac{\gamma_2 - 1}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1 - 1}{\alpha_1}, \\ \mathcal{A}_{tp}(X_{\text{eq}}) = \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1 - 1}{\alpha_1} \right) T, & \mathcal{A}_{tt}(X_{\text{eq}}) = \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\alpha_2} + \frac{\gamma_1 - 1}{\alpha_1} \right) \frac{T}{P}. \end{cases}$$

Ces différents coefficients thermodynamiques satisfont les relations (5.5). La stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipitesse est donc vérifiée pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases.

En résumé, plusieurs travaux ont été menés dans cette section qui vise à caractériser les transferts interfaciaux pour les écoulements diphasiques sans transition de phase. Suivant les travaux de Dellacherie [32], on a successivement établi l'existence puis la stabilité linéaire et non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipitesse. On cherche maintenant à appliquer cette démarche à l'étude des transferts interfaciaux pour les écoulements liquide-vapeur.

## 5.2 Dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements en transition de phase

Dans cette section, on cherche à caractériser les interactions entre un liquide et sa vapeur. Lors de la fermeture du modèle bifluide à deux pressions, plusieurs modèles de relaxation ont été proposés pour clore les interactions diphasiques. Cet ensemble de fermetures s'avère particulièrement nouveau en ce qui concerne la modélisation du transfert de masse par un terme de relaxation entre les potentiels de changement de phase. A cette occasion, on rappelle pour  $k = 1, 2$ , la définition du potentiel de Gibbs  $g_k$  et du potentiel de changement de phase  $\theta_k$  :

$$\forall k = 1, 2, \quad g_k = e_k + P_k \tau_k - T_k s_k, \quad \theta_k = g_k - \frac{(u_k - V_i)^2}{2}.$$

Comme précédemment, soit  $\rho = \sum_k m_k$ ,  $\rho V = \sum_k m_k u_k$ ,  $\rho E = \sum_k m_k E_k$  respectivement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale du mélange. Dans ce contexte, le système (5.1) décrivant la dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements diphasiques en transition de phase se réécrit

$$\begin{cases} d_t \rho = 0, & d_t \rho V = 0, & d_t \rho E = 0, \\ d_t \alpha_2 = K_P (P_2 - P_1), \\ d_t m_2 = K_\theta (\theta_1 - \theta_2), \\ d_t m_2 u_2 = K_U (u_1 - u_2) + K_\theta (\theta_1 - \theta_2) V_i, \\ d_t m_2 E_2 = K_P (P_1 - P_2) P_i + K_U (u_1 - u_2) V_i + K_\theta (\theta_1 - \theta_2) E_i + K_T (T_1 - T_2). \end{cases} \quad (5.6)$$

Suivant la même démarche que pour les écoulements liquide-gaz à la section précédente, on étudie dans cette section l'existence puis la stabilité des équilibres liquide-vapeur.

### 5.2.1 Equilibres et contraintes pour les écoulements diphasiques en transition de phase

Au chapitre 3, diverses modélisations ont été proposées pour les coefficients d'échange. Ces modélisations associent les coefficients d'échange à des fonctions strictement positives sur l'espace admissible  $\Omega$ . Les équilibres du système (5.6) s'identifient alors à la variété isobare isotherme équipotentielle équipitesse

$$\mathbb{E}_{GPTU} = \{W \in \mathbb{R}^7 / P_1 = P_2, \quad T_1 = T_2, \quad g_1 = g_2, \quad u_1 = u_2\}.$$

Plusieurs contraintes associées aux grandeurs de mélange caractérisent par ailleurs l'évolution des solutions pour le système (5.6) :

$$\sum_k m_k(W) = \rho, \quad \sum_k m_k u_k(W) = \rho V, \quad \sum_k m_k E_k(W) = \rho E. \quad (5.7)$$

On se demande alors dans quelle mesure équilibres et contraintes sont compatibles. Ce paragraphe s'intéresse donc à la résolution du système algébrique (5.7) sur la variété d'équilibre  $\mathbb{E}_{GPTU}$ .

Dans un cadre général, ce problème de la compatibilité des contraintes (5.7) avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse n'admet pas de solution. Un tel problème est surcontraint. Trois contraintes caractérisent effectivement la préservation des grandeurs de mélange. Ces trois contraintes doivent cependant satisfaire quatre relations d'équilibre. Le système algébrique (5.7) n'admet donc généralement pas de solution sur la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$ . Dans un cadre général, cette situation est normale puisqu'un changement de phase n'apparaît pas entre deux fluides quelconques. Une telle transition de phase n'apparaît qu'entre un liquide et sa vapeur dont les lois d'état ne peuvent pas être choisies indépendamment. Sous la forme d'une relation de compatibilité entre les deux lois d'état utilisées dans chaque phase, l'hypothèse 2 nous a permis d'assurer l'existence d'un équilibre triple isobare isotherme équipotentiel au sein des mélanges liquide-vapeur. Sous cette hypothèse, la compatibilité des contraintes (5.7) avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse est établie dans cette section. Comme pour les écoulements sans transition de phase, cette compatibilité de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse avec les contraintes (5.7) découle d'une procédure d'optimisation appliquée à l'entropie spécifique du modèle bifluide à sept équations. Un tel résultat étend au cadre bifluide moyenné les travaux réalisés par Barberon, Helluy [10] et Caro [20] dans le cadre de la simulation directe.

Pour une masse de mélange strictement positive, rappelons tout d'abord la définition du volume spécifique de mélange  $\tau = 1/\rho$ . De manière analogue à la section précédente, les fractions massiques, énergétiques et cinématiques de chaque phase sont définies pour  $k = 1, 2$ , par les relations

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{m_k}{\rho} = \frac{\alpha_k \tau}{\tau_k} \longrightarrow \sum_k x_k = 1, \\ y_k &= \frac{m_k E_k}{\rho} = x_k E_k \longrightarrow \sum_k y_k = E, \\ q_k &= \frac{m_k u_k}{\rho} = x_k u_k \longrightarrow \sum_k q_k = V. \end{aligned}$$

À l'inverse des écoulements sans transition de phase, les fractions massiques ne s'identifient plus à des invariants pour le système (5.6). Pour  $k = 1, 2$ , rappelons la définition des fonctions  $\sigma_k$  introduites à la proposition 1 :

$$\sigma_k : (\tau_k, E_k, u_k) \longrightarrow s_k \left( \tau_k, E_k - \frac{u_k^2}{2} \right).$$

Sous l'hypothèse 1, le domaine de définition de ces fonctions s'identifie à l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\tau_k, E_k, u_k)} = \{(\tau_k, E_k, u_k) / \tau_k > 0, P_k(\tau_k, E_k - u_k^2/2) > 0\}$ . Ces fonctions  $\sigma_k$  sont strictement concaves de matrice hessienne définie négative sur  $\mathcal{D}_{(\tau_k, E_k, u_k)}$ . Dans le cadre des écoulements en transition de phase, on redéfinit le vecteur des fractions  $Z = (\alpha_2, y_2, q_2, x_2)^t$ . De manière analogue aux écoulements sans transfert de masse, on introduit alors à partir de l'entropie spécifique de mélange  $\eta/\rho = \sum_k x_k s_k$  la fonction

$$\Phi_{(\tau, E, V)} : Z \longrightarrow x_2 \sigma_2 \left( \frac{\alpha_2 \tau}{x_2}, \frac{y_2}{x_2}, \frac{q_2}{x_2} \right) + (1 - x_2) \sigma_1 \left( \frac{(1 - \alpha_2) \tau}{1 - x_2}, \frac{E - y_2}{1 - x_2}, \frac{V - q_2}{1 - x_2} \right).$$

Sous l'hypothèse 1, cette fonction  $\varphi_{(\tau,E,V)}$  est définie sur l'ouvert

$$\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)} = \left\{ Z \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha_2 \in ]0, 1[, x_2 \in ]0, 1[, P_2 \left( \frac{\alpha_2 \tau}{x_2}, \frac{y_2}{x_2} - \frac{q_2^2}{2x_2^2} \right) > 0, \right. \\ \left. P_1 \left( \frac{(1-\alpha_2)\tau}{1-x_2}, \frac{E-y_2}{1-x_2} - \frac{(V-q_2)^2}{2(1-x_2)^2} \right) > 0 \right\}.$$

Comme précédemment, on note  $\overline{\mathcal{D}}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$  l'adhérence de cet ouvert et  $\partial\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$  sa frontière. La proposition 13 résume les propriétés de la fonction  $\varphi_{(\tau,E,V)}$ .

**Proposition 13.** *Dans le cadre des hypothèses 1 et 2, on considère des lois d'état et des invariants  $(\tau, E, V)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$  soit un ouvert convexe, borné, de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^4$ . Sous les hypothèses 1 et 2, la fonction  $\varphi_{(\tau,E,V)}(Z)$  est strictement concave sur  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$ .*

**Démonstration.** Soit  $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)^t$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^4$ . Pour  $k = 1, 2$ , on définit le vecteur

$$B_k = \begin{bmatrix} \tau \left( A_1 - \frac{\alpha_k}{x_k} A_4 \right) \\ \left( A_2 - \frac{y_k}{x_k} A_4 \right) \\ \left( A_3 - \frac{q_k}{x_k} A_4 \right) \end{bmatrix}.$$

Sous l'hypothèse 1, la proposition 1 assure le caractère négatif de la forme quadratique

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}, \quad \left( \nabla^2 \varphi_{(\tau,E,V)} \cdot A, A \right) = \sum_k \frac{1}{x_k} \left( \nabla^2 \sigma_k \cdot B_k, B_k \right).$$

Sous l'hypothèse 2, les volumes spécifiques respectivement associés à un liquide et sa vapeur sont toujours différents :  $\tau_1 \neq \tau_2$ . Sous les hypothèses 1 et 2, la matrice hessienne  $\nabla^2 \varphi_{(\tau,E,V)}$  est alors définie négative. La fonction  $\varphi_{(\tau,E,V)}$  est donc strictement concave sur le domaine  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$ . ■

De manière analogue aux écoulements sans transition de phase, la fonction  $\varphi_{(\tau,E,V)}(Z)$  construite à partir de l'entropie spécifique de mélange est strictement concave sur son domaine de définition. A l'inverse des écoulements sans transition de phase, cette fonction  $\varphi_{(\tau,E,V)}$  présente cependant un comportement différent au voisinage de la frontière associée à son domaine de définition. Il existe des points frontières pour lesquels la limite de la fonction  $\varphi_{(\tau,E,V)}$  est finie. Intéressons-nous par exemple aux points frontières  $Z_1 = (0, 0, 0, 0)^t$  et  $Z_2 = (1, E, V, 1)^t$ . Pour ces points frontières non-admissibles situés dans des domaines monophasiques, on détermine aisément les limites

$$\lim_{Z \rightarrow Z_1} \varphi_{(\tau,E,V)}(Z) = s_1 \left( \tau, E - \frac{V^2}{2} \right), \quad \lim_{Z \rightarrow Z_2} \varphi_{(\tau,E,V)}(Z) = s_2 \left( \tau, E - \frac{V^2}{2} \right).$$

Au vue de ce comportement différent de la fonction  $\varphi_{(\tau,E,V)}$  au voisinage de la frontière  $\partial\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$ , on définit alors sur l'adhérence  $\overline{\mathcal{D}}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$  le prolongement par continuité

$$\overline{\varphi}_{(\tau,E,V)} : Z \longrightarrow \begin{cases} \varphi_{(\tau,E,V)}(Z) & \text{si } Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}, \\ \lim_{Z' \rightarrow Z} \varphi_{(\tau,E,V)}(Z') & \text{si } Z \in \partial\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}. \end{cases}$$

On cherche maintenant à déterminer les extrema de cette fonction  $\overline{\varphi}_{(\tau,E,V)}$ . A la différence des écoulements sans transition de phase, un tel maximum peut être identifié soit sur la frontière, soit à l'intérieur du fermé  $\overline{\mathcal{D}}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$ . Si ce maximum est atteint à l'intérieur de l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$ , il correspond à un état d'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Un tel résultat assure la compatibilité de l'équilibre liquide-vapeur avec les contraintes (5.7) dans l'espace admissible. Ce résultat est présenté au théorème 4.

**Théorème 4.** Dans le cadre des hypothèses 1 et 2, on considère des lois d'état et des invariants  $(\tau, E, V)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$  soit un ouvert convexe, borné, de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^4$ . Sous les hypothèses 1 et 2, la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau, E, V)}$  admet un unique maximum dans  $\bar{\mathcal{D}}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$ . Si ce maximum est atteint sur la frontière  $\partial\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$ , ce maximum n'est pas admissible. Le système algébrique des contraintes (5.7) n'admet pas de solution isobare isotherme équipotentielle équivitesse admissible. Si ce maximum est atteint à l'intérieur de l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$ , il s'agit d'un état d'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse admissible. Ce maximum est l'unique solution isobare isotherme équipotentielle équivitesse admissible du système algébrique des contraintes (5.7).

**Démonstration.** Sous les hypothèses 1 et 2, la stricte concavité de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau, E, V)}(Z)$  sur l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$  a été montrée à la proposition 13. Sur le fermé  $\bar{\mathcal{D}}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$ , la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau, E, V)}$  admet donc un unique maximum. Deux cas se présentent suivant que ce maximum est atteint sur la frontière ou à l'intérieur du domaine  $\bar{\mathcal{D}}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$ . Si l'unique maximum de la fonction de  $\bar{\varphi}_{(\tau, E, V)}$  est atteint sur la frontière  $\partial\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$ , ce maximum n'est pas admissible. Le système des contraintes (5.7) n'admet alors pas de solution isobare isotherme équipotentielle équivitesse admissible. Si l'unique maximum de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau, E, V)}$  est atteint à l'intérieur de l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$ , ce maximum est dès lors admissible. Un tel maximum annule le gradient de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau, E, V)}$  :

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}, \quad \nabla \bar{\varphi}_{(\tau, E, V)} = \begin{bmatrix} \tau \sum_k (-1)^k \frac{\partial \sigma_k}{\partial \tau_k} \\ \sum_k (-1)^k \frac{\partial \sigma_k}{\partial E_k} \\ \sum_k (-1)^k \frac{\partial \sigma_k}{\partial u_k} \\ \sum_k (-1)^k \left( \sigma_k - \tau_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial \tau_k} - E_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial E_k} - u_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial u_k} \right) \end{bmatrix}.$$

Sous l'hypothèse 1, les différentes dérivées partielles intervenant dans ce gradient s'écrivent

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}, \quad \forall k = 1, 2, \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial \tau_k} = \frac{P_k}{T_k}, \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial E_k} = \frac{1}{T_k}, \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial u_k} = -\frac{u_k}{T_k}.$$

Pour  $k = 1, 2$ , on rappelle par ailleurs la définition du potentiel de Gibbs  $g_k = e_k + P_k \tau_k - T_k s_k$ . Sous l'hypothèse 2, le gradient de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau, E, V)}$  s'annule donc à l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Si l'unique maximum de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau, E, V)}$  est atteint à l'intérieur de l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \gamma_2, q_2, x_2)}$ , cet unique maximum s'identifie alors à un état d'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse admissible. Un tel maximum est l'unique état d'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse compatible avec les invariants  $(\tau, E, V)$ . Il est donc l'unique solution isobare isotherme équipotentielle équivitesse admissible du système algébrique des contraintes (5.7). ■

En résumé, suivant les travaux de Barberon, Helluy [10] et Caro [20], la compatibilité des contraintes (5.7) avec l'équilibre liquide-vapeur a été étudiée dans cette section. A la différence des écoulements sans transition de phase, le système des contraintes n'admet pas toujours une solution sur la variété d'équilibre associée au système dynamique (5.6). Cette incompatibilité entre équilibre et contraintes du système dynamique (5.6) résulte soit d'une disparition de phase, soit d'une apparition de vide. La modélisation bifluide n'est alors plus adaptée pour décrire ces phénomènes. Dans l'espace admissible  $\Omega$ , la compatibilité des contraintes (5.7) avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse a cependant été établie de manière analogue aux écoulements sans transition de phase. Cette compatibilité des contraintes (5.7) avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse ne dépend pas de la modélisation retenue pour les transferts interfaciaux. Certaines conditions thermodynamiques doivent cependant être vérifiées en ce qui concerne les lois d'état utilisées dans chaque phase. Pour décrire le mélange liquide-vapeur, les hypothèses 1 et 2 doivent être satisfaites. Dans ce cadre, l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse est conditionnellement admissible. Cette admissibilité conditionnelle de l'équilibre liquide-vapeur est illustrée à l'exemple 5.

**Exemple 5.** Soit  $\rho > 0$ ,  $E, V$  les invariants du système (5.6) tels que  $\varepsilon = E - V^2/2 > 0$ . Une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans chaque phase. On impose les coefficients thermodynamiques  $\gamma_1 > \gamma_2 > 1$  et  $C_{v_1} > C_{v_2} > 0$ . Ces deux lois d'état vérifient simultanément les hypothèses 1 et 2. Le système algébrique des contraintes (5.7) admet alors une unique solution isobare isotherme équipotentielle équivitesse sur la variété d'équilibre  $\mathbb{E}_{GPTU}$ . Cette unique solution isobare  $P_1 = P_2 = P$ , isotherme  $T_1 = T_2 = T$ , équipotentielle et équivitesse  $u_1 = u_2 = u$  s'exprime implicitement

$$\begin{cases} u &= V, \\ P(T) &= \left[ \frac{[(\gamma_1 - 1)C_{v_1}]^{\gamma_1 C_{v_1}}}{[(\gamma_2 - 1)C_{v_2}]^{\gamma_2 C_{v_2}}} (e^{-1}T)^{\gamma_1 C_{v_1} - \gamma_2 C_{v_2}} \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1)C_{v_1} - (\gamma_2 - 1)C_{v_2}}}, \\ \alpha_2(T) &= \frac{T}{P(T)} \left( \rho - \frac{P(T)}{(\gamma_1 - 1)C_{v_1}T} \right) \left( \frac{1}{(\gamma_2 - 1)C_{v_2}} - \frac{1}{(\gamma_1 - 1)C_{v_1}} \right)^{-1}, \end{cases}$$

où la température d'équilibre est l'unique solution de l'équation

$$\rho \left( \frac{1}{\gamma_2 - 1} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right) T + \frac{1}{(\gamma_2 - 1)(\gamma_1 - 1)} \left( \frac{1}{C_{v_2}} - \frac{1}{C_{v_1}} \right) P(T) - \rho \varepsilon \left( \frac{1}{C_{v_2}(\gamma_2 - 1)} - \frac{1}{C_{v_1}(\gamma_1 - 1)} \right) = 0.$$

Cet unique état d'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse est admissible à la condition que les invariants du système (5.6) satisfassent les relations

$$\varepsilon = E - \frac{V^2}{2} > 0, \quad \text{et} \quad \frac{P(T)}{(\gamma_1 - 1)C_{v_1}T} < \rho < \frac{P(T)}{(\gamma_2 - 1)C_{v_2}T}.$$

La première contrainte prévient l'apparition du vide. La seconde définit les frontières du domaine diphasique.

### 5.2.2 Stabilité non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse pour les écoulements diphasiques en transition de phase

A la section précédente, la compatibilité des contraintes (5.7) avec l'équilibre liquide-vapeur vient d'être établie sous les hypothèses 1 et 2. On cherche maintenant à caractériser la stabilité de cet équilibre. Dans cette optique, on construit comme pour les écoulements sans transition de phase une fonction de Lyapunov pour le système (5.6). On établit ensuite la convergence des trajectoires associées au système (5.6) sur la variété d'équilibre  $\mathbb{E}_{GPTU}$ .

A partir de l'entropie spécifique de mélange  $\eta/\rho$ , une fonction  $\bar{\Phi}_{(\tau, E, V)}$  a été introduite à la section précédente. De manière analogue aux écoulements sans transition de phase, cette fonction  $\bar{\Phi}_{(\tau, E, V)}$  s'identifie à une fonction de Lyapunov pour le système (5.6). Un tel résultat est présenté à la proposition 14.

**Proposition 14.** Dans le cadre des hypothèses 1 et 2, on considère des lois d'état et des invariants  $(\tau, E, V)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2, x_2)}$  soit un ouvert convexe, borné, de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^4$ . Sous les hypothèses 1 et 2, on suppose les contraintes (5.7) compatibles avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Sous les hypothèses 1 et 2, la fonction  $\bar{\Phi}_{(\tau, E, V)}$  est une fonction de Lyapunov pour le système dynamique (5.6).

**Démonstration.** Soit  $Z = (\alpha_2, y_2, q_2, x_2)^t$  le vecteur des fractions. Sous les hypothèses 1 et 2, la proposition 13 a identifié la fonction  $\bar{\Phi}_{(\tau, E, V)}(Z)$  à une fonction strictement concave sur le domaine  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2, x_2)}$ . Cette fonction strictement concave admet un unique maximum  $Z_{\text{eq}}$  dans le fermé  $\bar{\mathcal{D}}_{(\alpha_2, y_2, q_2, x_2)}$ . On suppose ici cet unique maximum tel que les contraintes (5.7) soient compatibles avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Cet unique maximum admissible se situe donc à l'intérieur de l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2, x_2)}$ . Cet unique maximum admissible correspond à un état d'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse.

Suivant le travail effectué au chapitre 3, les variations temporelles de la fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V)}$  s'écrivent pour tout  $Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2, \nu_2, q_2, x_2)}$ ,

$$\frac{d\bar{\varphi}_{(\tau,E,V)}}{dt}(Z) = \frac{1}{\rho} \left[ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) D_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k \right].$$

Pour notre modélisation des transferts interfaciaux, ces variations temporelles satisfont les relations

$$\forall Z \in \mathcal{D}_{(\alpha_2, \nu_2, q_2, x_2)} - \{Z_{\text{eq}}\}, \quad \frac{d\bar{\varphi}_{(\tau,E,V)}}{dt}(Z) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{\varphi}_{(\tau,E,V)}}{dt}(Z_{\text{eq}}) = 0.$$

La fonction  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V)}$  est donc une fonction de Lyapunov pour le système (5.6). ■

Muni de la fonction de Lyapunov  $\bar{\varphi}_{(\tau,E,V)}$  pour le système (5.6), la stabilité non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur peut maintenant être établie. Cette stabilité de non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur est détaillée au théorème 5. Comme pour les écoulements sans transfert de masse, la démonstration de ce résultat s'appuie sur l'application du théorème de Lyapunov.

**Théorème 5.** *Dans le cadre des hypothèses 1 et 2, on considère des lois d'état et des invariants  $(\tau, E, V)$  tels que l'ensemble  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, \nu_2, q_2, x_2)}$  soit un ouvert convexe, borné, de mesure non-nulle dans  $\mathbb{R}^4$ . Sous les hypothèses 1 et 2, on suppose les contraintes (5.7) compatibles avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Sous les hypothèses 1 et 2, toute trajectoire bornée du système dynamique (5.6) évoluant dans l'espace admissible  $\Omega$  converge vers l'unique solution isobare isotherme équipotentielle équivitesse admissible du système algébrique des contraintes (5.7).*

De manière analogue aux écoulements sans transition de phase, le théorème 5 traduit une réorganisation spontanée du mélange diphasique qui tend à faire disparaître les inhomogénéités entre le liquide et sa vapeur. La stabilité de cet équilibre liquide-vapeur ne dépend alors ni de la modélisation retenue pour les coefficients d'échange ou les grandeurs interfaciales, ni des lois d'état utilisées pour décrire le mélange diphasique dans le cadre des hypothèses 1 et 2. A ce stade, on ne dispose cependant d'aucun résultat d'admissibilité en ce qui concerne les trajectoires du système dynamique (5.6). Ce problème de l'admissibilité des trajectoires associées au système (5.6) se pose tout particulièrement à proximité des frontières délimitant l'espace admissible  $\Omega$ . Certaines de ces trajectoires peuvent a priori sortir du domaine d'admissibilité. Pour appliquer le théorème de Lyapunov, on a alors été amené à supposer les solutions du système (5.6) bornées dans  $\Omega$ . On s'intéresse par la suite à la validité de cette hypothèse. Pour caractériser la dynamique des transferts interfaciaux, la stabilité linéaire de l'équilibre liquide-vapeur est étudiée en conséquence à la prochaine section.

**Remarque 11.** *Au théorème 5, la stabilité non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse a été établie dans l'espace admissible  $\Omega$ . A la différence des écoulements sans transition de phase, ce théorème n'assure pas l'admissibilité des trajectoires associées au système dynamique (5.6). En ce qui concerne les fractions volumiques, certaines trajectoires peuvent sortir de l'ouvert  $]0, 1[$ . Le théorème 5 nous apparaît dès lors comme un résultat relativement faible. Ce résultat n'assure pas l'admissibilité inconditionnelle des solutions associées au système (5.6). Au voisinage des frontières associées à l'espace admissible, certaines trajectoires du système (5.6) peuvent sortir de l'espace admissible  $\Omega$  pour pénétrer des domaines monophasiques ou des zones de vide à l'intérieur desquels les transferts interfaciaux ne sont plus définis. En ce qui concerne les fractions volumiques, ceci constitue une différence essentielle par rapport aux modèles utilisés en simulation directe par Caro [20], Allaire, Faccanoni et Kokh [2] pour lesquels la procédure d'optimisation est définie sur l'ensemble du fermé  $[0, 1]$ . En l'état actuel, les modèles bifluïdes ne peuvent donc sûrement pas décrire une apparition ou une disparition de phase. Pour décrire ces phénomènes, on pourrait envisager le couplage des modèles bifluïdes avec des systèmes monophasiques de type Euler. Un tel travail sort néanmoins du cadre de cette thèse.*

### 5.2.3 Stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse pour les écoulements diphasiques en transition de phase

Dans l'étude des transferts interfaciaux pour les écoulements en transition de phase, l'idéal serait de caractériser les solutions du système (5.6) sur l'ensemble de leur trajectoire. De même que nous disposons

d'un résultat global de stabilité non-linéaire pour l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse, nous pourrions alors disposer d'un résultat global d'admissibilité pour les solutions du système (5.6). Ce résultat s'avère néanmoins extrêmement difficile à établir. Un tel résultat dépend fortement des modélisations retenues pour les coefficients d'échange interfaciaux. Seuls quelques rares résultats d'admissibilité partielle existent dans la littérature. Dans [42], Gallouët, Hérard et Seguin définissent par exemple un coefficient d'échange  $K_P$  qui assure le principe du maximum pour les fractions volumiques. Par souci de généralité, nous choisissons de ne pas étendre de tels résultats à de nouveaux cas particuliers. En vue de nos applications à la simulation des écoulements liquide-vapeur faiblement déséquilibrés, nous nous restreignons dans ce qui suit à la caractérisation des solutions du système (5.6) au voisinage de la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$ . Dans cette section, on cherche à caractériser l'évolution des écarts à l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Une telle étude nous permet d'assurer successivement la stabilité linéaire de l'équilibre liquide-vapeur puis l'admissibilité des trajectoires associées au système (5.6) à proximité de la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$ .

Soit  $\Delta u = u_2 - u_1$ ,  $\Delta P = P_2 - P_1$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1$ ,  $\Delta g = g_2 - g_1$  respectivement l'écart de vitesse, de pression, de température et de potentiel de Gibbs entre les phases. Soit  $X = (\rho, E, V, \Delta u, \Delta P, \Delta T, \Delta g)^t$ . Pour étudier l'évolution des écarts à l'équilibre  $\Delta u, \Delta P, \Delta T, \Delta g$ , plusieurs coefficients thermodynamiques sont introduits à la figure 5.1. Ces différents coefficients thermodynamiques interviennent dans la réécriture du système dynamique (5.6) en variable  $X$  :

$$\begin{cases} d_t \rho = 0, & d_t V = 0, & d_t E = 0, \\ d_t \Delta u = -(K_U \mathcal{A}_{uu} + K_\theta \mathcal{A}_{u\theta} \mathcal{A}) \Delta u - K_\theta \mathcal{A}_{u\theta} \Delta g, \\ d_t \Delta P = -(K_U \mathcal{A}_{pu} + K_\theta \mathcal{A}_{p\theta} \mathcal{A}) \Delta u - K_P \mathcal{A}_{pp} \Delta P - K_T \mathcal{A}_{pt} \Delta T - K_\theta \mathcal{A}_{p\theta} \Delta g, \\ d_t \Delta T = -(K_U \mathcal{A}_{tu} + K_\theta \mathcal{A}_{t\theta} \mathcal{A}) \Delta u - K_P \mathcal{A}_{tp} \Delta P - K_T \mathcal{A}_{tt} \Delta T - K_\theta \mathcal{A}_{t\theta} \Delta g, \\ d_t \Delta g = -(K_U \mathcal{A}_{\theta u} + K_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta} \mathcal{A}) \Delta u - K_P \mathcal{A}_{\theta p} \Delta P - K_T \mathcal{A}_{\theta t} \Delta T - K_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta} \Delta g. \end{cases} \quad (5.8)$$

Pour étudier l'évolution des écarts à l'équilibre au voisinage de la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$ , on effectue comme pour les écoulements sans transition de phase la linéarisation du système (5.8) au voisinage de l'équilibre liquide-vapeur. Soit  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{GPTU}$ . Soit  $\mathcal{A}_{GPTU}$  la matrice

$$\mathcal{A}_{GPTU} = \begin{bmatrix} -(K_U \mathcal{A}_{uu} + K_\theta \mathcal{A}_{u\theta} \mathcal{A}) & 0 & 0 & -K_\theta \mathcal{A}_{u\theta} \\ -(K_U \mathcal{A}_{pu} + K_\theta \mathcal{A}_{p\theta} \mathcal{A}) & -K_P \mathcal{A}_{pp} & -K_T \mathcal{A}_{pt} & -K_\theta \mathcal{A}_{p\theta} \\ -(K_U \mathcal{A}_{tu} + K_\theta \mathcal{A}_{t\theta} \mathcal{A}) & -K_P \mathcal{A}_{tp} & -K_T \mathcal{A}_{tt} & -K_\theta \mathcal{A}_{t\theta} \\ -(K_U \mathcal{A}_{\theta u} + K_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta} \mathcal{A}) & -K_P \mathcal{A}_{\theta p} & -K_T \mathcal{A}_{\theta t} & -K_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta} \end{bmatrix}.$$

En  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{GPTU}$ , le problème linéarisé associé au système (5.8) s'écrit suivant le théorème d'Hartman et Grobman [87]

$$d_t (X - X_{\text{eq}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{GPTU}(X_{\text{eq}}) \end{pmatrix} \cdot (X - X_{\text{eq}}).$$

La stabilité linéaire de l'équilibre liquide-vapeur est alors conditionnellement établie à la proposition 15.

**Proposition 15.** *Soit  $r > 0$ . Soit  $\rho > 0, E, V$  les invariants du système (5.8). Dans les régimes diphasiques, soit  $X_{\text{eq}} = (\rho, E, V, 0, 0, 0, 0)^t \in \mathbb{E}_{GPTU}$  l'unique solution isobare isotherme équipotentielle équivitesse admissible du système algébrique des contraintes (5.7). Soit  $\mathcal{B}(X_{\text{eq}}, r)$  la boule centrée en  $X_{\text{eq}}$  de rayon  $r$ . On suppose la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}(X_{\text{eq}})$  définie négative. Soit  $X(0) = (\rho, E, V, \Delta u(0), \Delta P(0), \Delta T(0), \Delta g(0))^t \in \mathcal{B}(X_{\text{eq}}, r)$  une condition initiale admissible au système (5.8) située dans un voisinage de  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{GPTU}$ . La solution du problème linéarisé associé au système (5.4) est bornée :*

$$\forall r > 0, \quad \exists M > 0 \quad / \quad \forall t \geq 0, \quad X(t) - X_{\text{eq}} \in \mathcal{B}(X_{\text{eq}}, Mr).$$

*Cette solution bornée préserve les invariants  $\rho, E, V$ . Cette solution bornée converge vers  $X_{\text{eq}}$ .*



**Démonstration.** Soit  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{GPTU}$ . La démonstration de la proposition 15 s'appuie sur l'étude du spectre associé à la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}(X_{\text{eq}})$ . La matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}(X_{\text{eq}})$  a été supposée définie négative. L'état d'équilibre  $X_{\text{eq}} \in \mathbb{E}_{GPTU}$  est donc asymptotiquement stable. Ce dernier point conclut la démonstration de la proposition 15. ■

La proposition 15 est un résultat nouveau. En complément de la stabilité non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur, cette proposition caractérise une disparition rapide des inhomogénéités entre les phases à proximité de la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$ . En conséquence, étant donnée une condition initiale admissible située à proximité de la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$  et à distance des frontières associées à l'espace admissible  $\Omega$ , la solution du système (5.6) est continûment admissible. Cette solution bornée converge rapidement vers l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Ce résultat de stabilité linéaire constitue notre interprétation mathématique du faible écart à la saturation que semble préconiser Lhuillier [78] pour les écoulements liquide-vapeur. Un tel résultat est indépendant des modélisations retenues pour les grandeurs interfaciales. Ce résultat semble néanmoins dépendre de la modélisation adoptée pour les coefficients d'échange  $K_P$ ,  $K_U$ ,  $K_T$ ,  $K_\theta$ . Ce résultat dépend en tous les cas des lois d'état utilisées dans chaque phase. Comme le spectre de la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}$  ne peut pas être déterminé analytiquement, nous sommes donc amenés à étudier numériquement la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Pour la modélisation particulière (3.9) des coefficients d'échange, la stabilité linéaire de certains équilibres isobares isothermes équipotentiels équivitesses est alors numériquement vérifiée à l'exemple 6 pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases.

**Exemple 6.** *A la proposition 15, pour établir la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse, on a supposé la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}$  définie négative le long de la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$ . Le spectre de la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}$  ne peut pas être déterminé analytiquement. Dans cet exemple, on vérifie donc numériquement le caractère défini négatif de cette matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}$  pour certains équilibres isobares isothermes équipotentiels équivitesses. Pour décrire le mélange diphasique, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans chaque phase. On impose les coefficients thermodynamiques*

$$\gamma_1 = 1.4, \quad C_{v1} = 2 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \quad \gamma_2 = 1.2, \quad C_{v2} = 1 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

*Ces deux lois d'état vérifient simultanément les hypothèses 1 et 2. Divers coefficients thermodynamiques  $\mathcal{A}_{uu}$ ,  $\mathcal{A}_{pp}$ ,  $\mathcal{A}_T$ ,  $\mathcal{A}_{\theta\theta}$  ont par ailleurs été introduits à la figure 5.1. Ces coefficients thermodynamiques interviennent dans la définition (3.9) des coefficients d'échange :*

$$K_U = \frac{1}{\tau_U \mathcal{A}_{uu}}, \quad K_P = \frac{1}{\tau_P \mathcal{A}_{pp}}, \quad K_T = \frac{1}{\tau_T \mathcal{A}_T}, \quad K_\theta = \frac{1}{\tau_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta}}. \quad (3.9)$$

*Dans cette modélisation (3.9) des coefficients d'échange, les échelles de temps  $\tau_U$ ,  $\tau_P$ ,  $\tau_T$ ,  $\tau_\theta$  caractérisent le retour à l'équilibre des vitesses, des pressions, des températures et des potentiels. Suivant l'analyse bibliographique menée à la section 3.4, ces échelles de temps sont identifiées à des constantes de l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s :*

$$\tau_U = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_P = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_T = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_\theta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

*Pour ces lois d'état et cette définition particulière des coefficients d'échange, le spectre de la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}$  le long de deux variétés d'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse est reporté dans les tableaux 5.1 et 5.2. Le spectre de la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}$  est toujours réel. Ce spectre est toujours strictement négatif. Pour une modélisation (3.9) des coefficients d'échange, la stabilité linéaire de certains équilibres isobares isothermes équipotentiels équivitesses est donc vérifiée pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases. Cette propriété a similairement été établie pour différentes échelles de temps  $\tau_U$ ,  $\tau_P$ ,  $\tau_T$ ,  $\tau_\theta$  dans l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s.*

Pour conclure, différents résultats ont été obtenus dans ce chapitre pour décrire la dynamique des transferts interfaciaux associés au modèle bifluide à deux pressions. Certains de ces résultats existaient déjà en ce qui concerne les écoulements sans transfert de masse. Les autres sont nouveaux. Ils constituent notre

---

contribution à l'étude des transferts interfaciaux pour les écoulements liquide-vapeur. En ce qui concerne les écoulements sans transfert de masse, les résultats obtenus par Dellacherie [32] ont tout d'abord été rappelés. Ces résultats stipulent l'existence et la stabilité non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotesse pour les écoulements liquide-gaz. On a par la suite montré l'admissibilité des trajectoires associées au système dynamique (5.1) puis la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotesse. Cette stabilité linéaire nous a permis de conclure à un retour à l'équilibre rapide des écoulements diphasiques sans transfert de masse. En ce qui concerne l'étude des transferts interfaciaux pour les écoulements liquide-vapeur, une démarche similaire a été suivie dans le contexte de la transition de phase. L'existence d'un équilibre isobare isotherme équipotentiel équipotesse a tout d'abord été montrée. Les stabilités linéaire et non-linéaire de cet équilibre liquide-vapeur ont ensuite été établies dans les régimes diphasiques. La stabilité linéaire de l'équilibre liquide-vapeur nous a ensuite permis d'assurer l'admissibilité des trajectoires à distance des domaines monophasiques. La modélisation (3.9) des coefficients d'échange a simultanément été justifiée. En présence de déséquilibres entre un liquide et sa vapeur, ce type de modélisation nous a permis d'assurer un retour à la saturation rapide du mélange diphasique. A la suite des travaux réalisés par Dellacherie dans [32], une approche par système dynamique a toujours été privilégiée dans ce chapitre pour décrire la dynamique des transferts interfaciaux. En regard des procédures d'optimisation généralement utilisées dans la littérature [10, 20, 2], cette approche nous a permis d'apporter un éclairage différent sur la transition de phase. Cette approche par système dynamique décrit continûment l'évolution des déséquilibres entre un liquide et sa vapeur. Cette approche pose néanmoins problème lorsqu'on touche aux frontières de l'espace admissible. Certaines trajectoires peuvent pénétrer des domaines monophasiques ou des zones de vide. Qu'il s'agisse d'une apparition de vide ou d'une disparition de phase, nous aurions alors tendance à considérer que l'approche bifluide n'est plus adaptée.

Figure 5.1: quelques coefficients thermodynamiques utiles à la définition des systèmes dynamiques (5.4) et (5.8).

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\frac{1}{2} \left[ \beta (u_2 - V_i) + (1 - \beta) (u_1 - V_i) \right], & \mathcal{A}_{uu} &= \sum_k \frac{1}{m_k}, & \mathcal{A}_{u\theta} &= \sum_k \frac{V_i - u_k}{m_k}, \\
\mathcal{A}_{pp} &= \sum_k \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & \mathcal{A}_{pu} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), \\
\mathcal{A}_{pt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, & \mathcal{A}_{p\theta} &= \sum_k \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{m_k} - \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k), \\
\mathcal{A}_{tp} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), \\
\mathcal{A}_{tt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, & \mathcal{A}_{tu} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), \\
\mathcal{A}_{t\theta} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] - \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k), \\
\mathcal{A}_{\theta p} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), \\
\mathcal{A}_{\theta t} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, & \mathcal{A}_{\theta u} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), \\
\mathcal{A}_{\theta\theta} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] - \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k).
\end{aligned}$$

Tableau 5.1: spectre de la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}$  le long de la variété isobare isotherme équipotentielle équivitesse  
 $P_1 = P_2 = 633337 \text{ Pa}$ ,  $T_1 = T_2 = 180 \text{ K}$ ,  $g_1 = g_2 = -77.1248 \text{ J.kg}^{-1}$ ,  $u_1 = u_2 = 0 \text{ m.s}^{-1}$ .

$\alpha_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.001	-4166.373252	-1.470348778	-1832.156399	-500.
0.05	-4107.688204	-53.51793892	-1838.793857	-500.
0.1	-4075.528405	-80.82702233	-1843.644573	-500.
0.15	-4058.581875	-94.24890581	-1847.169219	-500.
0.2	-4050.567185	-99.67980412	-1849.753011	-500.
0.25	-4048.094090	-100.2583847	-1851.647525	-500.
0.3	-4049.190935	-97.78499484	-1853.024071	-500.
0.35	-4052.646054	-93.35061175	-1854.003334	-500.
0.4	-4057.682794	-87.64444266	-1854.672763	-500.
0.45	-4063.786674	-81.11609249	-1855.097233	-500.
0.5	-4070.607877	-74.06627735	-1855.325846	-500.
0.55	-4077.903547	-66.70004440	-1855.396409	-500.
0.6	-4085.502281	-59.15925086	-1855.338468	-500.
0.65	-4093.281535	-51.54305067	-1855.175415	-500.
0.7	-4101.152843	-43.92118090	-1854.925976	-500.
0.75	-4109.051918	-36.34278599	-1854.605296	-500.
0.8	-4116.931868	-28.84239981	-1854.225732	-500.
0.85	-4124.758480	-21.44407687	-1853.797443	-500.
0.9	-4132.506875	-14.16428455	-1853.328841	-500.
0.95	-4140.159105	-7.013961319	-1852.826934	-500.
0.999	-4147.552672	-.1389131179	-1852.308414	-500.

$\alpha_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$
0.001	-4184.825243	-1.354752637	-1813.820005	-500.
0.05	-4129.745449	-49.79046814	-1820.464083	-500.
0.1	-4098.974579	-75.69695757	-1825.328464	-500.
0.15	-4082.457255	-88.68764675	-1828.855099	-500.
0.2	-4074.440081	-94.13611253	-1831.423807	-500.
0.25	-4071.763504	-94.95062351	-1833.285872	-500.
0.3	-4072.565441	-92.82039545	-1834.614164	-500.
0.35	-4075.689168	-88.77936120	-1835.531471	-500.
0.4	-4080.386435	-83.48620034	-1836.127364	-500.
0.45	-4086.157554	-77.37378357	-1836.468663	-500.
0.5	-4092.660232	-70.73359523	-1836.606172	-500.
0.55	-4099.655161	-63.76567433	-1836.579164	-500.
0.6	-4106.972266	-56.60930663	-1836.418428	-500.
0.65	-4114.489097	-49.36250185	-1836.148401	-500.
0.7	-4122.116609	-42.09469251	-1835.788698	-500.
0.75	-4129.789585	-34.85520706	-1835.355208	-500.
0.8	-4137.460037	-27.67905015	-1834.860913	-500.
0.85	-4145.092604	-20.59089429	-1834.316501	-500.
0.9	-4152.661266	-13.60790304	-1833.730831	-500.
0.95	-4160.146978	-6.741737009	-1833.111285	-500.
0.999	-4167.389186	-.1335810765	-1832.477233	-500.

Tableau 5.2: spectre de la matrice  $\mathcal{A}_{GPTU}$  le long de la variété isobare isotherme équipotentielle équivitesse  
 $P_1 = P_2 = 838793 \text{ Pa}$ ,  $T_1 = T_2 = 200 \text{ K}$ ,  $g_1 = g_2 = -99.7423 \text{ J.kg}^{-1}$ ,  $u_1 = u_2 = 0 \text{ m.s}^{-1}$ .



## Chapitre 6

# Une méthode de relaxation instantanée pour la simulation des modèles bifluides partiellement équilibrés

Lors de la fermeture du modèle bifluide à deux pressions, plusieurs modèles de relaxation ont été proposés pour décrire les transferts interfaciaux. Au chapitre 5, tous ces transferts ont été mis sur le même plan. Toutes les échelles de temps caractéristiques associées à ces différentes interactions diphasiques ont été supposées non-nulles. La dynamique couplée de ces différents transferts interfaciaux a alors été étudiée sur une certaine durée. D'autres approches existent dans la littérature bifluide. Ces différentes approches supposent des équilibres partiels entre les phases. Une hypothèse d'équilibre isobare est par exemple souvent retenue au sein du mélange diphasique. Dans [26], Coquel, El Amine, Godlewski, Perthame et Rasclé forment par exemple cette hypothèse d'un équilibre entre les pressions de chaque phase. Une telle hypothèse d'équilibre isobare au sein du mélange diphasique débouche sur l'étude d'un modèle monopression à six équations. Dans [55], Guillard et Murrone supposent différemment l'existence d'un équilibre isobare équivitesse entre les phases. Une telle hypothèse conduit à l'étude d'un modèle monopression monovitesse à cinq équations. Dans le cadre du modèle bifluide à deux pressions, ces différents équilibres partiels se caractérisent par des relaxations instantanées qui se découplent spontanément des processus de retour à l'équilibre sur temps long. Dans ce chapitre, on étudie de telles projections sur certains équilibres partiels. On s'intéresse à la dégénérescence du modèle bifluide à sept équations vers certains sous-modèles bifluides partiellement équilibrés.

En vue d'une comparaison avec les différents modèles bifluides utilisés dans la littérature, deux procédures de relaxation instantanée sont particulièrement étudiées dans ce chapitre. La première s'intéresse à la relaxation instantanée en pression, la seconde à la relaxation instantanée en pression et en vitesse. Quelle que soit la projection envisagée, l'existence d'équilibres est tout d'abord montrée. La stabilité de ces équilibres est ensuite établie. Dans le cadre de la relaxation instantanée en pression, ce travail constitue le rappel des résultats présentés par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Ces travaux sont ensuite étendus au cadre de la relaxation instantanée en pression et en vitesse. Ils complètent les résultats présentés par Guillard et Murrone dans [55] en apportant une preuve de convergence sur l'équilibre isobare équivitesse. On s'intéresse par la suite aux propriétés des sous-modèles relaxés. Conformément aux travaux de El Amine [37], la nature elliptique en temps du modèle bifluide à une pression est retrouvée. Sous l'hypothèse 1, l'hyperbolicité du modèle partiellement équilibré en vitesse et en pression est établie pour conclure. Comme au chapitre précédent, l'ensemble des études menées dans ce chapitre est réalisé dans un cadre monodimensionnel sans perte de généralité.

## 6.1 Projection sur l'équilibre isobare

Dans cette section, on s'intéresse à la relaxation instantanée vers l'équilibre isobare. Comme au chapitre précédent, soit  $\rho = \sum_k m_k$ ,  $\rho E = \sum_k m_k E_k$  respectivement la masse et l'énergie totale du mélange. En vue d'une comparaison entre les modèles bifluïdes à une et deux pressions, on étudie dans cette section le retour à l'équilibre du système dynamique

$$\begin{cases} d_t \alpha_2 = K_P (P_2 - P_1), \\ d_t m_2 E_2 = K_P (P_1 - P_2) P_1, \\ d_t m_2 = 0, \quad d_t m_1 = 0, \quad d_t m_2 u_2 = 0, \quad d_t m_1 u_1 = 0, \quad d_t \rho E = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

L'étude de cette relaxation instantanée se décompose en trois étapes. L'existence d'équilibres isobares est tout d'abord montrée. La stabilité de ces équilibres isobares est par la suite établie. Les propriétés du système relaxé sont étudiées pour finir.

### 6.1.1 Équilibres et contraintes

Au chapitre 3, la modélisation retenue pour  $K_P$  identifie ce coefficient d'échange à une fonction strictement positive sur l'espace admissible  $\Omega$ . Les équilibres du système (6.1) s'identifient alors à la variété isobare

$$\mathbb{E}_P = \{W \in \mathbb{R}^7 / P_1 = P_2\}.$$

Plusieurs invariants caractérisent par ailleurs l'évolution des trajectoires associées au système dynamique (6.1). Les solutions du système (6.1) satisfont continûment les contraintes

$$\begin{cases} m_1(W) = m_1, & u_1(W) = u_1, \\ m_2(W) = m_2, & u_2(W) = u_2, \end{cases} \quad \sum_k m_k E_k(W) = \rho E. \quad (6.2)$$

On se demande alors dans quelle mesure équilibres et contraintes sont compatibles. Ce paragraphe s'intéresse donc à la résolution du système algébrique (6.2) sur la variété  $\mathbb{E}_P$ .

A notre connaissance, ce problème de la compatibilité des contraintes (6.2) avec l'équilibre isobare n'a pas encore été traité dans la littérature. De manière générale, le système (6.2) s'avère sous-contraint sur la variété  $\mathbb{E}_P$ . Une infinité d'équilibres isobares satisfont donc généralement les contraintes du système dynamique (6.1). Ces équilibres partiels sont conditionnellement admissibles. Une telle situation est illustrée à l'exemple 7 où une loi d'état de type gaz parfait est adoptée dans les deux phases.

**Exemple 7.** Soit  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $u_1, u_2, E$  les invariants du système (6.1) tels que  $\rho \varepsilon = \rho E - m_1 u_1^2 / 2 - m_2 u_2^2 / 2 > 0$ . Pour décrire les différents constituants du mélange diphasique, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques  $C_{v_1} > 0$ ,  $C_{v_2} > 0$  et  $\gamma_1 > \gamma_2 > 1$ . Le système des contraintes (6.2) admet alors une infinité de solutions isobares sur la variété  $\mathbb{E}_P$ . La paramétrisation de cet ensemble de solutions par la pression d'équilibre  $P_1 = P_2 = P$  s'écrit

$$\begin{cases} T_2(P) = \frac{\alpha_2(P) P}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} m_2}, \\ T_1(P) = \frac{(1 - \alpha_2(P)) P}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} m_1}, \\ \alpha_2(P) = \left[ \frac{\rho \varepsilon}{P} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right] \left[ \frac{1}{\gamma_2 - 1} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right]^{-1}. \end{cases}$$

Ces différents équilibres isobares sont admissibles à la condition que la pression  $P$  soit strictement positive et que les invariants du système (6.1) satisfassent la relation

$$\rho \varepsilon (\gamma_2 - 1) < P < \rho \varepsilon (\gamma_1 - 1) \quad \iff \quad 0 < \alpha_2(P) < 1.$$

Cette double condition définit les frontières du domaine diphasique.

A ce stade, la compatibilité des contraintes avec les équilibres du système (6.1) a été montrée. Cette compatibilité entre équilibres et contraintes du système (6.1) ne dépend pas des modélisations retenues pour le coefficient d'échange  $K_P$  ou la pression interfaciale  $P_i$ . Le système algébrique (6.2) admet généralement une infinité de solutions isobares sur la variété d'équilibre  $\mathbb{E}_P$ . La question se pose maintenant d'étudier l'éventuelle convergence vers un état d'équilibre isobare particulier.

### 6.1.2 Stabilité de l'équilibre isobare

Pour montrer cette convergence, la procédure d'optimisation utilisée au chapitre précédent s'avère inadaptée. Aucun point d'équilibre isobare ne maximise l'entropie du modèle bifluide à sept équations. Cette entropie n'est pas une fonction de Lyapunov pour le système dynamique (6.1). Ceci ne signifie pas pour autant que la convergence vers un équilibre isobare soit impossible. Dans [42], Gallouët, Hérard et Seguin ont récemment étudié les trajectoires du système (6.1) pour en montrer l'admissibilité et la convergence sur la variété d'équilibre en pression. On rappelle ici leurs résultats.

Soit  $\Delta P = P_2 - P_1$  l'écart de pression entre les phases. Soit  $Y = (m_1, m_2, u_1, u_2, E, \alpha_2, \Delta P)^t$ . Pour étudier les trajectoires du système (6.1), la définition des coefficients thermodynamiques  $\hat{\gamma}_k$  demande tout d'abord à être rappelée. Pour  $k = 1, 2$ , ces coefficients thermodynamiques sont définis par la relation

$$\hat{\gamma}_k P_k = \hat{\gamma}_k P_k + \frac{1}{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k).$$

Ces coefficients thermodynamiques interviennent dans la réécriture du coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  introduit à la figure 5.1 :

$$\mathcal{A}_{pp} = \sum_k \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k}.$$

Le système dynamique (6.1) se réécrit en variable  $Y$  :

$$\begin{cases} d_t \alpha_2 = K_P \Delta P, \\ d_t \Delta P = -K_P \mathcal{A}_{pp} \Delta P, \\ d_t m_2 = 0, \quad d_t m_1 = 0, \quad d_t u_2 = 0, \quad d_t u_1 = 0, \quad d_t E = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

La convergence des trajectoires associées au système (6.3) vers un équilibre isobare admissible est alors établie au théorème 6.

**Théorème 6.** *Soit  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $u_1, u_2, E$  les invariants du système (6.3). Soit  $\Delta P = P_2 - P_1$  l'écart de pression entre les phases. Soit  $Y(0) = (m_1, m_2, u_1, u_2, E, \alpha_2(0), \Delta P(0))^t$  une condition initiale admissible au système (6.3). Soit  $\tilde{K}_P$  une fonction strictement positive bornée de  $\mathbb{R}^7$  telle que  $K_P = \alpha_1 \alpha_2 \tilde{K}_P$ . Pour  $k = 1, 2$ , on suppose bornés les différents coefficients thermodynamiques  $\hat{\gamma}_k$ . Dans le cadre des solutions bornées au système (6.3), la trajectoire passant par  $Y(0)$  est continûment admissible. Si le coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  s'avère par ailleurs strictement positif le long de cette trajectoire bornée passant par  $Y(0)$ , la solution du système (6.3) converge de plus vers un équilibre isobare. La valeur absolue de l'écart de pression entre les phases  $|\Delta P|$  est alors une fonction monotone décroissante.*

**Démonstration.** Le théorème 6 a déjà été démontré par Gallouët, Hérard et Seguin. Dans [42], leur démonstration s'effectue en trois étapes. Cette démonstration est ici brièvement rappelée. Suivant la définition particulière  $K_P = \alpha_1 \alpha_2 \tilde{K}_P$  du coefficient d'échange, le principe du maximum sur les fractions volumiques est tout d'abord établi. La positivité des pressions est par la suite étudiée. Cette positivité des pressions nous permet de conclure à l'admissibilité des solutions bornées au système (6.3). La convergence vers l'équilibre isobare est établie pour finir.



- (i) Dans un premier temps, on s'intéresse à l'admissibilité des fractions volumiques. Soit  $\Delta P = P_2 - P_1$  l'écart de pression entre les phases. On définit le produit  $\pi = \alpha_1 \alpha_2$ . L'admissibilité des fractions volumiques est assurée dès lors que le produit  $\pi$  est strictement positif. Pour la modélisation particulière  $K_P = \alpha_1 \alpha_2 \tilde{K}_P$  du coefficient d'échange, l'équation portant sur le produit  $\pi$  s'écrit

$$\frac{d\pi}{dt} = \pi (\alpha_2 - \alpha_1) \tilde{K}_P \Delta P.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit

$$\forall t \geq 0, \quad \pi(t) = \pi(0) \exp \left( \int_0^t (\alpha_2 - \alpha_1) \tilde{K}_P \Delta P ds \right).$$

Pour une condition initiale  $Y(0)$  admissible, le produit  $\pi(0)$  est strictement positif. La solution du système (6.3) étant supposée bornée, le produit  $\pi(t)$  demeure strictement positif pour tout  $t \geq 0$ . L'admissibilité des fractions volumiques est donc vérifiée :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall t \geq 0, \quad \alpha_k(t) \in ]0, 1[.$$

- (ii) On s'intéresse maintenant à l'admissibilité des pressions. Pour  $k = 1, 2$ , les pressions  $P_k$  satisfont l'équation différentielle

$$\frac{dP_k}{dt} = \left( (-1)^{k+1} \frac{\hat{\gamma}_{i_k}}{\alpha_k} K_P \Delta P \right) P_k.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall t \geq 0, \quad P_k(t) = P_k(0) \exp \left( \int_0^t (-1)^{k+1} \frac{\hat{\gamma}_{i_k}}{\alpha_k} K_P \Delta P ds \right).$$

Pour  $k = 1, 2$ , les différents coefficients thermodynamiques  $\hat{\gamma}_{i_k}$  ont été supposés bornés de même que le coefficient d'échange  $K_P$ . Dans le cadre des solutions bornées au système (6.3), les pressions  $P_k$  demeurent donc strictement positives pour une condition initiale  $Y(0)$  admissible :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall t \geq 0, \quad P_k(t) > 0.$$

On rappelle par ailleurs que les masses partielles  $m_1, m_2$  sont des invariants du système (6.3). La trajectoire bornée passant par la condition initiale admissible  $Y(0)$  est donc continûment admissible au cours du temps.

- (iii) Supposons pour finir le coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  strictement positif le long de la trajectoire bornée admissible passant par  $Y(0)$ . L'écart de pression entre les phases  $\Delta P$  satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d\Delta P}{dt} = -K_P \mathcal{A}_{pp} \Delta P.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit

$$\forall t \geq 0, \quad \Delta P(t) = \Delta P(0) \exp \left( - \int_0^t K_P \mathcal{A}_{pp} ds \right).$$

La trajectoire bornée continûment admissible passant par  $Y(0)$  converge donc vers un équilibre isobare. Ce troisième point termine la démonstration du théorème 6. ■

En résumé, la stabilité de l'équilibre isobare vient d'être établie au théorème 6. Ce théorème assure l'admissibilité et la convergence sur la variété isobare des trajectoires associées au système (6.3). Un tel résultat dépend des lois d'état utilisées dans chaque phase, ainsi que de la modélisation retenue pour le coefficient d'échange  $K_P$ . Certaines hypothèses ont été formulées à ce sujet. Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, ces hypothèses sont vérifiées à l'exemple 8 pour la modélisation particulière

(3.9) du coefficient d'échange  $K_P$ . Rappelons pour conclure qu'une infinité de solutions isobares existe au système des contraintes (6.2) sur la variété  $\mathbb{E}_P$ . La projection sur la variété d'équilibre isobare ne peut donc pas être déterminée algébriquement. Cette projection sera numériquement réalisée au chapitre 7 par intégration du système dynamique (6.3) sur temps long.

**Exemple 8.** Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur, diverses modélisations (3.9) des coefficients d'échange ont été adoptées au chapitre 3. Soit  $\tau_P > 0$  le temps caractéristique du retour à l'équilibre des pressions. Pour décrire les différents constituants du mélange diphasique, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans chaque phase. On impose les coefficients thermodynamiques  $\gamma_1 > 1$ ,  $\gamma_2 > 1$ ,  $C_{v_1} > 0$  et  $C_{v_2} > 0$ . Dans ce cadre, la modélisation (3.9) du coefficient d'échange  $K_P$  s'écrit

$$K_P = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\tau_P [\alpha_2 \widehat{\gamma}_1 P_1 + \alpha_1 \widehat{\gamma}_2 P_2]} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\tau_P [\alpha_2 (P_1 + (\gamma_1 - 1) P_i) + \alpha_1 (P_2 + (\gamma_2 - 1) P_i)]}.$$

Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, cette modélisation (3.9) du coefficient  $K_P$  présente la forme requise au théorème 6 pour assurer l'admissibilité des trajectoires au système (6.3). Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, le caractère borné des coefficients  $\widehat{\gamma}_k$  et la stricte positivité du coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  sont par ailleurs assurés. Cette stricte positivité du coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  induit la convergence des trajectoires sur la variété d'équilibre en pression. Dans ce contexte, les différentes hypothèses de stabilité pour l'équilibre isobare sont donc vérifiées.

### 6.1.3 Nature du système relaxé

Pour réaliser la projection sur l'équilibre isobare, une hypothèse s'est néanmoins avérée nécessaire dont nous n'avons pas encore parlé. Les trajectoires du système (6.1) ont été supposées bornées. On s'intéresse dans cette section à la pertinence de cette hypothèse. La nature du système relaxé à une pression est étudiée en conséquence dans le but de caractériser la stabilité des solutions isobares. Une telle étude a déjà été effectuée par El Amine dans [37]. Ses résultats sont ici retrouvés dans le cadre de la relaxation. Nous les illustrons sur quelques exemples.

Une fois effectuée la relaxation instantanée en pression, l'évolution isobare du mélange diphasique est décrite par le modèle bifluide standard à six équations. Ce modèle est constitué de trois bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale pour chaque phase. On s'intéresse ici à la nature de sa partie convective. Cette partie convective se présente sous la forme non-conservative (6.4) pour laquelle la définition des relations de saut est d'ailleurs ambiguë (voir [29]) :

$$\begin{cases} \partial_t m_2 + \partial_x (m_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (m_2 u_2) + \partial_x [m_2 u_2^2 + \alpha_2 P] - P \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (m_2 E_2) + \partial_x [(m_2 E_2 + \alpha_2 P) u_2] + P \partial_t \alpha_2 = 0, \\ \partial_t m_1 + \partial_x (m_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (m_1 u_1) + \partial_x [m_1 u_1^2 + \alpha_1 P] - P \partial_x \alpha_1 = 0, \\ \partial_t (m_1 E_1) + \partial_x [(m_1 E_1 + \alpha_1 P) u_1] + P \partial_t \alpha_1 = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Suivant les travaux présentés par Chen, Levermore et Liu [22], le transport des propriétés associées au modèle bifluide à deux pressions vers le modèle à une pression pourrait être idéalement envisagé via la procédure de relaxation instantanée. Dans notre cadre d'étude néanmoins, le modèle à deux pressions n'est pas strictement hyperbolique. Ce modèle n'est par ailleurs pas doté d'une entropie strictement concave. Ce modèle se présente surtout sous une forme non-conservative. Dans ce cadre, la théorie classique de la relaxation pour les systèmes de lois de conservation hyperboliques [22] ne s'applique pas. Pour déterminer la nature du modèle bifluide isobare à six équations, la structure propre du système (6.4) est alors détaillée par la suite.

Pour étudier la structure propre de ce système relaxé, plusieurs coefficients thermodynamiques sont tout d'abord introduits. Ces différents coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\begin{aligned}
H_{\alpha_2} &= \frac{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 u_2 + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1 u_1}{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1}, & J_{\alpha_2} &= \frac{\widehat{\gamma}_2 \widehat{\gamma}_1 P (u_2 - u_1)}{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1}, \\
H_P &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 (u_2 - u_1)}{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 P + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1 P}, & J_P &= \frac{\alpha_2 \widehat{\gamma}_1 u_2 + \alpha_1 \widehat{\gamma}_2 u_1}{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1}, \\
H_{u_2} &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \widehat{\gamma}_2}{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1}, & J_{u_2} &= \frac{\alpha_2 \widehat{\gamma}_2 \widehat{\gamma}_1 P}{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1}, \\
H_{u_1} &= -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \widehat{\gamma}_1}{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1}, & J_{u_1} &= \frac{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 \widehat{\gamma}_1 P}{\alpha_1 \widehat{\gamma}_2 + \alpha_2 \widehat{\gamma}_1}.
\end{aligned}$$

Soit  $X = (\alpha_2, P, m_2, u_2, m_1, u_1)^t$ . Dans le cadre des solutions régulières, la partie convective du modèle bifluide à une pression se réécrit de manière équivalente

$$\frac{\partial X}{\partial t} + H(X) \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad H(X) = \begin{bmatrix} H_{\alpha_2} & H_P & 0 & H_{u_2} & 0 & H_{u_1} \\ J_{\alpha_2} & J_P & 0 & J_{u_2} & 0 & J_{u_1} \\ 0 & 0 & u_2 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & m_1 \\ 0 & \tau_1 & 0 & 0 & 0 & u_1 \end{bmatrix}.$$

La nature du système (6.4) dépend de la structure propre associée à la matrice  $H$ . Le polynôme caractéristique associé à la matrice  $H$  s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\lambda) &= (u_2 - \lambda)(u_1 - \lambda) \left[ -J_{\alpha_2} \left( H_P (u_2 - \lambda)(u_1 - \lambda) - (u_2 - \lambda) \frac{H_{u_1}}{\rho_1} - (u_1 - \lambda) \frac{H_{u_2}}{\rho_2} \right) \right. \\
&\quad \left. + (H_{\alpha_2} - \lambda) \left( (J_P - \lambda)(u_2 - \lambda)(u_1 - \lambda) - (u_2 - \lambda) \frac{J_{u_1}}{\rho_1} - (u_1 - \lambda) \frac{J_{u_2}}{\rho_2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Dans l'étude de la structure propre associée au système (6.4), deux cas se distinguent suivant que l'on considère ou non un déséquilibre cinématique entre les phases. A l'équilibre des vitesses  $u_1 = u_2 = u$ , plusieurs coefficients de la matrice  $H$  se simplifient. Ces simplifications nous permettent de réécrire le polynôme caractéristique associé à la matrice  $H$  sous la forme

$$\mathcal{P}(\lambda) = (u - \lambda)^4 \left[ (u - \lambda)^2 - \sum_k \frac{J_{u_k}}{\rho_k} \right].$$

Sous l'hypothèse 1, toutes les valeurs propres de la matrice  $H$  sont donc réelles à l'équilibre des vitesses. La matrice  $H$  n'est cependant pas diagonalisable. A l'équilibre cinématique, seuls trois vecteurs propres indépendants sont associés à la quadruple valeur propre  $u$ . Ces trois vecteurs propres indépendants n'engendrent pas un sous-espace propre de dimension 4. Le système (6.4) n'est donc pas hyperbolique sur la variété d'équilibre en vitesse. Dans le cas plus général où un déséquilibre cinématique existe entre les phases  $u_1 \neq u_2$ , le spectre de la matrice  $H$  ne peut plus être déterminé explicitement. Dans ce cadre, El Amine [37] a néanmoins montré que le polynôme caractéristique associé à la matrice  $H$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  lorsque le déséquilibre de vitesse entre les phases est inférieur aux vitesses du son. Cette situation correspond à notre gamme d'applications. La matrice  $H$  présente donc généralement un spectre complexe en dehors de la variété d'équilibre en vitesse. Le modèle bifluide à une pression est dès lors elliptique en temps. Une telle situation est illustrée à l'exemple 9 où une loi d'état de type gaz parfait est adoptée dans les deux phases.

**Exemple 9.** Dans cet exemple, on s'intéresse à la nature du modèle bifluide isobare à six équations. Pour décrire les différents constituants du mélange diphasique, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans chaque phase. On impose les coefficients thermodynamiques

$$\gamma_1 = 1.4, \quad \gamma_2 = 1.2, \quad C_{v_1} = 2 \text{ J.kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, \quad C_{v_2} = 1 \text{ J.kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Pour différents états admissibles situés en dehors de la variété d'équilibre en vitesse, on calcule numériquement le spectre de la matrice  $H$ . Ce spectre  $\text{sp}(H)$  s'avère généralement complexe :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P = 15000 \text{ Pa}, & \alpha_2 = 0.6, \\ T_2 = 200 \text{ K}, & T_1 = 200 \text{ K}, \\ u_2 = 2 \text{ m.s}^{-1}, & u_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}, \end{array} \right. \longrightarrow \text{sp}(H) = \{2, 0, -10.137, 11.253, 1.442 \pm 0.881 \mathbf{i}\},$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} P = 12000 \text{ Pa}, & \alpha_2 = 0.4, \\ T_2 = 180 \text{ K}, & T_1 = 180 \text{ K}, \\ u_2 = 2 \text{ m.s}^{-1}, & u_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}, \end{array} \right. \longrightarrow \text{sp}(H) = \{2, 0, -11.271, 11.863, 1.703 \pm 0.699 \mathbf{i}\}.$$

Le modèle bifluide à une pression présente donc des caractéristiques complexes.

De manière générale, le modèle bifluide à une pression correspond donc un problème de Cauchy mal-posé. Les solutions du système (6.4) sont donc généralement instables. Ce caractère instable des solutions isobares au système (6.4) risque à terme d'infirmer l'hypothèse formulée à la section précédente où les trajectoires du système dynamique (6.1) ont été supposées bornées. Cette instabilité des solutions associées au système (6.4) sera numériquement vérifiée à la section 8.3.1 où l'explosion des simulations est constatée.

En résumé, la relaxation instantanée en pression du modèle bifluide à sept équations a été étudiée dans cette section. Cette relaxation instantanée en pression nous a permis d'établir la dégénérescence du modèle bifluide à sept équations vers le modèle bifluide standard à une pression. Ce travail a constitué le rappel des résultats présentés par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. L'extension de ces résultats à la relaxation instantanée en pression et en vitesse est réalisée à la section 6.2.

## 6.2 Projection sur l'équilibre isobare équivitesse

Dans cette section, on s'intéresse à la relaxation instantanée en vitesse et en pression du modèle bifluide à sept équations. De manière analogue au chapitre précédent, soit  $\rho = \sum_k m_k$ ,  $\rho V = \sum_k m_k u_k$ ,  $\rho E = \sum_k m_k E_k$  respectivement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale du mélange. Cette relaxation instantanée en vitesse et en pression satisfait le système dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t \alpha_2 = K_P (P_2 - P_1), \\ d_t m_2 u_2 = K_U (u_1 - u_2), \\ d_t m_2 E_2 = K_U (u_1 - u_2) V_i + K_P (P_1 - P_2) P_i, \\ d_t m_2 = 0, \quad d_t m_1 = 0, \quad d_t \rho V = 0, \quad d_t \rho E = 0. \end{array} \right. \quad (6.5)$$

Suivant la même démarche qu'à la section précédente, l'existence et la stabilité d'un équilibre isobare équivitesse sont tout d'abord montrées. En complément des résultats présentés par Guillard et Murrone [55], ce travail apporte une preuve de convergence sur l'équilibre des vitesses et des pressions. La nature du système relaxé est étudiée pour finir.

### 6.2.1 Equilibres et contraintes

Pour notre modélisation des coefficients d'échange  $K_P$ ,  $K_U$  par des fonctions strictement positives, les équilibres du système (6.5) s'identifient à la variété isobare équivitesse

$$\mathbb{E}_{PU} = \{W \in \mathbb{R}^7 / P_1 = P_2, \quad u_1 = u_2\}.$$

Les trajectoires du système (6.5) évoluent par ailleurs continûment sous les contraintes

$$\begin{cases} m_1(W) = m_1, & m_2(W) = m_2, \\ \sum_k m_k u_k(W) = \rho V, & \sum_k m_k E_k(W) = \rho E. \end{cases} \quad (6.6)$$

Dans ce paragraphe, on cherche à déterminer la compatibilité des contraintes (6.6) avec l'équilibre isobare équivitesse.

De manière générale, le système (6.6) admet une unique vitesse d'équilibre. Ce système algébrique s'avère néanmoins sous-contraint sur la variété  $\mathbb{E}_{PU}$ . Comme pour la relaxation instantanée en pression, les contraintes du système (6.5) sont donc généralement vérifiées par une infinité d'équilibres isobares équivitesse. L'exemple 10 illustre cette situation.

**Exemple 10.** Soit  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $E$ ,  $V$  les invariants du système (6.5) tels que  $\varepsilon = E - V^2/2 > 0$ . Pour décrire les propriétés du mélange diphasique, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques  $C_{v_1} > 0$ ,  $C_{v_2} > 0$  et  $\gamma_1 > \gamma_2 > 1$ . Le système des contraintes (6.6) admet alors une unique vitesse d'équilibre  $u_1 = u_2 = V$ . Ce système (6.6) admet néanmoins une infinité de solutions isobares sur la variété  $\mathbb{E}_{PU}$ . La paramétrisation de cet ensemble de solutions par la pression d'équilibre  $P_1 = P_2 = P$  s'écrit

$$\begin{cases} T_2(P) = \frac{\alpha_2(P) P}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} m_2}, & u_1 = u_2 = V, \\ T_1(P) = \frac{(1 - \alpha_2(P)) P}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} m_1}, & \alpha_2(P) = \left[ \frac{\rho \varepsilon}{P} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right] \left[ \frac{1}{\gamma_2 - 1} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right]^{-1}. \end{cases}$$

Ces différents équilibres isobares équivitesse sont admissibles à la condition que la pression  $P$  soit strictement positive et que les invariants du système (6.5) satisfassent la relation

$$\rho \varepsilon (\gamma_2 - 1) < P < \rho \varepsilon (\gamma_1 - 1) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \alpha_2(P) < 1.$$

Comme pour la relaxation instantanée en pression, cette double condition définit les frontières du domaine diphasique.

## 6.2.2 Stabilité de l'équilibre isobare équivitesse

Au paragraphe précédent, une infinité d'équilibres isobares équivitesse se sont montrés compatibles avec les contraintes du système (6.5). On cherche maintenant à établir la convergence vers un état d'équilibre isobare équivitesse particulier. A la suite du travail effectué à la section précédente, on s'intéresse ici aux propriétés des trajectoires associées au système (6.5). Dans ce paragraphe, on établit alors successivement l'admissibilité et la convergence vers l'équilibre isobare équivitesse des solutions associées au système (6.5).

Soit  $\Delta P = P_2 - P_1$ ,  $\Delta u = u_2 - u_1$  respectivement l'écart de pression et de vitesse entre les phases. Dans un premier temps, on redéfinit le vecteur  $Y = (m_1, m_2, E, V, \alpha_2, \Delta u, \Delta P)^t$ . Pour étudier les trajectoires du système (6.5), on rappelle ensuite la définition des coefficients thermodynamiques  $\tilde{\gamma}_k, \hat{\gamma}_{i_k}$  :

$$\forall k = 1, 2, \quad \tilde{\gamma}_k = \left[ \rho_k \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right]^{-1}, \quad \hat{\gamma}_{i_k} P_k = \tilde{\gamma}_k P_k + \tilde{\gamma}_k (P_i - P_k).$$

Pour cette définition des grandeurs thermodynamiques  $\tilde{\gamma}_k, \hat{\gamma}_{i_k}$ , les différents coefficients  $\mathcal{A}_{uu}, \mathcal{A}_{pu}, \mathcal{A}_{pp}$  introduits à la figure 5.1 se réécrivent

$$\mathcal{A}_{uu} = \sum_k \frac{1}{m_k}, \quad \mathcal{A}_{pu} = \sum_k \frac{\tilde{\gamma}_k}{\alpha_k} (V_i - u_k), \quad \mathcal{A}_{pp} = \sum_k \frac{\hat{\gamma}_{i_k} P_k}{\alpha_k}.$$

En variable  $Y$ , la relaxation instantanée en pression et en vitesse satisfait alors le système dynamique

$$\begin{cases} d_t \alpha_2 = K_P \Delta P, \\ d_t \Delta u = -K_U \mathcal{A}_{uu} \Delta u, \\ d_t \Delta P = -K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u - K_P \mathcal{A}_{pp} \Delta P, \\ d_t m_2 = 0, \quad d_t m_1 = 0, \quad d_t V = 0, \quad d_t E = 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Le théorème 7 établit la convergence de ses trajectoires vers un équilibre isobare équivitesse.

**Théorème 7.** Soit  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $E, V$  les invariants du système (6.7). Soit  $\Delta P = P_2 - P_1$ ,  $\Delta u = u_2 - u_1$  respectivement l'écart de pression et de vitesse entre les phases. Soit  $Y(0) = (m_1, m_2, E, V, \alpha_2(0), \Delta u(0), \Delta P(0))^t$  une condition initiale admissible au système (6.7). Soit  $K_U$  et  $\tilde{K}_P$  deux fonctions strictement positives bornées de  $\mathbb{R}^7$  telles que  $K_P = \alpha_1 \alpha_2 \tilde{K}_P$ . Pour  $k = 1, 2$ , on suppose bornés les différents coefficients thermodynamiques  $\tilde{\gamma}_k$  et  $\hat{\gamma}_{i_k}$ . Pour  $k = 1, 2$ , les coefficients thermodynamiques  $\tilde{\gamma}_k$  sont par ailleurs supposés positifs. Le coefficient  $\mathcal{A}_{pu}$  est de plus supposé intégrable. Dans le cadre des solutions bornées au système (6.7), la trajectoire passant par  $Y(0)$  est continûment admissible. Si le coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  s'avère par ailleurs strictement positif le long de cette trajectoire bornée passant par  $Y(0)$ , la solution du système (6.7) converge vers un équilibre isobare équivitesse. La valeur absolue de l'écart de vitesse entre les phases  $|\Delta u|$  est alors une fonction monotone décroissante.

**Démonstration.** La démonstration du théorème 7 s'effectue en quatre étapes. On établit tout d'abord le principe du maximum sur les fractions volumiques et la positivité des pressions. Les solutions bornées du système (6.7) sont dès lors admissibles. La convergence vers l'équilibre des vitesses puis l'équilibre des pressions est établie pour finir.

- (i) Dans un premier temps, on s'intéresse à l'admissibilité des fractions volumiques. Pour la modélisation particulière  $K_P = \alpha_1 \alpha_2 \tilde{K}_P$  du coefficient d'échange, cette admissibilité des fractions volumiques a déjà été établie lors de la démonstration du théorème 6. Pour la modélisation particulière  $K_P = \alpha_1 \alpha_2 \tilde{K}_P$  du coefficient d'échange, le principe du maximum sur les fractions volumiques est donc vérifié :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall t \geq 0, \quad \alpha_k(t) \in ]0, 1[.$$

- (ii) On s'intéresse maintenant à l'admissibilité des pressions. Soit  $\Delta P = P_2 - P_1$ ,  $\Delta u = u_2 - u_1$  respectivement l'écart de pression et de vitesse entre les phases. Pour  $k = 1, 2$ , les pressions  $P_k$  satisfont l'équation différentielle

$$\frac{dP_k}{dt} = \left( \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k} \hat{\gamma}_{i_k} K_P \Delta P \right) P_k + \left( \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k} \tilde{\gamma}_k K_U (V_i - u_k) \Delta u \right). \quad (6.8)$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit pour tout  $k = 1, 2$  et pour tout  $t \geq 0$

$$P_k(t) = \left[ P_k(0) + \int_0^t \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k} \tilde{\gamma}_k K_U (V_i - u_k) \Delta u \exp \left( - \int_0^s \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k} \hat{\gamma}_{i_k} K_P \Delta P dr \right) ds \right] \exp \left( \int_0^t \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k} \hat{\gamma}_{i_k} K_P \Delta P ds \right).$$

Pour  $k = 1, 2$ , on suppose les coefficients thermodynamiques  $\tilde{\gamma}_k$  positifs. Pour un coefficient d'échange  $K_U$  positif et pour notre modélisation de la vitesse interfaciale par une combinaison convexe des vitesses phasiques, le terme

$$\frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k} \tilde{\gamma}_k K_U (V_i - u_k) \Delta u$$

est donc positif. Pour  $k = 1, 2$ , les différents coefficients thermodynamiques  $\tilde{\gamma}_k$ ,  $\hat{\gamma}_{i_k}$  de même que les coefficients d'échange  $K_P$ ,  $K_U$  ont par ailleurs été supposés bornés. Dans le cadre des solutions

bornées au système (6.7), les pressions  $P_k$  demeurent donc strictement positives pour une condition initiale  $Y(0)$  admissible :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall t \geq 0, \quad P_k(t) > 0.$$

On rappelle par ailleurs que les masses partielles  $m_1, m_2$  sont des invariants du système (6.7). La trajectoire bornée passant par la condition initiale admissible  $Y(0)$  est donc continûment admissible au cours du temps.

- (iii) On étudie maintenant le retour à l'équilibre des vitesses. Soit  $\Delta u = u_2 - u_1$  l'écart de vitesse entre les phases. Cet écart de vitesse entre les phases satisfait l'équation différentielle

$$d_t \Delta u = -K_U \mathcal{A}_{uu} \Delta u.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit

$$\forall t \geq 0, \quad \Delta u(t) = \Delta u(0) \exp \left( - \int_0^t K_U \mathcal{A}_{uu} ds \right).$$

Le long de la trajectoire bornée passant par la condition initiale admissible  $Y(0)$ , le coefficient  $\mathcal{A}_{uu}$  est strictement positif :

$$\mathcal{A}_{uu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} > 0.$$

La fonction de relaxation  $K_U$  est par ailleurs supposée strictement positive. La trajectoire bornée continûment admissible passant par  $Y(0)$  converge donc vers l'équilibre des vitesses  $u_1 = u_2 = V$ .

- (iv) Pour finir, on s'intéresse maintenant à la convergence vers l'équilibre isobare. Pour établir cette convergence, on étudie l'évolution de l'écart de pression entre les phases  $\Delta P = P_2 - P_1$ . Cet écart de pression entre les phases satisfait l'équation différentielle

$$d_t \Delta P = -K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u - K_P \mathcal{A}_{pp} \Delta P.$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit pour tout  $t \geq 0$

$$\Delta P(t) = \left[ \Delta P(0) - \int_0^t K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u(0) \exp \left( \int_0^s (K_P \mathcal{A}_{pp} - K_U \mathcal{A}_{uu}) dr \right) ds \right] \exp \left( - \int_0^t K_P \mathcal{A}_{pp} ds \right).$$

Définissons l'application  $\phi = K_P \mathcal{A}_{pp} - K_U \mathcal{A}_{uu}$ . Cette application  $\phi$  est décomposée en une composante positive  $\phi^+$  et négative  $\phi^-$ . Ces deux composantes satisfont

$$\forall t \geq 0, \quad \phi = \phi^+ - \phi^-, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \phi^+ \geq 0, \\ \phi^- \geq 0, \\ \phi^+ \cdot \phi^- = 0. \end{cases}$$

Dans l'étude des solutions bornées au système (6.7), on établit alors successivement pour tout  $t \geq 0$  les inégalités

$$|\Delta P(t)| \leq \left[ |\Delta P(0)| + \int_0^t K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u(0) \exp \left( \int_0^s \phi^+ - \phi^- dr \right) ds \right] \exp \left( - \int_0^t K_P \mathcal{A}_{pp} ds \right),$$

$$|\Delta P(t)| \leq \left[ |\Delta P(0)| + \int_0^t K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u(0) \exp \left( \int_0^s \phi^+ dr \right) ds \right] \exp \left( - \int_0^t K_P \mathcal{A}_{pp} ds \right),$$

$$|\Delta P(t)| \leq \left[ |\Delta P(0)| + \exp \left( \int_0^t \phi^+ ds \right) \int_0^t |K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u(0)| ds \right] \exp \left( - \int_0^t K_P \mathcal{A}_{pp} ds \right).$$

Le coefficient d'échange  $K_U$  est supposé borné. Pour notre modélisation de la vitesse interfaciale par une combinaison convexe des vitesses phasiques, le coefficient  $\mathcal{A}_{pu}$  est lié à un écart de vitesse entre les phases. Au paragraphe précédent, la convergence vers l'équilibre équivitesse a justement été établie. On suppose alors le coefficient  $\mathcal{A}_{pu}$  intégrable. Dans le cadre des solutions bornées au système (6.7), il existe donc  $M > 0$  tel que

$$\int_0^t |K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u(0)| ds < M.$$

Supposons pour finir le coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  strictement positif le long de la trajectoire bornée passant par  $Y(0)$ . Suivant la définition de la fonction  $\phi$ , l'application  $\phi^+ - K_P \mathcal{A}_{pp}$  est toujours strictement négative :

$$\phi^+ - K_P \mathcal{A}_{pp} = \begin{cases} -K_U \mathcal{A}_{uu} < 0 & \text{si } \phi \geq 0, \\ -K_P \mathcal{A}_{pp} < 0 & \text{si } \phi < 0. \end{cases}$$

La valeur absolue de l'écart de pression entre les phases est donc majorée par une fonction monotone décroissante :

$$\forall t \geq 0, \quad |\Delta P(t)| \leq |\Delta P(0)| \exp\left(-\int_0^t K_P \mathcal{A}_{pp} ds\right) + M \exp\left(\int_0^t (\phi^+ - K_P \mathcal{A}_{pp}) ds\right).$$

La trajectoire bornée continûment admissible passant par  $Y(0)$  converge donc vers un équilibre isobare équivitesse. Ce dernier point termine la démonstration du théorème 7. ■

En résumé, le théorème 7 vient d'établir la convergence des trajectoires associées au système (6.7) vers l'équilibre isobare équivitesse. Cette stabilité de l'équilibre isobare équivitesse complète les travaux de Guillard et Murrone [55]. Comme pour la relaxation instantanée en pression, un tel résultat dépend des lois d'état utilisées dans chaque phase, ainsi que de la modélisation retenue pour les coefficients d'échange  $K_P, K_U$ . Les hypothèses formulées à ce sujet au théorème 7 sont par exemple vérifiées ci-dessous.

**Exemple 11.** Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur, on considère la modélisation (3.9) des coefficients d'échange. Soit  $\tau_P > 0, \tau_U > 0$  respectivement le temps caractéristique du retour à l'équilibre des pressions et des vitesses. Pour décrire le mélange liquide-vapeur, on adopte une loi d'état de type gaz parfait (2.2) dans les deux phases. Dans ce cadre, les différents coefficients d'échange  $K_U, K_P$  satisfont les hypothèses nécessaires à l'application du théorème 7 :

$$K_U = \frac{m_1 m_2}{\tau_U (m_1 + m_2)}, \quad K_P = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\tau_P \left[ \alpha_2 (P_1 + (\gamma_1 - 1) P_i) + \alpha_1 (P_2 + (\gamma_2 - 1) P_i) \right]}.$$

Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, le caractère borné des différents coefficients thermodynamiques  $\hat{\gamma}_{ik}, \tilde{\gamma}_k$ , la positivité des coefficients  $\tilde{\gamma}_k$ , l'intégrabilité du coefficient  $\mathcal{A}_{pu}$  et la stricte positivité du coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  sont par ailleurs assurés. Muni de ces lois d'état et de cette modélisation pour les coefficients d'échange, la stabilité de l'équilibre isobare équivitesse est donc vérifiée.

### 6.2.3 Nature du système relaxé

Comme pour la relaxation instantanée en pression, une hypothèse a cependant été formulée à la section précédente pour établir la convergence vers l'équilibre isobare équivitesse. Cette hypothèse suppose les trajectoires du système (6.5) bornées. Pour juger de la pertinence de cette hypothèse, on s'intéresse dans ce paragraphe à la nature du système relaxé à une vitesse et une pression. Parmi l'ensemble des modèles à une pression et une vitesse répertoriés dans la littérature, ce système relaxé diffère notamment du modèle utilisé par Allaire, Clerc et Kokh [1] dans le cadre de la simulation directe, ainsi que du modèle utilisé par Guillard et Murrone [55] dans le cadre bifluide. Ce modèle à cinq équations est constitué de deux bilans de masse et d'énergie totale pour chaque phase, ainsi que d'un bilan de quantité de mouvement pour le



mélange. Ce système se présente par ailleurs sous une forme non-conservative. De manière analogue à la relaxation instantanée en pression, la dégénérescence du modèle bifluide à sept équations vers le modèle à une pression et une vitesse n'entre donc pas dans le cadre de la relaxation classique présentée par Chen, Levermore et Liu [22]. Pour déterminer la nature de ce modèle bifluide à cinq équations, on étudie alors dans ce paragraphe la structure propre de sa partie convective

$$\begin{cases} \partial_t m_2 + \partial_x(m_2 u) = 0, \\ \partial_t m_1 + \partial_x(m_1 u) = 0, \\ \partial_t [(m_1 + m_2) u] + \partial_x [(m_1 + m_2) u^2 + P] = 0, \\ \partial_t (m_2 E_2) + \partial_x [(m_2 E_2 + \alpha_2 P) u] + P \partial_t \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (m_1 E_1) + \partial_x [(m_1 E_1 + \alpha_1 P) u] + P \partial_t \alpha_1 = 0. \end{cases} \quad (6.9)$$

Pour étudier la structure propre du système (6.9), on introduit tout d'abord certains coefficients thermodynamiques. Ces différents coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\begin{aligned} H_P &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 u}{\alpha_1 \hat{\gamma}_2 P + \alpha_2 \hat{\gamma}_1 P} \left[ (\tau_2 - \tau) \left( \frac{\partial e_2}{\partial P} \right)_{\rho_2}^{-1} - (\tau_1 - \tau) \left( \frac{\partial e_1}{\partial P} \right)_{\rho_1}^{-1} \right] \\ J_P &= u \left[ 1 + \frac{\alpha_2 \hat{\gamma}_1 \left( \frac{\partial e_2}{\partial P} \right)_{\rho_2}^{-1} (\tau_2 - \tau) + \alpha_1 \hat{\gamma}_2 \left( \frac{\partial e_1}{\partial P} \right)_{\rho_1}^{-1} (\tau_1 - \tau)}{\alpha_1 \hat{\gamma}_2 + \alpha_2 \hat{\gamma}_1} \right], \\ \tau &= \frac{1}{m_1 + m_2}, \quad H_u = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (\hat{\gamma}_2 - \hat{\gamma}_1)}{\alpha_1 \hat{\gamma}_2 + \alpha_2 \hat{\gamma}_1}, \quad J_u = \frac{\hat{\gamma}_2 \hat{\gamma}_1 P}{\alpha_1 \hat{\gamma}_2 + \alpha_2 \hat{\gamma}_1}. \end{aligned}$$

Soit  $X = (\alpha_2, P, u, m_2, m_1)^t$ . Dans le cadre des solutions régulières, la partie convective du modèle bifluide à une pression et une vitesse se réécrit de manière équivalente

$$\frac{\partial X}{\partial t} + H(X) \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad H(X) = \begin{bmatrix} u & H_P & H_u & 0 & 0 \\ 0 & J_P & J_u & 0 & 0 \\ 0 & \tau & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & u & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & u \end{bmatrix}.$$

Au vu de cette structure propre, le système (6.9) diffère bien du modèle isobare équivitesse étudié dans le même cadre bifluide par Guillard et Murrone. Dans [55], ces auteurs font dériver leur modèle bifluide partiellement équilibré en vitesse et en pression d'un développement au premier ordre du système bifluide à sept équations autour de la variété d'équilibre isobare équivitesse. Ce modèle décrit la dynamique isobare équivitesse du mélange diphasique dans l'espace tangent à la variété d'équilibre  $\mathbb{E}_{PU}$ . Notre analyse prend ici en compte les effets de courbure associés à cette variété. Cette courbure se traduit par l'apparition de termes supplémentaires dans les équations de pression et de fraction volumique. Ces différences entre modèles bifluides isobares équivitesse à cinq équations sont détaillées dans le tableau 6.1. Ces deux modèles bifluides isobares équivitesse à cinq équations présentent néanmoins des caractéristiques communes. Ces deux modèles se présentent sous une forme non-conservative. La définition des relations de saut pour ces deux modèles est donc ambiguë (voir [29]). Sous l'hypothèse 1, ces deux modèles sont par ailleurs hyperboliques. En ce qui concerne le système relaxé (6.9), un tel résultat est énoncé au théorème 8.

**Théorème 8.** *Sous l'hypothèse 1, le système relaxé (6.9) est hyperbolique sur l'espace admissible  $\Omega$ .*

**Démonstration.** La démonstration du théorème 8 est élémentaire. Cette démonstration s'appuie sur les ouvrages de référence [52, 98]. Dans un premier temps, la nature du système (6.9) est indépendante du jeu

Tableau 6.1: quelques différences entre modèles bifluides à cinq équations partiellement équilibrés en vitesse et en pression.

Modèle bifluide isobare équivitesse à cinq équations	Modèle de Guillard et Murrone [55]	Système (6.9)
Equation d'évolution pour la pression	$\partial_t P + u \partial_x P + J_u \partial_x u = 0$	$\partial_t P + J_P \partial_x P + J_u \partial_x u = 0$
Equation d'évolution pour la fraction volumique	$\partial_t \alpha_2 + u \partial_x \alpha_2 + H_u \partial_x u = 0$	$\partial_t \alpha_2 + u \partial_x \alpha_2 + H_u \partial_x u + H_P \partial_x P = 0$

de variables utilisé pour déterminer sa structure propre. Par commodité, on travaille avec la variable  $X$ . Une fois passé en variable  $X$ , le polynôme caractéristique associé à la matrice  $H$  s'écrit

$$\mathcal{P}(\lambda) = (u - \lambda)^3 \left[ (J_P - \lambda)(u - \lambda) - \frac{J_u}{\rho} \right].$$

La matrice  $H$  admet cinq valeurs propres réelles à la condition que

$$(u - J_P)^2 + 4 \frac{J_u}{\rho} > 0.$$

L'hypothèse 1 assure la stricte positivité du coefficient  $J_u$  sur l'espace admissible  $\Omega$ . Le spectre de la matrice  $H$  est donc toujours réel. L'ensemble des vecteurs propres à droite associés à la matrice  $H$  engendre  $\mathbb{R}^5$ . Le système (6.9) est donc hyperbolique sur  $\Omega$ . ■

En résumé, l'hyperbolicité du modèle relaxé à une vitesse et une pression vient d'être montrée au théorème 8. Cette hyperbolicité du modèle bifluide à cinq équations partiellement équilibré en vitesse et en pression assure la stabilité locale des solutions isobares équivitesse au système (6.9). En ce qui concerne la procédure de relaxation instantanée en vitesse et en pression, les trajectoires du système dynamique (6.5) ont donc la possibilité de rester continûment bornées. La stabilité de cette projection sur l'équilibre isobare équivitesse sera numériquement vérifiée à la section 8.1.2.

Pour conclure, différentes relaxations instantanées ont été envisagées dans ce chapitre qui s'intéresse à la dégénérescence du modèle bifluide à sept équations vers certains sous-modèles bifluides partiellement équilibrés. En référence à la littérature [37] où un équilibre partiel en pression est souvent retenu entre les phases, la projection sur la variété isobare a tout d'abord été étudiée. Dans un premier temps, l'existence d'équilibres en pression a été montrée. La stabilité de ces équilibres en pression a ensuite été établie. Ce travail a constitué le rappel des résultats présentés par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42]. Dans la littérature [55], un équilibre isobare équivitesse est également parfois retenu entre les phases. On a alors étendu les résultats de Gallouët, Hérard et Seguin à la relaxation instantanée en pression et en vitesse. L'existence et la stabilité d'un équilibre isobare équivitesse ont alors été montrées pour compléter les résultats de Guillard et Murrone [55]. Ces différentes études continues seront réutilisées dans un cadre discret au chapitre 7 où une méthode numérique est élaborée pour simuler les systèmes relaxés du modèle bifluide à sept équations. Différentes natures ont par ailleurs été mises à jour pour les différents modèles bifluides

partiellement équilibrés étudiés dans ce chapitre. L'hyperbolicité du modèle à une vitesse et une pression a par exemple été établie. Cette hyperbolicité se distingue de la nature généralement elliptique en temps du modèle bifluide standard à une pression. L'influence de cette différence de nature sur le comportement des solutions associées à ces différents modèles bifluides partiellement équilibrés sera numériquement étudiée au chapitre 8.

## Chapitre 7

# Schémas numériques

Depuis le début de cette thèse, plusieurs modèles bifluïdes ont été rencontrés. Ces différents modèles bifluïdes se distinguent par leur description des écoulements diphasiques. Le modèle à sept équations a tout d'abord été introduit. Ce modèle décrit un ensemble de déséquilibres en pression, température, vitesse et potentiel entre les phases. D'autres modèles ont par la suite été présentés. Ces modèles supposent un équilibre partiel au sein du mélange. Le modèle isobare à six équations étudié au chapitre précédent relève par exemple de cette catégorie. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'approximation numérique de ces différents modèles bifluïdes. Au chapitre 6, une méthode de relaxation instantanée a été proposée. Cette méthode permet d'envisager la simulation des modèles bifluïdes partiellement équilibrés par le biais du modèle à sept équations. En conséquence, seule l'approximation du système (1.1) sans diffusion est ici envisagée. Ce système s'écrit

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = S(W). \quad (7.1)$$

Dans ce chapitre, on cherche à construire une méthode numérique à la fois robuste, flexible et simple à implémenter pour réaliser la simulation des écoulements diphasiques aussi bien hors équilibre que partiellement équilibrés dans des géométries complexes. Pour remplir cet objectif, un formalisme Volumes Finis est d'office retenu. Ce formalisme permet d'envisager la simulation de tels écoulements sur tout type de maillage multidimensionnel structuré ou non-structuré.

Dans le cadre Volumes Finis, deux approches ressortent de la littérature pour réaliser l'approximation du système (7.1). La première approche traite simultanément de la convection et des termes sources. Suivant la modélisation adoptée aux chapitres 2 et 3 pour les transferts interfaciaux, cette première approche s'appuie sur les schémas de relaxation étudiés par Jin et Xin [70]. La seconde approche traite successivement de l'approximation de la convection puis des termes sources. Cette seconde approche à pas fractionnaires s'appuie sur les travaux de Yanenko [104]. Cette approche à pas fractionnaires est communément utilisée dans la littérature diphasique. Que l'on s'intéresse à la simulation directe de la transition de phase [21] ou à la simulation du modèle bifluïde isobare équivitesse à cinq équations [93], une première étape de convection est suivie dans ces publications d'une seconde étape de projection sur un équilibre. Dans le cadre du modèle bifluïde à sept équations plus particulièrement, Gallouët, Hérard et Seguin [42] envisagent différemment une première étape de convection à laquelle succède une seconde étape de retour à l'équilibre en temps long pour les transferts interfaciaux. Ces différentes approches sont ici mélangées en une méthode à plusieurs pas fractionnaires. Cette méthode s'intéresse tout d'abord à l'approximation de la partie convective, puis à l'éventuelle projection sur un équilibre partiel, pour enfin décrire la dynamique des transferts interfaciaux. Dans ce chapitre, on s'intéresse successivement aux propriétés de chaque étape, en vue de caractériser l'ensemble de la procédure numérique. Réputée robuste, cette méthode à pas fractionnaires est également flexible. Une étape de diffusion supplémentaire pourra ultérieurement la compléter.

Suivant cette approche à pas fractionnaires, on s'intéresse tout d'abord à l'approximation de la partie convective

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = 0. \quad (7.2)$$

La nature hyperbolique résonante et non-conservative de cette partie convective a été établie au chapitre 4. Dans le cadre conservatif, plusieurs schémas ressortent de la littérature pour réaliser l'approximation des systèmes de lois de conservation. La première partie de ce chapitre en fait le rappel non-exhaustif. Il y est question des schémas de Godunov [53], de Rusanov [92] et du solveur de Riemann approché VFRoe-ncv [18]. L'adaptation de certains de ces schémas classiques au cadre non-conservatif du système (7.2) fait l'objet de la seconde partie de ce chapitre. Dans le cadre du modèle bifluide à sept équations, l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov est tout d'abord envisagée suivant les travaux de Hérard [59, 60]. Dans ce cadre non-conservatif, un nouveau schéma de type VFRoe-ncv en variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$  est ensuite proposé. Sa construction est influencée par les procédures de relaxation étudiées aux chapitres 5 et 6. Nous montrons que ces deux schémas préservent les équilibres isobares isothermes équipotentiels équivitesses.

On s'intéresse par la suite à la simulation des interactions diphasiques. Un nouveau schéma d'intégration semi-implicite est proposé pour réaliser l'intégration du système dynamique

$$d_t W = S(W). \quad (7.3)$$

Ce schéma converge vers les équilibres du système (7.3) tout en préservant ses invariants tels la masse, la quantité de mouvement ou encore l'énergie totale du mélange. Ce schéma se distingue des travaux de Saurel, Abgrall [93], Gallouët, Hérard et Seguin [42] dans la mesure où il assure un traitement couplé des différents transferts interfaciaux. Poussé à convergence en temps, ce schéma effectue la projection sur un équilibre partiel. Nous sommes alors en mesure de simuler certains modèles bifluides partiellement équilibrés par le biais du modèle à sept équations. Utilisé sur un temps fini, ce schéma d'intégration décrit également la dynamique des transferts interfaciaux. La troisième et dernière partie de ce chapitre applique ce schéma à différentes descriptions bifluides d'écoulements diphasiques avec ou sans transition de phase. L'ensemble de la procédure numérique se caractérise alors par la préservation des équilibres liquide-vapeur.

## 7.1 Approximation des systèmes de lois de conservation sous forme conservative : quelques rappels

Dans le cadre d'une approche à pas fractionnaires pour simuler le modèle bifluide à sept équations, une première étape est tout d'abord consacrée à l'approximation de la partie convective (7.2). Cette partie convective se présente sous une forme non-conservative. A titre préliminaire, la première section de ce chapitre rappelle le cadre conservatif classique. Suivant une approche Volumes Finis, on s'intéresse dans cette section à l'approximation du système de lois de conservation sous forme conservative

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) = 0. \quad (7.4)$$

Pour réaliser l'approximation du système (7.4), nombreux sont les schémas classiques présentés par Toro ou encore Godlewski et Raviart dans les ouvrages de référence [100, 52]. Seuls les traditionnels schémas de Godunov [53] et de Rusanov [92] sont ici successivement rappelés. Cette présentation non-exhaustive est achevée par le rappel du solveur de Riemann approché VFRoe-ncv [18]. Certains de ces schémas seront ultérieurement étendus au cadre non-conservatif du modèle bifluide à sept équations.

### 7.1.1 La discrétisation Volumes Finis

Dans un premier temps, on construit un maillage qui réalise la partition du domaine de calcul en  $N$  cellules polygonales quelconques  $V_j$ ,  $j \in \{1, \dots, N\}$ . Chacune de ces cellules est caractérisée par un volume  $\mathcal{V}_j$  et une frontière  $\partial V_j$ . Cette frontière  $\partial V_j$  est constituée de  $N_j$  facettes  $S_{j_l}$ ,  $l \in \{1, \dots, N_j\}$ . Chacune de ces facettes est caractérisée par sa normale extérieure  $s_{j_l}$ . Pour  $n_1 \in \mathbb{N}$ , on définit les instants de discrétisation  $t_{n_1}$  en fonction du pas de temps  $\delta t = t_{n_1+1} - t_{n_1}$ . La méthode Volumes Finis consiste à discrétiser la forme intégrale du système de lois de conservation (7.4) :

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{V_j} [\partial_t W + \nabla \cdot F(W)] dV dt = 0.$$

L'application du théorème d'Ostrogradski simplifie cette expression :

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \int_{V_j} W(t_{n_1+1}, x) dV = \int_{V_j} W(t_{n_1}, x) dV - \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{\partial V_j} F[W(t, x)] \cdot dS dt.$$

Pour tout  $n_1 \geq 0$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$  et pour tout  $l \in \{1, \dots, N_j\}$ , définissons la valeur moyenne de maille  $W_j^{n_1}$  associée à la variable d'état  $W$ , et le flux numérique  $\mathcal{F}_{j_l}$  à travers chaque interface du maillage respectivement par les relations :

$$W_j^{n_1} = \frac{1}{\mathcal{V}_j} \int_{V_j} W(t_{n_1}, x) dV, \quad \mathcal{F}_{j_l} \cdot S_{j_l} = \frac{1}{\delta t} \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{S_{j_l}} F[W(t, x)] dS dt.$$

La discrétisation Volumes Finis du système (7.4) s'écrit finalement

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad W_j^{n_1+1} = W_j^{n_1} - \frac{\delta t}{\mathcal{V}_j} \sum_{l=1}^{N_j} \mathcal{F}_{j_l} \cdot S_{j_l}. \quad (7.5)$$

L'approximation Volumes Finis du système (7.4) consiste en la projection des solutions sur l'espace des fonctions constantes par maille. Dans ce cadre Volumes Finis, une telle solution du système (7.4) est approchée par la fonction

$$\sum_{n_1 \geq 0} \sum_{j \in \{1, \dots, N\}} W_j^{n_1} H_j^{n_1}(t, x), \quad \text{où} \quad H_j^{n_1}(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (t, x) \notin [t_{n_1}, t_{n_1+1}] \times V_j, \\ 1 & \text{si } (t, x) \in [t_{n_1}, t_{n_1+1}] \times V_j. \end{cases}$$

Un problème de Riemann monodimensionnel se trouve donc posé dans la direction normale à chaque interface du maillage. Le système (7.4) étant supposé invariant par rotation, la suite de la présentation est effectuée par simplicité dans le cadre monodimensionnel d'un maillage cartésien régulier. Soit  $\delta x$  le pas d'espace de ce maillage cartésien régulier séparant deux interfaces  $x_{j-1/2}$  et  $x_{j+1/2}$ . Soit  $\mathcal{F}_{j+1/2}$  le flux numérique à la traversée de l'interface  $x_{j+1/2}$ . La discrétisation Volumes Finis (7.5) se réécrit dans ce cadre monodimensionnel

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad W_j^{n_1+1} = W_j^{n_1} - \frac{\delta t}{\delta x} (\mathcal{F}_{j+1/2} - \mathcal{F}_{j-1/2}).$$

Au sein de cette discrétisation, la formulation des flux numériques  $\mathcal{F}_{j+1/2}$  est inconnue. Dans le cadre des méthodes à trois points explicites en temps, divers schémas numériques classiques sont présentés par la suite qui en proposent différentes définitions.

### 7.1.2 Le schéma de Godunov

Initialement présenté par Godunov [53] en 1959, le schéma de Godunov s'intéresse à la résolution exacte du problème de Riemann posé à chaque interface du maillage :

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \\ W(t_{n_1}, x) = \begin{cases} W_j^{n_1} & \text{si } x < x_{j+1/2}, \\ W_{j+1}^{n_1} & \text{si } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (7.6)$$

Soit  $W_{j+1/2}^*$  la solution exacte de ce problème de Riemann à l'interface  $x_{j+1/2}$ . La définition de Godunov du flux numérique  $\mathcal{F}_{j+1/2}$  à la traversée de l'interface  $x_{j+1/2}$  s'écrit

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathcal{F}_{j+1/2} = F(W_{j+1/2}^*).$$

La résolution exacte du problème de Riemann (7.6) fait à la fois l'avantage et l'inconvénient de la méthode de Godunov. Ce schéma est généralement stable. Ce schéma nécessite cependant d'importants temps de calcul et la connaissance explicite de la solution exacte au problème de Riemann (7.6). Une telle connaissance explicite de la solution exacte au problème de Riemann (7.6) n'est pas toujours accessible.

### 7.1.3 Le schéma de Rusanov

Introduit par Rusanov en 1961, le schéma de Rusanov [92] s'appuie sur une définition explicite du flux numérique  $\mathcal{F}_{j+1/2}$  à la traversée de l'interface  $x_{j+1/2}$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $r_j^{n_1}$  le rayon spectral de la matrice  $\nabla_W F(W_j^{n_1})$ . La définition de Rusanov du flux numérique à la traversée de l'interface  $x_{j+1/2}$  s'écrit

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{j+1/2} &= \frac{1}{2} \left[ F(W_{j+1}^{n_1}) + F(W_j^{n_1}) - r_{j+1/2} (W_{j+1}^{n_1} - W_j^{n_1}) \right], \\ r_{j+1/2} &= \max(r_{j+1}^{n_1}, r_j^{n_1}). \end{cases}$$

Ce schéma est facile à implémenter. Il ne nécessite pas la connaissance explicite de la solution exacte au problème de Riemann (7.6). Suivant les expériences numériques menées par Gallouët, Hérard et Seguin dans [41], ce schéma nécessite de faibles temps de calcul. Il est cependant particulièrement diffusif.

### 7.1.4 Le schéma VFRoe-ncv

Dans la recherche d'un compromis entre précision, facilité d'implémentation et temps de calcul, divers schémas de type Godunov ont été proposés depuis le début des années 1980. Ces schémas s'intéressent à la résolution exacte d'un problème de Riemann approché. Les très classiques schémas de Roe [90] et schéma HLL de Harten, Lax et Van Leer [57] relèvent de cette catégorie. Le schéma VFRoe-ncv de Buffard, Gallouët et Hérard [18] en est un autre exemple que nous allons plus particulièrement détailler.

Dans le cadre de l'approximation Volumes Finis du système (7.4), rappelons qu'un problème de Riemann se trouve posé à chaque interface du maillage. Ce problème de Riemann s'écrit

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \\ W(t_{n_1}, x) = \begin{cases} W_j^{n_1} & \text{si } x < x_{j+1/2}, \\ W_{j+1}^{n_1} & \text{si } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases}$$

Soit  $Y$  une variable a priori non-conservative du système (7.4). On définit le  $C^1$  difféomorphisme  $\psi : W \longrightarrow Y$ . Soit  $H(Y) = [\nabla_Y W(Y)]^{-1} \cdot [\nabla_W F(W(Y))] \cdot [\nabla_Y W(Y)]$ . Le schéma VFRoe-ncv s'intéresse au problème de Riemann modifié

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \partial_t Y + H(Y) \partial_x Y = 0, \\ Y(t_{n_1}, x) = \begin{cases} Y_j^{n_1} &= \psi(W_j^{n_1}) & \text{si } x < x_{j+1/2}, \\ Y_{j+1}^{n_1} &= \psi(W_{j+1}^{n_1}) & \text{si } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases}$$

Soit  $\tilde{Y}_{j+1/2}(Y_j^{n_1}, Y_{j+1}^{n_1})$  une moyenne particulière sur les états  $Y_j^{n_1}$  et  $Y_{j+1}^{n_1}$  telle que  $\tilde{Y}_{j+1/2}(Y, Y) = Y$ . Le schéma VFRoe-ncv s'appuie sur la résolution exacte du problème de Riemann linéarisé

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \partial_t Y + H(\tilde{Y}_{j+1/2}) \partial_x Y = 0, \\ Y(t_{n_1}, x) = \begin{cases} Y_j^{n_1} & \text{si } x < x_{j+1/2}, \\ Y_{j+1}^{n_1} & \text{si } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (7.7)$$

Soit  $(\tilde{\lambda}_p)$ ,  $(\tilde{R}_p)$ ,  $(\tilde{L}_p)$  respectivement les valeurs propres, vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice  $H(\tilde{Y}_{j+1/2})$ . Soit  $dY_{j+1/2} = Y_{j+1}^{n_1} - Y_j^{n_1}$  l'écart entre les états à droite et à gauche de l'interface  $x_{j+1/2}$ . La solution exacte du problème de Riemann linéarisé (7.7) s'écrit

$$Y(t, x) = Y_j^{n_1} + \sum_{\tilde{\lambda}_p < \frac{x - x_{j+1/2}}{t - t_{n_1}}} (\tilde{L}_p \cdot dY_{j+1/2}) \tilde{R}_p = Y_{j+1}^{n_1} - \sum_{\tilde{\lambda}_p > \frac{x - x_{j+1/2}}{t - t_{n_1}}} (\tilde{L}_p \cdot dY_{j+1/2}) \tilde{R}_p.$$

Soit  $Y_{j+1/2}^*$  la solution exacte à l'interface  $x_{j+1/2}$  du problème de Riemann linéarisé (7.7) :

$$Y_{j+1/2}^* = Y_j^{n_1} + \sum_{\tilde{\lambda}_p < 0} (\tilde{L}_p \cdot dY_{j+1/2}) \tilde{R}_p = Y_{j+1}^{n_1} - \sum_{\tilde{\lambda}_p > 0} (\tilde{L}_p \cdot dY_{j+1/2}) \tilde{R}_p.$$

Pour le schéma VFRoe-ncv, la définition du flux numérique à la traversée de l'interface  $x_{j+1/2}$  s'écrit finalement

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \mathcal{F}_{j+1/2} = F \left[ W(Y_{j+1/2}^*) \right].$$

Ce schéma est relativement simple à implémenter. Il n'effectue que la résolution exacte d'un problème de Riemann linéarisé. Ce schéma n'est cependant pas entropique. Pour palier ce défaut, Buffard, Gallouët et Hérard [18] préconisent de lui ajouter la correction de Harten et Hyman [56]. Suivant les expériences numériques menées par Gallouët, Hérard et Seguin dans [41], ce schéma s'avère beaucoup moins diffusif que le schéma de Rusanov pour un coût CPU légèrement supérieur. Une certaine liberté caractérise par ailleurs le schéma VFRoe-ncv quant au choix du changement de variables  $\psi$  et de la linéarisation  $\tilde{Y}_{j+1/2}$ . Plusieurs solveurs de Riemann approchés classiques sont alors retrouvés par ce biais. Pour la linéarisation  $\tilde{Y}_{j+1/2} = (Y_{j+1}^{n_1} + Y_j^{n_1})/2$  et le changement de variables  $\psi : W \longrightarrow Y = W$ , on retrouve par exemple le schéma VFRoe de Gallouët et Masella [43]. Pour la linéarisation  $\tilde{Y}_{j+1/2} = (Y_{j+1}^{n_1} + Y_j^{n_1})/2$  et le changement de variables  $\psi : W \longrightarrow Y = F(W)$ , on retrouve différemment le schéma VFFC de Ghidaglia, Kumbaro et Le Coq [47]. La linéarisation  $\tilde{Y}_{j+1/2}$  et le changement de variables  $\psi$  influent sur les propriétés du schéma VFRoe-ncv. A la prochaine section, l'étude des transferts interfaciaux menée aux chapitres 5 et 6 nous guidera dans le choix d'une linéarisation et d'un changement de variables particuliers.

## 7.2 Approximation de la partie convective associée au modèle bi-fluide à sept équations

Pour réaliser la simulation du modèle bifluide à sept équations par le biais d'une méthode à pas fractionnaires, on s'intéresse ici à l'approximation de la partie convective sous forme non-conservative

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = 0. \quad (7.2)$$

A la section précédente, l'approximation Volumes Finis des systèmes de lois de conservation sous forme conservative a été rappelée. Plusieurs schémas classiques y ont été présentés. Cette section étudie leur extension au cadre non-conservatif du modèle bifluide à sept équations.

En ce qui concerne les systèmes de lois de conservation sous forme non-conservative standard, rappelons que la définition de leurs solutions faibles pose problème. En présence de produits non-conservatifs, la définition des relations de saut est ambiguë. Ce problème a déjà été évoqué à la section 4.2. Pour palier ce problème, une théorie des produits non-conservatifs a été proposée par Dal Maso, Lefloch et Murat dans [29]. Cette théorie définit de manière unique les relations de saut associées à de tels systèmes non-conservatifs. Cette théorie s'appuie sur l'introduction d'informations extérieures au système pour définir les connexions à travers les discontinuités. Lors de la simulation numérique de tels systèmes non-conservatifs, plusieurs problèmes ont déjà été reportés dans la littérature. Suivant De Vuyst [30], deux schémas numériques différents convergent vers deux solutions distinctes. Aucune de ces solutions ne vérifie généralement les bonnes relations de saut. Selon l'analyse menée par Hou et Lefloch dans [65], cette situation s'explique par le fait que les schémas numériques standard ne transposent pas au cadre discret les relations de saut imposées dans le cadre continu. Divers schémas non-conservatifs ont depuis été proposés à cet effet par Toumi [101] ou encore Toumi et Kumbaro [102]. Ces schémas sortent néanmoins de notre cadre d'application que nous allons maintenant développer.

Dans le cadre du modèle bifluide à sept équations, diverses modélisations (4.10) ont été proposées pour la vitesse et la pression interfaciales à la section 4.2. Suivant les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], on rappelle que ces modélisations (4.10) définissent localement tous les produits non-conservatifs



de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations. Comme nous le disions à la conclusion du chapitre 4, de telles modélisations (4.10) pour les grandeurs interfaciales ramènent la partie convective du modèle bifluide à sept équations à un cadre "presque conservatif". En conséquence, nous prenons ici le risque de ne pas suivre la méthode numérique proposée par Toumi dans [101] pour simuler les systèmes non-conservatifs. L'approche suivie par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42] est ici préférée. Cette approche consiste à adapter au cadre non-conservatif du modèle bifluide à sept équations certains schémas classiques issus du cadre conservatif. Dans un premier temps, la discrétisation Volumes Finis du système (7.2) est effectuée. On y décrit comme à la section précédente la réduction d'un problème multidimensionnel global à une succession de problèmes de Riemann monodimensionnels locaux. La solution exacte de ces problèmes de Riemann étant pour l'instant hors de portée, nous ne pouvons réaliser l'adaptation non-conservative du schéma de Godunov [53]. Suivant les travaux de Hérard [59, 60] repris par Saurel et Abgrall dans [93], on s'intéresse alors à l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov [92]. L'adaptation non-conservative d'un solveur de Riemann approché est ensuite envisagée. Un nouveau schéma de la famille VFRoe-ncv est alors proposé en variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ . Sous les hypothèses 1 et 2, nous montrons que ces deux schémas préservent les équilibres liquide-vapeur. Pour nos modélisations particulières (4.10) des grandeurs interfaciales  $P_i, V_i$ , nous vérifierons numériquement au chapitre 8 que ces différents schémas convergent vers une même solution.

### 7.2.1 La discrétisation Volumes Finis

Dans un premier temps, on s'intéresse à la discrétisation Volumes Finis du système (7.2) avec les mêmes notations qu'à la section précédente. De manière analogue au cadre conservatif, une telle discrétisation pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations s'appuie sur la formulation intégrale du système (7.2) :

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{V_j} [\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W] dV dt = 0.$$

Cette section s'intéresse aux modifications induites par l'introduction des termes non-conservatifs.

Pour discrétiser les termes non-conservatifs, une valeur moyenne de maille demande tout d'abord à être introduites pour le tenseur interfacial  $C$ . Cette valeur moyenne de maille  $C_j$  est définie par la relation

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{V_j} C(W) : \nabla W dV dt = C_j : \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{V_j} \nabla W dV dt.$$

Pour cette définition de la valeur moyenne de maille associée au tenseur interfacial  $C$ , la discrétisation Volumes Finis du système (7.2) est alors simplifiée par l'application du théorème d'Ostrogradski et de la formule de Gauss :

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\int_{V_j} W(t_{n_1+1}, x) dV = \int_{V_j} W(t_{n_1}, x) dV - \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{\partial V_j} F[W(t, x)] \cdot dS dt - C_j : \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{\partial V_j} W(t, x) \otimes dS dt.$$

Pour tout  $n_1 \geq 0$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$  et pour tout  $l \in \{1, \dots, N_j\}$ , rappelons la définition de la valeur moyenne de maille  $W_j^{n_1}$  associée à la variable d'état  $W$ , et la définition du flux numérique  $\mathcal{F}_{j_l}$  à travers chaque interface du maillage. Ces différentes grandeurs sont définies par les relations

$$W_j^{n_1} = \frac{1}{\mathcal{V}_j} \int_{V_j} W(t_{n_1}, x) dV, \quad \mathcal{F}_{j_l} \cdot \mathcal{S}_{j_l} = \frac{1}{\delta t} \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{S_{j_l}} F[W(t, x)] dS dt.$$

Pour tout  $n_1 \geq 0$ , pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$  et pour tout  $l \in \{1, \dots, N_j\}$ , introduisons de plus la valeur moyenne à l'interface  $\mathcal{S}_{j_l}$  de la variable d'état  $W$ . Cette valeur moyenne  $\mathcal{W}_{j_l}$  satisfait la relation

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, N_j\}, \quad \mathcal{W}_{j_l} \otimes \mathcal{S}_{j_l} = \frac{1}{\delta t} \int_{t_{n_1}}^{t_{n_1+1}} \int_{S_{j_l}} W(t, x) dS dt.$$

Pour ces définitions des grandeurs  $W_j^{n_1}$ ,  $\mathcal{W}_{j_l}$  et  $\mathcal{F}_{j_l}$ , la discrétisation Volumes Finis du système (7.2) s'écrit finalement

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad W_j^{n_1+1} = W_j^{n_1} - \frac{\delta t}{\mathcal{V}_j} \sum_{l=1}^{N_j} \mathcal{F}_{j_l} \cdot S_{j_l} - \frac{\delta t}{\mathcal{V}_j} C_j \sum_{l=1}^{N_j} \mathcal{W}_{j_l} \otimes S_{j_l}. \quad (7.8)$$

Par rapport au cadre conservatif classique, cette discrétisation Volumes Finis du système (7.2) fait apparaître des termes supplémentaires liés aux produits non-conservatifs.

Dans le cadre de l'approximation Volumes Finis du système (7.2), un problème de Riemann monodimensionnel se trouve alors posé dans la direction normale à chaque interface du maillage. Le modèle bifluide à sept équations étant invariant par rotation, la suite de la présentation s'effectue par simplicité comme à la section précédente dans le cadre monodimensionnel d'un maillage cartésien régulier. Avec les mêmes notations qu'à la section 7.1, la discrétisation Volumes Finis (7.8) se réécrit dans ce cadre monodimensionnel

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$W_j^{n_1+1} = W_j^{n_1} - \frac{\delta t}{\delta x} \left( \mathcal{F}_{j+1/2} - \mathcal{F}_{j-1/2} \right) - \frac{\delta t}{\delta x} C_j \left( \mathcal{W}_{j+1/2} - \mathcal{W}_{j-1/2} \right), \quad (7.9)$$

où  $\mathcal{W}_{j+1/2}$  désigne la valeur moyenne à l'interface  $x_{j+1/2}$  de la variable d'état  $W$ . Au sein de cette discrétisation, la formulation des grandeurs  $\mathcal{F}_{j+1/2}$ ,  $\mathcal{W}_{j+1/2}$  et  $C_j$  est inconnue. Dans le cadre des méthodes à trois points explicites en temps, plusieurs schémas classiques ont été rappelés à la section précédente pour réaliser l'approximation des systèmes de lois de conservation sous forme conservative. Nous en présentons maintenant l'adaptation au cadre non-conservatif du modèle bifluide à sept équations.

## 7.2.2 Une adaptation non-conservative du schéma de Rusanov

A la section 7.1.3, un premier schéma numérique a été présenté dans un cadre conservatif. Il s'agit du très classique schéma de Rusanov [92]. Ce schéma se caractérise par une définition explicite du flux numérique  $\mathcal{F}_{j+1/2}$ . Dans le cadre des modèles de turbulence compressible, une adaptation non-conservative du schéma de Rusanov a déjà été proposée par Hérard dans [59, 60]. Dans le cadre du modèle bifluide à sept équations, cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov a depuis été réutilisée par Saurel, Abgrall [93], Gallouët, Hérard et Seguin [42]. Cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov s'appuie similairement sur une définition explicite des grandeurs  $C_j$  et  $\mathcal{W}_{j+1/2}$ . Pour tout  $n_1 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $r_j^{n_1}$  le rayon spectral de la matrice  $[\nabla_W F(W) + C(W)](W_j^{n_1})$ . Cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov s'écrit

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{j+1/2} &= \frac{1}{2} \left[ F(W_{j+1}^{n_1}) + F(W_j^{n_1}) - r_{j+1/2} (W_{j+1}^{n_1} - W_j^{n_1}) \right], \\ \mathcal{W}_{j+1/2} &= \frac{1}{2} \left[ W_{j+1}^{n_1} + W_j^{n_1} \right], \quad r_{j+1/2} = \max \left[ r_{j+1}^{n_1}, r_j^{n_1} \right], \\ C_j &= C(W_j^{n_1}). \end{cases} \quad (7.10)$$

Dans [42], Gallouët, Hérard et Seguin ont déjà montré que ce schéma préserve la positivité des fractions volumiques et des masses partielles. Sous les hypothèses 1 et 2, nous établissons par ailleurs ici que ce schéma préserve les équilibres liquide-vapeur. Les différentes propriétés de ce schéma sont alors regroupées à la proposition 16.

**Proposition 16.** Pour  $n_1 \geq 0$ , soit  $R_{max} = \max_{j \in \{1, \dots, N\}} (r_j^{n_1})$  tel que

$$\frac{\delta t R_{max}}{\delta x} \leq 1. \quad (7.11)$$

Sous la condition de Courant-Friedrich-Levy (7.11), l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov (7.9) (7.10) assure la positivité des fractions volumiques et des masses partielles. Sous l'hypothèse 1,

cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov préserve par ailleurs les équilibres isobares isothermes équivitesses. Sous les hypothèses 1 et 2, cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov préserve également les équilibres liquide-vapeur.

**Démonstration.** L'ensemble des propriétés regroupées à la proposition 16 se démontre par récurrence. Soit  $n_1 \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $W_j^{n_1}$  un état admissible de  $\mathbb{R}^7$ . Suivant la discrétisation (7.9) de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations, les fractions volumiques et les masses partielles satisfont les équations

$$\begin{aligned} \forall k = 1, 2, \quad \forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \\ (\alpha_k)_j^{n_1+1} &= \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (\alpha_k)_j^{n_1} \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j+1/2} - (V_i)_j^{n_1}] (\alpha_k)_{j+1}^{n_1} + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j-1/2} + (V_i)_j^{n_1}] (\alpha_k)_{j-1}^{n_1}, \\ (m_k)_j^{n_1+1} &= \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (m_k)_j^{n_1} \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j+1/2} - (u_k)_{j+1}^{n_1}] (m_k)_{j+1}^{n_1} + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j-1/2} + (u_k)_{j-1}^{n_1}] (m_k)_{j-1}^{n_1}. \end{aligned}$$

Soit  $R_{\max} = \max_{j \in \{1, \dots, N\}} (r_j^{n_1})$ . Sous la condition de Courant-Friedrich-Levy (7.11), l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov (7.9) (7.10) assure la positivité des fractions volumiques et des masses partielles. Suivant la discrétisation (7.9) de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations, écrivons par ailleurs les équations discrètes satisfaites par les vitesses et les énergies totales :

$$\begin{aligned} \forall k = 1, 2, \quad \forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \\ (m_k)_j^{n_1+1} (u_k)_j^{n_1+1} &= \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (m_k)_j^{n_1} (u_k)_j^{n_1} + \frac{\delta t}{2 \delta x} [(P_i)_j^{n_1} - (P_k)_{j+1}^{n_1}] (\alpha_k)_{j+1}^{n_1} \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j+1/2} - (u_k)_{j+1}^{n_1}] (m_k)_{j+1}^{n_1} (u_k)_{j+1}^{n_1} - \frac{\delta t}{2 \delta x} [(P_i)_j^{n_1} - (P_k)_{j-1}^{n_1}] (\alpha_k)_{j-1}^{n_1} \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j-1/2} + (u_k)_{j-1}^{n_1}] (m_k)_{j-1}^{n_1} (u_k)_{j-1}^{n_1}, \\ (m_k)_j^{n_1+1} (E_k)_j^{n_1+1} &= \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (m_k)_j^{n_1} (E_k)_j^{n_1} + \frac{\delta t}{2 \delta x} [(P_i V_i)_j^{n_1} - (P_k u_k)_{j+1}^{n_1}] (\alpha_k)_{j+1}^{n_1} \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j+1/2} - (u_k)_{j+1}^{n_1}] (m_k)_{j+1}^{n_1} (E_k)_{j+1}^{n_1} - \frac{\delta t}{2 \delta x} [(P_i V_i)_j^{n_1} - (P_k u_k)_{j-1}^{n_1}] (\alpha_k)_{j-1}^{n_1} \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j-1/2} + (u_k)_{j-1}^{n_1}] (m_k)_{j-1}^{n_1} (E_k)_{j-1}^{n_1}. \end{aligned}$$

Supposons l'existence d'un équilibre isobare isotherme équivitesse entre les phases à l'instant  $n_1 \geq 0$  :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} (P_k)_{j-1}^{n_1} = (P_k)_j^{n_1} = (P_k)_{j+1}^{n_1} = P_0, \\ (T_k)_{j-1}^{n_1} = (T_k)_j^{n_1} = (T_k)_{j+1}^{n_1} = T_0, \\ (u_k)_{j-1}^{n_1} = (u_k)_j^{n_1} = (u_k)_{j+1}^{n_1} = u_0. \end{cases}$$

Suivant notre modélisation de la vitesse et de la pression interfaciales par des combinaisons convexes des vitesses et des pressions phasiques,  $(V_i)_j^{n_1} = u_0$  et  $(P_i)_j^{n_1} = P_0$ . L'introduction de l'équilibre isobare isotherme équivitesse dans les équations discrètes portant sur les fractions volumiques et les masses partielles conduit par élimination à la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad \rho_k \left( (P_k)_j^{n_1+1}, (T_k)_j^{n_1+1} \right) = \rho_k(P_0, T_0).$$

Introduisons similairement l'équilibre isobare isotherme équivitesse dans les équations discrètes portant sur les masses partielles et les quantités de mouvement. Par élimination, on obtient la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad (u_k)_j^{n_1+1} = u_0.$$

L'introduction de l'équilibre isobare isotherme équivitesse dans les équations discrètes portant sur les masses partielles et les énergies totales conduit enfin par élimination à la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad (E_k)_j^{n_1+1} = e_k(P_0, T_0) + \frac{1}{2} u_0^2 \quad \Longrightarrow \quad e_k\left((P_k)_j^{n_1+1}, (T_k)_j^{n_1+1}\right) = e_k(P_0, T_0).$$

En résumé, l'introduction de l'équilibre isobare isotherme équivitesse dans les équations discrètes du schéma de Rusanov conduit au système non-linéaire

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} (u_k)_j^{n_1+1} & = u_0, \\ \rho_k\left((P_k)_j^{n_1+1}, (T_k)_j^{n_1+1}\right) & = \rho_k(P_0, T_0), \\ e_k\left((P_k)_j^{n_1+1}, (T_k)_j^{n_1+1}\right) & = e_k(P_0, T_0). \end{cases}$$

Sous l'hypothèse 1, ce système est inversible. Il admet l'unique solution

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad (u_k)_j^{n_1+1} = u_0, \quad (P_k)_j^{n_1+1} = P_0, \quad (T_k)_j^{n_1+1} = T_0.$$

L'équilibre isobare isotherme équivitesse est donc bien préservé entre les phases. Dans le cadre de l'hypothèse 2, l'équilibre isobare isotherme équipotentiel est un équilibre isobare isotherme particulier. Cette préservation des équilibres diphasiques s'étend donc au cadre des écoulements liquide-vapeur. ■

### 7.2.3 Une adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv

Dans le cadre de l'approximation Volumes Finis de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations, rappelons qu'un problème de Riemann se trouve posé à chaque interface du maillage, à chaque pas de temps. Ce problème de Riemann s'écrit

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = 0, \\ W(t_{n_1}, x) = \begin{cases} W_j^{n_1} & \text{si } x < x_{j+1/2}, \\ W_{j+1}^{n_1} & \text{si } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (7.12)$$

A ce jour, aucune formulation explicite d'une solution exacte à ce problème de Riemann non-conservatif et résonant n'a été portée à notre attention. Une extension non-conservative du schéma de Godunov [53] au modèle bifluide à sept équations n'est donc pas à l'ordre du jour. Cette section s'intéresse en conséquence à la résolution approchée du problème (7.12). Dans la littérature, plusieurs solveurs de Riemann approchés issus du cadre conservatif ont déjà été adaptés au cadre non-conservatif du modèle bifluide à sept équations. Une adaptation non-conservative du schéma HLL de Harten, Lax et Van Leer [57] est par exemple utilisée par Saurel et Abgrall dans [93]. Suivant les travaux de Hérard [59], Karni, Kirr, Kurganov et Petrova utilisent différemment dans [72] une adaptation non-conservative du schéma de Roe [90]. On s'intéresse ici à l'adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv [18]. Dans le cadre des modèles de turbulence compressible, une telle adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv a déjà été présentée par Buffard, Gallouët et Hérard [17]. On s'intéresse ici à son implémentation dans le cadre du modèle bifluide à sept équations.

De manière analogue à la section 7.1, soit  $Y$  une variable a priori non-conservative du système (7.2) et soit  $\psi$  le  $C^1$  difféomorphisme  $\psi: W \rightarrow Y$ . Pour cette définition du changement de variables  $\psi$ , on redéfinit la matrice  $H(Y) = [\nabla_Y W(Y)]^{-1} \cdot [\nabla_W F(W(Y)) + C(W(Y))] \cdot [\nabla_Y W(Y)]$ . Suivant Buffard, Gallouët et

Hérard [17], l'adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv s'intéresse à la résolution approchée du problème de Riemann

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \partial_t Y + H(Y) \partial_x Y = 0, \\ Y(t_{n_1}, x) = \begin{cases} Y_j^{n_1} & = \Psi(W_j^{n_1}) & \text{si } x < x_{j+1/2}, \\ Y_{j+1}^{n_1} & = \Psi(W_{j+1}^{n_1}) & \text{si } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases}$$

Comme à la section précédente, soit  $\tilde{Y}_{j+1/2}(Y_j^{n_1}, Y_{j+1}^{n_1})$  une moyenne particulière sur les états  $Y_j^{n_1}$  et  $Y_{j+1}^{n_1}$  telle que  $\tilde{Y}_{j+1/2}(Y, Y) = Y$ . L'adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv effectue la résolution exacte du problème de Riemann linéarisé

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \partial_t Y + H(\tilde{Y}_{j+1/2}) \partial_x Y = 0, \\ Y(t_{n_1}, x) = \begin{cases} Y_j^{n_1} & \text{si } x < x_{j+1/2}, \\ Y_{j+1}^{n_1} & \text{si } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (7.13)$$

Rappelons la définition  $(\tilde{\lambda}_p)$ ,  $(\tilde{R}_p)$ ,  $(\tilde{L}_p)$  des valeurs propres, vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice  $H(\tilde{Y}_{j+1/2})$ . Avec les mêmes notations qu'à la section précédente, la solution exacte du problème de Riemann linéarisé (7.13) à l'interface  $x_{j+1/2}$  s'écrit

$$Y_{j+1/2}^* = Y_j^{n_1} + \sum_{\tilde{\lambda}_p < 0} [\tilde{L}_p \cdot (Y_{j+1}^{n_1} - Y_j^{n_1})] \tilde{R}_p = Y_{j+1}^{n_1} - \sum_{\tilde{\lambda}_p > 0} [\tilde{L}_p \cdot (Y_{j+1}^{n_1} - Y_j^{n_1})] \tilde{R}_p.$$

Selon Buffard, Gallouët et Hérard [17], l'adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv s'écrit finalement

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{j+1/2} & = F[W(Y_{j+1/2}^*)], \\ \mathcal{W}_{j+1/2} & = W(Y_{j+1/2}^*), \\ c_j & = \frac{1}{2} \left( C[W(Y_{j+1/2}^*)] + C[W(Y_{j-1/2}^*)] \right). \end{cases} \quad (7.14)$$

A la suite d'Andrianov, Saurel et Warnecke [4] et pour des raisons de commodité informatique, nous préférons ici utiliser l'adaptation non-conservative (7.15) du schéma VFRoe-ncv :

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{j+1/2} & = F[W(Y_{j+1/2}^*)], \\ \mathcal{W}_{j+1/2} & = W(Y_{j+1/2}^*), \\ c_j & = C(W_j^{n_1}). \end{cases} \quad (7.15)$$

Les différences entre ces deux adaptations non-conservatives (7.14) et (7.15) du schéma VFRoe-ncv sont commentées à la remarque 12. On s'intéresse uniquement par la suite à l'adaptation non-conservative (7.15) du schéma VFRoe-ncv. Les propriétés de cette adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv dépendent de la linéarisation  $\tilde{Y}_{j+1/2}$  et du changement de variables  $\psi$ . A la suite d'Andrianov, Saurel et Warnecke [4], on retient la linéarisation

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \tilde{Y}_{j+1/2} = \frac{Y_{j+1}^{n_1} + Y_j^{n_1}}{2}. \quad (7.16)$$

Un nouveau changement de variables est néanmoins proposé. Dans [4], Andrianov, Saurel et Warnecke optent pour le changement de variables  $\psi : W \rightarrow Y = (\alpha_2, \rho_2, u_2, P_2, \rho_1, u_1, P_1)^t$ . Dans [42], Gallouët, Hérard et Seguin recourent différemment au changement de variables  $\psi : W \rightarrow Y = (\alpha_2, s_2, u_2, P_2, s_1, u_1, P_1)^t$ . Suivant l'étude des transferts interfaciaux réalisée aux chapitres 5 et 6, nous proposons ici d'utiliser le changement de variables  $\psi : W \rightarrow Y = (\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)^t$ . Les propriétés de cette nouvelle adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv en variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$  sont alors présentées à la proposition 17.

**Proposition 17.** *Sous l'hypothèse 1, l'adaptation non-conservative (7.9) (7.15) (7.16) du schéma VFRoe-ncv en variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$  préserve les équilibres isobares isothermes équivitesses. Sous les hypothèses 1 et 2, cette adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv en variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$  préserve par ailleurs les équilibres liquide-vapeur.*

**Démonstration.** La preuve de la proposition 17 s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, on s'intéresse à la structure propre de la matrice  $H$ . Cette structure propre nous permet de calculer la solution exacte au problème de Riemann linéarisé (7.13). Une fois cette solution exacte calculée, la préservation des équilibres isobares isothermes (équipotentiels) équivitesses peut alors être montrée par récurrence. Une telle récurrence fait l'objet de la seconde partie de cette démonstration.

Soit  $Y = (\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)^t$ . On s'intéresse dans un premier temps à la structure propre de la matrice  $H(Y) = [\nabla_Y W(Y)]^{-1} \cdot [\nabla_W F(W(Y)) + C(W(Y))] \cdot [\nabla_Y W(Y)]$ . Pour expliciter cette structure propre, plusieurs coefficients thermodynamiques sont tout d'abord introduits. Pour  $k = 1, 2$ , ces coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\begin{aligned} J_{T_k} &= \rho_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \widehat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}, & A_k &= \frac{J_{T_k}}{\alpha_k} + \frac{(P_i - P_k)}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \\ B_k &= \frac{\widehat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & \chi_k &= A_k + \frac{J_{T_k} \left[ B_k - \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) \right]}{\rho_k \left[ (u_k - V_i)^2 - c_k^2 \right]}, \\ \zeta_k &= \frac{(u_k - V_i) \left[ B_k - \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) \right]}{\rho_k \left[ (u_k - V_i)^2 - c_k^2 \right]}, & \xi_k &= \frac{c_k^2 \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) - (u_k - V_i)^2 B_k}{(u_k - V_i)^2 - c_k^2}, \\ H_{T_k} &= (-1)^k A_k (u_k - V_i), & H_{u_k} &= (-1)^k \frac{P_k - P_i}{m_k}, & H_{P_k} &= (-1)^k B_k (u_k - V_i). \end{aligned}$$

Ces différents coefficients thermodynamiques interviennent dans l'écriture de la matrice

$$H(Y) = \begin{pmatrix} V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{T_2} & u_2 & J_{T_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{u_2} & 0 & u_2 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ H_{P_2} & 0 & \rho_2 c_2^2 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ H_{T_1} & 0 & 0 & 0 & u_1 & J_{T_1} & 0 \\ H_{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & \tau_1 \\ H_{P_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 c_1^2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Dans l'étude de la structure propre associée à la matrice  $H$ , on retrouve tout d'abord le spectre classique de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= V_i, \\ \lambda_1 &= u_2 - c_2, & \lambda_2 &= u_2, & \lambda_3 &= u_2 + c_2, \\ \lambda_4 &= u_1 - c_1, & \lambda_5 &= u_1, & \lambda_6 &= u_1 + c_1. \end{aligned}$$

On détermine ensuite l'ensemble des vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice  $H$ . Les vecteurs

propres à droite sont regroupés dans la matrice colonne

$$(R_p)_{p \in \{0, \dots, 6\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\chi_2 & -J_{T_2} & 1 & J_{T_2} & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_2 & c_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & -\rho_2 c_2^2 & 0 & \rho_2 c_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_1 & 0 & 0 & 0 & -J_{T_1} & 1 & J_{T_1} \\ -\zeta_1 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & c_1 \\ -\xi_1 & 0 & 0 & 0 & -\rho_1 c_1^2 & 0 & \rho_1 c_1^2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres à gauche sont regroupés dans la matrice ligne

$$(L_p)_{p \in \{0, \dots, 6\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_2}{c_2} - \frac{\xi_2}{\widehat{\gamma}_2 P_2} \right) & 0 & \frac{1}{2c_2} & -\frac{1}{2\widehat{\gamma}_2 P_2} & 0 & 0 & 0 \\ \chi_2 + \frac{J_{T_2} \xi_2}{\widehat{\gamma}_2 P_2} & 1 & 0 & -\frac{J_{T_2}}{\widehat{\gamma}_2 P_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_2}{c_2} + \frac{\xi_2}{\widehat{\gamma}_2 P_2} \right) & 0 & \frac{1}{2c_2} & \frac{1}{2\widehat{\gamma}_2 P_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_1}{c_1} - \frac{\xi_1}{\widehat{\gamma}_1 P_1} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2c_1} & -\frac{1}{2\widehat{\gamma}_1 P_1} \\ -\left( \chi_1 + \frac{J_{T_1} \xi_1}{\widehat{\gamma}_1 P_1} \right) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{J_{T_1}}{\widehat{\gamma}_1 P_1} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\zeta_1}{c_1} + \frac{\xi_1}{\widehat{\gamma}_1 P_1} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2c_1} & \frac{1}{2\widehat{\gamma}_1 P_1} \end{pmatrix}.$$

Le détail de cette structure propre nous permet d'envisager la résolution exacte du problème de Riemann linéarisé (7.13). L'adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv en variable  $Y = (\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)^t$  peut alors être directement codée.

Maintenant la structure propre de la matrice  $H$  détaillée, supposons l'existence d'un équilibre isobare isotherme équivitesse entre les phases à l'instant  $n_1 \geq 0$  :

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} (P_k)_{j-1}^{n_1} = (P_k)_j^{n_1} = (P_k)_{j+1}^{n_1} = P_0, \\ (T_k)_{j-1}^{n_1} = (T_k)_j^{n_1} = (T_k)_{j+1}^{n_1} = T_0, \\ (u_k)_{j-1}^{n_1} = (u_k)_j^{n_1} = (u_k)_{j+1}^{n_1} = u_0. \end{cases}$$

L'introduction de l'équilibre isobare isotherme équivitesse dans la linéarisation (7.16) du problème de Riemann posé à chaque interface du maillage s'écrit

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \widetilde{Y}_{j+1/2} = \frac{Y_{j+1}^{n_1} + Y_j^{n_1}}{2} = \left[ \frac{(\alpha_2)_{j+1}^{n_1} + (\alpha_2)_j^{n_1}}{2}, T_0, u_0, P_0, T_0, u_0, P_0 \right]^t.$$

Suivant notre modélisation de la vitesse et de la pression interfaciales par des combinaisons convexes des vitesses et des pressions phasiques,  $(V_i)_j^{n_1} = u_0$ ,  $V_i(\widetilde{Y}_{j+1/2}) = u_0$ ,  $(P_i)_j^{n_1} = P_0$  et  $P_i(\widetilde{Y}_{j+1/2}) = P_0$ . Certains coefficients thermodynamiques s'annulent alors au sein de la matrice  $H(\widetilde{Y}_{j+1/2})$ . Pour  $k = 1, 2$ , ces coefficients thermodynamiques s'écrivent,  $\chi_k(\widetilde{Y}_{j+1/2}) = 0$ ,  $\zeta_k(\widetilde{Y}_{j+1/2}) = 0$  et  $\xi_k(\widetilde{Y}_{j+1/2}) = 0$ . Calculons pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$  l'écart  $dY_{j+1/2}$  entre les états situés à droite et à gauche de l'interface  $x_{j+1/2}$  :

$$\forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad dY_{j+1/2} = Y_{j+1}^{n_1} - Y_j^{n_1} = \left[ (\alpha_2)_{j+1}^{n_1} - (\alpha_2)_j^{n_1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^t.$$

La solution du problème de Riemann linéarisé (7.13) satisfait pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$(T_2)_{j+1/2}^* = (T_1)_{j+1/2}^* = T_0, \quad (P_2)_{j+1/2}^* = (P_1)_{j+1/2}^* = P_0, \quad (u_2)_{j+1/2}^* = (u_1)_{j+1/2}^* = u_0.$$

Détaillons successivement pour  $k = 1, 2$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$  les équations discrètes vérifiées par les fractions volumiques, les masses partielles, les vitesses et les énergies totales de chaque phase :

$$\begin{aligned}
(\alpha_k)_j^{n_1+1} &= (\alpha_k)_j^{n_1} - \frac{\delta t}{\delta x} (V_i)_j^{n_1} \left[ (\alpha_k)_{j+1/2}^* - (\alpha_k)_{j-1/2}^* \right], \\
(m_k)_j^{n_1+1} &= (m_k)_j^{n_1} - \frac{\delta t}{\delta x} \left[ (m_k)_{j+1/2}^* (u_k)_{j+1/2}^* - (m_k)_{j-1/2}^* (u_k)_{j-1/2}^* \right], \\
(m_k)_j^{n_1+1} (u_k)_j^{n_1+1} &= (m_k)_j^{n_1} (u_k)_j^{n_1} + \frac{\delta t}{\delta x} (P_i)_j^{n_1} \left[ (\alpha_k)_{j+1/2}^* - (\alpha_k)_{j-1/2}^* \right] \\
&\quad - \frac{\delta t}{\delta x} \left[ (m_k)_{j+1/2}^* \left[ (u_k)_{j+1/2}^* \right]^2 + (\alpha_k)_{j+1/2}^* (P_k)_{j+1/2}^* \right] \\
&\quad + \frac{\delta t}{\delta x} \left[ (m_k)_{j-1/2}^* \left[ (u_k)_{j-1/2}^* \right]^2 + (\alpha_k)_{j-1/2}^* (P_k)_{j-1/2}^* \right], \\
(m_k)_j^{n_1+1} (E_k)_j^{n_1+1} &= (m_k)_j^{n_1} (E_k)_j^{n_1} + \frac{\delta t}{\delta x} (P_i)_j^{n_1} (V_i)_j^{n_1} \left[ (\alpha_k)_{j+1/2}^* - (\alpha_k)_{j-1/2}^* \right] \\
&\quad - \frac{\delta t}{\delta x} \left[ \left( (m_k)_{j+1/2}^* (E_k)_{j+1/2}^* + (\alpha_k)_{j+1/2}^* (P_k)_{j+1/2}^* \right) (u_k)_{j+1/2}^* \right] \\
&\quad + \frac{\delta t}{\delta x} \left[ \left( (m_k)_{j-1/2}^* (E_k)_{j-1/2}^* + (\alpha_k)_{j-1/2}^* (P_k)_{j-1/2}^* \right) (u_k)_{j-1/2}^* \right].
\end{aligned}$$

De même que pour l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov, l'introduction de l'équilibre isobare isotherme équivitesse dans les équations discrètes du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv conduit au système non-linéaire

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} (u_k)_j^{n_1+1} &= u_0, \\ \rho_k \left( (P_k)_j^{n_1+1}, (T_k)_j^{n_1+1} \right) &= \rho_k(P_0, T_0), \\ e_k \left( (P_k)_j^{n_1+1}, (T_k)_j^{n_1+1} \right) &= e_k(P_0, T_0). \end{cases}$$

Sous l'hypothèse 1, ce système est inversible. Il admet l'unique solution

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad (u_k)_j^{n_1+1} = u_0, \quad (P_k)_j^{n_1+1} = P_0, \quad (T_k)_j^{n_1+1} = T_0.$$

L'adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv en variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$  préserve donc les équilibres isobares isothermes équivitesse. Sous l'hypothèse 2, cette propriété s'étend naturellement aux équilibres liquide-vapeur. ■

**Remarque 12.** Dans cette section, une adaptation non-conservative particulière du schéma VFRoe-ncv a été adoptée. Suivant les travaux d'Andrianov, Saurel et Warnecke [4], cette adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv s'écrit

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{j+1/2} &= F \left[ W(Y_{j+1/2}^*) \right], \\ \mathcal{W}_{j+1/2} &= W(Y_{j+1/2}^*), \\ c_j &= C(W_j^{n_1}). \end{cases} \quad (7.15)$$

Une telle adaptation non-conservative (7.15) du schéma VFRoe-ncv diffère de l'adaptation non-conservative (7.14) initialement proposée par Buffard, Gallouët et Hérard [17] :

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{j+1/2} &= F \left[ W(Y_{j+1/2}^*) \right], \\ \mathcal{W}_{j+1/2} &= W(Y_{j+1/2}^*), \\ c_j &= \frac{1}{2} \left( C \left[ W(Y_{j+1/2}^*) \right] + C \left[ W(Y_{j-1/2}^*) \right] \right). \end{cases} \quad (7.14)$$



A titre comparatif, ces deux adaptations non-conservatives (7.14) (7.15) du schéma VFRoe-ncv se distinguent par leur discrétisation du tenseur  $C$ . Initialement proposée par Buffard, Gallouët et Hérard [17], l'adaptation non-conservative (7.14) du schéma VFRoe-ncv découle d'une analyse effectuée sur l'équation de Burgers :  $\partial_t f + \partial_x (f^2/2) = 0$ . Cette analyse est ici brièvement rappelée. Dans un premier temps, l'équation de Burgers se présente sous une forme conservative. Dans le cadre du schéma VFRoe-ncv standard, la discrétisation de cette équation conservative s'écrit

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad f_j^{n_1+1} = f_j^{n_1} - \frac{\delta t}{\delta x} \left[ \frac{(f_{j+1/2}^*)^2}{2} - \frac{(f_{j-1/2}^*)^2}{2} \right]. \quad (7.17)$$

Pour des solutions régulières, l'équation de Burgers s'écrit par ailleurs de manière équivalente sous la forme non-conservative  $\partial_t f + f \partial_x f = 0$ . L'adaptation non-conservative (7.14) du schéma VFRoe-ncv pour cette formulation non-conservative de l'équation de Burgers s'écrit alors

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad f_j^{n_1+1} = f_j^{n_1} - \frac{\delta t}{\delta x} \frac{(f_{j+1/2}^* + f_{j-1/2}^*)}{2} (f_{j+1/2}^* - f_{j-1/2}^*). \quad (7.18)$$

Dans le cadre conservatif de l'équation de Burgers, Buffard, Gallouët et Hérard ont proposé l'adaptation non-conservative (7.14) du schéma VFRoe-ncv pour que la discrétisation (7.18) s'identifie à la discrétisation (7.17). Cette analyse menée dans le cadre conservatif de l'équation de Burgers ne se transpose a priori pas dans le cadre non-conservatif du modèle bifluide à sept équations. Voilà pourquoi une adaptation non-conservative différente du schéma VFRoe-ncv a été adoptée dans cette section. L'adaptation non-conservative (7.15) du schéma VFRoe-ncv est plus simple à implémenter informatiquement. En ce qui concerne la préservation des équilibres diphasiques, on remarque cependant que la proposition 17 est indifféremment vérifiée pour les adaptations non-conservatives (7.14) et (7.15) du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv.

En résumé, les deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv présentées dans cette section s'avèrent particulièrement intéressantes pour la simulation des écoulements diphasiques. Au vu des relaxations étudiées aux chapitres 5 et 6, les différents états d'équilibre isobares isothermes (équipotentiels) équivitesses vont pouvoir être préservés par l'étape de convection. Ces différents schémas n'assurent cependant pas l'admissibilité globale des solutions discrètes. De tels schémas peuvent donc poser problème au voisinage des domaines monophasiques ou des zones de vide.

### 7.3 Approximation des transferts interfaciaux

Dans cette section, on s'intéresse maintenant à la seconde étape de notre méthode à pas fractionnaires. Cette seconde étape réalise l'approximation des transferts interfaciaux. Dans le cadre Volumes Finis, cette seconde étape consiste en l'intégration du système dynamique (7.3) dans chaque cellule du maillage :

$$d_t W = S(W). \quad (7.3)$$

Une telle intégration dépend de la modélisation bifluide retenue. Soit  $\delta t$  le pas de temps issu de l'étape de convection. Si aucun équilibre partiel n'est supposé entre les phases, l'intégration du système (7.3) sur la durée  $\delta t$  s'effectue en une étape à la sortie du pas de convection. Supposons différemment un équilibre partiel entre les phases. Du point de vue du modèle à sept équations, un tel équilibre partiel se caractérise par une relaxation instantanée en certaines variables de l'écoulement. Une méthode de relaxation instantanée a justement été proposée au chapitre 6 pour simuler les modèles bifluides partiellement équilibrés par le biais du modèle à sept équations. Lorsqu'un tel équilibre partiel est supposé entre les phases, les différents termes de relaxation instantanée se découplent spontanément des transferts sur temps long. L'intégration du système (7.3) s'effectue alors en deux temps. A la sortie du pas de convection, une première étape de projection rétablit l'équilibre partiel entre les phases. Cette première étape consiste en l'intégration des termes de relaxation instantanée jusqu'à convergence sur l'équilibre partiel. Une fois cet équilibre partiel établi,

les transferts sur temps long sont intégrés dans une seconde étape sur la durée  $\delta t$  du pas de convection.

Quelle que soit la modélisation bifluide envisagée, l'ensemble des systèmes de type (7.3) présente des caractéristiques communes. Ils possèdent tous des invariants tels la masse, la quantité de mouvement ou l'énergie totale de mélange. Ils décrivent tous l'évolution de variables d'écart à l'équilibre telles la différence de pression, de vitesse, etc. La question se pose alors de construire des schémas d'intégration qui simultanément convergent vers les équilibres du système (7.3), préservent les invariants de ce système et assurent l'admissibilité de la solution discrète. Dans la littérature, divers travaux se sont déjà intéressés à l'intégration des systèmes de type (7.3). En ce qui concerne la relaxation instantanée en pression, Lallemand, Saurel [77], Hérard et Hurisse [62] ont déjà proposé diverses méthodes de projection sur l'équilibre isobare. Saurel et Abgrall se sont différemment intéressés dans [93] à la projection sur l'équilibre isobare équivitesse. En ce qui concerne les transferts interfaciaux sur temps long, Gallouët, Hérard et Seguin [42] se sont quant à eux penchés sur l'approximation des transferts de quantité de mouvement et de fraction volumique entre les phases. L'ensemble des méthodes proposées dans la littérature par ces différents auteurs visent généralement à assurer l'admissibilité des solutions discrètes. De telles méthodes ne préservent cependant généralement pas les invariants du système (7.3). Pour palier ce problème, un nouveau schéma d'intégration est proposé dans cette section. Ce nouveau schéma d'intégration converge vers les équilibres du système (7.3) tout en préservant ses contraintes. Le principe de ce schéma d'intégration est simple. Il consiste en la définition d'une contraction sur les variables d'écart à l'équilibre, puis en la résolution du système algébrique des contraintes.

Par souci de clarté, seuls deux exemples d'application monodimensionnels sont développés dans cette section. Ces deux exemples nous permettent d'aborder l'ensemble des modélisations bifluides hors équilibre ou partiellement équilibrées, avec ou sans transition de phase. Une fois les principes de ce schéma d'intégration assimilés, son extension à d'autres cadres d'application est immédiate. Cette section s'organise de la manière suivante. La description d'un écoulement liquide-gaz est tout d'abord envisagée par le biais du modèle bifluide à sept équations. Le premier paragraphe de cette section s'intéresse à l'approximation des différents transferts de chaleur, de quantité de mouvement et de fraction volumique sur temps long. La description partiellement équilibrée d'un écoulement liquide-vapeur est ensuite envisagée par le biais du modèle bifluide isobare à six équations. Le second paragraphe de cette section illustre alors la méthode de relaxation instantanée en pression développée au chapitre 6. L'approximation sur temps long des différents transferts de chaleur, de masse et de quantité de mouvement est étudiée pour finir.

### 7.3.1 Un schéma d'intégration pour la dynamique des transferts interfaciaux sans transition de phase d'un modèle bifluide à deux pressions

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à l'approximation des transferts interfaciaux pour un écoulement liquide-gaz sans transfert de masse décrit par le modèle bifluide à sept équations. De manière analogue au chapitre 5, soit  $\rho = \sum_k m_k$ ,  $\rho V = \sum_k m_k u_k$ ,  $\rho E = \sum_k m_k E_k$ ,  $\Delta u = u_2 - u_1$ ,  $\Delta P = P_2 - P_1$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1$  respectivement la masse, la quantité de mouvement, l'énergie totale du mélange et l'écart de vitesse, de pression et de température entre les phases. Pour étudier ces interactions diphasiques, plusieurs coefficients thermodynamiques demandent tout d'abord à être rappelés. Déjà introduits à la figure 5.1, ces différents coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{uu} &= \sum_k \frac{1}{m_k}, & \mathcal{A}_{pu} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), \\ \mathcal{A}_{pp} &= \sum_k \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & \mathcal{A}_{pt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \\ \mathcal{A}_{tu} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), & \mathcal{A}_{tt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{tP} = \sum_k \frac{1}{\alpha_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \widehat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k).$$

Suivant le travail effectué à la section 5.1, les transferts interfaciaux du modèle bifluide à sept équations sans transition de phase satisfont le système dynamique

$$\begin{cases} d_t m_2 = 0, & d_t m_1 = 0, & d_t \rho V = 0, & d_t \rho E = 0, \\ d_t \Delta u = -K_U \mathcal{A}_{uu} \Delta u, \\ d_t \Delta P = -K_U \mathcal{A}_{pu} \Delta u - K_P \mathcal{A}_{pp} \Delta P - K_T \mathcal{A}_{pt} \Delta T, \\ d_t \Delta T = -K_U \mathcal{A}_{tu} \Delta u - K_P \mathcal{A}_{tp} \Delta P - K_T \mathcal{A}_{tt} \Delta T. \end{cases} \quad (5.4)$$

Pour intégrer sur la durée  $\delta t$  du pas de convection le système (5.4) dans chaque cellule du maillage, un nouveau schéma d'approximation est proposé dans cette section. Ce nouveau schéma d'intégration se décompose en deux étapes. La première est consacrée à la définition d'une contraction sur les variables d'écart à l'équilibre  $\Delta u, \Delta P, \Delta T$ . La seconde s'intéresse à la préservation des invariants pour le système (5.4). On détaille ci-dessous chacune de ces étapes.

Soit  $n_2 \in \mathbb{N}$  et  $dt > 0$  respectivement l'indice et le pas d'intégration de ce schéma numérique. Une discrétisation semi-implicite du système (5.4) est tout d'abord définie. En ce qui concerne les variables d'écart à l'équilibre  $\Delta u, \Delta P, \Delta T$ , cette discrétisation semi-implicite du système (5.4) s'écrit

$$\begin{aligned} \forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \\ \begin{cases} \Delta u_j^{n_2+1} = \Delta u_j^{n_2} - dt K_{U_j}^{n_2} \mathcal{A}_{uu_j}^{n_2} \Delta u_j^{n_2+1}, \\ \Delta P_j^{n_2+1} = \Delta P_j^{n_2} - dt K_{U_j}^{n_2} \mathcal{A}_{pu_j}^{n_2} \Delta u_j^{n_2+1} - dt K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{pp_j}^{n_2} \Delta P_j^{n_2+1} - dt K_{T_j}^{n_2} \mathcal{A}_{pt_j}^{n_2} \Delta T_j^{n_2+1}, \\ \Delta T_j^{n_2+1} = \Delta T_j^{n_2} - dt K_{U_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tu_j}^{n_2} \Delta u_j^{n_2+1} - dt K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tp_j}^{n_2} \Delta P_j^{n_2+1} - dt K_{T_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tt_j}^{n_2} \Delta T_j^{n_2+1}. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.19)$$

Pour tout  $n_2 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , définissons la matrice

$$\mathcal{A}_{PTU_j}^{n_2} = \begin{bmatrix} -K_{U_j}^{n_2} \mathcal{A}_{uu_j}^{n_2} & 0 & 0 \\ -K_{U_j}^{n_2} \mathcal{A}_{pu_j}^{n_2} & -K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{pp_j}^{n_2} & -K_{T_j}^{n_2} \mathcal{A}_{pt_j}^{n_2} \\ -K_{U_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tu_j}^{n_2} & -K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tp_j}^{n_2} & -K_{T_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tt_j}^{n_2} \end{bmatrix}.$$

La discrétisation semi-implicite (7.19) du système (5.4) définit sur les variables d'écart à l'équilibre la procédure itérative en temps

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta P \\ \Delta T \end{pmatrix}_j^{n_2+1} = \left( \text{Id} - dt \mathcal{A}_{PTU_j}^{n_2} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta P \\ \Delta T \end{pmatrix}_j^{n_2}. \quad (7.20)$$

Les propriétés de cette procédure itérative en temps sont détaillées à la proposition 18.

**Proposition 18.** *Pour tout  $n_2 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , supposons les différents coefficients thermodynamiques  $\mathcal{A}_{pp_j}^{n_2}$ ,  $\mathcal{A}_{pt_j}^{n_2}$ ,  $\mathcal{A}_{tp_j}^{n_2}$  et  $\mathcal{A}_{tt_j}^{n_2}$  en accord avec les relations*

$$\mathcal{A}_{pp_j}^{n_2} > 0, \quad \mathcal{A}_{tt_j}^{n_2} > 0, \quad \mathcal{A}_{pt_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tp_j}^{n_2} > 0, \quad \mathcal{A}_{pp_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tt_j}^{n_2} - \mathcal{A}_{pt_j}^{n_2} \mathcal{A}_{tp_j}^{n_2} > 0. \quad (7.21)$$

*La procédure itérative en temps (7.20) converge vers l'équilibre isobare isotherme équivitesse.*

**Démonstration.** La démonstration de la proposition 18 s'appuie sur le calcul du spectre associé à la matrice  $(\text{Id} - dt \mathcal{A}_{PTU_j}^{n_2})^{-1}$ . Par définition, le coefficient  $\mathcal{A}_{uu_j}^{n_2}$  est toujours strictement positif. Pour tout

$n_2 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , la matrice  $\mathcal{A}_{PTU_j}^{n_2}$  est donc définie négative à la condition que les coefficients thermodynamiques  $\mathcal{A}_{pp_j}^{n_2}$ ,  $\mathcal{A}_{pt_j}^{n_2}$ ,  $\mathcal{A}_{lp_j}^{n_2}$ ,  $\mathcal{A}_{ll_j}^{n_2}$  vérifient les relations (7.21). Sous cette condition (7.21), la procédure itérative en temps (7.20) définit une contraction sur les variables d'écart à l'équilibre. La procédure itérative en temps (7.20) converge donc vers l'équilibre isobare isotherme équivitesse. Ce dernier point termine la démonstration de la proposition 18. ■

En résumé, la convergence vers l'équilibre isobare isotherme équivitesse de la procédure itérative en temps (7.20) vient d'être établie à la proposition 18. Ce résultat est indépendant de la modélisation retenue pour les fonctions de relaxation. Un tel résultat dépend néanmoins des lois d'état utilisées dans chaque phase au travers des conditions (7.21) portant sur les coefficients thermodynamiques  $\mathcal{A}_{pp_j}^{n_2}$ ,  $\mathcal{A}_{pt_j}^{n_2}$ ,  $\mathcal{A}_{lp_j}^{n_2}$ ,  $\mathcal{A}_{ll_j}^{n_2}$ . Ces relations (7.21) sont vérifiées à l'exemple 12 pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases.

**Exemple 12.** Pour décrire le mélange diphasique, on considère dans cet exemple une loi d'état de type gaz parfait (2.2) dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques  $\gamma_2 > 1$ ,  $\gamma_1 > 1$ ,  $C_{v_2} > 0$  et  $C_{v_1} > 0$ . Pour tout  $n_2 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , les différents coefficients thermodynamiques intervenant dans le calcul du spectre associé à la matrice  $\mathcal{A}_{PTU_j}^{n_2}$  s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{uu_j}^{n_2} = \sum_k \frac{1}{m_{k_j}^{n_2}}, \\ \mathcal{A}_{pp_j}^{n_2} = \sum_k \frac{(\gamma_k - 1) P_{i_j}^{n_2}}{\alpha_{k_j}^{n_2}} + \frac{P_{k_j}^{n_2}}{\alpha_{k_j}^{n_2}}, \quad \mathcal{A}_{pt_j}^{n_2} = \sum_k \frac{\gamma_k - 1}{\alpha_{k_j}^{n_2}}, \\ \mathcal{A}_{lp_j}^{n_2} = \sum_k \frac{P_{i_j}^{n_2}}{m_{k_j} C_{v_k}}, \quad \mathcal{A}_{ll_j}^{n_2} = \sum_k \frac{1}{m_{k_j} C_{v_k}}. \end{array} \right.$$

Pour tout  $n_2 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , ces différents coefficients thermodynamiques satisfont les conditions (7.21). La procédure itérative en temps (7.20) converge donc vers l'équilibre isobare isotherme équivitesse pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases.

Intéressons-nous maintenant à la seconde étape de notre schéma d'intégration. La seconde étape de ce schéma d'intégration vise à préserver les invariants du système dynamique (5.4). Cette seconde étape consiste en la résolution du système algébrique

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} u_{2_j}^{n_2+1} - u_{1_j}^{n_2+1} = \Delta u_j^{n_2+1}, \quad m_2(W_j^{n_2+1}) = m_{2_j}, \quad \sum_k m_k(W_j^{n_2+1}) u_k(W_j^{n_2+1}) = \rho_j V_j, \\ P_{2_j}^{n_2+1} - P_{1_j}^{n_2+1} = \Delta P_j^{n_2+1}, \quad m_1(W_j^{n_2+1}) = m_{1_j}, \quad \sum_k m_k(W_j^{n_2+1}) E_k(W_j^{n_2+1}) = \rho_j E_j, \\ T_{2_j}^{n_2+1} - T_{1_j}^{n_2+1} = \Delta T_j^{n_2+1}. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (7.22)$$

De manière générale, on ne sait pas dans quelle mesure les contraintes du système (5.4) sont vérifiées en dehors de l'équilibre isobare isotherme équivitesse. L'existence et l'admissibilité d'une unique solution au système algébrique (7.22) est donc un problème ouvert pour des thermodynamiques quelconques. Dans la pratique, la résolution du système algébrique (7.22) doit donc se faire pour l'instant au cas par cas. Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, l'existence d'une unique solution conditionnellement admissible au système (7.22) est montrée à l'exemple 13.

**Exemple 13.** Pour décrire le mélange diphasique, on considère dans cet exemple une loi d'état de type gaz parfait (2.2) dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques  $\gamma_2 > 1$ ,  $\gamma_1 > 1$ ,  $C_{v_2} > 0$  et  $C_{v_1} > 0$ . Pour une loi d'état de type gaz parfait dans les deux phases, le système algébrique (7.22) se

réécrit

$$\begin{cases} \forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} u_{2_j}^{n_2+1} - u_{1_j}^{n_2+1} = \Delta u_j^{n_2+1}, \quad P_{2_j}^{n_2+1} - P_{1_j}^{n_2+1} = \Delta P_j^{n_2+1}, \quad T_{2_j}^{n_2+1} - T_{1_j}^{n_2+1} = \Delta T_j^{n_2+1}, \\ \frac{\alpha_{2_j}^{n_2+1} P_{2_j}^{n_2+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_2+1}} = m_{2_j}, \quad \frac{(1 - \alpha_{2_j}^{n_2+1}) P_{1_j}^{n_2+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_2+1}} = m_{1_j}, \quad \sum_k m_{k_j} u_{k_j}^{n_2+1} = \rho_j V_j, \\ \sum_k m_{k_j} \left( C_{v_k} T_{k_j}^{n_2+1} + \frac{1}{2} (u_{k_j}^{n_2+1})^2 \right) = \rho_j E_j. \end{array} \right. \end{cases}$$

Dans un premier temps, on procède à l'élimination explicite des vitesses :

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad u_{2_j}^{n_2+1} = V_j + \frac{m_{1_j}}{\rho_j} \Delta u_j^{n_2+1}, \quad u_{1_j}^{n_2+1} = V_j - \frac{m_{2_j}}{\rho_j} \Delta u_j^{n_2+1}.$$

On définit ensuite l'énergie interne de mélange  $\varepsilon$  par la relation

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \rho_j \varepsilon_j^{n_2+1} = \rho_j E_j - \frac{1}{2} m_{2_j} (u_{2_j}^{n_2+1})^2 - \frac{1}{2} m_{1_j} (u_{1_j}^{n_2+1})^2.$$

Cette définition de l'énergie interne de mélange nous permet d'expliciter l'expression des températures :

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{2_j}^{n_2+1} = \frac{\rho_j \varepsilon_j^{n_2+1} + m_{1_j} C_{v_1} \Delta T_j^{n_2+1}}{m_{2_j} C_{v_2} + m_{1_j} C_{v_1}}, \\ T_{1_j}^{n_2+1} = \frac{\rho_j \varepsilon_j^{n_2+1} - m_{2_j} C_{v_2} \Delta T_j^{n_2+1}}{m_{2_j} C_{v_2} + m_{1_j} C_{v_1}}. \end{array} \right.$$

Ces deux températures sont positives à la condition que

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \rho_j \varepsilon_j^{n_2+1} > \max \left( -m_{1_j} C_{v_1} \Delta T_j^{n_2+1}, m_{2_j} C_{v_2} \Delta T_j^{n_2+1} \right).$$

Cette condition prévient l'apparition du vide au sein du mélange diphasique. Une fois les températures phasiques connues, la fraction volumique  $\alpha_{2_j}^{n_2+1}$  et les pressions  $P_{2_j}^{n_2+1}$ ,  $P_{1_j}^{n_2+1}$  satisfont le système non-linéaire réduit

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{2_j}^{n_2+1} = \frac{m_{2_j} (\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_2+1}}{\alpha_{2_j}^{n_2+1}}, \\ P_{1_j}^{n_2+1} = \frac{m_{1_j} (\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_2+1}}{1 - \alpha_{2_j}^{n_2+1}}, \\ P_{2_j}^{n_2+1} - P_{1_j}^{n_2+1} = \Delta P_j^{n_2+1}. \end{array} \right.$$

Les pressions  $P_{2_j}^{n_2+1}$ ,  $P_{1_j}^{n_2+1}$  s'expriment alors comme des fonctions de la fraction volumique  $\alpha_{2_j}^{n_2+1}$ . Pour tout  $n_2 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , cette fraction volumique  $\alpha_{2_j}^{n_2+1}$  est solution de l'équation non-linéaire

$$\begin{aligned} & \left( \alpha_{2_j}^{n_2+1} \right)^2 \Delta P_j^{n_2+1} - \alpha_{2_j}^{n_2+1} \left[ m_{2_j} (\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_2+1} \right. \\ & \quad \left. + m_{1_j} (\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_2+1} + \Delta P_j^{n_2+1} \right] + m_{2_j} (\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_2+1} = 0. \end{aligned}$$

Pour des températures  $T_{2_j}^{n_2+1}$  et  $T_{1_j}^{n_2+1}$  strictement positives, cette équation admet généralement deux solutions dans  $\mathbb{R}$ , mais une unique solution dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Cette unique solution prise dans l'intervalle  $]0, 1[$  est alors identifiée à  $\alpha_{2_j}^{n_2+1}$ . Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, le système algébrique (7.22) admet donc une unique solution. Cette unique solution est conditionnellement admissible.

En résumé, le nouveau schéma d'intégration présenté dans ce paragraphe converge vers les équilibres isobares isothermes équivités du système (5.4) tout en préservant ses invariants. Un tel schéma n'assure cependant pas l'admissibilité de la solution discrète. Ce nouveau schéma peut donc poser problème à proximité des domaines monophasiques et des zones de vide. En ce qui concerne l'ensemble de la méthode à pas fractionnaires, la discrétisation semi-implicite du système (5.4) n'induit aucune restriction quant à la définition du pas de convection  $\delta t$ . Au chapitre 8, l'intégration du système dynamique (5.4) sera effectuée au premier ordre temps en identifiant le pas d'intégration  $dt$  au pas de convection  $\delta t$ . On vérifiera alors que l'ensemble de la méthode à pas fractionnaires préserve les équilibres isobares isothermes équivités du modèle bifluide à sept équations sans transfert de masse.

### 7.3.2 Un schéma d'intégration pour la dynamique des transferts interfaciaux avec transition de phase d'un modèle bifluide à une pression

Dans cette section, on cherche à réaliser l'approximation des interactions diphasiques pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase décrit par le modèle bifluide standard à une pression. Pour simuler ce modèle partiellement équilibré en pression, on recourt à la méthode de relaxation instantanée développée à la section 6.1. De manière analogue aux chapitres 5 et 6, soit  $\rho = \sum_k m_k$ ,  $\rho V = \sum_k m_k u_k$ ,  $\rho E = \sum_k m_k E_k$  respectivement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale du mélange. Soit  $\Delta u = u_2 - u_1$ ,  $\Delta P = P_2 - P_1$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1$ ,  $\Delta g = g_2 - g_1$  respectivement l'écart de vitesse, de pression, de température et de potentiel entre les phases. Pour étudier la relaxation instantanée en pression du modèle bifluide à sept équations, on rappelle tout d'abord la définition du coefficient thermodynamique

$$\mathcal{A}_{pp} = \sum_k \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k).$$

Suivant le travail effectué à la section 6.1, la relaxation instantanée en pression du modèle bifluide à sept équations satisfait le système dynamique

$$\begin{cases} d_t \alpha_2 = K_P \Delta P, \\ d_t \Delta P = -K_P \mathcal{A}_{pp} \Delta P, \\ d_t m_2 = 0, \quad d_t m_1 = 0, \quad d_t m_2 u_2 = 0, \quad d_t m_1 u_1 = 0, \quad d_t \rho E = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Pour étudier les transferts sur temps long du modèle bifluide isobare à six équations avec transition de phase, on rappelle par ailleurs la définition des coefficients thermodynamiques

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -\frac{1}{2} \left[ \beta (u_2 - V_i) + (1 - \beta) (u_1 - V_i) \right], & \mathcal{A}_{uu} &= \sum_k \frac{1}{m_k}, & \mathcal{A}_{u\theta} &= \sum_k \frac{V_i - u_k}{m_k}, \\ \mathcal{A}_{ii} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, & \mathcal{A}_{iu} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), \\ \mathcal{A}_{i\theta} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] - \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k), \\ \mathcal{A}_{\theta i} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, & \mathcal{A}_{\theta u} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (V_i - u_k), \\ \mathcal{A}_{\theta\theta} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] - \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k). \end{aligned}$$

Les transferts interfaciaux du modèle bifluide isobare à six équations avec transition de phase satisfont le système dynamique

$$\begin{cases} d_t \rho = 0, & d_t \rho V = 0, & d_t \rho E = 0, \\ d_t \Delta u = -(K_U \mathcal{A}_{uu} + K_\theta \mathcal{A}_{u\theta} \mathcal{A}) \Delta u - K_\theta \mathcal{A}_{u\theta} \Delta g, \\ d_t \Delta T = -(K_U \mathcal{A}_{Tu} + K_\theta \mathcal{A}_{T\theta} \mathcal{A}) \Delta u - K_T \mathcal{A}_{Tt} \Delta T - K_\theta \mathcal{A}_{T\theta} \Delta g, \\ d_t \Delta g = -(K_U \mathcal{A}_{\theta u} + K_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta} \mathcal{A}) \Delta u - K_T \mathcal{A}_{\theta T} \Delta T - K_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta} \Delta g. \end{cases} \quad (7.23)$$

L'approximation de ces différentes interactions diphasiques s'effectue en deux temps. A la sortie du pas de convection, une première étape de projection rétablit l'équilibre isobare entre les phases. Suivant notre approche Volumes Finis, cette première étape de projection consiste en l'intégration du système dynamique (6.3) jusqu'à convergence sur l'équilibre isobare dans chaque cellule du maillage. On réalise ensuite l'approximation des transferts interfaciaux sur temps long. Cette seconde étape consiste en l'intégration du système dynamique (7.23) sur la durée du pas de convection  $\delta t$ . Dans ce qui suit, on détaille successivement chacune de ces deux étapes.

### Approximation de la projection sur l'équilibre isobare

Pour réaliser la projection sur l'équilibre isobare, on propose dans ce paragraphe un nouveau schéma d'intégration pour le système (6.3). Ce nouveau schéma se décompose en deux étapes. Dans un premier temps, on définit une contraction sur l'écart de pression entre les phases. On préserve ensuite les invariants du système (6.3).

Soit  $n_2 \in \mathbb{N}$  et  $dt > 0$  respectivement l'indice et le pas d'intégration de ce schéma numérique. On définit tout d'abord une discrétisation semi-implicite du système (6.3). En ce qui concerne la fraction volumique  $\alpha_2$  et l'écart de pression  $\Delta P$ , cette discrétisation semi-implicite du système (6.3) s'écrit

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \alpha_{2j}^{n_2+1} &= \alpha_{2j}^{n_2} + dt K_{P_j}^{n_2} \Delta P_j^{n_2+1}, \\ \Delta P_j^{n_2+1} &= \Delta P_j^{n_2} - dt K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{PP_j}^{n_2} \Delta P_j^{n_2+1}. \end{cases}$$

Une telle discrétisation semi-implicite du système (6.3) définit la procédure itérative en temps

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \Delta P \end{pmatrix}_j^{n_2+1} = \begin{bmatrix} 1 & -dt K_{P_j}^{n_2} \\ 0 & 1 + dt K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{PP_j}^{n_2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \Delta P \end{pmatrix}_j^{n_2}. \quad (7.24)$$

La proposition 19 présente les propriétés de cette procédure itérative.

**Proposition 19.** *Pour tout  $n_2 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , supposons le coefficient thermodynamique  $\mathcal{A}_{PP_j}^{n_2}$  strictement positif. La procédure itérative en temps (7.24) converge vers l'équilibre isobare.*

**Démonstration.** La démonstration de la proposition 19 s'appuie sur le calcul explicite de l'écart de pression entre les phases. Cet écart de pression entre les phases satisfait la relation de récurrence

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \Delta P_j^{n_2+1} = \frac{1}{1 + dt K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{PP_j}^{n_2}} \Delta P_j^{n_2}.$$

Supposons pour tout  $n_2 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$  le coefficient thermodynamique  $\mathcal{A}_{PP_j}^{n_2}$  strictement positif. La procédure itérative en temps (7.24) définit une contraction sur l'écart de pression entre les phases. La procédure itérative en temps (7.24) converge donc vers l'équilibre isobare. ■

En résumé, la proposition 19 vient d'établir la convergence vers l'équilibre isobare de la procédure itérative en temps (7.24). Ce résultat est indépendant de la modélisation retenue pour le coefficient d'échange  $K_P$ . Un tel résultat dépend néanmoins des lois d'état utilisées dans chaque phase au travers de la condition de

positivité portant sur le coefficient thermodynamique  $\mathcal{A}_{pp}$ . Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, cette condition de positivité sur le coefficient  $\mathcal{A}_{pp}$  a déjà été vérifiée à l'exemple 8 de la section 6.1.

On s'intéresse maintenant à la seconde étape de ce schéma d'intégration. De manière à préserver les invariants du système dynamique (6.3), cette seconde étape effectue la résolution du système algébrique

$$\begin{cases} \forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \\ \left\{ \begin{array}{l} m_2(W_j^{n_2+1}) = m_{2j}, \quad u_2(W_j^{n_2+1}) = u_{2j}, \quad \sum_k m_k(W_j^{n_2+1}) E_k(W_j^{n_2+1}) = \rho_j E_j, \\ m_1(W_j^{n_2+1}) = m_{1j}, \quad u_1(W_j^{n_2+1}) = u_{1j}, \quad P_{2j}^{n_2+1} - P_{1j}^{n_2+1} = \Delta P_j^{n_2+1}. \end{array} \right. \end{cases} \quad (7.25)$$

Comme à la section précédente, on ne sait pas dans quelle mesure les contraintes du système dynamique (6.3) sont vérifiées en dehors de l'équilibre isobare pour des thermodynamiques quelconques. La résolution du système algébrique (7.25) doit donc être envisagée pour l'instant au cas par cas. Pour une loi d'état de type gaz parfait dans les deux phases, l'existence d'une unique solution conditionnellement admissible au système (7.25) est alors montrée à l'exemple 14. En ce qui concerne la projection sur l'équilibre isobare, la procédure itérative présentée dans cette section est finalement itérée jusqu'à convergence sur la variété d'équilibre en pression.

**Exemple 14.** *Pour décrire le mélange diphasique, on considère dans cet exemple une loi d'état de type gaz parfait (2.2) dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques  $\gamma_2 > 1$ ,  $\gamma_1 > 1$ ,  $C_{v_2} > 0$  et  $C_{v_1} > 0$ . Soit  $\varepsilon$  l'énergie interne de mélange définie par la relation*

$$\rho \varepsilon = \rho E - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2.$$

Suivant la procédure itérative en temps (7.24), la fraction volumique  $\alpha_2$  satisfait la relation de récurrence

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \alpha_{2j}^{n_2+1} = \alpha_{2j}^{n_2} + \frac{dt K_{P_j}^{n_2}}{1 + dt K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{ppj}^{n_2}} \Delta P_j^{n_2}.$$

Cette fraction volumique  $\alpha_{2j}^{n_2+1}$  est admissible dans l'intervalle  $]0, 1[$  à la condition que

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad -\frac{\alpha_{2j}^{n_2} (1 + dt K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{ppj}^{n_2})}{dt K_{P_j}^{n_2}} < \Delta P_j^{n_2} < \frac{(1 - \alpha_{2j}^{n_2}) (1 + dt K_{P_j}^{n_2} \mathcal{A}_{ppj}^{n_2})}{dt K_{P_j}^{n_2}}.$$

A distance des domaines monophasiques, cette condition est vérifiée au voisinage de la variété d'équilibre en pression. En ce qui concerne le système algébrique (7.25), procédons tout d'abord à l'élimination des vitesses phasiques  $u_{1j}$  et  $u_{2j}$ . Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, le système algébrique (7.25) se réécrit alors sous la forme simplifiée

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha_{2j}^{n_2+1} P_{2j}^{n_2+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2j}^{n_2+1}} = m_{2j}, \quad \sum_k m_k C_{v_k} T_k^{n_2+1} = \rho_j \varepsilon_j, \\ \frac{(1 - \alpha_{2j}^{n_2+1}) P_{1j}^{n_2+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1j}^{n_2+1}} = m_{1j}, \quad P_{2j}^{n_2+1} - P_{1j}^{n_2+1} = \Delta P_j^{n_2+1}. \end{array} \right.$$

Supposons la fraction volumique  $\alpha_{2j}^{n_2+1}$  admissible dans l'intervalle  $]0, 1[$ . Le système algébrique (7.25)



admet l'unique solution

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\begin{cases} P_{2j}^{n_2+1} = \left( \rho_j \varepsilon_j + \frac{\alpha_{1j}^{n_2+1} \Delta P_j^{n_2+1}}{\gamma_1 - 1} \right) \left( \frac{\alpha_{2j}^{n_2+1}}{\gamma_2 - 1} + \frac{\alpha_{1j}^{n_2+1}}{\gamma_1 - 1} \right)^{-1}, & T_{2j}^{n_2+1} = \frac{\alpha_{2j}^{n_2+1} P_{2j}^{n_2+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} m_{2j}}, \\ P_{1j}^{n_2+1} = \left( \rho_j \varepsilon_j - \frac{\alpha_{2j}^{n_2+1} \Delta P_j^{n_2+1}}{\gamma_2 - 1} \right) \left( \frac{\alpha_{2j}^{n_2+1}}{\gamma_2 - 1} + \frac{\alpha_{1j}^{n_2+1}}{\gamma_1 - 1} \right)^{-1}, & T_{1j}^{n_2+1} = \frac{\alpha_{1j}^{n_2+1} P_{1j}^{n_2+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} m_{1j}}. \end{cases}$$

Cette unique solution est admissible à la condition que

$$\forall n_2 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \rho_j \varepsilon_j > \max \left( -\frac{\alpha_{1j}^{n_2+1} \Delta P_j^{n_2+1}}{\gamma_2 - 1}, \frac{\alpha_{2j}^{n_2+1} \Delta P_j^{n_2+1}}{\gamma_1 - 1} \right).$$

Cette condition prévient l'apparition du vide au sein du mélange diphasique.

### Approximation des transferts de chaleur, de masse et de quantité de mouvement

Maintenant la projection sur l'équilibre isobare effectuée, on s'intéresse dans ce paragraphe à la dynamique des transferts interfaciaux pour le modèle bifluide à six équations partiellement équilibré en pression avec transition de phase. Ces différents transferts de chaleur, de masse et de quantité de mouvement satisfont le système dynamique (7.23). Pour intégrer ce système (7.23) sur la durée du pas de convection  $\delta t$ , on propose dans cette section un nouveau schéma d'intégration qui s'appuie sur les travaux déjà réalisés à la section 7.3.1 dans le cadre des écoulements sans transfert de masse.

Soit  $n_3 \in \mathbb{N}$  et  $dt > 0$  respectivement l'indice et le pas d'intégration de ce schéma numérique. De manière analogue à la section 7.3.1, une discrétisation semi-implicite du système (7.23) est tout d'abord définie. En ce qui concerne les variables d'écart à l'équilibre  $\Delta u$ ,  $\Delta T$ ,  $\Delta g$ , cette discrétisation semi-implicite du système (7.23) s'écrit

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\begin{cases} \Delta u_j^{n_3+1} = \Delta u_j^{n_3} - dt (K_{U_j}^{n_3} \mathcal{A}_{uu_j}^{n_3} + K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{u\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_j^{n_3}) \Delta u_j^{n_3+1} - dt K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{u\theta_j}^{n_3} \Delta g_j^{n_3+1}, \\ \Delta T_j^{n_3+1} = \Delta T_j^{n_3} - dt (K_{U_j}^{n_3} \mathcal{A}_{Tu_j}^{n_3} + K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{T\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_j^{n_3}) \Delta T_j^{n_3+1} - dt K_{T_j}^{n_3} \mathcal{A}_{Tj}^{n_3} \Delta T_j^{n_3+1} - dt K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{T\theta_j}^{n_3} \Delta g_j^{n_3+1}, \\ \Delta g_j^{n_3+1} = \Delta g_j^{n_3} - dt (K_{U_j}^{n_3} \mathcal{A}_{\theta u_j}^{n_3} + K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{\theta\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_j^{n_3}) \Delta u_j^{n_3+1} - dt K_{T_j}^{n_3} \mathcal{A}_{\theta T_j}^{n_3} \Delta T_j^{n_3+1} - dt K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{\theta\theta_j}^{n_3} \Delta g_j^{n_3+1}. \end{cases}$$

Pour tout  $n_3 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , définissons la matrice

$$\mathcal{A}_{GTU_j}^{n_3} = \begin{bmatrix} -dt (K_{U_j}^{n_3} \mathcal{A}_{uu_j}^{n_3} + K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{u\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_j^{n_3}) & 0 & -dt K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{u\theta_j}^{n_3} \\ -dt (K_{U_j}^{n_3} \mathcal{A}_{Tu_j}^{n_3} + K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{T\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_j^{n_3}) & -dt K_{T_j}^{n_3} \mathcal{A}_{Tj}^{n_3} & -dt K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{T\theta_j}^{n_3} \\ -dt (K_{U_j}^{n_3} \mathcal{A}_{\theta u_j}^{n_3} + K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{\theta\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_j^{n_3}) & -dt K_{T_j}^{n_3} \mathcal{A}_{\theta T_j}^{n_3} & -dt K_{\theta_j}^{n_3} \mathcal{A}_{\theta\theta_j}^{n_3} \end{bmatrix}.$$

La discrétisation semi-implicite du système (7.23) définit alors sur les variables d'écart à l'équilibre la procédure itérative en temps

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta T \\ \Delta g \end{pmatrix}_j^{n_3+1} = \left( \text{Id} - dt \mathcal{A}_{GTU_j}^{n_3} \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta T \\ \Delta g \end{pmatrix}_j^{n_3}. \quad (7.26)$$

Les propriétés de cette procédure itérative en temps sont détaillées à la proposition 20.

**Proposition 20.** *Pour tout  $n_3 \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , supposons la matrice  $\mathcal{A}_{GTU_j}^{n_3}$  définie négative. La procédure itérative en temps (7.26) converge vers l'équilibre isotherme équipotentiel équivitesse.*

Compte tenu du travail effectué à la section 7.3.1, la démonstration de la proposition 20 est immédiate. Un tel résultat dépend simultanément de la modélisation retenue pour les coefficients d'échange  $K_U, K_T, K_\theta$  et des lois d'état utilisées dans chaque phase au travers de la condition portant sur le caractère défini négatif de la matrice  $\mathcal{A}_{GTU}$ . Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases et pour la modélisation (3.9) des coefficients d'échange, ce caractère défini négatif de la matrice  $\mathcal{A}_{GTU}$  a déjà été numériquement vérifié à l'exemple 6 de la section 5.2 au voisinage de certains équilibres isobares isothermes équipotentiels équivitesse.

De manière à préserver les invariants du système (7.23), la seconde étape de ce schéma d'intégration s'intéresse maintenant à la résolution du système algébrique

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} u_{2_j}^{n_3+1} - u_{1_j}^{n_3+1} = \Delta u_j^{n_3+1}, & \sum_k m_k(W_j^{n_3+1}) = \rho_j, \\ T_{2_j}^{n_3+1} - T_{1_j}^{n_3+1} = \Delta T_j^{n_3+1}, & \sum_k m_k(W_j^{n_3+1}) u_k(W_j^{n_3+1}) = \rho_j V_j, \\ g_{2_j}^{n_3+1} - g_{1_j}^{n_3+1} = \Delta g_j^{n_3+1}, & \sum_k m_k(W_j^{n_3+1}) E_k(W_j^{n_3+1}) = \rho_j E_j. \end{cases} \quad (7.27)$$

Comme précédemment, on ne sait généralement pas dans quelle mesure les contraintes du système dynamique (7.23) sont vérifiées en dehors de l'équilibre isotherme équipotentiel équivitesse. Dans un cadre thermodynamique quelconque, l'existence et l'admissibilité d'une unique solution au système algébrique (7.27) est donc un problème ouvert. Pour une loi d'état de type gaz parfait dans les deux phases, l'existence d'une unique solution conditionnellement admissible au système (7.27) est alors montrée à l'exemple 15. Dans la pratique au chapitre 8, l'intégration du système dynamique (7.23) sera effectuée au premier ordre temps en identifiant le pas d'intégration  $dt$  au pas de convection  $\delta t$ . On vérifiera alors que l'ensemble de la méthode à pas fractionnaires préserve les équilibres liquide-vapeur du modèle bifluide à une pression.

**Exemple 15.** *Pour décrire le mélange diphasique, on considère dans cet exemple une loi d'état de type gaz parfait (2.2) dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques  $\gamma_1 > \gamma_2 > 1$  et  $C_{v_1} > C_{v_2} > 0$ . Pour une loi d'état de type gaz parfait dans les deux phases, le système algébrique (7.27) se réécrit*

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \frac{\alpha_{2_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}} + \frac{(1 - \alpha_{2_j}^{n_3+1}) P_j^{n_3+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} = \rho_j, & u_{2_j}^{n_3+1} - u_{1_j}^{n_3+1} = \Delta u_j^{n_3+1}, \quad g_{2_j}^{n_3+1} - g_{1_j}^{n_3+1} = \Delta g_j^{n_3+1}, \\ \frac{\alpha_{2_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1} u_{2_j}^{n_3+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}} + \frac{(1 - \alpha_{2_j}^{n_3+1}) P_j^{n_3+1} u_{1_j}^{n_3+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} = \rho_j V_j, & T_{2_j}^{n_3+1} - T_{1_j}^{n_3+1} = \Delta T_j^{n_3+1}, \\ \frac{\alpha_{2_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1}}{(\gamma_2 - 1)} + \frac{(1 - \alpha_{2_j}^{n_3+1}) P_j^{n_3+1}}{(\gamma_1 - 1)} + \frac{\alpha_{2_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1} (u_{2_j}^{n_3+1})^2}{2(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}} + \frac{(1 - \alpha_{2_j}^{n_3+1}) P_j^{n_3+1} (u_{1_j}^{n_3+1})^2}{2(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} = \rho_j E_j. \end{cases}$$

Procédons tout d'abord à l'élimination de la température  $T_{1_j}^{n_3+1}$  en fonction de la température  $T_{2_j}^{n_3+1}$  :

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad T_{1_j}^{n_3+1} = T_1(T_{2_j}^{n_3+1}) = T_{2_j}^{n_3+1} - \Delta T_j^{n_3+1}.$$

La pression  $P_j^{n_3+1}$  s'exprime alors en fonction de la température  $T_{2_j}^{n_3+1}$  :

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$P_j^{n_3+1} = P(T_{2_j}^{n_3+1}) = \left[ \frac{[(\gamma_1 - 1) C_{v_1} e^{-1} T_{1_j}^{n_3+1}]^{\gamma_1 C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}}}{[(\gamma_2 - 1) C_{v_2} e^{-1} T_{2_j}^{n_3+1}]^{\gamma_2 C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}}} e^{-\Delta g_j^{n_3+1}} \right]^{\frac{1}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1} - (\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}}}.$$

Procédons ensuite à l'élimination de la fraction volumique  $\alpha_{2_j}^{n_3+1}$  en fonction de la température  $T_{2_j}^{n_3+1}$  :

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\alpha_{2_j}^{n_3+1} = \alpha_2(T_{2_j}^{n_3+1}) = \left( \rho - \frac{P_j^{n_3+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} \right) \left( \frac{P_j^{n_3+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}} - \frac{P_j^{n_3+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} \right)^{-1}.$$

Les vitesses phasiques s'écrivent respectivement

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\begin{cases} u_{2_j}^{n_3+1} = u_2(T_{2_j}^{n_3+1}) = \left( \rho_j V_j + \frac{\alpha_{1_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1} \Delta u_j^{n_3+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} \right) \left( \frac{\alpha_{2_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}} + \frac{\alpha_{1_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} \right)^{-1}, \\ u_{1_j}^{n_3+1} = u_1(T_{2_j}^{n_3+1}) = \left( \rho_j V_j - \frac{\alpha_{2_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1} \Delta u_j^{n_3+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}} \right) \left( \frac{\alpha_{2_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1}}{(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}} + \frac{\alpha_{1_j}^{n_3+1} P_j^{n_3+1}}{(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} \right)^{-1}. \end{cases}$$

La température  $T_{2_j}^{n_3+1}$  satisfait alors l'équation non-linéaire

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2(T_{2_j}^{n_3+1}) P(T_{2_j}^{n_3+1})}{\gamma_2 - 1} + \frac{\alpha_1(T_{2_j}^{n_3+1}) P(T_{2_j}^{n_3+1})}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2(T_{2_j}^{n_3+1}) P(T_{2_j}^{n_3+1}) [u_2(T_{2_j}^{n_3+1})]^2}{2(\gamma_2 - 1) C_{v_2} T_{2_j}^{n_3+1}} \\ + \frac{\alpha_1(T_{2_j}^{n_3+1}) P(T_{2_j}^{n_3+1}) [u_1(T_{2_j}^{n_3+1})]^2}{2(\gamma_1 - 1) C_{v_1} T_{1_j}^{n_3+1}} - \rho_j E_j = 0. \end{aligned}$$

Cette équation non-linéaire peut être résolue de manière graphique. Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, cette équation non-linéaire admet généralement une unique solution dans  $\mathbb{R}_+$ . Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, le système algébrique (7.27) admet donc une unique solution admissible à la condition que

$$\forall n_3 \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} T_{2_j}^{n_3+1} > \Delta T_j^{n_3+1}, \\ 0 < \alpha_2(T_{2_j}^{n_3+1}) < 1. \end{cases}$$

La première condition prévient l'apparition du vide au sein du mélange liquide-vapeur. La seconde condition caractérise les frontières du domaine diphasique. A distance des domaines monophasiques, ces différentes conditions sont vérifiées au voisinage de l'équilibre isotherme équipotentiel équivitesse. Informaticiquement, dans l'éventualité où ces conditions ne seraient plus satisfaites, on procéderait à l'arrêt de la simulation.

Au final, deux schémas d'intégration viennent d'être présentés dans cette section pour réaliser l'approximation des transferts interfaciaux. Le premier schéma s'intéresse à l'approximation des interactions

liquide-gaz par le biais du modèle à sept équations sans transition de phase. Le second recourt à une méthode de relaxation instantanée. Lors d'une transition de phase, ce second schéma réalise l'approximation des interactions liquide-vapeur par le biais du modèle isobare à six équations. Ces deux schémas nous ont permis d'aborder l'approximation des transferts interfaciaux pour l'ensemble des modélisations bifluïdes, qu'elles soient partiellement équilibrées ou totalement hors équilibre, avec ou sans transition de phase. Ces deux schémas sont l'illustration d'une procédure d'intégration générale pour les interactions diphasiques. Une telle procédure se décompose en deux étapes. La première étape vise à définir une contraction sur les variables d'écart à l'équilibre, la seconde à préserver les invariants associés aux différentes relaxations. Ces différents schémas convergent donc les équilibres diphasiques tout en préservant les grandeurs caractéristiques du mélange. Une telle procédure d'intégration peut aisément être transposée à tout type de modélisation bifluïde. Le prochain chapitre de simulation traitera alors aussi bien de la transition de phase par le biais du modèle à sept équations que des interactions liquide-gaz par le biais du modèle bifluïde à cinq équations partiellement équilibré en vitesse et en pression.

## 7.4 Conditions aux limites

Aux sections précédentes, une méthode à pas fractionnaires a été présentée dans un formalisme Volumes Finis pour réaliser l'approximation de divers modèles bifluïdes. Cette présentation a été effectuée en identifiant le domaine de calcul à l'espace physique  $\mathbb{R}^3$ . Dans la pratique, la simulation des écoulements diphasiques est réalisée sur des domaines de calcul bornés. Pour simuler ces différents modèles bifluïdes, certaines conditions aux limites doivent alors être spécifiées. Pour avoir un problème aux limites bien posé sur les frontières du domaine de calcul, de telles conditions aux limites doivent s'adapter aux caractéristiques de l'écoulement. De manière générale, la prise en compte systématique des conditions aux limites pour les systèmes de lois de conservation est un problème compliqué. On se référera aux travaux de Dubois et Lefloch [36] pour une introduction systématique à ce type de problèmes. Dans cette section, on se restreint d'office à certaines conditions aux limites particulières pour les modèles bifluïdes. Pour valider nos schémas de calcul, on cherche tout d'abord à définir des conditions aux limites non-réfléchissantes. De telles conditions aux limites non-réfléchissantes doivent nous permettre d'étudier sur des domaines bornés la propagation d'ondes sur des domaines infinis. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, on cherche par ailleurs à modéliser les parois dans les coeurs de réacteur. Dans cette section, on s'intéresse au traitement numérique de ces différentes conditions aux limites par une méthode de volumes fictifs.

Dans le cadre de notre approche à pas fractionnaires, l'approximation des modèles bifluïdes s'effectuent en deux étapes. Dans un premier temps, on réalise l'approximation de la partie convective associée au modèle bifluïde à sept équations. On procède ensuite à l'intégration des transferts interfaciaux. Dans le formalisme Volumes Finis, cette intégration des transferts interfaciaux s'effectue indépendamment dans chaque cellule du maillage. Les conditions aux limites n'interviennent donc qu'à la première étape de notre méthode numérique, lors de l'approximation de la partie convective associée au modèle bifluïde à sept équations. Pour  $j \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $V_j$  une cellule adjacente à la frontière du domaine de calcul. A cette cellule  $V_j$  est tout d'abord associée une maille fictive  $V_{\text{ext}_j}$  extérieure au domaine de calcul. A l'instant  $n_1 \geq 0$ , soit  $W_j^{n_1}$  et  $W_{\text{ext}_j}^{n_1}$  respectivement la variable d'état sur la maille frontière  $V_j$  et la maille fictive  $V_{\text{ext}_j}$ . Une fois définie la variable d'état  $W_{\text{ext}_j}^{n_1}$  sur la maille fictive, un problème de Riemann monodimensionnel similaire à ceux étudiés section 7.2 est posé dans la direction normale à la frontière du domaine de calcul entre les cellules  $V_j$  et  $V_{\text{ext}_j}$ . Dans le cadre du modèle bifluïde à sept équations, la méthode des volumes fictifs s'appuie alors sur la résolution du problème de Riemann

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = 0, \\ W(t_{n_1}, x) = \begin{cases} W_j^{n_1} & \text{si } x \in V_j, \\ W_{\text{ext}_j}^{n_1} & \text{si } x \in V_{\text{ext}_j}. \end{cases} \end{cases}$$

Pour les conditions aux limites particulières envisagées dans cette section, la variable d'état sur la maille fictive  $W_{\text{ext}_j}^{n_1}$  est définie à partir de la variable d'état sur la maille frontière  $W_j^{n_1}$ . La condition non-réfléchissante

se traduit numériquement par la relation

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall k = 1, 2, \quad (\alpha_k)_{\text{ext}_j}^{n_1} = (\alpha_k)_j^{n_1}, \quad (P_k)_{\text{ext}_j}^{n_1} = (P_k)_j^{n_1}, \quad (T_k)_{\text{ext}_j}^{n_1} = (T_k)_j^{n_1}, \quad (u_k)_{\text{ext}_j}^{n_1} = (u_k)_j^{n_1}.$$

Soit  $\vec{n}$  la normale extérieure au domaine de calcul. La présence d'une paroi rigide au sein d'un écoulement diphasique se modélise par la condition aux limites  $u_k \cdot \vec{n} = 0$  pour  $k = 1, 2$ . Une telle condition aux limites traduit l'impénétrabilité de la paroi. Pour approcher numériquement cette condition de paroi, on recourt à la définition d'un état miroir sur la maille fictive. Cet état miroir est défini par la relation

$$\forall n_1 \geq 0, \quad \forall k = 1, 2, \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_k)_{\text{ext}_j}^{n_1} = (\alpha_k)_j^{n_1}, \\ (P_k)_{\text{ext}_j}^{n_1} = (P_k)_j^{n_1}, \\ (T_k)_{\text{ext}_j}^{n_1} = (T_k)_j^{n_1}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (u_k \cdot \vec{n})_{\text{ext}_j}^{n_1} = -(u_k \cdot \vec{n})_j^{n_1}, \\ (u_k - (u_k \cdot \vec{n}) \vec{n})_{\text{ext}_j}^{n_1} = (u_k - (u_k \cdot \vec{n}) \vec{n})_j^{n_1}. \end{array}$$

Pour ces deux conditions aux limites particulières du modèle bifluide à sept équations, la fraction volumique  $(\alpha_k)_{\text{ext}_j}^{n_1}$  s'identifie toujours à la fraction volumique  $(\alpha_k)_j^{n_1}$ . Sans discontinuité de fraction volumique entre la maille frontière et la maille fictive, la partie convective du modèle bifluide à sept équations se réduit localement à deux sous-systèmes de type Euler découplés. Pour les différentes conditions aux limites envisagées dans cette section, l'ensemble des problèmes de Riemann posés à la frontière du domaine de calcul peut donc être résolu de manière exacte suivant le théorème 1 via la construction d'un solveur de Godunov pour les deux sous-systèmes de type Euler. Par simplicité cependant, la résolution approchée de ces problèmes de Riemann est effectuée dans la pratique au chapitre 8 par le biais du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv.

Pour conclure, une méthode numérique a été proposée dans ce chapitre pour réaliser l'approximation des différents modèles bifluides rencontrés depuis le début de cette thèse. Cette méthode numérique s'appuie sur une approche à pas fractionnaires dans un formalisme Volumes Finis. Dans le cadre de cette approche à pas fractionnaires, on s'est tout d'abord intéressé à l'approximation de la convection. De nouvelles adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma VFRoe-ncv en variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$  ont alors été présentées pour approcher la partie convective du modèle à sept équations. Ces deux schémas se caractérisent par la préservation des équilibres isobares isothermes (équipotentiels) équivitesses. L'approximation des transferts interfaciaux a ensuite été envisagée par le biais d'un nouveau schéma d'intégration. Ce schéma converge vers les équilibres des différents systèmes dynamiques étudiés aux chapitres 5 et 6 tout en préservant leurs contraintes. Ce schéma se distingue des travaux présentés par Saurel, Abgrall [93], Gallouët, Hérard et Seguin [42] dans la mesure où il assure un traitement couplé des différents transferts interfaciaux. Poussé à convergence en temps, ce schéma nous permet d'effectuer la projection sur certains équilibres partiels. Utilisé sur un temps fini, ce schéma décrit également la dynamique des transferts interfaciaux. Nous sommes alors en mesure de simuler l'ensemble des modélisations bifluides partiellement équilibrées ou hors équilibre, avec ou sans transition de phase. L'intégralité de la procédure numérique se caractérise par la préservation des différents équilibres diphasiques. L'ensemble de cette méthode numérique a finalement été implémenté au sein d'un logiciel intégralement conçu dans le cadre de cette thèse. Ce logiciel nous permet d'envisager la simulation des écoulements diphasiques dans des géométries complexes sur tout type de maillage structuré ou non-structuré. De telles simulations numériques sont analysées dès le prochain chapitre.

# Chapitre 8

## Résultats numériques

Au chapitre précédent, une méthode numérique a été présentée pour simuler les écoulements diphasiques. Cette méthode numérique nous permet d'envisager la simulation de l'ensemble des modèles bi-fluides rencontrés depuis le début de cette thèse, qu'ils soient partiellement équilibrés ou totalement hors équilibre, avec ou sans transition de phase. Dans ce chapitre, on s'intéresse tout d'abord à la validation de cette méthode numérique sur quelques cas tests monodimensionnels. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, cette méthode numérique est ensuite appliquée à la simulation des écoulements liquide-vapeur en géométrie complexe. Les différentes modélisations bifluides à une et deux pressions sont comparées pour finir.

### 8.1 Validation des schémas de calcul

Dans cette première section, on s'intéresse à la validation de la méthode numérique présentée au chapitre 7. Cette méthode s'appuie sur une approche à pas fractionnaires dans un formalisme Volumes Finis. Dans cette section, on étudie successivement chacune de ses étapes. On s'intéresse tout d'abord à la convection, puis à la relaxation instantanée, pour enfin décrire la dynamique des transferts interfaciaux. Ces différents tests de validation sont réalisés dans un cadre monodimensionnel sur l'intervalle  $[0, 2]$ . On n'envisage que des maillages cartésiens réguliers. Les différents constituants du mélange sont par ailleurs décrits par des lois d'état de type gaz parfait (2.2) dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques

$$\gamma_1 = 1.4, \quad \gamma_2 = 1.2, \quad C_{v_1} = 2 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}, \quad C_{v_2} = 1 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

Ces deux lois d'état vérifient simultanément les hypothèses 1 et 2. Elles peuvent donc indifféremment décrire un écoulement avec ou sans transition de phase selon que le transfert de masse est ou non activé. Dans le cadre des écoulements en transition de phase, l'indice 1 désigne alors la phase vapeur, l'indice 2 la phase liquide. En ce qui concerne les coefficients d'échange, la modélisation (3.9) des fonctions de relaxation est pour finir retenue lors de la simulation des transferts interfaciaux :

$$K_U = \frac{1}{\tau_U \mathcal{A}_{uu}}, \quad K_P = \frac{1}{\tau_P \mathcal{A}_{pp}}, \quad K_T = \frac{1}{\tau_T \mathcal{A}_{tt}}, \quad K_\theta = \frac{1}{\tau_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta}}. \quad (3.9)$$

On se référera à la section 3.4 pour la définition des différentes grandeurs intervenant dans cette modélisation des coefficients d'échange.

#### 8.1.1 Simulation de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la simulation de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations. Ce système se présente sous une forme non-conservative. Deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv ont été proposées

à la section 7.2 pour simuler cette partie convective. On s'intéresse ici aux propriétés de ces deux schémas de convection. Un premier tube à choc est tout d'abord simulé. Cette simulation est l'occasion d'une comparaison entre différentes modélisations des grandeurs interfaciales. On simule ensuite l'advection d'une interface. La préservation des équilibres isobares isothermes équivitesse est alors vérifiée.

Lors de la simulation des systèmes non-conservatifs, plusieurs problèmes numériques ont déjà été reportés dans la littérature par De Vuyst [30], Hou et Lefloch [65]. De manière générale, le théorème de Lax ne s'applique pas dans le cadre non-conservatif. Deux schémas différents convergent donc vers deux solutions distinctes. Sans attention particulière quant à la modélisation de la vitesse et de la pression interfaciales, un tel problème se pose similairement pour le modèle à sept équations. Ce problème fait l'objet de notre première simulation. En ce qui concerne la vitesse interfaciale, considérons pour ce premier test la modélisation de Glimm, Saltz et Sharp [48]. De manière à doter le modèle bifluide à sept équations d'une entropie, on modélise la pression interfaciale conformément à la proposition 2. Les modélisations retenues pour les grandeurs interfaciales s'écrivent alors

$$V_i = \alpha_2 u_1 + \alpha_1 u_2, \quad P_i = \frac{\alpha_1 T_2 P_1 + \alpha_2 T_1 P_2}{\alpha_1 T_2 + \alpha_2 T_1}. \quad (8.1)$$

Initialisons le tube à choc dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 1$  m sont reportés dans le tableau 8.1. Pour une condition de Courant-Friedrich-Levy  $CFL = 0.8$ , les solutions obtenues sur différents maillages à l'instant  $t = 0.04$  s par le schéma de Rusanov et le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv sont reportées figures 8.1 et 8.2. Les solutions convergées à 100 000 mailles fournies par ces deux schémas sont comparées à la figure 8.3. Conformément aux résultats présentés par De Vuyst [30], Hou et Lefloch [65], ces deux solutions diffèrent.

A la suite des travaux entrepris par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], diverses modélisations (4.10) des grandeurs interfaciales ont cependant été proposées au chapitre 4. On rappelle que ces différentes modélisations (4.10) pour le couple  $(P_i, V_i)$  définissent localement tous les produits non-conservatifs de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations. Procédons à la même simulation que précédemment pour la modélisation particulière (4.10c) des grandeurs interfaciales

$$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_2 T_2 + m_1 T_1}. \quad (4.10c)$$

Les solutions obtenues sur différents maillages à l'instant  $t = 0.04$  s par le schéma de Rusanov et le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv sont reportées figures 8.4 et 8.5. Les solutions convergées à 100 000 mailles fournies par ces deux schémas sont comparées à la figure 8.6. Elles sont cette fois identiques. Les deux schémas convergent vers la même solution. En conséquence, seules les modélisations (4.10) des grandeurs interfaciales seront utilisées par la suite.

Pour la modélisation (4.10c) des grandeurs interfaciales, simulons maintenant l'advection d'une interface sur le domaine de calcul. Dans un premier temps, on construit un maillage cartésien régulier de l'intervalle  $[0, 2]$ . Ce maillage compte 2000 cellules. On initialise par la suite le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 0.8$  m figurent dans le tableau 8.7. Suivant cette condition initiale, deux mélanges diphasiques coexistent initialement de part et d'autre de l'interface  $x = 0.8$  m à des titres différents, mais au même équilibre isobare isotherme équivitesse. Pour simuler l'advection de l'interface initialement située en  $x = 0.8$  m, on impose une condition de Courant-Friedrich-Levy  $CFL = 0.8$ . A l'instant  $t = 0.055$  s, les solutions fournies par le schéma de Rusanov et le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv sont reportées sur la figure 8.7. L'advection de l'interface initialement située en  $x = 0.8$  m ne perturbe pas l'équilibre isobare isotherme équivitesse. Les propositions 16 et 17 énoncées à la section 7.2 sont donc bien vérifiées. Ces deux schémas préservent les équilibres diphasiques.

Procédons maintenant à la comparaison de ces deux schémas de convection. Sur l'ensemble des simulations réalisées dans cette section, le schéma de Rusanov s'est toujours avéré plus diffusif que le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv. Un tel résultat est en accord avec les comparaisons menées par Gallouët, Hérard et Seguin dans [42, 41]. A l'avenir, le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv sera donc

généralement utilisé pour sa précision. En ce qui concerne justement la précision de nos simulations, on remarque qu'une description correcte des solutions nécessite des maillages d'une grande finesse. Les états intermédiaires situés au niveau des discontinuités de contact sont effectivement particulièrement diffusés sur maillage grossier. Ce problème de la convergence lente des solutions discrètes au niveau des champs linéairement dégénérés a déjà été étudié par Després et Lagoutière dans [33]. Nous n'y apportons ici aucun traitement particulier.

### 8.1.2 Simulation de la relaxation instantanée

Dans le cadre de notre approche à pas fractionnaires, l'approximation de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations vient d'être validée au paragraphe précédent. On s'intéresse maintenant à l'approximation des transferts interfaciaux. Dans la littérature, nombreux sont les modèles bifluides à supposer un équilibre partiel entre les phases. Du point de vue du modèle à sept équations, de tels équilibres partiels se caractérisent par un retour à l'équilibre instantané en certaines variables de l'écoulement. Une méthode de relaxation instantanée a justement été proposée au chapitre 6 pour décrire ces phénomènes par le biais du modèle à sept équations. Cette méthode de relaxation instantanée consiste en la projection des solutions associées au modèle bifluide à sept équations sur certains équilibres partiels. Un schéma d'intégration a été présenté à la section 7.3 pour effectuer cette projection. On l'applique dans ce paragraphe à la simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide isobare équivitesse à cinq équations.

Pour effectuer la projection sur l'équilibre isobare équivitesse, la modélisation (4.10c) des grandeurs interfaciales est tout d'abord retenue. On adopte ensuite la modélisation (3.9) des coefficients d'échange  $K_P$ ,  $K_U$ . Suivant l'analyse bibliographique menée à la section 3.4, les différentes échelles de temps  $\tau_P$ ,  $\tau_U$  intervenant dans cette modélisation des coefficients d'échange sont identifiées à des constantes de l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s. Ces différentes échelles de temps valent respectivement

$$\tau_P = 1.10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_U = 2.10^{-3} \text{ s}.$$

Initialisons le tube à choc dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 1$  m sont reportés dans le tableau 8.8. Cette condition initiale décrit deux mélanges à l'équilibre isobare isotherme équivitesse de chaque côté de l'interface  $x = 1$  m. Une telle condition initiale est compatible avec le modèle bifluide partiellement équilibré en pression et en vitesse. On choisit d'approcher la partie convective du modèle bifluide à sept équations par le biais du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv. On impose une condition de Courant-Friedrich-Levy  $CFL = 0.8$ . A l'instant  $t = 0.05$  s, les solutions fournies sur différents maillages par notre méthode de relaxation instantanée sont reportées figure 8.8. Ces solutions évoluent continûment à l'équilibre isobare équivitesse. Ces solutions sont particulièrement stables vis à vis du raffinement de maillage. La procédure de relaxation instantanée est donc validée sur ce cas test pour simuler les modèles bifluides partiellement équilibrés par le biais du modèle à sept équations. La relaxation instantanée vers l'équilibre isobare et le modèle bifluide standard à une pression sera ultérieurement étudiée à la section 8.3.

### 8.1.3 Simulation de la dynamique des transferts interfaciaux

Au paragraphe précédent, la méthode de relaxation instantanée présentée au chapitre 6 vient d'être validée pour simuler les modèles bifluides partiellement équilibrés au moyen du modèle à sept équations. On s'intéresse maintenant à la dynamique des transferts interfaciaux sur temps long. Un schéma d'intégration a été proposé à la section 7.3 pour réaliser l'approximation de ces différents transferts. Ce schéma est ici appliqué à la simulation de tubes à choc pour des écoulements avec et sans transition de phase. La modélisation bifluide à sept équations est alors comparée à la modélisation bifluide à cinq équations partiellement équilibrée en pression et en vitesse. Dans ce paragraphe, le maillage cartésien de l'intervalle  $[0, 2]$  compte 5000 cellules. La modélisation (4.10c) est par ailleurs retenue pour le couple  $(P_i, V_i)$ .

Dans un premier temps, on s'intéresse à la simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-gaz sans transition de phase. Pour caractériser les interactions diphasiques la modélisation (3.9) des coefficients



d'échange  $K_P$ ,  $K_U$ ,  $K_T$  est tout d'abord retenue. Dans cette modélisation (3.9) des coefficients d'échange, les différentes échelles de temps caractéristiques du retour à l'équilibre des pressions, des vitesses et des températures valent respectivement

$$\tau_P = 1.10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_U = 5.10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_T = 1.10^{-2} \text{ s}.$$

Initialisons le même tube à choc qu'à la section précédente. Pour les mêmes paramètres numériques, les solutions de ce tube à choc respectivement fournies à l'instant  $t = 0.05$  s par le modèle hors équilibre à sept équations et le modèle à cinq équations partiellement équilibré en vitesse et en pression sont reportées figures 8.9 et 8.10. Ces deux solutions présentent des caractéristiques communes. Elles décrivent toutes deux la propagation d'un choc sur le milieu basse pression et la propagation d'une détente sur le milieu haute pression. Ces ondes acoustiques engendrent des déséquilibres entre les phases que résorbent les transferts interfaciaux. Dans le cas du modèle à cinq équations, le retour à l'équilibre en vitesse et en pression s'effectue instantanément. La solution isobare équivitesse reportée figure 8.10 ne présente que des déséquilibres de température. Une fois les ondes acoustiques passées, le transfert thermique rétablit progressivement l'équilibre isotherme entre les phases. En ce qui concerne le modèle à sept équations, différents déséquilibres de vitesse, pression et température apparaissent au sein du mélange diphasique à la suite des ondes acoustiques. Une fois ces ondes acoustiques passées, l'ensemble des transferts interfaciaux rétablit progressivement l'équilibre isobare isotherme équivitesse entre les phases. Les schémas d'intégration proposés à la section 7.3 pour réaliser l'approximation des interactions diphasiques sont donc validés sur ce cas test pour la simulation des écoulements liquide-gaz.

Dans le cadre de nos applications en ingénierie nucléaire, intéressons-nous maintenant à la simulation des écoulements en transition de phase. Dans ce cadre, le transfert de masse est maintenant activé. L'énergie interne interfaciale est alors modélisée conformément à la section 3.3 par une combinaison convexe des potentiels de changement de phase :

$$e_i = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.2)$$

Dans la modélisation (3.9) des coefficients d'échange  $K_P$ ,  $K_T$ ,  $K_\theta$ ,  $K_U$ , les différentes échelles de temps caractéristiques valent respectivement

$$\tau_P = 5.10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_T = 7.10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_\theta = 7.10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_U = 4.10^{-3} \text{ s}.$$

On initialise le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 1$  m sont reportés dans le tableau 8.11. Cette condition initiale décrit un mélange liquide-vapeur à l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse de chaque côté de l'interface  $x = 1$  m. Pour les mêmes paramètres numériques que précédemment, les solutions de ce tube à choc respectivement fournies à l'instant  $t = 0.06$  s par le modèle hors équilibre à sept équations et le modèle à cinq équations partiellement équilibré en vitesse et en pression sont reportées figures 8.11 et 8.12. Comme pour les écoulements liquide-gaz sans transition de phase, ces deux solutions présentent des points communs. Ces deux solutions décrivent toutes deux la propagation d'un choc sur le milieu basse pression. Maintenant le transfert de masse activé, ce choc liquéfie le mélange diphasique dont la fraction volumique liquide augmente. Ces deux solutions décrivent par ailleurs similairement la propagation d'une détente sur le milieu pressurisé. Cette détente vaporise le mélange diphasique dont la fraction volumique liquide diminue. Comme précédemment, ces ondes acoustiques engendrent des déséquilibres entre les phases. Les différents transferts interfaciaux s'effectuent alors de manière à rétablir l'équilibre liquide-vapeur entre les phases. L'ensemble des schémas d'intégration proposés à la section 7.3 pour réaliser l'approximation des interactions diphasiques est donc validé sur ce cas test pour la simulation des écoulements liquide-vapeur.

**Remarque 13.** Dans cette section, plusieurs simulations d'écoulements diphasiques ont été réalisées par le biais du modèle bifluide à sept équations. Ce modèle bifluide n'est pas standard. Il fait apparaître des déséquilibres de pression entre les phases. Dans la littérature, une hypothèse d'équilibre isobare est bien plus souvent retenue au sein des mélanges diphasiques. Cette hypothèse conduit au modèle bifluide standard à six équations et une pression. Les deux modélisations bifluides à six et sept équations seront ultérieurement comparées à la section 8.3. Néanmoins, avant que d'entamer cette comparaison, une constatation s'impose

d'ores et déjà à la vue des figures 8.9(c) et 8.11(b). Sur les différents cas test réalisés dans cette section, les déséquilibres de pression perçus par le modèle à sept équations sont faibles. Utiliser un modèle à deux pressions ne signifie pas donc pour autant s'éloigner de l'équilibre isobare.

## 8.2 Simulation d'écoulements diphasiques en géométries complexes

A la section précédente, l'ensemble de la méthode numérique présentée au chapitre 7 a été validée sur quelques cas test monodimensionnels. Cette méthode numérique est ici appliquée à la simulation d'écoulements liquide-vapeur dans des géométries complexes. Dans la littérature [44, 99], de telles simulations multidimensionnelles ont déjà été réalisées au moyen du modèle bifluide isobare à six équations. Cette section s'intéresse différemment aux capacités prédictives du modèle bifluide à deux pressions. Dans le cadre de nos applications en ingénierie nucléaire, deux problèmes de dépressurisation sont successivement traités pour des écoulements liquide-vapeur. Le premier simule la dépressurisation d'une enceinte. Le second analyse la dépressurisation d'un assemblage de crayons de combustible. Dans cette section, le liquide et la vapeur sont décrits par des lois d'état de type gaz parfait (2.2). On impose les coefficients thermodynamiques

$$\gamma_1 = 1.4, \quad \gamma_2 = 1.01, \quad C_{v_1} = 1 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}, \quad C_{v_2} = 0.5 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

L'indice 1 y désigne la phase vapeur, l'indice 2 la phase liquide. On retient par ailleurs la modélisation (4.10c) pour la vitesse et la pression interfaciales. Comme précédemment, l'énergie interne interfaciale est associée à la combinaison convexe (8.2) des potentiels de changement de phase. Les différentes grandeurs interfaciales s'écrivent alors

$$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_2 T_2 + m_1 T_1}, \quad e_i = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.3)$$

La modélisation (3.9) des coefficients d'échange caractérise finalement l'intensité des transferts interfaciaux. Dans cette modélisation (3.9) des coefficients d'échange, les différentes échelles de temps caractéristiques du retour à l'équilibre des pressions, vitesses, températures et potentiels de changement de phase sont associées aux constantes

$$\tau_p = 5.10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_U = 1.10^{-2} \text{ s}, \quad \tau_T = 5.10^{-2} \text{ s}, \quad \tau_\theta = 1.10^{-1} \text{ s}.$$

### 8.2.1 Dépressurisation d'une enceinte

Dans ce premier paragraphe, on s'intéresse à la dépressurisation d'un mélange liquide-vapeur dans une enceinte. Ce cas test idéalise la rupture du circuit de refroidissement primaire d'un réacteur. Lors d'une situation accidentelle de ce type, on cherche à limiter l'accumulation de la vapeur. De telles accumulations de vapeur sont préjudiciables au bon refroidissement des réacteurs dont la structure peut être altérée. On s'intéresse ici aux prédictions du modèle bifluide à sept équations.

Pour réaliser la simulation de cette dépressurisation, une géométrie est tout d'abord construite. Cette géométrie idéalise la forme d'un réacteur. Une telle géométrie complexe est reportée figure 8.13(a). On en réalise le maillage non-structuré au moyen de 60 236 cellules triangulaires. Un agrandissement de ce maillage est reporté figure 8.13(b). Initialisons le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 1 \text{ m}$  sont reportés dans le tableau 8.13. Cette condition initiale décrit deux mélanges diphasiques à l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse de chaque côté de l'interface  $x = 1 \text{ m}$ . Le coeur du réacteur correspond au milieu pressurisé. Le fluide s'y présente majoritairement sous forme liquide. La rupture du circuit de refroidissement primaire est idéalisée par un tuyau d'arrivée gauche dépressurisé. Le fluide s'y présente majoritairement sous forme vapeur. Ce cas test s'intéresse à la vaporisation du mélange diphasique au coeur du réacteur. Pour réaliser la simulation de cette dépressurisation, on choisit d'approcher la partie convective du modèle bifluide à sept équations au moyen du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv. On impose alors une condition de Courant-Friedrich-Levy  $CFL = 0.8$ . A l'instant  $t = 5 \text{ s}$ , la dépressurisation du réacteur prédite par le modèle à sept équations est

reportée figure 8.13.

Intéressons-nous à l'évolution temporelle de cette solution. A l'instant  $t = 0$  s, le diaphragme initialement situé en  $x = 1$  m est rompu. Le problème de Riemann posé à l'interface  $x = 1$  m développe un choc et une détente. Le choc remonte le tuyau d'arrivée gauche initialement dépressurisé pour sortir du domaine de calcul. La détente se propage quant à elle en direction inverse. Elle dépressurise le coeur de l'enceinte. L'ensemble du mélange diphasique baignant le réacteur est alors aspiré par le tuyau d'arrivée gauche. De nombreux déséquilibres apparaissent entre les phases à la suite de ces ondes acoustiques. Ces déséquilibres sont reportés figure 8.13. Ils sont particulièrement visibles sur les cartes de température et de potentiel. En accord avec la remarque 13, les déséquilibres de pression sont quant à eux relativement faibles. La brusque dépressurisation du réacteur induit la vaporisation du mélange diphasique. La fraction volumique liquide  $\alpha_2$  diminue progressivement à la suite de la détente. Une accumulation de vapeur est alors observée dans la branche d'arrivée gauche de l'enceinte.

### 8.2.2 Dépressurisation d'un assemblage de crayons de combustible

Dans les réacteurs à eau sous pression, le combustible nucléaire se présente sous la forme de longs crayons cylindriques disposés verticalement dans des assemblages. En configuration nominale, l'eau sous pression circule entre ces crayons pour évacuer la chaleur du combustible. Dans ce paragraphe, on étudie la configuration accidentelle où une dépressurisation survient à proximité des assemblages. Comme précédemment, on cherche à déterminer la formation des poches de vapeur.

Pour simuler cette dépressurisation, une géométrie idéalisant un assemblage de crayons est tout d'abord construite. Cette géométrie est reportée à la figure 8.14(a). On en réalise le maillage non-structuré au moyen de 15 371 cellules triangulaires. De manière analogue à la section précédente, on initialise le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 25 \cdot 10^{-3}$  m sont reportés dans le tableau 8.14. Cette condition initiale décrit deux mélanges diphasiques à l'équilibre liquide-vapeur de chaque côté de l'interface  $x = 25 \cdot 10^{-3}$  m. L'assemblage de crayons baigne initialement dans le milieu pressurisé majoritairement occupé par la phase liquide. La rupture du circuit de refroidissement est idéalisée par une zone basse pression située à gauche de l'interface  $x = 25 \cdot 10^{-3}$  m. Le fluide s'y présente majoritairement sous forme vapeur. Pour les mêmes paramètres numériques qu'à la simulation précédente, la dépressurisation de l'assemblage de crayons prédite par le modèle à sept équations à l'instant  $t = 0.3$  s est reportée figure 8.14.

De manière analogue à la section précédente, cette solution décrit la propagation d'une détente au coeur de l'assemblage. L'ensemble du mélange diphasique baignant les crayons de combustible est alors aspiré par la gauche du domaine de calcul. Les cartes de vitesse décrivent alors le contournement des crayons de combustible par l'écoulement liquide-vapeur. Cette brusque dépressurisation de l'assemblage de crayons induit la vaporisation du mélange diphasique. La fraction volumique liquide  $\alpha_2$  diminue progressivement à la suite de la détente. Une accumulation de vapeur est alors observée sur les premiers crayons de l'assemblage.

Déterminer de telles accumulations de vapeur était l'objectif de ces simulations. Notre logiciel est donc à même de traiter des écoulements liquide-vapeur en géométrie complexe pour des applications en ingénierie nucléaire.

## 8.3 Comparaison des modèles à une et deux pressions

Dans cette section, on s'intéresse à la comparaison des modèles bifluides à une et deux pressions. Au chapitre 4, l'hyperbolicité du modèle bifluide à sept équations a été établie. Le caractère elliptique en temps du modèle bifluide standard à une pression a par la suite été déterminé au chapitre 6. Ces modèles sont donc de nature différente. Dans cette section, on étudie l'influence de cette différence de nature sur le comportement des solutions. Comme précédemment, les différents constituants du mélange diphasique

sont décrits par des lois d'état de type gaz parfait (2.2). On impose les coefficients thermodynamiques

$$\gamma_1 = 1.4, \quad \gamma_2 = 1.2, \quad C_{v_1} = 2 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}, \quad C_{v_2} = 1 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

La modélisation (8.3) des grandeurs interfaciales est par ailleurs retenue. On rappelle que cette modélisation pour le couple  $(P_i, V_i)$  définit localement tous les produits non-conservatifs du modèle bifluide à deux pressions. L'intensité des transferts interfaciaux est paramétrée pour finir par les coefficients d'échange (3.9).

### 8.3.1 Simulation des partie convectives

Dans ce premier paragraphe, on s'intéresse tout d'abord à la comparaison des différentes parties convectives respectivement associées aux modèles bifluides à une et deux pressions. Dans un cadre monodimensionnel, on effectue alors la simulation d'un tube à choc sur l'intervalle  $[0, 2]$ . Dans un premier temps, on réalise le maillage cartésien régulier de ce domaine de calcul. Ce maillage compte 1 000 cellules. Pour simuler la partie convective du modèle à une pression, la méthode de relaxation instantanée développée au chapitre 6 est par ailleurs utilisée. Dans la modélisation (3.9) du coefficient d'échange  $K_P$ , le temps caractéristique du retour à l'équilibre des pressions vaut

$$\tau_P = 1.10^{-3} \text{ s}.$$

On initialise par la suite le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 1$  m sont reportés dans le tableau 8.15. Cette condition initiale est compatible avec le modèle bifluide partiellement équilibré en pression. Elle décrit deux mélanges diphasiques à l'équilibre isobare isotherme équivalente de chaque côté de l'interface  $x = 1$  m. Pour réaliser la simulation de ce tube à choc, on choisit d'approcher la partie convective du modèle bifluide à sept équations par le biais du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv. La condition de Courant-Friedrich-Levy vaut alors 0.8. A l'instant  $t = 0.03$  s, les solutions de ce tube à choc respectivement fournies par les parties convectives à six et sept équations sont reportées à la figure 8.15.

En ce qui concerne la modélisation bifluide partiellement équilibrée en pression, la solution isobare fournie par le modèle à six équations présente des instabilités. L'évolution temporelle de la fraction volumique  $\alpha_2$  est par exemple reportée figure 8.16(a). Ces instabilités se développent dans le temps. Elles conduisent à l'explosion de la simulation à l'instant  $t = 0.03138$  s. Réalisons la simulation de ce même tube à choc sur différents maillages. L'ensemble de ces simulations explose inéluctablement. Seul l'instant d'explosion varie avec le maillage. L'évolution de cet instant d'explosion en fonction du nombre de cellules est reportée figure 8.16(b). Plus le maillage est fin, plus la simulation explose rapidement. Nous retrouvons ici les instabilités décrites par Hérard, Hurisse [62], Karni, Kirr, Kurganov et Petrova [72]. Intéressons-nous au spectre de l'opérateur convectif à six équations. On définit la fonction caractéristique des domaines elliptiques en temps. Cette fonction vaut 0 lorsque le spectre de l'opérateur est réel. Elle vaut 1 lorsque certaines de ses valeurs propres sont complexes. L'évolution temporelle de cette fonction caractéristique est reportée figure 8.16(c). Partant d'une condition initiale équivalente pour laquelle le spectre de l'opérateur convectif à six équations est réel, la solution s'enfonce petit à petit dans une poche d'ellipticité en temps. Sur ce cas test, la solution pénètre un domaine elliptique dès lors qu'un déséquilibre de vitesse apparaît entre les phases (voir figure 8.16(d)). Dans ce domaine elliptique, l'évolution de la partie imaginaire des valeurs propres complexes est reportée figure 8.16(e). Cette partie imaginaire présente une corrélation avec l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$ . Cette corrélation est reportée figure 8.16(f). Plus l'écart de vitesse est important, plus la partie imaginaire des valeurs propres complexes est grande. Plus cette partie imaginaire est grande, plus rapidement explose la simulation.

En ce qui concerne la modélisation bifluide à sept équations, la solution à deux pressions reportée figure 8.15 est stable. A titre comparatif, l'évolution temporelle de la fraction volumique  $\alpha_2$  est reportée figure 8.17(a). Aucune instabilité ne se développe en temps. On n'observe que l'advection du profil de fraction volumique. La propagation des ondes acoustiques engendre similairement des déséquilibres entre les phases. A titre comparatif, l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$  est reporté figure 8.17(b). Ce déséquilibre de vitesse s'accompagne cette fois du déséquilibre de pression  $P_2 - P_1$  reporté figure 8.17(c). On réalise ensuite

la simulation de ce même tube à choc sur différents maillages constitués de 1 000 à 100 000 cellules. A l'instant  $t = 0.05$  s, l'ensemble de ces simulations est reporté figure 8.18. Ces simulations ne présentent aucune instabilité. Elles convergent vers une unique solution.

En résumé, les deux solutions reportées figure 8.15 présentent des comportements différents. La solution associée à la partie convective du modèle bifluide à sept équations est stable. La solution associée à la partie convective du modèle bifluide isobare présente des instabilités. Nous proposons ici de mettre en lien cette différence de comportement avec la différence de nature des deux systèmes simulés. Le développement d'instabilités est alors lié à la nature elliptique en temps du modèle bifluide à six équations. La sensibilité au maillage de ces instabilités est mise en relation avec la diffusion numérique de nos schémas. Sur maillage grossier, les instabilités mettent un certain temps à se développer. Sur maillage fin, l'excitation des modes complexes n'est pas atténué. La solution explose après quelques pas de temps. La stabilité des solutions associées à la partie convective du modèle bifluide à sept équations est quant à elle liée à la nature hyperbolique de ce système. A titre comparatif, la simulation de ce même tube à choc a déjà été réalisée à la section 8.1.2 pour la partie convective inconditionnellement hyperbolique du modèle bifluide isobare équivalente à cinq équations. Les solutions de ce modèle se sont avérées tout aussi stables (voir figure 8.8). En conclusion, sur ce cas test, seule la simulation des systèmes hyperboliques nous a permis d'obtenir des solutions stables et convergées.

### 8.3.2 Simulation d'un écoulement liquide-gaz sans transition de phase

Dans le cadre de notre approche à pas fractionnaires, l'approximation des parties convectives associées aux modèles bifluides à six et sept équations vient d'être étudiée au paragraphe précédent. Dans le cadre des écoulements liquide-gaz sans transfert de masse, on s'intéresse maintenant à la dynamique des transferts interfaciaux.

Pour caractériser les différents échanges interfaciaux de ces deux modèles bifluides à six et sept équations, le cas test présenté au paragraphe précédent est ici repris en activant les phénomènes de transfert. Dans la modélisation (3.9) des coefficients d'échange  $K_P$ ,  $K_T$ ,  $K_U$ , les différentes échelles de temps caractéristiques du retour à l'équilibre diphasique valent respectivement

$$\tau_P = 1.10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_T = 1.10^{-2} \text{ s}, \quad \tau_U = 5.10^{-3} \text{ s}.$$

Le maillage cartésien régulier du domaine de calcul  $[0, 2]$  compte cette fois 13 000 cellules. Pour les mêmes paramètres numériques qu'à la section précédente, les solutions de ce tube à choc respectivement fournies à l'instant  $t = 0.06$  s par les modèles à six et sept équations sont reportées figure 8.19. D'un point de vue qualitatif, à l'instant  $t = 0.06$  s, ces deux solutions sont très proches.

Intéressons-nous cependant à leurs évolutions temporelles. La solution isobare fournie par le modèle à six équations présente des instabilités. Ces instabilités sur la fraction volumique  $\alpha_2$  sont par exemple reportées sur la figure 8.20(a). A l'inverse de la section précédente, ces instabilités s'atténuent au cours du temps. Procédons à la simulation de ce même tube à choc sur différents maillages pour le modèle bifluide isobare à six équations. Sur des maillages plus grossiers que celui déjà envisagé (13 000 cellules), la solution est quasi inchangée. Des instabilités apparaissent qui sont moins intenses et qui s'atténuent plus rapidement. Sur des maillages plus fins en revanche, des instabilités plus intenses se développent qui conduisent à l'explosion des simulations. L'évolution de ces instants d'explosion en fonction du maillage est alors reportée sur la figure 8.20(b). Sur l'ensemble des maillages utilisés, un seuil apparaît donc qui se situe aux alentours des 13 350 cellules. En deçà, la solution développe des instabilités qui s'atténuent au cours du temps. Au delà, la solution explose. Comme à la section précédente, intéressons-nous au spectre de l'opérateur convectif à six équations. On rappelle la définition de la fonction caractéristique des domaines elliptiques en temps. Cette fonction vaut 0 lorsque le spectre de l'opérateur convectif est réel. Elle vaut 1 lorsque certaines de ses valeurs propres sont complexes. L'évolution temporelle de cette fonction caractéristique est reportée sur la figure 8.20(c). De manière analogue à la section précédente, la solution prédite par le modèle à six équations pénètre un domaine d'ellipticité en temps dès lors qu'un déséquilibre de vitesse apparaît entre les

phases. Comme précédemment, une corrélation existe alors entre la partie imaginaire des valeurs propres complexes et l'écart de vitesse entre les phases. Cette corrélation est reportée figure 8.20(f). Comme à la section précédente, plus l'écart de vitesse est important, plus la partie imaginaire des valeurs propres complexes est grande. Toutes ces observations sont en accord avec le travail réalisé à la section 8.3.1. Les termes de relaxation ont cependant été activés pour cette simulation. Ces termes de relaxation induisent des transferts entre les phases. En conséquence, une fois les ondes acoustiques passées qui engendrent des déséquilibres au sein du mélange, les termes de relaxation tendent à ramener la solution vers l'équilibre. La traînée tout particulièrement tend à ramener la solution vers l'équilibre équivitesse  $u_1 = u_2$ . Du fait de la corrélation entre l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$  et la partie imaginaire des valeurs propres complexes, le spectre de l'opérateur convectif tend donc à redevenir réel. Contrairement à la section précédente, l'existence d'instabilités ne conduit plus nécessairement à l'explosion des simulations pour le modèle à une pression. Lors de la simulation des écoulements liquide-gaz, les transferts interfaciaux apportent un effet stabilisant à l'opérateur convectif. On assiste alors à une compétition entre les instabilités de la partie convective et les effets stabilisants de la relaxation. Sur maillage grossier, les effets diffusifs de la méthode numérique joints à la procédure de relaxation en vitesse tendent à réduire la partie imaginaire des valeurs propres complexes. Les instabilités s'atténuent. Sur maillage fin, la relaxation en vitesse ne se fait pas assez vite pour une diffusion numérique insuffisante. La simulation explose. Une telle interprétation explique l'apparition d'un seuil d'explosion dans la taille des maillages.

En ce qui concerne le modèle bifluide à deux pressions, la solution reportée figure 8.19 est stable. Comme à la section précédente, l'évolution temporelle de la fraction volumique  $\alpha_2$  est reportée à titre comparatif figure 8.21(a). Cette solution ne développe aucune instabilité dans le temps. Les seules variations de la fraction volumique sont dues aux termes de relaxation en pression. En accord avec la remarque 13, l'écart de pression entre les phases est toujours faible. Encore une fois, utiliser un modèle à deux pressions indépendantes ne signifie pas pour autant s'éloigner de l'équilibre isobare. Pour étudier la stabilité de cette solution, on réalise ensuite la simulation de ce même tube à choc sur un maillage beaucoup plus fin comptant 100 000 cellules. A l'instant  $t = 0.06$  s, la solution prédite par le modèle à sept équations est reportée figure 8.22. Cette solution ne présente toujours aucune instabilité. En conséquence, quand bien même les solutions fournies par les modèles à six et sept équations seraient très semblables sur maillage grossier, nous préconisons l'utilisation du modèle hyperbolique. Seul ce modèle nous permet d'obtenir des solutions stables convergées.

### 8.3.3 Simulation d'un écoulement liquide-vapeur en transition de phase

Dans ce paragraphe, on reprend la même étude qu'à la section précédente pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase dans une tuyère de section discontinue. Pour simuler cet écoulement, on construit tout d'abord la géométrie reportée sur la figure 8.23(a). Cette géométrie est ensuite maillée au moyen de 85 000 cellules carrées. Un agrandissement de ce maillage est reportée à la figure 8.23(b). Pour décrire l'intensité des transferts interfaciaux, la modélisation (3.9) des coefficients d'échange est par ailleurs retenue. Conformément à l'analyse bibliographique menée à la section 3.4, les différentes échelles de temps apparaissant dans cette modélisation (3.9) des coefficients d'échange sont identifiées à des constantes de l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s. Ces échelles de temps valent respectivement

$$\tau_P = 10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_T = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}, \quad \tau_\theta = 7 \cdot 10^{-2} \text{ s}, \quad \tau_U = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

On initialise par la suite le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 0.2$  m figurent dans le tableau 8.23. Cette condition initiale décrit deux mélanges diphasiques à l'équilibre liquide-vapeur de chaque côté de l'interface  $x = 0.2$  m. L'amont de la tuyère est occupé par un mélange sous pression. Ce cas test s'intéresse à la propagation d'un choc dans l'aval de cette tuyère. Avec les mêmes paramètres numériques qu'aux sections précédentes, les solutions de ce tube à choc respectivement fournies à l'instant  $t = 0.3$  s par les modèles à une et deux pressions sont reportées sur la figure 8.23.

A l'instant  $t = 0$  s, le diaphragme initialement situé dans la partie étroite de la tuyère est rompu. Le problème de Riemann posé à l'interface  $x = 0.2$  m développe un choc et une détente. La détente se propage

sur le milieu pressurisé. Elle remonte vers l'amont de la tuyère pour sortir du domaine de calcul. Le choc se propage vers l'aval de la tuyère sur le milieu basse pression. Il atteint la discontinuité de section située en  $x = 0.4$  m à l'instant  $t = 0.01$  s. Ce choc plan se diffracte alors pour prendre une structure bidimensionnelle. On observe la réorganisation de l'écoulement diphasique. Dans la partie élargie de la tuyère, un jet se forme que viennent symétriquement border deux zones de recirculation. A l'extrémité du jet, la compression est maximale. Cette compression induit la liquéfaction du mélange diphasique. La fraction volumique liquide  $\alpha_2$  augmente. Les zones de recirculation se comportent comme de petites centrifugeuses. On y observe une dépression. Ces zones de recirculation tendent à expulser le liquide des tourbillons. La fraction volumique liquide  $\alpha_2$  y diminue. La propagation des ondes acoustiques engendre des déséquilibres entre les phases que résorbent les transferts interfaciaux. Dans le cas du modèle à six équations, le retour à l'équilibre des pressions s'effectue instantanément. La solution isobare reportée figure 8.23 ne présente que des déséquilibres de température, vitesse et potentiel. Une fois les ondes acoustiques passées, les transferts de chaleur, de masse et de quantité de mouvement rétablissent progressivement l'équilibre isotherme équipotentiel équivitesse entre les phases. En ce qui concerne le modèle à sept équations, différents déséquilibres de vitesse, pression, température et potentiel apparaissent au sein du mélange à la suite des ondes acoustiques. Une fois ces ondes acoustiques passées, l'ensemble des transferts interfaciaux rétablit progressivement l'équilibre liquide-vapeur. Les modèles bifluïdes à six et sept équations décrivent donc les mêmes phénomènes, mais pas dans les mêmes proportions. Le modèle à une pression prédit des phénomènes de liquéfaction et de vaporisation plus intenses. En réalisant les mêmes études qu'à la section précédente (voir figures 8.24, 8.25), on montre similairement que l'intensité de ces phénomènes correspond au développement d'instabilités. Pour le modèle à six équations, le même cas test réalisé sur un maillage constitué de 340 000 cellules carrées explose à l'instant  $t = 0.02907$  s. Sur ce maillage fin, la solution fournie par le modèle à sept équations ne présente quant à elle aucune instabilité. Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur, on en vient donc aux mêmes conclusions qu'à la section précédente. La convergence vers une solution stable ne peut être obtenue que par le biais d'une modélisation hyperbolique.

**Remarque 14.** *Pour simuler le modèle bifluïde partiellement équilibré en pression, la méthode de relaxation instantanée développée au chapitre 6 a systématiquement été utilisée dans cette section. A titre comparatif, la simulation de ce modèle isobare a également été réalisée au moyen d'un code six équations du CEA. Sur le cas test bidimensionnel de la tuyère à section discontinue, la solution fournie par ce code six équations sur un maillage constitué de 3400 cellules a explosé à l'instant  $t = 0.0895$  s. Sur un maillage plus fin constitué de 13 600 cellules, la solution fournie par ce code a explosé plus rapidement à l'instant  $t = 0.0761$  s. Sur ce même cas test, rappelons que la méthode de relaxation instantanée en pression n'a conduit à l'explosion des simulations que sur des maillages fins constitués d'environ 340 000 cellules. La méthode de relaxation instantanée est donc particulièrement robuste.*

En conclusion, différents écoulements diphasiques ont été simulés dans ce chapitre. Dans un premier temps, on s'est intéressé à la validation de la méthode numérique à pas fractionnaires élaborée au chapitre 7. A l'inverse du cadre non-conservatif classique [30, 65], on a tout d'abord établi la convergence des différents schémas de convection vers une même solution pour les modélisations particulières (4.10) du couple  $(P_i, V_i)$ . Lors de la simulation des transferts interfaciaux, on a ensuite montré la convergence des schémas d'intégration vers les équilibres isobares isothermes (équipotentiels) équivitesses. La préservation des différents équilibres diphasiques a finalement été vérifiée. Une fois validée, cette méthode numérique a ensuite été appliquée à la simulation des écoulements liquide-vapeur en déséquilibre dans des géométries complexes. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, on s'est particulièrement intéressé à la simulation des phénomènes de dépressurisation dans les réacteurs. Les différentes modélisations bifluïdes à une et deux pressions ont finalement été comparées. Ce chapitre a montré les aptitudes de notre logiciel à traiter des problématiques industrielles.

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>	$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>

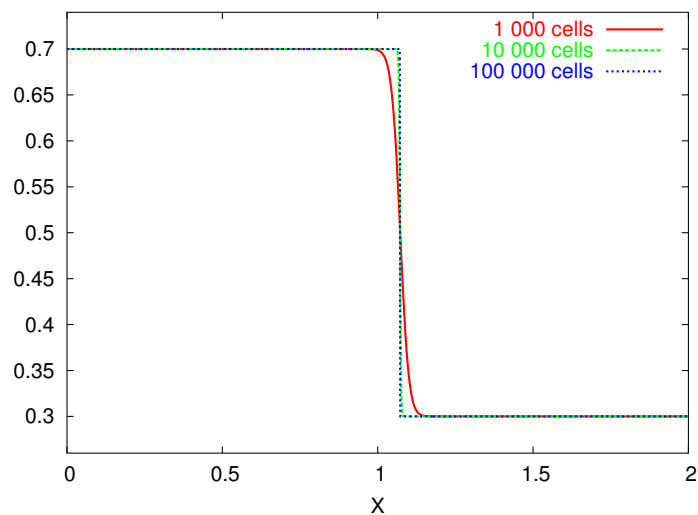
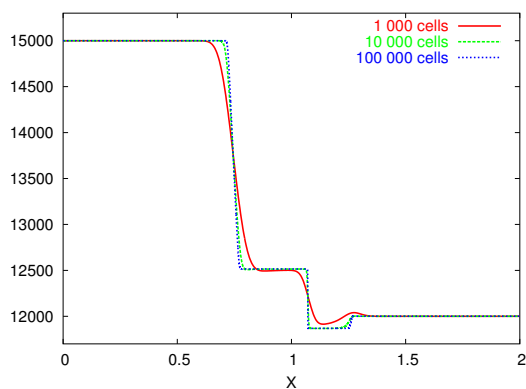
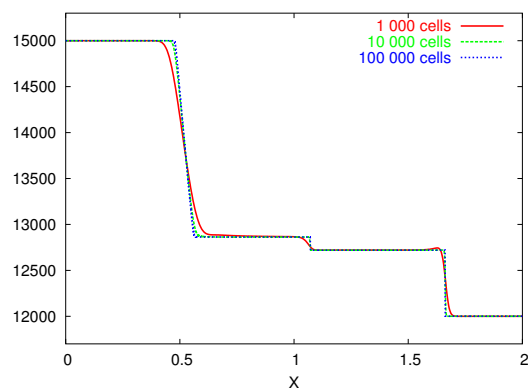
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 8.1: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.  
Raffinement de maillage pour le schéma de Rusanov.  
Modèle interfacial (8.1).  
( $t = 0.04$  s).



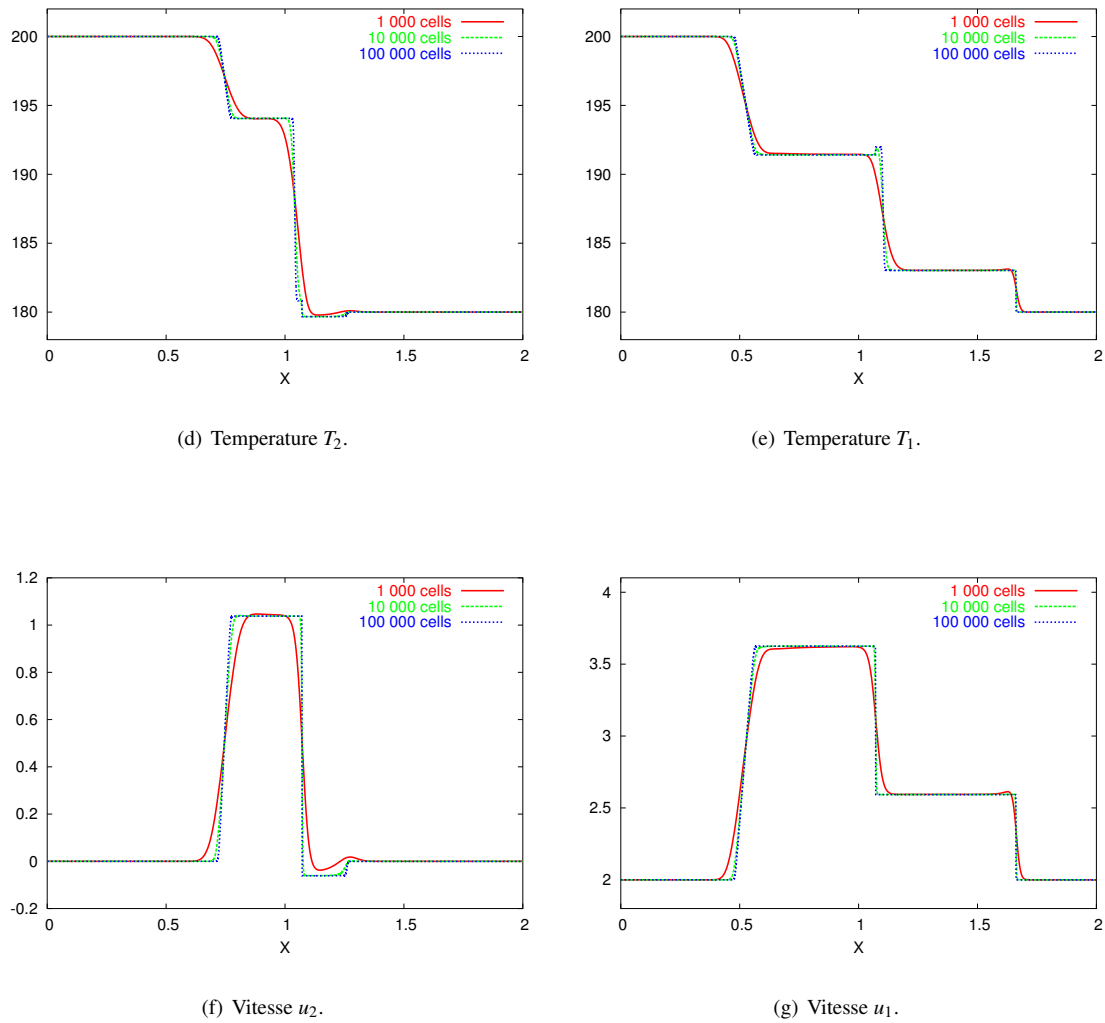


Figure 8.1: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.  
Raffinement de maillage pour le schéma de Rusanov.  
Modèle interfacial (8.1).  
( $t = 0.04$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>	$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>

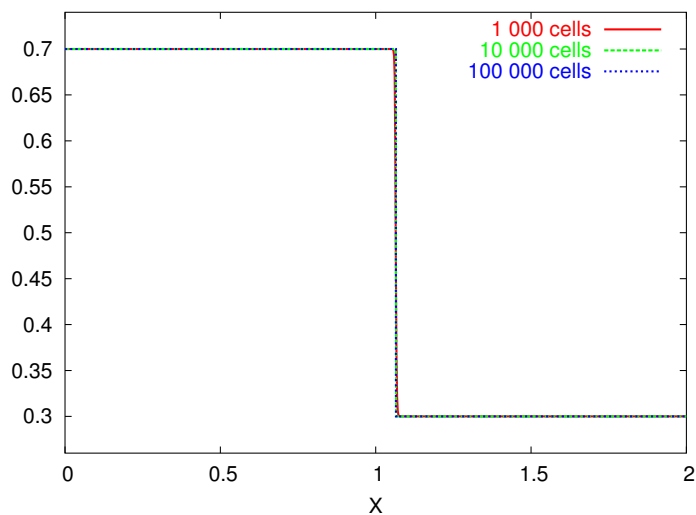
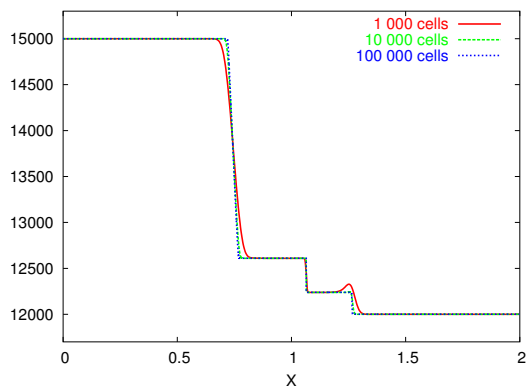
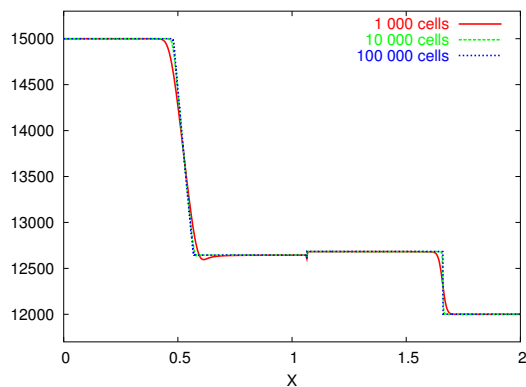
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 8.2: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Raffinement de maillage pour le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv. Modèle interfacial (8.1). ( $t = 0.04$  s).

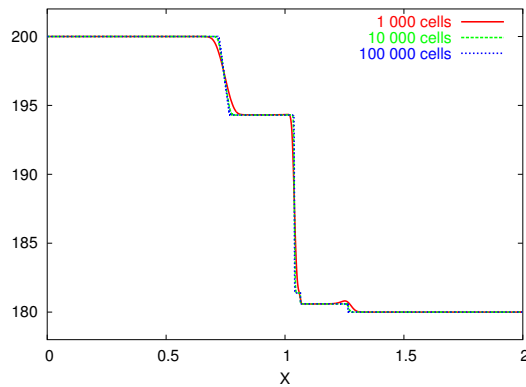
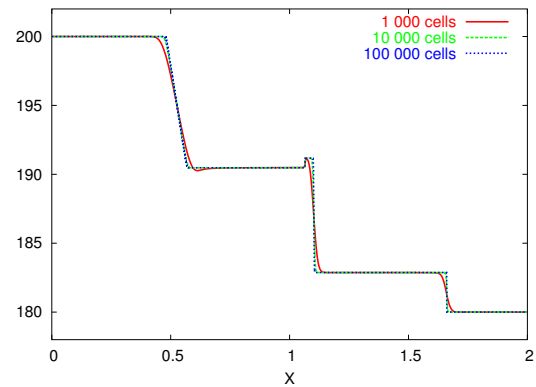
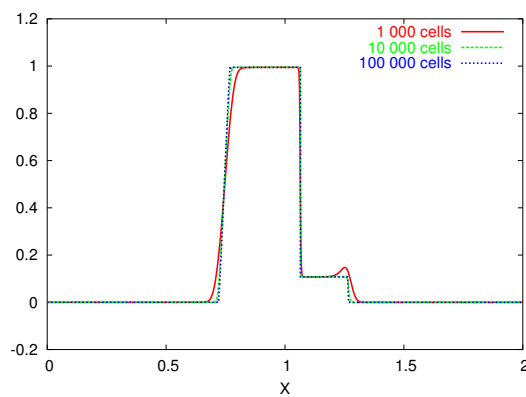
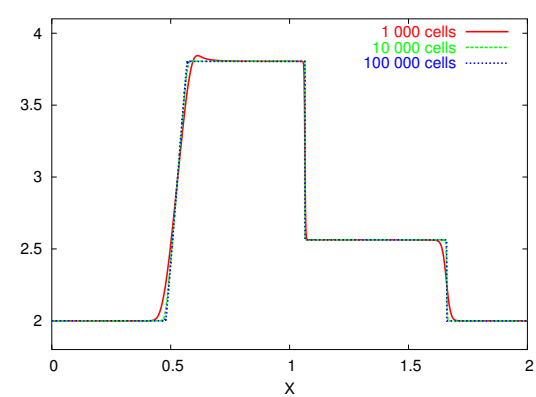
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .

Figure 8.2: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.  
 Raffinement de maillage pour le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv.  
 Modèle interfacial (8.1).  
 ( $t = 0.04$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>	$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>

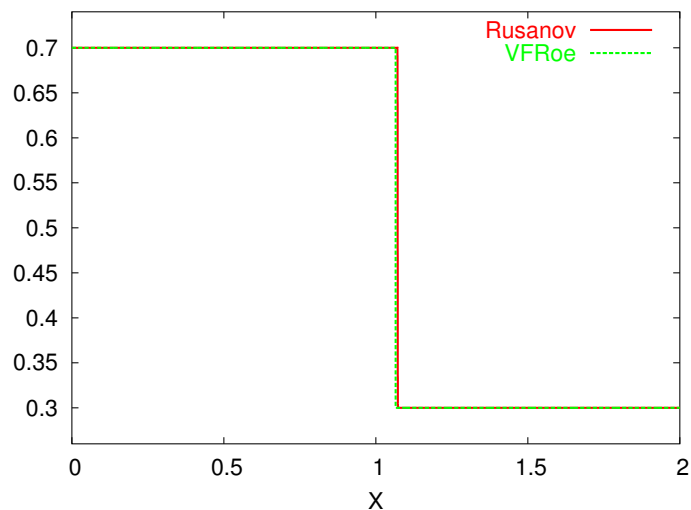
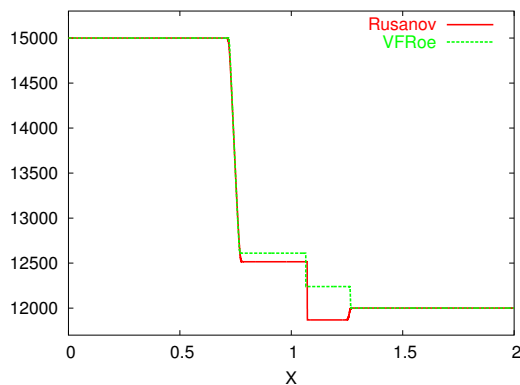
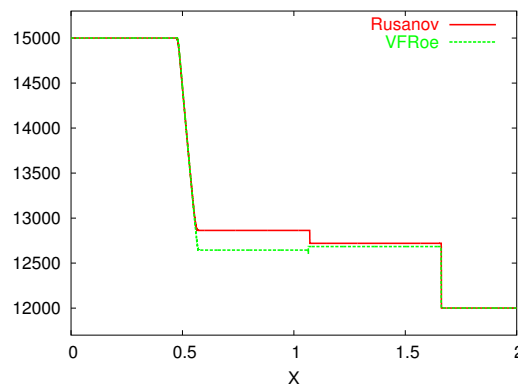
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 8.3: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Comparaison des solutions convergées fournies par le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv et le schéma de Rusanov pour la modélisation (8.1) des grandeurs interfaciales. ( $t = 0.04$  s).

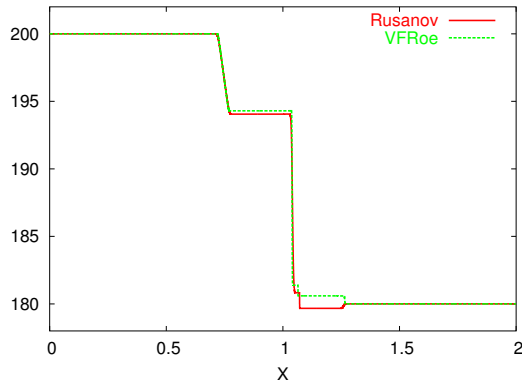
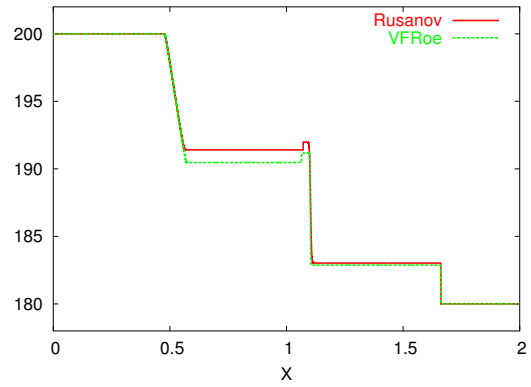
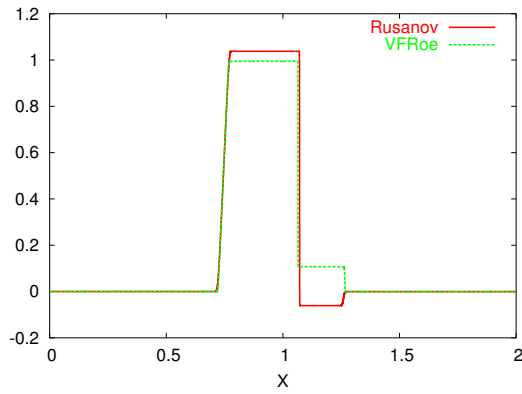
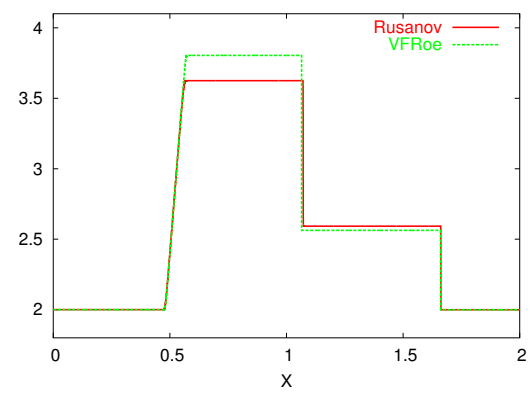
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .

Figure 8.3: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Comparaison des solutions convergées fournies par le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv et le schéma de Rusanov pour la modélisation (8.1) des grandeurs interfaciales. ( $t = 0.04$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>	$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>

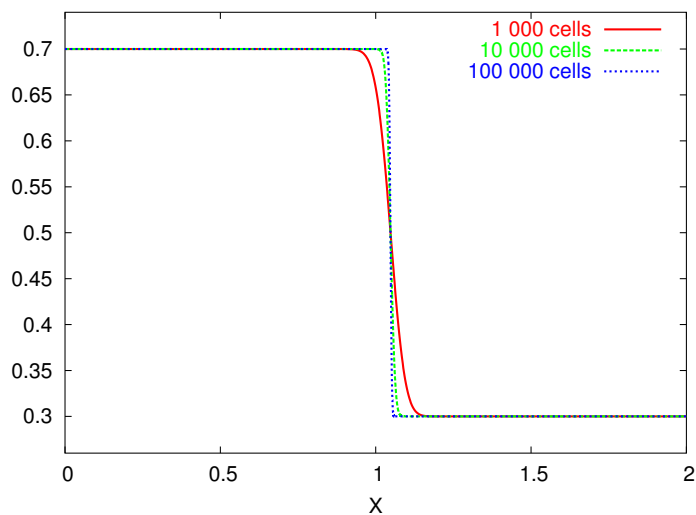
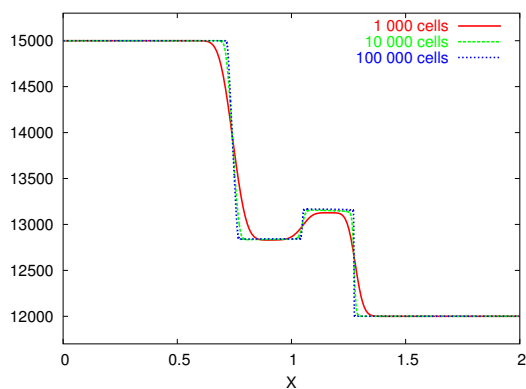
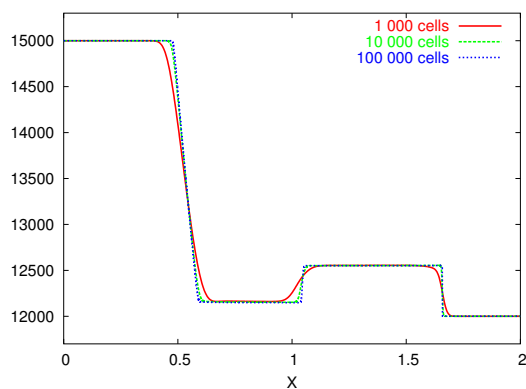
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 8.4: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.  
Raffinement de maillage pour le schéma de Rusanov.  
Modèle interfacial (4.10c).  
( $t = 0.04$  s).

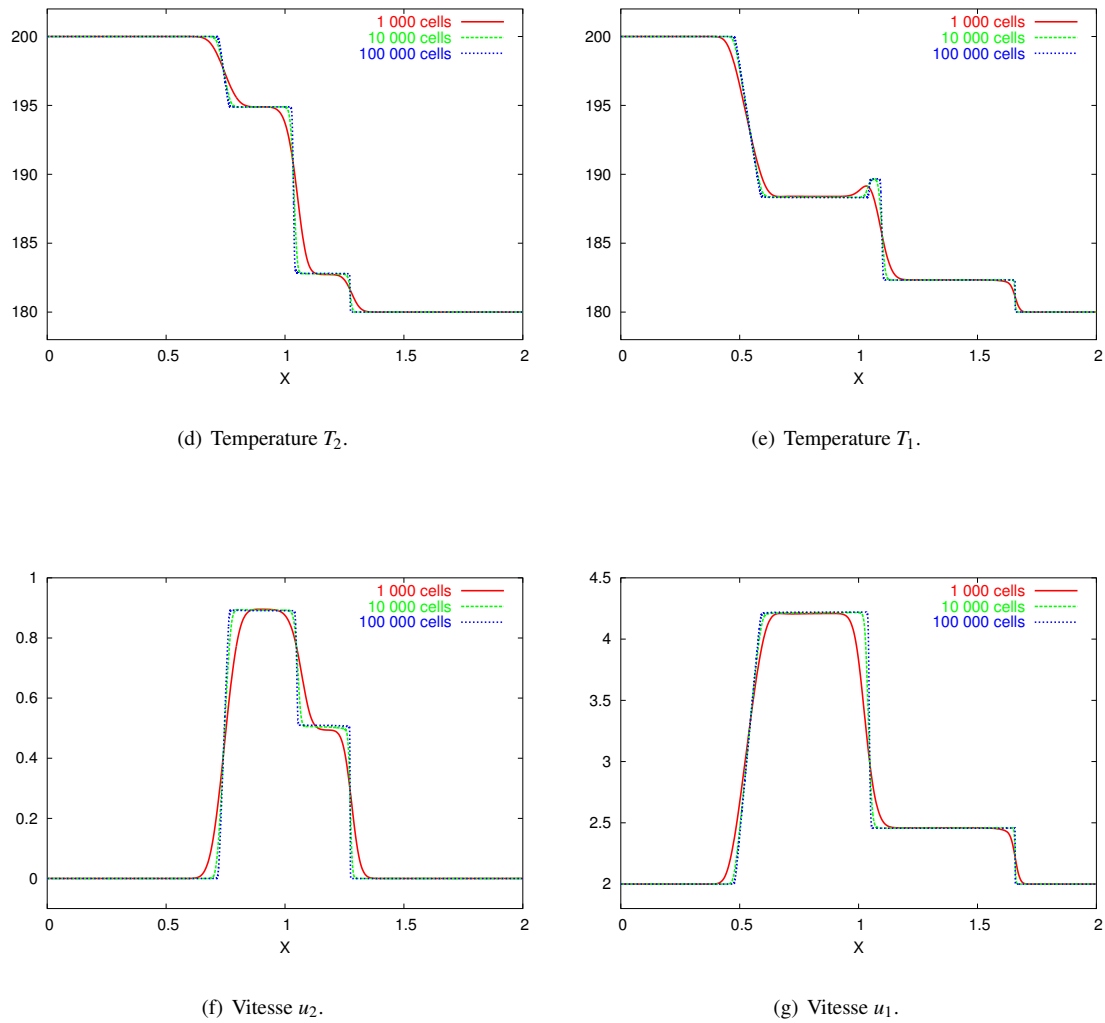


Figure 8.4: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.  
Raffinement de maillage pour le schéma de Rusanov.  
Modèle interfacial (4.10c).  
( $t = 0.04$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>	$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>

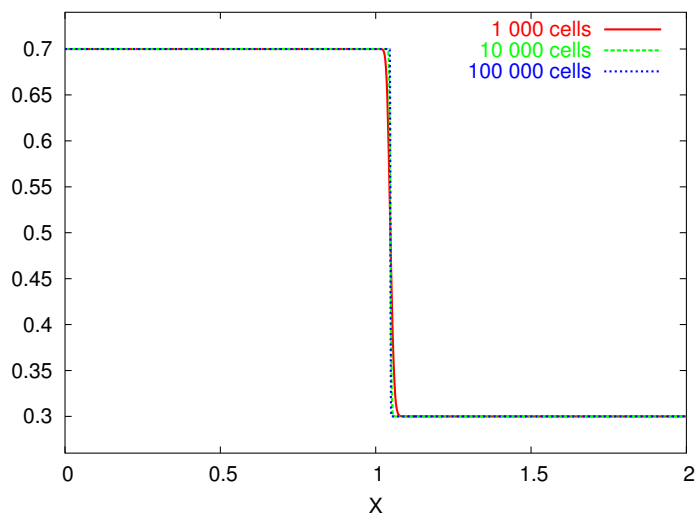
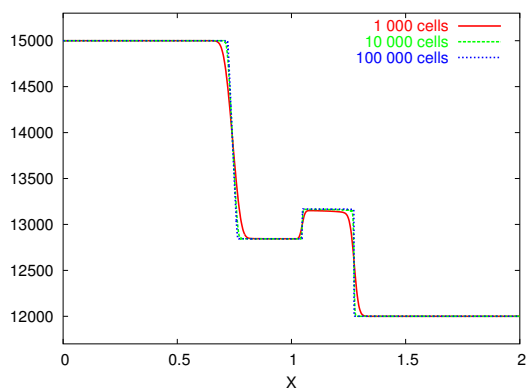
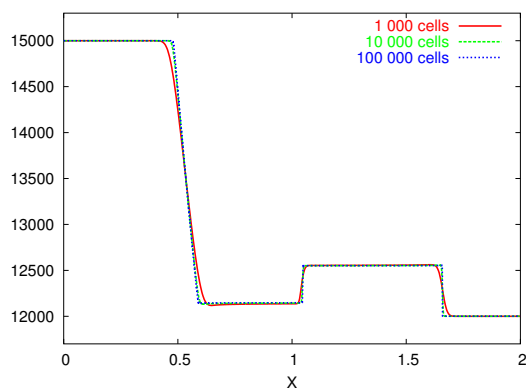
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 8.5: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.  
 Raffinement de maillage pour le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv.  
 Modèle interfacial (4.10c).  
 ( $t = 0.04$  s).



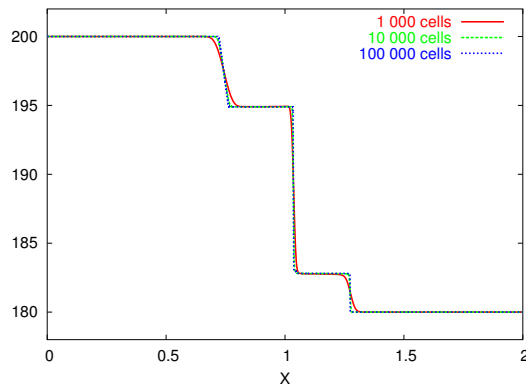
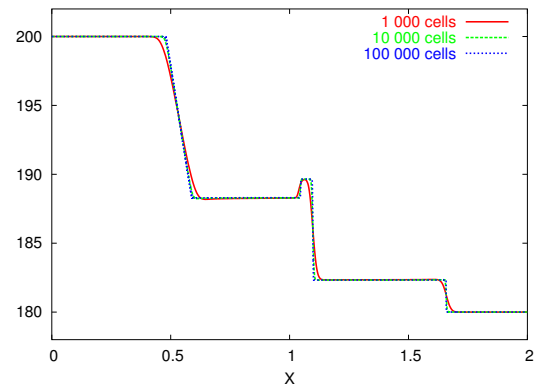
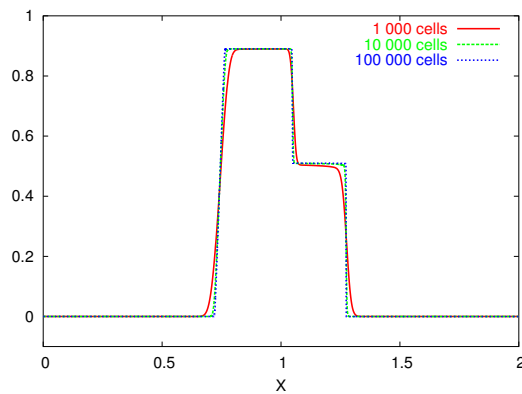
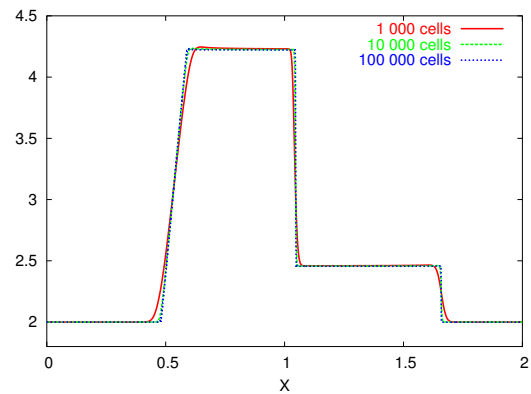
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .

Figure 8.5: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations.  
Raffinement de maillage pour le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv.  
Modèle interfacial (4.10c).  
( $t = 0.04$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>	$u_1 = 2$ m.s <sup>-1</sup>

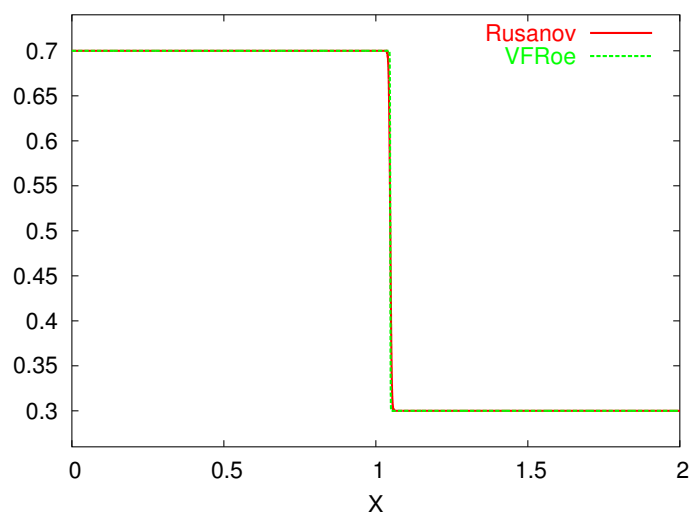
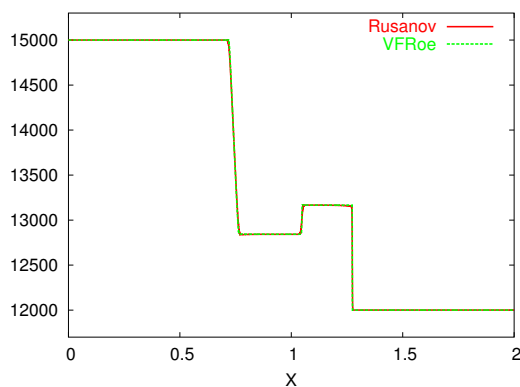
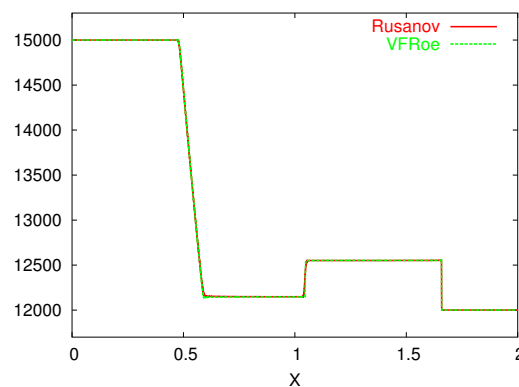
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 8.6: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Comparaison des solutions convergées fournies par le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv et le schéma de Rusanov pour la modélisation (4.10c) des grandeurs interfaciales. ( $t = 0.04$  s).

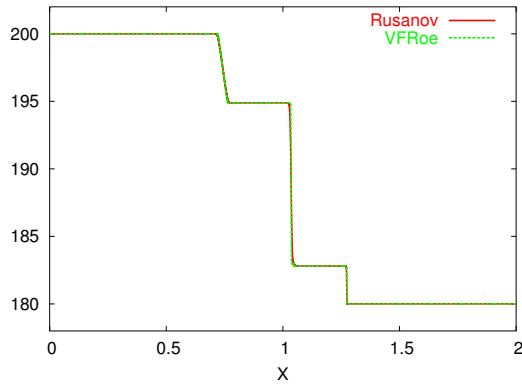
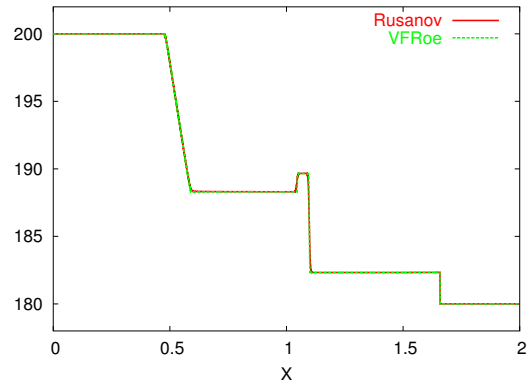
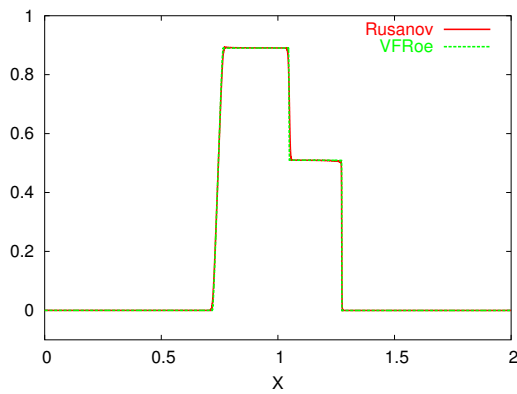
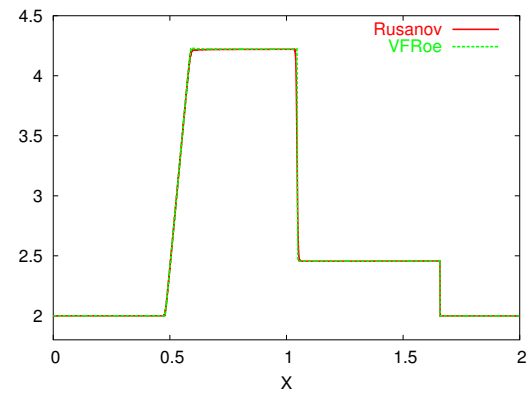
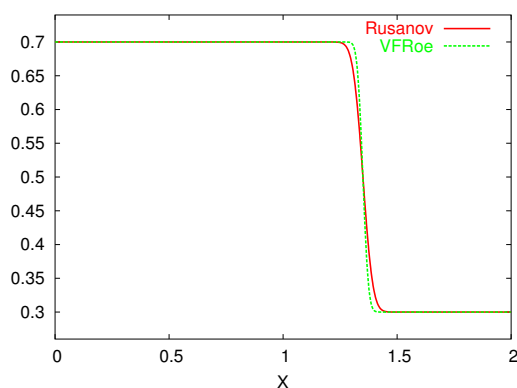
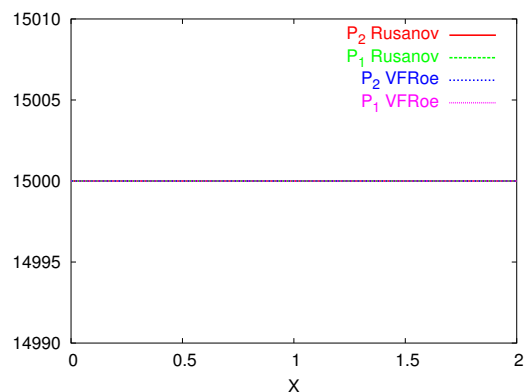
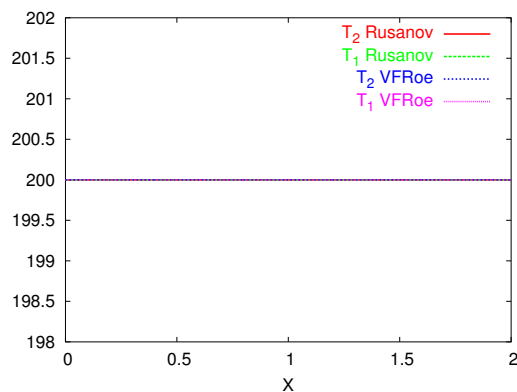
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .

Figure 8.6: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à sept équations. Comparaison des solutions convergées fournies par le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv et le schéma de Rusanov pour la modélisation (4.10c) des grandeurs interfaciales. ( $t = 0.04$  s).

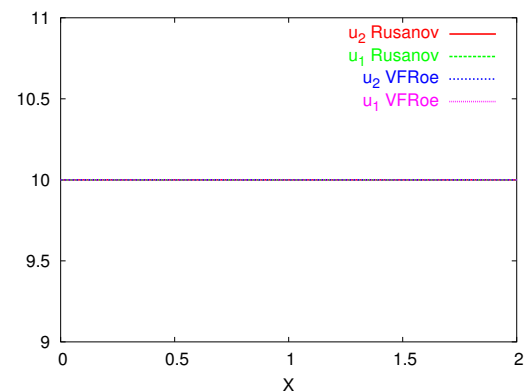
Conditions initiales : $0 < x < 0.8$ m	Conditions initiales : $0.8 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 200$ K
$u_2 = u_1 = 10$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 10$ m.s <sup>-1</sup>

(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .

(b) Pressions.



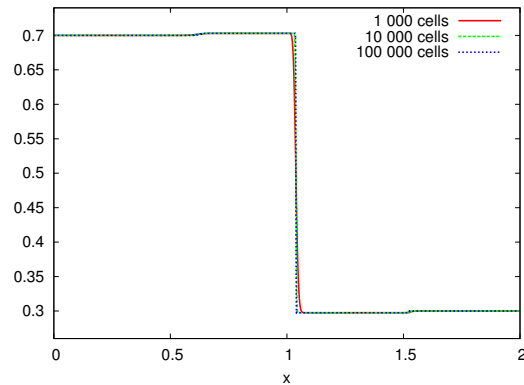
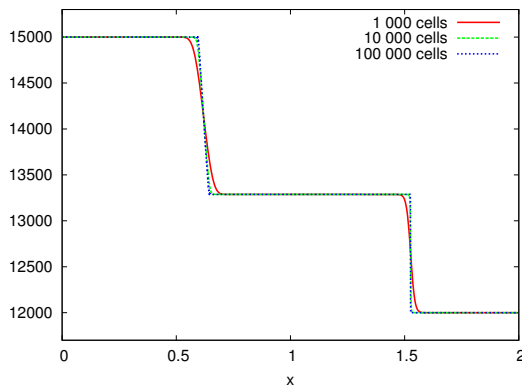
(c) Temperatures.



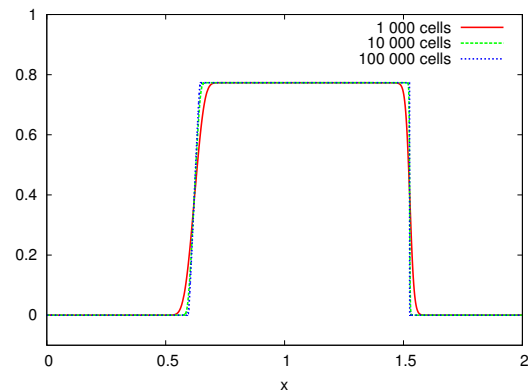
(d) Vitesses.

Figure 8.7: simulation de l'advection d'une interface pour le modèle bifluide à sept équations. Préservation de l'équilibre isobare isotherme équivitesse. ( $t = 0.55$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .

(b) Pression.



(c) Vitesse.

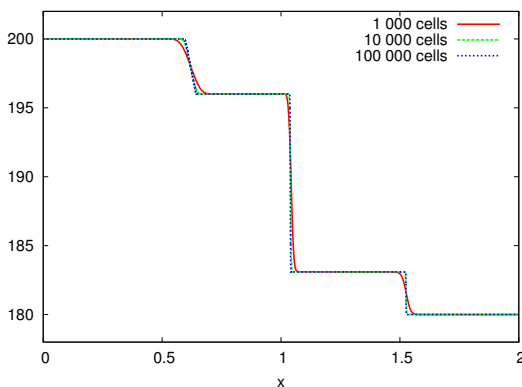
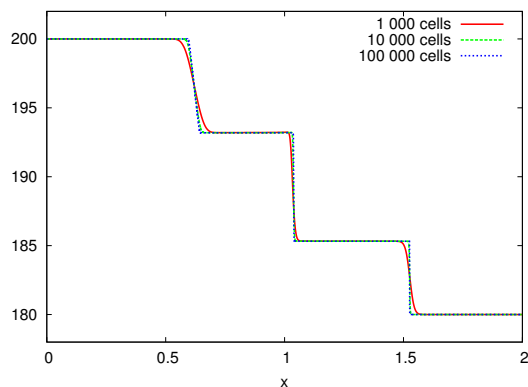
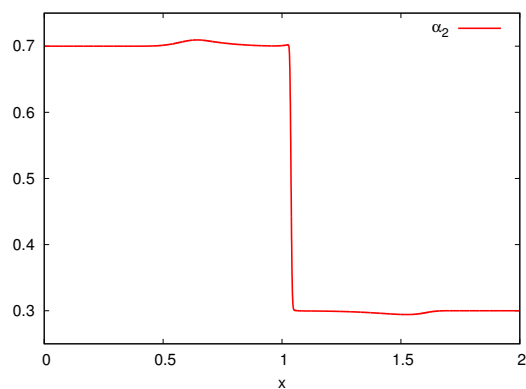
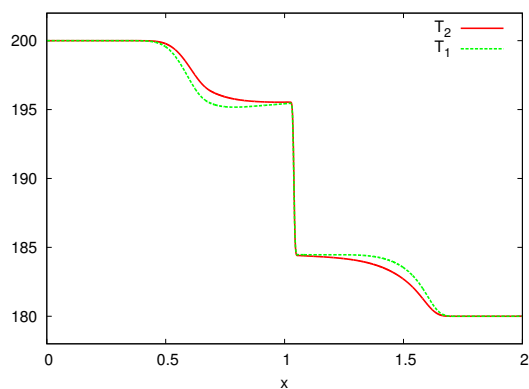
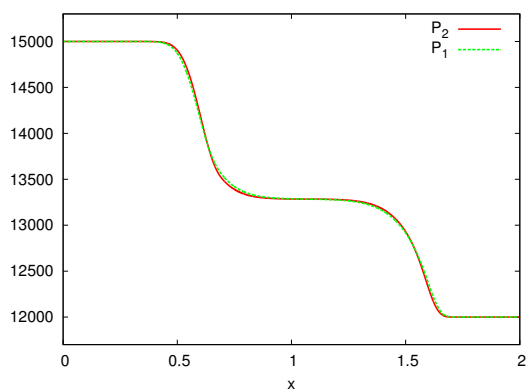
(d) Température  $T_2$ .(e) Température  $T_1$ .

Figure 8.8: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide à cinq équations partiellement équilibré en vitesse et en pression.  
( $t = 0.05$  s).

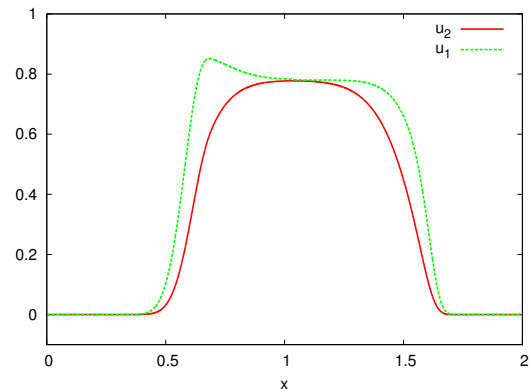
Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .

(b) Températures.



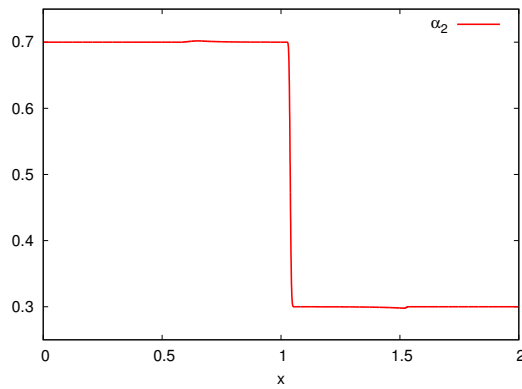
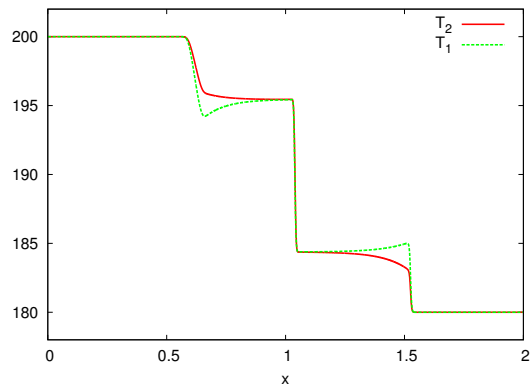
(c) Pressions.



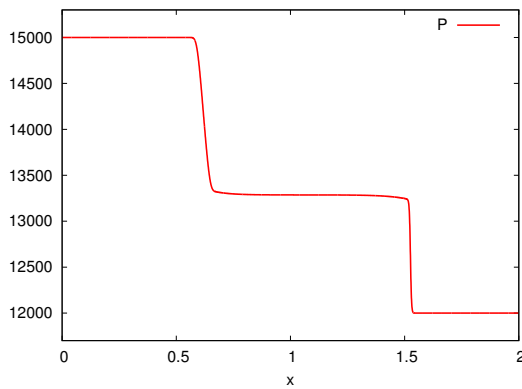
(d) Vitesses.

Figure 8.9: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-gaz sans transition de phase par le biais du modèle à sept équations.  
( $t = 0.05$  s).

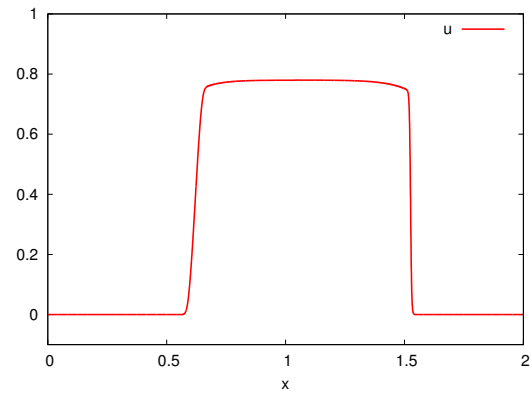
Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .

(b) Températures.



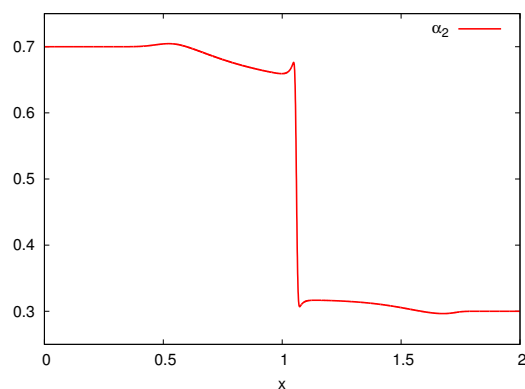
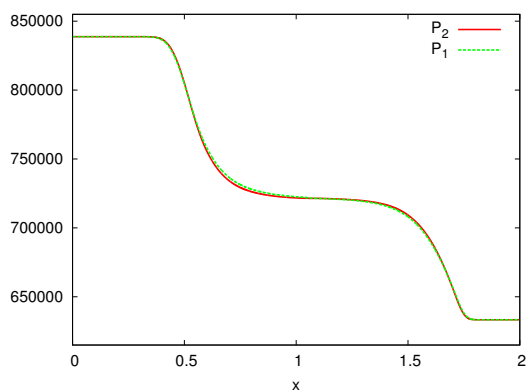
(c) Pression.



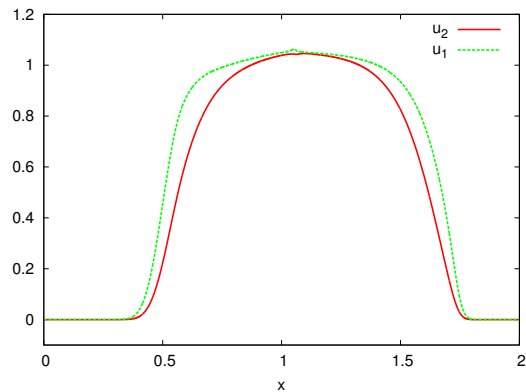
(d) Vitesse.

Figure 8.10: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-gaz sans transition de phase par le biais du modèle isobare équivitesse à cinq équations.  
( $t = 0.05$  s).

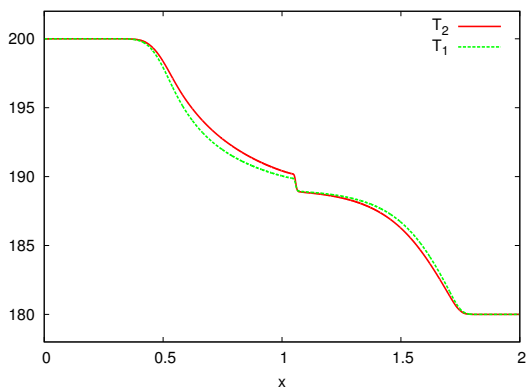
Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 838\,793$ Pa	$P_2 = P_1 = 633\,337$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$g_2 = g_1 = -99.7423$ J.kg <sup>-1</sup>	$g_2 = g_1 = -77.1248$ J.kg <sup>-1</sup>
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

(a) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$ .

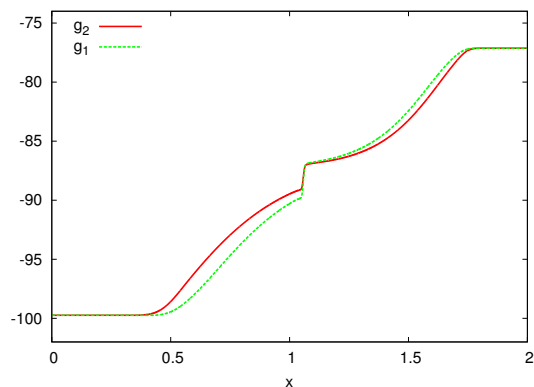
(b) Pressions.



(c) Vitesses.



(d) Températures.

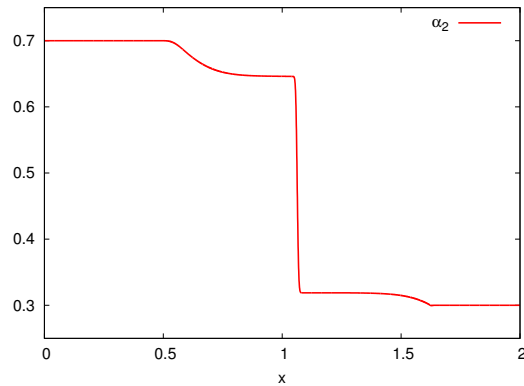
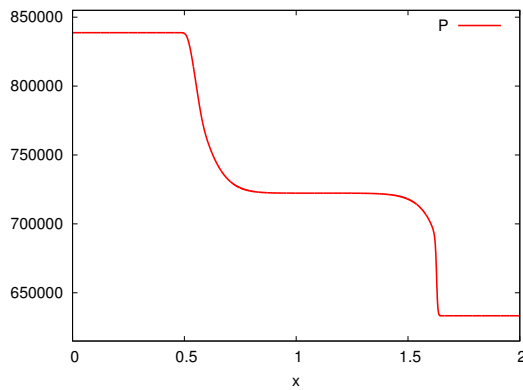


(e) Potentiels de Gibbs.

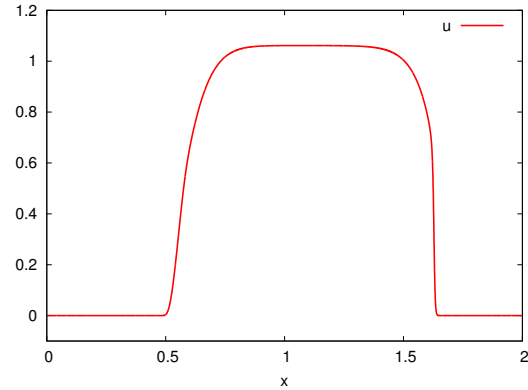
Figure 8.11: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase par le biais du modèle à sept équations ( $t = 0.06$  s).



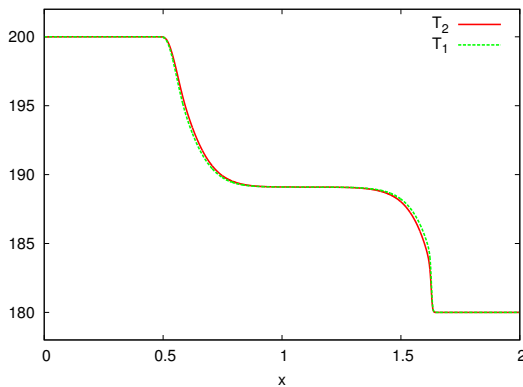
Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 838\,793$ Pa	$P_2 = P_1 = 633\,337$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$g_2 = g_1 = -99.7423$ J.kg <sup>-1</sup>	$g_2 = g_1 = -77.1248$ J.kg <sup>-1</sup>
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

(a) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$ .

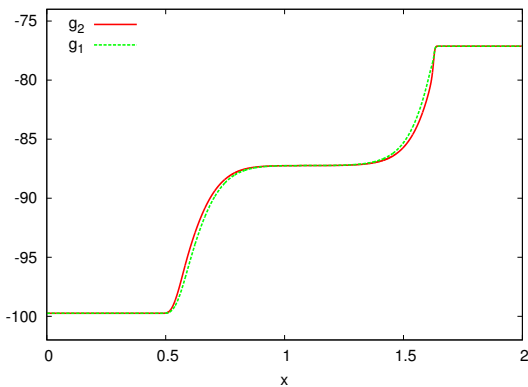
(b) Pression.



(c) Vitesse.



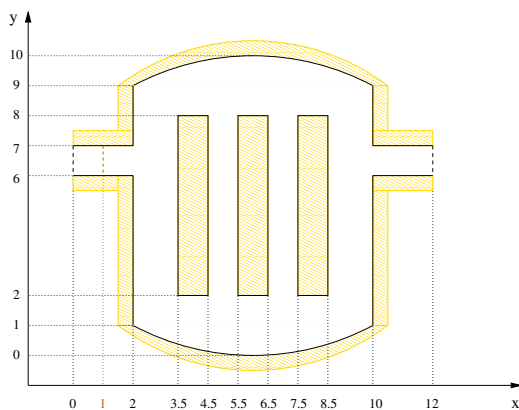
(d) Températures.



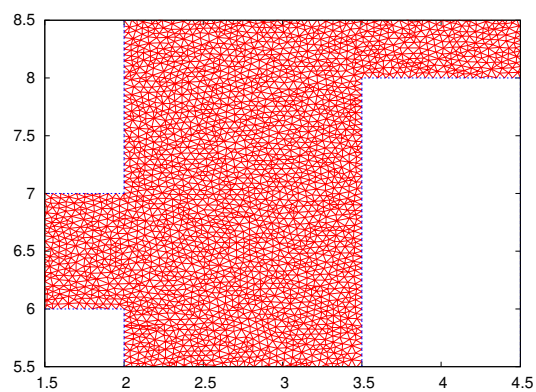
(e) Potentiels de Gibbs.

Figure 8.12: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase par le biais du modèle isobare équivitesse à cinq équations ( $t = 0.06$  s).

Conditions initiales : $x < 1$ m	Conditions initiales : $x > 1$ m
$\alpha_2 = 0.2$	$\alpha_2 = 0.8$
$P_2 = P_1 = 1\,445\,730$ Pa	$P_2 = P_1 = 6\,952\,920$ Pa
$T_2 = T_1 = 300$ K	$T_2 = T_1 = 600$ K
$g_2 = g_1 = 111.348$ J.kg <sup>-1</sup>	$g_2 = g_1 = 17.3845$ J.kg <sup>-1</sup>
$u_{2x} = u_{1x} = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_{2x} = u_{1x} = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_{2y} = u_{1y} = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_{2y} = u_{1y} = 0$ m.s <sup>-1</sup>



(a) Configuration géométrique et conditions initiales.



(b) Construction d'un maillage non-structuré.

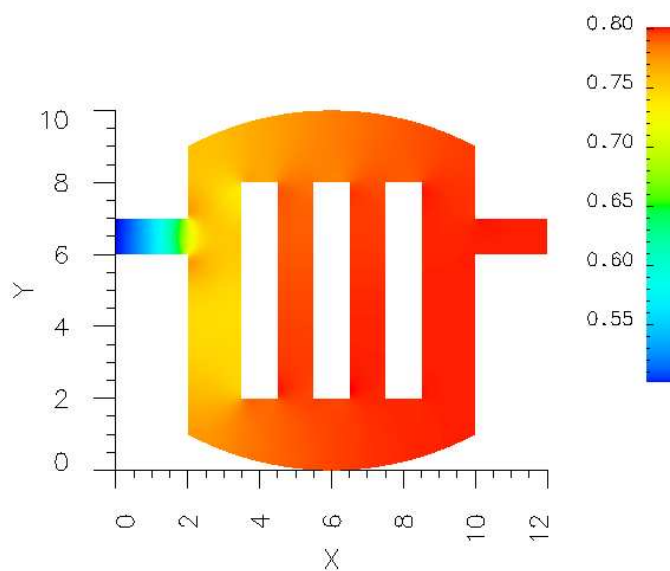
(c) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$ .

Figure 8.13: dépressurisation d'une enceinte pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase.  
( $t = 5$  s).

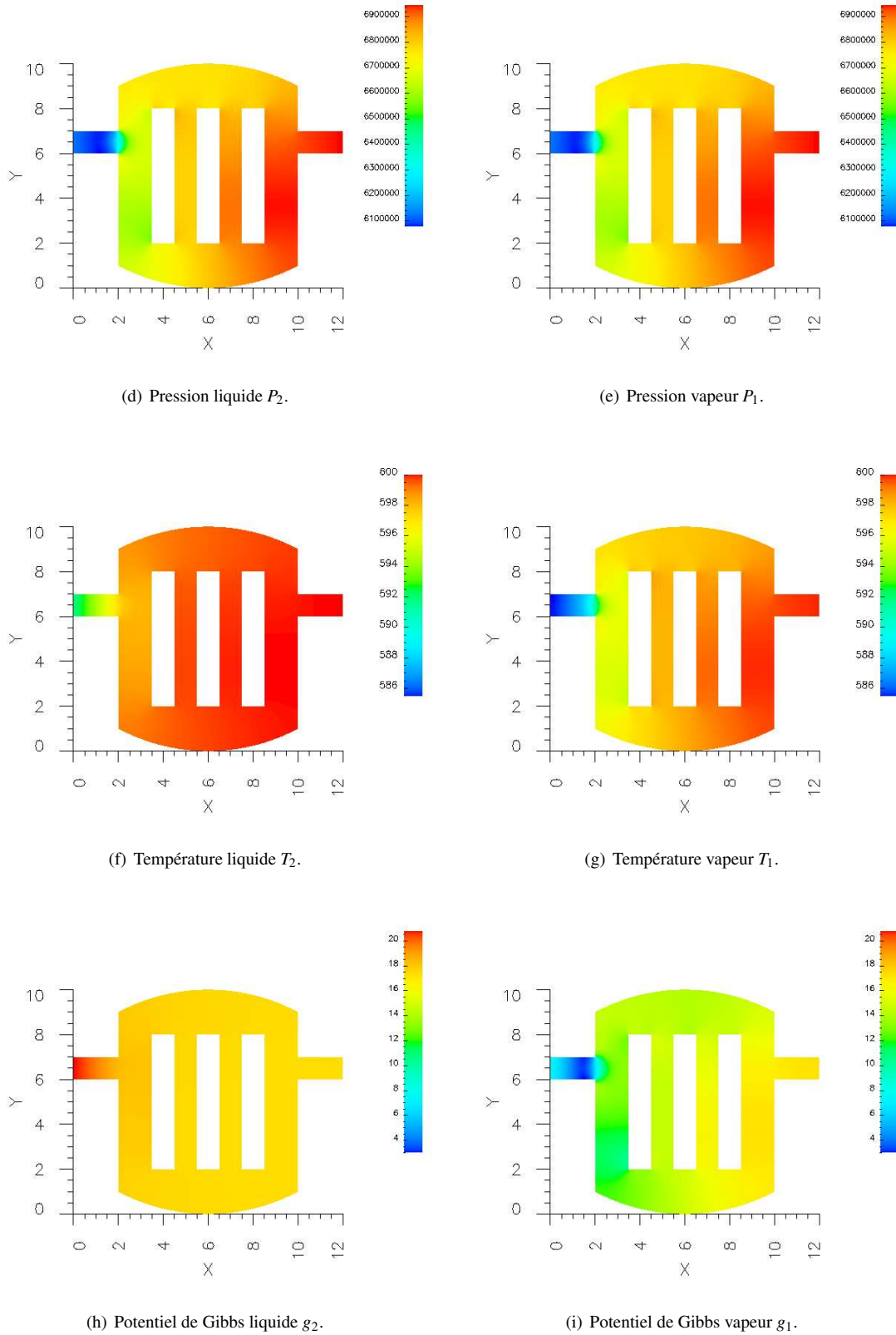


Figure 8.13: dépressurisation d'une enceinte pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase. ( $t = 5$  s).

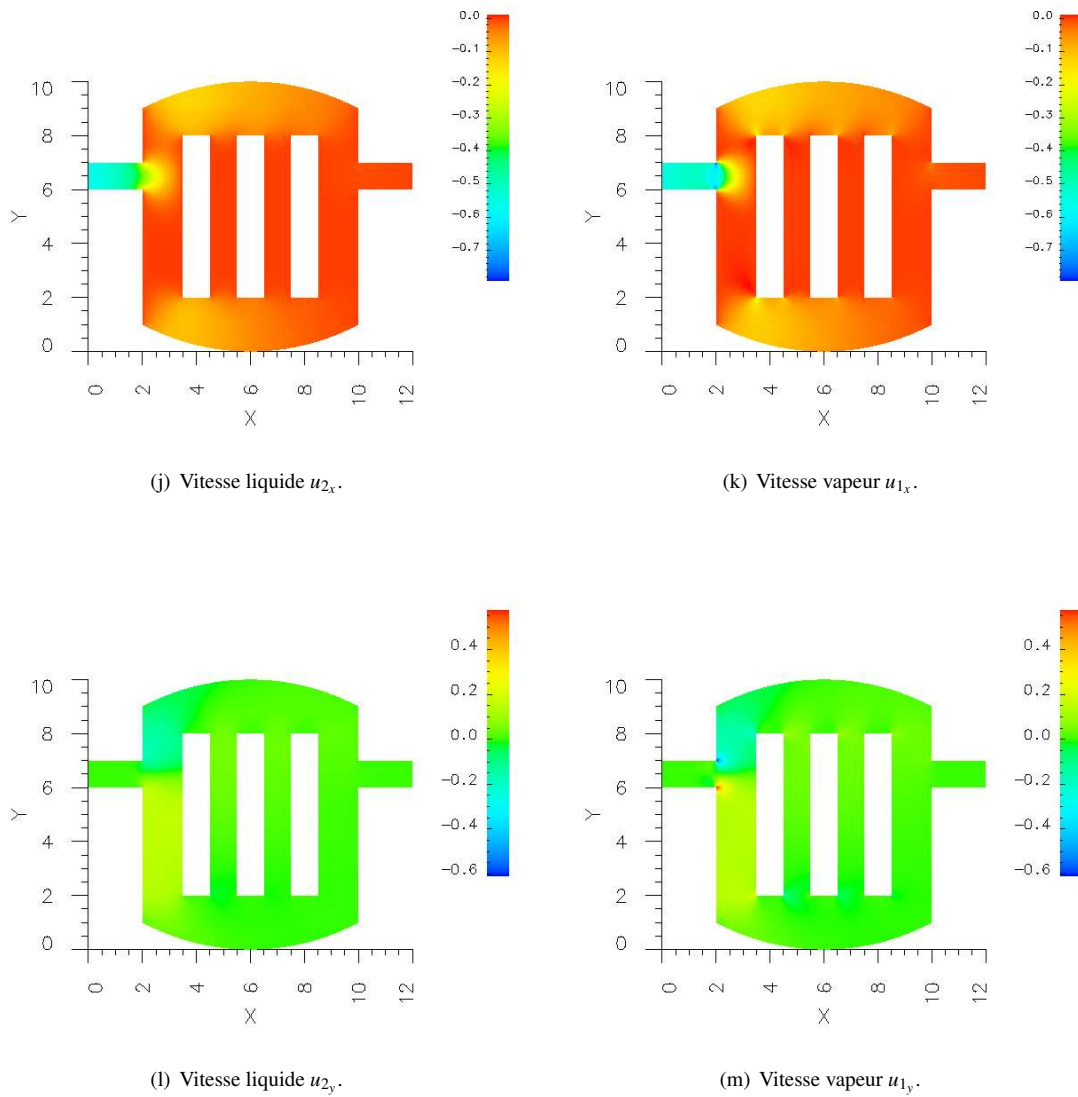
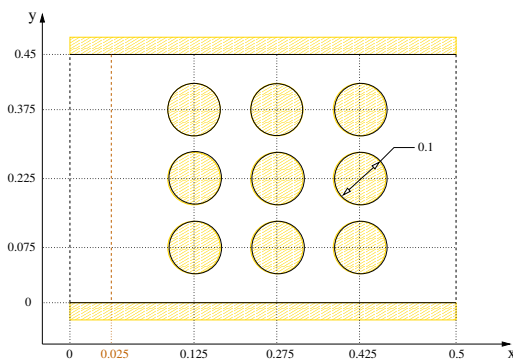
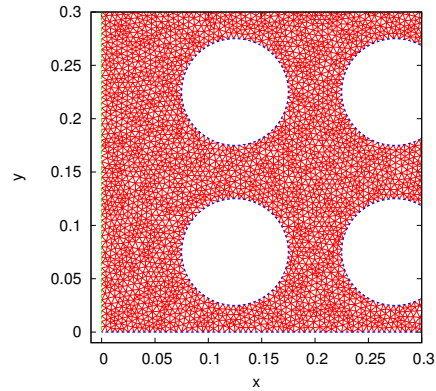


Figure 8.13: dépressurisation d'une enceinte pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase.  
( $t = 5$  s).

Conditions initiales : $x < 0.025$ m	Conditions initiales : $x > 0.025$ m
$\alpha_2 = 0.2$	$\alpha_2 = 0.8$
$P_2 = P_1 = 1\,445\,730$ Pa	$P_2 = P_1 = 6\,952\,920$ Pa
$T_2 = T_1 = 300$ K	$T_2 = T_1 = 600$ K
$g_2 = g_1 = 111.348$ J.kg <sup>-1</sup>	$g_2 = g_1 = 17.3845$ J.kg <sup>-1</sup>
$u_{2x} = u_{1x} = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_{2x} = u_{1x} = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_{2y} = u_{1y} = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_{2y} = u_{1y} = 0$ m.s <sup>-1</sup>



(a) Configuration géométrique et conditions initiales.



(b) Construction d'un maillage non-structuré.

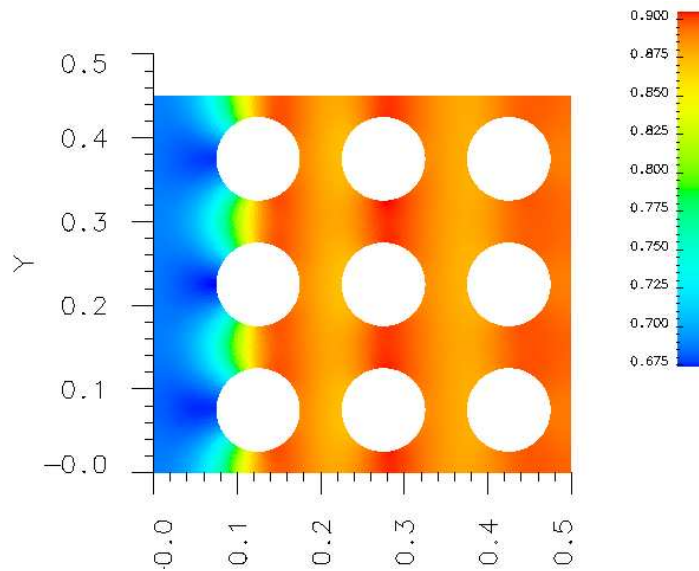
(c) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$ .

Figure 8.14: dépressurisation d'un assemblage de crayons pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase.  
( $t = 0.3$  s).

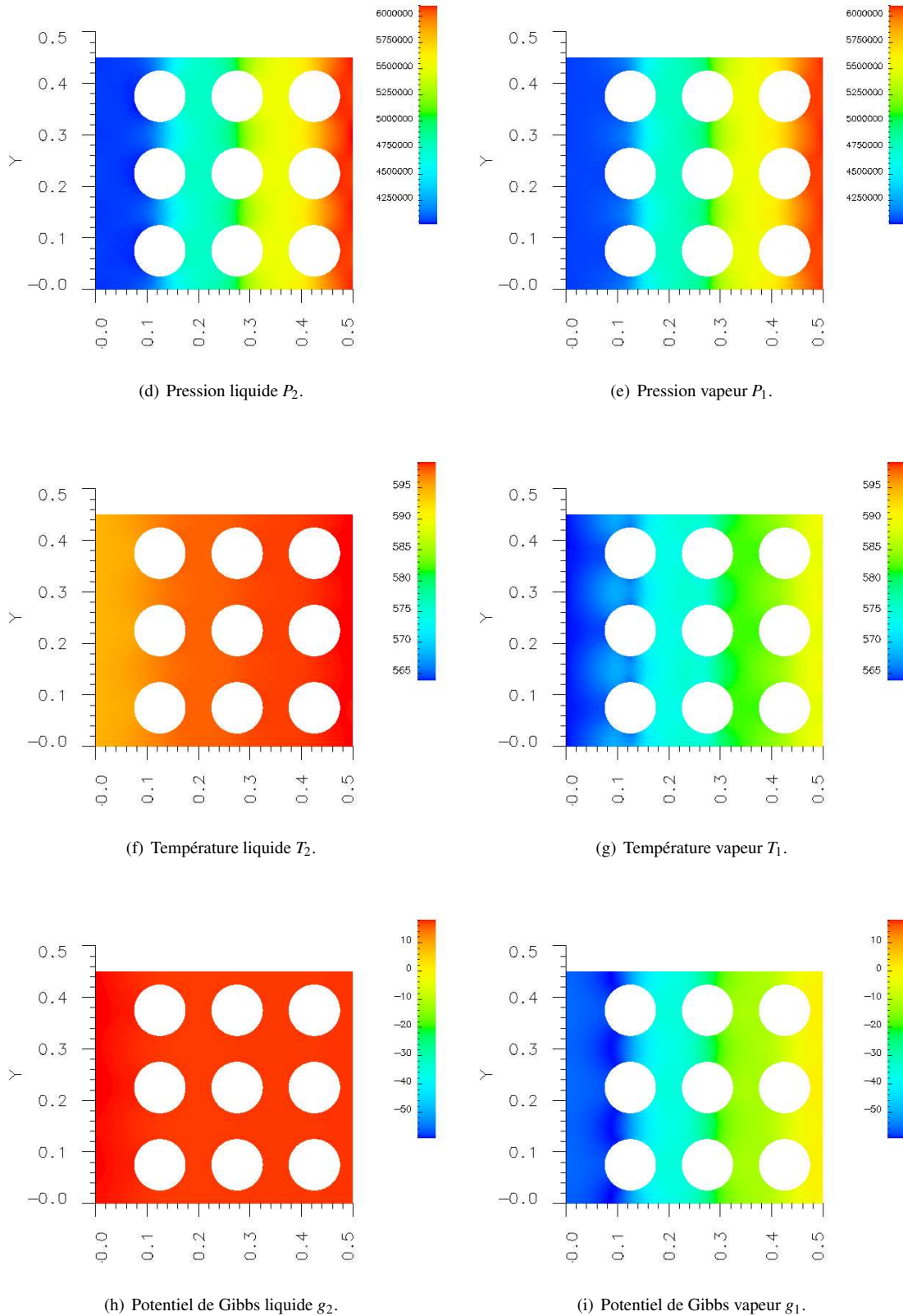


Figure 8.14: dépressurisation d'un assemblage de crayons pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase.  
( $t = 0.3$  s).

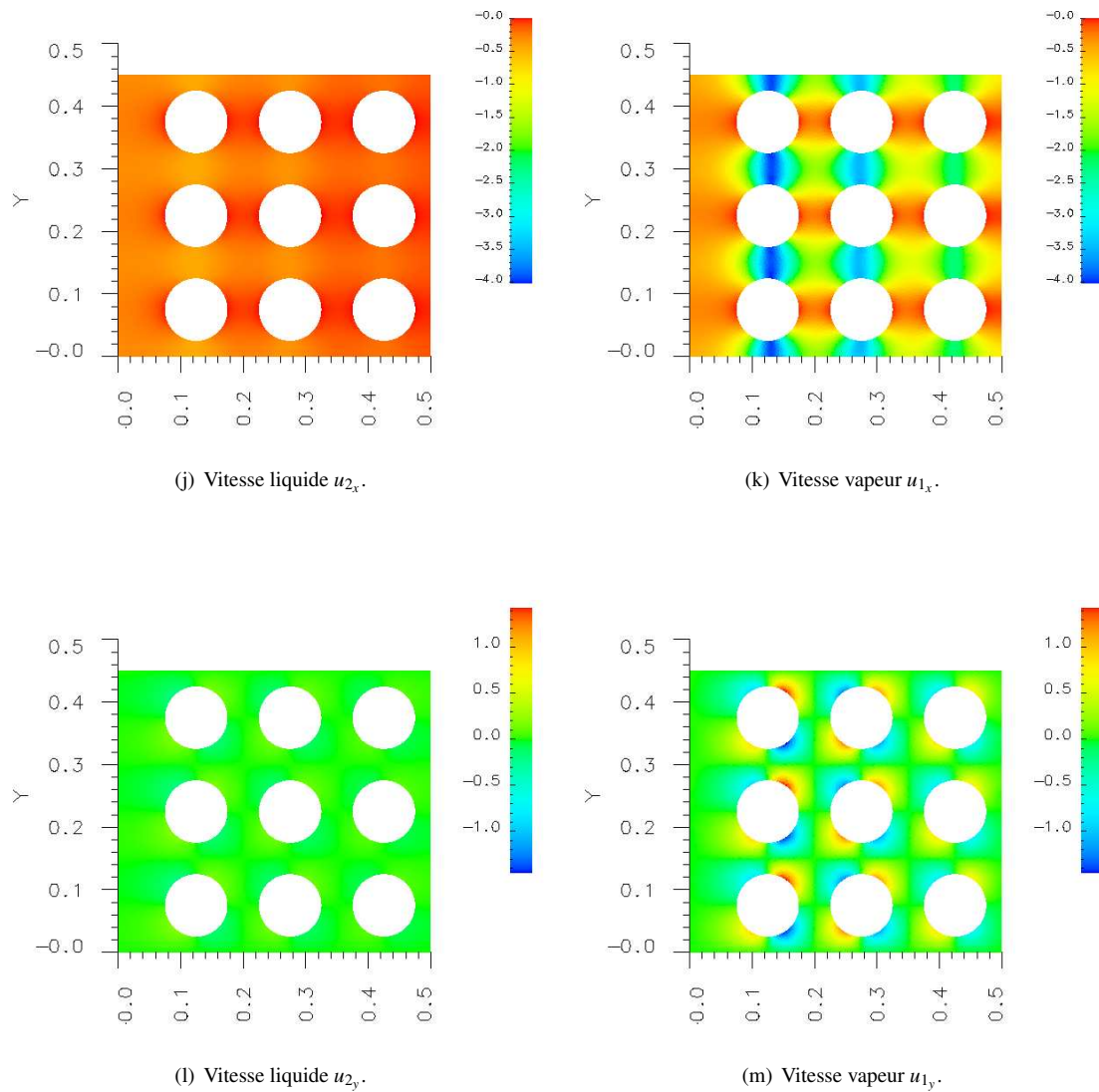
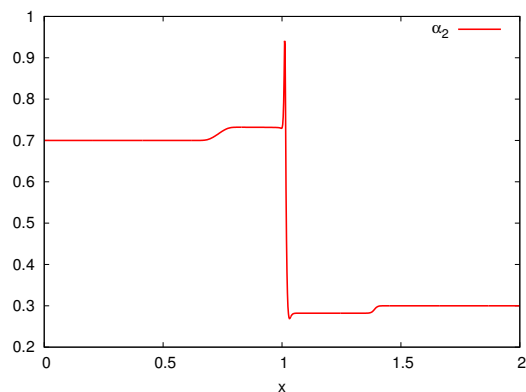
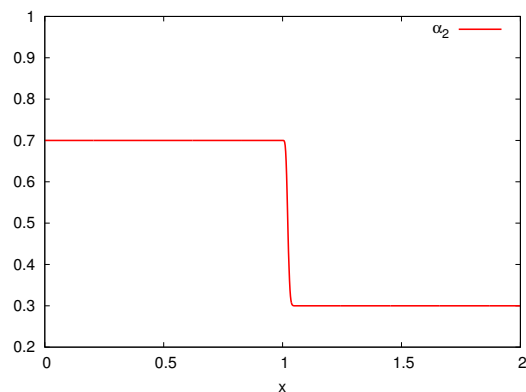
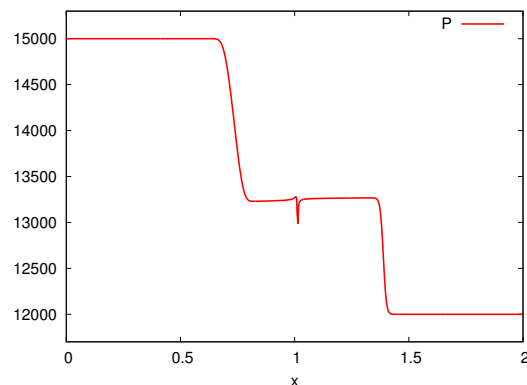


Figure 8.14: dépressurisation d'un assemblage de crayons pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase.  
( $t = 0.3$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

(a) Fraction volumique  $\alpha_2$  du modèle isobare à six équations.(b) Fraction volumique  $\alpha_2$  du modèle à sept équations.

(c) Pression du modèle isobare à six équations.

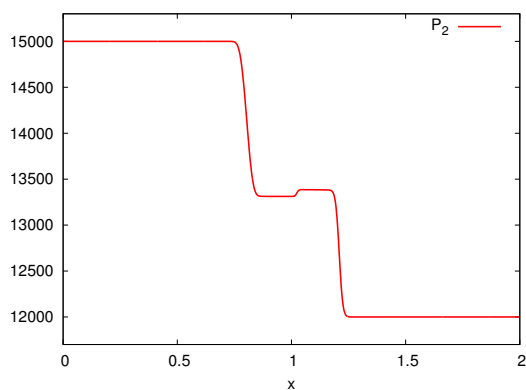
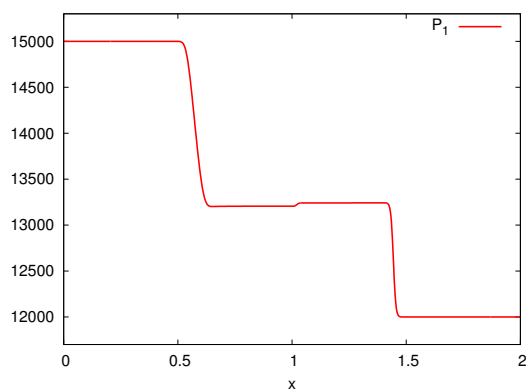
(d) Pression  $P_2$  du modèle à sept équations.(e) Pression  $P_1$  du modèle à sept équations.

Figure 8.15: simulation d'un tube à choc pour la partie convective des modèles à six et sept équations. Maillage constitué de 1 000 cellules. ( $t = 0.03$  s).



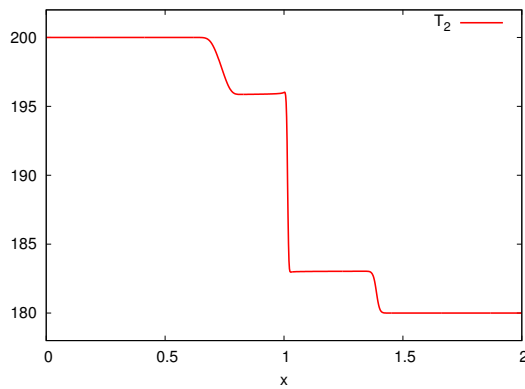
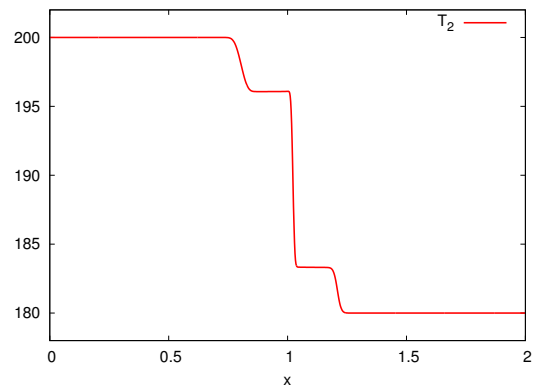
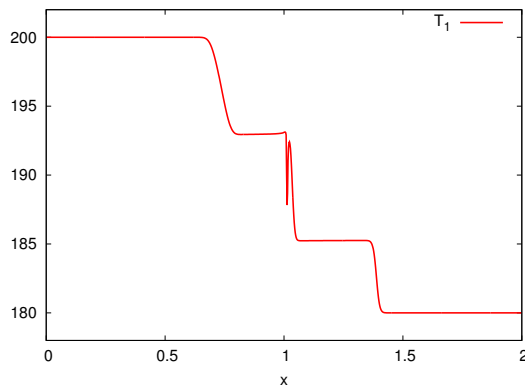
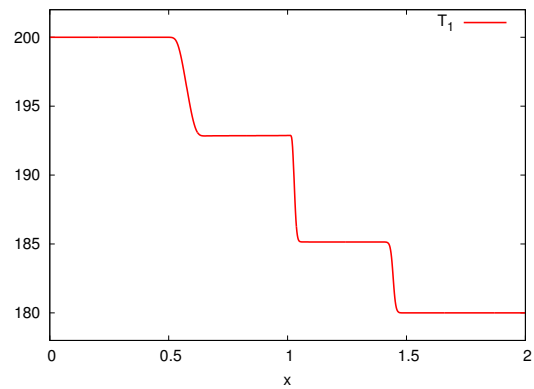
(f) Température  $T_2$  du modèle isobare à six équations.(g) Température  $T_2$  du modèle à sept équations.(h) Température  $T_1$  du modèle isobare à six équations.(i) Température  $T_1$  du modèle à sept équations.

Figure 8.15: simulation d'un tube à choc pour la partie convective des modèles à six et sept équations.  
Maillage constitué de 1000 cellules.  
( $t = 0.03$  s).

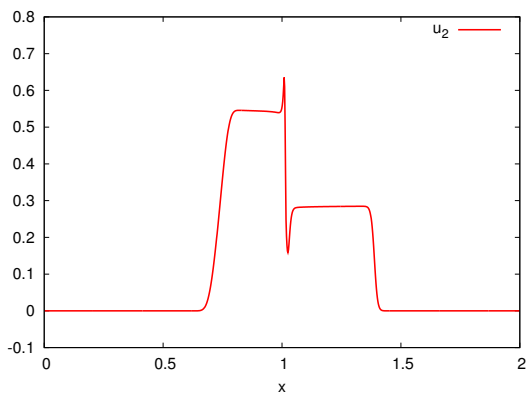
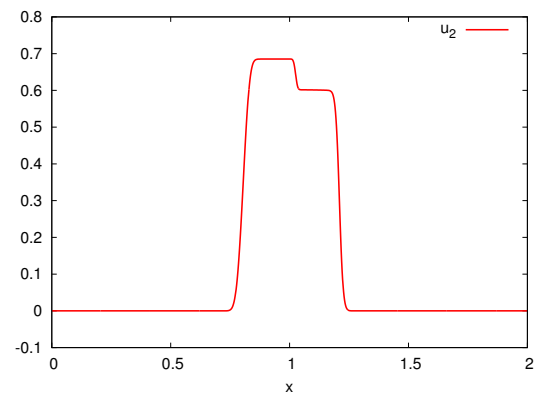
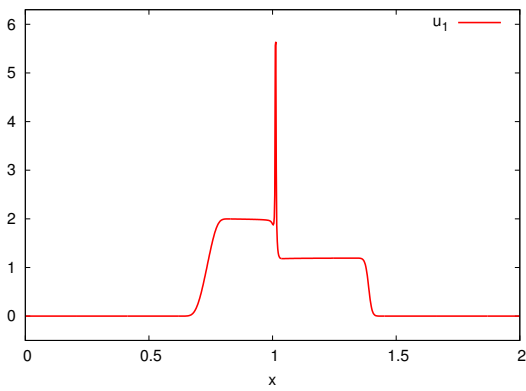
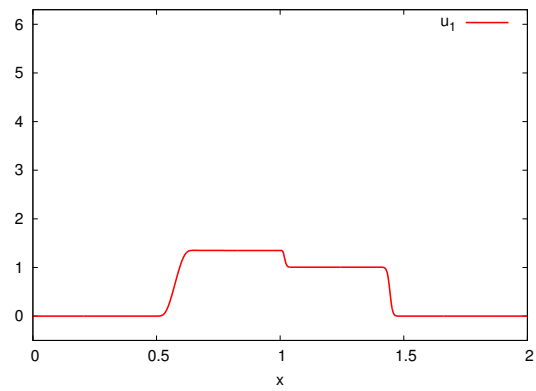
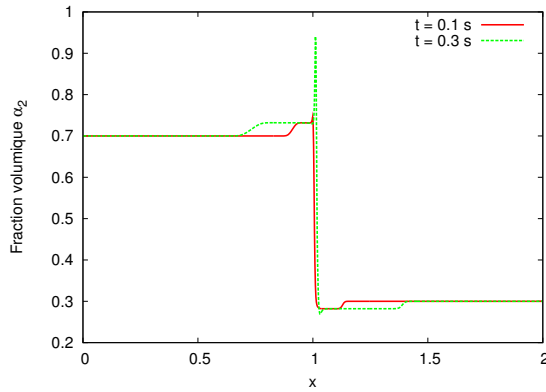
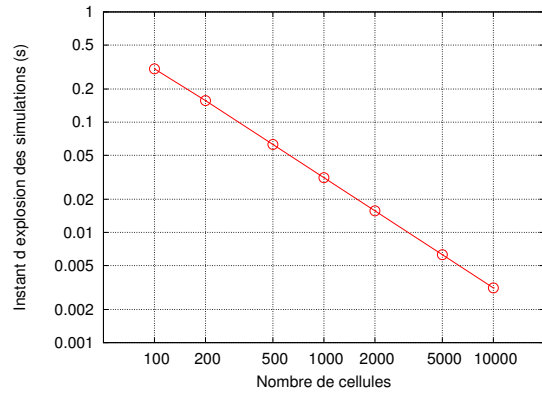
(j) Vitesse  $u_2$  du modèle isobare à six équations.(k) Vitesse  $u_2$  du modèle à sept équations.(l) Vitesse  $u_1$  du modèle isobare à six équations.(m) Vitesse  $u_1$  du modèle à sept équations.

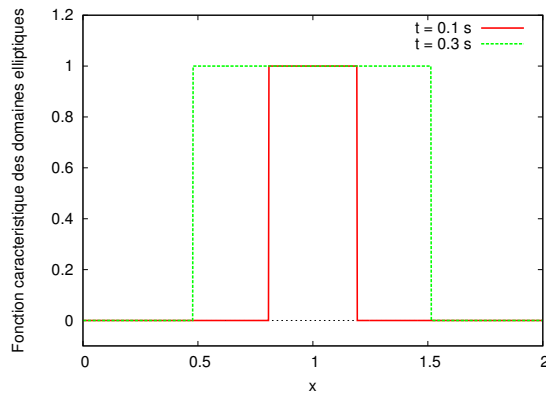
Figure 8.15: simulation d'un tube à choc pour la partie convective des modèles à six et sept équations.  
Maillage constitué de 1 000 cellules.  
( $t = 0.03$  s).



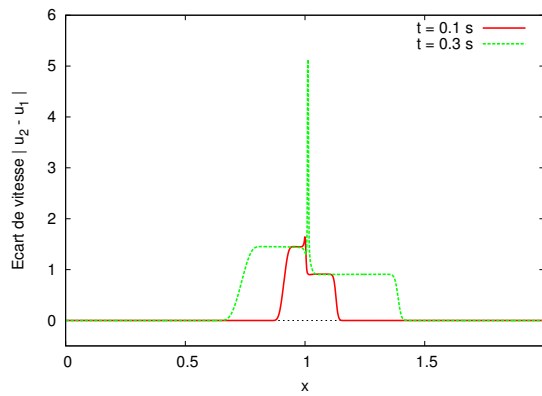
(a) Evolution temporelle de la fraction volumique  $\alpha_2$  (maillage constitué de 1 000 cellules).



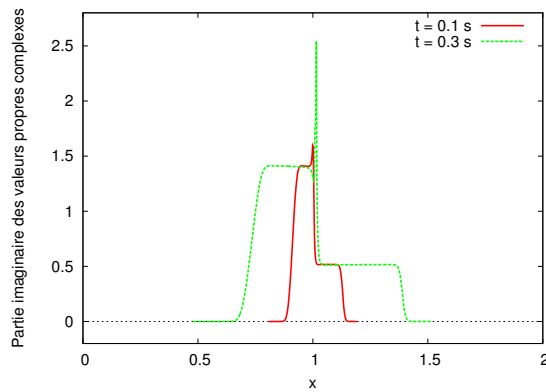
(b) Evolution de l'instant d'explosion des simulations en fonction du maillage (échelle log-log).



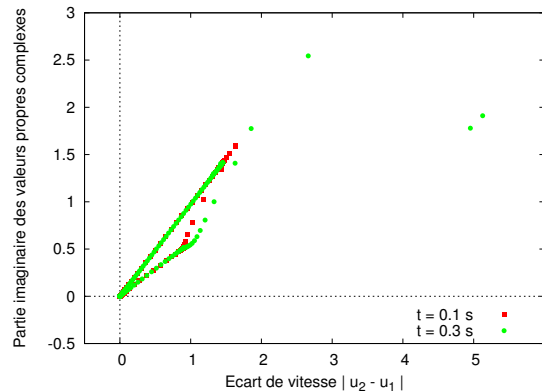
(c) Evolution temporelle de la fonction caractéristique des domaines d'ellipticité en temps (maillage constitué de 1 000 cellules).



(d) Evolution temporelle de l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$  (maillage constitué de 1 000 cellules).

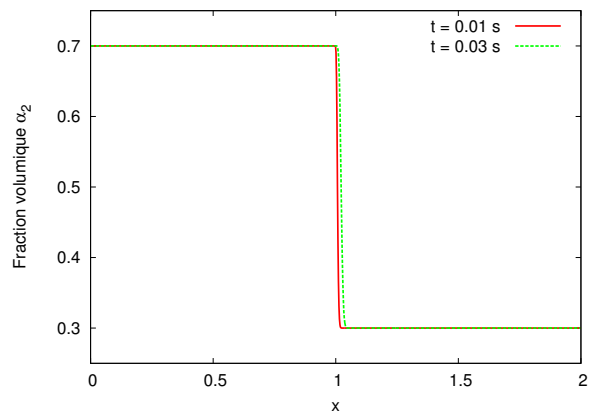


(e) Evolution temporelle de la partie imaginaire associées aux valeurs propres complexes de la matrice de convection (maillage constitué de 1 000 cellules).

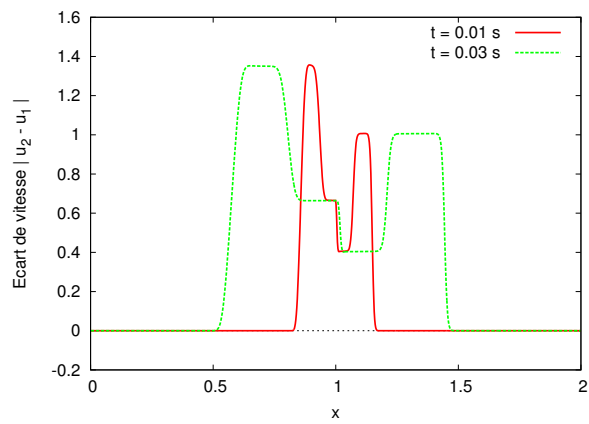


(f) Corrélation entre la partie imaginaire des valeurs propres complexes et l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$  dans les domaines d'ellipticité en temps (maillage constitué de 1 000 cellules).

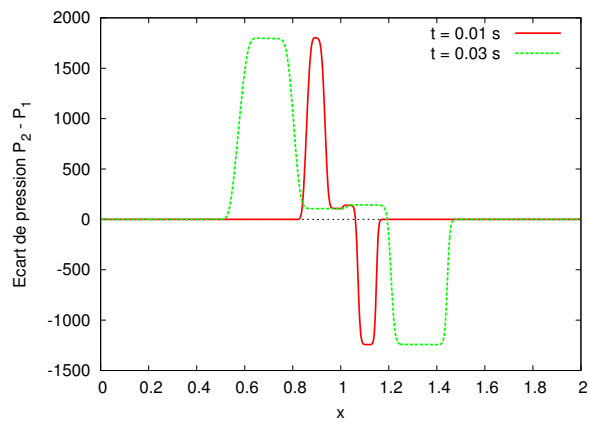
Figure 8.16: étude des instabilités associées à la partie convective du modèle bifluide isobare à six équations.



(a) Evolution temporelle de la fraction volumique  $\alpha_2$  (maillage constitué de 1 000 cellules).



(b) Evolution temporelle de l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$  (maillage constitué de 1 000 cellules).



(c) Evolution temporelle de l'écart de pression  $P_2 - P_1$  (maillage constitué de 1 000 cellules).

Figure 8.17: stabilité de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations.

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

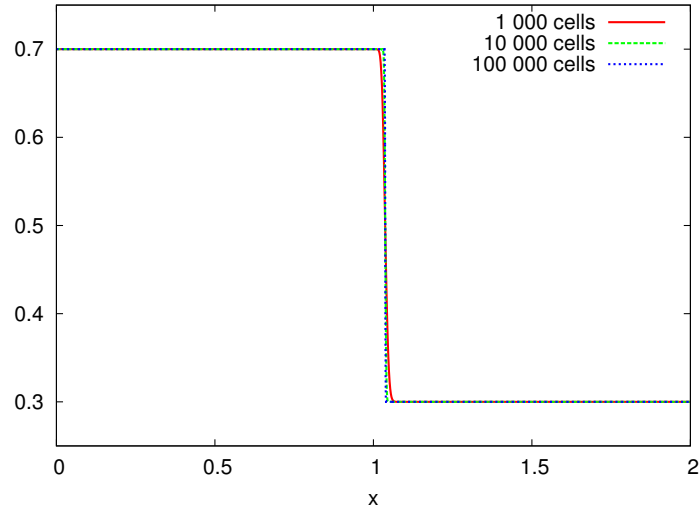
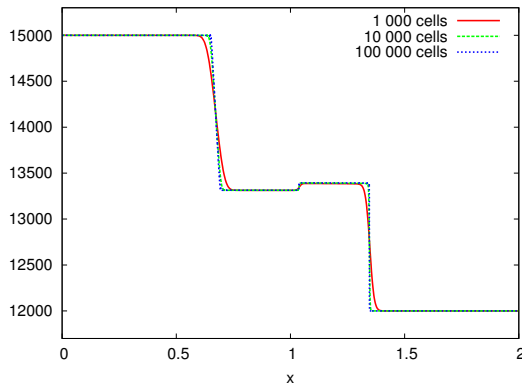
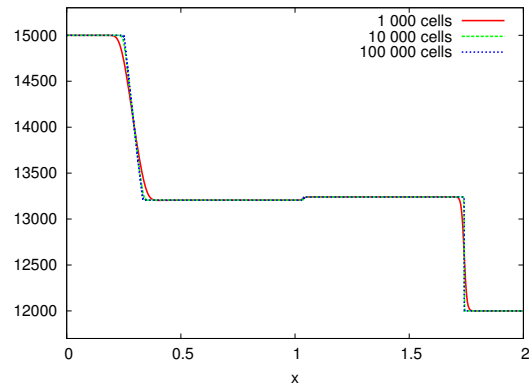
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 8.18: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle à sept équations.  
Convergence en maillage.  
( $t = 0.05$  s).

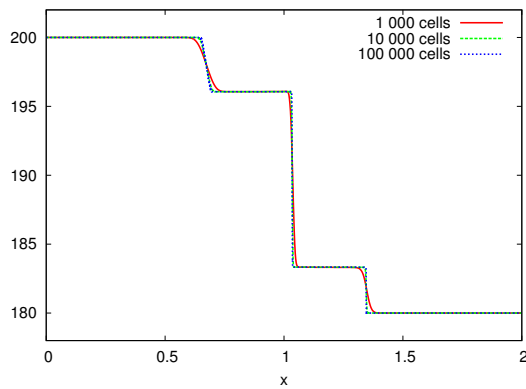
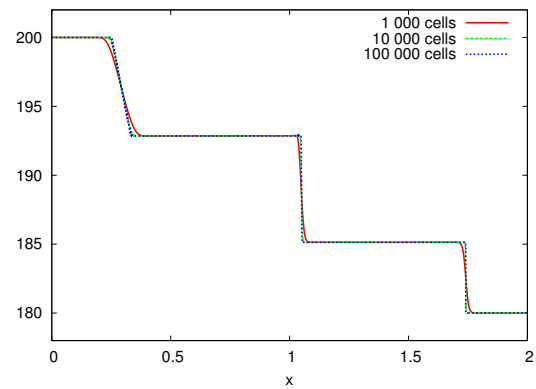
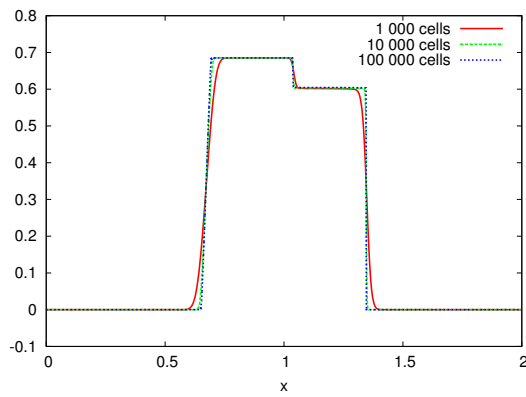
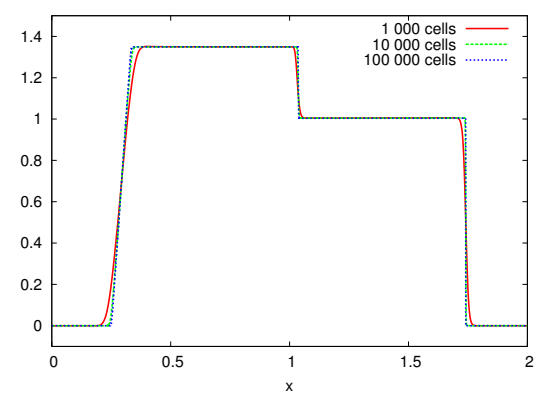
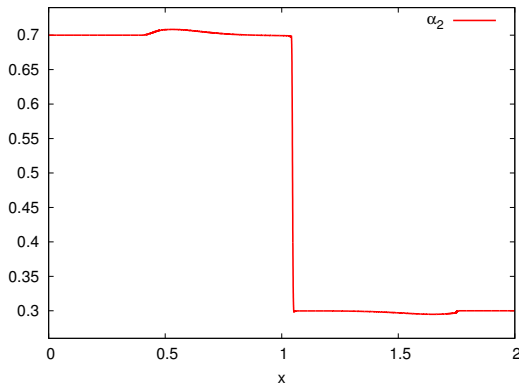
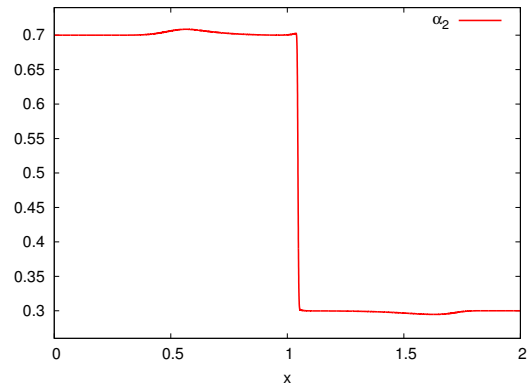
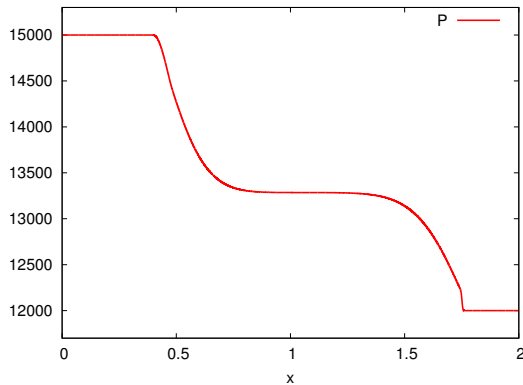
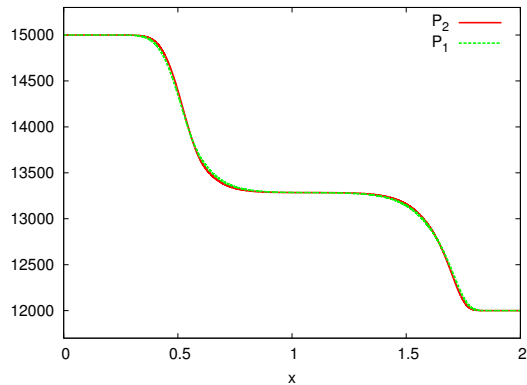
(d) Température  $T_2$ .(e) Température  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .

Figure 8.18: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle à sept équations.  
Convergence en maillage.  
( $t = 0.05$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

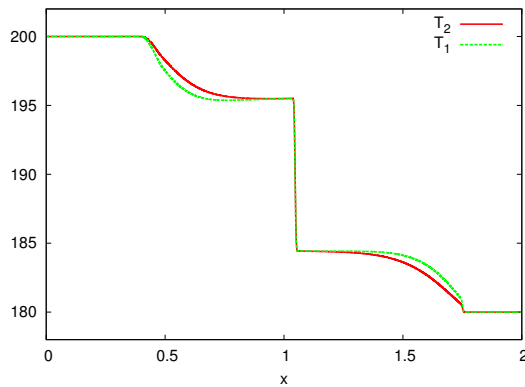
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$  du modèle isobare à six équations.(b) Fraction volumique  $\alpha_2$  du modèle à sept équations.

(c) Pression du modèle isobare à six équations.

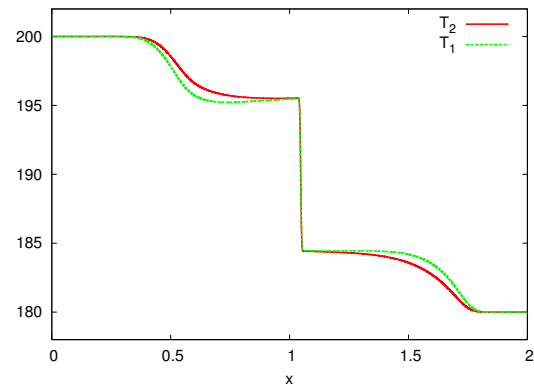


(d) Pressions du modèle à sept équations.

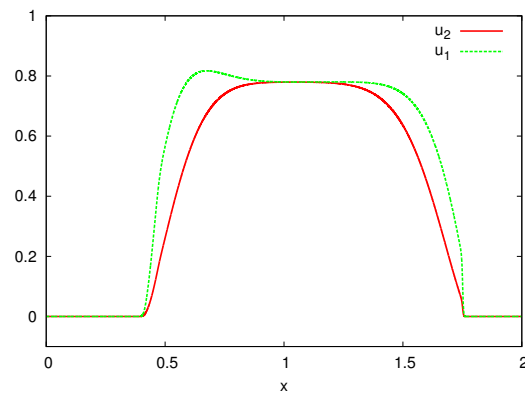
Figure 8.19: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-gaz sans transition de phase par le biais des modèles à six et sept équations. Maillage constitué de 13 000 cellules. ( $t = 0.06$  s).



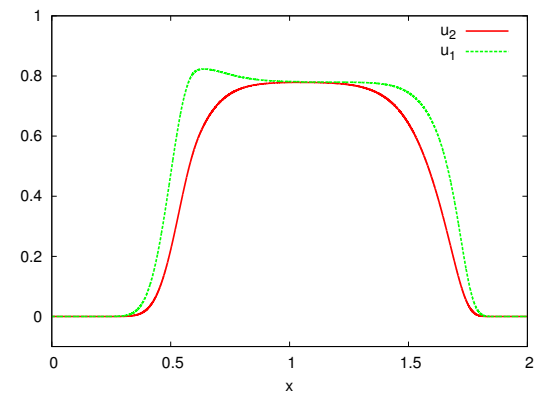
(e) Températures du modèle isobare à six équations.



(f) Températures du modèle à sept équations.



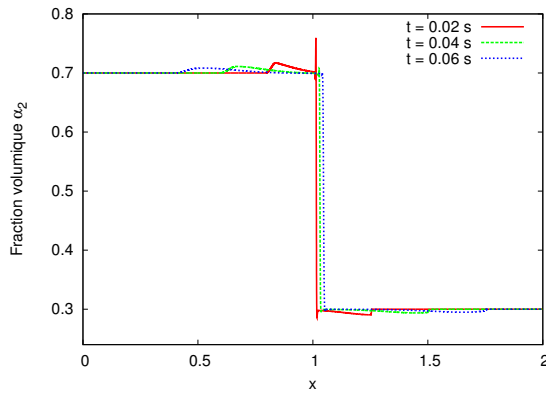
(g) Vitesses du modèle isobare à six équations.



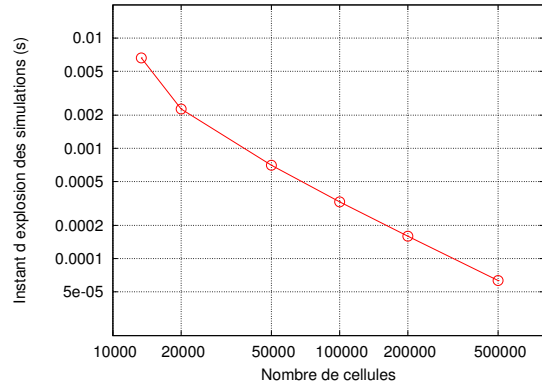
(h) Vitesses du modèle à sept équations.

Figure 8.19: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-gaz sans transition de phase par le biais des modèles à six et sept équations. Maillage constitué de 13 000 cellules. ( $t = 0.06$  s).

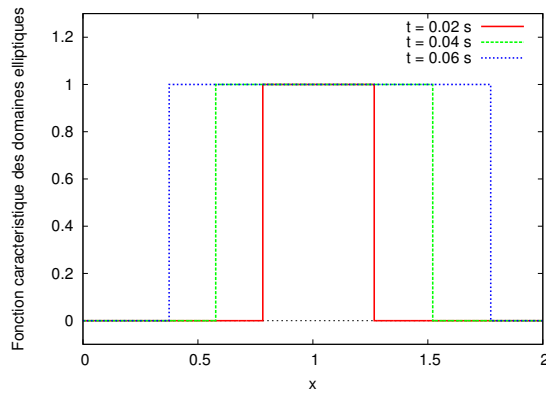




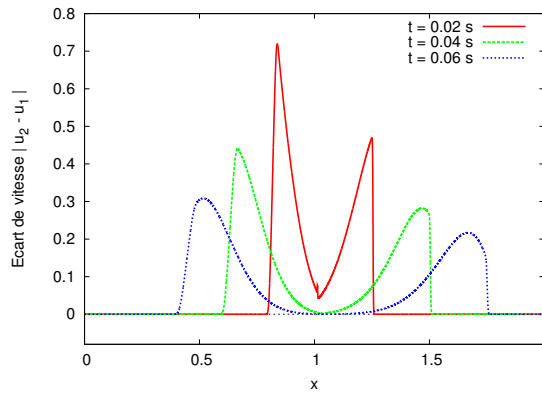
(a) Evolution temporelle de la fraction volumique  $\alpha_2$  (maillage constitué de 13 000 cellules).



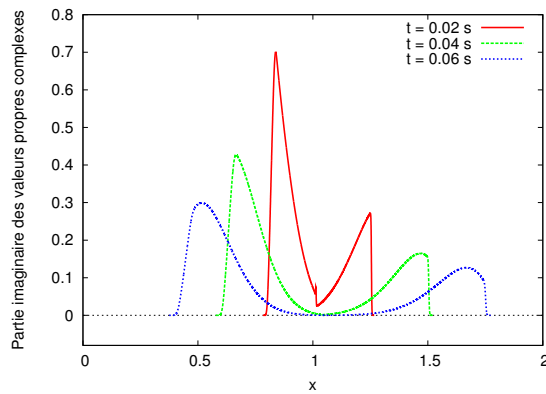
(b) Evolution de l'instant d'explosion des simulations en fonction du maillage (échelle log-log).



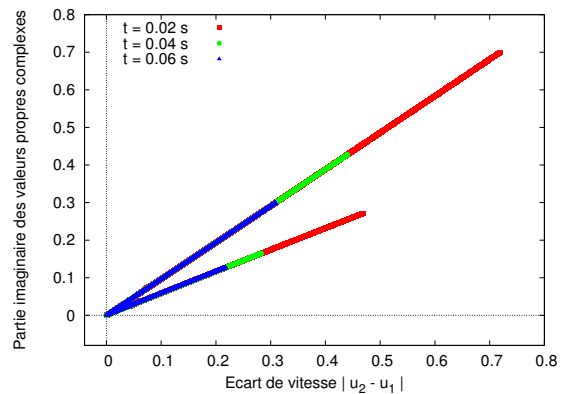
(c) Evolution temporelle de la fonction caractéristique des domaines d'ellipticité en temps (maillage constitué de 13 000 cellules).



(d) Evolution temporelle de l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$  (maillage constitué de 13 000 cellules).

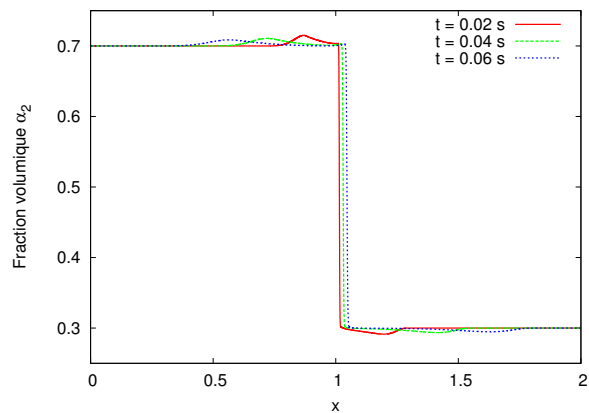


(e) Evolution temporelle de la partie imaginaire associées aux valeurs propres complexes de la matrice de convection (maillage constitué de 13 000 cellules).

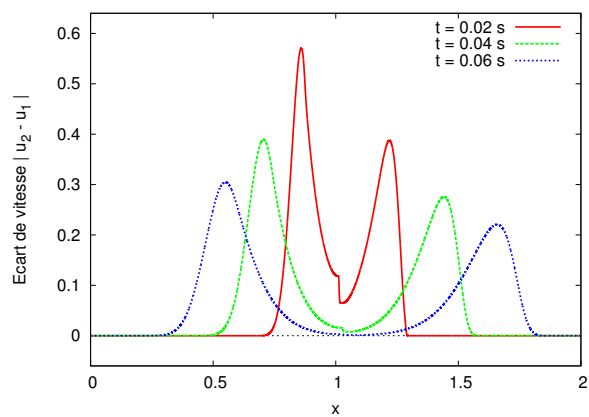


(f) Corrélation entre la partie imaginaire des valeurs propres complexes et l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$  dans les domaines d'ellipticité en temps (maillage constitué de 13 000 cellules).

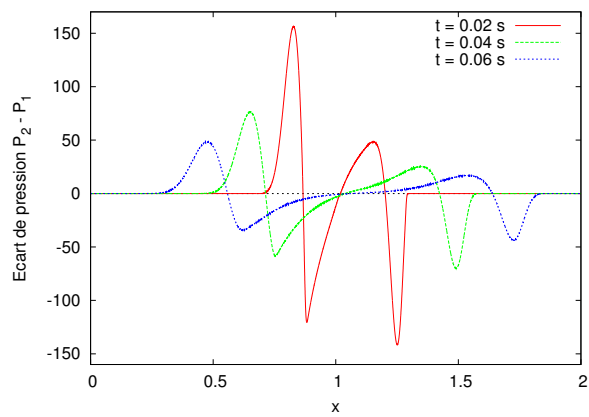
Figure 8.20: étude des instabilités associées au modèle bifluide isobare à six équations.



(a) Evolution temporelle de la fraction volumique  $\alpha_2$  (maillage constitué de 13 000 cellules).



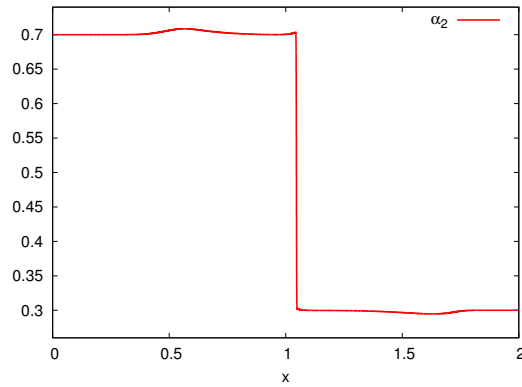
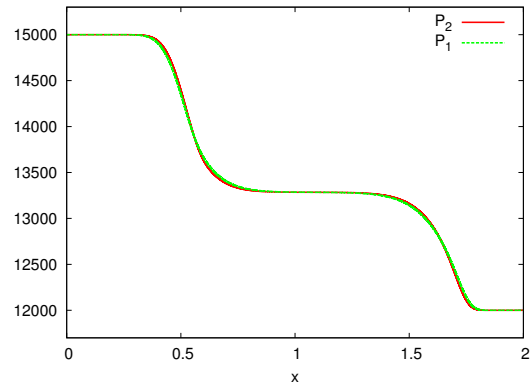
(b) Evolution temporelle de l'écart de vitesse  $|u_2 - u_1|$  (maillage constitué de 13 000 cellules).



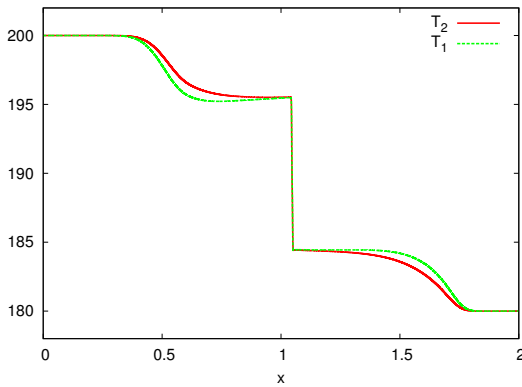
(c) Evolution temporelle de l'écart de pression  $P_2 - P_1$  (maillage constitué de 13 000 cellules).

Figure 8.21: stabilité du modèle bifluide à sept équation.

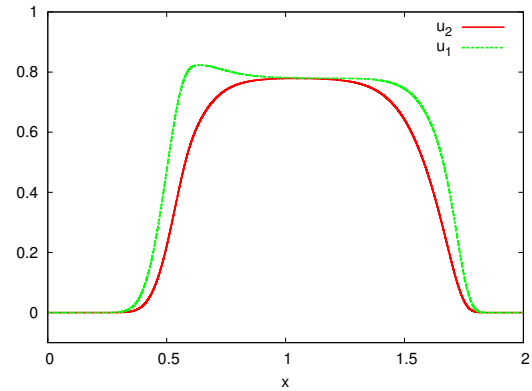
Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 15\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 12\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>

(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .

(b) Pressions.



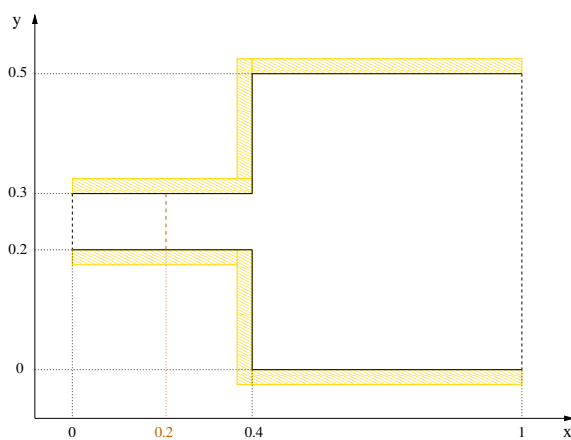
(c) Températures.



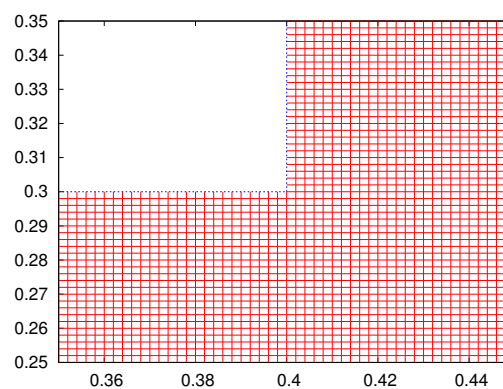
(d) Vitesses.

Figure 8.22: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-gaz sans transition de phase par le biais du modèle à sept équations. Maillage constitué de 100 000 cellules. ( $t = 0.06$  s).

Conditions initiales : $x < 0.2$ m	Conditions initiales : $x > 0.2$ m
$\alpha_2 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.5$
$P_2 = P_1 = 838\,793$ Pa	$P_2 = P_1 = 633\,337$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$g_2 = g_1 = -99.7423$ J.kg <sup>-1</sup>	$g_2 = g_1 = -77.1248$ J.kg <sup>-1</sup>
$u_{2x} = u_{1x} = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_{2x} = u_{1x} = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$u_{2y} = u_{1y} = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_{2y} = u_{1y} = 0$ m.s <sup>-1</sup>



(a) Configuration géométrique et conditions initiales.



(b) Construction d'un maillage structuré.

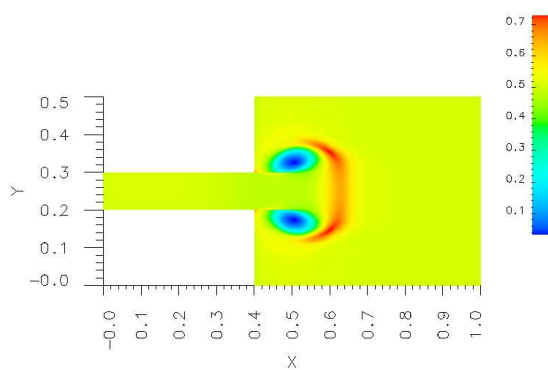
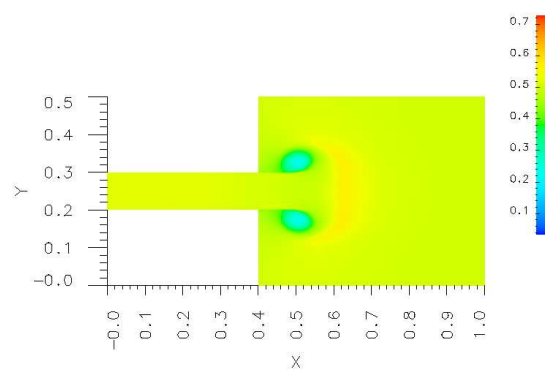
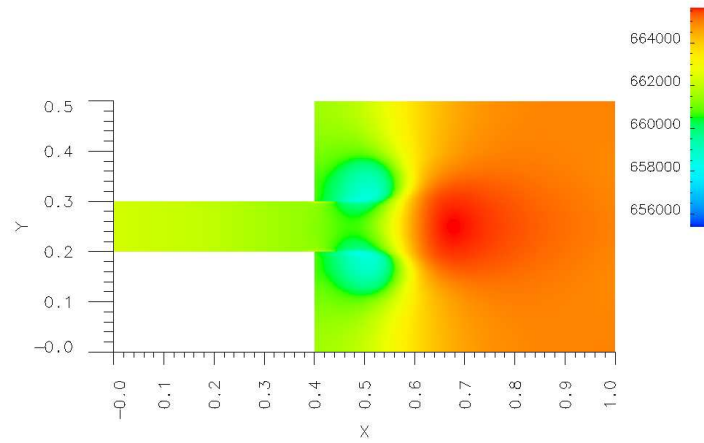
(c) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$  du modèle isobare à six équations.(d) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$  du modèle à sept équations.

Figure 8.23: simulation d'un écoulement liquide-vapeur en transition de phase dans une tuyère de section discontinue par le biais des modèles à six et sept équations.  
( $t = 0.3$  s).



(e) Pression du modèle isobare à six équations.

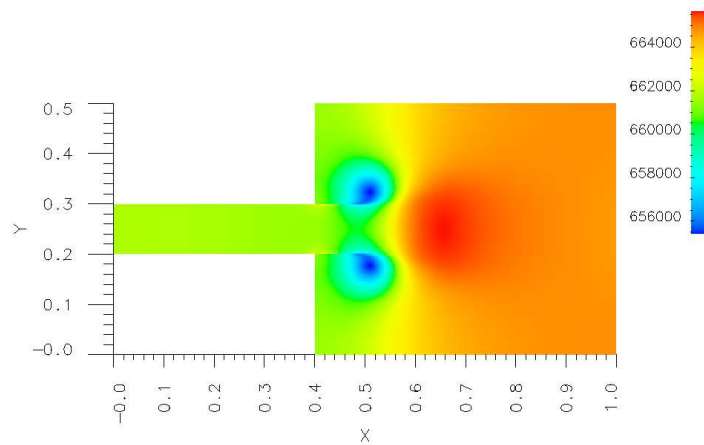
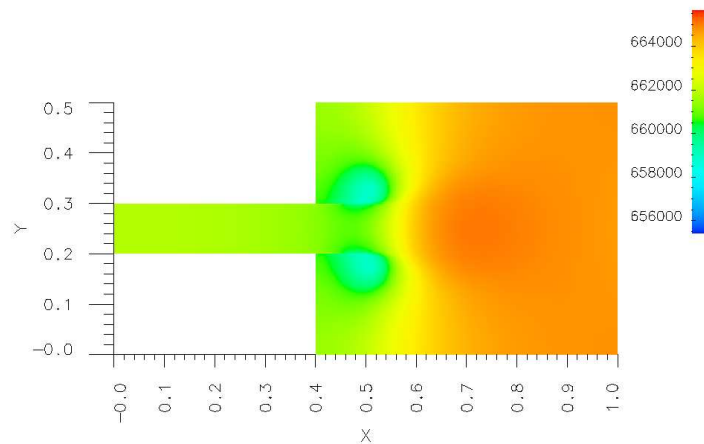
(f) Pression liquide  $P_2$  du modèle à sept équations.(g) Pression vapeur  $P_1$  du modèle à sept équations.

Figure 8.23: simulation d'un écoulement liquide-vapeur en transition de phase dans une tuyère de section discontinue par le biais des modèles à six et sept équations. ( $t = 0.3$  s).

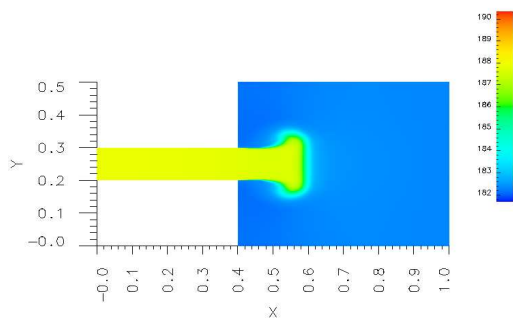
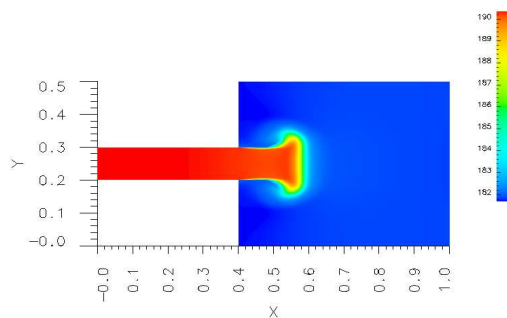
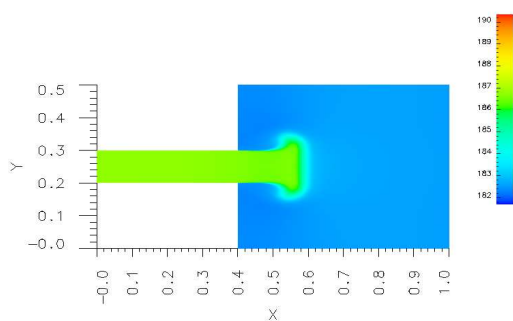
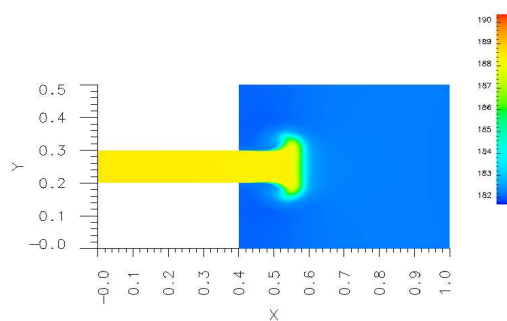
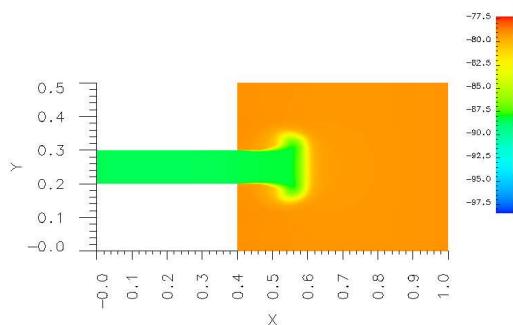
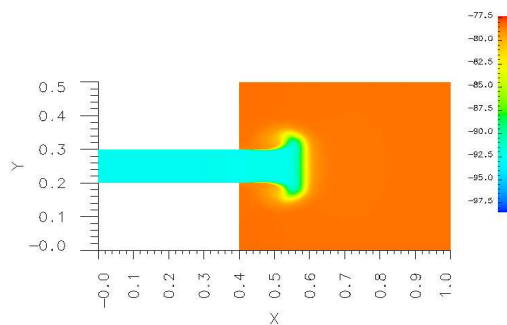
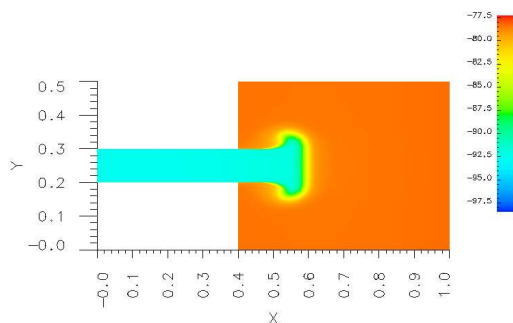
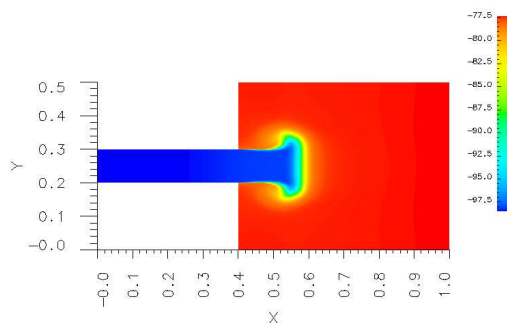
(h) Température liquide  $T_2$  du modèle isobare à six équations.(i) Température liquide  $T_2$  du modèle à sept équations.(j) Température vapeur  $T_1$  du modèle isobare à six équations.(k) Température vapeur  $T_1$  du modèle à sept équations.(l) Potentiel de Gibbs liquide  $g_2$  du modèle isobare à six équations.(m) Potentiel de Gibbs liquide  $g_2$  du modèle à sept équations.(n) Potentiel de Gibbs vapeur  $g_1$  du modèle isobare à six équations.(o) Potentiel de Gibbs vapeur  $g_1$  du modèle à sept équations.

Figure 8.23: simulation d'un écoulement liquide-vapeur en transition de phase dans une tuyère de section discontinue par le biais des modèles à six et sept équations ( $t = 0.3$  s).

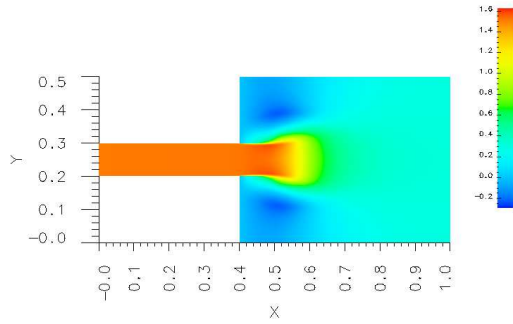
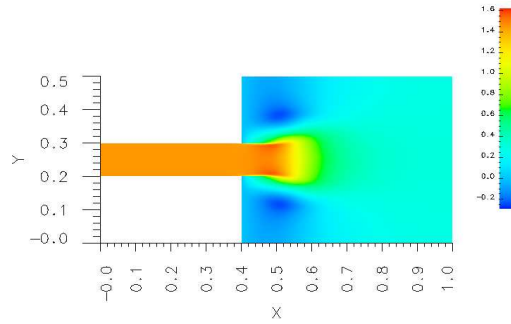
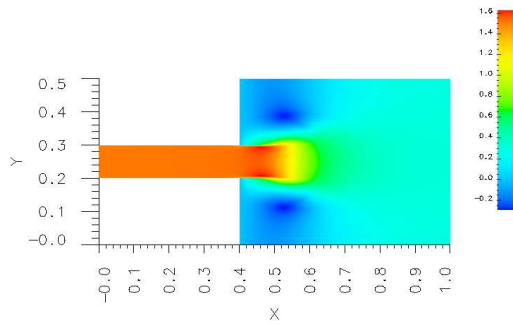
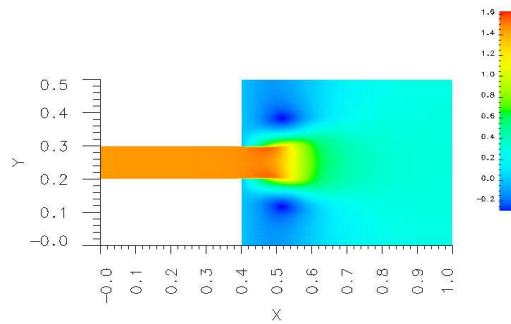
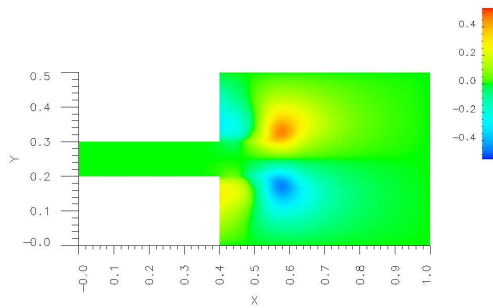
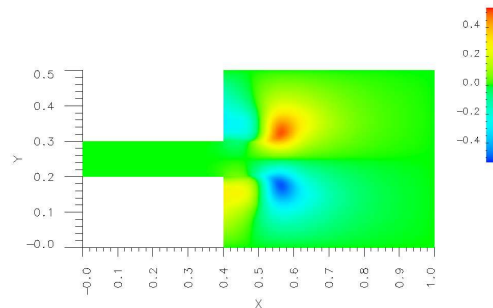
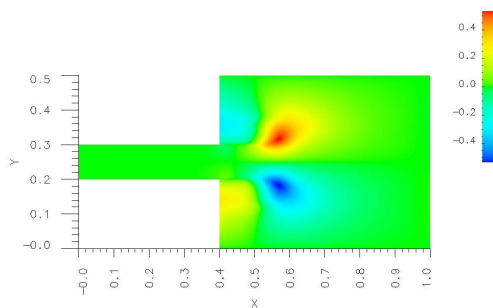
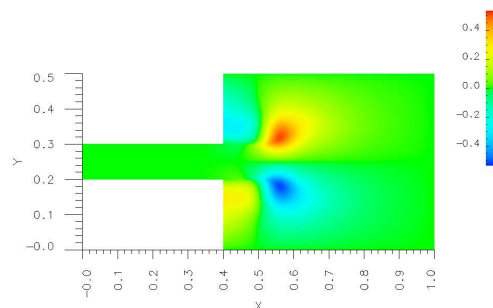
(p) Vitesse liquide  $u_{2x}$  du modèle isobare à six équations.(q) Vitesse liquide  $u_{2x}$  du modèle à sept équations.(r) Vitesse vapeur  $u_{1x}$  du modèle isobare à six équations.(s) Vitesse vapeur  $u_{1x}$  du modèle à sept équations.(t) Vitesse liquide  $u_{2y}$  du modèle isobare à six équations.(u) Vitesse liquide  $u_{2y}$  du modèle à sept équations.(v) Vitesse vapeur  $u_{1y}$  du modèle isobare à six équations.(w) Vitesse vapeur  $u_{1y}$  du modèle à sept équations.

Figure 8.23: simulation d'un écoulement liquide-vapeur en transition de phase dans une tuyère de section discontinue par le biais des modèles à six et sept équations.

(t = 0.3 s).

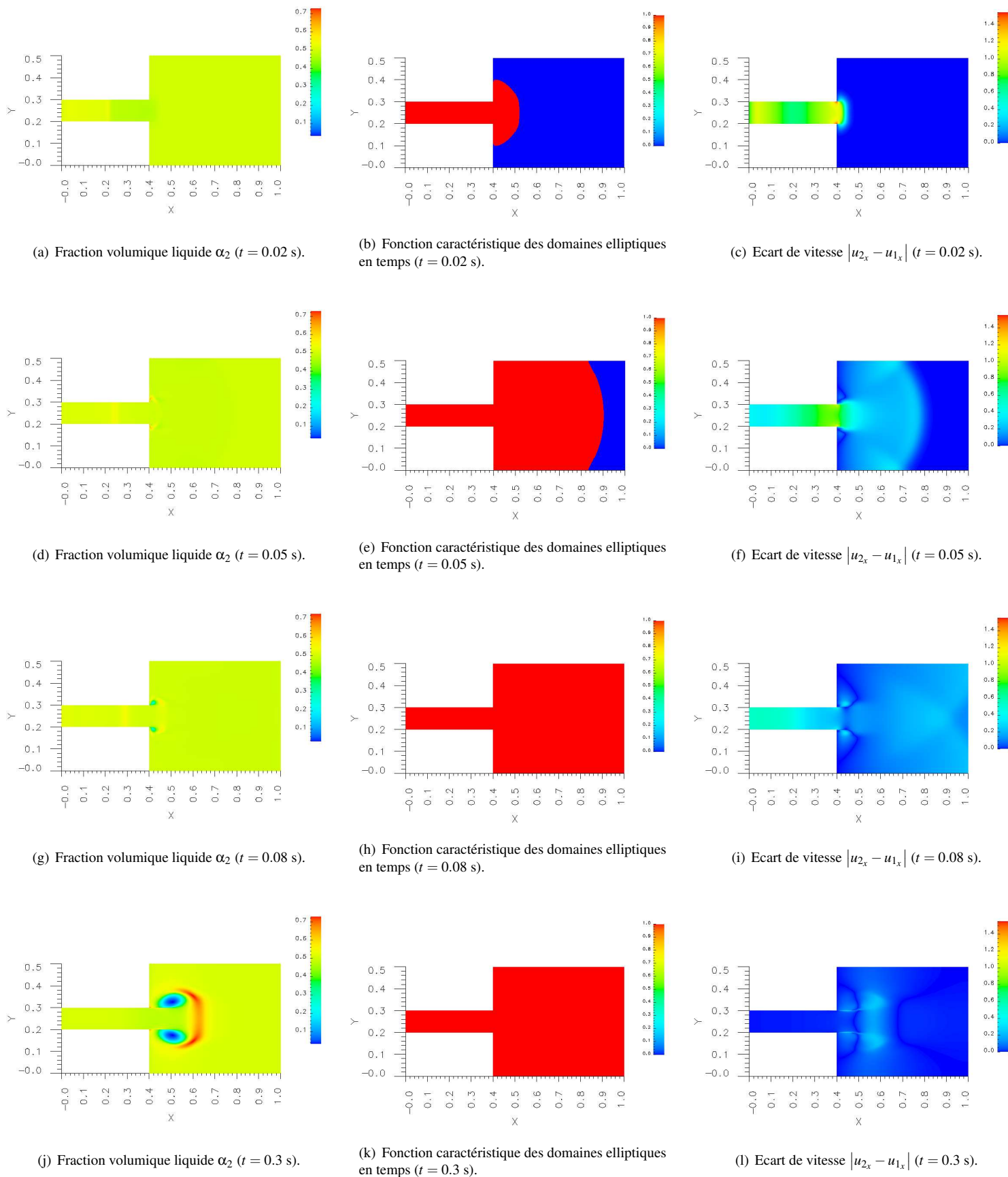
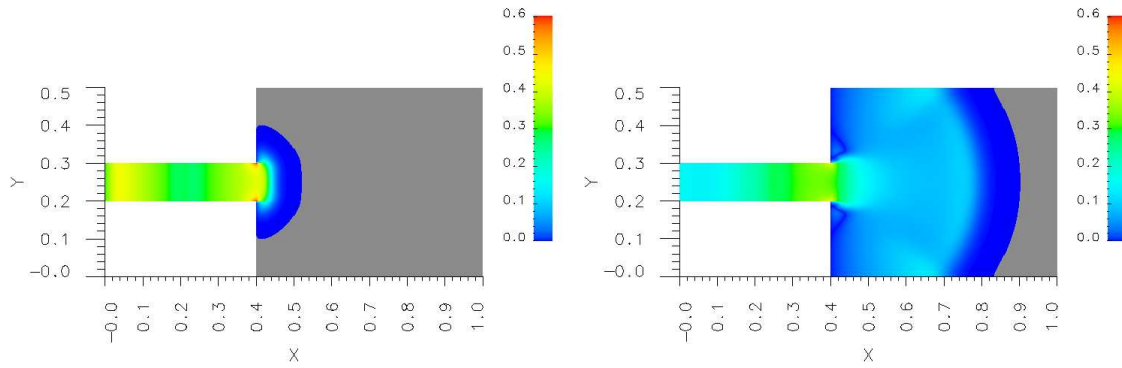


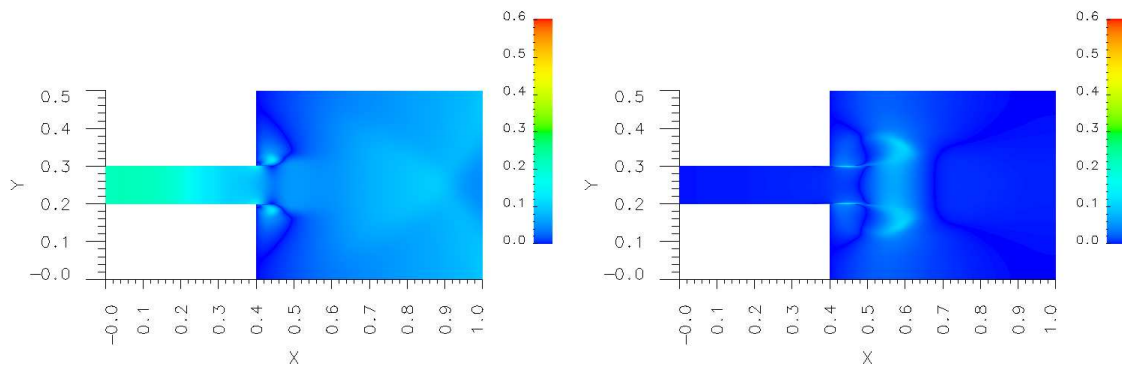
Figure 8.24: étude des instabilités associées au modèle bifluides isobare à six équations.





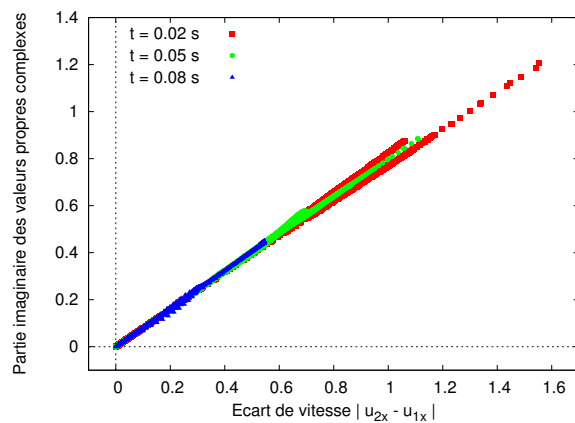
(m) Partie imaginaire des valeurs propres complexes ( $t = 0.02$  s).

(n) Partie imaginaire des valeurs propres complexes ( $t = 0.05$  s).



(o) Partie imaginaire des valeurs propres complexes ( $t = 0.08$  s).

(p) Partie imaginaire des valeurs propres complexes ( $t = 0.3$  s).



(q) Corrélation entre la partie imaginaire des valeurs propres complexes et l'écart de vitesse  $|u_{2x} - u_{1x}|$  dans les domaines d'ellipticité en temps.

Figure 8.24: étude des instabilités associées au modèle bifluide isobare à six équations.

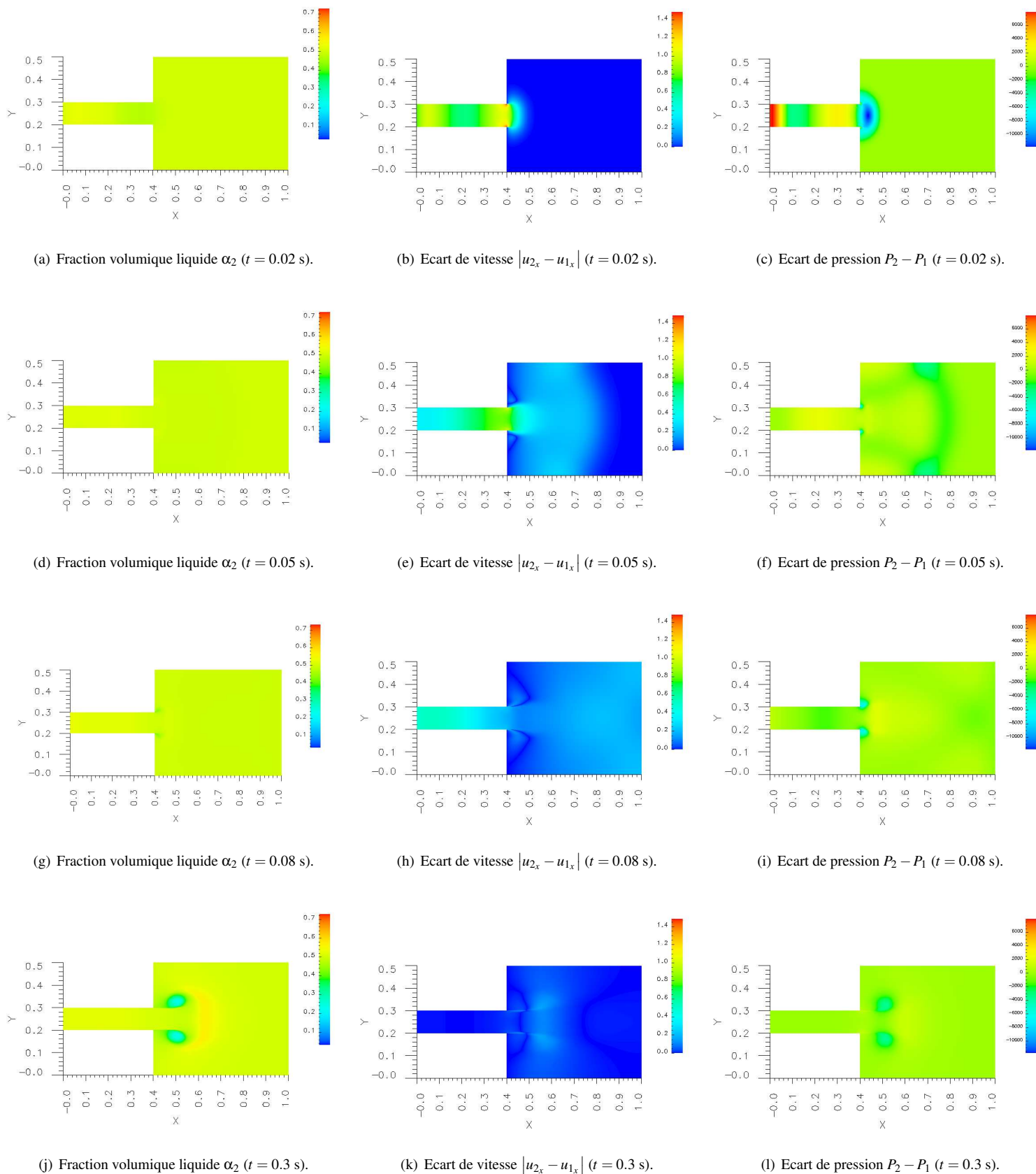


Figure 8.25: stabilité du modèle bifluid à sept équations.



## Chapitre 9

# Conclusion

En résumé, une nouvelle approche a été envisagée dans cette première partie de thèse pour décrire les écoulements diphasiques. Cette approche s'appuie sur un formalisme bifluide à deux pressions. Dans cette première partie de thèse, on s'est intéressé aux capacités prédictives d'une telle modélisation pour simuler les écoulements liquide-vapeur en transition de phase.

Dans cette approche bifluide à deux pressions, l'évolution du mélange diphasique est décrite par le modèle à sept équations de Baer et Nunziato [8]. Ce modèle est ouvert. Ce modèle ne suppose aucun équilibre partiel entre les phases. Notre premier travail de modélisation a consisté en la fermeture de ce système. Dans un premier temps, on s'est intéressé aux lois de comportement du mélange diphasique. Suivant les travaux de Callen [19], on s'est tout d'abord placé dans le cadre classique où une entropie strictement concave est définie pour chaque constituant du mélange. Pour décrire les écoulements liquide-vapeur, l'existence d'un équilibre triple isobare isotherme équipotentiel monovariant a par ailleurs été postulée pour le mélange diphasique. Une fois ce cadre thermodynamique établi, on s'est ensuite intéressé à la modélisation des interactions diphasiques. Suivant les travaux de Lhuillier [78], Gavriluk et Saurel [45], cette modélisation des interactions diphasiques a été effectuée de manière à doter le modèle bifluide à deux pressions d'une inégalité d'entropie. Diverses modélisations standard ont alors été retrouvées pour la traînée ou encore le terme source de fraction volumique. En ce qui concerne les transferts énergétiques, de nouvelles modélisations ont été proposées pour les transferts de chaleur et de masse. Suivant cette procédure de modélisation, les différents transferts interfaciaux sont décrits par des termes de relaxation. Muni de ces lois de fermeture, le modèle bifluide à sept équations est totalement clos. Il est également doté d'une structure dissipative. On s'est alors successivement intéressé aux propriétés de la partie convective puis des transferts interfaciaux.

En ce qui concerne la partie convective du modèle bifluide à sept équations, sa nature hyperbolique résonante a tout d'abord été rappelée. Pour les écoulements diphasiques à faible nombre de Mach, les différentes résonances de cette partie convective sont marginales. On ne s'est pas appesanti sur ce phénomène. Cette partie convective se présente sous une forme non-conservative. On s'est plutôt intéressé à la définition des solutions faibles pour ce système. Une nature a tout d'abord été attribuée à chacun des champs caractéristiques. Suivant les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], l'onde de fraction volumique a notamment été associée à un champ linéairement dégénéré. Plusieurs modélisations (4.10) des grandeurs interfaciales ont par la suite été proposées. Ces modélisations particulières (4.10) des grandeurs interfaciales définissent localement tous les produits non-conservatifs de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations sans recourir à la théorie développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29]. Une fois les relations de saut de ce système définies, on s'est ensuite intéressé au problème de Riemann associé à la partie convective du modèle bifluide à sept équations. L'étude des connexions onde par onde a été réalisée hors résonance. Cette étude nous a permis d'identifier plusieurs régimes d'écoulements sur- et sous-critiques pour le mélange diphasique. Ces différents régimes présentent des analogies avec le comportement fluvial ou torrentiel des écoulements en rivière. Une telle étude demande maintenant à être poursuivie au voisinage des variétés de résonance.

En ce qui concerne les interactions diphasiques, différents transferts interfaciaux ont été rencontrés. Ces différents transferts interfaciaux se distinguent par leur temps caractéristiques de retour à l'équilibre. Certains sont infiniment rapides. Ils se caractérisent par un retour à l'équilibre instantané en certaines variables de l'écoulement. Les autres s'effectuent sur une certaine durée. Une méthode de relaxation instantanée a tout d'abord été étudiée pour décrire le retour à l'équilibre infiniment rapide de certains paramètres de l'écoulement. Cette méthode de relaxation instantanée consiste en la projection des solutions associées au modèle bifluide à sept équations sur certains équilibres partiels. Une telle méthode de relaxation instantanée nous permet d'effectuer la simulation de l'ensemble des modélisations bifluides partiellement équilibrées par le biais du modèle bifluide à sept équations. On s'est par la suite intéressé à la dynamique des transferts sur temps long. Les stabilités linéaire et non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur ont alors été successivement établies. Ce travail a été étendu à la transition de phase les résultats obtenus par Dellacherie [32] dans le cadre du système d'Euler à plusieurs constituants.

Pour réaliser la simulation des différents modèles bifluides rencontrés dans cette première partie de thèse, une méthode numérique a ensuite été proposée. Cette méthode numérique utilise une approche à pas fractionnaires dans un formalisme Volumes Finis. Cette approche traite séparément de la convection puis des transferts interfaciaux. Pour réaliser l'approximation de la partie convective associée au modèle bifluide à sept équations, deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv ont tout d'abord été étudiées. Le choix de la variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$  pour le schéma VFRoe-ncv découle de notre analyse des transferts interfaciaux. Ces deux schémas se caractérisent par la préservation des équilibres liquide-vapeur. Pour réaliser l'approximation des interactions diphasiques, divers schémas d'intégration ont par la suite été proposés pour décrire la dynamique des transferts interfaciaux. L'ensemble de la méthode numérique se caractérise alors par la préservation des équilibres diphasiques. Cette méthode numérique a été implantée dans un logiciel. Ce logiciel nous permet de simuler l'ensemble des modélisations bifluides, qu'elles soient partiellement équilibrées ou totalement hors équilibre, avec ou sans transition de phase, sur tout type de maillage structuré ou non-structuré. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, la simulation d'écoulements liquide-vapeur en géométrie complexe a montré les aptitudes de ce logiciel à traiter des problèmes industriels. Nous l'avons ensuite utilisé à la comparaison de différentes modélisations bifluides. Seules les modélisations hyperboliques nous ont permis d'obtenir des solutions stables convergées. Nous préconisons leur utilisation à l'avenir.

Lors de la simulation de ces différents modèles bifluides, plusieurs déséquilibres sont apparus entre les phases. Ces différents déséquilibres ont progressivement été résorbés par les transferts interfaciaux. L'intensité de ces transferts dépend fortement de la modélisation retenue pour les coefficients d'échange. Sur l'ensemble des simulations présentées dans cette première partie de thèse, seule la modélisation (3.9) des coefficients d'échange a été utilisée. Cette modélisation (3.9) des coefficients d'échange assure la stabilité linéaire de l'équilibre liquide-vapeur. Dans la littérature cependant, d'autres modélisations sont souvent retenues. Ces modélisations se présentent généralement sous la forme de corrélations expérimentales. Suivant Kim, Sun et Ishii [73], la turbulence et la topologie de l'écoulement diphasique influent particulièrement sur la dynamique des transferts interfaciaux. Pour affiner notre modélisation des interactions diphasiques, on s'intéresse par la suite à la description de ces différents phénomènes. La deuxième partie de cette thèse étudie alors l'implémentation d'un modèle de turbulence simple dans le cadre du modèle bifluide à deux pressions. Une procédure de reconstruction pour la topologie diphasique est finalement envisagée à la partie III.

## **Deuxième partie**

# **Un modèle de turbulence simple pour les écoulements diphasiques**



# Chapitre 10

## Introduction

Dans le cadre du projet NEPTUNE, une nouvelle approche bifluide à deux pressions a été envisagée dans la première partie de cette thèse pour décrire les écoulements en transition de phase. Dans ce contexte, on a montré les aptitudes de cette modélisation à décrire les écoulements liquide-vapeur en déséquilibre. De tels déséquilibres au sein des mélanges diphasiques induisent des transferts entre les phases. Suivant les travaux de Kim, Sun et Ishii [73], l'intensité de ces transferts interfaciaux dépend fortement de la configuration topologique et de la turbulence associées aux mélanges diphasiques. Expérimentalement, plus la surface d'échange entre les deux fluides est importante, plus rapidement s'effectuent les transferts interfaciaux. Plus la turbulence diphasique est intense, plus rapidement se résorbent les déséquilibres entre les phases. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, on cherche maintenant à décrire ces différents phénomènes. Dans cette seconde partie de thèse, on s'intéresse à la modélisation de la turbulence pour les écoulements diphasiques en transition de phase à faible nombre de Mach. Une procédure de reconstruction pour la topologie diphasique sera ultérieurement envisagée dans la troisième partie de cette thèse.

En ce qui concerne la modélisation de la turbulence compressible, divers travaux ont déjà été réalisés dans le cadre monophasique. Ces travaux trouvent surtout leurs applications en aéronautique [9] et en combustion [14]. Nous en proposons ici un bref résumé en vue d'une prochaine application aux écoulements diphasiques. Dans l'industrie, pour prendre en compte la nature chaotique de la turbulence, les différentes grandeurs caractéristiques des écoulements sont généralement associées à des variables aléatoires. Ces variables aléatoires sont décomposées en une valeur moyenne et une fluctuation. Les applications industrielles s'intéressent particulièrement aux caractéristiques de l'écoulement moyen. Suivant les travaux de Favre, Kovaszny, Dumas, Gaviglio et Coantic [39], diverses procédures de moyenne sont alors appliquées aux équations locales instantanées. L'application de ces procédures de moyenne aux équations locales instantanées fournit des équations d'évolution pour les moments d'ordre 1 associés aux différentes variables aléatoires. Ces équations d'évolution pour les valeurs moyennes de l'écoulement turbulent comportent néanmoins des termes inconnus. Ces termes inconnus sont liés à des moments d'ordre supérieur pour les différentes variables aléatoires. La modélisation de la turbulence consiste alors en la fermeture des ces différents termes inconnus. Diverses méthodes de fermeture ressortent de la littérature. A titre d'exemple, plusieurs modèles de turbulence standard sont ici présentés pour clore le tenseur produit des fluctuations de vitesse également appelé tenseur de Reynolds. Initialement proposé par Prandtl en 1925, le modèle à longueur de mélange définit le tenseur de Reynolds par le biais d'une relation algébrique. D'autres modèles s'intéressent différemment à la construction d'EDP supplémentaires pour certaines composantes de ce tenseur. Suivant les travaux de Baldwin et Barth [9], le modèle à une équation de transport sur l'énergie cinétique turbulente relève de cette catégorie, l'énergie cinétique turbulente étant la demi-trace du tenseur de Reynolds. Ce type de modèle à une équation de transport sur l'énergie cinétique turbulente est par exemple étudié par Buffard, Gallouët et Hérard dans [17]. A la suite des travaux entrepris par Mohammadi et Pironneau [83], ce modèle à une équation sur l'énergie cinétique turbulente est fréquemment complété par une seconde équation d'évolution pour la dissipation turbulente. Ce modèle à deux équations de transport sur l'énergie cinétique et la dissipation turbulentes est appelé modèle K- $\epsilon$ . Très utilisé dans l'industrie, ce modèle K- $\epsilon$  est par exemple étudié par Forestier, Hérard et Louis dans [40]. Suivant les travaux de



Berthon, Coquel, Hérard et Uhlmann [12], divers modèles du second ordre ont récemment été proposés. Ces modèles du second ordre s'intéressent à la construction d'EDP supplémentaires pour chaque composante du tenseur de Reynolds. Ces modèles du second ordre achèvent notre présentation des modélisations couramment utilisées pour décrire les écoulements monophasiques compressibles turbulents. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, on se demande maintenant comment effectuer la transposition de ces différents modèles de turbulence monophasiques dans le cadre diphasique.

Dans l'étude des fluctuations associées aux écoulements liquide-vapeur, la turbulence diphasique revêt un caractère légèrement différent de la turbulence monophasique étudiée précédemment. Dans un premier temps, les fluctuations de l'écoulement diphasique ne sont plus seulement liées au développement de structures tourbillonnaires. Différentes fluctuations peuvent par exemple voir le jour au sein des écoulements diphasiques du fait du mouvement des interfaces (vibration des inclusions, coalescence, fragmentation). Dans le cadre des écoulements à inclusions, le développement des structures tourbillonnaires au sein de la phase dispersée peut par ailleurs être limité lorsque les longueurs caractéristiques de la topologie diphasique sont inférieures aux longueurs caractéristiques des tourbillons. Divers points de vue sont alors envisagés dans la littérature pour décrire de manière moyennée ces phénomènes de fluctuation au sein des mélanges diphasiques. Berthon et Nkonga considèrent par exemple dans [13] un modèle de turbulence global défini à l'échelle du mélange. Dans le rapport interne CEA [7], Aniel-Buchheit, Chanoine, Grégoire et Pinson préconisent différemment l'implémentation d'un modèle de turbulence pour la phase continue. L'influence des fluctuations sur la phase dispersée est alors modélisée par une force de dispersion turbulente. Dans [61], Hérard envisage quant à lui l'implémentation d'un modèle de turbulence monophasique pour chaque constituant du mélange. Pour décrire la turbulence diphasique, seul ce dernier point de vue est ici envisagé. Dans le cadre des modèles bifluïdes de type Baer et Nunziato, cette seconde partie de thèse s'intéresse à l'implémentation d'un modèle de turbulence simple à une équation pour l'énergie cinétique turbulente de chaque phase. Le modèle bifluïde turbulent étudié dans cette seconde partie de thèse est donc constitué de neuf équations. Dans ce qui suit, on cherche à déterminer l'influence de ce modèle de turbulence sur les propriétés du modèle bifluïde à sept équations étudié à la partie I dans le cadre laminaire. A titre d'étude préliminaire, on se demande dans quelle mesure l'implémentation d'un tel modèle de turbulence influe sur l'hyperbolicité, le caractère localement bien défini des produits non-conservatifs et la stabilité des équilibres diphasiques pour les systèmes de type Baer et Nunziato. On étudie alors l'influence de la turbulence sur la dynamique des transferts interfaciaux.

Soit  $d$  la dimension de l'espace physique ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ). La formulation générique du modèle bifluïde turbulent à neuf équations donnée par Hérard [61] s'écrit dans un cadre multidimensionnel sous la forme compacte

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = S(W) + \nabla \cdot D(W, \nabla W) + T(W, \nabla W). \quad (10.1)$$

La variable d'état inconnue  $W = W(t, x)$  est une application de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^{7+2d}$ . Le flux  $F$  est une application régulière de  $\mathbb{R}^{7+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{7+2d} \times \mathbb{R}^d$ . Les différentes interactions diphasiques sont regroupées dans le tenseur interfacial turbulent  $C$ , application régulière de  $\mathbb{R}^{7+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{7+2d} \times \mathbb{R}^{7+2d} \times \mathbb{R}^d$ , et dans le terme source  $S$ , application régulière de  $\mathbb{R}^{7+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{7+2d}$ . Les effets diffusifs sont liés à l'application régulière  $D(W, \nabla W) \in \mathbb{R}^{7+2d} \times \mathbb{R}^d$ . La production et la dissipation de la turbulence sont enfin regroupées dans l'application régulière  $T(W, \nabla W) \in \mathbb{R}^{7+2d}$ . De manière analogue à la partie I, définissons pour  $k = 1, 2$ , la fraction volumique  $\alpha_k$ , la densité  $\rho_k$ , la pression  $P_k$ , l'énergie interne spécifique  $e_k$  et la vitesse  $u_k$ . Pour  $k = 1, 2$ , l'énergie cinétique turbulente de la phase  $k$  est associée à la grandeur  $K_k$ . A partir de ces grandeurs phasiques, on introduit ensuite pour  $k = 1, 2$ , la masse partielle  $m_k = \alpha_k \rho_k$ , l'énergie totale spécifique  $E_k = e_k + |u_k|^2 / 2 + K_k$  et la variable  $\pi_k = P_k + 2 \rho_k K_k / 3$ . Comme dans le cadre laminaire, les fractions volumiques satisfont la contrainte de saturation

$$\sum_k \alpha_k = 1. \quad (10.2)$$

Ce chapitre s'intéresse aux solutions du système (10.1) dans l'espace admissible

$$\Omega = \{W \in \mathbb{R}^{7+2d} / \forall k = 1, 2, \alpha_k \in ]0, 1[, \rho_k > 0, P_k > 0, K_k \geq 0\}. \quad (10.3)$$

Nous utiliserons souvent par la suite la formulation monodimensionnelle (10.4) de ce modèle :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = S(W) + \partial_x [D(W, \partial_x W)] + T(W, \partial_x W), \quad (10.4)$$

Les différents termes en sont détaillés ci-dessous.

Dans le cadre monodimensionnel du système (10.4), la variable d'état  $W$  et le flux  $F$  s'écrivent respectivement

$$W = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ m_2 \\ m_2 u_2 \\ m_2 E_2 \\ m_2 K_2 \\ m_1 \\ m_1 u_1 \\ m_1 E_1 \\ m_1 K_1 \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 u_2 \\ m_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2 \\ (m_2 E_2 + \alpha_2 \pi_2) u_2 \\ m_2 K_2 u_2 \\ m_1 u_1 \\ m_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1 \\ (m_1 E_1 + \alpha_1 \pi_1) u_1 \\ m_1 K_1 u_1 \end{pmatrix}.$$

Les effets diffusifs sont regroupés dans le tenseur

$$D(W, \partial_x W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_2 (\Sigma_2 + \mathcal{R}_2) \\ \alpha_2 [(\Sigma_2 + \mathcal{R}_2) u_2 - F_{T_2} - F_{K_2}] \\ -\alpha_2 F_{K_2} \\ 0 \\ \alpha_1 (\Sigma_1 + \mathcal{R}_1) \\ \alpha_1 [(\Sigma_1 + \mathcal{R}_1) u_1 - F_{T_1} - F_{K_1}] \\ -\alpha_1 F_{K_1} \end{pmatrix}$$

où  $\Sigma_k$ ,  $\mathcal{R}_k$ ,  $F_{T_k}$  et  $F_{K_k}$  désignent respectivement le tenseur des contraintes visqueuses, le tenseur des contraintes de Reynolds, le flux de chaleur et le flux d'énergie cinétique turbulente associés à la phase  $k$ . Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\varepsilon_k$  la dissipation spécifique d'énergie cinétique turbulente dans la phase  $k$ . Les termes sources associés à la production et à la dissipation d'énergie cinétique turbulente sont regroupés dans le vecteur

$$T(W, \partial_x W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \mathcal{R}_2 \partial_x u_2 - m_2 \varepsilon_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1 \mathcal{R}_1 \partial_x u_1 - m_1 \varepsilon_1 \end{pmatrix}.$$

Pour dériver les modèles bifluides turbulents, divers processus de moyenne sont appliqués aux équations locales instantanées [39, 67, 31, 34]. Lors de l'application de ces processus de moyenne, plusieurs termes d'interaction apparaissent entre les phases. Certains de ces termes d'interaction sont d'ordre un et regroupés dans le tenseur interfacial  $C$ . Les autres sont d'ordre zéro et regroupés dans le terme source  $S$ . Comme dans le cadre laminaire, soit  $P_i$ ,  $V_i$ ,  $e_i$  respectivement la vitesse, la pression et l'énergie interne spécifique interfaciales. On définit similairement l'énergie totale spécifique interfaciale par la relation  $E_i = e_i + V_i^2 / 2$ .

Les différents termes d'interaction entre les phases s'écrivent alors respectivement

$$C(W) \partial_x W = \begin{pmatrix} V_i \partial_x \alpha_2 \\ 0 \\ -P_i \partial_x \alpha_2 \\ -P_i V_i \partial_x \alpha_2 \\ 2 m_2 K_2 \partial_x u_2 / 3 \\ 0 \\ -P_i \partial_x \alpha_1 \\ -P_i V_i \partial_x \alpha_1 \\ 2 m_1 K_1 \partial_x u_1 / 3 \end{pmatrix}, \quad S(W) = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \Gamma_2 \\ D_2 + \Gamma_2 V_i \\ -P_i \delta_2 + D_2 V_i + \Phi_2 + \Gamma_2 E_i \\ 0 \\ \Gamma_1 \\ D_1 + \Gamma_1 V_i \\ -P_i \delta_1 + D_1 V_i + \Phi_1 + \Gamma_1 E_i \\ 0 \end{pmatrix},$$

où, comme dans le cadre laminaire,  $D_k$  désigne pour  $k = 1, 2$ , le transfert de quantité de mouvement entre les phases,  $\Phi_k$  le transfert de chaleur,  $\Gamma_k$  le transfert de masse et  $\delta_k$  le terme source de fraction volumique. Pour préserver la masse, la quantité de mouvement, l'énergie totale et la saturation (10.2) du mélange, ces différentes interactions entre les phases satisfont les relations

$$\sum_k \Phi_k = 0, \quad \sum_k \Gamma_k = 0, \quad \sum_k D_k = 0, \quad \sum_k \delta_k = 0. \quad (10.5)$$

Aucun transfert interfacial n'est ici envisagé entre les différentes énergies cinétiques turbulentes. Nous disposons à ce stade d'une formulation générique ouverte du modèle bifluide turbulent à neuf équations.

Pour fermer ce modèle bifluide turbulent, on se place d'office dans le cadre des hypothèses 1 et 2 formulées par Callen [19]. Suivant l'hypothèse 1, on postule tout d'abord l'existence d'une entropie strictement concave et strictement croissante  $s_k(\tau_k, e_k)$  pour chaque constituant du mélange. Cette entropie vérifie la relation de Gibbs

$$\forall k = 1, 2, \quad ds_k = \frac{P_k}{T_k} d\tau_k + \frac{1}{T_k} de_k.$$

Pour décrire les transitions de phase, l'hypothèse 2 nous place par ailleurs dans le cadre où un équilibre triple isobare isotherme équipotentiel monovariant peut de plus exister au sein du mélange diphasique. Cette hypothèse nous permet de discriminer les lois d'état utilisables pour décrire un liquide et sa vapeur. Muni de ces lois d'état pour les différents constituants du mélange, la modélisation des interactions diphasiques est envisagée au chapitre 11 de manière similaire au cadre laminaire. Suivant les travaux de Lhuillier [78], Gavriluyk et Saurel [45], la modélisation des interactions diphasiques s'effectue via la construction d'une inégalité d'entropie pour le système (10.1). La modélisation générique des transferts interfaciaux par des termes de relaxation est alors globalement inchangée par rapport au cadre laminaire. Les coefficients d'échange dépendent cependant de la turbulence. Cette turbulence influe alors sur l'intensité des transferts interfaciaux.

Une fois fermé le modèle bifluide turbulent à neuf équations, on s'intéresse par la suite à ses propriétés mathématiques. La partie convective du système (10.4) est notre premier objet d'étude. Au chapitre 12, on s'intéresse successivement à la nature, à la définition des solutions faibles et au problème de Riemann associés à cette partie convective. A la suite des travaux entrepris par Hérard dans [61], on montre tout d'abord la nature hyperbolique résonante de ce système. L'implémentation d'un modèle de turbulence simple dans les modèles de type Baer et Nunziato n'en modifie donc pas la nature. On s'intéresse par la suite à la définition des solutions faibles pour la partie convective du système (10.4). Dans un premier temps, la définition des produits non-conservatifs  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$  est envisagée suivant les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27]. Comme dans le cadre laminaire, cette définition des produits non-conservatifs associés aux grandeurs interfaciales  $P_i$ ,  $V_i$  s'appuie sur le caractère linéairement dégénéré du champ caractéristique associé à l'onde de fraction volumique. De nouveaux modèles sont alors proposés pour les grandeurs interfaciales  $P_i$ ,  $V_i$  qui dépendent notamment de la turbulence. En ce qui concerne la définition des produits non-conservatifs  $2 m_k K_k \partial_x u_k / 3$  issus de notre modélisation de la turbulence monophasique, différentes relations de saut sont ensuite envisagées suivant les travaux de Dal Maso, Lefloch et Murat [29].

Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\widehat{s}_k = K_k / m_k^{2/3}$ . Dans le cadre des solutions régulières pour la partie convective du système (10.4), les équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes s'écrivent de manière équivalente pour  $k = 1, 2$ ,

$$\partial_t(m_k K_k) + \partial_x(m_k K_k u_k) + \frac{2}{3} m_k K_k \partial_x u_k = 0, \quad (10.6a)$$

$$\partial_t(m_k \widehat{s}_k) + \partial_x(m_k \widehat{s}_k u_k) = 0. \quad (10.6b)$$

La définition de Volpert [103] des relations de saut pour l'équation sous forme non-conservative (10.6a) est alors comparée à la définition classique des relations de saut pour l'équation sous forme conservative (10.6b). Une fois les solutions faibles du système (10.4) définies, on étudie ensuite le problème de Riemann associé à la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. La structure très particulière associée à l'onde de fraction volumique et mise à jour dans le cadre laminaire au chapitre 4 est ici retrouvée. Différents régimes d'écoulement sur- et sous-critiques sont alors identifiés pour les mélanges diphasiques turbulents.

Par la suite, la stabilité des équilibres liquide-vapeur turbulents est brièvement établie au chapitre 13. Pour simuler le modèle bifluide turbulent à neuf équations, la méthode Volumes Finis élaborée dans le cadre laminaire au chapitre 7 est globalement réutilisée. Pour réaliser l'approximation de la partie convective non-conservative associée au système (10.4), de nouveaux schémas sont cependant construits au chapitre 14. Suivant les travaux entrepris par Berthon et Brenier [14] dans le cadre de la combustion turbulente, ces nouveaux schémas s'appuient sur la formulation "conservative" (10.6b) des équations de turbulence. A l'inverse des résultats obtenus dans le cadre non-conservatif standard [30, 65], de tels schémas nous permettent de converger vers une unique solution qui vérifie les bonnes relations de saut. On étudie alors numériquement au chapitre 15 l'influence de la turbulence sur l'intensité des transferts interfaciaux.



## Chapitre 11

# Entropie et lois de fermeture pour les écoulements diphasiques turbulents en transition de phase

A l'introduction de cette seconde partie de thèse, la formulation générique du modèle bifluide turbulent à neuf équations donnée par Hérard dans [61] a été présentée. Dans le cadre des hypothèses 1 et 2, on s'intéresse dans ce chapitre à sa fermeture pour les écoulements liquide-vapeur en transition de phase. En ce qui concerne la modélisation de la turbulence, les fermetures monophasiques standard proposées par Baldwin et Barth [9] sont ici reprises pour clore le modèle à une équation de transport sur l'énergie cinétique turbulente de chaque phase. De manière analogue au cadre laminaire, la modélisation des interactions diphasiques s'effectue conjointement à la construction d'une inégalité d'entropie pour le modèle bifluide turbulent à neuf équations. Par rapport au cadre laminaire, la modélisation des transferts interfaciaux par des termes de relaxation n'est pas modifiée par l'implémentation de la turbulence. De nouveaux modèles pour les coefficients d'échange sont cependant proposés. Suivant les résultats expérimentaux de Bilicki, Kwidzinski et Ali Mohammadein [16], ces nouveaux modèles pour les coefficients d'échange dépendent de l'énergie cinétique turbulente. La turbulence influe alors sur l'intensité des transferts interfaciaux.

### 11.1 Différentes entropies pour le modèle bifluide turbulent à neuf équations

A titre préliminaire, plusieurs entropies pour le modèle bifluide turbulent à neuf équations sont tout d'abord construites dans cette section. Dans les ouvrages de référence [52, 98, 97], la définition des couples entropie – flux d'entropie pour les systèmes d'EDP s'effectue conjointement à la construction de lois de conservation supplémentaires. A la suite des travaux entrepris par Hérard dans [61], on applique ici ce procédé au système (10.1).

Pour  $k = 1, 2$ , soit  $C_k^t$  une constante positive caractéristique de la phase  $k$ . On introduit dans un premier temps les fonctions

$$\widehat{s}_k = \frac{C_k^t K_k}{m_k^{2/3}}$$

Dans le cadre des solutions régulières au système (10.1), ces fonctions  $\widehat{s}_k$  vérifient pour  $k = 1, 2$ , les équations d'évolution

$$\partial_t(m_k \widehat{s}_k) + \nabla \cdot (m_k \widehat{s}_k u_k) = -\frac{2\widehat{s}_k \Gamma_k}{3} + \frac{\widehat{s}_k}{K_k} \left( \mathcal{R}_k : \nabla u_k - \nabla \cdot \alpha_k F_{K_k} - m_k \epsilon_k \right).$$

La construction d'entropies pour le modèle bifluide turbulent à neuf équations est alors immédiate.

**Proposition 21.** *Pour  $k = 1, 2$ , les couples  $(m_k \widehat{s}_k, m_k \widehat{s}_k u_k)$  sont des couples entropie – flux d’entropie pour le système (10.1)*

La proposition 21 n’est pas nouvelle. Dans le cadre de la combustion turbulente, ce résultat a déjà été établi par Berthon et Reignier [14]. Un tel résultat nous permet d’associer une formulation conservative aux équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes. Cette formulation conservative des équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes sera réutilisée au chapitre 12 lors de la définition des relations de saut pour la partie convective du système (10.4).

Pour  $k = 1, 2$ , rappelons maintenant la définition  $\tau_k = 1 / \rho_k$  du volume spécifique associé à la phase  $k$ . Dans le cadre de l’hypothèse 1, on note  $s_k(\tau_k, e_k)$  l’entropie spécifique strictement concave et strictement croissante de la phase  $k$ . Pour  $k = 1, 2$ , on rappelle ensuite la définition  $g_k = e_k + P_k \tau_k - T_k s_k$  du potentiel de Gibbs. De manière analogue au cadre laminaire, le potentiel de changement de phase est défini par la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad \theta_k = g_k - \frac{(u_k - V_i)^2}{2}.$$

Soit  $\eta = \sum_k m_k s_k$  et  $F_\eta = \sum_k m_k s_k u_k$ . L’entropie de mélange  $\eta$  satisfait l’équation d’évolution

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta + \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) (u_k - V_i) \cdot \nabla \alpha_k &= \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k - \sum_k \frac{1}{T_k} \nabla \cdot (\alpha_k F_{T_k}) + \sum_k \frac{1}{T_k} m_k \varepsilon_k \\ &+ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k. \end{aligned}$$

De manière similaire au cadre laminaire, la construction d’une entropie pour le système (10.1) est détaillée à la proposition 22.

**Proposition 22.** *Soit  $\eta = \sum_k m_k s_k$  et  $F_\eta = \sum_k m_k s_k u_k$ . Le couple  $(\eta, F_\eta)$  est un couple entropie – flux d’entropie pour le système (10.1) à la condition que la vitesse et la pression interfaciales satisfassent la relation*

$$\frac{1}{T_2} (P_i - P_2) (u_2 - V_i) - \frac{1}{T_1} (P_i - P_1) (u_1 - V_i) = 0. \quad (11.1)$$

La proposition 22 a déjà été présentée par Hérard dans [61]. Nous l’avons juste replacée dans le cadre de l’hypothèse 1 en introduisant la notion de température. Un tel résultat constitue l’extension au cadre turbulent des travaux réalisés par Gallouët, Hérard et Seguin [42] dans le cadre laminaire. Résumés au chapitre 2, ces travaux ont déjà fait apparaître la relation de compatibilité (11.1) entre la vitesse et la pression interfaciales. Cette relation de compatibilité n’est donc pas affectée par l’implémentation de la turbulence.

Suivant l’étude bibliographique menée à la section 2.2, la vitesse interfaciale est souvent associée dans la littérature à une combinaison convexe des vitesses phasiques :

$$V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \quad \beta \in [0, 1].$$

De manière analogue au cadre laminaire, la relation de compatibilité (11.1) entre la vitesse et la pression interfaciales identifie alors  $P_i$  à une combinaison convexe des pressions phasiques :

$$P_i = \mu(\beta) P_1 + (1 - \mu(\beta)) P_2, \quad \mu(\beta) = \frac{T_2 (1 - \beta)}{T_2 (1 - \beta) + T_1 \beta} \in [0, 1].$$

Parmi les couples  $(P_i, V_i)$  issus de la littérature, rappelons que seuls les modèles reportés dans le tableau 3.1 vérifient cette relation de compatibilité. A l’avenir, on s’intéressera particulièrement à ces modélisations interfaciales qui associent la fonction  $\eta$  à une entropie pour le système (10.1). Dans ce cadre, de nouvelles définitions pour le coefficient  $\beta$  seront proposées au chapitre 12 lorsque nous construirons des relations de saut pour la partie convective du modèle biffuide turbulent à neuf équations. Ces nouvelles modélisations pour le couple  $(P_i, V_i)$  dépendront notamment de la turbulence.

## 11.2 Construction d'une inégalité d'entropie pour le modèle bifluide turbulent à neuf équations

A la section précédente, plusieurs couples entropie – flux d'entropie ont été construits pour le modèle bifluide turbulent à neuf équations. Compte tenu de la relation (11.1) entre la vitesse et la pression interfaciale, le couple entropique  $(\eta, F_\eta)$  satisfait notamment l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta = & \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k - \sum_k \frac{1}{T_k} \nabla \cdot (\alpha_k F_{T_k}) + \sum_k \frac{1}{T_k} m_k \varepsilon_k \\ & + \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Au second membre de l'équation (11.2), plusieurs termes sont inconnus. Ces différents termes inconnus caractérisent les phénomènes de diffusion, de turbulence et d'interaction entre les phases. Pour clore le modèle bifluide turbulent à deux pressions, on réutilise la procédure de modélisation présentée au chapitre 3 dans le cadre laminaire. On s'intéresse dans cette section aux modifications induites par l'introduction de la turbulence.

Dans un premier temps, on s'attache à la modélisation de la diffusion. De manière similaire au cadre laminaire, la loi de Newton et la loi de Fourier sont successivement adoptées dans chaque phase pour clore le tenseur des contraintes visqueuses et le flux de chaleur. Ces différentes fermetures pour les termes de diffusion s'écrivent

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} \Sigma_k = -\frac{2}{3} \mu_k (\nabla \cdot u_k) \text{Id} + \mu_k (\nabla u_k + (\nabla u_k)^t), & \text{(loi de Newton)} \\ F_{T_k} = -\kappa_{T_k} \nabla T_k, & \text{(loi de Fourier)} \end{cases} \quad (11.3)$$

où  $\mu_k \geq 0$  et  $\kappa_{T_k} \geq 0$  désignent respectivement la viscosité et la conductivité thermique de la phase  $k$ .

En ce qui concerne la modélisation de la turbulence, deux approches ont été portées à notre attention pour modéliser le flux d'énergie cinétique turbulente  $F_{K_k}$ , les contraintes de Reynolds  $\mathcal{R}_k$  et la dissipation turbulente  $\varepsilon_k$ . La première approche suivie par Berthon et Nkonga [13] est globale. Cette première approche modélise la turbulence à l'échelle du mélange diphasique. Cette première approche ne distingue pas les différents phénomènes de turbulence au sein des phases. On s'intéresse ici à une seconde approche. Cette seconde approche sépare nettement la turbulence dans l'une et l'autre phase. Suivant les travaux entrepris par Hérard [61], les modèles de turbulence monophasique sont alors souvent reconduits dans chaque phase. Dans le cadre des modèles à une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente, les différentes fermetures initialement proposées par Baldwin et Barth [9] se transposent aux écoulements diphasiques sous la forme

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} \mathcal{R}_k = -\frac{2}{3} \mu_k^t (\nabla \cdot u_k) \text{Id} + \mu_k^t (\nabla u_k + (\nabla u_k)^t), \\ F_{K_k} = -\kappa_{K_k} \nabla K_k, & \varepsilon_k = \frac{K_k}{\tau_{K_k}}. \end{cases} \quad (11.4)$$

Dans cette modélisation (11.4) des grandeurs caractéristiques de la turbulence,  $\mu_k^t \geq 0$ ,  $\kappa_{K_k} \geq 0$  et  $\tau_{K_k} \geq 0$  désignent respectivement la viscosité turbulente, la conductivité d'énergie cinétique turbulente et le temps caractéristique de la dissipation turbulente au sein de la phase  $k$ .

En ce qui concerne les interactions diphasiques, les modélisations génériques proposées dans le cadre laminaire au chapitre 3 sont ici reconduites dans le cadre turbulent. Par analogie avec les modèles retenus pour la vitesse et la pression interfaciales, l'énergie interne spécifique interfaciale est associée à une combinaison convexe des potentiels de changement de phase. Les différentes grandeurs interfaciales s'écrivent



alors

$$\begin{cases} V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, & \beta \in [0, 1], \\ P_i = \mu(\beta) P_1 + (1 - \mu(\beta)) P_2, & \mu(\beta) = \frac{T_2(1 - \beta)}{T_2(1 - \beta) + T_1 \beta} \in [0, 1], \\ e_i = v \theta_1 + (1 - v) \theta_2, & v \in [0, 1]. \end{cases} \quad (11.5)$$

Les transferts interfaciaux sont par ailleurs modélisés par des termes de relaxation

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} \delta_k = K_P (P_k - P_{k'}), & K_P(W) > 0, \\ D_k = K_U (u_{k'} - u_k), & K_U(W) > 0, \\ \Phi_k = K_T (T_{k'} - T_k), & K_T(W) > 0, \\ \Gamma_k = K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k), & K_\theta(W) > 0. \end{cases} \quad (11.6)$$

$k' = 3 - k,$

La modélisation des coefficients d'échange  $K_P, K_U, K_T, K_\theta$  dépend des applications envisagées. Ces modélisations définissent l'intensité des transferts interfaciaux. Dans le cadre du modèle bifluide turbulent à neuf équations (10.1), ces différents coefficients d'échange peuvent dépendre de la turbulence. Nous en donnerons une formulation précise à la prochaine section.

Pour finir, l'ensemble des modélisations (11.3), (11.4), (11.5), (11.6) pour la diffusion, les interactions diphasiques et la turbulence dote le modèle bifluide turbulent à neuf équations de l'inégalité d'entropie

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta - \sum_k \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_k \kappa_{T_k} \nabla T_k}{T_k} \right) &= \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k + \sum_k \frac{\alpha_k \kappa_{T_k} (\nabla T_k)^2}{T_k^2} + \sum_k \frac{1}{T_k} m_k \varepsilon_k \\ &+ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k \geq 0. \end{aligned} \quad (11.7)$$

La modélisation de la turbulence issue du cadre monophasique n'est alors pas modifiée lors de son implémentation dans le cadre diphasique. La modélisation des interactions diphasiques issue du cadre laminaire n'est similairement pas affectée par l'introduction de la turbulence. A titre de comparaison avec les écoulements laminaires, seules les dissipations turbulentes apportent une modification à la définition de l'inégalité d'entropie pour le modèle bifluide à deux pressions.

### 11.3 Modélisation des coefficients d'échange pour les écoulements diphasiques turbulents en transition de phase

A la section précédente, plusieurs modèles de relaxation ont été retenus pour clore les transferts interfaciaux. Ces différentes modélisations (11.6) pour la traînée, le transfert de chaleur, le transfert de masse et le terme source de fraction volumique dépendent des coefficients d'échange  $K_P, K_U, K_T, K_\theta$ . L'ensemble de ces coefficients d'échange caractérise l'intensité des transferts entre les phases. Dans cette section, on s'intéresse à leur modélisation.

Dans le cadre des écoulements liquide-vapeur laminaires, certaines études ont déjà été réalisées par Lhuillier pour calibrer les coefficients d'échange  $K_P, K_U, K_T, K_\theta$ . Ces études s'appuient sur une analyse dimensionnelle. Une telle analyse dimensionnelle conduit Lhuillier à postuler dans [78] que les écoulements liquide-vapeur hors équilibre ont tendance à revenir rapidement à la saturation. Au chapitre 3, nous avons proposé de traduire cette hypothèse en termes mathématiques. Dans le cadre de l'hypothèse 2, la stabilité linéaire de l'équilibre triple isobare isotherme équipotentiel a alors été supposée. Pour vérifier cette propriété des écoulements liquide-vapeur, diverses modélisations (3.9) des coefficients d'échange ont été proposées.

Suivant les résultats expérimentaux de Bilicki, Kwizdzinski et Ali Mohammadein [16], le retour rapide à la saturation des écoulements liquide-vapeur en déséquilibre dépend cependant de la turbulence. Plus la turbulence au sein du mélange diphasique est intense, plus rapidement se résorbent les déséquilibres entre les phases. Pour prendre en compte ces différentes informations sur la dynamique des transferts interfaciaux, nous proposons ici une formulation modifiée des coefficients d'échange (3.9). Cette formulation modifiée des coefficients d'échange tente de modéliser l'influence de la turbulence sur les transferts interfaciaux. Dans un premier temps, on rappelle la définition des coefficients thermodynamiques  $\mathcal{A}_{uu}$ ,  $\mathcal{A}_{pp}$ ,  $\mathcal{A}_{tt}$  et  $\mathcal{A}_{\theta\theta}$ . Ces différents coefficients thermodynamiques s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{uu} &= \sum_k \frac{1}{m_k}, & \mathcal{A}_{pp} &= \sum_k \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & \mathcal{A}_{tt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \\ \mathcal{A}_{\theta\theta} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] - \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k). \end{aligned}$$

Soit  $K_0$  une énergie cinétique turbulente de référence. On définit le coefficient turbulent

$$\mathcal{A}_K = 1 + \frac{K_1 + K_2}{K_0}$$

Pour prendre en compte les résultats expérimentaux de Bilicki, Kwizdzinski et Ali Mohammadein [16], nous proposons ici la formulation heuristique (11.8) des coefficients d'échange interfaciaux :

$$K_U = \frac{\mathcal{A}_K}{\tau_U \mathcal{A}_{uu}}, \quad K_P = \frac{\mathcal{A}_K}{\tau_P \mathcal{A}_{pp}}, \quad K_T = \frac{\mathcal{A}_K}{\tau_T \mathcal{A}_{tt}}, \quad K_\theta = \frac{\mathcal{A}_K}{\tau_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta}}. \quad (11.8)$$

Dans cette modélisation (11.8) des coefficients d'échange interfaciaux,  $\tau_U$ ,  $\tau_P$ ,  $\tau_T$  et  $\tau_\theta$  sont des échelles de temps caractéristiques du retour à l'équilibre des vitesses, pressions, températures et potentiels de changement de phase. Suivant l'analyse bibliographique menée au chapitre 3, ces échelles de temps sont identifiées à des constantes de l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s. Pour cette modélisation heuristique (11.8) des coefficients d'échange, la stabilité linéaire de certains équilibres liquide-vapeur sera numériquement vérifiée au chapitre 13. Lors de la simulation des transferts interfaciaux, cette modélisation (11.8) des coefficients d'échange nous permettra alors de reproduire les tendances expérimentales observées par Bilicki, Kwizdzinski et Ali Mohammadein [16]. Plus la turbulence au sein des mélanges liquide-vapeur sera intense, plus rapidement se résorberont les déséquilibres entre les phases.

**Remarque 15.** Dans cette section, de nouvelles modélisations (11.8) viennent d'être proposées pour les coefficients d'échange interfaciaux. Muni de ces nouvelles modélisations pour les fonctions de relaxation, l'admissibilité des solutions régulières bornées du système (10.1) peut alors être étudiée similairement au cadre laminaire. De manière analogue à la section 3.5, la positivité des fractions volumiques, des masses partielles, des pressions et des énergies cinétiques turbulentes découle de l'application du lemme 1 présenté à l'annexe A.

Pour conclure, un jeu complet de fermetures a été proposé dans ce chapitre pour clore le modèle bifluide turbulent à neuf équations. Dans le cadre des écoulements en transition de phase, ce jeu de fermetures dote le système (10.1) d'une inégalité d'entropie. Par rapport au cadre monophasique, les modélisations standard de la turbulence ne sont pas modifiées lors de leur implémentation dans le cadre diphasique. Par rapport au cadre laminaire, la modélisation des interactions diphasiques n'est pas formellement affectée par l'implémentation de la turbulence. Une telle inégalité d'entropie pour le système (10.1) sera utilisée au chapitre 13 pour déterminer la stabilité des équilibres liquide-vapeur turbulents. A la section 12.3, certaines solutions faibles associées à la partie convective du modèle bifluide turbulent à deux pressions seront par ailleurs sélectionnées par le biais d'un critère entropique.



## Chapitre 12

# La partie convective

Au précédent chapitre de modélisation, la fermeture du modèle bifluide turbulent à neuf équations a été réalisée dans le cadre des écoulements liquide-vapeur. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés de la partie convective associée à ce modèle bifluide turbulent. Pour les écoulements laminaires, les différentes propriétés de cette partie convective ont déjà été étudiées au chapitre 4 dans un cadre monodimensionnel. On cherche ici à mesurer l'influence de notre modèle de turbulence. Dans ce même cadre monodimensionnel, la partie convective du modèle bifluide turbulent à deux pressions s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha_2 + V_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 \pi_2) - P_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 E_2) + \partial_x [\alpha_2 (\rho_2 E_2 + \pi_2) u_2] - P_i V_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 K_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 K_2 u_2) + 2 \alpha_2 \rho_2 K_2 \partial_x u_2 / 3 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 \pi_1) + P_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 E_1) + \partial_x [\alpha_1 (\rho_1 E_1 + \alpha_1 \pi_1) u_1] + P_i V_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 K_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 K_1 u_1) + 2 \alpha_1 \rho_1 K_1 \partial_x u_1 / 3 = 0. \end{array} \right. \quad (12.1)$$

De manière analogue au chapitre 4, on étudie tout d'abord la nature du système (12.1). On montre à cette occasion que notre modélisation de la turbulence ne modifie pas la nature généralement hyperbolique des modèles bifluides à deux pressions. En ce qui concerne la définition des solutions faibles pour le système (12.1), une nature est ensuite attribuée à chacun des champs caractéristiques en vue de donner un sens aux différents produits non-conservatifs  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $2 m_k K_k \partial_x u_k / 3$ . Les différents produits non-conservatifs associés aux grandeurs interfaciales  $P_i$ ,  $V_i$  proviennent de notre modélisation bifluide. Pour définir ces produits non-conservatifs, diverses modélisations des grandeurs interfaciales  $P_i$ ,  $V_i$  sont mises en avant à la deuxième partie de ce chapitre. Ces modélisations particulières pour la vitesse et la pression interfaciales s'inspirent des travaux réalisés par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27] dans le cadre laminaire des modèles de type Baer et Nunziato. De nouveaux modèles sont alors proposés pour les couples interfaciaux  $(P_i, V_i)$  qui dépendent notamment des énergies cinétiques turbulentes. Les autres produits non-conservatifs  $2 m_k K_k \partial_x u_k / 3$  proviennent de notre modélisation de la turbulence. Suivant les travaux de Dal Maso, Lefloch et Murat [29], plusieurs définitions pour ces produits non-conservatifs sont envisageables. La définition de Volpert [103] est alors comparée à la définition de Hérard [61]. Une fois définies les solutions faibles du système (12.1), la dernière partie de ce chapitre s'intéresse à l'étude du problème de Riemann pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Comme dans le cadre laminaire, on s'attache à l'étude des connexions onde par onde en imposant des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases. On étudie alors particulièrement les modifications induites par la turbulence sur les différents régimes d'écoulement sur- et sous-critiques mis à jour dans le cadre laminaire pour les écoulements diphasiques.

## 12.1 Nature de la partie convective

Au chapitre 4, la nature généralement hyperbolique du modèle de Baer et Nunziato a été rappelée. Dans cette section, on cherche à déterminer dans quelle mesure la modélisation de la turbulence influe sur la nature de ce modèle bifluide à deux pressions. Pour ce faire, on analyse la structure propre du système (12.1).

Pour caractériser la structure propre du système (12.1), on introduit tout d'abord certains coefficients thermodynamiques. Dans un premier temps, on rappelle pour  $k = 1, 2$ , la définition des variables

$$\pi_k = P_k + \frac{2}{3} \rho_k K_k, \quad \hat{s}_k = \frac{C_k^t K_k}{m_k^{2/3}},$$

où  $C_k^t$  est une constante positive caractéristique de la phase  $k$ . On définit ensuite la vitesse de propagation  $\hat{c}_k$  des ondes acoustiques par la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad \rho_k \hat{c}_k^2 = \hat{\gamma}_k P_k + \frac{10}{9} \rho_k K_k.$$

Ces différentes variables interviennent dans la définition des coefficients thermodynamiques

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial s_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & B_k &= \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{2}{3} \frac{\rho_k K_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), \\ \zeta_k &= \frac{(u_k - V_i) \left[ B_k - \left( \frac{\pi_k - P_i}{\alpha_k} \right) \right]}{\rho_k \left[ (u_k - V_i)^2 - \hat{c}_k^2 \right]}, & \xi_k &= \frac{\hat{c}_k^2 \left( \frac{\pi_k - P_i}{\alpha_k} \right) - (u_k - V_i)^2 B_k}{(u_k - V_i)^2 - \hat{c}_k^2}, \\ H_{s_k} &= (-1)^k A_k (u_k - V_i), & H_{u_k} &= (-1)^k \frac{\pi_k - P_i}{m_k}, & H_{\pi_k} &= (-1)^k B_k (u_k - V_i). \end{aligned}$$

Soit  $X^t = (\alpha_2, s_2, \hat{s}_2, u_2, \pi_2, s_1, \hat{s}_1, u_1, \pi_1)$ . Dans le cadre des solutions régulières, la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations se réécrit de manière équivalente

$$\frac{\partial X}{\partial t} + H(X) \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad H(X) = \begin{pmatrix} V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{s_2} & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{u_2} & 0 & 0 & u_2 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{\pi_2} & 0 & 0 & \rho_2 \hat{c}_2^2 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ H_{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & \tau_1 \\ H_{\pi_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_1 \hat{c}_1^2 & u_1 \end{pmatrix}. \quad (12.2)$$

Les valeurs propres de la matrice  $H$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= V_i, \\ \lambda_1 &= u_2 - \hat{c}_2, & \lambda_{2,3} &= u_2, & \lambda_4 &= u_2 + \hat{c}_2, \\ \lambda_5 &= u_1 - \hat{c}_1, & \lambda_{6,7} &= u_1, & \lambda_8 &= u_1 + \hat{c}_1. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Ses vecteurs propres à droite respectivement associés sont regroupés dans la matrice colonne

$$(R_p)_{p \in \{0, \dots, 8\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & -\rho_2 \hat{c}_2 & 0 & 0 & \rho_2 \hat{c}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\zeta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho_1 \hat{c}_1 & 0 & 0 & \rho_1 \hat{c}_1 \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

En référence aux travaux de Buffard, Gallouët et Hérard [17], deux sous-systèmes de type Euler turbulent couplés par une équation sur la fraction volumique ressortent de cette structure propre. L'ensemble des vecteurs propres à droite regroupé dans la matrice colonne (12.4) engendre par ailleurs l'espace  $\mathbb{R}^9$  excepté le long des variétés  $V_i = u_k \pm \hat{c}_k$ ,  $k = 1, 2$ . Ce phénomène de résonance a déjà été rencontré dans le cadre laminaire. La nature du système (12.1) est alors présentée à la proposition 23.

**Proposition 23.** *Sous l'hypothèse 1, la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations est hyperbolique résonante sur l'espace des états admissibles  $\Omega \subset \mathbb{R}^9$ . Cette partie convective admet toujours neuf valeurs propres réelles. Ses vecteurs propres à droite engendrent l'espace  $\mathbb{R}^9$ , excepté le long des variétés  $V_i = u_k \pm \hat{c}_k$ ,  $k = 1, 2$ .*

La proposition 23 n'est pas nouvelle. Une telle proposition a déjà été présentée par Hérard dans [61]. Nous y avons juste introduit l'hypothèse 1. Pour démontrer cette proposition, on se référera au cadre laminaire développé à la section 4.1. Tout comme dans le cadre laminaire, la nature hyperbolique résonante du système (12.1) est alors indépendante de la modélisation retenue pour la vitesse interfaciale. Notre modélisation de la turbulence ne modifie donc pas la nature généralement hyperbolique du modèle de Baer et Nunziato. Pour notre modélisation particulière de la vitesse interfaciale par une combinaison convexe des vitesses phasiques, l'entrée en résonance du système (12.1) s'effectue par ailleurs comme dans le cadre laminaire de manière marginale, lorsque l'écart de vitesse entre les phases est de l'ordre de grandeur des vitesses soniques.

## 12.2 Nature des champs caractéristiques et définition des produits non-conservatifs

Maintenant la nature généralement hyperbolique du système (12.1) établie, on s'intéresse dans cette section à la définition de ses solutions faibles. On cherche à attribuer une nature aux différents champs caractéristiques associés à la partie convective du modèle bifluide turbulent à deux pressions. De manière analogue au cadre laminaire, cette caractérisation des ondes pour le système (12.1) est ici envisagée conjointement à la définition de ses produits non-conservatifs.

### 12.2.1 Nature du champ caractéristique associé à la vitesse interfaciale

Pour éviter l'épaississement des interfaces en une zone de mélange, une modélisation particulière de la vitesse interfaciale a été proposée dans le cadre laminaire au chapitre 4. Cette modélisation particulière pour la vitesse interfaciale associe l'onde de fraction volumique à une discontinuité de contact. Une telle modélisation pour la vitesse interfaciale définit simultanément l'ensemble des produits non-conservatifs  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$  issus de notre description bifluide des écoulements diphasiques. Dans ce cadre, on cherche à déterminer les modifications introduites par l'implémentation de la turbulence.

### Modélisation de la vitesse interfaciale par un champ linéairement dégénéré et fermeture du produit non-conservatif $V_i \partial_x \alpha_k$ .

Lors de la fermeture du modèle bifluide turbulent à deux pressions, une modélisation particulière (12.5) de la vitesse et de la pression interfaciales a été proposée pour doter le système (10.1) d'une inégalité d'entropie :

$$\begin{cases} V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, & \beta \in [0, 1], \\ P_i = \mu P_1 + (1 - \mu) P_2, & \mu = \frac{T_2 (1 - \beta)}{T_1 \beta + T_2 (1 - \beta)} \in [0, 1]. \end{cases} \quad (12.5)$$

Dans ce cadre, diverses modélisations de la vitesse interfaciale ont été mises en avant pour les écoulements laminaires à la section 4.2. De telles modélisations pour la vitesse interfaciale identifie  $V_i$  à un 0-invariant de Riemann pour la 0-discontinuité de contact associée à l'onde de fraction volumique. Le produit non-conservatif  $V_i \partial_x \alpha_k$  est alors localement bien défini. Dans le cadre turbulent, de nouvelles modélisations pour la vitesse interfaciale peuvent similairement être envisagées pour satisfaire ces propriétés. De telles modélisations sont présentées à la proposition 24. La démonstration de cette proposition s'appuie sur de fastidieux calculs.

**Proposition 24.** Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\chi_k(\rho_k, P_k)$  et  $\widehat{\chi}_k(m_k, K_k)$  des coefficients thermodynamiques positifs qui satisfont les équations

$$\rho_k \left( \frac{\partial \chi_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \widehat{\chi}_k P_k \left( \frac{\partial \chi_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} = 0, \quad (12.6a)$$

$$m_k \left( \frac{\partial \widehat{\chi}_k}{\partial m_k} \right)_{K_k} + \frac{2}{3} K_k \left( \frac{\partial \widehat{\chi}_k}{\partial K_k} \right)_{m_k} = 0. \quad (12.6b)$$

Le 0-champ caractéristique associé à la vitesse interfaciale

$$V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, \quad \beta = \frac{m_1 (\chi_1 + \widehat{\chi}_1)}{m_1 (\chi_1 + \widehat{\chi}_1) + m_2 (\chi_2 + \widehat{\chi}_2)} \in [0, 1], \quad (12.7)$$

est linéairement dégénéré si les deux coefficients thermodynamiques  $(\chi_1, \chi_2) \neq (0, 0)$  vérifient la relation

$$\left( \frac{\partial \chi_2}{\partial P_2} \right)_{\rho_2} \left( \frac{\partial e_2}{\partial P_2} \right)_{\rho_2}^{-1} (P_i - P_2) (u_2 - V_i) - \left( \frac{\partial \chi_1}{\partial P_1} \right)_{\rho_1} \left( \frac{\partial e_1}{\partial P_1} \right)_{\rho_1}^{-1} (P_i - P_1) (u_1 - V_i) = 0. \quad (12.8)$$

La pression interfaciale s'écrit alors

$$P_i = \mu P_1 + (1 - \mu) P_2, \quad \mu = \frac{m_2 (\chi_2 + \widehat{\chi}_2) T_2}{m_1 (\chi_1 + \widehat{\chi}_1) T_1 + m_2 (\chi_2 + \widehat{\chi}_2) T_2} \in [0, 1]. \quad (12.9)$$

La proposition 24 constitue l'extension au cadre turbulent des travaux présentés dans le cadre laminaire à la section 4.2. Cette proposition 24 associe les modélisations de la vitesse interfaciale à une famille à quatre paramètres  $(\chi_1, \chi_2, \widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_2)$ . Les différents modèles interfaciaux proposés par Coquel, Gallouët, Hérard, Seguin [27], Baer, Nunziato [8], ou encore Gavriluk et Saurel [45] entrent dans le cadre de cette modélisation. Ces différents modèles se réécrivent de manière équivalente

$$V_i = u_1, \quad (\chi_1, \chi_2, \widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_2) = (1, 0, 0, 0), \quad \begin{cases} \text{Baer et Nunziato,} \\ \text{Gavriluk et Saurel,} \\ \text{Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin,} \end{cases} \quad (12.10a)$$

$$V_i = u_2, \quad (\chi_1, \chi_2, \widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_2) = (0, 1, 0, 0), \quad \begin{cases} \text{Baer et Nunziato,} \\ \text{Gavriluk et Saurel,} \\ \text{Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin,} \end{cases} \quad (12.10b)$$

$$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad (\chi_1, \chi_2, \widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_2) = (1, 1, 0, 0), \quad \text{Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin.} \quad (12.10c)$$

De nouvelles modélisations peuvent par ailleurs être envisagées pour la vitesse interfaciale. Ces nouvelles modélisations dépendent de la turbulence. Pour  $k = 1, 2$ , rappelons la définition des entropies  $\widehat{s}_k = C_k^t K_k / m_k^{2/3}$ , où  $C_k^t$  est une constante positive caractéristique de la phase  $k$ . Ces entropies  $\widehat{s}_k$  vérifient la relation (12.6b). Le modèle (12.10d) satisfait donc la proposition 24 :

$$V_i = \frac{m_1 (1 + \widehat{s}_1) u_1 + m_2 (1 + \widehat{s}_2) u_2}{m_1 (1 + \widehat{s}_1) + m_2 (1 + \widehat{s}_2)}, \quad (\chi_1, \chi_2, \widehat{\chi}_1, \widehat{\chi}_2) = (1, 1, \widehat{s}_1, \widehat{s}_2). \quad (12.10d)$$

On remarque alors que cette définition (12.10d) de la vitesse interfaciale dégénère vers le modèle (12.10c) de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27] lorsque la turbulence se dissipe au sein du mélange diphasique. Dans ce qui suit, on cherche cependant à se comparer au cadre laminaire étudié à la section 4.2. On s'intéresse donc essentiellement à la modélisation (12.10c) qui associe la vitesse interfaciale à la vitesse du centre de masse pour le mélange diphasique.

### Définition des relations de saut à la traversée de l'onde $V_i$ et définition du produit non-conservatif $P_i \partial_x \alpha_k$ .

Au paragraphe précédent, la définition du produit non-conservatif  $V_i \partial_x \alpha_k$  a été envisagée pour certaines modélisations (12.10) de la vitesse interfaciale. On s'intéresse maintenant à la définition du second produit non-conservatif  $P_i \partial_x \alpha_k$ . Comme dans le cadre laminaire, cette définition du produit non-conservatif  $P_i \partial_x \alpha_k$  est ici envisagée conjointement à la définition des relations de saut à travers l'onde de fraction volumique.

Pour un 0-champ caractéristique linéairement dégénéré, les relations de saut à la traversée de la 0-discontinuité de contact s'identifie à la préservation des 0-invariants de Riemann. De manière générale, ces relations de saut s'écrivent

$$[V_i] = 0 \quad \text{et} \quad \forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} [m_k (u_k - V_i)] = 0, & [\widehat{s}_k] = 0, \\ [m_k u_k (u_k - V_i) + \alpha_k \pi_k] - [P_i \partial_x \alpha_k] = 0, \\ [m_k E_k (u_k - V_i) + \alpha_k \pi_k u_k] - V_i [P_i \partial_x \alpha_k] = 0. \end{cases}$$

où la notation  $[\cdot]$  désigne la différence entre les états situés à droite et à gauche de la 0-onde. Pour les modélisations (12.10) des grandeurs interfaciales, on procède à l'élimination du produit non-conservatif  $[P_i \partial_x \alpha_k]$ . Cette élimination ne fournit que sept 0-invariants de Riemann. Ces sept 0-invariants de Riemann s'écrivent pour la modélisation particulière (12.10c) de la vitesse interfaciale

$$\begin{aligned} I_0^1 = V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, & \quad I_0^3 = e_1 + K_1 + \frac{\pi_1}{\rho_1} + \frac{(I_0^2)^2}{2 m_1^2}, & \quad I_0^7 = \widehat{s}_1, \\ I_0^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1), & \quad I_0^4 = e_2 + K_2 + \frac{\pi_2}{\rho_2} + \frac{(I_0^2)^2}{2 m_2^2}, & \quad I_0^8 = \widehat{s}_2, \\ & \quad I_0^5 = \sum_k \frac{(I_0^2)^2}{m_k} + \alpha_k \pi_k. \end{aligned} \quad (12.11)$$

De manière analogue au cadre laminaire, le huitième 0-invariant de Riemann s'obtient par le biais de la loi de conservation supplémentaire  $\partial_t \eta + \partial_x F_\eta = 0$ . Seguin a démontré dans [95] que cette loi de conservation supplémentaire fournit la huitième relation de saut

$$-V_i \left[ \sum_k m_k s_k \right] + \left[ \sum_k m_k s_k u_k \right] = 0. \quad (12.12)$$

Cette huitième relation de saut définit implicitement le produit non-conservatif  $P_i \partial_x \alpha_k$  par la donnée du huitième 0-invariant de Riemann. Ce huitième 0-invariant de Riemann s'écrit pour la modélisation particulière (12.10c) de la vitesse interfaciale

$$I_0^6 = s_2 - s_1. \quad (12.13)$$



En résumé, les différents produits non-conservatifs  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$  ont été définis dans cette section sans recourir à la théorie développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29]. De manière analogue au cadre laminaire, la définition des ces différents produits non-conservatifs s'appuie sur le caractère linéairement dégénéré de l'onde associée à la fraction volumique. Pour satisfaire cette propriété, de nouvelles modélisations ont été proposées pour la vitesse et la pression interfaciale qui dépendent notamment de la turbulence.

## 12.2.2 Nature des champs caractéristiques associés aux sous-systèmes de type Euler turbulent

A la section 12.1, on a détaillé la structure propre associée à la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Cette structure propre fait apparaître deux sous-systèmes de type Euler turbulent que vient coupler une équation sur la fraction volumique. A la section précédente, on a étudié l'onde de fraction volumique. On détermine dans cette section les propriétés associées aux sous-systèmes de type Euler turbulent.

### Nature des champs caractéristiques.

Pour caractériser la propagation des ondes associées aux sous-systèmes de type Euler turbulent, deux coefficients thermodynamiques interviennent dans l'analyse de la structure propre du système (12.1). Pour  $k = 1, 2$ , ces deux coefficients thermodynamiques s'écrivent

$$\Upsilon_k = 1 + \frac{c_k^2}{\widehat{c}_k^2} \left[ \frac{\rho_k}{c_k} \left( \frac{\partial c_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k} \right] + \frac{10}{27} \frac{K_k}{\widehat{c}_k^2}.$$

Suivant les travaux de Menikoff et Plohr [82], on suppose ces coefficients  $\Upsilon_k$  strictement supérieurs à 1. Cette hypothèse a déjà été discutée à la remarque 8 dans le cadre laminaire. Sous cette hypothèse, la nature des champs caractéristiques associés aux sous-systèmes de type Euler turbulent est détaillée à la proposition 25.

**Proposition 25.** *Pour  $k = 1, 2$ , supposons les coefficients thermodynamiques  $\Upsilon_k > 1$ . Les 2,3- et 6,7-champs caractéristiques respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_{2,3} = u_2$  et  $\lambda_{6,7} = u_1$  sont linéairement dégénérés. Sous l'hypothèse 1, les 1-, 4-, 5- et 8-champs caractéristiques respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_1 = u_2 - \widehat{c}_2$ ,  $\lambda_4 = u_2 + \widehat{c}_2$ ,  $\lambda_5 = u_1 - \widehat{c}_1$  et  $\lambda_8 = u_1 + \widehat{c}_1$  sont vraiment non-linéaires.*

Ce résultat n'est pas nouveau. Déjà présenté par Hérard dans [61], ce résultat a juste été replacé dans le cadre de l'hypothèse 1. En ce qui concerne la démonstration de ce résultat, on procède de manière similaire au cadre laminaire développé à la section 4.2. Par rapport au cadre monophasique standard [17], la structure propre des sous-systèmes de type Euler turbulent n'est donc pas modifiée par l'équation de couplage portant sur la fraction volumique. De manière analogue au cadre laminaire, la nature de ces champs caractéristiques ne dépend par ailleurs pas de la modélisation retenue pour la vitesse interfaciale.

### Invariants de Riemann et relations de saut : définition des produits non-conservatifs $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ .

Compte tenu de la structure propre associée au modèle bifluide turbulent à deux pressions, la fraction volumique est constante de part et d'autre de la 0-discontinuité de contact. De part et d'autre de la 0-onde, le système (12.1) se réduit localement à deux sous-systèmes non-conservatifs de type Euler turbulent. Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux propriétés de ces deux sous-systèmes. On détaille successivement leurs invariants de Riemann et leurs relations de saut. Ce travail constitue le rappel des résultats présentés par Hérard dans [61].

Pour  $k = 1, 2$ , soit  $\psi_k(\rho_k, s_k, \widehat{s}_k)$  les coefficients thermodynamiques définis par la relation

$$\left( \frac{\partial \psi_k}{\partial \rho_k} \right)_{s_k, \widehat{s}_k} = -\frac{\widehat{c}_k}{\rho_k}.$$

De manière analogue au cadre laminaire, les huit  $p$ -invariants de Riemann linéairement indépendants associés à une  $p$ -onde sont regroupés dans un ensemble  $I_p$ . Pour  $p \in \{1, \dots, 8\}$ , ces différents ensembles  $I_p$  s'écrivent

$$\begin{aligned} I_1 &= \{\alpha_2, s_2, \widehat{s}_2, u_2 - \Psi_2, s_1, \widehat{s}_1, u_1, \pi_1\}, & I_5 &= \{\alpha_2, s_2, \widehat{s}_2, u_2, \pi_2, s_1, \widehat{s}_1, u_1 - \Psi_1\}, \\ I_{2,3} &= \{\alpha_2, u_2, \pi_2, s_1, \widehat{s}_1, u_1, \pi_1\}, & I_{6,7} &= \{\alpha_2, s_2, \widehat{s}_2, u_2, \pi_2, u_1, \pi_1\}, \\ I_4 &= \{\alpha_2, s_2, \widehat{s}_2, u_2 + \Psi_2, s_1, \widehat{s}_1, u_1, \pi_1\}, & I_8 &= \{\alpha_2, s_2, \widehat{s}_2, u_2, \pi_2, s_1, \widehat{s}_1, u_1 + \Psi_1\}. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Les 2, 3- et 6, 7-champs caractéristiques étant linéairement dégénérés, les relations de saut à la traversée des 2, 3- et 6, 7-discontinuité de contact s'identifient à la préservation des 2, 3- et 6, 7-invariants de Riemann. Pour les 1-, 4-, 5- et 8-champs vraiment non-linéaires, les relations de saut à la traversée d'un choc de vitesse  $\lambda$  s'écrivent

$$\forall k = 1, 2 \text{ et } k' = 3 - k, \quad \left\{ \begin{array}{l} [\alpha_k] = 0, \\ [m_k (u_k - \lambda)] = 0, \\ [m_k u_k (u_k - \lambda) + \alpha_k \pi_k] = 0, \\ [m_k E_k (u_k - \lambda) + \alpha_k \pi_k u_k] = 0, \\ [m_k K_k (u_k - \lambda)] + \frac{2}{3} [m_k K_k \partial_x u_k] = 0, \\ [\rho_{k'}] = 0, \quad [u_{k'}] = 0, \quad [P_{k'}] = 0, \quad [K_{k'}] = 0, \end{array} \right. \quad \text{où } \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 1 \text{ ou } 4, \\ k = 1 & \text{pour } p = 5 \text{ ou } 8, \end{cases} \quad (12.15)$$

et où la notation  $[\cdot]$  désigne la différence entre les états situés à droite et à gauche du choc. Par rapport au cadre monophasique standard, l'introduction d'une équation de couplage sur la fraction volumique ne modifie donc ni les invariants de Riemann ni les relations de saut associés aux sous-systèmes de type Euler turbulent. Les relations de saut (12.15) sont cependant ambiguës du fait des produits non-conservatifs  $2 m_k K_k \partial_x u_k / 3$ . Les masses partielles, les énergies cinétiques turbulentes et les vitesses peuvent effectivement présenter simultanément des discontinuités pour lesquelles les connexions à travers les chocs du système (12.1) ne sont pas définies. Suivant la théorie des produits non-conservatifs développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29], différentes fermetures peuvent alors être envisagées pour clore ces produits non-conservatifs. La fermeture la plus simple est historiquement due à Volpert [103]. Appliquée aux équations portant sur l'énergie cinétique turbulente, cette fermeture s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad [m_k K_k (u_k - \lambda)] + \frac{2}{3} \overline{m_k K_k} [u_k] = 0, \quad (12.16a)$$

où la notation  $\overline{\cdot}$  désigne la demi-somme entre les états à droite et à gauche du choc. Dans le cadre monophasique turbulent, une telle définition pour les relations de saut du modèle à une équation de transport sur l'énergie cinétique turbulente a par exemple été utilisée par Buffard, Gallouët et Hérard [17]. Une autre fermeture a récemment été proposée par Hérard dans [61]. Cette fermeture s'appuie sur la définition des entropies  $\widehat{s}_k$  pour le système (12.1). Cette fermeture s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad [m_k \widehat{s}_k (u_k - \lambda)] = 0. \quad (12.16b)$$

Ces différentes relations de saut pour le système (12.1) seront comparées à la prochaine section dans l'étude du problème de Riemann associé à la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations.

## 12.3 Le problème de Riemann : étude champ par champ

A la section précédente, l'ensemble des produits non-conservatifs associés à la partie convective du modèle bifluide turbulent à deux pressions a été défini. Une nature a par ailleurs été associée aux différents

champs caractéristiques du système (12.1). On peut donc maintenant s'intéresser à la construction de solutions faibles pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à deux pressions. Dans ce cadre, cette section se consacre à l'étude du problème de Riemann pour le système (12.1). Soit  $W_L$  et  $W_R$  deux états admissibles de  $\Omega$ . Le problème de Riemann pour le système (12.1) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = 0, \\ W(t=0, x) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (12.17)$$

Dans ce cadre non-conservatif et résonant, les résultats classiques présentés par Godlewski, Raviart, Serre et Smoller [52, 98, 97] ne s'appliquent pas ici pour résoudre ce problème de Riemann. Comme dans le cadre laminaire, la démarche présentée par ces différents auteurs peut néanmoins être réutilisée pour entamer l'étude de ce problème de Riemann (12.17). De manière similaire au cadre laminaire, on s'intéresse donc dans cette section à l'étude préliminaire des connexions champ par champ. Etant donné un état admissible  $W_l$  situé à gauche d'une onde, on cherche à déterminer s'il est possible de lui connecter par la droite un unique état admissible  $W_r$ . Pour se comparer au cadre laminaire, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est retenue dans chaque phase. On considère par ailleurs la modélisation (12.10c) des grandeurs interfaciales

$$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_1 T_1 + m_2 T_2}. \quad (12.10c)$$

Dans ce cadre, Hérard [61] a déjà initié l'étude des connexions onde par onde associées à la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. On rappelle tout d'abord ses résultats (connexions à travers les ondes de choc, connexions à travers les détentes). Les différentes fermetures (12.16) pour les produits non-conservatifs  $2 m_k K_k \partial_x u_k / 3$  sont alors comparées. La connexion à travers l'onde de fraction volumique est par la suite détaillée. Comme dans le cadre laminaire, cette étude révèle plusieurs régimes d'écoulement pour le mélange diphasique. On s'intéresse alors aux modifications induites par l'implémentation de la turbulence.

### 12.3.1 Connexions à travers les ondes de choc

Dans un cadre thermodynamique général, plusieurs relations de saut ont été proposées à la section précédente pour caractériser les connexions à travers les ondes de choc. Une loi d'état de type gaz parfait est ici adoptée dans chaque phases. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $v_k = u_k - \lambda$  la vitesse relative de la phase  $k$  par rapport à un choc de vitesse  $\lambda$ . Dans ce contexte, on réécrit les relations de saut (12.15) sous la forme

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} [\alpha_k] = 0, \\ [\rho_k v_k] = 0, \\ [\rho_k v_k^2 + \pi_k] = 0, \\ [\rho_k K_k v_k] + \frac{2}{3} [\rho_k K_k \partial_x u_k] = 0, \\ \left[ \left( \frac{\gamma_k}{\gamma_k - 1} \right) \frac{P_k}{\rho_k} + \frac{v_k^2}{2} + \frac{5}{3} K_k \right] = 0, \\ [\rho_{k'}] = 0, \quad [u_{k'}] = 0, \quad [P_{k'}] = 0, \quad [K_{k'}] = 0, \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 1 \text{ ou } 4, \\ k = 1 & \text{pour } p = 5 \text{ ou } 8. \end{cases}$$

Au vu de ces relations de saut, les connexions à travers les chocs du modèle bifluide turbulent à neuf équations s'identifient à des connexions à travers les chocs d'un système de type Euler turbulent monophasique. L'étude de ces connexions a déjà été effectuée par Hérard dans [61]. Cette étude est ici brièvement rappelée.

Pour étudier les connexions à travers les chocs du modèle bifluide turbulent à deux pressions, on rappelle tout d'abord la définition des coefficients thermodynamiques

$$\forall k = 1, 2, \quad \varkappa_k = \frac{\gamma_k + 1}{\gamma_k - 1}.$$

Dans la pratique, on s'intéresse à des coefficients  $\gamma_k$  dans l'intervalle  $]1, 5/3[$ . Les coefficients  $\varkappa_k$  appartiennent alors à l'intervalle  $]4, +\infty[$ . Focalisons-nous sur les propriétés d'une phase  $k$  en particulier. Pour la définition de Volpert (12.16a) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ , la paramétrisation en  $z_k$  des courbes de choc passant par  $W_l$  s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} (\rho_k)_r = z_k (\rho_k)_l, & (P_k)_r = \left( \frac{\varkappa_k z_k - 1}{\varkappa_k - z_k} \right) (P_k)_l, \\ (v_k)_r = \frac{1}{z_k} (v_k)_l, & (K_k)_r = \frac{1}{z_k} \left( \frac{4z_k - 1}{4 - z_k} \right) (K_k)_l. \end{cases}$$

Pour des paramètres d'onde  $z_k$  dans l'intervalle  $[1/4, 4]$ ,  $k = 1, 2$ , à tout état admissible  $W_l$  situé à gauche d'un choc peut donc toujours être connecté un état admissible  $W_r$  par la droite. Cet état  $W_r$  n'est cependant pas unique. En accord avec le critère géométrique de Lax, l'inégalité d'entropie  $-\lambda[\eta] + [F_\eta] \geq 0$  sélectionne alors les chocs admissibles. Pour la fermeture (12.16a) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ , les connections à travers les chocs satisfont par ailleurs les inégalités

$$\forall k = 1, 2, \quad \frac{1}{4} \leq \frac{(\rho_k)_r}{(\rho_k)_l} \leq 4, \quad \frac{\varkappa_k - 4}{4\varkappa_k - 1} \leq \frac{(P_k)_r}{(P_k)_l} \leq \frac{4\varkappa_k - 1}{\varkappa_k - 4}, \quad 0 \leq \frac{(K_k)_r}{(K_k)_l} \leq +\infty.$$

Intéressons-nous maintenant à la définition (12.16b) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ . Pour  $k = 1, 2$ , soit  $z_{k_0}((P_k)_l, (\rho_k)_l, (K_k)_l)$  l'unique solution dans  $\mathbb{R}_+$  de l'équation

$$(\varkappa_k z_k - 1) (P_k)_l + \frac{2}{3} (\rho_k K_k)_l (z_k^{8/3} - 4z_k^{5/3} + 4z_k - 1) = 0.$$

Cette unique solution  $z_{k_0}$  appartient à l'intervalle  $[\varkappa_k^{-1}, 1]$  et vérifie pour  $k = 1, 2$ ,

$$\lim_{(K_k)_l \rightarrow 0} z_{k_0} = \varkappa_k^{-1}.$$

Pour la définition (12.16b) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ , la paramétrisation en  $z_k$  des courbes de choc passant par  $W_l$  s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} (\rho_k)_r = z_k (\rho_k)_l, & (v_k)_r = \frac{1}{z_k} (v_k)_l, & (K_k)_r = z_k^{2/3} (K_k)_l, \\ (P_k)_r = \left( \frac{\varkappa_k z_k - 1}{\varkappa_k - z_k} \right) (P_k)_l + \frac{2}{3} \frac{(\rho_k K_k)_l}{\varkappa_k - z_k} (z_k^{8/3} - 4z_k^{5/3} + 4z_k - 1). \end{cases}$$

Etant donné un état admissible  $W_l$  situé à gauche d'un choc, un état admissible  $W_r$  peut toujours lui être connecté par la droite pour des paramètres d'onde  $z_k$  dans l'intervalle  $[z_{k_0}, \varkappa_k]$ ,  $k = 1, 2$ . L'unicité de cette connection résulte de l'application du critère entropique  $-\lambda[\eta] + [F_\eta] \geq 0$ . Cette inégalité d'entropie sélectionne alors les mêmes chocs que le critère géométrique de Lax. Pour la fermeture (12.16b) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ , les connections à travers les chocs satisfont par ailleurs les inégalités

$$\forall k = 1, 2, \quad z_{k_0} \leq \frac{(\rho_k)_r}{(\rho_k)_l} \leq \varkappa_k, \quad 0 \leq \frac{(P_k)_r}{(P_k)_l} \leq +\infty, \quad z_{k_0}^{2/3} \leq \frac{(K_k)_r}{(K_k)_l} \leq \varkappa_k^{2/3}.$$

En résumé, quelle que soit la fermeture (12.16) adoptée pour clore les produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ , à tout état admissible  $W_l$  situé à gauche d'un choc peut être connecté un unique état admissible  $W_r$  par la droite. Les différentes fermetures (12.16) pour les produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$  se distinguent alors par leur ratio de pression et d'énergie cinétique turbulente à la traversée des chocs. La définition de Volpert (12.16a) se caractérise par un ratio de pression borné pour un ratio d'énergie cinétique turbulente non-borné. Pour la fermeture (12.16a) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ , les relations de saut du modèle bifluide turbulent à neuf équations ne dégénèrent donc pas vers les relations de saut laminaires associées aux modèles bifluides de type Baer et Nunziato et étudiées à la section 4.3. Suivant

Hérard [61], la définition (12.16b) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$  se traduit à l'inverse par un ratio d'énergie cinétique turbulente borné pour un ratio de pression non-borné à la traversée des chocs. Pour la fermeture (12.16b) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$ , les relations de saut du modèle bifluide turbulent à neuf équations dégènèrent alors vers les relations de saut laminares associées aux modèles bifluides de type Baer et Nunziato. Une telle fermeture (12.16b) pour les produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$  semble par ailleurs reproduire les tendances expérimentales rapportées par Grégoire, Souffland, Gauthier et Schiestel dans [54]. La fermeture (12.16b) des produits non-conservatifs  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$  sera donc privilégiée à l'avenir.

### 12.3.2 Connexions à travers les détente

A la section 12.2, les invariants de Riemann (12.14) associés à la partie convective du modèle bifluide turbulent à deux pressions ont été présentés dans un cadre thermodynamique général. A la traversée des détente, ces différents invariants de Riemann sont constants. Pour la définition (12.14) de ces invariants de Riemann, les connexions à travers les détente du système (12.1) s'identifient à des connexions à travers les détente d'un système de type Euler turbulent monophasique. En se focalisant sur une phase en particulier, on rappelle dans cette section l'étude de ces détente déjà entreprise par Hérard dans [61].

En ce qui concerne les  $p$ -ondes,  $p \in \{1, 5\}$ , la préservation des  $p$ -invariants de Riemann à la traversée des  $p$ -détente satisfait les relations

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} (s_k)_r = (s_k)_l, \\ (\widehat{s}_k)_r = (\widehat{s}_k)_l, \\ (u_k - \Psi_k)_r = (u_k - \Psi_k)_l, \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 1, \\ k = 1 & \text{pour } p = 5. \end{cases}$$

De manière analogue au cadre laminaire, à tout état admissible  $W_l$  situé à gauche d'une 1- ou 5-détente peut donc être connecté un unique état conditionnellement admissible  $W_r$  par la droite. Cet unique état conditionnellement admissible  $W_r$  est défini par la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad (u_k)_r - (u_k)_l = \int_{(\rho_k)_r}^{(\rho_k)_l} \frac{\widehat{c}_k}{\rho_k} d\rho_k, \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 1, \\ k = 1 & \text{pour } p = 5. \end{cases}$$

Pour  $p \in \{4, 8\}$ , la préservation des  $p$ -invariants de Riemann à la traversée des  $p$ -détentes s'écrit

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} (s_k)_r = (s_k)_l, \\ (\widehat{s}_k)_r = (\widehat{s}_k)_l, \\ (u_k + \Psi_k)_r = (u_k + \Psi_k)_l, \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 4, \\ k = 1 & \text{pour } p = 8. \end{cases}$$

Comme dans le cadre laminaire, à tout état admissible  $W_l$  situé à gauche d'une 4- ou 8-détente peut donc être connecté un unique état conditionnellement admissible  $W_r$  par la droite. Cet état conditionnellement admissible  $W_r$  satisfait la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad (u_k)_r - (u_k)_l = \int_{(\rho_k)_l}^{(\rho_k)_r} \frac{\widehat{c}_k}{\rho_k} d\rho_k, \quad \text{où} \quad \begin{cases} k = 2 & \text{pour } p = 4, \\ k = 1 & \text{pour } p = 8. \end{cases}$$

Compte tenu de ces connexions à travers les champs vraiment non-linéaires du modèle bifluide turbulent à deux pressions, une solution peut d'ores et déjà être construite pour le problème de Riemann (12.17) dans le cas particulier  $(\alpha_2)_R = (\alpha_2)_L$ . Cette solution est présentée au théorème 9.

**Théorème 9.** Soit  $W_L, W_R$  deux états admissibles voisins tels que  $(\alpha_2)_R = (\alpha_2)_L$ . Le problème de Riemann (12.17) admet une unique solution faible entropique admissible constituée de sept états constants séparés par des ondes simples, à la condition que

$$\forall k = 1, 2, \quad \left| (u_k)_R - (u_k)_L \right| \leq \int_0^{(\rho_k)_L} \frac{\widehat{c}_k}{\rho_k} d\rho_k + \int_0^{(\rho_k)_R} \frac{\widehat{c}_k}{\rho_k} d\rho_k.$$

La démonstration du théorème 9 est une application directe des résultats présentés par Buffard, Gallouët et Hérard dans [17]. Comme dans le cadre laminaire, le théorème 9 présente surtout un intérêt pour le traitement numérique des conditions aux limites. On s'intéresse maintenant aux situations plus générales pour lesquelles  $(\alpha_2)_R$  diffère de  $(\alpha_2)_L$ .

### 12.3.3 Connexion à travers l'onde de fraction volumique

Pour la modélisation (12.10c) de la vitesse interfaciale, les différents invariants de Riemann (12.11), (12.12) ont été présentés à la section précédente pour des thermodynamiques quelconques. Dans cette section, on considère des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases telles que les coefficients thermodynamiques  $\gamma_k$  appartiennent à l'intervalle  $]1, 5/3[$ ,  $k = 1, 2$ . Dans ce contexte, les huit 0-invariants de Riemann se réécrivent

$$\begin{aligned}
I_0^1(W) &= V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, & I_0^5(W) &= R = \alpha_2 \pi_2 + \alpha_1 \pi_1 + Q^2 \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right), \\
I_0^2(W) &= Q = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1), & I_0^6(W) &= T = \frac{(P_2 \rho_2^{-\gamma_2})^{C_{v_2}}}{(P_1 \rho_1^{-\gamma_1})^{C_{v_1}}}, \\
I_0^3(W) &= \phi_1 = \left( \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \right) \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{Q^2}{2m_1^2} + \frac{5}{3} K_1, & I_0^7(W) &= \hat{s}_1 = \frac{K_1}{m_1^{2/3}}, \\
I_0^4(W) &= \phi_2 = \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \right) \frac{P_2}{\rho_2} + \frac{Q^2}{2m_2^2} + \frac{5}{3} K_2, & I_0^8(W) &= \hat{s}_2 = \frac{K_2}{m_2^{2/3}}.
\end{aligned} \tag{12.18}$$

A la traversée de la 0-discontinuité de contact, ces 0-invariants de Riemann sont constants. Soit  $W_l$  un état admissible non-résonant situé à gauche de la 0-onde tel que  $(\alpha_2)_l = (\alpha_2)_L \in ]0, 1[$  et  $(V_i)_l \neq (u_k)_l \pm (\hat{c}_k)_l$ ,  $k = 1, 2$ . Dans cette section, on étudie s'il est possible de connecter à  $W_l$  un unique état admissible  $W_r$  par la droite tel que  $(\alpha_2)_r = (\alpha_2)_R \in ]0, 1[$ . En dehors des variétés de résonance, l'analyse de cette connexion à travers la 0-onde se ramène à la résolution du système algébrique

$$\forall p \in \{1, \dots, 8\}, \quad I_0^p(W_r) = I_0^p(W_l). \tag{12.19}$$

Suivant la définition (12.18) des 0-invariants de Riemann, on effectue tout d'abord la simplification du système (12.19). On exprime les pressions, les vitesses et les énergies cinétiques turbulentes de chaque phase en fonction des masses partielles :

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} (P_k)_r = \frac{1}{(\alpha_k)_R} \left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \left[ \phi_k - \frac{Q^2}{2(m_k)_r^2} - \frac{5}{3} \hat{s}_k (m_k)_r^{2/3} \right] (m_k)_r, \\ (u_k)_r = V_i + (-1)^k \frac{Q}{(m_k)_r}, & (K_k)_r = \hat{s}_k (m_k)_r^{2/3}. \end{cases}$$

Les connexions à travers la 0-onde satisfont alors le système non-linéaire (12.20) d'inconnue  $((m_1)_r, (m_2)_r)$  :

$$\sum_k \left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \phi_k (m_k)_r + \left( \frac{\gamma_k + 1}{2\gamma_k} \right) \frac{Q^2}{(m_k)_r} + \left( \frac{5 - 3\gamma_k}{3\gamma_k} \right) \hat{s}_k (m_k)_r^{5/3} = R, \tag{12.20a}$$

$$\frac{\left[ (\alpha_2)_R^{\gamma_2 - 1} (m_2)_r^{-\gamma_2 + 1} \left( \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} \right) \left( \phi_2 - \frac{Q^2}{2(m_2)_r^2} - \frac{5}{3} \hat{s}_2 (m_2)_r^{2/3} \right) \right]^{C_{v_2}}}{\left[ (\alpha_1)_R^{\gamma_1 - 1} (m_1)_r^{-\gamma_1 + 1} \left( \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} \right) \left( \phi_1 - \frac{Q^2}{2(m_1)_r^2} - \frac{5}{3} \hat{s}_1 (m_1)_r^{2/3} \right) \right]^{C_{v_1}}} = T \tag{12.20b}$$

De manière analogue au cadre laminaire, la résolution du système (12.20) est envisagée en cinq étapes. Le domaine d'admissibilité des solutions est détaillé dans un premier temps. Par la suite, on présente

successivement les ensembles de solutions  $S_a$  et  $S_b$  respectivement associés aux équations (12.20a) et (12.20b). L'intersection de ces ensembles  $S = S_a \cap S_b$  achève la résolution du système (12.20). Pour assurer l'unicité de la connexion à travers la 0-onde, le critère de sélection déjà proposée dans le cadre laminaire est réutilisé pour finir.

### Domaine d'admissibilité et régimes d'écoulement.

Soit  $W_l$  un état admissible situé à gauche de la 0-onde. Cet état admissible  $W_l$  se caractérise par des 0-invariants de Riemann  $\widehat{s}_1, \widehat{s}_2$  positifs, et des 0-invariants de Riemann  $\phi_1, \phi_2, R$  et  $T$  strictement positifs. Pour des pressions  $(P_k)_l$  strictement positives, ces 0-invariants de Riemann vérifient la relation

$$\forall k = 1, 2, \quad \phi_k > 2\widehat{s}_k^{3/4} Q^{1/2} \left( \frac{10}{9} \right)^{3/4}. \quad (12.21)$$

Sous cette condition (12.21) sur les 0-invariants de Riemann, soit  $\mu_{k_0}^-$  et  $\mu_{k_0}^+$  les deux solutions dans  $\mathbb{R}_+$  de l'équation

$$\phi_k - \frac{Q^2}{2(m_k)_r^2} - \frac{5}{3}\widehat{s}_k(m_k)_r^{2/3} = 0.$$

Ces deux solutions implicites  $\mu_{k_0}^- < \mu_{k_0}^+$  sont respectivement appelées masse partielle minimale et maximale. Pour éviter l'apparition du vide au sein du mélange diphasique, on recherche les solutions du système (12.20) dans l'ouvert  $] \mu_{1_0}^-, \mu_{1_0}^+ [ \times ] \mu_{2_0}^-, \mu_{2_0}^+ [$ . Pour  $k = 1, 2$ , soit  $m_{k_0}^t$  l'unique solution dans  $\mathbb{R}_+$  de l'équation

$$\left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \phi_k - \left( \frac{\gamma_k + 1}{2\gamma_k} \right) \frac{Q^2}{(m_k)_r^2} + \frac{5}{3} \left( \frac{5 - 3\gamma_k}{3\gamma_k} \right) \widehat{s}_k(m_k)_r^{2/3} = 0.$$

Pour  $k = 1, 2$ , cette solution  $m_{k_0}^t$  appartient à l'intervalle  $] \mu_{k_0}^-, \mu_{k_0}^+ [$ . Les connexions à travers la 0-discontinuité de contact sont ici étudiées en dehors des variétés de résonance  $V_i = u_k \pm \widehat{c}_k$ ,  $k = 1, 2$ . En raison de l'équivalence

$$\forall k = 1, 2, \quad (m_k)_r = m_{k_0}^t \iff ((u_k)_r - (V_i)_r)^2 = (\widehat{c}_k)_r^2 \iff (V_i)_r = (u_k)_r \pm (\widehat{c}_k)_r,$$

on restreint alors le domaine d'admissibilité des solutions du système (12.20) à la réunion d'intervalle  $(] \mu_{1_0}^-, m_{1_0}^t [ \cup ] m_{1_0}^t, \mu_{1_0}^+ [) \times (] \mu_{2_0}^-, m_{2_0}^t [ \cup ] m_{2_0}^t, \mu_{2_0}^+ [)$ . Par rapport au cadre laminaire étudié section 4.3, l'introduction de la turbulence réduit donc le domaine d'admissibilité pour les solutions du système (12.20). De manière analogue au cadre laminaire, les différents régimes d'écoulement critiques, sous-critiques et sur-critiques sont cependant retrouvés à l'intérieur de ce domaine d'admissibilité. Pour  $k = 1, 2$ , ces différents régimes d'écoulement sont similairement définis par la donnée des ensembles

$$\begin{aligned} C_k &= \{ m_k / m_k = m_{k_0}^t \iff (u_k - V_i)^2 = \widehat{c}_k^2 \}, \\ S \mathcal{U} \mathcal{B}_k &= \{ m_k / m_k > m_{k_0}^t \iff (u_k - V_i)^2 < \widehat{c}_k^2 \}, \\ S \mathcal{U} \mathcal{P}_k &= \{ m_k / m_k < m_{k_0}^t \iff (u_k - V_i)^2 > \widehat{c}_k^2 \}. \end{aligned}$$

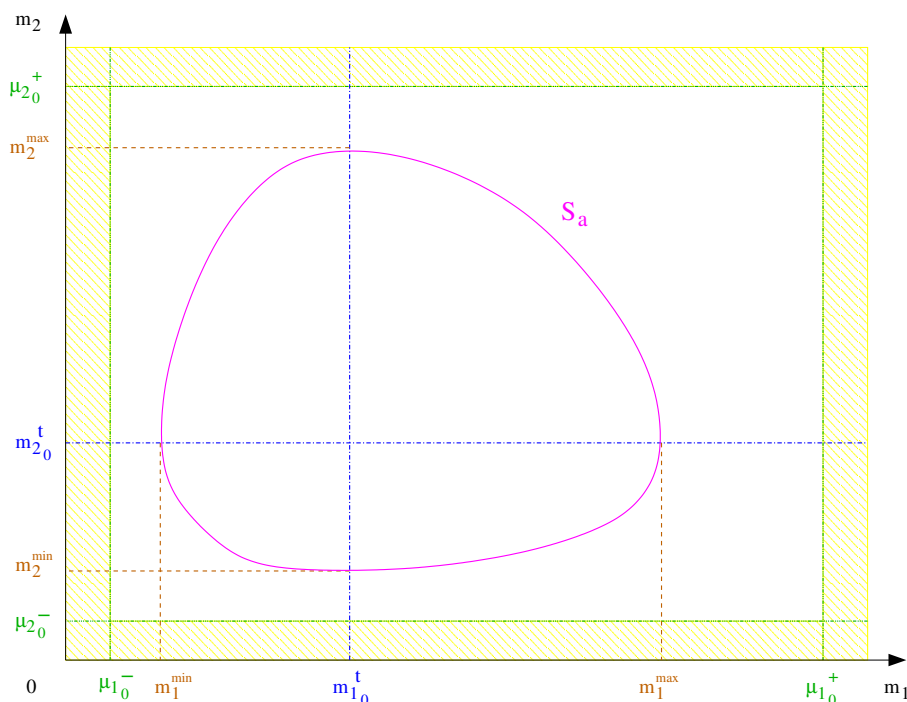
### L'ensemble des solutions $S_a$ .

Pour  $k = 1, 2$ , on introduit la fonction positive  $S_k : m_k \longrightarrow S_k(m_k)$  définie par la relation

$$S_k(m_k) = \left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \phi_k m_k + \left( \frac{\gamma_k + 1}{2\gamma_k} \right) \frac{Q^2}{m_k} + \left( \frac{5 - 3\gamma_k}{3\gamma_k} \right) \widehat{s}_k m_k^{5/3}.$$

L'équation (12.20a) se réécrit alors

$$\sum_k S_k((m_k)_r) = R.$$

Figure 12.1: l'ensemble  $S_a$ .

La fonction  $\sum_k S_k(m_k)$  est strictement convexe. Cette fonction admet un minimum en  $(m_{1_0}^t, m_{2_0}^t)$ . L'équation (12.20a) admet donc des solutions à la condition que

$$R \geq \sum_k S_k(m_{k_0}^t).$$

Pour un état admissible  $W_l$  situé à gauche de la 0-onde, cette condition portant sur les 0-invariants de Riemann est toujours vérifiée. L'équation (12.20a) admet donc toujours des solutions comme dans le cadre laminaire. Pour  $k = 1, 2$  et  $k' = 3 - k$ , on introduit pour finir les deux racines implicites  $m_k^{\max}$  et  $m_k^{\min}$  de l'équation  $S_k(m_k) = R - S_{k'}(m_{k_0}^t)$  avec  $m_k^{\max} \geq m_k^{\min}$ . Ces différentes définitions liées à l'ensemble  $S_a$  sont illustrées sur la figure 12.1.

### L'ensemble des solutions $S_b$ .

Pour  $k = 1, 2$ , soit  $S'_k : m_k \rightarrow S'_k(m_k)$  la fonction positive

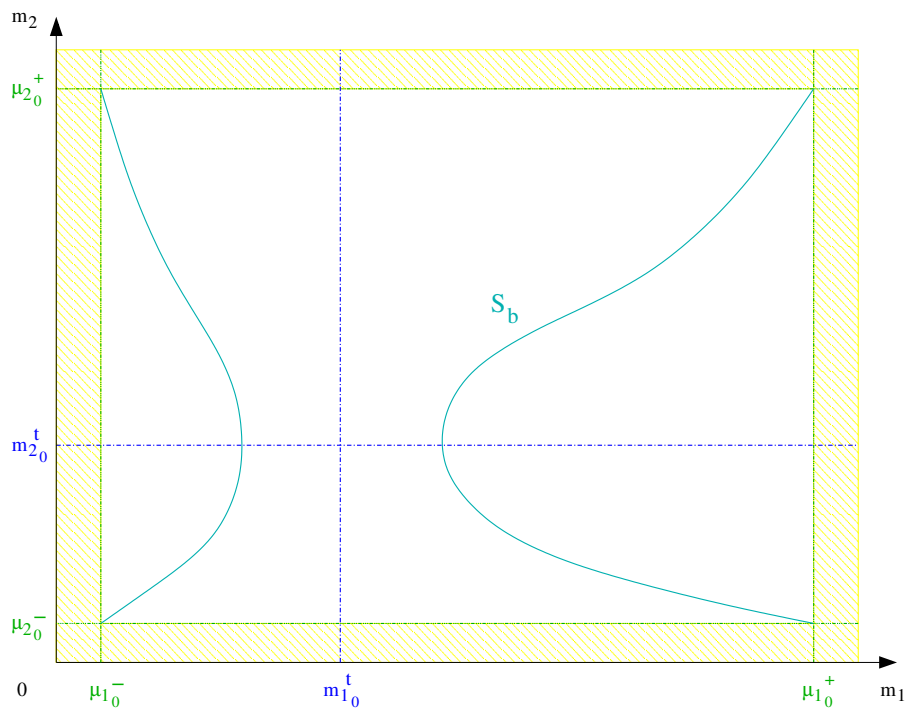
$$S'_k(m_k) = \left[ (\alpha_k)_R^{\gamma_k - 1} m_k^{-\gamma_k + 1} \left( \frac{\gamma_k - 1}{\gamma_k} \right) \left( \phi_k - \frac{Q^2}{2m_k^2} - \frac{5}{3} \hat{s}_k m_k^{2/3} \right) \right]^{C_{v_k}}.$$

Pour cette définition des fonctions  $S'_k$ , l'équation (12.20b) se réécrit

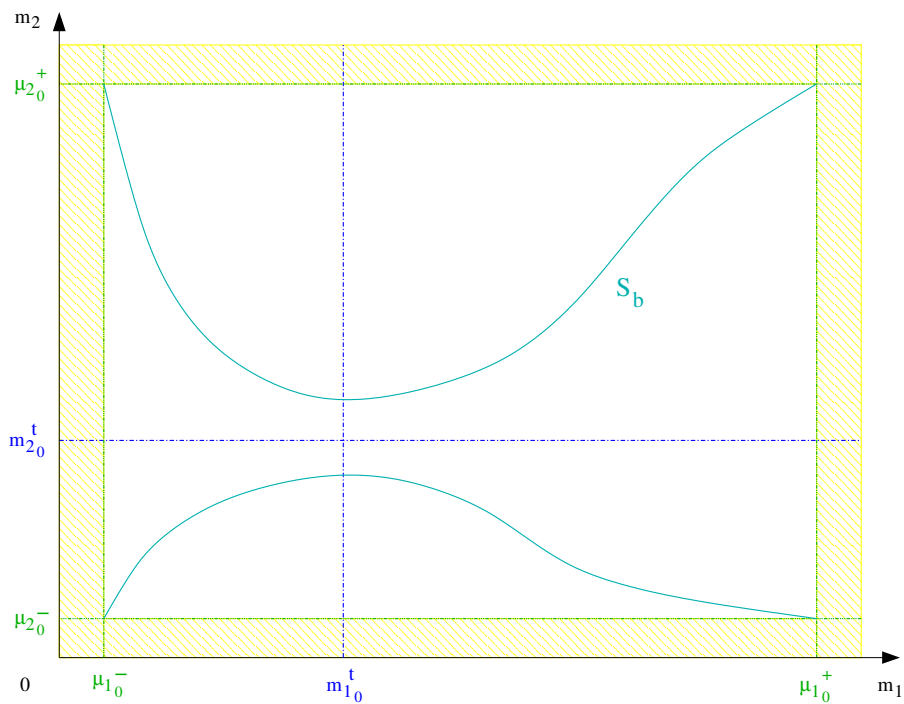
$$S'_2((m_2)_r) = T S'_1((m_1)_r).$$

Pour  $k = 1, 2$ , les variations des fonctions  $S'_k(m_k)$  sont reportées dans le tableau 12.1. Suivant l'étude de ces variations, l'équation (12.20b) admet toujours des solutions. L'ensemble  $S_b$  est alors généralement constitué de deux branches. Selon que  $T S'_1(m_{1_0}^t)$  est supérieur ou inférieur à  $S'_2(m_{2_0}^t)$ , cette structure pour l'ensemble  $S_b$  est reportée sur les figures 12.3(a) et 12.3(b)



Figure 12.2: l'ensemble  $S_b$ .

(a) Dans le cas  $T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_{2_0}^t)$ .



(b) Dans le cas  $T S'_1(m_{1_0}^t) \leq S'_2(m_{2_0}^t)$ .

Tableau 12.1: les variations de la fonction  $S'_k(m_k)$ .

$m_k$	$\mu_{k_0}^-$		$m_{k_0}^t$		$\mu_{k_0}^+$
$\frac{dS'_k}{dm_k}$	0	+	0	-	0
$S'_k(m_k)$					

**L'ensemble des solutions**  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$ .

Pour achever la résolution du système (12.20), on réalise enfin l'intersection des différents ensembles  $\mathcal{S}_a$  et  $\mathcal{S}_b$ . Cette intersection  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_a \cap \mathcal{S}_b$  admet conditionnellement les quatre solutions admissibles :

- $(m_1, m_2)_1 \in \mathcal{S} \cup \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{S} \cup \mathcal{B}_2$  aux conditions que

$$\left\{ \begin{array}{l} R \leq \sum_k S_k(\mu_{k_0}^+), \\ \text{et} \left\{ \begin{array}{ll} S'_2(m_{2_0}^t) \geq T S'_1(m_1^{\max}) & \text{si } T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_{2_0}^t), \\ T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_2^{\max}) & \text{si } S'_2(m_{2_0}^t) \geq T S'_1(m_{1_0}^t); \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- $(m_1, m_2)_2 \in \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{S} \cup \mathcal{B}_2$  aux conditions que

$$\left\{ \begin{array}{l} R \leq S_1(\mu_{1_0}^-) + S_2(\mu_{2_0}^+), \\ \text{et} \left\{ \begin{array}{ll} S'_2(m_{2_0}^t) \geq T S'_1(m_1^{\min}) & \text{si } T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_{2_0}^t), \\ T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_2^{\max}) & \text{si } S'_2(m_{2_0}^t) \geq T S'_1(m_{1_0}^t); \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- $(m_1, m_2)_3 \in \mathcal{S} \cup \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_2$  aux conditions que

$$\left\{ \begin{array}{l} R \leq S_1(\mu_{1_0}^+) + S_2(\mu_{2_0}^-), \\ \text{et} \left\{ \begin{array}{ll} S'_2(m_{2_0}^t) \geq T S'_1(m_1^{\max}) & \text{si } T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_{2_0}^t), \\ T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_2^{\min}) & \text{si } S'_2(m_{2_0}^t) \geq T S'_1(m_{1_0}^t); \end{array} \right. \end{array} \right.$$

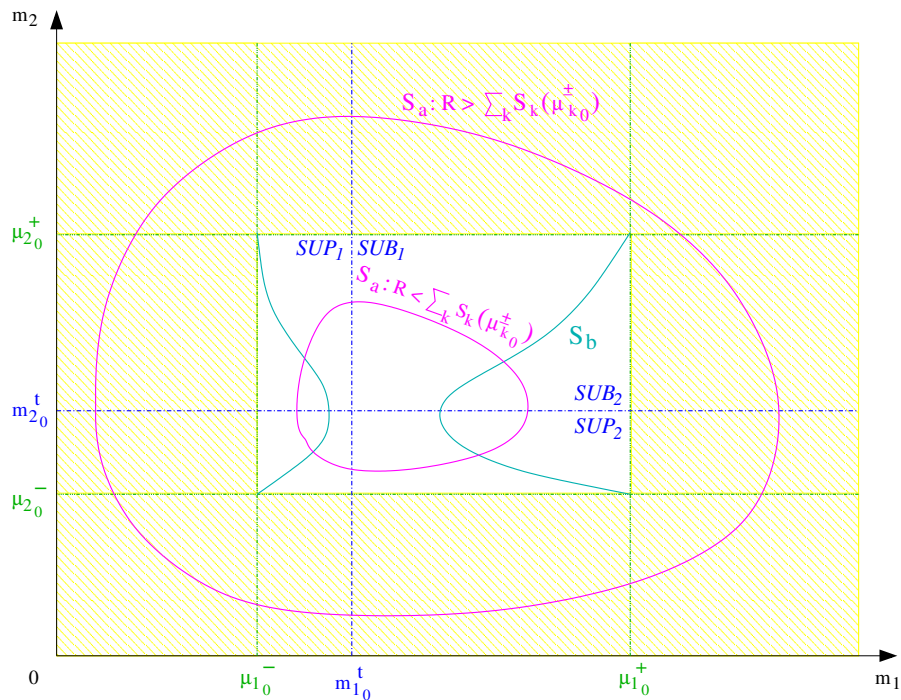
- $(m_1, m_2)_4 \in \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{S} \cup \mathcal{P}_2$  aux conditions que

$$\left\{ \begin{array}{l} R \leq \sum_k S_k(\mu_{k_0}^-), \\ \text{et} \left\{ \begin{array}{ll} S'_2(m_{2_0}^t) \geq T S'_1(m_1^{\min}) & \text{si } T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_{2_0}^t), \\ T S'_1(m_{1_0}^t) \geq S'_2(m_2^{\min}) & \text{si } S'_2(m_{2_0}^t) \geq T S'_1(m_{1_0}^t). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Selon que  $T S'_1(m_{1_0}^t)$  est supérieur ou inférieur à  $S'_2(m_{2_0}^t)$ , ces quatre solutions sont reportées sur les figures 12.5(a) et 12.5(b). De manière analogue au cadre laminaire, ces quatre solutions appartiennent chacune

à un régime d'écoulement différent pour le mélange diphasique turbulent. La structure mise à jour dans le cadre laminaire pour l'onde de fraction volumique n'est donc pas modifiée par l'implémentation de la turbulence. Diverses conditions d'existence apparaissent par ailleurs dans la définition de ces solutions. A l'heure actuelle, seules les conditions d'existence  $R \leq \sum_k (\mu_{k_0}^\pm)$  ont trouvé une interprétation. Ces différentes conditions préviennent l'apparition du vide. A la différence des écoulements laminaires, ce vide peut apparaître dans chacun des régimes sur- et sous-critiques pour les mélanges diphasiques turbulents. Une telle situation est illustrée à la figure 12.3.

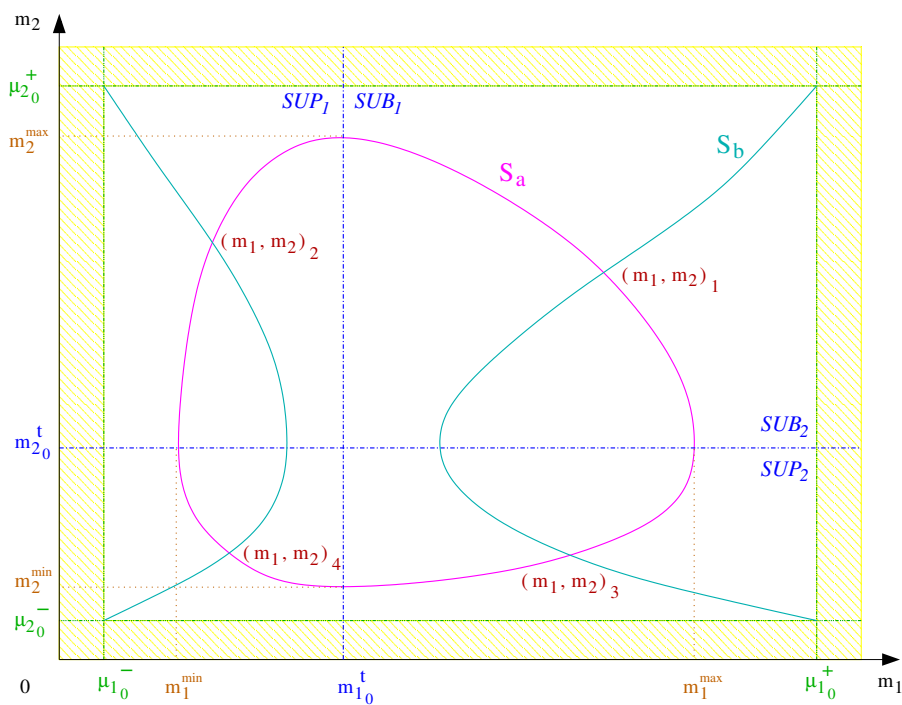
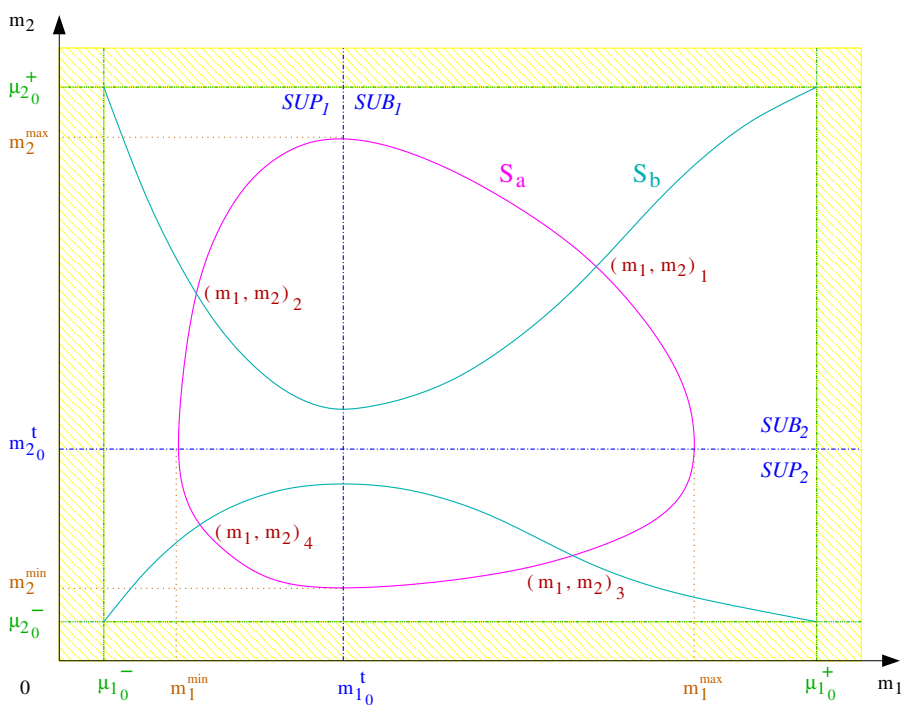
Figure 12.3: l'apparition progressive du vide dans les différents régimes sur- et sous-critiques.



### Critère de sélection.

Pour discriminer parmi les quatre solutions du système (12.20) une connexion particulière à travers la 0-onde, on choisit de réutiliser le critère de sélection présenté dans le cadre laminaire. Suivant les travaux d'Isaacson et Temple [66], ce critère de sélection stipule que, hors résonance, la solution  $W_r$  située à droite de la 0-onde appartient au même régime d'écoulement que l'état  $W_l$  située à gauche de la 0-discontinuité de contact. Muni de ce critère de sélection, l'unicité de la connexion à travers la 0-onde est finalement établie. Les différents régimes sur- et sous-critiques présentent alors des comportements analogues aux régimes torrentiels et fluviaux pour les écoulements en rivière [23]. Déjà mis à jour dans le cadre laminaire à la section 4.3, ces différents comportements pour le mélange diphasique ne sont pas modifiés par l'implémentation de la turbulence. Ce dernier point conclue notre étude champ par champ hors résonance du problème de Riemann associé au système (12.1).

Pour conclure, différents propriétés de la partie convective associée au modèle bifluide turbulent à deux pressions ont été présentées dans ce chapitre. Dans un premier temps, on a rappelé la nature hyperbolique

Figure 12.4: l'ensemble des solutions  $S = S_a \cap S_b$ .(a) Dans le cas  $T S'_1(m'_1_0) \geq S'_2(m'_2_0)$ .(b) Dans le cas  $T S'_1(m'_1_0) \leq S'_2(m'_2_0)$ .

résonante de ce système. On a ensuite montré le caractère marginal des phénomènes de résonance. L'introduction de la turbulence ne modifie donc pas la nature généralement hyperbolique des modèles de type Baer et Nunziato. Par la suite, on s'est intéressé à la définition des solutions faibles pour le système 12.1. Ce système se présente sous une forme non-conservative. On a alors cherché à définir ses différents produits non-conservatifs. Certains de ces produits non-conservatifs proviennent de notre modélisation bifluide, les autres de notre modélisation de la turbulence. Suivant les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], les différents produits non-conservatifs associés à la modélisation bifluide ont tout d'abord été définis conjointement à l'attribution d'une nature linéairement dégénérée pour l'onde de fraction volumique. De nouveaux modèles ont alors été proposés pour la vitesse et la pression interfaciales. Ces nouvelles modélisations pour le couple  $(P_i, V_i)$  dépendent notamment des énergies cinétiques turbulentes. Suivant les travaux de Dal Maso, Lefloch et Murat [29], différentes définitions ont par la suite été envisagées pour clore les produits non-conservatifs associés à notre modélisation de la turbulence. Les différentes définitions proposées par Volpert [103] et Hérard [61] ont par exemple été successivement étudiées. La définition de Hérard a finalement été préférée. Seule cette définition nous permet d'établir formellement la dégénérescence du modèle bifluide à neuf équations vers le modèle de Baer et Nunziato lorsque la turbulence se dissipe au sein du mélange diphasique. Une fois définis ces différents produits non-conservatifs, l'étude du problème de Riemann associé à la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations a été entamée en imposant des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases. L'étude des connexions onde par onde a alors été réalisée hors résonance. Déjà mise à jour dans le cadre laminaire, la structure très particulière associée à l'onde de fraction volumique a été retrouvée pour les écoulements diphasiques turbulents. Comme dans le cadre laminaire, cette structure très particulière pour l'onde de fraction volumique identifie plusieurs régimes d'écoulement sur- et sous-critiques pour le mélange diphasique turbulent.

## Chapitre 13

# Dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements diphasiques turbulents en transition de phase

Au chapitre précédent, l'analyse mathématique du modèle bifluide turbulent à deux pressions a été entamée par l'étude de la partie convective. Cette étude est ici poursuivie par l'analyse des transferts interfaciaux pour les écoulements en transition de phase. Comme dans le cadre laminaire, soit  $\rho = \sum_k m_k$ ,  $\rho V = \sum_k m_k u_k$ ,  $\rho E = \sum_k m_k E_k$  respectivement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale du mélange. On rappelle pour  $k = 1, 2$ , la définition du potentiel de Gibbs et du potentiel de changement de phase

$$\forall k = 1, 2, \quad g_k = e_k + P_k \tau_k - T_k s_k, \quad \theta_k = g_k - \frac{(u_k - V_i)^2}{2}.$$

Suivant les modélisations adoptées au chapitre 11 pour les interactions diphasiques, les différents transferts interfaciaux pour les écoulements liquide-vapeur turbulents satisfont le système dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t \rho = 0, \quad d_t \rho V = 0, \quad d_t \rho E = 0, \quad d_t m_2 K_2 = 0, \quad d_t m_1 K_1 = 0, \\ d_t \alpha_2 = K_P (P_2 - P_1), \\ d_t m_2 = K_\theta (\theta_1 - \theta_2), \\ d_t m_2 u_2 = K_U (u_1 - u_2) + K_\theta (\theta_1 - \theta_2) V_i, \\ d_t m_2 E_2 = K_P (P_1 - P_2) P_i + K_U (u_1 - u_2) V_i + K_\theta (\theta_1 - \theta_2) E_i + K_T (T_1 - T_2). \end{array} \right. \quad (13.1)$$

Dans le cadre laminaire, l'étude de ces transferts interfaciaux a déjà été réalisée au chapitre 5. On cherche ici à mesurer l'influence de la turbulence sur ces interactions diphasiques. Sans perte de généralité, on se restreint dans ce chapitre à un cadre monodimensionnel.

### 13.1 Equilibres et contraintes pour les écoulements diphasiques turbulents en transition de phase.

Au chapitre 11, plusieurs coefficients d'échange ont été présentés pour caractériser l'intensité des transferts interfaciaux. Ces coefficients d'échange  $K_U$ ,  $K_P$ ,  $K_T$ ,  $K_\theta$  sont associés à des fonctions de relaxation strictement positives sur l'espace admissible  $\Omega$ . Comme dans le cadre laminaire, les équilibres du système (13.1) s'identifient alors à la variété isobare isotherme équipotentielle équivitesse

$$\mathbb{E}_{GPTU} = \{W \in \mathbb{R}^9 / P_1 = P_2, \quad T_1 = T_2, \quad g_1 = g_2, \quad u_1 = u_2\}.$$

Les énergies cinétiques turbulentes de chaque phase  $\mathcal{X}_k = m_k K_k$ ,  $k = 1, 2$ , de même que la masse  $\rho$ , la quantité de mouvement  $\rho V$  et l'énergie totale  $\rho E$  du mélange sont par ailleurs des invariants du système (13.1). Les trajectoires du système (13.1) satisfont donc continûment les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_k m_k(W) = \rho, \quad \sum_k m_k u_k(W) = \rho V, \quad \sum_k m_k E_k(W) = \rho E, \\ m_2 K_2(W) = \mathcal{X}_2, \quad m_1 K_1(W) = \mathcal{X}_1. \end{array} \right. \quad (13.2)$$

La compatibilité de ces contraintes (13.2) avec l'équilibre liquide-vapeur s'établit alors similairement au cadre laminaire pour les écoulements diphasiques en transition de phase. Pour une masse de mélange strictement positive, soit  $\tau = 1/\rho$  le volume spécifique de mélange. De manière analogue aux écoulements laminaires, on définit pour  $k = 1, 2$ , les fractions massiques, énergétiques et cinématiques de chaque phase par les relations

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{m_k}{\rho} = \frac{\alpha_k \tau}{\tau_k} \longrightarrow \sum_k x_k = 1, \\ y_k &= \frac{m_k E_k}{\rho} = x_k E_k \longrightarrow \sum_k y_k = E, \\ q_k &= \frac{m_k u_k}{\rho} = x_k u_k \longrightarrow \sum_k q_k = V. \end{aligned}$$

Soit  $Z = (\alpha_2, y_2, q_2, x_2)^t$  le vecteur des fractions. A partir de l'entropie spécifique de mélange  $\eta/\rho = \sum_k x_k s_k(\tau_k, e_k)$ , on définit comme dans le cadre laminaire la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_{(\tau, E, V, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)} : Z \longrightarrow & x_2 s_2 \left( \frac{\alpha_2 \tau}{x_2}, \frac{y_2}{x_2} - \frac{\tau \mathcal{X}_2}{x_2} - \frac{q_2^2}{2x_2^2} \right) \\ & + (1-x_2) s_1 \left( \frac{(1-\alpha_2)\tau}{1-x_2}, \frac{E-y_2}{1-x_2} - \frac{\tau \mathcal{X}_1}{1-x_2} - \frac{(V-q_2)^2}{2(1-x_2)^2} \right). \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse 1, cette fonction est définie sur l'ouvert

$$\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2, x_2)} = \left\{ Z \in \mathbb{R}^4 / \alpha_2 \in ]0, 1[, x_2 \in ]0, 1[, P_2 \left( \frac{\alpha_2 \tau}{x_2}, \frac{y_2}{x_2} - \frac{\tau \mathcal{X}_2}{x_2} - \frac{q_2^2}{2x_2^2} \right) > 0, \right. \\ \left. P_1 \left( \frac{(1-\alpha_2)\tau}{1-x_2}, \frac{E-y_2}{1-x_2} - \frac{\tau \mathcal{X}_1}{1-x_2} - \frac{(V-q_2)^2}{2(1-x_2)^2} \right) > 0 \right\}.$$

De manière analogue aux écoulements laminaires, on montre aisément sous les hypothèses 1 et 2 la stricte concavité de la fonction  $\Phi_{(\tau, E, V, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)}(Z)$  sur l'ouvert  $\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2, x_2)}$ . Dans l'espace admissible  $\Omega$ , la compatibilité des contraintes (13.2) avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse est alors établie similairement via l'optimisation de la fonction  $\Phi_{(\tau, E, V, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)}$  sur l'adhérence  $\overline{\mathcal{D}_{(\alpha_2, y_2, q_2, x_2)}}$ . En conclusion, la turbulence ne modifie pas la nature isobare isotherme équipotentielle équivitesse de l'équilibre liquide-vapeur.

## 13.2 Stabilité de l'équilibre liquide-vapeur pour les écoulements diphasiques turbulents en transition de phase.

A la section précédente, la compatibilité des contraintes (13.2) avec l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse a été établie dans l'espace admissible  $\Omega$  sous les hypothèses 1 et 2. Fort de cette compatibilité entre équilibres et contraintes, toute trajectoire du système (13.1) évoluant dans l'espace admissible  $\Omega$  croise donc une fois la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$ . On s'intéresse dans ce paragraphe à la stabilité linéaire et non-linéaire de cet équilibre liquide-vapeur turbulent.

Dans un premier temps, rappelons qu'une fonction  $\Phi_{(\tau,E,V,\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)}$  a été précédemment introduite à partir l'entropie spécifique de mélange. Cette fonction est  $\Phi_{(\tau,E,V,\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)}(\mathcal{Z})$  est strictement concave sur son domaine de définition  $\mathcal{D}_{(\alpha_2,y_2,q_2,x_2)}$ . Pour notre modélisation des transferts interfaciaux proposée au chapitre 11, on montre de manière analogue aux écoulements laminaires que cette fonction  $\Phi_{(\tau,E,V,\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)}$  est une fonction de Lyapunov pour le système dynamique (13.1). Suivant le théorème de Lyapunov, toute trajectoire bornée évoluant dans l'espace admissible  $\Omega$  converge donc vers l'unique solution isobare isotherme équipotentielle équivalente du système algébrique des contraintes (13.2). La turbulence ne modifie donc pas la stabilité non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur.

En ce qui concerne le comportement des trajectoires au voisinage de la variété  $\mathbb{E}_{GPTU}$ , on applique similairement au cadre laminaire le théorème d'Hartman et Grobman au système (13.1). Ce théorème nous permet d'établir conditionnellement la stabilité linéaire de l'équilibre liquide-vapeur. De manière analogue aux écoulements laminaires, cette stabilité linéaire pour l'équilibre liquide-vapeur dépend des lois d'état utilisées pour décrire le mélange diphasique ainsi que des modélisations retenues pour les coefficients d'échange  $K_U, K_P, K_T, K_\theta$ . Soit  $\mathcal{A}_{uu}, \mathcal{A}_{pp}, \mathcal{A}_{tt}, \mathcal{A}_{\theta\theta}$  les coefficients thermodynamiques introduits à la figure 5.1. Soit  $K_0$  une énergie cinétique turbulente de référence. Pour caractériser l'intensité des transferts interfaciaux, la modélisation heuristique (11.8) des coefficients d'échange a été adoptée au chapitre 11 :

$$K_U = \frac{\mathcal{A}_K}{\tau_U \mathcal{A}_{uu}}, \quad K_P = \frac{\mathcal{A}_K}{\tau_P \mathcal{A}_{pp}}, \quad K_T = \frac{\mathcal{A}_K}{\tau_T \mathcal{A}_{tt}}, \quad K_\theta = \frac{\mathcal{A}_K}{\tau_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta}}. \quad (11.8)$$

Ces différents coefficients d'échange dépendent de la turbulence par le biais du coefficient

$$\mathcal{A}_K = 1 + \frac{K_1 + K_2}{K_0}.$$

De manière analogue au cadre laminaire, la stabilité linéaire de certains équilibres liquide-vapeur peut alors être numériquement établie comme à l'exemple 6 présenté à la section 5.2.2. Dans le cadre des écoulements diphasiques turbulents en transition de phase, les résultats expérimentaux de Bilicki, Kwizdzinski et Ali Mohammadein [16] sont alors retrouvés. Plus la turbulence est intense au sein du mélange diphasique, plus rapidement se résorbent les déséquilibres entre les phases.

Ce dernier point achève notre étude des transferts interfaciaux pour les écoulements liquide-vapeur turbulents. De manière générale, l'introduction de la turbulence ne modifie ni la nature isobare isotherme équipotentielle équivalente de l'équilibre liquide-vapeur, ni sa stabilité linéaire et non-linéaire. La turbulence n'influe que sur la dynamique des transferts interfaciaux.





# Chapitre 14

## Schémas numériques

Maintenant la partie convective et les transferts interfaciaux du système (10.1) étudiés, on s'intéresse dans ce chapitre à l'approximation du modèle bifluide turbulent à deux pressions. Pour simuler ce modèle, une méthode Volumes Finis à pas fractionnaires est d'office retenue comme dans le cadre laminaire. On s'intéresse alors aux modifications induites par l'introduction de la turbulence. Le modèle bifluide turbulent à neuf équations étant invariant par rotation, cette méthode à pas fractionnaires est ici présentée dans un cadre monodimensionnel cartésien. L'extension multidimensionnelle non-structurée de cette méthode numérique a déjà été détaillée dans le cadre laminaire. Pour les quelques simulations envisagées par la suite, on ne s'intéresse par ailleurs qu'à la simulation des transferts interfaciaux. On ne cherche pas à décrire les différents phénomènes de diffusion, de production ou encore de dissipation de la turbulence. Dans ce chapitre, on étudie donc dans un cadre monodimensionnel l'approximation du système

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = S(W). \quad (14.1)$$

Suivant les travaux de Yanenko [104], l'approximation du système (14.1) s'effectue en deux étapes. La première est consacrée à l'approximation de la partie convective

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = 0. \quad (14.2)$$

La seconde s'intéresse à l'intégration du système dynamique

$$d_t W = S(W). \quad (14.3)$$

Une méthode semi-implicite a été déjà proposée dans le cadre laminaire au chapitre 7 pour effectuer l'intégration du système dynamique (14.3). Ce schéma d'intégration n'est pas modifié par l'implémentation de la turbulence. Ce chapitre s'intéresse donc uniquement à l'approximation de la partie convective sous forme non-conservative (14.2).

Pour approcher de tels systèmes non-conservatifs, diverses adaptations non-conservatives de schémas classiques ont été proposées dans le cadre laminaire au chapitre 7. On s'est notamment intéressé aux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma VFRoe-ncv. Dans ce chapitre, ces différentes adaptations non-conservatives sont successivement appliquées au système (14.2) pour les deux formulations (10.6) des équations de la turbulence :

$$\partial_t(m_k K_k) + \partial_x(m_k K_k u_k) + \frac{2}{3} m_k K_k \partial_x u_k = 0, \quad (10.6a)$$

$$\partial_t(m_k \hat{s}_k) + \partial_x(m_k \hat{s}_k u_k) = 0. \quad (10.6b)$$

Pour simuler la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations, quatre schémas sont donc présentés dans ce chapitre. Conformément aux travaux de Forestier, Hérard, Louis [40], Buffard, Gallouët, Hérard [17], Saurel et Abgrall [93], les deux premières adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma VFRoe-ncv s'intéressent à la formulation (10.6a) des équations portant sur l'énergie

cinétique turbulente. En accord avec les travaux de De vuyst [30], Hou et Lefloch [65], nous montrerons numériquement au chapitre 15 que ces deux schémas convergent vers deux solutions distinctes qui ne vérifient pas les bonnes relations de saut. A la suite des travaux entrepris par Toumi, Kumbaro [102], Berthon et Reigner [14], les deux secondes adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma VFRoe-ncv s'intéressent à la formulation (10.6b) des équations portant sur l'entropie turbulente. Au chapitre 15, nous vérifierons numériquement que ces deux schémas convergent vers une même solution. Cette solution satisfait alors les relations de saut (12.16b) proposées par Hérard dans [61]. Cette différence de comportement vis à vis de la convergence n'empêche cependant pas les différents schémas de ce chapitre de présenter des caractéristiques communes. De manière analogue à la partie I, l'ensemble des schémas présentés dans ce chapitre se caractérise par la préservation des équilibres liquide-vapeur laminaires.

## 14.1 La discrétisation Volumes Finis

Pour réaliser l'approximation du système (14.2), un maillage du domaine de calcul est tout d'abord construit. La formulation multidimensionnelle non-structurée de notre méthode numérique a déjà été détaillée dans le cadre laminaire au chapitre 7. Pour la clarté de notre exposé, cette méthode numérique est ici reprise dans un cadre monodimensionnel structuré sans perte de généralité. Dans ce chapitre, on s'intéresse alors à un maillage cartésien régulier constitué de  $N$  cellules identiques de volume  $\delta x$ . Le pas d'espace  $\delta x$  caractérise la distance entre deux interfaces successives  $x_{j-1/2}$  et  $x_{j+1/2}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , définissons les instants de discrétisation  $t_n$  en fonction du pas de temps  $\delta t = t_{n+1} - t_n$ . Pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $W_j^n$  la valeur moyenne de maille associée à la variable d'état  $W$ . Soit  $\mathcal{F}_{j+1/2}$  le flux numérique à la traversée de l'interface  $x_{j+1/2}$  et  $\mathcal{W}_{j+1/2}$  la valeur moyenne à l'interface  $x_{j+1/2}$  de la variable d'état  $W$ . On note  $C_j$  la valeur moyenne de maille associée au tenseur interfacial turbulent  $C$ . De manière analogue au cadre laminaire, la discrétisation Volumes Finis du système (14.2) s'écrit

$$\forall n \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad W_j^{n+1} = W_j^n - \frac{\delta t}{\delta x} \left( \mathcal{F}_{j+1/2} - \mathcal{F}_{j-1/2} \right) - \frac{\delta t}{\delta x} C_j \left( \mathcal{W}_{j+1/2} - \mathcal{W}_{j-1/2} \right). \quad (14.5)$$

Au sein de cette discrétisation, on cherche à déterminer les grandeurs  $\mathcal{F}_{j+1/2}$ ,  $\mathcal{W}_{j+1/2}$  et  $C_j$ . Dans le cadre des méthodes à trois points explicites en temps, diverses adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov [92] et du schéma VFRoe-ncv [18] sont alors étudiées par la suite pour approcher les solutions du système (14.2).

## 14.2 Différentes adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov

Suivant les travaux de Hérard [59, 60], une adaptation non-conservative du schéma de Rusanov a déjà été présentée dans le cadre laminaire à la section 7.2.2. Cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov s'appuie sur la définition explicite des grandeurs  $\mathcal{F}_{j+1/2}$ ,  $\mathcal{W}_{j+1/2}$  et  $C_j$ . Pour tout  $n \geq 0$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $r_j^n$  le rayon spectral de la matrice  $[\nabla_W F(W) + C(W)](W_j^n)$ . Cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov s'écrit

$$\forall n \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{j+1/2} &= \frac{1}{2} \left[ F(W_{j+1}^n) + F(W_j^n) - r_{j+1/2} (W_{j+1}^n - W_j^n) \right], \\ \mathcal{W}_{j+1/2} &= \frac{1}{2} \left[ W_{j+1}^n + W_j^n \right], \quad r_{j+1/2} = \max \left[ r_{j+1}^n, r_j^n \right], \\ C_j &= C(W_j^n). \end{cases} \quad (14.6)$$

Différentes formulations (10.6a) et (10.6b) sont cependant envisagées dans ce chapitre pour discrétiser les équations caractéristiques de la turbulence. Dans le cadre de la formulation (10.6a) des équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes, la variable d'état s'écrit  $W = (\alpha_2, m_2, m_2 u_2, m_2 E_2, m_2 K_2, m_1, m_1 u_1, m_1 E_1, m_1 K_1)^t$ . Pour la formulation (10.6b) des équations portant sur les entropies turbulentes, la variable d'état s'écrit différemment  $W = (\alpha_2, m_2, m_2 u_2, m_2 E_2, m_2 \hat{s}_2, m_1, m_1 u_1, m_1 E_1, m_1 \hat{s}_1)^t$ . Dans cette section,

on étudie les différentes adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov pour les deux formulations (10.6a) et (10.6b) des équations caractéristiques de la turbulence. L'ensemble des propriétés associées à chacune de ces adaptations non-conservative du schéma de Rusanov est regroupé dans les propositions 26 et 27.

**Proposition 26.** Pour  $n \geq 0$ , soit  $R_{max} = \max_{j \in \{1, \dots, N\}} (r_j^n) + \frac{2}{3} \max_{j \in \{1, \dots, N\}} (|(u_k)_j^n|_{k=1,2})$  tel que

$$\frac{\delta t R_{max}}{\delta x} \leq 1. \quad (14.7)$$

Sous la condition de Courant-Friedrich-Levy (14.7), l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov (14.5) (14.6) pour la formulation (10.6a) des équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes assure la positivité des fractions volumiques, des masses partielles et des énergies cinétiques turbulentes. Sous les hypothèses 1 et 2, cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov préserve par ailleurs les équilibres liquide-vapeur laminaires.

**Proposition 27.** Pour  $n \geq 0$ , soit  $R_{max} = \max_{j \in \{1, \dots, N\}} (r_j^n)$  tel que

$$\frac{\delta t R_{max}}{\delta x} \leq 1. \quad (14.8)$$

Sous la condition de Courant-Friedrich-Levy (14.8), l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov (14.5) (14.6) pour la formulation (10.6b) des équations portant sur les entropies turbulentes assure la positivité des fractions volumiques, des masses partielles et des énergies cinétiques turbulentes. Sous les hypothèses 1 et 2, cette adaptation non-conservative du schéma de Rusanov préserve par ailleurs les équilibres liquide-vapeur laminaires.

**Démonstration.** L'ensemble des propriétés énoncées aux propositions 26 et 27 se démontre par récurrence. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , soit  $W_j^n$  un état admissible de  $\mathbb{R}^9$ . Suivant la discrétisation (14.5) de la partie convective associée au modèle bifluide turbulent à neuf équations, les fractions volumiques et les masses partielles satisfont comme dans le cadre laminaire les équations

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\begin{aligned} (\alpha_k)_j^{n+1} &= \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (\alpha_k)_j^n \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} \left[ r_{j+1/2} - (V_i)_j^n \right] (\alpha_k)_{j+1}^n + \frac{\delta t}{2 \delta x} \left[ r_{j-1/2} + (V_i)_j^n \right] (\alpha_k)_{j-1}^n, \\ (m_k)_j^{n+1} &= \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (m_k)_j^n \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} \left[ r_{j+1/2} - (u_k)_{j+1}^n \right] (m_k)_{j+1}^n + \frac{\delta t}{2 \delta x} \left[ r_{j-1/2} + (u_k)_{j-1}^n \right] (m_k)_{j-1}^n, \end{aligned}$$

Suivant la formulation (10.6a) ou (10.6b) des équations de turbulence, les différentes adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov présentées aux propositions 26 et 27 s'intéressent respectivement aux discrétisations

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\begin{aligned} (m_k K_k)_j^{n+1} &= \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) - \frac{\delta t}{3 \delta x} ((u_k)_{j+1}^n - (u_k)_{j-1}^n) \right] (m_k K_k)_j^n \\ &\quad + \frac{\delta t}{2 \delta x} \left[ r_{j+1/2} - (u_k)_{j+1}^n \right] (m_k K_k)_{j+1}^n + \frac{\delta t}{2 \delta x} \left[ r_{j-1/2} + (u_k)_{j-1}^n \right] (m_k K_k)_{j-1}^n, \end{aligned}$$

$$(m_k \widehat{s}_k)_j^{n+1} = \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (m_k \widehat{s}_k)_j^n \\ + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j+1/2} - (u_k)_{j+1}^n] (m_k \widehat{s}_k)_{j+1}^n + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j-1/2} + (u_k)_{j-1}^n] (m_k \widehat{s}_k)_{j-1}^n.$$

Pour la formulation (10.6a) des équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes, l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov assure donc la positivité des fractions volumiques, des masses partielles et des énergies cinétiques turbulentes sous la condition de Courant-Friedrich-Levy (14.7). Pour la formulation (10.6b) des équations portant sur les entropies turbulentes  $\widehat{s}_k = K_k/m_k^{2/3}$ , l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov assure différemment la positivité des fractions volumiques, des masses partielles et des énergies cinétiques turbulentes sous la condition de Courant-Friedrich-Levy (14.8). Suivant la discrétisation (14.5) de la partie convective associée au modèle bifluide turbulent à neuf équations, les équations discrètes satisfaites par les vitesses  $u_k$  et les énergies totales  $E_k = e_k + u_k^2/2 + K_k$  s'écrivent par ailleurs :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$(m_k u_k)_j^{n+1} = \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (m_k u_k)_j^n + \frac{\delta t}{2 \delta x} [(P_i)_j^n - (P_k)_{j+1}^n] (\alpha_k)_{j+1}^n \\ + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j+1/2} - (u_k)_{j+1}^n] (m_k u_k)_{j+1}^n - \frac{\delta t}{2 \delta x} [(P_i)_j^n - (P_k)_{j-1}^n] (\alpha_k)_{j-1}^n \\ + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j-1/2} + (u_k)_{j-1}^n] (m_k u_k)_{j-1}^n - \frac{\delta t}{3 \delta x} [(m_k K_k)_{j+1}^n - (m_k K_k)_{j-1}^n],$$

$$(m_k E_k)_j^{n+1} = \left[ 1 - \frac{\delta t}{2 \delta x} (r_{j+1/2} + r_{j-1/2}) \right] (m_k E_k)_j^n + \frac{\delta t}{2 \delta x} [(P_i V_i)_j^n - (P_k u_k)_{j+1}^n] (\alpha_k)_{j+1}^n \\ + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j+1/2} - (u_k)_{j+1}^n] (m_k E_k)_{j+1}^n - \frac{\delta t}{2 \delta x} [(P_i V_i)_j^n - (P_k u_k)_{j-1}^n] (\alpha_k)_{j-1}^n \\ + \frac{\delta t}{2 \delta x} [r_{j-1/2} + (u_k)_{j-1}^n] (m_k E_k)_{j-1}^n - \frac{\delta t}{3 \delta x} [(m_k K_k u_k)_{j+1}^n - (m_k K_k u_k)_{j-1}^n].$$

Supposons l'existence d'un équilibre isobare isotherme équivitesse laminaire entre les phases à l'instant  $n \geq 0$  :

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} (P_k)_{j-1}^n = (P_k)_j^n = (P_k)_{j+1}^n = P_0, \\ (T_k)_{j-1}^n = (T_k)_j^n = (T_k)_{j+1}^n = T_0, \\ (u_k)_{j-1}^n = (u_k)_j^n = (u_k)_{j+1}^n = u_0, \\ (K_k)_{j-1}^n = (K_k)_j^n = (K_k)_{j+1}^n = 0. \end{cases}$$

Pour notre modélisation de la vitesse et de la pression interfaciales par des combinaisons convexes des vitesses et des pressions phasiques,  $(V_i)_j^n = u_0$  et  $(P_i)_j^n = P_0$ . De manière analogue au cadre laminaire développé à la section 7.2.2, l'introduction de cet équilibre dans les équations discrètes du schéma de Rusanov conduit alors indifféremment pour la formulation (10.6a) et (10.6b) des équations de la turbulence au système non-linéaire

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} (K_k)_j^{n+1} = 0, \\ (u_k)_j^{n+1} = u_0, \\ \rho_k((P_k)_j^{n+1}, (T_k)_j^{n+1}) = \rho_k(P_0, T_0), \\ e_k((P_k)_j^{n+1}, (T_k)_j^{n+1}) = e_k(P_0, T_0). \end{cases}$$

Comme dans le cadre laminaire, ce système est inversible sous l'hypothèse 1. Il admet l'unique solution

$$\forall k = 1, 2, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad (K_k)_j^{n+1} = 0, \quad (u_k)_j^{n+1} = u_0, \quad (P_k)_j^{n+1} = P_0, \quad (T_k)_j^{n+1} = T_0.$$

L'équilibre isobare isotherme équipitesse laminaire est donc préservé entre les phases. Dans le cadre de l'hypothèse 2, l'équilibre isobare isotherme équipotentiel étant un équilibre isobare isotherme particulier, cette propriété s'étend naturellement aux équilibres liquide-vapeur. ■

### 14.3 Différentes adaptations non-conservatives du schéma $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv

Intéressons-nous maintenant à l'approximation de la partie convective associée au modèle bifluide turbulent à deux pressions par le biais d'un schéma de type VFRoe-ncv. Comme dans le cadre laminaire développé à la section 7.2.3, soit  $Y$  une variable a priori non-conservative du système (14.2) et soit  $\psi$  le  $C^1$  difféomorphisme  $\psi : W \rightarrow Y$ . Pour cette définition du changement de variables  $\psi$ , on définit similairement la matrice  $H(Y) = [\nabla_Y W(Y)]^{-1} \cdot [\nabla_W F(W(Y)) + C(W(Y))] \cdot [\nabla_Y W(Y)]$ . L'adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv présentée à la section 7.2.3 s'écrit

$$\forall n \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

$$\mathcal{F}_{j+1/2} = F[W(Y_{j+1/2}^*)], \quad w_{j+1/2} = W(Y_{j+1/2}^*), \quad C_j^n = C(W_j^n), \quad (14.9)$$

où  $Y_{j+1/2}^*$  désigne la solution exacte en  $x = x_{j+1/2}$  du problème de Riemann linéarisé

$$\forall n \geq 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \begin{cases} \partial_t Y + H(\tilde{Y}_{j+1/2}) \partial_x Y = 0, & \tilde{Y}_{j+1/2} = \frac{Y_{j+1}^n + Y_j^n}{2}, \\ Y(t = t_n, x) = \begin{cases} Y_j^n & = \psi(W_j^n) & \text{si } x < x_{j+1/2}, \\ Y_{j+1}^n & = \psi(W_{j+1}^n) & \text{si } x > x_{j+1/2}. \end{cases} \end{cases} \quad (14.10)$$

Différentes formulations (10.6a) et (10.6b) sont cependant envisagées dans ce chapitre pour discrétiser les équations de turbulence. Comme à la section précédente, ces différentes formulations influent sur la définition de la variable d'état. Pour la formulation (10.6a) des équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes, on rappelle que la variable d'état s'écrit  $W = (\alpha_2, m_2, m_2 u_2, m_2 E_2, m_2 K_2, m_1, m_1 u_1, m_1 E_1, m_1 K_1)^t$ . Pour la formulation (10.6b) des équations portant sur les entropies turbulentes, cette variable d'état s'écrit différemment  $W = (\alpha_2, m_2, m_2 u_2, m_2 E_2, m_2 \hat{s}_2, m_1, m_1 u_1, m_1 E_1, m_1 \hat{s}_1)^t$ . Les propriétés du schéma VFRoe-ncv dépendent par ailleurs du changement de variables  $\psi$ . Dans le cadre du modèle bifluide turbulent à neuf équations, Hérard propose dans [61] de linéariser le problème de Riemann posé à chaque interface du maillage en variable  $(\alpha_2, s_2, \hat{s}_2, u_2, P_2, s_1, \hat{s}_1, u_1, P_1)$ . Dans cette section, nous proposons différemment de linéariser ce problème de Riemann en variable  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ . Ce nouveau choix de variable découle de notre analyse des transferts interfaciaux et de la dissipation turbulente. Pour les formulations (10.6a) et (10.6b) des équations de la turbulence, les différentes propriétés de cette adaptation non-conservative du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv sont alors présentées aux propositions 28 et 29.

**Proposition 28.** *Sous les hypothèses 1 et 2, l'adaptation non-conservative (14.5) (14.9) du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv pour la formulation (10.6a) des équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes préserve les équilibres liquide-vapeur laminaires.*

**Proposition 29.** *Sous les hypothèses 1 et 2, l'adaptation non-conservative (14.5) (14.9) du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv pour la formulation (10.6b) des équations portant sur les entropies turbulentes préserve les équilibres liquide-vapeur laminaires.*

**Démonstration.** Comme dans le cadre laminaire, la démonstration des propositions 28 et 29 s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, on s'intéresse à la structure propre de la matrice  $H$  pour la variable  $Y = (\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)^t$ . Cette structure propre donne accès à la solution exacte du problème de Riemann linéarisé (14.10). Une fois cette solution exacte calculée, la préservation des équilibres liquide-vapeur laminares est alors indifféremment montrée par récurrence pour les formulations (10.6a) et (10.6b) des équations de turbulence.

Soit  $Y = (\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)^t$ . Pour détailler la structure propre de la matrice  $H(Y) = [\nabla_Y W(Y)]^{-1} \cdot [\nabla_W F(W(Y)) + C(W(Y))] \cdot [\nabla_Y W(Y)]$ , on introduit tout d'abord pour  $k = 1, 2$ , les différents coefficients thermodynamiques

$$\begin{aligned}
J_{T_k} &= \rho_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \widehat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}, & A_k &= \frac{1}{\alpha_k} J_{T_k} + \frac{(P_i - P_k)}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \\
B_k &= \frac{\widehat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & F_k &= \frac{1}{\rho_k} + \frac{2}{3} \frac{K_k}{\rho_k} \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial P_k} \right)_{T_k}, & G_k &= \frac{2}{3} \frac{K_k}{\rho_k} \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial T_k} \right)_{P_k}, \\
\chi_k &= A_k + \frac{J_{T_k} \left[ B_k - \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) \right]}{\rho_k \left[ (u_k - V_i)^2 - \widehat{c}_k^2 \right]}, & \zeta_k &= \frac{(u_k - V_i) \left[ B_k - \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) \right]}{\rho_k \left[ (u_k - V_i)^2 - \widehat{c}_k^2 \right]}, \\
\xi_k &= \frac{c_k^2 \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) + \frac{10}{9} K_k B_k - (u_k - V_i)^2 B_k}{(u_k - V_i)^2 - \widehat{c}_k^2}, & \omega_k &= \frac{2 K_k \left[ B_k - \left( \frac{P_k - P_i}{\alpha_k} \right) \right]}{3 \rho_k \left[ (u_k - V_i)^2 - \widehat{c}_k^2 \right]}, \\
H_{T_k} &= (-1)^k A_k (u_k - V_i), & H_{u_k} &= (-1)^k \frac{\pi_k - P_i}{m_k}, & H_{P_k} &= (-1)^k B_k (u_k - V_i).
\end{aligned}$$

Muni de ces différents coefficients thermodynamiques, la matrice  $H(Y)$  s'écrit

$$H(Y) = \begin{pmatrix} V_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{T_2} & u_2 & J_{T_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{u_2} & G_2 & u_2 & F_2 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{P_2} & 0 & \widehat{\gamma}_2 P_2 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2K_2}{3} & 0 & u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{T_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & J_{T_1} & 0 & 0 \\ H_{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 & u_1 & F_1 & \frac{2}{3} \\ H_{P_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{\gamma}_1 P_1 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2K_1}{3} & 0 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Le spectre classique de la partie convective associée au modèle bifluide turbulent est alors retrouvé :

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= V_i, \\
\lambda_1 &= u_2 - \widehat{c}_2, & \lambda_{2,3} &= u_2, & \lambda_4 &= u_2 + \widehat{c}_2, \\
\lambda_5 &= u_1 - \widehat{c}_1, & \lambda_{6,7} &= u_1, & \lambda_8 &= u_1 + \widehat{c}_1.
\end{aligned}$$

L'ensemble des vecteurs propres à droite respectivement associés est alors regroupé dans la matrice colonne

$$(R_p)_{p \in \{0, \dots, 8\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\chi_2 & -J_{T_2} & 1 & 0 & J_{T_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_2 & \hat{c}_2 & 0 & 0 & \hat{c}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_2 & -\hat{\gamma}_2 P_2 & 0 & 1 & \hat{\gamma}_2 P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & -\frac{2K_2}{3} & -\frac{3G_2}{2} & -\frac{3F_2}{2} & \frac{2K_2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{T_1} & 1 & 0 & J_{T_1} \\ -\zeta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{c}_1 & 0 & 0 & \hat{c}_1 \\ -\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\gamma}_1 P_1 & 0 & 1 & \hat{\gamma}_1 P_1 \\ \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2K_1}{3} & -\frac{3G_1}{2} & -\frac{3F_1}{2} & \frac{2K_1}{3} \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres à gauche  $(L_p)_{p \in \{0, \dots, 8\}}$  sont obtenus en inversant cette matrice colonne des vecteurs propres à droite. Le détail de cette structure propre nous permet d'envisager la résolution exacte du problème de Riemann linéarisé (14.10). Soit  $(\tilde{\lambda}_p)$ ,  $(\tilde{R}_p)$ ,  $(\tilde{L}_p)$  respectivement les valeurs propres, vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice  $H(\tilde{Y}_{j+1/2})$ . Soit  $dY_{j+1/2} = Y_{j+1}^n - Y_j^n$  l'écart entre les états situés à droite et à gauche de l'interface  $x_{j+1/2}$ . La solution exacte à l'interface  $x_{j+1/2}$  du problème de Riemann linéarisé (14.10) s'écrit

$$Y_{j+1/2}^* = Y_j^n + \sum_{\tilde{\lambda}_p < 0} (\tilde{L}_p \cdot dY_{j+1/2}) \tilde{R}_p = Y_{j+1}^n - \sum_{\tilde{\lambda}_p > 0} (\tilde{L}_p \cdot dY_{j+1/2}) \tilde{R}_p.$$

Maintenant cette solution exacte calculée, supposons l'existence d'un équilibre liquide-vapeur laminaire au sein du mélange. Quelle que soit la formulation (10.6a) ou (10.6b) des équations de turbulence, la préservation de cet équilibre liquide-vapeur laminaire se montre par récurrence comme à la section 7.2.3 sous les hypothèses 1 et 2. Ce dernier point termine la démonstration des propositions 28 et 29. ■

Pour conclure, une méthode numérique a été proposée dans ce chapitre pour réaliser l'approximation du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Cette méthode numérique s'inspire des travaux effectués dans le cadre laminaire. Cette méthode numérique s'appuie similairement sur une approche à pas fractionnaires dans un formalisme Volumes Finis. Suivant les travaux de Yanenko [104], cette méthode numérique traite séparément de la convection puis des transferts interfaciaux. L'approximation des transferts interfaciaux n'est pas modifiée par l'implémentation de la turbulence. Ce chapitre s'est donc uniquement intéressé à l'approximation de la convection. La partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations se présente sous une forme non-conservative. Diverses adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma VFRoe-ncv ont alors été proposées. Ces différentes adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma VFRoe-ncv se caractérisent par la préservation des équilibres liquide-vapeur laminaires. Ces différentes adaptations non-conservatives se distinguent cependant par leur discrétisation des équations de turbulence. Le chapitre 15 effectue la comparaison numérique de ces différents schémas de convection. On y étudie simultanément l'influence de la turbulence sur les interactions diphasiques.





# Chapitre 15

## Résultats numériques

Dans cette seconde partie de thèse, on cherche à mesurer l'influence de la turbulence sur les transferts interfaciaux. Pour décrire ces phénomènes, le modèle bifluide turbulent à neuf équations présenté par Hérard dans [61] est retenu. On s'intéresse ici à la simulation de ce modèle sans diffusion, ni production ou dissipation de la turbulence par le biais de la méthode numérique développée au chapitre 14. Comme dans le cadre laminaire, cette méthode numérique s'appuie sur une approche à pas fractionnaires dans un formalisme Volumes Finis. Cette méthode traite séparément de la convection puis des transferts interfaciaux. Plusieurs schémas ont été construits au chapitre précédent pour réaliser l'approximation de la partie convective non-conservative associée au modèle bifluide turbulent à neuf équations. La première section de ce chapitre se consacre à la comparaison de ces différents schémas de convection. A la suite des études menées par De Vuyst [30], Hou et Lefloch [65], on s'intéresse particulièrement à la convergence de ces différents schémas. Dans la seconde partie de ce chapitre, on étudie ensuite la dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements liquide-vapeur turbulents en transition de phase. Pour réaliser ces différents cas tests, on se place dans un cadre monodimensionnel. Dans ce chapitre, le domaine de calcul s'identifie à l'intervalle  $[0, 2]$ . On n'envisage ici que des maillages cartésiens réguliers. Pour modéliser les différents constituants du mélange, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est par ailleurs adoptée dans chaque phase. On impose les coefficients thermodynamiques

$$\gamma_1 = 1.4, \quad \gamma_2 = 1.2, \quad C_{v_1} = 2 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}, \quad C_{v_2} = 1 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}.$$

On rappelle que ces deux lois d'état vérifient simultanément les hypothèses 1 et 2. L'indice 1 y désigne la phase vapeur, l'indice 2 la phase liquide.

### 15.1 Simulation de la partie convective

Dans cette première section, on s'intéresse à la simulation de la partie convective (12.1) associée au modèle bifluide turbulent à neuf équations. On rappelle que cette partie convective se présente sous une forme non-conservative. Certains produits non-conservatifs  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$  proviennent de notre modélisation bifluide. Les autres  $2 m_k K_k \partial_x u_k / 3$  proviennent de notre modélisation de la turbulence.

Lors de la simulation de tels systèmes non-conservatifs, plusieurs problèmes numériques ont déjà été observés à la section 8.1. Dans le cadre laminaire des modèles bifluides de type Baer et Nunziato, sans attention particulière quant à la modélisation de la vitesse et de la pression interfaciales, deux schémas numériques différents ont convergé vers deux solutions distinctes. Pour palier ce problème, diverses fermetures ont été mises en avant pour les grandeurs interfaciales  $P_i$ ,  $V_i$ . Suivant les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], ces modélisations particulières pour la vitesse et la pression interfaciales définissent localement les différents produits non-conservatifs  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$ . Pour ces modélisations particulières (12.10) du couple interfacial  $(P_i, V_i)$ , la convergence de différents schémas vers une même solution a alors été numériquement vérifiée. Dans ce chapitre la modélisation (12.10c) est donc retenue pour la

vitesse et la pression interfaciales :

$$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_2 T_2 + m_1 T_1}. \quad (12.10c)$$

Dans le cadre du modèle bifluide turbulent à neuf équations, les deux produits non-conservatifs supplémentaires  $2m_k K_k \partial_x u_k / 3$  apparaissent cependant. Suivant les travaux de Hérard [61], ces deux produits non-conservatifs ont été définis au chapitre 12 conformément à la théorie développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29]. Dans ce cadre, on rappelle que les deux équations (10.6) sont équivalentes au sens où elles présentent les mêmes relations de saut :

$$\partial_t(m_k K_k) + \partial_x(m_k K_k u_k) + \frac{2}{3} m_k K_k \partial_x u_k = 0, \quad (10.6a)$$

$$\partial_t(m_k \hat{s}_k) + \partial_x(m_k \hat{s}_k u_k) = 0. \quad (10.6b)$$

Pour approcher la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations, différentes adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv ont été proposées au chapitre 14. Ces différentes adaptations non-conservatives se distinguent par leur discrétisation des équations (10.6). Suivant les travaux de Buffard, Gallouët et Hérard [17], les deux premières adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv s'appuient sur la discrétisation de l'équation (10.6a). Suivant les travaux de Berthon, Reignier [14], Toumi et Kumbaro [102], les deux secondes adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv s'appuient sur la discrétisation de l'équation (10.6b). Pour comparer ces différentes adaptations non-conservatives, on procède dans cette section à la simulation d'un tube à choc.

Initialisons le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 1$  m sont reportés dans le tableau 15.1. On impose une condition de Courant-Friedrich-Levy  $CFL = 0.8$ . Pour la formulation (10.6a) des équations portant sur les énergies cinétiques turbulentes, les solutions obtenues sur différents maillages à l'instant  $t = 0.03$  s par le schéma de Rusanov et le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv sont reportées figures 15.1 et 15.2. Les solutions convergées à 100 000 mailles fournies par ces deux schémas sont comparées à la figure 15.3. En accord avec les études réalisées par De Vuyst [30], Hou et Lefloch [65], ces deux solutions diffèrent. Désignons par respectivement  $l$  et  $r$  les états situés de part et d'autre des chocs. A la traversée de ces chocs, on observe numériquement les inégalités

$$\forall k = 1, 2, \quad \frac{(K_k)_l}{(K_k)_r} \neq \left[ \frac{(\rho_k)_l}{(\rho_k)_r} \right]^{2/3}.$$

Aucune des deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv ne satisfait donc les relations de saut (12.16b) pour la formulation (10.6a) des équations de la turbulence.

Procédons maintenant à la simulation de ce même tube à choc pour la formulation (10.6b) des équations portant sur les entropies turbulentes. Pour cette formulation (10.6b) des équations de la turbulence, les solutions obtenues sur différents maillages à l'instant  $t = 0.03$  s par le schéma de Rusanov et le schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv sont reportées figures 15.4 et 15.5. Les solutions convergées à 100 000 mailles fournies par ces deux schémas sont comparées à la figure 15.6. Conformément aux résultats présentés par Berthon et Reignier [14], ces deux schémas convergent vers une même solution. Comme précédemment, désignons respectivement par  $l$  et  $r$  les états situés de part et d'autre des chocs. A la traversée de ces chocs, l'unique solution fournie par les deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv satisfait les relations de saut (12.16b) :

$$\forall k = 1, 2, \quad \frac{(K_k)_l}{(K_k)_r} = \left[ \frac{(\rho_k)_l}{(\rho_k)_r} \right]^{2/3}.$$

Les résultats expérimentaux présentés par Grégoire, Souffland, Gauthier et Schiestel [54] sont alors qualitativement retrouvés. En conséquence, la simulation du modèle bifluide turbulent à neuf équations sera systématiquement réalisée à l'avenir par le biais de la formulation (10.6b) pour les équations portant sur les entropies turbulentes. Seules les modélisations (12.10) pour la vitesse et la pression interfaciales seront par ailleurs envisagées par la suite.

**Remarque 16.** Lors de la construction des différentes adaptations non-conservatives du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv, la correction entropique de Harten et Hyman [56] préconisée par Buffard, Gallouët et Hérard [18] a été implémentée. Pour la simulation du tube à choc envisagé dans cette section, une telle correction prévient l'apparition d'ondes de choc non-entropiques stationnaires au sein des détentes à la traversée de l'interface  $x = 1$  m. L'efficacité de cette correction entropique est alors illustrée sur les figures 15.2 et 15.5.

## 15.2 Simulation des transferts interfaciaux

Dans le cadre de notre approche à pas fractionnaires, l'approximation de la partie convective associée au modèle bifluide turbulent à neuf équations a été validée à la section précédente. On s'intéresse maintenant à l'approximation des interactions diphasiques. Pour montrer l'influence de la turbulence sur la dynamique des transferts interfaciaux, on réalise dans cette section la simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase.

En accord avec la section précédente, la modélisation (12.10c) pour la vitesse et la pression interfaciales est tout d'abord retenue. Pour doter le modèle bifluide turbulent à neuf équations d'une inégalité d'entropie, on choisit ensuite conformément à la section 11.2 de modéliser l'énergie interne interfaciale par une combinaison convexe des potentiels de changement de phase. On reprend la modélisation (8.2) adoptée dans le cadre laminaire. L'énergie interne interfaciale s'écrit alors

$$e_i = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}.$$

En ce qui concerne les coefficients d'échange, la modélisation (11.8) des fonctions de relaxation  $K_U, K_P, K_T, K_\theta$  est retenue. Dans cette modélisation (11.8) des coefficients d'échange, les différentes échelles de temps caractéristiques du retour à l'équilibre des vitesses, pressions, températures et potentiels sont identifiées à des constantes de l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s, conformément à l'analyse bibliographique menée à la section 3.4 :

$$\tau_U = 8.10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_P = 1.10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_T = 2.10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_\theta = 2.10^{-3} \text{ s}.$$

L'énergie cinétique turbulente de référence  $K_0$  est par ailleurs associée à la constante  $K_0 = 0.1 \text{ J.kg}^{-1}$ . Un maillage cartésien régulier du domaine de calcul est construit pour finir. Ce maillage compte 2000 cellules. On initialise alors le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 1$  m sont reportés dans le tableau 15.7. Cette condition initiale décrit un mélange liquide-vapeur à l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse de chaque côté de l'interface  $x = 1$  m. On choisit d'approcher la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations au moyen du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv pour la formulation (10.6b) des équations portant sur les entropies turbulentes. On impose à cette occasion une condition de Courant-Friedrich-Levy  $CFL = 0.8$ . A l'instant  $t = 0.06$  s, les solutions de ce tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur successivement laminaire puis turbulent sont reportées figure 15.7. Sur cette figure, la colonne de gauche correspond au régime laminaire, la colonne de droite au régime turbulent.

En ce qui concerne la simulation du tube à choc laminaire, la solution reportée figure 15.7 présente les mêmes propriétés qu'au chapitre 8. Sur le milieu basse pression, cette solution décrit la propagation d'un choc qui liquéfie le mélange diphasique. A la suite de ce choc, la fraction volumique liquide augmente. Cette solution laminaire décrit également la propagation d'une détente sur le milieu pressurisé.

Cette détente vaporise le mélange diphasique dont la fraction volumique liquide diminue. Comme au chapitre 8, l'ensemble de ces ondes acoustiques engendre des déséquilibres entre les phases. Une fois ces ondes acoustiques passées, les différents transferts interfaciaux rétablissent progressivement l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse au sein du mélange diphasique. En ce qui concerne la simulation de ce tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur turbulent, la solution reportée figure 15.7 décrit les mêmes phénomènes mais pas dans les mêmes proportions. Les différents déséquilibres engendrés par les ondes acoustiques se résorbent plus rapidement au sein du mélange diphasique. Suivant les variations de la fraction volumique reportées figure 15.7(b), les phénomènes de liquéfaction et de vaporisation sont plus intenses. Les résultats expérimentaux de Bilicki, Kwizinski et Ali Mohammadein [16] sont alors qualitativement retrouvés. La turbulence accélère la dynamique des transferts interfaciaux.

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 100\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 10\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$K_2 = K_1 = 200$ J.kg <sup>-1</sup>	$K_2 = K_1 = 5$ J.kg <sup>-1</sup>

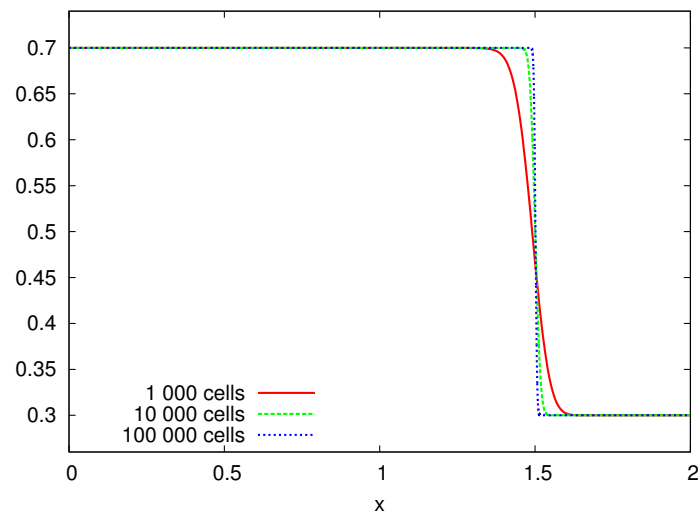
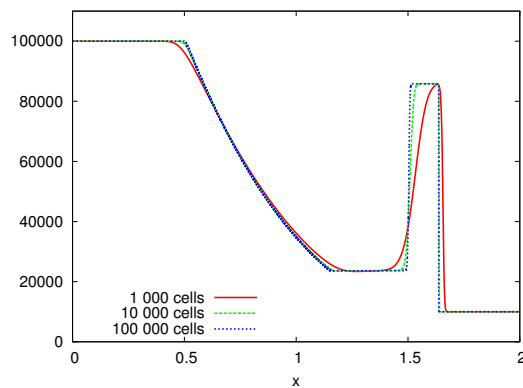
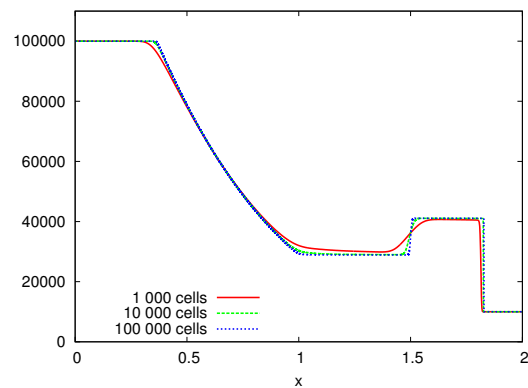
(c) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(d) Pression  $P_2$ .(e) Pression  $P_1$ .

Figure 15.1: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Raffinement de maillage pour l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov utilisant la formulation (10.6a) des équations portant sur l'énergie cinétique turbulente ( $t = 0.03$  s).

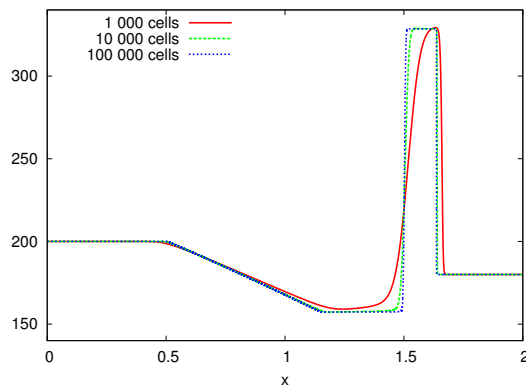
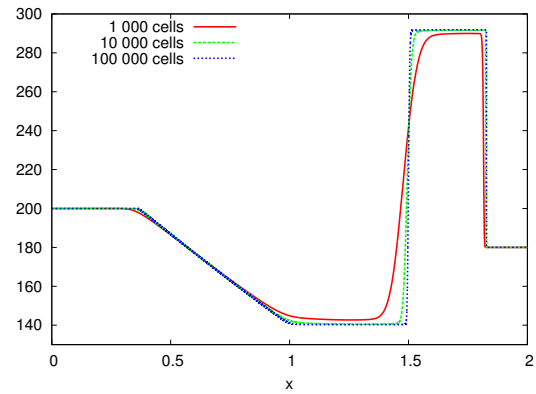
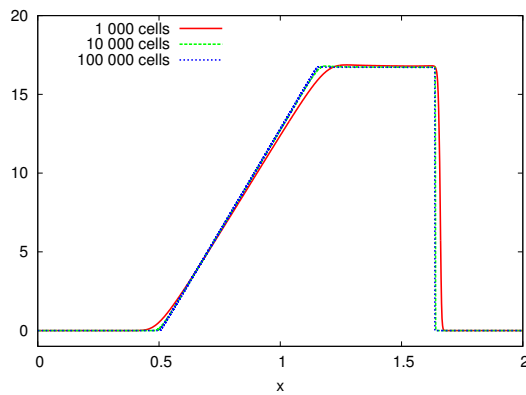
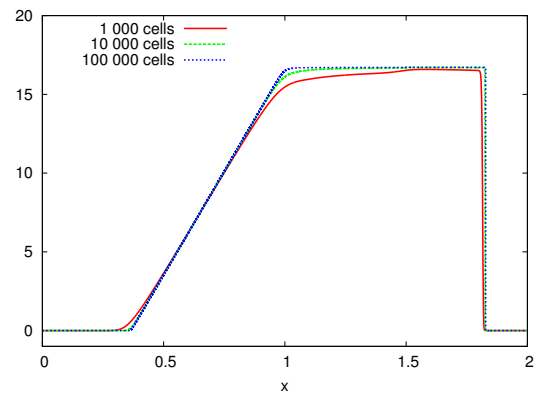
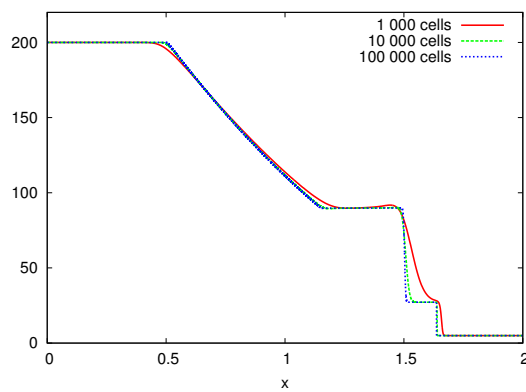
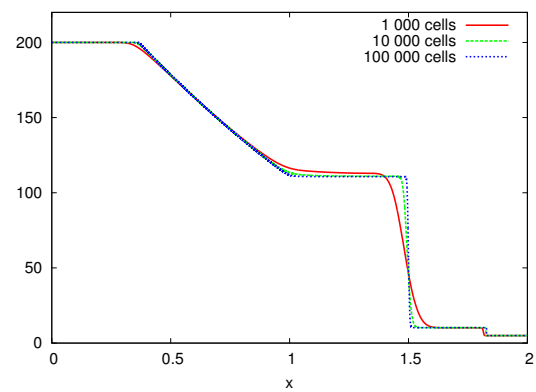
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .(h) Energie cinétique turbulente  $K_2$ .(i) Energie cinétique turbulente  $K_1$ .

Figure 15.1: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Raffinement de maillage pour l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov utilisant la formulation (10.6a) des équations portant sur l'énergie cinétique turbulente ( $t = 0.03$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 100\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 10\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$K_2 = K_1 = 200$ J.kg <sup>-1</sup>	$K_2 = K_1 = 5$ J.kg <sup>-1</sup>

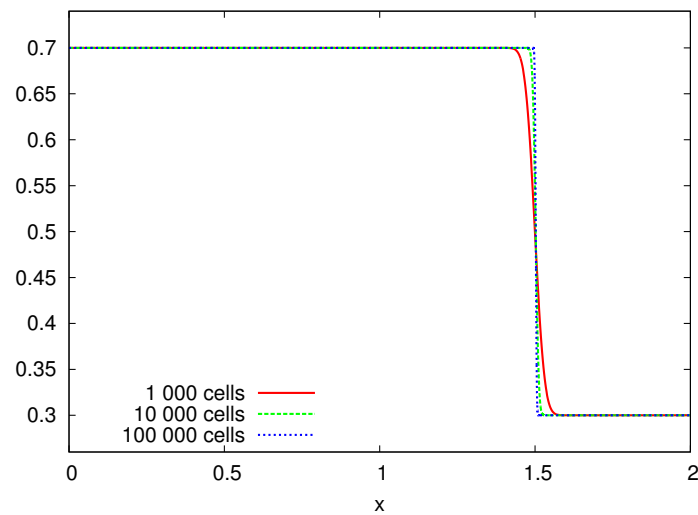
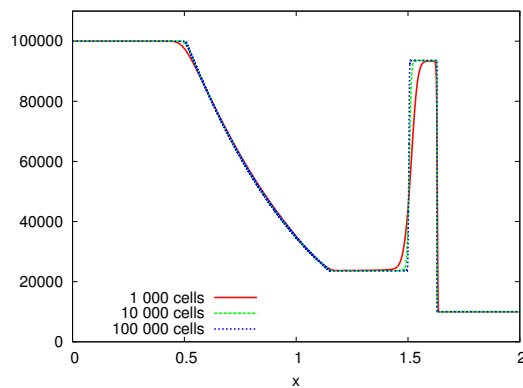
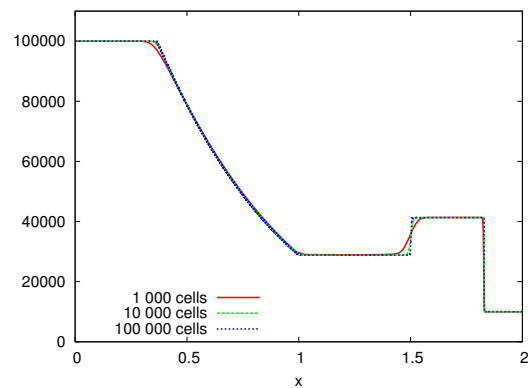
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 15.2: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Raffinement de maillage pour l'adaptation non-conservative du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv utilisant la formulation (10.6a) des équations portant sur l'énergie cinétique turbulente ( $t = 0.03$  s).



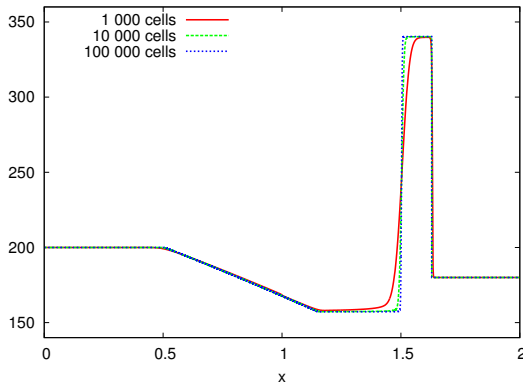
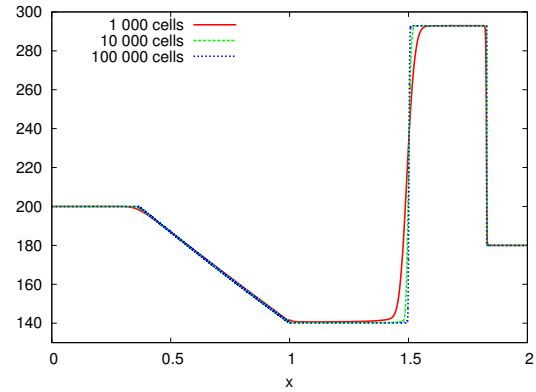
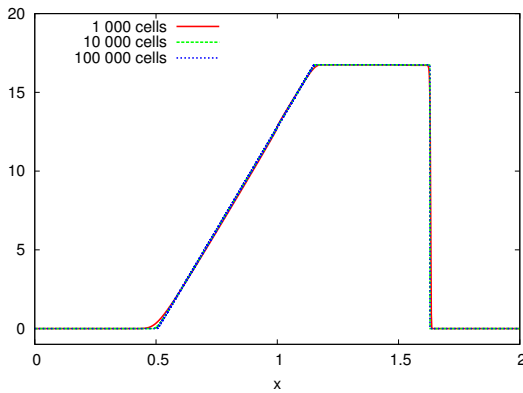
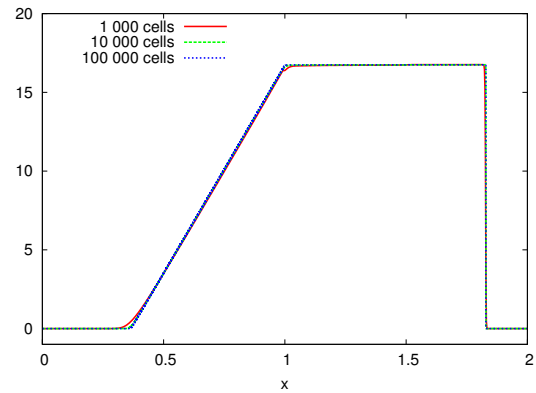
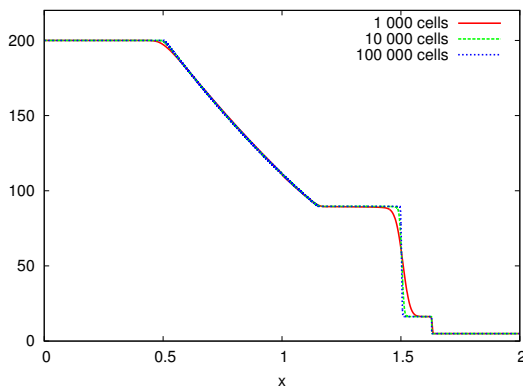
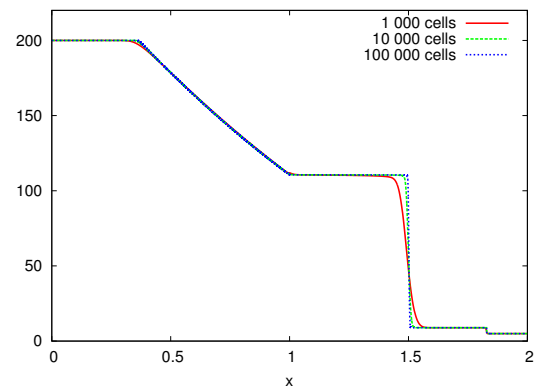
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .(h) Energie cinétique turbulente  $K_2$ .(i) Energie cinétique turbulente  $K_1$ .

Figure 15.2: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Raffinement de maillage pour l'adaptation non-conservative du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv utilisant la formulation (10.6a) des équations portant sur l'énergie cinétique turbulente ( $t = 0.03$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 100\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 10\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$K_2 = K_1 = 200$ J.kg <sup>-1</sup>	$K_2 = K_1 = 5$ J.kg <sup>-1</sup>

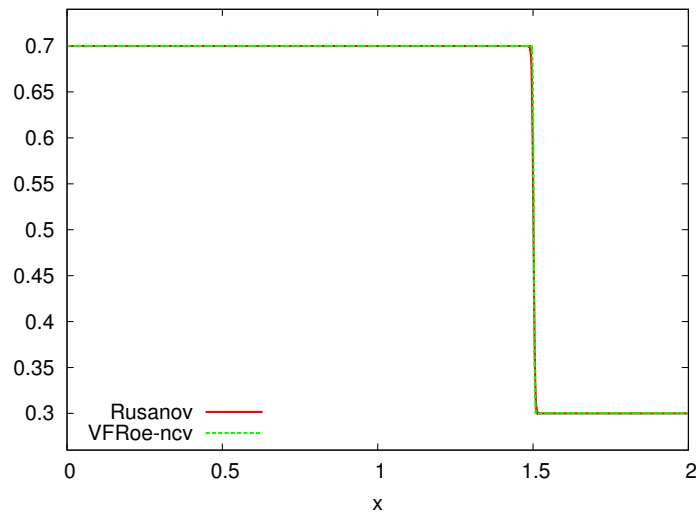
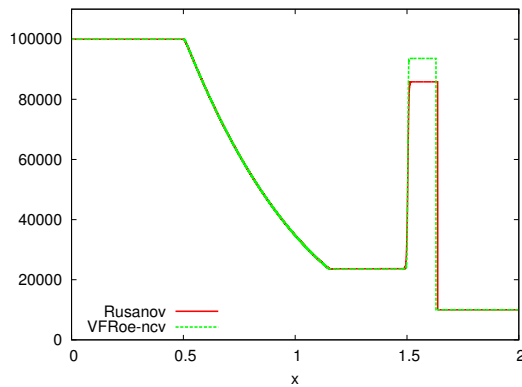
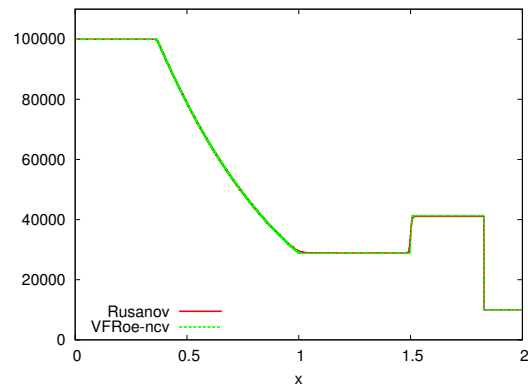
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 15.3: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Comparaison des solutions convergées fournies par les deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv utilisant la formulation (10.6a) des équations portant sur l'énergie cinétique turbulente ( $t = 0.03$  s).

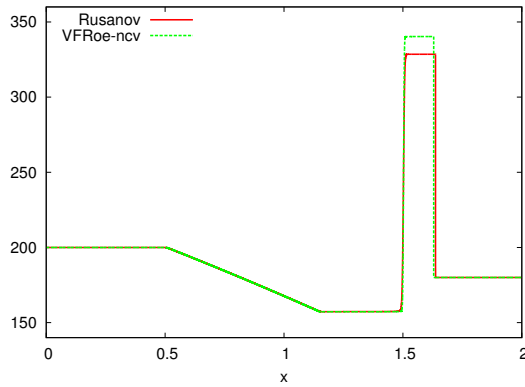
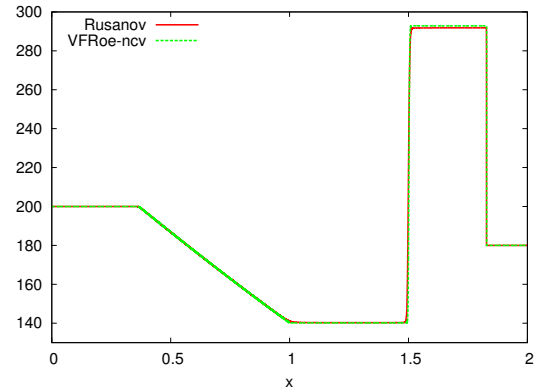
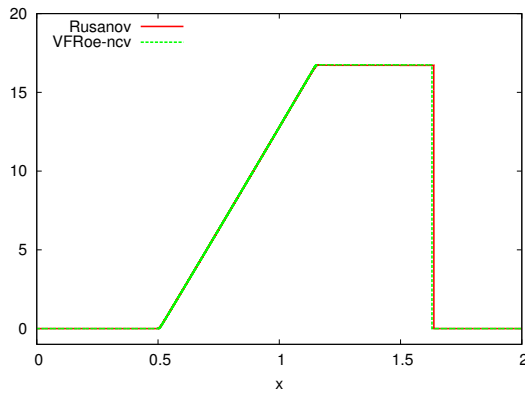
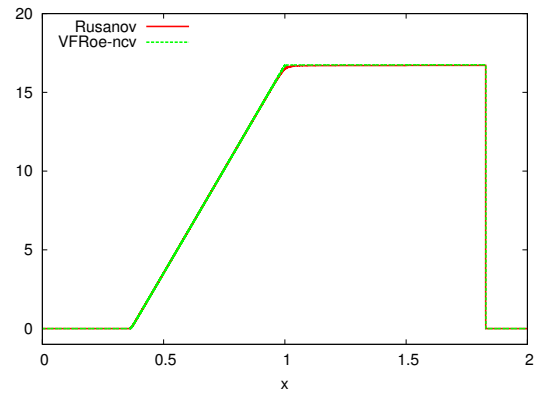
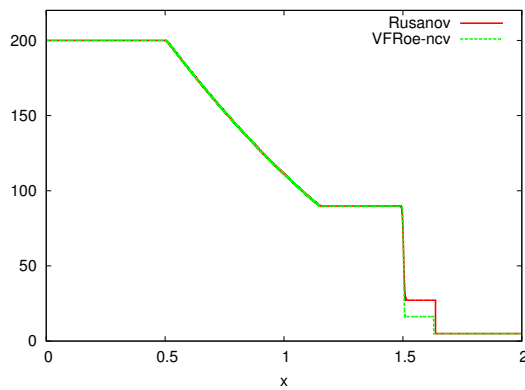
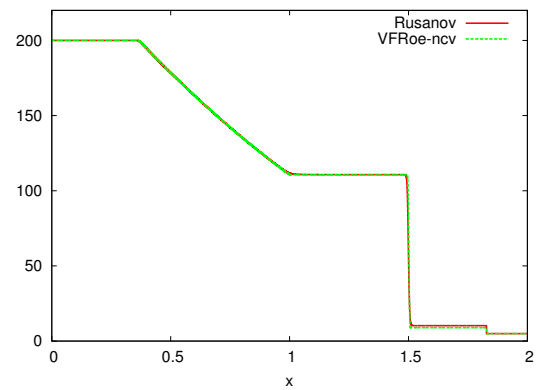
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .(h) Energie cinétique turbulente  $K_2$ .(i) Energie cinétique turbulente  $K_1$ .

Figure 15.3: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Comparaison des solutions convergées fournies par les deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv utilisant la formulation (10.6a) des équations portant sur l'énergie cinétique turbulente ( $t = 0.03$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 100\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 10\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$K_2 = K_1 = 200$ J.kg <sup>-1</sup>	$K_2 = K_1 = 5$ J.kg <sup>-1</sup>

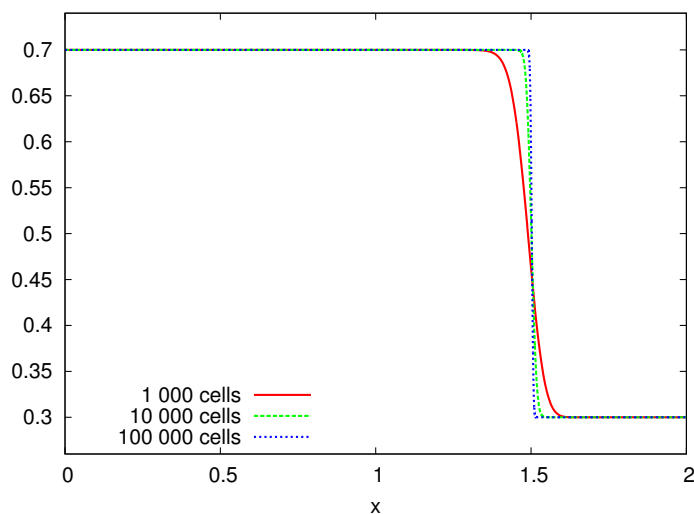
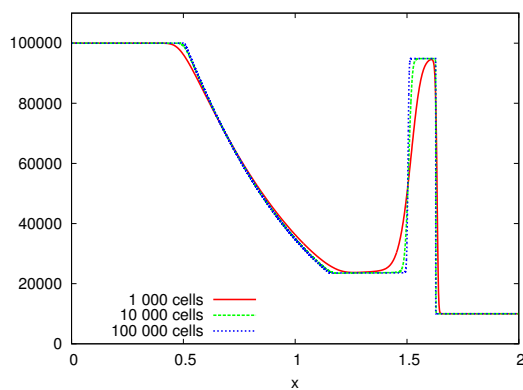
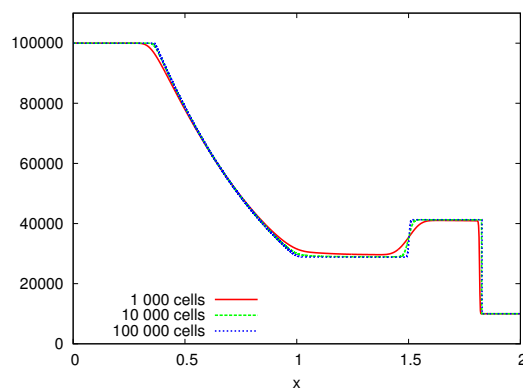
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 15.4: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Raffinement de maillage pour l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov utilisant la formulation (10.6b) des équations portant sur l'entropie turbulente ( $t = 0.03$  s).

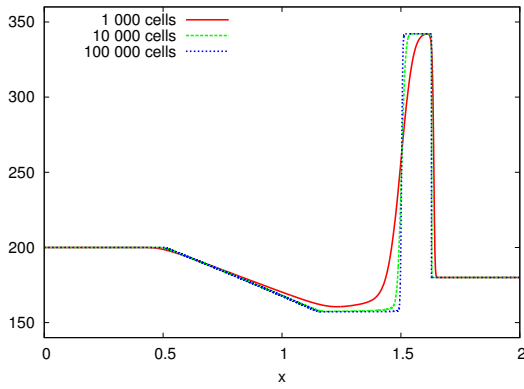
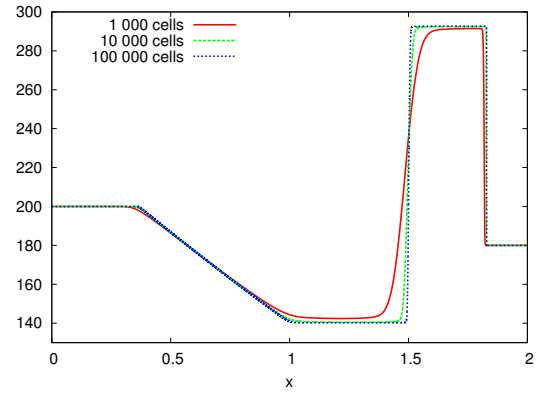
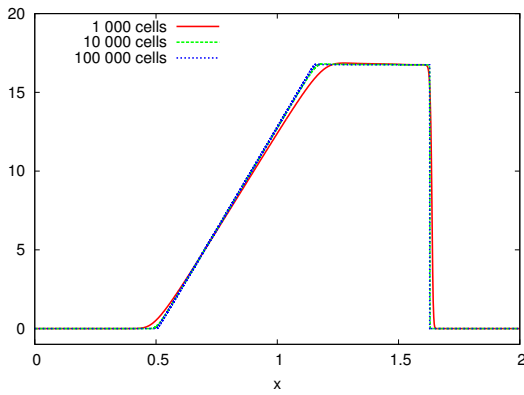
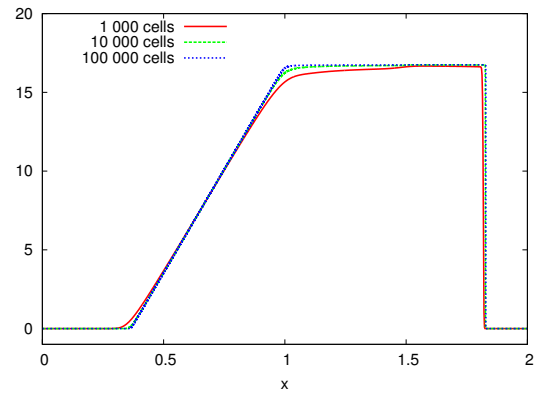
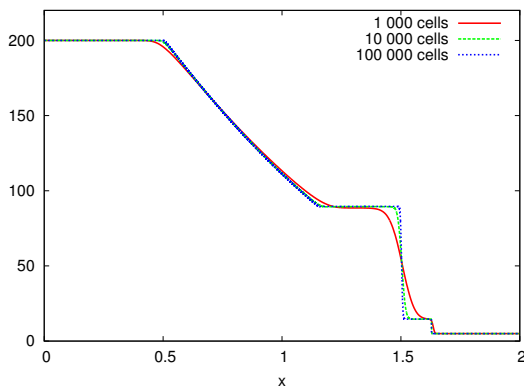
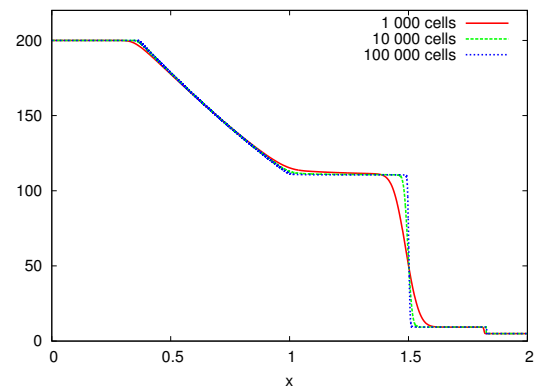
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .(h) Energie cinétique turbulente  $K_2$ .(i) Energie cinétique turbulente  $K_1$ .

Figure 15.4: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Raffinement de maillage pour l'adaptation non-conservative du schéma de Rusanov utilisant la formulation (10.6b) des équations portant sur l'entropie turbulente ( $t = 0.03$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 100\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 10\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$K_2 = K_1 = 200$ J.kg <sup>-1</sup>	$K_2 = K_1 = 5$ J.kg <sup>-1</sup>

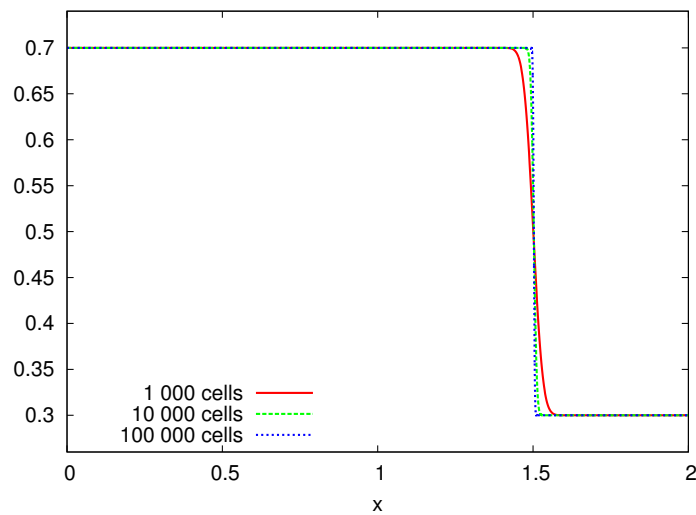
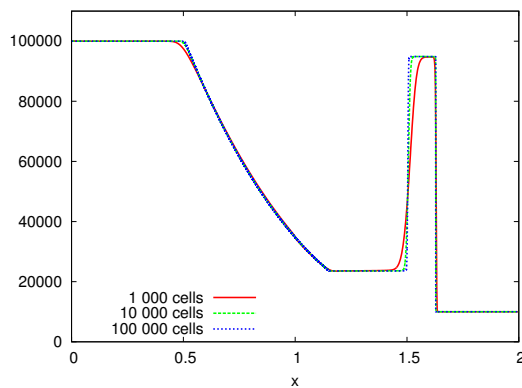
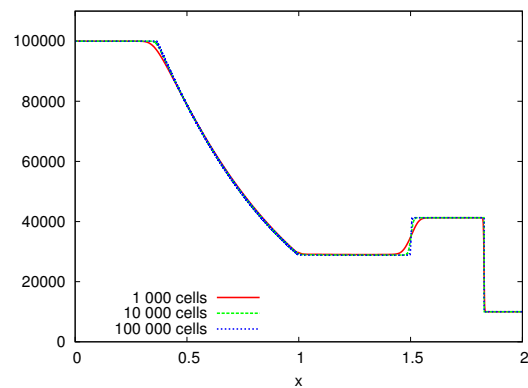
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 15.5: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Raffinement de maillage pour l'adaptation non-conservative du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv utilisant la formulation (10.6b) des équations portant sur l'entropie turbulente ( $t = 0.03$  s).

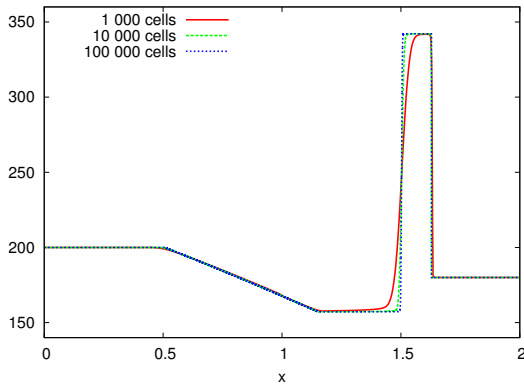
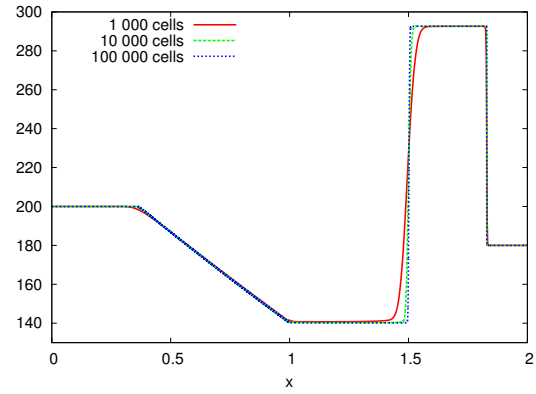
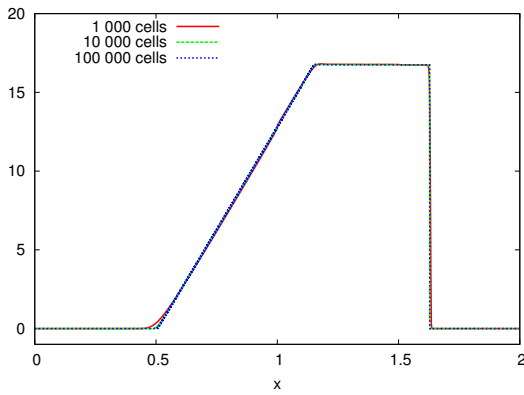
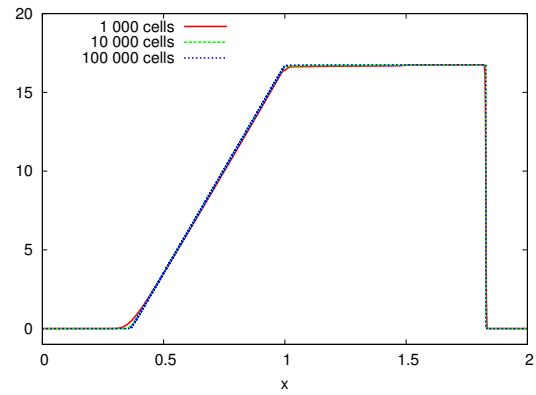
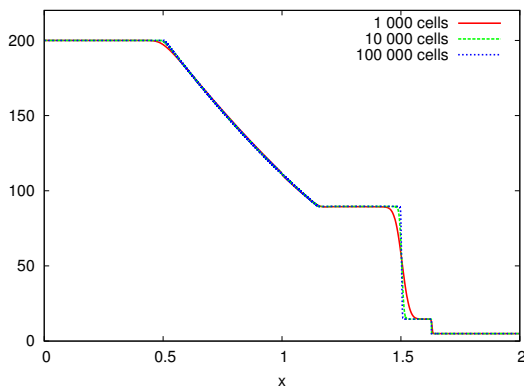
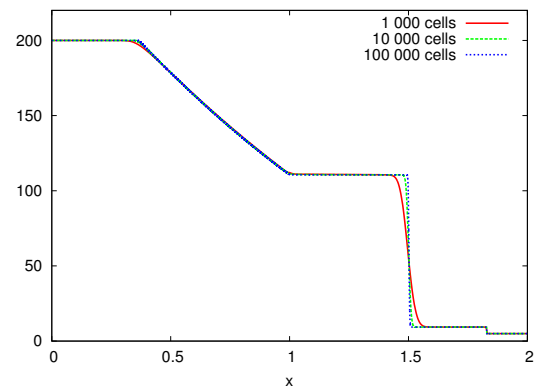
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .(h) Energie cinétique turbulente  $K_2$ .(i) Energie cinétique turbulente  $K_1$ .

Figure 15.5: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Raffinement de maillage pour l'adaptation non-conservative du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv utilisant la formulation (10.6b) des équations portant sur l'entropie turbulente ( $t = 0.03$  s).

Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 100\,000$ Pa	$P_2 = P_1 = 10\,000$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$K_2 = K_1 = 200$ J.kg <sup>-1</sup>	$K_2 = K_1 = 5$ J.kg <sup>-1</sup>

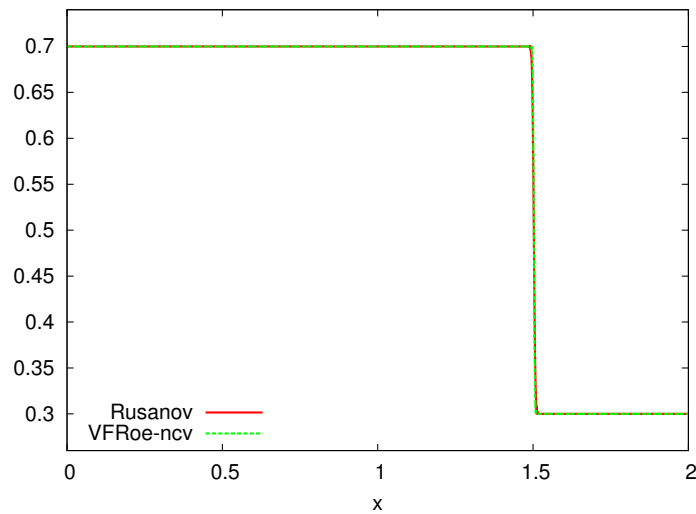
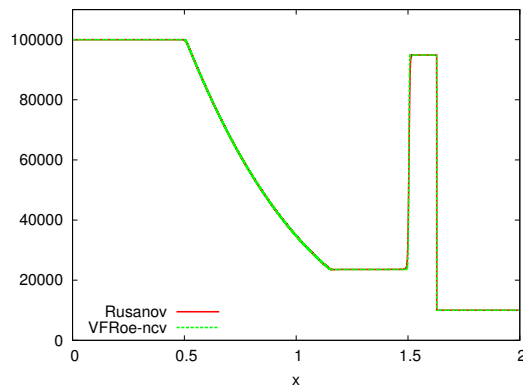
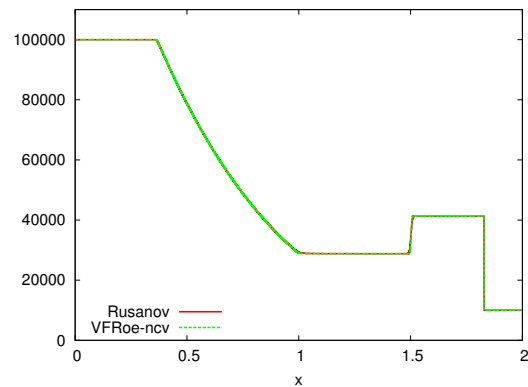
(a) Fraction volumique  $\alpha_2$ .(b) Pression  $P_2$ .(c) Pression  $P_1$ .

Figure 15.6: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Comparaison des solutions convergées fournies par les deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv utilisant la formulation (10.6b) des équations portant sur l'entropie turbulente ( $t = 0.03$  s).



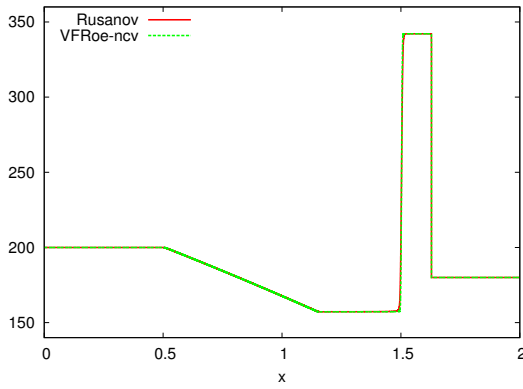
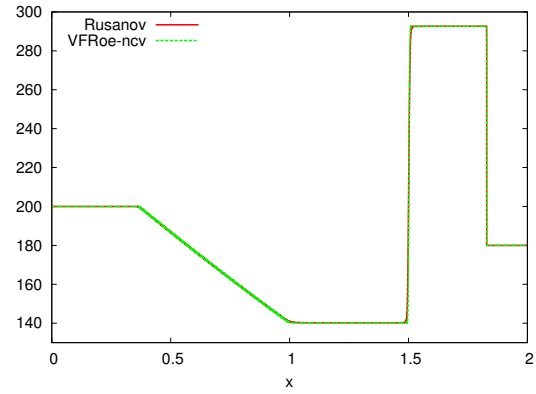
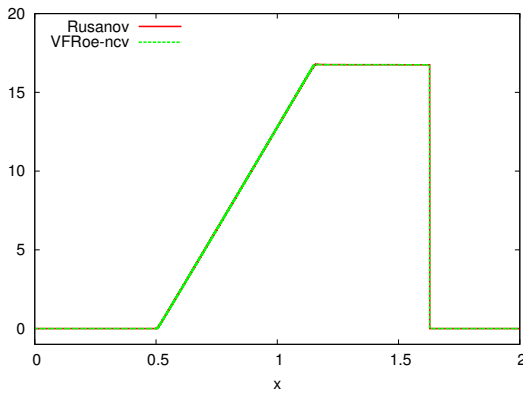
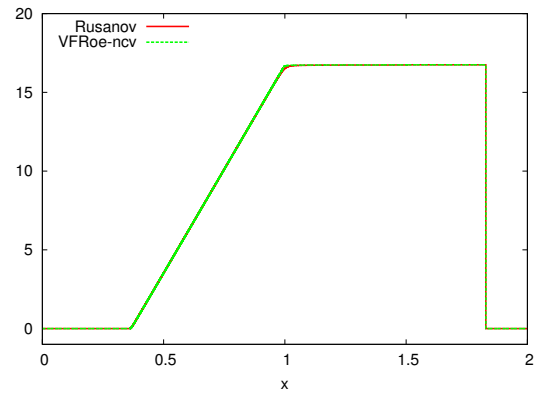
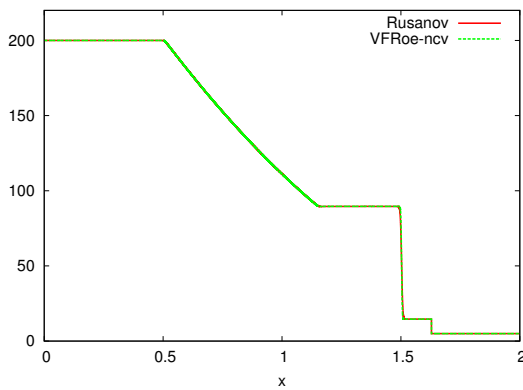
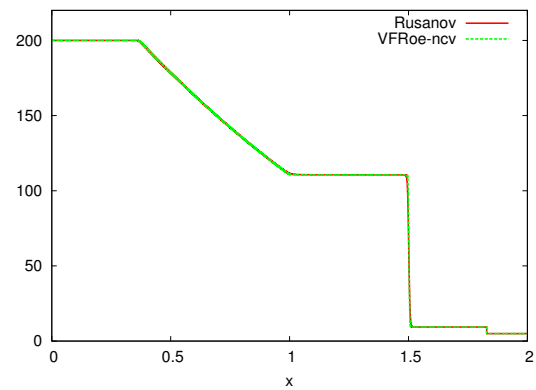
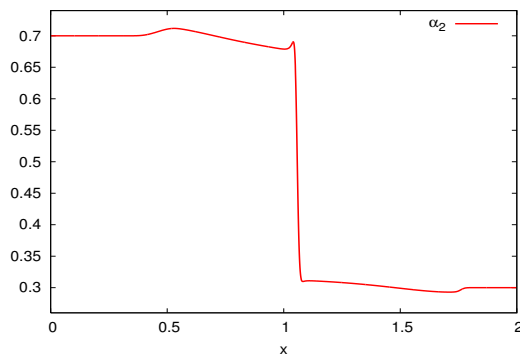
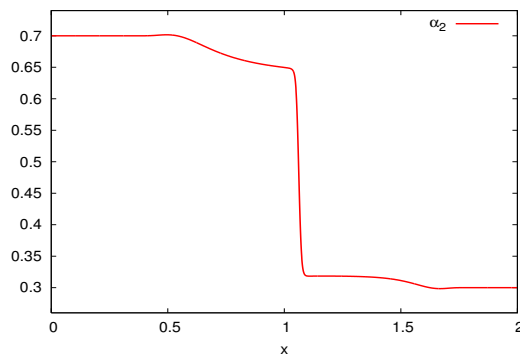
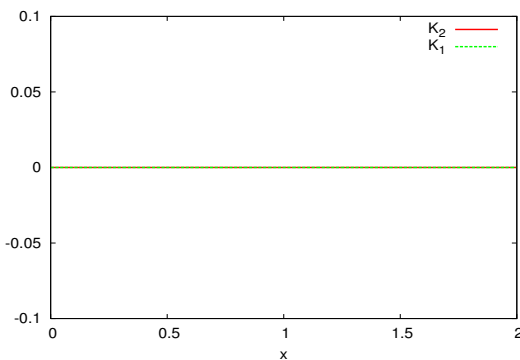
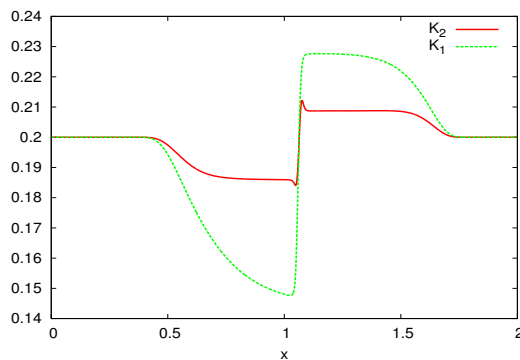
(d) Temperature  $T_2$ .(e) Temperature  $T_1$ .(f) Vitesse  $u_2$ .(g) Vitesse  $u_1$ .(h) Energie cinétique turbulente  $K_2$ .(i) Energie cinétique turbulente  $K_1$ .

Figure 15.6: simulation d'un tube à choc pour la partie convective du modèle bifluide turbulent à neuf équations. Comparaison des solutions convergées fournies par les deux adaptations non-conservatives du schéma de Rusanov et du schéma  $(\alpha_2, T_2, u_2, P_2, K_2, T_1, u_1, P_1, K_1)$ -VFRoe-ncv utilisant la formulation (10.6b) des équations portant sur l'entropie turbulente ( $t = 0.03$  s).

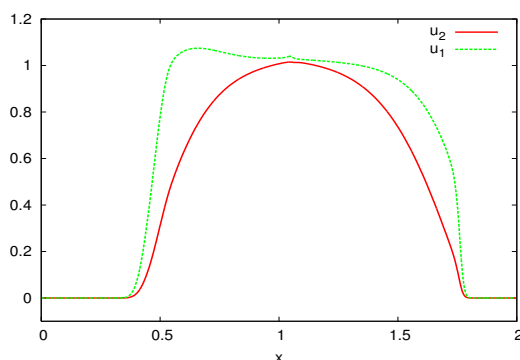
Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.7$	$\alpha_2 = 0.3$
$P_2 = P_1 = 838\,793$ Pa	$P_2 = P_1 = 633\,337$ Pa
$T_2 = T_1 = 200$ K	$T_2 = T_1 = 180$ K
$g_2 = g_1 = -99.7423$ J.kg <sup>-1</sup>	$g_2 = g_1 = -77.1248$ J.kg <sup>-1</sup>
$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>	$u_2 = u_1 = 0$ m.s <sup>-1</sup>
$K_2 = K_1 = \begin{cases} 0 \text{ J.kg}^{-1} & \text{(laminaire)}, \\ 0.2 \text{ J.kg}^{-1} & \text{(turbulent)}. \end{cases}$	$K_2 = K_1 = \begin{cases} 0 \text{ J.kg}^{-1} & \text{(laminaire)}, \\ 0.2 \text{ J.kg}^{-1} & \text{(turbulent)}. \end{cases}$

(a) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$  en régime laminaire.(b) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$  en régime turbulent.

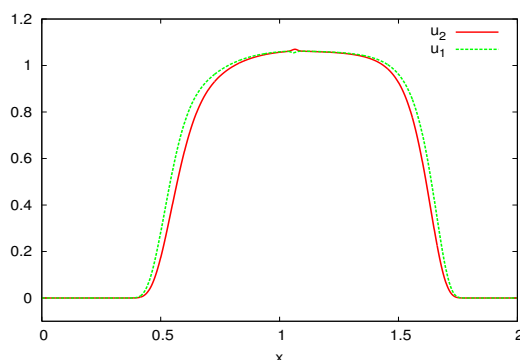
(c) Energies cinétiques turbulentes en régime laminaire.



(d) Energies cinétiques turbulentes en régime turbulent.

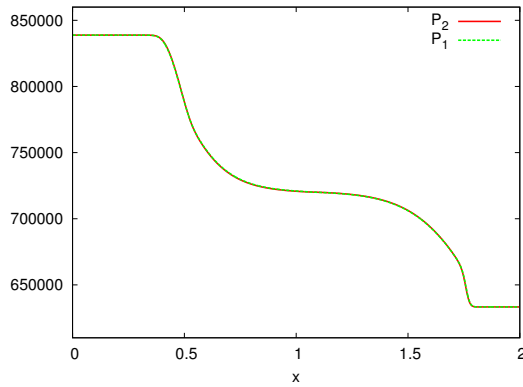


(e) Vitesses en régime laminaire.

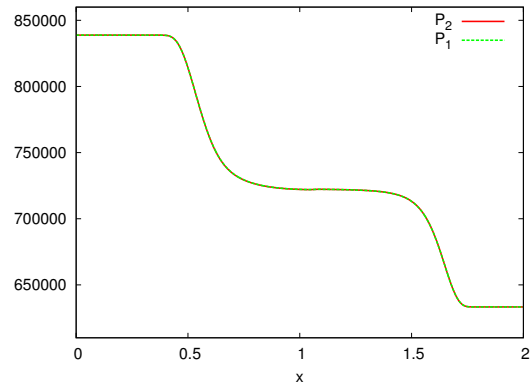


(f) Vitesses en régime turbulent.

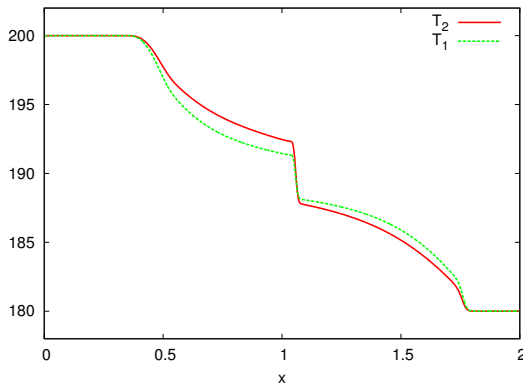
Figure 15.7: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase. Comparaison des transferts interfaciaux dans le cadre laminaire et turbulent ( $t = 0.06$  s).



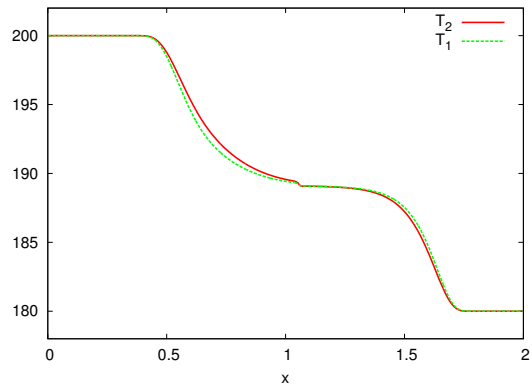
(g) Pressions en régime laminaire.



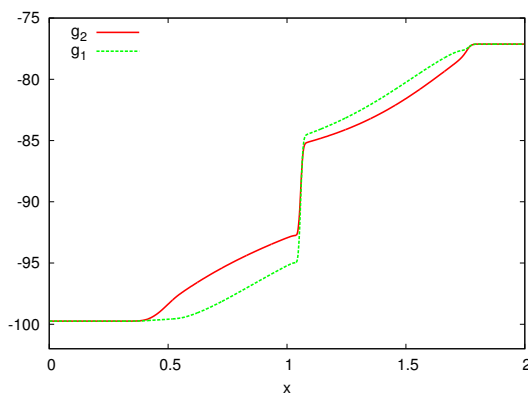
(h) Pressions en régime turbulent.



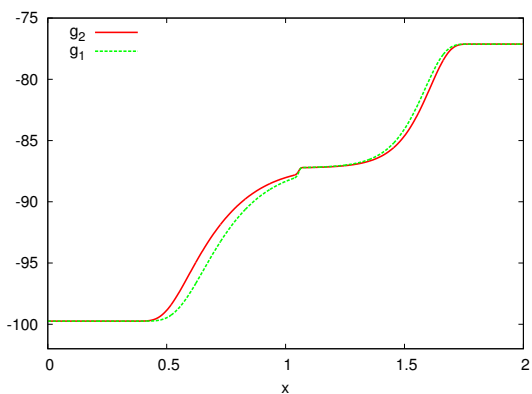
(i) Températures en régime laminaire.



(j) Températures en régime turbulent.



(k) Potentiels de Gibbs en régime laminaire.



(l) Potentiels de Gibbs en régime turbulent.

Figure 15.7: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase. Comparaison des transferts interfaciaux dans le cadre laminaire et turbulent ( $t = 0.06$  s).

# Chapitre 16

## Conclusion

Dans cette seconde partie de thèse, on a cherché à mesurer l'influence de la turbulence sur les transferts interfaciaux. A la suite des travaux entrepris par Hérard [61], un modèle de turbulence simple à une équation de transport sur l'énergie cinétique turbulente de chaque phase a été introduit dans le cadre des modèles de type Baer et Nunziato. De tels modèles bifluides à deux pressions avaient été précédemment étudiés à la partie I dans le cadre laminaire. On s'est intéressé aux modifications induites par l'implémentation de la turbulence.

A la suite des travaux entrepris par Lhuillier [78], Gavriluyk et Saurel [45], la fermeture de ce modèle bifluide turbulent a tout d'abord été envisagée conjointement à la définition d'une inégalité d'entropie. En ce qui concerne les interactions diphasiques, la forme générique des modélisations issues du cadre laminaire n'a pas été modifiée par l'implémentation de la turbulence. Les grandeurs interfaciales sont toujours associées à des combinaisons convexes des variables phasiques. Les transferts interfaciaux sont toujours associés à des modèles de relaxation. De nouveaux modèles pour les coefficients d'échange ont cependant été proposés. Ces nouveaux modèles pour les coefficients d'échange caractérisent l'influence de la turbulence sur les transferts interfaciaux.

Par la suite, on s'est intéressé aux propriétés de la partie convective associée au modèle bifluide turbulent. Dans un premier temps, la nature hyperbolique résonante de cette partie convective a été établie. Ce travail a constitué le rappel des résultats présentés par Hérard dans [61]. Ces résultats ont été replacés dans le cadre de l'hypothèse 1. Comme dans le cadre laminaire, les différentes résonances de cette partie convective ont ensuite été identifiées à des phénomènes marginaux pour les écoulements à faible nombre de Mach. L'implémentation de la turbulence ne modifie donc pas la nature généralement hyperbolique des modèles de type Baer et Nunziato. La partie convective du modèle bifluide turbulent se présente par ailleurs sous une forme non-conservative. Certains produits non-conservatifs proviennent de notre modélisation bifluide, les autres de notre modélisation de la turbulence. Suivant les travaux réalisés dans le cadre laminaire par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], les différents produits non-conservatifs issus de notre modélisation bifluide ont été localement définis en associant l'onde de fraction volumique à une discontinuité de contact. De nouvelles fermetures pour le couple  $(P_i, V_i)$  ont alors proposées qui dépendent notamment des énergies cinétiques turbulentes. En ce qui concerne la fermeture des produits non-conservatifs issus de notre modélisation de la turbulence, différentes définitions ont été comparées dans le cadre de la théorie développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29]. Pour assurer la dégénérescence du modèle bifluide turbulent vers les régimes laminaires, la définition proposée par Hérard dans [61] a été préférée à la fermeture de Volpert [103]. A titre préliminaire, l'étude du problème de Riemann associé à la partie convective du modèle bifluide turbulent a ensuite été entamée dans un cadre simplifié. Pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases, les différentes connexions onde par onde ont été étudiées en dehors des variétés de résonance. La structure très particulière mise à jour dans le cadre laminaire pour l'onde de fraction volumique a alors été retrouvée pour les écoulements turbulents. Cette structure très particulière pour l'onde de fraction volumique nous permet similairement de distinguer plusieurs régimes d'écoulement sur- et sous-critiques pour le mélange diphasique turbulent. Comme dans le cadre laminaire, cette étude demande maintenant à

être étendue au voisinage des variétés de résonance.

Par la suite, on s'est intéressé à la dynamique des transferts interfaciaux pour les écoulements liquide-vapeur turbulents en transition de phase. Dans le cadre des hypothèses 1 et 2, les différentes stabilités linéaire et non-linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse ont alors été retrouvées. Ces différentes stabilités pour les écoulements liquide-vapeur en transition de phase ne sont donc pas modifiées par l'implémentation de la turbulence. La dynamique des transferts interfaciaux dépend néanmoins de cette turbulence par le biais des coefficients d'échange. Pour étudier l'influence de la turbulence sur les transferts interfaciaux, une méthode numérique a ensuite été élaborée. Comme dans le cadre laminaire, cette méthode numérique s'appuie sur une approche à pas fractionnaires dans un formalisme Volumes Finis. Les résultats expérimentaux de Bilicki, Kwizinski et Ali Mohammadein [16] ont alors été qualitativement retrouvés. La turbulence accélère la dynamique des transferts interfaciaux. Plus la turbulence au sein du mélange diphasique est intense, plus rapidement se résorbent les déséquilibres entre les phases. Ces différents résultats numériques illustrent les propos de Kim, Sun et Ishii [73]. Par la suite, on s'intéresse à l'influence de la topologie diphasique sur la dynamique des transferts interfaciaux. Une procédure de reconstruction topologique est alors envisagée dans la troisième partie de cette thèse.

## **Troisième partie**

# **Une procédure de reconstruction pour la topologie diphasique**



## Chapitre 17

# Couplage entre un modèle bifluide à deux pressions et une équation de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale

Dans le cadre du projet NEPTUNE, une approche bifluide à deux pressions est envisagée dans cette thèse pour décrire les écoulements liquide-vapeur en transition de phase. Ces modèles bifluides dérivent généralement d'une procédure de moyenne appliquée aux équations locales instantanées. Dans cette description bifluide moyennée des écoulements diphasiques, on ne discerne plus la topologie du mélange liquide-vapeur. En ce qui concerne la répartition des phases, seule une information quantitative nous est fournie par le biais de la fraction volumique. A l'échelle bifluide, on ne distingue que les déséquilibres moyens entre les phases. Ces déséquilibres moyens induisent des transferts interfaciaux. Suivant les travaux de Kim, Sun et Ishii [73], ces transferts interfaciaux dépendent fortement de la turbulence et de la configuration topologique associées au mélange diphasique. Les résultats expérimentaux de Bilicki, Kwizinski et Ali Mohammadein [16] montrent l'accroissement des échanges interfaciaux avec l'intensité de la turbulence. Un accroissement de la surface d'échange entre les deux fluides accélère également la dynamique de ces transferts interfaciaux. De manière générale, l'ensemble des informations concernant la turbulence et la topologie du mélange diphasique a été filtré par la procédure de moyenne utilisée pour construire les modèles bifluides. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, une description précise des transferts interfaciaux nécessite la reconstruction de ces informations. A la partie précédente, un modèle de turbulence simple a déjà été étudié pour les écoulements diphasiques en transition de phase. Dans cette dernière partie de thèse, on s'intéresse à une procédure de reconstruction pour la topologie diphasique. On cherche à décrire l'ensemble des configurations représentées à la figure 17.1. De telles configurations pour la topologie diphasique peuvent par exemple apparaître lors de la dépressurisation accidentelle d'un réacteur à eau sous pression.

### 17.1 Introduction

Pour décrire mathématiquement l'influence des configurations diphasiques sur les transferts interfaciaux, un paramètre topologique doit tout d'abord être identifié. De manière générale, les transferts interfaciaux sont liés à la surface d'échange disponible entre les deux phases. Cette surface d'échange entre les deux fluides est couramment ramenée à l'unité de volume. Ce chapitre s'intéresse alors à une procédure de reconstruction pour la densité volumique d'aire interfaciale. Pour reconstruire cette densité volumique d'aire interfaciale, plusieurs approches ressortent de la littérature. Une relation algébrique peut tout d'abord être postulée entre certains paramètres d'état caractéristiques du mélange diphasique et la densité volumique d'aire interfaciale. Dans le cadre des écoulements de fluides frigogènes, Yang et Zhang [105]



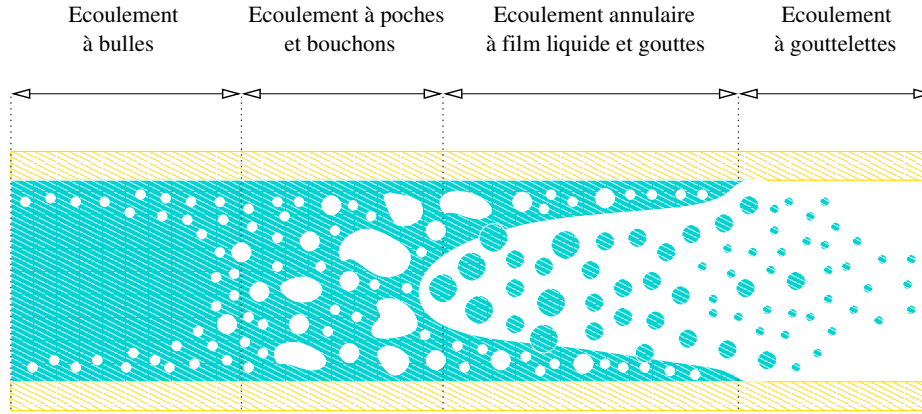


Figure 17.1: différentes configurations topologiques pour les écoulements liquide-vapeur en transition de phase.

utilisent par exemple une telle reconstruction algébrique pour affiner leur description des transferts interfaciaux. Pour décrire la dynamique des changements de configuration au sein des mélanges diphasiques, Ishii [67] postule différemment une équation d'évolution pour la densité d'aire interfaciale. Soit  $a_i$ ,  $V_i$  respectivement la densité volumique d'aire interfaciale et la vitesse moyenne de déplacement des interfaces. Cette équation pour la densité d'aire interfaciale s'écrit

$$\partial_t a_i + V_i \cdot \nabla a_i = \Psi, \quad (17.1)$$

où le terme source  $\Psi$  caractérise l'influence des phénomènes de coalescence et de fragmentation sur la surface d'échange disponible entre les deux fluides. Dans le cadre des écoulements à phase dispersée, Kocamustafaogullari et Ishii [75] ont dérivé cette équation d'évolution pour la densité d'aire interfaciale par le biais d'une approche particulière. Morel, Goreaud, Delhaye [84], Lhuillier [79], Séro-Guillaume et Rimbert [96] ont par la suite retrouvé cette équation pour  $a_i$  par le biais de diverses procédures de moyenne. Dans ce chapitre, on s'intéresse au couplage de cette équation de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale avec un modèle bifluide à deux pressions de type Baer et Nunziato.

Soit  $d$  la dimension de l'espace physique ( $d = 1, 2$  ou  $3$ ). La formulation générique du modèle bifluide à deux pressions et une équation de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale s'écrit dans un cadre multidimensionnel sous la forme compacte

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = S(W) + \nabla \cdot D(W, \nabla W) + \mathcal{R}(W). \quad (17.2)$$

La variable d'état inconnue  $W = W(t, x)$  est une application de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^{6+2d}$ . Le flux  $F$  est une application régulière de  $\mathbb{R}^{6+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{6+2d} \times \mathbb{R}^d$ . Les différentes interactions entre les phases sont liées au tenseur interfacial  $C$ , application régulière de  $\mathbb{R}^{6+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{6+2d} \times \mathbb{R}^{6+2d} \times \mathbb{R}^d$ , et au terme source  $S$ , application régulière de  $\mathbb{R}^{6+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{6+2d}$ . L'application régulière  $D(W, \nabla W) \in \mathbb{R}^{6+2d} \times \mathbb{R}^d$  caractérise les phénomènes de diffusion. La reconstruction topologique s'effectue pour finir par le biais de l'opérateur  $\mathcal{R}$ , application régulière de  $\mathbb{R}^{6+2d}$  dans  $\mathbb{R}^{6+2d}$ . Sans perte de généralité, les études réalisées dans ce chapitre s'effectuent sur la formulation monodimensionnelle (17.3) de ce système

$$\partial_t W + \partial_x F(W) + C(W) \partial_x W = S(W) + \partial_x \left[ D(W, \partial_x W) \right] + \mathcal{R}(W). \quad (17.3)$$

Dans ce cadre monodimensionnel, les différents termes du système (17.3) sont détaillés ci-dessous.

De manière analogue à la partie I, soit  $\alpha_k$ ,  $\rho_k$ ,  $P_k$ ,  $e_k$  et  $u_k$  respectivement la fraction volumique, la densité, la pression, l'énergie interne spécifique et la vitesse de la phase  $k = 1, 2$ . On définit similairement

pour  $k = 1, 2$ , la masse partielle  $m_k = \alpha_k \rho_k$  et l'énergie totale spécifique  $E_k = e_k + u_k^2/2$ . Les fractions volumiques vérifient toujours la contrainte de saturation

$$\sum_k \alpha_k = 1. \quad (17.4)$$

Soit  $a_i$  la densité volumique d'aire interfaciale. On s'intéresse dans ce chapitre aux solutions du système (17.3) dans l'espace admissible

$$\Omega = \{W \in \mathbb{R}^8 / \forall k = 1, 2, \alpha_k \in ]0, 1[, \rho_k > 0, P_k > 0, a_i > 0\}.$$

Pour cette définition des grandeurs caractéristiques du mélange diphasique, la variable d'état  $W$  et le flux  $F$  s'écrivent respectivement

$$W = \begin{pmatrix} a_i \\ \alpha_2 \\ m_2 \\ m_2 u_2 \\ m_2 E_2 \\ m_1 \\ m_1 u_1 \\ m_1 E_1 \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 u_2 \\ m_2 u_2^2 + \alpha_2 P_2 \\ (m_2 E_2 + \alpha_2 P_2) u_2 \\ m_1 u_1 \\ m_1 u_1^2 + \alpha_1 P_1 \\ (m_1 E_1 + \alpha_1 P_1) u_1 \end{pmatrix}.$$

Pour caractériser les propriétés thermomécaniques du mélange diphasique à l'échelle bifluide, on introduit en parallèle la variable  $Y = (\alpha_2, m_2, m_2 u_2, m_2 E_2, m_1, m_1 u_1, m_1 E_1)^t$ . Les effets diffusifs sont regroupés dans le tenseur

$$D(W, \partial_x W) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_2 \Sigma_2 \\ \alpha_2 \Sigma_2 \cdot u_2 - \alpha_2 F_{T_2} \\ 0 \\ \alpha_1 \Sigma_1 \\ \alpha_1 \Sigma_1 \cdot u_1 - \alpha_1 F_{T_1} \end{pmatrix},$$

où  $\Sigma_k$  et  $F_{T_k}$  désignent respectivement le tenseur des contraintes visqueuses et le flux de chaleur associés à la phase  $k$ . Pour caractériser les phénomènes de transfert au sein du mélange, plusieurs termes d'interaction apparaissent entre les phases. Certains sont d'ordre un et regroupés dans le tenseur interfacial  $C$ . Les autres sont d'ordre zéro et regroupés dans le terme source  $S$ . De manière analogue à la partie I, soit  $P_i$ ,  $V_i$  et  $e_i$  respectivement la pression, la vitesse et l'énergie interne spécifiques interfaciales. On définit similairement l'énergie totale spécifique interfaciale  $E_i = e_i + V_i^2/2$ . Les différents termes d'interaction entre les phases s'écrivent alors respectivement

$$C(W) \partial_x W = \begin{pmatrix} V_i \partial_x a_i \\ V_i \partial_x \alpha_2 \\ 0 \\ -P_i \partial_x \alpha_2 \\ -P_i V_i \partial_x \alpha_2 \\ 0 \\ -P_i \partial_x \alpha_1 \\ -P_i V_i \partial_x \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad S(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_2 \\ \Gamma_2 \\ D_2 + \Gamma_2 V_i \\ -P_i \delta_2 + D_2 V_i + \Phi_2 + \Gamma_2 E_i \\ \Gamma_1 \\ D_1 + \Gamma_1 V_i \\ -P_i \delta_1 + D_1 V_i + \Phi_1 + \Gamma_1 E_i \end{pmatrix},$$

où  $D_k$  désigne toujours pour  $k = 1, 2$ , le transfert de quantité de mouvement entre les phases,  $\Phi_k$  le transfert de chaleur,  $\Gamma_k$  le transfert de masse et  $\delta_k$  le terme source de fraction volumique. La préservation de la

masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie totale et de la saturation (17.4) du mélange s'écrit alors comme pour le modèle de Baer et Nunziato

$$\sum_k \Phi_k = 0, \quad \sum_k \Gamma_k = 0, \quad \sum_k D_k = 0, \quad \sum_k \delta_k = 0.$$

La procédure de reconstruction topologique s'effectue pour finir par le biais de l'opérateur

$$\mathcal{R}(W) = \left( \Psi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right)^t.$$

A ce stade, nous disposons d'une formulation générique ouverte du modèle bifluide à deux pressions et une équation de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale.

Dans un premier temps, on s'intéresse à la fermeture de ce modèle à huit équations. En ce qui concerne les lois d'état à utiliser pour décrire les écoulements liquide-vapeur, la fermeture du système (17.3) est d'office envisagée dans le cadre des hypothèses 1 et 2 postulées par Callen [19]. Pour  $k = 1, 2$ , on rappelle la définition du volume spécifique  $\tau_k = 1/\rho_k$ . L'hypothèse 1 nous place dans le cadre classique où une entropie strictement concave et strictement croissante  $s_k(\tau_k, e_k)$  est définie pour chaque constituant du mélange. Cette entropie vérifie la relation de Gibbs

$$\forall k = 1, 2, \quad ds_k = \frac{P_k}{T_k} d\tau_k + \frac{1}{T_k} de_k.$$

Pour décrire l'écoulement liquide-vapeur, l'hypothèse 2 postule par ailleurs l'existence d'un équilibre triple isobare isotherme équipotentiel monovariant pour le mélange diphasique. Muni de ces lois d'état pour les différents constituants du mélange, la fermeture du modèle bifluide à deux pressions sans reconstruction topologique a déjà été réalisée à la partie I. Diverses modélisations ont alors été proposées pour les termes d'interaction entre les phases. Ces modélisations particulières pour les interactions diphasiques sont compatibles avec la construction d'une inégalité d'entropie pour le modèle bifluide à deux pressions. La section 17.2 s'intéresse aux modifications introduites par la procédure de reconstruction topologique. La modélisation des interactions diphasiques est alors globalement inchangée. De nouveaux modèles sont cependant proposés pour les coefficients d'échange qui caractérisent l'intensité des transferts interfaciaux. Ces nouveaux modèles pour les coefficients d'échange dépendent de la densité d'aire interfaciale.

En ce qui concerne la procédure de reconstruction topologique, une nouvelle modélisation est ensuite proposée pour l'opérateur  $\Psi$ . Cette nouvelle modélisation pour l'opérateur  $\Psi$  s'appuie sur la définition d'un équilibre topologique. Une telle modélisation pour l'opérateur  $\Psi$  associe la procédure de reconstruction à un phénomène de relaxation vers cet équilibre topologique. Cette modélisation pour l'opérateur  $\Psi$  achève la fermeture du système (17.3). On étudie alors les modifications induites par cette reconstruction topologique sur les propriétés mathématiques du modèle bifluide à deux pressions. Dans un premier temps, la nature hyperbolique du système (17.3) est établie à la section 17.3. La stabilité des équilibres liquide-vapeur est ensuite réexaminée à la section 17.4. En ce qui concerne la procédure de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale, le retour à l'équilibre de la topologie diphasique est détaillé à la section 17.5. L'influence de la topologie diphasique sur la dynamique des transferts interfaciaux est alors numériquement étudiée pour finir.

## 17.2 Entropie et lois de fermeture

Au chapitre 3, une procédure de modélisation a déjà été présentée pour clore les modèles bifluides à deux pressions de type Baer et Nunziato. Suivant les travaux de Lhuillier [78], Gavriluk et Saurel [45], cette procédure de modélisation consiste en la construction d'une inégalité d'entropie pour le modèle bifluide à deux pressions. Dans cette section, on cherche à mesurer l'influence de la reconstruction topologique sur cette procédure de modélisation. En ce qui concerne la fermeture des interactions diphasiques, les modélisations déjà proposées au chapitre 3 sont tout d'abord retrouvées. La procédure de reconstruction topologique n'intervient cependant pas directement dans la définition de l'inégalité d'entropie pour le

système (17.3). Une nouvelle modélisation pour l'opérateur de reconstruction topologique est alors indépendamment proposée pour finir.

Pour  $k = 1, 2$ , on rappelle dans un premier temps la définition du potentiel de Gibbs  $g_k$  et du potentiel de changement de phase  $\theta_k$ . Ces différents potentiels s'écrivent respectivement

$$\forall k = 1, 2, \quad g_k = e_k + P_k \tau_k - T_k s_k, \quad \theta_k = g_k - \frac{(u_k - V_i)^2}{2}.$$

Soit  $\eta = \sum_k m_k s_k$  et  $F_\eta = \sum_k m_k s_k u_k$ . L'entropie de mélange  $\eta$  satisfait l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta + \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) (u_k - V_i) \cdot \nabla \alpha_k &= \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k - \sum_k \frac{1}{T_k} \nabla \cdot (\alpha_k F_{T_k}) \\ &+ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k. \end{aligned}$$

De manière analogue au modèle bifluide à deux pressions sans reconstruction topologique, la définition d'une entropie pour le système (17.3) est détaillée à la proposition 30.

**Proposition 30.** Soit  $\eta = \sum_k m_k s_k$  et  $F_\eta = \sum_k m_k s_k u_k$ . Le couple  $(\eta, F_\eta)$  est un couple entropie – flux d'entropie pour le système (17.3) à la condition que la vitesse et la pression interfaciales satisfassent la relation

$$\frac{1}{T_2} (P_i - P_2) (u_2 - V_i) - \frac{1}{T_1} (P_i - P_1) (u_1 - V_i) = 0. \quad (17.5)$$

La proposition 30 n'est pas nouvelle. Un tel résultat a déjà été présenté par Gallouët, Hérard et Seguin [42] dans le cadre des modèles bifluides à deux pressions sans reconstruction topologique. En résumé, la proposition 30 induit un lien entre la vitesse et la pression interfaciales qui ne peuvent plus être modélisées séparément. Cette relation de compatibilité entre  $P_i$  et  $V_i$  n'est pas affectée par la procédure de reconstruction topologique.

Suivant le travail de modélisation effectué au chapitre 3 dans le cadre des modèles bifluides à deux pressions sans reconstruction topologique, la loi de Newton et la loi de Fourier sont toutes deux retenues dans chaque phase pour clore le tenseur des contraintes visqueuses  $\Sigma_k$  et le flux de chaleur  $F_{T_k}$ . Ces modélisations des phénomènes de diffusion s'écrivent

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} \Sigma_k = -\frac{2}{3} \mu_k (\nabla \cdot u_k) \text{Id} + \mu_k (\nabla u_k + (\nabla u_k)^t), & \text{(loi de Newton)} \\ F_{T_k} = -\kappa_{T_k} \nabla T_k, & \text{(loi de Fourier)} \end{cases} \quad (17.6)$$

où  $\mu_k \geq 0$  et  $\kappa_{T_k} \geq 0$  désignent respectivement la viscosité et la conductivité thermique de la phase  $k$ . De manière analogue au chapitre 3, les grandeurs interfaciales sont par la suite associées à des combinaisons convexes des variables phasiques. Ces différentes modélisations pour les grandeurs interfaciales s'écrivent

$$\begin{cases} V_i = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2, & \beta \in [0, 1], \\ P_i = \mu(\beta) P_1 + (1 - \mu(\beta)) P_2, & \mu(\beta) = \frac{T_2 (1 - \beta)}{T_2 (1 - \beta) + T_1 \beta} \in [0, 1], \\ e_i = \nu \theta_1 + (1 - \nu) \theta_2, & \nu \in [0, 1]. \end{cases} \quad (17.7)$$

Les transferts interfaciaux sont par ailleurs modélisés par les termes de relaxation

$$\forall k = 1, 2, \quad \begin{cases} \delta_k = K_P (P_k - P_{k'}), & K_P(W) > 0, \\ D_k = K_U (u_{k'} - u_k), & K_U(W) > 0, \\ \Phi_k = K_T (T_{k'} - T_k), & K_T(W) > 0, \\ \Gamma_k = K_\theta (\theta_{k'} - \theta_k), & K_\theta(W) > 0. \end{cases} \quad (17.8)$$

$k' = 3 - k,$

Muni de ces lois de fermeture, le système (17.3) est maintenant doté de l'inégalité d'entropie

$$\begin{aligned} \partial_t \eta + \nabla \cdot F_\eta - \sum_k \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_k \kappa_{T_k} \nabla T_k}{T_k} \right) &= \sum_k \frac{1}{T_k} \alpha_k \Sigma_k : \nabla u_k + \sum_k \frac{\alpha_k \kappa_{T_k} (\nabla T_k)^2}{T_k^2} \\ &+ \sum_k \frac{1}{T_k} \Phi_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (V_i - u_k) \cdot D_k + \sum_k \frac{1}{T_k} (e_i - \theta_k) \Gamma_k - \sum_k \frac{1}{T_k} (P_i - P_k) \delta_k \geq 0. \end{aligned} \quad (17.9)$$

A titre de comparaison avec les modèles bifluïdes à deux pressions sans reconstruction topologique, l'inégalité d'entropie (17.9) n'est pas modifiée par la procédure de reconstruction topologique.

Les différentes fonctions de relaxation  $K_U, K_P, K_T, K_\theta$  ou coefficients d'échange interfaciaux dépendent cependant de la topologie diphasique. Pour caractériser l'influence de la topologie diphasique sur les échanges interfaciaux, Aniel-Buchheit, Chanoine, Grégoire et Pinson [7] considèrent les transferts entre les phases proportionnels à la densité d'aire interfaciale. Une formulation légèrement modifiée des coefficients (3.9) est alors proposée pour décrire l'influence de la densité d'aire interfaciale sur les échanges interfaciaux. Dans un premier temps, on rappelle la définition des coefficients thermodynamiques  $\mathcal{A}_{uu}, \mathcal{A}_{pp}, \mathcal{A}_{tt}, \mathcal{A}_{\theta\theta}$  introduits à la figure 5.1. Ces coefficients thermodynamiques s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{uu} &= \sum_k \frac{1}{m_k}, & \mathcal{A}_{pp} &= \sum_k \frac{\hat{\gamma}_k P_k}{\alpha_k} + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (P_i - P_k), & \mathcal{A}_{tt} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial T_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1}, \\ \mathcal{A}_{\theta\theta} &= \sum_k \frac{1}{m_k} \left[ \rho_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial \rho_k} \right)_{P_k} + \hat{\gamma}_k P_k \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \right] - \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} T_k s_k + \frac{1}{m_k} \left( \frac{\partial g_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k} \left( \frac{\partial e_k}{\partial P_k} \right)_{\rho_k}^{-1} (e_i - \theta_k). \end{aligned}$$

Soit  $a_{i_0}$  une densité d'aire interfaciale de référence. On définit par la suite le coefficient de reconstruction topologique

$$\mathcal{A}_i = \frac{a_i}{a_{i_0}}.$$

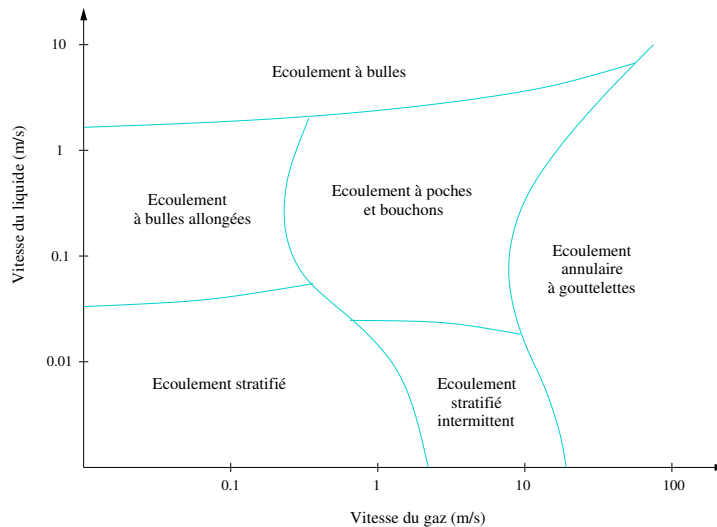
On modélise pour finir les différentes fonctions de relaxation

$$K_U = \frac{\mathcal{A}_i}{\tau_U \mathcal{A}_{uu}}, \quad K_P = \frac{\mathcal{A}_i}{\tau_P \mathcal{A}_{pp}}, \quad K_T = \frac{\mathcal{A}_i}{\tau_T \mathcal{A}_{tt}}, \quad K_\theta = \frac{\mathcal{A}_i}{\tau_\theta \mathcal{A}_{\theta\theta}}. \quad (17.10)$$

Dans cette modélisation (17.10) des coefficients d'échange interfaciaux,  $\tau_U, \tau_P, \tau_T$  et  $\tau_\theta$  caractérisent les temps de retour à l'équilibre des vitesses, pressions, températures et potentiels de changement de phase. Suivant l'analyse bibliographique menée à la section 3.4, ces échelles de temps sont identifiées à des constantes de l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s. Pour cette modélisation (17.10) des coefficients d'échange interfaciaux, la stabilité linéaire de certains équilibres liquide-vapeur sera numériquement vérifiée à la section 17.4. Lors de la simulation des transferts interfaciaux, cette modélisation (17.10) des coefficients d'échange nous permettra par ailleurs de reproduire numériquement les tendances observées expérimentalement. Plus la surface d'échange disponible entre les deux fluides sera importante, plus rapidement se résorberont les déséquilibres entre les phases.

En ce qui concerne la procédure de reconstruction topologique, aucune information ne nous est cependant fournie par l'inégalité d'entropie (17.9) pour clore l'opérateur  $\Psi$ . Cet opérateur de reconstruction caractérise l'influence des phénomènes de coalescence et de fragmentation sur la surface d'échange disponible entre le liquide et sa vapeur. De manière générale, les fermetures présentées dans la littérature pour clore cet opérateur de reconstruction dépendent des configurations topologiques envisagées. Dans le cadre des écoulements à bulles, certains modèles de coalescence et de fragmentation ont par exemple été développés par Hibiki et Ishii [64]. De tels modèles sont par nature limités au cadre des écoulements à phase dispersée. Pour décrire l'ensemble des configurations topologiques associées aux écoulements diphasiques, on se ramène souvent à des corrélations expérimentales. De telles corrélations expérimentales expriment généralement la densité d'aire interfaciale d'un écoulement diphasique permanent en fonction de

Figure 17.2: tracé d'une carte de configuration pour un mélange eau-air dans une conduite inclinée. (Reproduction des résultats expérimentaux obtenus par Barnea, Shoham, Taitel et Dukler [11]).



la variable  $Y = (\alpha_2, m_2, m_2 u_2, m_2 E_2, m_1, m_1 u_1, m_1 E_1)^t$  caractéristique des propriétés thermomécaniques du mélange. Dans le cadre des écoulements de fluides frigogènes, une telle corrélation expérimentale nous est par exemple fournie par Yang et Zhang [105]. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, aucune corrélation de ce type n'a cependant été portée à notre attention pour les écoulements eau-vapeur à faible nombre de Mach. Pour décrire l'ensemble des variétés topologiques de certains mélanges eau-air au comportement proche de nos mélanges eau-vapeur, seules quelques cartes de configuration ressortent de la littérature. De telles cartes de configuration ont par exemple été tracées par Mandhane, Gregory, Aziz [80]. Suivant les travaux de Barnea, Shoham, Taitel et Dukler [11], une telle carte de configuration est par exemple reproduite à la figure 17.2. De manière générale, ces cartes de configuration représentent la topologie d'un écoulement diphasique permanent en fonction de la variable  $Y$  caractéristique des propriétés thermomécaniques du mélange. La carte de configuration reproduite à la figure 17.2 paramètre ainsi la topologie d'un écoulement diphasique stationnaire par le biais des deux vitesses phasiques. A la suite des travaux entrepris par Ishii, Paranjape, Kim et Sun [69], nous proposons ici de traduire ces cartes de configuration expérimentales en termes de densité d'aire interfaciale. Une telle corrélation construite à partir des cartes de configuration expérimentales donne accès à la densité d'aire interfaciale associée à un écoulement diphasique permanent. Par la suite, une telle distribution d'aire interfaciale pour un écoulement diphasique permanent est notée  $a_i^{\text{eq}}(Y)$ . Soit  $a_i^0 > 0$ ,  $\Delta u_0 > 0$ ,  $\epsilon_0 > 0$  respectivement une densité d'aire interfaciale, un écart de vitesse et une constante de référence à caler sur l'expérience. Pour traduire en termes d'aire interfaciale la carte de configuration reproduite à la figure 17.2, nous proposons ici à titre d'exemple la corrélation heuristique

$$a_i^{\text{eq}}(Y) = \alpha_1 \alpha_2 a_i^0 \left( 1 + \frac{\epsilon_0 |u_2 - u_1|}{|u_2 - u_1| + \Delta u_0} \right). \quad (17.11)$$

Une telle expression pour la densité d'aire interfaciale d'un écoulement diphasique permanent traduit l'accroissement de la surface d'échange avec les déséquilibres entre les phases. Suivant la carte de configuration reproduite à la figure 17.2, ces déséquilibres entre les phases sont ici associés aux déséquilibres de vitesse. Lorsqu'une des phases tend à disparaître, la dépendance parabolique de  $a_i^{\text{eq}}$  en  $\alpha_2$  assure par ailleurs la dégénérescence de cette corrélation vers les régimes monophasiques.

Pour décrire la dynamique des changements de configuration au sein du mélange diphasique, une nouvelle modélisation est alors proposée pour l'opérateur de reconstruction  $\Psi$ . Cette nouvelle modélisation

pour l'opérateur de reconstruction topologique s'écrit

$$\Psi = -\frac{1}{\tau_i} \left[ a_i - a_i^{\text{eq}}(Y) \right], \quad (17.12)$$

où  $\tau_i$  désigne le temps caractéristique du changement de configuration pour le mélange diphasique. On suppose ce temps caractéristique de l'ordre des phénomènes de coalescence et de fragmentation. Suivant les résultats expérimentaux de Kirkpatrick, Lockett [74], Pilch et Erdman [88], ce temps caractéristique  $\tau_i$  est identifié à une constante de l'intervalle  $[10^{-3}, 1]$  s. Un tel modèle de relaxation (17.12) pour l'opérateur  $\Psi$  associe les distributions expérimentales  $a_i^{\text{eq}}(Y)$  à des points d'équilibre pour la procédure de reconstruction topologique. Cette modélisation pour l'opérateur  $\Psi$  achève la fermeture du modèle bifluide à deux pressions et une équation de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale.

### 17.3 La partie convective

A la section précédente, la fermeture du modèle bifluide à deux pressions et une équation de reconstruction pour la topologie diphasique a été envisagée dans le cadre des écoulements liquide-vapeur. Le système (17.3) est maintenant complètement fermé et doté d'une inégalité d'entropie. On s'intéresse dans cette section aux propriétés de sa partie convective

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t a_i + V_i \partial_x a_i = 0, \\ \partial_t \alpha_2 + V_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2) = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 u_2) + \partial_x (\alpha_2 \rho_2 u_2^2 + \alpha_2 P_2) - P_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_2 \rho_2 E_2) + \partial_x [\alpha_2 (\rho_2 E_2 + P_2) u_2] - P_i V_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1) = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 u_1) + \partial_x (\alpha_1 \rho_1 u_1^2 + \alpha_1 P_1) + P_i \partial_x \alpha_2 = 0, \\ \partial_t (\alpha_1 \rho_1 E_1) + \partial_x [\alpha_1 (\rho_1 E_1 + P_1) u_1] + P_i V_i \partial_x \alpha_2 = 0. \end{array} \right. \quad (17.13)$$

La nature et la définition des solutions faibles associées à la partie convective non-conservative du modèle de Baer et Nunziato ont déjà été étudiées au chapitre 4. On s'intéresse ici aux modifications induites par la procédure de reconstruction topologique.

Dans cette partie convective (17.13), le sous-modèle bifluide à sept équations est complété par une huitième équation de transport pour la densité d'aire interfaciale. Comparée au chapitre 4, la structure propre associée au sous-système bifluide à sept équations n'est pas modifiée par la procédure de reconstruction topologique. Pour  $k = 1, 2$ , soit  $c_k$  la vitesse du son dans l'une et l'autre phase. La nature du système (17.13) est présentée à la proposition 31.

**Proposition 31.** *Sous l'hypothèse 1, la partie convective (17.13) du modèle bifluide à deux pressions et une équation de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale est hyperbolique résonante sur l'espace admissible  $\Omega$ . Cette partie convective admet toujours un spectre réel. Ses vecteurs propres à droite engendrent l'espace  $\mathbb{R}^8$  excepté le long des variétés  $V_i = u_k \pm c_k$ ,  $k = 1, 2$ .*

Suivant la proposition 31, la procédure de reconstruction topologique (17.1) ne modifie donc pas la nature généralement hyperbolique des modèles bifluides à deux pressions de type Baer et Nunziato.

En ce qui concerne la définition des solutions faibles pour le système non-conservatif (17.13), la stratégie adoptée au chapitre 4 pour le modèle bifluide à deux pressions sans reconstruction topologique est à nouveau retenue. Suivant les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], cette stratégie consiste à définir localement les produits non-conservatifs  $V_i \partial_x a_i$ ,  $V_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i \partial_x \alpha_k$ ,  $P_i V_i \partial_x \alpha_k$  sans recourir à la théorie développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29]. De manière analogue au chapitre 4, la vitesse interfaciale est alors identifiée à un invariant de Riemann pour le champ double associé à l'onde de fraction

volumique et d'aire interfaciale. L'ensemble (4.10) des modélisations de la littérature à vérifier cette propriété pour la vitesse interfaciale est regroupé dans le tableau 3.1. De telles modélisations pour la vitesse interfaciale définissent localement les produits non-conservatifs  $V_i \partial_x a_i$ ,  $V_i \partial_x \alpha_k$ . La fermeture du produit non-conservatif  $P_i \partial_x \alpha_k$  est ensuite effectuée similairement au chapitre 4 par le biais de l'équation d'entropie  $\partial_t \eta + \partial_x F_\eta = 0$ . La procédure de reconstruction topologique (17.1) ne modifie donc ni la nature généralement hyperbolique, ni le caractère localement bien défini des différents produits non-conservatifs associés aux modèles bifluïdes à deux pressions étudiés à la partie I.

## 17.4 Dynamique des transferts interfaciaux

A la section précédente, l'étude mathématique du système (17.3) a été entamée par l'analyse de sa partie convective. Cette analyse est poursuivie dans cette section par l'étude des transferts interfaciaux pour les écoulements en transition de phase. Dans le cadre des modèles bifluïdes de type Baer et Nunziato, cette étude des transferts interfaciaux a déjà été réalisée au chapitre 5. Dans cette section, on cherche à déterminer les modifications introduites par l'équation d'évolution pour la densité d'aire interfaciale.

De manière analogue à la partie I, soit  $\rho = \sum_k m_k$ ,  $\rho V = \sum_k m_k u_k$ ,  $\rho E = \sum_k m_k E_k$  respectivement la masse, la quantité de mouvement et l'énergie totale du mélange. Pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase, les différents transferts interfaciaux satisfont le système dynamique

$$\left\{ \begin{array}{l} d_t a_i = 0, \quad d_t \rho = 0, \quad d_t \rho V = 0, \quad d_t \rho E = 0, \\ d_t \alpha_2 = K_P (P_2 - P_1), \\ d_t m_2 = K_\theta (\theta_1 - \theta_2), \\ d_t m_2 u_2 = K_U (u_1 - u_2) + K_\theta (\theta_1 - \theta_2) V_i, \\ d_t m_2 E_2 = K_P (P_1 - P_2) P_i + K_U (u_1 - u_2) V_i + K_\theta (\theta_1 - \theta_2) E_i + K_T (T_1 - T_2). \end{array} \right. \quad (17.14)$$

Dans cette description des interactions diphasiques, la procédure de reconstruction topologique n'est pas activée simultanément avec les transferts interfaciaux. La densité volumique d'aire interfaciale est donc un invariant du système (17.14). Sous les hypothèses thermodynamiques 1 et 2, la procédure d'optimisation développée au chapitre 5 est alors globalement inchangée. Comme à la partie I, la convergence des trajectoires admissibles sur la variété isobare isotherme équipotentielle équivitesse est alors établie de manière similaire par le biais du théorème de Lyapunov. La procédure de reconstruction topologique ne modifie donc pas la stabilité non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur.

Ce résultat de stabilité non-linéaire ne caractérise cependant que l'état d'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. A ce stade, aucune autre information ne nous est fournie sur la dynamique des transferts interfaciaux que leur tendance à rétablir l'équilibre liquide-vapeur sur temps long. De manière analogue au chapitre 5, l'application du théorème d'Hartman et Grobman au système dynamique (17.14) nous permet d'établir conditionnellement la stabilité linéaire de l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Au voisinage de la saturation, les transferts interfaciaux ramènent donc rapidement le mélange liquide-vapeur vers l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse. Ce résultat de stabilité linéaire dépend des lois d'état utilisées pour décrire le mélange diphasique ainsi que de la modélisation retenue pour les coefficients d'échange  $K_U$ ,  $K_P$ ,  $K_T$ ,  $K_\theta$ . Pour une loi d'état de type gaz parfait dans les deux phases et pour la modélisation (17.10) des coefficients d'échange, la stabilité linéaire de certains équilibres isobares isothermes équipotentiels équivitesses peut alors être numériquement établie de manière analogue à l'exemple 6 présenté à la section 5.2. En résumé, les différentes stabilités linéaire et non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur ne sont donc pas affectées par la topologie de l'écoulement diphasique. La dynamique des transferts interfaciaux dépend cependant de la procédure de reconstruction topologique. L'accroissement des transferts interfaciaux avec la densité volumique d'aire interfaciale sera alors numériquement vérifiée à la section 17.7.



## 17.5 Reconstruction topologique

Lors de la fermeture du système (17.3), une nouvelle modélisation a été proposée pour clore l'opérateur de reconstruction topologique. Cette section s'intéresse aux propriétés de ce nouvel opérateur pour décrire les transitions de configuration au sein du mélange diphasique. Dans cette section, ni la convection, ni la diffusion, ni les transferts interfaciaux ne sont implémentés. Dans l'analyse des changements de configuration au sein du mélange diphasique, cette simplification est réalisée afin d'étudier indépendamment la procédure de reconstruction topologique.

Soit  $Y = (\alpha_2, m_2, m_2 u_2, m_2 E_2, m_1, m_1 u_1, m_1 E_1)^t$  la variable d'état caractéristique des propriétés thermomécaniques du mélange diphasique. A la section 17.2, l'existence d'une corrélation expérimentale  $a_i^{\text{eq}}(Y) \in \mathbb{R}_+$  a été postulée. Cette corrélation expérimentale exprime la densité d'aire interfaciale associée à un écoulement diphasique permanent en fonction des propriétés thermomécaniques du mélange. Pour décrire les transitions topologiques, la procédure de reconstruction satisfait le système dynamique

$$\begin{cases} d_t Y = 0, \\ d_t a_i = -\frac{1}{\tau_i} [a_i - a_i^{\text{eq}}(Y)], \end{cases} \quad (17.15)$$

où  $\tau_i$  désigne le temps caractéristique du changement de configuration pour le mélange diphasique. Dans cette formulation (17.15) de la procédure de reconstruction topologique, les différents transferts interfaciaux ne sont pas activés simultanément avec le terme source de densité d'aire interfaciale. La variable  $Y$  caractéristique des propriétés thermomécaniques du mélange diphasique est donc un invariant du système (17.15). L'équation différentielle ordinaire associée à la densité d'aire interfaciale s'intègre explicitement

$$\forall t \geq 0, \quad a_i(t) = a_i(0) e^{-t/\tau_i} + a_i^{\text{eq}}(Y) (1 - e^{-t/\tau_i}).$$

Pour une corrélation expérimentale  $a_i^{\text{eq}}(Y)$  définie dans  $\mathbb{R}_+$ , les trajectoires du système dynamique (17.15) sont continûment admissibles. Ces trajectoires convergent par ailleurs vers la corrélation expérimentale  $a_i^{\text{eq}}(Y)$ . Une telle corrélation expérimentale  $a_i^{\text{eq}}(Y)$  s'identifie alors à un point d'équilibre stable pour la procédure de reconstruction topologique. En conclusion, les phénomènes de coalescence et de fragmentation modélisés par l'opérateur de reconstruction topologique s'effectuent donc au sein du mélange diphasique de manière à résorber les déséquilibres d'aire interfaciale.

**Remarque 17.** Dans cette section, la corrélation expérimentale  $a_i^{\text{eq}}(Y)$  exprimant la densité d'aire interfaciale associée à un écoulement diphasique permanent en fonction de la variable  $Y$  caractéristique des propriétés thermomécaniques du mélange a été identifiée à un point d'équilibre stable pour la procédure de reconstruction topologique. Ce résultat aurait pu être établi de manière différente par le biais d'une optimisation. Définissons sur  $\mathbb{R}_+$  la fonction strictement convexe

$$\mathcal{F}(a_i) = \frac{1}{2} [a_i - a_i^{\text{eq}}(Y)]^2.$$

Cette fonction  $\mathcal{F}$  s'identifie à une fonction de Lyapunov pour le système dynamique (17.15). La définition de cette fonction de Lyapunov pour le système dynamique (17.15) assure similairement la convergence des trajectoires vers la corrélation expérimentale  $a_i^{\text{eq}}(Y)$ . La réorganisation topologique de l'écoulement diphasique peut donc se voir de manière différente comme une procédure d'optimisation pour la distribution d'aire interfaciale.

## 17.6 Schémas numériques

Dans cette section, on s'intéresse à la simulation numérique du système (17.3). On néglige les phénomènes de diffusion. Dans ce contexte, l'approximation du système (17.3) sans diffusion est envisagée de manière similaire au chapitre 7 par le biais d'une approche à pas fractionnaires dans un formalisme

Volumes Finis. On cherche à déterminer les modifications induites par la procédure de reconstruction topologique.

Dans le cadre d'une approche à pas fractionnaires de type Yanenko [104], l'approximation du système (17.3) sans diffusion s'effectue en trois étapes. La première est consacrée à l'approximation de la partie convective

$$\partial_t W + \nabla \cdot F(W) + C(W) : \nabla W = 0. \quad (17.16)$$

La seconde s'intéresse à l'approximation des transferts interfaciaux. Cette seconde étape consiste en l'intégration du système dynamique

$$d_t W = S(W). \quad (17.17)$$

La troisième se consacre au traitement numérique de la reconstruction topologique. Cette troisième étape consiste en l'intégration de l'équation différentielle ordinaire

$$d_t W = \mathcal{R}(W). \quad (17.18)$$

Pour notre modélisation (17.12) de la reconstruction topologique, le système (17.18) s'intègre explicitement. En ce qui concerne les transferts interfaciaux, l'approximation du système (17.17) s'effectue par ailleurs similairement au chapitre 7 par le biais des schémas de relaxation développés à la section 7.3. En conséquence, on ne s'intéresse dans cette section qu'à l'approximation de la partie convective (17.16). Cette partie convective se présente sous une forme non-conservative. A la suite des travaux entrepris par Hérard [60] dans le cadre de la turbulence compressible, la formulation non-conservative du schéma VFRoe-ncv présentée à la section 7.2 est ici adaptée à la procédure de reconstruction topologique. Les propriétés de cette adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv sont présentées à la proposition 32.

**Proposition 32.** *Sous les hypothèses 1 et 2, l'adaptation non-conservative du schéma VFRoe-ncv développée à la section 7.2 préserve les équilibres liquide-vapeur et les équilibres topologiques en variable  $(a_i, \alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ .*

A la suite des travaux effectués au chapitre 7, la démonstration de la proposition 32 est immédiate. La procédure de reconstruction topologique ne modifie donc pas les propriétés des schémas numériques élaborés dans le cadre des modèles de type Baer et Nunziato. Les équilibres associés à la topologie diphasique sont par ailleurs préservés par ces différents schémas numériques. L'ensemble de la méthode à trois pas fractionnaires se caractérise alors par la préservation des équilibres liquide-vapeur et des équilibres topologiques  $a_i^{\text{eq}}$ .

## 17.7 Résultats numériques

A la section 17.6, une méthode numérique a été élaborée pour simuler le modèle bifluide à deux pressions et une équation de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale. Dans cette section, cette méthode numérique est utilisée pour mesurer l'influence de la reconstruction topologique sur la dynamique des transferts interfaciaux. La procédure de relaxation vers la corrélation expérimentale  $a_i^{\text{eq}}(Y)$  est alors comparée à une fermeture algébrique de type Yang-Zhang [105] pour la densité d'aire interfaciale.

Soit l'intervalle  $[0, 2]$ . Dans un premier temps, on réalise le maillage cartésien régulier de ce domaine de calcul. Ce maillage compte 2 000 cellules. Pour modéliser les différents constituants du mélange, une loi d'état de type gaz parfait (2.2) est adoptée dans les deux phases. On impose les coefficients thermodynamiques

$$\gamma_1 = 1.4, \quad \gamma_2 = 1.2, \quad C_{v_1} = 2 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}, \quad C_{v_2} = 1 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

On rappelle que ces deux lois d'état vérifient simultanément les hypothèses 1 et 2. L'indice 1 y désigne la phase vapeur, l'indice 2 la phase liquide. En ce qui concerne la vitesse et la pression interfaciales, on retient

la modélisation (4.10c) mise en avant par Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27]. Cette modélisation pour le couple interfacial  $(P_i, V_i)$  s'écrit

$$V_i = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}, \quad P_i = \frac{m_2 T_2 P_1 + m_1 T_1 P_2}{m_2 T_2 + m_1 T_1}. \quad (4.10c)$$

On rappelle qu'une telle modélisation pour la vitesse et la pression interfaciales définit localement tous les produits non-conservatifs associés à la partie convective du système (17.3). L'énergie interne spécifique interfaciale est quant à elle modélisée par une combinaison convexe des potentiels de changement de phase :

$$e_i = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}.$$

Muni de ces lois de fermeture pour les grandeurs interfaciales, le système (17.3) est alors doté d'une inégalité d'entropie. En ce qui concerne les coefficients d'échange, la modélisation (17.10) des fonctions de relaxation est par ailleurs retenue. Suivant l'analyse bibliographique menée à la section 3.4, les différentes échelles de temps caractéristiques apparaissant dans cette modélisation (17.10) des coefficients d'échange sont identifiées à des constantes de l'intervalle  $[10^{-4}, 1]$  s. Ces échelles de temps valent respectivement

$$\tau_U = 5.10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_P = 1.10^{-4} \text{ s}, \quad \tau_T = 2.10^{-3} \text{ s}, \quad \tau_\theta = 2.10^{-3} \text{ s}.$$

La densité d'aire interfaciale de référence  $a_{i_0}$  est associée à la constante  $a_{i_0} = 1 \text{ m}^{-1}$ . En ce qui concerne la reconstruction topologique, la modélisation (17.12) est par ailleurs retenue pour l'opérateur  $\Psi$ . Conformément à la section 17.2, l'échelle de temps caractéristique  $\tau_i$  intervenant dans cette modélisation (17.12) de l'opérateur  $\Psi$  est identifiée à une constante de l'intervalle  $[10^{-3}, 1]$  s :

$$\tau_i = 1.10^{-1} \text{ s}.$$

Pour l'heuristique corrélation d'aire interfaciale (17.11), on adopte par ailleurs les valeurs

$$a_i^0 = 5 \text{ m}^{-1}, \quad \Delta u_0 = 1.10^{-4} \text{ m.s}^{-1}, \quad \epsilon_0 = 10.$$

Initialisons le problème de Riemann dont les états de part et d'autre de l'interface  $x = 1 \text{ m}$  sont reportés dans le tableau 17.3. Cette condition initiale décrit un mélange liquide-vapeur à l'équilibre thermodynamique et topologique de chaque côté de l'interface  $x = 1 \text{ m}$ . On choisit d'approcher la partie convective du système (17.3) par le biais du schéma  $(a_i, \alpha_2, T_2, u_2, P_2, T_1, u_1, P_1)$ -VFRoe-ncv. On impose une condition de Courant-Friedrich-Levy  $CFL = 0.8$ . A l'instant  $t = 0.06 \text{ s}$ , la solution de ce tube à choc est reportée figure 17.3.

De manière analogue aux simulations de tube à choc réalisées sans reconstruction topologique au chapitre 8, la solution reportée figure 17.3 décrit la propagation d'un choc sur le milieu basse pression. Ce choc liquéfie le mélange diphasique dont la fraction volumique liquide augmente. Cette solution décrit également la propagation d'une détente sur le milieu haute pression. Cette détente vaporise le mélange diphasique dont la fraction volumique liquide diminue. Ces ondes acoustiques engendrent des déséquilibres entre les phases. Une fois ces ondes acoustiques passées, les différents transferts interfaciaux rétablissent progressivement l'équilibre isobare isotherme équipotentiel équivitesse au sein du mélange diphasique. De manière analogue au chapitre 8, de faibles déséquilibres de pression sont à nouveau observés entre les phases. Encore une fois, utiliser un modèle à deux pressions indépendantes ne signifie pas pour autant s'éloigner de l'équilibre isobare.

En ce qui concerne la reconstruction topologique, la densité d'aire interfaciale reportée sur la figure 17.3(b) montre une réorganisation du mélange diphasique. La propagation des ondes acoustiques au sein du mélange diphasique induit des phénomènes de coalescence et de fragmentation qui modifient la surface d'échange disponible entre le liquide et la vapeur. La propagation du choc sur le milieu basse pression majoritairement occupé par la vapeur induit la liquéfaction du mélange diphasique. Cette liquéfaction s'accompagne d'une augmentation de l'aire interfaciale. La propagation de la détente sur le milieu pressurisé

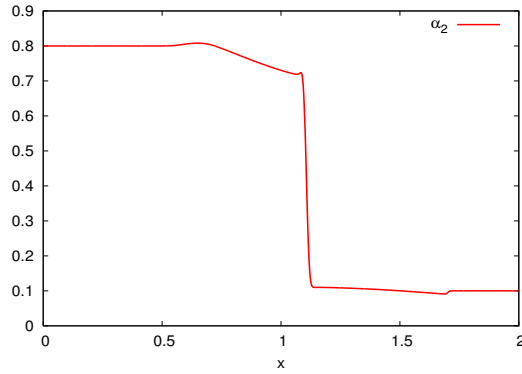
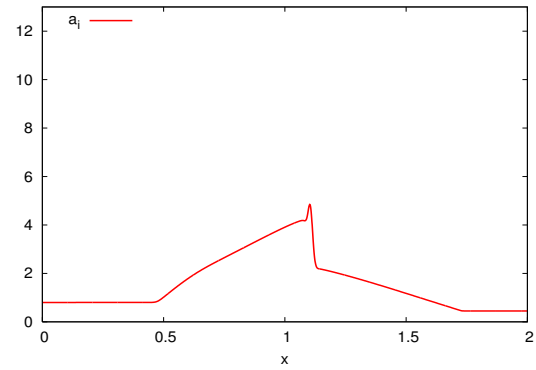
majoritairement occupé par le liquide induit une vaporisation du mélange diphasique. Cette vaporisation s'accompagne également d'une augmentation de la surface d'échange entre les deux fluides. Un pic d'aire interfaciale se signale alors au niveau de la discontinuité de contact transportant la fraction volumique. On propose ici d'interpréter ce pic d'aire interfaciale comme la traduction de l'inversion topologique d'un écoulement à bulles vers un écoulement à gouttes.

Une reconstruction algébrique pour la topologie diphasique est ensuite envisagée à titre comparatif. On s'intéresse alors à la projection sur la corrélation expérimentale  $a_i^{eq}$ . Pour cette reconstruction algébrique de type Yang-Zhang [105] pour la densité d'aire interfaciale, la solution de ce même à tube à choc est reportée sur la figure 17.4. Cette solution décrit les mêmes phénomènes que précédemment, mais pas dans les mêmes proportions. La projection sur l'équilibre topologique accroît la surface d'échange disponible entre le liquide et sa vapeur. De ce fait, les transferts interfaciaux sont plus intenses. Pour cette reconstruction algébrique de la topologie diphasique, les déséquilibres se résorbent plus rapidement entre les phases. La comparaison de ces différentes procédures de reconstruction pour la topologie diphasique nous permet alors de retrouver numériquement les observations expérimentales : l'intensité des transferts interfaciaux s'accroît avec la surface d'échange disponible entre les deux phases. De tels résultats numériques demandent maintenant à être plus précisément confrontés à l'expérience pour déterminer parmi ces deux procédures de reconstruction, laquelle est la plus à même de décrire les transitions de configuration au sein du mélange diphasique.

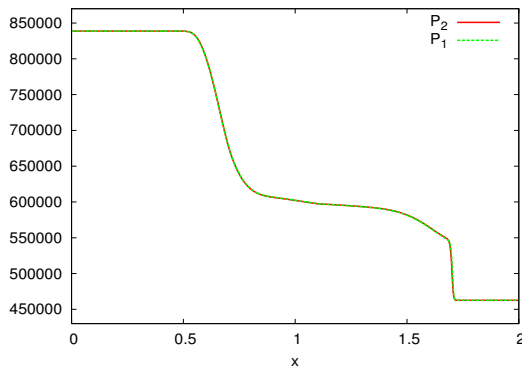
## 17.8 Conclusion

En résumé, une procédure de reconstruction topologique pour la densité d'aire interfaciale a été envisagée dans cette dernière partie de thèse pour compléter les modèles bifluïdes à deux pressions précédemment étudiés à la partie I. L'implémentation d'une telle procédure de reconstruction topologique dans les modèles de type Baer et Nunziato est nouvelle. Une telle procédure de reconstruction pour la topologie diphasique était auparavant cantonnée au cadre des modèles bifluïdes standard à une pression. Dans cette dernière partie de thèse, on a cherché à déterminer les modifications induites par cette procédure de reconstruction sur les propriétés mathématiques du modèle bifluïde à deux pressions. Dans le cadre de cette reconstruction topologique, la nature généralement hyperbolique et la stabilité des équilibres liquide-vapeur associées aux modèles de type Baer et Nunziato ont alors été retrouvées. Pour modéliser les phénomènes de coalescence et de fragmentation à l'échelle bifluïde, une nouvelle fermeture a par ailleurs été proposée pour clore l'opérateur de reconstruction topologique. Cette nouvelle modélisation pour l'opérateur de reconstruction topologique vise à intégrer aisément dans les codes de calcul les différentes corrélations expérimentales donnant la densité d'aire interfaciale associée à un écoulement diphasique permanent en fonction des propriétés thermomécaniques du mélange. Pour une heuristique formulation d'une telle corrélation expérimentale, diverses simulations du modèle bifluïde à deux pressions ont alors été réalisées. Ces simulations ont montré les aptitudes de notre reconstruction topologique à décrire les changements de configuration au sein du mélange diphasique. Les observations expérimentales ont alors été reproduites numériquement. Plus la surface d'échange est importante entre les deux fluides, plus rapidement se résorbent les déséquilibres entre les phases. La reconstruction topologique de la densité d'aire interfaciale constitue donc un moyen d'affiner notre description des transferts interfaciaux.

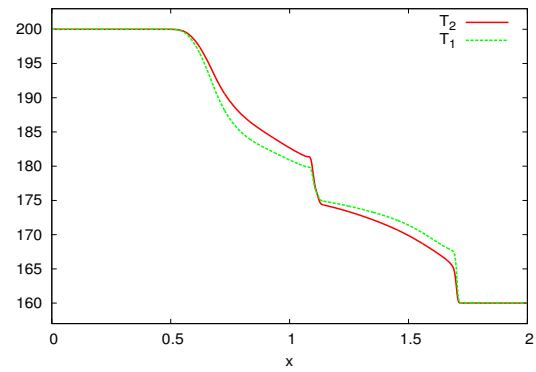
Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.8$	$\alpha_2 = 0.1$
$a_i = 0.8 \text{ m}^{-1}$	$a_i = 0.45 \text{ m}^{-1}$
$P_2 = P_1 = 838\,793 \text{ Pa}$	$P_2 = P_1 = 462\,624 \text{ Pa}$
$T_2 = T_1 = 200 \text{ K}$	$T_2 = T_1 = 160 \text{ K}$
$g_2 = g_1 = -99.7423 \text{ J.kg}^{-1}$	$g_2 = g_1 = -55.9919 \text{ J.kg}^{-1}$
$u_2 = u_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}$	$u_2 = u_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}$

(a) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$ .

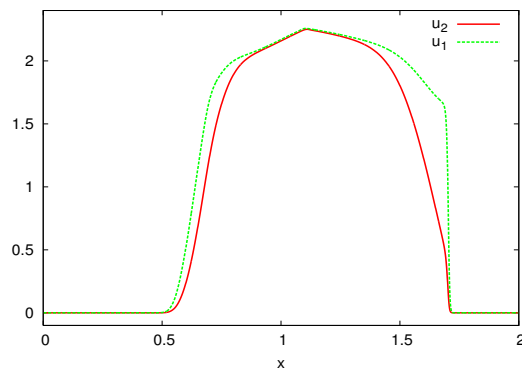
(b) Densité d'aire interfaciale.



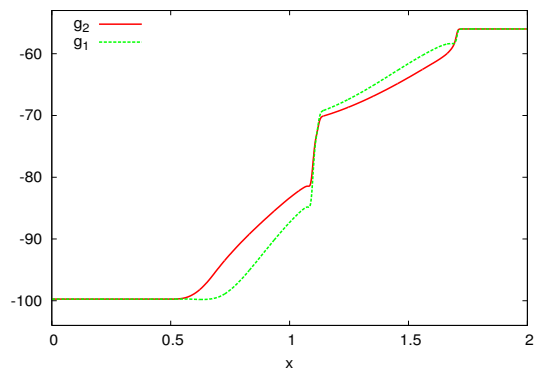
(c) Pressions.



(d) Températures.



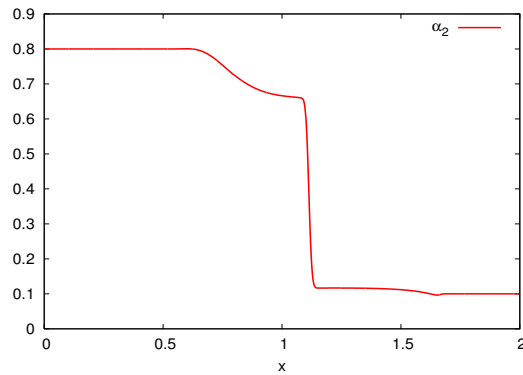
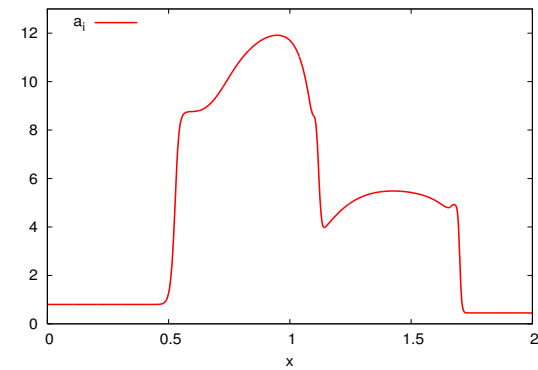
(e) Vitesses.



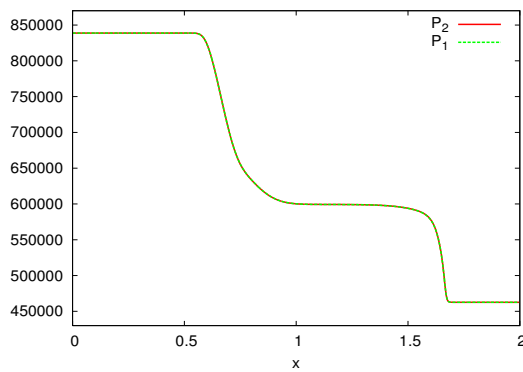
(f) Potentiels de Gibbs.

Figure 17.3: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase. Relaxation vers l'équilibre topologique ( $t = 0.06$  s).

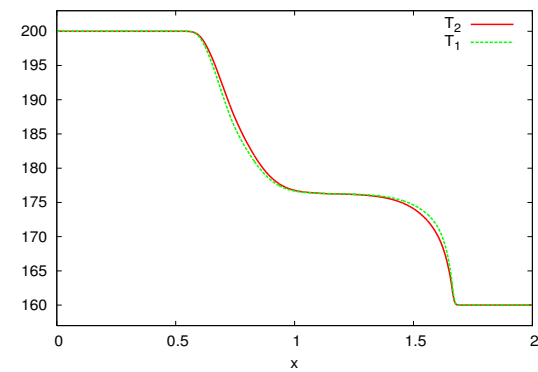
Conditions initiales : $0 < x < 1$ m	Conditions initiales : $1 < x < 2$ m
$\alpha_2 = 0.8$	$\alpha_2 = 0.1$
$a_i = 0.8 \text{ m}^{-1}$	$a_i = 0.45 \text{ m}^{-1}$
$P_2 = P_1 = 838\,793 \text{ Pa}$	$P_2 = P_1 = 462\,624 \text{ Pa}$
$T_2 = T_1 = 200 \text{ K}$	$T_2 = T_1 = 160 \text{ K}$
$g_2 = g_1 = -99.7423 \text{ J.kg}^{-1}$	$g_2 = g_1 = -55.9919 \text{ J.kg}^{-1}$
$u_2 = u_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}$	$u_2 = u_1 = 0 \text{ m.s}^{-1}$

(a) Fraction volumique liquide  $\alpha_2$ .

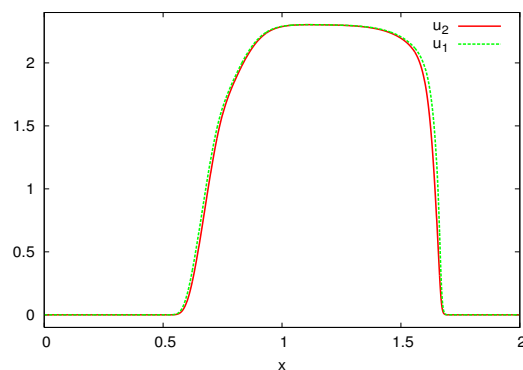
(b) Densité d'aire interfaciale.



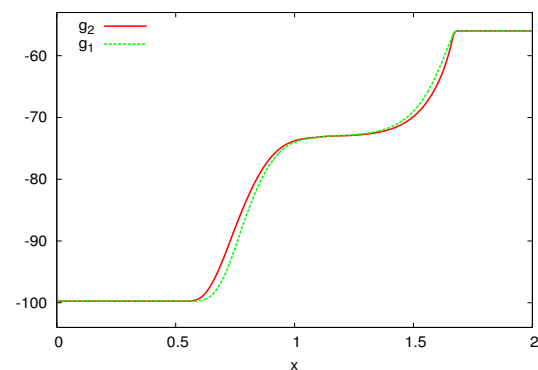
(c) Pressions.



(d) Températures.



(e) Vitesses.



(f) Potentiels de Gibbs.

Figure 17.4: simulation d'un tube à choc pour un écoulement liquide-vapeur en transition de phase. Projection sur l'équilibre topologique ( $t = 0.06$  s).



# Conclusions et perspectives

Dans le cadre du projet NEPTUNE, une nouvelle approche a été envisagée dans cette thèse pour décrire les écoulements liquide-vapeur en transition de phase. A l'échelle bifluide, cette nouvelle approche s'appuie sur le formalisme à deux pressions de Baer et Nunziato. On résume ici les principaux résultats de cette thèse. Divers axes de recherche sont également proposés pour faire suite à ce travail.

Pour décrire les écoulements liquide-vapeur, le modèle bifluide à deux pressions s'est tout d'abord présenté sous la forme d'un système ouvert. Dans un premier temps, on s'est intéressé à sa fermeture. Notre premier travail de modélisation a consisté en l'élaboration d'un cadre thermodynamique général pour les écoulements en transition de phase. Suivant les travaux de Callen [19], on s'est tout d'abord placé dans le cadre classique où une entropie strictement concave et strictement croissante est supposée définie pour chaque constituant du mélange. On a ensuite postulé l'existence d'un équilibre triple isobare isotherme équipotentiel monovariant pour le mélange diphasique. Ces différentes hypothèses nous ont permis de discriminer les lois d'état susceptibles de décrire un liquide et sa vapeur. Ces différentes hypothèses ont été vérifiées pour des lois d'état de type gaz parfait dans les deux phases. Il convient maintenant d'étudier l'adéquation de ce cadre thermodynamique théorique avec les fermetures expérimentales du plan eau-vapeur.

Dans ce cadre thermodynamique théorique, on s'est ensuite intéressé à la modélisation des interactions diphasiques. Suivant les travaux de Lhuillier [78], Gavriluk, Saurel [45], Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], cette modélisation des interactions diphasiques a été effectuée de manière à doter le modèle bifluide à deux pressions d'une inégalité d'entropie. Divers modèles de relaxation ont alors proposés pour les transferts interfaciaux. Ces modélisations s'avèrent particulièrement nouvelles en ce qui concerne les transferts énergétiques. Dans cette modélisation des interactions diphasiques, divers coefficients d'échange interviennent pour caractériser l'intensité des transferts interfaciaux. A l'heure actuelle, on ne dispose que de rares résultats expérimentaux pour quantifier ces coefficients d'échange. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, l'ensemble de ces nouvelles modélisations pour les transferts interfaciaux doit donc maintenant être calé sur l'expérience.

Muni de ces lois de fermeture, les différentes propriétés mathématiques du modèle bifluide à deux pressions ont ensuite été étudiées. On s'est tout d'abord intéressé aux propriétés de la partie convective. Dans un premier temps, la nature hyperbolique résonante de ce système a été rappelée. Pour nos applications à la simulation des écoulements diphasiques à faible nombre de Mach, les différentes résonances de ce système ont alors été identifiées à des phénomènes marginaux. Cette partie convective se présente par ailleurs sous une forme non-conservative. On s'est ensuite intéressé à la définition de ses solutions faibles. Suivant les travaux de Coquel, Gallouët, Hérard et Seguin [27], l'onde de fraction volumique a été associée à une discontinuité de contact pour définir les relations de saut de ce système. Pour attribuer cette nature linéairement dégénérée à l'onde de fraction volumique, de nouvelles modélisations pour la vitesse et la pression interfaciales ont alors été proposées. Dans ce cadre, l'ensemble des produits non-conservatifs du modèle bifluide à deux pressions a été défini sans recourir à la théorie développée par Dal Maso, Lefloch et Murat [29]. On s'est ensuite intéressé au problème de Riemann associé à cette partie convective non-conservative et résonante. L'étude préliminaire des connexions onde par onde a été effectuée en dehors des variétés de résonance. Cette étude a mis à jour plusieurs régimes d'écoulement sur- et sous-critiques pour le mélange diphasique. Ces différents régimes d'écoulement pour le mélange diphasique présentent des similitudes avec le comportement fluvial et torrentiel des rivières. Cette étude préliminaire des connexions onde par



onde constitue une première étape dans la résolution du problème de Riemann associé à la partie convective du modèle bifluide à deux pressions. Il convient maintenant d'étudier les connexions au voisinage des variétés de résonance. Un tel travail a déjà été entrepris dans un cadre résonant différent par Goatin et Lefloch [50]. Ce travail demande maintenant à être adapté au modèle de Baer et Nunziato.

En ce qui concerne les interactions diphasiques, on s'est par la suite intéressé à la dynamique des transferts interfaciaux. Certains de ces transferts interfaciaux effectuent un retour à l'équilibre instantané en certaines variables de l'écoulement. Une méthode de relaxation instantanée a alors été élaborée pour simuler les modèles bifluides partiellement équilibrés par le biais du modèle à deux pressions. Cette méthode de relaxation instantanée s'identifie à une méthode de projection sur les équilibres partiels. Les autres transferts interfaciaux s'effectuent sur une certaine durée. Les stabilités linéaire et non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur ont alors été établies. Suivant les travaux de Dellacherie [32], une approche par système dynamique a été retenue pour montrer ces différentes stabilités. A l'inverse des procédures d'optimisation généralement utilisées dans la littérature [10, 2, 58], cette approche par système dynamique assure une description continue des déséquilibres entre le liquide et sa vapeur. Cette approche pose néanmoins problème sur les bords de l'espace admissible. Certaines solutions peuvent pénétrer des domaines monophasiques au sein desquels la modélisation bifluide ne semble plus adaptée. Pour nos applications en ingénierie nucléaire, certains couplages entre modèles bifluides et monophasiques pourraient alors être envisagés suivant les travaux de Colombo [25], Godlewski, Le Thanh, Raviart [51], Ambroso et al. [3]. De tels couplages pourraient traiter à terme de la transition de phase complète d'un liquide pur à une vapeur sèche.

Pour simuler l'ensemble des modèles bifluides rencontrés dans cette thèse, une méthode numérique a par la suite été élaborée. Cette méthode numérique s'appuie sur une approche à pas fractionnaires dans un formalisme Volumes Finis. Une telle méthode numérique traite séparément de la convection puis des transferts interfaciaux. Pour approcher la partie convective du modèle bifluide à deux pressions, différentes adaptations non-conservatives de schémas classiques (le schéma de Rusanov et le schéma VFRoe-ncv) ont tout d'abord été étudiées. A l'inverse du cadre non-conservatif standard [30, 65], on a alors montré la convergence de ces différents schémas vers une même solution pour nos modélisations particulières des grandeurs interfaciales. De nouveaux schémas de relaxation ont par la suite été proposés pour décrire la dynamique des transferts interfaciaux. Ces nouveaux schémas sont conservatifs au sens où ils préservent les grandeurs caractéristiques du mélange. Ces nouveaux schémas convergent par ailleurs vers les équilibres diphasiques. L'ensemble de la méthode numérique se caractérise alors par la préservation des équilibres liquide-vapeur. Sur les bases de cette méthode numérique, un logiciel de simulation a été construit. Ce logiciel permet de simuler l'ensemble des modélisations bifluides, qu'elles soient totalement hors équilibre ou partiellement équilibrées, avec ou sans transition de phase, sur tout type de maillage structuré ou non-structuré. Ce logiciel a tout d'abord été appliqué à la simulation des phénomènes de dépressurisation dans les REP. On a ensuite procédé à la comparaison de différentes modélisations bifluides. Lors de ces simulations, en accord avec les résultats de Hérard et Hurisse [62], seules les modélisations hyperboliques ont fourni des solutions stables convergées en espace. On préconise leur emploi à l'avenir.

Pour affiner notre description des transferts interfaciaux, différents couplages ont finalement été réalisés entre le modèle bifluide à deux pressions et un modèle de turbulence ainsi qu'une procédure de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale. De manière générale, la prise en compte de ces nouveaux phénomènes n'a pas modifié les propriétés du modèle bifluide à deux pressions. La description de ces phénomènes nous a au contraire permis de reproduire numériquement les tendances expérimentales [73, 16]. Les différents transferts interfaciaux s'accroissent avec la turbulence et la surface d'échange disponible entre le liquide et sa vapeur. De telles études numériques demandent maintenant à être plus précisément confrontées à l'expérience.





# Bibliographie

- [1] G. ALLAIRE, S. CLERC et S. KOKH. A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids. *Journal of Computational Physics*, 181:577–616, 2002.
- [2] G. ALLAIRE, G. FACCANONI et S. KOKH. A strictly hyperbolic equilibrium phase transition model. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 344(I):135–140, 2007.
- [3] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.A. RAVIART et N. SEGUIN. *Homogeneous models with phase transition : coupling by finite volume methods*. Finite Volumes for Complex Applications IV, 483-492, Hermes Science, 2005.
- [4] A. ANDRIANOV, R. SAUREL et G. WARNECKE. A simple method for compressible multiphase mixtures and interfaces. Rapport technique RR-4247, INRIA, Septembre 2001.
- [5] N. ANDRIANOV et G. WARNECKE. On the solution to the Riemann problem for the compressible duct flow. *SIAM J. Appl. Math.*, 64(3):878–901, 2004.
- [6] N. ANDRIANOV et G. WARNECKE. The Riemann problem for the Baer-Nunziato two-phase flow model. *Journal of Computational Physics*, 195:434–464, 2004.
- [7] S. ANIEL-BUCHHEIT, A. CHANOINE, O. GRÉGOIRE et F. PINSON. Etablissement formel d'un modèle diphasique bifluide I. Rapport technique SFME/LETR/RT/03-026/A, CEA, 2004.
- [8] M.R. BAER et J.W. NUNZIATO. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(6): 881–889, 1986.
- [9] B.S. BALDWIN et T.J. BARTH. A one equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows. Rapport technique TM 102847, NASA, 1990.
- [10] T. BARBERON et Ph. HELLUY. Finite volume simulation of cavitating flows. *Computers and Fluids*, 34(7):832–858, 2005.
- [11] D. BARNEA, O. SHOHAM, Y. TAITEL et A.E. DUKLER. Flow pattern transition for gas-liquid flow in horizontal and inclined pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, 6(3):217–225, 1980.
- [12] C. BERTHON, F. COQUEL, J.M. HÉRARD et M. UHLMANN. An approximate solution of the Riemann problem for a realisable second moment turbulent closure. *Shock Waves*, 11(4):245–269, 2002.
- [13] C. BERTHON et B. NKONGA. Numerical model of a compressible multi-fluid fluctuating flow. *International Journal on Finite Volume*, 2(2), Mai 2005. ([www.latp.univ-mrs.fr/IJFVDB/berthon-nkonga-ijfv.pdf](http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFVDB/berthon-nkonga-ijfv.pdf)).
- [14] C. BERTHON et D. REIGNIER. An approximate nonlinear projection scheme for a combustion model. *ESAIM : M2AN*, 37(3):451–478, 2003.
- [15] Z. BILICKI, M. GIOT et R. KWIDZINSKI. Fundamentals of two-phase flow by the method of irreversible thermodynamics. *International Journal of Multiphase Flow*, 28:1983–2005, 2002.
- [16] Z. BILICKI, R. KWIDZINSKI et S. ALI MOHAMMADEIN. Evaluation of the relaxation time of heat and mass exchange in the liquid-vapour bubble flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(4):753–759, 1996.
- [17] T. BUFFARD, T. GALLOUËT et J.M. HÉRARD. A naive Riemann solver to compute a non-conservative hyperbolic system. *Int. Series in Num. Math.*, 129:129–138, 1999.

- [18] T. BUFFARD, T. GALLOUËT et J.M. HÉRARD. A sequel to a rough Godunov scheme : application to real gases. *Computers and Fluids*, 29:813–847, 2000.
- [19] H.B. CALLEN. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Wiley & Sons, 1985.
- [20] F. CARO. *Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, 2004.
- [21] F. CARO, F. COQUEL, D. JAMET et S. KOKH. A simple finite-volume method for compressible isothermal two-phase flows simulation. *International Journal on Finite Volume*, 3(1), Janvier 2006. ([www.latp.univ-mrs.fr/IJFVDB/ijfv-caro-coquel-jamet-kokh.pdf](http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFVDB/ijfv-caro-coquel-jamet-kokh.pdf)).
- [22] G.Q. CHEN, C.D. LEVERMORE et T.P. LIU. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(6):755–781, 1993.
- [23] A. CHINNAYYA, A.Y. LE ROUX et N. SEGUIN. A well-balanced scheme for the approximation of the shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon. *International Journal on Finite Volume*, 1(1), Avril 2004. ([www.latp.univ-mrs.fr/IJFVDB/seguinleroux.pdf](http://www.latp.univ-mrs.fr/IJFVDB/seguinleroux.pdf)).
- [24] P. CINNELLA, P. M. CONGEDO et D. LAFORGIA. Investigation of BZT transonic flows past an airfoil using a 5th power virial equation of state. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004, Jyväskylä, 24-28 July 2004*.
- [25] R.M. COLOMBO. Hyperbolic phase transitions in traffic flow. *SIAM J. Appl. Math.*, 63(2):708–721, 2002.
- [26] F. COQUEL, K. EL AMINE, E. GODLEWSKI, B. PERTHAME et P. RASCLE. A numerical method using upwind schemes for the resolution of two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, 136(2):272–288, 1997.
- [27] F. COQUEL, T. GALLOUËT, J.M. HÉRARD et N. SEGUIN. Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *C. R. Acad. Sci. Paris, Analyse Numérique*, 334(I):1–6, 2002.
- [28] C. DAFERMOS. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Springer Verlag, 2000.
- [29] G. DAL MASO, Ph.G. LEFLOCH et F. MURAT. Definition and weak stability of nonconservative products. *J. Math. Pures Appl.*, 74:483–548, 1995.
- [30] F. DE VUYST. *Schémas non-conservatifs et schémas cinétiques pour la simulation numérique d'écoulements hypersoniques non visqueux en déséquilibre thermo-chimique*. Thèse de doctorat, Paris VI, 1994.
- [31] J.M. DELHAYE et J.L. ACHARD. On the averaging operators introduced in the two-phase flow modelling. *Proceedings of CSNI Specialist Meeting on Transient Two-Phase Flow, Toronto, 1976*.
- [32] S. DELLACHERIE. Relaxation schemes for the multicomponent Euler system. *ESAIM : M2AN*, 37(6):909–936, 2003.
- [33] B. DESPRÉS et F. LAGOUTIÈRE. Contact discontinuity capturing schemes for linear advection and compressible gas dynamics. *Journal of Scientific Computing*, 16(4):479–524, 2001.
- [34] D. DREW et R.T. LAHEY. Application of general constitutive principles to the derivation of the multidimensional two-phase flow equations. *International Journal of Multiphase Flow*, 5:243–264, 1979.
- [35] D.A. DREW et S.L. PASSMAN. *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer Verlag, 1999.
- [36] F. DUBOIS et Ph.G. LEFLOCH. Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Differential Equations*, 71:93–122, 1988.
- [37] K. EL AMINE. *Modélisation et analyse numérique des écoulements diphasiques en déséquilibre*. Thèse de doctorat, Paris VI, 1997.
- [38] L.C. EVANS. *Entropy and partial differential equations*. 2004.
- [39] A. FAVRE, L.S.G. KOVASZNY, R. DUMAS, J. GAVIGLIO et M. COANTIC. *La turbulence en mécanique des fluides*. Gauthier-Villars, 1976.
- [40] A. FORESTIER, J.M. HÉRARD et X. LOUIS. Solveur de type Godunov pour simuler les écoulements turbulents compressibles. *C. R. Acad. Sci. Paris, Analyse Numérique*, 324(I):919–926, 1997.

- 
- [41] T. GALLOUËT, J.M. HÉRARD et N. SEGUIN. Some recent Finite Volume schemes to compute Euler equations using real gas EOS. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39(12):1073–1138, 2002.
- [42] T. GALLOUËT, J.M. HÉRARD et N. SEGUIN. Numerical modelling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14(5):663–700, 2004.
- [43] T. GALLOUËT et J.M. MASELLA. A rough Godunov scheme. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323(I):77–84, 1996.
- [44] J.R. GARCIA-CASCALES et H. PAILLÈRE. Application of AUSM schemes to multi-dimensional compressible two-phase flow problems. *Nuclear Engineering and Design*, 236(12):1225–1239, 2006.
- [45] S. GAVRILYUK et R. SAUREL. Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia. *Journal of Computational Physics*, 175:326–360, 2002.
- [46] P. GERMAIN. *Mécanique des milieux continus*. Masson, 1962.
- [47] J.M. GHIDAGLIA, A. KUMBARO et G. LE COQ. Une méthode Volumes Finis à flux caractéristiques pour la résolution numérique des systèmes hyperboliques de lois de conservation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322(I):981–988, 1996.
- [48] J. GLIMM, D. SALTZ et D.H. SHARP. Renormalization group solution of two-phase flow equations for Rayleigh-Taylor mixing. *Physics Letters, A* 222:171–176, 1996.
- [49] J. GLIMM, D. SALTZ et D.H. SHARP. Two-phase modelling of a fluid mixing layer. *J. Fluid Mech*, 378:119–143, 1999.
- [50] P. GOATIN et Ph.G. LEFLOCH. The Riemann problem for a class of resonant nonlinear hyperbolic systems of balance laws. *Ann. Inst. H. Poincaré - Analyse Non-linéaire*, 21:881–902, 2004.
- [51] E. GODLEWSKI, K.C. LE THANH et P.A. RAVIART. The numerical interface coupling of non-linear hyperbolic systems of conservation laws II : the case of systems. *ESAIM : M2AN*, 39(4):649–692, 2005.
- [52] E. GODLEWSKI et P.A. RAVIART. *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*. Springer Verlag, 1996.
- [53] S.K. GODUNOV. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. Sb.*, 47(89):271–306, 1959.
- [54] O. GRÉGOIRE, D. SOUFFLAND, S. GAUTHIER et R. SCHIESTEL. A two-time-scale turbulence model for compressible flows : turbulence dominated by mean deformation interaction. *Physics of Fluids*, 11(12):3793–3807, 1999.
- [55] H. GUILLARD et A. MURRONE. A five equation reduced model for compressible two phase flow problems. *Journal of Computational Physics*, 202(2):664–698, 2005.
- [56] A. HARTEN et J.M. HYMAN. Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 50(2):235–269, 1983.
- [57] A. HARTEN, P.D. LAX et B. van LEER. On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1):33–61, 1983.
- [58] Ph. HELLUY et N. SEGUIN. Relaxation models of phase transition flows. *ESAIM : M2AN*, 40(2):331–352, 2006.
- [59] J.M. HÉRARD. Solveur de Riemann approché pour un système hyperbolique non-conservatif issu de la turbulence compressible. Rapport technique HE-41/95/009/A, EDF, 1995.
- [60] J.M. HÉRARD. Solveur VFRoe - Application au cadre des écoulements turbulents de gaz réel. Rapport technique HE-41/98/012/A, EDF, 1998.
- [61] J.M. HÉRARD. Numerical modelling of turbulent two-phase flows using the two-fluid approach. *AIAA paper 2003-4113*, 2003.

- [62] J.M. HÉRARD et O. HURISSE. A simple method to compute standard two-fluid models. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 19(7):475–482, 2005.
- [63] J.A. HERNANDEZ, B. HEYD, C. IRLLES, B. VALDOVINOS et G. TRYSTRAM. Analysis of the heat and mass transfer during coffee batch roasting. *Journal of Food Engineering*, 78(4):1141–1148, 2007.
- [64] T. HIBIKI et M. ISHII. Development of one-group interfacial area transport equation in bubbly flow systems. *International Journal of Heat and Mass transfer*, 45:2351–2372, 2002.
- [65] X. HOU et Ph.G. LEFLOCH. Why non-conservative schemes converge to wrong solutions : error analysis. *Mathematics of Computation*, 62(206):497–530, 1994.
- [66] B. ISAACSON et B. TEMPLE. Nonlinear resonance in systems of conservation laws. *SIAM J. Appl. Math.*, 52(5):1260–1278, 1992.
- [67] M. ISHII. *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flows*. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, 1975.
- [68] M. ISHII et K. MISHIMA. Two-fluid model and hydrodynamic constitutive relations. *Nuclear Engineering and Design*, 82(2-3):107–126, 1984.
- [69] M. ISHII, S.S. PARANJPE, S. KIM et X. SUN. Interfacial structures and interfacial area transport in downward two-phase bubbly flow. *International Journal of Multiphase Flow*, 30:779–801, 2004.
- [70] S. JIN et Z. XIN. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48:235–276, 1995.
- [71] A.K. KAPILA, S.F. SON, J.B. BDZIL, R. MENIKOFF et D.S. STEWART. Two-phase modelling of DDT : structure of the velocity-relaxation zone. *Phys. Fluids*, 9:3885–3897, 1997.
- [72] S. KARNI, E. KIRR, A. KURGANOV et G. PETROVA. Compressible two-phase flows by central and upwind schemes. *ESAIM : M2AN*, 38(3):477–493, 2004.
- [73] S. KIM, X. SUN et M. ISHII. Research on interfacial area transport : the present and future efforts. *The 10th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-10)*, Seoul, Korea, 5-9 October 2003.
- [74] R.D. KIRKPATRICK et M.J. LOCKETT. The influence of approach velocity on bubble coalescence. *Chemical Engineering Science*, 29:2363–2373, 1974.
- [75] G. KOCAMUSTAFAOGULLARI et M. ISHII. Foundation of the interfacial area transport equation and its closure relations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(3):481–493, 1995.
- [76] S. KOKH. *Aspects numériques et théoriques de la modélisation des écoulements diphasiques compressibles par des méthodes de capture d'interface*. Thèse de doctorat, Paris VI, 2001.
- [77] M.H. LALLEMAND et R. SAUREL. Pressure relaxation procedures for multiphase compressible flows. Rapport technique RR-4038, INRIA, Octobre 2000.
- [78] D. LHUILLIER. A mean-field description of two-phase flows with phase changes. *International Journal of Multiphase Flow*, 29:511–525, 2003.
- [79] D. LHUILLIER. Evolution of the volumetric interfacial area in two-phase mixtures. *C. R. Acad. Sci. Paris, Mécanique*, 332:103–108, 2004.
- [80] J.M. MANDHANE, G.A. GREGORY et K. AZIZ. A flow pattern map for gas-liquid flow in horizontal pipes. *International Journal of Multiphase Flow*, 1(4):537–553, 1974.
- [81] J. MASSONI, R. SAUREL, B. NKONGA et A. ABGRALL. Proposition de méthodes et modèles eulériens pour les problèmes à interfaces entre fluides compressibles en présence de transfert de chaleur. Some models and eulerian methods for interface problems between compressible fluids with heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45(6):1287–1307, 2002.
- [82] R. MENIKOFF et B.J. PLOHR. The Riemann problem for fluid flow of real materials. *Rev. Mod. Phys.*, 61(1):75–130, 1989.
- [83] B. MOHAMMADI et O. PIRONNEAU. *Analysis of the k-epsilon model*. Masson, 1994.

- 
- [84] C. MOREL, N. GOREAUD et J.M. DELHAYE. The local volumetric interfacial area transport equation : derivation and physical significance. *International Journal of Multiphase Flow*, 25:1099–1128, 1999.
- [85] L. ONSAGER. Reciprocal relations in irreversible process I. *Physical Review*, 37:405–426, 1931.
- [86] L. ONSAGER. Reciprocal relations in irreversible process II. *Physical Review*, 38:2265–2279, 1931.
- [87] L. PERKO. *Differential equations and dynamical systems*. Springer Verlag, 1996.
- [88] M. PILCH et C.A. ERDMAN. Use of breakup time data and velocity history data to predict the maximum size of stable fragments for acceleration-induced breakup of a liquid drop. *International Journal of Multiphase Flow*, 13(6):741–757, 1987.
- [89] V.H. RANSOM et D.L. HICKS. Hyperbolic two-pressure models for two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 53(1):124–151, 1984.
- [90] P.L. ROE. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43:357–372, 1981.
- [91] E. ROMENSKI et E.F. TORO. Compressible two-phase flows : two-pressure models and numerical methods. *Preprint Series NI 04012-NPA, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge University*, 2004. ([www.newton.cam.ac.uk/preprints/NI04012.pdf](http://www.newton.cam.ac.uk/preprints/NI04012.pdf)).
- [92] V.V. RUSANOV. Calculation of interaction of non-steady shock waves with obstacles. *J. Comp. Math. Phys. USSR*, 1:267–279, 1961.
- [93] R. SAUREL et R. ABGRALL. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 150:425–467, 1999.
- [94] R. SAUREL et O. LE MÉTAYER. A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks detonation waves and cavitation. *J. Fluid Mech.*, 431:239–271, 2001.
- [95] N. SEGUIN. *Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille I, 2002.
- [96] O. SÉRO-GUILLAUME et N. RIMBERT. On thermodynamic closures for two-phase flow with interfacial area concentration transport equation. *International Journal of Multiphase Flow*, 31:897–920, 2005.
- [97] D. SERRE. *Systèmes de lois de conservation*. Diderot, 1996.
- [98] J. SMOLLER. *Shock waves and reaction diffusion equations*. Springer Verlag, 1983.
- [99] H. STAEDTKE, G. FRANCHELLO, B. WORTH, U. GRAF, P. ROMSTEDT, A. KUMBARO, J. GARCIA-CASCALES, H. PAILLÈRE, H. DECONINCK, M. RICCHIUTO, B. SMITH, F. DE CACHARD, E. F. TORO, E. ROMENSKI et S. MIMOUNI. Advanced three-dimensional two-phase flow simulation tools for application to reactor safety (ASTAR). *Nuclear Engineering and Design*, 235:379–400, 2005.
- [100] E.F. TORO. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer Verlag, 1997.
- [101] I. TOUMI. A weak formulation of Roe's approximate Riemann solver. *Journal of Computational Physics*, 1002:360–373, 1992.
- [102] I. TOUMI et A. KUMBARO. An approximate linearized Riemann solver for a two-fluid model. *Journal of Computational Physics*, 124:286–300, 1996.
- [103] A.I. VOLPERT. The space BV and quasilinear equations. *Math. Sb.*, 73(115):225–267, 1967.
- [104] N.N. YANENKO. *Méthode des pas fractionnaires pour la résolution numérique des problèmes de la physique mathématique*. Dunod, 1968.
- [105] L. YANG et C.L. ZHANG. Two-fluid model of refrigerant two-phase flow through short tube orifice. *International Journal of Refrigeration*, 28:419–427, 2005.







# Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques par une approche bifluide à deux pressions

---

**Résumé.** Dans ce mémoire, on s'intéresse à la simulation des écoulements liquide-vapeur en transition de phase. Pour décrire ces écoulements, une approche bifluide moyennée à deux pressions indépendantes est retenue. Cette description du mélange liquide-vapeur s'appuie sur le modèle à sept équations de Baer et Nunziato. On étudie les aptitudes de cette modélisation à simuler les transitions de phase apparaissant en ingénierie nucléaire.

Dans un premier temps, on élabore un cadre thermodynamique théorique pour décrire les écoulements liquide-vapeur. Dans ce cadre, on réalise la fermeture du modèle de Baer et Nunziato. De nouvelles modélisations sont proposées pour les termes d'interaction entre les phases. Ces nouvelles modélisations dotent le modèle bifluide à deux pressions d'une inégalité d'entropie. On étudie ensuite les propriétés mathématiques de ce modèle. Sa partie convective hyperbolique se présente sous une forme non-conservative. On étudie tout d'abord la définition de ses solutions faibles. Divers régimes d'écoulement sont alors mis à jour pour le mélange diphasique. Ces différents régimes d'écoulement présentent des analogies avec le comportement fluvial et torrentiel des écoulements en rivière. Les stabilités linéaire et non-linéaire de l'équilibre liquide-vapeur sont ensuite établies. Pour affiner notre description des interactions diphasiques, on étudie pour finir l'implémentation d'un modèle de turbulence, ainsi que l'implémentation d'une procédure de reconstruction pour la densité d'aire interfaciale.

On s'intéresse ensuite à la simulation de ce modèle. Suivant une approche à pas fractionnaires, une méthode numérique est élaborée dans un formalisme Volumes Finis. Pour réaliser l'approximation de la partie convective, diverses adaptations non-conservatives de solveurs de Riemann standard sont tout d'abord proposées. A l'inverse du cadre non-conservatif classique, l'ensemble de ces schémas converge vers une unique solution. Un nouveau schéma de relaxation est ensuite proposé pour approcher la dynamique des transferts interfaciaux. L'ensemble de la méthode numérique se caractérise alors par la préservation des équilibres liquide-vapeur. Dans un premier temps, cette méthode numérique est employée à la comparaison des différentes modélisations bifluides à une et deux pressions. On l'applique ensuite à la simulation des écoulements liquide-vapeur dans les circuits hydrauliques des réacteurs à eau sous pression en configuration accidentelle.

---

**Mots-clés :** écoulement diphasique, modélisation bifluide, transition de phase, modèle de turbulence, aire interfaciale, système hyperbolique non-conservatif, système dynamique, entropie, méthode Volumes Finis, solveur de Riemann, schéma de relaxation.