



Apport des statistiques spatiales à l'élaboration de critères d'homogénéité et à l'inférence en analyse de textures. Application à la caractérisation de matériaux.

Rémi Blanc

► To cite this version:

Rémi Blanc. Apport des statistiques spatiales à l'élaboration de critères d'homogénéité et à l'inférence en analyse de textures. Application à la caractérisation de matériaux.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2007. Français. NNT: . tel-00168074

HAL Id: tel-00168074

<https://theses.hal.science/tel-00168074>

Submitted on 24 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 3377

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE

Par Rémi BLANC

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

Apport des statistiques spatiales à l'élaboration de critères
d'homogénéité et à l'inférence en analyse de textures.

Application à la caractérisation de matériaux.

Soutenue le 08 Juin 2007.

Après avis de :

Philippe Bolon

Philippe Réfrégier

Professeur à l'Université de Savoie

Professeur à l'Université d'Aix-Marseille

Rapporteurs

Devant la commission d'examen formée de :

Mohamed Najim

Jean-Pierre Da Costa

Pierre Baylou

Philippe Bolon

Michel Cataldi

Christian Lantuéjoul

Philippe Réfrégier

Gérard Vignoles

Professeur à l'ENSEIRB, Bordeaux

Maître de Conférence à l'ENITA, Bordeaux

Professeur à l'ENSEIRB, Bordeaux

Professeur à l'Université de Savoie

Ingénieur de Recherche SPS – SAFRAN

Maître de Recherche à l'ENSMP, Paris

Professeur à l'Université d'Aix-Marseille

Professeur à l'Université de Bordeaux I

Président

Rapporteur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Pierre Baylou qui a dirigé cette thèse. Ses conseils pertinents et ses suggestions m'ont beaucoup apporté pour mener à bien ce travail.

Je remercie vivement Mohamed Najim pour m'avoir accueilli au sein de l'Equipe Signal et Image, et fait l'honneur de présider au jury de ma thèse.

J'adresse également mes remerciements à Philippe Bolon et à Philippe Réfrégier, tous deux rapporteurs de ce mémoire, pour le temps et l'attention qu'ils ont consacré à mon travail.

Je remercie particulièrement Christian Lantuéjoul pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, ses commentaires m'ont beaucoup apporté.

Je remercie également Michel Cataldi et Gérard Vignolles qui ont suivi régulièrement l'avancement de mes travaux et partagés leurs points de vue. Ces discussions m'ont beaucoup aidées à prendre le recul nécessaire vis-à-vis des objectifs de ce travail.

Je veux adresser tous mes remerciements à Jean-Pierre Da Costa, qui s'est toujours montré disponible pour de longues discussions et séances de travail, ainsi qu'à Christian Germain, dont les conseils m'ont été précieux.

L'ambiance de travail participe largement au déroulement d'une thèse. En plus de mes encadrants directs dont j'ai pu bénéficié des grandes qualités humaines, je remercie l'ensemble des membres du laboratoire, administratifs, permanents, doctorants et récents docteurs qui ont réussi à créer une ambiance à la fois de convivialité et de travail très appréciable.

Je remercie finalement ma famille, mes amis, en particulier Mélanie, pour leur présence et leur soutien.

Notations

\mathbb{N}	Ensemble des entiers $\{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
\mathbb{R}	Ensemble des réels.
\subset	Inclusion : $A \subset B$ signifie l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B.
\cap	Intersection : $A \cap B$ désigne l'ensemble formé par l'intersection des ensembles A et B.
\oplus	Addition de Minkowski.
\ominus	Soustraction de Minkowski.
c	Complémentaire : A^c est le complémentaire de A, dans l'espace considéré.
\vee	Symétrique : $\overset{\vee}{A}$ est l'ensemble symétrique de A par rapport à l'origine.
V	Fenêtre d'observation de l'image.
v	Sous-ensemble de la fenêtre d'observation V .
$ \cdot $	Mesure de Lebesgue d'un ensemble.
P	Probabilité d'un évènement : $P[A]$ probabilité de l'évènement A.
E	Espérance mathématique d'une variable aléatoire : $E[X]$.
Var	Variance d'une variable aléatoire.
Cov	Covariance entre deux variables aléatoires, ou autocovariance d'un processus stationnaire.
R	Corrélation entre deux variables aléatoires, ou autocorrélation d'un processus stationnaire.
γ	Variogramme d'un processus aléatoire stationnaire intrinsèque.
g	Fonction de corrélation de paires de points d'un processus de points.
k	Fonction de corrélation des marques d'un processus de points marqués.
\bar{f}	Moyenne circulaire d'une fonction f 2-D : \bar{Cov} moyenne circulaire de l'autocovariance.
μ	Moyenne théorique du processus aléatoire.
σ^2	Variance théorique du processus aléatoire.
$\theta(v)$	Estimation d'une statistique θ à l'échelle v .
$Var \mu(v)$	Variance de l'estimateur de la moyenne à l'échelle v .
$Var \sigma^2(v)$	Variance de l'estimateur de la variance à l'échelle v .
$IC_p(\theta)$	Intervalle de confiance au seuil de probabilité p de l'estimation de la statistique θ .

Table des matières

Introduction.....	5
Chapitre 1 : Statistiques et textures	11
1.1 Echantillon représentatif.....	11
1.1.1 Exemple.....	11
1.1.2 Notion de texture.....	13
1.1.3 Stationnarité	14
1.1.4 Ergodicité	16
1.1.5 Propriétés de mélange	17
1.2 Statistiques classiques	17
1.2.1 Estimateurs.....	18
1.2.2 Variance d'estimation.....	19
1.2.3 Intervalles de confiance.....	20
1.3 Inférence en présence de dépendances spatiales	21
1.3.1 Estimateur de la moyenne	21
1.3.2 Estimateur de la variance	23
1.3.3 Intervalles de confiance.....	24
1.4 Méthodes pour l'inférence statistique	24
1.4.1 Méthodes paramétriques	25
1.4.2 Méthodes d'estimation non paramétriques	29
Chapitre 2 : Modèles en statistiques spatiales.....	33
2.1 Géostatistique	33
2.1.1 Autocovariance et variogramme	33
2.1.2 Krigeage	40
2.1.3 Discussion	42
2.2 Processus de points.....	42
2.2.1 Processus de Poisson.....	42
2.2.2 Analyse de la structure d'un processus de points.....	44
2.2.3 Estimateurs pour les processus de points	47
2.2.4 Exemples de processus de points	49
2.3 Processus d'objets	54
2.3.1 Processus de points marqués	54

2.3.2 Modèles germes-grains	58
2.4 Conclusion sur les modèles en statistiques spatiales	64
2.4.1 Variance d'estimation de la moyenne.....	64
2.4.2 Discussion	65
Chapitre 3 : Estimations non paramétriques	71
3.1 Sous échantillonnage sur des processus d'objets	71
3.1.1 Processus de points de Poisson	71
3.1.2 Distribution poissonnienne de motifs additifs.....	76
3.1.3 Distribution poissonnienne de points massifs	79
3.1.4 Autres distributions	81
3.2 Estimateurs de la moyenne et de la variance d'une texture	85
3.2.1 Composantes élémentaires des textures	86
3.2.2 Bilan sur la décomposition de Wold	92
3.3 Homogénéité de la moyenne et de la variance d'une texture.....	93
3.3.1 Critères proposés pour l'homogénéité	93
3.3.2 Détermination du comportement asymptotique	94
3.3.3 Influence de la sélection des blocs	96
3.4 Evaluation des critères d'homogénéité	99
3.4.1 Application à des images synthétiques.....	99
3.4.2 Textures binarisées.....	104
3.4.3 Textures partiellement occultées.....	107
3.4.4 Application à des images réelles	110
3.5 Discussion	113
Chapitre 4 Application aux matériaux.....	117
4.1 Alliage base Titane TA6V.....	118
4.1.1 Description et aspects stéréologiques.....	118
4.1.2 Analyse spatiale d'un échantillon	119
4.1.3 Discussion et validation	120
4.2 Matériau composite à base de fibres de carbone	123
4.2.1 Description et aspects stéréologiques.....	123
4.2.2 Analyse spatiale du matériau (a)	127
4.2.3 Analyse spatiale du matériau (b).....	131
4.2.4 Analyse par direction	133
4.3 Alliage γ/γ' base Nickel	135
4.3.1 Description et aspects stéréologiques.....	135

4.3.2 Analyse spatiale d'un échantillon	136
4.3.3 Discussion	139
Conclusion	141
Annexes	145
Annexe A Décomposition de Wold.....	145
A.1 Processus complètement non déterministe.....	145
A.2 Processus harmonique	146
A.3 Processus évanescent.....	146
Annexe B Processus de points.....	147
B.1 Processus agrégé de Matérn	147
B.2 Processus régulier de Matérn.....	148
Annexe C Estimateurs	151
C.1 Borne de Cramer-Rao de l'estimateur de la moyenne par sous-échantillonnage	151
C.2 Estimateur de la variance d'un processus évanescent.....	152
Annexe D Géométrie continue	154
D.1 Covariogramme géométrique	154
D.2 Estimation des paramètres, méthode des moments	155
Annexe E Géométrie discrète	157
E.1 Discrétisation	157
E.2 Mesure de Lebesgue d'un ensemble à partir d'une observation discrète	158
E.3 Estimation des paramètres d'un ensemble discret.....	160
Bibliographie	173
Liste de publications de l'auteur.....	181

Introduction

L'inférence statistique consiste à induire les caractéristiques d'une population à partir de mesures réalisées sur un échantillon de cette population. La représentativité de cet échantillon est une question primordiale à laquelle la fiabilité de l'inférence est intimement liée. Afin d'assurer la pertinence de cette inférence, il est indispensable de pouvoir quantifier cette fiabilité en évaluant au moins un ordre de grandeur de l'incertitude de mesure.

Dans le contexte de l'analyse d'images, l'inférence statistique revient à induire les propriétés d'une scène, supposée très grande, à partir d'une image de taille réduite. La représentativité de l'image par rapport à la scène, dépend alors fortement de la structure spatiale de la scène dont on perçoit des éléments dans l'image. Pour s'assurer de cette représentativité, l'expérimentateur s'attache intuitivement à acquérir une image de la taille la plus grande possible. Ce type de problème se rencontre fréquemment dans des domaines tels que la microscopie ou l'astronomie : une étude exhaustive de l'ensemble de la scène, avec une résolution suffisante par rapport au niveau de détail souhaité, est en règle générale inenvisageable du fait des moyens techniques à mettre en œuvre.

L'obtention simultanée, à partir d'un unique échantillon, d'une mesure et de sa fiabilité nécessite de poser des hypothèses garantissant le caractère représentatif de l'image par rapport à la scène dont elle est issue. Ces hypothèses, difficilement vérifiables à partir de l'image seule, relèvent généralement d'une connaissance a priori de la scène étudiée. La structure spatiale de la scène, c'est-à-dire les relations de dépendances présentes au sein du phénomène étudié, peut présenter différentes échelles caractéristiques. On considérera généralement qu'une image est représentative d'une scène plus vaste lorsque l'image semble suffisamment grande pour capturer l'ensemble de la structure spatiale de la scène. Une connaissance a priori de cette structure permet d'acquérir une image suffisamment grande pour être effectivement représentative de la scène. S'il n'existe pas de portion de l'image présentant un aspect significativement différent du reste de l'image, nous dirons que l'image est visuellement homogène. La non homogénéité d'une image sera un élément qui permettra de mettre en cause le caractère représentatif de l'image par rapport à la scène, et donc la validité de l'inférence statistique. Cette notion d'homogénéité, a priori très perceptuelle et subjective, sera explicitée dans ce mémoire.

Nous pouvons immédiatement remarquer que certains types d'images, comme celles issues de constructions fractales par exemple, ne présentent aucune échelle caractéristique limite et ne

permettent donc pas d'extraire un échantillon représentatif. Les hypothèses nécessaires à une inférence statistique concernent donc également la nature même du phénomène étudié : la volonté exprimée d'effectuer une inférence statistique à partir d'une image implique des contraintes (notamment d'ergodicité) sur la scène dont est issue l'image.

Afin d'apporter des éléments de réponse au problème de l'inférence statistique sur des données spatiales, il convient de définir un cadre probabiliste cohérent au sein duquel on pourra appréhender l'image, la mesure et la fiabilité de la mesure. Ce cadre est celui des processus aléatoires bidimensionnels discrets. L'image est alors une réalisation bornée d'un processus, et la mesure est une estimation. La fiabilité de la mesure sera alors définie par les propriétés statistiques de l'estimateur, notamment son biais et sa variance. Afin d'éclaircir la notion d'échantillon représentatif, il conviendra également de proposer une définition plus objective de l'homogénéité. Ces aspects nous amènent naturellement à évoquer la notion de texture, qui fait naturellement intervenir les notions d'homogénéité et d'échelle d'observation. D'autre part, les techniques d'acquisitions et de manipulation d'images sur un support informatique impliquent nécessairement des données de nature numérique.

L'introduction d'une interprétation probabiliste de l'image permet également de proposer une modélisation des données, les paramètres du modèle étant estimés à partir de l'image disponible, permettant de valider les résultats de l'inférence. En effet, la seule méthode pour vérifier la validité du résultat de l'inférence statistique est de disposer de multiples réalisations indépendantes. Si le modèle proposé est valide, alors il est possible de produire des images synthétiques, réalisations indépendantes du modèle permettant d'effectuer l'inférence. Cependant, dans le cadre concret de scènes naturelles, il pourra être difficile de construire un modèle réaliste et de vérifier la validité de ce modèle. Des méthodes d'estimations non paramétriques sont alors nécessaires.

Dans ce mémoire, nous traitons en particulier la mesure de la moyenne, mais également celle de la variance des niveaux de gris d'une image. La seule source d'incertitude considérée est le caractère borné de l'image, c'est-à-dire le nombre fini de pixels disponibles.

Le Chapitre 1 constitue un chapitre d'introduction dans le sens où l'on rappelle certaines notions essentielles sur les variables et processus aléatoires, tout en définissant les notations utilisées dans ce mémoire. Nous détaillons notamment comment nous interprétons une image déterministe d'aspect homogène dans un sens probabiliste. Pour ce faire, nous évoquons la question des processus aléatoires stationnaires et des textures. Finalement, ces rappels permettent d'exprimer rigoureusement la

problématique dans un cadre formel, et de préciser ainsi les enjeux de ce mémoire. Une revue générale des différentes méthodes d'inférence en statistiques spatiales y est ensuite exposée.

Le Chapitre 2 constitue une revue de méthodes proposées dans la littérature permettant d'apporter une réponse au problème de l'incertitude de mesure de la moyenne. Ces différentes méthodes reposent sur une forme de modélisation des données. Une première approche, inspirée de la géostatistique, est basée sur l'ajustement d'une fonction théorique modélisant les caractéristiques statistiques du deuxième ordre des données (autocovariance, variogramme). Les approches basées sur les processus de points et les processus d'objets permettent de modéliser des textures représentant des distributions d'objets. Les caractéristiques statistiques d'ordre 2 du modèle, telles que les fonctions de corrélation des paires de points et de corrélation des marques, sont généralement utilisées pour vérifier l'adéquation aux données (lorsqu'elles se présentent sous l'aspect d'une distribution d'objets).

Dans le Chapitre 3, nous présentons une méthode permettant de s'affranchir complètement de l'étape de modélisation. Cette méthode repose sur un sous échantillonnage par blocs, et ne nécessite aucun a priori. Cette méthode a également l'avantage de s'adapter facilement à des mesures autres que la moyenne, notamment à la mesure de la variance. Cette même méthode nous permettra également, en nous basant sur la décomposition de Wold des processus stationnaires 2-D, de définir des critères objectifs pour évaluer l'homogénéité d'une image. Ces critères seront confrontés à des exemples d'images synthétiques homogènes ou non, et à des images réelles, afin de déterminer leur pertinence dans la pratique.

Le Chapitre 4 traite de l'utilisation des méthodes présentées dans le cadre de l'inférence des mesures de taux de phases sur des images de matériaux composites. Après une brève description des matériaux, incluant notamment des éléments de stéréologie, les différentes méthodes présentées seront appliquées. Une comparaison des résultats de différentes méthodes et une discussion seront proposées pour chaque exemple, ainsi qu'une validation expérimentale lorsque cela s'avère possible.

J'énumère ci-dessous mes différentes contributions, qui apparaissent au fil du texte, et constituent des avancées par rapport aux textes scientifiques auxquels je me suis référé.

Dans le cadre des méthodes paramétriques, nous proposons un nouveau modèle de processus d'objets, appelé Matérn à deux échelles (section 2.3.2.3). Nous exprimons les variances d'estimation de la moyenne et de la variance des modèles harmoniques en section 3.2.1.2) et évanescents (sans mémoire longue) en section 3.2.1.3, issus de la décomposition de Wold d'un processus bidimensionnel

stationnaire. Nous examinons également les liens entre les variances d'estimation de la moyenne et de la variance dans le cas d'images binaires (section 3.4.2).

Dans le cadre des approches non paramétriques, nous détaillons comment le sous-échantillonnage par blocs permet d'évaluer la variance d'estimation de la mesure. Nous détaillons les propriétés de l'estimateur de la variance d'estimation de la moyenne par sous-échantillonnage dans le cadre de processus de points et d'objets en section 3.1. Nous montrons en section 3.3.3 que le fait de sélectionner des blocs recouvrants induit un léger biais lors de l'estimation de la variance de l'estimateur. Une variante du sous-échantillonnage par bloc est proposée en section 3.4.3 pour traiter le cas de textures partiellement occultées.

Nous proposons, dans le Chapitre 4 une comparaison entre le sous-échantillonnage par blocs et la modélisation du variogramme pour évaluer la variance d'estimation de la moyenne sur des images de matériaux. En particulier, des éléments de comparaison objective des résultats sont possibles lorsque plusieurs images d'un même matériau sont disponibles. Cette validation confirme qu'il est préférable d'utiliser une méthode non paramétrique lorsque les connaissances du matériau sont insuffisantes pour construire un modèle adapté.

Finalement, certains facteurs d'incertitude des estimations, liés à des questions de géométrie discrète ont été reportés en Annexe E.

Chapitre 1: Statistiques et textures

Ce chapitre introductif est destiné à préciser nos objectifs ainsi qu'à présenter certains rappels sur les outils et définitions qui seront utiles pour la suite. Dans cet esprit, nous commençons par préciser certains aspects découlant directement de la volonté de réaliser une inférence statistique. Ceci nous amène à proposer quelques rappels sur les notions de processus aléatoire et de texture.

Nous présentons le problème de l'inférence statistique en présence de données spatialement dépendantes, ainsi que différentes familles de méthodes de statistiques spatiales adaptées à ce problème.

Commençons par préciser le sens que nous attribuons à l'inférence statistique. L'inférence statistique, en analyse d'image, consiste à induire les propriétés d'une scène supposée infinie à partir de l'analyse d'une image extraite de cette scène. Notons θ la propriété de la scène que l'on cherche à inférer, et $\theta(V)$ la mesure de cette propriété sur l'image de taille V . En parlant d'inférence statistique, nous cherchons à évaluer un ordre de grandeur pour l'erreur d'estimation $\theta - \theta(V)$.

En termes statistiques, $\theta(V)$ est un estimateur de θ . On souhaite naturellement que cet estimateur fournisse la valeur θ lorsque la fenêtre d'observation V s'étend à l'infini. Cependant en pratique, on travaille forcément avec une fenêtre V bornée. Pour une scène donnée, la représentativité de l'échantillon est intimement liée à la fenêtre d'observation V , qui doit être suffisamment grande pour représenter les structures spatiales caractéristiques de la scène étudiée. La notion de représentativité doit être liée aux propriétés de l'estimateur utilisé : une image représentative doit permettre une inférence non biaisée et de faible variance, tandis qu'une image non représentative fournira probablement un résultat présentant une variance très importante, voire éventuellement biaisé.

L'inférence statistique requiert donc, d'une part soit une évaluation de la variance d'estimation, soit la construction d'un intervalle de confiance, et d'autre part, une confirmation du caractère représentatif de l'échantillon.

1.1 Echantillon représentatif

1.1.1 Exemple

Disposer d'un échantillon représentatif est essentiel pour effectuer une inférence statistique fiable. La notion d'image représentative d'une scène plus vaste nécessite évidemment une certaine

connaissance de cette scène. En particulier, la structure spatiale de la scène joue un rôle essentiel, d'une part sur la possibilité de l'inférence, et d'autre part sur la taille minimum de la fenêtre d'observation permettant l'acquisition d'une image représentative. En effet, la scène doit être suffisamment homogène pour qu'un échantillon puisse en être représentatif. D'autre part, la représentativité ne peut être assurée que si les plus grandes structures présentes dans la scène se retrouvent dans l'image. La Figure 1.1 présente des images d'aspect homogène, issues de l'album de textures de Brodatz [Bro96].

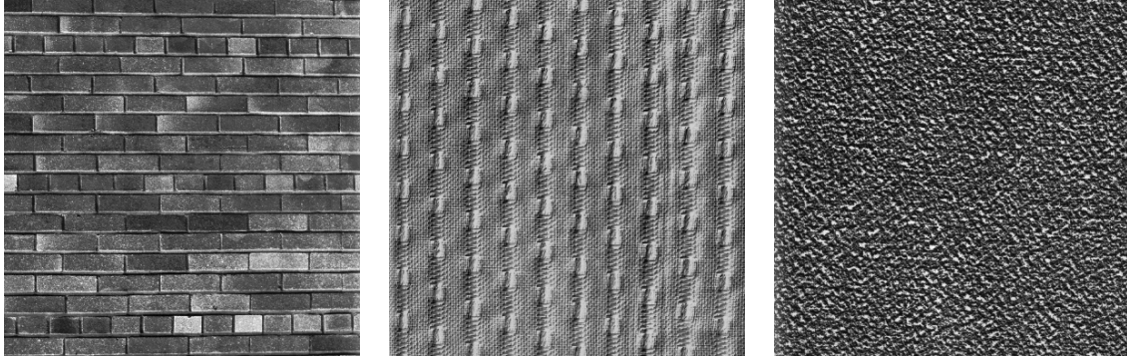


Figure 1.1 : Exemples de textures, de moins en moins structurées de gauche à droite.

L'aspect homogène de cette image permet de conforter l'idée que de nouvelles structures ne devraient pas apparaître à des échelles supérieures à celle de l'image. S'il en est ainsi, il y a de fortes chances que différentes images de même taille aient des aspects similaires.

Ainsi, les caractéristiques statistiques telles que la moyenne et la variance empirique (moyenne quadratique des écarts à la moyenne) des niveaux de gris de ces images, ont de fortes chances de constituer des approximations raisonnables de l'espérance mathématique et de la variance des scènes dont elles sont extraites.

Les images de la Figure 1.2 sont des extraits des images précédentes :

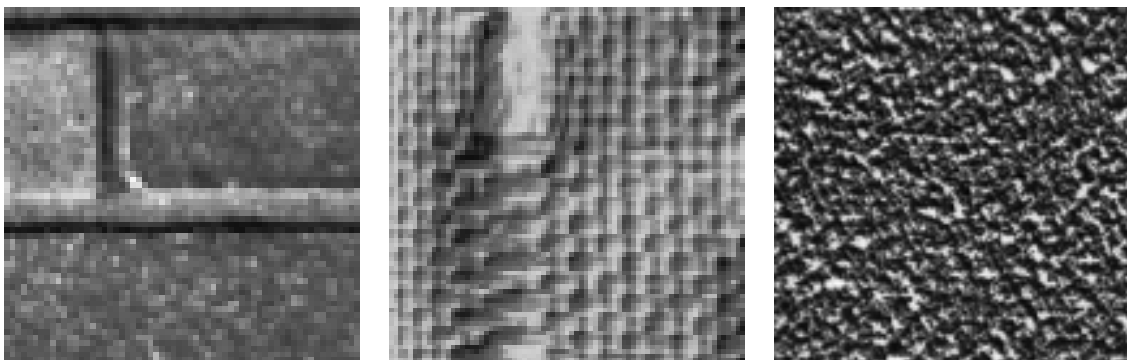


Figure 1.2 : Extraits des textures de la Figure 1.1, dans le même ordre.

Hormis l'image de droite, ces images ne présentent plus un aspect visuel homogène, des structures dont la taille est de l'ordre de celle de l'image sont présentes. Il est alors beaucoup plus difficile de

comprendre la scène à partir de ces seules images : elles ne sont pas représentatives de la texture. Concernant l'image de droite, les structures restent notablement plus petites que la taille de l'image. La notion d'homogénéité dépend donc effectivement de l'échelle d'observation. Cependant, déterminer automatiquement l'échelle d'observation nécessaire et suffisante pour obtenir une image représentative de la scène est difficile. La connaissance a priori des différentes échelles caractéristiques de la scène permet généralement d'en formuler une première estimation. Cependant, des outils permettant d'évaluer objectivement le caractère homogène d'une image seront nécessaires.

1.1.2 Notion de texture

Ces premiers exemples placent la notion de texture au cœur des questions d'inférence statistique. En analyse d'image, on associe une texture à une impression visuelle particulière présentant un caractère spatial homogène [Gag83]. Cependant, le terme de texture peut convenir pour des images présentant un aspect très structuré avec une répétition de motifs élémentaires, ou paraissant au contraire très aléatoires. Les images de la Figure 1.1 illustrent ces différents aspects des textures.

L'aspect de la texture guide souvent le choix de l'approche utilisée pour la caractériser. On utilise généralement des approches dites statistiques pour les textures présentant un caractère très aléatoire, et des approches dites structurales pour les textures faisant apparaître des motifs relativement réguliers. Nous verrons une illustration de ces méthodes dans le Chapitre 2, au travers d'approches de modélisation fondées soit sur des caractéristiques statistiques, soit sur la distribution d'objets (motifs) élémentaires. Cependant, même lorsque la texture est composée de motifs élémentaires, une forme d'organisation aléatoire apparaît, comme illustré par les images de matériaux de la Figure 1.3.

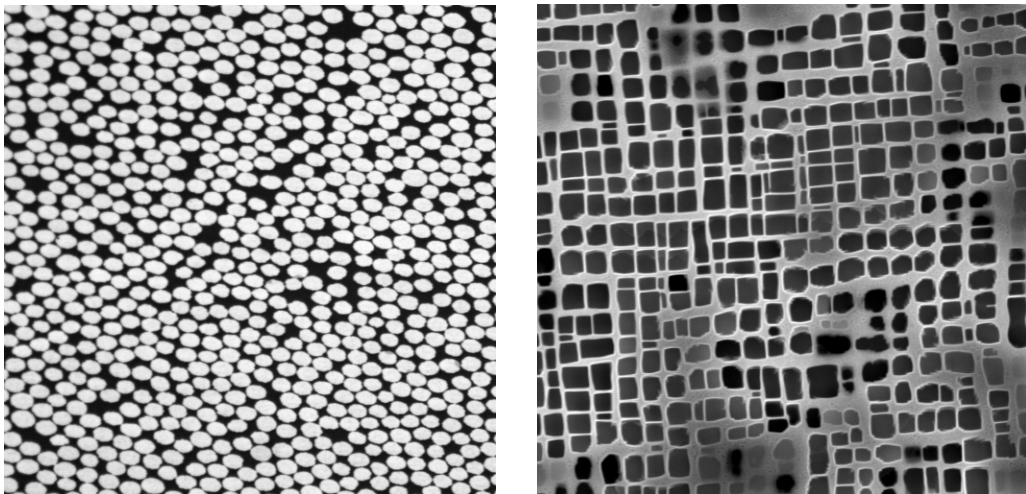


Figure 1.3 : Exemples de textures présentant des distributions d'objets. (images de matériaux composites)

La variabilité d'une texture incite à interpréter celle-ci comme étant une réalisation d'un processus aléatoire sous-jacent, présentant des propriétés de stationnarité adéquates.

Nous noterons par la suite Z le processus aléatoire générateur de l'image z . Le support constituant la fenêtre d'observation, c'est-à-dire le cadre de l'image généralement supposé carré ou rectangulaire, sera noté V . Sa surface (mesure de Lebesgue dans un espace continu), notée $|V|$, sera égale au nombre de pixels de l'image discrète (soit des pixels de dimension unité). Dans un contexte discret, si \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers, l'ensemble V est un sous-ensemble de \mathbb{N}^2 . Si $i \in V$ désigne les coordonnées d'un pixel de l'image, la valeur z_i représente le niveau de gris du pixel i , qui est une réalisation de la variable aléatoire Z_i .

Les paragraphes suivants rappellent certaines notions indispensables sur les processus aléatoires, et indiquent notamment les propriétés indispensables pour assurer la pertinence de l'inférence statistique.

1.1.3 Stationnarité

La stationnarité correspond à une invariance par translation des propriétés statistiques du processus aléatoire. La stationnarité permet donc de définir des quantités relativement simples qui décrivent (partiellement) la structure du processus aléatoire. Parmi ces descripteurs, on notera par exemple la moyenne du processus aléatoire, sa variance, ou son autocovariance. Dans ce mémoire, nous nous intéresserons particulièrement à la moyenne et à la variance des niveaux de gris des pixels d'un processus aléatoire stationnaire discret, et à leur inférence à partir d'une image unique.

1.1.3.1 Stationnarité au sens strict

Un processus aléatoire Z est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes par translation. C'est-à-dire, quel que soit le vecteur \vec{h} , on a l'égalité entre la densité de probabilité jointe de n variables quelconques (n entier) et la loi jointe des mêmes variables translatées de \vec{h} :

$$P(Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_i = z_i, \dots, Z_n = z_n) = P(Z_{1+\vec{h}} = z_1, Z_{2+\vec{h}} = z_2, \dots, Z_{i+\vec{h}} = z_i, \dots, Z_{n+\vec{h}} = z_n) \quad (1.1)$$

C'est une hypothèse très restrictive, difficile à vérifier en pratique, et souvent bien plus forte que ce dont on a généralement besoin pour étudier un processus aléatoire. En effet, les statistiques les plus couramment utilisées restent celles d'ordre 2, qui suffisent notamment aux études fréquentielles.

Remarque :

$P(\cdot)$ est une probabilité si Z prend des valeurs dans un ensemble discret, ou une densité de probabilité si Z prend des valeurs dans un ensemble continu.

1.1.3.2 Stationnarité au sens large

On préfère donc généralement faire une hypothèse moins contraignante, appelée stationnarité au sens large ou stationnarité à l'ordre 2. Un processus aléatoire stationnaire à l'ordre 2 admet une moyenne, une variance et une autocovariance invariantes par translation :

$$\forall (i, j) \in V^2, \begin{cases} E[Z_i] = \mu \\ E[(Z_i - \mu)^2] = \sigma^2 \\ Cov(Z_i, Z_j) = E[(Z_i - \mu)(Z_j - \mu)] = Cov(j - i) \end{cases} \quad (1.2)$$

Afin d'alléger les écritures, nous utiliserons par la suite l'écriture suivante pour désigner l'autocovariance entre deux points i et j séparés par un vecteur $\vec{h} = j - i$:

$$Cov(\vec{h}) = Cov(Z_i, Z_j) \quad (1.3)$$

Par extension, on pourra parler de stationnarité des différentes statistiques d'ordre quelconque d'un processus aléatoire : stationnarité de la moyenne, de la variance, etc.

Remarques :

- La densité spectrale de puissance d'un processus stationnaire à l'ordre 2 est égale la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation (théorème de Wiener-Kinchin).
- Nous observons déjà que, si l'on veut effectuer une inférence de la moyenne à partir d'une image, le processus aléatoire générateur de l'image observée doit nécessairement être à moyenne stationnaire. Pour pouvoir effectuer l'inférence de la variance, le processus doit être à variance stationnaire.
- Les propriétés supplémentaires de stationnarité à l'ordre 2 ou plus, ne sont pas absolument nécessaires à l'inférence statistique de la moyenne ou de la variance.

1.1.3.3 Isotropie

L'isotropie correspond à l'invariance par rotation des propriétés statistiques du processus. Pour un processus aléatoire stationnaire et isotrope, l'autocovariance ne s'exprime plus qu'en fonction de la norme euclidienne de \vec{h} , que l'on notera simplement h par la suite. En d'autres termes, la covariance entre deux points i et j d'un processus stationnaire isotrope ne dépend que de la distance $\|\vec{h}\|$ ($\|\cdot\|$ désignant la norme euclidienne), simplement notée h par la suite, entre ces points. A nouveau, on utilisera une écriture simplifiée pour l'autocovariance d'un processus stationnaire isotrope :

$$Cov(h) = Cov(\vec{h}) = Cov(Z_i, Z_{i+\vec{h}}) \quad (1.4)$$

On pourra aussi s'intéresser, notamment dans le cas de processus stationnaires anisotropes, à la moyenne circulaire de l'autocovariance notée $\overline{Cov}(h)$. Le concept de moyenne circulaire pourra être

utilisée pour d'autres fonctions que l'autocovariance. Pour toute fonction 2-D continue f , \bar{f} désignera sa moyenne circulaire. En écrivant $\vec{h} = (h \cos(\varphi), h \sin(\varphi))$, la moyenne circulaire s'exprime :

$$\bar{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f((h \cos(\varphi), h \sin(\varphi))) d\varphi \quad (1.5)$$

Dans le cas d'une fonction isotrope, les fonctions $f(\vec{h})$ et $\bar{f}(h)$ portent exactement la même information. Dans le cas contraire, si f est anisotrope, alors \bar{f} contient moins d'informations.

L'écriture de la moyenne circulaire est plus problématique dans un contexte de données discrètes, puisque elle nécessite d'exprimer les coordonnées polaires de points de coordonnées entières dans un repère cartésien. La fonction n'est définie que sur les distances pouvant apparaître entre des points de coordonnées entières, c'est-à-dire de la forme $h = \|j - i\|$ où i et j sont des points de coordonnées entières. Les vecteurs \vec{h} de norme h permettant de relier deux points de la grille des pixels ne peuvent être orientés que selon un nombre fini d'orientations φ dépendant de la distance h . Il faut donc réécrire (1.5) avec une somme discrète. En notant $\{\varphi(h)\}$ cet ensemble, et $\text{card}\{\varphi(h)\}$ son cardinal, l'expression de la moyenne circulaire d'une fonction f discrète s'écrit alors :

$$\bar{f}(h) = \frac{1}{\text{card}\{\varphi(h)\}} \sum_{\vec{h} \in \{\varphi(h)\}} f(\vec{h}) \quad (1.6)$$

Dans la pratique, on peut définir des classes de distance, et effectuer la moyenne sur les distances h incluses dans les mêmes classes.

L'intérêt de la moyenne circulaire est de passer d'une fonction 2-D $\text{Cov}(\vec{h})$ à une fonction 1-D $\overline{\text{Cov}}(h)$. Cette réduction de dimension sera pratique à la fois pour la visualisation et l'interprétation des résultats, mais aussi, comme nous le verrons par la suite, pour la modélisation. De plus, intégrer $\text{Cov}(\vec{h})$ pour tout \vec{h} (comme nous serons amenés à le faire par la suite) revient exactement à intégrer $\overline{\text{Cov}}(h)$ pour tout h .

1.1.4 Ergodicité

L'ergodicité est une propriété extrêmement importante pour l'étude pratique des processus aléatoires. En quelques mots, si la stationnarité d'un processus aléatoire permet de définir des caractéristiques statistiques globales grâce aux propriétés d'invariance par translation, l'ergodicité permet d'estimer ces statistiques à partir d'une unique réalisation en effectuant des moyennes spatiales sur une seule réalisation. Davantage de détails concernant l'ergodicité peuvent être trouvés dans le chapitre 12 de Papoulis et Pillai [Pap02]. Comme pour la stationnarité, on pourra parler d'ergodicité des différents moments : ergodicité de la moyenne, de la variance, de l'autocovariance, etc.

Par exemple, la moyenne empirique spatiale $\mu(V)$ d'une réalisation unique z de Z sur V sera un estimateur de l'espérance μ du processus aléatoire Z de moyenne stationnaire et ergodique :

$$\mu(V) = \frac{1}{|V|} \sum_{i=1}^{|V|} z_i \xrightarrow{V \rightarrow \mathbb{N}^2} \mu, \text{ avec la probabilité 1.} \quad (1.7)$$

En particulier, l'ergodicité assure que la variance de l'estimateur spatial tend vers 0 lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini. Dans le cas d'un processus à moyenne ergodique, on observera :

$$\text{Var } \mu(V) \xrightarrow{V \rightarrow \mathbb{N}^2} 0 \quad (1.8)$$

L'ergodicité est donc une hypothèse indispensable pour l'inférence statistique. Les processus aléatoires que nous considérons seront toujours supposés stationnaires et ergodiques, au moins pour les paramètres que nous cherchons à inférer : la moyenne et la variance.

1.1.5 Propriétés de mélange

Pour décrire la force des corrélations au sein d'un processus aléatoire, Rosenblatt [Ros56] introduit un coefficient dit de mélange (*mixing coefficient*). Ce coefficient est défini formellement comme suit. Soit deux ensembles d'indices Λ_1 et Λ_2 , $\mathfrak{Z}(\Lambda_i)$ l'ensemble des événements générés par les variables $\{Z_j; j \in \Lambda_i\}$, et $d(\Lambda_1, \Lambda_2)$ la distance de Manhattan ([She94]) minimale entre les ensembles Λ_1 et Λ_2 . On définit le coefficient de mélange $\alpha_n(m)$ de la manière suivante :

$$\alpha_n(m) = \sup\{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|; A \in \mathfrak{Z}(\Lambda_1), B \in \mathfrak{Z}(\Lambda_2), |\Lambda_1| \leq n, |\Lambda_2| \leq n, d(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq m\} \quad (1.9)$$

Le processus est dit fortement mélangeant (*strong mixing*) si la condition suivante est réalisée :

$$\alpha_n(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (1.10)$$

On note qu'aucune restriction sur la vitesse à laquelle $\alpha_n(m)$ tend vers 0 n'est spécifiée ici. En termes simples, cette condition exprime le fait que des sous-échantillons de taille n quelconque suffisamment éloignés ($m \rightarrow \infty$) extraits d'un processus stationnaire deviennent indépendants.

De nombreux théorèmes centraux limites ont été prouvés pour des processus stationnaires satisfaisant cette condition de mélange fort, voir notamment [Ros56], [Ros84], [Mer00], [Jon04].

Les processus fortement mélangeants sont donc de bons candidats pour le calcul de la variance d'estimation de leurs caractéristiques statistiques.

1.2 Statistiques classiques

Les pixels de l'image, observée sur l'ensemble V , permettent de former un estimateur $\theta(V)$ d'une caractéristique θ de la scène. Le résultat de l'estimateur, $\theta(V)$, est évidemment une réalisation d'une variable aléatoire, dont la valeur est conditionnée par l'image. Il est clair qu'une autre image de même taille, acquise à un endroit différent de la scène aurait conduit à une autre estimation de la caractéristique.

1.2.1 Estimateurs

Les performances de l'estimateur $\theta(V)$, en particulier son biais $E\theta(V) - \theta$ et sa variance $Var\theta(V)$, doivent être évaluées pour établir la fiabilité de l'inférence statistique. Le choix de ces notations particulières a pour but de mettre en exergue l'influence du caractère borné de la fenêtre d'observation et d'analyser le comportement des estimateurs pour différentes fenêtres V .

On attend d'un bon estimateur qu'il soit non biaisé et que sa variance tende vers zéro quand le nombre d'échantillons disponibles tend vers l'infini. Ainsi, on obtient une estimation $\theta(V)$ qui converge presque sûrement vers la valeur cherchée θ lorsque $|V|$ tend vers l'infini :

$$\theta(V) \xrightarrow{|V| \rightarrow \infty} \theta, \text{ presque sûrement.} \quad (1.11)$$

Cette propriété est appelée consistance. Un estimateur non biaisé et consistant est donc extrêmement intéressant car si l'on dispose d'un échantillon de grande taille, on pourra effectuer une estimation très précise et fiable (c'est-à-dire non biaisée et de faible variance) de son espérance mathématique.

L'inégalité de Cramer-Rao permet de fixer une limite définissant la variance minimum que peut atteindre un estimateur non biaisé $\theta(V)$:

$$Var[\theta(V)] \geq \frac{1}{I(\theta)} \quad (1.12)$$

où $I(\theta)$ est l'information de Fisher, qui représente la quantité d'information que la variable aléatoire X observée transporte à propos du paramètre inconnu θ . L'information de Fisher s'exprime comme :

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(L(\theta)) \right)^2 \right] \quad (1.13)$$

La fonction $L(\theta)$ étant la fonction de vraisemblance $L(\theta) = f(X|\theta)$ qui indique la densité de probabilité de X conditionnellement à la valeur θ du paramètre. Nous invitons le lecteur intéressé par plus de détails sur la fonction de vraisemblance et la borne de Cramer-Rao à se référer par exemple à [The92] chap. 6, [McD95] chap. 10, [Dac82], [Sil75].

Classiquement, pour estimer l'espérance $E\theta(V)$ et la variance $Var\theta(V)$ de l'estimateur, on cherche à produire de nombreuses réalisations indépendantes de $\theta(V)$. L'espérance $E\theta(V)$ et la variance $Var\theta(V)$ devraient idéalement être celles que l'on pourrait estimer à partir de nombreuses (rigoureusement, un nombre infini) réalisations indépendantes de taille $|V|$ du processus aléatoire. Dans notre cas, la difficulté de l'inférence statistique vient du fait qu'une seule image de taille bornée est disponible.

1.2.2 Variance d'estimation

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à l'estimateur $\mu(V)$ de l'espérance mathématique μ , ainsi qu'à l'estimateur $\sigma^2(V)$ de la variance σ^2 des niveaux de gris de la scène. Les estimateurs classiques de la moyenne et de la variance s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mu(V) &= \frac{1}{|V|} \sum_{i=1}^{|V|} z_i \\ \sigma^2(V) &= \frac{1}{|V|-1} \sum_{i=1}^{|V|} (z_i - \mu(V))^2\end{aligned}\tag{1.14}$$

Rigoureusement, les termes 'espérance mathématique' et 'variance' sont réservés aux quantités déterministes caractéristiques d'une variable ou d'un processus aléatoire, et des termes tels que 'moyenne', 'moyenne empirique' et 'écart quadratique moyen' pour leurs estimateurs. Cependant, dans des contextes ne prêtant pas à confusion, nous utiliserons parfois les termes de moyenne et de variance pour désigner soit les caractéristiques des variables ou processus aléatoires, soit leurs estimateurs. Cet abus de langage permet de simplifier l'écriture de certaines formulations.

Les pixels constituant l'image peuvent être considérés comme autant d'échantillons de la scène. Si l'on suppose que ces pixels z_i sont des réalisations de variables aléatoires Z_i identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d.), alors ces estimateurs sont connus pour être non biaisés. La variance de l'estimateur de la moyenne est alors :

$$\text{Var } \mu(V) = \frac{\sigma^2}{|V|}\tag{1.15}$$

La variance de l'estimateur de la variance dépend des moments d'ordre supérieur, jusqu'à l'ordre 4, des Z_i . Dans le cas d'une distribution quelconque i.i.d., on obtient :

$$\text{Var } \sigma^2(V) = \frac{1}{|V|} E[Z_i^4] - \frac{4\mu}{|V|} E[Z_i^3] - \frac{|V|-3}{|V|-1} \sigma^4 + \frac{6}{|V|} \sigma^2 \mu^2 + \frac{3}{|V|} \mu^4\tag{1.16}$$

Dans le cas où les Z_i suivent une distribution gaussienne, cette expression se simplifie largement :

$$\text{Var } \sigma^2(V) = \frac{2\sigma^4}{|V|-1}\tag{1.17}$$

On constate que ces variances d'estimations décroissent au rythme standard de $|V|^{-1}$, c'est-à-dire comme l'inverse du nombre de pixels de l'image, dans le cas de processus i.i.d.

1.2.3 Intervalles de confiance

Nous venons de voir qu'une estimation est une réalisation d'une variable aléatoire. La variable aléatoire sous-jacente possède sa propre fonction de densité de probabilité, qui est a priori inconnue. Il est donc essentiel d'associer une information indiquant la fiabilité de cette estimation. La variance, ou l'écart type de la distribution de l'estimation, est une première source d'information sur cette fiabilité. Dans certains cas, il est également possible de définir un intervalle de confiance afin de spécifier la probabilité que le paramètre recherché se trouve dans une certaine plage de valeurs autour de l'estimation. Si l'on note θ le paramètre théorique recherché, $\hat{\theta}_n$ son estimation effectuée à partir de n échantillons, et p le seuil de confiance fixé, l'intervalle de confiance est défini par la probabilité :

$$P[\hat{\theta}_n - a_{n,p} < \theta < \hat{\theta}_n + b_{n,p}] = p \quad (1.18)$$

où $a_{n,p}$ et $b_{n,p}$ sont des réels positifs dépendant de la distribution de l'estimateur et du seuil de confiance p imposé.

Nous écrirons également les intervalles de confiance sous la forme :

$$IC_{n,p}(\theta) = [\hat{\theta}_n - a_{n,p}, \hat{\theta}_n + b_{n,p}] \quad (1.19)$$

Dans le cas où l'on sait que la variable aléatoire correspondant au résultat de l'estimateur possède une distribution symétrique, on pourra écrire l'intervalle de confiance de façon compacte :

$$\theta = \hat{\theta}_n \pm \varepsilon_{n,p} \quad (1.20)$$

avec ε_p la demi largeur de l'intervalle de confiance au seuil de probabilité p fixé. Dans le cas particulier d'une distribution gaussienne d'écart-type σ , la demi largeur de l'intervalle de confiance est d'environ 2σ pour $p=0.95$ et d'environ 3σ pour $p=0.997$. Ceci est d'autant plus intéressant que la distribution gaussienne, aussi appelée distribution normale, est la distribution limite lorsque plusieurs facteurs aléatoires additifs indépendants interviennent dans le phénomène étudié. Cette propriété est connue sous le nom de théorème central limite.

Pour plus d'informations au sujet des intervalles de confiance, nous invitons le lecteur à consulter [Dac82], [Sil75].

Lorsque l'on connaît les lois de probabilité régissant l'évènement aléatoire étudié, on peut former un intervalle de pari, décrivant la probabilité qu'une estimation quelconque se trouve dans cet intervalle.

$$P[\theta - \alpha_{n,p} < \hat{\theta}_n < \theta + \beta_{n,p}] = p \quad (1.21)$$

où $\alpha_{n,p}$ et $\beta_{n,p}$ sont des réels positifs dépendant de la distribution des données et du seuil de confiance p imposé.

Ces deux types d'intervalles, de confiance et de pari, sont donc conceptuellement différents. En particulier, lorsque l'on effectue de nombreuses réalisations d'un modèle, c'est un intervalle de pari que l'on estime.

1.3 Inférence en présence de dépendances spatiales

Dans la grande majorité des applications, les images présentent une forme d'organisation spatiale. Cela revient à considérer que les variables aléatoires Z_i du processus générateur de l'image sont liées par des lois jointes non séparables. L'hypothèse d'indépendance n'étant plus valide, les formules classiques (1.15) et (1.16) ne peuvent plus être employées. Les techniques statistiques permettant de prendre en compte ces dépendances peuvent se regrouper sous le terme générique de statistiques spatiales. Les grandes familles de méthodes utilisées en statistiques spatiales, ainsi que de nombreux exemples d'applications, sont décrits dans [PSS91]. Dale et al. [Dal02] étudie les relations conceptuelles entre les différentes approches utilisées.

1.3.1 Estimateur de la moyenne

Tant que les variables aléatoires Z_i restent identiquement distribuées (ou simplement, sous les hypothèses minimales de stationnarité de la moyenne et de la variance, si elles admettent la même espérance mathématique et la même variance), il est clair que l'estimateur de la moyenne reste non biaisé. En revanche, l'expression de sa variance fait maintenant intervenir les covariances entre les différentes variables aléatoires :

$$Var \mu(V) = \frac{1}{|V|^2} \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|V|} Cov(Z_i, Z_j) = \frac{1}{|V|^2} \sum_{ij} Cov(Z_i, Z_j) \quad (1.22)$$

avec $Cov(Z_i, Z_j) = E[(Z_i - \mu)(Z_j - \mu)]$ la covariance entre les variables Z_i et Z_j . Lorsque aucune confusion n'est possible, nous écrirons les sommes multiples de façon condensée, en indiquant uniquement sur quelles variables s'effectuent les sommations, comme dans l'équation (1.22).

Le comportement de la variance de l'estimateur de la moyenne est donc déterminé par les relations de dépendances entre les pixels, c'est à dire par la structure spatiale de l'image.

Sous l'hypothèse d'un processus stationnaire à l'ordre 2, on peut réécrire (1.22) en impliquant directement la fonction d'autocovariance, ainsi que la forme et la taille de la fenêtre d'observation V . Si l'on note $K_V(\vec{h})$ le nombre de paires de points de V séparées par \vec{h} , l'équation générale (1.22) s'écrit alors :

$$Var \mu(V) = \frac{1}{|V|^2} \sum_{\vec{h}} K_V(\vec{h}) Cov(\vec{h}) \quad (1.23)$$

où \vec{h} parcourt l'ensemble des cas possibles $\{\vec{h} = j - i; (i, j) \in V^2\}$. Cette notation fera toujours implicitement référence à cet ensemble.

En géostatistique, $K_V(\vec{h})$ est appelé le covariogramme géométrique, qui est défini comme la surface (mesure de Lebesgue) de l'intersection entre l'ensemble V et une version tradatée $V_{\vec{h}}$ de V par le vecteur \vec{h} :

$$K_V(\vec{h}) = |V \cap V_{\vec{h}}| \quad (1.24)$$

Davantage de détails sur le covariogramme géométrique sont fournis dans [Ser82], [Ohs00], ainsi qu'en Annexe D.

Sous l'hypothèse que la fonction d'autocovariance s'annule à partir d'une certaine distance, ou tend vers 0 suffisamment rapidement, et que la fenêtre d'observation V soit très grande devant cette distance, on obtient l'approximation suivante :

$$Var \mu(V) \approx \frac{1}{|V|} \sum_{\vec{h}} Cov(\vec{h}), \text{ pour } V \text{ grand} \quad (1.25)$$

Les géostatisticiens appellent portée intégrale A , quand elle existe, l'intégrale de l'autocovariance :

$$A = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\vec{h}} Cov(\vec{h}) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_h card\{\varphi(h)\} \overline{Cov}(h) \quad (1.26)$$

on rappelle $card\{\varphi(h)\}$ correspond au nombre de vecteurs \vec{h} de norme h présentant des orientations telles qu'on puisse écrire $\vec{h} = j - i$ avec i et j des points de coordonnées entières inclus dans V .

Lantuéjoul [Lan91] décrit plus en détails la portée intégrale et ses propriétés. Notamment, sa définition la plus générale est la suivante :

$$A = \lim_{V \rightarrow \mathbb{N}^2} |V| \frac{Var \mu(V)}{\sigma^2} \quad (1.27)$$

Si A est finie et non nulle, on obtient alors une expression simple, décroissant au rythme standard $|V|^{-1}$, pour la variance de la mesure sur une fenêtre V suffisamment grande :

$$Var \mu(V) \underset{V \rightarrow \mathbb{N}^2}{\approx} \frac{\sigma^2 A}{|V|} \quad (1.28)$$

La portée intégrale A est parfois associée à une surface minimale représentative pour l'observation d'un processus corrélé [Lan91], du fait de l'analogie avec la formule classique $Var \mu(V) \approx \sigma^2 / N$, avec $N = |V| / A$, de la variance de l'estimateur de la moyenne d'un processus décorréolé. Cette association peut cependant être trompeuse en présence de corrélations négatives au sein du processus.

On notera également que la quantité $\sigma^2 A$, ou plus généralement l'intégrale de la fonction d'autocovariance quand elle existe est parfois appelée variance asymptotique (Osher et al. [Ohs00]).

Si A est infinie, nulle, voire non définie, des comportements asymptotiques différents apparaissent pour $Var \mu(V)$ [Lan91]. Nous détaillerons au Chapitre 3 des processus présentant de telles portées intégrales.

1.3.2 Estimateur de la variance

En présence de dépendances spatiales, il apparaît que l'estimateur de la variance (non biaisé dans le cas i.i.d.) devient biaisé. Son biais correspond exactement à la variance d'estimation de la moyenne :

$$\begin{aligned} E \sigma^2(V) &= \frac{1}{|V|-1} \left(\sum_{i=1}^{|V|} E[Z_i^2] - \frac{1}{|V|} \sum_{ij} R_{ij} \right) \\ &= \sigma^2 - \frac{1}{|V|^2} \sum_{ij} Cov(Z_i, Z_j) \end{aligned} \quad (1.29)$$

La notation $R_{ij} = E[Z_i Z_j] = Cov(Z_i, Z_j) + \mu^2$ désigne la corrélation entre ces deux variables. Nous utiliserons la même notation pour l'autocorrélation d'un processus stationnaire à l'ordre 2.

L'expression de sa variance prend alors une forme générale :

$$Var \sigma^2(V) = \frac{1}{(|V|-1)^2} \left(\sum_{i,j} R_{ijij} - \frac{2}{|V|} \sum_{i,j,k} R_{iijk} + \frac{1}{|V|^2} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} \right) - (E \sigma^2(V))^2 \quad (1.30)$$

où les $R_{ijkl} = E[Z_i Z_j Z_k Z_l]$ représentent les corrélations d'ordre 4.

Sous l'hypothèse d'un processus Z stationnaire à l'ordre 4, les corrélations R_{ijkl} sont invariantes par translation et ne dépendent plus que du triplet $(i-j, i-k, i-l)$. Il est possible de procéder en définissant un 'covariogramme géométrique d'ordre 4', comptant le nombre de tels triplets à l'intérieur de la fenêtre d'observation, et de définir un équivalent de la portée intégrale dans le cas des corrélations d'ordre 4. Cependant, à notre connaissance, cette approche ne semble pas avoir été étudiée dans la littérature.

La variance de l'estimateur de la moyenne fait donc appel aux autocorrélations d'ordre 2 du processus, et le calcul de la variance de l'estimateur de la variance nécessite la connaissance des autocorrélations d'ordre 4 (ou moments croisés d'ordre 4). Il apparaît donc que la variance d'un estimateur d'une statistique d'ordre k fait appel aux statistiques d'ordre $2k$, ce qui semble relativement intuitif. Lacoume et al. [Lac97] complètent ces remarques pour les estimateurs de statistiques d'ordre supérieur.

La complexité, en nombre d'opérations, du calcul des statistiques d'ordre 2 (autocorrélation ou autocovariance) est de l'ordre de $|V|^2$. Elle est de l'ordre de $|V|^4$ pour l'estimation des autocorrélations d'ordre 4. Pour des données de grande taille, le temps de calcul de ces quantités peut être prohibitif. Ce problème de coût calculatoire peut être levé en procédant à un échantillonnage (consistant ici à ne sélectionner que quelques quadruplets i, j, k, l , parmi l'ensemble des possibles), mais des problèmes numériques lors de l'intégration de ces estimateurs peuvent apparaître.

1.3.3 Intervalles de confiance

La variance d'estimation permet d'obtenir une première information sur la fiabilité de la mesure. Un intervalle de confiance fournit cependant une information beaucoup plus détaillée en indiquant la probabilité que la valeur vraie θ , que l'on cherche à inférer, se trouve dans un intervalle fixé autour de la valeur estimée $\theta(V)$. La construction de cet intervalle de confiance nécessite la connaissance ou l'estimation de la distribution de l'estimateur $\theta(V)$.

Si l'on suppose des processus tels que les dépendances spatiales s'annulent suffisamment rapidement avec la distance, des sous-échantillons suffisamment éloignés deviennent indépendants. L'estimateur de la moyenne devrait alors converger asymptotiquement vers une loi normale, et l'estimateur de la variance vers une loi du khi 2.

Dans le cas de l'estimateur de la moyenne d'une série aléatoire présentant des propriétés de mélange fort (voir section 1.1.5), un théorème central limite existe sous certaines conditions [Mer00]. Des cas particuliers existent cependant [Her83], pour lesquels le théorème central limite ne s'applique plus. Dans le cas des processus bidimensionnels, les conditions sous lesquelles les estimateurs convergent vers une loi de distribution simple restent assez obscures. Nous nous concentrerons donc sur les calculs des variances d'estimations.

1.4 Méthodes pour l'inférence statistique

On constate ainsi qu'en présence de données structurées, les expressions des propriétés des estimateurs de la moyenne et de la variance sont beaucoup plus complexes que dans le cas i.i.d. D'autre part, l'image observée z n'est qu'une réalisation d'un processus aléatoire, noté Z . Autrement dit, les différents pixels z_i observés ne sont que des réalisations de variables aléatoires Z_i . L'estimation des corrélations entre ces pixels, nécessaire pour établir les propriétés des estimateurs et donc la fiabilité de l'inférence, requiert donc impérativement un recours à des hypothèses.

1.4.1 Méthodes paramétriques

Si l'on souhaite estimer les variances d'estimations $Var \mu(V)$ et $Var \sigma^2(V)$ à partir de leurs expressions (1.22) (ou (1.28) avec la portée intégrale) et (1.30), il est nécessaire de pouvoir estimer les corrélations entre les différentes variables aléatoires. En supposant le processus Z stationnaire à l'ordre 2, les covariances entre deux variables aléatoires ne dépendent plus que du vecteur \vec{h} séparant ces deux variables. Sous cette hypothèse, il est possible de former un estimateur de la covariance $Cov(\vec{h})$ à partir de l'ensemble des couples de pixels de l'image séparés par le vecteur \vec{h} .

Néanmoins, il ne suffit pas d'estimer la fonction d'autocovariance pour accéder à la variance d'estimation de la moyenne. Une fonction d'autocovariance répond à une contrainte de définie-positivité ([Cre93] page 68), c'est-à-dire que pour tout ensemble de réels a_i , elle vérifie :

$$\sum_{i,j} a_i a_j Cov(i-j) \geq 0 \quad (1.31)$$

Cette propriété assure notamment que la somme, dans l'équation (1.22) sera non négative. Les estimateurs de l'autocovariance ne possèdent pas cette propriété. L'utilisation directe des autocovariances estimées dans (1.22) peut conduire à un résultat négatif, incompatible avec une variance. De manière générale, même si le résultat empirique est positif, les erreurs d'estimation de l'autocovariance s'ajoutent, et la variance estimée s'avère très instable, comme le montre l'exemple suivant.

L'image de la Figure 1.4 est une réalisation d'un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma=100$. D'après le paragraphe 1.2.2, la variance d'estimation de la moyenne devrait s'exprimer $Var \mu(v) = \sigma^2 / |v|$, quelle que soit la valeur de $|v|$. Si l'on 'oublie' que le processus est un bruit blanc, et que l'on cherche à appliquer la formule générale (1.22), il faut commencer par estimer l'autocovariance. En considérant le processus comme stationnaire à l'ordre 2, la formule (1.25) devient valide et la variance d'estimation de la moyenne peut s'estimer en intégrant l'autocovariance estimée.

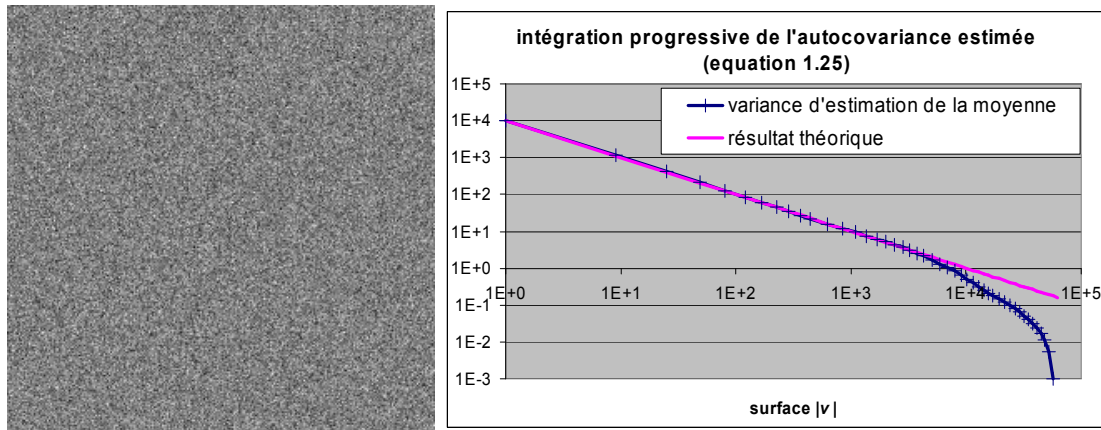


Figure 1.4 : Exemple d'instabilité numérique lors de l'intégration de l'autocovariance empirique. La courbe, présentée en échelle log-log, indique la variance d'estimation de la moyenne en fonction de la surface d'observation.

Les courbes tracées en Figure 1.4 indiquent le résultat théorique $Var \mu(v) = \sigma^2 / |v|$, ainsi que l'estimation de $Var \mu(v)$ à partir de la formule (1.25) issue de l'intégration de l'autocovariance estimée. On constate un très bon accord entre les courbes théoriques et estimées pour $|v|$ petit. En revanche, lorsque $|v|$ grandit la variance estimée diffère de plus en plus de la valeur théorique. Le dernier point estimé, pour lequel $|v| = |V|/4$ est égal au quart de la taille de l'image observée, a une valeur négative. Il n'apparaît donc pas sur le graphique.

Cet exemple permet d'illustrer les instabilités numériques issues de la substitution directe de l'autocovariance théorique par l'autocovariance estimée dans l'équation (1.25). Une solution à ces problèmes consiste à proposer un modèle pour les données. Ce modèle peut concerner l'ensemble du processus aléatoire générateur de l'image, ou simplement les moments nécessaires (autocovariance si l'on s'intéresse uniquement à la variance d'estimation de la moyenne).

1.4.1.2 Géostatistique

Fondée sous l'impulsion de Matheron [Math62], la géostatistique est une discipline dont l'objectif est l'étude des phénomènes dits 'régionalisés', c'est-à-dire présentant une certaine structure dans l'espace, à partir d'observations partielles. La motivation à l'origine de son développement était l'estimation des gisements miniers. Certains termes utilisés en géostatistique peuvent être en conflit avec les appellations classiquement utilisées en traitement du signal et des images. Lors de l'apparition de ces termes, nous indiquerons l'appellation que l'on utiliserait en analyse d'image, ainsi que l'expression mathématique correspondante à la définition du terme afin d'éviter les ambiguïtés.

Dans le contexte minier dont est issue la géostatistique, les points de mesures sont typiquement des forages sur lesquels on évalue la teneur en minerai recherché. On comprend aisément qu'il est difficile et coûteux de multiplier les points de mesure en vue d'obtenir un échantillonnage très fin. Il s'agissait donc pour Matheron de mettre au point des méthodes particulières permettant notamment d'estimer la

quantité totale de minerai exploitable et de décrire sa répartition dans le gisement dans un souci d'économie de moyens. Depuis, la géostatistique a rencontré un vif succès et a diffusé dans de très nombreux contextes applicatifs : hydrologie [Tod01], écologie [For02], agronomie [Cer04], etc.

Une pratique courante en géostatistique consiste à modéliser non pas le processus aléatoire complet dont seraient issues les données, mais uniquement son autocovariance. Les paramètres d'une fonction définie-positive sont ajustés à partir des données. En général, les géostatisticiens utilisent le variogramme plutôt que l'autocovariance. Pour un processus stationnaire à l'ordre 2, les deux fonctions sont équivalentes. Cependant, l'intérêt du variogramme est qu'il reste défini sous des hypothèses moins restrictives, et qu'il peut ainsi permettre de déceler certaines déviations par rapport à la stationnarité d'ordre 2. Les détails de cette méthode seront décrits dans la section 2.1.

Il est possible de procéder de même dans le cas de l'estimateur de la variance. Le processus devra alors être supposé stationnaire à l'ordre 4 pour pouvoir définir et estimer les autocorrélations d'ordre 4. De nouveau, les estimateurs des autocorrélations ne permettent pas d'assurer un résultat stable lors de la substitution dans (1.30) des autocorrélations théoriques par celles estimées. En particulier, cette substitution peut conduire à un résultat négatif pour la variance estimée. Une modélisation des autocorrélations d'ordre 4 devient alors nécessaire. Cependant, à notre connaissance, la modélisation des autocorrélations d'ordre 4 n'est pas utilisée dans la littérature.

1.4.1.3 Modélisation d'une distribution d'objets

La distinction qui est faite ici entre les processus aléatoires (étudiés sous l'angle de la géostatistique en section 2.1) et les ensembles aléatoires (processus de points en section 2.2 et processus d'objets en section 2.3) n'a rien de fondamentale. Ces deux concepts s'inscrivent toujours dans le cadre des processus aléatoires et des statistiques spatiales. Cependant, les processus de points et les modèles qui en découlent sont des cas particuliers offrant une interprétation structurale des textures. En effet, les processus de points fournissent une base très intéressante pour caractériser des distributions d'objets dans l'espace, assimilables à une variable aléatoire indicatrice qui prend la valeur 1 sur les objets et 0 ailleurs. Cette représentation prend tout son intérêt quand on attache un objet géométrique, éventuellement aléatoire, à chaque point du processus. Parmi les ouvrages de référence, on citera notamment les livres de Stoyan et al. [Sto95] et Cressie [Cre93].

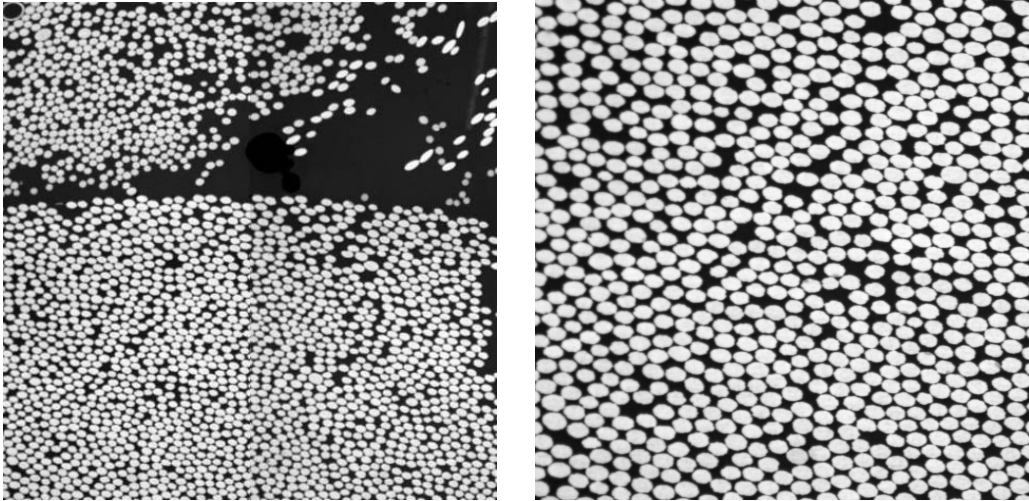


Figure 1.5 : Textures formées d'une distribution d'objets : images de matériau composite à base de fibres de carbone. Les fibres apparaissent en gris clair sur un fond sombre.

Pour ce type d'images, on commencera par effectuer une segmentation afin d'isoler les objets, les fibres dans l'exemple de la Figure 1.5.

Les processus de points sont utilisés dans de très nombreux domaines d'applications, comme par exemple la sylviculture [Sto00a], l'épidémiologie [Gat96], la microscopie [Matt05], l'astrophysique [Pon99]. Ils forment une base très intéressante pour étudier une distribution spatiale d'objets. Un processus de points correspond à un arrangement aléatoire de points dans un ensemble. On peut considérer qu'un processus de points est un processus aléatoire, tel que décrit plus haut, prenant la valeur 0 presque partout, sauf en certains points supportant des impulsions de Dirac. On ne considérera que des processus de points finis, pour lesquels le nombre de points dans un ensemble borné est fini, et dont les points sont tous distincts. Les notions de stationnarité, d'ergodicité et d'isotropie définies plus haut pour les processus aléatoires restent valables pour les processus de points.

Les processus de points fournissent une base permettant la construction de modèles plus complexes, et permettant de mieux modéliser des images telles que celles de la Figure 1.5, se présentant sous l'aspect d'une distribution spatiale d'objets. On considérera notamment les processus de points marqués, obtenus en associant diverses caractéristiques à chaque point du processus, par exemple le diamètre de la fibre, son orientation, etc. Les modèles de type germes-grains, qui permettent d'associer respectivement des informations supplémentaires ou des ensembles géométriques aux points du processus seront également étudiés et nous présenterons un nouveau modèle présentant deux niveaux d'échelles caractéristiques. Ces points seront développés en section 2.2 et 2.3.

1.4.2 Méthodes d'estimation non paramétriques

Dans un contexte de métrologie, il est souhaitable de pouvoir effectuer l'inférence statistique sans recourir à un modèle. En effet, le choix du modèle n'est jamais neutre, et la sélection d'un bon modèle peut s'avérer délicate. Ce point sera discuté en fin de Chapitre 2. Nous nous sommes donc également intéressés aux méthodes d'inférence non paramétriques, afin d'éviter une étape de modélisation.

1.4.2.1 Sous-échantillonnage par blocs

Pour estimer des statistiques de phénomènes aléatoires a priori inconnus, les méthodes habituelles consistent à répéter (lorsque c'est possible) des expériences indépendantes, afin d'approcher par un histogramme la distribution théorique de la quantité estimée. On parle de méthodes de ré-échantillonnage (Monte-Carlo) ou de sous-échantillonnage (Jackknife, Bootstrap).

Dans notre contexte, on cherche à estimer la variance d'une mesure réalisée sur une image. On ne dispose alors que d'une unique réalisation spatialement bornée du processus. Cependant, sous des hypothèses de type mélange fort, on peut supposer que des sous-échantillons de la donnée initiale provenant de zones suffisamment éloignées deviennent indépendants.

La fenêtre d'observation V est supposée rectangulaire et composée de $|V|$ pixels. A partir de cette unique image, on estime $\theta(V)$ et on voudrait également estimer $Var \theta(V)$. Si l'on définit un ensemble v de même forme que V mais de taille plus petite, il est possible de définir plusieurs sous fenêtres v_k (ou blocs) de taille $|v|$ incluses dans V . En effectuant la mesure de la statistique sur chacun de ces blocs de taille $|v|$, on obtient une distribution empirique de $\theta(v)$. Cette distribution empirique, formée à partir de n mesures, permet notamment de former les estimateurs $\hat{E} \theta(v)$ et $\hat{Var} \theta(v)$ de l'espérance $E \theta(v)$ et de la variance $Var \theta(v)$ de la statistique à l'échelle $|v|$:

$$\begin{aligned}\hat{E} \theta(v) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \theta(v_k) \\ \hat{Var} \theta(v) &= \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\theta(v_k) - \hat{E} \theta(v) \right)^2\end{aligned}\tag{1.32}$$

Cette méthode est utilisée dans différents contextes par Sherman et Carlstein [She94], Lahiri et al. [Lah99], Politis et Sherman [Pol01].

Nous considérerons différents types de sélection des blocs, notamment un sous-échantillonnage sans recouvrements, avec recouvrement mais périodique, ou aléatoire.

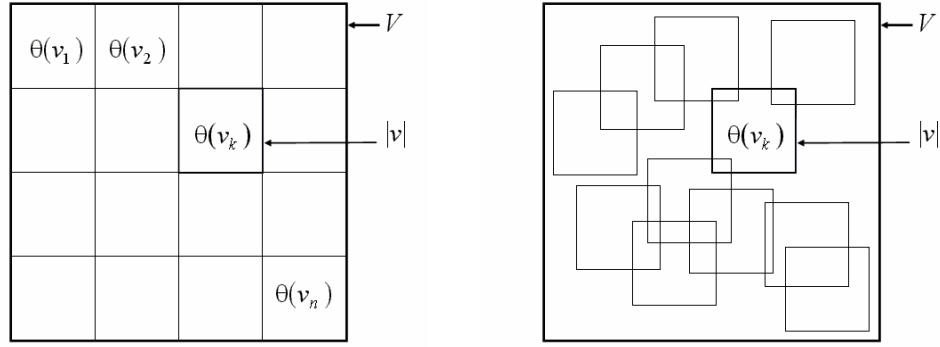


Figure 1.6 : Principe du sous-échantillonnage disjoint (gauche) et du sous-échantillonnage avec recouvrements aléatoires (droite). On peut évidemment envisager le sous-échantillonnage maximum prenant en compte tous les blocs possibles inclus dans la fenêtre d'observation, etc.

En observant l'évolution de variance empirique $\hat{Var}\theta(v)$ en fonction de la taille $|v|$ des blocs, on peut espérer extrapoler le comportement de cet estimateur à l'échelle d'observation V qui nous intéresse. Le principe est semblable à la méthode de calcul de la variance de dispersion utilisée en géostatistique [Math62].

Il est clair que l'algorithme de sous-échantillonnage par blocs peut s'appliquer quel que soit le type de processus aléatoire étudié ou le type de statistique étudiée. Cependant, le comportement asymptotique de $\hat{Var}\theta(v)$ lorsque v devient grand dépend de la statistique θ considérée. L'interprétation, et l'extrapolation de $\hat{Var}\theta(v)$ à l'échelle de la fenêtre d'observation V seront détaillées dans le Chapitre 3.

De plus, nous montrons en annexe C.1 que la variance empirique $\hat{Var}\mu(v)$ par sous-échantillonnage sur des blocs disjoints de taille $|v|$ d'un processus gaussien i.i.d. est très proche de la borne théorique de Cramer-Rao.

1.4.2.2 Autres méthodes non paramétriques

D'autres approches non paramétriques sont détaillées dans la littérature, notamment dans le cas de l'estimateur de la moyenne. Nous avons vu que la variance d'estimation de la moyenne est liée au comportement asymptotique de l'autocovariance à l'infini. Le comportement asymptotique de la densité spectrale aux petites fréquences est donc également riche en informations sur la variance d'estimation de la moyenne, [Ohs00][Bera94].

La décomposition en ondelettes est très utilisée dans le cadre de l'analyse multi-échelles, Sharifi et al. [Sha04] proposent une méthode d'estimation de $\hat{Var}\mu(v)$ exploitant cette décomposition, et exploitent la vitesse de décroissance de $\hat{Var}\mu(v)$ avec $|v|$ comme un indice de l'hétérogénéité des données.

Ces méthodes ne nous ont pas semblé fondamentalement plus robustes ou performantes que le sous-échantillonnage par blocs, en terme d'interprétation ou de fiabilité des résultats. D'autre part, le sous-échantillonnage par blocs est particulièrement intéressant car immédiatement adaptable à n'importe quelle mesure statistique scalaire. Nous nous intéressons donc par la suite exclusivement à la méthode de sous-échantillonnage par blocs et à l'interprétation de ses résultats. Pour plus de détails sur les méthodes évoquées ci-dessus, nous invitons le lecteur à consulter les ouvrages cités en référence.

Remarque :

De nombreuses simulations ont été effectuées afin de valider ou vérifier les méthodes proposées, ainsi que pour synthétiser des processus stochastiques. Les algorithmes ont été écrits principalement en langage C. Les simulations mettant fortement à contribution des générateurs de nombres aléatoires exploitent le générateur de Knuth tel que décrit dans Press et al. [Pre92] au chapitre 7.

Chapitre 2 : Modèles en statistiques spatiales

Ce chapitre présente deux familles de méthodes pour évaluer la variance d'estimation de la moyenne des niveaux de gris d'une image extraite d'une scène homogène. Ces méthodes reposent sur une forme de modélisation des données. Dans un premier temps, nous présentons une méthode inspirée de la géostatistique basée sur la modélisation des statistiques d'ordre 2 du processus aléatoire sous-jacent aux données. Nous présenterons ensuite une famille de méthodes adaptée aux images se présentant comme une distribution spatiale d'objets, basée sur les processus de points. De nombreux modèles classiques de distributions de points ou d'objets sont présentés, et peuvent servir de base pour modéliser le processus générateur de l'image et ainsi permettre l'inférence. Nous montrerons notamment les relations existant entre ces méthodes.

2.1 Géostatistique

2.1.1 Autocovariance et variogramme

En géostatistique, l'hypothèse classique concernant la régularité du processus aléatoire est appelée stationnarité intrinsèque. Cressie [Cre93], page 40, définit la stationnarité intrinsèque d'un processus aléatoire Z dépendant d'une variable d'espace i par la stationnarité des incréments :

$$\begin{aligned} E[Z_{i+\vec{h}} - Z_i] &= 0 \\ Var[Z_{i+\vec{h}} - Z_i] &= 2\gamma(\vec{h}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

La fonction $\gamma(\vec{h})$ est appelée semi-variogramme, ou simplement variogramme. La stationnarité intrinsèque est une condition plus générale que la stationnarité à l'ordre 2. Un exemple de processus vérifiant la stationnarité intrinsèque mais pas la stationnarité à l'ordre 2 est le processus de Wiener ([Pap02] p.445). Pour un tel processus, la variance en un point u est directement proportionnelle à la distance du point u à l'origine, le processus n'est donc pas stationnaire à l'ordre 2. D'autre part, la différence entre deux points $Z_j - Z_i$ est, par définition du processus, une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance proportionnelle à la distance $h = \|j - i\|$ entre les deux points. Les incréments sont donc bien stationnaires.

En revanche, un processus stationnaire à l'ordre 2 est forcément stationnaire intrinsèque. Dans le cas des processus stationnaires à l'ordre 2, on montre facilement que le variogramme et l'autocovariance sont liés par la relation :

$$\gamma(\vec{h}) = \sigma^2 - Cov(\vec{h}) \quad (2.2)$$

Le variogramme possède donc un domaine d'application plus large que l'autocovariance. C'est pour cette raison qu'il est plus fréquemment utilisé en géostatistique. D'autre part, pour un processus stationnaire à l'ordre 2, le variogramme doit se stabiliser vers une valeur constante lorsque la distance entre les points devient grande. Cette valeur est appelée palier. Si aucun palier n'apparaît lors du tracé du variogramme, l'homogénéité des données pourra être remise en question.

L'application classique du variogramme en géostatistique concerne l'interpolation des données, par la technique dite de krigeage. Il s'agit alors de reconstruire une carte continue de la distribution spatiale d'une quantité (pH d'un sol, teneur en minerai d'un gisement...) à partir d'un petit nombre de mesures ponctuelles. L'idée principale du krigeage est d'utiliser le variogramme pour estimer les poids d'interpolation minimisant la variance d'estimation [Math70].

2.1.1.1 Estimation du variogramme

L'estimateur le plus courant correspond à évaluer le variogramme par une moyenne empirique des carrés des incréments :

$$2\hat{\gamma}(\vec{h}) = \frac{1}{K_V(\vec{h})} \sum_i (z_i - z_{i+\vec{h}})^2 \quad (2.3)$$

la somme s'effectuant pour tous les points i tels les deux éléments du couple $\{i; i + \vec{h}\}$ appartiennent à la fenêtre d'observation. Le nombre de tels couples est égal à $K_V(\vec{h})$, la valeur du covariogramme géométrique de la fenêtre d'observation pour le vecteur \vec{h} .

Un autre intérêt du variogramme par rapport à l'autocovariance apparaît alors : l'estimation de la moyenne μ n'est pas nécessaire.

Remarquons que, du fait de la nature discrète des données, l'estimation du variogramme $\gamma(\vec{h})$ ne peut se faire que pour quelques valeurs du vecteur \vec{h} . On définit donc généralement des intervalles de tolérances $T(\vec{h})$ ([Cre93] page70) pour lesquels toutes les paires de points distantes de $\vec{h} + T(\vec{h})$ sont utilisées pour estimer $\gamma(\vec{h})$.

D'autres estimateurs du variogramme ont également été introduits dans une optique de robustesse vis-à-vis de points aberrants (*outliers*), comme par exemple :

$$2\tilde{\gamma}_1(\vec{h}) = \frac{K_V(\vec{h})}{0.457K_V(\vec{h}) + 0.494} \left(\frac{1}{K_V(\vec{h})} \sum_i \sqrt{|z_i - z_{i+\vec{h}}|} \right)^4 \quad (2.4)$$

et

$$2\tilde{\gamma}_2(\vec{h}) = \frac{1}{B(\vec{h})} \left(\text{med} \left\{ \sqrt{|z_i - z_{i+\vec{h}}|} \right\} \right)^4 \quad (2.5)$$

où *med* désigne la médiane et B permet de corriger le biais. Cressie [Cre93] (section 2.4) et les références citées offrent une discussion sur les avantages de ces estimateurs alternatifs.

Dans tous les cas, l'estimation complète du variogramme bidimensionnel est coûteuse en temps de calcul puisqu'elle nécessite de comparer toutes les paires de points de l'image. Ceci implique une complexité en $O(|V|^2)$ si $|V|$ est le nombre de points disponibles. Les estimateurs robustes proposés par Cressie nécessitent en plus le calcul de racines carrées ou de la médiane.

Les moyens classiquement utilisés pour réduire la complexité considèrent des variogrammes unidimensionnels pour quelques directions particulières, mais ce calcul reste relativement long et une partie de l'information est perdue si le processus est anisotrope. Un autre moyen consiste à approximer le variogramme en ne retenant qu'un nombre limité de paires de points prises au hasard. L'estimation est alors moins précise, mais plus rapide.

2.1.1.2 Modélisation du variogramme

La fonction d'autocovariance possède la propriété de définie positivité. De façon analogue le semi-variogramme doit être défini négatif, c'est-à-dire qu'il doit vérifier :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i a_j 2\gamma(s_i - s_j) \leq 0 \quad (2.6)$$

pour tout nombre fini de positions $\{s_i : i = 1, \dots, m\}$ et de réels $\{a_i : i = 1, \dots, m\}$ dont la somme est nulle. Cette propriété assure notamment que les variances estimées à partir du variogramme seront toujours positives. Or, les estimateurs du variogramme ne respectent pas nécessairement cette condition. D'autre part, notamment dans le domaine minier dont la géostatistique est issue, le semi-variogramme est estimé à partir de peu de données, et seules quelques classes de distances sont disponibles. Dans la pratique, que ce soit pour évaluer la variance d'estimation de la surface d'un ensemble, ou de la moyenne d'une fonction ou encore pour réaliser un krigeage, le variogramme estimé est insuffisant et la modélisation est toujours nécessaire. Deux principales familles de méthodes d'estimation des paramètres du modèle existent. L'une s'appuie sur des approches de type moindres carrés, où l'on minimise l'erreur entre le variogramme estimé et la fonction théorique. La seconde famille de méthodes est fondée sur le maximum de vraisemblance.

Par la suite, nous nous servirons plutôt de la moyenne circulaire $\bar{\gamma}(h)$ du variogramme $\gamma(\vec{h})$. L'utilisation de la moyenne circulaire permet de réduire la complexité de la modélisation puisque l'on passe d'une fonction 2-D à une fonction 1-D. Cette modélisation est suffisante pour un calcul de variance d'estimation de la moyenne. Cependant, dans une application de type krigeage (interpolation), il sera nécessaire de modéliser l'ensemble du variogramme 2-D afin de rendre compte des anisotropies de la texture.

2.1.1.2.1 Modèles de variogrammes

De nombreuses fonctions théoriques, répondant aux critères de définie-négativité, ont été introduites et sont couramment employées pour la modélisation du variogramme, voir notamment Cressie [Cre93] p.61-62. Les modèles de variogrammes les plus courants dans le cadre des processus stationnaires utilisent trois paramètres (pépite, palier et portée) pour décrire le variogramme, tel qu'illustré sur la Figure 2.1 :

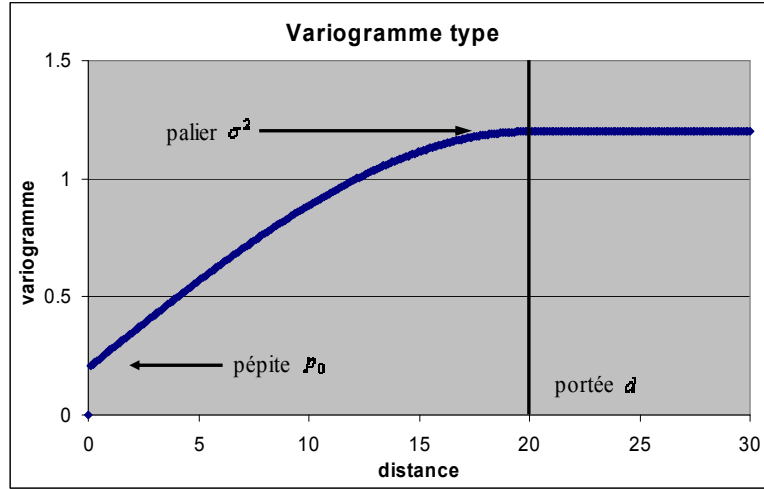


Figure 2.1 : Modèle type de variogramme. L'effet de pépite p_0 correspond à la limite à droite en zéro, le palier $p_0 + \sigma^2$ est défini uniquement pour des processus stationnaires et représente la limite à l'infini du variogramme. La portée d indique la distance à partir de laquelle le variogramme a pratiquement atteint le palier.

L'effet de pépite, noté p_0 par la suite, correspond à une discontinuité à l'origine du variogramme, et est assimilable à la présence d'un bruit blanc dans les données. Ce bruit peut provenir d'un bruit de mesure, d'une discontinuité réelle de la distribution spatiale, ou d'un pas d'échantillonnage trop large par rapport à la taille des structures présentes dans le phénomène observé. La portée d caractérise la distance à partir de laquelle les corrélations entre les données deviennent faibles ou nulles, c'est à dire que le variogramme atteint un palier. Le palier σ^2 correspond à la variance du processus aléatoire. On notera que seuls les processus stationnaires à l'ordre 2 présentent un palier puisque dans le cas contraire, la variance σ^2 n'est pas définie. Dans le cas d'un processus de Wiener par exemple, le variogramme est une droite de pente strictement positive, il ne présente donc pas de palier et tend vers l'infini quand la distance augmente.

L'un des modèles de variogramme les plus utilisés est le modèle sphérique :

$$\bar{\gamma}(h) = \begin{cases} p_0 + \sigma^2 \left(1.5 \frac{h}{d} - 0.5 \left(\frac{h}{d} \right)^3 \right) & \text{si } 0 < h < d \\ p_0 + \sigma^2 & \text{si } h \geq d \end{cases} \quad (2.7)$$

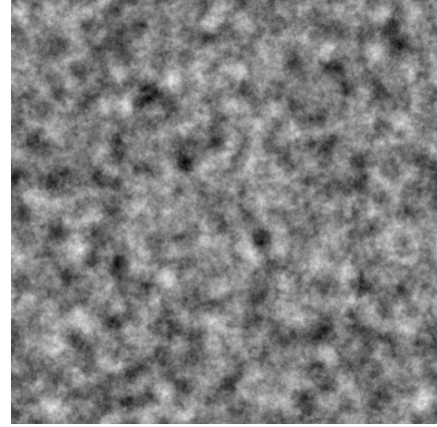
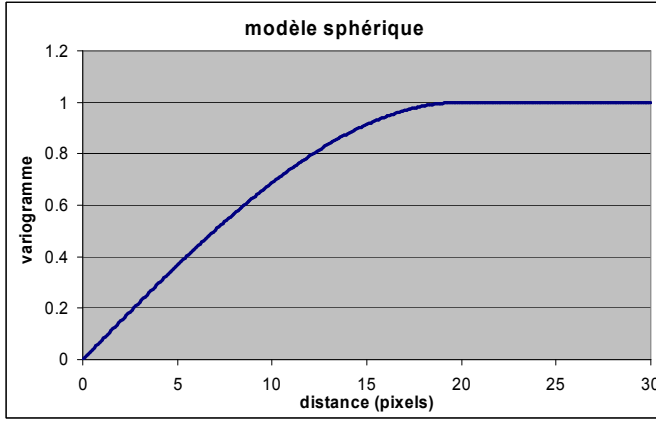


Figure 2.2 : Variogramme sphérique avec $p_0 = 0$, $\sigma^2 = 1$ et $d = 20$ pixels, et exemple de réalisation d'un processus aléatoire caractérisé par un tel variogramme.

Ce modèle est caractérisé par une autocovariance strictement nulle quand la portée est atteinte. Ici, et dans les exemples suivants, on a choisi un effet pépite $p_0 = 0$. L'aspect granuleux de la texture est lié à la pente non nulle du variogramme à l'origine.

Un autre modèle très courant est le modèle gaussien, qui est utilisé quand les données présentent un caractère très continu :

$$\bar{\gamma}(h) = p_0 + \sigma^2 \left(1 - \exp \left(-3 \left(\frac{h}{d} \right)^2 \right) \right) \quad (2.8)$$

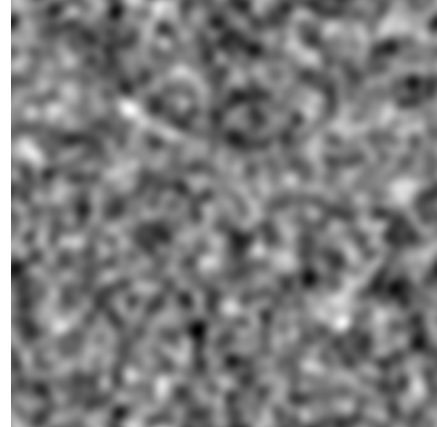
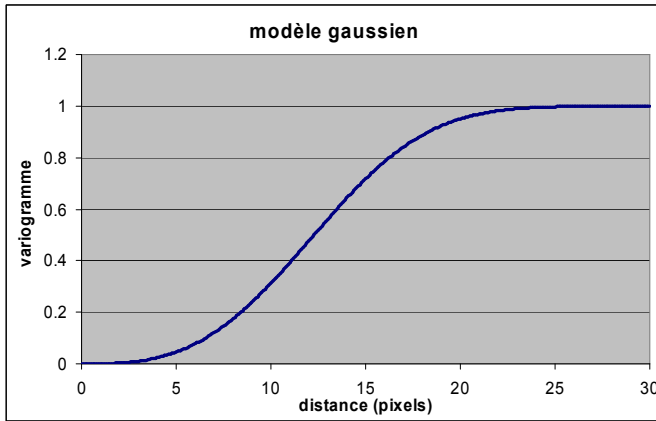


Figure 2.3 : Variogramme gaussien $p_0 = 0$, $\sigma^2 = 1$ et $d = 20$, et exemple de réalisation.

L'aspect régulier à petite échelle des données est lié à la pente nulle à l'origine du variogramme.

Il existe aussi des modèles présentant des corrélations négatives pour certaines distances, comme le modèle à 'effet de trou'. Ceci implique que la texture présente un certain caractère régulier ou périodique. L'expression du modèle à effet de trou est :

$$\bar{\gamma}(h) = p_0 + \sigma^2 \left(1 - \frac{\sin(\pi h/d)}{\pi h/d} \right) \quad (2.9)$$

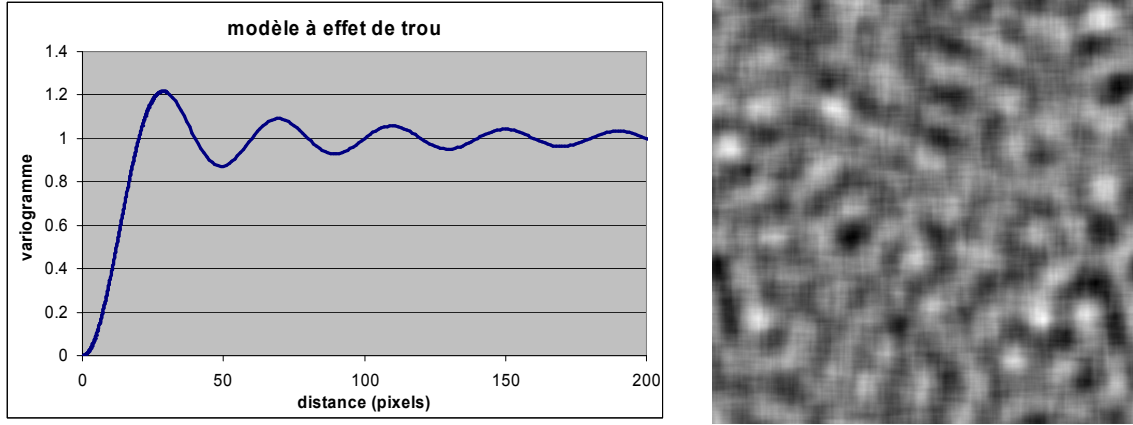


Figure 2.4 : Variogramme à effet de trou avec $p_0 = 0$, $\sigma^2 = 1$ et $d = 20$, et exemple de réalisation.

On note que pour ce modèle, des corrélations relativement importantes même à grande distance qui se traduisent pas des oscillations amorties autour du palier, atteint après convergence.

La somme de deux fonctions définies-négatives restant elle-même définie-négative, des modèles plus élaborés peuvent être construits à partir de ces modèles de base.

Remarque :

Les exemples de simulations ci-dessus correspondent à des modèles de processus présentant une distribution gaussienne. Les images ont été synthétisées par transformée de Fourier inverse, en utilisant le spectre correspondant au modèle variogramme considéré et une phase aléatoire.

2.1.1.2.2 Estimation des paramètres du modèle par approche moindres carrés

Cette famille de méthodes repose sur l'estimation préalable du semi-variogramme. Une fois le semi-variogramme estimé, un modèle approprié est choisi (qui peut être une somme de plusieurs des modèles présentés précédemment). Le principe consiste à estimer le vecteur θ des paramètres du modèle minimisant un critère de variance entre le modèle $\gamma(h, \theta)$ et le variogramme empirique $\hat{\gamma}(h)$.

La méthode ordinaire des moindres carrés consiste à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre le variogramme empirique et le modèle, c'est à dire à calculer :

$$\text{Min}_{\theta} \left(\sum_{i=1}^n (\hat{\gamma}(h_i) - \gamma(h_i, \theta))^2 \right) \quad (2.10)$$

où n est le nombre de classes de distances utilisées dans l'estimation du variogramme.

La méthode des moindres carrés généralisés utilise la connaissance de la matrice de covariance M du vecteur des estimations $[\hat{\gamma}(h_1), \dots, \hat{\gamma}(h_n)]^T$. Si la différence entre le vecteur des estimations et le vecteur correspondant au modèle théorique est noté $\Gamma_{\theta} = [\hat{\gamma}(h_1), \dots, \hat{\gamma}(h_n)] - [\gamma(h_1, \theta), \dots, \gamma(h_n, \theta)]$, le critère à minimiser est alors :

$$\Gamma_{\theta}^T M^{-1} \Gamma_{\theta} \quad (2.11)$$

où le symbole T correspond à la transposition matricielle.

La méthode des moindres carrés généralisés est évidemment plus intéressante, mais l'estimation de la matrice de covariance n'est pas forcément facile à effectuer en pratique, principalement quand la distribution des données n'est pas gaussienne, voir [Cre93] pages 96-98 pour plus de détails.

Un algorithme d'ajustement par moindres carrés pondérés (c'est-à-dire en utilisant uniquement les termes diagonaux de la matrice de covariance M) est décrit par Jian et al. [Jia96].

L'extension de ces méthodes pour la modélisation des variogrammes bidimensionnels ne présente aucune difficulté théorique, bien que la complexité calculatoire augmente significativement.

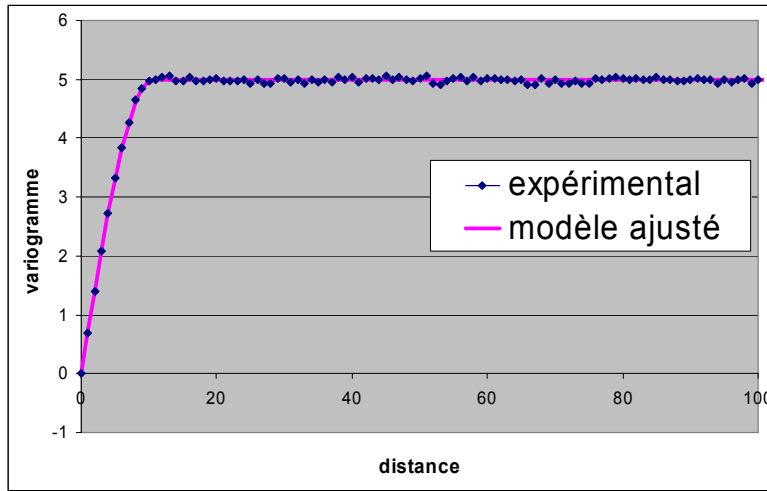


Figure 2.5 : Variogramme expérimental et modèle ajusté. Le modèle employé est une somme d'un modèle sphérique, d'un modèle gaussien et d'un modèle exponentiel.

2.1.1.2.3 Approche par maximum de vraisemblance

Les méthodes basées sur le maximum de vraisemblance ne requièrent pas l'estimation préalable d'un semi-variogramme empirique. Le tracé de ce dernier peut être utile afin de choisir un modèle approprié, mais l'estimation des paramètres du modèle repose directement sur les données.

Si l'on note θ le vecteur des paramètres et X le vecteur des observations disponibles, la fonction de vraisemblance correspond à la densité de probabilité de X conditionnée par le vecteur θ fixé :

$$L_X(\theta) = f(X|\theta) \quad (2.12)$$

Le maximum de vraisemblance est le vecteur $\hat{\theta}$ maximisant la fonction de vraisemblance $L_X(\theta)$:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{Arg\,max}} L_X(\theta) \quad (2.13)$$

Son estimation nécessite donc la connaissance de la distribution de probabilité du processus dont sont issues les données, ce qui est rarement le cas en pratique. On suppose alors généralement que les données sont réparties selon un processus gaussien.

Pour plus de détails sur l'estimation des paramètres du modèle de variogramme par maximum de vraisemblance, voir Cressie [Cre93] p.90-93, ou Todini [Tod01]. Consulter également Ripley [Rip88] et Nordman et al. [Nor05] pour d'autres utilisations de l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le contexte de l'inférence statistique.

2.1.2 Krigeage

Le modèle de variogramme, ou d'autocovariance, décrit les dépendances spatiales du processus aléatoire dont les données disponibles sont issues. A partir de ce modèle théorique, il est possible d'effectuer un grand nombre d'estimations linéaires désignées par le terme générique de krigeage. Le principe général du krigeage est d'effectuer une estimation par une moyenne pondérée, en choisissant les pondérations qui minimisent la variance de l'erreur d'estimation.

Le krigeage ne sera pas utilisé dans la suite du document, mais son principe est néanmoins décrit ici comme illustration de l'intérêt de disposer d'un bon modèle de variogramme. En effet, sous l'hypothèse que le modèle est parfait, le krigeage fournit un estimateur non biaisé et à variance minimale.

2.1.2.1 Interpolation

L'application la plus courante du krigeage concerne l'interpolation des données. La méthode d'interpolation la plus courante, décrite ici, est le krigeage ordinaire, où la moyenne du processus aléatoire stationnaire Z est inconnue. On dispose d'un ensemble de N observations d'une réalisation de Z , notées $\{z_1, \dots, z_N\}$. On cherche à estimer la valeur z_0 de la texture en un point u_0 n'appartenant pas à l'ensemble des observations. On forme donc l'estimateur linéaire :

$$\hat{z}_0 = \sum_{i=1}^N \lambda_i z_i \quad (2.14)$$

L'estimateur est non biaisé si son espérance mathématique est égale à l'espérance μ du processus, c'est-à-dire :

$$E[\hat{z}_0] = \sum_{i=1}^N \lambda_i E[Z_i] = \mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \quad (2.15)$$

Sous cette contrainte de non biais, la somme des poids doit donc être égale à l'unité. La variance de l'erreur d'estimation est alors :

$$Var[\hat{z}_0 - Z_0] = Var[Z_0] - 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i Cov(Z_i, Z_0) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) \quad (2.16)$$

On note que Z_0 est la variable aléatoire correspondant au point u_0 du processus Z , alors que z_0 est la réalisation de Z_0 correspondant à la réalisation de Z que l'on observe. On cherche donc à

minimiser le critère $Var[\hat{z}_0 - Z_0]$ sous la contrainte $\sum \lambda_i = 1$. Selon la méthode classique d'optimisation, on introduit le multiplicateur de Lagrange β et on forme le Lagrangien :

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \beta) = Var[\hat{z}_0 - Z_0] + 2\beta \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i - 1 \right) \quad (2.17)$$

Le minimum est atteint lorsque les dérivées partielles du lagrangien par rapport aux poids λ_i sont nulles tout en respectant la contrainte. La dérivée partielle du Lagrangien par rapport à λ_i s'écrivant :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(\lambda_1, \dots, \lambda_N, \beta) = -2Cov(Z_i, Z_0) + 2 \sum_{j=1}^N \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + 2\beta \quad (2.18)$$

on obtient alors les poids optimaux en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix} Cov(Z_1, Z_1) & \dots & Cov(Z_1, Z_N) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(Z_N, Z_1) & \dots & Cov(Z_N, Z_N) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_N \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cov(Z_0, Z_1) \\ \dots \\ Cov(Z_0, Z_N) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La résolution de ce système fournit les poids d'interpolation correspondant à l'estimation non biaisée de variance minimale, ainsi que la valeur de cette variance.

Il existe d'autres types d'interpolation par krigeage en fonction des hypothèses de stationnarité du processus aléatoire. On citera notamment le krigeage universel qui s'applique aux processus vérifiant la stationnarité intrinsèque, c'est-à-dire qu'il intègre une estimation de la tendance. Voir Zimmerman et al. [Zim99] pour une comparaison expérimentale entre interpolations par krigeage universel et ordinaire, et les méthodes d'interpolation par distance inverse.

2.1.2.2 Estimation de la moyenne

L'estimation de la moyenne par krigeage, noté ici $\hat{\mu}_K$, conduit à effectuer une moyenne pondérée des observations :

$$\hat{\mu}_K = \sum_{i=1}^N \lambda_i z_i \quad (2.20)$$

Les poids λ_i sont choisis afin de minimiser la variance de l'erreur d'estimation, c'est-à-dire :

$$Var[\hat{\mu}_K - \mu] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) \quad (2.21)$$

La méthodologie est identique à celle décrite pour l'interpolation dans la partie 2.1.2.1. Le système à résoudre pour obtenir les poids optimaux λ_i (au sens de la minimisation de la variance d'estimation) est alors :

$$\begin{bmatrix} \text{Cov}(Z_1, Z_1) & \dots & \text{Cov}(Z_1, Z_N) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(Z_N, Z_1) & \dots & \text{Cov}(Z_N, Z_N) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_N \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

La résolution de ce système nécessite l'inversion de la matrice de taille $(N+1) \times (N+1)$. Pour des données de grande taille, cette inversion est difficilement envisageable. En effet, pour une image carrée de 512 pixels de côté, qui reste une taille relativement modeste, N est alors supérieur à 250000.

2.1.3 Discussion

Nous avons vu que la variance d'estimation de la moyenne s'exprime comme la moyenne des covariances entre toutes les variables aléatoires du processus. La modélisation du variogramme (ou de manière équivalente, de l'autocovariance) permet d'obtenir une évaluation de la variance d'estimation de la moyenne. Cependant, la plupart des modèles rencontrés dans la littérature se focalisent sur le comportement à l'origine du variogramme. Comme illustré dans la section 2.1.1.2.1, le comportement à l'origine du variogramme définit la régularité du processus, l'aspect plus ou moins 'lisse' des réalisations du processus, et est donc très important dans le cadre de l'interpolation. En revanche, la variance d'estimation de la moyenne dépend très fortement du comportement asymptotique du variogramme, c'est-à-dire à la vitesse à laquelle il converge vers son palier. Le modèle proposé doit donc reproduire fidèlement le comportement asymptotique de l'autocovariance.

Remarque :

Conséquence du théorème de Wiener-Khinchin, le comportement asymptotique de l'autocovariance à l'infini est intimement lié au comportement du spectre à l'origine.

2.2 Processus de points

Nous décrivons dans cette section une famille de méthodes qui ne considère plus les données comme extraites d'un champ continu, mais plutôt comme une distribution d'objets. Les processus de points constituent la base de l'étude de tels processus.

2.2.1 Processus de Poisson

Le processus de points de Poisson tient une place particulière parmi les processus de points. On le désigne souvent par le terme de processus spatial 'complètement aléatoire'. C'est-à-dire que la connaissance d'un point du processus n'apporte aucune information sur la localisation des autres points. Le processus de points de Poisson constitue un modèle de référence, et la première étude d'un

cas réel consiste généralement à tester si les données sont statistiquement différentes d'un processus de Poisson. Pour un processus de points de Poisson, les nombres de points recensés dans deux ensembles disjoints quelconques sont des variables aléatoires indépendantes. La probabilité du nombre de points présents dans un ensemble borné B quelconque, de mesure de Lebesgue $|B|$, est alors défini par une loi de Poisson :

$$P[N(B) = k] = \frac{e^{-\mu|B|} (\mu|B|)^k}{k!} \quad (2.23)$$

où μ est l'intensité du processus de Poisson et $N(B)$ est la variable aléatoire indiquant le nombre de points du processus inclus dans un ensemble B . On notera $\hat{N}(B)$ le nombre de points comptés sur une fenêtre d'observation B , qui sera donc une réalisation de $N(B)$.

Puisque le nombre de points dans un ensemble B quelconque est une variable aléatoire définie par une loi de Poisson de paramètre $\mu|B|$, on note que l'espérance et la variance du nombre de points sont identiques :

$$E[N(B)] = Var[N(B)] = \mu|B| \quad (2.24)$$

Dans la définition ci-dessus, l'intensité du processus de Poisson est constante, le modèle est donc stationnaire. Dans la littérature, on utilise de manière équivalente le terme homogène. La Figure 2.6(a) ci-dessous présente une réalisation d'un processus de Poisson homogène. Pour des questions de visibilité, les points du processus sont symbolisés par des petits disques.

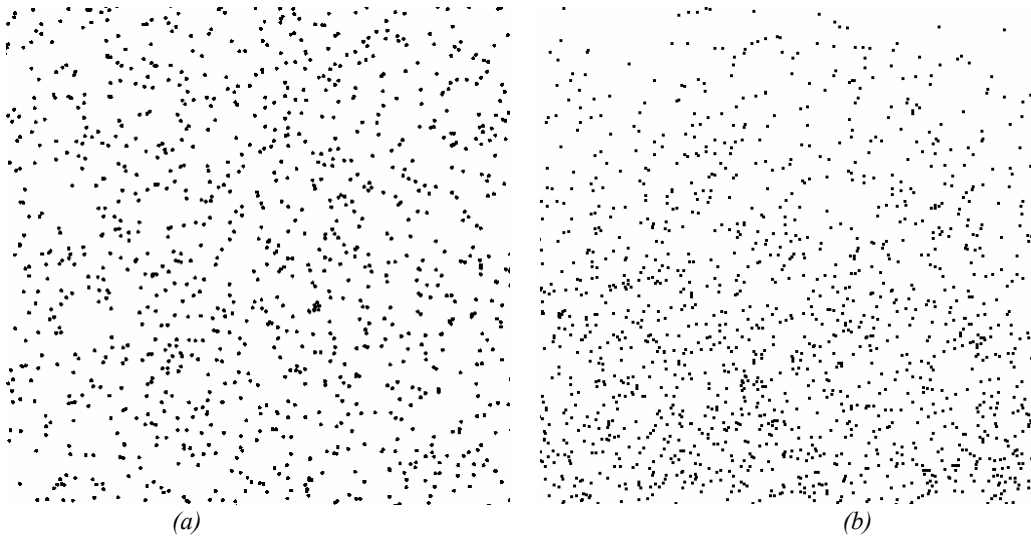


Figure 2.6 : Réalisation d'un processus de Poisson homogène d'intensité $\mu=0.005$ (a) et d'un processus de Poisson non homogène dont l'intensité varie verticalement de façon linéaire entre 0.001 et 0.01 (b). Pour des questions de visibilité, les points du processus sont symbolisés par des petits disques.

On peut également définir un processus de Poisson non-homogène (Figure 2.6(b)) en autorisant l'intensité à varier en fonction de la position, mais de façon déterministe : $\mu:u \rightarrow \mu(u)$, et en

remplaçant le terme $\mu|B|$ par l'intégrale sur B de $\mu(u)$ dans l'équation (2.23). Le processus résultant n'est plus stationnaire.

Les processus de points non poissonniens sont généralement qualifiés soit d'agregés soit de réguliers en fonction des dépendances spatiales entre les points. De nombreux modèles classiques sont construits à partir d'un processus de Poisson, en effectuant des transformations simples. Ces transformations consistent généralement à remplacer chaque point du processus initial par un ensemble de points, à retirer certains points du processus, ou encore à superposer différents processus de points.

Des tests permettant de valider, ou au moins de ne pas rejeter l'hypothèse qu'un ensemble de points provienne d'un processus de Poisson sont recensés par Stoyan et al. [Sto95] dans le chapitre 2.

2.2.2 Analyse de la structure d'un processus de points

Les fondements théoriques pour l'analyse de la structure des processus de points peuvent être trouvés dans Ripley [Rip76][Rip77]. Les définitions proposées ici sont toutes valables quelle que soit la dimension de l'espace considéré.

L'utilisation de l'autocovariance pour décrire la structure d'un processus de points est théoriquement possible. Cependant, du fait de la nature des données, les valeurs numériques de l'autocovariance sont généralement très petites devant 1. D'autres fonctions ont donc été conçues pour mieux s'adapter à la nature des données.

La fonction K de Ripley, ou fonction réduite du second ordre, est basée sur le nombre moyen de points dans une sphère $b(x, h)$ de rayon h autour d'un point x quelconque du processus de point Φ d'intensité μ :

$$\mu K(h) = E[N(b(x, h) - \{x\}) | x \in \Phi] \quad (2.25)$$

La Figure 2.7 ci-dessous présente un disque de rayon h centré sur un point quelconque du processus de point. La fonction K est définie par l'espérance du nombre de points du processus (autres que le centre) présents dans ce disque. Ici, on observe trois points (en gras).

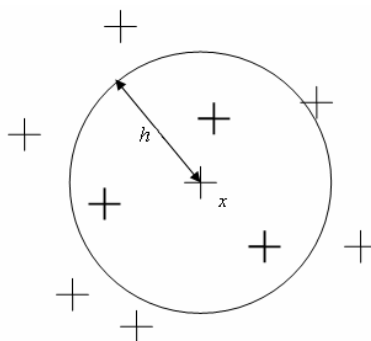


Figure 2.7 : Illustration de la définition de la fonction K de Ripley. $K(h)$ représente la probabilité du nombre de points présents dans un disque de rayon h centré sur un point du processus (sans compter ce point), normalisé par l'intensité du processus.

Une fonction largement utilisée est la fonction de corrélation des paires de points, également appelée densité de paires de points (*pair correlation function* en anglais). Elle est généralement définie à partir de la dérivée de la fonction K :

$$\bar{g}(h) = \frac{dK(h)}{dh} \bigg/ \frac{d(b(0, h))}{dh} \quad (2.26)$$

Cette fonction ne tient pas compte des directions dans l'espace. On peut cependant définir la fonction g de manière plus générale :

$$g(u_1, u_2) = \lim_{|dB_1| \rightarrow 0, |dB_2| \rightarrow 0} \left(\frac{P[N(dB_1)=1, N(dB_2)=1]}{P[N(dB_1)=1]P[N(dB_2)=1]} \right) \quad (2.27)$$

où dB_1 et dB_2 sont des petits ensembles centrés respectivement sur les points u_1 et u_2 , $|B|$ et $N(B)$ sont respectivement la mesure de Lebesgue et le nombre de points d'un ensemble B quelconque.

Pour un processus stationnaire de moyenne μ , cette fonction ne dépend que du vecteur séparant les points u_1 et u_2 , soit :

$$g(u_1, u_2) = g(u_2 - u_1) = \lim_{|dB_1| \rightarrow 0, |dB_2| \rightarrow 0} \left(\frac{P[N(dB_1)=1, N(dB_2)=1]}{\mu^2 |dB_1| |dB_2|} \right) \quad (2.28)$$

Si de plus le processus est isotrope, la fonction de corrélation des paires de points ne dépend plus que de la distance $h = \|u_2 - u_1\|$ entre les points, soit $g(u_1, u_2) = g(h)$. En suivant les notations présentées précédemment, on notera $\bar{g}(h)$ la moyenne circulaire de cette fonction, qui correspond à la définition donnée par l'équation (2.26).

Dans le cas d'un processus de Poisson homogène d'intensité μ , on montre facilement que la fonction de corrélation de paires de points est $\forall h > 0, g(h) = 1$. En général, les travaux relatifs aux processus de points ne spécifient pas si la fonction de corrélation des paires de points est définie en zéro. La définition (2.28) permet néanmoins de définir une impulsion de Dirac d'intégrale $1/\mu$ à l'origine de $g(\cdot)$.

La fonction $g(\cdot)$ permet de comparer facilement un processus quelconque avec un processus de Poisson de même intensité. En effet, si $g(\vec{h})$ est significativement différente de 1, cela signifie que la fréquence d'apparition de paires de points du processus distants de \vec{h} ne peut pas s'expliquer par l'unique fait du hasard. Lorsque $g(\cdot)$ est supérieure à 1, on parle d'agrégation. Inversement, on parle de répulsion (ou de régularité) lorsque $g(\cdot)$ est inférieure à 1. Enfin, $g(\cdot)=1$ correspondant à l'indépendance statistique.

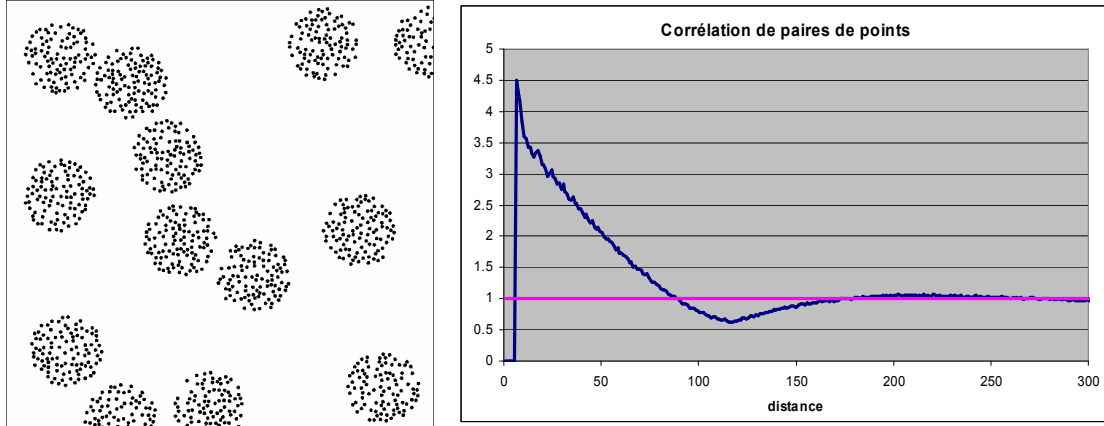


Figure 2.8 : Extrait d'une réalisation d'un processus de points présentant des caractéristiques d'agrégation et de répulsion entre les points en fonction de l'échelle d'observation, et estimation de sa fonction de corrélation des paires de points.

Sur l'exemple de processus de la Figure 2.8, les points du processus apparaissent regroupés dans des agrégats circulaires. Les agrégats sont relativement éloignés les uns des autres, par rapport à leur taille. De même, à l'intérieur des agrégats, les points respectent une distance minimale entre eux. En observant la fonction de corrélation de paires de points correspondante (ici, l'estimation de $\bar{g}(h)$), on constate qu'elle vaut 0 pour les distances inférieures à 5 pixels, ce qui s'interprète comme une distance minimale entre les points du processus. La courbe est ensuite supérieure à 1, ce qui indique que les points sont agrégés. La fonction diminue ensuite pour devenir inférieure à 1 pour des distances entre 100 et 150 pixels : les agrégats ont tendance à se repousser. Finalement, la fonction présente une valeur proche de 1 pour les grandes distances, c'est-à-dire que les points n'interagissent plus entre eux à partir d'une certaine distance, de l'ordre de 200 pixels. Les propriétés de ce modèle sont développées en section 2.3.2.3.

On peut montrer que la fonction de corrélation des paires de points est intimement liée à l'autocovariance. En effet, la limite de l'équation (2.27) peut s'écrire (en traitant à part le cas d'une distance nulle, pour lequel $g(0) = \delta(0)/\mu$) :

$$g(\vec{h}) \sim \frac{R(\vec{h})}{\mu^2} - \delta(\|\vec{h}\|) = \frac{1}{\mu^2} \text{Cov}(\vec{h}) + 1 - \delta(\|\vec{h}\|) \quad (2.29)$$

avec le symbole $\delta(\cdot)$ représentant l'impulsion de Dirac et $R(\cdot)$ l'autocorrélation.

Les résultats précédants impliquant l'autocovariance pour l'estimation de la précision d'un estimateur peuvent donc s'adapter pour les processus de points. On peut alors exprimer la variance du nombre de points dans une fenêtre B de taille fixée $|B|$ par :

$$Var[N(B)] = \mu^2 \int_B \int_B (g(u_2 - u_1) - 1 + \delta(u_2 - u_1)) du_1 du_2 \quad (2.30)$$

Dans cette équation, il est important de ne pas oublier que la fonction de corrélation des paires de points présente une impulsion de Dirac en $u_1 = u_2$, dont l'intégrale est égale à $1/\mu$. On vérifie immédiatement la validité de cette formule dans le cas d'un processus de Poisson (homogène). En effet, pour un processus de Poisson, le terme $(g(u_2 - u_1) - (1 - \delta(u_2 - u_1)))$ est non nul uniquement en $u_1 = u_2$, pour lequel il prend la valeur $1/\mu$. Après intégration, on obtient une variance du nombre de points dans une fenêtre d'observation B égale à $\mu|B|$, conformément à l'équation (2.24).

On en déduit la variance de l'estimateur de l'intensité du processus de points, équivalente à la variance de l'estimateur de la moyenne d'un processus aléatoire décrit par l'équation (1.22) :

$$Var[\hat{\mu}_B] = \frac{\mu^2}{|B|^2} \int_B \int_B (g(u_2 - u_1) - (1 - \delta(u_2 - u_1))) du_1 du_2 \quad (2.31)$$

où $\hat{\mu}_B = \hat{N}(B)/B$ représente l'estimation de l'intensité sur une réalisation d'un processus de point restreinte à une fenêtre d'observation bornée B , tel que $Var[\hat{\mu}_B] = Var[N(B)]/|B|$.

2.2.3 Estimateurs pour les processus de points

On s'intéresse particulièrement à l'estimation des fonctions de corrélation des paires de points, $g(\vec{h})$ si l'information directionnelle est importante, ou de sa moyenne isotrope $\bar{g}(h)$ si l'on cherche uniquement la variance globale de la mesure sur la fenêtre d'observation. Le principe des estimateurs est le même dans les deux cas, aussi nous présentons ici différents estimateurs pour $\bar{g}(h)$ uniquement.

Par définition, $\bar{g}(h)$ est la probabilité d'observer deux points distants de h , divisée par le carré de l'intensité du processus de point (stationnaire) étudié. Un estimateur $\hat{g}(h)$ de $\bar{g}(h)$ s'appuiera donc sur le décompte du nombre de paires de points séparés par une distance comprise entre h et $h + dh$, où dh est la largeur des classes de distances. Un premier estimateur naïf, directement issu de la définition de g , peut donc s'écrire, en dimension 2, pour $h > 0$:

$$\hat{g}_1(h) = \frac{2}{\hat{\mu}_B^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{1_{h \leq d(x_i, x_j) \leq h+dh}}{\pi(h+dh)^2 - \pi h^2} \quad (2.32)$$

où $d(x_i, x_j)$ est la distance entre les points x_i et x_j du processus de point, $1_{f(h)}$ est la fonction indicatrice d'une fonction binaire f et $\hat{\mu}_B^2$ est l'estimateur du carré de l'intensité du processus de points. On prend généralement $\hat{\mu}_B^2 = \hat{N}(B)(\hat{N}(B) - 1)/|B|^2$.

La Figure 2.9 ci-dessous permet d'illustrer le comportement de l'estimateur de la corrélation des paires de points :

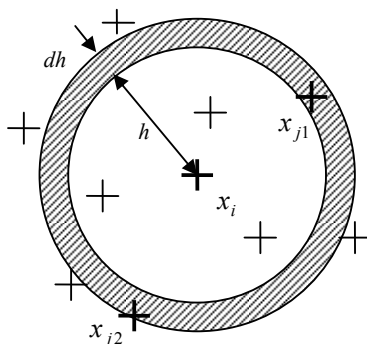


Figure 2.9 : Illustration de l'estimateur de la corrélation des paires de points. L'estimation de cette fonction est basée sur l'estimation de la probabilité du nombre de points présents dans une couronne de rayon h et $h+dh$ centrée sur un point x_i du processus.

Pour chaque point x_i du processus, on compte le nombre de points x_j se trouvant dans la couronne définie par les rayons h et $h+dh$ centrés en x_i (notée $c(x_i, h, dh)$ par la suite), et on le divise par la surface de cette couronne. Ceci correspond effectivement à estimer la densité de probabilité d'observer une paire de points séparés par une distance comprise en h et $h+dh$.

Plusieurs problèmes apparaissent pour cet estimateur. Tout d'abord, le processus de points ne pouvant être observé que sur une fenêtre bornée, les points à proximité des bords de la fenêtre ont nécessairement moins de chance d'avoir des voisins :

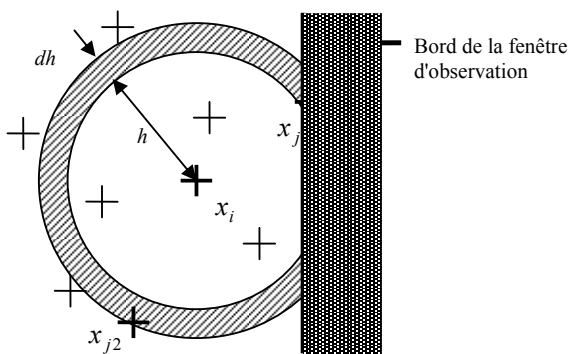


Figure 2.10 : Illustration des perturbations engendrées par les effets de bord sur l'estimation de la fonction de corrélation des paires de points. Les points extérieurs à la fenêtre d'observation ne sont pas visibles, l'estimateur naïf sous-estime donc d'autant plus la probabilité du nombre de points que le point x_i courant (centre de la couronne) est proche d'un bord de l'image.

Les effets de bords auront donc pour effet d'apporter un biais à l'estimateur, en minimisant d'autant plus la probabilité estimée que la distance h est grande. Ce biais peut être corrigé par plusieurs moyens.

Une première solution pour supprimer le biais revient à ne pas prendre en compte les points i dont la distance au bord de la fenêtre est inférieure à h . Cette solution a cependant le désavantage de

diminuer le nombre de points disponibles, ce qui aura pour effet d'augmenter la variance de l'estimateur.

Ripley [Rip76][Rip77] a proposé de corriger les effets de bord en pondérant, pour chaque point i , le nombre de voisins visibles par l'inverse de la proportion de la couronne $c(x_i, h, dh)$ incluse dans la fenêtre d'observation B , c'est-à-dire en multipliant par $|c(x_i, h, dh)|/|B \cap c(x_i, h, dh)|$. On augmente ainsi le poids des points se trouvant près du bord afin de compenser les effets de bord. Cette pondération étant égale à l'inverse de la probabilité d'observation, on obtient un estimateur de type Horvitz-Thompson [Sto00b], s'écrivant :

$$\hat{g}_2(h) = \frac{2}{\hat{\mu}_B^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{1_{h \leq d(x_i, x_j) \leq h+dh}}{|B \cap c(x_i, h, dh)|} \quad (2.33)$$

Un autre élément classiquement utilisé pour lisser l'estimateur consiste à remplacer la fonction indicatrice par un noyau $w_\varepsilon(h)$ de largeur de bande ε :

$$\hat{g}_3(h) = \frac{2}{\hat{\mu}_B^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{w_\varepsilon(d(x_i, x_j) - h)}{|B \cap c(x_i, h, dh)|} \quad (2.34)$$

En général, on utilise un noyau d'Epanechnikov avec une largeur de bande ε comprise entre $0.1/\sqrt{\mu}$ et $0.2/\sqrt{\mu}$ ([Pen92]) :

$$w_\varepsilon(h) = \begin{cases} \frac{3}{4\varepsilon} \left(1 - \frac{h^2}{\varepsilon^2}\right) & \text{si } -\varepsilon \leq h \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (2.35)$$

D'autres estimateurs ont été étudiés. Cependant, ils reposent toujours sur les mêmes éléments de base (noyau, correction d'effets de bords et estimation du carré de l'intensité) et ne seront pas traités ici. Le lecteur intéressé pourra consulter Doguwa et al [Dog89] et Osher et al.[Ohs00].

Les estimateurs d'autres quantités utiles pour la caractérisation des processus de points ont été étudiés. Par exemple, Heinrich [Hei86] prouve qu'un estimateur de la fonction de distance au plus proche voisin est asymptotiquement normal quand la taille de la fenêtre d'observation augmente dans le cas des processus de Poisson agrégés stationnaires.

2.2.4 Exemples de processus de points

2.2.4.1 Processus agrégés

Les processus agrégés (*cluster process* en anglais) présentent des regroupements de points. Les modèles les plus courants de processus de points agrégés sont les processus de Neyman-Scott. Leur construction consiste à remplacer chaque point (point père) d'un processus de Poisson, par un

ensemble de points (points fils) identiquement et indépendamment distribués autour du point père. Seuls les points fils sont conservés pour former un processus de Neyman-Scott.

Le processus agrégé le plus simple est le processus agrégé de Matérn. Ce modèle est défini de la même façon quelle que soit la dimension de l'espace. Chaque point père est remplacé par un agrégat de points fils. Les points fils sont distribués selon une deuxième loi de Poisson dans une boule de rayon fixé centrée sur le point père. Le processus final ne contient que les points fils. Notons μ_p l'intensité du processus de points pères, μ_f le paramètre de Poisson indiquant l'intensité des points fils dans les agrégats et b_R le volume d'une boule de rayon R . L'intensité μ du processus final est alors :

$$\mu = \mu_p \mu_f b_R \quad (2.36)$$

La fonction de corrélation des paires de points d'un processus de Matérn agrégé s'exprime alors :

$$g(h) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \delta(h) & h = 0 \\ 1 + \frac{I_R(h)}{\mu_p b_R^2} & 0 < h < 2R \\ 1 & h \geq 2R \end{cases} \quad (2.37)$$

où $I_R(h)$ est le volume de l'intersection de boules de rayon R dont les centres sont distants de h .

En dimension 2, cette intersection vaut :

$$n = 2 \Rightarrow I_R(h) = \begin{cases} 2R^2 \left(\arccos\left(\frac{h}{2R}\right) - \frac{h}{2R} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}} \right) & \text{si } h < 2R \\ 0 & \text{si } h \geq 2R \end{cases} \quad (2.38)$$

La démonstration est reportée en annexe B.1.

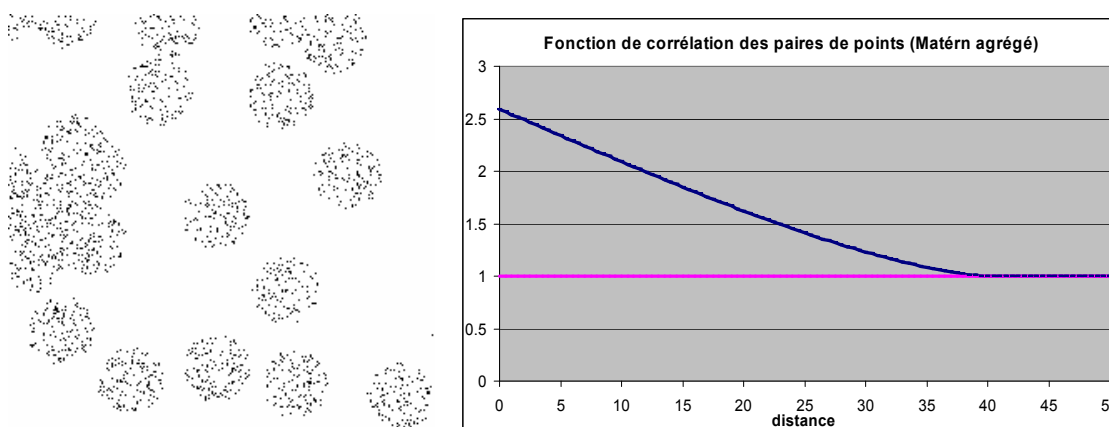


Figure 2.11 : Extrait d'une réalisation d'un processus agrégé de Matérn avec $\mu_p = 0.0005$, $\mu_f = 0.005$ et $R = 20$, et fonction de corrélation des paires de points théorique correspondante.

Diverses modifications peuvent être apportées afin d'adapter ce modèle à des situations particulières. Par exemple, en changeant la distribution de Poisson à l'intérieur des agrégats par une

distribution gaussienne symétrique. Le processus correspondant est un processus de Thomas ([Sto95] p.160).

2.2.4.2 Processus réguliers

Au sein des processus réguliers, on observe que les points ont tendance à être relativement éloignés les uns des autres. Un modèle simple et courant de processus de points réguliers, également dû à Matérn, est obtenu en retirant certains points d'un processus de points de Poisson initial. Chaque point est marqué de façon aléatoire et indépendante par un nombre tiré d'une loi continue uniforme. Si la distance entre deux points du processus est inférieure à un seuil critique constant, on conserve le point affecté de la marque la plus faible. Cette procédure est effectuée indépendamment pour chaque paire de points du processus. Formellement, si l'on note Φ_0 le processus initial et R le rayon d'inhibition, le processus de points final Φ s'écrit ([Sto95] p.163) :

$$\Phi = \{x \in \Phi_0 \text{ tel que } m(x) < m(y) \text{ pour tout } y \in \Phi_0 \cap \{b(x, R) - \{x\}\}, \} \quad (2.39)$$

où $m(x)$ est la marque affectée au point x .

La figure suivante présente une réalisation typique d'un processus régulier de Matérn, avec le tracé de la fonction de corrélation des paires de points correspondante :

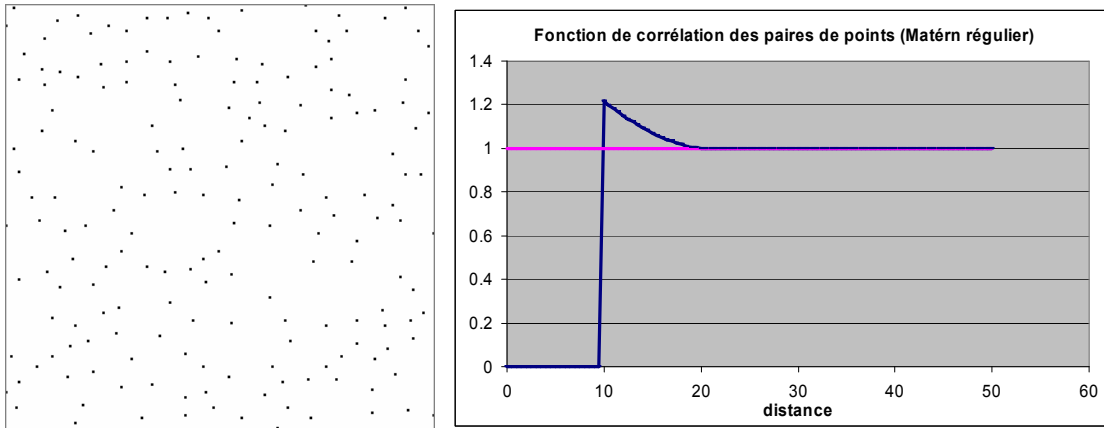


Figure 2.12 Extrait d'une réalisation d'un processus régulier de Matérn et fonction de corrélation des paires de points théorique correspondante.

Les points du processus de la Figure 2.12 ne peuvent donc pas être plus près les uns des autres qu'une certaine distance, dite d'inhibition, d'environ 10 pixels dans l'exemple. Cette propriété est appelée *hard-core* ('noyau dur') en anglais, dans la littérature sur les processus de points.

Un tel processus s'étend facilement au cas d'un espace de dimension n . En notant μ_p l'intensité du processus initial, b_R le volume de la boule de rayon R en dimension n , et $U_R(h)$ le volume de l'union de deux boules de rayon R , distantes de h l'une de l'autre, on montre que l'intensité s'exprime :

$$\mu = \frac{1 - \exp(-\mu_p b_R)}{b_R} \quad (2.40)$$

La fonction de corrélation de paires de points peut alors s'écrire (démonstration en annexe B.2) :

$$g(h) = \begin{cases} \delta(h)/\mu & h = 0 \\ 0 & \text{pour } 0 < h < R \\ \frac{2U_R(h)(1 - \exp(-\mu_P b_R)) - 2b_R(1 - \exp(-\mu_P U_R(h)))}{\mu^2 b_R U_R(h)(U_R(h) - b_R)} & h \geq R \end{cases} \quad (2.41)$$

On remarquera notamment que la fonction est égale à 1 pour $h \geq 2R$, du fait que $U_R(h)$ est alors égal à $2b_R$. On notera que $U_R(h) = 2b_R - I_R(h)$, son expression en dimension 2 se déduit donc directement de l'équation (2.38).

Stoyan et Stoyan [Sto85] ont examiné une extension du processus régulier de Matérn en autorisant la distance d'inhibition à varier indépendamment pour les différents points du processus selon une variable aléatoire de distribution donnée, produisant ainsi un modèle de type *soft-core*.

2.2.4.3 Processus de Cox

Les processus de Cox, aussi appelés processus poissonnien doublement aléatoires, sont caractérisés par une distribution de Poisson conditionnée par une intensité qui est elle-même un processus aléatoire Z . C'est-à-dire que le nombre de points du processus de Cox dans un ensemble infinitésimal dB est une variable aléatoire égale à l'intégrale de l'intensité $Z(u)$ sur cet ensemble :

$$N(dB) = \int_{dB} Z(u) du \quad (2.42)$$

Le nombre de points présents dans un ensemble étant nécessairement positif ou nul, les valeurs possibles du processus aléatoire Z sont donc restreintes à des valeurs positives. Si Z est un processus aléatoire stationnaire, alors le processus de Cox associé est également stationnaire. L'autocovariance du processus de Cox est alors égale à l'autocovariance du processus aléatoire Z .

La simulation d'un processus de Cox consiste dans un premier temps à former une image par simulation d'un processus aléatoire Z dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. Ensuite, pour chaque pixel u de l'image, on tire un nombre entier $N(u)$ selon une loi de Poisson dont le paramètre est égal au niveau de gris du pixel courant (réalisation de $Z(u)$). Pour chacun de ces $N(u)$ points, on tire leurs coordonnées de façon indépendante et uniforme à l'intérieur du pixel courant u . Cette procédure est effectuée indépendamment pour chaque pixel u de l'image. On obtient alors la liste de points correspondant à la réalisation du processus de Cox.

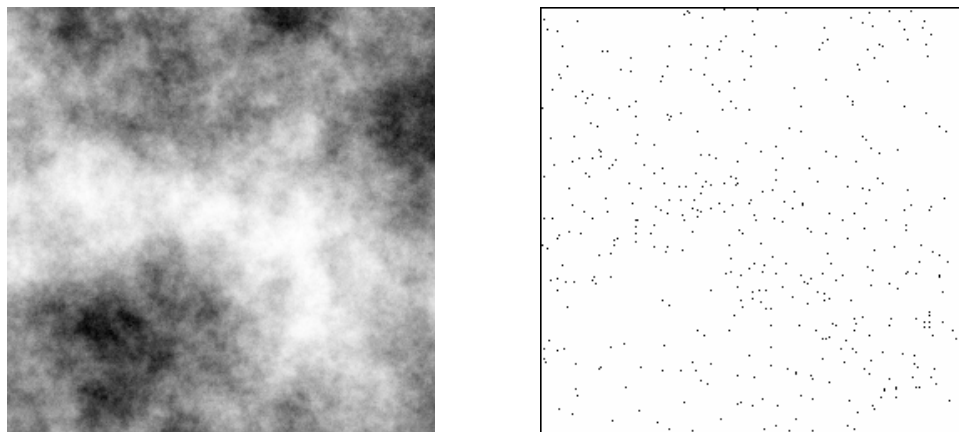


Figure 2.13 : Intensité Z (gauche) et réalisation d'un processus de Cox (droite). En chaque pixel u de l'image, la probabilité d'observer un point dans le processus de Cox est liée à l'intensité $Z(u)$.

La Figure 2.13 correspond à un extrait d'une réalisation d'un processus de Cox. La figure a été réduite volontairement afin de distinguer correctement la répartition des points en rapport avec l'intensité. On voit ainsi qu'il y a beaucoup plus de points dans les zones où l'intensité est forte (en blanc sur l'image de gauche) que dans les zones où l'intensité est faible. Cependant, à partir d'une réalisation sur une fenêtre plus grande, pour laquelle l'intensité apparaît comme homogène, l'estimation de la fonction de corrélation des paires de points peut être comparée à l'autocovariance du processus aléatoire Z :

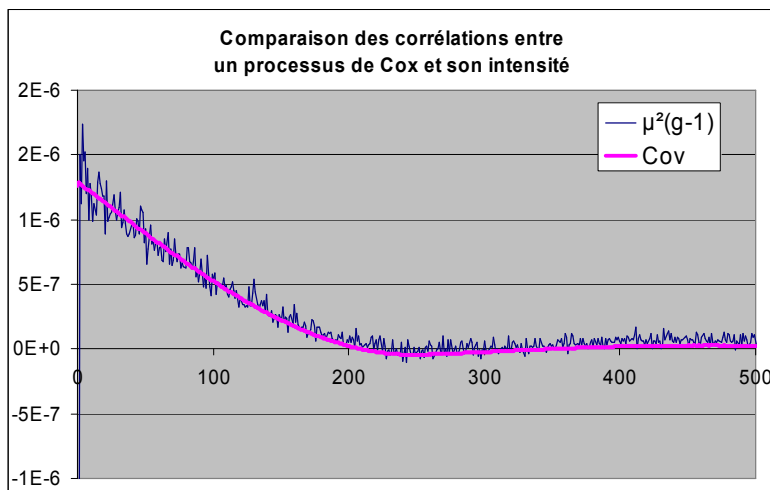


Figure 2.14 : Comparaison des corrélations entre un processus de Cox et son intensité. La courbe sombre présente l'autocovariance estimée à partir du processus de Cox. La courbe claire est l'autocovariance estimée de l'intensité.

Dans la légende de la Figure 2.14, ' μ ' et ' g ' sont respectivement les estimations de l'intensité et de la fonction de corrélation des paires de points du processus de Cox, et ' Cov ' l'estimation de la fonction d'autocovariance du processus aléatoire Z utilisé pour générer le processus de points. L'estimation de la fonction de corrélation des paires de points permet donc d'estimer l'autocovariance de l'intensité Z (sous réserve d'ergodicité).

2.2.4.4 Processus de Gibbs

Les processus de Gibbs permettent de construire des modèles pour de nombreux types de processus de points, présentant un certain degré de régularité jusqu'à des processus modérément agrégés. La construction de modèles de processus de Gibbs repose sur une fonction de potentiel régissant les interactions entre les points. Les processus d'interaction par paires (*pairwise interaction processes*) et les processus de Strauss en sont des exemples importants.

Les méthodes de simulation font généralement appel à des méthodes Monte Carlo par chaînes de Markov (*Markov Chain Monte Carlo* ou MCMC), en particulier l'algorithme de Metropolis-Hastings et l'échantillonneur de Gibbs. Voir par exemple Stoyan [Sto89], Stoyan et al. [Sto98], Spall [Spa03], Descombes et al. [Des01] pour plus de détails sur les techniques MCMC, ainsi que des exemples d'applications.

2.3 Processus d'objets

2.3.1 Processus de points marqués

L'exemple du processus régulier de Matérn (section 2.2.4.2) introduit la notion de marques, afin de définir les règles de suppression des points. De manière générale, un processus de points marqués est un processus pour lequel chaque point se voit attribuer des informations supplémentaires, sous la forme d'une ou plusieurs grandeurs scalaires, ou d'attributs qualitatifs. Par exemple, si l'on étudie une parcelle de forêt à l'aide d'un processus de points, on pourra choisir de marquer les points (localisation des arbres) avec des informations sur l'espèce de chacun des arbres, leur diamètre, leur hauteur, etc. Voir Penttinen et al. [Pen92] pour une introduction sur les processus de points marqués et leur utilisation dans des applications en sylviculture, Descombes et Zerubia [Des02] pour leurs applications en analyse d'image.

Dans cette section, on note $\Psi = \{[x, m(x)], x \in \Phi\}$ le processus de points Φ marqués par une marque réelle $m(x) \in \mathcal{R}$. Pour étudier ces relations spatiales entre les marques, on utilise généralement la fonction de corrélation des marques, qui dans le cas d'un processus stationnaire s'écrit :

$$k(\vec{h}) = \frac{E[m(x)m(x + \vec{h})] \mathbf{1}_{\{x, x + \vec{h}\} \in \Phi^2}}{\mu_m^2} \quad (2.43)$$

où μ_m est l'espérance mathématique des marques.

Un modèle de marquage très utilisé consiste à marquer les points de façon indépendante. Ce type de marquage indépendant est appelé marquage géostatistique, voir Guan et al. [Gua07]. Un test pour vérifier cette hypothèse d'indépendance a été proposé par Guan [Gua06]. Les valeurs des marques sont définies à l'aide d'un processus aléatoire indépendant du processus de points. Dans l'exemple de la

Figure 2.15 ci-dessous, les points du processus sont superposés à une réalisation d'un processus aléatoire indépendant des points, et apparaissent comme des points noirs. Autour des points du processus de points ont été ajoutés des disques dont le rayon est directement lié à la marque du point, c'est-à-dire à la valeur en niveau de gris du processus aléatoire. La figure présentée est un extrait d'un processus homogène.

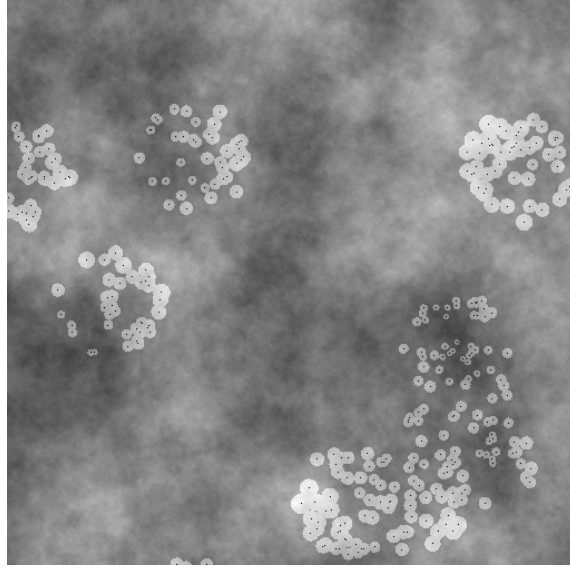


Figure 2.15 : Extrait d'une réalisation d'un processus corrélé Z (caractérisé par un variogramme sphérique) utilisé pour générer les marques. Les points sont générés par un processus agrégé de Matérn indépendant de Z . La valeur des marques est représentée par le rayon du disque centré en chaque point. Les marques apparaissent proportionnelles au niveau de gris de la réalisation de Z .

La fonction de corrélation des marques est alors étroitement liée à l'autocovariance $Cov_m(\vec{h})$ d'un processus aléatoire $m(x)$ générant les marques :

$$Cov_m(\vec{h}) = E[m(x)m(x + \vec{h})] - \mu_m^2 \quad (2.44)$$

Le marquage géostatistique d'un processus de points correspond donc au contexte géostatistique décrit en section 2.1. Pour reprendre l'exemple minier en introduction de la section 2.1, les positions des forages correspondent aux points du processus de points, et les teneurs observées en ces points sont les marques du processus. Les valeurs observées sont bien indépendantes des points : le fait d'effectuer un forage en un point x n'a en effet aucune influence sur la mesure effectuée sur un autre forage au point $y \neq x$. Le marquage géostatistique peut donc s'étudier avec les outils décrits dans la section consacrée aux méthodes géostatistiques. On notera d'ailleurs qu'une autre fonction classiquement utilisée pour étudier la structure des processus de points marqués est le variogramme des marques :

$$2\gamma(\vec{h}) = Var[m(x) - m(x + \vec{h}) | \{x, x + \vec{h}\} \in \Phi^2] \quad (2.45)$$

Guan et al. [Gua07] ont montré que l'estimée du variogramme des marques est consistante et asymptotiquement normale (pour un marquage géostatistique ou non) sous certaines conditions, dites de mélange, portant sur la force des dépendances au sein du processus de points et des processus dont sont issues les marques.

On peut évidemment imaginer d'autres modèles de marquage présentant des interactions avec les points du processus, par exemple en affectant à chaque point une marque indiquant le nombre de voisins (selon un critère quelconque).

L'estimation de la fonction de corrélation des marques fait généralement appel à l'estimée de la fonction de corrélation des paires de points. Un estimateur classique est ([Pen92]) :

$$\hat{k}(h) = \frac{2}{\hat{\mu}_B^2 \hat{m}^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j k_\varepsilon(d(x_i, x_j) - h)}{\hat{g}_3(h) |B \cap c(x_i, h, dh)|} \quad (2.46)$$

où m_i est la marque associée au point i et \hat{m}^2 est l'estimation du carré de la marque moyenne, k_ε un noyau d'Epanechnikov et \hat{g}_3 l'estimateur de la fonction de corrélation des paires de points décrit en section 2.2.3.

La Figure 2.16 présente les fonctions de corrélation des paires de points et de corrélation des marques d'un processus de points marqués présenté en Figure 2.15. Le processus de points est un processus de Matérn agrégé marqué par les valeurs d'un champ aléatoire caractérisé par un variogramme sphérique de portée 250 pixels. Les caractéristiques du processus de points apparaissent dans la fonction de corrélation des paires de points, tandis que les caractéristiques du processus aléatoire utilisé pour les marques sont capturées par la fonction de corrélation des marques, indépendamment du processus de points.

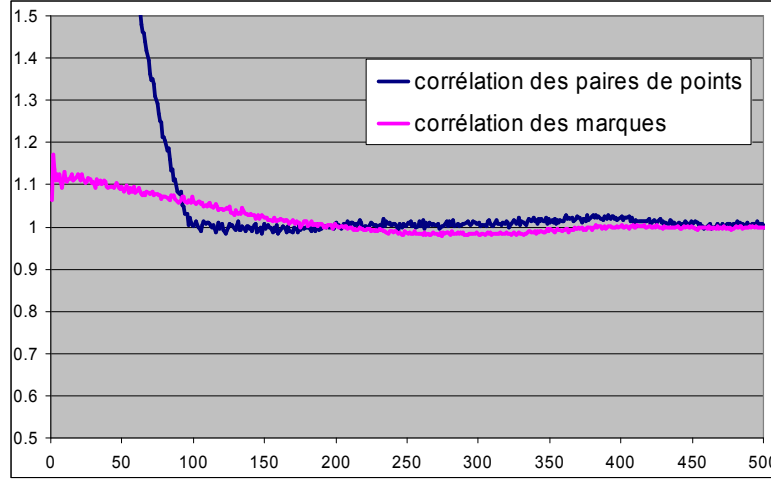


Figure 2.16 : Fonction de corrélation des paires de points et de corrélation des marques du processus présenté en Figure 2.15.

L'interprétation de la fonction de corrélation des marques est relativement semblable à celle de la fonction de corrélation des paires de points. Si les marques sont indépendantes entre elles, la fonction de corrélation des marques sera égale à 1 sur son domaine de définition. Une valeur supérieure à 1 signifie que, pour cette classe de distance, les marques ont tendance à avoir des valeurs supérieures à la marque moyenne. Au contraire, pour $k(\bar{h}) < 1$, les marques séparées de \bar{h} ont des valeurs généralement plus faibles que la moyenne. L'intérêt de cette fonction est que ses résultats sont indépendants de la structure spatiale des points eux-mêmes : les phénomènes d'agrégation ou de répulsion entre les points n'interfèrent pas avec la fonction de corrélation des marques.

Mateu [Mate00] propose une revue des méthodes utilisées dans l'analyse des propriétés du second ordre des processus de points marqués, avec des applications en écologie. Stoyan [Sto84] effectue une étude théorique des corrélations des processus de points marqués. Sakaguchi et al [Sak03] présentent une étude dans le cas où les points du processus ne sont visibles que si la marque associée est supérieure à un certain seuil.

Dans de nombreux cas, les marques sont des réels toujours positifs (masse d'un objet, hauteur d'un arbre, etc.). On considère alors la somme des marques $M(B)$ sur une fenêtre d'observation B :

$$M(B) = \sum_{x \in \Phi \cap B} m(x) \quad (2.47)$$

L'espérance de $M(B)$ est simplement le produit entre le nombre moyen de points $E[N(B)]$ et la marque moyenne μ_m :

$$E[M(B)] = \mu_m E[N(B)] \quad (2.48)$$

Si l'on considère que les marques sont des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire, et sont indépendantes des points du processus, la variance de la somme des marques sur B s'écrit alors :

$$Var[M(B)] = Var[N(B)]\mu_m^2 + E[N(B)]\sigma_m^2 \quad (2.49)$$

où σ_m^2 est la variance des marques.

Dans le cas où les marques sont corrélées entre elles, la fonction de corrélation des marques est différente de 1, et la variance s'écrit alors :

$$Var[M(B)] = \mu^2 \mu_m^2 \int_B \int_B (g(u_2 - u_1)k(u_2 - u_1) - 1) du_1 du_2 \quad (2.50)$$

Si les marques représentent, par exemple, le nombre de fruits portés par un arbre, ces formules permettent d'accéder au nombre moyen de fruits sur une parcelle et à sa variance. Sous réserve de stationnarité des processus et de gaussianité de $M(B)$, on pourra alors obtenir un intervalle de confiance sur le nombre de fruits de l'ensemble du verger.

On en déduit immédiatement la variance de l'estimateur de la mesure moyenne $M(B)/|B|$:

$$Var\left[\frac{M(B)}{|B|}\right] = \frac{\mu^2 \mu_m^2}{|B|^2} \int_B \int_B (g(u_2 - u_1)k(u_2 - u_1) - 1) du_1 du_2 \quad (2.51)$$

2.3.2 Modèles germes-grains

Un modèle germes-grains est un processus de points marqués dont les marques sont des ensembles, par exemple des disques, ellipses, etc. Des illustrations de modèles germes grains ont déjà été utilisées (Figure 2.13 par exemple), afin de mieux visualiser les points des processus de points sur des images.

2.3.2.1 Rappels sur les ensembles

Avant de décrire ces modèles, il est nécessaire d'effectuer quelques rappels sur la théorie des ensembles. Si A et B sont deux sous-ensembles de l'espace \mathbb{R}^d , l'addition de Minkowski de ces deux ensembles est :

$$A \oplus B = \{x + y : x \in A, y \in B\} \quad (2.52)$$

En termes géométriques, l'addition de Minkowski agrandit, déforme et translate l'ensemble A en fonction de l'ensemble B , et réciproquement puisque l'addition de Minkowski est clairement symétrique. La figure suivante (Figure 2.17) illustre l'addition de Minkowski entre un disque et un point, et entre un disque et un rectangle :

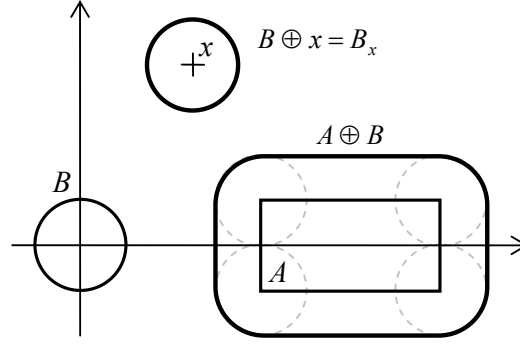


Figure 2.17 : Illustration de l'addition de Minkowski.

En particulier, si l'ensemble A est réduit à un point x , on obtient une translation, notée B_x , de l'ensemble B .

Dans le cas où B est symétrique, c'est-à-dire $B = -B$, le résultat de l'addition de Minkowski est égal à la dilatation de l'ensemble A par l'ensemble B . L'opération de dilatation par B , si ce dernier n'est pas symétrique, s'écrit :

$$A \rightarrow A \oplus \check{B}, \quad \text{avec } \check{B} = -B \quad (2.53)$$

La soustraction de Minkowski n'est en général pas symétrique de l'addition. Elle se définit par :

$$A \ominus B = \bigcap_{y \in B} A_y = (A^c \oplus B)^c \quad (2.54)$$

où A^c est le complémentaire de l'ensemble A dans l'espace considéré. L'opération morphologique duale de la dilatation est l'érosion, définie par :

$$A \rightarrow A \ominus \check{B} \quad (2.55)$$

L'érosion et la dilatation ne sont pas des applications réciproques. En appliquant successivement une érosion puis une dilatation, on obtient une ouverture morphologique. Réciproquement, une dilatation suivie d'une érosion constitue une fermeture morphologique. Voir Serra [Ser82] pour une présentation complète de la morphologie mathématique.

2.3.2.2 Modèle Booléen

Le modèle Booléen constitue un modèle de référence. Le modèle Booléen Ξ est défini comme l'union d'ensembles aléatoires (aussi appelés grains) centrés sur les points (ou germes) d'un processus de Poisson :

$$\Xi = \bigcup_{x \in \Phi} S_x \quad (2.56)$$

où les S_x sont des réalisations indépendantes d'un ensemble aléatoire S_0 (grain primaire) centrées sur les points x d'un processus de points de Poisson Φ .



Figure 2.18 : Exemple de réalisation d'un modèle booléen. Le grain primaire est ici un rectangle dont les côtés et l'orientation sont aléatoires.

Dans l'exemple de la Figure 2.18, l'ensemble aléatoire S_0 est un rectangle dont les côtés ont une distribution uniforme entre des valeurs fixées et une orientation uniforme entre 0 et π .

Un modèle booléen est donc stationnaire. L'hypothèse poissonnienne permet d'écrire de façon très simple la probabilité que l'intersection entre le modèle Booléen et un ensemble K quelconque ne soit pas vide :

$$T_{\Xi}(K) = P(\Xi \cap K \neq \emptyset) = 1 - \exp\left(-\lambda E\left[\left|S_0 \oplus \check{K}\right|\right]\right) \quad (2.57)$$

où T_{Ξ} est appelée capacité, K un ensemble compact quelconque (appelé aussi élément structurant en morphologie mathématique), λ est l'intensité du processus de Poisson, S_0 est le grain primaire.

La distribution d'un modèle Booléen Ξ est déterminée de façon unique par sa capacité T_{Ξ} . Consulter notamment Matheron [Math72] pour plus de détails sur la théorie des ensembles aléatoires.

Il est possible d'estimer de manière non biaisée la probabilité μ qu'un point quelconque appartienne au processus Ξ à partir d'une réalisation observée sur une fenêtre d'observation B quelconque en remarquant :

$$\mu = T_{\Xi}(\{x\}) = P[x \in \Xi] = E[|\Xi \cap B|] \quad (2.58)$$

Cette probabilité peut aussi s'exprimer à l'aide de la mesure de Lebesgue du grain typique S_0 :

$$\mu = 1 - \exp(-\lambda E[|S_0|]) \quad (2.59)$$

En prenant $K = \{x, x + \vec{h}\}$ dans l'équation (2.57), on obtient :

$$\begin{aligned} T_{\Xi}(\{x, x + \vec{h}\}) &= P[\Xi \cap \{x, x + \vec{h}\} \neq \emptyset] = P[x \in \Xi] + P[x + \vec{h} \in \Xi] - P[(x, x + \vec{h}) \in \Xi^2] \\ &= 1 - \exp(-\lambda E[|S_0 \oplus \{-x, -x - \vec{h}\}|]) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Cette équation fait apparaître l'autocorrélation $R_{\Xi}(\vec{h}) = P[(x, x + \vec{h}) \in \Xi^2]$. De plus, on a clairement :

$$E[|S_0 \oplus \{-x, -x - \vec{h}\}|] = E[2|S_0| - |S_0 \cap S_{0-\vec{h}}|] \quad (2.61)$$

En notant $K_{S_0}(\vec{h}) = E[|S_0 \cap S_{0-\vec{h}}|]$ le covariogramme géométrique du grain primaire S_0 (*set covariance* en anglais), on en déduit l'expression de l'autocovariance en fonction des paramètres du modèle Booléen :

$$\begin{aligned} Cov_{\Xi}(\vec{h}) &= R_{\Xi}(\vec{h}) - \mu^2 = 2\mu - T_{\Xi}(\{x, x + \vec{h}\}) - \mu^2 \\ &= (1 - \mu)^2 (1 - \exp(\lambda K_{S_0}(\vec{h}))) \end{aligned} \quad (2.62)$$

On mentionnera encore la fonction de distribution de contact (*contact distribution function*), qui est très utilisée pour caractériser les ensembles aléatoires stationnaires. Cette fonction s'exprime en fonction des homothéties par un facteur $h \geq 0$ de l'élément structurant K ([Sto95] p.71) :

$$\forall h \geq 0, H_K(h) = 1 - \frac{P[\Xi \cap hK = \emptyset]}{1 - \mu} = \frac{T_{\Xi}(hK) - \mu}{1 - \mu} \quad (2.63)$$

Différentes formes de K permettent d'extraire différentes informations concernant la morphologie de l'ensemble aléatoire Ξ . Parmi les formes classiques, on citera notamment les segments orientés et la sphère, fournissant respectivement la fonction de distribution de contact linéaire et la fonction de distribution de contact sphérique (*linear contact distribution function, spherical contact distribution function*).

Dans le cas du modèle Booléen, on obtient une forme générale :

$$H_K(h) = 1 - \exp\left(-\lambda \left(E\left[|S_0 \oplus h\check{K}| \right] - E[|S_0|]\right)\right) \quad (2.64)$$

Si le grain primaire et l'élément structurant K sont convexes, la formule de Steiner permet d'exprimer la capacité du modèle booléen à l'aide des fonctionnelles de Minkowski du grain primaire ([Math72], [Ser82]).

Stoyan et al. [Sto95] recense plusieurs méthodes permettant de tester l'hypothèse d'un modèle Booléen pour des données réelles. L'hypothèse de grains convexes simplifie alors beaucoup le problème.

2.3.2.3 Modèle germes-grains

Le modèle germes-grains est une extension du modèle Booléen, pour lequel on s'affranchit de l'hypothèse poissonnienne pour le processus de points. Le calcul des propriétés de ce type de modèle est généralement difficile.

Un exemple de processus de type germe grain sans intersections, présentant plusieurs échelles caractéristiques, a été présenté en section 2.2.2 (Figure 2.8). Ce modèle n'a, à notre connaissance, pas

été étudié dans la littérature. Etant donné qu'il présente deux échelles caractéristiques, et que sa construction fait appel aux processus de Matérn réguliers et agrégés, nous l'appellerons par la suite processus de Matérn à deux échelles. Ce processus peut se définir pour un nombre de dimensions quelconque. La construction de ce modèle se fait par étapes. Dans un premier temps, on définit un premier processus de points Φ_1 d'intensité λ_1 et de corrélation de paires de points g_1 suivant le modèle de Matérn régulier (section 2.2.4.2) en utilisant une intensité λ_{i1} et une distance d'inhibition D_1 . On associe alors une sphère de rayon fixe $R_1 \leq D_1/2$ à chaque point de Φ_1 pour former un premier modèle germes-grains simple Ξ_1 ne présentant pas d'intersections entre les grains. Sa moyenne est notée μ_1 et son autocovariance Cov_1 . Un second processus régulier de Matérn Φ_2 d'intensité λ_2 et de corrélation de paires de points g_2 est généré à partir d'une intensité initiale λ_{i2} et d'une distance d'inhibition $D_2 < D_1$. Le processus de point Φ du modèle Matérn à deux échelles est alors obtenu par intersection $\Phi = \Xi_1 \cap \Phi_2$. Le modèle germes-grains Matérn à deux échelles Ξ est finalement obtenu en associant à chacun des points de Φ un disque de rayon $R_2 \leq D_2/2$. Le processus Ξ est donc composé d'agrégats sphériques de petites particules sphériques ne présentant pas d'intersections. La Figure 2.19 illustre les processus germes-grains Ξ_1 et Ξ .

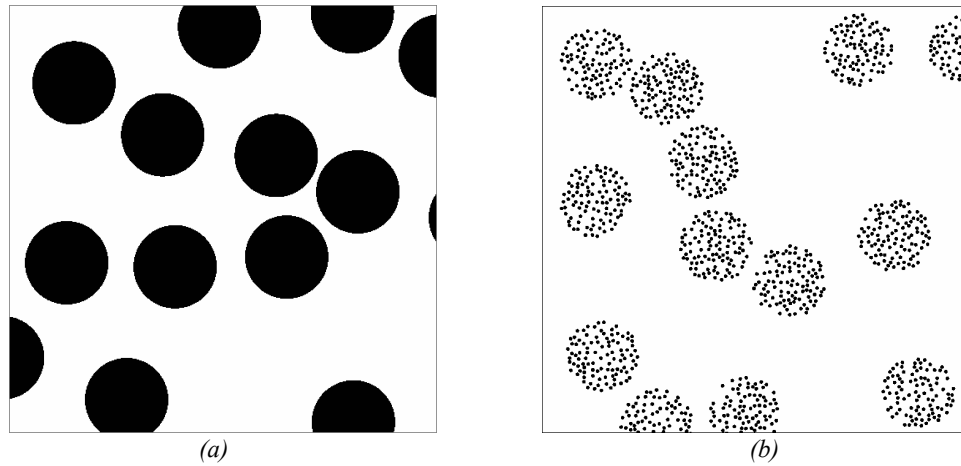


Figure 2.19 : Extrait de réalisations des processus germes-grains Ξ_1 (Matérn régulier)(a) et Ξ (Matérn à deux échelles)(b).

On note b_R la sphère de rayon R centrée à l'origine, $|b_R|$ sa mesure de Lebesgue et $I_R(h)$ la mesure de Lebesgue de l'intersection entre deux sphères de rayon R distantes de h , c'est-à-dire le covariogramme géométrique de b_R .

Nous pouvons alors exprimer l'intensité λ et la fonction de corrélation des paires de points g du processus de points Matérn à deux échelles Φ , ainsi que la moyenne μ et l'autocovariance Cov du modèle germe-grains Ξ associé.

Du fait que les objets ne se recouvrent pas, les expressions des paramètres du premier ordre (intensités et moyennes) des différents processus sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 |b_{R_1}| \\ \lambda = \mu_1 \lambda_2 \\ \mu = \lambda |b_{R_2}| \end{cases} \quad (2.65)$$

L'expression des moments du second ordre (corrélation des paires de points et autocovariance) est plus délicate. On s'appuie ici sur l'interprétation en tant que processus aléatoire des processus, et des relations entre corrélations des paires de points, autocorrélation et autocovariance définies par l'équation (2.27). Le modèle Ξ_1 peut être vu comme le résultat de la convolution du processus de points Φ_1 avec la sphère b_{R_1} . L'autocorrélation de Ξ_1 peut donc s'écrire comme la convolution (symbolisée par \otimes) de l'autocorrélation de Φ_1 et de $I_{R_1}(h)$, soit :

$$Cov_1(\vec{h}) = \lambda_1^2 ((g_1 + \delta) \otimes I_{R_1})(\vec{h}) - \mu_1^2 \quad (2.66)$$

Le processus de points Φ peut s'interpréter comme le produit de Ξ_1 et Φ_2 . Sa fonction de corrélation de paires de points peut alors s'écrire :

$$g(\vec{h}) = \frac{1}{\mu_1^2} Cov_1(\vec{h}) (g_2(\vec{h}) + \delta(\vec{h})) + g_2(\vec{h}) \quad (2.67)$$

Finalement on obtient le processus germes-grains Matérn à deux échelles Ξ par une convolution de Φ et b_{R_2} , l'autocovariance de Ξ s'exprime donc :

$$Cov(\vec{h}) = \lambda^2 ((g + \delta) \otimes I_{R_2})(\vec{h}) - \mu^2 \quad (2.68)$$

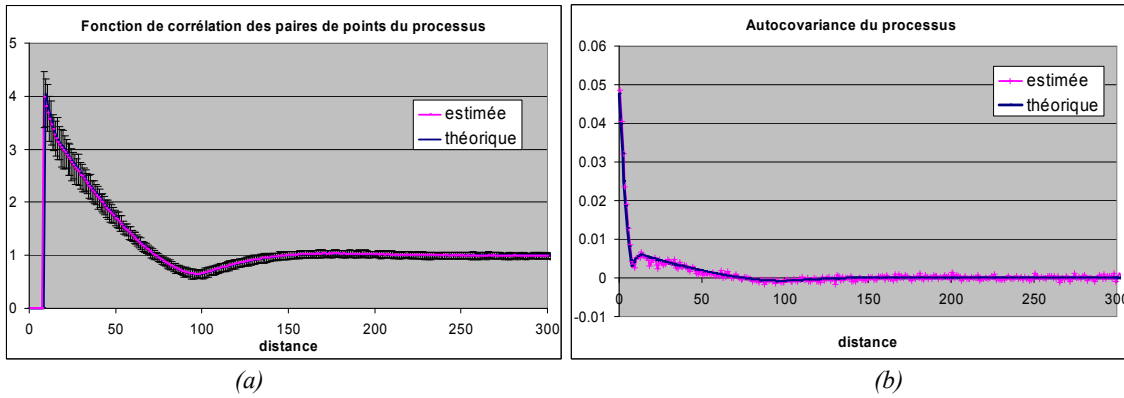


Figure 2.20 : Fonction de corrélation de paires de points (a) et autocovariance du processus de Matérn à deux échelles (b). La fonction de corrélation des paires de points théorique est accompagnée par son estimation sur une réalisation ainsi que l'intervalle de confiance à 95% estimé sur 500 réalisations indépendantes du processus.

La Figure 2.20(a) présente la fonction de corrélation des paires de points théorique et les résultats de son estimation sur 500 réalisations indépendantes du processus Φ . La Figure 2.20(b) montre la fonction d'autocovariance estimée et théorique de Φ .

2.3.2.4 Autres modèles

Les bruits impulsionnels (ou bruit de grenaille, *shot-noise* en anglais) peuvent être définis par la somme de fonctions centrées sur les points d'un processus Φ :

$$X = \sum_{x \in \Phi} S_x \quad (2.69)$$

Voir par exemple Heinrich [Hei85], Sequeira et al. [Seq95]. On remarque que prendre l'union ou la somme de fonctions indicatrices d'ensembles ne présentant aucune intersection est équivalent.

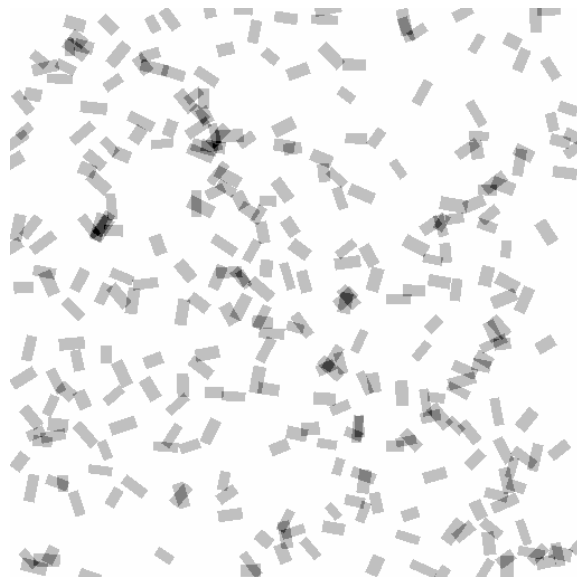


Figure 2.21 : Exemple de modèle *shot-noise* avec des ensembles aléatoires rectangulaires. On remarque qu'on obtient la réalisation du modèle booléen présentée en Figure 2.18 en effectuant un simple seuillage.

On constate également que si le processus de points est poissonnien, il suffit d'effectuer un seuillage pour obtenir un modèle booléen.

Un autre type de modèle utile pour simuler des distributions. Les processus séquentiels permettent de construire facilement des modèles d'objets sans recouvrements. Le principe est, à chaque étape, de proposer un objet au hasard. Cette proposition n'est acceptée que si l'objet ne recouvre pas un objet déjà présent. Des exemples de tels processus peuvent notamment être trouvés dans Pielou [Pie60].

2.4 Conclusion sur les modèles en statistiques spatiales

2.4.1 Variance d'estimation de la moyenne

Comme nous l'avons présenté en introduction, notre objectif est d'estimer la variance de l'estimateur de la moyenne à partir d'une réalisation unique d'un processus. Différents modèles de processus stationnaires ont été présentés dans ce chapitre : des modèles de textures continues, des

processus de points et des ensembles aléatoires. Dans les différents cas, les expressions théoriques de la variance de l'estimateur de la moyenne (généralement appelée intensité pour les processus de points) ont été présentées au travers des équations (1.22), (2.31), (2.51), respectivement aux pages 22, 47 et 58.

Quel que soit le point de vue choisi pour l'interprétation du processus aléatoire, la variance de l'estimateur de la moyenne dépend de la fonction d'autocovariance du processus (qui peut éventuellement être exprimée par l'intermédiaire des fonctions de corrélation des paires de points ou de corrélation des marques) ainsi que de la taille et de la forme de la fenêtre d'observation (équation (1.23) page 22).

Dans un cas pratique, on ne dispose généralement que d'une réalisation unique du processus aléatoire, observée sur un ensemble borné. La variance de l'estimateur de la moyenne est donc nécessaire pour établir la fiabilité de la mesure. Cependant, la fonction d'autocovariance du processus est a priori inconnue. Cette fonction peut être estimée, mais les estimateurs ne garantissent pas nécessairement les conditions de positivité d'une véritable fonction d'autocovariance. Les solutions habituellement retenues dans la littérature consistent à introduire un modèle, soit de l'autocovariance (ou du variogramme), soit du processus aléatoire lui-même pour les ensembles aléatoires [Bla06b]. Des pistes pour la modélisation ont été données dans ce chapitre. En outre, des tests statistiques permettant d'évaluer la qualité de l'adéquation entre le modèle retenu et les données peuvent être consultés notamment dans les livres de Cressie [Cre93], et Stoyan et al. [Sto95].

Remarque :

La modélisation des fonctions de corrélation de paires de points et de corrélation des marques est également possible, selon les mêmes principes que la modélisation du variogramme présentée en section 2.1.1.2.

2.4.2 Discussion

Quelle que soit la méthode de modélisation choisie, l'estimation de la fiabilité de la mesure effectuée dépend du modèle retenu. Or, le choix de ce modèle n'est ni intuitif ni facile. Dans le cas des processus d'objets, certaines données peuvent être difficiles à modéliser correctement. Par exemple, les images de sections planes de matériaux composites à base de fibres de carbone (Figure 2.22 ci-dessous) sont complexes, et très différentes suivant les méthodes de fabrications. Il serait donc nécessaire de développer autant de modèles que de types de matériaux.

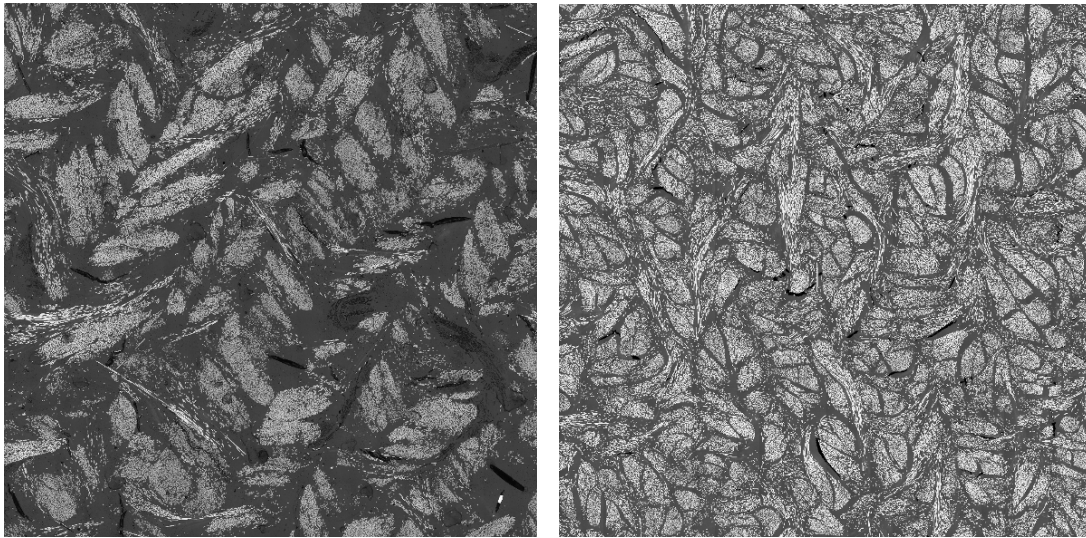


Figure 2.22 : Différents types de matériaux composites à base de fibres. Sur l'image de gauche, on distingue une structure en couches (bandes obliques). Sur l'image de droite, les fils ont été tissés. Les structures de ces deux matériaux sont très différentes.

L'autre solution consiste à modéliser directement la fonction d'autocovariance, ce qui s'avère plus simple que de modéliser un processus aléatoire. En revanche, le choix du type de fonction utilisée pour la modélisation doit permettre de bien capturer les corrélations spatiales des données. Si les connaissances a priori sur les données ne permettent pas de décrire précisément ces corrélations, les choix effectués de manière empirique doivent pouvoir être testés et validés.

Tout d'abord, l'observation du variogramme ne permet pas de conclure si l'image utilisée pour son estimation est représentative de l'ensemble du processus phénomène étudié. Dans l'exemple suivant, on considère des images de matériau composite :

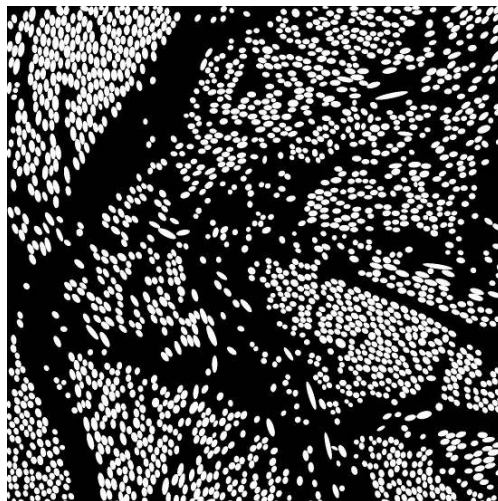


Figure 2.23 : Image segmentée d'une petite acquisition de matériau composite.

Le variogramme moyen estimé à partir de cette image, en utilisant l'estimateur classique (équation (2.3)) est le suivant :

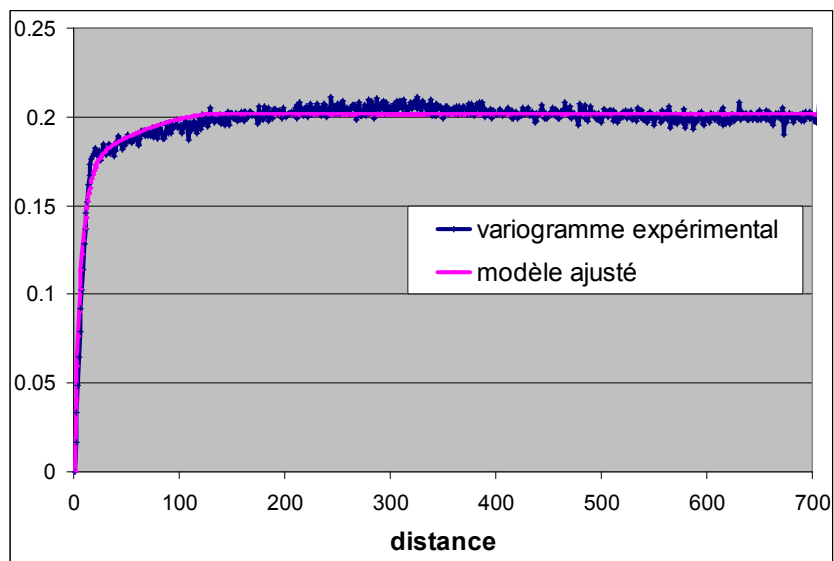


Figure 2.24 : Variogramme estimé de la Figure 2.23. Le modèle de variogramme est une somme de modèle élémentaires sphériques et gaussiens notamment. Il s'agit de la moyenne circulaire.

Un palier semble apparaître, suggérant une image homogène. Le modèle ajusté implique une valeur numérique de la portée intégrale d'environ $A = 385$. Cependant, l'image ne présente pas un caractère vraiment homogène. Si l'on étudie le même matériau, mais à partir d'une image nettement plus grande, telle que la Figure 2.25, on constate que la structure des fils apparaît clairement :

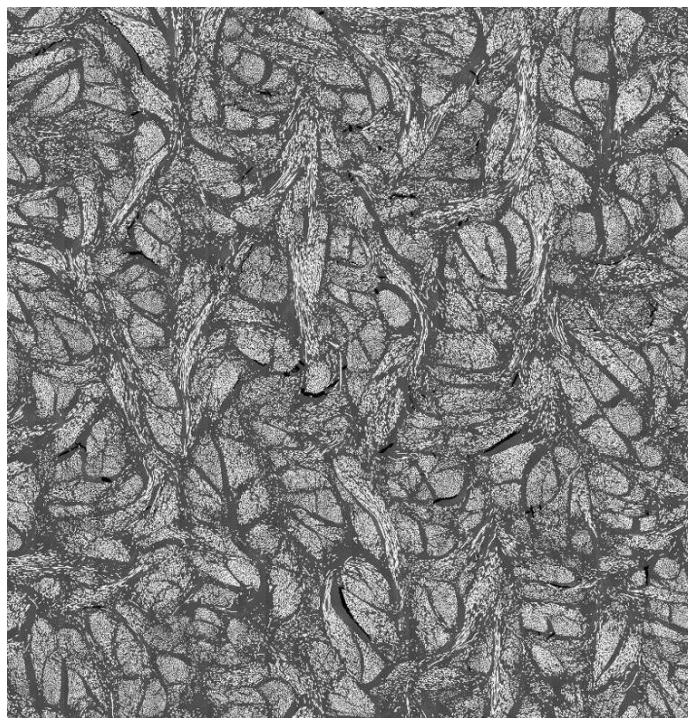


Figure 2.25 : Image d'une grande acquisition de matériau composite.

Le variogramme correspondant à cette image est représenté Figure 2.26 ci-dessous :

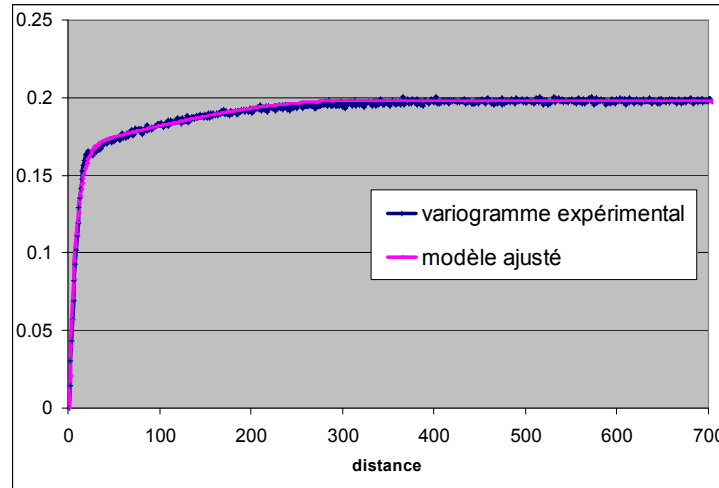


Figure 2.26 : Variogramme estimé de la Figure 2.25. Le modèle utilisé est le même que celui utilisé en Figure 2.24.

Le palier semble plus clairement défini que dans la Figure 2.24. L'estimation de la portée intégrale à partir du modèle ajusté est ici de l'ordre de $A = 1850$ soit près de 5 fois supérieure à l'estimation faite à partir de la Figure 2.23.

D'autre part, on a vu que la portée intégrale, qui est un paramètre essentiel pour établir la variance de l'estimateur de la moyenne, est définie comme l'intégrale de la fonction d'autocovariance. La façon dont le modèle choisi pour l'autocovariance tend vers zéro à grande distance a donc une influence prépondérante sur l'estimation de la portée intégrale : si la convergence est très lente, la portée intégrale sera très grande, inversement, si le modèle s'annule très rapidement, l'estimation de la portée intégrale sera beaucoup plus petite. Or, différents modèles présentant des vitesses de convergence très différentes peuvent s'ajuster sans qu'un test statistique puisse indiquer si l'un des modèles est meilleur que l'autre. Ainsi, des modèles dont la qualité d'ajustement est statistiquement indiscernable peuvent produire des estimations très différentes pour la variance d'estimation de la moyenne :

Modèle de variogramme	Portée intégrale A	Critère AIC
Sphérique + exponentiel + gaussien	9400	-24700
Sphérique + $1/(1 + h^3)$	13700	-24300
Sphérique + $1/(1 + h^{2.1})$	93000	-24700

Figure 2.27 : Portée intégrale (A) et qualité de l'ajustement (AIC) pour différents modèles de variogramme, pour l'image de la Figure 2.25.

Le tableau ci-dessus liste les résultats pour l'ajustement du variogramme empirique de la Figure 2.26 de trois modèles valides différents, possédant des comportements asymptotiques différents. La colonne AIC indique la qualité de l'ajustement entre le modèle et les données (critère d'information d'Akaike pour l'ajustement du variogramme par les moindres carrés pondérés, voir Jian et al. [Jia96]), les trois modèles présentent des qualités d'ajustement similaires. En revanche, les estimations de la

portée intégrale sont très différentes d'un modèle à l'autre. Ici, rien ne permet objectivement de choisir entre ces trois modèles, par conséquent, on ne peut pas évaluer la variance de notre estimation de la moyenne sans avoir d'éléments objectifs indiquant quel est le bon modèle (loi physique du processus, expertise de l'expérimentateur,...).

Les méthodes d'estimation de la variance fondées sur une modélisation ne s'avèrent pas satisfaisantes. De manière générale, les modèles permettent d'établir une variance d'estimation de la moyenne à partir des données, mais cette estimation dépend trop du modèle retenu. A notre connaissance, les modèles rencontrés dans la littérature ne sont pas suffisamment flexibles pour pouvoir s'adapter à la diversité des cas possibles. Les difficultés de modélisation portent sur le comportement du variogramme pour des distances relativement faibles, mais surtout, dans le problème de l'inférence statistique qui nous intéresse ici, sur son comportement asymptotique à grande distance. De légères variations sur le modèle pouvant induire une très grande différence d'estimation de la variance, il est nécessaire d'avoir une expertise du phénomène étudié pour pouvoir proposer un modèle réellement adapté.

Chapitre 3: Estimations non paramétriques

Le sous-échantillonnage par blocs consiste à extraire de nombreux sous-échantillons (également appelés blocs) de l'image originale en conservant la structure spatiale, et donc les relations de dépendance, des données. L'image est observée sur une fenêtre V . Les blocs sont des ensembles v de même forme que V , mais plus petits. A partir des n mesures $\theta(v_k)$ sur chacun de ces blocs de taille $|v| < |V|$, nous nous intéressons aux estimateurs de la moyenne empirique $\hat{E}\theta(v)$ et de la variance empirique $\hat{Var}\theta(v)$ de la mesure à l'échelle v . On rappelle que l'objectif est d'analyser les conditions sous lesquelles il est possible d'extrapoler ces fonctions à l'échelle de l'observation V , et ainsi d'effectuer l'inférence statistique du paramètre θ de façon non paramétrique, sans introduire de modèle. Nous considérons un sous-échantillonnage tel que les blocs ne se recouvrent pas, et forment une partition de V . Le nombre n de blocs est donc dépendant de v .

3.1 Sous échantillonnage sur des processus d'objets

A travers quelques exemples portant sur des processus de points ou d'objets connus pour lesquels il est relativement facile d'établir des résultats théoriques, nous analysons dans cette section le comportement des estimateurs $\hat{E}\mu(v)$ et $\hat{Var}\mu(v)$ obtenus par sous-échantillonnage par blocs, où μ est la moyenne, en fonction de la taille v de la fenêtre d'observation. Notons que les processus aléatoires considérés dans cette section vérifient clairement la condition de mélange fort (1.10) puisque les dépendances spatiales s'annulent à partir d'une distance finie. L'objectif est ici de déterminer certaines propriétés des estimateurs, notamment de $\hat{Var}\mu(v)$, en réponse à des processus présentant différentes structures spatiales.

3.1.1 Processus de points de Poisson

Dans le cas d'un processus de points de Poisson d'intensité μ , il y a indépendance entre des ensembles d'observations disjoints (section 2.2.1). Les différentes mesures de la moyenne $\mu(v_k)$ sont donc indépendantes, et sont distribuées selon des lois de Poisson de paramètre μ , qui caractérise l'intensité du processus. La moyenne et la variance théoriques du nombre de points $N(v)$ sur un ensemble v quelconque de taille $|v|$ sont égales :

$$\forall v: E[N(v)] = Var[N(v)] = \mu|v| \quad (3.1)$$

Chacune des mesures $\mu(v_k) = N(v_k)/|v|$ peut donc être considérée comme une réalisation d'une variable aléatoire ayant les propriétés statistiques suivantes :

$$\begin{aligned} E \mu(v_k) &= \mu \\ Var \mu(v_k) &= \frac{\mu}{|v|} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ces propriétés théoriques découlent directement de la connaissance de la loi du processus aléatoire étudié, ici un processus de Poisson. Dans un cas pratique, lors de l'étude d'une image naturelle, ces lois ne sont pas connues a priori. L'objectif est donc de les estimer.

3.1.1.1 Description des estimateurs de la moyenne et de la variance

A partir de l'ensemble des n mesures $\mu(v_k)$, on forme l'estimateur de la moyenne à l'échelle $|v|$:

$$\hat{E} \mu(v) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu(v_k) \quad (3.3)$$

Il n'est pas difficile de montrer que cet estimateur est non biaisé :

$$E \left[\hat{E} \mu(v) \right] = \mu \quad (3.4)$$

Si l'utilisation du sous-échantillonnage n'a pas beaucoup d'intérêt pour produire une estimation de la moyenne du processus (on a clairement $\hat{E} \mu(v) = \mu(V)$ du moins tant que les blocs v_k forment une partition de V), elle permet en revanche d'évaluer la fiabilité de cette estimation à l'aide de l'estimateur de la variance $\hat{Var} \mu(v)$:

$$\hat{Var} \mu(v) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\mu(v_k) - \hat{E} \mu(v) \right)^2 \quad (3.5)$$

Afin de simplifier les calculs théoriques à venir, nous considérerons également l'estimateur de la variance utilisant l'espérance mathématique plutôt que la moyenne empirique :

$$\tilde{Var} \mu(v) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\mu(v_k) - \mu \right)^2 \quad (3.6)$$

3.1.1.2 Propriétés des estimateurs

On montre facilement que l'espérance mathématique de l'estimateur théorique $\tilde{Var} \mu(v)$ est :

$$E \left[\tilde{Var} \mu(v) \right] = \frac{\mu}{|v|} \quad (3.7)$$

L'estimateur est non biaisé quelle que soit l'échelle d'observation $|v|$. Ces résultats sont cohérents avec la définition du processus de points de Poisson. D'autre part, en pratique, la différence entre l'estimateur empirique $\hat{Var} \mu(v)$ et l'estimateur théorique $\tilde{Var} \mu(v)$ est relativement faible, comme illustré sur la figure suivante :

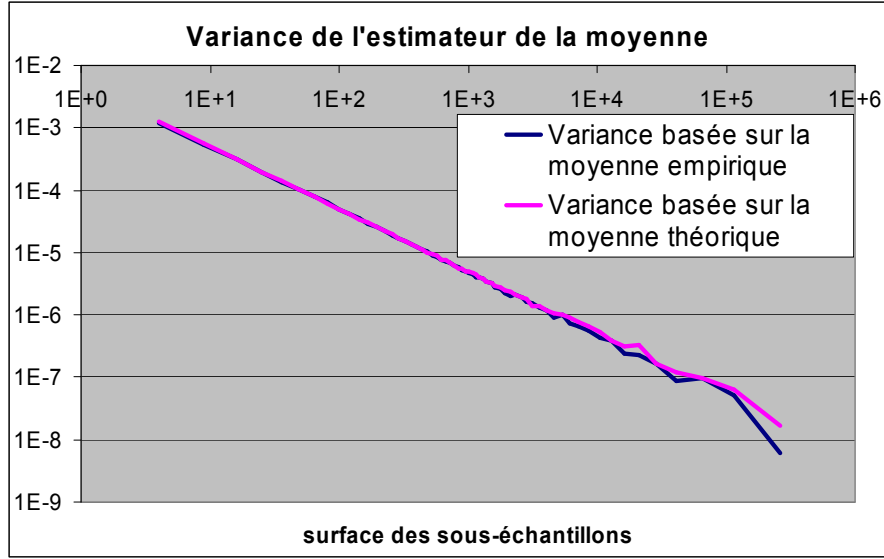


Figure 3.1 : Variance de l'estimateur de la moyenne sur une réalisation d'un processus de Poisson d'intensité $\mu=5.10^{-3}$ observée sur une fenêtre carrée de 1024 pixels de côté. La courbe est tracée en échelle log-log.

Les courbes correspondent aux estimations $\hat{Var} \mu(v)$ et $\tilde{Var} \mu(v)$ réalisées pour différentes tailles $|v|$ de blocs. Notons que par rapport à l'échelle log-log utilisée, le comportement en $\mu/|v|$ se traduit par une droite de pente (-1) et d'ordonnée à l'origine μ . Ainsi, dans le cas d'un processus de Poisson, l'estimateur $\hat{Var} \mu(v)$ fournit une estimation non paramétrique et non biaisée de la loi théorique $\mu/|v|$. On rappelle que l'estimateur $\tilde{Var} \mu(v)$ constitue un indicateur de la fiabilité de la mesure $\hat{E} \mu(v)$.

La variance de $\tilde{Var} \mu(v)$ s'exprime comme la différence :

$$Var[\tilde{Var} \mu(v)] = E\left[\left(\tilde{Var} \mu(v)\right)^2\right] - E[\tilde{Var} \mu(v)]^2 \quad (3.8)$$

avec

$$E\left[\left(\tilde{Var} \mu(v)\right)^2\right] = \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mu(v_i) - \mu)^2 (\mu(v_j) - \mu)^2\right] \quad (3.9)$$

En distinguant les termes carrés ($i = j$) et croisés ($i \neq j$), et en exploitant l'indépendance entre les différentes mesures $\mu(v_k)$, on obtient l'expression de la variance de cet estimateur :

$$Var[\tilde{Var} \mu(v)] = \frac{2\mu^2}{n|v|^2} + \frac{\mu}{n|v|^3} \quad (3.10)$$

De cette expression théorique, il résulte que la variance de l'estimateur $\tilde{Var} \mu(v)$ dépend de la taille des blocs. On peut vérifier expérimentalement cette expression en répétant des réalisations indépendantes du processus et en comparant les estimations pour chaque réalisation.

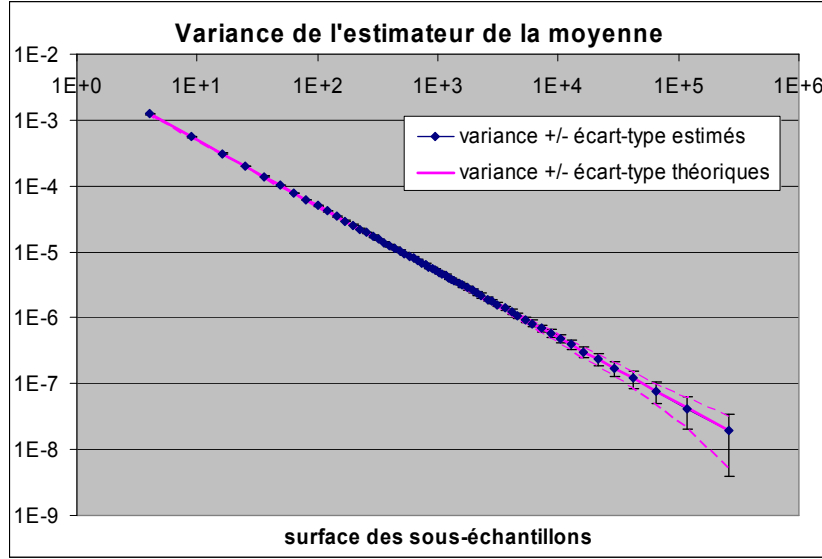


Figure 3.2 : Précision de l'estimation de la variance de l'estimateur de la moyenne. Les écarts-types estimés et théoriques coïncident, validant ainsi l'algorithme de simulation.

Le label 'variance +/- écart-type théoriques' correspond à la droite et à l'enveloppe en pointillés. Les courbes correspondantes représentent la valeur théorique $Var \mu(V)$ plus ou moins l'écart-type $Var[\tilde{Var} \mu(v)]^{1/2}$. Les courbes sombres, portant le label 'variance +/- écart-type estimés' correspondent aux estimations de ces quantités, c'est-à-dire $\hat{Var} \mu(V)$ et $\hat{Var}[\tilde{Var} \mu(v)]^{1/2}$ effectuées à partir de 1000 réalisations indépendantes du processus. Les barres d'erreurs et l'enveloppe donnent une idée de la fiabilité de l'estimateur et permettent de comparer les résultats théoriques et pratiques. Il apparaît que la variance relative de l'estimateur $\tilde{Var} \mu(v)$ augmente avec la taille $|v|$ des blocs, ce qui peut poser problème pour l'extrapolation de la variance $\tilde{Var} \mu(V)$ à l'échelle $|V|$ à l'aide d'une régression par exemple. Nous reviendrons sur ce point en section 3.3.2.

Dans le cas du processus de Poisson, nous pouvons remarquer que la variance globale $Var \mu(V)$, c'est-à-dire la fiabilité de la mesure à l'échelle de l'observation, peut être estimée à partir de chacune des estimations $\hat{Var} \mu(v)$ en appliquant la correction suivante :

$$\hat{Var} \mu(V, v) = \frac{|v|}{|V|} \hat{Var} \mu(v) \quad (3.11)$$

L'estimateur $\hat{Var} \mu(V, v)$ de la variance globale $Var \mu(V)$, représente donc l'estimation de la fiabilité de la mesure globale de la moyenne $\mu(V)$, effectuée à partir des blocs de taille $|v|$. La question qui se pose alors est : existe-t-il une échelle d'observation $|v|$ permettant d'optimiser l'estimation $\hat{Var} \mu(V, v)$, au sens de la minimisation de l'erreur quadratique moyenne :

$$E \left[\left(\hat{Var} \mu(V, v) - Var \mu(V) \right)^2 \right] = Var \left[\hat{Var} \mu(V, v) \right] \quad (3.12)$$

Afin de simplifier les calculs théoriques, puisque les propriétés de $\tilde{Var} \mu(v)$ ont déjà été établies, nous considérons l'estimateur $\tilde{Var} \mu(V, v) = \tilde{Var} \mu(v) \cdot |v|/|V|$. En notant que $n|v| = |V|$ dans le cas de sous-échantillons formant une partition de l'ensemble, l'espérance mathématique et la variance de cet estimateur sont donc :

$$\begin{aligned} E\left[\tilde{Var} \mu(V, v)\right] &= E\left[\frac{|v|}{|V|} \tilde{Var} \mu(v)\right] = \frac{\mu}{|V|} \\ Var\left[\tilde{Var} \mu(V, v)\right] &= Var\left[\frac{|v|}{|V|} \tilde{Var} \mu(v)\right] = \frac{2|v|\mu^2}{|V|^3} + \frac{\mu}{|V|^3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

L'estimateur $\tilde{Var} \mu(V, v)$ (ou $\hat{Var} \mu(V, v)$ en pratique) indique la fiabilité que l'on peut attendre de la mesure $\mu(V)$ à partir de sous-échantillons de taille $|v|$. Nous avons montré (équation (3.7) portant sur $E\left[\tilde{Var} \mu(V, v)\right]$) que cette estimation est toujours non biaisée, c'est-à-dire que l'intervalle de confiance que l'on peut construire autour de $\mu(V)$ est satisfaisant, en moyenne. Cependant en pratique, la largeur de cet intervalle de confiance peut varier d'une réalisation à l'autre du processus. L'amplitude de ces variations peut être évaluée à l'aide de la variance $Var\left[\tilde{Var} \mu(V, v)\right]$. L'équation (3.13) indique que les fluctuations de largeur de l'intervalle de confiance seront minimales quand $|v|$ est petit, c'est-à-dire quand le nombre n de sous-échantillons est grand. Or le nombre de sous-échantillons disjoints utilisés est inversement proportionnel à la taille des sous-échantillons.

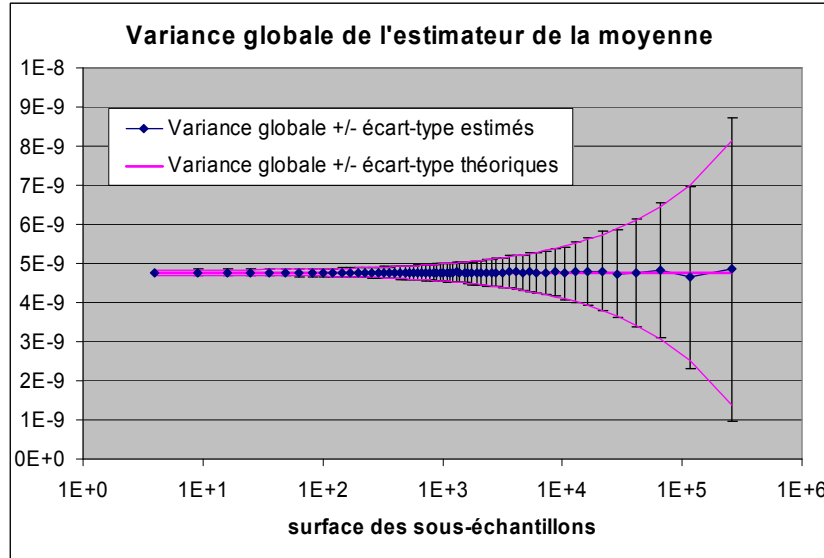


Figure 3.3 : Précision de l'estimation de la variance globale de l'estimateur de la moyenne.

En conclusion, pour le cas d'un processus de points de Poisson, on effectue une mesure $\mu(V)$ de la moyenne du processus aléatoire effectuée à partir d'une réalisation observée sur un ensemble de taille $|V|$. On estime la fiabilité de cette mesure à l'aide de sous-échantillons, en calculant $\hat{Var} \mu(v)$. Quelle que soit la taille $|v|$ des échantillons choisie, cette mesure de fiabilité est non biaisée. En revanche, la

précision de cette mesure de fiabilité est dépendante de $|v|$. En particulier, cette précision se dégrade lorsque le nombre de sous-échantillons disponibles diminue, c'est-à-dire quand $|v|$ est grand.

3.1.2 Distribution poissonnienne de motifs additifs

Considérons maintenant l'application de la méthode de sous-échantillonnage à un modèle de type shot-noise (section 2.3.2.4) obtenu en additionnant des motifs carrés de côté c constant centrés sur les points d'un processus de Poisson d'intensité λ . Une illustration est fournie Figure 3.4, sur laquelle on peut observer différents niveaux de gris, les zones les plus sombres correspondant au recouvrement de motifs entre eux.

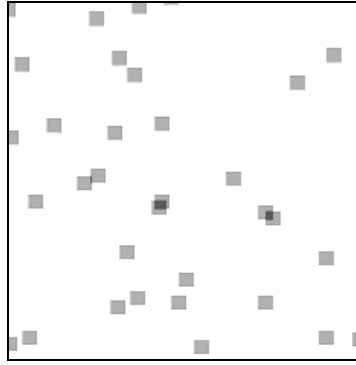


Figure 3.4 : Illustration du processus shot-noise étudié.

Le processus aléatoire étant observé sur un ensemble borné, les motifs peuvent être observés soit complets, soit tronqués du fait des effets de bords. Pour un ensemble d'observation v carré quelconque, dont le côté est noté f tel que $f^2 = |v|$, on peut ainsi distinguer trois zones pour lesquelles les motifs apparaissent de façon différentes :

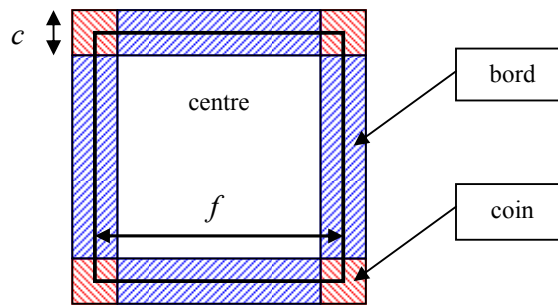


Figure 3.5 : Types de zones sur la fenêtre d'observation.

Si le centre d'un motif est inclus dans le centre de la fenêtre, le motif sera entièrement visible. Sur les bords, les motifs apparaissent comme des rectangles dont un des côtés a pour longueur c et l'autre est plus petit que c . Si le centre d'un motif est dans l'un des coins, on observera un carré ou un rectangle dont les deux côtés sont plus petits que c . Notons que les motifs dont le centre se situe à l'extérieur de la fenêtre d'observation peuvent apparaître partiellement. Pour effectuer les calculs

théoriques, nous travaillons ici dans le domaine continu. Certains aspects liés au caractère discret des motifs sont étudiés en Annexe E.

Chacune de ces zones contribue de façon indépendante à la mesure. Il est clair que la mesure de la moyenne sur v est non biaisée avec $E \mu(v) = \lambda c^2$ quel que soit l'ensemble d'observation v . Nous examinons donc la variance de l'estimateur de la moyenne sur chacune de ces zones. Pour ce faire, nous utilisons l'intégrale du processus (c'est-à-dire la somme des surfaces des motifs) sur chacune des zones et nous explicitons sa variance :

- La surface de la zone centrale est $(f - c)^2$, et les motifs dont le centre est inclus dans cette zone ont tous une surface apparente c^2 . La variance de l'intégrale est donc théoriquement :

$$Var\ s(centre) = \lambda(f - c)^2 c^4 \quad (3.14)$$

- La surface de chacun des bords est $(f - c)c$. Les motifs dont le centre est inclus dans l'une de ces zones ont un côté égal à c et l'autre dépend directement de la distance entre le centre du motif et le bord de l'image. En intégrant sur l'ensemble des cas possibles, nous obtenons l'expression de la variance sur les bords de l'image :

$$Var\ s(bord) = \frac{1}{3} \lambda(f - c)c^5 \quad (3.15)$$

- Le principe est le même pour les coins :

$$Var\ s(coin) = \frac{1}{9} \lambda c^6 \quad (3.16)$$

La variance théorique pour la totalité du processus sur un ensemble d'observation v carré de taille f^2 s'obtient en sommant les contributions de chacune des zones. La variance de la mesure de la moyenne peut alors s'écrire :

$$si\ f \geq c, Var\ \mu(v) = \frac{1}{f^4} Var\ s(v) = \frac{\lambda c^4}{f^2} - \frac{2}{3} \frac{\lambda c^5}{f^3} + \frac{1}{9} \frac{\lambda c^6}{f^4} \quad (3.17)$$

Cette expression est valable pour $f \geq c$, c'est-à-dire un ensemble d'observation plus grand que le motif. Dans le cas contraire, on peut montrer que les variables c et f jouent des rôles symétriques pour la mesure $s(v)$. On en déduit la variance correspondante :

$$si\ c \geq f, Var\ \mu(v) = \lambda c^2 - \frac{2}{3} \lambda c f + \frac{1}{9} \lambda f^2 \quad (3.18)$$

On peut alors décliner ce résultat sur quelques cas particuliers :

- si $f \rightarrow \infty$ et $f > c$ alors $Var\ \mu(v) = \lambda c^4 / f^2 + o(1/f^2)$: les effets de bords deviennent négligeables.

- si $f \rightarrow 0$ avec $c > f$, c'est-à-dire quand les blocs sont très petits devant les motifs, la variance est $Var \mu(v) \approx \lambda c^2$.
- si $c = f$, $Var \mu(v) = 4/9 \lambda f^2$

Connaissant les propriétés théoriques de la variance (fiabilité de la mesure de la moyenne), une comparaison avec les résultats de l'estimateur $\hat{Var} \mu(v)$ est alors possible :

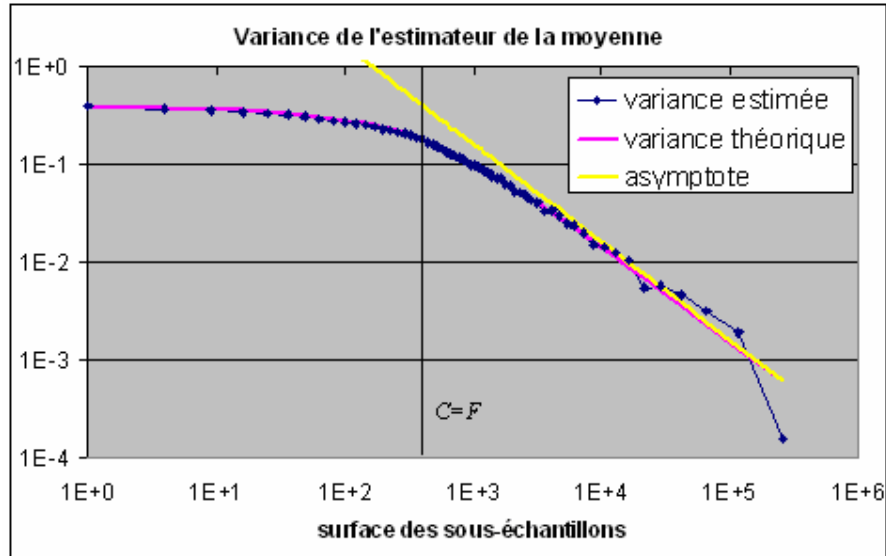


Figure 3.6 : Variance de l'estimateur de la moyenne d'un processus poissonnien de motifs.
L'estimation est effectuée à partir d'une seule réalisation.

On observe une très bonne concordance entre les résultats théoriques et les estimations, et ce malgré le fait que les calculs aient été effectués dans le domaine continu, alors que les simulations ont été réalisées au moyen d'images discrètes.

Comparée à celle d'un processus de points de Poisson, la variance d'estimation présente un comportement variable selon la taille $|v|$ des blocs. Pour des blocs de petite taille, la variance ne décroît que très lentement. Cette décroissance commence à s'accélérer lorsque $|v|$ est du même ordre de grandeur que le motif. Ce comportement se stabilise, avec une décroissance en loi inverse (c'est-à-dire au même rythme que pour un processus de points de Poisson), lorsque la surface des sous-échantillons est de l'ordre de cent fois la surface des motifs.

Il est clair que ce comportement de la variance est directement lié à l'extension spatiale des motifs. Si les motifs présentent des variations de taille et/ou de forme, un comportement très similaire pour la variance sera observé. Il n'est pas difficile de montrer que, quel que soit le motif, aléatoire ou non, du moment qu'il est borné, le comportement asymptotique de la variance est atteint quand les effets de bords sont négligeables. Tout se passe alors comme si l'on avait affaire à un processus de points marqués dont les marques seraient égales à la surface du motif.

3.1.3 Distribution poissonnienne de points massifs

Si $N(v)$ désigne le nombre de motifs dont le centre est inclus dans l'ensemble d'observation v , avec v 'grand', et $S_i, i \in \{1, 2, \dots, N(v)\}$ les surfaces des motifs, la mesure $\mu(v)$ peut s'exprimer comme la moyenne d'un nombre aléatoire ($N(v)$) de variables aléatoires (S_i) :

$$\mu(v) \underset{|v| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{|v|} \sum_{i=1}^{N(v)} S_i \quad (3.19)$$

Si les variables S_i sont identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d.), et indépendantes des positions et du nombre de motifs, l'espérance et la variance de cette mesure sont :

$$\begin{aligned} \lim_{|v| \rightarrow \infty} (E \mu(v)) &= \frac{E[N(v)]E[S]}{|v|} \\ \lim_{|v| \rightarrow \infty} (Var \mu(v)) &= \frac{Var[N(v)]E[S]^2 + E[N(v)]Var[S]}{|v|^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Lorsque les centres des motifs sont distribués selon une distribution de points de Poisson d'intensité λ , ces expressions se simplifient :

$$\begin{aligned} \lim_{|v| \rightarrow \infty} (E \mu(v)) &= \lambda E[S] \\ \lim_{|v| \rightarrow \infty} (Var \mu(v)) &= \frac{\lambda E[S^2]}{|v|} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ces formules asymptotiques sont indépendantes de la forme du motif, mais nécessitent que ces derniers soient indépendants entre eux. Il est également nécessaire d'estimer la surface du motif, qui est en pratique une représentation discrète d'un objet continu. Ces problèmes sont détaillés en Annexe E. La figure suivante présente une distribution poissonnienne d'ellipses dont les paramètres (petit axe, grand axe et orientation) sont des variables aléatoires indépendantes :

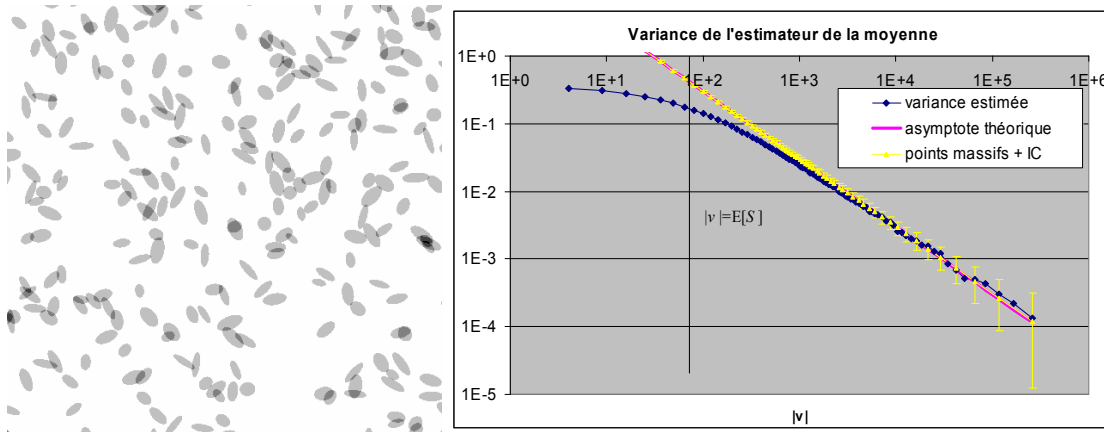


Figure 3.7 : Distribution poissonnienne d'ellipses aléatoires et variance de la moyenne estimée. La courbe claire est calculée en remplaçant les motifs elliptiques par des points pondérés par la surface de l'ellipse. Cette courbe est accompagnée de l'intervalle de confiance à 95% estimé sur 1000 réalisations.

Comme précédemment, on observe que l'estimateur $\hat{\text{Var}} \mu(v)$ décroît lentement avant de rejoindre l'asymptote pour des sous-échantillons dont la surface est de l'ordre de cent fois la surface moyenne des motifs. La variance globale $\text{Var} \mu(V, v) = |v|/|V| \cdot \text{Var} \mu(v)$ de l'estimateur de la moyenne à l'échelle $|V|$ des données, effectuée à partir de blocs de taille $|v|$ est présentée ci-dessous :

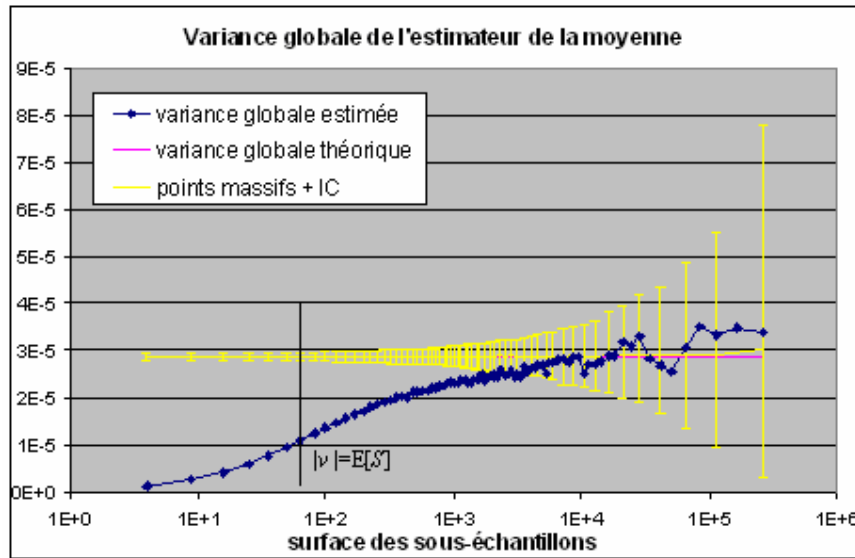


Figure 3.8 : Variance globale de l'estimateur de la moyenne.

Les barres d'erreurs correspondent ici aux intervalles de confiance à 95% construits à partir de 1000 réalisations indépendantes du processus sur une fenêtre carrée de 1024 pixels de côté. Pour des raisons de rapidité de calcul, ces intervalles de confiance sont construits sur une transformation du processus, en remplaçant les motifs par des points pondérés par la surface du motif. On observe que le fait de remplacer les motifs par des points massifs permet de corriger le biais sur l'estimation de la variance globale à partir des petits blocs. On en déduit que les corrélations spatiales du processus tendent à

biaiser l'estimation de la variance globale pour des petits blocs, tandis qu'en utilisant des sous-échantillons de plus en plus grands, on obtient une mesure de moins en moins biaisée mais dont la variance augmente.

3.1.4 Autres distributions

3.1.4.1 Distribution à deux échelles

Dans cette partie, nous cherchons à estimer l'influence d'un regroupement des motifs sur deux échelles. Nous considérons donc un processus de points agrégé pour le placement des centres des motifs. Nous utilisons un processus de type Neyman-Scott, tel que défini dans la section 2.2.4.1. L'intensité des points pères est notée λ_1 . Les agrégats sont des ensembles aléatoires bornés de surface (mesure de Lebesgue) aléatoire S_1 d'espérance $E[S_1]$ et de variance $Var[S_1]$. Les points fils sont distribués uniformément dans les agrégats avec une intensité λ_2 . Finalement, on associe des motifs (ensembles) aléatoires bornés de surface S_2 d'espérance $E[S_2]$ et de variance $Var[S_2]$.

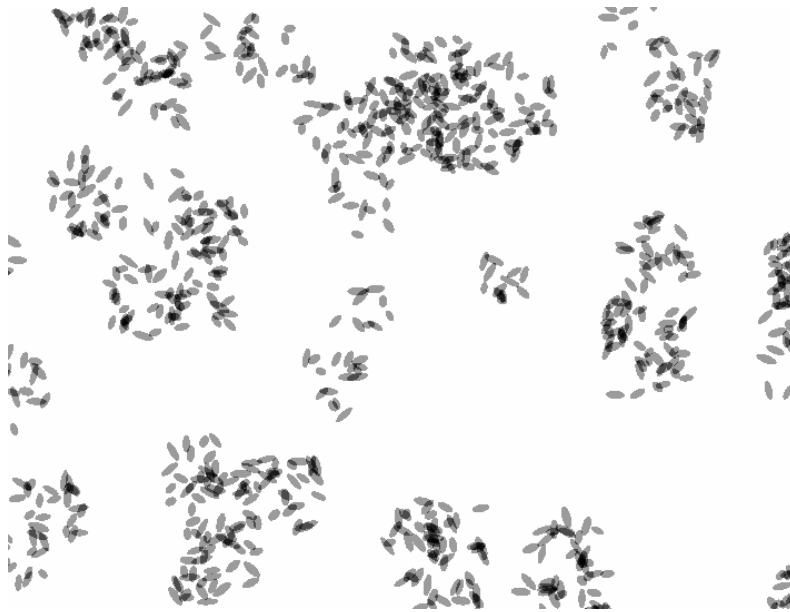


Figure 3.9 : Processus d'objets à deux échelles. Les agrégats et les motifs sont des ellipses dont les paramètres sont aléatoires.

Un tel processus présente deux échelles caractéristiques : l'échelle des motifs, et l'échelle des agrégats. Par rapport aux résultats obtenus précédemment en section 3.1.2, la variance d'estimation $Var \mu(v)$ devrait présenter des comportements particuliers lorsque les sous-échantillons sont du même ordre de grandeur que les échelles caractéristiques du processus, mais elle devrait atteindre un comportement stable lorsque les sous-échantillons sont beaucoup plus grands que la surface moyenne des agrégats. On va ici étudier ce cas, qui permet de négliger les effets de bords. On suppose toujours l'indépendance entre l'ensemble des différentes variables aléatoires considérées dans le processus.

Le nombre d'agrégats sur v est distribué selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1|v|$. Si $S_1(i)$ est la surface du i -ème agrégat, la somme des surfaces des agrégats S_{ag} visibles sur v est donc égale à :

$$S_{ag} = \sum_{i=1}^{N_{ag}} S_1(i) \quad (3.22)$$

Son espérance et sa variance peuvent être facilement calculées :

$$\begin{aligned} E[S_{ag}] &= E[N_{ag}]E[S_1] = \lambda_1|v|E[S_1] \\ Var[S_{ag}] &= Var[N_{ag}]E[S_1]^2 + E[N_{ag}]Var[S_1] = \lambda_1|v|E[S_1^2] \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'espérance et la variance du nombre total N de motifs sur v sont alors :

$$\begin{aligned} E[N] &= E[S_{ag}] \lambda_2 \\ Var[N] &= Var[S_{ag}] \lambda_2^2 + E[S_{ag}] \lambda_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

On en déduit la surface totale occupée par les motifs, notamment son espérance et sa variance :

$$\begin{aligned} E[S] &= E[N]E[S_2] \\ Var[S] &= Var[N]E[S_2]^2 + E[N]Var[S_2] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Finalement, l'espérance et la variance de la mesure sont obtenues en divisant la surface totale occupée par les motifs par la surface de l'ensemble d'observation. Après simplifications, on obtient :

$$\begin{aligned} E\mu(v) &\underset{|v| \rightarrow \infty}{\sim} \lambda_1 E[S_1] \lambda_2 E[S_2] \\ Var\mu(v) &\underset{|v| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{|v|} \left(\lambda_2 E[S_1^2] E[S_2]^2 + E[S_1] E[S_2^2] \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le comportement général de la variance de l'estimateur de la moyenne $Var\mu(v)$, pour $|v|$ quelconque est plus difficile à obtenir que dans les exemples précédents. Cependant, au vu des calculs effectués précédemment, la variance doit décroître relativement lentement (moins vite que $1/|v|$) avant de rejoindre son asymptote théorique décrite par l'équation (3.26). Ceci est confirmé par simulation :

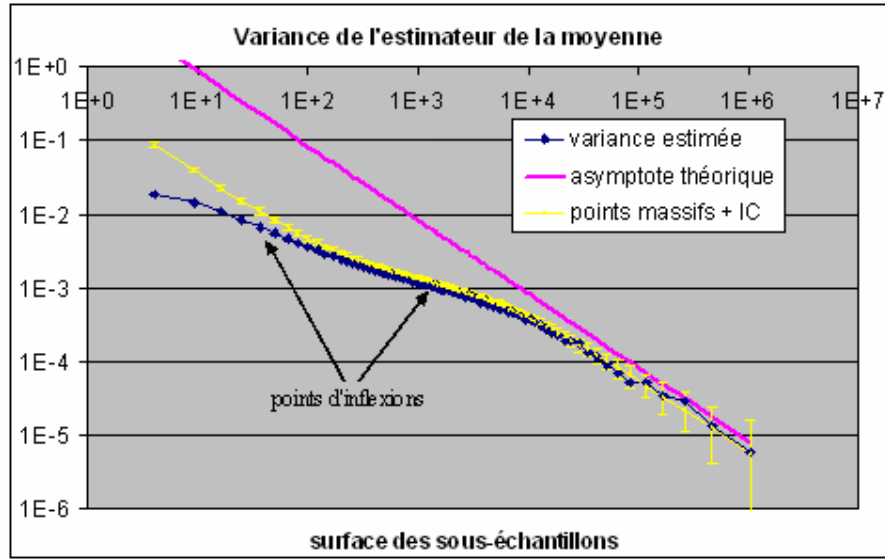


Figure 3.10 : Variance de l'estimateur de la moyenne d'un processus à deux échelles.

On remarque que la courbe présente un comportement plus complexe avec des points d'inflexions, dont deux sont repérés par des flèches. Les valeurs de $|v|$ correspondantes sont de l'ordre de la surface moyenne des motifs puis des agrégats. La zone de $Var \mu(v)$ comprise entre ces deux points d'inflexion correspond au mélange des influences des deux échelles sur la variance globale. La dernière courbe est construite à partir d'un processus de points marqués associé au processus d'objets, en marquant les points par la surface des motifs qu'ils portent. On constate qu'un seul des points d'inflexions subsiste, séparant les échelles plus petites et plus grandes que les agrégats.

3.1.4.2 Motifs sans recouvrements

En partant d'un processus de points de type Matérn régulier (section 2.2.4.2) et en associant aux points du processus des disques dont le diamètre est égal à la distance d'inhibition, on construit un processus de disques ne présentant pas de recouvrements.

Une autre méthode consiste à placer séquentiellement des motifs aléatoires de telle sorte qu'un nouveau motif, placé indépendamment des autres, n'est retenu que s'il ne présente aucune intersection avec un motif déjà accepté. Le procédé se termine lorsqu'un certain critère est atteint, comme une densité maximale fixée ou un certain nombre de tentatives de placement de motifs ont été effectuées.

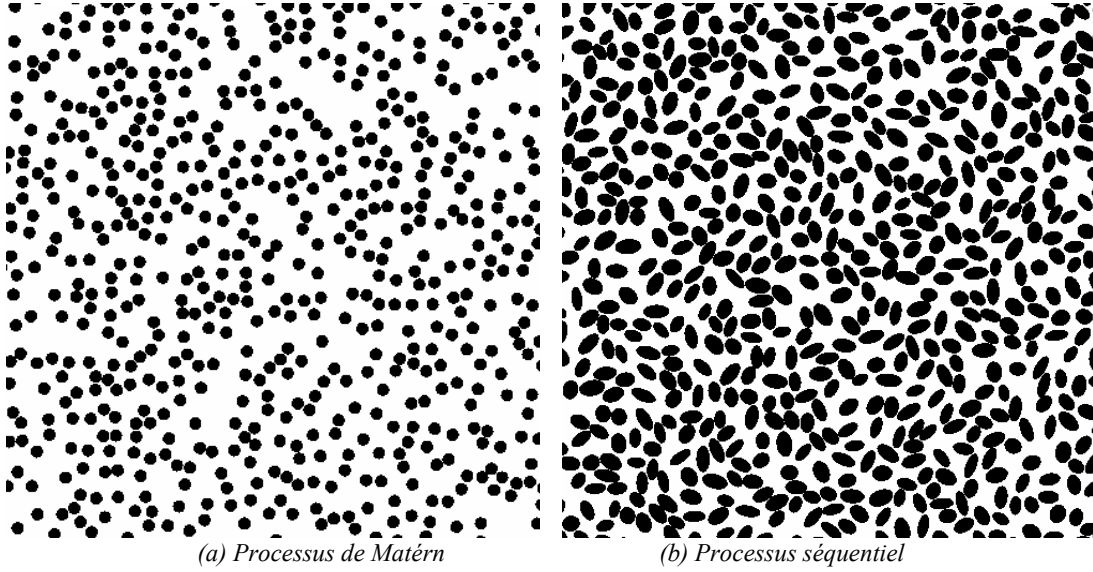


Figure 3.11 : Processus d'objets sans recouvrement.

Quelle que soit la méthode choisie, ce type de processus conduit à un arrangement relativement régulier des motifs. En particulier, le processus de point caractérisant le centre des motifs présente des corrélations négatives. En effectuant un certain nombre de réalisations de ces processus, on peut construire des intervalles de confiance sur les estimations de la variance de la mesure $Var \mu(v)$.

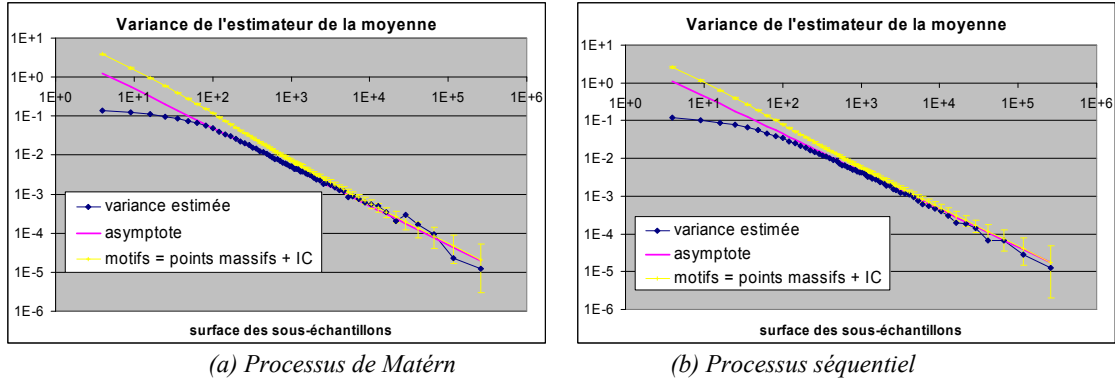


Figure 3.12 : Variance de l'estimateur de la moyenne.

Dans les deux cas, on remarque qu'en assimilant les motifs à des points massifs (marqués avec la surface du motif), la variance initiale est au-dessus de l'asymptote, contrairement à ce qui est observé sur des processus présentant des corrélations positives. L'asymptote est, dans les deux cas, une droite de pente (-1), c'est-à-dire que $Var \mu(v)$ se comporte asymptotiquement comme $1/|v|$.

3.1.4.3 Bilan sur les distributions d'objets

Nous avons étudié le comportement de la variance d'estimation de la moyenne en fonction de la taille des sous-échantillons. Dans les exemples envisagés ici, on obtient toujours une décroissance asymptotique (quand $|v|$ devient grand) de $Var \mu(v)$ en $1/|v|$. D'autre part, il est possible de diminuer

la complexité calculatoire de l'estimation en considérant un processus de points massifs formé par les positions des centres des motifs affectés de poids égaux à leurs surfaces. Notons tout de même qu'en pratique, la surface des objets présentant des intersections avec les bords de l'image sera sous-estimée.

Le comportement de l'estimateur de la variance aux petites échelles est néanmoins différent en fonction du type de distribution. Pour des processus de points de Poisson, la décroissance de $Var \mu(v)$ est régulière, ce qui est cohérent avec l'indépendance spatiale complète qu'offre ce processus. En revanche, pour un processus de points agrégés, $Var \mu(v)$ atteint son asymptote par valeurs inférieures. Ce résultat est dû à la présence de corrélations positives à petite échelle : pour $|v|$ petit, les mesures $\mu(v_k)$ sur des sous-échantillons proches sont corrélées, ce qui a pour effet de diminuer la variance. Au contraire, pour les processus de points réguliers, qui présentent des corrélations négatives, l'asymptote est atteinte par valeurs supérieures. Les mesures $\mu(v_k)$ sur des sous-échantillons proches ont donc tendance à différer sensiblement les unes des autres. Le fait de rajouter des motifs présentant une certaine extension spatiale aux points du processus a pour effet d'ajouter des corrélations à petite échelle (de l'ordre de la taille du motif).

Ces résultats sont également en accord avec l'équation générale de la variance (1.23) qui exprime la variance comme une forme intégrale de l'autocovariance :

$$Var \mu(V) = \frac{1}{|V|} \int_V K_v(\vec{h}) Cov(\vec{h}) d\vec{h} \quad (3.27)$$

Les distances pour lesquelles l'autocovariance est positive font donc logiquement ralentir la décroissance de $Var \mu(v)$ et inversement, des autocovariances négatives font accélérer la décroissance de $Var \mu(v)$. Quand la fenêtre v est suffisamment grande, l'intégrale devient quasiment indépendante de v et $Var \mu(v)$ suit alors son asymptote $\hat{\sigma}^2 A/|v|$.

Or l'estimation de $Var \mu(v)$ par $\hat{Var} \mu(v)$ ne requiert aucune modélisation ni aucun a priori sur les dépendances spatiales sur le processus étudié. La méthode de sous-échantillonnage par blocs permet donc d'estimer de façon non paramétrique l'évolution de la variance d'estimation de la moyenne en fonction de la taille des blocs. La variance d'estimation $Var \mu(V)$, peut être extrapolée en considérant le comportement asymptotique de $Var \mu(v)$, qui se comporte comme $1/|v|$ pour les processus étudiés dans cette section.

3.2 Estimateurs de la moyenne et de la variance d'une texture

L'estimateur de la variance d'une mesure par sous-échantillonnage par blocs, introduite en section 3.1 pour la mesure de la moyenne, constitue donc une alternative très intéressante aux méthodes paramétriques. Cependant, si cette méthode permet d'éviter le choix difficile d'un modèle, les

conditions d'extrapolation de la variance estimée $Var \mu(v)$ vers la variance recherchée $Var \mu(V)$ doivent être étudiées plus en détail. Pour ce faire, nous proposons ici une analyse systématique du comportement de la variance d'estimation pour les processus stationnaires à l'ordre 2, en nous basant sur la décomposition de Wold. En particulier, nous nous concentrons sur les variances d'estimation de la moyenne $\mu(V)$ et de la variance $\sigma^2(V)$ des niveaux de gris d'une texture.

3.2.1 Composantes élémentaires des textures

Le théorème de Wold [Fra93] stipule que tout processus aléatoire bidimensionnel stationnaire à l'ordre 2 peut se décomposer en trois types de composantes élémentaires : complètement non déterministe (CND), harmoniques et évanescents. Nous allons procéder ici à une étude théorique des variances $Var \mu(V)$ et $Var \sigma^2(V)$ pour les processus stationnaires à l'ordre 2, en suivant le cadre de la décomposition de Wold.

3.2.1.1 Processus complètement non déterministe

La portée intégrale A [Math78] est définie à partir de la variance d'estimation de la moyenne :

$$A = \lim_{V \rightarrow \mathbb{N}^2} |V| \frac{Var \mu(V)}{\sigma^2} \quad (3.28)$$

On rappelle que \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers et σ^2 la variance du processus aléatoire. Une définition plus simple est possible lorsque l'autocovariance est intégrable [Lan91] :

$$\lim_{V \rightarrow \mathbb{N}^2} \sum_{\vec{h}} Cov(\vec{h}) = \sigma^2 A < \infty \quad (3.29)$$

On note que cette condition est plus restrictive que la condition (1.10) de mélange fort exprimée en section 1.1.5, puisqu'elle impose une vitesse de décroissance de l'autocovariance suffisamment rapide pour assurer le caractère fini de son intégrale (ou de la somme discrète). Dans tous les cas où la portée intégrale A est finie et non nulle, la variance de l'estimateur de la moyenne se comporte asymptotiquement de la façon suivante :

$$Var \mu(V) \xrightarrow{V \rightarrow \mathbb{N}^2} \frac{\sigma^2 A}{|V|} \quad (3.30)$$

Il existe évidemment des processus stationnaires pour lesquels la portée intégrale A est infinie ou nulle [Lan91], voire non définie. Le calcul du comportement asymptotique de la variance d'estimation de la moyenne est alors plus complexe. Néanmoins, les simulations indiquent que la décroissance de la variance est moins rapide que $|V|^{-1}$ si A est infinie, et plus rapide si $A=0$.

Les cas où la portée intégrale est nulle ne sont pas trop problématiques, puisque la variance décroît alors très rapidement. Un modèle simple d'un tel processus est proposé dans [Lan91] sous la forme

d'une fonction de dilution : un processus de points de Poisson est convolué avec une fonction f à support borné et d'intégrale nulle. L'autocovariance de ce processus est alors égale à la convolution de f par elle-même, dont l'intégrale est également nulle. Une réalisation d'un tel processus est proposée en Figure 3.13 :

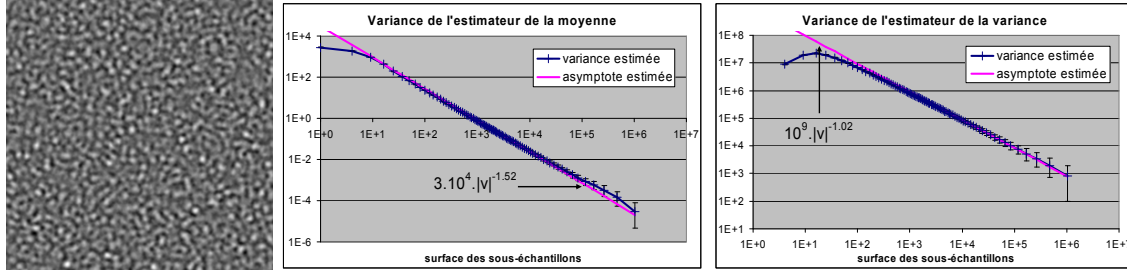


Figure 3.13 : Exemple de processus à portée intégrale nulle : fonction de dilution (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne (milieu), variance de l'estimateur de la variance (droite).

Nous verrons par la suite que les processus harmoniques et évanescents présentent une portée intégrale nulle, bien que leur autocovariance ne soit pas intégrable.

En revanche, les processus à portée intégrale infinie, également appelés processus à mémoire longue [Bera94], sont plus problématiques. Lantuéjoul [Lan91] décrit un exemple et propose des illustrations d'un tel processus, à l'aide d'un modèle de fonction de substitution.

Il apparaît que ce type de processus n'est pas considéré comme homogène dans la littérature. Par exemple dans [Sha04], les processus présentant une décroissance sous la forme $|V|^{-\alpha}$ avec $\alpha < 1$ sont qualifiés d'hétérogènes. Le paramètre α étant alors utilisé pour caractériser le degré d'hétérogénéité du processus.

On notera néanmoins que la décroissance de $Var \mu(V)$ ne suit pas forcément une loi hyperbolique. A titre d'exemple, considérons un processus 1-D stationnaire dont l'autocovariance s'écrit : $Cov(h) = 1/(1 + |h|)$. En utilisant l'équation (1.23) faisant intervenir le covariogramme géométrique de la fenêtre d'observation, on peut montrer que la variance d'estimation de la moyenne se comporte comme $Var \mu(V) \sim \ln(1 + |V|)|V|^{-1}$. Quoiqu'il en soit, la variance d'estimation de la moyenne décroît tout de même plus lentement que $|V|^{-1}$, et ce processus ne sera pas considéré comme homogène.

Dans le cas de l'estimateur de la variance, nous avons obtenu une équation générale (1.30) faisant intervenir les autocorrélations d'ordre 4. Dans le cas d'un processus i.i.d., cette équation se simplifie sous une forme équivalente à $K|V|^{-1}$, avec une constante $K > 0$. Dans le cas d'un processus fortement mélangeant, les dépendances (et donc les corrélations d'ordre 2 et 4) s'annulent à grande distance. Pour l'estimateur de la moyenne, considérer les cas pour lesquels la portée intégrale est infinie revient à imposer une certaine vitesse sur la décroissance des dépendances. En procédant de même dans le cas

de l'estimateur de la variance, c'est-à-dire en ne considérant que des processus aléatoires dont les dépendances décroissent suffisamment vite, on obtient le même rythme de décroissance asymptotique en $|V|^{-1}$.

Ces rythmes de décroissance en $|V|^{-1}$ pour les variances des estimateurs de la moyenne et de la variance sont confirmés par simulation sur des processus synthétiques autorégressifs, comme l'illustre la Figure 3.14 :

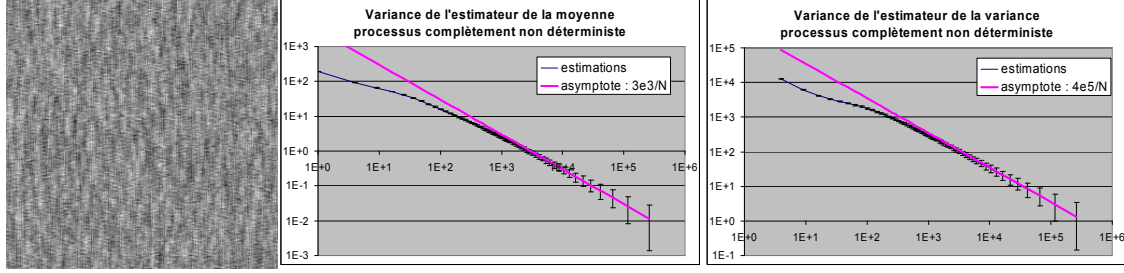


Figure 3.14 : Réalisation d'un processus CND autorégressifs (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne (milieu), variance de l'estimateur de la variance (droite).

L'image de gauche (Figure 3.14) est une réalisation d'un processus aléatoire autorégressif bidimensionnel. Les deux graphiques indiquent, en échelle log-log, la variance de l'estimateur de la moyenne (au milieu) et de l'estimateur de la variance (à droite) en fonction de la taille des sous-échantillons. Les barres d'erreurs indiquent les intervalles de confiance à 95% pour l'estimation des variances $Var \mu(V)$ et $Var \sigma^2(V)$, calculés sur 1000 réalisations du processus aléatoire étudié.

3.2.1.2 Processus harmonique

Notons L et H les longueurs des côtés de la fenêtre rectangulaire V . Un modèle courant de processus harmonique est le suivant :

$$Z(u, v) = a \cdot \cos(2\pi(f_L u + f_H v) + \varphi) + b \cdot \sin(2\pi(f_L u + f_H v) + \varphi) \quad (3.31)$$

où la phase φ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$, tandis que les amplitudes a et b ainsi que les fréquences horizontale f_L et verticale f_H sont des paramètres constants.

On remarque que sur les processus harmoniques, l'autocovariance est une fonction cosinus 2-D. Cependant, un calcul direct de la variance d'estimation est possible. Nous avons effectué les calculs théoriques sur une variante simplifiée :

$$Z(u, v) = a \cdot \sin(2\pi(f_L u + f_H v) + \varphi) \quad (3.32)$$

où la phase φ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$, et où l'amplitude a et les fréquences horizontale f_L et verticale f_H sont des paramètres constants.

La variance de l'estimateur de la moyenne peut alors s'écrire :

$$\text{Var } \mu(V) = \frac{a^2 \sin(\pi f_L L)^2 \sin(\pi f_H H)^2}{2 \sin(\pi f_L)^2 \sin(\pi f_H)^2 (LH)^2} \quad (3.33)$$

Le produit $LH = |V|$ est égal au nombre total de pixels. On observe ainsi une décroissance asymptotique de la variance en $|V|^{-2}$, soit à un rythme beaucoup plus rapide que pour les processus étudiés jusqu'ici, à moins que l'une des fréquences f_L ou f_H ne soit nulle, auquel cas on obtient une décroissance en $|V|^{-1}$. Remarquons que, dans le cas d'un processus harmonique oblique, selon la définition générale (3.28), la portée intégrale est nulle. En revanche, pour un processus harmonique horizontal ou vertical, la portée intégrale n'est pas définie.

On montre également que la variance de l'estimateur de la variance $\text{Var } \sigma^2(V)$ s'exprime sous la forme :

$$\text{Var } \sigma^2(N) = \frac{a^4 \sin(2\pi f_L L)^2 \sin(2\pi f_H H)^2}{8 \sin(2\pi f_L)^2 \sin(2\pi f_H)^2 (LH)^2} + o\left(\frac{1}{(LH)^2}\right) \quad (3.34)$$

La décroissance de la variance en fonction de la taille de la fenêtre d'observation se fait donc au même rythme pour les estimateurs de la moyenne et de la variance ($|V|^{-2}$ dans le cas oblique $f_L \neq 0, f_H \neq 0$, $|V|^{-1}$ sinon).

On remarque les termes oscillants au numérateur, qui indiquent que la variance s'annule périodiquement en fonction des valeurs respectives des fréquences f_L et f_H , et des côtés de la fenêtre. Ces importantes fluctuations de la variance sont des phénomènes très fréquents lorsque des phénomènes périodiques sont en jeu, traduisant des interférences entre les périodicités du processus et la fenêtre d'observation.

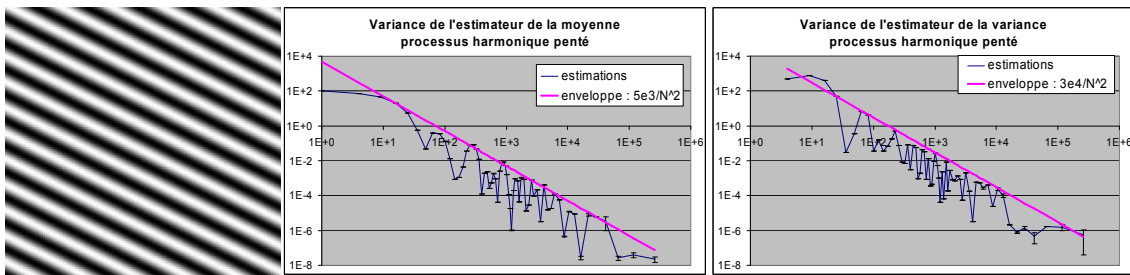


Figure 3.15 : Réalisation d'un processus harmonique oblique (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne (milieu), variance de l'estimateur de la variance (droite).

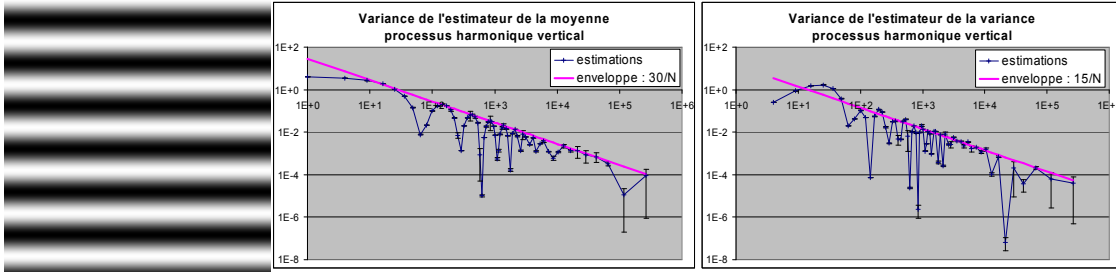


Figure 3.16 : Réalisation d'un processus harmonique vertical (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne (milieu), variance de l'estimateur de la variance (droite).

On distingue bien les oscillations de la variance de chacun des estimateurs sur les différentes courbes proposées en Figure 3.15 et Figure 3.16. Une meilleure résolution de la courbe est atteignable en multipliant les tailles des sous-échantillons pour lesquels la variance est évaluée, mais au prix d'un temps de calcul accru. Les courbes labellisées 'enveloppe' correspondent à la décroissance asymptotique théorique des maxima locaux.

3.2.1.3 Processus évanescent

Un processus évanescent est une combinaison de deux processus unidimensionnels orthogonaux. Si l'on note $\theta = \tan(\alpha/\beta)$ la direction de l'un de ces processus, un modèle courant de processus évanescent peut s'écrire :

$$Z(u, v) = R(\alpha u + \beta v) \sin(2\pi(\beta u - \alpha v)f) + S(\alpha u + \beta v) \cos(2\pi(\beta u - \alpha v)f) \quad (3.35)$$

où R et S sont des processus complètement non déterministes unidimensionnels (potentiellement dépendants), généralement modélisés par des processus AR, et la fréquence f est une constante.

Afin de simplifier les calculs théoriques, nous avons considéré la variante suivante du modèle afin de mener un calcul direct de la variance d'estimation :

$$Z(u, v) = T(\alpha u + \beta v) \sin(2\pi(\beta u - \alpha v)f + \varphi(\alpha u + \beta v)) \quad (3.36)$$

où T est un processus complètement non déterministe unidimensionnel, orthogonal à un processus harmonique de fréquence f constante et de phase aléatoire φ indépendante de T . Ces deux modèles ne sont pas équivalents, notamment du fait de l'indépendance supposée entre les processus T et φ . Cependant, la variante proposée semble effectivement présenter un spectre singulier, ayant un support de dimension 1, conformément à la définition d'un processus évanescent.

Nous avons mené des calculs théoriques dans le cas où T et φ sont des bruits blancs indépendants distribués respectivement selon une loi gaussienne de moyenne μ_0 et de variance σ_0^2 , et une distribution uniforme sur $[0, 2\pi]$. De plus, on a considéré $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. Les expressions de la variance des estimateurs de la moyenne et de la variance sont alors :

$$\begin{aligned} \text{Var } \mu(V) &= \frac{(\sigma_0^2 + \mu_0^2) \sin(\pi f H)^2}{2 \sin(\pi f)^2 L H^2} \\ \text{Var } \sigma^2(V) &= \frac{\sigma_0^2 (\sigma_0^2 + 2\mu_0^2)}{2L} + o\left(\frac{1}{LH}\right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Les démonstrations correspondantes sont fournies en annexe C.2. Dans le cas d'une fenêtre d'observation carrée, avec $L = H = |V|^{1/2}$, la décroissance asymptotique de la variance $\text{Var } \mu(|V|)$ est donc aussi rapide que $|V|^{-3/2}$, et $\text{Var } \sigma^2(|V|)$ décroît comme $|V|^{-1/2}$. On remarque que la portée intégrale est nulle.

Des simulations ont été menées afin d'évaluer les comportements asymptotiques des estimateurs dans des cas plus généraux, notamment celui des processus suivant strictement la définition (3.35). Il apparaît que l'utilisation de processus corrélés pour la partie aléatoire ne modifie pas le comportement asymptotique des estimateurs. L'orientation définie par α et β n'a pas non plus d'influence particulière sur la vitesse de décroissance des variances d'estimation. Une illustration des résultats expérimentaux est fournie en Figure 3.17 :

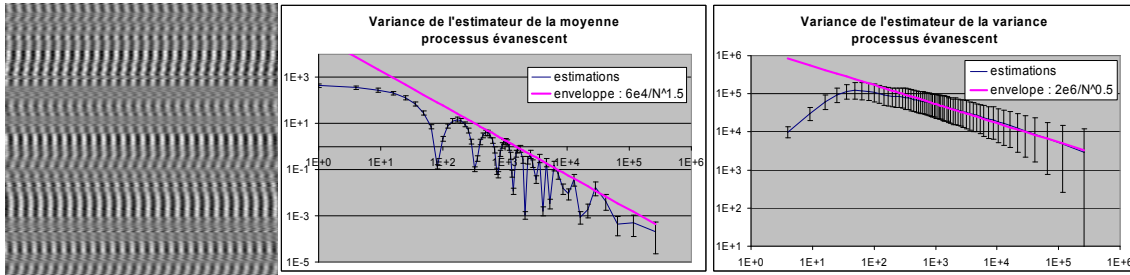


Figure 3.17 : Réalisation d'un processus évanescent (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne (milieu), variance de l'estimateur de la variance (droite).

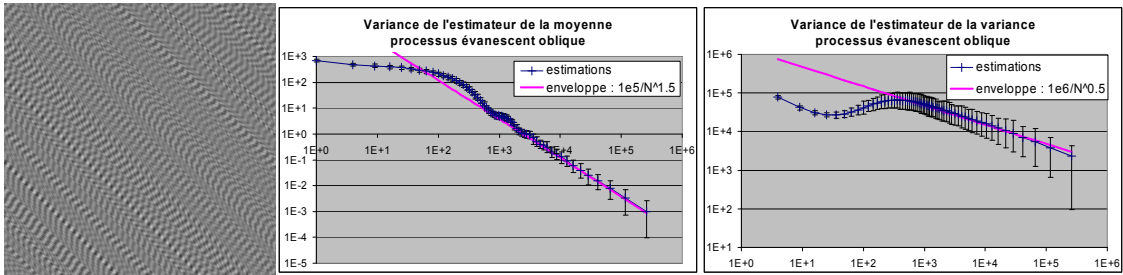


Figure 3.18 : Réalisation d'un processus évanescent oblique (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne (milieu), variance de l'estimateur de la variance (droite).

Comme pour les figures précédentes, nous avons tracé la moyenne des estimations sur 1000 réalisations, les barres d'erreurs indiquant les intervalles de confiance à 95%. Les courbes enveloppes indiquent le comportement de la décroissance des estimateurs quand les sous-échantillons deviennent grands. On constate à nouveau d'importantes fluctuations pour la variance de l'estimateur de la moyenne, liées à la présence de la composante périodique dans le processus évanescent. Ces fluctuations de la variance d'estimation de la moyenne sont marquées surtout si l'orientation est

horizontale ou verticale, mais ont tendance à s'estomper selon les orientations. Pour ces figures, les enveloppes (comportement asymptotique) ont été ajustées manuellement, dans le but de comparer les vitesses de décroissance des variances d'estimations avec les vitesses théoriques établies.

3.2.2 Bilan sur la décomposition de Wold

L'étude théorique des processus aléatoires stationnaires (hors processus à mémoire longue), à travers la décomposition de Wold, indique une certaine variété dans le rythme de décroissance asymptotique de la variance des estimateurs en fonction de la taille de la fenêtre d'analyse [Bla07]. Cependant, tous les processus étudiés présentent une décroissance asymptotique régulière en loi de puissance, dont un bilan est dressé ci-dessous :

Type de processus	Décroissance de $Var \mu(V)$	Décroissance de $Var \sigma^2(V)$
CND	$ V ^{-1} \quad (0 < A < \infty)$	$ V ^{-1}$
Harmonique (vertical)	$ V ^{-1} \quad (A \text{ indéfinie})$	$ V ^{-1}$
Harmonique (oblique)	$ V ^{-2} \quad (A = 0)$	$ V ^{-2}$
Evanescent	$ V ^{-1.5} \quad (A = 0)$	$ V ^{-0.5}$

Figure 3.19 : Vitesse de décroissance de la variance des estimateurs de la moyenne et de la variance pour les composantes d'un processus stationnaire. Dans le cas de la variance d'estimation de la moyenne, la portée intégrale est indiquée entre parenthèses.

Ainsi, pour les différents types de composantes stationnaires retenues, c'est-à-dire ne présentant pas de phénomènes de mémoire longue, les variances des estimateurs de la moyenne et de la variance se présentent sous la forme asymptotique $\sigma_\infty |V|^{-\alpha}$, lorsque $V \rightarrow \mathbb{N}^2$. Le terme σ_∞ représente la variance asymptotique, et α la vitesse de décroissance, $|V|$ désignant la taille de l'image.

Il apparaît également que, pour les composantes de types harmoniques et évanescentes, la variance d'estimation de la moyenne ne décroît pas de façon monotone, allant même jusqu'à s'annuler régulièrement. Ces processus ne satisfont pas non plus aux conditions de mélange puisque les dépendances spatiales persistent à grande distance. Notamment, le théorème central limite ne fonctionne plus pour ces processus. Ces processus font notamment office de contre-exemples dans les problèmes de changement de support en géostatistique [Lan88].

Selon la décomposition de Wold, un processus aléatoire stationnaire se décompose comme la somme de composantes indépendantes. Nous considérons ci-dessous la somme $Z = X + Y$ de deux composantes X et Y indépendantes, mais les remarques suivantes se généralisent à la somme d'un nombre fini de composantes.

Concernant l'estimateur de la moyenne, il est clair que l'on a :

$$\begin{aligned} E \mu_{X+Y}(V) &= E \mu_X(V) + E \mu_Y(V) \\ Var \mu_{X+Y}(V) &= Var \mu_X(V) + Var \mu_Y(V) \end{aligned} \quad (3.38)$$

C'est-à-dire que pour le processus aléatoire Z , la vitesse de décroissance de l'estimateur de sa moyenne admet une vitesse de décroissance asymptotique égale à celle de la composante ayant le rythme de décroissance le plus lent. Dans tous les cas, cette vitesse asymptotique de décroissance sera au moins aussi rapide que $|V|^{-1}$.

Dans le cas de l'estimateur de la variance, on montre facilement que :

$$E \sigma_{X+Y}^2(V) = E \sigma_X^2(V) + E \sigma_Y^2(V) \quad (3.39)$$

En revanche, la variance de cet estimateur peut s'exprimer :

$$Var \sigma_{X+Y}^2(V) = Var \sigma_X^2(V) + Var \sigma_Y^2(V) + \frac{4}{(|V|-1)^2} \sum_{i,j} Cov_X(i,j) Cov_Y(i,j) \quad (3.40)$$

On peut montrer que le dernier terme décroît au moins à la même vitesse que $Var \mu_X(V)$ ou $Var \mu_Y(V)$ (celui présentant la décroissance la plus lente). Etant donné les vitesses de décroissance possibles pour les différents types de processus, $Var \sigma_{X+Y}^2(V)$ aura la même vitesse de décroissance que la composante présentant la vitesse la plus lente.

En conclusion, la variance de l'estimateur de la moyenne aura une décroissance au moins aussi rapide que $|V|^{-1}$, et la variance de l'estimateur de la variance diminuera au moins en $|V|^{-0.5}$.

En tout état de cause, la vitesse de décroissance de la variance de l'estimateur étudié dépend du type de processus analysé. Dans l'objectif de construire un intervalle de confiance sur la mesure de la moyenne (resp. de la variance) effectuée à partir des seules données disponibles, il est donc nécessaire d'estimer le régime asymptotique de $Var \mu(V)$ (resp. $Var \sigma^2(V)$), c'est-à-dire la variance asymptotique et la vitesse de décroissance.

3.3 Homogénéité de la moyenne et de la variance d'une texture

3.3.1 Critères proposés pour l'homogénéité

Pour satisfaire à la définition que nous avons retenue pour une texture, celle-ci doit posséder la propriété d'homogénéité. Cependant, cette notion est relativement vague, et de nombreuses définitions de l'homogénéité ont été proposées (e.g. Gagalowicz [Gag83]). Les exemples qui suivent vont permettre de préciser le sens que nous attribuons ici aux termes 'homogène' et 'homogénéité'.

Nous avons établi dans la section 3.2 des vitesses de décroissance théoriques pour une large classe de processus stationnaires, donc susceptibles de produire des images homogènes pourvu que la fenêtre d'observation soit suffisamment grande pour représenter la structuration spatiale du processus.

Au vu des résultats théoriques établis ci-dessus, nous définissons l'homogénéité d'un paramètre statistique θ au sein d'une donnée par le comportement de la variance $Var \theta(v)$ de son estimation sur des sous-échantillons de taille $|v|$. En particulier, la décroissance de la variance $Var \theta(v)$ pour $|v|$ croissant doit être suffisamment rapide, au regard du critère théorique relatif à la statistique θ . Nous avons établi ce critère pour les estimateurs de la moyenne et de la variance.

Statistique θ	Moyenne	Variance
Vitesse minimale de décroissance asymptotique de $\hat{Var} \theta(v)$	$ v ^{-1}$	$ v ^{-1/2}$

Figure 3.20 : Critère d'homogénéité de la moyenne et de la variance.

En pratique, considérant les incertitudes d'estimation de $\hat{Var} \theta(v)$, une légère tolérance peut être envisagée pour des vitesses estimées légèrement plus lentes que ces critères. On pourra ainsi, en fonction du contexte, considérer comme homogènes des images fournissant une vitesse de décroissance estimée légèrement plus faible que celle indiquée ci-dessus.

Nous insistons ici sur le fait que la définition retenue pour l'homogénéité s'applique à une image déterministe, le terme de stationnarité étant une propriété mathématique, strictement définie, réservée aux processus aléatoires. Une image répondant aux critères que nous avons énoncés pour l'homogénéité peut être issue d'un processus aléatoire non stationnaire. Inversement une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire peut former une image ne répondant pas aux critères d'homogénéité, par exemple si la fenêtre d'observation est trop petite pour capturer les dépendances spatiales au sein du processus, ou si le processus est tel qu'aucune taille de fenêtre ne permet d'obtenir un échantillon représentatif (processus à mémoire longue).

Quelques tests de la stationnarité à l'ordre 2 ont été proposés dans la littérature, basés sur la structure de la matrice de covariance [Bos96], sur des méthodes spectrales [Eph01], ou sur la distribution asymptotique d'un périodogramme local [Fue05]. Les critères proposés ici ne constituent pas des tests statistiques, mais ont néanmoins l'avantage d'être parfaitement adaptés aux statistiques d'intérêt. En effet, la stationnarité à l'ordre 2 est plus restrictive que la stationnarité de la moyenne, et n'est pas indispensable pour son inférence.

3.3.2 Détermination du comportement asymptotique

Avant d'appliquer les critères d'homogénéité définis ci-dessus, il convient de disposer d'une méthode pratique la plus objective possible pour estimer la vitesse de décroissance asymptotique de l'estimateur $\hat{Var} \theta(v)$.

De manière générale, lorsque le processus aléatoire dont sont issues les données est inconnu, les calculs théoriques reliant la variance de l'estimateur considéré et la surface des sous-échantillons ne sont pas possibles. En revanche, pour de larges classes de processus stationnaires, cette fonction tend vers une asymptote de la forme $\sigma_\infty |v|^{-\alpha}$, où σ_∞ est la variance asymptotique et α une vitesse de convergence.

Cette asymptote (si elle existe) permet d'établir la fiabilité de la mesure effectuée. A l'instar des tests statistiques, l'existence de l'asymptote vérifiant les critères ci-dessus indique que l'hypothèse de stationnarité ne peut être rejetée et valide donc par défaut les mesures effectuées. Il est donc intéressant de pouvoir déterminer automatiquement les paramètres de cette asymptote, c'est-à-dire d'estimer la vitesse de décroissance et de la variance asymptotique.

Bertail et al. [Bert99] considèrent la statistique normalisée $\tau_n(T_n - \theta)$, où T_n est un estimateur consistant du paramètre θ calculé à partir de n échantillons, avec une vitesse de convergence τ_n inconnue. Leur article propose une estimation de cette vitesse de convergence en utilisant à la fois différentes tailles de blocs, mais aussi les quantiles de la distribution empirique de $(T_n - \theta)$ estimée sur les sous-échantillons. Il est clair que si la vitesse de convergence est τ_n , la vitesse de décroissance de la variance de l'estimateur $Var\theta(v)$ est équivalente à τ_n^{-2} . Dans tous les cas, les courbes empiriques présentent les mêmes problèmes. D'une part, les points correspondant aux petits échantillons sont théoriquement inutilisables pour qualifier le comportement asymptotique, comme il a déjà été présenté en section 3.1.2. D'autre part, les points utilisables, correspondant aux grands sous-échantillons, présentent une forte variance relative. Finalement, la distinction entre les points utilisables ou non est difficile à réaliser.

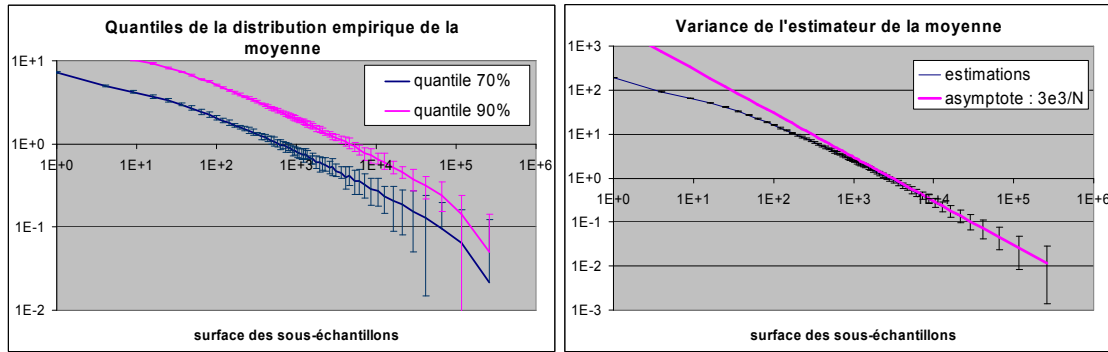


Figure 3.21 : Décroissance des quantiles de la distribution empirique de la moyenne (gauche) et de sa variance (droite). Valeurs moyennes et intervalles de confiance.

Afin d'évaluer automatiquement le régime asymptotique de $Var\theta(v)$, il convient de réaliser une régression. Une solution consiste à écarter les premiers points de la courbe lors de la régression, c'est-à-dire les points présentant un fort biais. Dans certains cas, on peut utiliser une estimation de la portée intégrale A . Cependant, la portée intégrale est nulle dans le cas de processus harmoniques ou

évanescents, et cette approche ne constitue donc pas une solution générale. Par la suite, le choix des points à écarter sera effectué manuellement, en se basant sur l'allure des courbes.

Lors de l'estimation de $Var \theta(v)$, la variance d'estimation augmente avec la surface $|v|$ des sous-échantillons. Nous proposons donc de pondérer l'influence des points de mesures en fonction de leur variance d'estimation, qui est proportionnelle au nombre n de blocs utilisés pour l'estimation de $Var \theta(v)$. Nous ajustons alors un modèle de loi de puissance aux derniers points de la courbe $Var \theta(v)$ par une méthode de moindres carrés pondérés. On peut par exemple, pour chaque point de la courbe (c'est-à-dire pour chaque valeur de $|v|$), pondérer l'erreur quadratique entre le modèle (une loi de puissance) et la courbe estimée par le nombre de blocs utilisés. On minimise finalement la somme des erreurs pondérées pour estimer les paramètres du modèle, qui sont directement la variance asymptotique et la vitesse de décroissance.

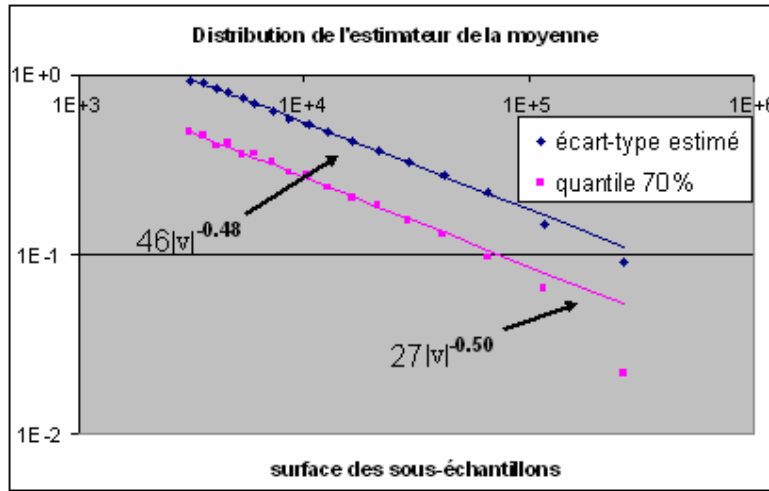


Figure 3.22 : Régression pondérée par rapport à la fiabilité des points.

La vitesse de décroissance estimée de l'asymptote est alors proche de la valeur attendue. On observe également que les résultats sont très similaires que l'on effectue la régression sur les quantiles de la distribution ou sur l'écart-type. L'estimation peut très probablement être rendue plus robuste en exploitant différents quantiles de la distribution, comme proposé par Bertail et al [Bert99].

3.3.3 Influence de la sélection des blocs

Jusqu'ici, les blocs ont toujours été choisis de telle sorte qu'ils ne se recouvrent pas entre eux. Ainsi, pour des blocs dont la surface $|v|$ est le quart de la surface $|V|$ de l'image originale (correspondant au dernier point estimé sur les courbes), on ne dispose que de quatre mesures pour la calcul de la variance d'estimation. Si l'on autorise des recouvrements entre les blocs, on peut augmenter leur nombre. On peut donc s'attendre à ce que la variance des points de mesures, c'est-à-dire la variance $Var \left[\hat{Var} \theta(v) \right]$, diminue.

Nous avons considéré différents types de sélection des blocs : un sous-échantillonnage périodique assurant un recouvrement de 50% entre deux blocs voisins, un sous-échantillonnage maximum pour lequel tous les blocs possibles de taille $|v|$ sont pris en compte (un algorithme récursif est alors fortement conseillé pour éviter que le temps de calcul ne devienne prohibitif), et un sous-échantillonnage aléatoire (aussi appelé *block-bootstrap*) où un nombre fixé de blocs de taille $|v|$ sont tirés uniformément dans l'image, indépendamment les uns des autres et avec remise.

Afin d'évaluer l'influence de ces différentes méthodes de sélection des blocs, nous procédons par simulations sur un modèle de texture synthétique. Pour chaque méthode, 500 réalisations indépendantes de la texture sont réalisées. Pour chaque réalisation, les variances $Var \mu(v)$ et $Var \sigma^2(v)$ sont estimées pour différentes taille de blocs. La Figure 3.23 présente la moyenne des 500 estimations de $Var \mu(v)$ et de $Var \sigma^2(v)$, obtenues à partir des 500 réalisations, pour les différentes méthodes de sélections considérées :

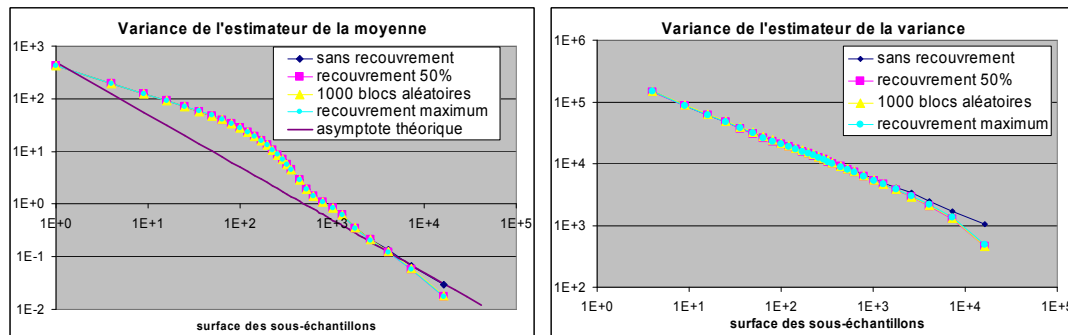


Figure 3.23 : Comparaison des différentes méthodes de sous-échantillonnage par blocs : blocs sans recouvrements, avec recouvrements de 50%, tirage de 1000 blocs aléatoires et prise en compte du nombre maximum de blocs différents. Chaque courbe est obtenue à partir de 500 réalisations d'une texture

Il apparaît que les différentes méthodes ont sensiblement la même moyenne pour de grandes gammes de tailles de blocs. Cependant, pour $|v|$ se rapprochant de $|V|$, il semble que les estimations obtenues avec des blocs recouvrants présentent une moyenne plus faible que celle obtenue avec des blocs disjoints.

La Figure 3.24 représente la moyenne des estimations de $Var \mu(v)$ sur 1000 réalisations d'un bruit blanc. Théoriquement, on doit observer une droite de pente -1.

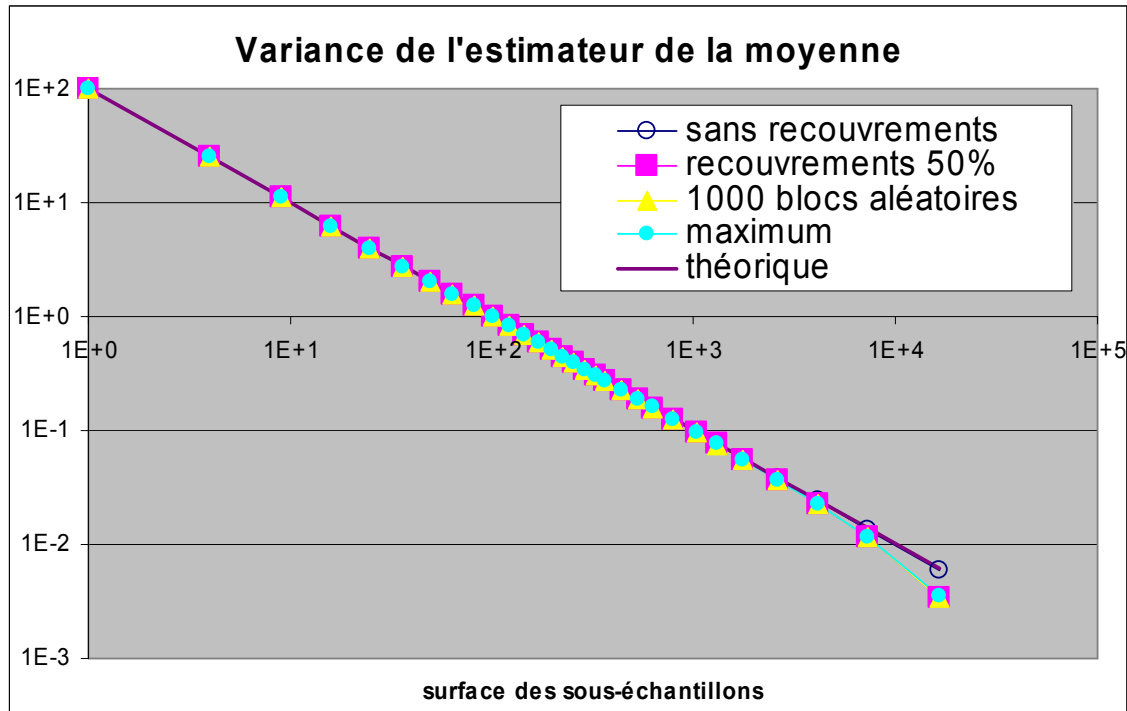


Figure 3.24 : Comparaison des variances d'estimations de la moyenne estimées à partir de différentes méthodes de sélection des sous-échantillons.

Il est clair que les sous-échantillonnages à blocs recouvrants présentent un biais lorsque la taille des blocs se rapproche de celle de l'image. L'origine de ce biais vient d'une inégalité dans la considération des points de l'image lors du calcul de la variance d'estimation. En effet, les points se trouvant sur les bords de l'image ont alors moins d'influence que ceux situés au centre de l'image. Ce phénomène est d'autant plus marqué que les blocs ont une taille importante, ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux.

Une solution pour éviter ces effets de bords pourrait consister à considérer l'image comme un tore, les bords droit et gauche (respectivement haut et bas) de l'image devenant adjacents. Cependant, ce type de correction posera certainement d'autres problèmes en présence de composantes harmoniques.

A partir des estimations effectuées sur les différentes réalisations, il est possible de construire des intervalles de confiance empiriques. Les largeurs des intervalles de confiance à 90% autour de $Var \mu(v)$ et $Var \sigma^2(v)$ estimés selon les différentes méthodes de sélection des blocs est indiquée en Figure 3.25 :

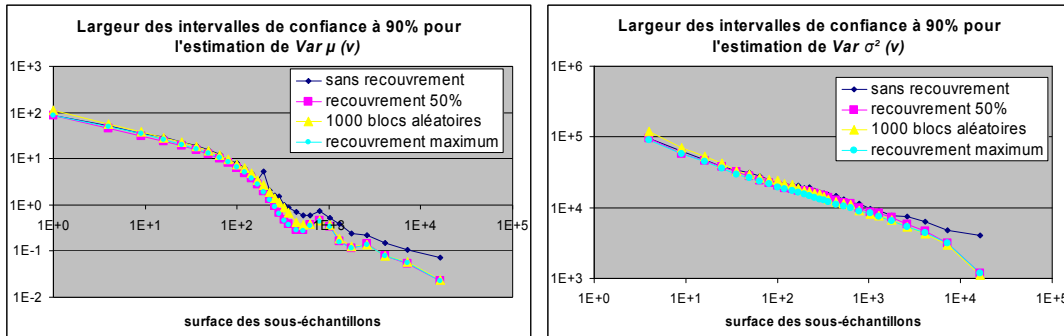


Figure 3.25 : Comparaison des largeurs des intervalles de confiance pour les différentes méthodes de sélection des blocs.

Les méthodes autorisant le recouvrement entre blocs semblent permettre une réduction significative de la largeur des intervalles de confiance par rapport à la méthode sans recouvrements. Cependant, elles ne présentent pas de différences significatives entre elles.

3.4 Evaluation des critères d'homogénéité

3.4.1 Application à des images synthétiques

L'utilisation de processus synthétiques permet de comparer les résultats empiriques, obtenus à partir d'une ou plusieurs réalisations, avec les résultats théoriques correspondants. Pour chaque processus étudié, nous avons calculé $\hat{Var} \mu(v)$ et $\hat{Var} \sigma^2(v)$ pour 1000 réalisations indépendantes. Les figures représentent la moyenne et les intervalles de confiance à 95% de ces estimations. Les asymptotes sont estimées par la méthode de régression pondérée présentée précédemment, en choisissant empiriquement la surface limite. Les paramètres des asymptotes, estimés à l'aide de l'algorithme présenté précédemment, sont indiqués directement sur les figures.

3.4.1.1 Processus stationnaire à l'ordre 2

La figure suivante présente un extrait d'une réalisation d'un processus aléatoire composé de la somme d'une composante complètement non déterministe autorégressive, de deux composantes harmoniques obliques et d'une composante évanescence. Par construction, il est clair que ce processus aléatoire est stationnaire. Pourvu que la taille de la fenêtre sur laquelle on génère des réalisations de ce processus soit suffisante, les variances des estimateurs de la moyenne et de la variance doivent respecter les vitesses de décroissance minimales définies dans le tableau Figure 3.19.

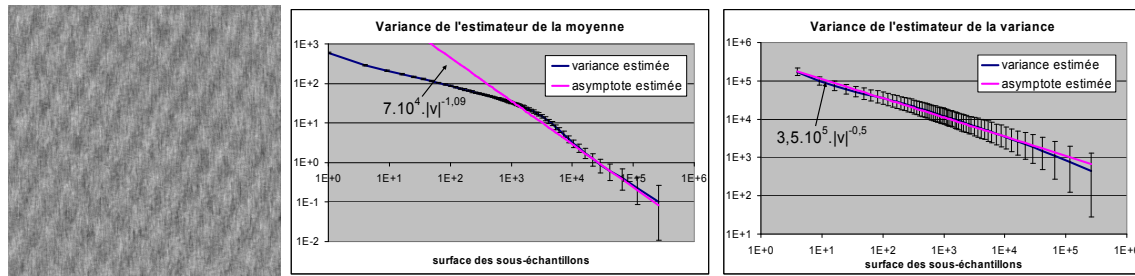


Figure 3.26 : Détail d'une réalisation d'un processus stationnaire (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 1.09 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.5 (droite)

La variance de l'estimateur de la moyenne présente une vitesse de décroissance de 1.09 très proche de la limite théorique. La variance de l'estimateur de la variance décroît à une vitesse très proche de la limite théorique de 0.5. Ces estimations des vitesses de décroissance des estimateurs de la moyenne et de la variance sont donc en accord avec le caractère stationnaire du processus aléatoire. Nous affirmons donc qu'une réalisation bornée du processus conduit à une image présentant une moyenne et une variance homogènes, au moins à l'échelle d'observation utilisée pour les réalisations.

3.4.1.2 Processus à moyenne non stationnaire

Nous présentons dans ce paragraphe deux types de non stationnarité de la moyenne : soit une tendance linéaire perturbant l'ensemble d'une texture stationnaire, soit une non stationnarité locale qui peut être considérée comme un défaut local de la texture. Pour illustration, la Figure 3.27 présente des exemples d'images permettant de visualiser les types de non stationnarité envisagée.

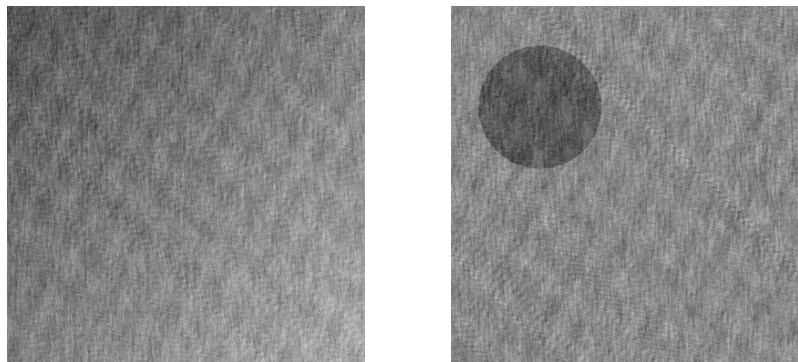


Figure 3.27 : Exemples de non stationnarités de la moyenne. Tendance linéaire (gauche) et défaut local (droite)

Les exemples traités ci-dessous présentent les mêmes caractéristiques, mais les perturbations considérées sont beaucoup moins énergétiques.

Notons qu'une extension de la méthode de sous-échantillonnage par bloc est proposée par Ekström et Sjöstedt-De Luna [Eks04], afin de l'adapter à un contexte de données légèrement non stationnaires.

3.4.1.2.2 Tendance linéaire

On considère ici un processus non stationnaire, toujours généré à partir du processus décrit en 3.4.1.1, mais en lui appliquant cette fois une perturbation additive dont les valeurs varient linéairement de -5 à +5 en allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit. A titre de comparaison, les valeurs des niveaux de gris de la texture initiale s'étalent sur un intervalle de l'ordre de -135 à +135. Il est clair que la moyenne n'est plus homogène, bien que cette inhomogénéité soit visuellement peu perceptible. En revanche, la perturbation ne devrait pas affecter significativement la variance empirique.

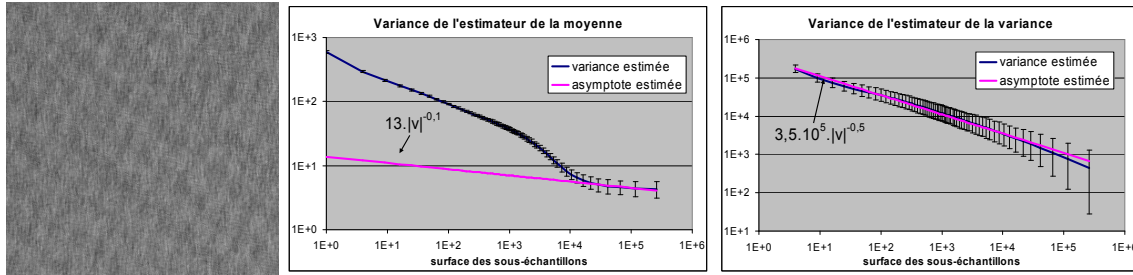


Figure 3.28 : Réalisation d'un processus stationnaire additionné avec une tendance linéaire (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 0.1 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.5 (droite).

Les courbes indiquent clairement que la moyenne n'est pas homogène puisque $\hat{Var} \mu(v)$ ne décroît que faiblement. En revanche, $\hat{Var} \sigma^2(v)$ est quasiment identique à celle du processus initial, avec une vitesse de décroissance suggérant que la variance σ^2 est homogène.

3.4.1.2.3 Non stationnarité locale

Considérons maintenant une non stationnarité locale sur la texture, obtenue en retranchant une valeur constante sur une zone fixée de la texture. Dans notre exemple, on retranche la valeur 5 (c'est à dire une valeur équivalent à moins de 2% de la dynamique de l'image) aux niveaux de gris des pixels à l'intérieur d'un disque en haut à gauche de la fenêtre. L'effet de cette non stationnarité est alors peu perceptible. Les résultats correspondants sont donnés en Figure 3.29 :

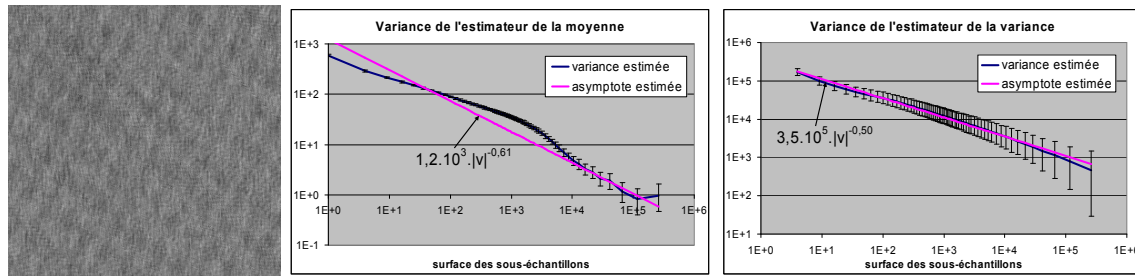


Figure 3.29 : Réalisation d'un processus présentant une non stationnarité locale de la moyenne (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 0.61 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.50 (droite).

La perturbation est très légèrement visible dans le coin supérieur gauche. On observe que la moyenne est effectivement identifiée comme inhomogène, avec une asymptote estimée en $|v|^{-0.6}$. En revanche, la perturbation n'a pas affecté l'estimateur de la variance.

3.4.1.3 Processus à variance non stationnaire

Nous procédons de même avec des non stationnarités affectant la variance de la texture. Comme précédemment, nous considérons une tendance linéaire et une non stationnarité locale, telle qu'illustré en Figure 3.30 :

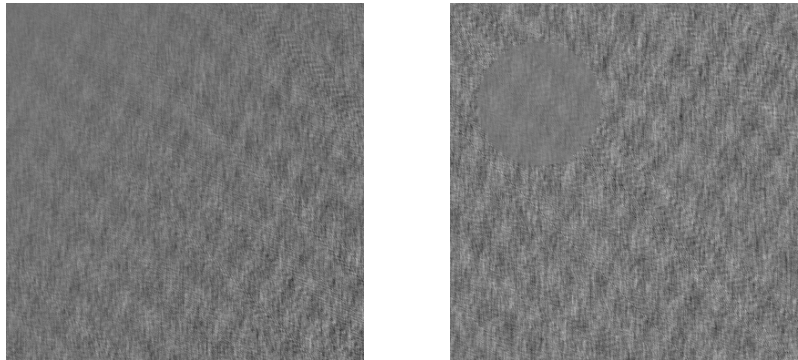


Figure 3.30 : Exemples de non stationnarités de la variance : tendance linéaire (gauche) défaut local (droite)

Les exemples traités ci-dessous présentent les mêmes caractéristiques, mais les perturbations considérées sont beaucoup moins énergétiques et donc beaucoup moins facilement perceptibles.

3.4.1.3.2 Tendance linéaire

Nous examinons ici un processus aléatoire dont seule la moyenne est stationnaire. Afin de générer un tel processus, nous avons modifié un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle (en l'occurrence, celui présenté dans la section précédente 3.4.1.1), en le multipliant par une perturbation déterministe. Cette perturbation est ici une dérive linéaire, dont les valeurs vont de 0.9 dans le coin supérieur gauche et atteignent la valeur 1.1 vers le coin inférieur droit. La moyenne étant nulle, elle n'est pas affectée par cette multiplication. En revanche, la variance est diminuée lorsqu'on multiplie le

processus par des valeurs inférieures à 1, et augmentée dans le cas contraire. Visuellement, ceci doit se traduire par une diminution, respectivement une augmentation, du contraste selon que l'on multiplie par un nombre inférieur, respectivement supérieur, à 1.

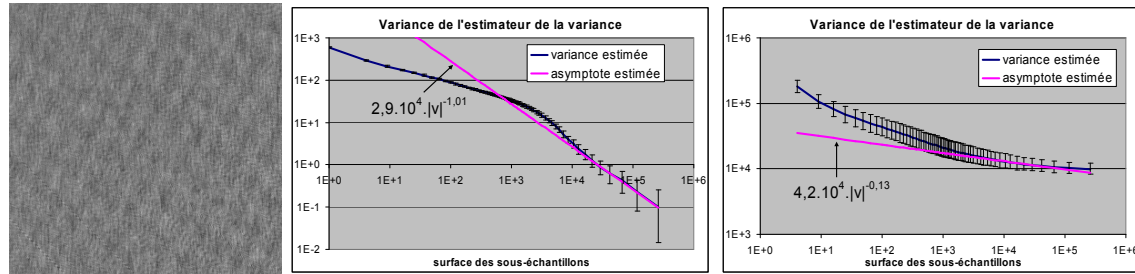


Figure 3.31 : Réalisation d'un processus à moyenne stationnaire et de variance non stationnaire (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 1.01 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.13 (droite).

L'asymptote de la variance de l'estimateur de la moyenne estimée sur ce processus est quasiment identique à celle estimée sur le processus initial, ce qui confirme que la perturbation introduite n'a quasiment pas d'influence sur la moyenne. En revanche, à partir d'une certaine surface de sous-échantillons, la variance de l'estimateur de la variance ne décroît presque plus, indiquant que la variance n'est pas homogène sur l'image.

3.4.1.3.3 Non stationnarité locale

Considérons maintenant une non stationnarité locale sur la texture, obtenue en multipliant les niveaux de gris d'une zone de l'image (dans l'exemple, un disque de diamètre équivalent à 20% de la largeur de l'image) par une valeur constante (1,2 dans l'exemple ci-dessous). Les résultats correspondants sont donnés en Figure 3.32.

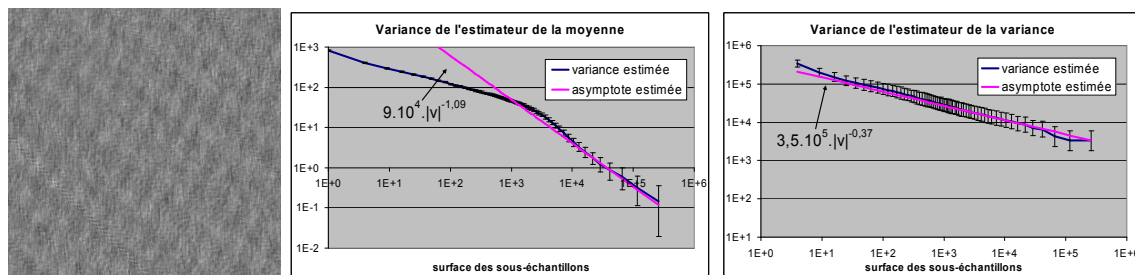


Figure 3.32 : Réalisation d'un processus présentant une non stationnarité locale de la variance (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 1.09 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.37 (droite).

On observe que la variance est effectivement identifiée comme inhomogène, avec une asymptote estimée en $|v|^{-0.37}$.

3.4.2 Textures binarisées

Dans le cas de textures binaires, obtenues par exemple en effectuant un seuillage sur une texture en niveaux de gris ou en considérant une distribution d'objets, la moyenne et la variance sont intimement liées. De manière générale, pour des données, on a clairement l'égalité entre tous les moments empiriques :

$$E[Z_i] = E[Z_i^n] = \mu, \text{ pour tout } n \text{ positif} \quad (3.41)$$

L'espérance mathématique de l'estimateur de la variance est alors :

$$E\sigma^2(V) = \sigma^2 - \text{Var } \mu(V) = (\mu - \mu^2) - \text{Var } \mu(V) \quad (3.42)$$

L'expression de la variance de cet estimateur dépend des moments d'ordre 3 et 4 de la distribution de l'estimateur de la moyenne.

Si l'on suppose que $\mu(V)$ suit une distribution normale, on obtient :

$$\text{Var } \sigma^2(V) = \text{Var } \mu(V) [2\text{Var } \mu(V) + 1 - 4(\mu - \mu^2)], \text{ si } \mu(V) \text{ est normale} \quad (3.43)$$

On constate que si $\mu = 1/2$, on a alors une relation très simple entre les variances d'estimations de la moyenne et de la variance :

$$\text{Var } \sigma^2(V) = 2(\text{Var } \mu(V))^2, \text{ si } \mu = 1/2 \text{ et } \mu(V) \text{ normale} \quad (3.44)$$

Le cas $\mu = 1/2$ est typiquement obtenu en effectuant un seuillage au niveau de la moyenne d'une texture en niveaux de gris, comme dans l'exemple de la Figure 3.33.

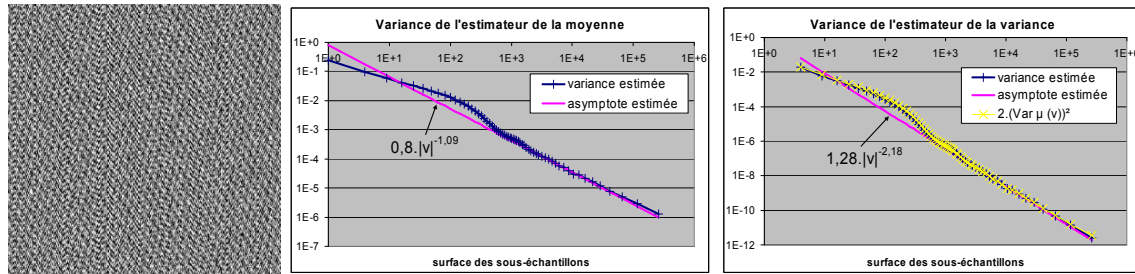


Figure 3.33 : Texture binaire obtenue en seuillant une texture en niveau de gris au niveau de sa moyenne empirique (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 1.09 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 2.18, la formule (3.44) s'applique (droite).

Dans ce cas, on observe un rythme de décroissance de $\text{Var } \sigma^2(V)$ deux fois plus rapide que celui de $\text{Var } \mu(V)$.

En revanche, si $\mu \neq 1/2$, alors les comportements asymptotiques de $\text{Var } \sigma^2(V)$ et $\text{Var } \mu(V)$ présenteront la même vitesse de décroissance, tel que présenté en Figure 3.34 :

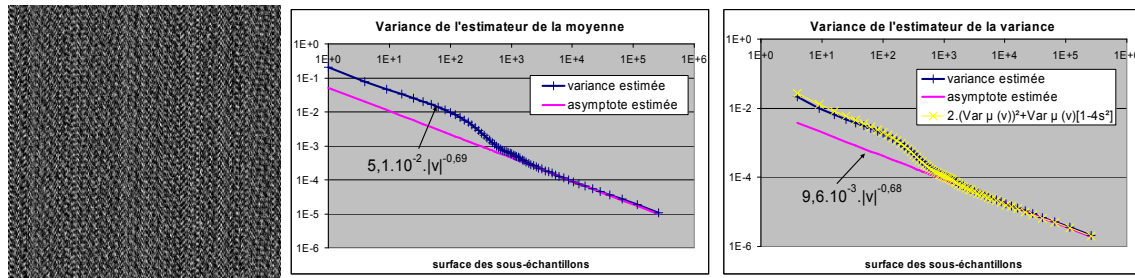


Figure 3.34 : Texture binaire obtenue en seuillant une texture en niveau de gris au niveau de sa moyenne empirique (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 0.69 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.68, la formule (3.43) s'applique (droite).

Les deux variances d'estimation décroissent effectivement au même rythme. On constate que la vitesse de décroissance est plus lente que sur la texture originale, ou que sur la texture binarisée au niveau de sa moyenne empirique. En particulier, dans le cas de l'estimation de la moyenne, cette vitesse de décroissance est incompatible avec les critères d'homogénéité proposés, ce qui constitue un contre-exemple à ces critères. En analysant les différentes composantes de la texture originale, on constate que cette vitesse de décroissance lente est imputable à la partie évanescence de la texture. En effet, dans le cas des composantes complètement non déterministes et harmoniques, la binarisation n'a pas d'effet notable sur la vitesse de décroissance de la variance d'estimation de la moyenne. Seule la composante évanescence présente une vitesse de décroissance plus lente lorsque le seuil est différent de la moyenne, tel qu'illustré par la Figure 3.35 :

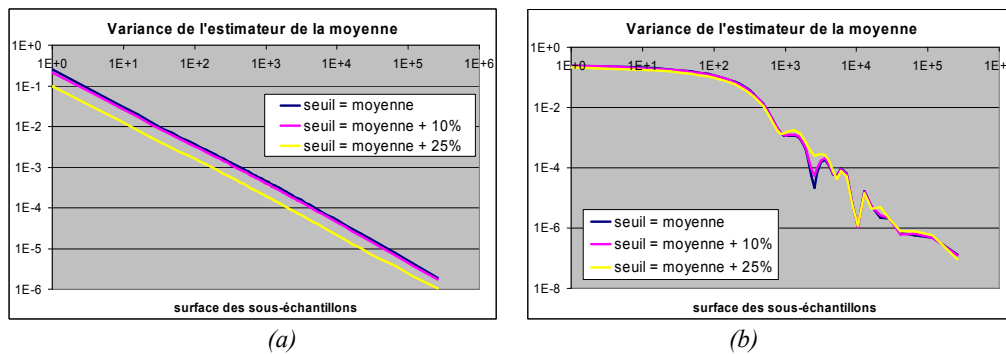


Figure 3.35 : Variance de l'estimateur de la moyenne sur des images seuillées de composantes non déterministes (a) et harmoniques (b). Les différents seuils considérés correspondent à la moyenne empirique, la moyenne empirique plus 10% de la différence entre la valeur maximale et la moyenne empirique, et 25%.

En revanche, la binarisation d'une composante évanescence (à un niveau différent de la moyenne de cette composante) induit une variance d'estimation de la moyenne décroissant lentement, telle que présentée en Figure 3.36 :

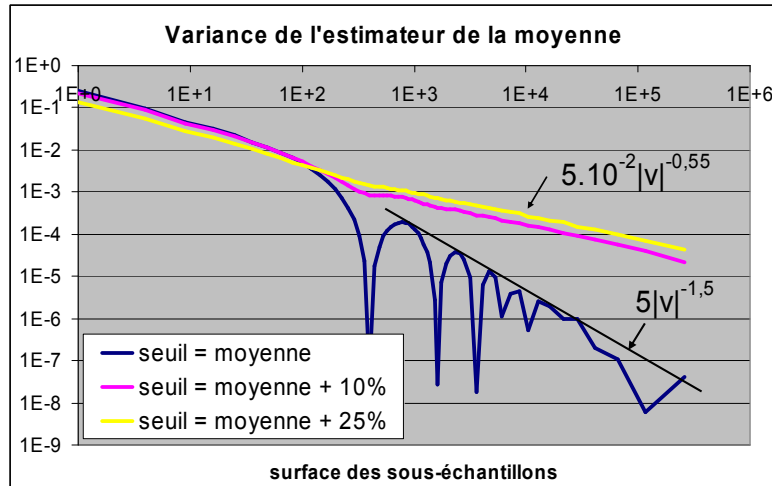


Figure 3.36 : Variance de l'estimateur de la moyenne sur des images seuillées d'une composante évanescence. Les différents seuils considérés correspondent à la moyenne empirique, la moyenne empirique plus 10% (et 25%) de la différence entre la valeur maximale et la moyenne empirique.

On constate notamment que pour des seuils différents de la moyenne, non seulement la décroissance est beaucoup plus lente, mais les fluctuations disparaissent.

Afin d'expliquer ce comportement, examinons le résultat du seuillage d'une composante évanescence à un niveau supérieur à la moyenne théorique. La Figure 3.37 présente un extrait d'une telle image :

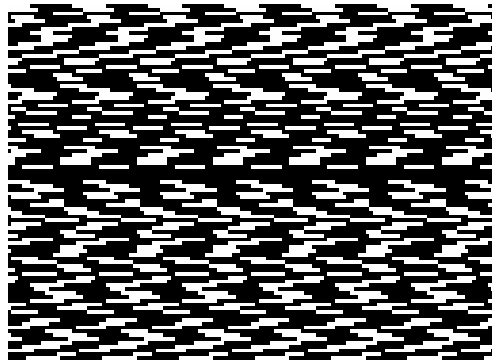


Figure 3.37 : Extrait d'un seuillage d'une composante évanescence à un niveau supérieur à sa moyenne.

Pour un processus évanescence, chaque ligne est une sinusoïde dont l'amplitude est aléatoire. Lors du seuillage, on obtient soit des créneaux dont la moyenne dépend de l'écart entre l'amplitude de la ligne et le seuil, soit des lignes entièrement noires correspondant aux lignes dont l'amplitude est inférieure au seuil. L'apparition de ces lignes constantes semble ralentir fortement la décroissance de la variance d'estimation, et introduit un comportement de type mémoire longue.

D'un point de vue spectral, le seuillage d'une composante évanescence fait apparaître des harmoniques sur le spectre, plus une raie passant par la fréquence nulle si le seuil est différent de la moyenne, tel qu'illustré sur Figure 3.38. La Figure 3.38 représente le spectre d'une image d'une

composante évanescence en niveaux de gris, du seuillage de cette image au niveau de sa moyenne, et de seuillages à des valeurs supérieures à la moyenne :

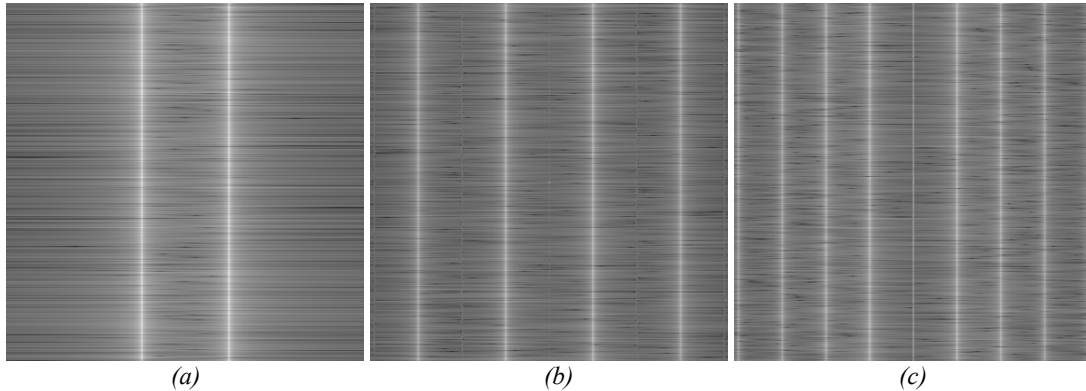


Figure 3.38 : Spectres d'un processus évanescence (a) seuillé à la moyenne (b) et seuillé à une valeur supérieure à la moyenne (c)

La présence de cette composante singulière passant par l'origine est liée aux lignes constantes apparaissant lors du seuillage, et caractéristique des processus à mémoire longue.

3.4.3 Textures partiellement occultées

On considère ici le cas de textures partiellement occultées, c'est-à-dire que sur l'image, certaines parties de la texture ne sont pas visibles. Autrement dit, certains pixels de l'image ne font pas partie de la texture à caractériser, et ne doivent pas être pris en compte pour effectuer la mesure. Nous supposons que ces parties de l'image sont préalablement identifiées, de sorte que l'on dispose d'une carte indiquant quels sont les pixels à prendre en compte. La mesure de la moyenne (respectivement de la variance) est alors obtenue par la moyenne empirique (respectivement la variance empirique) entre les niveaux de gris des pixels valides. La méthode utilisée pour évaluer la variance d'estimation de la mesure doit évidemment être adaptée à ces occultations pour prévenir un diagnostic d'inhomogénéité.

Pour prendre en compte ce masquage, la méthode de sous-échantillonnage peut être facilement adaptée en n'incluant dans le calcul uniquement les blocs ne présentant pas d'intersections avec une zone masquée. La conséquence est que l'on dispose de moins de blocs utilisables, voire aucun pour des blocs de grande taille. En revanche, la mesure effectuée à partir des blocs conservés n'est pas significativement altérée, si ce n'est que sa variance d'estimation augmente. Ceci a été vérifié sur des réalisations d'une texture synthétique, avec et sans masquage. Différents types de masques ont été expérimentés, tel qu'illustré sur la Figure 3.39. La texture utilisée est une somme de composantes AR, harmoniques et évanescences.

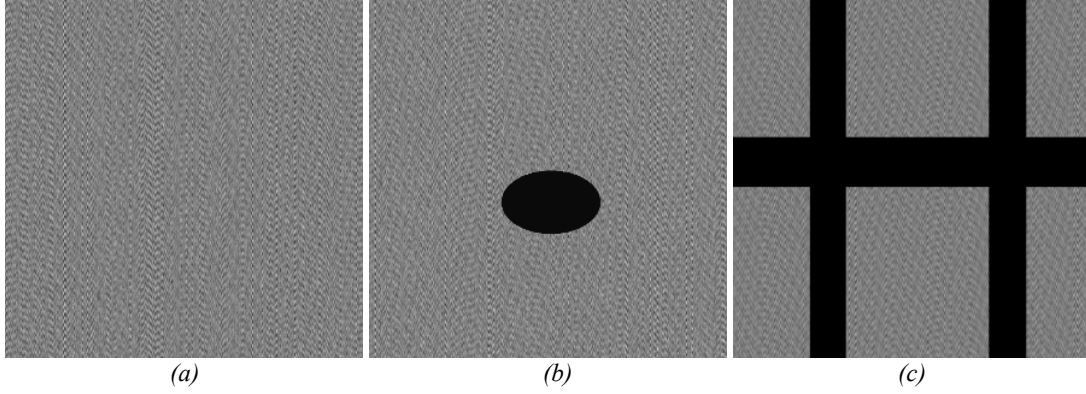


Figure 3.39 : Texture de test (a), et deux types de masques (b) et (c).

Deux jeux de 1000 réalisations ont été produits, l'un sans masque et l'autre avec masquage. Pour le jeu de réalisations non masqué, la méthode normale a été appliquée. Pour les jeux de réalisations masquées, nous avons utilisé la méthode spécifique prenant en compte le masquage tel que décrit ci-dessus. La variance d'estimation de la moyenne est représentée en Figure 3.40 pour les différents jeux de données.

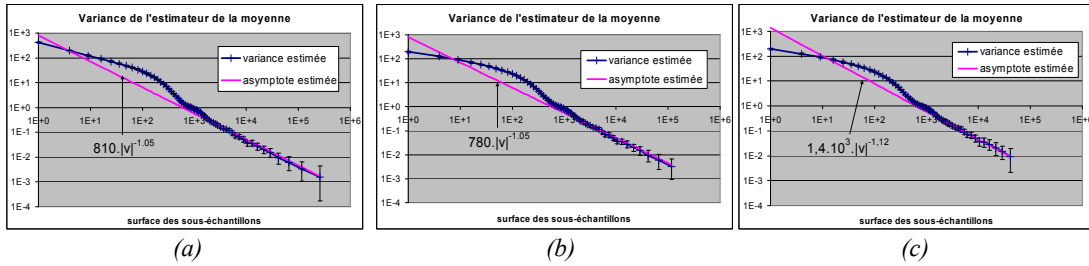


Figure 3.40 : Variance de l'estimateur de la moyenne, texture complète (a) et textures masquées (b) et (c).

On remarque que le fait de masquer les textures empêche de calculer la variance d'estimation pour les plus grandes tailles de sous-échantillons. D'autre part, la largeur des intervalles de confiance autour des estimations de $Var \mu(v)$ est augmentée, c'est-à-dire que, comme prévu, les estimations de la variance d'estimation sont moins fiables.

La Figure 3.41 présente les résultats dans le cas de l'estimation de la variance :

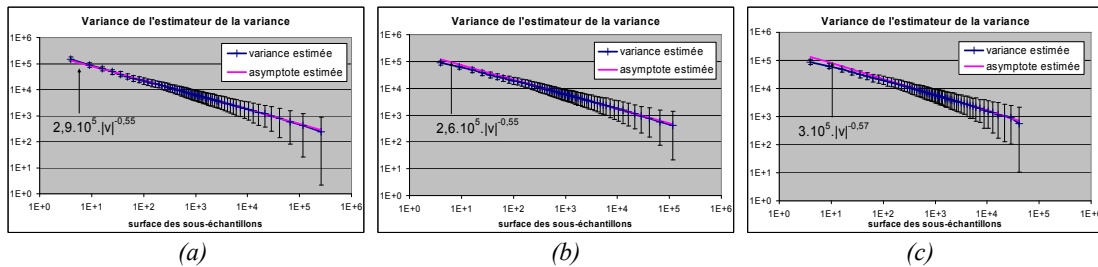


Figure 3.41 : Variance de l'estimateur de la variance, texture complète (a) et textures masquées (b) et (c).

Les remarques précédentes restent valables.

Des méthodes de synthèse de textures sans modèle peuvent également être envisagées afin de 'combler' l'information manquante de la texture se trouvant derrière le masque. Nous utilisons ici la méthode de Wei et Levoy [Wei00]. La Figure 3.42 présente la texture originale, la texture occultée par un masque, ainsi que la texture reconstruite. La texture originale est observée sur une fenêtre carrée de 256 pixels de côté.

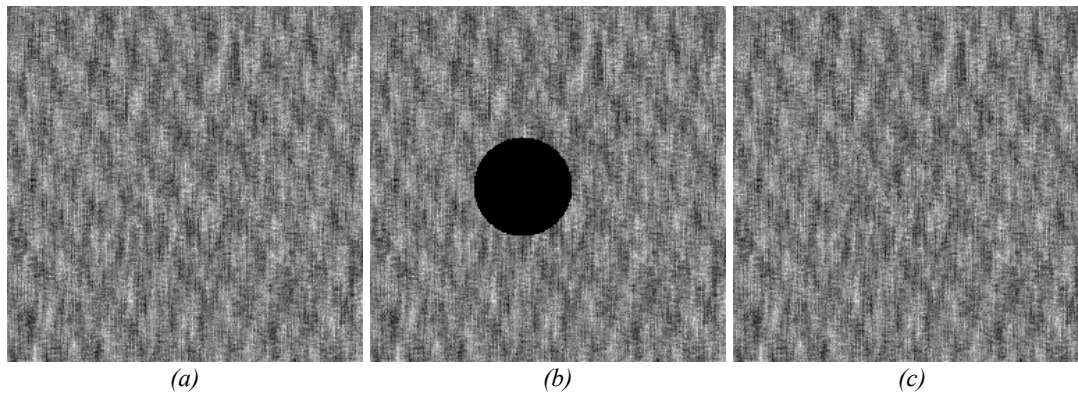


Figure 3.42 : Texture originale (a) texture masquée (b) et texture reconstruite par la méthode Wei et Levoy (c)

Le sous-échantillonnage par bloc a été appliqué à la texture originale, à la texture masquée, d'abord en ne prenant pas en compte le masquage, puis avec l'algorithme modifié, et enfin à la texture reconstruite. Les différents résultats sont synthétisés en Figure 3.43 :

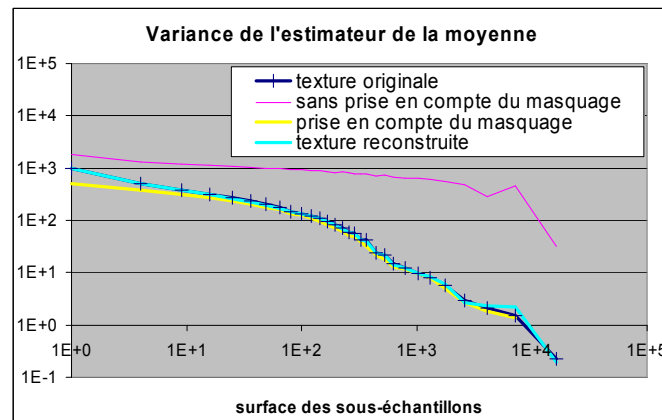


Figure 3.43 : Comparaison entre texture originale, masquage et reconstruction selon la méthode de Wei

Le sous-échantillonnage par blocs prenant en compte le masquage et l'analyse de la texture reconstruite fournissent des résultats très semblables aux résultats obtenus sur la texture originale.

3.4.4 Application à des images réelles

Les images réelles utilisées dans cette section sont issues de photographies publiées dans l'album de textures de Brodatz [Bro96]. L'objectif est de confronter les critères d'homogénéité de la moyenne et de la variance, à l'aide du sous-échantillonnage par blocs, à l'impression visuelle d'homogénéité fournie par ces images. Pour faciliter l'interprétation des résultats, on peut considérer que la moyenne est liée à l'éclairage de la scène, et associer la variance au contraste local.

3.4.4.1 Texture D64

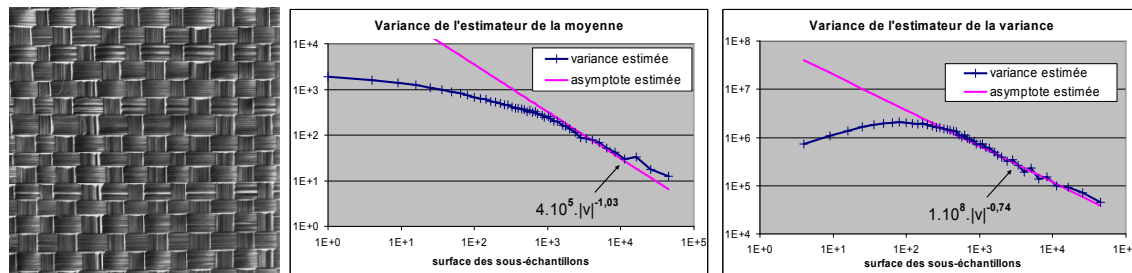


Figure 3.44 : Texture D64 de l'album de Brodatz (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 1.03 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.74 (droite).

L'image de la Figure 3.44 fournit une impression visuelle homogène. Les tendances asymptotiques estimées permettent de vérifier cette impression. Notons que les trois derniers points de $\hat{Var} \mu(v)$, compte tenu de leur pondération, n'interviennent que très peu dans l'estimation de l'asymptote.

3.4.4.2 Texture D57

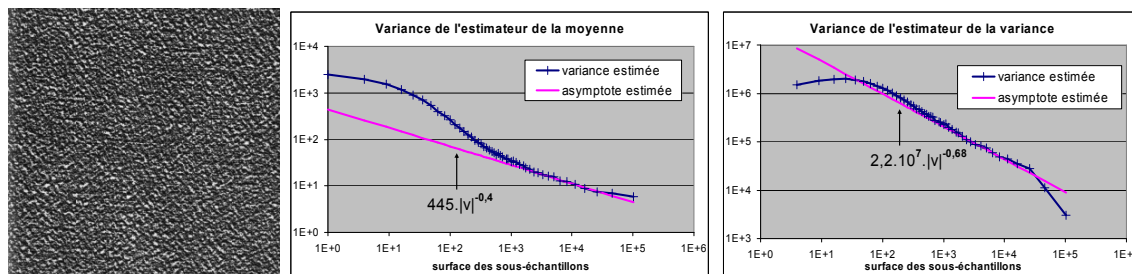


Figure 3.45 : Texture D57 de l'album de Brodatz (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 0.4 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.68 (droite).

Après un examen rapide, l'image de la Figure 3.45 semble également homogène. Cependant, une observation attentive révèle que le quart supérieur gauche de l'image est légèrement plus sombre. Cette inhomogénéité est mise en évidence sur la courbe relative à l'estimateur de la moyenne, qui présente une décroissance très lente pour les grands sous-échantillons. L'estimateur de la variance fournit en revanche une décroissance compatible avec les critères d'homogénéités retenus.

L'inhomogénéité de la moyenne peut être compensée en éliminant les basses fréquences à l'aide d'un filtre passe-haut adapté, dont les résultats sont présentés Figure 3.46 :

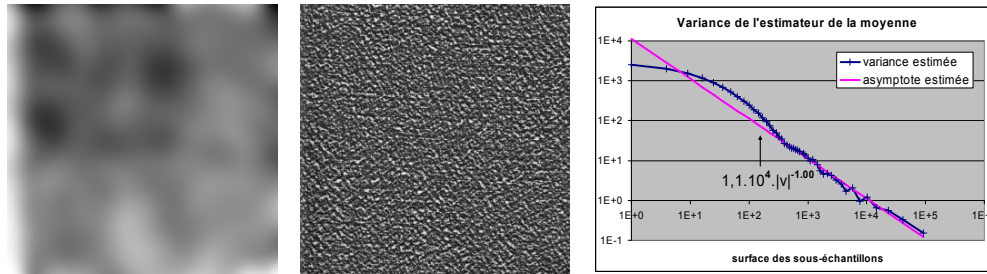


Figure 3.46 : Résidu du filtre passe haut (gauche), texture D57 après filtrage (milieu), variance de l'estimateur de la moyenne sur l'image filtrée, vitesse de décroissance estimée à 1 (droite).

L'image filtrée est ici simplement obtenue en soustrayant à l'image d'origine la moyenne locale calculée sur un voisinage carré de 31 pixels de côté. Le résidu du filtre passe haut confirme que le quart supérieur gauche est plus sombre. L'image corrigée semble à présent plus homogène, et la variance de l'estimateur de la moyenne fournit un résultat compatible avec les critères d'homogénéité retenus. L'estimateur de la variance n'est quasiment pas affecté par ce filtrage.

3.4.4.3 Texture D11

La texture D11, présentée en Figure 3.47, présente un caractère fortement périodique.

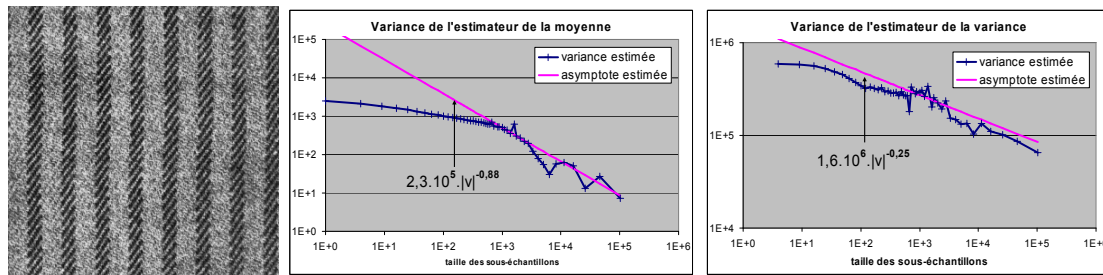


Figure 3.47 : Texture D11 de l'album de Brodatz (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 0.88 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.25 (droite).

Les courbes indiquent cependant que ni la moyenne ni la variance ne sont homogènes. Concernant la moyenne, ceci peut s'expliquer par la présence de tâches sombres en haut à gauche et sur le côté droit de l'image. Ces tâches ont été corrigées en appliquant un filtrage passe-haut, comme précédemment. Les résultats correspondants sont présentés en Figure 3.48 :

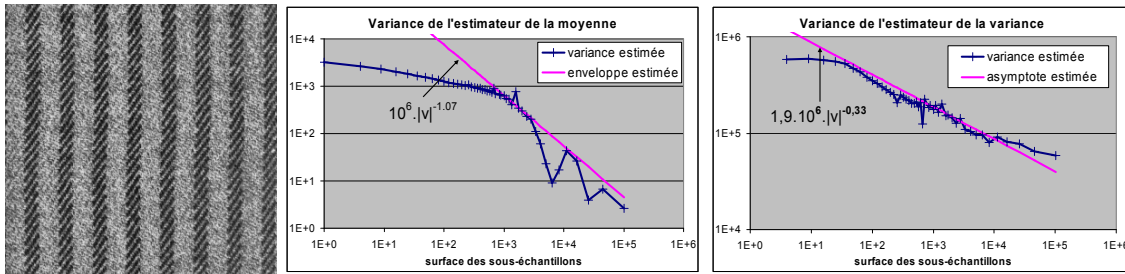


Figure 3.48 : Texture filtrée (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 1.07 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 0.33 (droite).

Ces résultats indiquent que la moyenne est maintenant effectivement homogène. Les oscillations proviennent de la forte composante harmonique horizontale. En revanche, l'inhomogénéité de la variance reste à expliquer. Elle peut s'interpréter comme une variation du contraste local. La Figure 3.49 représente la variance locale, calculée pour chaque point par la variance empirique sur un voisinage carré de 101 pixels de côté.

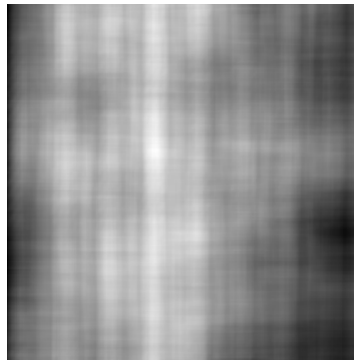


Figure 3.49 : Variance locale de l'image de la Figure 3.48.

Entre les zones les plus sombres et les zones les plus claires de cette image, la variance varie du simple au double. Il apparaît donc que la partie droite de l'image est moins contrastée que la partie centrale. Afin de corriger l'inhomogénéité de la variance, nous proposons de multiplier l'image de départ (de la Figure 3.48), qui est à moyenne nulle, par une quantité inversement proportionnelle à la variance locale présentée en Figure 3.49. Plus précisément, on ramène les niveaux de l'image de la Figure 3.49 entre les valeurs 0.8 et 1.2, et on effectue la division correspondante. Ainsi, lorsque la variance locale est élevée, on divise les pixels par une valeur supérieure à 1, donc atténuant la variance, et inversement lorsque la variance locale est faible. Les différentes valeurs numériques ont été retenues après différentes tentatives. La Figure 3.50 présente les différents résultats correspondants à cette transformation.

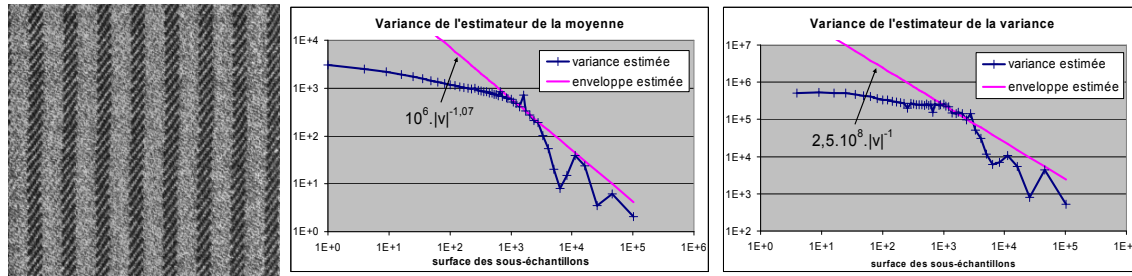


Figure 3.50 : Transformation de l'image de la Figure 3.48 (gauche), variance de l'estimateur de la moyenne, vitesse de décroissance estimée à 1.07 (milieu), variance de l'estimateur de la variance, vitesse de décroissance estimée à 1 (droite).

Sur cette image transformée, la méthode indique des vitesses de décroissance compatibles avec les critères d'homogénéité que nous avons définis. On remarque quelques oscillations, aussi bien pour l'estimateur de la moyenne que pour celui de la variance, qui sont caractéristiques d'une composante harmonique horizontale importante. La figure suivante présente les images de la moyenne et de la variance locale de l'image transformée, calculées sur des voisinages carrés de 101 pixels de côté.

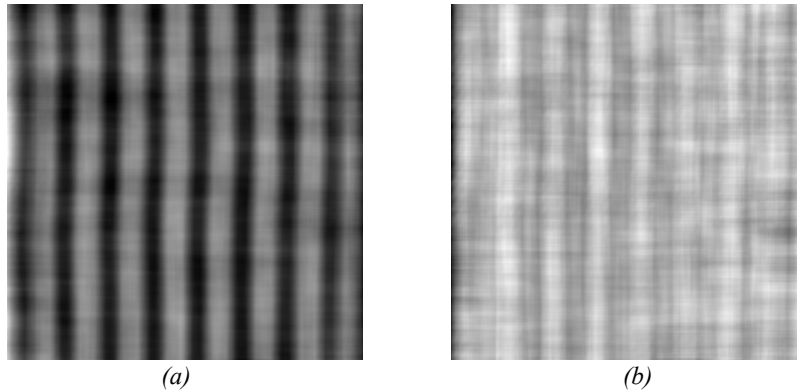


Figure 3.51 : Moyenne (a) et variance (b) locale de l'image transformée

Il apparaît sur la Figure 3.51 que l'image de la Figure 3.50 présente un contraste beaucoup homogène que celui de la Figure 3.48, perceptuellement compatible avec la notion d'homogénéité.

Il semble donc que la texture D11 présentait effectivement des défauts d'homogénéité, tant pour sa moyenne que pour sa variance. Ces défauts, pourtant peu perceptibles lors d'une inspection visuelle de l'image, sont cependant clairement mis en exergue par les variances des estimateurs de la moyenne et de la variance de l'intensité de l'image.

3.5 Discussion

La méthode de sous-échantillonnage par blocs nous a permis d'appréhender l'influence de l'échelle d'observation sur la variance d'estimation sans passer par l'intermédiaire d'un modèle. Le caractère complètement non paramétrique de la méthode lui permet de s'appliquer immédiatement à tout type

d'image : texture continue, image binaire, distribution d'objets, etc. Elle s'avère de plus très simple d'utilisation, et nécessite des temps de calculs réduits.

L'étude du comportement asymptotique de la variance d'estimation de la moyenne et de la variance, réalisée dans le cadre de la décomposition de Wold a permis d'établir des vitesses limite de convergence pour une large classe de processus stationnaires. Ces vitesses limites constituent des fondements théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés pour proposer des critères pratiques permettant de qualifier l'homogénéité de la moyenne et de la variance de l'intensité des pixels dans une texture.

La confrontation de ces critères théoriques avec l'estimation fournie par le sous-échantillonnage par blocs nous a permis d'effectuer des comparaisons aussi bien dans le cadre de processus de synthèse que dans le cas d'images réelles. Ces comparaisons, bien que non exhaustives, ont conforté la pertinence des critères d'homogénéité que nous avons proposés. Notamment, les simulations de la section 3.4.1 indiquent que les estimateurs $\hat{Var} \mu(v)$ et $\hat{Var} \sigma^2(v)$ sont très sensibles à la présence de tendances globales au sein des données, les vitesses de décroissance étant alors très lentes.

Notons tout de même que ces critères ne prennent pas en compte certains types de processus stationnaires. Dans le cas de l'estimateur de la moyenne, les processus à mémoire longue peuvent présenter des vitesses de décroissance de $Var \mu(V)$ plus lentes que le critère en $|V|^{-1}$ tout en produisant des réalisations pouvant paraître visuellement homogènes. Cependant, nous avons vu qu'un processus stationnaire contaminé par une non stationnarité pouvait présenter un comportement empirique de $\hat{Var} \mu(v)$ similaire. Ainsi, lorsque l'on est confronté à une décroissance de $\hat{Var} \mu(v)$ plus lente que le critère proposé, deux cas sont possibles : soit on a affaire à un processus à mémoire longue, auquel cas l'inférence reste possible, soit l'image présente une réelle non stationnarité et la question de l'inférence perd beaucoup de sa pertinence.

Le cas de l'estimateur de la variance est encore plus complexe, du fait que cet estimateur n'est en général qu'asymptotiquement non biaisé. En général, si l'estimateur de la moyenne converge rapidement, on pourra considérer le biais négligeable. En revanche, en présence d'un processus à mémoire longue, ce biais pourra demeurer relativement important. D'autre part, il existe des processus stationnaires pour lesquels $Var \sigma^2(V)$ décroît naturellement plus lentement que le critère proposé en $|V|^{-1/2}$, et même des processus stationnaires présentant une décroissance en $|V|^{-1}$, qui une fois contaminés par une non stationnarité présentent une décroissance empirique conforme à notre critère.

Finalement, notons que les résultats théoriques sur lesquels nous nous appuyons reposent sur des hypothèses d'ergodicité. Ce genre d'hypothèse est en général non vérifiable : la simple hypothèse de l'existence d'un processus aléatoire duquel serait issue l'image n'est généralement qu'une construction de l'esprit. Toutefois, la technique de sous-échantillonnage et le tracé de la variance d'estimation en fonction de la taille des blocs restent exploitables pour une évaluation qualitative du caractère

homogène de la texture observée. Les critères limites peuvent être alors considérés comme des références auxquelles nous pouvons comparer le comportement asymptotique de la variance de l'estimateur considéré. Dans l'hypothèse où les critères d'homogénéité proposés sont respectés, et en l'absence d'informations indiquant que des structures à une échelle supérieure à celle de l'image existent, alors l'inférence pourra être considérée comme valide. Dans le cas contraire, l'acquisition d'une image de plus grande taille pourra être envisagée afin d'identifier la nature du problème, et décider si l'on a affaire à un phénomène de mémoire longue, à une non stationnarité ou encore si la surface d'analyse est trop petite par rapport à la structure spatiale de la scène.

Chapitre 4 Application aux matériaux

Dans le contexte de la caractérisation de matériaux composites, la proportion des différentes phases du matériau constitue un critère essentiel au regard de ses propriétés physiques (propriétés mécaniques par exemple, mais aussi thermiques, électriques, etc.). Les taux des différentes phases sont généralement obtenus par segmentation des images observées par microscopie. L'étape de segmentation n'est pas abordée ici. Nous la supposons parfaitement réalisée, c'est-à-dire que l'appartenance de chaque pixel est définie sans erreur ni ambiguïté à sa phase effective. Si la segmentation est mal réalisée, la mesure pourra être affectée d'un biais. Il n'y a malheureusement pas de méthode systématique pour détecter ce biais et s'en prémunir, si ce n'est d'estimer la sensibilité du résultat à la méthode de segmentation. Nous considérons directement les images binaires issues de la segmentation, attribuant la valeur 1 (blanc) aux pixels appartenant à la phase considérée et 0 sinon. Le taux de la phase considérée correspond alors à la moyenne spatiale de cette image binaire, qui peut se déduire d'un comptage des pixels blancs. Les phases constituant les matériaux composites auxquels nous avons été confrontés, dont certains seront décrits dans ce chapitre, sont généralement d'échelle micro, ou nanométrique, tandis que les pièces fabriquées à partir de ces matériaux ont des dimensions pouvant aller des échelles centimétriques à métriques. Il est donc matériellement impossible d'acquérir des images permettant d'observer la distribution des phases du matériau sur l'ensemble de la pièce. Cependant, si le matériau est suffisamment homogène, l'observation d'une zone restreinte doit permettre d'estimer cette distribution des phases et d'en extrapoler les résultats à la pièce. Disposer d'informations concernant la fiabilité de cette inférence est alors essentiel.

Pour des raisons pratiques, nous travaillons ici sur des images d'une coupe de matériau, les techniques d'imagerie tridimensionnelle (notamment la micro-tomographie) restant trop coûteuses ou mal adaptées à une utilisation industrielle de routine. L'utilisation de sections multiples parallèles a également été écartée pour des raisons de coût et de difficulté de mise en œuvre. En fonction de la structure des matériaux, il est néanmoins possible de relier les mesures effectuées sur une seule coupe à la réalité volumique du matériau à l'aide de considérations stéréologiques, qui seront exposées pour chacun des matériaux étudiés dans ce chapitre.

La méthode proposée dans le Chapitre 3 permet de qualifier l'homogénéité de la répartition spatiale d'une phase sur le plan de coupe et, dans le cas d'une distribution homogène, d'évaluer l'incertitude de la mesure du taux liée au caractère limité de l'observation.

Bien entendu, le taux de phase n'est pas l'unique facteur influant sur les propriétés physiques d'un matériau. La morphologie des phases, c'est-à-dire la façon dont elles sont agencées dans le volume du

matériau, est également très importante. En fonction des matériaux étudiés ci-dessous, nous aborderons donc certains aspects morphologiques des microstructures rencontrées.

Les matériaux étudiés dans ce chapitre sont produits par le groupe SAFRAN, et sont utilisés dans des applications variées, principalement liées aux domaines aéronautique et spatial.

4.1 Alliage base Titane TA6V

4.1.1 Description et aspects stéréologiques

Ce matériau dont la désignation est TA6V (Base Titane + aluminium et vanadium) est utilisé par la société Turboméca (Groupe Safran) sur des rouets mobiles du module compresseur d'air de moteurs d'hélicoptères. La pièce brute est une pièce forgée qui a été traitée thermiquement. Ce traitement permet d'homogénéiser et de maîtriser la microstructure, afin de satisfaire aux spécifications de l'industriel portant sur les propriétés mécaniques nécessaires au bon fonctionnement en utilisation moteur. Cette ébauche est ensuite usinée pour obtenir la pièce finie qui équipera le moteur.

La microstructure du matériau est constituée de nodules de phase alpha blanche, le reste de la microstructure est la phase aiguillée bêta (appelée également alpha transformée).

A l'échelle d'observation des images, l'industriel considère que le matériau est homogène, et ne présente pas d'orientations caractéristiques de sa structure. En termes de stéréologie, le taux de phase surfacique observé sur une coupe quelconque est donc représentatif du taux de phase volumique. L'échantillon analysé ici est représenté en Figure 4.1(a) :

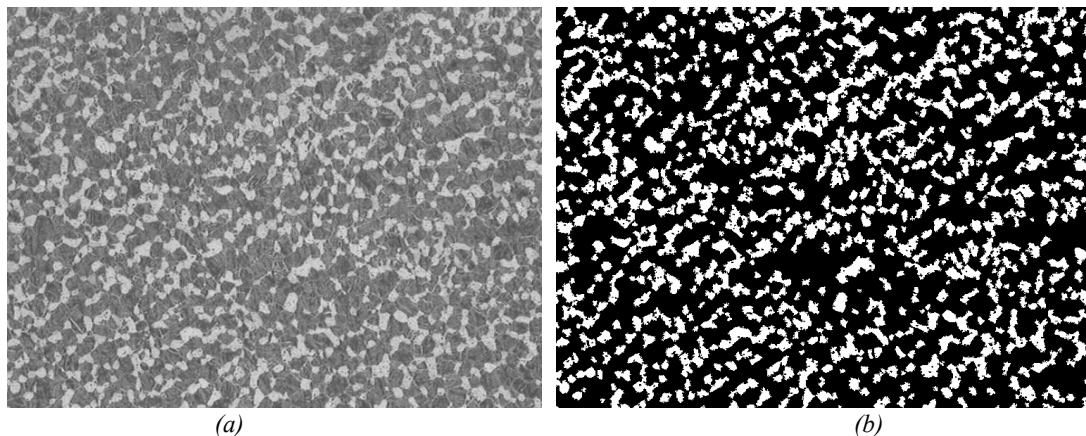


Figure 4.1 : Image de matériau TA6V (a) et résultat de la segmentation de la phase alpha (b)

L'une des spécifications du constructeur concerne le taux de phase alpha, qui apparaît en gris clair sur l'image. Ce taux doit être compris dans une certaine plage de tolérance afin que les propriétés mécaniques soient conformes aux spécifications. Il est donc nécessaire d'estimer un intervalle de confiance autour de la mesure du taux de phase alpha, afin de garantir la conformité du matériau. Un

algorithme de segmentation, basé sur un seuillage automatique suivi d'opérations morphologiques, a donc été mis au point afin d'isoler cette phase sur l'image. Le résultat de la segmentation est donné en Figure 4.1(b).

4.1.2 Analyse spatiale d'un échantillon

Sur une image segmentée, telle que celle de la Figure 4.1(b), on estime directement le taux par la moyenne empirique. On mesure ici un taux de phase $\mu(V) = 27.29\%$. Nous cherchons maintenant à estimer la fiabilité de cette mesure, en considérant que l'image de la Figure 4.1(b) est un extrait d'une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire 2-D. A titre de comparaison, on applique successivement la méthode paramétrique de modélisation du variogramme puis la méthode de sous-échantillonnage par blocs.

4.1.2.1 Modèle de variogramme

On applique la méthode décrite en section 2.1, basée sur la modélisation du variogramme et l'estimation des paramètres du modèle par moindres carrés. Pour ce faire, on estime la moyenne circulaire du variogramme : on tire uniformément 10^5 paires de pixels pour chaque classe de distance, en utilisant l'estimateur classique (équation (2.3)).

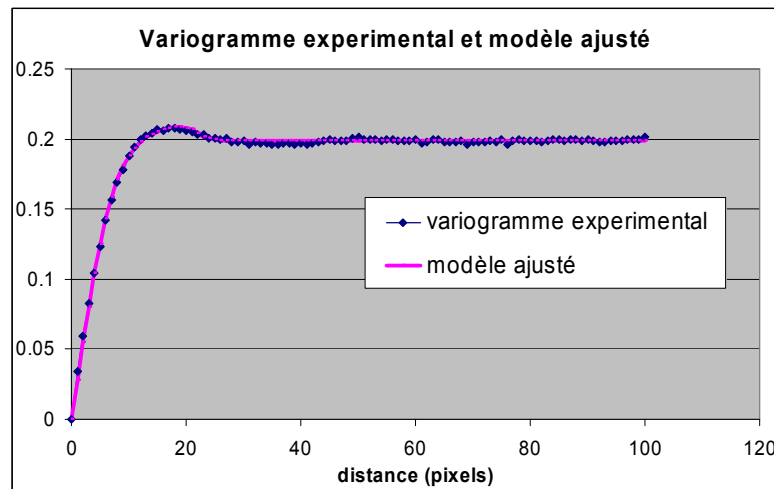


Figure 4.2 : Variogramme expérimental et modèle ajusté. Le modèle est une somme de deux modèles exponentiels et de deux modèles sphériques.

La variogramme expérimental atteignant un palier, on en déduit que les données semblent stationnaires. Selon le modèle ajusté, la portée intégrale est estimée à $A \approx 136$. Pour comparaison, la taille de l'image est de 760×570 pixels. L'intégrale de ce modèle d'autocovariance, c'est-à-dire la variance asymptotique, est évaluée à $\sigma^2 A \approx 27$. Connaissant la taille de la fenêtre d'observation V , on en déduit la variance de la mesure du taux : $\hat{Var} \mu(V) \approx 6,2 \cdot 10^{-5}$, soit un écart-type d'environ

$100.\sqrt{\hat{Var} \mu(V)} \approx 0,79$, à comparer avec le taux mesuré $100.\mu(V) = 27.29$. C'est-à-dire que sous l'hypothèse d'une distribution gaussienne, l'intervalle de confiance à 95% sera estimé à :

$$IC_{95\%}(\mu(V)) = [25.71\%; 28.87\%] \quad (4.1)$$

4.1.2.2 Sous-échantillonnage par blocs

En appliquant la méthode de sous-échantillonnage par blocs, on obtient l'évolution de la variance d'estimation de la moyenne en fonction de la taille des blocs, représentée en Figure 4.3 :

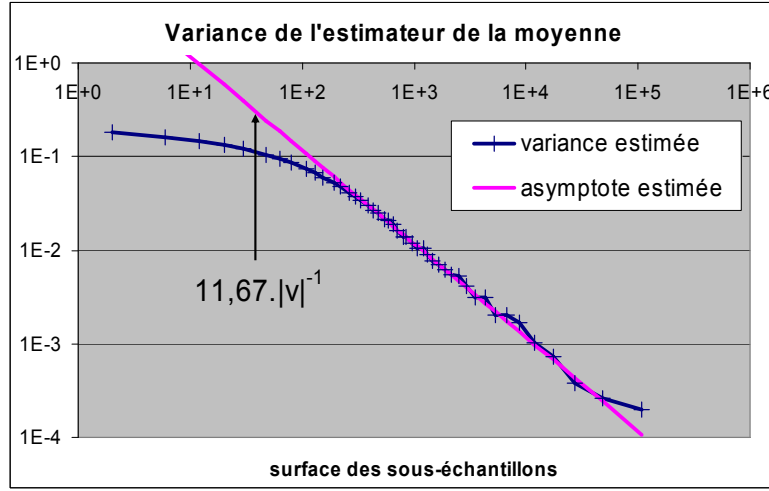


Figure 4.3 : Variance de l'estimateur du taux et asymptote estimée

La pente estimée de l'asymptote est très proche de -1. On en déduit que l'image analysée est effectivement à moyenne homogène. La variance asymptotique est ici estimée à 11.67. L'écart-type indiquant la fiabilité de la mesure du taux est ici estimé à $100.\sqrt{\hat{Var} \mu(V)} \approx 0.52$. Sous réserve de gaussianité des mesures, on obtient alors l'intervalle de confiance à 95% suivant autour du taux de phase véritable :

$$IC_{95\%}(\mu) = [26.26\%; 28.33\%] \quad (4.2)$$

4.1.3 Discussion et validation

Afin de valider les estimations réalisées par ces deux méthodes, 16 images telles que celle de la Figure 4.1(a) ont été acquises sur une même zone de la coupe, couvrant une surface de quelques millimètres carrés de la coupe. Selon l'industriel, sur une telle surface, le matériau est considéré parfaitement homogène. Pour chacune des images, le même algorithme de segmentation a été appliqué, permettant d'obtenir l'histogramme, présenté en Figure 4.4, de la distribution du taux mesuré sur les différentes images :

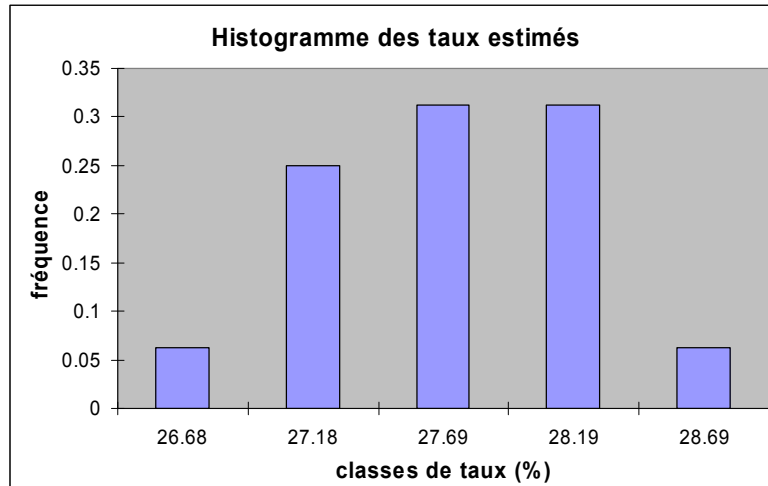


Figure 4.4 Histogramme des taux estimés sur 16 images de matériau TA6V

L'écart-type des taux estimés sur les 16 images vaut environ 0.52%. Ce résultat étant obtenu à partir de différentes réalisations du processus aléatoire, il constitue donc une référence.

Pour chacune de ces 16 images, les deux méthodes d'estimation ont été appliquées pour calculer la variance d'estimation. Le tableau suivant synthétise les résultats moyens obtenus sur cet ensemble d'images :

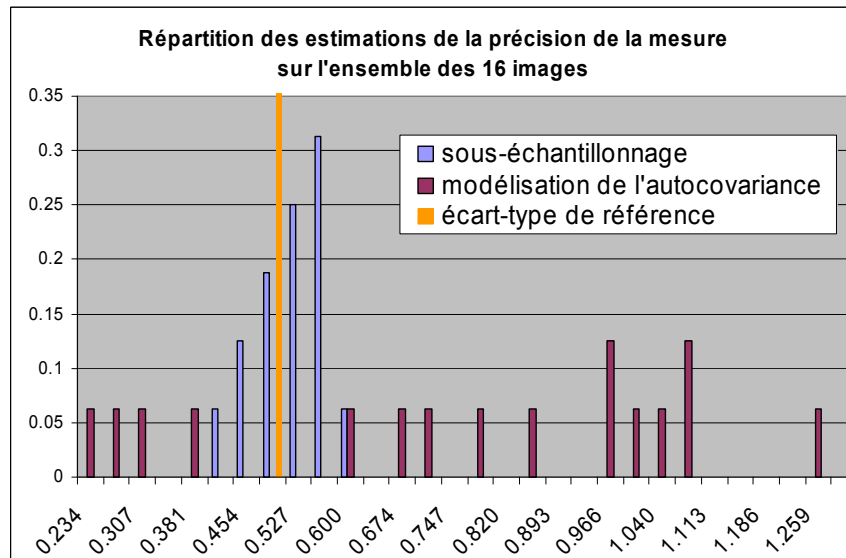


Figure 4.5 : Tableau récapitulatif des résultats concernant les 16 images du matériau TA6V

Ces résultats indiquent que la variance d'estimation est mieux estimée par la méthode de sous-échantillonnage par blocs que par le modèle de variogramme proposé. Les résultats obtenus par le sous-échantillonnage par blocs sont très proches de la valeur de référence, tant en termes de biais que de variance, tandis que les résultats obtenus par la modélisation du variogramme semblent à la fois biaisés et plus dispersés.

Cet exemple illustre les remarques présentées en fin de Chapitre 2 sur les difficultés et les risques liés au choix d'un modèle. Si l'on compare les courbes de variance d'estimation de la moyenne obtenues directement par sous-échantillonnage, et celles obtenues par l'intermédiaire du variogramme, on constate une différence significative, comme le montre la Figure 4.6.

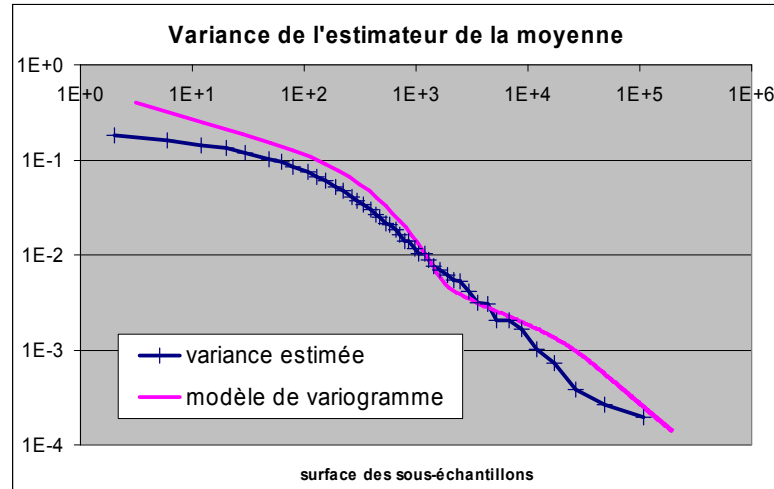


Figure 4.6 : Comparaison entre les deux méthodes

Au vu des résultats, il semble que le modèle de variogramme proposé, bien que très proche du variogramme empirique, ne prenne finalement pas en compte certains aspects de la structure du matériau.

Remarque 1:

Des simulations utilisant différents modèles de variogrammes ont été effectuées, notamment en incluant des modèles dont la vitesse de convergence au palier est paramétrique, de la forme :

$$\gamma(h) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{1 + \left(\frac{h}{d}\right)^\alpha} \quad (4.3)$$

avec les paramètres σ^2 et d indiquant le palier et la portée, et le paramètre α indiquant la vitesse de convergence. Le modèle utilisé ci-dessus est le meilleur des modèles testés, au sens du critère AIC.

Remarque 2:

Bien que présentant un moindre intérêt applicatif, on peut s'intéresser à l'homogénéité de la variance sur la Figure 4.1(b). La Figure 4.7 présente les résultats du sous-échantillonnage par blocs pour l'estimateur de la variance.

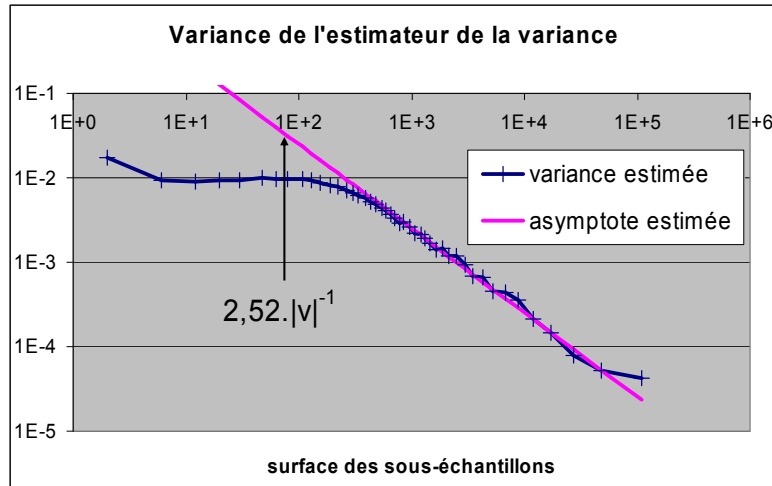


Figure 4.7 : Variance de l'estimateur de la variance, et asymptote estimée

Il apparaît que la variance est également homogène. D'autre part, ceci confirme les résultats obtenus en section 3.4.2 sur les textures binaires.

4.2 Matériau composite à base de fibres de carbone

4.2.1 Description et aspects stéréologiques

Les matériaux composites à base de fibres de carbone offrent des propriétés très intéressantes pour les applications aéronautiques, tant du point de vue de leur légèreté que de leurs caractéristiques mécaniques et thermiques. Ils sont notamment utilisés dans les tuyères de fusées ou les disques de frein d'avions pour leur capacité à conserver de bonnes propriétés même à des températures élevées. Le renfort fibreux des différents matériaux étudiés est constitué d'un empilement de couches de fils (alignement ou tissage généralement dans deux directions orthogonales), eux-mêmes formés de plusieurs centaines de fibres. Cet empilement de couches peut ensuite être aiguilleté selon une direction transverse afin de donner une cohérence volumique au renfort. Le matériau final est obtenu en déposant une matrice (carbone ou céramique par exemple) entre les fibres. L'architecture du renfort fibreux et le type de matrice utilisé dépendent des applications auxquelles est destiné le matériau, et conditionnent fortement les propriétés finales. Les exemples de matériaux présentés ci-dessous sont conçus par Snecma Propulsion Solide (Groupe Safran). L'objectif est de mesurer le taux de fibre de ces matériaux.

La Figure 4.8 présente schématiquement la structure des matériaux composites fibreux étudiés :

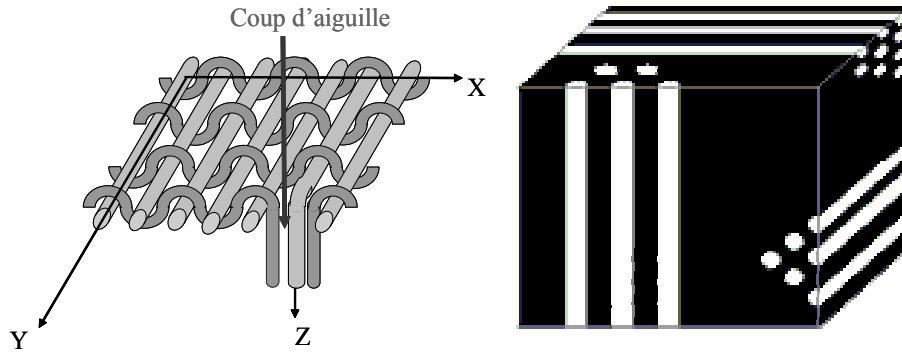


Figure 4.8 : Schéma d'une couche de tissu (gauche) et modèle simplifié de la structure volumique du matériau, présentant des groupes de fibres dans trois directions orthogonales (droite)

Ces matériaux présentent donc trois directions principales de fibres orthogonales entre elles. Les principes de la stéréologie suggèrent d'effectuer une coupe qui évite ces directions [Rus00]. Nous avons donc choisi un plan de coupe qui intersecte avec un angle égal chacune de ces trois directions caractéristiques, appelé 'coupe biaise' par la suite, tel qu'illustré sur la Figure 4.9 :

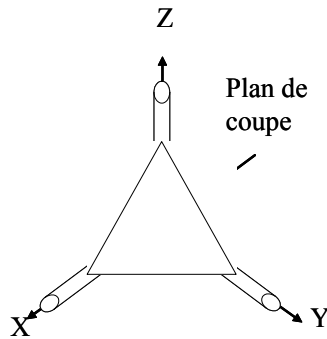


Figure 4.9 : Définition de la 'coupe biaise'. Le plan de coupe intersecte les trois familles de fibres selon le même angle.

Un modèle volumique de matériau similaire au bloc présenté en Figure 4.10 a été développé afin d'observer la variabilité liée au choix du plan de coupe. Ce modèle présente des arrangements de cylindres, simulant les fibres et les fils, orientés avec une petite dispersion selon 3 directions principales orthogonales. Ce modèle n'est évidemment pas très réaliste, il permet cependant de représenter schématiquement la structure volumique générale du matériau. L'objectif est ici de vérifier que la coupe biaise est effectivement pertinente pour l'étude de structures présentant plusieurs directions caractéristiques.

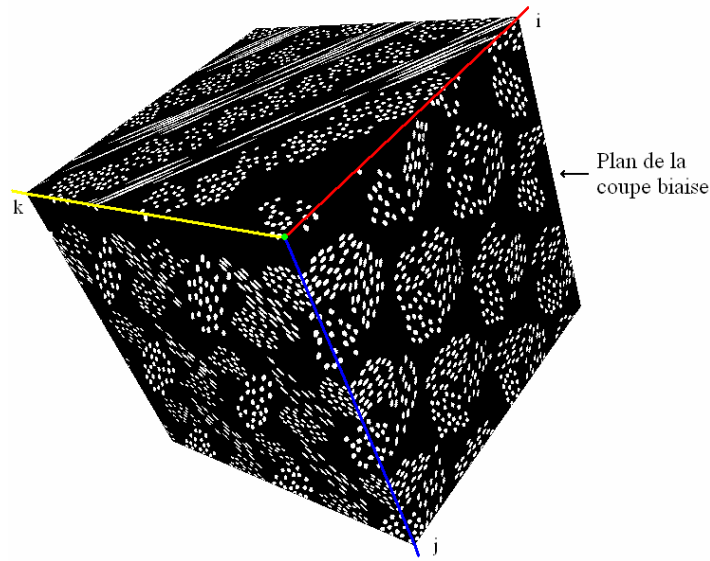


Figure 4.10 : Modèle volumique simple utilisé pour le choix du plan de coupe

Des simulations de coupes dans différentes directions ont été réalisées. Pour chaque jeu d'angles de coupe, la variance du taux mesuré entre les différentes réalisations a été calculée. Les résultats sont reportés en Figure 4.11 :

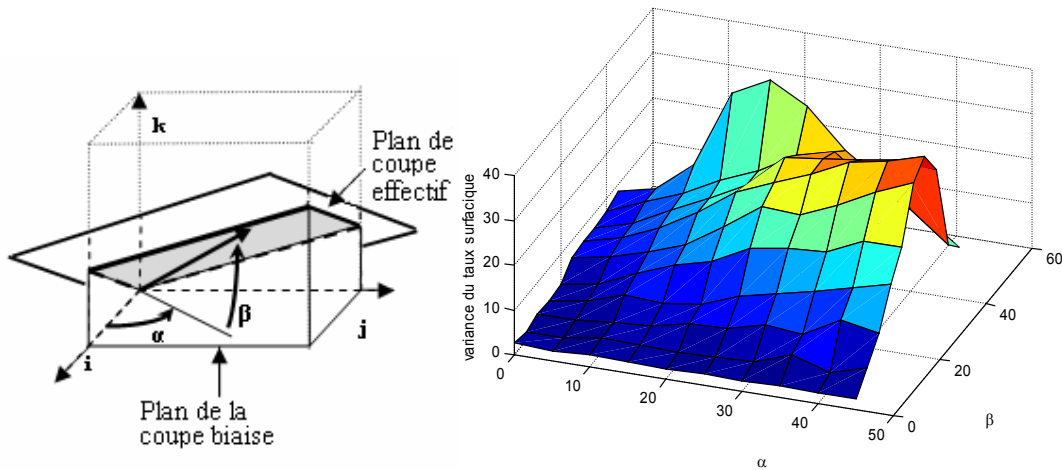


Figure 4.11 : Variance du taux surfacique mesuré en fonction des angles de coupe. $\beta = 0$ correspond à une coupe biaise.

Les points pour lesquels $\beta = 0$ correspondent à la coupe biaise, la valeur de α correspond alors à une simple rotation des images dans le plan de coupe. Cependant, dès que $\beta \neq 0$, les plans de coupes sont tous effectivement différents de la coupe biaise. Le plan de coupe biaise apparaît ainsi comme celui assurant une variance d'estimation minimale, c'est-à-dire qu'il minimise l'incertitude liée aux aspects stéréologiques de la mesure.

Les fibres peuvent être considérées comme des cylindres 'souples' à base circulaire d'un diamètre d'environ 15 micromètres. Une section inclinée d'une fibre produit donc une ellipse dont le petit axe

est égal au diamètre de la fibre, la longueur du grand axe dépend de l'inclinaison entre la fibre et le plan de coupe, tel qu'illustré sur la Figure 4.12 :

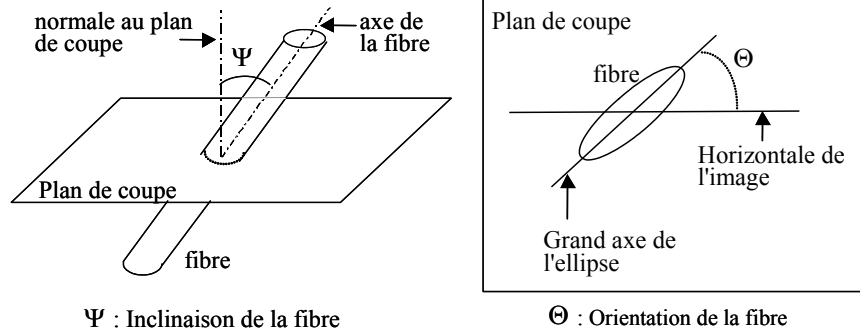


Figure 4.12 : Section d'une fibre cylindrique en 3D (gauche) et représentation de la section dans le plan de coupe (droite).

Les relations entre le diamètre d de la fibre, les angles de coupes Θ et Ψ et les paramètres de l'ellipse (petit axe b , grand axe a , orientation θ) sont les suivantes :

$$\begin{cases} b = d \\ a = d \cos(\Psi) \\ \theta = \Theta \end{cases} \quad (4.4)$$

Il est donc possible d'estimer les paramètres d , Θ et Ψ à partir des paramètres estimés de l'ellipse observée sur le plan de coupe, avec une indétermination sur le signe de Ψ . Cependant, la structure particulière des matériaux permet de contourner ce problème, tel que nous l'avons montré dans Blanc et al. [Bla06a]. D'autre part, l'utilisation de la coupe biaise permet d'optimiser l'estimation de l'inclinaison Ψ des fibres dans chaque direction principale du matériau. En effet, selon la coupe biaise, l'angle Ψ théorique pour chaque direction de fibre est de l'ordre de 35° qui, selon Mlekush [Mle99] permet d'obtenir une variance d'estimation relativement faible pour Ψ . Ces résultats sont confirmés par des simulations effectuées selon une méthode Monte-Carlo décrite en Annexe D.

La résolution d'acquisition choisie résulte d'un compromis entre le volume de données, la surface d'acquisition et la précision de mesures de diamètres des fibres et de leurs angles avec le plan de coupe.

En suivant ce plan de coupe, on obtient les images suivantes pour deux types de renforts fibreux présentant trois directions orthogonales de fibres :

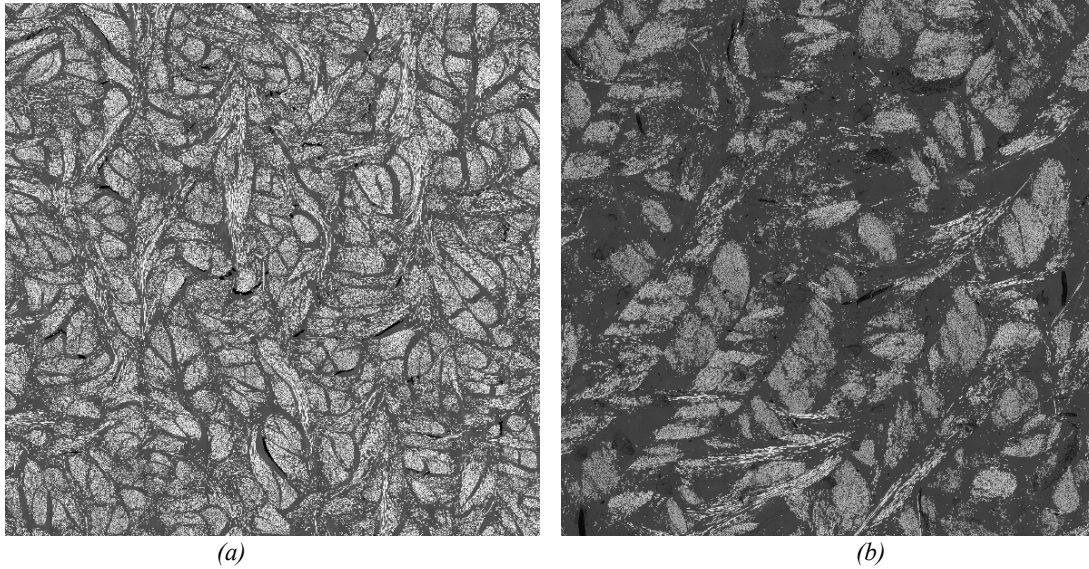


Figure 4.13 : Différents types de renforts fibreux.

Ces images sont en réalité des mosaïques de centaines d'images acquises avec un microscope optique muni d'une platine motorisée permettant d'obtenir automatiquement des champs jointifs. Ces images contiennent un nombre de pixels de l'ordre de 10^8 . Le matériau de la Figure 4.13(a) est constitué de couches de tissus, tandis que celui de la Figure 4.13(b) est basé sur un empilement de couches de fils non tissés.

Pour des raisons de confidentialité, les différentes mesures de taux de fibres ne sont pas communiquées (équations (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8)).

4.2.2 Analyse spatiale du matériau (a)

4.2.2.1 Modélisation du variogramme

Le variogramme empirique de l'image segmentée de la Figure 4.13(a) a été calculé. Il semble atteindre un palier. Un modèle de variogramme a été ajusté, et est représenté sur la figure suivante :

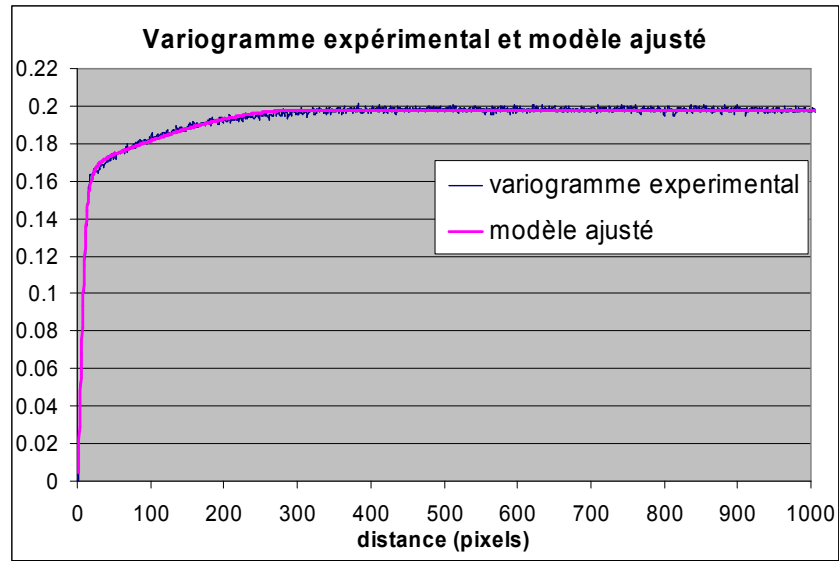


Figure 4.14 : Variogramme expérimental et ajusté.

Le modèle de variogramme choisi présente une convergence exponentielle vers le palier. A partir de ce modèle, nous avons calculé la portée intégrale A , la variance asymptotique $\sigma^2 A$ et l'écart-type correspondant à la fiabilité de l'estimation du taux de fibre à partir des données disponibles, dont les résultats sont présentés en Figure 4.15 :

Portée intégrale	Variance asymptotique	Ecart-type estimé
9540	1880	0.35 %

Figure 4.15 : Résultats de l'approche basée sur la modélisation du variogramme

Sous l'hypothèse de normalité de la moyenne estimée, l'écart-type estimé induit l'intervalle de confiance suivant pour le taux de fibres réel :

$$IC_{95\%}(\mu(V)) = \mu \pm 0.7\% \quad (4.5)$$

4.2.2.2 Sous-échantillonnage par bloc

L'approche par sous-échantillonnage a également été appliquée. La courbe d'évolution de la variance de l'estimateur de la moyenne est présentée Figure 4.16.

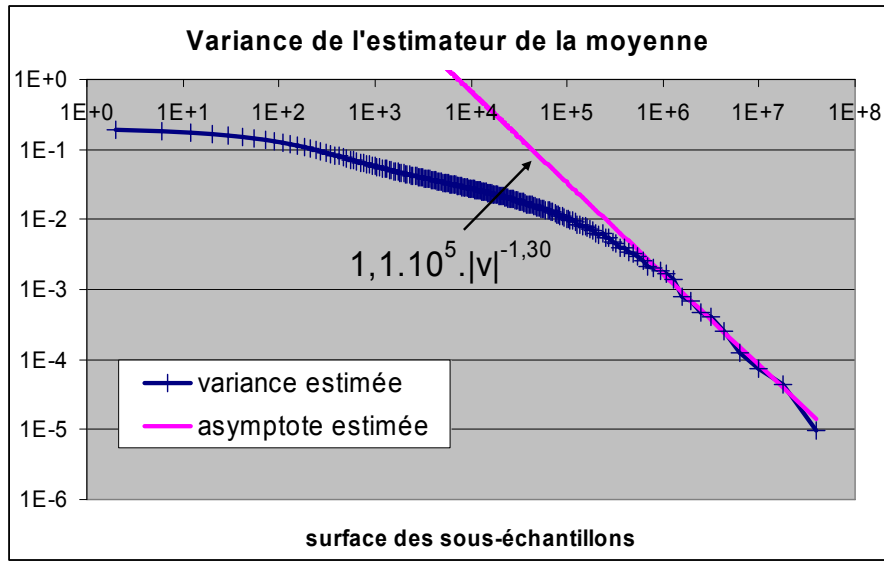


Figure 4.16 : Variance de l'estimateur du taux en fonction de la taille des sous-échantillons

La décroissance de l'estimateur de la moyenne correspond aux critères d'homogénéité que nous avons définis. La pente estimée est relativement forte (1.3), imputable à une forte régularité de la structure, que l'on peut attribuer à l'empilement des couches de tissus. Les résultats issus du sous-échantillonnage par blocs sont présentés en Figure 4.17.

Variance asymptotique	Vitesse de décroissance	Homogénéité	Ecart-type estimé
110000	1.30	Oui	0.12 %

Figure 4.17 : Résultats du sous-échantillonnage par blocs pour le renfort fibreux tissé.

Sous l'hypothèse de normalité de la moyenne estimée, l'écart-type estimé induit l'intervalle de confiance suivant pour le taux de fibres réel :

$$IC_{95\%}(\mu(V)) = \mu \pm 0.24\% \quad (4.6)$$

4.2.2.3 Comparaison des deux approches

La Figure 4.18 présente l'évolution de la variance d'estimation de la moyenne obtenue à partir des deux approches utilisées, fondées respectivement sur la modélisation du variogramme et sur le sous-échantillonnage par blocs :

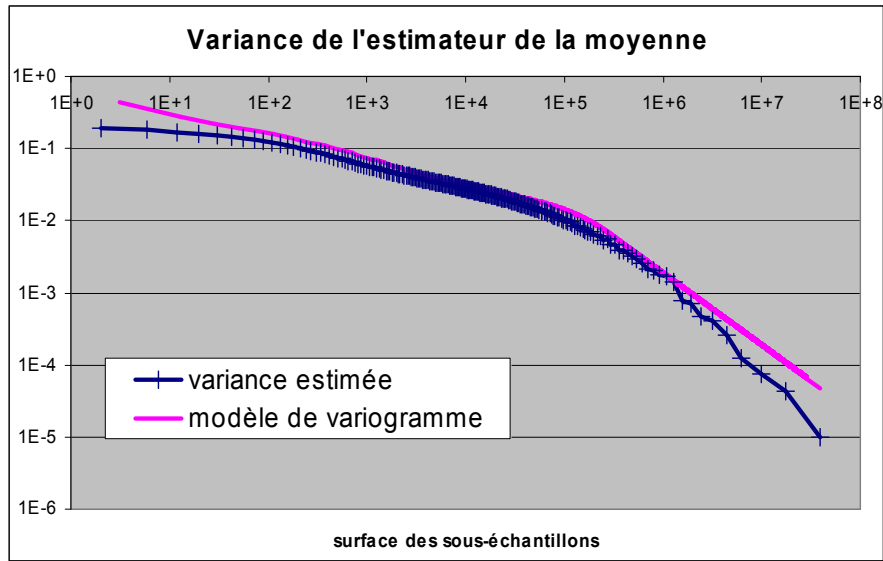


Figure 4.18 : comparaison des deux méthodes.

On observe que la fonction choisie pour modéliser le variogramme fournit, dans un premier temps, un résultat relativement proche de la courbe empirique, mais un décrochage apparaît lorsque la surface augmente.

Remarque :

La Figure 4.19 présente la variance de l'estimateur de la variance pour le renfort étudié :

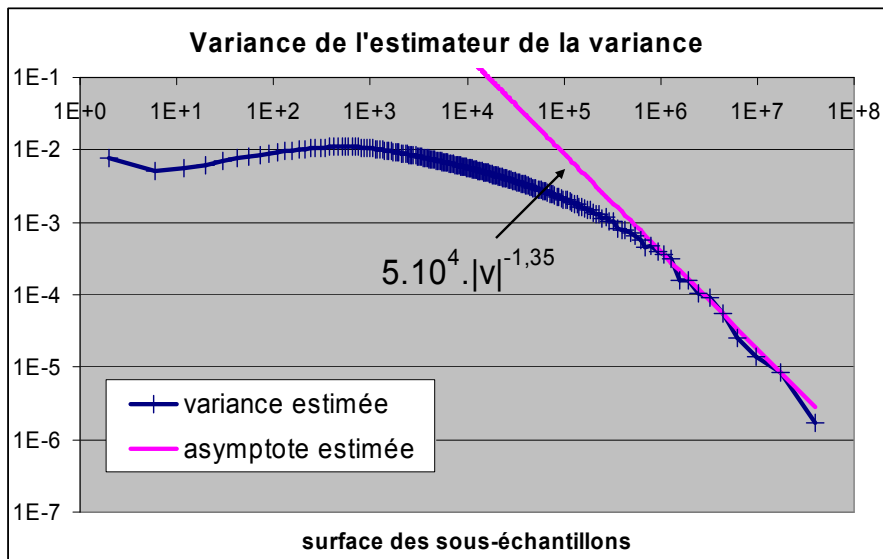


Figure 4.19 Variance de l'estimateur de la variance et asymptote estimée

L'asymptote estimée indique une vitesse de décroissance similaire à celle obtenue pour l'estimateur de la moyenne, ce qui était prévisible puisque l'image analysée est binaire (voir section 3.4.2). La variance apparaît donc comme homogène.

4.2.3 Analyse spatiale du matériau (b)

Pour ce matériau, trois acquisitions d'un même échantillon sont disponibles, et présentées en Figure 4.20 :

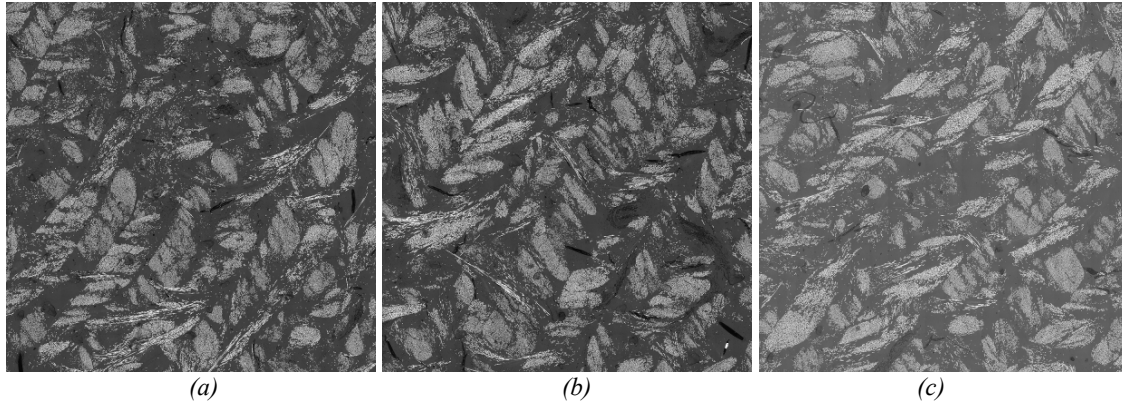


Figure 4.20 : Trois acquisition d'un même renfort fibreux.

4.2.3.2 Modélisation du variogramme

Pour chacune de ces acquisitions, (a), (b) et (c), après l'étape de segmentation, les moyennes circulaires des variogrammes empiriques ont été calculés et des modèles de variogramme ont été ajustés :

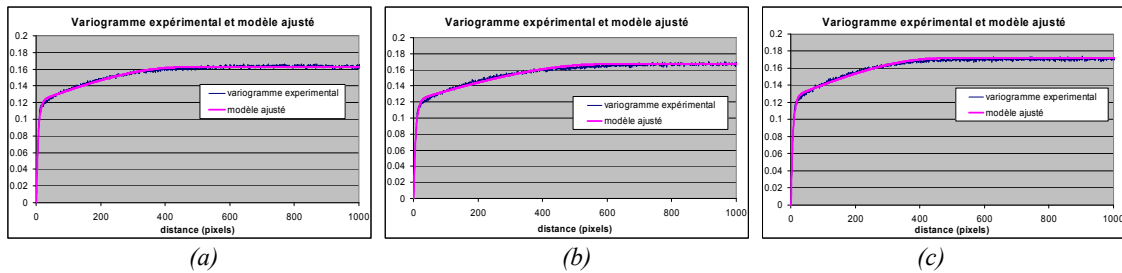


Figure 4.21 : Variogrammes expérimentaux et ajustés pour chacune des acquisitions.

Le même modèle de variogramme a été ajusté pour chacune des acquisitions, présentant une convergence exponentielle vers le palier. A partir de ces modèles, nous avons calculé la portée intégrale A , la variance asymptotique $\sigma^2 A$ et l'écart-type correspondant à la fiabilité de l'estimation du taux de fibre à partir des données disponibles.

Renfort	Portée intégrale	Variance asymptotique	Ecart-type estimé
(a)	32900	5340	0.58 %
(b)	58300	9730	0.79 %
(c)	36100	6200	0.63 %

Figure 4.22 : Résultats de l'approche basée sur la modélisation du variogramme

Sous l'hypothèse de normalité de la moyenne estimée, les écart-types induisent les intervalles de confiance suivants pour le taux de fibres réel de chacun des matériaux dont (a) et (b) sont issus :

$$\begin{aligned} (a): IC_{95\%}(\mu(V)) &= \mu_a \pm 1.16\% \\ (b): IC_{95\%}(\mu(V)) &= \mu_b \pm 1.58\% \\ (c): IC_{95\%}(\mu(V)) &= \mu_c \pm 1.26\% \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2.3.3 Sous-échantillonnage par bloc

L'approche par sous-échantillonnage a également été appliquée. Les courbes d'évolution de la variance de l'estimateur de la moyenne, pour chacun des deux matériaux, sont présentées Figure 4.16.

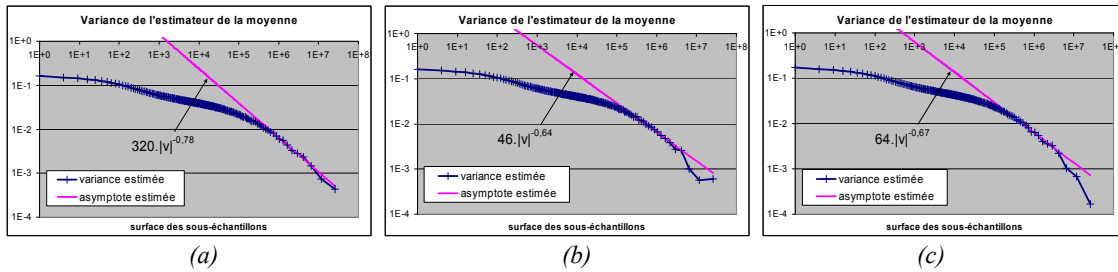


Figure 4.23 : Variance de l'estimateur du taux en fonction de la taille des sous-échantillons

Il ressort de cette analyse que pour les trois acquisitions, les comportements asymptotiques de l'estimateur de la moyenne sont relativement équivalents, et en contradiction avec le critère d'homogénéité défini en section 3.3.1. Les mesures effectuées sur cette image ne sont donc pas forcément fiables pour caractériser l'ensemble du matériau.

Etant donné que les trois acquisitions présentent des comportements similaires suggèrent que cette décroissance lente n'est pas due à une non stationnarité locale.

Si l'on retient l'hypothèse d'un phénomène de type mémoire longue, et que l'on considère donc que l'échelle d'observation est suffisante pour que ces échantillons soient représentatifs du matériau, on obtient les résultats suivants :

Renfort	Variance asymptotique	Vitesse de décroissance	Ecart-type pour le taux (hypothèse de mémoire longue)
(a)	315	0.78	1.30 %
(b)	46	0.64	1.82 %
(c)	63	0.67	1.68 %

Figure 4.24 : Résultats du sous-échantillonnage par blocs pour les acquisitions (a), (b) et (c), sous l'hypothèse de mémoire longue.

Les intervalles de confiance à 95%, sous réserve d'une distribution normale seraient alors les suivants :

$$\begin{aligned} (a): IC_{95\%}(\mu(V)) &= \mu_a \pm 2.60\% \\ (b): IC_{95\%}(\mu(V)) &= \mu_b \pm 3.64\% \\ (c): IC_{95\%}(\mu(V)) &= \mu_c \pm 2.52\% \end{aligned} \quad (4.8)$$

Notons que si l'hypothèse de mémoire longue ne tient pas, et si le comportement observé correspond uniquement à une fenêtre d'observation trop petite pour que les images soient représentatives du matériau, alors les écart-types indiqués en Figure 4.24 sont surévalués.

Afin de conclure sur la nature du processus, et sur la représentativité de ces images, il serait nécessaire d'observer un échantillon de plus grande taille.

4.2.4 Analyse par direction

Les directions des fibres jouent un rôle critique pour les propriétés mécaniques du matériau. Les exemples de matériaux analysés ici présentent 3 directions principales de fibres, appelées fibres en X , en Y et en Z . Nous avons proposé une méthode de labellisation des fibres dans les différentes directions X , Y et Z dans Blanc et al. [Bla06a]. Cette labellisation repose sur la mesure des orientations de chaque fibre et sur la structure en fils des matériaux. Les résultats de cette segmentation sur les images de la Figure 4.13 sont donnés en Figure 4.25, où le blanc correspond aux fibres labellisées dans la direction Z , le gris clair pour les fibres Y et le gris sombre pour les fibres X :

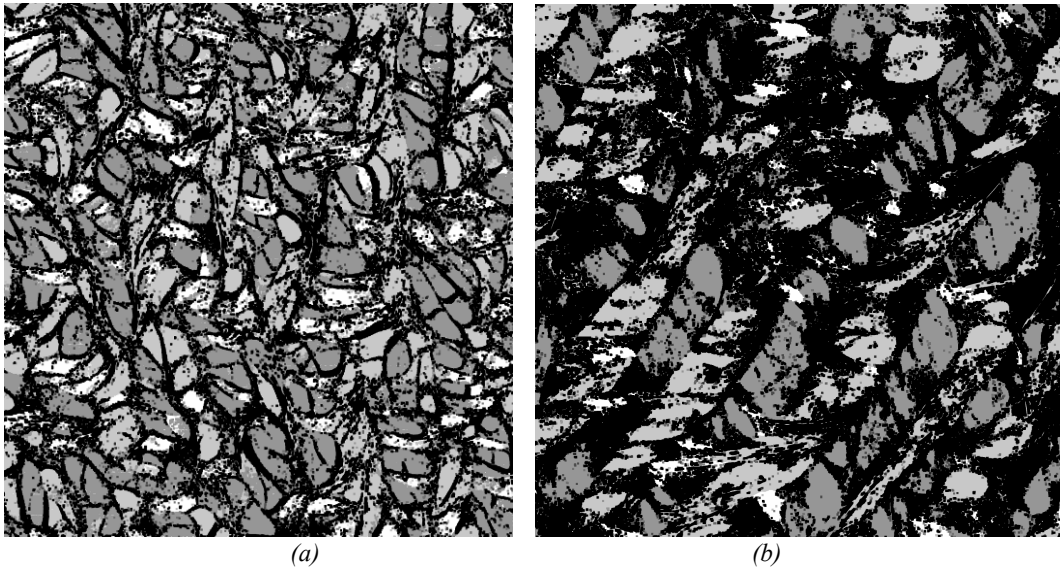


Figure 4.25 : Labellisation des fibres par direction. Une fermeture morphologique en niveaux de gris a été appliquée afin de mieux distinguer les différentes directions de fibres.

Le résultat de cette labellisation permet d'estimer les taux de fibres dans chacune des directions, et d'évaluer la variance de ces estimations. La structure en couches du matériau (b) apparaît très clairement. La labellisation est particulièrement difficile sur le matériau (a) qui, du fait du tissage, présente une distribution des directions des fibres beaucoup plus dispersée que dans le cas du matériau (b). Cependant, la labellisation proposée semble relativement bonne.

Pour chacun de ces matériaux, l'analyse de la variance du taux à l'aide du sous-échantillonnage par bloc fournit les résultats suivants :

Renfort	Vitesse de décroissance	Homogénéité	Ecart-type pour le taux
(a) direction X	1.30	oui	0.30 %
(a) direction Y	0.99	oui	0.53 %
(a) direction Z	1.02	oui	0.31 %
(b) direction X	0.88	non	(1.15 %)
(b) direction Y	0.95	non	(0.88 %)
(b) direction Z	0.8	non	(0.34 %)

Figure 4.26 : Résultats du sous-échantillonnage par blocs. Les résultats entre parenthèses correspondent aux estimations effectuées à partir des asymptotes, mais l'homogénéité des données étant douteuse, ces résultats ne peuvent pas être considérés comme fiables.

Evidemment, ces résultats sont dépendants de la méthode de labellisation employée. Ils ne constituent qu'une partie des incertitudes dans la chaîne métrologique. Notamment, l'estimation de l'orientation des fibres ne fonctionne que si la fibre apparaît bien elliptique sur l'image. Dans le cas

contraire, l'objet n'est pas retenu, ce qui explique la différence entre le taux global et la somme des taux directionnels.

Quelle que soit la famille (X, Y ou Z) de fibres considérée, les résultats concernant le matériau (b) sont en contradictions avec le critère d'homogénéité de la moyenne. En revanche, le matériau (a) présente un taux de phase considéré comme homogène pour chacune des directions de fibres.

4.3 Alliage γ/γ' base Nickel

4.3.1 Description et aspects stéréologiques

L'alliage métallique γ/γ' est notamment utilisé par la société Turboméca (Groupe Safran) dans certains éléments critiques du système de motorisation d'hélicoptères (turbines haute pression). Ces pièces sont soumises à des contraintes très importantes à haute température. Le procédé de fabrication de l'alliage engendre une structure composite particulière, avec la formation de deux phases principales : une phase γ' se présentant sous la forme de 'cubes' arrangés selon une maille cubique régulière, et une phase γ séparant les phases γ' , tel qu'illustré sur le schéma ci-dessous :

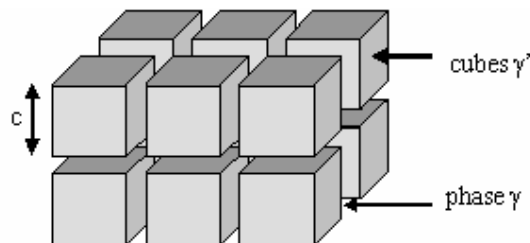


Figure 4.27 : Schéma de la structure du matériau γ/γ' .

Le matériau présente donc trois directions privilégiées orthogonales. L'utilisation de la coupe bise permet une estimation non biaisée du taux de phase, voir Germain et al. [Ger05]. Cependant, pour des raisons notamment liées à la forme des pièces, la coupe bise est difficile à mettre en œuvre et les coupes sont réalisées à peu près parallèles à l'une des faces des cubes γ' .

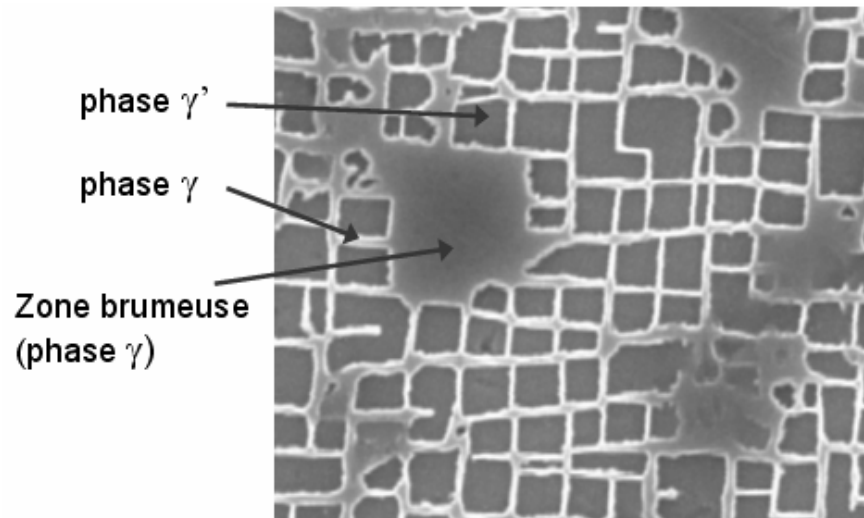


Figure 4.28 : Coupe 'droite' de matériau γ/γ' .

L'utilisation d'un tel plan de coupe est susceptible d'augmenter dramatiquement la variance des mesures de taux et des paramètres de forme des phases γ' . Ce plan de coupe fait également apparaître de larges zones dites 'brumeuses' (cf. Figure 4.28) correspondant à des coupes longitudinales d'une phase γ . Nous avons développé deux méthodes indépendantes de corrections des mesures, basées sur l'estimation des angles de coupes directement à partir des images. Ces deux méthodes produisent des résultats équivalents. L'une des méthodes d'estimation des angles de coupe repose sur la disposition des zones brumeuses, l'autre sur les statistiques des formes des phases γ' , consulter [Ger05] pour plus de détails.

4.3.2 Analyse spatiale d'un échantillon

4.3.2.1 Prise en compte des zones 'brumeuses' comme phase γ

La Figure 4.29 présente un exemple d'image de matériau et la segmentation de la phase γ' .

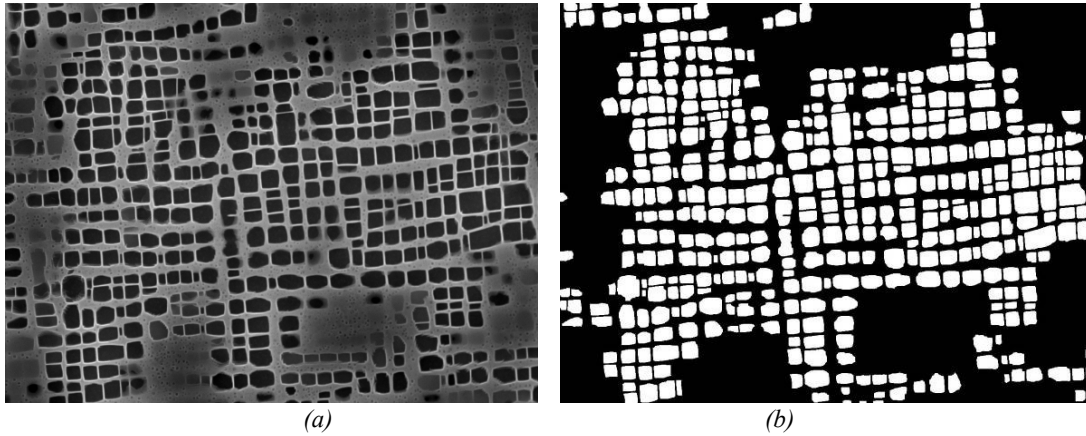


Figure 4.29 : Exemple d'image de matériau γ/γ' (a). et image segmentée de la phase γ' .

Les zones dites 'brumeuses' sont ici distribuées essentiellement sur le tour de l'image, et sont de taille importante par rapport à la taille de l'image. Il est clair que cette image apparaît comme inhomogène. Ces impressions visuelles sont confirmées en Figure 4.30 par le comportement de la variance des estimateurs de la moyenne et de la variance.

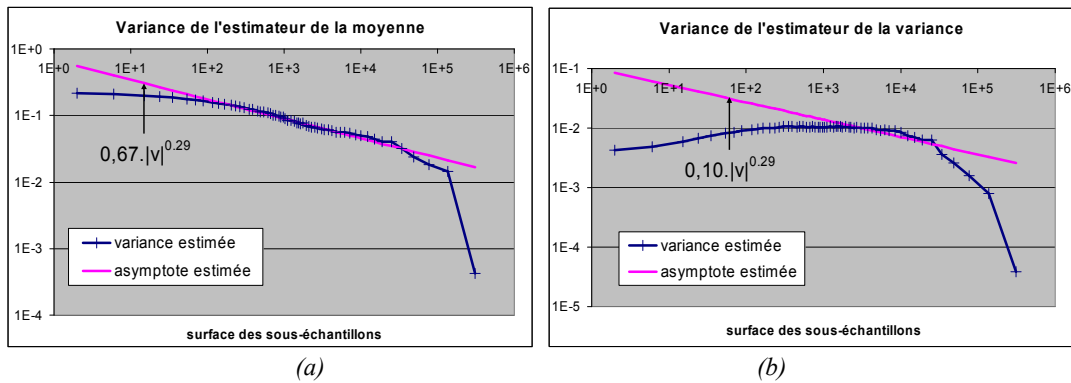


Figure 4.30 : Variance de estimateurs de la moyenne (a) et de la variance (b)

4.3.2.2 Masquage des zones brumeuses

En revanche, les zones du matériau épargnées par les zones brumeuses semblent relativement homogènes. Afin de vérifier ceci, nous considérons un masquage de l'image, dans le but d'analyser la distribution de la phase γ' au sein des zones épargnées par les zones brumeuses.

A partir de l'image segmentée, il n'est pas difficile de construire un masque indiquant la position des zones brumeuses. Notons par ailleurs que les frontières de ce masque n'ont pas besoin d'être très précises : le plus important ici est de délimiter les zones où la texture est la plus 'propre', c'est-à-dire épargnée par les zones 'brumeuses'.

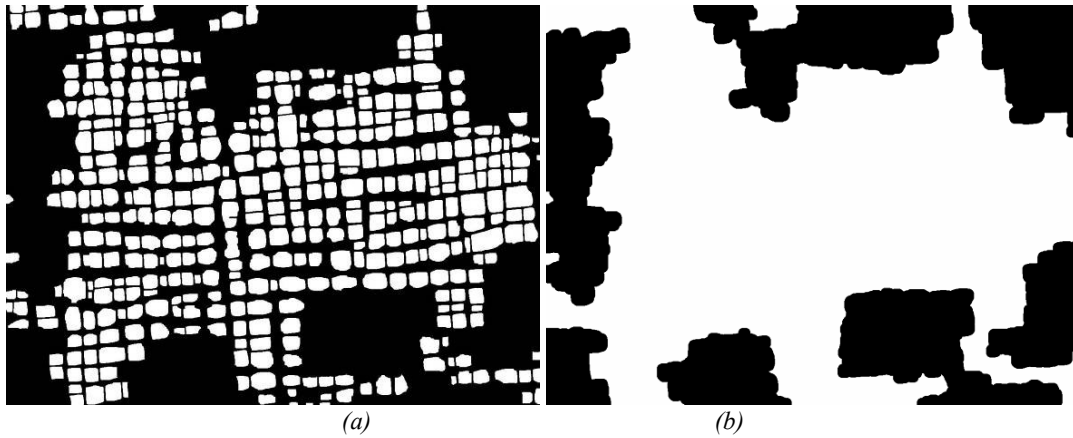


Figure 4.31 : Image segmentée (a) et masque (b)

Le sous-échantillonnage par blocs est appliqué en prenant en compte le masquage, et fournit les résultats suivants (Figure 4.32) pour l'évolution de la variance des estimateurs de la moyenne et de la variance.

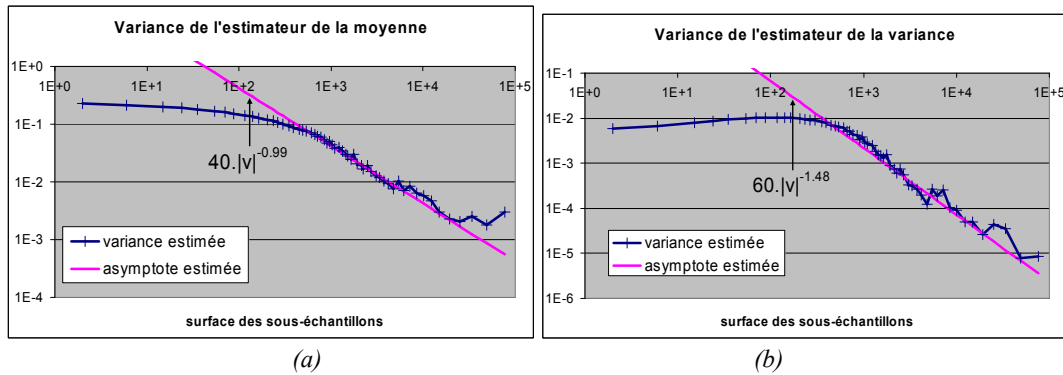


Figure 4.32 : Variance des estimateurs de la moyenne (a) et de la variance (b)

Ces courbes sont à comparer avec celles obtenues en Figure 4.30. On observe ici des comportements compatibles avec les critères d'homogénéité. Il apparaît donc que la microstructure est effectivement homogène si l'on ne tient pas compte des zones brumeuses.

Remarque :

On peut procéder de la même manière pour l'estimateur de la variance. Les conséquences sont similaires.

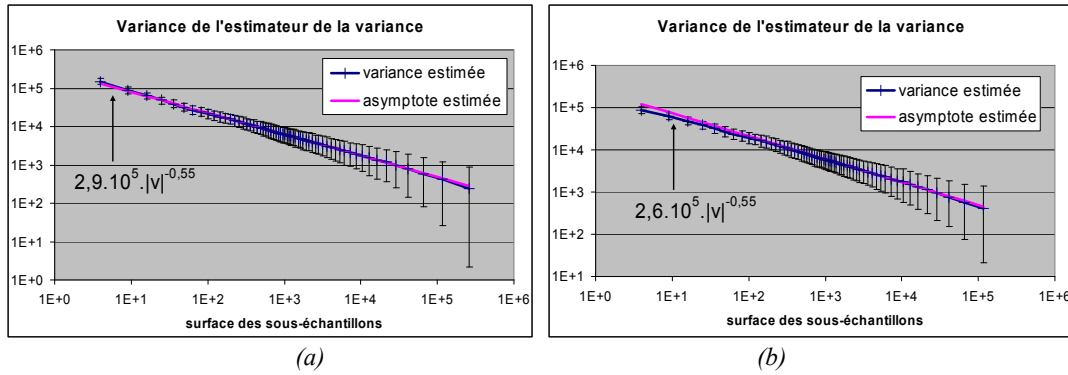


Figure 4.33 : Variance de l'estimateur de la variance, texture complète (a) et texture masquée (b)

4.3.3 Discussion

En ne considérant que les zones de l'image épargnées par les zones brumeuses, la mesure du taux est entachée d'un biais important. Cependant, si ces zones sont effectivement homogènes, la mesure du taux sur l'image masquée est effectivement représentative de la texture masquée. Une correction de nature stéréologique permet de corriger le biais, moyennant quelques approximations sur la géométrie du matériau volumique. En revanche, il est difficile de prévoir comment évolue la variance de la mesure lors de la correction du biais.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'apport des statistiques spatiales pour l'estimation de l'incertitude de mesure d'une statistique au sein d'une donnée homogène. En particulier, nous nous sommes intéressés à déterminer la variance d'estimation de la moyenne et de la variance d'un processus aléatoire stationnaire ergodique à partir d'une réalisation unique spatialement bornée. Cette problématique nous a amenés à préciser les notions 'd'échantillon représentatif' et d'image 'homogène', indispensables à la validité de l'inférence statistique.

Nous avons décrit, dans un premier temps, deux familles de méthodes paramétriques permettant le calcul de la variance d'estimation de la moyenne. Nous avons ainsi évoqué une méthode paramétrique reposant sur la modélisation de l'autocovariance ou du variogramme, et abordé la question de l'estimation des paramètres du modèle. Nous avons également décrit des éléments pour la modélisation des processus de points et d'objets, en faisant notamment le lien entre les descripteurs classiquement utilisés pour ces processus (fonctions de corrélations des paires de points et des marques) et l'autocovariance. Un exemple de modèle présentant deux échelles caractéristiques a notamment été proposé. Une discussion est finalement proposée sur les limites des approches paramétriques. En particulier, dans l'objectif d'estimation de la variance d'une mesure, nous avons vu que le choix du modèle influe fortement sur l'estimation de la variance d'estimation de la moyenne.

Devant la difficulté du choix d'un modèle, une méthode non paramétrique a été présentée. Cette méthode, basée sur un sous-échantillonnage par blocs, permet d'estimer la variance d'estimation d'une statistique en fonction de l'échelle d'analyse. Dans un premier temps, nous avons examiné les propriétés statistiques des résultats fournis par la méthode sur des exemples de processus d'objets relativement simples. La généralisation de la méthode à l'ensemble des textures stationnaires a ensuite été envisagée. Une analyse théorique du comportement de la variance d'estimation sur les différentes composantes, au sens de la décomposition de Wold, d'un processus aléatoire stationnaire nous a alors permis d'établir des critères objectifs qualifiant l'homogénéité de la moyenne et de la variance d'une image. Les critères portent sur la vitesse de décroissance asymptotique de la variance de la statistique d'intérêt lorsque la surface de la fenêtre d'observation des données augmente. En particulier, si $|V|$ est le nombre de pixels de l'image, nous considérons que la moyenne est homogène sur l'image si la variance d'estimation de la moyenne décroît asymptotiquement au moins aussi vite que $|V|^{-1}$. Dans le cas de la variance, la décroissance de sa variance d'estimation doit être au moins aussi rapide que $|V|^{-1/2}$. Notons que selon ces critères, les processus à mémoire longue ne sont pas homogènes. De

nombreuses simulations sur des processus synthétiques et sur des images réelles ont été effectuées, et permettent de valider ces critères d'homogénéité.

Les différentes méthodes d'estimation de la variance de l'estimateur de la moyenne ont finalement été appliquées à des images de matériaux composites. L'intérêt industriel de ces applications étant de mesurer le taux des différentes phases de matériaux composites utilisés dans des applications aéronautiques, en leur affectant une mesure de fiabilité (variance ou intervalle de confiance)

L'estimateur de la variance présente en revanche un intérêt plus limité dans le cadre de la caractérisation des matériaux. Il est en effet difficile de relier ce paramètre à des propriétés mécaniques ou physiques. C'est pourquoi il n'a pas été réellement utilisé dans les applications. Cependant, les résultats obtenus pour cet estimateur constituent une base de travail utile pour l'extension des critères d'homogénéité aux éléments de la fonction d'autocovariance.

La méthode de sous-échantillonnage par bloc peut aisément être adaptée à n'importe quelle mesure scalaire, et donc notamment aux éléments de la fonction d'autocovariance (par exemple la covariance entre deux pixels voisins $Cov(0,1)$, $Cov(1,0)$, ...). Les simulations effectuées pour évaluer la variance d'estimation des éléments de l'autocovariance semblent indiquer que le comportement asymptotique est similaire à celui de l'estimateur de la variance. Cependant, des recherches complémentaires sont nécessaires pour garantir la validité des critères d'homogénéité proposés à l'estimation de l'autocovariance.

D'autre part, on peut considérer que la méthode de sous-échantillonnage par blocs présentée dans ce mémoire utilise la variance comme une mesure de la dispersion entre des mesures scalaires extraites des données. En utilisant une mesure de dispersion adaptée, on peut envisager d'appliquer le sous-échantillonnage par blocs à d'autres types de mesures, telles que des orientations, des vecteurs ou des distributions. Ainsi, on pourra par exemple utiliser la distance de Battacharya pour caractériser la similarité entre les histogrammes locaux d'une texture. Pour étudier une distribution d'orientations, on pourra calculer la variance directionnelle entre les orientations locales, etc. En revanche, l'interprétation des résultats et l'élargissement des critères d'homogénéité à ce type de mesures resteront des points délicats, et susceptibles de proposer de nouveaux développements en continuité de ce travail.

Annexes

Annexe A Décomposition de Wold

La décomposition de Wold permet d'écrire tout processus aléatoire bidimensionnel stationnaire à l'ordre 2 comme la somme d'une composante complètement non déterministe (CND), d'un nombre fini de composantes harmoniques et de composantes évanescentes. Les composantes harmoniques et évanescentes sont singulières sur le spectre, tandis que la composante CND est caractérisée par un spectre absolument continu. Consulter notamment Francos et al. [Fra93], Liu et al. [Liu96] et les références citées dans ces articles pour des détails techniques sur la décomposition de Wold. Nous détaillons ici les modèles classiques associés à chacune des composantes, en dimension 2. Cette décomposition a été généralisée en dimension 3, avec les modèles correspondants, par Stitou et al. [Sti07].

A.1 Processus complètement non déterministe

Le modèle généralement utilisé pour modéliser une composante complètement non déterministe est le modèle autorégressif (AR). Un processus AR unidimensionnel X d'ordre p se définit par ses p coefficients, notés a_i , et son processus générateur ε (souvent i.i.d. gaussien) :

$$X_n = -\sum_{i=1}^p a_i X_{n-i} + \varepsilon_n$$

Le modèle autorégressif fait intervenir une notion d'ordre entre les échantillons. Pour spécifier le modèle en dimension 2, il convient de définir également une relation d'ordre, voir notamment Aksasse et Radouane [Aks99].

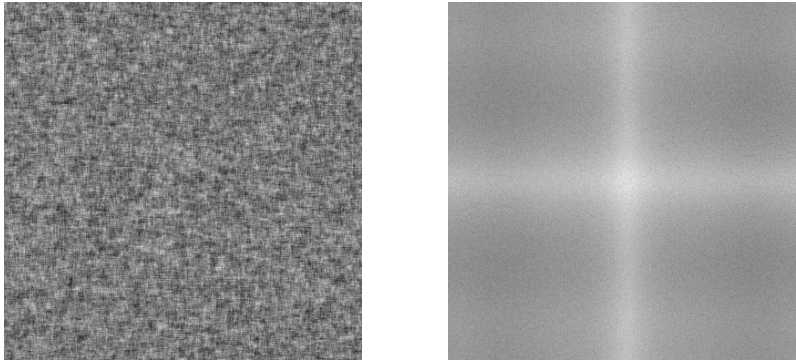


Figure A.1 : Réalisation d'un processus CND (gauche) et son spectre (droite)

Ce type de processus correspond à une image d'aspect très aléatoire, non structuré.

A.2 Processus harmonique

Un processus harmonique peut être défini de la manière suivante :

$$Z(u, v) = a \cdot \cos(2\pi(f_L u + f_H v) + \varphi) + b \cdot \sin(2\pi(f_L u + f_H v) + \varphi)$$

où la phase φ est une variable aléatoire distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$, les amplitudes a et b et les fréquences horizontale f_L et verticale f_H sont des paramètres constants.

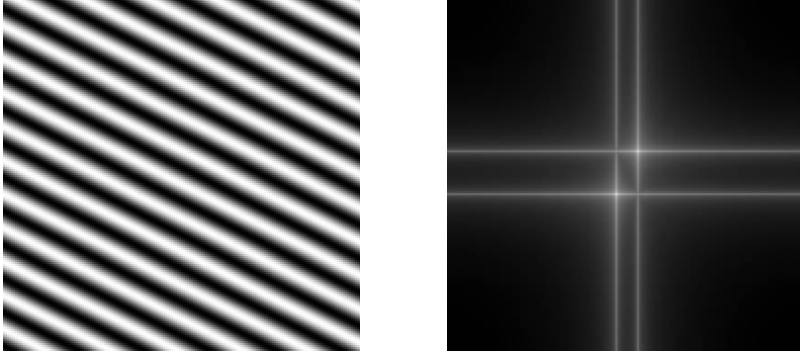


Figure A.2 : Réalisation d'un processus harmonique (gauche) et son spectre (droite).

Ces processus produisent des images d'allure périodique.

A.3 Processus évanescent

Un processus évanescent est une combinaison de deux processus unidimensionnels orthogonaux. Si l'on note $\theta = \tan(\alpha/\beta)$ la direction de l'un de ces processus, un modèle de processus évanescent peut s'écrire :

$$Z(u, v) = R(\alpha u + \beta v) \sin(2\pi(\beta u - \alpha v)f) + S(\alpha u + \beta v) \cos(2\pi(\beta u - \alpha v)f)$$

où R et S sont des processus complètement non déterministes unidimensionnels dépendants, généralement modélisés par des processus AR, et la fréquence f est une constante.

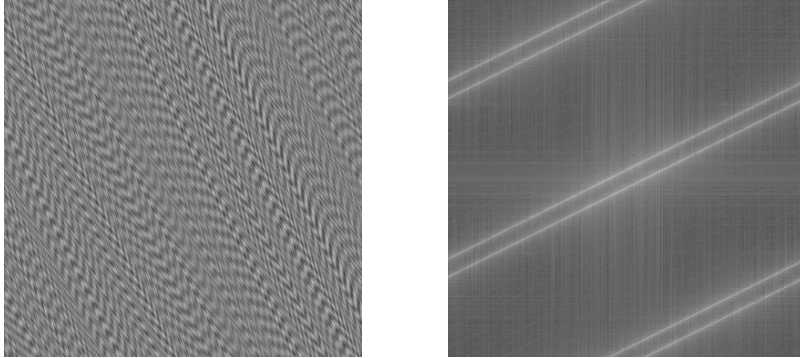


Figure A.3 : Réalisation d'un processus évanescent (gauche) et son spectre (droite).

Ces processus produisent des images présentant des caractéristiques structurées, périodiques dans une direction et aléatoire dans la direction orthogonale.

Annexe B Processus de points

B.1 Processus agrégé de Matérn

On rappelle que, pour les processus agrégés, les points du processus ont tendance à se regrouper et former des agrégats.

On rappelle les notations utilisées : μ_p l'intensité du processus de points de Poisson pères, μ_f l'intensité du processus de Poisson des points fils dans les agrégats et b_R le volume d'une boule de rayon R et μ l'intensité du processus final est :

$$\mu = \mu_p \mu_f b_R$$

La fonction de corrélation des paires de points $g(h)$ est définie comme la probabilité d'observer deux points à distance h l'un de l'autre divisée par l'intensité au carré du processus de points. Dans le cas d'un processus agrégé de Matérn, la probabilité d'observer deux points à distance h l'un de l'autre peut se décomposer en deux termes. Etant centré sur un point du processus, le second point observé provient soit du même agrégat (c'est à dire ayant le même point père), soit d'un autre agrégat. La probabilité qu'il provienne d'un autre agrégat est stationnaire, tandis que la probabilité que le second point provienne du même agrégat dépend de la distance h considérée, du rayon R des agrégats et de l'intensité μ_f à l'intérieur des agrégats. Si l'on choisit deux points distants de h , la probabilité qu'ils proviennent d'un même agrégat est donc égale à la probabilité que le point père soit dans l'intersection de deux boules de rayon R centrées sur ces deux points fils, soit $I_R(h)\mu_p$. On en déduit donc la fonction de corrélation des paires de points :

$$g(h) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \delta(h) & h = 0 \\ 1 + \frac{I_R(h)}{\mu_p b_R^2} & 0 < h < 2R \\ 1 & h \geq 2R \end{cases}$$

On note $b(x, R)$ le disque, en dimension 2, de centre x et de rayon R . La mesure de Lebesgue de l'intersection de deux disques de même rayon, placé à distance h l'un de l'autre se déduit directement de la différence entre l'aire de morceau de disque et du triangle OAB sur la figure suivante :

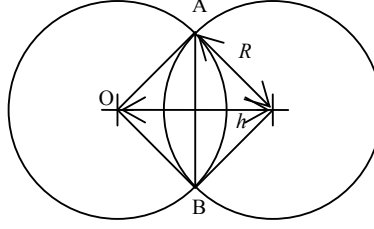


Figure B.1 : Intersection de deux disques de même rayon.

Il en résulte directement :

$$|b(0,R) \cap b(h,R)| = I_R(h) = \begin{cases} 2R^2 \left(\arccos\left(\frac{h}{2R}\right) - \frac{h}{2R} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4R^2}} \right) & \text{si } h < 2R \\ 0 & \text{si } h \geq 2R \end{cases}$$

B.2 Processus régulier de Matérn

Les notations sont les suivantes : μ_p l'intensité du processus de Poisson initial, R le rayon d'inhibition et $I_R(h)$ (resp. $U_R(h)$) le volume de l'intersection (resp. union) de deux boules de rayon R distantes de h .

On se place sur un point quelconque du processus. Le nombre d'autres points du processus initial à distance inférieure à R est donné par la loi de Poisson et noté k . D'après la définition du processus régulier de Matérn, la probabilité de conserver le point initial sachant k est clairement égale à $1/(k+1)$. L'intensité du processus final est donc :

$$\mu = \mu_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{(\mu_p b_R)^k}{k!} \exp(-\mu_p b_R) = \frac{1 - \exp(-\mu_p b_R)}{b_R}$$

On calcule maintenant la densité de paires de points du processus. Soient deux points s et u du processus initial, distants de h . La probabilité $p(s,u)$ que les deux points soient conservés est évidemment nulle si $h < R$. Dans le cas contraire, cette probabilité ne dépend que de la configuration locale. En particulier, on note n_1 le nombre de point dans le croissant autour de s et n_2 dans le disque centré sur u , tel qu'illustré sur la figure suivante.

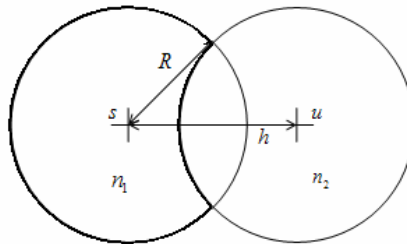


Figure B.2 : Intersection de deux disques de même rayon.

Pour que les deux points soient conservés, s ou u (disons s pour l'exemple) est forcément affecté de la marque la plus faible parmi l'ensemble des $(n_1 + n_2 + 2)$ points contenu dans le voisinage (l'union des deux boules). L'autre point, u , doit seulement avoir la plus petite marque dans sa sphère

d'influence (contenant donc $(n_2 + 1)$ points au total) pour être conservé. La probabilité de conserver s et u est donc égale à l'espérance mathématique :

$$p(s, u) = 2E\left[\frac{1}{n_1 + n_2 + 2} \cdot \frac{1}{n_2 + 1}\right]$$

On note X la variable aléatoire définie par :

$$X = \frac{1}{n_1 + n_2 + 2} \cdot \frac{1}{n_2 + 1}$$

En notant $\mu_1 = \mu_p(U_R(h) - b_R)$ l'intensité du nombre de points dans le croissant autour de s , et en utilisant le fait que le processus initial est poissonnien, l'espérance conditionnée de X par la connaissance de n_2 s'exprime :

$$E[X|n_2] = \frac{1}{n_2 + 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k + n_2 + 2} \frac{\mu_1^k}{k!} e^{-\mu_1}$$

On constate que la somme peut s'écrire sous forme d'une intégrale :

$$E[X|n_2] = \frac{1}{n_2 + 1} e^{-\mu_1} \mu_1^{-n_2-2} \int_0^{\mu_1} x^{n_2+1} e^x dx$$

Par intégration par parties successives, on obtient l'expression suivante :

$$E[X|n_2] = \frac{1}{n_2 + 1} \left((-1)^{n_2+2} (n_2 + 1)! e^{-\mu_1} \mu_1^{-n_2-2} + \sum_{k=0}^{n_2+1} (-1)^k \frac{(n_2 + 1)!}{(n_2 + 1 + k)!} \mu_1^{-k-1} \right)$$

L'espérance de X s'obtient alors en considérant les cas possibles pour la variable n_2 , en notant $\mu_2 = \mu_p b_R$ l'intensité du nombre de points dans le disque centré sur u :

$$\begin{aligned} E[X] &= A + B \\ A &= \sum_{i=0}^{\infty} \left((-1)^i i! e^{-\mu_1} \mu_1^{-i-2} \right) \frac{\mu_2^i}{i!} e^{-\mu_2} \\ B &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n_2+1} (-1)^k \frac{n_2!}{(n_2 + 1 + k)!} \mu_1^{-k-1} \right) \frac{\mu_2^i}{i!} e^{-\mu_2} \end{aligned}$$

Il vient rapidement :

$$A = \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)}}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}$$

Le second terme B se décompose :

$$B = \frac{1 - e^{-\mu_2}}{\mu_1 \mu_2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left((-1)^i \frac{\mu_2^{i-1}}{\mu_1^{i+1}} \right) = \frac{1 - e^{-\mu_2}}{\mu_1 \mu_2} - \frac{1}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)}$$

On en déduit l'expression de la probabilité de conserver les deux points s et u :

$$p(s,u) = 2E[X] = 2 \frac{\mu_T(1 - e^{-\mu_2}) - \mu_2(1 - e^{-\mu_T})}{\mu_1\mu_2\mu_T}$$

avec $\mu_T = \mu_1 + \mu_2 = \mu_p U_R(h)$

La fonction de corrélation de paires de points du processus régulier de Matérn peut alors s'écrire :

$$g(h) = \begin{cases} \delta(h)/\mu & h = 0 \\ 0 & \text{pour } 0 < h < R \\ \frac{2U_R(h)(1 - \exp(-\mu_p b_R)) - 2b_R(1 - \exp(-\mu_p U_R(h)))}{\mu^2 b_R U_R(h)(U_R(h) - b_R)} & h \geq R \end{cases}$$

Annexe C Estimateurs

C.1 Borne de Cramer-Rao de l'estimateur de la moyenne par sous-échantillonnage

On considère un processus gaussien identiquement et indépendamment distribué (i.i.d.), de moyenne μ_0 et de variance σ_0^2 , observé sur un ensemble de taille V . On s'intéresse à la variance estimée à partir de n sous-échantillons de taille $v < V$, tels que $nv = V$, de l'estimateur de la moyenne, c'est à dire :

$$\begin{aligned}\hat{Var} \mu(v) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu(v_i) - \mu(V))^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{v^2} \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v x_i x_j - \frac{2}{vV} \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^V x_i x_j + \frac{1}{V^2} \sum_{i=1}^V \sum_{j=1}^V x_i x_j \right)\end{aligned}$$

Le processus étant i.i.d, en séparant les termes d'indices égaux dans chacune des sommes doubles précédentes, on montre que l'estimateur est non biaisé avec :

$$E[\hat{Var} \mu(v)] = \frac{\sigma_0^2}{v}$$

D'autre part, on peut écrire :

$$\left(\hat{Var} \mu(v) \right)^2 = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i,j}^n \left(\begin{aligned} &\frac{1}{V^4} \sum_{a,b,c,d}^V x_a x_b x_c x_d - \frac{4}{vV^3} \sum_{a=1}^v \sum_{b,c,d}^V x_a x_b x_c x_d \\ &+ \frac{2}{v^2 V^2} \sum_{a,b}^v \sum_{c,d}^V x_a x_b x_c x_d + \frac{1}{v^4} \sum_{a,b,c,d}^v x_a x_b x_c x_d \\ &+ \frac{4}{v^3 V} \sum_{a,b,c}^v \sum_{d}^V x_a x_b x_c x_d + \frac{4}{v^2 V^2} \sum_{a,b}^v \sum_{c,d}^V x_a x_b x_c x_d \end{aligned} \right)$$

où $x_{a,i}$ est le $a^{\text{ème}}$ point du $i^{\text{ème}}$ sous-échantillon.

En isolant les termes d'indices égaux, et en utilisant le fait que le processus est i.i.d. gaussien, on en déduit la variance de l'estimateur :

$$Var[\hat{Var} \mu(v)] = \frac{2\sigma_0^4}{(n-1)v^2}$$

Pour évaluer l'efficacité de cet estimateur, posons :

$$\theta = \frac{\sigma_0^2}{v}$$

La variance de l'estimateur s'écrit donc :

$$\text{Var}\left[\hat{\text{Var}} \mu(v)\right] = \frac{2\theta^2}{(n-1)}$$

Le processus étant gaussien i.i.d., le score S est :

$$S = \frac{\partial}{\partial \theta} \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi v \theta}} \exp \left(-\frac{(X - \mu_0)^2}{2v\theta} \right) \right) = \frac{(X - \mu_0)^2}{2v\theta^2} - \frac{1}{2\theta}$$

où X est une variable aléatoire gaussienne de moyenne μ_0 et de variance σ_0^2 .

L'information de Fischer, pour chaque échantillon est donc :

$$I = -E \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{2\theta^2}$$

Pour n sous-échantillons, on obtient donc la borne théorique suivante pour la variance d'un estimateur non biaisé :

$$\text{Var}\left[\hat{\text{Var}} \mu(v)\right] = \frac{2\theta^2}{(n-1)} \geq \frac{I}{n} = \frac{2\theta^2}{n}$$

L'estimateur empirique de la moyenne est très proche de la borne théorique.

C.2 Estimateur de la variance d'un processus évanescent

On considère le processus évanescent simple suivant, observé sur une fenêtre rectangulaire de côtés L et H et de surface $|V| = LH$:

$$Z(u, v) = T(u) \sin(2\pi v f + \phi(u))$$

où $T(u)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne μ_0 et de variance σ_0^2 et $\phi(u)$ est un bruit blanc uniforme sur $[0, 2\pi]$, indépendant de T .

Afin de simplifier les écritures, nous travaillons ici dans un espace continu. L'estimateur de la moyenne est :

$$\mu(V) = \frac{1}{LH} \int_0^L \int_0^H Z(u, v) du dv$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'espérance de cet estimateur est nulle, et que sa variance est :

$$\text{Var} \mu(V) = \frac{(\sigma_0^2 + \mu_0^2) \sin(\pi f H)^2}{2\pi^2 f^2 L H^2}$$

L'estimateur de la variance s'exprime :

$$\sigma^2(V) = \frac{1}{LH} \int_0^L \int_0^H (Z(u, v) - \mu(V))^2 du dv$$

et peut se développer de la manière suivante :

$$\sigma^2(V) = \frac{1}{LH} \int_0^L \int_0^H [(T(u))^2 (\sin(2\pi f v + \varphi(u)))^2] du dv - (\mu(V))^2$$

En utilisant le fait que la sinusoïde et le processus T sont indépendants, on en déduit l'espérance :

$$E[\sigma^2(V)] = \frac{\sigma_0^2 + \mu_0^2}{2} - \text{Var } \mu(V)$$

Pour calculer la variance, on exprime le carré de l'estimateur sous la forme :

$$(\sigma^2(V))^2 = F_1 - 2F_2 + F_3$$

Le premier terme F_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{L^2 H^2} \int_0^L \int_0^H \int_0^L \int_0^H Z^2(u, v) Z^2(x, y) du dv dx dy \\ &= \frac{1}{L^2 H^2} \int_0^L \int_0^H \int_0^L \int_0^H (T(u)T(x))^2 (\sin(2\pi f v + \varphi(u)) \sin(2\pi f y + \varphi(v)))^2 du dv dx dy \end{aligned}$$

En isolant les termes pour lesquels $u = x$ on peut écrire l'espérance mathématique de F_1 :

$$E[F_1] = \frac{1}{L^2 H^2} \left(L(\mu_0^4 + 6\mu_0^2 \sigma_0^2 + 3\sigma_0^4) \left(\frac{H^2}{4} + \frac{\sin(2\pi f H)^2}{32\pi^2 f^2} \right) + L(L-1)(\sigma_0^2 + \mu_0^2)^2 \left(\frac{H^2}{4} \right) \right)$$

Les termes F_2 et F_3 peuvent être traités de la même manière, bien que leurs expressions soient plus complexes :

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{L^3 H^3} \int_0^L \int_0^H \int_0^L \int_0^H \int_0^L \int_0^H Z^2(u, v) Z(x, y) Z(w, z) du dv dx dy dw dz \\ F_3 &= \frac{1}{X^4 Y^4} \int_0^L \int_0^H \int_0^L \int_0^H \int_0^L \int_0^H \int_0^L \int_0^H Z(u, v) Z(x, y) Z(w, z) Z(i, j) du dv dx dy dw dz di dj \end{aligned}$$

Toujours en exploitant les cas d'égalité entre les variables d'intégration, on en déduit finalement l'expression complète de la variance de l'estimateur de la variance du processus évanescant simple Z :

$$\begin{aligned} \text{Var } \sigma^2(V) &= \frac{\sigma_0^2(\sigma_0^2 + 2\mu_0^2)}{2L} \\ &+ \frac{\sin(2\pi f H)^2(\mu_0^4 + 6\mu_0^2 \sigma_0^2 + 3\sigma_0^4)}{32\pi^2 f^2 L H^2} - \frac{\sin(\pi f H)^2 \sigma_0^2(\sigma_0^2 + 2\mu_0^2)}{\pi^2 f^2 L^2 H^2} \\ &- \frac{\sin(\pi f H)^2 \sin(2\pi f H)(\mu_0^4 + 6\mu_0^2 \sigma_0^2 + 3\sigma_0^4)}{8\pi^3 f^3 L^2 H^3} + \frac{\sin(\pi f H)^4(\mu_0^2 + \sigma_0^2)^2}{2\pi^4 f^4 L^2 H^4} \\ &+ \frac{3\sin(\pi f H)^4(\sigma_0^4 + 2\mu_0^2 \sigma_0^2 - \mu_0^4)}{8\pi^4 f^4 L^3 H^4} \end{aligned}$$

Annexe D Géométrie continue

D.1 Covariogramme géométrique

On commence par se placer dans un contexte général en dimension $d \geq 1$, avec d entier positif quelconque. Désignons par $k(x)$ la fonction indicatrice de l'ensemble S étudié, c'est-à-dire la fonction suivante :

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (4.9)$$

On notera que x représente ici un point dans l'espace de dimension d dans lequel s'étend l'ensemble considéré. La mesure de Lebesgue $|S|$ de l'ensemble S étudié s'écrit :

$$|S| = \int k(x) dx$$

Le covariogramme géométrique K ou K_S de l'ensemble S de fonction indicatrice $k(x)$ est défini par l'intégrale suivante :

$$K(\vec{h}) = \int k(x)k(x + \vec{h}) dx$$

Il représente la mesure de Lebesgue de l'intersection entre l'objet et une version de l'objet translatée d'un vecteur \vec{h} , tel qu'illustré ci-dessous :

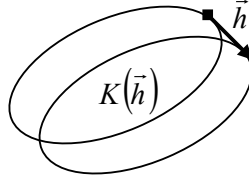


Figure D.1 : Illustration du covariogramme géométrique.

Le covariogramme géométrique possède de nombreuses propriétés, notamment :

$$\begin{aligned} K(0) &= |S| \\ K(h) &= K(-h) \leq K(0) \\ K(\infty) &= 0 \\ \int K(\vec{h}) d\vec{h} &= |S|^2 \end{aligned}$$

L'intégrale ci-dessus porte sur l'ensemble des vecteurs de l'espace. Ainsi, en dimension 2, si l'on note $\vec{h} = (u, v)$, l'intégrale sera une intégrale double sur u et v variant tous deux de $-\infty$ à $+\infty$. Le covariogramme possède d'autres propriétés intéressantes en géométrie intégrale, consulter l'ouvrage de Serra [Ser82] (Chap. IX notamment) pour plus de détails.

Dans le cas des carrés, ou plus généralement des rectangles, si l'on note L et H les côtés de l'ensemble, l'expression du covariogramme géométrique est simplement :

$$K(u, v) = \begin{cases} (L - |u|)(H - |v|) & \text{si } |u| < L \text{ et } |v| < H \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

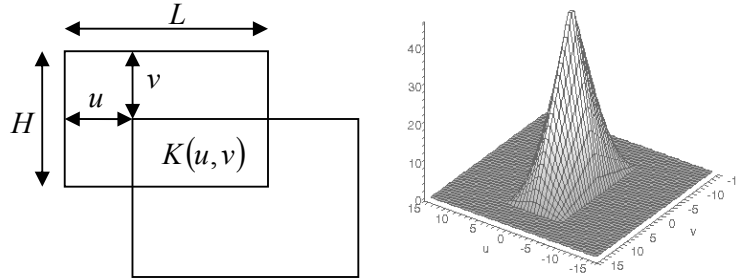


Figure D.2 : Covariogramme géométrique d'un rectangle.

Pour un cercle de rayon R , le covariogramme géométrique s'exprime :

$$K(\vec{h}) = \begin{cases} 2R^2 \left(\arccos\left(\frac{\|\vec{h}\|}{2R}\right) - \frac{\|\vec{h}\|}{2R} \sqrt{1 - \frac{\|\vec{h}\|^2}{4R^2}} \right) & \text{si } \|\vec{h}\| < 2R \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

La représentation graphique en est donnée ci-dessous :

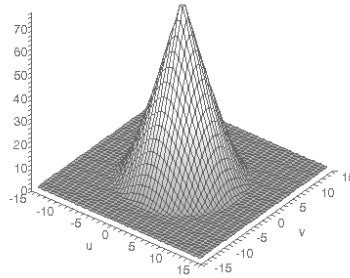


Figure D.3 : Covariogramme géométrique d'un disque.

En revanche, pour des formes plus complexes, ne serait-ce qu'une ellipse, l'expression analytique n'a pas forcément d'écriture simple.

D.2 Estimation des paramètres, méthode des moments

Une méthode simple pour estimer les paramètres des familles d'objets considérées est basée sur l'expression des moments d'inerties d'un ensemble. La méthode basée sur les moments d'inertie est une méthode paramétrique qui implique une hypothèse sur la forme de l'objet étudié. La matrice d'inertie C est formée de la manière suivante :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

avec les coefficients :

$$\begin{cases} C_{11} = \frac{1}{|S|} \int (x - \bar{x})^2 k(x, y) dx dy \\ C_{12} = C_{21} = \frac{1}{|S|} \int (x - \bar{x})(y - \bar{y}) k(x, y) dx dy \\ C_{22} = \frac{1}{|S|} \int (y - \bar{y})^2 k(x, y) dx dy \end{cases}$$

où \bar{x} et \bar{y} sont les coordonnées du centre de l'objet S , c'est à dire :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{|S|} \int x k(x, y) dx dy \\ \bar{y} = \frac{1}{|S|} \int y k(x, y) dx dy \end{cases}$$

On peut alors relier les valeurs propres, notée λ_1 et λ_2 dans l'ordre décroissant, de la matrice C avec les dimensions principales de l'objet S . L'orientation principale de l'ensemble est donné par l'orientation du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ_1 .

Si l'on considère que S est une ellipse de grand axe a et de petit axe b , on obtient facilement la relation suivante :

$$\begin{cases} a = 2\sqrt{\lambda_1} \\ b = 2\sqrt{\lambda_2} \end{cases}$$

De la même manière, si l'on suppose que l'objet S est un rectangle, dont la longueur du plus grand côté est notée l et le plus petit h , les relations avec les valeurs propres sont les suivantes :

$$\begin{cases} l = 2\sqrt{3\lambda_1} \\ h = 2\sqrt{3\lambda_2} \end{cases}$$

L'analyse des moments d'inertie revient à une analyse en composantes principales (ACP).

Annexe E Géométrie discrète

On s'intéresse ici à différents problèmes de nature purement géométrique portant généralement sur des familles $F = \{S(\theta)\}$ d'objets géométriques $S(\theta)$ paramétriques, c'est-à-dire dont la forme est entièrement caractérisée par un jeu de paramètres θ . On s'intéressera notamment au cas bidimensionnel $d=2$, pour des formes telles que les disques, carrés, rectangles et ellipses, et à l'estimation de leurs paramètres, en particulier leur surface, leur orientation, et la longueur de leurs côtés ou axes. On note $S_x(\theta)$ l'objet centré au point $x \in \mathbb{R}^d$.

E.1 Discrétisation

En pratique, on travaille sur des données discrétisées : les images sont constituées d'un ensemble de pixels formant un pavage, généralement selon une maille carrée, d'un ensemble d'observation le plus souvent carré ou rectangulaire. Les relations entre les données réelles, et les valeurs affectées aux pixels dépendent du processus d'acquisition, c'est-à-dire du matériel utilisé.

L'objectif ici n'est pas d'offrir un modèle réaliste, mais juste de comprendre les effets principaux liés à la discrétisation d'un ensemble continu. En particulier, nous cherchons à comprendre l'influence de la discrétisation sur les mesures des paramètres géométriques de ces objets. En effet, le procédé de discrétisation introduit des incertitudes sur la relation entre la mesure effectuée sur l'observation et la valeur réelle du paramètre de l'objet. On cherche donc à caractériser le biais et la variance de mesure. Nous nous concentrons donc sur un modèle simple de discrétisation. On modélise le processus de discrétisation comme l'observation des données à travers un peigne de Dirac, dont les impulsions sont réparties sur une grille régulière carrée de pas p :

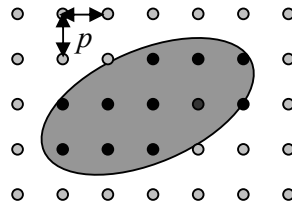


Figure E.1 : Ellipse discrétisée sur un réseau de pixels.

On travaille généralement en unités normalisées, en prenant $p=1$. On note \mathbb{N}^d l'ensemble qui constitue la grille des pixels en dimension d . L'observation résultant de la discrétisation d'un ensemble S_x quelconque centré au point x est notée $\mathcal{G}(S_x)$, ou simplement \mathcal{G} si aucune confusion n'est possible. Pour le modèle de discrétisation retenu, on aura la relation suivante entre l'objet réel et son observation discrète :

$$\mathcal{G}(S_x) = S_x \cap \mathbb{N}^d$$

Un covariogramme géométrique discret peut être calculé en appliquant la même méthode que dans le domaine continu, c'est-à-dire par convolution entre l'ensemble discret et une version traduite d'un vecteur \vec{h} à coordonnées entières. La méthode d'estimation des paramètres par l'utilisation des moments d'inertie peut également être adaptée simplement au cas discret, en notant que la matrice d'inertie d'un point (impulsion de Dirac) étant égale à la matrice l'identité.

Il pourra néanmoins être intéressant de considérer différents modèles du processus d'acquisition. Un modèle classique pour la discrétisation d'images revient à projeter la grille des capteurs sur les données, et d'intégrer l'information correspondante à chaque capteur pour former la valeur du pixel correspondant de l'image. Ceci revient à considérer le capteur comme une petite surface carrée (photo-site) comptant les photons qui l'atteignent (modèle idéal de caméra CCD). Les bords d'un bjet binaire apparaîtront alors dans un dégradé de niveaux de gris dont la valeur sera proportionnelle à la surface de l'intersection entre l'objet et le rectangle correspondant au pixel.

Des modèles plus élaborés peuvent être envisagés afin de prendre en compte les phénomènes physiques ayant lieu au sein de la caméra, comme un bruit additif, une dépendance entre les valeurs mesurées sur deux pixels proches, etc.

E.2 Mesure de Lebesgue d'un ensemble à partir d'une observation discrète

E.2.1 Méthode basée sur le covariogramme géométrique

Nous nous concentrons ici sur l'estimation de la surface $|S|$ d'un ensemble continu dont seule une observation discrète $\mathcal{G}(S_x)$ est disponible. On estime la surface par le comptage des points d'intersection avec la grille de pixels. Si l'on suppose cette grille carrée de maille a , la mesure s'effectue par une somme discrète :

$$|\hat{S}| = p^2 |\mathcal{G}(S_x)| = p^2 \sum k(x + np)$$

La somme s'effectue sur le vecteur n (de dimension 2) dont les coordonnées sont entières. Si l'on considère que la position relative entre le centre x de l'ensemble S et la grille des pixels est une variable aléatoire uniformément distribuée dans $[0, p]^2$ (sans perte de généralité), l'estimation $|\hat{S}|$ devient elle-même une variable aléatoire. Il est clair que cette estimation est non biaisée. On peut exprimer sa variance d'estimation à l'aide du covariogramme géométrique :

$$\text{Var}[\hat{S}] = p^2 \sum K(np) - \int K(x) dx$$

La variance d'estimation correspond donc à l'erreur faite quand on estime l'intégrale de K par la somme discrète. La fonction théorique K étant inconnue et inaccessible à partir des seules données expérimentales, une forme de modélisation est donc nécessaire. Si l'on connaît le type d'objet (disque, ellipse, etc.) analysé, on peut utiliser le covariogramme géométrique théorique (en utilisant les

paramètres estimés de l'objet) pour estimer la variance d'estimation. Si le covariogramme géométrique théorique est inconnu, il est possible de modéliser directement un covariogramme géométrique, à partir de son estimation, par une fonction régulière possédant les propriétés nécessaires, selon le même type de procédure décrite en section 2.1 pour la modélisation du variogramme ou de l'autocovariance. Les erreurs seront commises lors de cette modélisation seront moins graves que dans le Chapitre 3, car le covariogramme géométrique s'annule forcément à partir d'une certaine distance, égale à moins d'un pixel près à la valeur empirique.

E.2.2 Monte-Carlo

Si l'on admet connaître le type d'objet étudié et ses paramètres, une méthode directe est également possible. En effet, il est possible de tracer l'objet paramétrique sur une grille de pixels avec une position aléatoire, et de répéter l'estimation en faisant varier la position relative entre la grille d'échantillonnage et l'ensemble étudié. Cette méthode, de type Monte Carlo, permet d'estimer directement la distribution de la variable aléatoire $|\hat{S}|$, et d'en déterminer le maximum de vraisemblance.

La figure suivante (Figure E.2) présente la distribution de l'erreur d'estimation $Y = |\hat{S}| - |S|$ de la surface d'une ellipse de surface $|S|$ fixée à $|S| = 1000$ (en unités normalisées à 1 unité pour 1 pixel), de rapport grand axe sur petit axe égal à 2, dont l'orientation principale est horizontale. La distribution est estimée à partir de 5000 réalisations de l'ellipse sur une image, en tirant la position du centre selon une loi aléatoire uniforme dans le domaine $[0,1]^2$. Deux méthodes d'estimation de la surface sont comparées : la première, labellisée 'pixels', consiste à compter les pixels de l'image à l'intérieur de l'ellipse, l'autre, notée 'moments', est basée sur l'estimation de la longueur des axes de l'ellipse basée sur les moments d'inertie de la surface binaire correspondant à l'ellipse.

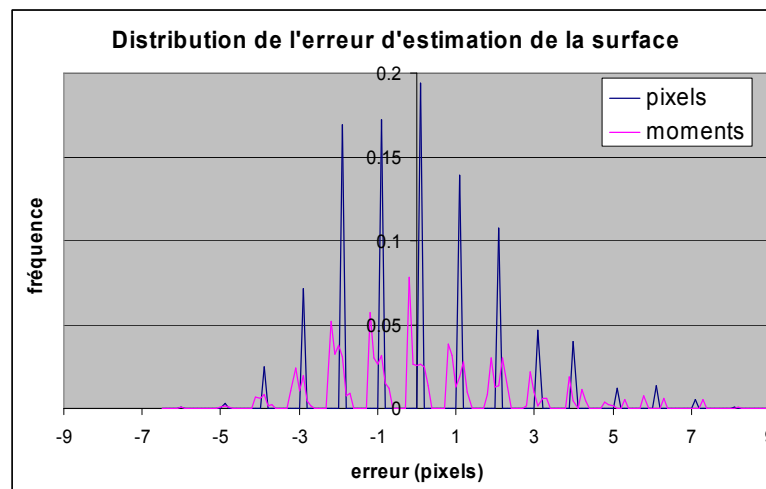


Figure E.2 : Distribution de l'erreur d'estimation de la surface d'une ellipse.

Les deux méthodes d'estimation présentent ici des caractéristiques statistiques similaires. On peut considérer que les estimateurs sont non biaisés, avec une erreur moyenne de l'ordre de 10^{-2} pixels, et un écart-type d'environ 2 pixels, pour une surface théorique de 1000 pixels. La structure dentelée des histogrammes reflète le fait que les estimations se répartissent sur un nombre fini de valeurs, qui correspondent à des combinaisons particulières de pixels intérieurs à l'ellipse. On notera que la distribution de l'erreur d'estimation par la méthode des moments est plus régulière que par comptage des pixels. Ceci est dû au fait que la méthode des moments prend en compte les positions relatives des pixels allumés et l'hypothèse de forme elliptique de l'objet étudié.

E.3 Estimation des paramètres d'un ensemble discret

Deux types de problèmes peuvent apparaître lors de la mesure des paramètres d'un objet géométrique, selon le point de vue retenu :

- Etant donné une observation \mathcal{G} d'un objet $S_x(\theta)$ de forme (rectangle, ellipse, ...) connue, mais dont les paramètres θ et la position x sont inconnus, quel est le jeu de paramètres le plus probable $\theta_{MAP} = \underset{\theta}{\text{Arg max}}(P(\theta|\mathcal{G}))$ à partir de l'observation ?
- Connaissant l'objet paramétrique $S_x(\theta)$ avant sa numérisation, quelle sont les lois de probabilité régissant l'ensemble d'observation $\mathcal{G}(S_x(\theta))$, et particulièrement la distribution de la mesure $|\mathcal{G}(S_x(\theta))|$ et des paramètres estimés $\hat{\theta}$?

Le premier problème nécessite une approche analytique. Le second peut être résolu par simulation dans un contexte Monte-Carlo.

E.3.1 Approche analytique

On considère ici un cas simple, où l'observation d'un disque de rayon inconnu est réduite à un seul pixel allumé. On cherche alors le rayon θ du disque le plus probable.

Il est clair que si le rayon θ du disque est supérieur à 1, il est strictement impossible que l'on n'observe qu'un seul pixel allumé. Les valeurs possibles de θ sont donc inclus dans l'intervalle $[0,1]$.

On peut alors séparer trois cas selon les valeurs de θ :

- cas $\theta \in [0, 1/2]$

L'ensemble des positions x du centre du disque de rayon $\theta \in [0, 1/2]$ permettant d'observer un seul pixel allumé est représenté par les zones grisées sur la figure suivante :

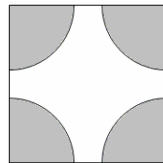


Figure E.3 : Positions limites du disque dont le rayon $\theta \in [0, 1/2]$. Les quarts de cercles sont centrés sur les coins du carré et ont un rayon θ . Le centre d'un disque de rayon θ conduisant à l'observation d'un seul pixel est forcément dans l'une des zones grisées.

Sur cette figure, le carré représente la surface comprise entre 4 pixels (placés sur les coins du carré). Les zones grisées correspondent à 4 quarts de cercles de rayon θ , centrés chacun sur un pixel. Il est clair qu'un disque de rayon θ dont le centre est inclus dans une de ces zones englobera un et un seul pixel de la grille. La mesure de Lebesgue de cet ensemble est :

$$\left| \left\{ x \mid \mathcal{G}, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \right\} \right| = \pi \theta^2$$

Du fait de la périodicité de la grille des pixels, il n'est pas difficile de montrer que cette mesure correspond à la probabilité d'observer \mathcal{G} sachant θ , pour une position du centre x aléatoire uniforme. Cette probabilité est notée $P(\mathcal{G}|\theta)$, ou plus précisément dans le cas présent $P(\mathcal{G}|0 \leq \theta \leq 1/2)$.

• cas $\theta \in [1/2, \sqrt{2}/2]$

L'ensemble des valeurs de x permettant d'observer un seul pixel allumé est représenté par les zones grisées sur la figure suivante :

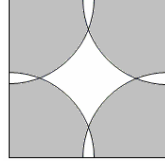


Figure E.4 Positions limites du disque dont le rayon $\theta \in [1/2, \sqrt{2}/2]$. Les quarts de cercles sont centrés sur les coins du carré et ont un rayon θ . Le centre d'un disque de rayon θ conduisant à l'observation d'un seul pixel est forcément dans l'une des zones grises.

Si le centre du disque appartient à la zone blanche au centre, aucun pixel ne sera allumé. En revanche, si le centre appartient à l'une des quatre zones blanches correspondant à l'intersection de deux quarts de disques, alors deux pixels seront allumés. Dans tous les autres cas (zones grises), un et un seul pixel sera allumé, permettant effectivement d'observer \mathcal{G} .

La mesure de Lebesgue de cet ensemble (grisé) est :

$$P\left(\mathcal{G} \mid \frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left| \left\{ x \mid \mathcal{G}, \frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \right| = \pi \theta^2 - 4I_\theta(1)$$

on rappelle que $I_\theta(h)$ est la surface de l'intersection de deux disques de rayon θ distants de h :

$$I_\theta(h) = \begin{cases} 2\theta^2 \left(\arccos\left(\frac{h}{2\theta}\right) - \frac{h}{2\theta} \sqrt{1 - \frac{h^2}{4\theta^2}} \right) & \text{si } h < 2\theta \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

• cas $\theta \in [\sqrt{2}/2, 1]$

L'ensemble des valeurs de x permettant d'observer un seul pixel allumé est représenté par les zones grisées sur la figure suivante :

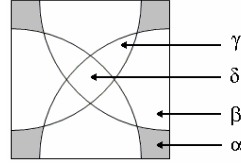


Figure E.5 : Positions limites du disque dont le rayon $\theta \in [\sqrt{2}/2, 1]$. Les quarts de cercles sont centrés sur les coins du carré et ont un rayon θ . Le centre d'un disque de rayon θ conduisant à l'observation d'un seul pixel est forcément dans l'une des zones grises.

Les variables α , β , γ et δ indiquent la surface des zones de l'image correspondant respectivement à 1, 2, 3 et 4 pixels allumés. Il n'est pas difficile de montrer, par des considérations géométriques, que ces variables sont liées par les relations suivantes :

$$\begin{cases} 4\alpha + 4\beta + 4\gamma + \delta = 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = \frac{\pi\theta^2}{4} \\ 2\gamma + \delta = I_\theta(\sqrt{2}) \\ \beta + 2\gamma + \delta = I_\theta(1) \end{cases}$$

On en déduit la mesure probabilité d'observer \mathcal{G} sachant $\theta \in [\sqrt{2}/2, 1]$:

$$P\left(\mathcal{G} \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \theta \leq 1\right) = \left| \left\{ x \mid \mathcal{G}, \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \theta \leq 1 \right\} \right| = 4\alpha = 2 - \pi\theta^2 + 2I_\theta(\sqrt{2})$$

Ces trois expressions permettent de former la vraisemblance $P(\mathcal{G}|\theta) = P(\mathcal{G}|0 \leq \theta \leq 1)$ du paramètre θ , dont une représentation graphique est donnée en Figure E.6 :

$$P[\mathcal{G}|\theta] = \begin{cases} \pi\theta^2 & \theta \in [0, 1/2] \\ \pi\theta^2 - 4I_\theta(1) & \text{si } \theta \in [1/2, \sqrt{2}/2] \\ 2 - \pi\theta^2 + 2I_\theta(\sqrt{2}) & \theta \in [\sqrt{2}/2, 1] \end{cases}$$

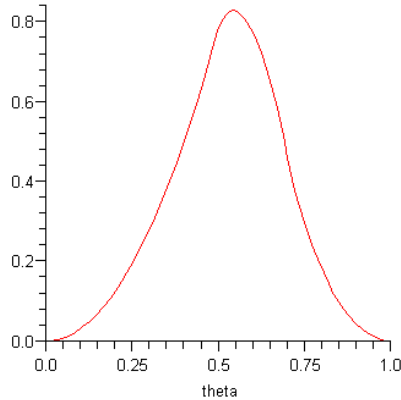


Figure E.6 : Vraisemblance du rayon du disque conduisant à l'observation d'un seul pixel.

La dérivée de cette fonction s'obtient simplement :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P[\mathcal{G}|\theta] = \begin{cases} 2\pi\theta & \theta \in [0, 1/2] \\ 2\pi\theta - 4I'_\theta(1) & \text{si } \theta \in [1/2, \sqrt{2}/2] \\ -2\pi\theta + 2I'_\theta(\sqrt{2}) & \theta \in [\sqrt{2}/2, 1] \end{cases}$$

avec :

$$I'_\theta(h) = 4\theta \arccos\left(\frac{h}{2\theta}\right)$$

Cette dérivée s'annule (outre en 0 et en 1) pour $\theta = \theta_{MV}$, qui correspond au maximum de $P(\mathfrak{g}|\theta)$, c'est-à-dire que θ_{MV} correspond au maximum de vraisemblance, avec :

$$\theta_{MV} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \approx 0.54$$

La surface du disque correspondant est alors :

$$v(S(\theta_{MV})) = \frac{\pi}{2 + \sqrt{2}} \approx 0.92$$

Le maximum de vraisemblance correspond au maximum de probabilité d'observer \mathfrak{g} sachant θ , or on ne connaît pas ce paramètre mais l'on connaît avec certitude l'observation. Connaissant l'observation \mathfrak{g} , le paramètre θ le plus probable est donné par le maximum a posteriori $\theta_{MAP} = \underset{\theta}{\text{Arg max}}(P(\theta|\mathfrak{g}))$. Pour obtenir $P(\theta|\mathfrak{g})$ à partir de $P(\mathfrak{g}|\theta)$, on exploite le théorème de Bayes, en passant par les fonctions de répartition :

$$P(\theta < a|\mathfrak{g}) = \frac{P(\mathfrak{g}|\theta < a)}{P(\mathfrak{g})} P(\theta < a)$$

Pour estimer ce maximum a posteriori, il est nécessaire de postuler une densité de probabilité a priori pour le paramètre θ . Supposons ici que θ est a priori uniformément distribué sur l'intervalle $[0,1]$. On obtient alors la répartition a posteriori :

$$P(\theta < a|\mathfrak{g}) = \frac{P(\mathfrak{g}|\theta < a)}{P(\mathfrak{g})} P(\theta < a) = \frac{\left(\int_0^a v(\{x|\mathfrak{g}, \theta\})d\theta\right)}{\left(\int_0^1 v(\{x|\mathfrak{g}, \theta\})d\theta\right)} \left(\int_0^a d\theta\right)$$

La Figure E.7 représente la fonction de répartition et la densité de probabilité a posteriori du rayon θ :

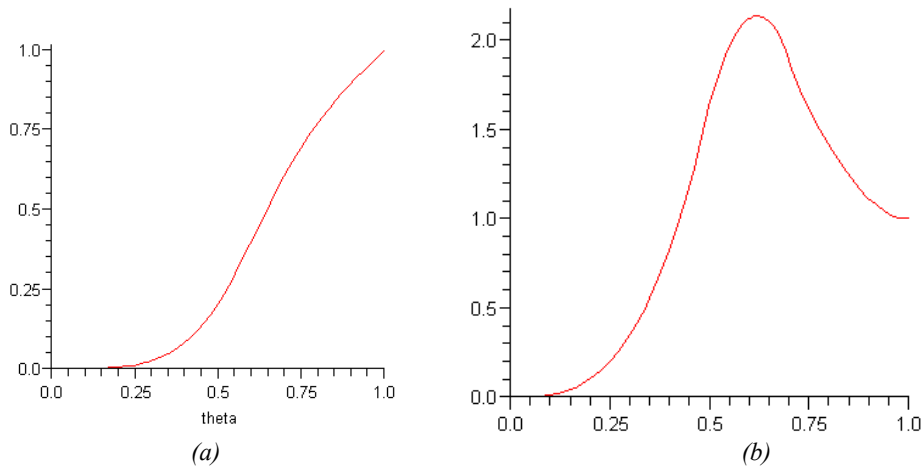


Figure E.7 : Fonction de répartition a posteriori (a) et densité de probabilité correspondante (b).

L'expression complète étant relativement compliquée, on en déduit numériquement le maximum a posteriori :

$$\theta_{MAP} \approx 0.6192$$

Cette méthode est difficile à étendre pour des observations plus complexes. On notera également qu'elle nécessite l'introduction d'une densité de probabilité a priori pour le paramètre θ .

E.3.2 Approche Monte-Carlo

La méthode d'estimation des paramètres géométriques basée sur les moments d'inertie, couplée à l'approche de type Monte-Carlo décrite plus haut, permet d'estimer la distribution des erreurs d'estimations des paramètres de l'objet discrétisé, dont les paramètres théoriques sont connus. Son application nécessite juste l'estimation de la matrice d'inertie C , qui se fait en pratique en remplaçant les intégrales continues par des sommes discrètes dans les équations de la section D.2. La distribution des erreurs d'estimations est alors approchée en effectuant les mesures pour un grand nombre de réalisations indépendantes de l'objet discrétisé. La Figure E.8 présente les distributions empiriques de l'erreur d'estimation des longueurs des axes et de l'orientation d'une ellipse (de surface apparente d'environ 1000 pixels) construites à partir de 1000 réalisations :

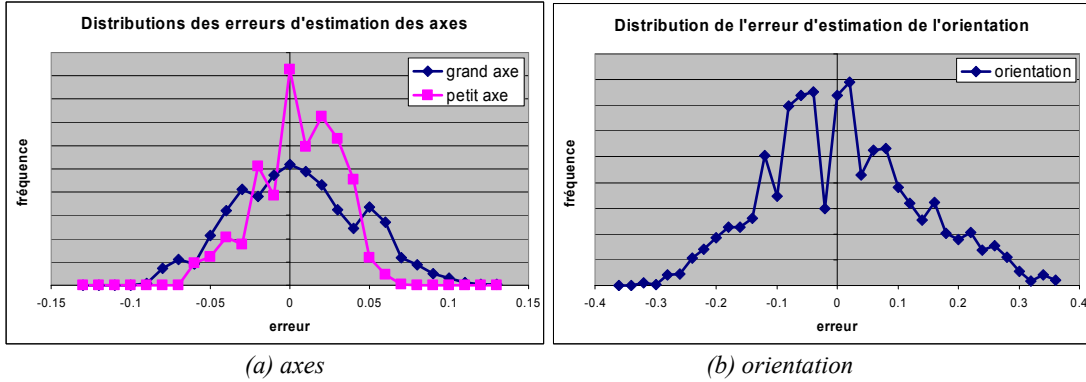


Figure E.8 : Distribution des erreurs d'estimation des paramètres d'une ellipse.

L'erreur moyenne d'estimation des axes de l'ellipse est très faible, ce qui coïncide avec les résultats précédents. L'estimation de l'orientation est également précise, avec une erreur inférieure à 0.5 degrés.

Les mêmes simulations peuvent être effectuées afin d'estimer les distributions des erreurs d'estimation des paramètres d'un rectangle. Les figures suivantes correspondent à l'estimation d'un rectangle de surface $|S|=1000$, de grand côté 2 fois plus long que le petit côté, orienté à 20° par rapport à l'horizontale.

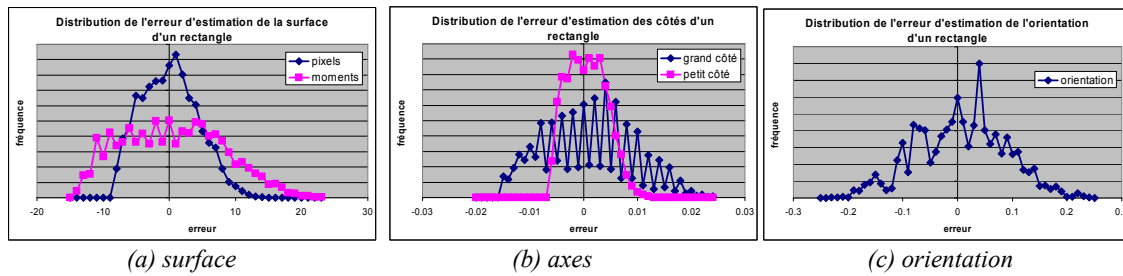


Figure E.9 : Distribution des erreurs d'estimation des paramètres d'un rectangle.

E.3.3 Influence du pas de la grille

Une question pratique apparaît alors : sachant que l'on observe une certaine forme (par exemple une ellipse) mais dont on ignore la surface réelle, quelle résolution doit-on utiliser pour acquérir l'image afin d'obtenir un intervalle de confiance de largeur fixé pour l'estimation d'un paramètre ?

Intuitivement, en réduisant le pas de la grille, on obtiendra des estimations plus précises, avec une variance d'estimation moindre et des intervalles de confiance plus étroits. En contrepartie, pour une surface d'acquisition identique, la quantité de données à acquérir et à traiter augmente quand le pas de la grille diminue. Il s'agit donc en pratique de trouver un compromis entre la précision souhaitée et le coût calculatoire nécessaire à son obtention. Augmenter la résolution de l'image (en diminuant le pas de la grille) revient à augmenter la surface apparente de l'objet étudié. Afin d'étudier la relation entre la variance d'estimation et la résolution, on peut donc conserver le mode opératoire décrit précédemment en répétant simplement les opérations pour des répliques homothétiques de l'objet étudié.

E.3.3.1 Disques

Si l'on considère l'estimation de la surface d'un cercle, la résolution utilisée est directement liée au rayon apparent (en pixels) de l'objet et donc au pas de la grille d'échantillonnage. La figure suivante (Figure E.10) présente les résultats de simulation d'estimation de la surface d'un cercle en fonction du rayon apparent du cercle. Le rayon varie de 3 à 25 pixels par pas de 0,1. Pour chaque valeur fixée du rayon, 1000 réalisations du cercle dont le centre est placé aléatoirement sont effectuées. Sur chaque réalisation, la surface est estimée par les deux méthodes présentées ci-dessus et l'erreur d'estimation en est déduite. La moyenne et la variance de l'erreur entre les réalisations correspondant à un même rayon sont alors calculées :

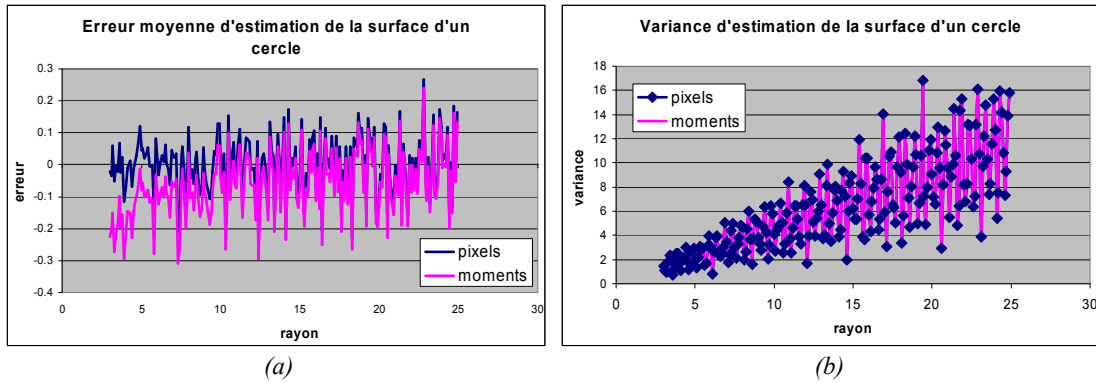


Figure E.10 : Moyenne (a) et variance (a) de l'erreur d'estimation de surface d'un cercle.

On constate que la méthode des moments présente un léger biais, qui diminue néanmoins quand le rayon du cercle augmente. En revanche, la méthode basée sur le comptage des pixels semble être non biaisée quel que soit le rayon du cercle. En revanche, pour les deux méthodes, la variance d'estimation apparaît linéairement dépendante du rayon du cercle. Elle présente également des fluctuations très régulières de période 0,5 pixels. Notons que l'axe des abscisses correspond au rayon du cercle. Si l'on trace la même courbe mais en fonction du diamètre du cercle, on obtiendrait une période de 1 pixels. Cette fluctuation, appelée Zitterbewegung [Math70][Bad04], est liée à la partie entière du rapport entre le pas de grille et la taille de l'objet étudié. Son amplitude est très importante et difficilement évaluable en pratique, même si son expression analytique peut être formulée dans des cas théoriques simples.

E.3.3.2 Carrés alignés aux directions de la grille

Pour préciser ce que représente ce Zitterbewegung, examinons le cas simple suivant. Considérons un carré dont les côtés sont parallèles aux directions de la grille de pixels. La variance de l'erreur d'estimation de la surface du carré en fonction de son côté présente l'allure suivante :

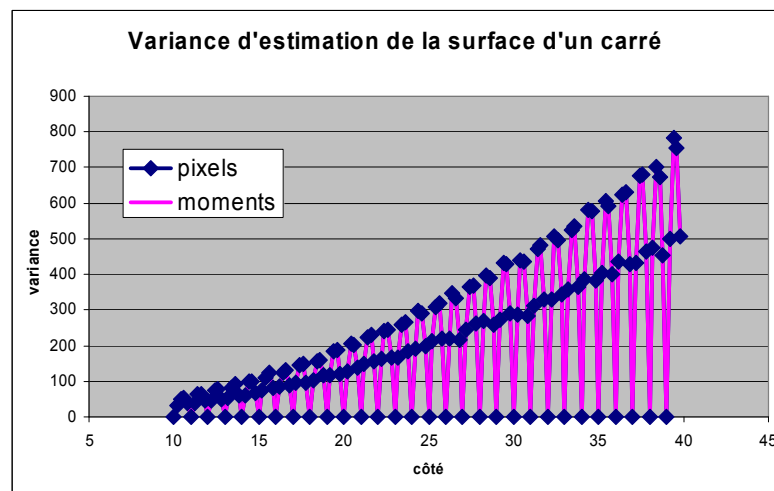


Figure E.11 : Variance de l'erreur d'estimation de la surface d'un carré en fonction de son côté.

La tendance de l'enveloppe de cette courbe n'est pas linéaire dans ce cas, mais quadratique. Par contre, le terme fluctuant conserve la même période. On note tout de même que son expression est différente du cas du cercle puisque la variance va jusqu'à s'annuler périodiquement.

Si l'on regarde comment s'effectue le tracé d'un carré dont le côté c est un multiple entier du pas a de la grille ($c=na$ avec n entier) on se rend compte que la mesure de surface (nombre de pixels 'allumés') est presque sûrement (avec une probabilité 1) égale à $n^2 a^2$. La mesure est donc non biaisée avec une variance nulle.

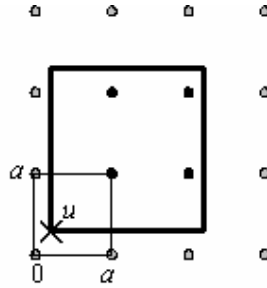


Figure E.12 : Positions possibles d'un carré de côté 2 pixels sur la grille.

Dans la Figure E.12, le carré en traits épais correspond à une réalisation possible d'un carré de côté entier dont l'origine est fixée par la variable aléatoire u uniforme sur $[0, a]^2$. Le petit carré en traits fins représente l'ensemble dans lequel est tiré le point u . On note que si le point u possède une de ses coordonnées égales à 0 ou à a , davantage de pixels seront allumés et la mesure sera donc supérieure. Cependant, ces cas sont 'presque impossibles' car affectés d'une probabilité nulle. La mesure d'un carré de côté entier est donc 'presque sûrement' parfaite.

Si l'on considère l'autre extrême, c'est-à-dire un carré de côté $c=(n+1/2)a$, il y a 3 mesures possibles ayant des probabilités différentes. On peut obtenir (après numérisation) un carré de surface $n^2 a^2$ avec une probabilité $1/4$, un rectangle de surface $n(n+1)a^2$ avec une probabilité $1/2$, orienté horizontalement ou verticalement, ou enfin un carré de surface $(n+1)^2 a^2$ avec une probabilité $1/4$. Ces différentes mesures et probabilités correspondent respectivement à un positionnement de la variable u dans les zones R_1 , R_2 et R_3 de la Figure E.13. La figure suivante, établie sur les mêmes principes que la précédente, permet de visualiser ces possibilités.

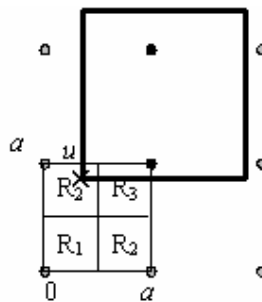


Figure E.13 : Positions possibles d'un carré de côté 1,5 pixels sur la grille.

La mesure moyenne sera donc $(n(n+1)+1/4)a^2$ avec une variance, égale à $(n(n+1)/2+3/16)a^4$.

Prenons maintenant le cas d'une valeur quelconque pour le côté du carré, qu'on écrit alors $c = (n + \varepsilon)a$ avec $\varepsilon \in [0,1]$. Un calcul simple généralisant le calcul précédent permet d'obtenir les probabilités des différentes mesures :

$$\begin{cases} P[n^2 a^2] = (1 - \varepsilon)^2 \\ P[(n+1)^2 a^2] = \varepsilon^2 \\ P[n(n+1)a^2] = 2\varepsilon(1 - \varepsilon) \end{cases}$$

Ces probabilités permettent d'obtenir la distribution théorique de la variable aléatoire correspondant à la mesure de surface d'un carré dont les côtés sont alignés aux directions de la grille de pixels. On obtient notamment l'expression de l'espérance mathématique et de la variance de la variable aléatoire X correspondant à la mesure de surface d'un carré de côté $c = (n + \varepsilon)a$, avec n entier et $\varepsilon \in [0,1]$, aligné sur une grille régulière de pas a :

$$\begin{aligned} E[X] &= (n + \varepsilon)^2 a^2 \\ \text{Var}[X] &= \varepsilon(1 - \varepsilon) \left(2(n + \varepsilon)^2 + \varepsilon(1 - \varepsilon) \right) a^4 \end{aligned}$$

L'erreur d'estimation de la surface est donc la variable aléatoire $Y = X - ((n + \varepsilon)^2 a^2)$. On peut alors comparer les courbes théoriques de la moyenne et de la variance de l'estimateur avec les résultats obtenus précédemment par simulation.

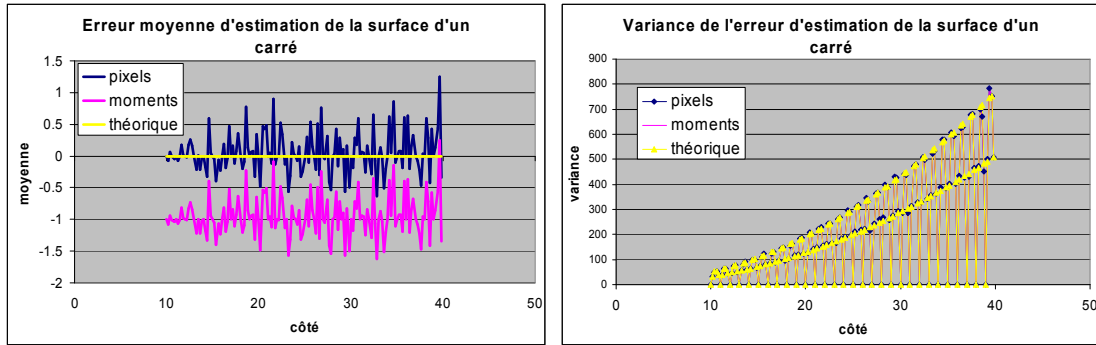


Figure E.14 : Estimation de la surface d'un carré.

L'accord entre les courbes expérimentales et théoriques de la variance est très bon. Le terme fluctuant, ou Zitterbewegung, est effectivement lié au paramètre ε qui correspond à la partie décimale du rapport entre le côté du carré et le pas de la grille. On remarque ici le fait que la méthode des moments fournit une estimation biaisée d'environ 1 pixels.

E.3.3.3 Carrés quelconques

On autorise maintenant le carré à être orienté de façon quelconque par rapport aux directions de la grille des pixels. On obtient alors deux paramètres variables (en plus de la position), qui sont le côté et l'orientation du carré. On estime, par simulations, la variance d'estimation de la surface du carré. Cette variance est représentée Figure E.15 par une surface. Pour des raisons de visualisation, nous avons

tracé en abscisse le quotient de la variance estimée avec la surface réelle du carré. Sous cette représentation, pour un carré orienté parallèlement aux directions de la grille, on doit observer une valeur constante (hormis le Zitterbewegung) quelle que soit la valeur du côté du carré.

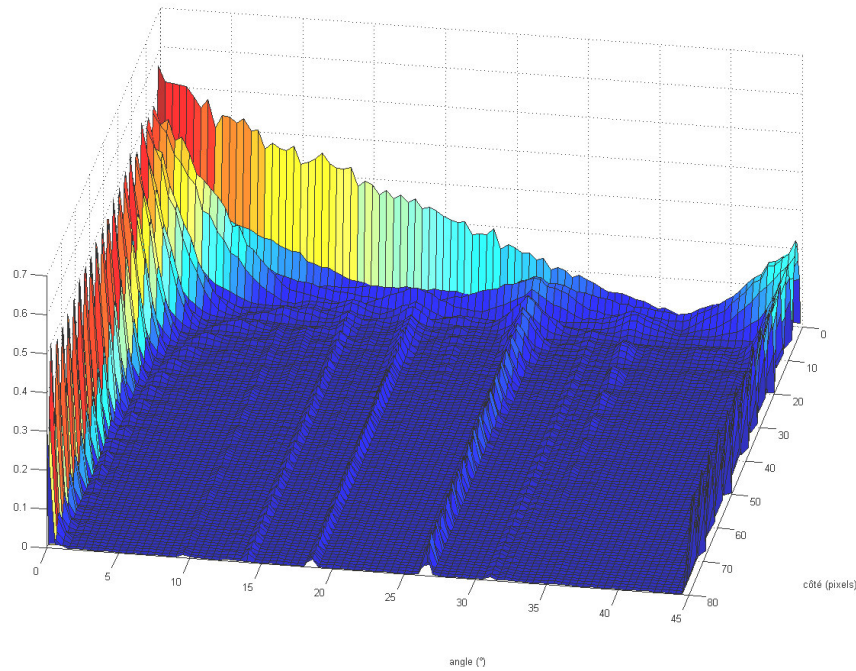


Figure E.15 : Quotient variance/surface de l'estimation de la surface d'un carré, en fonction du côté du carré et de son orientation.

On observe que la variance d'estimation est très dépendante de l'orientation, et notamment que la variance est particulièrement élevée lorsque le carré est aligné aux directions de la grille.

Les angles pour lesquels on observe une variance particulièrement élevée, par exemple 0° , 18° , 26° , 45° , etc. correspondent aux orientations θ du carré s'écrivant sous la forme $\tan(\theta) = \alpha/\beta$ avec α et β premiers entre eux, c'est-à-dire que les rapports α/β correspondant sont les termes d'une suite de Farey. Pour illustration, les suites de Farey d'ordre 1 à 4 sont indiquées ci-dessous :

$$\begin{cases} F_1 = \{0/1; 1/1\} \\ F_2 = \{0/1; 1/2; 1/1\} \\ F_3 = \{0/1; 1/3; 1/2; 2/3; 1/1\} \\ F_4 = \{0/1; 1/4; 1/3; 1/2; 2/3; 3/4; 1/1\} \end{cases}$$

On remarque que les termes de F_n contiennent tous les termes des suites d'ordre inférieur à n . Les orientations θ correspondantes aux termes de la suite d'ordre 4 sont approximativement :

$$\{0^\circ; 14^\circ; 18.4^\circ; 26.6^\circ; 33.7^\circ; 36.9^\circ; 45^\circ\}$$

Le schéma suivant permet d'illustrer les caractéristiques de ces orientations :

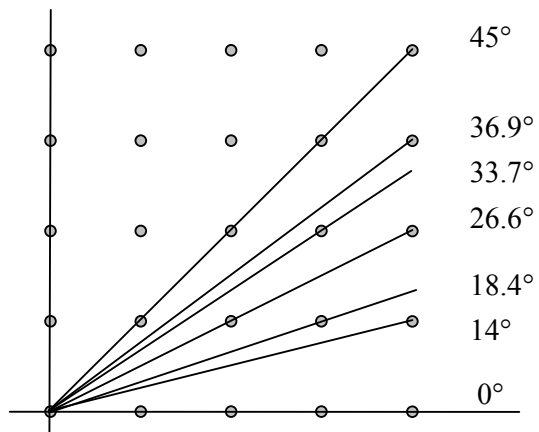


Figure E.16 : Relations entre orientations et termes des suites de Farey.

Les carrés orientés selon les orientations associées aux termes des suites de Farey ont une variance supérieure du fait qu'une légère variation de position du centre du carré a une influence sur un nombre important de pixels. Ce nombre est d'autant plus important que l'orientation correspond à un terme apparaissant dans une suite de Farey d'ordre petit.

Bibliographie

- [Aks99] B. Aksasse, L. Radouane – *Two-dimensional Autoregressive (2-D AR) Model Order Estimation*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, pp. 2072-2077, 1999.
- [Bad04] A. Baddeley – *The Difficulty of Selling Cheap Things*. Knibbs Lecture, 2004.
- [Bera94] J. Beran – *Statistics for long memory processes*. Chapman & Hall, 1994.
- [Bert99] P. Bertail, D.N. Politis, J.P. Romano – *On Subsampling Estimators With Unknown Rate of Convergence*. Journal of the American Statistical Association, vol. 94, n°. 446, pp. 569-579, 1999.
- [Bla05] R. Blanc, C. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Inférence Statistique pour la Caractérisation Volumique des Matériaux par Analyse d'Image 2D*. Journées MECAMAT, Grenoble, 2-3 juin 2005.
- [Bla06a] R. Blanc, C. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou, M. Cataldi – *Fiber Orientation Measurements in Composite Materials*. Composites Part A, vol. 37, issue 2, pp. 197-206, 2006.
- [Bla06b] R. Blanc, J.P. Da Costa, C. Germain, P. Baylou – *Variance of the Mean Value Estimation of a Spatial Process. Application to Composite Material Images*. 6th International Conference on Stereology, Spatial Statistics and Stochastic Geometry, Prague, Czech Republic, 2006.
- [Bla06c] R. Blanc, C. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Métrologie et Analyse d'Image. Inférence Statistique pour la Caractérisation Volumique des Matériaux par Analyse d'Image 2D*. Journée Métrologie GDR-ISIS E. Bordeaux, 27 janvier 2006.
- [Bla06d] R. Blanc, C. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Caractérisation Volumique de Matériaux Composites. Estimation de l'Incertitude des Mesures Effectuées par Analyse d'Image*. 28ème journée ISS France, Paris, 3 février 2006.
- [Bla07] R. Blanc, J.P. Da Costa, Ch. Germain, P. Baylou – *Assessment of Texture Stationarity using the Asymptotic Behaviour of the Empirical Mean and Variance*. Soumis à IEEE Transactions on Image Processing.
- [Bos96] S. Bose, A.O. Steinhardt – *Invariant Tests for Spatial Stationarity using Covariance Structure*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 44, pp. 1523-1533, 1996.
- [Bro96] P. Brodatz – *Textures: A Photographic Album for Artists and Designers*. New York: Dover, NY, 1996.
- [Cer04] C.E.P. Cerri et al. – *Assesment of Soil Property Spatial Variation in an Amazon Pasture: Basis for Selecting an Agronomic Experimental Area*. Geoderma, vol. 123, pp. 51-68, 2004.
- [Chi00] J. Chia, A. Baddeley - *Accuracy of Estimates of Volume Fraction*. Image Analysis and Stereology, vol.19, pp.199-204, 2000.

- [Cre93] N.A. Cressie – *Statistics for Spatial Data, Revised Edition*. John Wiley & Sons, 1993.
- [Dac82] D. Dacunha-Castelle, M. Duflo – *Probabilités et Statistiques, 1. Problèmes à Temps Fixe*. Masson, 1982.
- [Dal02] M.R.T. Dale, P. Dixon, M.J. Fortin, P. Legendre, D.E. Myers, M.S. Rosenberg – *Conceptual and Mathematical Relationships among Methods for Spatial Analysis*. *Ecography*, vol. 25, pp. 558-577, 2002.
- [Des01] X. Descombes, R. Stoica, L. Garcin, J. Zerubia – *A RJMCMC Algorithm for Object Processes in Image Processing*. *Monte Carlo Methods and Applications*, vol. 7, pp. 149-156, 2001.
- [Des02] X. Descombes, J. Zerubia – *Marked Point Processes in Image Analysis*. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, issue 5, pp. 77-84, 2002.
- [Dog89] S.I. Doguwa, G.J.G. Upton – *Edge-Corrected Estimators for the Reduced Second Moment Measure of Point Processes*. *Biometrical Journal*, vol. 31, issue 5, pp. 563-675, 1989.
- [Doo53] J.L. Doob – *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1953.
- [Dor00] K.A. Dorph-Petersen, H.G. Gundersen, E.B. Jensen – *Non-uniform Systematic Sampling in Stereology*. *Journal of Microscopy*, vol. 200, issue 2, pp.148-157, 2000.
- [Ebe01a] C. Eberhardt, A. Clarke – *Fibre-orientation Measurements in Short-glass-fibre Composites. Part I: Automated, High-angular-resolution Measurement by Confocal Microscopy*. *Composites Science and Technology*, vol. 61, pp.1389-1400, 2001.
- [Ebe01b] C. Eberhardt, A. Clarke, M. Vincent, T. Giroud, S. Flouret – *Fibre-orientation Measurements in Short-glass-fibre composites – II: a Quantitative Error Estimate of the 2D Image Analysis Technique*. *Composites Science and Technology* vol. 61, pp.1961-1974, 2001.
- [Eks04] M. Ekström, S. Sjöstedt-De Luna – *Subsampling Methods to Estimation the Variance of Sample Means Based on Nonstationary Spatial Data With Varying Expected Values*. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 99, n° 465, March 2004.
- [Eph01] A. Ephraty, J. Tabrikian, H. Messer – *Underwater Source Detection using a Spatial Stationary Test*. *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, pp. 1053-1063, 2001.
- [For02] M.J. Fortin, M.R.T. Dale, J. ver Hoef – *Spatial Analysis in Ecology*. *Encyclopedia of Environmetrics*, vol. 4, pp. 2051-2058, J. Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2002.
- [Fra93] J.M. Francos, A. Zvi Meiri, B. Porat – *A Unified Texture Model Based on a 2-D Wold-Like Decomposition*. *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp. 2665-2678, August 1993.
- [Fue05] M. Fuentes – *A Formal Test for Nonstationarity of Spatial Stochastic Process*. *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 96, pp. 30-54, 2005.

- [Gag83] A. Gagalowicz – *Vers un Modèle de Textures*. Thèse d'état, Université Paris VI, 1983.
- [Gat96] A.C. Gatrell, T.C. Bailoy, P.J. Diggle, B.S. Rowlingson – *Spatial Point Pattern Analysis and its Application in Geographical Epidemiology*. Trans. Inst. Br. Geogr., NS, vol. 21, pp.256-274, 1996.
- [Gar00] M. García-Fiñana, L.M. Cruz-Orive – *New approximations for the variance in Cavalieri sampling*. Journal of Microscopy, vol.199, issue 3, p.224-238, 2000.
- [Ger05] C. Germain, R. Blanc, M. Donias, O. Laviolle, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Estimating the Section Elevation Angle of Cubes on a Cubic Mesh. Application to Nickel Microstructure Size Estimation*. Image Analysis and Stereology, vol. 24, pp.127-134, 2005.
- [Gor00] F. Goreaud – *Apports de l'Analyse de la Structure Spatiale en Forêt Tempérée à l'Etude et la Modélisation des Peuplements Complexes*. Mémoire de Thèse, ENGREF de Nancy, 2000.
- [Gua06] Y. Guan – *Tests for Independence between Marks and Points of a Marked Point Process*. Biometrics, vol. 62, issue 1, pp. 126-134, 2006.
- [Gua07] Y. Guan, M. Sherman, J.A. Calvin – *On Asymptotic Properties of the Mark Variogram Estimator of a Marked Point Process*. Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 137, issue 1, pp. 148-161.
- [Gun99] H.G Gundersen, E.B. Jensen, K. Kieu, J. Nielsen – *The Efficiency of Systematic Sampling in Stereology – reconsidered*. Journal of Microscopy, vol. 193, issue 3, pp.229-263, 1999.
- [Hei85] L. Heinrich, V. Schmidt – *Normal Convergence of Multidimensional Shot Noise and Rates of This Convergence*. Advances in Applied Probability, vol. 17, pp. 709-730, 1985.
- [Hei86] L. Heinrich – *Asymptotic Behaviour of an Empirical Nearest-Neighbour Distance Function for Stationary Poisson Cluster Processes*. Mathematische Nachrichten, vol. 136, pp. 131-148, 1986.
- [Her83] N. Herrndorf – *Stationary Strongly Mixing Sequences not Satisfying the Central Limit Theorem*. The Annals of Probability, vol. 11, n°. 3, pp. 809-813, 1983.
- [Jia96] X. Jian, R.A. Olea, Y. Yu – *Semivariogram Modelling by Weighted Least Squares*. Computers & Geosciences, vol. 22, n°4, pp. 387-397, 1996.
- [Jon04] G.L. Jones – *On the Markov Chain Central Limit Theorem*. Probability Surveys, vol. 1, pp. 299-320, 2004.
- [Kar69] S. Karlin – *Initiation aux Processus Aléatoires*. Dunod, Paris, 1969.
- [Kub01] L. Kubinova, J. Janacek – *Microscopy and Stereology: Estimating Volume, Number, SurfaceArea and Length by Virtual Test Probes Applied to Three-Dimensional Images*. Microscopy Research and Technique, vol.53, pp.425-435, 2001.

- [Lac97] J.L. Lacoume, P.O. Amblard, P. Comon – *Statistiques d'Ordre Supérieur pour le Traitement du Signal*. Masson, 1997.
- [Lah99] S.N. Lahiri, M.S. Kaiser, N. Cressie, N-J. Hsu – *Prediction of Spatial Cumulative Distribution Functions Using Subsampling*. Journal of the American Statistical Association, vol. 94, n°. 445, pp. 86-110, 1999.
- [Lan88] Ch. Lantuéjoul – *Some stereological and statistical consequences derived from Cartier's formula*. Journal of Microscopy, vol. 151, issue 3, pp. 265-276, 1988.
- [Lan91] Ch. Lantuéjoul – *Ergodicity and Integral Range*. Journal of Microscopy, vol. 161, issue 3, pp. 387-403, 1991.
- [Lee01] K.S. Lee, S.W. Lee, J.R. Youn, T.J. Kang, K. Chung – *Confocal microscopy measurement of the fiber orientation in short fiber reinforced plastics*. Fibers and polymers, vol. 2, issue 1, p.41-50, 2001.
- [Liu96] F. Liu, R.W. Picard – *Periodicity, Directionality, and Randomness: Wold Features for Image Modelling and Retrieval*. IEEE Trans. on PAMI, vol. 18, pp. 722-733, July 1996.
- [Mate00] J. Mateu – *Second-order characteristics of spatial marked processes with applications*. Nonlinear Analysis: Real World Applications 1, pp.145-162, 2000.
- [Math62] G. Matheron – *Traité de Géostatistique Appliquée, Tome I*. Mémoires du Bureau de Recherche Géologiques et Minières, n°. 14. Ed. Technip, Paris, 1962.
- [Math70] G. Matheron – *La Théorie des Variables Régionalisées, et ses Applications*. Cahiers du centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fasc. 5, 1970.
- [Math72] G. Matheron – *Ensembles Aléatoires et Géométrie Intégrale*. Cahiers du centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fasc. 6, vol. 1 et 2, 1972.
- [Math78] G. Matheron – *Estimer et Choisir. Essai sur la Pratique des Probabilités*. Cahiers du centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fasc. 7, 1978.
- [Matt05] T. Mattfeldt – *Explorative statistical analysis of planar point processes in microscopy*. Journal of Microscopy, vol. 220, issue 3, pp.131-139, 2005.
- [McD95] R.N. McDonough, A.D. Whalen – *Detection of Signals in Noise, 2nd Edition*. Academic Press, 1995.
- [Mer00] F. Merlevède, M. Peligrad – *The Functional Central Limit Theorem under the Strong Mixing Condition*. The Annals of Probability, vol. 28, n°. 3, pp. 1336-1352, 2000.
- [Mle99] B. Mlekusch – *Fibre orientation in short-fibre-reinforced thermoplastics II: Quantitative measurements by image analysis*. Composites Science and Technology vol. 59, pp. 547-560, 1999.
- [Mou02] P.R. Mouton – *Principles and Practices of Unbiased Stereology: An Introduction for Bioscientists*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, June 2002.

- [Nor05] D. Nordman, P. Sibbertsen, S.N. Lahiri - *Empirical Likelihood confidence intervals for the mean of a long-range dependent process*. Diskussionspapiere 327, Universität Hannover, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, 2005.
- [Osh81] J. Osher, D. Stoyan – *On the Second-Order and Orientation Analysis of Planar Stationary Point Processes*. Biometrical Journal, vol. 23, issue 6, pp. 523-533, 1981.
- [Ohs00] J. Osher, F. Mücklich – *Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science*. John Wiley & Sons, 2000.
- [Pap02] A. Papoulis, S.U. Pillai – *Probability, Random Variables and Stochastic Processes, 4th Edition*. McGraw-Hill, 2002.
- [Pen92] A. Penttinen, D. Stoyan, H.M. Henttonen – *Marked Point Processes in Forest Statistics*. Forest Science, vol. 38, issue 4, pp. 806-824, 1992.
- [Pie60] E.C. Pielou – *A Single Mechanism to Account for Regular, Random and Aggregated Populations*. Journal of Ecology, vol. 47, pp.575-584, 1960.
- [Pol01] D.N. Politis, M. Sherman – *Moment Estimation for Statistics from Marked Point Processes*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 63, part 2, pp. 261-275, 2001.
- [Pon99] M-J Pons-Bordería, V.J. Martinez, D. Stoyan, H. Stoyan, E. Saar – *Comparing Estimators of the Galaxy Correlation Function*. The Astrophysical Journal, vol. 523, issue 2, pp. 480-491, 1999.
- [Pre92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery – *Numerical Recipes in C, 2nd Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1992.
- [PSS91] Panel on *Spatial Statistics and Image Processing, Spatial Statistics and Digital Image Analysis*. National Academy Press, Washington, DC, 1991.
- [Qui97] J. Quintanilla, S. Torquato – *Local volume fraction fluctuations in random media*. Journal of Chemical Physics, vol. 106, issue 7, pp.2741-2751, 1997.
- [Rip76] B.D. Ripley – *The Second-Order Analysis of Stationary Point Processes*. Journal of Applied Probability, vol. 13, pp. 255-266, 1976.
- [Rip77] B.D. Ripley – *Modelling Spatial Patterns*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 39, pp. 172-192, 1977.
- [Rip88] B.D. Ripley – *Statistical Inference for Spatial Processes*. Cambridge University Press, 1988.
- [Ros56] M. Rosenblatt – *A Central Limit Theorem and a Strong Mixing Condition*. Proceeding of the National Academy of Sciences, vol. 42, pp. 43-47, 1956.
- [Ros84] M. Rosenblatt – *Asymptotic Normality, Strong Mixing and Spectral Density Estimates*. The Annals of Probability, vol. 12, n°. 4, pp. 1167-1180.
- [Rus00] J.C. Russ, R.T. Dehoff – *Practical Stereology, 2nd Edition*. Plenum Press, New York, 2000.

- [Sak03] T. Sakaguchi, S. Mase – *On the Threshold Method for Marked Spatial Point Processes*. Journal of the Japan Statistical Society, vol. 33, issue 1, pp. 23-37, 2003.
- [Seq95] R.E. Sequeira, J.A. Gubner – *Intensity Estimation from Shot-Noise Data*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 43, issue 6, pp.1527-1531, 1995.
- [Ser82] J. Serra – *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.
- [Sha04] V. Sharifi-Salamatian, B. Pesquet-Popescu, J. Simony-Lafontaine, J.P. Rigaut. *Index for spatial heterogeneity in breast cancer*. Journal of Microscopy, vol. 216, issue 2, p. 110-122, 2004.
- [She94] M. Sherman, E. Carlstein – *Nonparametric Estimation of the Moments of a General Statistic Computed from Spatial Data*. Journal of the American Statistical Association, vol. 89, n°. 426, pp. 496-500, 1994.
- [She96] M. Sherman – *Variance Estimation for Statistics Computed from Spatial Lattice Data*. Journal of the Royal Statistical Society B, vol. 58, n°. 3, pp. 509-523, 1996.
- [She97] M. Sherman, E. Carlstein – *Omnibus Confidence Intervals*. Technical Report 278, Texas A&M University, Dept. of Statistics, 1997.
- [Sil75] S.D. Silvey – *Statistical Inference*. Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, 1975.
- [Spa03] J.C. Spall – *Estimation via Markov Chain Monte Carlo*. IEEE Control Systems Magazine, vol. 23, issue 2, pp. 34-45, 2003.
- [Spe00] S. Spencer, D. Sutherland – *Stereological Correction of Mineral Liberation Grade Distributions Estimated by Single Sectioning of Particles*. Image Analysis and Stereology, vol.19, pp. 175-182, 2000.
- [Ste84] D.C. Sterio – *The Unbiased Estimation of Number and Sizes of Arbitrary Particles Using the Dissector*. Journal of Microscopy, vol. 134, issue 2, pp.127-163, 1984.
- [Sti07] Y. Stitou, F. Turcu, Y. Berthoumieux, M. Najim – *Three-Dimensional Textured Image Blocks Model Based on Wold Decomposition*. IEEE Transactions on Signal Processing, à paraître en Juin 2007.
- [Sto84] D. Stoyan – *On Correlations of Marked Point Processes*. Mathematische Nachrichten, vol. 116, pp. 197-207, 1984.
- [Sto85] D. Stoyan, H. Stoyan – *On one of Matern's hard-core point process models*. Mathematische Nachrichten, vol. 122, pp. 205-214, 1985.
- [Sto89] D. Stoyan – *Statistical Inference for a Gibbs Point Process of Mutually Non-Intersecting Discs*. Biometrical Journal, vol. 31, issue 2, pp. 153-161, 1989.
- [Sto95] D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke – *Stochastic Geometry and its Applications, 2nd Edition*. John Wiley & Sons, 1995.
- [Sto98] D. Stoyan, H. Stoyan – *Non-homogeneous Gibbs Process Models for Forestry - A Case Study*. Biometrical Journal, vol. 40, issue 5, pp. 521-531, 1998).

- [Sto00a] D. Stoyan, A. Penttinen – *Recent Applications of Point Process Methods in Forestry Statistics*. Statistical Science, vol.15, n°1, pp. 61-78, February 2000.
- [Sto00b] D. Stoyan, H. Stoyan – *Improving ratio estimators of second order point process characteristics*. Scandinavian Journal of Statistics, vol. 27, issue 4, pp. 641-656, 2000.
- [The92] C.W. Therrien – *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*. Prentice Hall, 1992.
- [Tod01] E. Todini – *Influence of Parameter Estimation Uncertainty in Kriging: Part 1 - Theoretical Development*. Hydrology and Earth System Sciences, vol. 5, pp. 215-223, 2001.
- [Wei00] L.Y. Wei, M. Levoy – *Fast Texture Synthesis using Tree-structured Vector Quantization*. In Proceedings of SIGGRAPH 2000.
- [Zim99] D. Zimmerman, C. Pavlik, A. Ruggles, M.P. Armstrong – *An Experimental Comparison of Ordinary and Universal Kriging and Inverse Distance Weighting*. Mathematical Geology, vol. 31, issue 4, pp. 375-390, 1999.

Liste de publications de l'auteur.

Articles de revue

- Ch. Germain, R. Blanc, M. Donias, O. Lavialle, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Estimating the section elevation angle of cubes on a cubic mesh. application to nickel microstructure size estimation*. Image Analysis and Stereology, Vol 24, pp. 127-134, 2005.
- R. Blanc, Ch. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou, M. Cataldi – *Fiber orientation measurements in composite materials*. Composites Part A, Vol 37, Issue 2, pp. 197-206, 2006.
- R. Blanc, J.P. Da Costa, Ch. Germain, P. Baylou – *Assessment of Texture Stationarity using the Asymptotic Behaviour of the Empirical Mean and Variance*. Soumis à IEEE Transactions on Image Processing.

Communications dans des conférences internationales à comité de lecture

- R. Blanc, Ch. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou, M. Cataldi – *Fiber orientation measurement in composite materials*. CompTest2004, Bristol, UK, 2004.
- Ch. Germain, R. Blanc, M. Donias, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Estimating the section elevation angle for cubes on cubic networks. Application to nickel superalloys characterisation*. 9th European Congress on Stereology and Image Analysis, Zakopane, Poland, 10-13 Mai 2005.
- R. Blanc, J.P. Da Costa, Ch. Germain, P. Baylou – *Variance of the mean value estimation of a spatial process. Application to composite material images*. 6th International Conference on Stereology, Spatial Statistics and Stochastic Geometry, Prague, Czech Republic, 2006.

Communications sans actes

- R. Blanc, Ch. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Inférence statistique pour la caractérisation volumique des matériaux par analyse d'image 2D*. Journées MECAMAT. Grenoble, 2-3 juin 2005.
- R. Blanc, Ch. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Métrologie et analyse d'image. Inférence statistique pour la caractérisation volumique des matériaux par analyse d'image 2D*. Journée Métrologie GDR-ISIS E. Bordeaux, 27 janvier 2006.
- R. Blanc, Ch. Germain, J.P. Da Costa, P. Baylou – *Caractérisation volumique de matériaux composites. Estimation de l'incertitude des mesures effectuées par analyse d'image*. 28ème journée ISS France, Paris, 3 février 2006.
- R. Blanc, J.P. Da Costa, Ch. Germain, P. Baylou – *Inférence statistique en analyse d'image, homogénéité et variance d'estimation*. 29ème journée ISS France, Paris, 8 février 2007.