UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2

Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces

David Coeurjolly

18 décembre 2002

Thèse sous la direction de

Serge Miguet et Laure Tougne

ERIC
LABO
EQUIPE DE RECHERCHE EN INGENIERIE DES CONNAISSANCES

Contexte

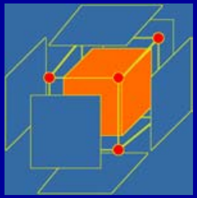
Analyse d'images

→ Reconnaissance de formes

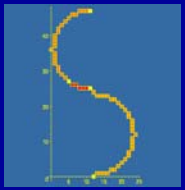
Définir des outils mathématiques et proposer des solutions algorithmiques pour l'analyse d'objets discrets

Organisation de la présentation

- Notions de base

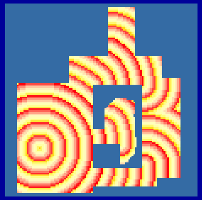


- Objets fondamentaux
  (droites, plans, cercles)



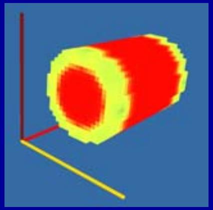
Reconnaissance de cercles discrets

- Métriques discrètes



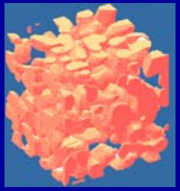
Visibilité et géodésiques discrètes

- Mesures



Estimateurs de mesures euclidiennes

- Applications

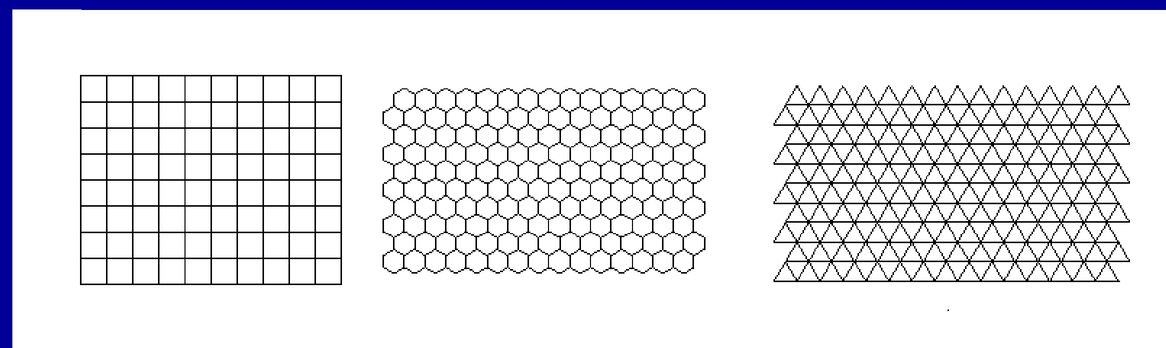


Analyse d’échantillons de neige

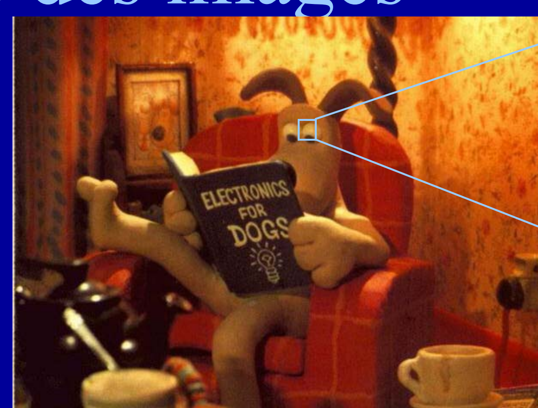
Modèle discret

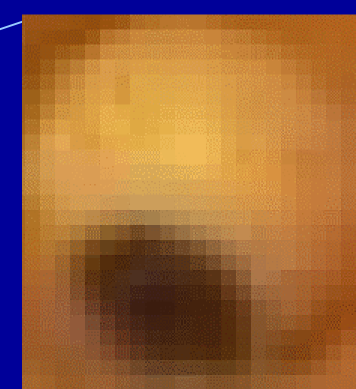
Grille discrète

- Données numériques organisées sur une grille régulière



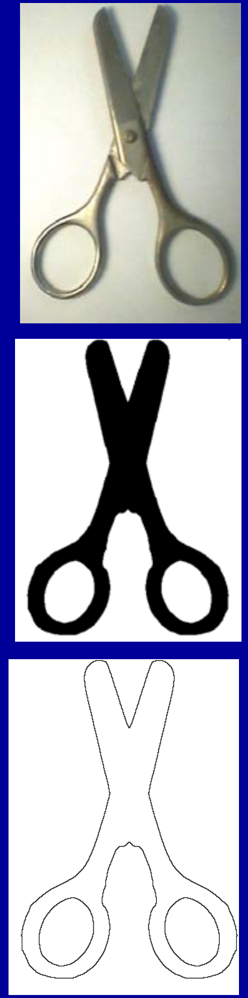
- Structure des images
  - Acquisition
  - Stockage



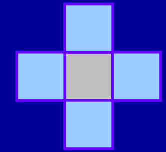


Objets discrets binaires 2D

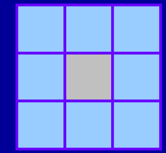
Généralement issus d'un processus de segmentation



– *Objet discret* : ensemble de pixels connexes

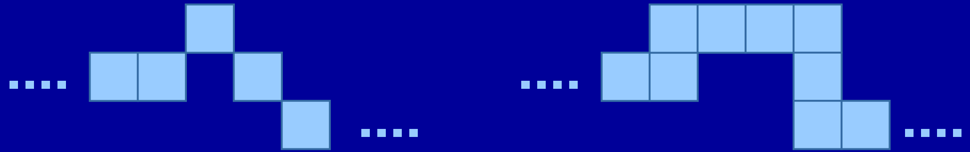


4-connexité



8-connexité

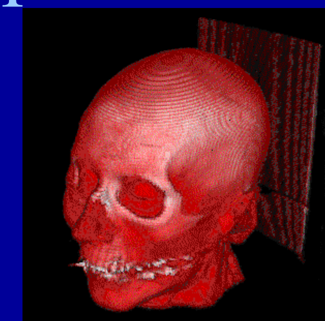
– *Courbe discrète* : séquence de pixels avec exactement deux voisins *k-connexes*



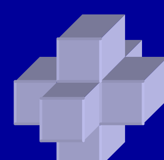
Objets discrets binaires 3D

Acquisition : IRM, scanner, tomographie X

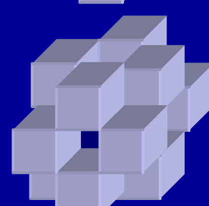
- Imagerie médicale
- Analyse de structures microscopiques



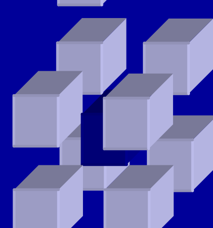
– *Objet discret* : ensemble de *voxels* connexes



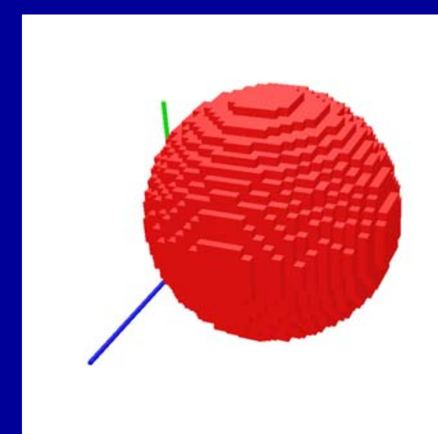
6-connexité



18-connexité

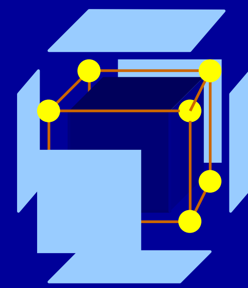


26-connexité

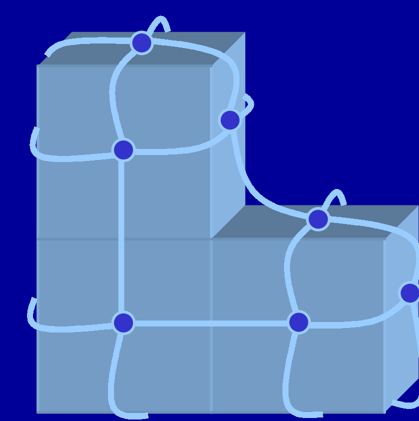


Objets discrets binaires 3D

- *Surface discrète* : ensemble de surfels munis d'une relation d'adjacence

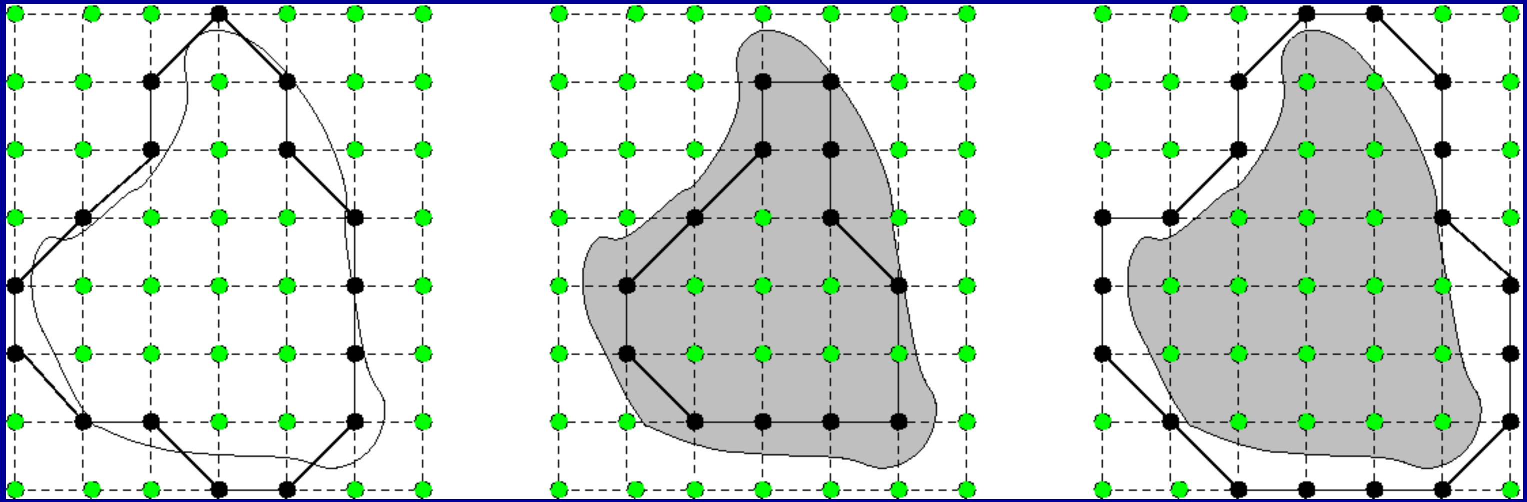


- Cas objets *6-* et *18-connexes* :
  - topologiquement sans trous
  - graphe de degré 4



Processus de discrétisation

Illustration en 2D



GIQ
Grid Intersect Quantization
Discrétisation « au plus proche »

OBQ
Object Boundary Quantization
Discrétisation interne

BBQ
Background Boundary Quantization
Discrétisation externe

Paradigme de la géométrie discrète

Manipulation, analyse, visualisation des objets discrets en exploitant uniquement la donnée « image »

- Aucune interpolation par une forme continue
- Algorithmes basés sur des nombres entiers

  - Pas d'erreurs d'arrondi

  - Utilisation de la théorie des nombres et de l'arithmétique

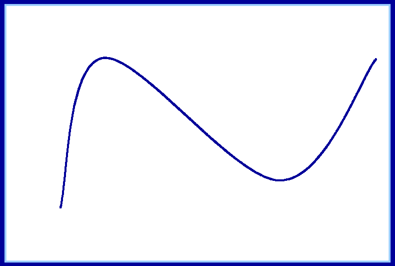
Reconnaissance des objets fondamentaux

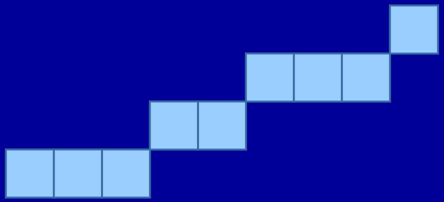
le cercle discret

Problème de la reconnaissance

- *Géométrie euclidienne* : description comportementale

$y=f(x)$





Est-ce un morceau de droite discrète ?

Est-ce un arc de cercle discret ?

- *Définition par discrétisation* :

Un ensemble de pixels est un morceau de droite discrète s'il existe une droite réelle dont la discrétisation contient l'ensemble des pixels

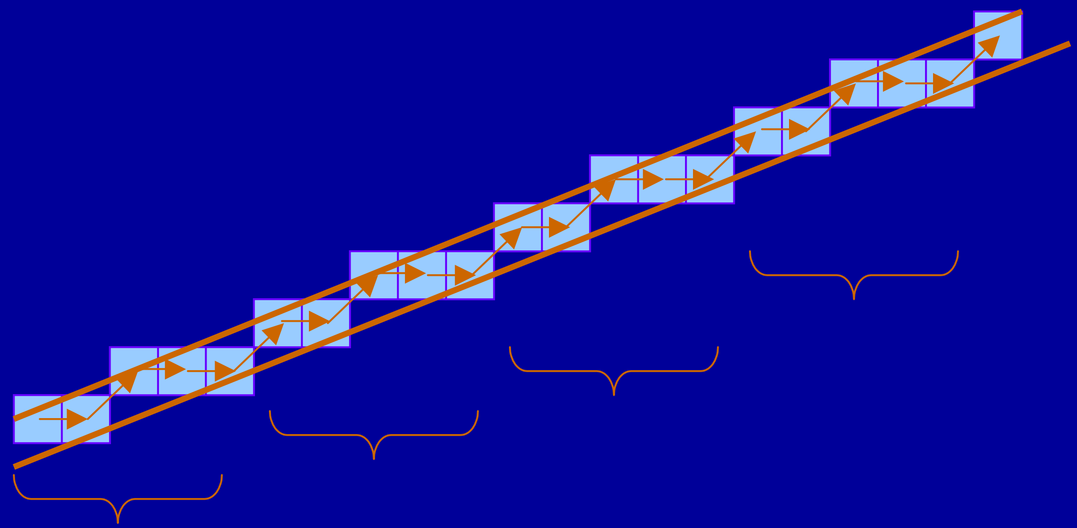
Droite discrète

- Structures périodiques dans les droites discrètes [Bernouilli 1771]

- Propriétés locale de la courbe [Hübler,Wu]
- Propriétés géométriques [Kovalevsky]
- Propriétés arithmétiques [Debled-Reveillès]
- Analyse de la pré-image [Dorst, Bruckstein, Vittone-Chassery]
- Programmation linéaire [Megiddo,Tajine-Françon]

- *Reconnaissance* : est-ce qu'un ensemble de pixels est un morceau de droite discrète ?
- *Segmentation* : comment décomposer une courbe discrète en segments de droite discrète ?

Exemple de droite discrète



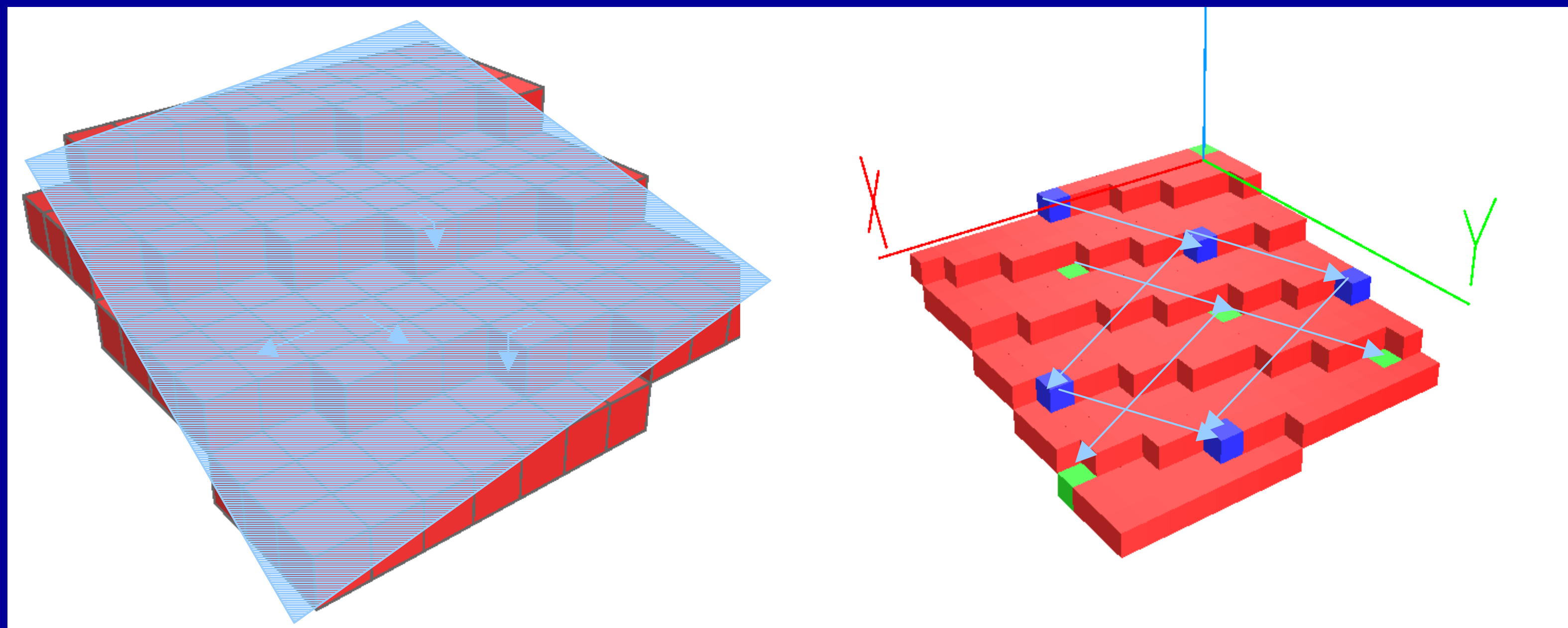
- Critères locaux

- Caractérisation géométrique → pré-image dans l'espace dual, programmation linéaire

- Caractérisation arithmétique → périodicité, théorie des nombres, fraction continue,…

- Propriétés statistiques (loi de Bernouilli) P(↗) P(→)

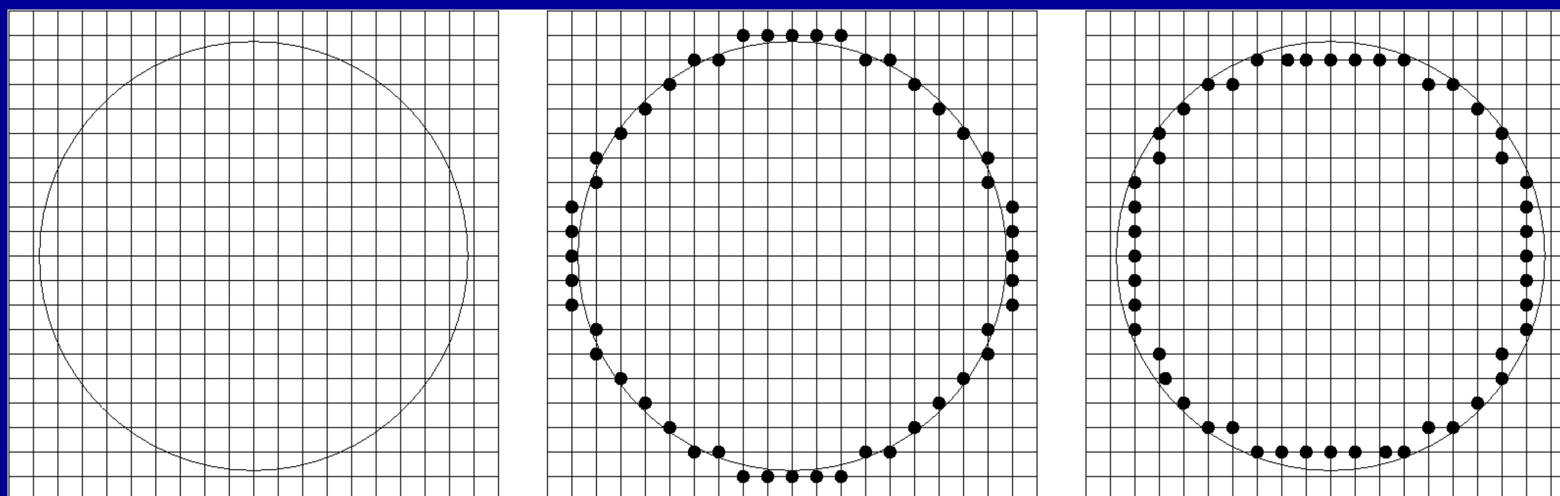
Plan discret



- *Critères locaux*
- *Caractérisation géométrique → pré-image dans l'espace dual, programmation linéaire*
- *Caractérisation arithmétique → périodicité, théorie des nombres, fraction continue,…*
- *Propriétés statistiques (loi empirique)* P()

Cercle discret

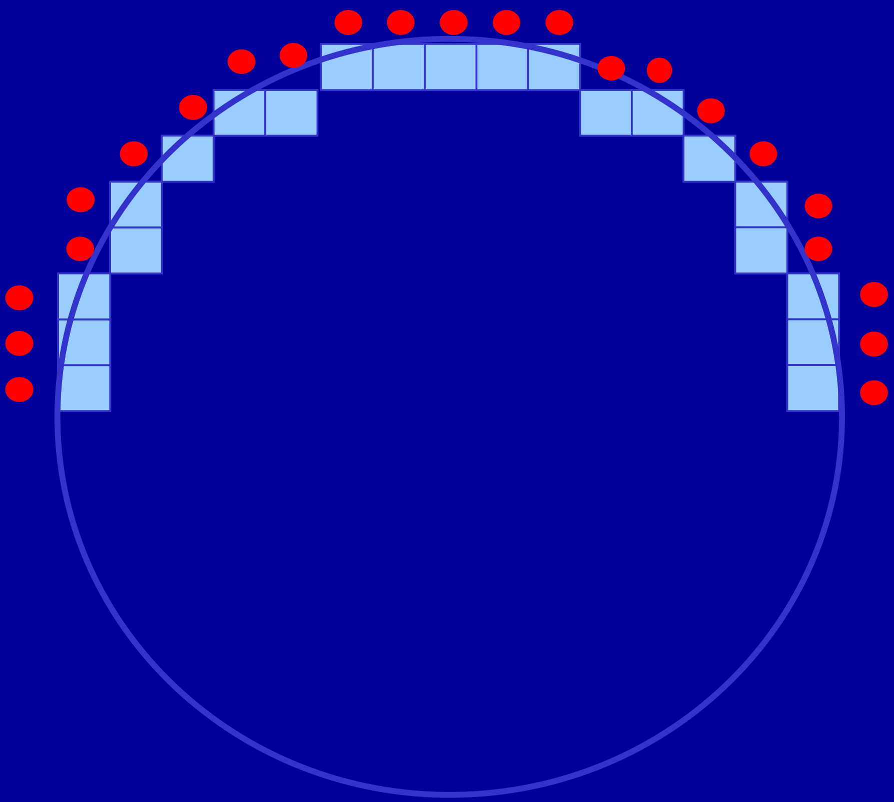
- *Construction*



Notion de séparation du disque discret de son complémentaire par un cercle réel

Cercle discret et séparabilité par arc

- Schéma de reconnaissance



⇒ Test de séparabilité de deux ensembles de points par un arc de cercle

Cercle discret et séparabilité par arc

Problème : soient S,T deux ensembles finis de points dans $\mathbb{R}^2$

Comment séparer S de T par un arc de cercle ?

Un tel cercle de centre ω vérifie :

$$\forall\, s \in S,\ \forall\, t \in T,\ \mathrm{dist}(\omega,s)<\mathrm{dist}(\omega,t)$$

Arc center domain (acd) :

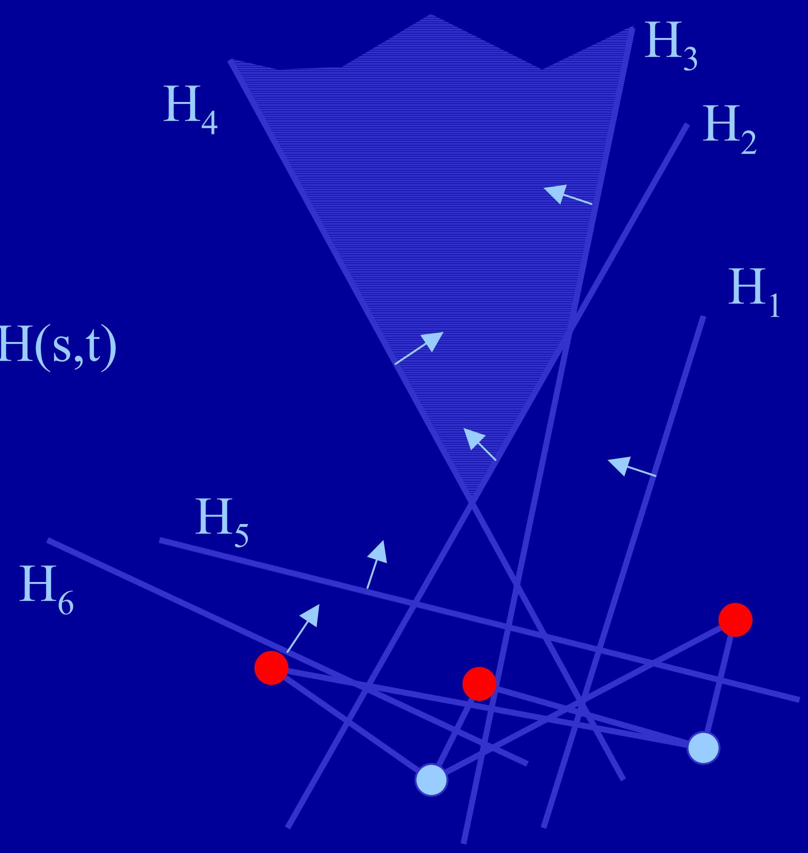
$\mathrm{acd}(S,T)=\bigcap H(s,t)$ *(cellule de Voronoï généralisée)*

Séparation de deux ensembles en géométrie algorithmique

H(s,t) : médiatrice de [st],
s appartient au demi-espace H(s,t)

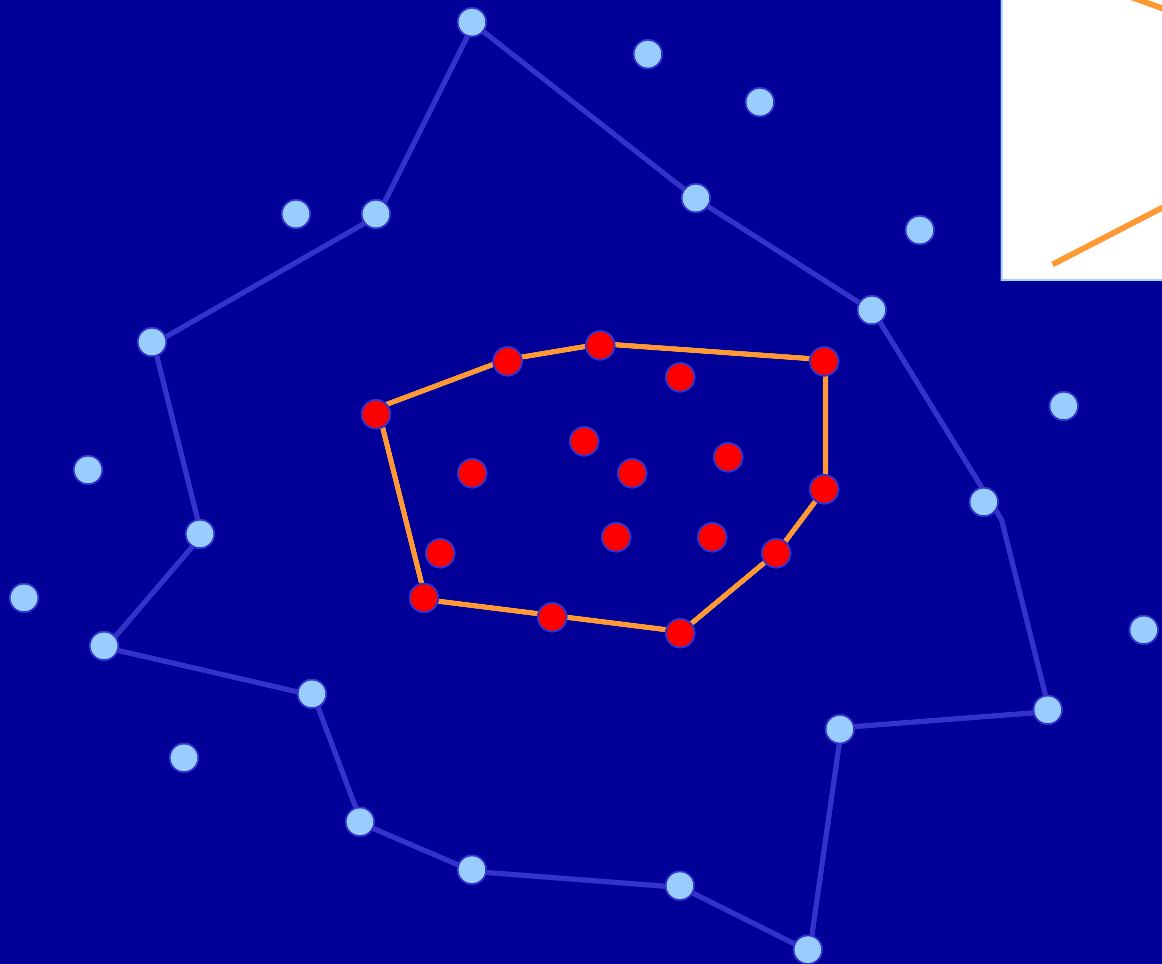
● *T*

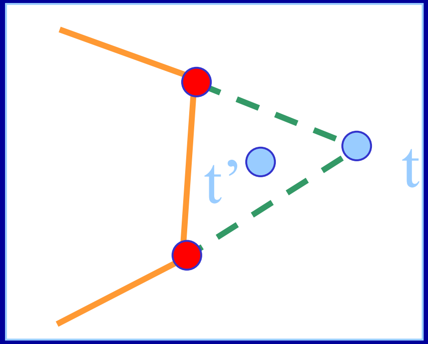
● *S*



Calculer l'acd ⇔ problème de programmation linéaire

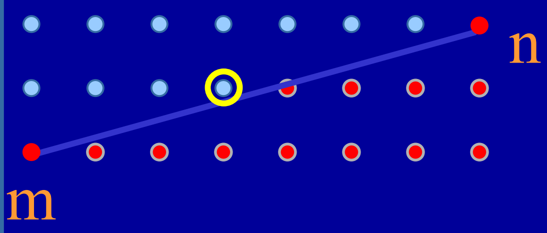
Optimisation du test





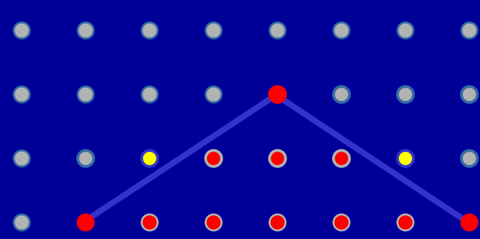
Cas discret

courbe polygonale quasi-circulaire



Séparer les points rouges des points bleus :
- considérer m et n
- considérer le *point de Bezout* du segment [mn]

• u=(a,b) *vecteur directeur tel que* pgcd(a,b)=1
• v=(i,j) *vecteur de Bezout tel que* aj-bi=1

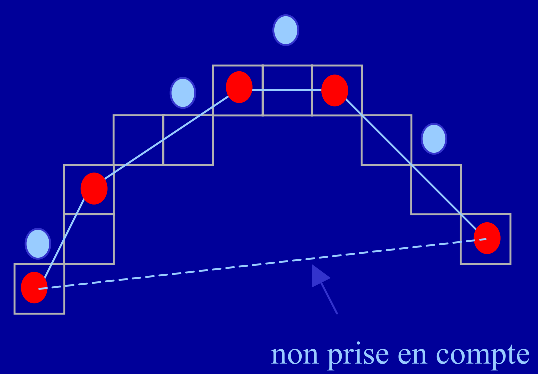


⇒ *Une courbe polygonale convexe est dite quasi-circulaire si :*
$\mathrm{acd}(\{\text{sommets}\},\{\text{points de Bezout}\}) \neq \emptyset$

Cas discret

courbe discrète quasi-circulaire

Prop : une courbe discrète convexe est la discrétisation (OBQ) d'un arc de cercle si et seulement si on peut séparer les points de la courbe de son complémentaire par un arc de cercle



Enveloppe convexe de la courbe discrète :

- sommets $\{v_i\}$ ●
- points de Bezout $\{b_i\}$ associés à chaque ● arête

Prop $\Leftrightarrow$ *l'enveloppe convexe est quasi-circulaire* $\Leftrightarrow acd(\{v_i\},\{b_i\}) \neq \emptyset$

Processus général et complexité

1. Segmentation de la courbe en morceaux strictement convexes ou concaves

   algorithmes de segmentation en droites discrètes

   → *O(n)*

2. Construction de la courbe polygonale

   enveloppes convexes de courbes discrètes

   → *O(n) et produit N arêtes*

3. Construction des points de Bezout

   calcul dérivé de l'algorithme de division d'Euclide

   → *O(n)*

4. Calcul de l'*acd*

   global ou incrémental

   → *O(N^2log(N))* avec [Preparata-Shamos]

Processus général et complexité

- Borne de Acketa et Zunic :

$$N = O(n^{2/3})$$

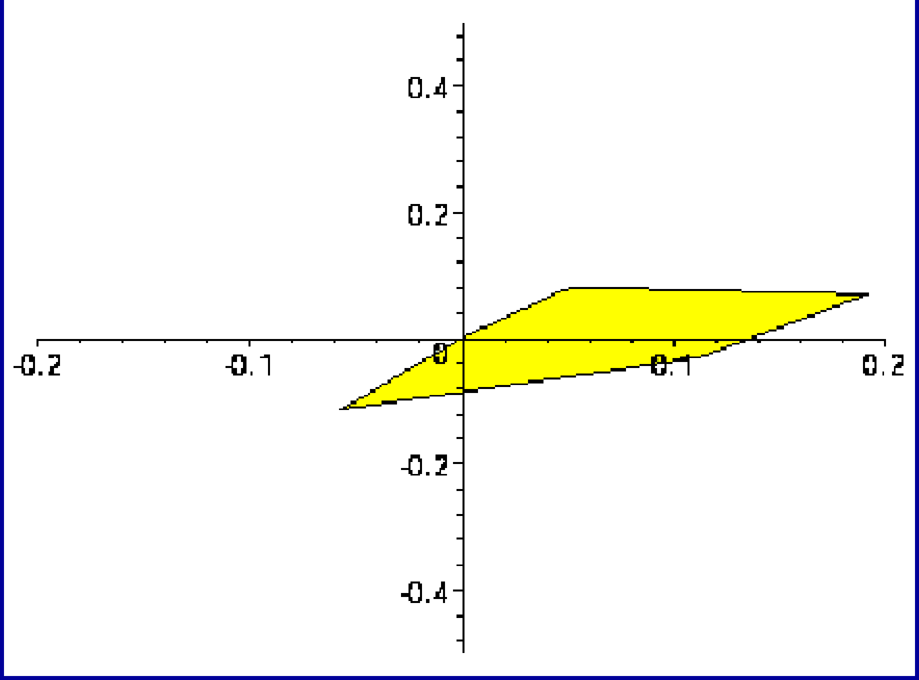
- Reconnaissance et segmentation d'une courbe discrète en arcs de cercle :

$$O(n^{4/3}\log(n))$$

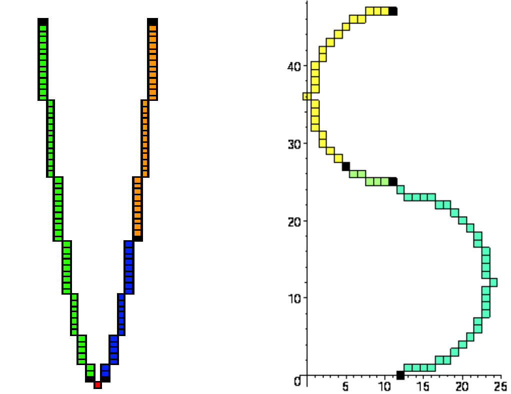
  - [Kim 84] : $O(n^3)$
  - [Fisk 86] : $O(n^2)$
  - [Kovalevsky 90] : $O(n^2\log(n))$
  - [Damaschke 95] : $O(n)$

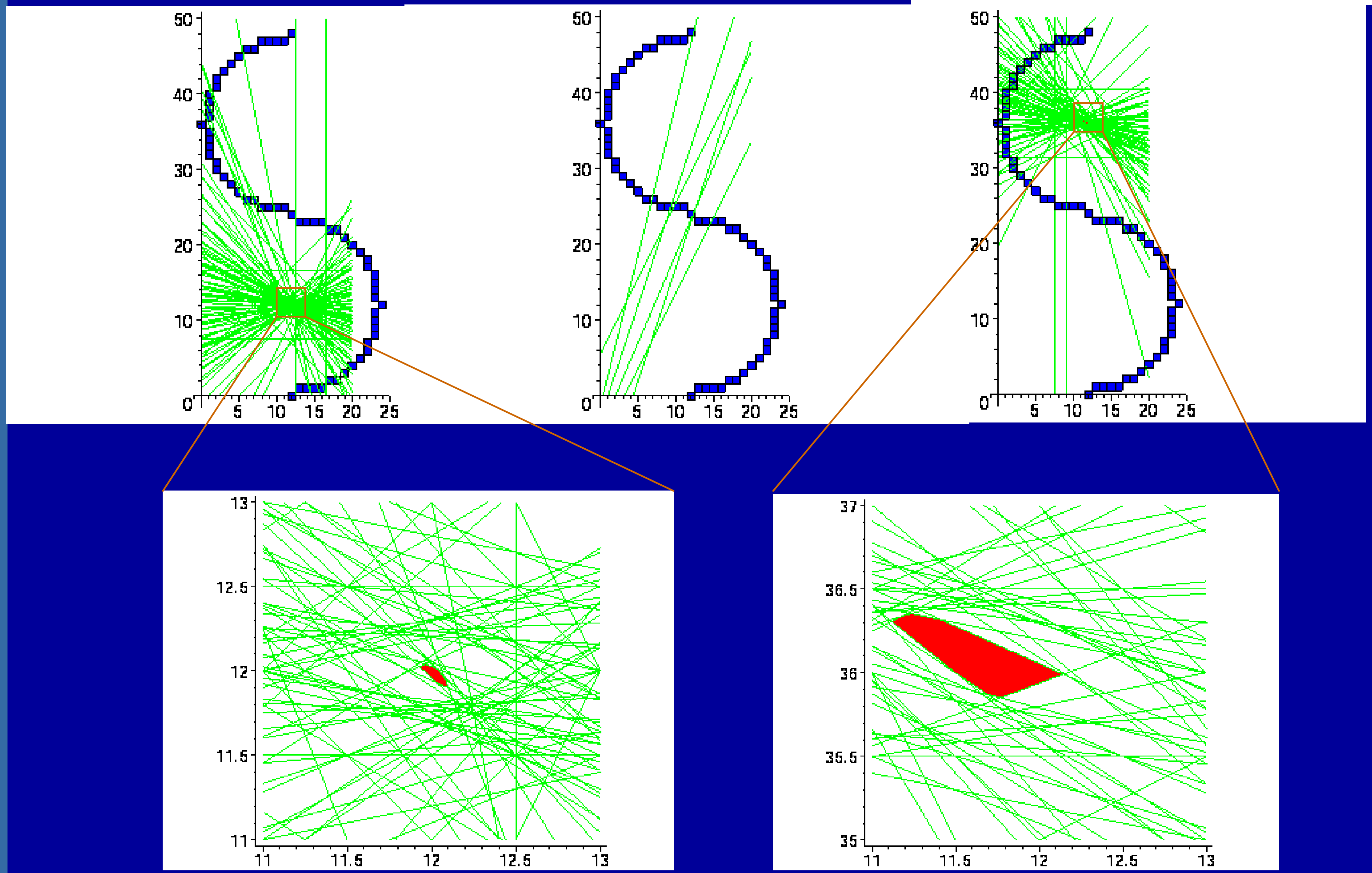
Exemple de reconnaissance

acd d'un cercle discret de rayon 100 centré en (0,0) lorsque l'on ajoute successivement les arêtes



Exemples de segmentation



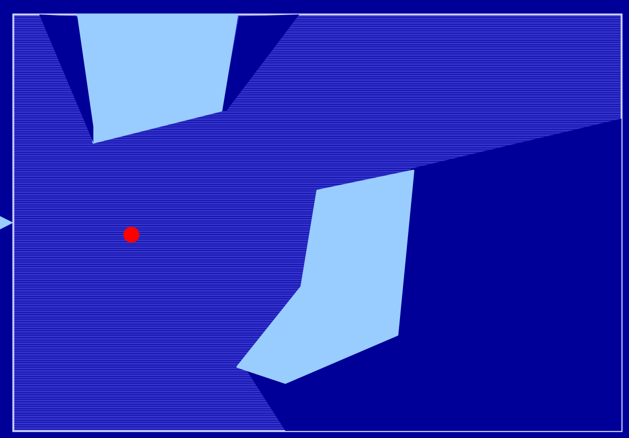


Métriques discrètes

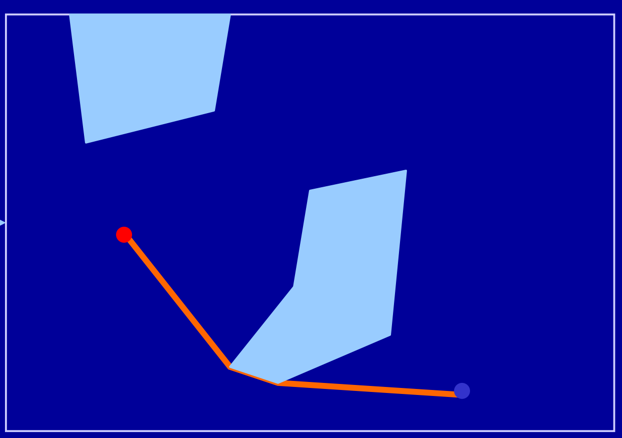
visibilité et géodésiques discrètes

Définition des notions

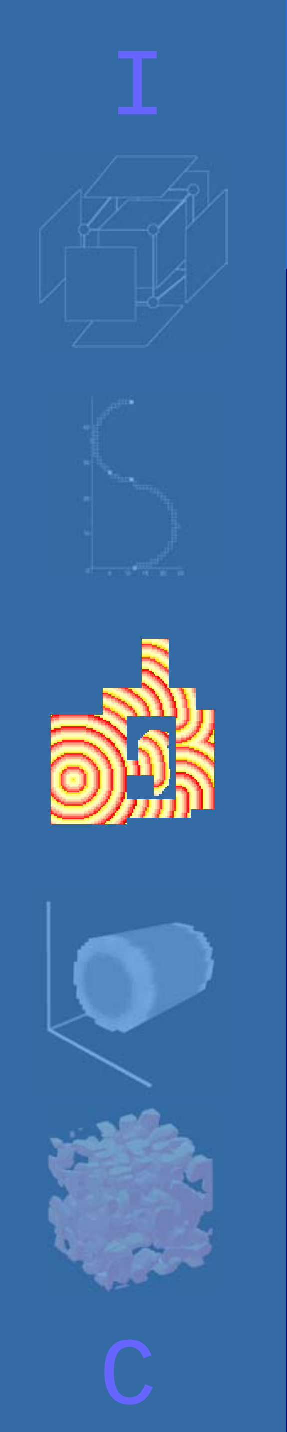
Visibilité



Chemin géodésique



⇒ Notion de métrique géodésique



Visibilité et géodésiques discrètes

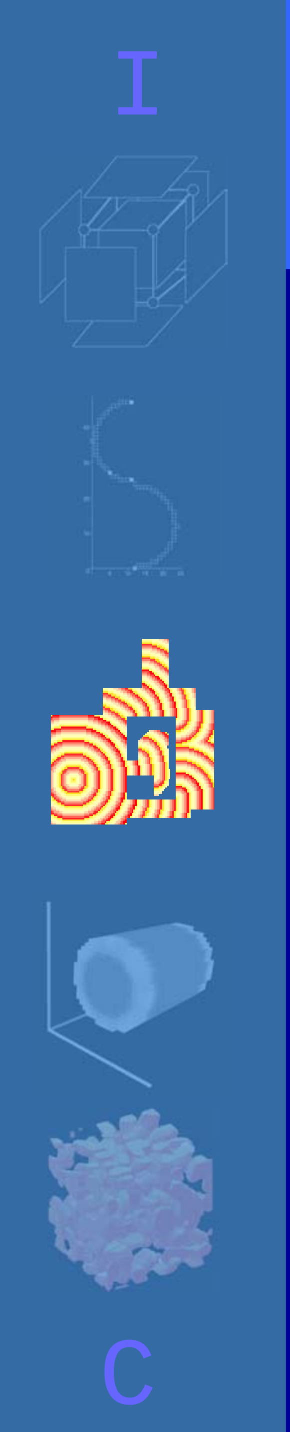
Intérêt théorique :

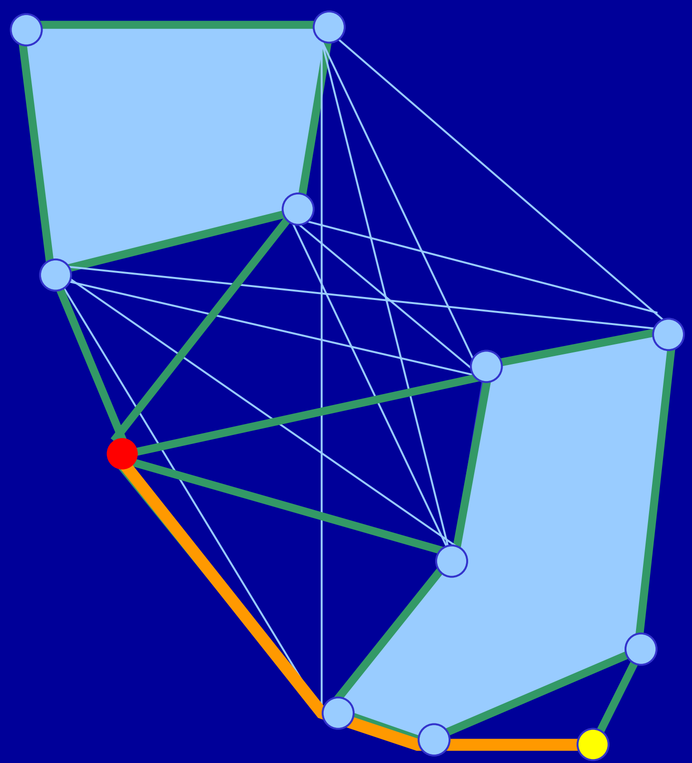
- Nouvel outil d'analyse pour le modèle
- Métrique euclidienne sur des grilles

De nombreuses applications :

- Planification de trajectoires de robots
- Simulation en physique
- Analyse d'images en imagerie médicale

De la visibilité aux géodésiques en géométrie algorithmique





1. Calcul du graphe de visibilité
2. Plus court chemin dans un graphe pondéré
   [Dijkstra]

Visibilité discrète

- Étant donnés s, t et un ensemble de pixels « obstacles », s et t sont mutuellement visibles s'il existe un segment discret joignant s à t et ne contenant aucun pixel obstacle.

Théorème : Pour tester la visibilité de s et t, il nous suffit de considérer uniquement deux pixels obstacles

Visibilité restreinte : Si les obstacles sont triés en ordre polaire de centre s, les deux pixels obstacles se trouvent en O(log(m))

Visibilité restreinte
algorithme et complexité

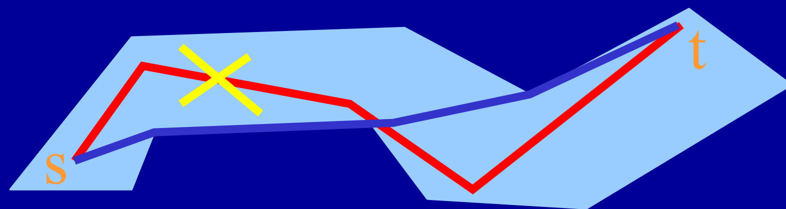
Algorithme

Parcours en largeur du domaine

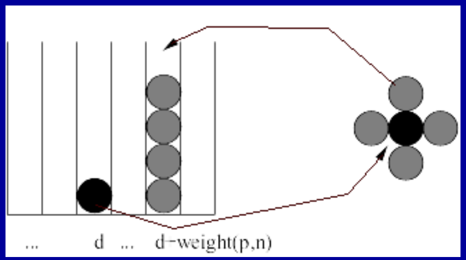
1. Maintien de la structure d'ordre polaire de centre *s* contenant les pixels obstacles
2. Lors de la visite du point *t*, on teste *v(s,t)*
   1. Soit *(u,l)* la localisation de *t* dans le tri polaire — *O(log(m))*
   2. Résoudre le test avec *u*, *l*, *s* et *t* — *O(1)*
3. Si un obstacle est rencontré, mise à jour de la liste des obstacles — *O(log(m))*

⇒ complexité globale en O(nlog(m))

De la visibilité aux géodésiques discrètes



$$d_{geodes}(s,t) = \sum_{i=0}^{n} d_{euc}(p_i, p_{i+1})$$

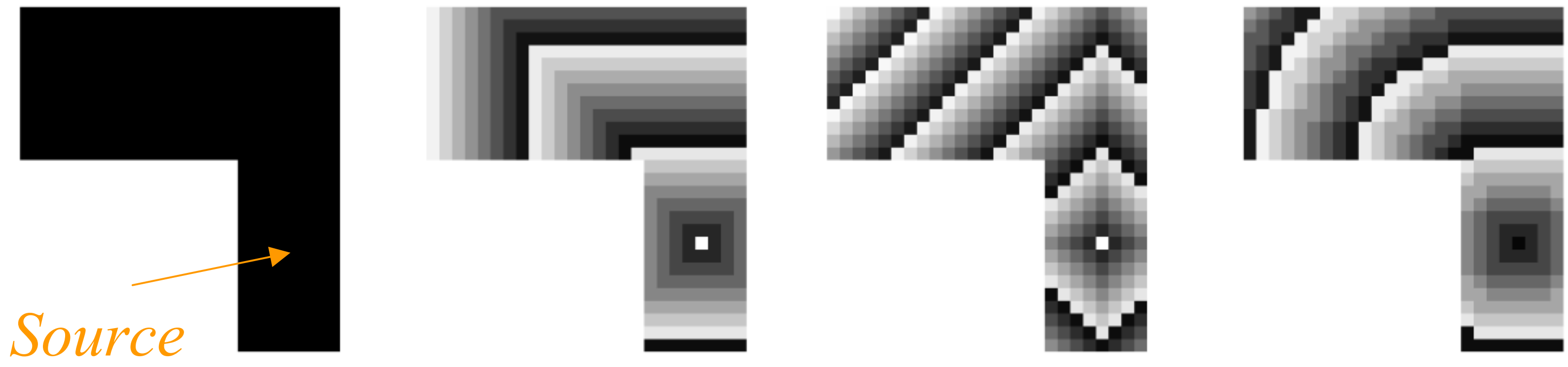


- Structure adaptée (*files de priorité*)
- Algorithme de *Verwer* (A^*) pour estimer le plus court chemin

Principes de l'algorithme :

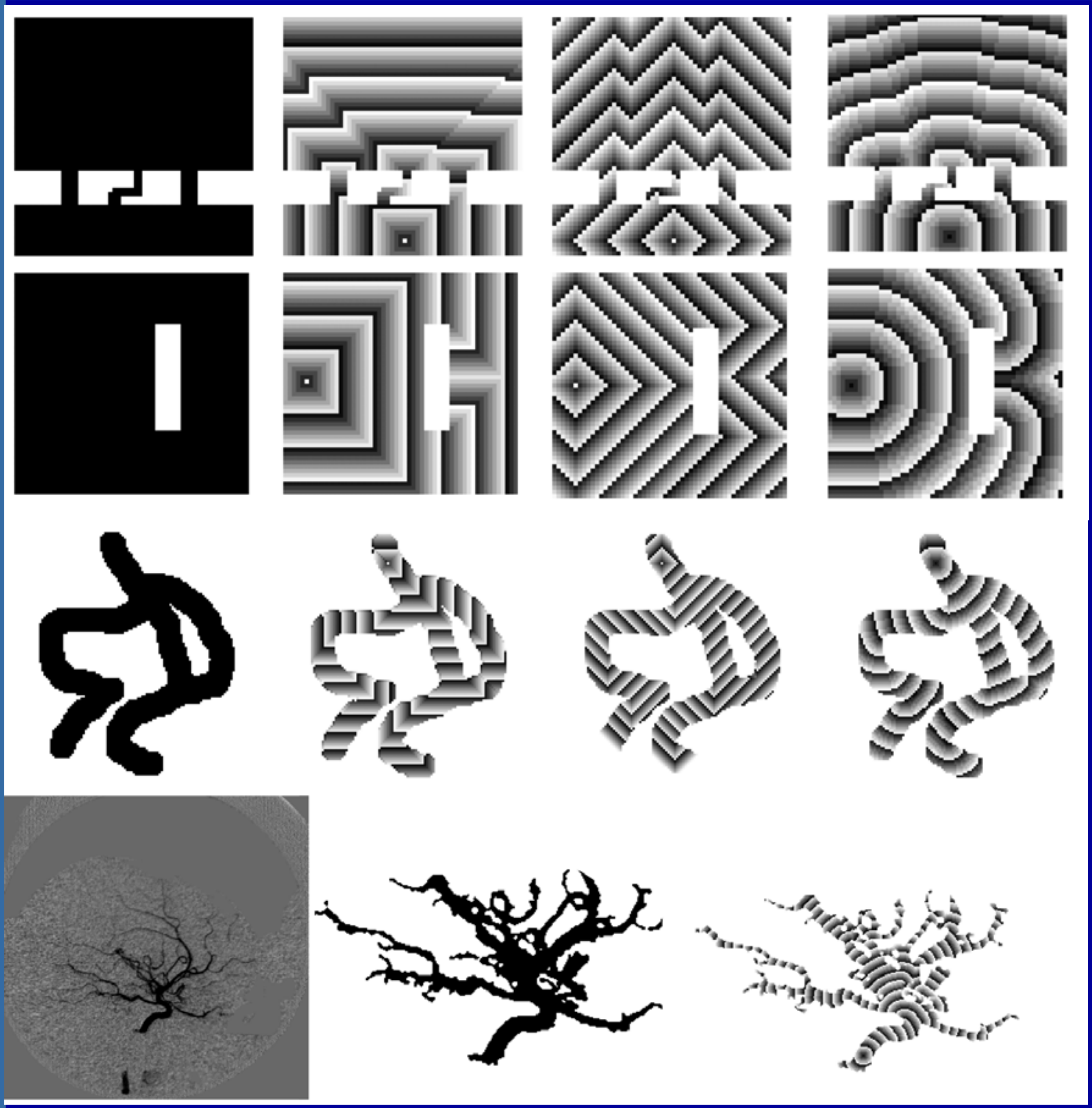
1. parcours en largeur du domaine
2. à la visite d'un point *t*
   - si *t* est visible, on mémorise *t* dans la structure de files
   - sinon *t* est susceptible d'être la source d'une nouvelle propagation en visibilité, on le marque et le mémorise

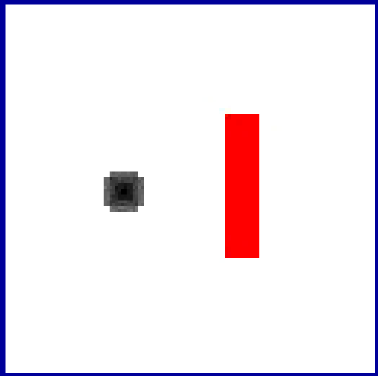
Exemples



Domaine | *Distance de l'échiquier (d_8)* | *Distance de Manhattan (d_4)* | *Métrique proposée*

Exemples





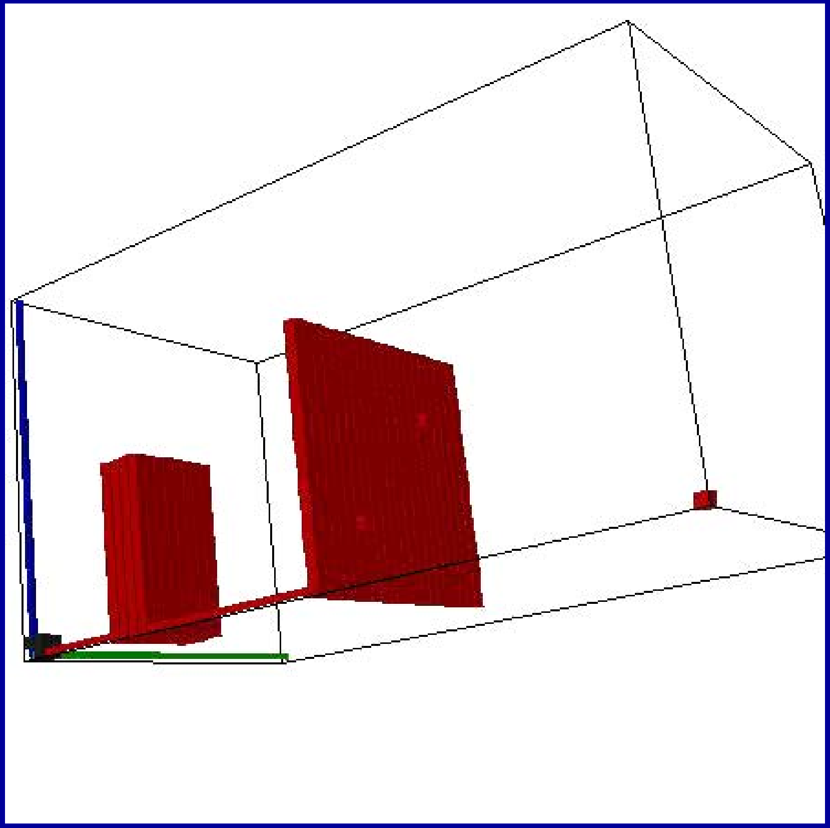
Visibilité et géodésiques 3D

Test de visibilité : tracé de droites discrètes 3D

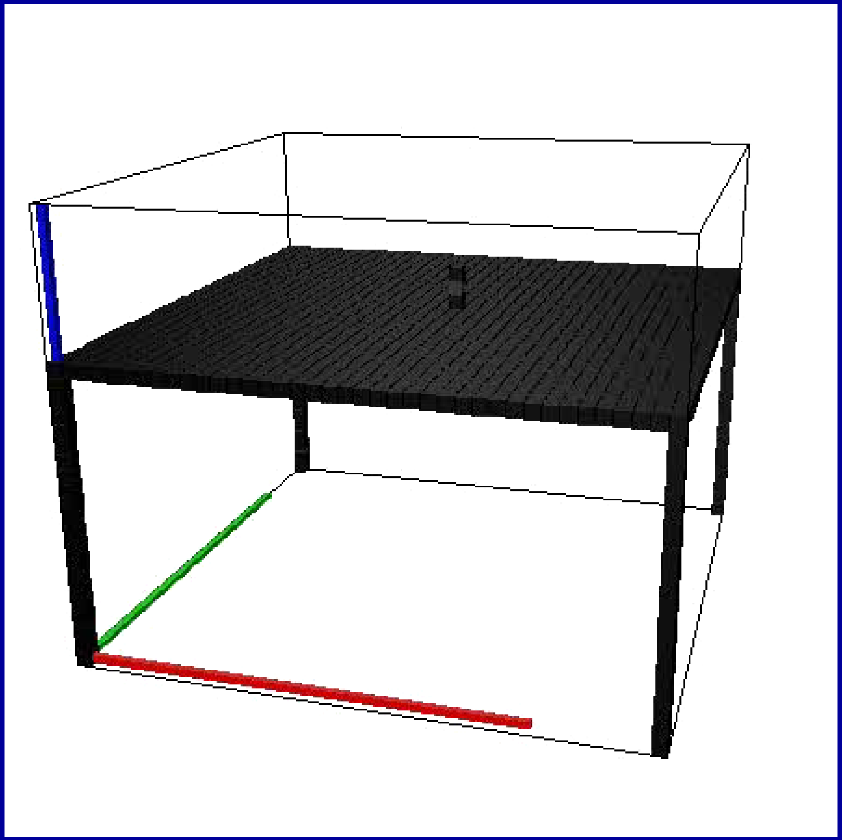
☺ Facile à mettre en place *(même structure qu'en 2D)*

☹ Complexité *(O(nd) où d est le diamètre du domaine)*

Exemple



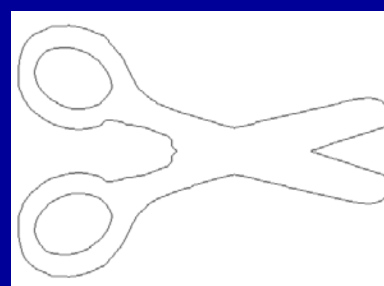
Exemple



Mesures sur des objets discrets

Objectif : *signature discrète*

- *Reconnaissance de formes par l'analyse du contour*



- Périmètre
- Aire
- Normales
- Courbure
- …

?

- Périmètre
- Aire
- Normales
- Courbure
- …

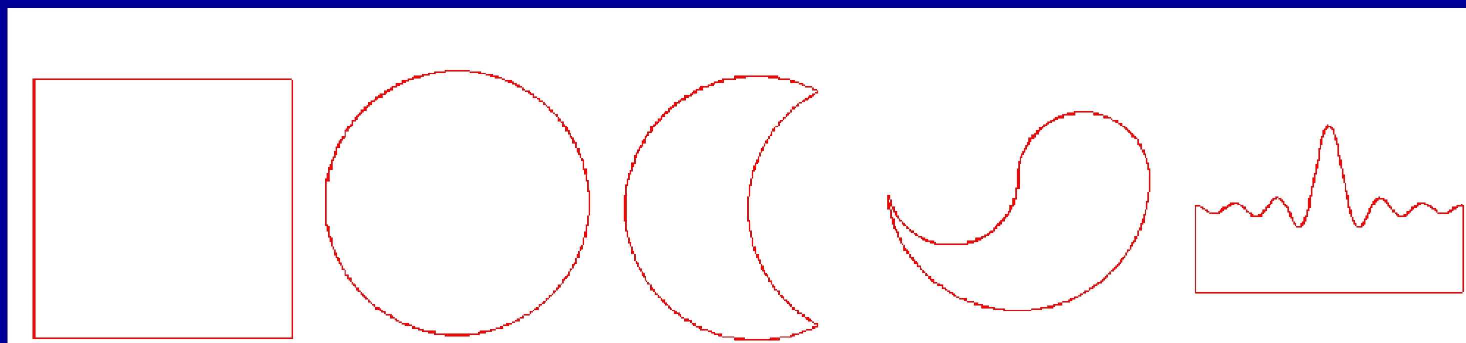
- Périmètre
- Aire
- Normales
- Courbure
- …

- Périmètre
- Aire
- Normales
- Courbure
- …

⇒ Comparaison des signatures normalisées

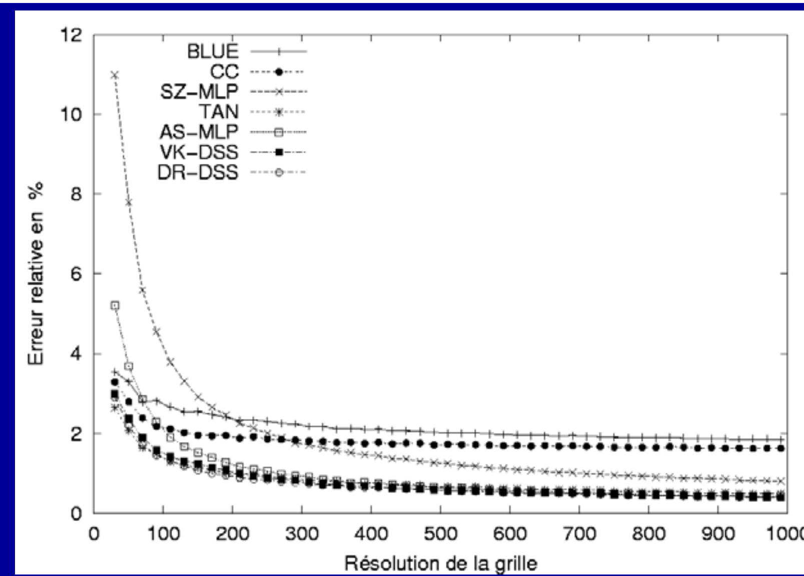
Contexte formel : *convergence asymptotique*

Prouver la convergence de l'estimateur lorsque la résolution augmente



-preuve mathématique

-évaluation expérimentale



Estimateurs discrets proposés

	Estimateur	Complexité	Convergence
Courbes discrètes 2D	Longueur	$O(n)$	oui
	Normales/Tangentes	$O(n)$	oui
	Courbure	$O(n)$	oui
Courbes discrètes 3D	Longueur	$O(n)$	oui
	Tangentes	$O(n)$	oui
	Courbure	$O(n)$	oui
Surfaces discrètes	Aire	$O(n)$	oui
	Normales	$O(n)$	oui
	Courbure Moyenne	$O(dn)$	non
	Courbure Gaussienne	$O(dn)$	non

$\Rightarrow$ *signature discrète multi-grille*

Applications

analyse des micro-structures de la neige

Projets

- Extraction de primitives pour la classification de profils de stèles *(Maison de l'Orient Méditerranéen)*

  Utilisation du graphe de courbure pour *vectoriser* une courbe discrète

- Modèle déformable discret *(LaBRI)*

  Signature discrète multi-grille ↭ Énergie de forme multi-grille

- Analyse microscopique d'échantillon de neige *(CEN Météo-France)*

→

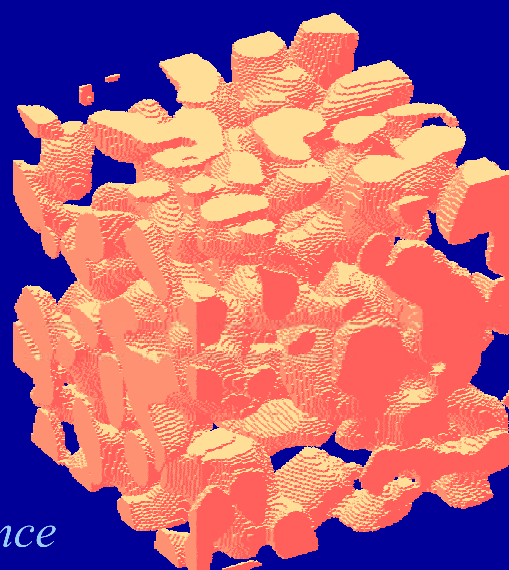
Analyse des micro-structures de la neige

Application : modélisation d'avalanches par analyse microscopique d'échantillons de neige

Échantillon de neige

CEN – Météo France

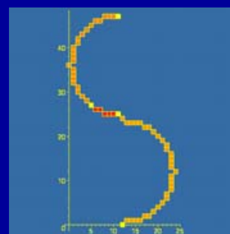
Volume binaire



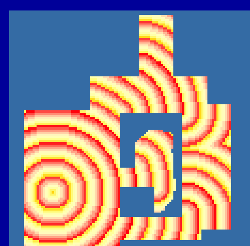
Caractéristiques

- Porosité
- Surface spécifique (densité)
- Courbure (métamorphose de neige)

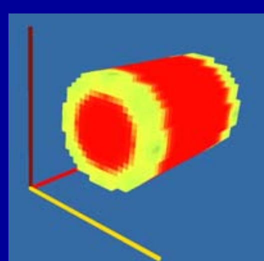
Conclusion



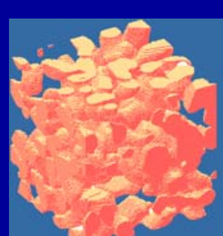
- Théorème de structure de la pré-image d'un plan discret
- Liens entre reconnaissance de droites/plans et statistique
- Reconnaissance et segmentation en cercles discrets



- Transformée en distance euclidienne en dimension arbitraire et en temps optimal
- Squelettes de formes en dimension arbitraire basés sur le diagramme de Voronoï discret
- Visibilité et géodésiques discrètes en dimension 2 et 3



- Estimateurs de mesures euclidiennes sur des objets discrets



- Représentation vectoriel d'une courbe discrète 2D grâce au graphe de courbure
- Modèles déformables discrets
- Analyse de micro-échantillons de neige

Conclusion

Géométrie algorithmique

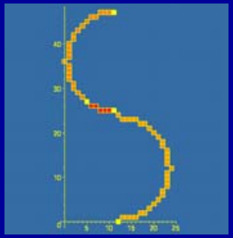
Géométrie discrète

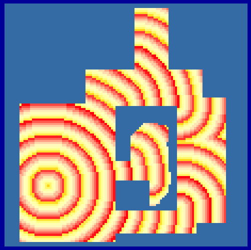
- complexité algorithmique
- structures de données
- programmation linéaire

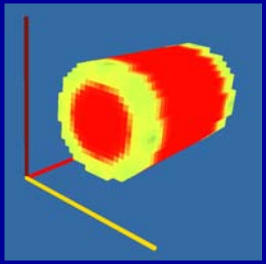
- objets/algorithmes fondamentaux
- arithmétique

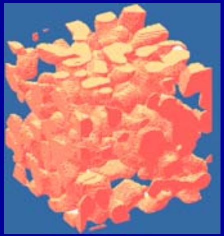
Caractérisation de formes discrètes

Perspectives









reconnaissance statistique de plans

squelettes de formes en dimension n

teurs de courbure surfaciques globaux

modèles déformables discrets

• Tes
• F
• F
• Bo
• Utilisa … cercle
• Gén
• R
• C … l'a … tions obtenus à
• Reco
• Algorithm … alcul de géo
• Com
• C … es discrètes
• N
• R
• Cons … technique
• Estim
• Int … ns de neige
• I … ut … le déformable discret et
• Ut
• Utilisa … radiothérapie … sitio
• Génération efficace de … es discrètes

Merci…

UNIVERSITÉ LUMIÈRE LYON 2

Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces

David Coeurjolly

18 décembre 2002

Thèse sous la direction de

Serge Miguet et Laure Tougne

ERIC LABO
EQUIPE DE RECHERCHE EN INGENIERIE DES CONNAISSANCES

Espace dual et droites discrètes

Droite réelle : $y=\alpha x+\beta$

Discrétisation GIQ :

$\Delta(\alpha,\beta)=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid -0.5 \le \alpha x+\beta-y < 0.5\}$

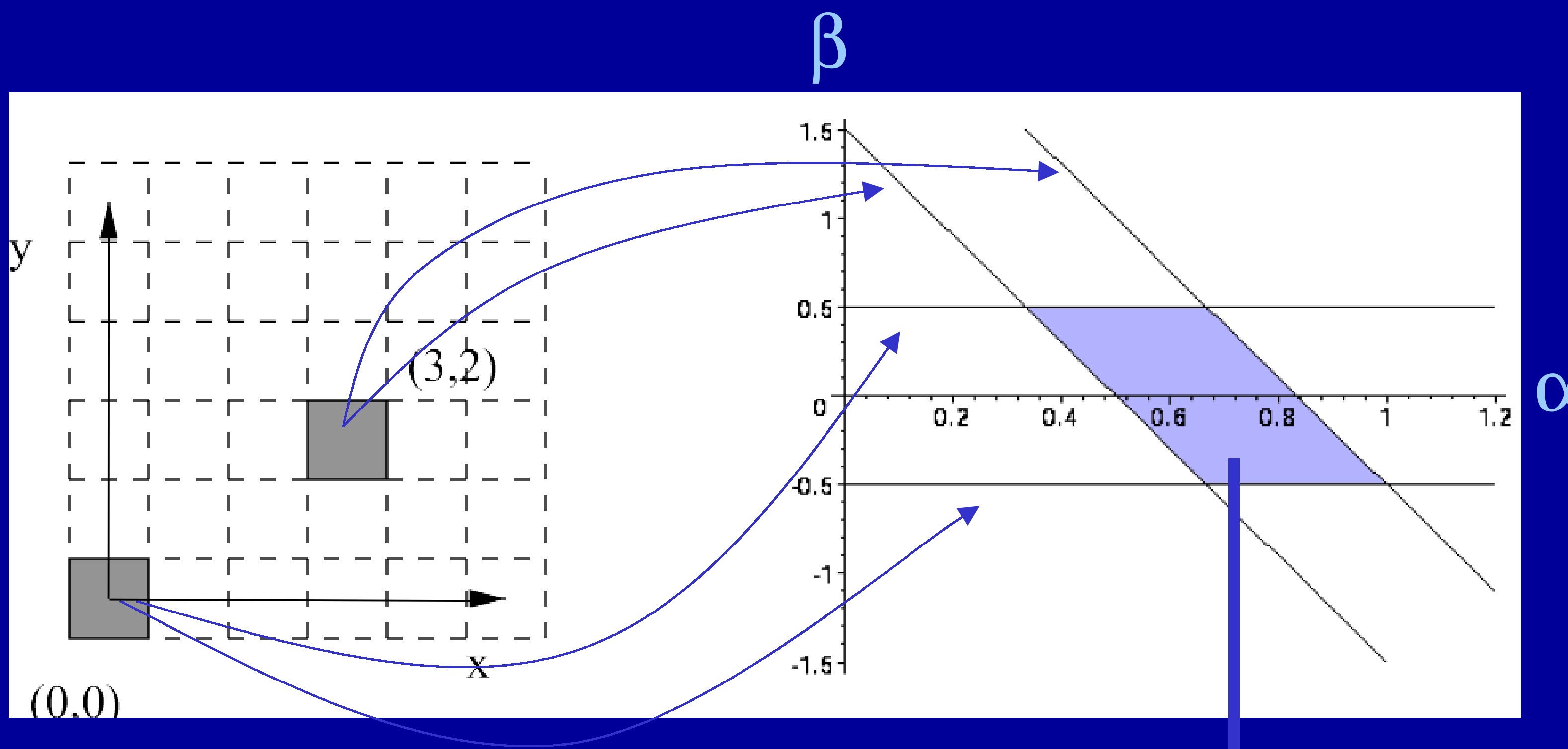
Ensemble des droites réelle se discrétisant dans (X,Y) *:*

$$S_p=\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \mid (X,Y)\in\Delta(\alpha,\beta)\}$$

Bande dans l'espace (α,β)

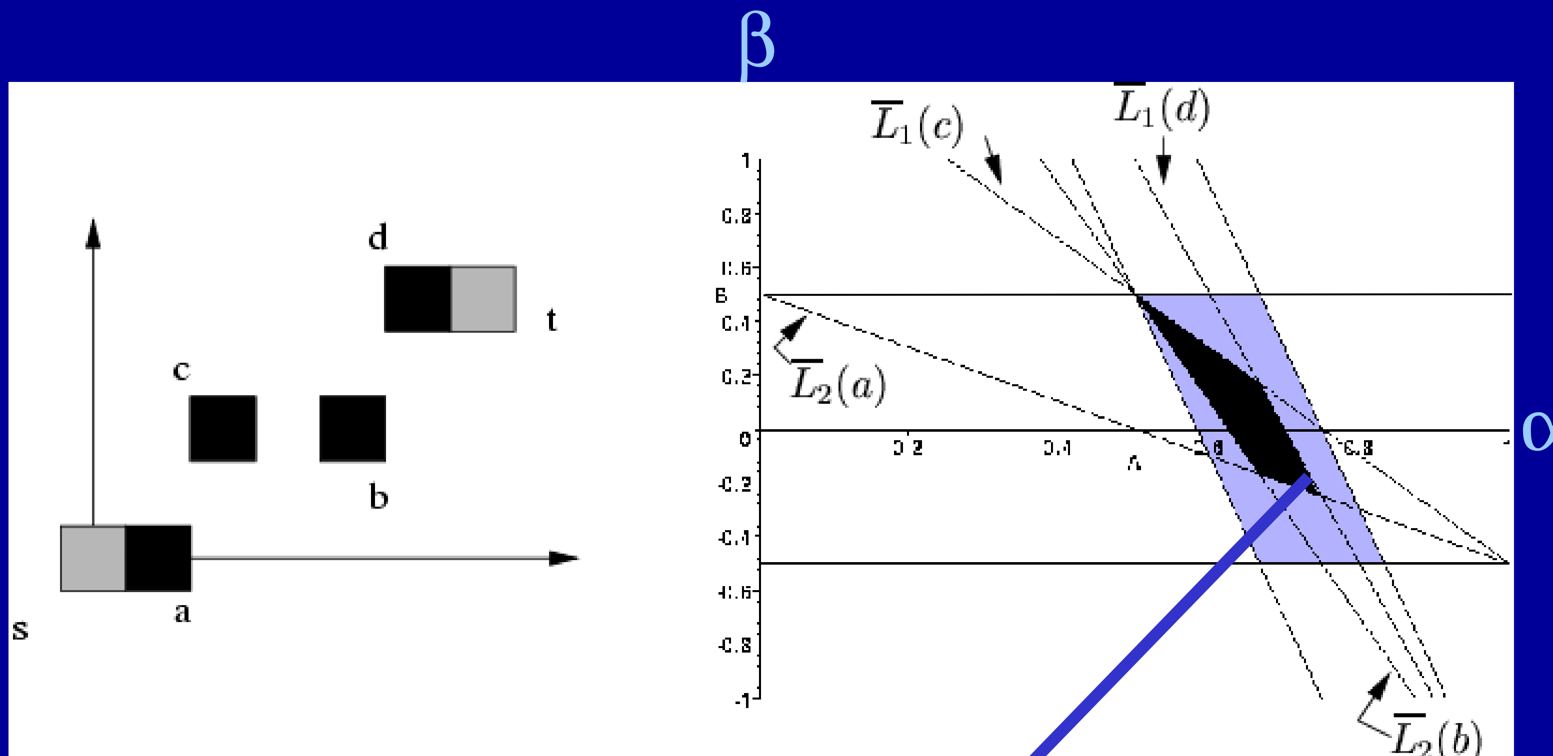
- $L_1 : \alpha X + \beta - Y > -0.5$
- $L_2 : \alpha X + \beta - Y \le 0.5$

Espace dual et droites discrètes



$\mathcal{S}$(s,t) : ensemble des droites dont la discrétisation contient s et t

Espace dual et droites discrètes
pixels obstacles



Ensemble des droites dont la iscrétisation contient s, t mais ne contient pas a, b,c ni d

Objets discrets binaires 3D

- Décomposition cellulaire des elements de base