



HAL
open science

Modélisation et estimation des processus de dégradation avec application en fiabilité des structures

Julien Chiquet

► **To cite this version:**

Julien Chiquet. Modélisation et estimation des processus de dégradation avec application en fiabilité des structures. Mathématiques [math]. Université de Technologie de Compiègne, 2007. Français. NNT: . tel-00165782

HAL Id: tel-00165782

<https://theses.hal.science/tel-00165782>

Submitted on 27 Jul 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE COMPIÈGNE
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUE APPLIQUÉES

THÈSE

présentée en première version en vue d'obtenir le grade de Docteur,
spécialité « Technologies de l'Information et des Systèmes »

par

Julien Chiquet

MODÉLISATION ET ESTIMATION DES PROCESSUS DE DÉGRADATION AVEC APPLICATION EN FIABILITÉ DES STRUCTURES

Thèse soutenue le 21 Juin 2007 devant le jury composé de :

M ^{me}	LESLEY WALLS	Strathclyde University	(Rapporteur)
MM.	BERNARD YCART	IMAG	(Rapporteur)
	NIKOLAOS LIMNIOS	UTC	(Directeur)
	MICHEL DELECROIX	ENSAI	
	JEAN-BAPTISTE AUBIN	UTC	
	MOHAMED EID	CEA Saclay	
	ALAIN FORESTIER	CEA Saclay	

À ma famille.

REMERCIEMENTS

JE voudrais tout d'abord exprimer mes plus profonds remerciements à mes encadrants, MM. Nikolaos Limnios et Mohamed Eid.

Nikolas est d'une incroyable disponibilité avec ses étudiants ; il a l'enthousiasme d'un jeune chercheur et se passionne pour les travaux des autres. Sans jamais insister sur mes faiblesses, il m'a guidé en mettant mes points forts en avant, pour que ma thèse se fonde sur des bases solides et s'oriente là où je pouvais innover. Il m'a aidé de ses intuitions fulgurantes, sans jamais faire preuve de condescendance. Merci.

Mohamed m'a aidé à construire au CEA un environnement de travail qui m'a laissé liberté de recherche et autonomie. À son contact, j'ai appris à construire un modèle aux hypothèses adéquates, en partant du problème physique auquel nous étions confrontés (et non pas le chemin inverse !). Il m'a également apporté de par ses qualités relationnelles, au cours de l'exercice périlleux qu'est la communication de travaux scientifiques auprès de chercheurs d'autres domaines.

M^{me} Lesley Walls et M. Bernard Ycart m'ont fait l'honneur d'être mes rapporteurs. Leurs remarques m'ont permis d'améliorer les méthodes de la thèse et de poser les fondements de recherches futures. La pertinence de leurs questions montre qu'ils ont porté un réel intérêt à mon travail et je veux les en remercier. J'espère un jour pouvoir atteindre leur niveau de synthèse et leur vitesse de compréhension !

Je remercie également M. Michel Delecroix, qui a accepté de présider mon jury de thèse, ce qu'il a fait sur un ton dédramatisant l'événement. Merci également à M. Jean-Baptiste Aubin, pour sa gentillesse et pour sa bonne humeur inébranlable et communicative ; ses commentaires, ainsi que ceux de M. Alain Forestier, me seront précieux.

Au cours de cette thèse, j'ai partagé mon temps entre le centre de recherche de l'Université de Technologie de Compiègne et le centre de Saclay du Commissariat à l'Énergie Atomique. Le changement d'atmosphère était parfois fatigant, mais en valait la peine puisque j'ai pu multiplier les rencontres. Je remercie donc l'ensemble des membres du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Compiègne et d'Heudiasyc, ainsi que les membres du Service d'Études des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées, qui ont rendu mon environnement de recherche agréable, en particulier Christophe, Marc, Djalil, Mylène et Vincent. J'ai une pensée particulière pour Béatrice et Jocelyne, dont la connaissance experte de la chose administrative m'a été d'un grand secours.

De Saclay, je n'oublierai pas les petits déjeuners en compagnie de François, où les discussions commençaient tôt sur l'art de la configuration des

moyens informatiques, ou *comment perdre du temps aujourd'hui pour en gagner (un peu) demain*. Pour se vider la tête, le jogging autour du centre en compagnie d'Imed s'est avéré être une alternative efficace (et nécessaire) au visionnage intensif de TF1.

À Compiègne, David et Vlad ont occupé une place très particulière : en plus de leur amitié, ils m'ont offert leur temps pour de nombreuses relectures, répétitions de soutenance, conseils amicaux et professionnels, pauses café-cigarette(s) et discussions politico-technico-scientifiques passionnées. Cette thèse n'aurait pas eu la même saveur sans eux.

Je pense également à tous ceux qui ont été mes collègues de bureau : Vlad, Imed, Wilfried, Karim, Samis et Amir, ainsi qu'aux autres thésards du LMAC : Maha, Adel, Hassan, Lekbir, Gaël et Céline.

Pour les amis que cette thèse m'a permis de rencontrer : David et Marlyse (qui m'ont si souvent offert le couvert que j'en ai honte!), Vlad et Andra, Yoann et Célia, Samis, Imed, David M., Astride, François C., Pierre-Alexandre, Antoine, et tous les autres.

Merci également à mes amis de l'UTC et d'avant : Cédric, Xavier, Félix et Véro, François et Katell, Camille et Anne-Claire, Lucile, Hugo, Caro, Julien et Patricia, Étienne et Clélia, Guilhem, Hadrien, Maud et Alain, Bertrand, Jérémie, ... qui m'ont aidé à décrocher quand il le fallait.

Je remercie ma famille et leur dédie cette thèse pour toutes les raisons qui s'imposent.

Je conclurai en remerciant de tout cœur Éloïse pour une foule de raisons qui ne concernent qu'elle.

Compiègne, le 3 juillet 2007.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
LISTE DES FIGURES	ix
PRÉFACE	1
1 INTRODUCTION	5
1.1 CONTEXTE	7
1.1.1 Enjeux et motivations	7
1.1.2 Objectifs et approche générale	7
1.1.3 Formalisme en fiabilité des structures	8
1.2 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS STOCHASTIQUES ET DÉGRADATION .	12
1.2.1 Processus de Markov déterministes par morceaux	13
1.2.2 Un PMDM pour la description des mécanismes de dégra- dation	14
1.3 PROPAGATION DES FISSURES EN FATIGUE	15
1.3.1 Modèle déterministe de propagation des fissures	15
1.3.2 Nature aléatoire de la fatigue	16
1.3.3 Systèmes dynamiques et propagation de fissures	18
1.3.4 Quelques modèles stochastiques existants	19
CONCLUSION	21
2 PRÉSENTATION DU MODÈLE	23
2.1 CONSTRUCTION DU SYSTÈME DYNAMIQUE	25
2.1.1 Rappels sur les processus de Markov	25
2.1.2 Un processus de Markov déterministe par morceaux . . .	27
2.2 DESCRIPTION PROBABILISTE	30
2.2.1 Générateur infinitésimal du couple	31
2.2.2 Résultats asymptotiques	32
2.3 UTILISATION DU MODÈLE EN FIABILITÉ DES STRUCTURES . . .	34
2.3.1 Caractéristiques des processus de dégradation	35
2.3.2 Fiabilité du système	35
2.4 ILLUSTRATION NUMÉRIQUE	38
2.4.1 Définition du système	38
2.4.2 Approximation et simulations numériques	39
2.4.3 Estimation de mesures de fiabilité du système	40
CONCLUSION	45
3 FONCTION DE TRANSITION ET FIABILITÉ DU SYSTÈME	49
3.1 SYSTÈME DYNAMIQUE ET RENOUVELLEMENT MARKOVIENT . . .	51
3.1.1 Éléments de la théorie du renouvellement markovien . .	51

3.1.2	Noyau semi-markovien du PMDM	54
3.1.3	Fonction de transition du processus couple	57
3.2	FIABILITÉ DU SYSTÈME DYNAMIQUE	58
3.2.1	Calcul pratique du noyau	59
3.2.2	Fonction de fiabilité et loi du temps de défaillance	62
3.3	ILLUSTRATION NUMÉRIQUE	64
3.3.1	Implémentation pratique	64
3.3.2	Applications	66
	CONCLUSION	72
4	ESTIMATION DE LA COMPOSANTE ALÉATOIRE	73
4.1	ESTIMATION DES OBSERVATIONS DE LA COMPOSANTE DE SAUT	75
4.1.1	Estimation des trajectoires du processus de saut	76
4.1.2	Réduction de l'espace d'état	77
4.2	PROCESSUS MARKOVIEN DE SAUT AVEC CENSURE ALÉATOIRE	80
4.2.1	Construction de la fonction de vraisemblance	81
4.2.2	Maximum de vraisemblance (cas indépendant)	87
4.2.3	Propriétés asymptotiques de l'estimateur	90
4.2.4	Fiabilité des processus markoviens censurés	93
4.3	ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES	95
4.3.1	Processus markovien de saut avec censure aléatoire	96
4.3.2	Estimation des systèmes dynamiques	101
	CONCLUSION	106
5	APPLICATIONS	107
5.1	PROPAGATION DES FISSURES MODÉLISÉE PAR UN PMDM	109
5.1.1	Estimation des paramètres de la loi de propagation	109
5.1.2	Estimation du processus markovien de saut	113
5.2	RÉSULTATS ET COMPARAISON AVEC UN MODÈLE EXISTANT	118
5.2.1	Intégration du modèle	118
5.2.2	Modèle de diffusion pour la propagation des fissures	121
5.2.3	Fiabilité du système et répartition des fissures	123
5.2.4	Remarques sur l'implémentation numérique	124
	CONCLUSION	125
	CONCLUSION GÉNÉRALE	127
A	ANNEXES	131
A.1	PREUVE DU THÉORÈME 2.1	133
A.2	ALGORITHME DES CENTRES MOBILES	135
A.3	PROCESSUS SEMI-MARKOVIEN AVEC CENSURE ALÉATOIRE	136
A.3.1	Estimateurs du noyau	136
A.3.2	Application numérique en fiabilité	137
	BIBLIOGRAPHIE	139
	PUBLICATIONS DE LA THÈSE	147
	NOTATIONS	149

LISTE DES FIGURES

1.1	Représentation schématique du modèle charge / résistance à l'aide de processus stochastiques	10
1.2	Représentation schématique de l'évolution temporelle des trajectoires des processus définissant la dégradation d'un système	11
1.3	Éprouvette de laboratoire C-C. X est la demi-entaille initiale	17
1.4	Données de Virkler sur la propagation de fissures en fatigue pour $\Delta\sigma$ constante	17
2.1	Trajectoire type d'un processus de saut	27
2.2	Existence et unicité par construction d'une solution au système dynamique	29
2.3	Observation de trajectoires de Z_t jusqu'à la défaillance . . .	36
2.4	Graphe d'état du processus de Markov	39
2.5	Simulation de trajectoires et processus asymptotique du système	42
2.6	Processus de cumul des coûts	44
2.7	Estimation de la fiabilité du système	46
2.8	Estimation des fonctions de répartition de Z_t	46
2.9	Estimation des fonctions de répartition de T_x	47
3.1	Représentation schématique du noyau	60
3.2	Noyau semi-markovien du couple (Z_t, X_t)	68
3.3	Fonction $H_i(z, B, \cdot)$ associée au noyau semi-markovien Q . .	69
3.4	Simulation de 50 trajectoires du processus Z_t	70
3.5	Comparaison des estimateurs de la fiabilité : Monte-Carlo et résolution directe de l'équation de renouvellement markovien	71
3.6	Comparaison des estimateurs de la densité f_τ : Monte-Carlo et résolution directe de l'équation de renouvellement markovien	71
4.1	Principe de réduction de l'espace d'état observé	77
4.2	Principe de l'algorithme des centres mobiles pour deux classes dans \mathbb{R}^2	79
4.3	Estimateur de l'élément a_{12} du générateur	97
4.4	Estimateur de la covariance σ_{12}	98
4.5	Erreur moyenne quadratique sur l'estimateur du générateur (MSE)	99
4.6	Estimateur de la fiabilité du système	99
4.7	Estimateur de la disponibilité du système	100
4.8	Estimateur du taux de défaillance du système	100

4.9	Erreur finale de la méthode des centres mobiles pour différents nombres de classes	102
4.10	Histogramme des fréquences de visites des états théoriques et estimés	103
4.11	Fonctions de répartition empirique et théorique des temps séjour normalisés	104
4.12	Estimateur de la fiabilité du système, ensemble d'apprentissage de 100 trajectoires	104
4.13	Estimation des fonctions de répartition de T_x	105
4.14	Estimation des fonctions de répartition de Z_t	105
5.1	Droite de régression sur le nuage de points expérimentaux .	112
5.2	Processus asymptotique estimé sur les trajectoires de fissuration réelles	113
5.3	Erreur finale de la méthode des centres mobiles pour différents nombres de classes	114
5.4	Histogramme des fréquences des visites des états estimés de la composante aléatoire – 7 états	114
5.5	Histogramme des fréquences des visites des états estimés de la composante aléatoire – 18 états	115
5.6	Exemple d'une trajectoire de $v(X_t)$ après estimation avec 7 et 18 états	116
5.7	Simulation de 100 trajectoires du processus Z_t	118
5.8	Comparaison des estimateurs de la fiabilité	123
5.9	Comparaison de la fonction de répartition du processus de taille de fissure Z_t	124
A.1	Graphe d'état du processus semi-markovien	137
A.2	Estimation de la fiabilité d'un processus semi-markovien censuré	138

PRÉFACE

DANS les milieux industriels comme le nucléaire ou l'aéronautique, les coûts et les risques dûs aux défaillances des structures sont décuplés par la nature des composants qui sont dimensionnés pour fonctionner en environnement extrême. De plus, lorsque les coûts s'évaluent en termes de coût humain, la prévision des défaillances devient absolument essentielle.

Cette thèse a été effectuée en collaboration avec le Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA), organisme analyste pour les problématiques du nucléaire en France. Parmi les activités du CEA, les études de fiabilité tentent d'appréhender la dégradation des structures pour en évaluer la durée d'exploitation. Ces études permettent à l'industriel-exploitant Électricité de France (EDF) d'optimiser un fonctionnement à moindre coût, conditionnellement à un niveau de fiabilité imposé et contrôlé par les autorités de sûreté, c'est-à-dire par l'Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN).

Diverses approches sont possibles pour la description de la dégradation des structures. Les probabilités et les statistiques offrent des outils traduisant les incertitudes de toute origine (connaissances scientifiques fondamentales insuffisantes, complexité des dépendances, information manquante, nature aléatoire intrinsèque des phénomènes, etc.). L'enjeu des applications est de décrire la fiabilité d'une structure sujette à un ensemble de mécanismes de dégradation incertains.

L'objectif de cette thèse a été de développer des méthodes permettant de décrire et d'estimer un processus stochastique représentant le niveau de dégradation caractéristique d'une structure. Nous modélisons l'évolution du processus de dégradation par un *système différentiel stochastique*, ce qui constitue un système dynamique particulier. Le niveau de dégradation est supposé observable et nous cherchons à déterminer le temps d'entrée dans un état critique correspondant à la défaillance de la structure. La validation des modèles sur des données réelles soulève également le problème de l'estimation des paramètres et des processus aléatoires en jeu.

Parmi les systèmes dynamiques utiles à la description de l'évolution d'un processus aléatoire, une large majorité des études concernent les *équations différentielles stochastiques* faisant intervenir le calcul intégral stochastique de Itô. Cette approche consiste à « bruiser » une équation différentielle classique par une petite perturbation modélisée par le mouvement brownien. La structure du mouvement brownien implique que la dynamique du processus ainsi perturbé soit un *processus de diffusion*.

Une alternative aux modèles de diffusion consiste à perturber l'évolution du système par des sauts à des instants discrets du temps. Dans le

cas précis où le temps de séjour entre les sauts suit une loi exponentielle, le couple formé par le processus solution du système et la composante de saut est un processus de Markov. Dans la littérature, on trouve cette famille de modèles sous le terme de *processus de Markov déterministes par morceaux*.

Nous étudions dans ce mémoire un cas particulier de processus de Markov déterministe par morceaux (PMDM), où la composante de saut est un processus de Markov à espace d'état fini. Ce choix est motivé par la représentation physique suivante du processus de dégradation : le niveau de dégradation est une valeur réelle évoluant continûment dans le temps, mais la nature de son évolution peut varier plus ou moins brutalement suite à des événements aux occurrences discrètes, correspondant à des changements de conditions de fonctionnement de la structure.

Nos contributions portent sur :

1. une interprétation du PMDM via la théorie du renouvellement markovien, qui nous permet d'obtenir une forme explicite de sa fonction de transition ;
2. l'estimation des PMDM, en particulier du processus markovien de saut sous-jacent, qui n'est pas directement observable ;
3. les applications au calcul de fiabilité, l'implémentation numérique associée et l'application des résultats d'estimation au traitement d'un cas réel de dégradation.

L'ensemble de ces contributions est développé dans les cinq chapitres du mémoire.

Le *premier chapitre* expose la problématique de la thèse. Nous précisons le contexte de l'étude et nous montrons comment nos modèles s'inscrivent dans les études de fiabilité des structures. C'est également l'occasion de faire un point bibliographique sur la famille de systèmes dynamiques stochastiques étudiée. Nous présentons un problème réel de dégradation due à la propagation de fissures dans le matériau d'une structure. Nous donnons un exemple de jeu de données associé à ce problème ainsi qu'un état de l'art des modèles existants.

Le *deuxième chapitre* présente en détail le modèle utilisé pour la description du processus de dégradation. Il s'agit d'un PMDM dont nous construisons successivement les trajectoires et le générateur infinitésimal, en nous basant sur les résultats de la littérature. Nous donnons ensuite quelques propriétés asymptotiques. Puis, nous plaçons le modèle dans le contexte de la modélisation des dégradations en exprimant la fiabilité associée. Nous proposons dans un exemple numérique une première méthode d'estimation de la fiabilité par des techniques de type Monte-Carlo.

Dans le *troisième chapitre*, nous montrons que le PMDM peut être interprété comme un processus de renouvellement markovien étendu à espace non dénombrable. Nous construisons son noyau semi-markovien et une équation de renouvellement markovien ayant pour solution la fonction de transition du PMDM. La résolution de cette équation donne une forme explicite de la fonction de transition. Ce résultat est appliqué au calcul de fiabilité dans le contexte de la modélisation des dégradations. Un

effort important est requis pour l'implémentation numérique, que nous détaillons.

Le *quatrième chapitre* est consacré à l'estimation de la composante de saut du PMDM, c'est-à-dire du processus markovien de saut. Nous développons des méthodes pour l'estimation de ses trajectoires et de son espace d'état, puisque le processus de saut n'est pas directement observable. Nous construisons la fonction de vraisemblance associée à son générateur infinitésimal lorsque les trajectoires sont définies sur des durées aléatoires. C'est le cas lorsque l'on dispose de mesures du phénomène réel depuis l'instant initial jusqu'à l'entrée dans la zone de défaillance. Un estimateur du générateur est étudié. Nous donnons des illustrations numériques pour l'ensemble de la méthode d'estimation.

Le *cinquième chapitre* est consacré à l'application de l'ensemble des résultats de modélisation et d'estimation sur le jeu de données réelles de propagation de fissures présenté dans le premier chapitre.

Cette thèse a fait l'objet de divers travaux écrits : un article de journal paru (Chiquet et Limnios 2006), un article de journal en cours d'acceptation (Chiquet et al. En révision), un article de journal soumis pour publication (Chiquet et Limnios Soumis), un chapitre de livre à paraître (Chiquet et Limnios à paraître), cinq actes de conférence (Chiquet et al. 2005a;b; 2006, Chiquet et Limnios 2007, Chiquet et al. to appear, 2007) ainsi que trois notes techniques au Commissariat à l'Énergie Atomique (Chiquet 2004a;b; 2005).

INTRODUCTION



SOMMAIRE

1.1	CONTEXTE	7
1.1.1	Enjeux et motivations	7
1.1.2	Objectifs et approche générale	7
1.1.3	Formalisme en fiabilité des structures	8
1.2	SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS STOCHASTIQUES ET DÉGRADATION . .	12
1.2.1	Processus de Markov déterministes par morceaux	13
1.2.2	Un PMDM pour la description des mécanismes de dégra- dation	14
1.3	PROPAGATION DES FISSURES EN FATIGUE	15
1.3.1	Modèle déterministe de propagation des fissures	15
1.3.2	Nature aléatoire de la fatigue	16
1.3.3	Systèmes dynamiques et propagation de fissures	18
1.3.4	Quelques modèles stochastiques existants	19
	CONCLUSION	21

CE chapitre introductif motive l'utilisation des modèles mathématiques développés au cours de la thèse.

Après un bref aperçu du contexte en fiabilité des structures, nous présentons les systèmes dynamiques stochastiques retenus pour la description des processus de dégradation. Nous donnons des éléments bibliographiques pour les modèles utilisés, c'est-à-dire les processus de Markov déterministes par morceaux.

Nous présentons la problématique de la propagation des fissures en fatigue et nous faisons un état de l'art des modèles stochastiques existants. Le phénomène de propagation des fissures est un cas réel de dégradation que nous utiliserons au cours du mémoire pour la validation de nos modèles.

1.1 CONTEXTE

1.1.1 Enjeux et motivations

Comme l'ensemble du parc nucléaire mondial arrive en fin de vie et que la question de la durée d'exploitation des installations se pose, l'évaluation de la fiabilité des structures et la prise en compte du vieillissement reçoivent un vif regain d'intérêt dans le domaine des applications nucléaires.

C'est en particulier le cas en France, où les études de fiabilité se multiplient chez l'exploitant (EDF – Électricité de France), l'organisme analyste (le CEA – Commissariat à l'Énergie Atomique) et les autorités de sûreté (l'IRSN – Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire).

Lors de la conception d'un composant industriel, une première évaluation de sa durée d'utilisation est faite en fonction de l'état des connaissances scientifiques, des matériaux employés et des modes d'utilisation envisagés. Les centrales nucléaires de l'exploitant EDF ont été initialement construites pour une durée de fonctionnement évaluée à 30 années. Pourtant, la durée de vie de conception ne saurait être prise comme base à une réglementation de sûreté des installations, constituant plutôt un indice d'anticipation. En fait, dans la législation française, il n'existe pas de limitation à la durée de vie dans le décret d'autorisation de création d'une installation nucléaire. La durée de vie des installations peut donc être réévaluée au cours de l'exploitation si l'état des connaissances évolue et garantit un niveau de sûreté décrété légalement.

Dans ce contexte, les organismes français du nucléaire s'interrogent quant à la possibilité de prolonger la durée de vie de l'îlot nucléaire actuel au-delà des 30 années d'exploitation initialement prévues (voir Bataille et Birraux 2003, pour une approche réglementaire de la question).

Au-delà du paramètre réglementaire, la durée de vie est le fait de considérations physiques : le métal des composants d'une centrale nucléaire fatigue et voit ses caractéristiques techniques s'altérer sous l'action de *mécanismes de dégradation*, tels que les mécanismes d'usure (fatigue, corrosion, etc.), l'irradiation neutronique ou encore les chocs thermiques en cas de procédures accidentelles.

1.1.2 Objectifs et approche générale

L'objectif principal de cette thèse a été de développer et de valider des modèles mathématiques de fiabilité rendant compte des conditions réelles d'exploitation d'une structure. Dans cette optique, nous faisons comme postulat que l'évolution de la fiabilité d'une structure est due aux mécanismes de dégradation auxquels elle est soumise.

Le développement de modèles de dégradation fournit une information qui correspond à une meilleure appréhension des systèmes étudiés. En particulier :

- la description des phénomènes physiques réels par des modèles mathématiques permet d'en améliorer la compréhension ;
- les modèles permettent de développer des méthodes d'estimation de la fiabilité des structures ;

- ils fournissent les bases d'un laboratoire numérique permettant d'anticiper l'évolution de sa durée de vie, en élaborant, par exemple, une politique de maintenance à moindre coût.

La qualité intrinsèquement dynamique des mécanismes de dégradation et d'usure implique l'utilisation d'outils mathématiques permettant une bonne représentation de leur évolution temporelle. Comme la fiabilité des structures doit pouvoir être réévaluée, les modèles doivent s'adapter facilement à l'évolution des connaissances. De plus, dans les champs d'applications industrielles où les structures fonctionnent en environnement extrême, les difficultés suivantes viennent s'ajouter :

- les systèmes sont complexes car ils possèdent un grand nombre de composants aux interactions multiples ;
- les mécanismes physiques conduisant à la dégradation des structures et à la baisse de la fiabilité ont des origines et des échelles de temps physiques très différentes ;
- les dépendances entre chacun des phénomènes sont nombreuses et pas toujours connues.

En conséquence, si la qualification des phénomènes physiques en jeu, bien que difficile, semble possible, la quantification exacte de lois régissant ces mécanismes paraît être une tâche sans issue proche.

Afin d'adapter les modèles aux réalités physiques décrites ci-dessus, nous adoptons les principes suivants :

1. Une **approche modèle** est privilégiée. Plus précisément, les modèles décrivent une variable observable qui permet de quantifier le niveau de dégradation d'une structure plutôt que de décrire à l'aide de lois physiques l'ensemble de mécanismes complexes, parfois incertains, causant la dégradation.

Exemple 1.1 *Nous décrivons au cours du temps la propagation d'une fissure due à la fois à la fatigue mécanique, thermique et à l'usure par irradiation, en modélisant la taille de cette fissure (variable observable) plutôt que de modéliser simultanément chacun des mécanismes physiques.*

2. L'évolution temporelle des variables est décrite par des **processus stochastiques**, non seulement pour traduire l'incertitude sur la physique des phénomènes, mais également parce que certains mécanismes de dégradation ont une nature aléatoire intrinsèque.
3. La dynamique des processus aléatoires est décrite par des **systèmes différentiels stochastiques**.

Dans la partie suivante, nous montrons comment ces principes s'inscrivent dans un formalisme de fiabilité des structures, que nous adaptons à la description des mécanismes de dégradation.

1.1.3 Formalisme en fiabilité des structures

La fiabilité des structures est classiquement bâtie sur l'étude du couple *charge / résistance*. En introduisant la notion de temps dans ce modèle via les processus stochastiques, le formalisme acquiert une portée plus vaste

en terme d'interprétation physique du modèle et de représentation des phénomènes réels.

Considérons une structure sujette à une charge et possédant une résistance qui traduit la charge maximale admissible avant la défaillance. Ces deux quantités sont la résultante de diverses variables souvent trop complexes à déterminer avec exactitude. Par exemple, la résistance d'une structure tend à baisser par un mécanisme d'usure aux causes multiples ; il existe de plus une source d'incertitude sur les relevés de laboratoire, due aux erreurs de mesure sur les variables ; plus généralement, les comportements de la charge et de la résistance peuvent être de nature aléatoire à leur échelle d'observation. Cela peut être le cas lorsque la variable de charge est consécutive à un phénomène de turbulence.

Pour rendre compte de ces différentes sources de variabilité, un premier niveau d'analyse consiste à modéliser chacune des quantités charge et résistance par des variables aléatoires réelles notées Z et Γ . Plutôt que de modéliser indépendamment la multitude de mécanismes en jeu, on modélise la répartition des variables observées sur lesquelles agissent ces mécanismes.

Dans un second temps, et dans l'optique de la modélisation de phénomènes de dégradation, il est naturel de faire apparaître explicitement la dimension temporelle. Ceci permet non seulement de qualifier la dispersion à chaque instant mais également l'évolution de cette dispersion. L'adjonction du paramètre temps à un modèle mathématique rend plus explicite la correspondance avec les phénomènes réels. Ainsi, l'interaction est facilitée entre les hypothèses issues du modèle et celles formulées à partir de la physique du phénomène. Nous décrivons donc les variables par des processus stochastiques. Nous notons X_t un processus stochastique indicé sur le temps $t \in \mathbb{R}_+$ et $X_t(\omega)$ une trajectoire de ce processus, telle que $\omega \in \Omega$, avec Ω l'ensemble des possibles.

Plus spécifiquement, $(Z_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $(\Gamma_t, t \in \mathbb{R}_+)$ sont les processus décrivant respectivement la charge et la résistance. La question à laquelle on tend naturellement à répondre est celle de la fiabilité ce qui, au sens commun, est la probabilité qu'un système reste dans un état de bon fonctionnement jusqu'à un instant donné. Dans le présent contexte, cela correspond à l'ensemble des événements pour lesquels on observe une résistance supérieure aux contraintes appliquées. Plusieurs modèles pour la fiabilité sont possibles, par exemple

$$R(t) = \mathbb{P}(Z_s < \Gamma_s, \forall s \leq t). \quad (1.1)$$

Pour la formulation (1.1), le système est défaillant à un instant t si on a observé pour un instant $s \in [0, t]$ que le niveau Z_t de la charge avait dépassé le niveau Γ_t de la résistance de la structure. Cependant, la forme adéquate de la fiabilité dépend du contexte. Il existe des formes plus restrictives, par exemple

$$R(t) = \mathbb{P}(\sup_{s \leq t} Z_s < \inf_{s \leq t} \Gamma_s),$$

où l'on estime que la structure est défaillante si la charge maximale observée sur l'intervalle $[0, t]$ est supérieure à la résistance minimale. Souli-

gnons que ces définitions de la fiabilité induisent immédiatement la notion de probabilité de défaillance du système égale à $1 - R(t)$.

Ce type d'approche et les méthodes d'estimation associées ont été proposés initialement par Birnbaum et McCarthy (1958). Ces méthodes sont maintenant très largement utilisées. Une introduction aux modèles charge / résistance et à ses extensions possibles est proposée par Johnson (1988), tandis qu'une étude plus complète est donnée par Kotz et al. (2003).

Le travail de modélisation consiste alors à spécifier la nature probabiliste des processus Z_t et Γ_t , ce qui est nécessaire à l'évaluation de la fiabilité $R(t)$.

Les processus peuvent être caractérisés en déterminant à chaque instant du temps leurs distributions de probabilité fini-dimensionnelles. Dans la figure 1.1, nous avons tracé les distributions de probabilité des processus à des instants fixes du temps, c'est-à-dire en considérant les variables aléatoires Z_t et Γ_t pour t fixé. Cette représentation met en évidence l'évolution des distributions des variables de charge et de résistance et l'aspect dynamique de la fiabilité. Schématiquement, si les courbes de densité se rapprochent dans le temps, on parle d'un effet de vieillissement. La zone de défaillance évolue en conséquence.

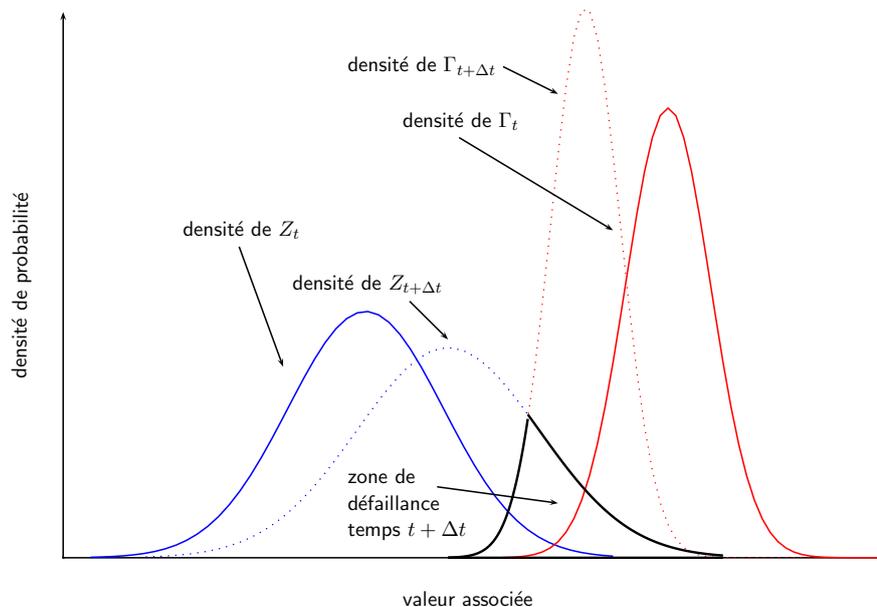


Fig. 1.1 – Représentation schématique du modèle charge / résistance à l'aide de processus stochastiques

Exemple 1.2 Un exemple type pour le calcul de la fiabilité (1.1) (voir Basu et Ebrahimi 1983) est de choisir Z_t et Γ_t browniens, c'est-à-dire gaussiens et à accroissements indépendants. Pour Z_t, Γ_t browniens de moyennes et covariances respectives μ_1, μ_2 et $\sigma_1^2 \min(s, t), \sigma_2^2 \min(s, t)$, on obtient un résultat analytique pour la fiabilité (1.1), valable pour des valeurs de t pas trop grandes :

$$R(t) \approx \Phi \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t} \right),$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale.

De manière équivalente, un processus aléatoire X_t est caractérisé par la nature des dépendances entre les variables aléatoires successives, c'est-à-dire entre deux instants de réalisation X_t et X_s . À la figure 1.2, nous avons tracé une trajectoire de chacun des processus Z_t et Γ_t . La défaillance est constatée lorsque le processus Z_t atteint la frontière définie par le processus Γ_t , ce qui correspond à la formulation (1.1) de la fiabilité.

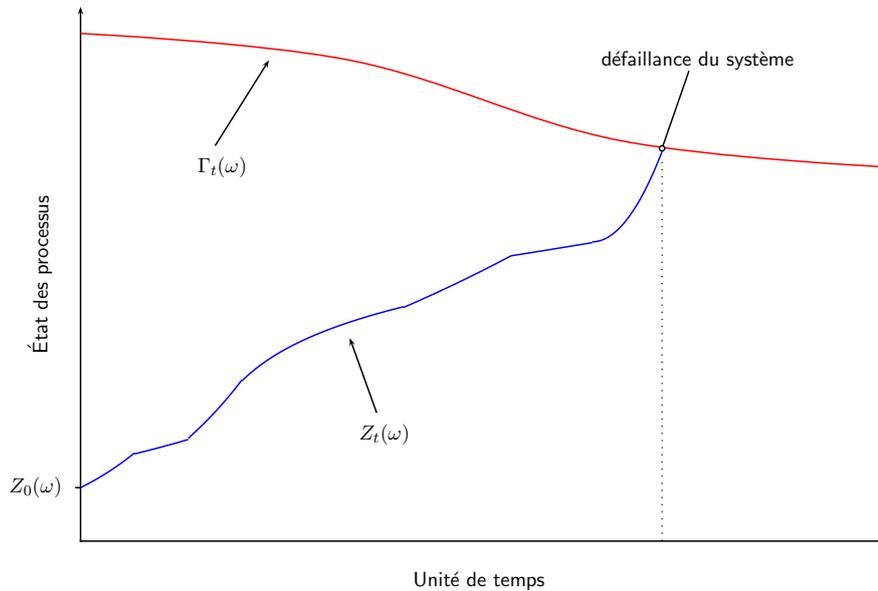


Fig. 1.2 – Représentation schématique de l'évolution temporelle des trajectoires des processus définissant la dégradation d'un système

Étudier un processus comme une famille de trajectoires observées au cours du temps place la composante temporelle des phénomènes au cœur des modèles. De plus, la représentation de la figure 1.2 est très générale et ne se limite pas à la description du couple charge / résistance. En particulier, cette approche correspond bien à la description de la *dégradation par usure* d'un système observé jusqu'à la défaillance. Le processus Z_t décrit l'évolution d'une variable qualifiant le niveau de dégradation d'un système, alors que Γ_t décrit le seuil de tolérance acceptable. Cette représentation des processus de dégradation est identique à celle détaillée dans Nikulin et al. (2007).

Exemple 1.3 *Pour décrire la fiabilité d'une structure comportant un risque de fissuration, nous posons comme niveau de dégradation caractéristique la taille en profondeur de la fissure, variable observable quelles que soient les causes de la fissuration. Le processus Z_t à valeurs dans \mathbb{R}_+ décrit la taille d'une fissure à un instant t . Le processus Γ_t modélise la taille de fissure maximale admissible dans la structure avant que la défaillance ne soit décrétée. Elle évolue éventuellement dans le temps ou est fixée pour correspondre par exemple à l'épaisseur caractéristique de la structure.*

Par extension, ces modèles permettent de traiter des problèmes jouant un rôle important dans un contexte industriel :

- Dans le cadre de l'exploitation d'une structure, on parle souvent de « politiques de maintenance ». Celles-ci doivent concilier d'une part un niveau de dégradation acceptable et d'autre part la minimisation de la fréquence des opérations de maintenance, qui coûtent très cher.

Le développement de modèles de dégradation permet d'anticiper sur la défaillance des structures afin d'optimiser les occurrences des opérations de maintenance. On peut consulter à ce sujet le chapitre de Bagdonavicius et al. (2006) qui traite de modèles stochastiques de dégradation dans le cas réparable.

- Bien que la figure 1.2 représente des processus dans \mathbb{R}_+ , l'étude d'un système complexe peut être réalisée en prenant Z_t et Γ_t des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d . Chacune des dimensions de Z_t représente l'évolution d'une des variables critiques du système. Le vecteur aléatoire Γ_t définit le domaine de défaillance, dont chaque champ est une fonction des variables critiques. On traite ainsi une forme de dépendance entre les variables du système.

Exemple 1.4 *Pour un réacteur nucléaire (voir Devooght et Smidts 1996, Devooght 2002), les variables critiques sont le niveau de pression, la température, la fluence neutronique, le pourcentage des éléments chimiques dans le liquide caloporteur, etc., chacune de ces variables étant le champ d'un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^d .*

Au cours de ce mémoire, nous construisons des modèles fondés sur le mode de représentation de la figure 1.2, en considérant uniquement la dynamique du processus Z_t , représentant le niveau de dégradation caractéristique de la structure. Le processus Γ_t décrivant la tolérance acceptable de la structure se ramène à un seuil fixe à ne pas dépasser que nous notons Δ . Nous considérons les structures non réparables, ainsi la fiabilité associée est simplement

$$R(t) = \mathbb{P}(Z_t < \Delta). \quad (1.2)$$

Toute la spécificité de nos modèles porte donc sur la description de l'évolution aléatoire du processus Z_t . Nous justifions ce choix dans la mesure où c'est la description des mécanismes de dégradation qui nous intéresse en tout premier lieu.

La dynamique du processus Z_t est modélisée par un système différentiel stochastique, que nous présentons brièvement dans la section suivante. Nous nous restreignons à une classe de systèmes qui nous a semblé être particulièrement bien adaptée à la description des mécanismes de dégradation.

1.2 SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS STOCHASTIQUES ET DÉGRADATION

Un système différentiel stochastique est une généralisation naturelle de la notion de système différentiel « classique » : l'évolution du processus Z_t est gouvernée par un système différentiel dans lequel on introduit une composante aléatoire qui permet de rendre compte du caractère incertain du phénomène.

Parmi les systèmes différentiels stochastiques, les *équations différentielles stochastiques* associées aux *processus de diffusion*, où la composante aléatoire est modélisée par le mouvement brownien, occupent une place

particulière. Dans le cas homogène, un processus de diffusion Z_t est gouverné par un système de la forme

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \mu(Z_s) ds + \int_0^t \sigma(Z_s) dB_s, \quad (1.3)$$

où μ et σ sont les fonctions de « dérive » et de « diffusion » et B_t le mouvement brownien. Pour une introduction complète aux modèles de diffusion, Øksendal (2003) fait figure de référence.

En mécanique, la propagation des fissures en fatigue a été traitée via des équations différentielles stochastiques (voir Sobczyk (1982; 1991) pour des modèles de diffusion appliqués à la fatigue et Sobczyk (1993) pour d'autres applications en physique de l'ingénieur). Ivanova et Naess (2004) utilisent des méthodes d'approximation numérique des modèles de diffusion appliquées au calcul de fiabilité en mécanique des structures.

D'autres familles de systèmes différentiels existent, faisant intervenir des processus de saut : on y perturbe la dynamique du processus Z_t selon des sauts aléatoires. Pour autant, les trajectoires de Z_t sont continues. Ces systèmes dynamiques à composante de saut sont une alternative aux modèles de diffusion dans lesquels la dynamique du processus Z_t fluctue continûment dans le temps. Cette famille de processus a été étudiée par Ezhov et Skorokhod (1969), sous le terme anglais de « switching process », mettant ainsi en avant le rôle des sauts aléatoires, qui agissent comme un commutateur sur l'évolution du processus Z_t plutôt que comme une perturbation.

1.2.1 Processus de Markov déterministes par morceaux

Parmi les systèmes à composante de saut, Davis (1984) a considéré la classe de processus aléatoires connus sous le nom de « *piecewise deterministic Markov processes* », soit en français *processus de Markov déterministes par morceaux* (PMDM). Cette famille de processus connaît un large succès dans la littérature comme alternative aux processus de diffusion. Des ouvrages de référence ont été publiés par Davis (1993) et récemment par Jacobsen (2006) et Koroliuk et Limnios (2005), où la théorie asymptotique est examinée. De nombreuses applications ont été proposées en finance et en contrôle des processus, par exemple par Vermes (1985), Dassios et Embrechts (1989), Embrechts et Schmidli (1994), Embrechts et al. (2001), Costa et al. (2000) et Jacobsen (2003). Récemment, quelques avancées ont été faites par Dufour et Costa (1999), Costa et Dufour (2003), et Cocozza-Thievent et al. (2006) sur la caractérisation probabiliste de ces processus.

Considérons le système différentiel stochastique suivant :

$$\begin{cases} \frac{dZ_t}{dt} = C(Z_t, X_t), & C : \mathbb{R}^d \times E \longrightarrow \mathbb{R}^d, \\ Z_0 = z. \end{cases} \quad (1.4)$$

où X_t est un processus markovien de saut d'espace d'état E . Un tel processus évolue d'état en état dans un espace d'état dénombrable, éventuellement fini, en une succession de sauts qui ont lieu à des instants discrets

du temps. Les trajectoires des processus de saut sont constantes entre les sauts et continues à droite.

Par le système (1.4), nous définissons un cas particulier de PMDM. Le terme de « processus de Markov déterministe par morceaux » porte sur le processus couple (Z_t, X_t) : de fait, le processus couple est un processus de Markov. Nous retrouvons ce modèle dans le domaine de la physique des particules : Dautray (1989) et ses coauteurs ont étudié ce type de système afin de donner un sens probabiliste aux équations de transport qui décrivent le flux des neutrons. Le processus couple (Z_t, X_t) est ainsi parfois appelé *processus de transport*, pour lequel Lapeyre et Pardoux (1998) ont fourni des méthodes d'approximation et de simulations numériques. Beaucoup de travaux (citons par exemple Papanicolaou et Kohler 1974, Papanicolaou 1975, Bensoussan et al. 1978) concernent le comportement asymptotique du système (1.4), en particulier sa convergence vers une diffusion, dont la théorie est bien maîtrisée. Anisimov (1977; 1995) a étudié la convergence d'une classe plus large de processus définis par (1.4) où le processus X_t pouvait être un processus de saut *semi-markovien*. Des résultats récents pour la convergence de systèmes dynamiques généraux, incluant les processus de transport, ont été proposés par Koroliuk et Limnios (2004).

En ce qui concerne l'estimation, un chapitre de l'ouvrage de Jacobsen (2006) est consacré à la construction de la fonction de vraisemblance des PMDM. L'estimation du système (1.4) portant en partie sur le processus markovien de saut X_t , les résultats classiques de Billingsley (1961), Albert (1962) ou plus récemment Jacobsen (1982), Andersen et al. (1993), Bladt et Sorensen (2005) pour l'inférence statistique des processus markoviens de saut, nous seront utiles. Une attention particulière sera portée dans ce mémoire à l'estimation du processus X_t , qui requiert des méthodes statistiques spécifiques, étant donné qu'il n'est pas observé.

1.2.2 Un PMDM pour la description des mécanismes de dégradation

Nous avons retenu la formulation (1.4) pour la description de l'évolution du niveau de dégradation caractéristique d'une structure. Ce modèle nous semble bien adapté car il correspond à la réalité physique suivante : le niveau de dégradation Z_t croît selon des trajectoires continues, cependant que la dynamique du processus varie à des instants discrets du temps suite à des chocs d'intensité aléatoire où à des variations des conditions environnementales, ce dont rend compte le processus markovien de saut X_t . Celui-ci décrit les variations de l'environnement du système, et on peut parler pour (1.4) d'*équation différentielle à environnement markovien*.

Par exemple, lorsque Z_t représente la taille d'une fissure qui se propage dans un matériau au cours du temps, le processus X_t permet de modéliser des variations brutales dans la vitesse de propagation, dont l'occurrence et l'intensité sont aléatoires. On peut expliquer ces variations par des phénomènes de micro-ruptures instantanées à un niveau moléculaire dans le matériau dues à une structure non homogène, ou encore à des changements de conditions environnementales.

D'autres modèles de description des dégradations, bâtis sur l'hypothèse de « chocs » changeant l'évolution du système, ont été proposés par

exemple par Lehmann (2006). À notre connaissance la description d'un mécanisme de dégradation par un PMDM est originale.

L'objectif est donc de développer et d'étudier le système (1.4) en le plaçant dans le contexte de la modélisation des dégradations et de la fiabilité des structures. Les résultats obtenus portent sur la caractérisation probabiliste des PMDM, le calcul de fiabilité (1.2) et sur l'estimation des paramètres constituant le système (1.4).

Pour valider les résultats développés au cours du mémoire, nous proposons de les appliquer à la modélisation et à l'estimation d'un mécanisme de dégradation réel, en utilisant un jeu de données réelles. Il s'agit de la problématique de la propagation des fissures que nous présentons dans la section suivante.

1.3 PROBLÉMATIQUE DE LA PROPAGATION DES FISSURES EN FATIGUE

L'historique des recherches en fatigue est intéressante dans la mesure où les lois expérimentales bâties sur des hypothèses phénoménologiques de mécanique ont intégré une composante aléatoire pour reproduire la variabilité du phénomène. Cette problématique est un exemple canonique de l'apport de l'option stochastique pour la modélisation de mécanismes complexes.

Il est important de souligner que c'est l'étude du phénomène de propagation qui a motivé nos recherches de résultats théoriques pour la modélisation et l'estimation des systèmes dynamiques stochastiques. En effet, la propagation des fissures est au cœur des problèmes de durée de vie en mécanique des structures, particulièrement dans les domaines d'application où les structures fonctionnent en environnement extrême. Plusieurs systèmes dynamiques ont été proposés dans la littérature pour décrire le processus de propagation des fissures. Nous présentons ces modèles en fin de section.

Soulignons également que cette problématique possède un fort potentiel de généralisation à une large classe de mécanismes de dégradation où la dynamique et l'aléatoire occupent une place importante. Elle permet donc de valider la souplesse des modèles.

1.3.1 Modèle déterministe de propagation des fissures

En mécanique des structures, on s'accorde à dire que le mécanisme majeur menant au vieillissement en fatigue des matériaux est la propagation de petits défauts en fissures dans les structures soumises à des cycles de charge au cours de la durée de vie de fonctionnement (voir Provan 1987).

Le phénomène de propagation des fissures en fatigue est scindé en trois phases : k_1 cycles sont tout d'abord nécessaires à l'*initiation* des défauts ; suivent k_2 cycles de charge au cours desquels on observe une propagation assez régulière en fissures ; au cours des k_3 cycles restant, la propagation s'accélère brutalement et devient très instable, jusqu'à une taille où l'on considère que la rupture est inévitable. Nous abordons ici le pro-

blème de la propagation, en considérant que les défauts se propagent en fissure dès le premier cycle de charge.

En mécanique de la rupture, la propagation des fissures est modélisée par des lois expérimentales dont la forme générale est la suivante (voir par exemple Lin et Yang 1983) :

$$\frac{dz_t}{dt} = L(t, \Delta K, K_{max}, K_c, \sigma_{max}, R, z_t), \quad (1.5)$$

où $(z_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une fonction déterministe à valeurs dans \mathbb{R}_+ décrivant la taille de la fissure à l'instant t , ΔK est la variation du facteur d'intensité des contraintes, K_{max} est la valeur maximale du facteur d'intensité des contraintes, K_c est la ténacité, σ_{max} est l'amplitude maximale des contraintes et R un ratio des contraintes. La variable t peut décrire de manière équivalente le temps ou bien le nombre de cycles de charge. La fonction L décrivant la loi de propagation est positive, puisque pour tout s et t tels que $s \leq t$, nous supposons que $0 < z_s \leq z_t$. Comme exemple de choix pour la fonction L , nous citerons Paris et Erdogan (1963), Forman (1967) et Kung et Ortiz (1990), qui proposent les modèles phénoménologiques suivants :

$$\frac{dz_t}{dt} = \gamma(\Delta K)^n, \quad (1.6a)$$

$$\frac{dz_t}{dt} = \frac{\gamma(\Delta K)^n}{(1-R)K_c - \Delta K'}, \quad (1.6b)$$

$$\frac{dz_t}{dt} = \exp \{ \beta_0 + \beta_1 \ln(\Delta K) + \beta_2 \ln(\Delta K)^2 + \beta_3 \ln(\Delta K)^3 \}, \quad (1.6c)$$

avec $\gamma, n, (\beta_i)_{i=0,3}$ des constantes caractéristiques du matériau étudié. Le facteur d'intensité des contraintes est défini par $\Delta K = g(z_t)\Delta\sigma\sqrt{\pi z_t}$, où $\Delta\sigma$ est l'amplitude des contraintes et g est une fonction de forme caractéristique de la géométrie de la structure dépendant de z_t .

L'équation (1.5) et les cas particuliers (1.6a,1.6b,1.6c) régissent le degré d'accroissement d'une fissure de taille z_t d'un instant à l'autre.

1.3.2 Nature aléatoire de la fatigue

Les mesures obtenues par Virkler et al. (1979) constituent un jeu de données test pour les phénomènes de fatigue. Ces mesures ont été réalisées sur des éprouvettes C-C¹ dont nous proposons une représentation schématique à la figure 1.3. Le matériau est un alliage d'aluminium 2024-T3, privilégié dans les structures en aéronautique. Comme le souligne Xing et al. (1997), le comportement de la propagation est *qualitativement* identique dans les alliages d'acier, matériaux majoritairement utilisés pour les composants sensibles des centrales nucléaires.

En laboratoire, on procède à une entaille centrée sur chacun des 68 échantillons qui proviennent du même bloc de métal auxquels on fait subir des charges cycliques d'amplitude constante $\Delta\sigma = 48.28\text{MPa}$ à fréquence sinusoïdale de 20Hz. Les échantillons sont mesurés et répertoriés

¹C-C signifie « center-crack », c'est-à-dire que des entailles centrées ont été réalisées au centre des éprouvettes

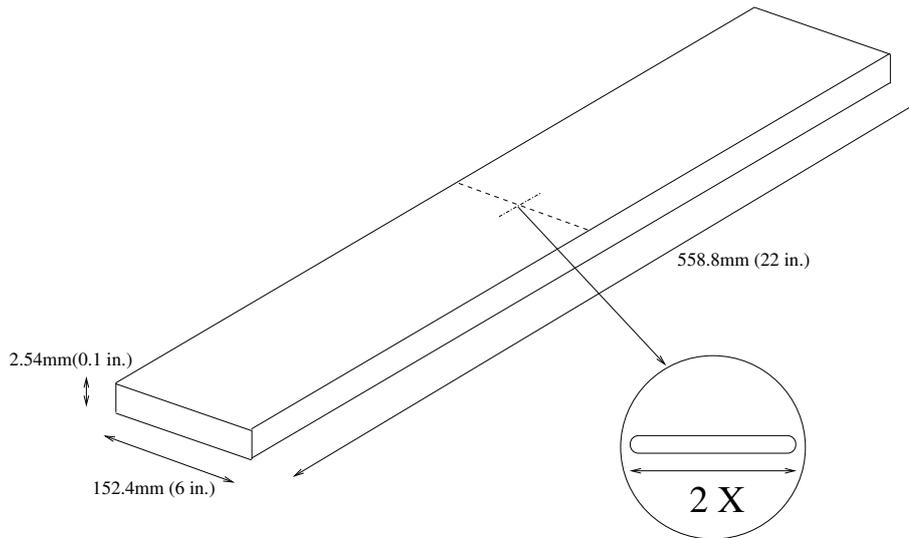


Fig. 1.3 – Éprouvette de laboratoire C-C. X est la demi-entaille initiale

à partir d'une demi-longueur de fissure de $z = 9\text{mm}$ où l'on considère que l'amorçage de la propagation est terminée jusqu'à la taille critique de $\Delta = 49.8\text{mm}$, définissant le domaine de défaillance. La figure 1.4, représentant les résultats de courbes de propagation de fissures, illustre la nature stochastique de la fatigue. Même dans le cadre de tests de laboratoire extrêmement contrôlés, deux échantillons contenant des défauts initiaux identiques et soumis à des cycles de charge identiques ne se comportent pas de la même manière.

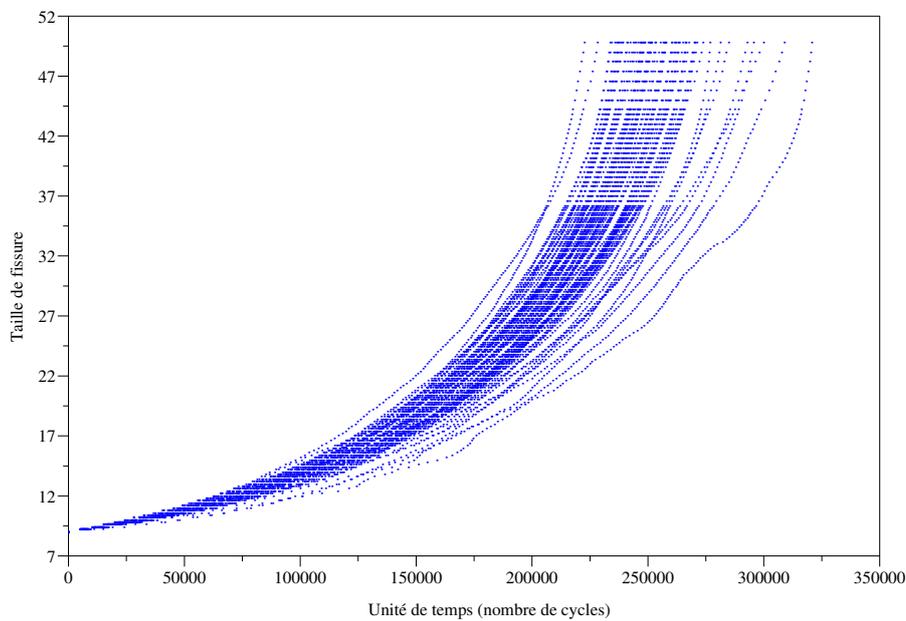


Fig. 1.4 – Données de Virkler sur la propagation de fissures en fatigue pour $\Delta\sigma$ constante

Plusieurs explications sont possibles pour ce profil de dispersion. Non seulement nous pouvons supposer que les connaissances scientifiques fondamentales en fatigue ne sont pas encore assez certaines pour décrire de manière strictement déterministe la propagation des fissures, mais nous pensons également que la nature de la propagation est un phénomène in-

trinsèquement aléatoire. L'observation d'un seul échantillon au cours de sa propagation dans le temps ne permet pas d'émettre une loi déterministe valable pour n'importe quel individu même si l'on réitère l'expérience dans des conditions absolument identiques. Les lois expérimentales de la forme (1.5) ne permettent pas de reproduire le profil de dispersion statistique des échantillons. Cela justifie le recours aux modèles aléatoires.

À partir de ces observations, divers auteurs (par exemple Virkler et al. 1979, Lidiard 1979, Johnston 1983, Ostergaard et Hillberry 1983) ont proposé les premiers modèles aléatoires de fatigue. En reprenant les lois déterministes, ils ont distribué en probabilités les constantes caractéristiques du matériau (γ et/ou n dans le cas de la loi (1.6a) de Paris-Erdogan), afin de rendre compte de la non homogénéité du matériau. Ces résultats ont été largement utilisés dans les applications d'ingénierie pour la fiabilité des structures et les problèmes de durée de vie en aéronautique et dans le domaine de la sûreté des centrales nucléaires : voir par exemple Marshall (1976-1982), Harris et Lim (1982), Dufresne et al. (1983), Palmberg et al. (1987), Bullough et al (1999), Guohua et Shuho (1996).

Cette approche va bien vers une meilleure description du phénomène. Cependant, l'utilisation d'une simple variable aléatoire pour la description des coefficients matériau semble encore trop réductrice.

1.3.3 Systèmes dynamiques et propagation de fissures

Le recours aux systèmes différentiels stochastiques permet de décrire les variations temporelles du profil de dispersion des trajectoires de la figure 1.4. La littérature est assez abondante dans ce domaine. Citons non exhaustivement comme bibliographie de base à la recherche en théorie stochastique de la fatigue Sobczyk (1982; 1993), Lin et Yang (1983; 1985), Tang et Spencer (1989), Spencer et al. (1989), Tanaka et Akira (1987), Tanaka (1999), Ishikawa et al. (1987), Tsurui et Ishikawa (1986), Yang et Manning (1990; 1996), Yang et al. (1987) et Solomos (1989). Plus récemment, de nombreux travaux reprenant ces modèles pour leurs applications en ingénierie ont été publiés : par exemple, Provan et Frahangdoost (1996), Xing et al. (1997), Shen et al. (2001), Wu et Ni (2003; 2004), Beck et Melchers (2004), Righiniotis (2004) et Myötyri et al. (2006).

Les modèles stochastiques reprennent la forme générale des lois expérimentales (1.5) en y adjoignant un processus aléatoire multiplicatif. Celui-ci rend compte des variations temporelles de la vitesse de propagation de la fissure due à divers facteurs environnementaux. Nous obtenons alors la formulation suivante :

$$\frac{dZ_t}{dt} = L(Z_t) \times X_t, \quad (1.7)$$

où nous supposons que les quantités $\Delta K, K_{max}, K_c, \sigma_{max}, R$ sont connues ou fonction de Z_t dans l'expression (1.5), ainsi L est uniquement une fonction du temps et de la taille de fissure Z_t . Cette réduction des variables dans la fonction L permet d'aborder les modèles en considérant uniquement la variable observable de taille de fissure. Nous pouvons justifier cette réduction à l'unique variable de taille en partant des lois expérimentales de mécanique de la rupture. Par exemple, pour la loi de Paris-Erdogan (1.6a), la fonction L fait intervenir le facteur d'intensité des contraintes K .

Dans le cas de structures de surface infinie, et donc par approximation pour les structures assez grandes, la fonction de forme g intervenant dans la définition de K est égale à 1. Une forme probabilisée possible pour la loi de Paris est

$$\frac{dZ_t}{dt} = \gamma(\Delta K)^n \times X_t = \gamma\Delta\sigma^n \pi^{n/2} Z_t^{n/2} \times X_t = a(Z_t)^b \times X_t, \quad (1.8)$$

où $a = \gamma\Delta\sigma^n \pi^{n/2}$ et $b = n/2$ sont deux constantes réelles positives.

Nous pouvons également formuler des systèmes complètement originaux pour la loi de propagation. Le traitement du problème en stochastique est radicalement différent et n'oblige pas à faire intervenir les variables mécaniques du type facteur d'intensité des contraintes. En effet, l'objet des modèles stochastiques consiste à reproduire la variable physique observable de taille de fissure, non pas à proposer une loi qui décrive la physique du phénomène. Pourtant, le fait de se baser sur des lois de mécanique des structures permet de donner une justification à la forme de la loi de propagation stochastique que nous construisons sur des travaux existants, tout en montrant une approche différente.

1.3.4 Quelques modèles stochastiques existants

Nous indiquons ici les principes de quelques familles de modèles stochastiques utilisées pour la modélisation de la propagation des fissures.

Processus de saut cumulatif

Bogdanoff et Kozin (1985) puis Kirkner et al. (1999) ont proposé de modéliser Z_t par un processus aléatoire de saut cumulatif construit à partir de chaînes de Markov. Cette approche donne des résultats intéressants sans se baser sur les lois expérimentales de mécanique de la rupture de la forme (1.5).

Approximation lognormale

Yang et al. (1987), Yang et Manning (1990; 1996) partent de la forme aléatoire (1.8) de la loi de Paris-Erdogan, c'est-à-dire

$$\frac{dZ_t}{dt} = a(Z_t)^b \times X_t. \quad (1.9)$$

En s'appuyant sur des études expérimentales, les auteurs proposent de modéliser X_t par un processus lognormal de médiane égale à 1 et de covariance

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \sigma_X^2 \exp \left\{ -\frac{|t-s|}{\lambda} \right\},$$

avec λ, σ_X^2 à estimer sur les données expérimentales.

Les auteurs ne parviennent pas à résoudre l'équation (1.9) mais montrent que l'on peut calculer analytiquement les moments d'ordre 1 et 2 du processus Z_t en fonction de λ et σ_X^2 , avant d'utiliser les résultats de Yang (1972) pour faire des simulations de trajectoires. Ils proposent d'approcher la loi de probabilité de Z_t par une loi lognormale, ce qui permet

d'en donner une estimation à l'aide des moments. Cette approche donne des résultats acceptables à l'aide d'une formulation simple. Par conséquent, elle a été massivement utilisée pour les applications probabilistes en mécanique des structures, cela malgré l'approximation lognormale de la distribution de Z_t .

Modèles de diffusion pour la propagation des fissures

Cette classe de modèles s'appuie sur l'approximation asymptotique du processus de taille de fissure Z_t par un processus de diffusion gouverné par une équation différentielle stochastique interprétée au sens de Stratonovich.

Pour regrouper les conditions qui rendent l'approximation asymptotique valable, on fait apparaître un « petit » paramètre ε dans la loi de propagation :

$$\frac{dZ_t}{dt} = \varepsilon \tilde{L}(Z_t) \times X_t. \quad (1.10)$$

Dans la formulation probabiliste (1.8) de la loi de Paris-Erdogan, le rôle du paramètre suffisamment petit peut être joué par le paramètre a . Les résultats asymptotiques et les techniques de moyennisation développées initialement par Stratonovich (1963) puis consolidés par Khasminskii (1966a;b), Papanicolaou et Kohler (1974), permettent de préciser les conditions d'approximation du processus Z_t par un processus de diffusion lorsque ε tend vers 0. Physiquement, cela signifie que l'accroissement des fissures entre deux instants très proches est quasiment nul.

L'idée générale est d'opérer un changement d'échelle dans (1.10) en posant $X_t = X_{t/\varepsilon^2}$ et d'observer le comportement du système suivant :

$$\frac{dZ_t^\varepsilon}{dt} = \varepsilon \tilde{L}(Z_t^\varepsilon) \times X_{t/\varepsilon^2}. \quad (1.11)$$

Pour certaines conditions de stationnarité de X_t , le processus Z_t^ε converge faiblement quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers un processus de diffusion \tilde{Z}_t gouverné par une équation différentielle stochastique de la forme

$$d\tilde{Z}_t = \mu(\tilde{Z}_t)dt + \sigma(\tilde{Z}_t)dB_t, \quad (1.12)$$

où μ et σ sont les fonctions de dérive et de diffusion de \tilde{Z}_t définies par les limites suivantes

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t \mathbb{E} \left[\frac{\partial \tilde{L}(x) X_s \tilde{L}(x) X_t}{\partial x} \right] ds dt + \frac{1}{2} \sigma^2(x), \\ \sigma(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t \mathbb{E} \left[\tilde{L}(x) X_s \tilde{L}(x) X_t \right] ds dt. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La densité de probabilité du processus de diffusion \tilde{Z}_t vérifie l'équation de Kolmogorov progressive, plus connue en physique sous le terme d'« équation de Fokker-Plank ». La densité de probabilité conditionnelle $f_t(\cdot|z)$ du processus de diffusion \tilde{Z}_t , associée à la condition initiale $\tilde{Z}_0 = z$, vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_t(x|z) = -\frac{\partial}{\partial x} \mu(x) f_t(x|z) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma^2(x) f_t(x|z), \\ f_0(x|z) = \delta_z(x), \end{cases} \quad (1.14)$$

où μ et σ sont donnés par (1.13) et $\delta_z(x)$ est la distribution de Dirac, c'est-à-dire que $\delta_z(x) = 1$ si $x = z$ et 0 sinon.

Sobczyk (1982) a proposé cette approche pour l'appliquer à la propagation des fissures, en donnant les conditions de résolution de l'équation différentielle stochastique (1.12) interprétée au sens de Stratonovich. Lin et Yang (1983; 1985) ont complété ces résultats en les appliquant à des cas réels et en donnant des détails sur la résolution du système (1.14). En particulier, ils ont proposé un modèle de train d'impulsions pour le processus X_t vérifiant les conditions d'application de l'approximation asymptotique.

L'approximation de diffusion a été ensuite déclinée et précisée par de nombreux auteurs. Tsurui et Ishikawa (1986), Ishikawa et al. (1987) et Tanaka et Akira (1987) ont repris cette formulation pour l'appliquer à des calculs avancés en fiabilité. Solomos (1989) et Spencer (1993) ont proposé des conditions aux limites correspondant mieux physiquement à la propagation des fissures. Tanaka (1999) a présenté cette application dans le cadre d'une approximation asymptotique, couplée à des méthodes de résolution numérique originales. Enfin Tang et Spencer (1989), Spencer et al. (1989) et Spencer (1993) ont proposé un autre modèle de diffusion qui n'est pas soluble analytiquement, mais qui donne de bons résultats numériquement.

Comme alternative à ces modèles, nous proposons de décrire l'accroissement des fissures par le système différentiel (1.4), avec X_t un processus markovien de saut. Nous appliquons les résultats de modélisation et d'estimation pour les PMDM développés au cours du mémoire au jeu de données de Virkler dans le chapitre cinq.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons présenté le contexte et introduit la problématique générale de la thèse. Le recours à un modèle particulier, bâti sur un système différentiel stochastique définissant un PMDM, a été motivé par les applications et la nature même des mécanismes de dégradation. La propagation des fissures en est un exemple type, utilisé dans le mémoire pour la validation de nos modèles.

PRÉSENTATION DU MODÈLE

2

SOMMAIRE

2.1	CONSTRUCTION DU SYSTÈME DYNAMIQUE	25
2.1.1	Rappels sur les processus de Markov	25
2.1.2	Un processus de Markov déterministe par morceaux . . .	27
2.2	DESCRIPTION PROBABILISTE	30
2.2.1	Générateur infinitésimal du couple	31
2.2.2	Résultats asymptotiques	32
2.3	UTILISATION DU MODÈLE EN FIABILITÉ DES STRUCTURES	34
2.3.1	Caractéristiques des processus de dégradation	35
2.3.2	Fiabilité du système	35
2.4	ILLUSTRATION NUMÉRIQUE	38
2.4.1	Définition du système	38
2.4.2	Approximation et simulations numériques	39
2.4.3	Estimation de mesures de fiabilité du système	40
	CONCLUSION	45

DANS ce chapitre, nous présentons en détail la classe de systèmes dynamiques stochastiques (1.4), placée dans le contexte de la modélisation des mécanismes de dégradation.

Après quelques rappels sur les processus de Markov, nous montrons comment construire les trajectoires du processus Z_t solution du système différentiel dont la composante aléatoire X_t est un processus markovien de saut. Nous donnons alors quelques résultats pour le couple (Z_t, X_t) que l'on retrouve dans la littérature comme un cas particulier de processus de Markov déterministe par morceaux. Le couple (Z_t, X_t) est un processus de Markov auquel on associe un générateur infinitésimal. Une étude asymptotique du premier ordre est également abordée, bâtie sur le principe de Bogolyubov. Dans la troisième section, nous décrivons les spécificités liées au contexte applicatif et au calcul de fiabilité : le niveau de dégradation d'une structure est observé depuis un état initial jusqu'à un seuil définissant la défaillance. La fiabilité associée peut s'exprimer en fonction du générateur du couple, mais nous ne pouvons pas la calculer dans le cas général. Des méthodes simples de simulation numérique de type Monte-Carlo permettent d'obtenir une première approximation de la

fiabilité, comme nous l'illustrons à la fin de ce chapitre pour un système donné.

Les deux premières sections de ce chapitre, en particulier la formulation du générateur, sont une présentation de résultats issus de la littérature. Ces résultats constituent les fondements des modèles de type PMDM. La construction du générateur est proposée en annexe et pour plus de détails, nous renvoyons par exemple à Dautray (1989), Lapeyre et Pardoux (1998), Davis (1984; 1993) ou Papanicolaou (1975), Koroliuk et Limnios (2005). Les définitions concernant les processus de Markov sont souvent empruntées à Gikhman et Skorokhod (1969; 2001), Limnios et Girardin (2001) et pour la fiabilité à Limnios (2003).

2.1 CONSTRUCTION DU SYSTÈME DYNAMIQUE

Dans cette section, nous construisons la classe de PMDM définie par (1.4). La construction s'opère par morceaux successifs sur les trajectoires des processus.

Les trajectoires du processus peuvent représenter, selon les applications, l'état d'une population de particules (en neutronique), d'une population de bactéries (en biologie), la concentration d'une protéine dans une solution (en chimie) ou, dans notre cas, l'état du niveau de dégradation d'une structure (la taille d'une fissure se propageant dans une structure).

Auparavant, nous avons besoin d'introduire quelques définitions et notations concernant les processus de Markov et les processus markoviens de saut.

2.1.1 Rappels sur les processus de Markov

Nous définissons un processus de Markov de la manière suivante :

Définition 2.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus aléatoire à valeurs dans un espace d'état mesurable E de tribu \mathcal{E} . Notons \mathcal{F}_t la tribu d'événements engendrée par $(X_s, 0 \leq s \leq t)$ et $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ la filtration associée.

Le processus X_t est un processus de Markov si pour tout $B \in \mathcal{E}$ et pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leq s < t$, il satisfait

$$\mathbb{P}(X_t \in B | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in B | X_s), \quad p.s.$$

De plus, X_t est homogène par rapport au temps si pour tout $t, s \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in E$, alors

$$\mathbb{P}(X_t \in B | X_0 = x) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in B | X_s = x). \quad (2.1)$$

Pour un processus de Markov homogène, nous notons $P(x, B, t)$ la probabilité (2.1). La fonction définie par $P : (x, B, t) \rightarrow P(x, B, t)$ pour $x \in E, B \in \mathcal{E}, t \in \mathbb{R}_+$ est appelée fonction de transition du processus.

Nous nous limitons par la suite à l'étude des processus de Markov homogènes. La propriété essentielle des processus de Markov est concentrée dans l'équation de Chapman-Kolmogorov.

Propriété 2.1 La fonction de transition d'un processus de Markov homogène vérifie l'équation

$$P(x, B, t) = \int_E P(x, dy, s) P(y, B, t - s), \quad 0 \leq s \leq t,$$

appelée équation de Chapman-Kolmogorov.

Définition 2.2 L'espérance par rapport à la mesure de probabilité $P(x, \cdot, t)$ d'une fonction réelle f mesurable et bornée est définie par

$$\mathbb{E}_x f(X_t) = \mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] = \int_E f(y) P(x, dy, t).$$

L'espérance $\mathbb{E}_x[\cdot]$ permet d'interpréter la fonction de transition comme un opérateur noté \mathcal{P}_t , c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_t f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t). \quad (2.2)$$

L'ensemble $\{\mathcal{P}_t, t \geq 0\}$ est appelé *semi-groupe des fonctions de transition*. Nous pouvons alors donner la définition du générateur infinitésimal du processus. Celui-ci, associé à la loi initiale $\alpha(B) = \mathbb{P}(X_0 \in B)$, $B \in \mathcal{E}$, caractérise complètement X_t .

Définition 2.3 *Le générateur infinitésimal d'un processus de Markov est un opérateur \mathcal{A} défini par la limite suivante*

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{P}_t f(x) - f(x)}{t},$$

lorsqu'elle existe, pour tout $x \in E$. L'ensemble des fonctions f mesurables et bornées pour lesquelles cette limite existe est appelé domaine de \mathcal{A} . Le générateur correspond à la dérivée par rapport au temps de l'espérance $\mathbb{E}_x[\cdot]$ calculée en 0^+ .

Les processus markoviens de saut sont un ensemble particulier parmi les processus de Markov, définis comme suit :

Définition 2.4 *Un processus markovien de saut est un processus de Markov à valeurs dans un ensemble E dénombrable, dont l'évolution se réalise par saut d'état en état et dont presque toutes les trajectoires (c'est-à-dire avec une probabilité de 1) sont constantes sauf en des points isolés correspondant aux sauts.*

Au cours du mémoire, nous utilisons les lettres i, j lorsque l'on raisonne sur un espace d'état dénombrable ou fini. Nous notons $P : (i, j, t) \rightarrow P_{ij}(t)$ pour $i, j \in E, t \in \mathbb{R}_+$ la fonction de transition associée à un processus de Markov à espace d'état dénombrable, c'est-à-dire, par rapport au cas général,

$$P_{ij}(t) = P(i, \{j\}, t).$$

Dans le cas dénombrable (ou fini), le générateur infinitésimal d'un processus de Markov est représenté par une matrice, éventuellement infinie, que nous appellerons également « générateur ». En effet, posons la fonction $f : i \rightarrow \mathbb{1}_j(i)$ avec $i, j \in E$, où $\mathbb{1}_j(i)$ définie la fonction indicatrice égale à 1 si $i = j$, 0 sinon. On constate alors que $\mathcal{P}_t f(i) = \mathcal{P}_t \mathbb{1}_j(i) = P_{ij}(t)$, et nous pouvons représenter le générateur par une matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i, j \in E}$ vérifiant la relation suivante :

Définition 2.5 *La matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i, j \in E}$ du générateur d'un processus de Markov à espace dénombrable est donnée par*

$$a_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}, \quad \text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour les processus markoviens de saut, nous considérons uniquement les générateurs stables et conservatifs, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0, & \forall i \neq j, \\ a_{ii} = -a_i = - \sum_{\ell \in E, \ell \neq i} a_{i\ell}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Lorsque l'espace d'état E est une partie finie de \mathbb{N} , le générateur est représenté par une matrice carrée de taille $s \times s$, où s est le cardinal de E .

Notons $(S_n, n \in \mathbb{N})$ la suite de variables aléatoires décrivant les instants successifs de saut et $W_n = S_{n+1} - S_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, les temps de séjour dans les états. La suite $(J_n, n \in \mathbb{N})$, composée des états successifs pris par X_t , est une chaîne de Markov appelée *chaîne de Markov immergée*. Elle est liée au processus X_t par la relation

$$J_n = X_{S_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire que la chaîne immergée J_n correspond aux valeurs successives de X_t sur les intervalles $[S_n, S_{n+1}[$. Le processus X_t peut donc s'écrire

$$X_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} J_n \mathbb{1}_{[S_n, S_{n+1}[}(t), \quad (2.4)$$

où nous avons noté $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice, définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La figure 2.1 représente une trajectoire d'un processus markovien de saut, avec les notations associées.

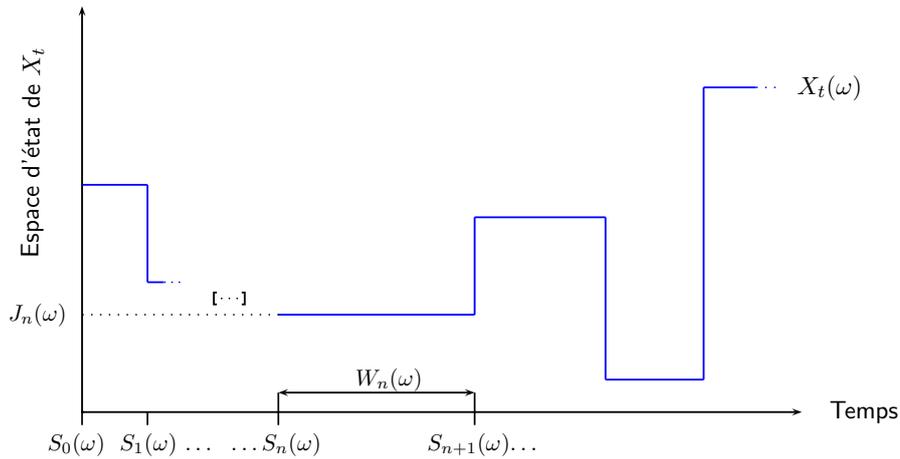


Fig. 2.1 – Trajectoire type d'un processus de saut

La chaîne immergée $(J_n, n \in \mathbb{N})$ possède la même loi initiale que X_t . Elle est entièrement caractérisée par les propriétés suivantes :

- Propriété 2.2**
- si X_t est dans l'état i sur l'intervalle $[S_n, S_{n+1}[$, alors la loi du temps de séjour conditionnelle à l'état i est exponentielle de paramètre a_i ;
 - la loi de changement d'état de la chaîne immergée J_n est donnée par matrice de transition $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$ vérifiant

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{a_i}, & \text{si } i \neq j \text{ et } a_i \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.1.2 Un processus de Markov déterministe par morceaux

Nous disposons dorénavant des notions nécessaires à la construction du PMDM. Nous décrivons l'évolution d'un phénomène sujet à des variations

à des instants discrets du temps par un processus Z_t . Ces variations sont d'amplitudes aléatoires, à valeurs dans un espace d'état dénombrable. Le système gouvernant Z_t , observé sur des valeurs de $t \in \mathbb{R}_+$, a pour forme générale

$$\begin{cases} \frac{dZ_t}{dt} = C(Z_t, X_t), \\ Z_0 = z, \end{cases} \quad (2.5)$$

où $(Z_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processus aléatoire de \mathbb{R}^d , $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus à valeurs dans E et C une fonction de $\mathbb{R}^d \times E$ dans \mathbb{R}^d .

Nous supposons que le processus X_t est un processus markovien de saut irréductible et homogène, d'espace d'état E dénombrable, de générateur \mathbf{A} et de loi initiale $(\alpha(i))_{i \in E}$.

La condition initiale $Z_0 = z$ avec $z \in \mathbb{R}^d$ est une réalisation de la variable aléatoire Z_0 admettant une loi de probabilité β définie par $\beta(B) = \mathbb{P}(Z_0 \in B)$, avec $B \in \mathcal{B}^d$, où nous avons noté \mathcal{B}^d la tribu des boréliens de \mathbb{R}^d . Nous supposons que les variables Z_0 et X_0 sont indépendantes, ainsi la loi initiale μ du couple (Z_t, X_t) est donnée par

$$\begin{aligned} \mu(B, i) &= \mathbb{P}(Z_0 \in B, X_0 = i) = \mathbb{P}(Z_0 \in B)\mathbb{P}(J_0 = i) \\ &= \alpha(i)\beta(B). \end{aligned}$$

Nous posons pour la fonction C les hypothèses de régularité suivantes :

- Hypothèse 2.1** a) la fonction $C : \mathbb{R}^d \times E \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est mesurable, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times E$;
b) il existe une fonction $h : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $i \in E$,

$$\|C(x, i) - C(y, i)\| \leq h(i)\|x - y\|,$$

c'est-à-dire que C est lipschitzienne par rapport à sa première composante.

Sous ces hypothèses, montrons que le système (2.5) admet une solution unique, en utilisant les résultats standards d'existence et d'unicité d'une solution pour les systèmes différentiels classiques, et par la nature du processus X_t . Nous n'avons d'ailleurs pas besoin du caractère markovien du processus X_t pour construire une solution pour Z_t , mais uniquement du fait que ses trajectoires soient constantes entre des sauts isolés, ce qui est vrai pour n'importe quel processus de saut. En effet, si nous fixons X_t à i , nous obtenons un système différentiel déterministe de la forme

$$\begin{cases} \frac{dz_t}{dt} = C(z_t, i), \\ z_0 = z, \end{cases} \quad (2.6)$$

avec z un vecteur de \mathbb{R}^d et $i \in E$. Le système (2.6) constitue un problème de Cauchy au sens « classique » qui, sous les hypothèses 2.1, possède une solution notée

$$z_t = \varphi_{z,i}(t), \quad t \geq 0.$$

La notation (2.4) met en évidence que le processus de saut X_t est constant sur les intervalles successifs $[S_n, S_{n+1}[$, $n \in \mathbb{N}$. Nous construisons donc par morceaux un unique processus solution Z_t , associé à X_t et à la fonction C , en résolvant successivement des systèmes différentiels du type (2.6).

Ainsi, pour déterminer Z_t jusqu'à l'instant t , nous calculons les morceaux de trajectoire de $(Z_s, 0 \leq s \leq t)$ de la sorte :

- pour tout $s \in [S_0, S_1[$,

$$Z_s = \varphi_{Z_0, J_0}(s),$$

- pour tout $s \in [S_1, S_2[$,

$$Z_s = \varphi_{Z_{S_1}, J_1}(s - S_1),$$

- etc. jusqu'à l'intervalle de saut du processus contenant l'instant t , où pour tout $s \in [S_n, t[$ tel que $S_n \leq t < S_{n+1}$,

$$Z_s = \varphi_{Z_{S_n}, J_n}(s - S_n).$$

Notons de plus que les trajectoires du processus ainsi construit sont continues. Nous avons ainsi démontré la proposition suivante sans utiliser le caractère markovien du processus de saut.

Proposition 2.1 *Soit le système différentiel stochastique (2.5) avec $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus de saut et soient les hypothèses 2.1 vérifiées pour la fonction C . Alors il existe un unique processus $(Z_t, t \in \mathbb{R}_+)$ solution de ce système, à trajectoires continues.*

Le principe de construction des trajectoires est illustré à la figure 2.2, où l'on se place dans le cas où $Z_t \in \mathbb{R}_+$. Nous représentons l'évolution d'une trajectoire du couple (Z_t, X_t) .

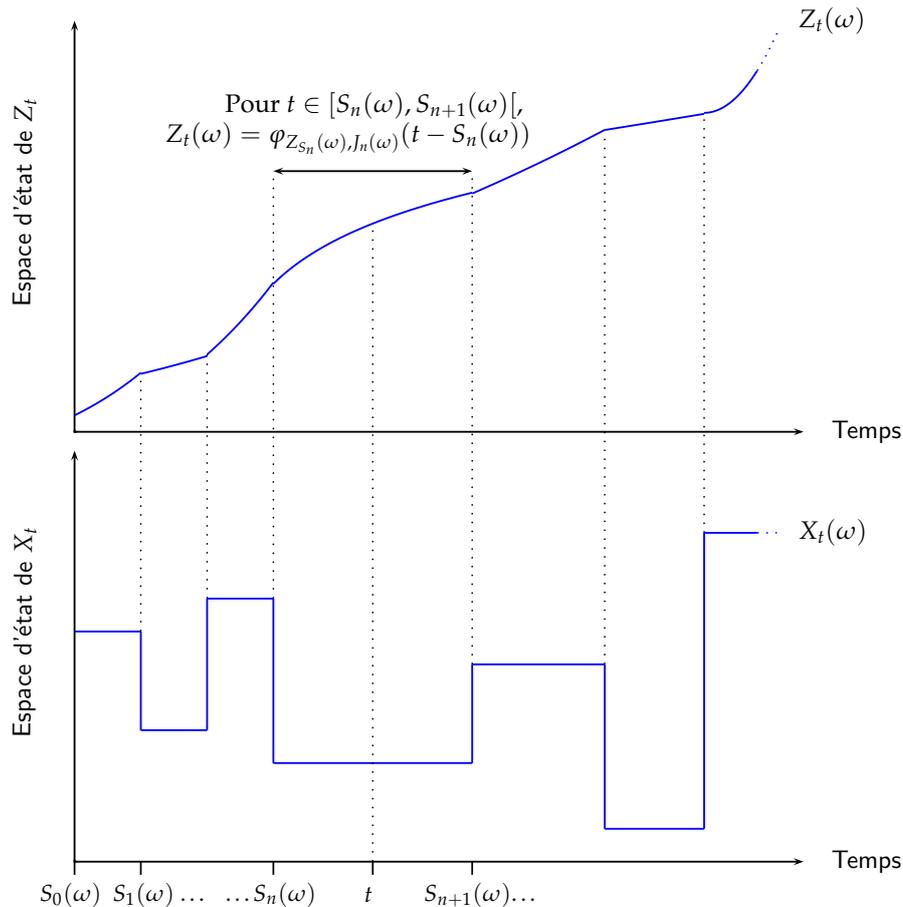


Fig. 2.2 – Existence et unicité par construction d'une solution au système dynamique

2.2 DESCRIPTION PROBABILISTE

Au-delà d'une formulation assez simple, le processus couple (Z_t, X_t) défini par le système (2.5) possède une propriété importante. Bien qu'aucune hypothèse supplémentaire ne soit nécessaire pour Z_t , c'est-à-dire pour le processus représentant le phénomène à modéliser, le couple (Z_t, X_t) est markovien lorsque X_t est markovien. Ceci permet de donner une famille de résultats classiquement associés aux processus de Markov qui caractérisent bien en termes probabilistes le système dynamique. Nous avons donc la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Lorsque Z_0 et X_0 sont indépendants, le couple (Z_t, X_t) est un processus de Markov à valeurs dans l'espace d'état $\mathbb{R}^d \times E$.*

Démonstration. Soit $\tilde{\mathcal{F}}_t$ la tribu d'événements engendrée par le processus couple $(Z_s, X_s, 0 \leq s \leq t)$. Par conditionnement, nous avons, pour tout $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{P}(Z_t \in B, X_t = j | \tilde{\mathcal{F}}_s) = \mathbb{P}(X_t = j | \tilde{\mathcal{F}}_s) \times \mathbb{P}(Z_t \in B | \tilde{\mathcal{F}}_s, X_t = j),$$

où $B \in \mathcal{B}^d$. Le processus X_t étant markovien, et pour X_0 indépendant de Z_0 , il vient

$$\mathbb{P}(X_t = j | \tilde{\mathcal{F}}_s) = \mathbb{P}(X_t = j | X_s).$$

L'accroissement dZ_t/dt étant régi par un système différentiel du premier ordre, Z_t est déterminé par le processus $(Z_s, X_s, 0 \leq s < t)$, et par l'équation (2.5). Ainsi,

$$\mathbb{P}(Z_t \in B | \tilde{\mathcal{F}}_s, X_t = j) = \mathbb{P}(Z_t \in B | X_s, Z_s),$$

pour peu que X_0 et Z_0 soient indépendants. Finalement,

$$\mathbb{P}(Z_t \in B, X_t = j | \tilde{\mathcal{F}}_s) = \mathbb{P}(Z_t \in B, X_t = j | X_s, Z_s).$$

□

Remarque 2.1 *La qualité markovienne du couple, s'ajoutant au mode de construction des trajectoires de Z_t étudié ci-dessus, permet de justifier pleinement la dénomination de « processus de Markov déterministe par morceaux », relative à (Z_t, X_t) .*

Associés au processus de Markov homogène (Z_t, X_t) à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^d \times E$ les fonctions le caractérisant, c'est-à-dire la fonction de transition et le générateur infinitésimal.

Notons $P : (i, j, z, B, t) \rightarrow P_{ij}(z, B, t)$ pour $z \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}^d$ et $i, j \in E$ la fonction de transition du couple, c'est-à-dire,

$$P_{ij}(z, B, t) = \mathbb{P}_{z,i}(Z_t \in B, X_t = j), \quad (2.7)$$

où $\mathbb{P}_{z,i}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | Z_0 = z, X_0 = i)$. Nous faisons ainsi apparaître explicitement la composante discrète du couple définie sur E et sa composante continue de \mathbb{R}^d dans la notation $P_{ij}(z, B, t)$.

Notons enfin $\{\mathcal{P}_t, t \geq 0\}$ le semi-groupe des fonctions de transition et \mathcal{B} le générateur infinitésimal du couple, défini d'après 2.3, pour toute fonction réelle f bornée et mesurable de $\mathbb{R}^d \times E$ dans \mathbb{R} , par

$$\mathcal{B}f(z, i) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{P}_t f(z, i) - f(z, i)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}_{z,i} f(Z_t, X_t) - f(z, i)}{t},$$

où l'espérance conditionnelle est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{z,i} f(Z_t, X_t) &= \mathbb{E} [f(Z_t, X_t) | Z_0 = z, X_0 = i] \\ &= \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(y, j) P_{ij}(z, dy, t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Lors de l'étude d'un processus de Markov, la détermination de P ou de \mathcal{B} constitue un enjeu majeur.

2.2.1 Générateur infinitésimal du couple

Nous souhaitons caractériser au mieux le processus Z_t , ce qui n'est pas facilement faisable directement puisqu'aucune hypothèse *a priori* n'est faite sur la nature de ce processus. En revanche, la nature probabiliste du processus X_t est complètement connue, puisque nous avons fixé comme hypothèse qu'il est markovien de saut. En s'appuyant de surcroît sur la proposition 2.2, nous cherchons des résultats pour le couple (Z_t, X_t) , à défaut de pouvoir caractériser le processus Z_t directement.

Un des résultats les plus importants concernant les processus de Markov déterministes par morceaux dont fait partie le couple (Z_t, X_t) concerne le générateur infinitésimal \mathcal{B} . En effet, il existe une forme explicite de \mathcal{B} , fonction du générateur X_t et de la fonction C définissant le système (2.5), énoncée dans le théorème suivant (voir Davis (1984; 1993) pour le générateur des PMDM généraux et Lapeyre et Pardoux (1998) pour le cas particulier du couple (Z_t, X_t) étudié ici).

Théorème 2.1 *Le générateur infinitésimal \mathcal{B} du couple (Z_t, X_t) agit sur les fonctions réelles $f : (z, i) \rightarrow f(z, i)$, pour $z \in \mathbb{R}^d, i \in E$, bornées et différentiables par rapport au premier argument, comme suit :*

$$\mathcal{B}f(z, i) = \sum_{k=1}^d C_k(z, i) \frac{\partial}{\partial z_k} f(z, i) + \sum_{j \in E} a_{ij} [f(z, j) - f(z, i)],$$

où C_k correspond à la k^e composante de $C(z, i)$.

Démonstration. La démonstration est proposée dans l'annexe A.1. \square

L'intérêt de connaître une formulation explicite du générateur du couple est d'écrire les équations de Kolmogorov dont la solution définit les fonctions de transition du processus. Pour l'opérateur du semi-groupe des fonctions de transition, nous avons le système suivant qui constitue les équations de Kolmogorov arrière et avant (également appelées rétrograde et progressive) :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_t f(z, i) = \mathcal{B} \mathcal{P}_t f(z, i) = \mathcal{P}_t \mathcal{B} f(z, i). \quad (2.9)$$

Lorsque la fonction de transition P admet une densité de probabilité p , celle-ci correspond à une densité conditionnelle du processus couple, définie pour tout $z, y \in \mathbb{R}^d$ et $i, j \in E$, par

$$p_{ij}(z, y, t)dy = \mathbb{P}(Z_t \in dy, X_t = j | Z_0 = z, X_0 = i),$$

c'est-à-dire, par rapport à la fonction de transition,

$$p_{ij}(z, y, t)dy = P_{ij}(z, dy, t). \quad (2.10)$$

L'existence de p est assurée si pour toute fonction $f : (y, i) \rightarrow f(z, i), y \in \mathbb{R}^d, i \in E$, mesurable et bornée, alors

$$\mathbb{E}_{z,i}f(Z_t, X_t) = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(y, j) p_{ij}(z, y, t)dy. \quad (2.11)$$

L'équation de Kolmogorov progressive définie à la relation (2.9) signifie pour la densité que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p_{ij}(z, y, t) = \mathcal{B}^* p_{ij}(z, y, t), \\ p_{ij}(z, y, 0)dy = \delta_{ij} \delta_z(dy). \end{cases} \quad (2.12)$$

On parle parfois pour (2.12) d'*équation de Fokker-Plank-Kolmogorov*. Nous avons noté \mathcal{B}^* l'opérateur adjoint du générateur \mathcal{B} , c'est-à-dire

$$\mathcal{B}^* f(z, i) = - \sum_{k=1}^d \frac{\partial}{\partial z_k} [C_k(z, i) f(z, i)] + \sum_{j \in E} a_{ji} f(z, j). \quad (2.13)$$

La preuve de (2.12) est détaillée par exemple dans Lapeyre et Pardoux (1998).

Disposer d'une équation régissant la densité de probabilité du couple est important pour pouvoir caractériser le système dynamique. Pourtant, dans les cas pratiques, le système (2.12) est rarement soluble. Des schémas numériques sont utilisés pour simuler les systèmes dynamiques et en approcher la solution. Ces schémas sont souvent associés aux processus de diffusion mais peuvent être adaptés aux PMDM (voir par exemple Sobczyk et Trębicki 1999, Kloeden et Platen 1992, Lapeyre et Pardoux 1998, Ycart 2002).

On peut également caractériser le système en étudiant son comportement asymptotique pour se ramener à un cadre mieux maîtrisé. Dans le paragraphe suivant, nous étudions un premier niveau de convergence asymptotique, utilisant les techniques de « moyennisation stochastique »¹ dues à Bogolyubov et Mitropol'skii (1961).

2.2.2 Résultats asymptotiques

Nous nous munissons au préalable de la définition de la loi stationnaire d'un processus markovien de saut et de ses propriétés élémentaires. Nous faisons l'hypothèse dans ce qui suit que l'espace d'état du processus X_t intervenant dans le système dynamique (2.5) est fini, garantissant l'existence d'une loi stationnaire.

¹traduction directe de « stochastic averaging »

Définition 2.6 Soit X_t un processus de Markov irréductible, d'espace d'état E fini et de générateur $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j \in E}$. La probabilité π , solution unique de l'équation

$$\sum_{j \in E} \pi(j) a_{ij} = 0, \quad i \in E,$$

est appelée loi stationnaire du processus X_t .

Propriété 2.3 Soit X_t un processus de Markov irréductible de fonction de transition $P : (i, j, t) \rightarrow P_{ij}(t)$ et de loi stationnaire π . Nous avons les propriétés suivantes :

a) Pour tout $i, j \in E$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi(j).$$

b) Pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X_t) dt = \sum_{j \in E} \pi(j) f(j), \quad p.s.$$

Convergence vers un processus déterministe

Un premier niveau d'analyse asymptotique consiste à réaliser le changement d'échelle $t \rightarrow t/\varepsilon$ pour la composante aléatoire du système (2.5) et à observer le comportement du système ainsi défini, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \frac{dZ_t^\varepsilon}{dt} = C(Z_t^\varepsilon, X_{t/\varepsilon}), \\ Z_0^\varepsilon = z, \end{cases} \quad (2.14)$$

où Z_t^ε est le processus solution.

L'idée est la suivante : lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le changement d'échelle de temps implique que le processus $X_{t/\varepsilon}$ n'intervient plus de la même manière sur le système. Le processus $X_{t/\varepsilon}$ apporte simplement au système l'information qu'il apporterait au bout d'un très long temps d'observation, puisque $t/\varepsilon \rightarrow \infty$. Cette information correspond à une *moyenne temporelle* sur un intervalle infini. Nous avons besoin des hypothèses suivantes pour la fonction C qui sont en fait déjà garanties lorsque l'espace E est fini et que les hypothèses 2.1 faites lors de la définition du système dynamique sont vérifiées.

Hypothèse 2.2 i) La fonction $C : (y, i) \rightarrow C(y, i)$ est continue sur \mathbb{R}^d pour $i \in E$ fixé, bornée et lipschitzienne par rapport à sa première composante (confer hypothèses 2.1).

ii) Pour $y \in \mathbb{R}^d$ fixé, il existe une fonction moyenne C_0 définie par

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(y, X_s) ds = C_0(y), \quad p.s.$$

Le théorème suivant est appelé « principe de Bogolyubov », présenté dans Bogolyubov et Mitropol'skii (1961) (voir également Sobczyk 1991). Il donne un sens à la convergence asymptotique du système (2.14).

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses 2.2, le processus Z_t^ε défini par le système (2.14) converge faiblement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers la solution \tilde{z}_t du système déterministe suivant :*

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_t}{dt} = C_0(\tilde{z}_t), \\ \tilde{z}_0 = z. \end{cases}$$

Si nous appliquons le théorème 2.2 sous les hypothèses 2.2, le processus Z_t défini par le système dynamique général (2.5) converge vers un processus déterministe \tilde{z}_t . La fonction C_0 correspondante est, pour $y \in \mathbb{R}^d$,

$$C_0(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C(y, X_s) ds = \sum_{j \in E} \pi(j) C(y, j), \quad p.s., \quad (2.15)$$

où nous avons utilisé la propriété 2.3.

Convergence vers une diffusion

Le second degré d'étude asymptotique consiste à opérer le changement d'échelle $t \rightarrow t/\varepsilon^2$ pour la composante aléatoire. Sous certaines conditions, le processus Z_t converge vers un processus de diffusion. On utilise en particulier le fait que le comportement du processus markovien de saut X_t est asymptotiquement celui d'un mouvement brownien lorsqu'il est observé sur l'échelle de temps appropriée (voir par exemple Dacunha-Castelle et Duflo 1983). Le générateur infinitésimal de la diffusion est connu et on peut y associer des équations de Kolmogorov plus facilement solubles (voir par exemple Øksendal 2003, Ycart 2002).

Une étude asymptotique très complète de la convergence des processus de transport généraux vers une diffusion et en particulier du processus (Z_t, X_t) est proposée par Papanicolaou (1975). La convergence d'une classe de processus aléatoires plus généraux a été récemment proposée par Koroliuk et Limnios (2005). Enfin, soulignons que l'option de modélisation des mécanismes de dégradation par un processus de diffusion a déjà été proposée par Sobczyk (1982), qui explique en termes physiques l'approximation d'un phénomène réel par une diffusion.

Nous ne détaillerons pas la convergence du processus Z_t vers un processus de diffusion, mais nous soulignons la convergence des PMDM définis par (1.4) vers une diffusion afin de mettre en évidence la complémentarité de ces approches.

2.3 UTILISATION DU MODÈLE EN FIABILITÉ DES STRUCTURES

La classe de systèmes dynamiques présentée dans les deux sections précédentes est assez générale. Son utilisation dans le cadre de la modélisation d'un phénomène physique précis, tel un processus de dégradation, requiert des hypothèses supplémentaires dues à la nature du phénomène, que nous précisons dans cette section. Nous présenterons également la formulation de la fiabilité dans le contexte d'une structure non réparable et dont le niveau de dégradation est décrit par un processus de Markov déterministe par morceaux.

2.3.1 Caractéristiques des processus de dégradation

Physiquement, la description d'un processus de dégradation implique les conséquences suivantes :

1. le processus de dégradation Z_t prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+ ;
2. le niveau de dégradation évolue de manière monotone croissante dans le temps ;
3. le domaine de défaillance se limite à un seuil critique à ne pas dépasser, c'est-à-dire à un réel noté Δ ;
4. les trajectoires du niveau de dégradation sont les seules données observables. Elles sont mesurées depuis l'instant initial jusqu'à ce que le niveau de dégradation atteigne le seuil de défaillance Δ .

Ces caractéristiques sont discutables selon le type de phénomène que l'on décrit. Elles ont été motivées ici par la nature du mécanisme de dégradation que nous avons étudié pour valider nos modèles, c'est-à-dire la propagation des fissures dans une structure. Dans ce cas, le niveau de dégradation caractéristique est la taille de la fissure, c'est-à-dire un réel positif qui croît dans le temps. Le domaine de défaillance est défini par une taille maximale de fissure acceptable, c'est-à-dire un réel positif. En laboratoire, ce phénomène est mesurable en observant des échantillons depuis une taille initiale fixée jusqu'à la taille critique.

Pour assurer la croissance du processus Z_t , nous ajoutons l'hypothèse suivante pour la fonction C , outre les hypothèses 2.1 nécessaires à l'existence d'une solution au système.

Hypothèse 2.3 *La fonction $C : (z, i) \mapsto C(z, i)$ est positive, pour tout $z \in \mathbb{R}_+, i \in E$; ainsi, les trajectoires de Z_t sont croissantes.*

De plus, il nous faut préciser le support de la distribution de probabilité β de Z_t à l'instant initial $t = 0$, afin qu'il n'y ait pas de possibilité pour qu'une réalisation de la variable aléatoire Z_0 soit égale à Δ , sans quoi le système se trouverait en état de défaillance à l'instant initial.

Hypothèse 2.4 *Le support de la loi initiale β de Z_t est un ensemble $\mathcal{D}_0 = [0, A]$ tel que $A < \Delta$, où Δ est le seuil de défaillance du système.*

Notons également τ la variable aléatoire décrivant le temps d'entrée de Z_t dans le domaine de défaillance, définie par

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : Z_t \geq \Delta\}. \quad (2.16)$$

La variable aléatoire τ est également appelée *temps de défaillance* ou *temps de panne* du système, celui-ci n'étant pas réparable.

Par exemple, la figure 2.3 représente un jeu de 3 trajectoires de Z_t observées jusqu'à la défaillance.

2.3.2 Fiabilité du système

Le modèle est dorénavant suffisamment balisé pour que nous puissions spécifier un cadre d'analyse de fiabilité. Ainsi, pour un processus Z_t gouverné par le système (2.5), sous les hypothèses 2.3, posons $U = [0, \Delta[$ le

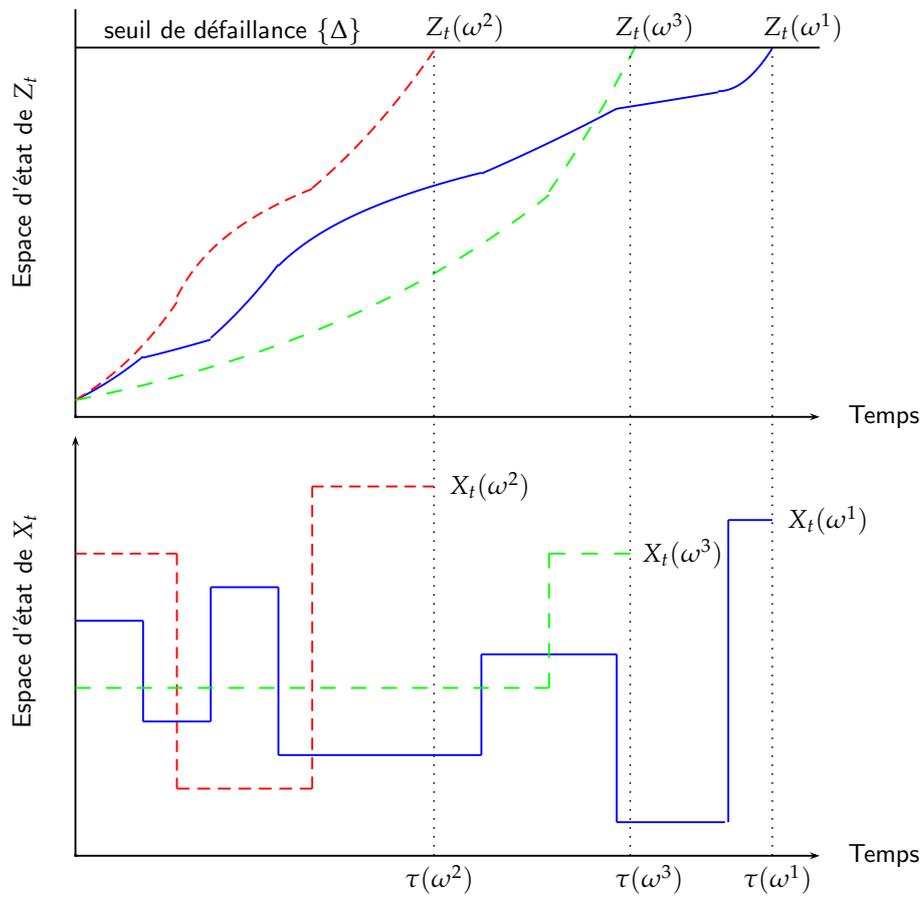


Fig. 2.3 – Observation de trajectoires de Z_t jusqu'à la défaillance

sous-ensemble constituant les états de bon fonctionnement du système, alors que le sous-ensemble des états défectueux est $D = [\Delta, \infty[$. Le processus Z_t étant croissant et à trajectoires continues, il reste dans l'ensemble D une fois atteint le seuil $\{\Delta\}$. Il continue à croître dans D , mais ne revient jamais dans l'ensemble U car nous considérons le système non réparable.

Nous avons défini la variable τ uniquement par rapport au processus Z_t à l'équation (2.16), mais nous pouvons également la définir de manière équivalente par rapport au couple (Z_t, X_t) :

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : (Z_t, X_t) \in D \times E\}. \quad (2.17)$$

Or nous avons vu que nous savons caractériser le processus couple, contrairement au processus Z_t . Cela signifie que nous pouvons calculer la fiabilité associée au processus Z_t en passant par celle du processus couple. Si nous notons R la fonction de fiabilité du système et F_τ la fonction de répartition de τ , on voit immédiatement que le calcul de R et de F_τ sont équivalents :

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathbb{P}(Z_t < \Delta) = \mathbb{P}((Z_t, X_t) \in U \times E) \\ &= \mathbb{P}(\tau > t) \\ &= 1 - F_\tau(t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Il est intéressant de voir que nous pouvons obtenir une expression explicite de la fiabilité en fonction du générateur \mathcal{B} du couple (Z_t, X_t) , en effet

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{i \in E} \int_{\mathcal{D}_0} \mathbb{P}(Z \in dz, X_0 = i) \mathbb{P}(Z_t \in U, X_t \in E \mid Z_0 = z, X_0 = i) \\ &= \sum_{i, j \in E} \alpha(i) \int_{\mathcal{D}_0} \beta(dz) P_{ij}(z, U, t). \end{aligned} \quad (2.19)$$

L'évaluation de R peut se faire en utilisant les équations de Kolmogorov (2.9) définies pour l'opérateur du semi-groupe des fonctions de transition. Pour \mathcal{B} borné (en norme), ces équations signifient pour la fonction de transition du couple (Z_t, X_t) que

$$P_{ij}(z, U, t) = \left(e^{t\mathcal{B}} \right)_{ij}(z, U) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k (\mathcal{B}^k)_{ij}(z, U)}{k!}. \quad (2.20)$$

et

$$R(t) = \sum_{i, j \in E} \alpha(i) \int_{\mathcal{D}_0} \beta(dz) \left(e^{t\mathcal{B}} \right)_{ij}(z, U). \quad (2.21)$$

Alors que nous disposons d'une expression analytique de la fiabilité, l'expression du générateur du couple \mathcal{B} n'est pas facile à appréhender puisqu'il est défini sur l'espace non dénombrable $\mathbb{R}_+ \times E$. De la même manière que pour la résolution de l'équation de Fokker-Plank, on doit recourir à des schémas numériques.

Nous proposons dans ce mémoire deux méthodes alternatives pour le calcul de la fiabilité.

1. Une première approche consiste à réaliser des simulations de trajectoires du processus de Markov (Z_t, X_t) . Nous pouvons alors utiliser des techniques de Monte-Carlo pour estimer la fonction F_τ ou la fiabilité R sur un jeu de trajectoires simulées. Nous traitons un exemple applicatif dans la section suivante pour l'approche de type Monte-Carlo.
2. La seconde approche est développée dans le chapitre suivant : nous calculons la fonction de transition P sans passer par le générateur, en utilisant la théorie du renouvellement markovien.

2.4 ILLUSTRATION NUMÉRIQUE

Nous proposons dans cette section un exemple de traitement numérique d'un système dynamique tel que décrit dans ce chapitre. Nous restons pour l'instant dans un cadre de modélisation général, pour un système donné. L'exemple traité illustre les méthodes de simulation du PMDM. Nous voyons également comment estimer quelques grandeurs d'intérêt pour le système à partir des trajectoires simulées, en nous plaçant dans un contexte d'analyse de fiabilité.

2.4.1 Définition du système

Considérons un processus Z_t évoluant dans \mathbb{R}_+ avec un état défaillant $\{\Delta\}$ dans lequel il reste indéfiniment une fois atteint. L'accroissement de Z_t est gouverné par le système différentiel stochastique suivant

$$\begin{cases} \frac{dZ_t}{dt} = aZ_t \times v(X_t), \\ Z_0 = z. \end{cases} \quad (2.22)$$

Le processus X_t est markovien de saut d'espace d'état fini E , a est une constante strictement positive et v est une application qui associe à chaque élément de E un élément de \mathbb{R}_+ , permettant d'exercer un certain « contrôle » sur le processus X_t . Le point initial z est strictement positif.

Remarque 2.2 *L'étude des systèmes (2.22) où le processus X_t apparaît sous une forme multiplicative est motivée par la forme des modèles stochastiques de propagation de fissure présentés dans la section 1.3. Soulignons néanmoins que les résultats théoriques du mémoire portent sur les systèmes plus généraux de la forme (2.5), qui incluent les familles de systèmes où la composante aléatoire X_t apparaît sous une forme additive dans le membre de droite du système différentiel.*

Nous prenons les valeurs numériques suivantes : les trajectoires du processus Z_t partent d'une valeur fixe $z = 10$, c'est-à-dire que la distribution β de Z_0 concentre toute la probabilité au point z . Le seuil de défaillance est fixé à $\Delta = 50$ et nous prenons $a = 5 \times 10^{-4}$. L'espace d'état E de X_t est constitué de 5 états $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ et la fonction v est définie par

$$\begin{aligned} v : \quad E &\rightarrow E', \\ \{1, 2, 3, 4, 5\} &\mapsto \{0.5, 1, 1.5, 2, 4\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Nous choisissons pour X_t la loi initiale donnée par le vecteur ligne

$$\alpha = (2/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0), \quad (2.24)$$

et le générateur infinitésimal suivant :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.02 & 0.016 & 0 & 0.004 & 0 \\ 0.012 & -0.02 & 0.008 & 0 & 0 \\ 0.014 & 0 & -0.02 & 0 & 0.006 \\ 0 & 0.007 & 0 & -0.01 & 0.003 \\ 0 & 0 & 0.005 & 0.005 & -0.01 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

La matrice de transition $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$ de X_t est obtenue en utilisant $p_{ij} = a_{ij}/a_i$, pour $i \neq j$. Le graphe d'état associé est représenté par la figure 2.4, où les arcs $(i, j)_{i,j \in E}$ sont valués par les probabilités de transition p_{ij} .

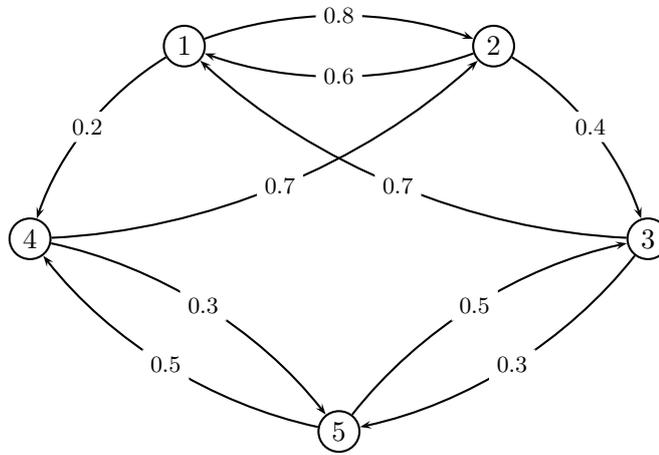


Fig. 2.4 – Graphe d'état du processus de Markov

De manière évidente, $v(X_t)$ est un processus markovien de saut ayant le même générateur et la même loi initiale que X_t . Seul l'espace d'état E' change.

2.4.2 Approximation et simulation numérique du système

Une première indication sur le processus Z_t peut être obtenue par le principe de Bogolyubov décrit à la section 2.2.3 : d'après le théorème 2.2 et l'équation (2.15), le processus Z_t gouverné par (2.22) converge vers un processus déterministe \tilde{z}_t avec la fonction C_0 donnée, pour $y \in \mathbb{R}_+$, par

$$C_0(y) = ay\mu_\pi, \quad (2.26)$$

où nous avons noté

$$\mu_\pi = \sum_{j \in E} \pi(j)v(j).$$

Ainsi, \tilde{z}_t vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_t}{dt} = a\mu_\pi\tilde{z}_t, \\ \tilde{z}_0 = z. \end{cases} \quad (2.27)$$

La loi stationnaire π est calculée en résolvant

$$\pi \mathbf{A} = 0, \quad \sum_{i \in E} \pi_i = 1.$$

De π nous obtenons immédiatement μ_π . Le système (2.27) constitue un problème de Cauchy classique dont la solution, donnée par

$$\tilde{z}_t = z \exp \{a \mu_\pi t\}, \quad (2.28)$$

correspond au processus déterministe asymptotique du système dynamique (2.22).

Par ailleurs, il n'est pas trop difficile de simuler des trajectoires du processus Z_t , afin d'avoir un premier aperçu qualitatif du comportement aléatoire du système (2.22). L'algorithme 1 donne les étapes essentielles pour la simulation de trajectoires du PMDM, qui s'avère être facile à mettre en œuvre.

Cet algorithme est adapté au système en cours, en particulier les trajectoires sont simulées jusqu'à ce qu'elles atteignent le point $\{\Delta\}$ que l'on considère *absorbant* ici : nous arrêtons les simulations lorsque Z_t entre dans l'état Δ . Notons que les trajectoires du processus observable Z_t et de la composante markovienne sont simulées en même temps, par morceaux d'intervalles de temps correspondant aux sauts du processus X_t . Sur chaque intervalle, la portion de trajectoire de Z_t est obtenue par calcul de la fonction φ décrite à la section 2.1.2 puisque, pour ce système dynamique précis, le calcul analytique est possible. Nous avons

$$Z_t = \varphi(t) := \begin{cases} \varphi_{z, J_0}(t) = z \exp\{atv(J_0)\}, & \text{pour } 0 \leq t < S_1, \\ \varphi_{Z_{S_1}, J_1}(t) = Z_{S_1} \exp\{a(t - S_1)v(J_1)\}, & \text{pour } S_1 \leq t < S_2 \\ \dots \\ \varphi_{Z_{S_n}, J_n}(t) = Z_{S_n} \exp\{a(t - S_n)v(J_n)\}, & \text{pour } S_n \leq t < S_{n+1} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Pour des systèmes plus complexes où l'on ne peut obtenir une forme explicite de la fonction φ , le calcul de la trajectoire Z_t se fait de proche en proche. Sur l'intervalle de temps $[S_n, S_{n+1}[$, nous calculons Z_t par

$$Z_{t+\Delta t} = Z_t + C(Z_{t+\Delta t}, J_n),$$

où $t + \Delta t \in [S_n, S_{n+1}[$ et Δt le pas de discrétisation du temps de la simulation numérique.

La figure 2.5 propose quelques trajectoires simulées du système (2.22) ainsi que le processus asymptotique (2.28) correspondant.

2.4.3 Estimation de mesures de fiabilité du système

Nous proposons dans cette partie deux méthodes permettant d'estimer la fiabilité du système (2.22) ainsi que la distribution du processus de dégradation Z_t . La première méthode, valable pour n'importe quel système (2.5), se base sur l'algorithme 1, c'est-à-dire sur des simulations de trajectoires du processus Z_t . La seconde prend en compte les spécificités du système différentiel associé à l'illustration numérique courante. Ceci permet d'améliorer les temps de calcul et la précision des résultats.

Algorithme 1 : Éléments de simulation du système dynamique (2.22)

```

// INITIALISATION

Entrées :  $z, \mathbf{A}, \Delta, \alpha, a, N$ 
définitions des fonctions :
- matriceImmergee : calcul de  $\mathbf{P}$  avec  $p_{ij} = a_{ij}/a_i, i \neq j$ 
- etatInitial : tirage aléatoire dans  $\alpha$  (2.24)
- loiExponentielle : tirage aléatoire d'une v.a exponentielle
- marcheAleatoire : tirage aléatoire d'un changement d'état

 $\mathbf{P} \leftarrow$  matriceImmergee ( $\mathbf{A}$ )

//SIMULATIONS

pour  $N$  trajectoires faire
   $t \leftarrow 0$ 
   $n \leftarrow 0$ 
   $Z_t \leftarrow z$ 
   $J_n \leftarrow$  etatInitial ( $\alpha$ )
  tant que  $Z_t < \Delta$  faire
    //Simulation du temps de séjour de  $X_t$ 
     $W_n \leftarrow$  loiExponentielle ( $a_i$ )
     $S_n \leftarrow t$ 
     $S_{n+1} \leftarrow S_n + W_n$ 
    //Calcul de  $Z_t$  sur l'intervalle  $[S_n, S_{n+1}[$ 
    pour  $t$  variant dans  $[S_n, S_{n+1}[$  faire
       $Z_t \leftarrow \min(\Delta, Z_{S_n} \exp\{a(t - S_n)v(J_n)\})$ 
    fin
    // Simulation du changement d'état de  $X_t$ 
     $J_{n+1} \leftarrow$  marcheAleatoire ( $\mathbf{P}, J_n$ )
     $t \leftarrow S_{n+1}$ 
     $n \leftarrow n + 1$ 
  fin
  Stocker la trajectoire du processus  $(Z_t, X_t)$ 
fin

Sorties :  $N$  trajectoires de  $(Z_t, X_t)$ 

```

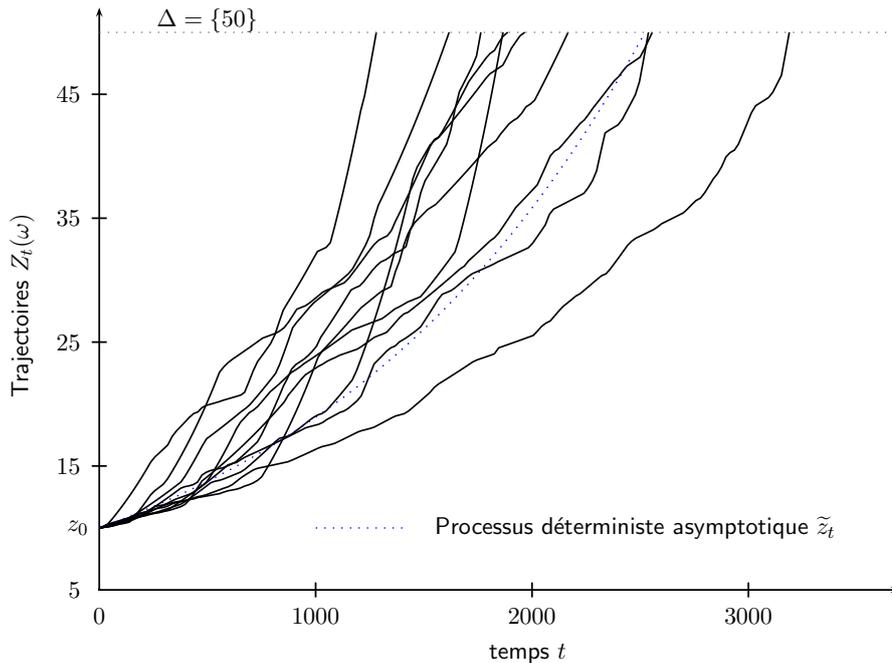


Fig. 2.5 – Simulation de trajectoires et processus asymptotique du système

Méthode générale d'estimation

Notons $(\zeta_t^k)_{k=1, \dots, N}$ quelques N trajectoires simulées du processus Z_t , issues de l'algorithme 1. La fiabilité du système, donnée par

$$R(t) = \mathbb{P}(Z_t < \Delta),$$

peut être estimée par l'estimateur empirique

$$\hat{R}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\{\zeta_t^k < \Delta\}}. \quad (2.29)$$

Au-delà de la fiabilité, et afin de qualifier la dispersion du système dynamique au cours du temps, nous proposons d'estimer la fonction de répartition du processus Z_t pour différents instants fixés du temps. En notant F_t la fonction de répartition de Z_t , pour t fixé, c'est-à-dire

$$F_t(x) = \mathbb{P}(Z_t \leq x | Z_0 = z), \quad (2.30)$$

l'estimateur empirique associé est

$$\hat{F}_t(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\{\zeta_t^k \leq x\}}. \quad (2.31)$$

Il peut être également intéressant de représenter l'information d'une autre manière. Pour $x \in [z, \Delta]$ fixé, notons T_x la variable aléatoire décrivant le temps nécessaire pour atteindre l'état x et G_x sa fonction de répartition. Nous pouvons facilement lier les fonctions de répartition F_t et G_x . En effet, la probabilité que le temps pour atteindre x soit inférieur ou égal à t est égale à la probabilité pour que à l'instant t , la valeur courante de Z_t soit supérieure à la valeur x , c'est-à-dire

$$G_x(t) = \mathbb{P}(T_x \leq t | Z_0 = z) = \mathbb{P}(Z_t > x | Z_0 = z) = 1 - F_t(x). \quad (2.32)$$

Nous estimons donc G_x par

$$\widehat{G}_x(t) = 1 - \widehat{F}_t(x). \quad (2.33)$$

Spécialisation au système en cours

L'algorithme 1, bien qu'il puisse être facilement adapté à n'importe quel système de la forme (2.5), possède les limites suivantes :

- la simulation de trajectoires du processus Z_t coûte cher numériquement, de par le calcul de la fonction φ sur les intervalles de sauts successifs ;
- le calcul du temps de défaillance, c'est-à-dire du temps d'entrée dans l'ensemble des états de panne $[\Delta, \infty[$, n'est pas rigoureusement exact numériquement. En effet, l'entrée dans la zone de défaillance survient entre deux instants de saut du processus $v(X_t)$. Pour déterminer le temps de panne, on résout numériquement le système (2.22) sur cet intervalle et on renvoie l'instant du temps t qui correspond au premier franchissement du seuil de défaillance Δ par le processus Z_t . Cependant, la solution numérique est nécessairement discrétisée dans le temps, et on introduit de ce fait un léger biais pour la détermination du temps de panne, dépendant de la finesse de discrétisation de la variable temps.

Dans ce qui suit, nous proposons de palier à ces problèmes dans le cas précis du système différentiel de l'illustration numérique courante, c'est-à-dire

$$\frac{dZ_t}{dt} = aZ_tv(X_t), \quad Z_0 = z.$$

Par intégration, il vient pour ce système

$$\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} = a \int_0^t v(X_s) ds \Leftrightarrow \ln\left(\frac{Z_t}{z}\right) = a \int_0^t v(X_s) ds,$$

puis

$$Z_t = z \exp(aV_t), \quad (2.34)$$

où V_t est le processus de cumul des coûts associé au processus markovien de saut $v(X_t)$, c'est-à-dire

$$V_t = \int_0^t v(X_s) ds. \quad (2.35)$$

Le processus V_t est facilement calculable de par la forme de $v(X_t)$, à valeurs constantes entre les sauts. Le processus V_t est linéaire par morceaux et les ruptures de pentes sont proportionnelles aux valeurs successives de $v(X_t)$. Les instants de ruptures correspondent aux instants de saut de $v(X_t)$. Remarquons enfin d'après (2.34) que

$$\{Z_t < \Delta\} \Leftrightarrow \left\{ V_t < \frac{1}{a} \ln(\Delta/z) \right\}. \quad (2.36)$$

En travaillant alors avec le processus V_t plutôt qu'avec le processus Z_t , le temps de panne peut être déterminé de manière exacte. En effet, si l'on considère que le processus Z_t franchit le seuil Δ entre les instants de saut

S_n et S_{n+1} de $v(X_t)$, alors V_t franchit le seuil $1/a \ln(\Delta/z)$ entre ces mêmes instants de saut. Par une interpolation linéaire entre les valeurs de V_t aux instants S_n et S_{n+1} , on obtient la valeur exacte du temps de panne τ .

Par exemple, pour $t \in [S_n, S_{n+1}[$, le processus V_t est donné par la fonction linéaire

$$V_t = V_{S_n} + \frac{V_{S_{n+1}} - V_{S_n}}{S_{n+1} - S_n} (t - S_n).$$

Au point τ du temps, $V_\tau = 1/a \ln(\Delta/z)$, d'où la valeur du temps de panne

$$\tau = S_n + \frac{W_n(1/a \ln(\Delta/z) - V_{S_n})}{V_{S_{n+1}} - V_{S_n}}. \quad (2.37)$$

Ce principe est illustré à la figure 2.6.

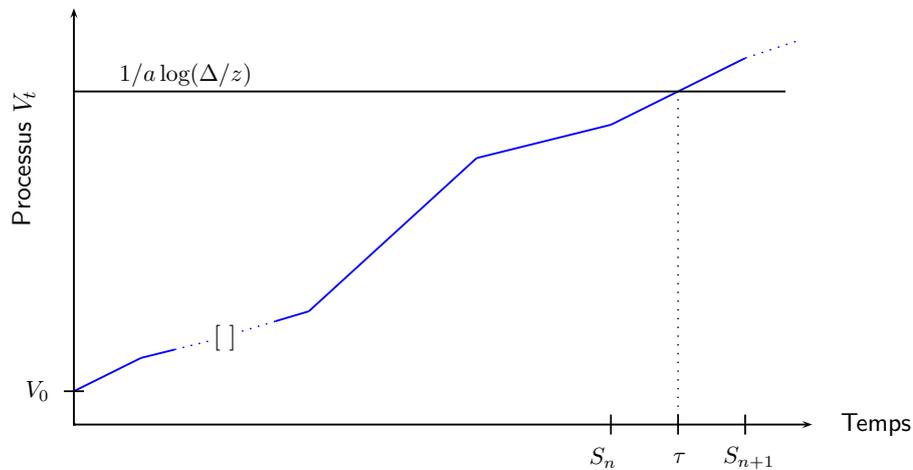


Fig. 2.6 – *Processus de cumul des coûts*

L'algorithme 2, utilisant quelques unes des fonctions définies dans l'algorithme 1, prend en compte ces remarques et renvoie N valeurs $(\tau_k)_{k=1, \dots, N}$, c'est-à-dire les temps de défaillance de N simulations.

Dans l'algorithme 2, nous remarquons que

1. nous n'avons pas besoin de simuler les trajectoires de Z_t : le gain en temps de calcul est précieux ;
2. nous calculons de manière exacte le temps de défaillance associé à une trajectoire.

Ainsi, l'estimation de F_τ , la fonction de répartition de τ , ne souffre pas d'un biais dû à la discrétisation numérique. Nous l'obtenons via

$$\hat{F}_\tau(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{\{\tau_k \leq t\}}. \quad (2.38)$$

L'estimateur de la fiabilité est obtenue via $R(t) = 1 - F_\tau(t)$. Les fonctions de répartition F_t et G_x peuvent être obtenues selon le même principe, sans simuler les trajectoires de Z_t , mais uniquement de V_t .

Algorithme 2 : Calcul du temps de panne τ

```

pour  $k = 1$  à  $N$  trajectoires faire
   $n \leftarrow 0$ 
   $S_n \leftarrow 0$ 
   $J_n \leftarrow \text{etatInitial}(\alpha)$ 
   $V_{S_n} \leftarrow J_n$ 
  tant que  $V_n < \frac{1}{a} \log(\Delta/z)$  faire
    //Simulation du temps de séjour de  $X_t$ 
     $W_n \leftarrow \text{loiExponentielle}(a_i)$ 
     $S_{n+1} \leftarrow S_n + W_n$ 
    //Calcul de  $V_t$  sur l'intervalle  $[S_n, S_{n+1}[$ 
     $V_{S_{n+1}} = V_{S_n} + J_n \times W_n$ 
    // Simulation du changement d'état de  $X_t$ 
     $J_{n+1} \leftarrow \text{marcheAleatoire}(\mathbf{P}, J_n)$ 
     $n \leftarrow n + 1$ 
  fin
  //CALCUL DU TEMPS DE PANNE
   $\tau_k = S_n + \frac{W_n(1/a \log(\Delta/z) - V_n)}{V_{S_{n+1}} - V_{S_n}}$ 
  Stocker la valeur de  $\tau_k$ 
fin
Sorties :  $N$  valeurs de  $\tau$ 

```

Résultats numériques

Nous proposons à la figure 2.7 la fiabilité du système estimée pour respectivement 10, 100 et 5000 trajectoires simulées. On remarque que nous obtenons un résultat tout à fait acceptable pour 100 trajectoires, alors que 10 trajectoires donnent déjà une bonne indication de la fiabilité du système.

Les figures 2.8 et 2.9 représentent respectivement les fonctions de répartition F_t et G_x pour diverses valeurs fixées de t , respectivement de x . Pour la fonction F_t , nous soulignons l'importance du point Δ , qui est considéré comme absorbant ici. Au niveau de la valeur $\Delta = 50$ de Z_t , la fonction de répartition F_t comporte un saut de discontinuité. En effet, les particules du processus Z_t ayant atteint le point Δ sont *absorbées* pour y rester indéfiniment, ce qui implique l'absorption de la masse de probabilité associée à ces particules et le saut ainsi généré.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons présenté une famille de processus de Markov déterministes par morceaux, construite sur un système différentiel à environnement markovien. Nous avons développé quelques éléments théoriques fondamentaux du système, utiles dans le cadre de la modélisation des mécanismes de dégradation. Nous avons également précisé les hypothèses spécifiques au champ d'application. Enfin, nous avons proposé

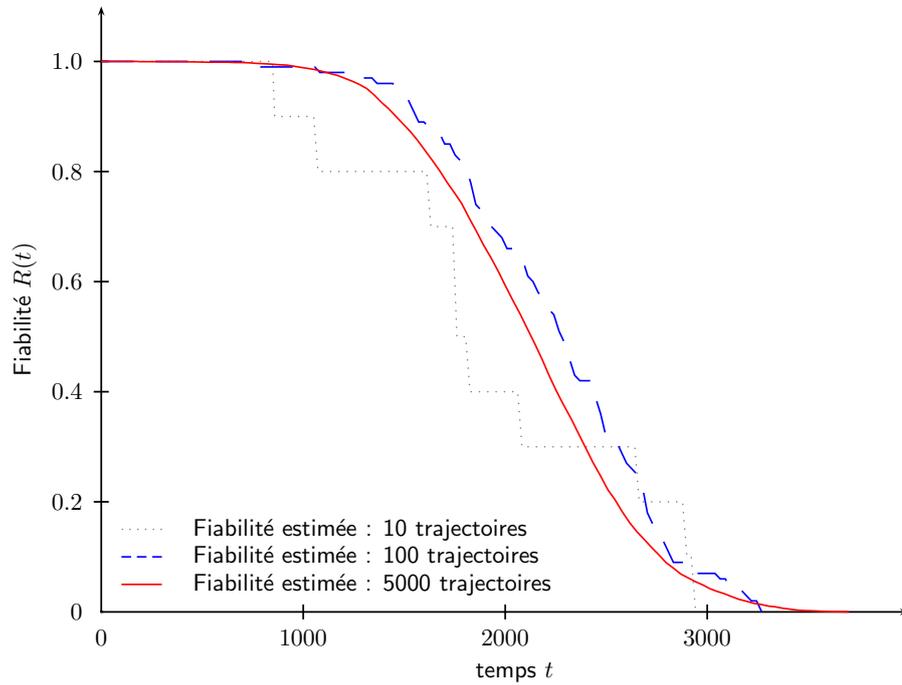


Fig. 2.7 – Estimation de la fiabilité du système

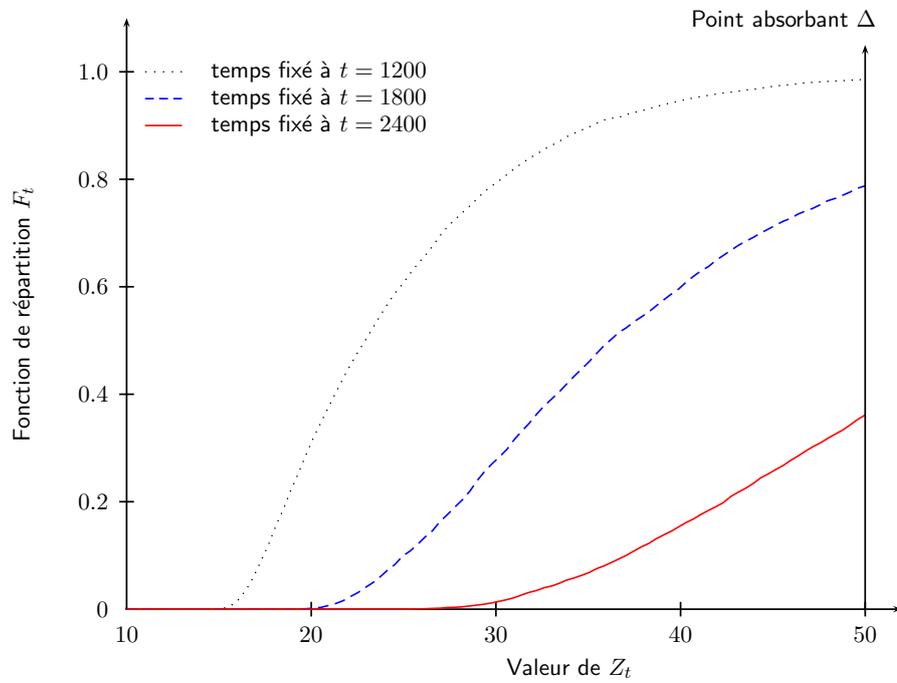


Fig. 2.8 – Estimation des fonctions de répartition de Z_t

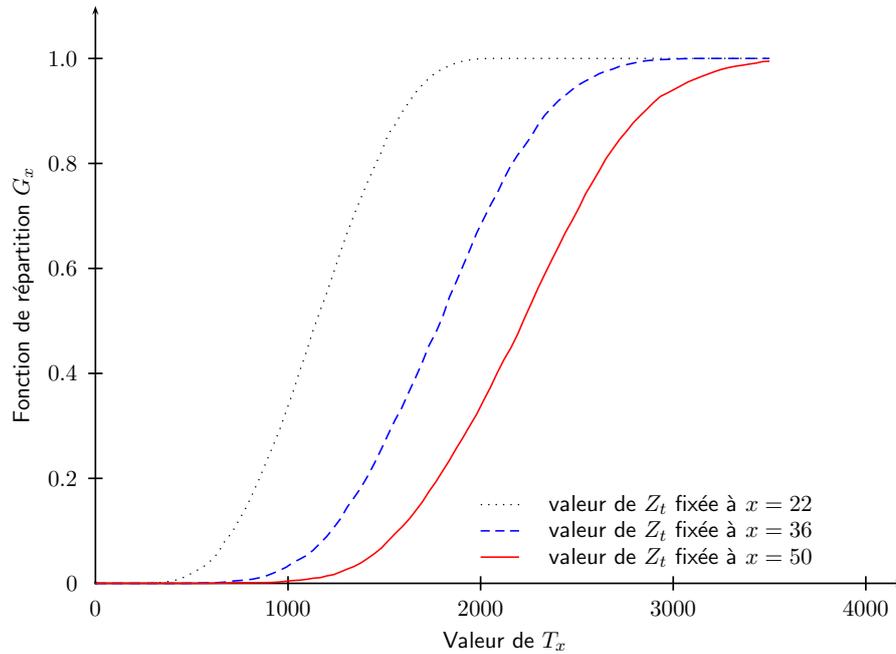


Fig. 2.9 – Estimation des fonctions de répartition de T_x

un exemple de simulation numérique ainsi que l'estimation des fonctions caractéristiques du processus solution à partir de trajectoires simulées.

Nous concluons ce chapitre en soulignant le fait suivant : bien que la caractérisation probabiliste des processus de Markov déterministes par morceaux soit très bonne, il est difficile en pratique d'exploiter numériquement la forme explicite du générateur infinitésimal. En particulier, la fiabilité du système décrivant la dégradation peut être exprimée en fonction du générateur, mais le calcul pratique de (2.20) semble être une tâche difficile, car il requiert une discrétisation complexe. On peut consulter Lapeyre et Pardoux (1998), Ycart (2002) pour des méthodes de discrétisation de générateurs infinitésimaux dans le cas de processus de diffusion.

FONCTION DE TRANSITION ET FIABILITÉ DU SYSTÈME

SOMMAIRE

3.1	SYSTÈME DYNAMIQUE ET RENOUVELLEMENT MARKOVIENT	51
3.1.1	Éléments de la théorie du renouvellement markovien . . .	51
3.1.2	Noyau semi-markovien du PMDM	54
3.1.3	Fonction de transition du processus couple	57
3.2	FIABILITÉ DU SYSTÈME DYNAMIQUE	58
3.2.1	Calcul pratique du noyau	59
3.2.2	Fonction de fiabilité et loi du temps de défaillance	62
3.3	ILLUSTRATION NUMÉRIQUE	64
3.3.1	Implémentation pratique	64
3.3.2	Applications	66
	CONCLUSION	72

MALGRÉ la forme explicite du générateur infinitésimal du processus couple (Z_t, X_t) , nous pouvons difficilement utiliser ce résultat pour le calcul de la fiabilité. L'autre fonction caractéristique du processus couple qui permettrait d'exprimer facilement la fiabilité via l'expression (2.19) est la fonction de transition. L'apport principal de ce chapitre est de proposer une méthode de calcul qui permette de déterminer une forme explicite de la fonction de transition des PMDM définis par le système (2.5) et de développer un algorithme de calcul pratique.

Nous y parvenons en interprétant le processus de Markov (Z_t, X_t) comme un cas particulier de processus semi-markovien, à valeurs dans un espace non dénombrable. Les processus semi-markoviens sont définis à l'aide de la théorie du renouvellement markovien, que nous exploitons afin de construire une équation vérifiée par la fonction de transition de (Z_t, X_t) . Cette équation est appelée « équation de renouvellement markovien » associée à la fonction de transition : il s'agit d'une forme intégrale des équations de Kolmogorov adaptée au cadre semi-markovien. Au moyen des outils de la théorie du renouvellement markovien, nous résolvons cette équation, obtenant ainsi une forme explicite de la fonction de

transition du PMDM. Un résultat préliminaire important est la détermination du noyau semi-markovien associé. Nous utilisons ensuite ces résultats afin de déterminer la fiabilité théorique et la fonction de répartition du temps de défaillance d'une structure dont le processus de dégradation est modélisé par Z_t . Nous proposons alors une application numérique pour un système donné qui permet de valider les résultats théoriques du chapitre. Nous insistons sur l'implémentation numérique associée, qui se révèle assez complexe étant donné que nous travaillons sur un processus dont l'espace d'état est composé d'une partie continue (le processus Z_t) et d'une partie discrète (le processus X_t).

Nos références bibliographiques sont les références standard du renouvellement markovien et des processus semi-markoviens, qui sont une généralisation des processus de Markov : la loi du temps de séjour dans les états peut être de n'importe quelle nature, c'est-à-dire pas seulement exponentielle comme dans le cas des processus de Markov. Les processus semi-markoviens ont été introduits simultanément par Lévy (1954), Smith (1955) et par Takacs (1954). La théorie du renouvellement markovien sur les espaces d'état finis et dénombrables doit beaucoup à Pyke (1961a;b) et à Pyke et ses coauteurs, Pyke et Schaufele (1964) et Moore et Pyke (1968). La résolution des équations de renouvellement markovien sur un espace d'état dénombrable est due à Çinlar (1969a), qui a également contribué à la formalisation des processus semi-markoviens à espace d'état non dénombrable (voir Çinlar 1969b). Limnios et Oprisan (2001) ont étudié les processus semi-markoviens à espace d'état arbitraire, avec application à la fiabilité.

Pour les applications numériques nous avons également consulté Bousfiha et al. (1996) qui détaillent les schémas de calcul pour la fiabilité des processus de renouvellement markovien dans un espace d'état fini. Nous les généralisons et les adaptons pour traiter le cas d'un espace non dénombrable.

3.1 SYSTÈME DYNAMIQUE ET RENOUVELLEMENT MARKOVIAN

Nous introduisons dans cette section les éléments qui permettent d'interpréter le processus de Markov déterministe par morceaux (Z_t, X_t) comme un processus de renouvellement markovien *étendu*. Rappelons le système différentiel définissant le PMDM :

$$\frac{dZ_t}{dt} = C(Z_t, X_t), \quad Z_0 = z. \quad (3.1)$$

Les notions nécessaires à cette interprétation concernent les processus de renouvellement markovien et les processus semi-markoviens à espace d'état non dénombrable. Seules les notions utiles dans le cadre des systèmes dynamiques stochastiques sont présentées ici.

Dans la deuxième partie de cette section, nous étudions le noyau semi-markovien associé au couple (Z_t, X_t) , qui gouverne son évolution. Le noyau semi-markovien est d'importance car il permet de caractériser complètement un processus semi-markovien lorsque l'on y associe une loi initiale. Nous construisons ensuite une équation de renouvellement markovien associée à la fonction de transition de (Z_t, X_t) . Nous résolvons cette équation afin d'obtenir la fonction de transition, ce qui constitue un résultat important pour la caractérisation probabiliste du système dynamique. Nous utilisons ensuite ces résultats dans la deuxième section de ce chapitre, afin de calculer des quantités d'intérêts dépendant de la fonction de transition.

3.1.1 Éléments de la théorie du renouvellement markovien

Les processus semi-markoviens sont une généralisation naturelle des processus de Markov : on relâche la contrainte sur la distribution exponentielle des temps de séjour dans les états. À un processus semi-markovien, on associe un processus de renouvellement markovien qui est constitué de deux composantes décrivant les états successivement visités et les instants de changement d'état du processus.

Un processus de renouvellement markovien se définit par rapport à son noyau semi-markovien (voir Pyke (1961a;b) pour le cas dénombrable et Limnios et Oprışan (2001) pour le cas général). Celui-ci est une fonction qui définit les lois de probabilité associées aux changements d'états et aux temps de séjour dans les états.

Définition 3.1 Soit $(J_n, S_n, n \in \mathbb{N})$ un processus aléatoire à valeurs dans $E \times \mathbb{R}_+$, homogène par rapport au temps, avec \mathcal{E} la tribu associée à l'espace E . Le processus (J_n, S_n) vérifie, pour tout $x \in E, B \in \mathcal{E}, t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbb{P}(J_{n+1} \in B, S_{n+1} - S_n \leq t | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(J_{n+1} \in B, S_{n+1} - S_n \leq t | J_n), \quad p.s,$$

où \mathcal{F}_n est la tribu d'événements engendrée par $(J_m, S_m, 0 \leq m \leq n)$.

Le noyau semi-markovien $Q : (x, B, t) \rightarrow Q(x, B, t)$ associé est défini par

$$Q(x, B, t) = \mathbb{P}(J_{n+1} \in B, S_{n+1} - S_n \leq t | J_n = x).$$

On appelle (J_n, S_n) le processus de renouvellement markovien engendré par le noyau semi-markovien Q .

Nous nous limitons à l'étude des processus de renouvellement markovien homogènes par rapport au temps n . En supposant que $S_0 = 0$, nous avons donc pour le noyau

$$Q(x, B, t) = \mathbb{P}_x(J_1 \in B, S_1 \leq t),$$

où $\mathbb{P}_x(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | J_0 = x)$. Le noyau semi-markovien représente ainsi la probabilité de transition d'état et du temps de séjour dans l'état conditionnellement à cet état.

L'espace d'état $E \times \mathbb{R}_+$ du processus de renouvellement markovien (J_n, S_n) est muni de la tribu $\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}_+$, où \mathcal{B}_+ est la tribu des boréliens de \mathbb{R}_+ . L'espace du processus (J_n, S_n) est composé d'une part de l'espace des états pris par la suite aléatoire J_n et d'autre part de l'axe des réels positifs associé aux instants de changement d'état de la suite S_n . On peut voir facilement (par exemple dans Limnios et Oprisan 2001) que le processus $(J_n, n \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov. Le processus semi-markovien associé à $(J_n, S_n, n \in \mathbb{N})$ est défini comme suit.

Définition 3.2 Le processus $(Y_t, t \in \mathbb{R}_+)$ lié au processus $(J_n, S_n, n \in \mathbb{N})$ par la relation

$$Y_t = J_n, \quad \text{pour } S_n \leq t < S_{n+1}, \quad t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N},$$

est appelé processus semi-markovien de noyau Q .

Le processus Y_t décrit donc l'état du système à l'instant t .

Exemple 3.1 Soit le processus markovien de saut X_t , composante de saut du processus de Markov déterministe par morceaux défini au chapitre précédent. On peut associer au processus X_t , de générateur $(a_{ij})_{i,j \in E}$ et d'espace d'état E fini, le processus de renouvellement markovien (J_n, S_n) où J_n est la chaîne de Markov immergée de X_t ; les temps de séjour dans les états $W_n = S_{n+1} - S_n$ sont exponentiels.

Ainsi, le processus X_t est un cas particulier de processus semi-markovien dont le noyau vérifie, pour $i \neq j$,

$$Q_{ij}(t) = \frac{a_{ij}}{a_i} (1 - e^{-a_i t}),$$

où $Q_{ij}(t) = Q(i, \{j\}, t)$. La probabilité de changement d'état a_{ij}/a_i et la fonction de répartition du temps de séjour $(1 - e^{-a_i t})$ apparaissent explicitement.

Notons également $N(t)$ le nombre de sauts observés jusqu'à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ d'un processus semi-markovien, c'est-à-dire

$$N(t) = \sup \{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\}. \quad (3.2)$$

Nous considérons uniquement dans la suite les processus semi-markoviens réguliers, c'est-à-dire vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{P}(N(t) < \infty | J_0 = x) = 1, \quad x \in E. \quad (3.3)$$

Le nombre de sauts observés sur $[0, t], t \in \mathbb{R}_+$ est donc fini.

Nous donnons maintenant les notations et les propriétés du produit de convolution qui est une opération privilégiée pour la manipulation des fonctions du noyau semi-markovien. Notons « $*$ » le produit de

convolution défini au sens de Stieltjes entre un noyau Q et une fonction $\phi : (x, B, t) \rightarrow \phi(x, B, t)$, avec $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in E$ et $B \in \mathcal{E}$.

Pour x, B, t fixés, nous avons

$$(Q * \phi)(x, B, t) := \int_E \int_0^t Q(x, dy, ds) \phi(y, B, t - s). \quad (3.4)$$

De la même manière, les puissances n^{es} du noyau au sens de la convolution sont définies, pour $t \in \mathbb{R}_+$, par

$$Q^{(0)}(x, B, t) := \mathbb{1}_B(x), \quad Q(x, B, t)^{(1)} := Q(x, B, t), \quad (3.5)$$

et, pour $n \geq 2$ avec $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} Q^{(n)}(x, B, t) &:= \left(Q * Q^{(n-1)} \right) (x, B, t) \\ &= \int_E \int_0^t Q(x, dy, ds) Q^{(n-1)}(y, B, t - s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pour $n \geq 1$, nous avons

$$Q^{(n)}(x, B, t) = \mathbb{P}_x(J_n \in B, S_n \leq t), \quad (3.7)$$

ainsi la puissance n^{e} de convolution du noyau détermine la loi de transition après n sauts du processus. Notons également que $Q^{(0)}$ est l'élément neutre de l'opération de convolution. En effet on montre facilement que

$$\left(Q^{(0)} * \phi \right) (x, B, t) = \left(\phi * Q^{(0)} \right) (x, B, t) = \phi(x, B, t). \quad (3.8)$$

La plupart des fonctions d'intérêt des processus semi-markoviens sont solutions d'un type d'équations appelées *équations de renouvellement markovien* dont la forme générale est donnée dans la définition suivante.

Définition 3.3 Soit Q un noyau semi-markovien, g une fonction connue et ϕ une fonction inconnue. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in E$ et $B \in \mathcal{E}$, une équation linéaire intégrale de la forme

$$\begin{aligned} \phi(x, B, t) &= g(x, B, t) + (Q * \phi)(x, B, t) \\ &= g(x, B, t) + \int_E \int_0^t Q(x, dy, ds) \phi(y, B, t - s), \end{aligned} \quad (3.9)$$

est appelée équation de renouvellement markovien.

Nous définissons également la *fonction de renouvellement markovien* ψ qui joue un rôle majeur dans la théorie du renouvellement markovien puisqu'elle permet de donner une solution explicite à toute équation de renouvellement markovien de la forme (3.9). On la définit pour tout $x \in E, B \in \mathcal{E}, t \in \mathbb{R}_+$ comme la somme infinie des puissances de convolution du noyau Q , c'est-à-dire

$$\psi(x, B, t) = \sum_{n \geq 0} Q^{(n)}(x, B, t). \quad (3.10)$$

Lorsque $\psi(x, B, t) < \infty$ pour tout $x \in E, B \in \mathcal{B}, t \in \mathbb{R}_+$, le processus associé est appelé *processus normal*. Par la suite, nous considérons uniquement ce type de processus.

D'après (3.7), la fonction de renouvellement markovien vérifie donc

$$\psi(x, B, t) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(J_n \in B, S_n \leq t) = \mathbb{E}_x \left[\sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{J_n \in B, S_n \leq t\}} \right]. \quad (3.11)$$

Une valeur de la fonction ψ correspond donc à l'espérance du nombre de visites du processus semi-markovien dans un sous-ensemble B pour un temps de saut donné, conditionnellement à sa position initiale x . Ainsi, lorsqu'un processus est normal, il est également régulier.

Il est facile de déterminer une équation de renouvellement markovien vérifiée par ψ . Par la définition (3.10) et en utilisant les puissances de convolution de Q données par (3.5) et (3.6), nous avons

$$\begin{aligned} \psi &= Q^{(0)} + Q^{(1)} + \dots + Q^{(n)} + \dots \\ &= Q^{(0)} + Q * Q^{(0)} + \dots + Q * Q^{(n-1)} + \dots, \end{aligned}$$

ce qui mène à l'équation de renouvellement markovien

$$\psi(x, B, t) = \mathbb{1}_B(x) + (Q * \psi)(x, B, t), \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

Nous pouvons écrire ce résultat sous la forme

$$((I - Q) * \psi)(x, B, t) = I(x, B, t), \quad (3.13)$$

où I est l'élément neutre pour la convolution, égal à $Q^{(0)}$. Ainsi, l'inverse au sens de la convolution de $(I - Q)$ est égale à la fonction ψ :

$$\psi(x, B, t) = \sum_{n \geq 0} Q^{(n)}(x, B, t) = (I - Q)^{(-1)}(x, B, t). \quad (3.14)$$

La quantité $(I - Q)^{(-1)}$ a un sens dans le cadre d'un processus normal puisque dans ce cas la série $\sum Q^{(n)}$ est finie.

Utilisant (3.14) dans (3.9), nous pouvons établir le théorème suivant, donnant la forme générale des solutions des équations de renouvellement markovien (voir par exemple Limnios et Oprüsan 2001, Koroliuk et Limnios 2005, pour une justification détaillée).

Théorème 3.1 *Soit $g : (x, B, t) \rightarrow g(x, B, t)$ une fonction nulle pour tout $t < 0$ et positive ou nulle pour $t \geq 0$, où x et B sont fixés. L'équation de renouvellement markovien (3.9) admet une solution ϕ si et seulement si le produit de convolution $Q * g$ est positif ou nul pour $t \geq 0$, et nul pour $t < 0$. Lorsqu'elle existe la solution unique est donnée par*

$$\begin{aligned} \phi(x, B, t) &= (\psi * g)(x, B, t) \\ &= \int_E \int_0^t \psi(x, dy, ds) g(y, B, t - s). \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.1.2 Noyau semi-markovien du PMDM

Nous proposons de recourir à la théorie du renouvellement markovien dans le cadre des systèmes dynamiques de la forme (3.1) avec X_t un processus markovien de saut d'espace d'état dénombrable E et Z_t un processus aléatoire dans \mathbb{R}^d . Les hypothèses 2.1 nécessaires à la construction du processus (Z_t, X_t) sont retenues. Soulignons qu'elles sont les seules hypothèses requises sur la fonction C pour la construction du noyau semi-markovien associé à (Z_t, X_t) .

Nous avons vu (voir la propriété 2.2) que le couple (Z_t, X_t) est un processus de Markov. C'est donc un cas particulier de processus semi-markovien dont les états successivement visités sont à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^d \times E$. Nous voulons maintenant écrire le processus de renouvellement markovien associé au couple (Z_t, X_t) . À cet effet, rappelons que la suite $(J_n, n \in \mathbb{N})$ est la chaîne de Markov immergée associée à X_t , où $(S_n, n \in \mathbb{N})$ est le processus décrivant les instants de saut. Nous posons également $(\zeta_n, n \in \mathbb{N})$ la suite aléatoire telle que ζ_n prenne les valeurs de Z_t aux instants de saut $(S_n, n \in \mathbb{N})$, c'est-à-dire que

$$\zeta_n = Z_{S_n}, \quad J_n = X_{S_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les caractères markoviens respectifs des processus (Z_t, X_t) et X_t permettent d'écrire que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\zeta_{n+1} \in B, J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | \tilde{\mathcal{F}}_n) \\ = \mathbb{P}(\zeta_{n+1} \in B, J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | \zeta_n, J_n), \quad p.s., \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{F}}_n$ est la tribu d'événements engendrée par $(\zeta_m, J_m, S_m, 0 \leq m \leq n)$. Le processus aléatoire $(\zeta_n, J_n, S_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^d \times E \times \mathbb{R}_+)$ est donc, d'après la définition 3.1, un processus de renouvellement markovien. Dans ce cas, la chaîne décrivant les états successifs du processus de renouvellement markovien (ζ_n, J_n, S_n) est constituée par les deux composantes (ζ_n, J_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times E$. La chaîne décrivant les instants de saut est S_n , à valeurs dans \mathbb{R}_+ .

Remarque 3.1 *Comme nous l'avons vu à l'exemple 3.1, le processus X_t est un processus semi-markovien où (J_n, S_n) est le processus de renouvellement markovien associé. Afin de ne pas confondre le processus de renouvellement markovien (J_n, S_n) associé à X_t avec le processus de renouvellement markovien (ζ_n, J_n, S_n) associé au couple (Z_t, X_t) , on parlera pour (ζ_n, J_n, S_n) de processus de renouvellement markovien étendu. Cette terminologie vient du fait que (ζ_n, J_n, S_n) est un processus de renouvellement markovien particulier, à trois composantes.*

Nous introduisons maintenant les fonctions et notations associées à (ζ_n, J_n, S_n) , en particulier son noyau semi-markovien. Celui-ci est défini, pour $z \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}^d, t \geq 0$ et $i, j \in E$, par

$$Q((z, i), (B, j), t) := \mathbb{P}(\zeta_{n+1} \in B, J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | \zeta_n = z, J_n = i), \quad (3.16)$$

où $\mathbb{P}_{z,i}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | \zeta_0 = z, J_0 = i)^1$.

Dans l'expression (3.16) du noyau semi-markovien associé à (ζ_n, J_n, S_n) , nous avons fait apparaître explicitement la transition depuis l'état (z, i) vers les états (B, j) de la chaîne bidimensionnelle (ζ_n, J_n) , afin d'être homogène avec les notations utilisées dans la partie 3.1.1., introduisant la théorie du renouvellement markovien. Dans la suite, nous notons plutôt le noyau semi-markovien de (ζ_n, J_n, S_n) de la manière suivante :

$$Q_{ij}(z, B, t) := Q((z, i), (B, j), t). \quad (3.17)$$

Cette convention de notation est adoptée pour l'ensemble des fonctions définies sur cet espace.

Ainsi, sur l'espace $E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, le produit de convolution du noyau Q et d'une fonction $\phi : (i, j, z, B, t) \rightarrow \phi_{ij}(z, B, t)$ est défini, pour $t \in \mathbb{R}_+, z \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B}^d$ et $i, j \in E$,

$$(Q * \phi)_{ij}(z, B, t) := \sum_{k \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t Q_{ik}(z, dy, ds) \phi_{kj}(y, B, t - s).$$

Nous adaptons également les définitions (3.5) et (3.6) des puissances n^{es} de convolution à cet espace. De même, la fonction de renouvellement markovien est définie par

$$\psi_{ij}(z, B, t) = \sum_{n \geq 0} Q_{ij}^{(n)}(z, B, t).$$

Nous allons voir qu'il est possible de donner une expression explicite du noyau Q en fonction du générateur $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j \in E}$ du processus markovien de saut X_t .

Proposition 3.1 *Le noyau semi-markovien du processus de renouvellement markovien étendu $(\zeta_n, J_n, S_n, n \in \mathbb{N})$ vérifie, pour tout $i \neq j$,*

$$Q_{ij}(z, B, dt) = a_{ij} e^{-a_i t} \delta_{\varphi_{z,i}(t)}(B) dt, \quad (3.18)$$

où δ est la distribution de Dirac, c'est-à-dire

$$\delta_{\varphi_{z,i}(t)}(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_{z,i}(t) \in B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Par la définition (3.16) du noyau et par homogénéité par rapport au temps du processus de renouvellement markovien étendu, le noyau vérifie

$$Q_{ij}(z, B, dt) = \mathbb{P}_{z,i}(\zeta_1 \in B, J_1 = j, S_1 \in dt).$$

Puis, par conditionnement,

$$Q_{ij}(z, B, dt) = \mathbb{P}_{z,i}(J_1 = j, S_1 \in dt) \mathbb{P}_{z,i}(\zeta_1 \in B | J_1 = j, S_1 = t), \quad (3.19)$$

¹Notons que $\mathbb{P}(\cdot | X_0 = i) = \mathbb{P}(\cdot | J_0 = x)$ et $\mathbb{P}(\cdot | Z_0 = z, X_0 = i) = \mathbb{P}(\cdot | \zeta_0 = z, J_0 = x)$ ce qui explique que nous adoptions les mêmes notations pour ces probabilités conditionnelles.

or ζ_1 ne dépend pas de J_1 , d'où $\mathbb{P}_{z,i}(\zeta_1 \in B | J_1 = j, S_1 = t) = \mathbb{P}_{z,i}(\zeta_1 \in B | S_1 = t)$.

Concernant le processus markovien de saut X_t , le premier instant de saut S_1 et l'état J_1 sont indépendants, de lois de probabilité connues (voir la propriété 2.2). De plus les variables X_0 et Z_0 (c'est-à-dire ζ_0 et J_0) sont supposées indépendantes d'où, pour $i \neq j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{z,i}(J_1 = j, S_1 \in dt) &= \mathbb{P}_i(J_1 = j) \mathbb{P}_i(S_1 \in dt) \\ &= \frac{a_{ij}}{a_i} \frac{d}{dt} (1 - e^{-a_i t}) dt = a_{ij} e^{-a_i t} dt. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La condition $i \neq j$ vient du fait que pour tout $i \in E$, nous considérons les processus markoviens de saut tels que $\mathbb{P}_i(J_1 = i)$ soit nulle, c'est-à-dire qu'un saut implique nécessairement un changement d'état.

À l'instant $S_1 = t$, le processus $Z_t = \zeta_1$ a pour valeur $\varphi_{z,i}(t)$, conditionnellement à $(Z_0, X_0) = (z, i)$. Nous avons donc

$$\mathbb{P}_{z,i}(\zeta_1 \in B | S_1 = t) = \mathbb{P}(\varphi_{z,i}(t) \in B) \mathbb{1}_{\{i \neq j\}} = \delta_{\varphi_{z,i}(t)}(B) \mathbb{1}_{\{i \neq j\}}. \quad (3.21)$$

En effet, on observe nécessairement un saut de X_t , ce qui implique que i soit différent de j . La probabilité $\mathbb{P}_{z,i}(\zeta_1 \in B | S_1 = t)$ est nulle partout sauf précisément aux points du temps où le sous-ensemble B est atteint d'où la distribution de Dirac. En injectant (3.20) et (3.21) dans (3.19), nous retrouvons le résultat escompté. \square

Nous pouvons maintenant construire une équation de renouvellement markovien associée à la fonction de transition du processus (Z_t, X_t) . Nous nous y attachons dans la partie suivante.

3.1.3 Fonction de transition du processus couple

Lemme 3.1 *La fonction de transition P du processus de Markov (Z_t, X_t) est solution de l'équation de renouvellement markovien*

$$P_{ij}(z, B, t) = g_{ij}(z, B, t) + (Q * P)_{ij}(z, B, t), \quad (3.22)$$

où $Q_{ij}(z, B, t)$ est le noyau semi-markovien (3.18) et où

$$g_{ij}(z, B, t) = \mathbb{1}_{\{i=j\}} \mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(t)) e^{-a_i t}. \quad (3.23)$$

La solution de (3.22) est donnée par

$$P_{ij}(z, B, t) = (\psi * g)_{ij}(z, B, t). \quad (3.24)$$

Démonstration. Par le théorème des probabilités totales,

$$P_{ij}(z, B, t) = \underbrace{\mathbb{P}_{z,i}(Z_t \in B, X_t = j, S_1 > t)}_{P_1} + \underbrace{\mathbb{P}_{z,i}(Z_t \in B, X_t = j, S_1 \leq t)}_{P_2}.$$

Lorsque le premier saut n'a pas encore eu lieu, le processus Z_t a pour solution $Z_t = \varphi_{z,i}(t)$ pour $t \leq S_1$. De plus, la loi du temps de séjour de X_t est donnée par

$$\mathbb{P}_{z,i}(S_1 \leq t) = 1 - e^{-a(i)t},$$

d'où

$$P_1 = \mathbb{P}_{z,i}(S_1 > t) \mathbb{1}_{\{i=j, \varphi_{z,i}(t) \in B\}} = e^{-a^{(i)}t} \mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(t)) \mathbb{1}_{\{i=j\}}. \quad (3.25)$$

Pour le terme P_2 , nous faisons apparaître la variable $J_1 = X_{S_1}$ à l'aide du théorème des probabilités totales, en sommant sur tous les états de l'espace d'état E de X_t exception faite de i qui est l'état de départ. Nous intégrons également S_1 sur toutes les valeurs possibles, c'est-à-dire sur $[0, t]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_2 &= \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t \mathbb{P}_{z,i}(Z_t \in B, X_t = j, J_1 = k, S_1 \in ds) \\ &= \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_0^t \mathbb{P}_{z,i}(Z_t \in B, X_t = j | J_1 = k, S_1 = s) \mathbb{P}_{z,i}(J_1 = k, S_1 \in ds). \end{aligned}$$

Nous avons vu lors du calcul du noyau semi-markovien que $\mathbb{P}_{z,i}(J_1 = k, S_1 \in ds) = a_{ik} e^{-a_i s} ds$. Remarquons de plus que

$$\mathbb{P}_{z,i}(Z_t \in B, X_t = j | J_1 = k, S_1 = s) = P_{kj}(\varphi_{z,i}(s), B, t - s).$$

En effet, à l'instant s du premier saut S_1 , la valeur du couple (Z_t, X_t) est complètement déterminée et nous avons $(Z_s, X_s) = (\varphi_{z,i}(s), k)$. Partant de cet état, l'homogénéité du processus couple (Z_t, X_t) permet d'écrire sa position en terme de probabilité à l'instant $t - s$, à l'aide de la fonction de transition.

Le membre P_2 est donc complètement déterminé. Nous avons ainsi construit l'équation suivante :

$$P_{ij}(z, B, t) = e^{-a_i t} \mathbb{1}_{\{i=j\}} \mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(t)) + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} a_{ik} \int_0^t e^{-a^{(i)}s} P_{kj}(\varphi_{z,i}(s), B, t - s) ds,$$

ce qui peut s'écrire

$$P_{ij}(z, B, t) = g_{ij}(z, B, t) + \sum_{k \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t Q_{ik}(z, dy, ds) P_{kj}(y, B, t - s). \quad (3.26)$$

Cette équation correspond à l'expression (3.22).

Enfin, le théorème fondamental 3.1 indique que la solution est donnée par $P = \psi * g$. \square

Remarque 3.2 *Étant donné que le processus couple (Z_t, X_t) est markovien, l'équation du renouvellement associée à la fonction de transition correspond à une forme intégrale des équations de Kolmogorov. La théorie du renouvellement nous permet d'en donner une solution explicite.*

Disposer de la fonction de transition $P_{ij}(z, B, t)$ permet, par extension, d'exprimer un grand nombre de fonctions d'intérêt du système dynamique de manière explicite. Dans la section suivante, nous exploitons ce résultat dans un contexte d'étude de fiabilité.

3.2 FIABILITÉ DU SYSTÈME DYNAMIQUE

Rappel du contexte

Nous adoptons le cadre d'analyse de fiabilité décrit à la section 2.3 du chapitre deux. Aux hypothèses 2.1 nécessaires à la construction du système dynamique, nous ajoutons maintenant l'hypothèse 2.3, liée à la modélisation d'un niveau de dégradation dans une structure dont on souhaite déterminer la fiabilité. Ici, le processus Z_t prend ses valeurs dans \mathbb{R}_+ et croît depuis un état initial $z \in \mathbb{R}_+$. Le point $\Delta > z$ définit la frontière de défaillance. Nous traitons le cas où le processus part presque sûrement du point z , c'est-à-dire que $\beta(x) = \delta_z(x)$, où β est la loi initiale de Z_t . L'espace d'état E de X_t est fini. Les sous-ensembles $U = [z, \Delta[$ et $D = [\Delta, \infty[$ définissent les ensembles de bons et de mauvais états. Notons également $F = U \cup D$ l'espace d'état de Z_t tout entier.

Dans la première partie de cette section, nous étudions plus en détail la nature du noyau semi-markovien du processus de renouvellement markovien étendu (ζ_n, J_n, S_n) associé à (Z_t, X_t) : le noyau $Q_{ij}(z, B, t)$ peut être calculé dans les cas particuliers où $B := U$ et où $B := D$. Nous verrons alors dans une deuxième partie comment calculer la fiabilité et la loi du temps d'entrée dans D , ou temps de défaillance du système, c'est-à-dire

$$\tau = \inf \{t \geq 0 : (Z_t, X_t) \in D \times E\}. \quad (3.27)$$

3.2.1 Calcul pratique du noyau

Le noyau semi-markovien au point $Q_{ij}(z, B, t)$ du système peut s'obtenir par intégration directe de $Q_{ij}(z, B, dt)$.

Pour calculer cette intégrale, nous introduisons, $t_{z,i}(y)$ décrivant le temps pris par Z_t pour atteindre le réel $y > z$, en l'absence de saut de X_t , et avec comme conditions initiales $Z_0 = z$ et $X_0 = i$, c'est-à-dire

$$t_{z,i}(y) = \inf \{t \geq 0 : \varphi_{z,i}(t) \geq y\}, \quad y \in \mathbb{R}_+. \quad (3.28)$$

Puisque C est supposée positive, la fonction $\varphi_{z,i}(\cdot)$ est croissante pour t variant sur \mathbb{R}_+ . Lorsque C est *strictement* croissante, nous avons $t_{z,i}(y) < \infty$ pour tout y tel que $z \leq y \leq \Delta$, c'est-à-dire que l'on atteint le point y en un temps fini. La fonction $t_{z,i}(\cdot)$ est déterministe, car nous n'observons pas de saut de X_t . Elle est l'inverse généralisée de la fonction $\varphi_{z,i}(\cdot)$.

Par application de la proposition 3.1, pour tout B de \mathcal{B}_+ , alors

$$Q_{ij}(z, B, t) = \int_0^t Q_{ij}(z, B, dt) = a_{ij} \int_0^t e^{-a_i s} \mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(s)) ds. \quad (3.29)$$

Nous proposons de calculer le noyau au point t pour certaines valeurs du borélien B , c'est-à-dire pour les sous-ensembles de bons et mauvais états U et D .

Pour $B := U$, l'indicatrice $\mathbb{1}_U(\varphi_{z,i}(t))$ est nulle dès que la fonction φ sort de l'ensemble des bons états, c'est-à-dire dès que $\varphi_{z,i}(t)$ atteint le

point Δ . Cela correspond à l'instant $t_{z,i}(\Delta)$, d'où, pour $i \neq j$, la valeur suivante du noyau, pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} Q_{ij}(z, U, t) &= a_{ij} \int_0^t e^{-a_i s} \mathbb{1}_U(\varphi_{z,i}(s)) ds \\ &= a_{ij} \int_0^{\min(t_{z,i}(\Delta), t)} e^{-a_i s} ds = p_{ij} \left(1 - e^{-a_i \min(t_{z,i}(\Delta), t)} \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

où $(p_{ij})_{i,j \in E}$ est la matrice de transition de X_t , telle que $p_{ij} = a_{ij}/a_i$ pour $i \neq j$, 0 sinon.

Pour $B := D$, l'indicatrice $\mathbb{1}_D(\varphi_{z,i}(t))$ est nulle tant que $\varphi_{z,i}(t)$ n'a pas atteint l'ensemble des mauvais états, c'est-à-dire tant que $\varphi_{z,i}(t) < \Delta$, d'où

$$\begin{aligned} Q_{ij}(z, D, t) &= a_{ij} \int_0^t e^{-a_i s} \mathbb{1}_D(\varphi_{z,i}(s)) ds \\ &= a_{ij} \int_{t_{z,i}(\Delta)}^t e^{-a_i s} ds = p_{ij} \left(e^{-a_i t_{z,i}(\Delta)} - e^{-a_i t} \right) \mathbb{1}_{\{t > t_{z,i}(\Delta)\}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Une représentation schématique des résultats (3.30) et (3.31) est proposée sur la figure 3.1. Nous y représentons l'évolution de $\varphi_{z,i}(t)$, c'est-à-dire de Z_t , en l'absence de saut de X_t et conditionnellement au point de départ (z, i) du couple. Nous représentons également l'évolution comportementale du noyau pour $B = U$, $B = D$, avec i, j et z fixés et pour t variant dans \mathbb{R}_+ .

Sur l'espace $E \times F \times \mathbb{R}_+$, le produit de convolution devient

$$(Q * \phi)_{ij}(z, B, t) := \sum_{k \in E} \int_F \int_0^t Q_{ik}(z, dy, ds) \phi_{kj}(y, B, t - s),$$

où $F = U \cup D$, l'espace d'état de Z_t . Pour les puissances de convolution du noyau, nous avons, pour $n = 0, 1$:

$$Q_{ij}^{(0)}(z, B, t) = \mathbb{1}_{\{i=j\}} \mathbb{1}_B(z), \quad Q_{ij}^{(1)}(z, B, t) = Q_{ij}(z, B, t), \quad t \geq 0.$$

Au rang $n \geq 2$, il vient

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(n)}(z, B, t) &= \sum_{k \in E} \int_F \int_0^t Q_{ik}(z, dy, ds) Q_{kj}^{(n-1)}(y, B, t - s) \\ &= \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} \int_F \int_0^t a_{ik} e^{-a_i s} Q_{kj}^{(n-1)}(y, B, t - s) \delta_{\varphi_{z,i}(s)}(dy) ds \\ &= \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} a_{ik} \int_0^t e^{-a_i s} Q_{kj}^{(n-1)}(\varphi_{z,i}(s), B, t - s) ds. \end{aligned} \quad (3.32)$$

La distribution de Dirac dans la forme différentielle du noyau permet d'éliminer une intégrale dans le produit de convolution, ce qui est précieux lors de l'implémentation numérique.

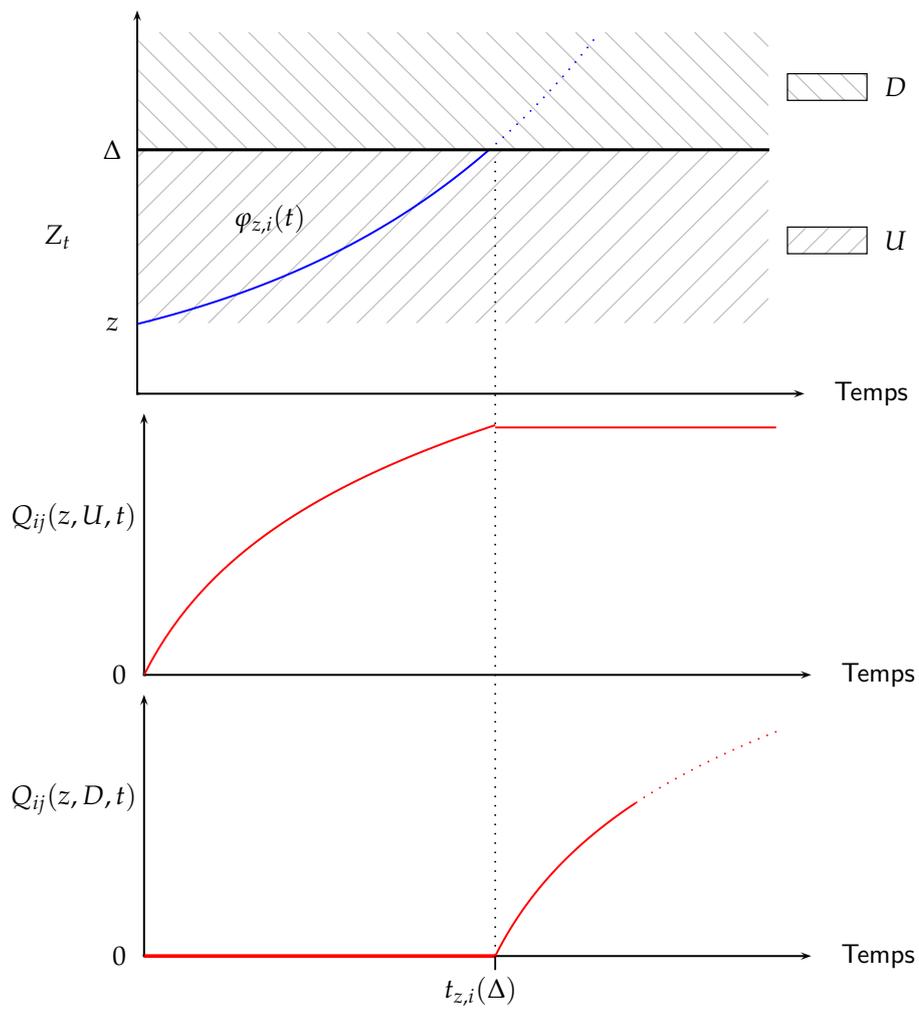


Fig. 3.1 – Représentation schématique du noyau

Analytiquement, il est difficile d'utiliser l'expression (3.32) pour obtenir une expression des puissances de convolution du noyau à n'importe quel rang n et pour n'importe quel borélien B de F . En revanche, nous pouvons obtenir une forme explicite de la puissance $n = 2$ pour les boréliens U et D , en utilisant les résultats (3.30) et (3.31) dans (3.32). D'une part,

$$Q_{ij}^{(2)}(z, U, t) = \sum_{k \in E} a_{ik} p_{kj} \int_0^t e^{-a_i s} \left(1 - \exp \left\{ -a_k \min(t_{\varphi_{z,i}(s),k}(\Delta), t - s) \right\} \right) ds. \quad (3.33)$$

D'autre part,

$$Q_{ij}^{(2)}(z, D, t) = \sum_{k \in E} a_{ik} p_{kj} \int_0^t e^{-a_i s} \left(e^{-a_k t_{\varphi_{z,i}(s),k}(\Delta)} - e^{-a_k t} \right) ds. \quad (3.34)$$

L'ensemble des paramètres des intégrales (3.33) et (3.34) est connu. Les puissances n^{es} du noyau sont donc obtenues récursivement via la formule (3.32) et, au-delà de $n \geq 3$, les $Q^{(n)}$ sont calculées uniquement numériquement.

La notion de récursivité apparaît également dans les expressions (3.33) et (3.34) par $t_{\varphi_{z,i}(s),k}(\Delta)$: elle représente désormais le temps pour que le processus Z_t atteigne le point Δ , partant du point $\varphi_{z,i}(s)$ et pour X_t dans k . Le point de départ n'est plus la valeur en z mais en $\varphi_{z,i}(s)$, c'est-à-dire après l'évolution d'une durée s du processus Z_t depuis son instant initial. Dans les convolutions successives du noyau, nous prenons donc pour point de départ la valeur d'arrivée $\varphi_{z,i}(s)$ de l'ordre précédent. La difficulté pour obtenir des expressions analytiques tient au fait que $\varphi_{z,i}(s)$ elle-même dépend du temps s , variable sur laquelle se fait l'intégration.

3.2.2 Fonction de fiabilité et loi du temps de défaillance

Disposer des puissances de convolution du noyau calculées pour les sous-ensembles U et D se révèle suffisant pour obtenir des résultats de fiabilité. À partir des $Q^{(n)}$, la fonction de renouvellement markovien est donnée par

$$\psi_{ij}(z, B, t) = \sum_{n \geq 0} Q_{ij}^{(n)}(z, B, t), \quad (3.35)$$

donc en particulier pour $B := U$ et $B := D$.

Par le lemme 3.1, la fonction de transition P s'obtient par convolution de ψ et de la fonction g définie par (3.23). Cette convolution se simplifie légèrement :

$$\begin{aligned} P_{ij}(z, B, t) &= (\psi * g)_{ij}(z, B, t) \\ &= \int_F \int_0^t \psi_{ij}(z, dy, ds) \mathbb{1}_B(\varphi_{y,j}(t - s)) e^{-a_j(t-s)} \\ &= (\psi_{ij} * g_{jj})(z, B, t). \end{aligned} \quad (3.36)$$

En effet, la somme sur la partie discrète E de l'espace d'état se simplifie par l'indicatrice $\mathbb{1}_{\{k=j\}}$ issue de la fonction g .

Nous pouvons encore préciser un peu plus le calcul lorsque que P est calculée au point $B := U$. En effet, l'indicatrice $\mathbb{1}_U(\varphi_{y,k}(t))$ est nulle dès que $y \notin U$: la fonction $\varphi_{y,k}(\cdot)$ étant croissante pour tout $y \in F, i \in E$, il n'est pas possible que la fonction $\varphi_{y,k}(\cdot)$ puisse revenir dans $U = [z, \Delta[$ si elle part à l'instant initial d'un point de $D = [\Delta, \infty[$. Dans ce cas, nous pouvons restreindre l'intégration de la variable y uniquement à l'ensemble U , et

$$\begin{aligned} P_{ij}(z, U, t) &= (\psi_{ij} * g_{jj})(z, U, t) \\ &= \int_U \int_0^t \psi_{ij}(z, dy, ds) \mathbb{1}_U(\varphi_{y,i}(t-s)) e^{-a_i(t-s)}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

mais nous ne pouvons retirer complètement l'indicatrice. Une intégration numérique permet d'approcher la valeur de cette intégrale.

La fonction de transition permet alors d'obtenir, entre autres, des résultats de type fiabilité, que nous regroupons dans le théorème suivant. Nous donnons la fonction de fiabilité et la fonction de répartition du temps de défaillance, qui s'obtiennent directement. Quelques calculs sont requis pour la densité de probabilité du temps de défaillance, déduite par dérivation de la fonction de répartition. Ce théorème est valide sous les hypothèses 2.1 et 2.3.

Théorème 3.2 Soient R la fonction de fiabilité, F_τ et f_τ la fonction de répartition et la densité de probabilité du temps de défaillance τ défini par (3.27). Alors

$$R(t) = \sum_{i,j \in E} \alpha(i) (\psi * g)_{ij}(z, U, t), \quad (3.38)$$

$$F_\tau(t) = \sum_{i,j \in E} \alpha(i) (\psi * g)_{ij}(z, D, t), \quad (3.39)$$

$$f_\tau(t) = - \sum_{i,j \in E} \alpha(i) \left(\frac{d\psi_{jj}}{dt} + \psi_{ij} * h_{jj} \right) (z, U, t), \quad (3.40)$$

où g est donnée par (3.23) et

$$h_{ij}(z, B, t) = \mathbb{1}_{\{i=j\}} e^{-a_i t} (C(\varphi_{z,i}(t), i) - a_i) \mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(t)). \quad (3.41)$$

Démonstration. Pour la fiabilité, il suffit de remplacer l'expression de la fonction de transition $\psi * g$ dans l'expression (2.21), en prenant δ_z pour distribution initiale de Z_t .

De la même manière, la fonction de répartition s'obtient directement à l'aide de la définition de τ . Par conditionnement sur la loi initiale,

$$F_\tau(t) = \mathbb{P}((Z_t, X_t) \in D \times E) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}_{z,i}(Z_t \in D, X_t \in E) \mathbb{P}(X_0 = i, Z_0 = z).$$

Or nous avons supposé que $\mathbb{P}(Z_0 = z) = 1$. La loi initiale de X_0 est α , et comme X_0 et Z_0 sont indépendantes, alors

$$F_\tau(t) = \sum_{i,j \in E} \alpha(i) P_{ij}(z, D, t),$$

et nous remplaçons la fonction de transition par le résultat du lemme 3.1. Notons également que la fonction de répartition de τ vérifie

$$F_\tau(t) = 1 - R(t) = 1 - \sum_{i,j \in E} \alpha(i) P_{ij}(z, U, t).$$

La densité f_τ s'obtient par dérivation. Nous dérivons la fonction de répartition et nous obtenons

$$f_\tau(t) = \frac{d}{dt} F_\tau(t) = - \sum_{i,j \in E} \alpha(i) \frac{d}{dt} P_{ij}(z, U, t). \quad (3.42)$$

Le calcul de la dérivée de $P_{ij}(z, U, t)$ par rapport au temps donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{ij}(z, U, t) &= \frac{d}{dt} (\psi_{ij} * g_{jj})_{ij}(z, U, t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_U \int_0^t \psi_{ij}(z, dy, ds) g_{jj}(y, U, t-s) \\ &= \int_U \frac{d}{dt} \psi_{ij}(z, dy, t) g_{jj}(y, U, 0) + \int_U \int_0^t \psi_{ij}(z, dy, ds) \frac{d}{dt} g_{jj}(y, U, t-s). \end{aligned}$$

Nous avons $g_{jj}(y, U, 0) = \mathbb{1}_B(\varphi_{y,j}(0))e^{-a_k 0}$. Or $\varphi_{y,j}(0) = y$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{ij}(z, U, t) &= \int_U \frac{d}{dt} \psi_{ij}(z, dy, t) \mathbb{1}_B(y) + \left(\psi_{ij} * \frac{d}{dt} g_{jj} \right) (z, U, t) \\ &= \frac{d}{dt} \psi_{ij}(z, U, t) + (\psi_{ij} * h_{jj})(z, U, t), \end{aligned} \quad (3.43)$$

où h est la dérivée de g par rapport à t . La fonction h s'obtient par le calcul suivant :

$$h_{ij}(z, B, t) = \frac{d}{dt} g_{ij}(z, B, t) = \mathbb{1}_{\{i=j\}} e^{-a_i t} \left(\frac{d}{dt} \mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(t)) - a_i \mathbb{1}_D(\varphi_{z,i}(t)) \right).$$

La dérivée de $\mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(t))$ est possible au sens des distributions pourvu que $\varphi_{z,i}(t)$ soit C^1 -difféomorphe. Par définition de $\varphi_{z,i}(t)$, $d\varphi_{z,i}(t)/dt = C(\varphi_{z,i}(t), i)$. Ainsi $\varphi_{z,i}(t)$ est un C^1 -difféomorphisme lorsque la fonction C dans le système dynamique (3.1) est strictement positive, soit une hypothèse un peu plus forte que les hypothèses 2.1. Puis par dérivation composée, au sens des distributions,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(t)) = \delta_{\varphi_{z,i}(t)}(B) \frac{d}{dt} \varphi_{z,i}(t) = \delta_{\varphi_{z,i}(t)}(B) C(\varphi_{z,i}(t), i).$$

Finalement,

$$h_{ij}(z, B, t) = \mathbb{1}_{\{i=j\}} e^{-a_i t} (C(\varphi_{z,i}(t), i) - a_i) \mathbb{1}_B(\varphi_{z,i}(t)),$$

où la distribution de Dirac et l'indicatrice ont été regroupées en une seule indicatrice.

Nous prenons cette fonction pour $B := U$ afin d'obtenir la valeur de la dérivée (3.43) de la fonction de transition, requise dans l'expression (3.42) de la densité f_τ . \square

3.3 ILLUSTRATION NUMÉRIQUE

Cette section illustre les résultats théoriques de ce chapitre. Une première partie détaille l'implémentation sur machine, qui demande une attention particulière. Nous appliquons ensuite ces schémas numériques au calcul de la fiabilité d'un système donné.

3.3.1 Implémentation pratique

Bien que des expressions explicites de la fonction de transition et de la fiabilité aient été obtenues, leur calcul pratique n'est pas évident car nous travaillons sur l'espace $E \times \mathbb{R}_+$ des valeurs de (Z_t, X_t) , composé d'une partie discrète et d'une partie continue, auxquelles s'ajoute la dimension temporelle \mathbb{R}_+ . Le passage au numérique impose une discrétisation des variables continues qui doit se faire minutieusement.

Nous nous concentrons sur le calcul numérique de la fiabilité (3.38) donnée au théorème 3.2. Cette opération requiert successivement :

1. le noyau semi-markovien Q ,
2. les puissances n^{es} de convolution du noyau, c'est-à-dire $Q^{(n)}$ pour $n \geq 0$,
3. la fonction de renouvellement markovien ψ , construite à partir des $Q^{(n)}$,
4. la fonction de transition P , par convolution entre ψ et la fonction g donnée par (3.23).

Les produits de convolution coûtent cher numériquement, c'est pourquoi toute simplification préalable est précieuse en termes de temps de calcul. Ainsi, pour les puissances de convolution $Q^{(n)}$ nous utilisons l'expression (3.32), où la structure du PMDM nous a permis d'éliminer une intégrale.

De même, dans l'optique du calcul de la fiabilité, nous calculons la fonction de transition P uniquement pour le sous-ensemble U , c'est-à-dire en utilisant l'expression (3.37). Les intégrales sur le sous-ensemble U et sur l'intervalle de temps $[0, t]$ sont bornées, et l'approximation numérique s'en trouve facilitée.

Numériquement, ces fonctions sont discrétisées. Par la suite, une fonction discrétisée porte en exposant le symbole « # ». Nous devons opérer cette discrétisation à la fois sur l'intervalle $U = [z, \Delta[$ et sur $[0, t]$. Nous introduisons donc les deux partitions numériques suivantes :

$$I_y = \{z = y_0 < y_1 < \dots < y_\ell < \dots < y_L = \Delta\},$$

$$I_t = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots < t_M = t\}.$$

Les pas de discrétisation de I_y et I_t sont réguliers, c'est-à-dire que, pour $\ell = 0, \dots, L-2, m = 0, \dots, M-2$,

$$y_{\ell+1} - y_\ell = y_{\ell+2} - y_{\ell+1}, \quad t_{m+1} - t_m = t_{m+2} - t_{m+1}.$$

Les variables L et M représentent respectivement le nombre de pas de discrétisation pour $[z, \Delta[$ et $[0, t]$. Évidemment, elles doivent être choisies suffisamment grandes : lorsque $L \rightarrow \infty$ et $M \rightarrow \infty$, chacune des fonctions discrétisées (avec en exposant « # ») tend vers la « vraie » fonction associée. Par exemple, pour le noyau, nous avons une convergence uniforme, lorsque $M, L \rightarrow \infty$, de $Q^\# \rightarrow Q$.

Concernant la fonction de transition (3.37), nous avons comme version discrétisée

$$P_{ij}^\#(z, U, t) = \sum_{y_\ell \in I_y} \sum_{t_m \in I_t} \Delta_{yt} \psi_{ij}^\#(z, y_\ell, t_m) e^{-a_j(t-t_m)} \mathbf{1}_{\varphi_{y_\ell j}(t-t_m)}(U), \quad (3.44)$$

où $\Delta_{yt}\psi_{ij}^{\#}(z, y_{\ell}, t_m)$ est la seule inconnue, qui correspond à l'évaluation numérique de $\psi_{ij}(z, dy, ds)$. La notation Δ_{yt} signifie la différence finie sur les variables y et t de la fonction $\psi^{\#}$.

Par la définition (3.35) de la fonction de renouvellement markovien, nous pouvons évaluer $\psi_{ij}(z, dy, ds)$ par

$$\Delta_{yt}\psi_{ij}^{\#}(z, y_{\ell}, t_m) = \sum_{n \geq 0} \Delta_{yt}Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_{\ell}, t_m). \quad (3.45)$$

Les différences finies $\Delta_{yt}Q^{\#(n)}$ sur les variables t et y sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta_{yt}Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_{\ell}, t_m) &= [Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_{\ell}, t_m) - Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_{\ell-1}, t_m)] \\ &\quad - [Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_{\ell}, t_{m-1}) - Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_{\ell-1}, t_{m-1})]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Chacun des éléments $Q^{\#(n)}$ apparaissant dans l'expression (3.46) est obtenu en discrétisant (3.32), et il vient :

$$Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_{\ell}, t_m) = \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq i}} a_{ik} \sum_{t_m \in I_i} e^{-a_i t_m} Q_{kj}^{\#(n-1)}(\varphi_{z,i}(t_m), y_{\ell}, t - t_m) \Delta t_m, \quad (3.47)$$

où $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$ est le pas de discrétisation du temps. Il est important de remarquer dans la partie droite de l'expression (3.47) que nous devons calculer les valeurs du noyau de la forme $Q_{ij}^{\#(n)}(\varphi_{z,i}(t_m), \cdot, \cdot)$. Ainsi, même si la valeur de départ du processus Z_t est fixée à z , il faut néanmoins calculer le noyau et ses puissances de convolution pour tous les $Q_{ij}^{\#(n)}(\varphi_{z,i}(t_m), \cdot, \cdot)$ où la valeur de $\varphi_{z,i}(t_m)$ est dans l'intervalle de discrétisation I_y du sous-ensemble U . Nous n'avons pas fait apparaître cette troisième discrétisation pour garder des expressions lisibles.

Soulignons enfin que la somme des puissances n^{es} de convolution du noyau dans l'expression (3.45) est tronquée à partir du rang n^* , où n^* vérifie $\|Q^{\#(n^*)}\| < \varepsilon$ avec $\|Q^{\#(n^*)}\| = \max_{i,j} Q_{ij}^{\#(n^*)}(z, B, t)$ pour t, z, B fixés. Le réel ε est suffisamment petit, choisi proche de la précision de la machine. La troncature vient du fait que $Q_{ij}^{\#(n)}(z, B, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, p.s.,$ pour i, j, t, z et B fixés.

L'algorithme 3 reprend l'ensemble du schéma de calcul de la fiabilité décrit ci-dessus.

Cet algorithme représente les grandes étapes du calcul de la fiabilité, c'est-à-dire que nous avons calculé les valeurs du noyau, de la fonction de transition et de la fonction de renouvellement markovien uniquement sur le sous-ensemble U , puisque c'est le seul requis lors du calcul de la fiabilité. Cet algorithme fournit également la fonction de répartition de τ en utilisant la relation $R(t) = 1 - F_{\tau}(t)$. Soulignons également qu'il est valable pour toute la famille de systèmes différentiels stochastiques de la forme (3.1) sous les hypothèses 2.3. En effet, nous n'avons pas imposé de forme particulière à la fonction C , hormis les hypothèses d'existence d'une solution. Lorsque l'on précise pour C une forme particulière, cette spécificité apparaît en fait dans la fonction $\varphi_{z,i}(t)$ que l'on retrouve dans les expressions du noyau et de (3.44) et (3.47).

Algorithme 3 : Calcul de la fiabilité par résolution de l'équation de renouvellement markovien

```

// A. INITIALISATION
  Entrées :  $z, \mathbf{A}, \Delta, \alpha, L, M$ 
   $I_y \leftarrow \{z = y_0 < y_1 < \dots < y_\ell < \dots < y_L = \Delta\}$ 
   $I_t \leftarrow \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < \dots < t_M\}$ 
  définir fonction diffKernel avec relation (3.46)
  définir fonction convolKernel avec relation (3.47)
  définir fonction convolTransFunction avec relation (3.44)

// B. CALCUL NOYAU
  pour  $t_m \in I_t, y_\ell \in I_y, i, j \in E$  faire
     $Q_{ij}^{\#(0)}(z, y_\ell, t_m) \leftarrow \mathbb{1}_{\{i=j\}} \mathbb{1}_{\{z < y_\ell\}}$ 
     $Q_{ij}^{\#}(z, y_\ell, t_m) \leftarrow p_{ij} \left(1 - e^{-a_i \min(t_{z,i}(y_\ell), t_m)}\right)$ 
     $\Delta_{yt} Q_{ij}^{\#(0)}(z, y_\ell, t_m) \leftarrow \text{diffKernel}(Q^{\#(0)})$ 
     $\Delta_{yt} Q_{ij}^{\#}(z, y_\ell, t_m) \leftarrow \text{diffKernel}(Q^{\#})$ 
  fin

// C. FONCTION DE RENOUVELLEMENT MARKOVIEN
  pour  $t_m \in I_t, y_\ell \in I_y, i, j \in E$  faire
     $\Delta_{yt} \psi_{ij}^{\#}(z, y_\ell, t_m) = \Delta_{yt} Q_{ij}^{\#(0)}(z, y_\ell, t_m) + \Delta_{yt} Q_{ij}^{\#}(z, y_\ell, t_m)$ 
  fin
   $n \leftarrow 2$ 
  tant que  $\max_{y,t} \|Q^{\#(n)}\| < \varepsilon$  faire
    pour  $t_m \in I_t, y_\ell \in I_y, i, j \in E$  faire
       $Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_\ell, t_m) \leftarrow \text{convolKernel}(Q^{\#}, Q^{\#(n-1)})$ 
       $\Delta_{yt} Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_\ell, t_m) \leftarrow \text{diffKernel}(Q^{\#(n)})$ 
       $\Delta_{yt} \psi_{ij}^{\#}(z, y_\ell, t_m) \leftarrow \Delta_{yt} \psi_{ij}^{\#}(z, y_\ell, t_m) + \Delta_{yt} Q_{ij}^{\#(n)}(z, y_\ell, t_m)$ 
    fin
     $n \leftarrow n + 1$ 
  fin

// D. CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSITION
  pour  $t_m \in I_t, i, j \in E$  faire
     $P_{ij}^{\#}(z, U, t_m) \leftarrow \text{convolTransFunction}(\Delta_{yt} \psi^{\#})$ 
  fin

// E. CALCUL DE LA FIABILITÉ
  pour  $t_m \in I_t$  faire
     $R(t_m) = \sum_{i,j \in E} \alpha(i) P_{ij}^{\#}(z, U, t_m)$ 
  fin

```

3.3.2 Applications

Pour illustrer les résultats de ce chapitre, nous étudions un système différentiel stochastique de la même forme que lors de l'application numérique du chapitre précédent, c'est-à-dire

$$\frac{dZ_t}{dt} = aZ_t \times v(X_t), \quad Z_0 = z,$$

pour lequel nous prenons les paramètres de simulation $a = 0.01, z = 1$ et $\Delta = 10$. Nous conservons le même espace d'état pour X_t et la même fonction v , c'est-à-dire $v : \{1, 2, 3, 4, 5\} \mapsto \{0.5, 1, 1.5, 2, 4\}$. Nous multiplions tous les éléments du générateur (2.25) par un facteur 10, ce qui a pour effet de changer la loi du temps de séjour dans les états, en accélérant la fréquence des sauts de X_t , ainsi,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.16 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0.12 & -0.2 & 0.08 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0 & -0.2 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0.07 & 0 & -0.1 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0.05 & -0.1 \end{pmatrix}.$$

Les probabilités de transition d'état restent les mêmes. Nous prenons pour loi initiale de X_t le vecteur ligne $\alpha = (1/4 \ 1/2 \ 1/4 \ 0 \ 0)$.

Nous calculons le noyau semi-markovien associé au PMDM (Z_t, X_t) en utilisant (3.30) et (3.31), sur les sous-ensembles U et D . La figure 3.2 représente les valeurs numériques en fonction du temps, obtenues pour $(i, j) = (4, 5)$ et pour U et D respectivement.

Ces résultats correspondent à ce qu'on pouvait attendre, d'après la représentation schématique du noyau proposée à la figure 3.1. Les valeurs du noyau associées au sous-ensemble D des états défectueux sont beaucoup plus faibles que celles associées au sous-ensemble U des bons états. En effet, il est très peu probable que le système entre dans un état défectueux sans qu'aucun saut de X_t n'ait été observé.

Une autre manière de représenter l'information est d'utiliser les fonctions $H : (i, z, B, t) \rightarrow H_i(z, B, t) = \sum_{j \in E} Q_{ij}(z, B, t)$ et $\mathbf{H} : (i, t) \rightarrow \mathbf{H}_i(t) = \int_F H_i(z, dy, t)$, où $F = U \cup D$. Par la définition du noyau,

$$\begin{aligned} H_i(z, B, t) &= \mathbb{P}_{z,i}(\zeta_1 \in B, S_1 \leq t), \\ \mathbf{H}_i(t) &= \mathbb{P}_{z,i}(S_1 \leq t) = \mathbb{P}_i(S_1 \leq t). \end{aligned}$$

La fonction $\mathbf{H}_i(\cdot)$ est la fonction de répartition du temps de séjour dans l'état initial $X_0 = i$, c'est-à-dire que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{H}_i(t) = 1$, pour z, i fixés. Cette fonction ne dépend pas de la valeur initiale $Z_0 = z$ car nous avons intégré sur tout l'espace F d'arrivée de Z_t .

La fonction $H_i(z, B, \cdot)$ est une *sous* fonction de répartition. Lorsque $B = U$, $H_i(z, U, t)$ décrit la probabilité pour que le système, en partant de l'état (z, i) soit encore dans les bons états au moment du premier saut de X_t . De même, $H_i(z, D, t)$ décrit la probabilité pour que le système, partant de (z, i) , soit dans un état défectueux lors du premier saut de X_t . Comme $F = U \cup D$, alors

$$H_i(z, U, t) + H_i(z, D, t) = \mathbf{H}_i(t).$$

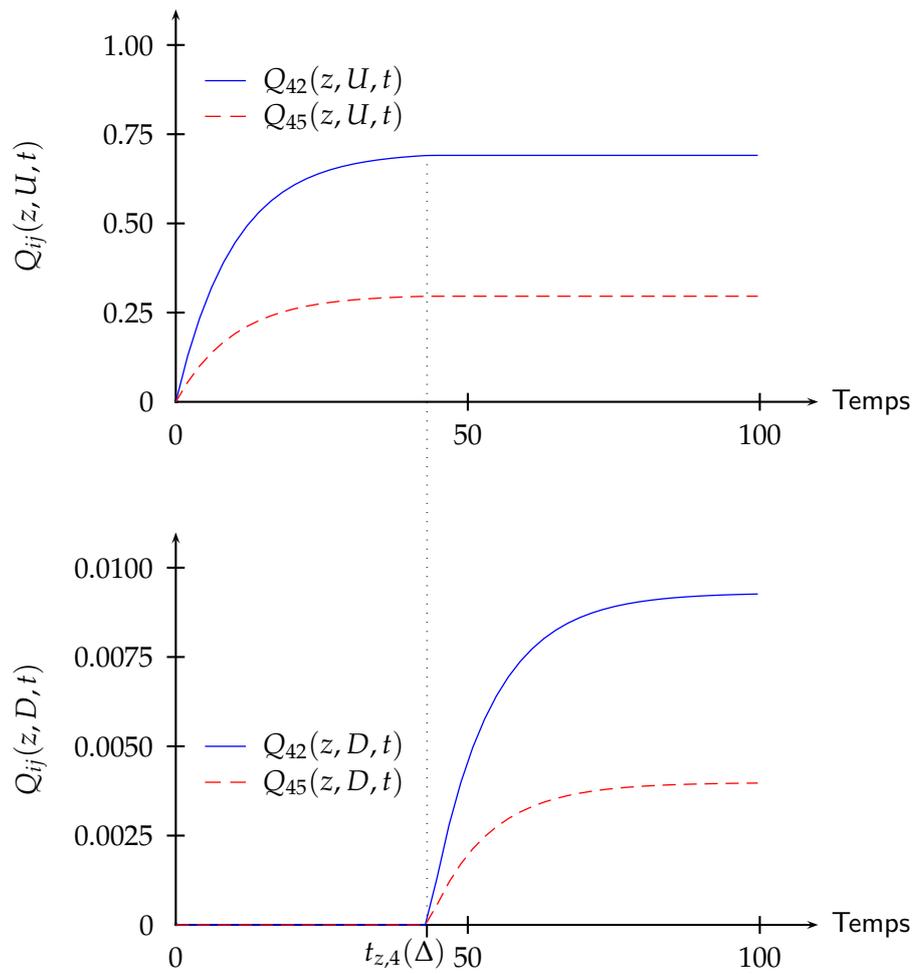


Fig. 3.2 – Noyau semi-markovien du couple (Z_t, X_t)

La figure 3.3 représente $H_i(z, B, t)$ en fonction du temps, pour $i = 1$ puis $i = 5$, respectivement pour U et D . La fonction $H_1(z, D, \cdot)$ est identiquement nulle et n'apparaît pas, ce qui signifie que $H_1(z, U, \cdot) = \mathbf{H}_1(\cdot)$ est une fonction de répartition, comme on peut l'observer sur la figure. Cela signifie également que la probabilité pour que le système se retrouve dans un état défaillant, partant de l'état $(z, 1)$ est nulle. En revanche, lorsque le système part de l'état $(z, 5)$, la probabilité pour atteindre l'ensemble des mauvais états dès le premier saut n'est pas nulle. Au vu du système dynamique que nous étudions, nous pouvons nous attendre à ce résultat : l'état 5 pour X_t correspond à un choc provoquant un accroissement « fort » dans l'évolution du processus Z_t , qui croît alors plus vite vers le point absorbant Δ . Par ailleurs, on vérifie bien sur la figure que $H_5(z, U, \cdot) + H_5(z, D, \cdot)$ est une fonction de répartition.

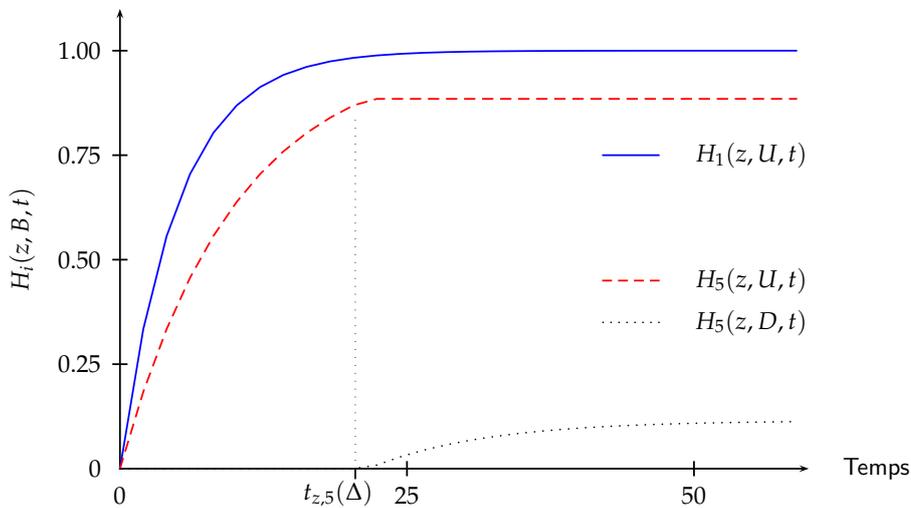


Fig. 3.3 – Fonction $H_i(z, B, \cdot)$ associée au noyau semi-markovien Q

Nous passons maintenant au résultat complet de calcul de fiabilité du système, c'est-à-dire par application de l'algorithme 3. Comme élément de comparaison, et ce afin de valider les résultats théoriques du chapitre, nous proposons d'estimer également la fiabilité par simulation de trajectoires du système et par application des techniques de type Monte-Carlo utilisées dans l'application numérique du chapitre précédent, section 2.4.2.

Par exemple, cinquante trajectoires du processus Z_t simulées jusqu'à l'entrée dans l'état absorbant sont représentées à la figure 3.4.

Nous utilisons l'estimateur empirique (2.38) pour approcher la fiabilité, calculé sur 50000 trajectoires simulées. Nous calculons également la fiabilité du système en appliquant l'algorithme 3, c'est-à-dire par la méthode basée sur la théorie du renouvellement markovien développée dans ce chapitre. L'algorithme a été implémenté sous le logiciel Scilab. Nous prenons comme paramètres $M = L = 100$ points de discrétisation pour I_t et I_y . L'algorithme converge alors à la puissance de convolution $Q^{\#(n^*)}$ avec $n^* = 22$, c'est-à-dire lorsque $\|Q^{\#(n^*)}\| < \varepsilon$, où $\varepsilon = \%eps$ est la précision de Scilab (variable `%eps` du logiciel, égale à 2.22×10^{-16}).

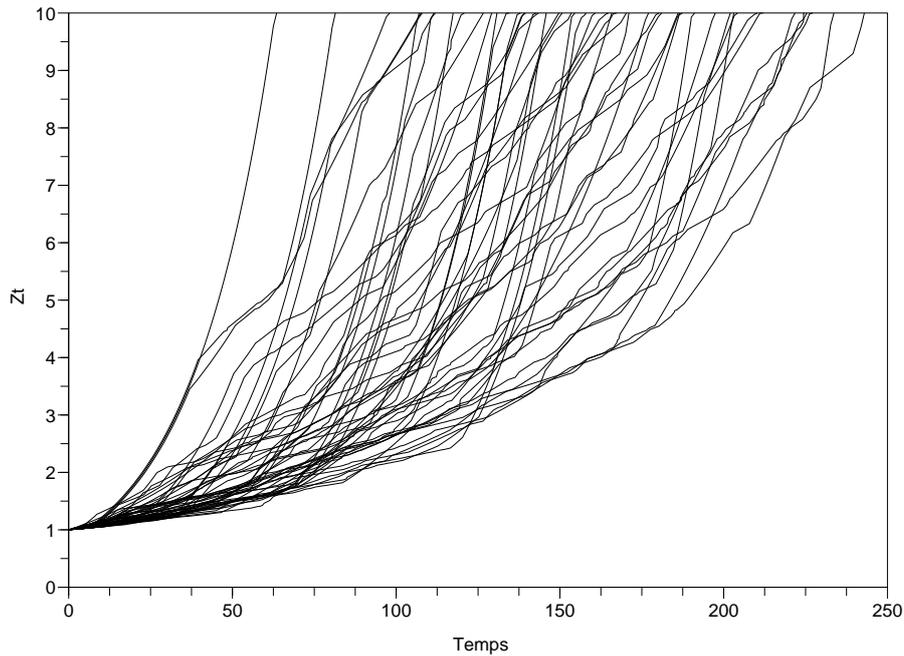


Fig. 3.4 – Simulation de 50 trajectoires du processus Z_t

Les résultats de ces deux méthodes de calcul de la fiabilité sont représentés à la figure 3.5.

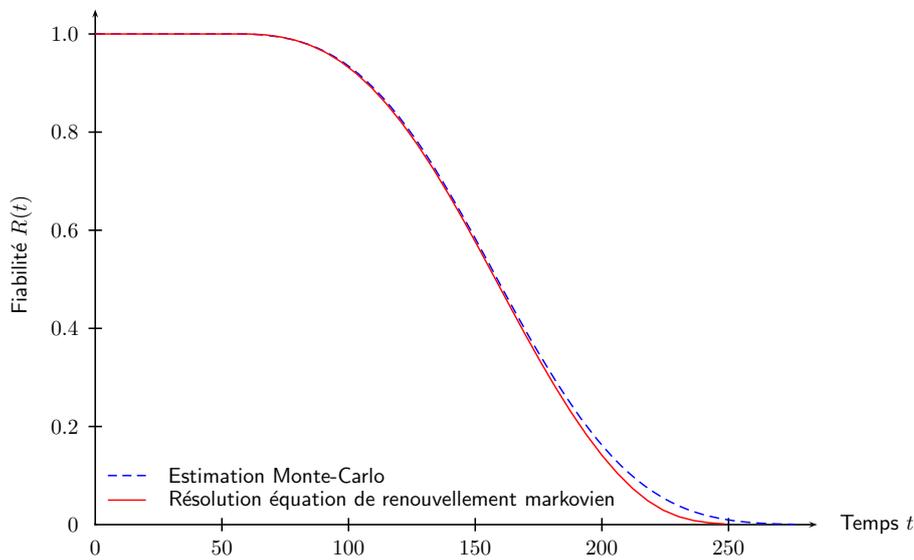


Fig. 3.5 – Comparaison des estimateurs de la fiabilité : Monte-Carlo et résolution directe de l'équation de renouvellement markovien

Les courbes illustrent la très bonne corrélation entre les deux méthodes. Les résultats numériques sont donc cohérents avec nos résultats théoriques. Notons que nous obtenons la fonction de répartition du temps de défaillance en utilisant le fait que $F_\tau(t) = 1 - R(t)$. De même, nous pouvons calculer la densité de probabilité f_τ du temps de défaillance en utilisant la relation

$$f_\tau(t) = -\frac{d}{dt}R(t),$$

par dérivation numérique. Les résultats du calcul de la densité pour les deux méthodes (Monte-Carlo et résolution de l'équation de renouvellement markovien) sont présentés à la figure 3.6. Pour la méthode de Monte-Carlo, notons que la densité est légèrement accidentée : avec cette méthode, une estimation parfaitement lisse de la courbe de densité requiert beaucoup plus de simulations de trajectoires que pour la fiabilité. L'approximation par calcul numérique de l'équation de renouvellement est en revanche beaucoup plus lisse. Nous pensons que la différence entre les deux courbes pourrait s'atténuer en choisissant d'une part un plus grand nombre de points de discrétisation L et M pour les intervalles $[z, \Delta[$ et $[0, t]$ et d'autre part un plus grand nombre N de trajectoires simulées pour la méthode de Monte-Carlo.

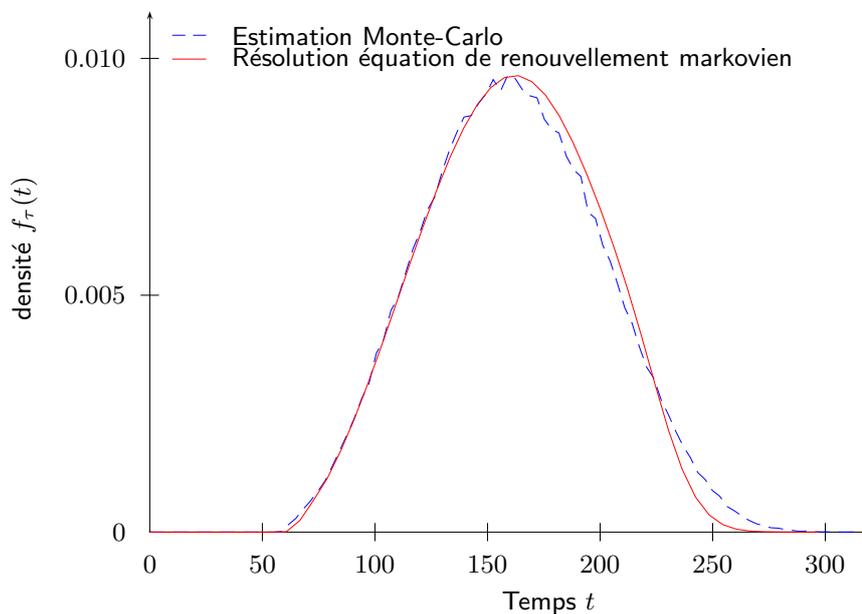


Fig. 3.6 – Comparaison des estimateurs de la densité f_τ : Monte-Carlo et résolution directe de l'équation de renouvellement markovien

Remarque 3.3 Cette méthode de calcul, basée sur la théorie du renouvellement markovien, a également été testée sur un système dynamique de nature différente, avec un processus markovien de saut à 3 états. Nous avons également obtenu de très bons résultats pour le calcul de la fiabilité.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons donné une interprétation du processus de Markov déterministe par morceaux (Z_t, X_t) en terme de processus de renouvellement markovien. Nous avons calculé le noyau semi-markovien associé et construit une équation de renouvellement markovien vérifiée par la fonction de transition du couple (Z_t, X_t) .

Nous nous sommes alors placés dans le contexte d'analyse de fiabilité correspondant à la description d'une dégradation par le processus Z_t . Nous avons déduit des résultats pour le calcul de la fiabilité et la loi du

temps de défaillance d'après l'expression de la fonction de transition obtenue dans le cas plus général.

La troisième section fut dédiée à une illustration numérique des résultats théoriques de ce chapitre, où nous avons proposé un algorithme de calcul de la fiabilité d'un système dynamique adapté à la modélisation des mécanismes de dégradation. Les résultats numériques sont cohérents avec les résultats théoriques.

ESTIMATION DE LA COMPOSANTE DE SAUT DU SYSTÈME

SOMMAIRE

4.1	ESTIMATION DES OBSERVATIONS DE LA COMPOSANTE DE SAUT .	75
4.1.1	Estimation des trajectoires du processus de saut	76
4.1.2	Réduction de l'espace d'état	77
4.2	PROCESSUS MARKOVIEN DE SAUT AVEC CENSURE ALÉATOIRE . .	80
4.2.1	Construction de la fonction de vraisemblance	81
4.2.2	Maximum de vraisemblance (cas indépendant)	87
4.2.3	Propriétés asymptotiques de l'estimateur	90
4.2.4	Fiabilité des processus markoviens censurés	93
4.3	ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES	95
4.3.1	Processus markovien de saut avec censure aléatoire	96
4.3.2	Estimation des systèmes dynamiques	101
	CONCLUSION	106

L'objet de ce chapitre est de fournir des résultats portant sur l'estimation du processus markovien de saut X_t sous-jacent au PMDM, alors que seul le processus Z_t représentant la dégradation est observé jusqu'au seuil de défaillance.

Nous proposons tout d'abord des méthodes pour l'estimation des trajectoires et pour l'espace d'état de la composante de saut, celle-ci n'étant pas directement observable. Nous utilisons un algorithme de classification pour estimer l'espace d'état. Les résultats de cette section ne sont pas dépendants du caractère markovien de la composante de saut du PMDM. Les trajectoires du processus de saut ainsi obtenues sont définies sur un intervalle de temps aléatoire.

À partir de ces trajectoires, nous pouvons estimer le générateur du processus X_t . Nous écrivons la vraisemblance associée aux trajectoires d'un processus markovien de saut censuré aléatoirement. Nous obtenons l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) du générateur dans le cas où la variable de censure est indépendante de X_t . Nous établissons les propriétés asymptotiques classiques de convergence, de normalité et d'efficacité pour cet estimateur. Dans le cas d'un PMDM observé jusqu'à la

défaillance, cet estimateur maximise la vraisemblance *approchée*, puisque la variable de censure est également le temps de défaillance, qui est clairement dépendant de l'histoire du processus de saut X_t .

Nous utilisons cet estimateur du générateur dans le cadre de l'estimation des systèmes dynamiques. Un autre cadre d'utilisation est celui de la fiabilité des systèmes markoviens à espace d'état fini, très utilisés dans les modèles industriels. Cette dernière problématique est également traitée en raison de son importance pour les applications, même si elle n'intervient pas directement dans l'étude des systèmes dynamiques.

La dernière section est consacrée à des applications numériques liées aux résultats obtenus au cours du chapitre. Nous traitons un exemple illustrant l'estimation du générateur et des mesures de fiabilité associées à un système markovien à espace d'état fini dont les durées d'observation sont aléatoires, censurées par une variable indépendante de l'histoire du processus. L'estimateur utilisé maximise la vraisemblance exacte dans ce cas précis.

Nous proposons ensuite une application numérique dans le cadre des systèmes dynamiques. Nous estimons le processus markovien de saut d'un PMDM modélisant un processus de dégradation observé jusqu'au seuil de défaillance. Dans ce cas, l'estimateur du générateur de X_t maximise la vraisemblance *approchée*, puisqu'il existe une dépendance entre le processus et le temps de défaillance dont nous ne tenons pas compte dans la procédure de maximisation. Nous verrons cependant que cette approximation conduit à de bons résultats numériques.

Pour l'estimation du générateur du processus markovien de saut, nous nous basons principalement sur Billingsley (1961) et Albert (1962). La vraisemblance globale des PMDM (Z_t, X_t) est construite par Jacobsen (2006), mais nous nous intéressons ici spécifiquement à la vraisemblance associée à X_t , construite pour des trajectoires censurées aléatoirement à droite. Andersen et al. (1993) traitent de l'estimation des processus aléatoires pour différents types de censure. Pour la fiabilité et l'estimation des systèmes markoviens à espace d'état fini, nous nous sommes appuyés sur Sadek et Limnios (2005). Limnios et al. (2005) considèrent le cas plus général de l'inférence statistique liée aux systèmes semi-markoviens à espace d'état fini.

4.1 ESTIMATION DES OBSERVATIONS DE LA COMPOSANTE DE SAUT

Considérons le système

$$\frac{dZ_t}{dt} = C(Z_t, X_t), \quad Z_0 = z. \quad (4.1)$$

Nous nous plaçons dans le cadre de modélisation de la section 2.3, où nous avons spécifié pour le système (4.1) les hypothèses propres à la description des mécanismes de dégradation.

En laboratoire, la procédure naturelle d'observation consiste à relever dans le temps l'évolution du niveau de dégradation jusqu'à ce qu'il atteigne le seuil de défaillance. C'est le cas pour les données de propagation de fissures de Virkler représentées à la figure 1.4 : pour un processus de dégradation Z_t représentant la taille de la fissure, nous observons les trajectoires de Z_t dans \mathbb{R}_+ depuis la valeur z à l'instant initial jusqu'à ce qu'il atteigne le seuil $\Delta > z$, c'est-à-dire la taille maximale admissible. Ce mode d'observation correspond aux représentations schématiques des figures 1.2 et 2.3.

En vue d'inférences statistiques, notons $(Z_t^k)_{k=1,\dots,K}$ quelques K copies indépendantes du processus Z_t correspondant à K trajectoires observées du processus de dégradation. Les $(Z_t^k)_{k=1,\dots,K}$ sont donc supposées indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Physiquement, cela correspond à des expériences de laboratoire pour lesquelles les mesures sont effectuées sur des échantillons ayant la même origine ; le mode opératoire est le même pour chaque échantillon et les mesures sont réalisées dans des conditions expérimentales identiques.

Par ailleurs, les $(Z_t^k)_{k=1,\dots,K}$ sont définies sur les intervalles $[0, \tau^k]$, où les $(\tau^k)_{k=1,\dots,K}$ sont K copies indépendantes de la variable aléatoire τ décrivant le temps de défaillance du système. Il faut donc prendre en compte dans les méthodes d'estimation le fait que les trajectoires sont définies sur des intervalles de temps aléatoires dépendant des trajectoires elles-mêmes.

De plus, nous considérons que les $(Z_t^k)_{k=1,\dots,K}$ sont les seules données disponibles. Ceci implique que l'estimation des autres variables et processus intervenant dans le système (4.1) doit se faire via les trajectoires observées de Z_t .

Notons également $(X_t^k)_{k=1,\dots,K}$ les K copies indépendantes correspondant aux trajectoires du processus X_t . Celles-ci ne sont donc pas directement observables. Les Z_t^k étant i.i.d., il est légitime de faire l'hypothèse que les X_t^k sont également i.i.d. Les X_t^k sont définies sur les mêmes intervalles que les Z_t^k , c'est-à-dire sur les $[0, \tau^k]$.

Nous nous intéressons principalement dans ce chapitre à l'estimation de X_t à partir des trajectoires de Z_t . Nous supposerons donc que la forme de la fonction C est connue, tout comme les paramètres fixes de C . Des méthodes seront proposées dans le dernier chapitre pour estimer les paramètres intervenant dans la fonction C lorsque seule sa forme est connue, comme c'est le cas dans les problèmes réels que nous avons à étudier.

4.1.1 Estimation des trajectoires du processus de saut

Quelle que soit la nature du processus X_t modélisant la composante de saut du système dynamique (4.1), il est indispensable d'obtenir une représentation des trajectoires correspondantes puisqu'elles ne sont pas directement observables. De là, nous pourrions estimer les grandeurs caractéristiques du processus X_t selon la nature du modèle choisi. Lorsque X_t est markovien de saut, l'estimation concerne principalement son générateur infinitésimal; mais ce choix est indépendant de l'estimation des trajectoires. Cette section est donc valable quelque soit la nature de X_t .

Tout d'abord, nous avons besoin de l'hypothèse suivante pour estimer les trajectoires de X_t .

Hypothèse 4.1 *Pour le système (4.1), il existe une fonction G telle que l'on puisse écrire X_t explicitement en fonction de dZ_t/dt et Z_t , c'est-à-dire*

$$X_t = G(\dot{Z}_t, Z_t), \quad (4.2)$$

où nous avons introduit la notation $\dot{Z}_t = dZ_t/dt$.

Une première estimation des trajectoires *brutes* du processus de saut peut être obtenue en utilisant simplement la relation (4.2). En notant $(\tilde{X}_t^k)_{k=1,\dots,K}$ les trajectoires estimées, nous avons

$$\tilde{X}_t^k = G(\hat{Z}_t^k, Z_t^k), \quad (4.3)$$

où les accroissements \hat{Z}_t^k sont eux-mêmes estimés. Nous utilisons comme estimateur les différences finies :

$$\hat{Z}_t^k = \frac{Z_{t+\Delta t}^k - Z_t^k}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

Les Δt sont les pas de temps des relevés de trajectoires de Z_t .

Ainsi, nous disposons d'un jeu de K trajectoires $(\tilde{X}_t^k, 0 \leq t \leq \tau^k)_{k=1,\dots,K}$. Nous parlons des \tilde{X}_t^k comme des trajectoires *brutes* car elles correspondent à des estimations des trajectoires de la composante de saut du PMDM qui ne sont pas directement exploitables. En effet, nous voyons d'après l'expression (4.2) que les \tilde{X}_t^k calculées correspondent à des trajectoires bruitées, à valeurs dans un espace noté \tilde{E} . L'espace \tilde{E} contient un grand nombre d'états, dont certains sont très proches les uns des autres. Un trop grand nombre d'états rend toute estimation du processus markovien de saut associé à ces trajectoires peu efficace, puisqu'on réalise des statistiques pour les probabilités de passage et de temps de séjour d'un état sur très peu de visites de cet état !

Une réduction de l'espace d'état observé \tilde{E} s'avère donc nécessaire, en tâchant de concilier la double contrainte d'un espace d'état qui représente au mieux la composante aléatoire réelle, tout en rendant viable la procédure d'estimation du générateur qui s'ensuit.

4.1.2 Réduction de l'espace d'état

L'idée est de regrouper les états de \tilde{E} qui sont suffisamment proches les uns des autres pour être représentés par une seule et même valeur sans trop de perte d'information. La figure 4.1 montre le type de résultat recherché : on souhaite passer d'une trajectoire \tilde{X}_t^k , à valeurs dans \tilde{E} et enregistrée en une succession de points discrets du temps, à une trajectoire \hat{X}_t^k à valeurs dans \hat{E} , où $|\hat{E}| < |\tilde{E}|$, en regroupant les états suffisamment proches. Les états proches forment des « classes », signifiées par les lignes en trait discontinu sur la figure.

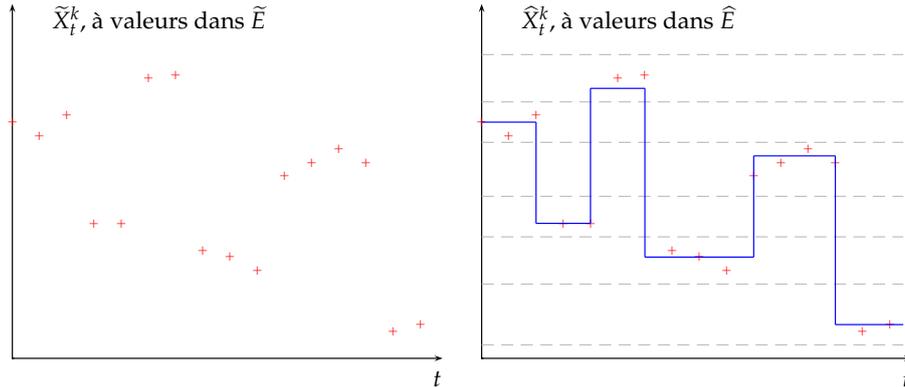


Fig. 4.1 – Principe de réduction de l'espace d'état observé

Pour cela, nous proposons d'appliquer un algorithme de classification sur les trajectoires brutes \tilde{X}_t^k . Ce type d'algorithme permet d'identifier des classes de points proches les uns des autres au sens d'une distance donnée.

Les données à classer sont les valeurs prises par le processus. Nous représentons donc les \tilde{X}_t^k sous la forme d'un ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ regroupant l'ensemble des valeurs prises par \tilde{X}_t sur l'ensemble des K trajectoires, aux différents instants du temps :

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \tilde{X}_t^k : t \in [0, \tau^k]; k = 1, \dots, K \right\}, \quad (4.5)$$

où les éléments de $\tilde{\mathcal{D}}$ sont dans \tilde{E} . L'objectif est d'obtenir un nouvel espace \hat{E} fini par application d'une méthode de classification sur $\tilde{\mathcal{D}}$, et d'associer à ce nouvel espace \hat{E} un jeu de trajectoires estimées \hat{X}_t^k qui sera exploitable par la suite.

En ce qui concerne la classification, deux cas de figure se présentent. L'état des connaissances disponibles pour le processus X_t permet de choisir entre ces deux cas de figure.

1. Il arrive que l'on connaisse *a priori* le véritable espace E du processus. Dans ce cas, la classification est dite supervisée : on affecte chaque élément de $\tilde{\mathcal{D}}$ à la valeur de E dont il est le plus proche pour une distance donnée, par exemple la distance euclidienne. On obtient ainsi l'ensemble des données classées, noté $\hat{\mathcal{D}}$.
2. Dans le cas le plus général, l'espace d'état « vrai » E est inconnu. Nous proposons d'utiliser une méthode de classification non supervisée afin d'obtenir \hat{E} à partir de \tilde{E} . C'est-à-dire que l'espace \tilde{E} , qui

est déjà une approximation de E , est estimé par \hat{E} de manière à représenter au mieux les données $\tilde{\mathcal{D}}$.

Il existe énormément de méthodes de classification automatique dans la littérature, qui est très abondante dans ce domaine. Nous citerons par exemple Jain et Dubes (1988), où un large panel de méthodes sont abordées avec l'implémentation numérique associée. Dans Everitt et al. (2001), au-delà des multiples méthodes de classification revues en détail, les auteurs décrivent la démarche à adopter face à un jeu de données à classer.

Parmi ces méthodes, nous proposons d'utiliser l'algorithme *des centres mobiles* (ou « K-means », en anglais), initialement proposé par MacQueen (1967), qui est une méthode de classification non-supervisée parmi les plus utilisées. Elle consiste à classer les données $\tilde{\mathcal{D}}$ parmi C classes $(\mathcal{C}_i)_{i=1,\dots,C}$, chaque classe \mathcal{C}_i étant munie d'un centre de gravité μ_i . Au cours de l'algorithme, on affecte chaque point de $\tilde{\mathcal{D}}$ à la classe dont le centre de gravité est le plus proche. Cette opération est répétée itérativement, en réévaluant à chaque fois les classes et leurs centres de gravité jusqu'à stabilisation des μ_i (voir Pollard 1981, pour une étude de la convergence de cette méthode). Initialement, les centres de gravité sont choisis aléatoirement parmi les données $\tilde{\mathcal{D}}$. Ce principe est illustré à la figure 4.2, pour 10 points de \mathbb{R}^2 à classer en $C = 2$ classes.

On trouvera un algorithme détaillé pour les centres mobiles à l'annexe A.2. Au cours de cet algorithme, on minimise itérativement sur les $(\mu_i)_{i=1,\dots,C}$ l'erreur intra-classe donnée par

$$\mathbf{E} = \sum_{x \in \tilde{\mathcal{D}}} \min_{\mu_i} \|x - \mu_i\|^2. \quad (4.6)$$

La méthode des centres mobiles est facile à mettre en œuvre, mais présente quelques inconvénients : tout d'abord, elle est sensible au choix initial des centres de gravité. Selon la valeur des μ_i à l'instant initial, l'algorithme converge vers un minimum local qui n'est pas forcément le minimum global. De plus, la méthode est sensible aux points aberrants. Il existe pour palier à ces problèmes des variantes connues. Ainsi, il est assez simple d'éliminer les points aberrants des données expérimentales en modifiant l'algorithme de la manière suivante : on applique une première fois les centres mobiles sur les données à classer et, si l'on obtient des classes contenant trop peu d'individus par rapport au nombre total de points expérimentaux, on peut considérer que les points constituant ces classes sont « aberrants », ou constituent une classe de « bruit » (voir à ce sujet Dave 1991). On les ôte donc des données à classer et l'on applique à nouveau l'algorithme sur le nouvel ensemble de données. Par ailleurs, afin de réduire la sensibilité au choix initial des μ_i , on les tire aléatoirement parmi un ensemble restreint de points expérimentaux : ainsi, en limitant l'ensemble de points initiaux possibles pour les μ_i aux points contenus dans l'étendu inter quartile de $\tilde{\mathcal{D}}$, on évite de partir d'un point aberrant.

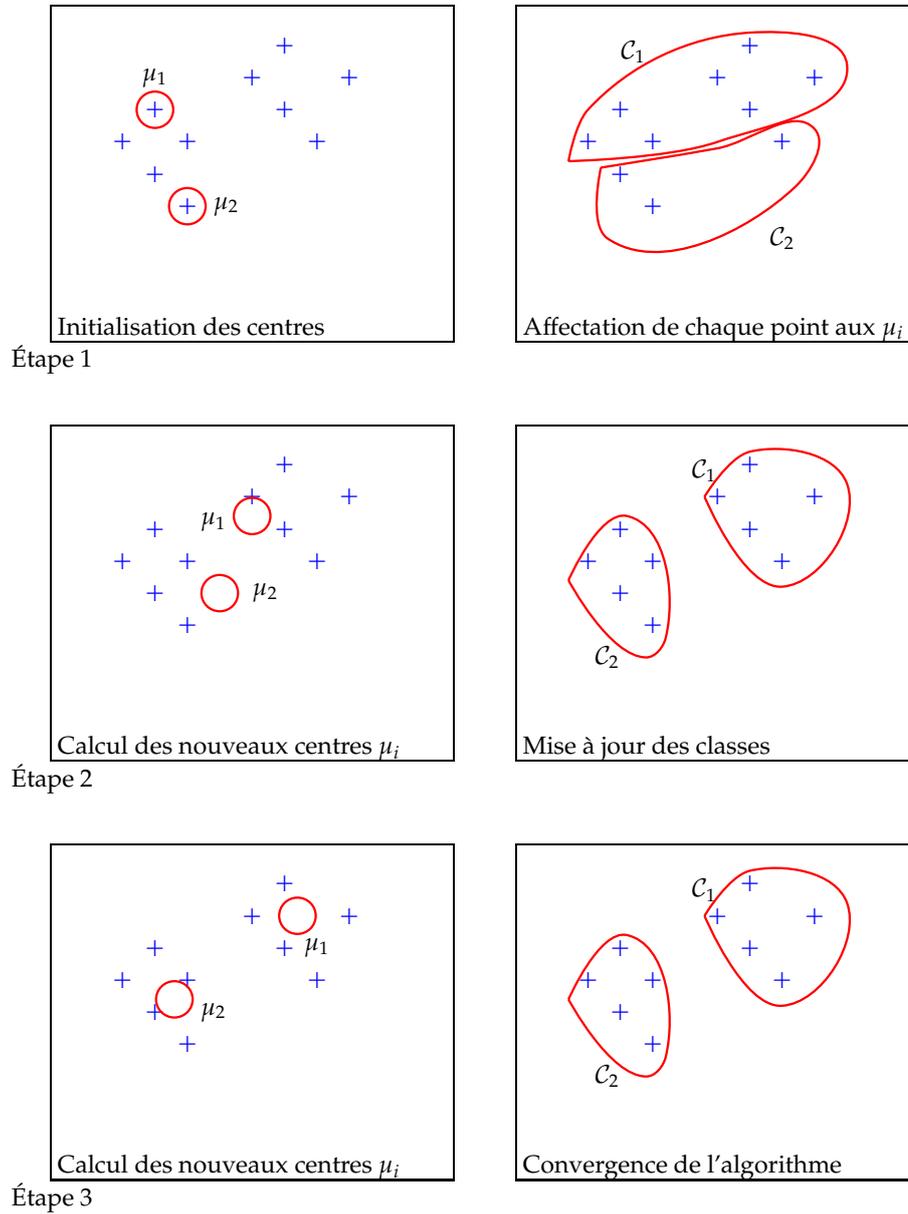


Fig. 4.2 – Principe de l'algorithme des centres mobiles pour deux classes dans \mathbb{R}^2

Lors de l'application de la méthode des centres mobiles pour la réduction de l'espace \tilde{E} , nous avons pris compte ces remarques dans les applications numériques.

Notons par ailleurs que le nombre de classes C , ou d'états dans notre cas, est choisi arbitrairement au début de l'algorithme. Afin de trouver un nombre d'états qui représente bien les données initiales \mathcal{D} , l'algorithme est répété pour différentes valeurs de C et on représente l'erreur finale (4.6) en fonction de C . Il s'agit ensuite de faire un compromis entre le nombre de classes C et l'erreur commise. Il faut garder à l'esprit qu'un C trop grand diminuerait les performances de la procédure d'estimation du générateur de X_t . On utilise la courbe représentant l'erreur (4.6) en fonction du nombre de classes choisi. On observe pour cette courbe une stabilisation au-delà d'un certain nombre de classes. Il est donc inutile de choisir un nombre de classes trop grand, puisqu'on ne gagne que peu sur la représentation des données réelles.

Nous obtenons finalement l'ensemble des données classées $\hat{\mathcal{D}}$ à valeurs dans l'espace \hat{E} en affectant chaque point de \mathcal{D} au centre μ_i le plus proche obtenu en fin d'algorithme. Les $(\mu_i)_{i=1,\dots,C}$ constituent donc les C éléments de l'espace d'état \hat{E} estimé. Un exemple d'utilisation de cette méthode pour l'estimation de l'espace d'état du processus markovien de saut X_t , non observé, est traité dans les applications numériques de ce chapitre.

L'application d'une de ces deux méthodes mène à l'ensemble $\hat{\mathcal{D}}$ de points classés. Nous repassons alors à une représentation sous la forme d'un ensemble de K trajectoires \hat{X}_t^k à valeurs dans \hat{E} , afin d'obtenir des trajectoires telles que celle représentée à la figure 4.1. Celles-ci sont alors utilisées pour estimer les grandeurs caractéristiques du processus de saut X_t . Dans le cas d'un processus markovien de saut, il s'agit du générateur infinitésimal et de la loi initiale.

Dans la section suivante, nous détaillons une méthode de maximisation de la vraisemblance permettant d'obtenir un estimateur du générateur du processus markovien de saut X_t .

4.2 PROCESSUS MARKOVIEN DE SAUT AVEC CENSURE ALÉATOIRE

Dans un premier temps, nous construisons la fonction de vraisemblance pour K trajectoires du processus X_t définies sur un intervalle d'observation aléatoire $[0, \tau]$. Pour cela il nous faut construire la densité de probabilité associée à une trajectoire d'un processus markovien de saut avec censure aléatoire. La vraisemblance construite est valable lorsque le temps de censure τ est dépendant de X_t . C'est le cas lorsque le processus X_t est sous-jacent à un PMDM observé jusqu'à défaillance du système, puisque le temps de censure τ correspond au temps de défaillance.

Dans un deuxième temps, nous déterminons l'estimateur en maximisant une fonction de vraisemblance approchée, où nous négligeons la dépendance entre X_t et τ . En effet, bien que nous ayons obtenu une forme explicite pour la densité de τ à la section 3.2.2, le problème de maximisation sur la vraisemblance « vraie » est difficile. Strictement parlant, l'estimateur obtenu est un estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) lorsque le processus markovien de saut est censuré aléatoirement, mais pour une censure indépendante de l'histoire du processus. Nous pouvons dans ce cas inférer des propriétés asymptotiques de convergence et de normalité. Nous utilisons également ces résultats dans le contexte de la fiabilité des systèmes markoviens à espace d'état fini.

4.2.1 Construction de la fonction de vraisemblance

Dans la suite, nous construisons la fonction de vraisemblance associée à K trajectoires du processus X_t . Auparavant, il nous faut construire la densité de probabilité $f_{\mathcal{H}_\tau}$ associée à l'histoire \mathcal{H}_τ du processus définie sur l'intervalle de durée aléatoire $[0, \tau]$. Pour ce faire, nous utilisons les résultats fondamentaux de Billingsley (1961) et Albert (1962) portant sur la théorie de l'estimation des processus markoviens de saut. En particulier, ils ont construit la densité de probabilité $f_{\mathcal{H}_t}$ associée à \mathcal{H}_t , l'histoire du processus ($X_s, 0 \leq s \leq t$), jusqu'à un instant $t > 0$ fixé. Nous commençons par rappeler ces résultats, pour lesquels nous utiliserons les variables aléatoires suivantes, définies pour $t > 0$ fixé :

- $(S_n, n \in \mathbb{N})$ les instants de saut du processus X_t ;
- $W_n = S_{n+1} - S_n$ pour $n \in \mathbb{N}$, les temps de séjours de X_t dans les états ;
- $(J_n, n \in \mathbb{N})$, la chaîne de Markov immergée associée à X_t ;
- $N(t)$, le nombre de sauts observés sur l'intervalle $[0, t]$, c'est-à-dire le plus grand entier tel que $S_{N(t)} \leq t$;
- $V_i(t)$, le temps total passé par le processus X_t dans l'état i sur l'intervalle $[0, t]$, c'est-à-dire :

$$V_i(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=i\}} ds; \quad (4.7)$$

- $N_i(t)$, le nombre de passages dans l'état i sur l'intervalle $[0, t]$, donné par

$$N_i(t) = \sum_{\ell=0}^{N(t)-1} \mathbb{1}_{\{J_\ell=i\}}; \quad (4.8)$$

- $N_{ij}(t)$, le nombre de transitions de l'état i vers l'état j sur l'intervalle $[0, t]$, donné par

$$N_{ij}(t) = \sum_{\ell=0}^{N(t)-1} \mathbb{1}_{\{J_\ell=i, J_{\ell+1}=j\}}. \quad (4.9)$$

À des fins statistiques, nous représentons l'histoire \mathcal{H}_t du processus markovien de saut X_t sur l'intervalle $[0, t]$ par la séquence ordonnée de variables aléatoires

$$\mathcal{H}_t = \left((J_0, W_0), \dots, (J_{N(t)-1}, W_{N(t)-1}), (J_{N(t)}, U_t) \right),$$

où $U_t = t - S_{N(t)}$. Le processus part de l'état J_0 à l'instant 0, séjourne dans J_0 pour une durée W_0 , saute dans l'état J_1 et ainsi de suite, jusqu'à atteindre l'état final $J_{N(t)}$ dans lequel il séjourne U_t unités de temps, c'est-à-dire jusqu'au temps de censure t .

L'histoire \mathcal{H}_t du processus est composée de couples de variables aléatoires du type (J_n, W_n) , à valeurs dans $E \times \mathbb{R}_+$. Ainsi, \mathcal{H}_t prend ses valeurs dans l'espace

$$\Omega_{\mathcal{H}} = \bigcup_{n \geq 0} \Omega_n, \quad \text{avec } \Omega_n = (E \times \mathbb{R}_+)^n, \quad n \geq 0. \quad (4.10)$$

Supposons qu'il existe une densité de probabilité $f_{\mathcal{H}_t}$ pour une réalisation de \mathcal{H}_t . Nous notons $h_t = \mathcal{H}_t(\omega)$ une réalisation de l'histoire du processus censuré à l'instant $t > 0$ fixé, c'est-à-dire :

$$h_t = \left((x_0, w_0), \dots, (x_{n(t)-1}, w_{n(t)-1}), (x_{n(t)}, u_t) \right). \quad (4.11)$$

La réalisation h_t est issue d'une observation de X_t censuré à l'instant $t > 0$. Les $n(t), u_t, x_\ell, \ell = 0, \dots, n(t)$ et $w_\ell, \ell = 0, \dots, n(t) - 1$ sont des réalisations observées des variables aléatoires respectives $N(t), U_t, J_\ell, \ell = 1, \dots, N(t)$ et $W_\ell, \ell = 0, \dots, N(t) - 1$.

Nous donnons la densité de probabilité notée $f_{\mathcal{H}_t}$ associée à \mathcal{H}_t dans le théorème suivant, dû à Albert. Soulignons que pour le générateur A de X_t , nous noterons de manière équivalente $a(i, j) = a_{ij}$, afin de rendre la formulation plus claire.

Théorème 4.1 (Albert 1962) *Soit \mathcal{H}_t l'histoire d'un processus markovien de saut censuré à un instant $t > 0$ fixé. La densité $f_{\mathcal{H}_t}$ associée à une réalisation h_t est donnée par*

$$f_{\mathcal{H}_t}(h_t) = \begin{cases} \alpha(x_0) \exp \{-a(x_0)t\} & \text{si } h_t = ((x_0)), \\ \alpha(x_0) \exp \{-a(x_{n(t)})t\} \prod_{\ell=0}^{n(t)-1} a'(x_\ell, x_{\ell+1}) \exp \{-(a(x_\ell) - a(x_{n(t)}))w_\ell\} & \text{si } h_t = \left((x_0, w_0), \dots, (x_{n(t)-1}, w_{n(t)-1}), (x_{n(t)}, u_t) \right), \\ & \text{avec } n(t) > 0, x_\ell \in E, w_\ell > 0, \forall \ell = 0, 1, \dots, n(t) - 1, \\ & \text{et } \sum_{\ell=1}^{n(t)-1} w_\ell < t; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec

$$a'(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ a_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Il est intéressant de faire apparaître dans l'expression de la densité $f_{\mathcal{H}_t}$ les variables aléatoires $V_i(t)$ et $N_{ij}(t)$, qui sont facilement calculables sur une trajectoire observée. En utilisant ces variables, nous pouvons donner une forme plus simple de la densité $f_{\mathcal{H}_t}$. Notons $n_{ij}(t)$ et $v_i(t)$ les réalisations de $N_{ij}(t)$ et $V_i(t)$ associées à la réalisation h_t définie sur l'intervalle

$[0, t], t > 0$. D'une part,

$$\begin{aligned} \prod_{\ell=0}^{n(t)-1} a'(x_\ell, x_{\ell+1}) &= \prod_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} a_{ij}^{\sum_{\ell=0}^{n(t)-1} \mathbf{1}_{\{x_\ell=i, x_{\ell+1}=j\}}} \\ &= \prod_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} a_{ij}^{n_{ij}(t)}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} &\exp \left\{ -a(x_{n(t)}) t \right\} \prod_{\ell=0}^{n(t)-1} \exp \left\{ - \left(a(x_\ell) - a(x_{n(t)}) \right) w_\ell \right\} \\ &= \exp \left\{ -a(x_{n(t)}) \left(t - \sum_{\ell=0}^{n(t)-1} w_\ell \right) \right\} \prod_{\ell=0}^{n(t)-1} \exp \left\{ -a(x_\ell) w_\ell \right\} \\ &= \exp \left\{ -a(x_{n(t)}) u_t \right\} \prod_{\ell=0}^{n(t)-1} \exp \left\{ -a(x_\ell) w_\ell \right\} \\ &= \prod_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} \exp \left\{ -a_{ij} v_i(t) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ainsi, en injectant (4.12) et (4.13) dans l'expression de $f_{\mathcal{H}_t}$ du théorème 4.1, nous obtenons

$$f_{\mathcal{H}_t}(h_t) = \alpha(x_0) \prod_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} a_{ij}^{n_{ij}(t)} e^{-a_{ij} v_i(t)}. \quad (4.14)$$

Nous pouvons généraliser ces résultats pour $(X_s, 0 \leq s \leq \tau)$, c'est-à-dire lorsque le processus est censuré par la variable aléatoire τ . Dans ce cas, l'histoire du processus s'écrit

$$\mathcal{H}_\tau = \left((J_0, W_0), \dots, (J_{N(\tau)-1}, W_{N(\tau)-1}), (J_{N(\tau)}, U_\tau) \right), \quad (4.15)$$

où $U_\tau = \tau - S_{N(\tau)}$. La variable aléatoire $N(\tau)$ correspond aux nombres de sauts de X_t sur l'intervalle de longueur aléatoire $[0, \tau]$.

La réalisation d'une histoire du processus censurée aléatoirement a la même structure que dans le cas d'une censure fixe, c'est-à-dire (4.11). Simplement, dans le cas d'une censure aléatoire, une réalisation $h_t = \mathcal{H}_{\tau(\omega)}(\omega)$ correspond à la réalisation simultanée de la trajectoire et de la variable de censure.

Introduisons $f_{\mathcal{H}_\tau}$ la densité d'une histoire censurée aléatoirement. Nous pouvons écrire $f_{\mathcal{H}_\tau}$ en fonction de $f_{\mathcal{H}_t}$ et f_τ , la densité de τ . En toute rigueur,

$$f_{\mathcal{H}_\tau}(h_t) = f_{\mathcal{H}_t|\tau}(h_t|\tau = t) f_\tau(t), \quad (4.16)$$

où $f_{\mathcal{H}_t|\tau}$ est la densité d'une trajectoire censurée par τ , conditionnellement à la variable de censure τ . La densité f_τ , lorsque τ représente le temps de défaillance du PMDM, est donnée dans le théorème 3.2 du chapitre 3, et

$$f_\tau(t) = - \sum_{i,j \in E} \alpha(i) \left(\frac{d}{dt} \psi_{ij} + \psi_{ij} * h_{jj} \right) (z, U, t).$$

Dans cette expression, la fonction de renouvellement markovien ψ apparaît. Rappelons que cette fonction est définie comme la somme infinie des puissances de convolution du noyau semi-markovien Q du processus de renouvellement markovien $(\zeta_n, J_n, S_n, n \in \mathbb{N})$ associé au PMDM (Z_t, X_t) . Nous avons vu, au moins pour les premières puissances de convolution, que Q s'écrivait en fonction des éléments a_{ij} du générateur de X_t , ainsi la densité f_τ est clairement dépendante du processus X_t .

Par ailleurs, il nous faut remarquer ici que $f_{\mathcal{H}_\tau|_\tau}(h_t|\tau = t)$ est équivalente à $f_{\mathcal{H}_t}(h_t)$. En effet, la dépendance entre le processus X_t et la variable de censure τ n'a pas d'influence sur les probabilités de changement d'état, ni les occurrences de saut de X_t , mais simplement sur la longueur de l'observation. Nous pouvons écrire que

$$f_{\mathcal{H}_\tau}(h_t) = f_{\mathcal{H}_t}(h_t)f_\tau(t), \quad (4.17)$$

ce qui ne signifie pas pour autant que τ et \mathcal{H}_τ sont indépendantes ! Il s'agit de variables composées, et la dépendance est reportée dans le densité f_τ , qui est fonction des puissances de convolution $Q^{(n)}$ du noyau, et donc des éléments a_{ij} du générateur.

Nous avons le corollaire suivant pour le théorème 4.1 :

Corollaire 4.1 *Soit l'histoire \mathcal{H}_τ d'un processus markovien de saut, censurée par la variable aléatoire τ de densité f_τ . La densité $f_{\mathcal{H}_\tau}$ associée à une réalisation h_t est*

$$f_{\mathcal{H}_\tau}(h_t) = \begin{cases} \alpha(x_0)e^{-a(x_0)t}f_\tau(t) & \text{si } h_t = ((x_0)), \\ \alpha(x_0) \prod_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} a_{ij}^{n_{ij}(t)} e^{-a_{ij}v_i(t)} f_\tau(t) & \text{si } h_t = (4.11), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous considérons maintenant le cas de K trajectoires censurées par la variable τ . Notons $(\mathcal{H}_{\tau^k}^k)_{k=1,\dots,K}$ les K copies indépendantes de l'histoire de X_t correspondant aux K trajectoires. Les τ^k sont K copies i.i.d. de τ . Nous déclinons pour les K histoires \mathcal{H}^k les variables aléatoires $N^k(\tau^k)$, $N_i^k(\tau^k)$, $V_i^k(\tau^k)$ et $N_{ij}^k(\tau^k)$, soient

- $N^k(\tau^k)$, le nombre de sauts observés sur $\mathcal{H}_{\tau^k}^k$;
- $N_i^k(\tau^k)$, le nombre de passages dans l'état i observés sur $\mathcal{H}_{\tau^k}^k$;
- $N_{ij}^k(\tau^k)$, le nombre de transitions de i vers j observées sur $\mathcal{H}_{\tau^k}^k$;
- $V_i^k(\tau^k)$, le temps passé par X_t^k dans l'état i sur $\mathcal{H}_{\tau^k}^k$.

Nous introduisons par ailleurs les variables aléatoires suivantes relatives aux K copies $(\mathcal{H}_{\tau^k}^k)_{k=1,\dots,K}$:

- $N(K, \tau)$ le nombre total de sauts observés sur les K histoires censurées ;
- $N_i(K, \tau)$, le nombre total de passages dans l'état i , observés sur les K histoires censurées ;
- $N_{ij}(K, \tau)$, le nombre total de transitions de i vers j , observées sur les K histoires censurées ;
- $V_i(K, \tau)$, le temps total passé dans i sur les K histoires censurées.

Naturellement,

$$\sum_{k=1}^K N^k(\tau^k) = N(K, \tau), \quad (4.18a)$$

$$\sum_{k=1}^K N_i^k(\tau^k) = N_i(K, \tau), \quad (4.18b)$$

$$\sum_{k=1}^K N_{ij}^k(\tau^k) = N_{ij}(K, \tau), \quad (4.18c)$$

$$\sum_{k=1}^K V_i^k(\tau^k) = V_i(K, \tau). \quad (4.18d)$$

Puisque nous considérons les trajectoires X_t^k du processus i.i.d., les histoires \mathcal{H}^k sont également i.i.d. dans le sens où nous avons d'une part indépendance des \mathcal{H}^k , et d'autre part, pour tout k, ℓ tels que $1 \leq k, \ell \leq K$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N^k(t) = n, \tau^k \in dt, (J_i^k, W_i^k) \in A_i \times B_i, i = 0, 1, \dots, n) \\ = \mathbb{P}(N^\ell(t) = n, \tau^\ell \in dt, (J_i^\ell, W_i^\ell) \in A_i \times B_i, i = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (4.19)$$

où $A_i \subset E$ et $B_i \in \mathcal{B}_+$.

Le lemme suivant est important pour la construction des estimateurs et les résultats asymptotiques associés.

Lemme 4.1 *Si X_t est irréductible et si $f_\tau(t) \neq \delta(t)$, alors, pour $i, j \in E$ tels que $i \neq j$,*

$$i) N_i(K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} +\infty;$$

$$ii) N_{ij}(K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} +\infty, \text{ pour } i, j \text{ tels que } a_{ij} \neq 0;$$

$$iii) V_i(K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} +\infty;$$

$$iv) N(K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} +\infty;$$

Démonstration. Tout d'abord, notons que la condition $f_\tau(t) \neq \delta(t)$ requiert en fait que le PMDM défini par le couple (Z_t, X_t) ne soit pas dans un état défaillant à l'instant initial, ce qui correspond à l'hypothèse 2.4.

i) pour $j \in E$, nous introduisons S_j^k le temps d'entrée dans l'état j associé à la k^e copie \mathcal{H}^k du processus X_t . Notons également

$$A_j^k := \{N_j^k(\tau) \geq 1\}.$$

Par développement en probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(A_j^k) &= \mathbb{P}_i(N_j^k(\tau) \geq 1) = \mathbb{P}_i(S_j^k \leq \tau) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}_i(S_j^k \leq t, \tau \in dt) \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}_i(S_j^k \leq t | \tau = t) f_\tau(t) dt. \end{aligned}$$

Notons \mathbf{A}_j le générateur \mathbf{A} de X_t où nous avons éliminé la j^{e} ligne et la j^{e} colonne et $\mathbf{1}_d$ un vecteur colonne composé de d éléments égaux à 1.

Pour les processus markoviens de saut,

$$\mathbb{P}_i(S_j^k \leq t | \tau = t) = (\mathbf{1}_s - e^{t\mathbf{A}_j}\mathbf{1}_{s-1})(i),$$

où $s = |E|$ et où l'exponentielle est comprise au sens matriciel. Alors, pour $f_\tau(t) \neq \delta(t)$ et puisque E est fini,

$$\min_i \mathbb{P}_i(A_j^k) = \min_i \int_0^\infty (\mathbf{1}_s - e^{t\mathbf{A}_j}\mathbf{1}_{s-1})(i) f_\tau(t) dt > 0.$$

D'où $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_i(A_j^k) = \infty$. Puis, par application du lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons le résultat i).

- ii) Le point ii) est obtenu en considérant le processus $(J_n, J_{n+1}, S_n, n \in \mathbb{N}^*)$ et en appliquant un raisonnement similaire. Nous devons évidemment avoir $a_{ij} \neq 0$, sinon aucune transition de i vers j n'est possible.

Les points iii) et iv) sont des corollaires de i) ou ii). □

Nous pouvons maintenant construire la fonction de vraisemblance associée à K trajectoires censurées. Nous notons $(h_{t_k}^k)_{k=1, \dots, K}$ les réalisations des histoires $\mathcal{H}_{\tau^k}^k$. Chacune des h^k est associée à une des trajectoires observées \widehat{X}_t^k , estimées selon la méthode décrite à la section 4.1. Les $h_{t_k}^k$ sont définies sur les intervalles $[0, t_k]$, où les $(t_k)_{k=1, \dots, K}$ sont les K réalisations des variables aléatoires de censure τ^k . Notons $\mathbf{L}_\mathbf{A}(K)$ la fonction de vraisemblance associée au processus de Markov observé sur les K trajectoires censurées, fonction du générateur \mathbf{A} . Le problème de maximisation, pour chaque élément a_{ij} , pour $i, j \in E$ tels que $i \neq j$, est

$$\max_{a_{ij}} \mathbf{L}_\mathbf{A}(K) = \max_{a_{ij}} \prod_{k=1}^K f_{\mathcal{H}_{\tau^k}}(h_{t_k}^k). \quad (4.20)$$

Nous lui préférons la maximisation de la log-vraisemblance notée $\mathcal{L}_\mathbf{A}$. De plus, en décomposant la densité $f_{\mathcal{H}_\tau}$ selon (4.17), alors

$$\mathcal{L}_\mathbf{A}(K) = \log \left(\prod_{k=1}^K f_{\mathcal{H}_{t_k}}(h_{t_k}^k) f_\tau(t_k) \right) = \sum_{k=1}^K \log f_{\mathcal{H}_{t_k}}(h_{t_k}^k) + \sum_{k=1}^K \log f_\tau(t_k). \quad (4.21)$$

Le problème est qu'il est difficile d'avoir une forme de f_τ qui soit explicite pour les éléments a_{ij} du générateur. Ceci serait pourtant indispensable puisque c'est par rapport aux a_{ij} que nous maximisons la vraisemblance. Or, si nous avons vu que nous pouvions calculer les valeurs des $Q^{(n)}$ numériquement, calculer toutes les expressions littérales des puissances $Q^{(n)}$ au-delà de $n = 2$ nous paraît pour l'instant être une tâche difficile.

Nous suggérons donc, comme première approximation du générateur de X_t , de maximiser une vraisemblance approchée, où nous négligeons la dépendance entre τ et X_t .

4.2.2 Estimateur du maximum de vraisemblance (cas indépendant)

Si \mathcal{H}_τ et τ sont indépendants, le problème de maximisation ne concerne que le premier membre de droite de la log-vraisemblance (4.21), soit

$$\mathcal{L}_A^0(K) = \sum_{k=1}^K \log f_{\mathcal{H}_t}(h_{t_k}^k). \quad (4.22)$$

Remarque 4.1 Lorsque l'on considère les réalisations $h_{t_k}^k$ des histoires $\mathcal{H}_{\tau^k}^k$, nous notons en minuscules les variables associées, c'est-à-dire $n^k(t_k), v_i^k(t_k)$, etc.

Nous injectons dans l'expression de la log-vraisemblance (4.22) la densité (4.14) correspondant à chacune des trajectoires, définies sur les intervalles $[0, t_k]$, et

$$\mathcal{L}_A^0(K) = C_K + \sum_{k=1}^K \log \left(\prod_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} a_{ij}^{n_{ij}^k(t_k)} \exp(-a_{ij} v_i^k(t_k)) \right), \quad (4.23)$$

où $C_K = \sum_{k=1}^K \log \alpha(x_0^k)$ ne dépend pas des a_{ij} . Puis, nous faisons apparaître les variables aléatoires $n_{ij}(K, \tau)$ et $v_i(K, \tau)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A^0(K) &= C_K + \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} n_{ij}^k(t_k) \log(a_{ij}) - a_{ij} v_i^k(t_k) \\ &= C_K + \sum_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} \log(a_{ij}) \sum_{k=1}^K n_{ij}^k(t_k) - a_{ij} \sum_{k=1}^K v_i^k(t_k) \\ &= C_K + \sum_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} \log(a_{ij}) n_{ij}(K, \tau) - a_{ij} v_i(K, \tau). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Le théorème suivant donne l'estimateur du maximum de vraisemblance associé au problème (4.24), ainsi que les propriétés asymptotiques qui en découlent. La démonstration complète est présentée au cours de cette section. Elle s'appuie sur les résultats existants pour l'estimation des processus de Markov obtenus par Billingsley (1961) et Albert (1962). Le théorème suivant généralise légèrement ces résultats.

Théorème 4.2 Soient K trajectoires indépendantes d'un processus de saut markovien $(X_t, 0 \leq t \leq \tau)$ à valeurs dans un espace E où τ est une censure aléatoire positive indépendante de X_t , telle que $f_\tau(t) \neq \delta(t)$; soit $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{a}_{ij}(K, \tau))_{i,j \in E}$ l'EMV du générateur infinitésimal \mathbf{A} pour la vraisemblance (4.22).

a) L'EMV est unique, donné par

$$\hat{a}_{ij}(K, \tau) = \begin{cases} \frac{N_{ij}(K, \tau)}{V_i(K, \tau)} & \text{si } i \neq j \text{ et } V_i(K, \tau) \neq 0, \\ -\frac{\sum_{\ell \in E \setminus \{i\}} N_{i\ell}(K, \tau)}{V_i(K, \tau)} & \text{si } i = j \text{ et } V_i(K, \tau) \neq 0, \\ 0 & \text{si } V_i(K, \tau) = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

b) L'estimateur $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ est fortement convergent lorsque $K \rightarrow \infty$, c'est-à-dire

$$\hat{a}_{ij}(K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} a_{ij}. \quad (4.26)$$

c) Si le processus X_t est irréductible, alors le vecteur aléatoire

$$\left\{ \sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij}) \right\}_{i \neq j}^s \quad (4.27)$$

est asymptotiquement normal, de moyenne nulle, et de matrice de covariance $\Sigma = (\sigma^2(i, j; p, q))_{s(s-1) \times s(s-1)}$ dont les éléments sont donnés par

$$\sigma^2(i, j; p, q) = \delta(i, j; p, q) a_{ij} / \int_0^\infty \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) ds f_\tau(t) dt, \quad (4.28)$$

où

$$\delta(i, j; p, q) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) = (p, q), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d) Si le processus X_t est irréductible, alors $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ est asymptotiquement efficace.

Pour déterminer l'estimateur qui maximise la fonction (4.24), nous allons réaliser les tests classiques de dérivation aux ordres un et deux. Tout d'abord, nous devons trouver une solution $\hat{\mathbf{A}}$ annulant la dérivée première de $\mathcal{L}_{\mathbf{A}}^0$ pour tout élément a_{ij} du générateur tel que $i \neq j$ et qui indique un extremum de la fonction; ensuite, les discriminants des sous matrices associées à la matrice hessienne de la vraisemblance (4.24) doivent prendre les signes appropriés, permettant d'affirmer que $\hat{\mathbf{A}}$ est un maximum.

Dérivée première

Pour un couple (i, j) de E^2 , la dérivation première par rapport à a_{ij} de $f_{\mathcal{H}_t}$, donne, après des calculs élémentaires,

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \mathcal{L}_{\mathbf{A}}^0(K) = \frac{n_{ij}(K, \tau)}{a_{ij}} - v_i(K, \tau), \quad (4.29)$$

pour tout $i \neq j$ et $a_{ij} \neq 0$. La solution annulant la dérivée première (4.29), est

$$\hat{a}_{ij}(K, \tau) := \frac{n_{ij}(K, \tau)}{v_i(K, \tau)}, \quad i, j \in E, i \neq j. \quad (4.30)$$

La solution existe pour $v_i(K, \tau) > 0$. D'après le lemme 4.1, la variable aléatoire $V_i(K, \tau)$ tend vers l'infini pour $K \rightarrow \infty$. Ainsi, il en va de même pour les observations $v_i(K, \tau)$. Évidemment, au cours de l'estimation réelle, nous disposons d'un nombre $K < \infty$ d'observations. Par convention, si aucun passage dans i n'a été observé sur le jeu de K trajectoires réelles, c'est-à-dire lorsque $v_i(K, \tau) = 0$, nous posons $\hat{a}_{ij}(K, \tau) = 0$.

Matrice hessienne

Nous rappelons que s est le cardinal de l'espace d'état E . Nous définissons le vecteur colonne $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ composé des éléments non nuls du générateur pris par ligne en omettant les termes diagonaux. Pour simplifier, nous traitons ici le cas où \mathbf{A} ne comporte aucun élément nul. Le raisonnement peut être adapté lorsqu'il existe un ou plusieurs éléments nuls dans \mathbf{A} .

Sous ces conditions, le vecteur \mathbf{a} est donné par

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_d \end{pmatrix} = (a_{12}, \dots, a_{1s}, a_{21}, a_{23}, \dots, a_{2s}, \dots, a_{s1}, \dots, a_{s(s-1)})^\top, \quad (4.31)$$

où x^\top est le vecteur transposé de x . Le vecteur \mathbf{a} est d dimensionnel, avec $d = s(s-1)$. Ainsi la matrice hessienne associée à la log-vraisemblance notée $\mathbf{M}(\mathcal{L}_\mathbf{A}^0) = (m_{k\ell}(a))_{k,\ell \in 1\dots d}$ est de dimension $d \times d$ avec d paire. Définissons également les sous matrices de rang n issues de $\mathbf{M}(\mathcal{L}_\mathbf{A}^0)$, pour $n = 1, \dots, d$:

$$\mathbf{M}(\mathcal{L}_\mathbf{A}^0)^{(n)} = (m_{k\ell}(a))_{k,\ell=1,\dots,n}. \quad (4.32)$$

Le terme général de la matrice hessienne est de la forme

$$m_{k\ell}(a) = \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{a}_k \partial \mathbf{a}_\ell} \mathcal{L}_\mathbf{A}^0 = -\frac{n_{i_k j_k}(K, \tau)}{a(i_k, j_k)^2} \mathbb{1}_{\{k=\ell\}}, \quad (4.33)$$

avec

$$(i_k, j_k) \in \{(1, 2), \dots, (1, s), (2, 1), (2, 3), \dots, (2, s), \dots, (s, 1), \dots, (s, s-1)\}.$$

L'expression (4.33) a un sens puisque nous avons supposé tous les éléments de \mathbf{A} non nuls.

La matrice de terme général (4.33) est diagonale. Lorsque l'on considère la matrice hessienne prise au point \hat{a} qui annule la dérivée première, donné par (4.30), alors

$$m_{k\ell}(\hat{a}) = -\frac{v_{i_k}^2(K, \tau)}{n_{i_k j_k}(K, \tau)} \mathbb{1}_{\{k=\ell\}}.$$

Des résultats classiques d'analyse permettent d'affirmer que la solution $\hat{\mathbf{A}}$ donnée par (4.30) est un maximum si les signes des déterminants des sous matrices (4.32) sont successivement strictement négatifs et strictement positifs. C'est-à-dire qu'on doit vérifier, pour tout $p = 1, \dots, d/2$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathcal{L}_\hat{\mathbf{A}}^0)^{(2p)} &= (m_{k\ell}(\hat{a}))_{k,\ell \in 1,\dots,2p} < 0, \\ \mathbf{M}(\mathcal{L}_\hat{\mathbf{A}}^0)^{(2p-1)} &= (m_{k\ell}(\hat{a}))_{k,\ell \in 1,\dots,2p-1} > 0. \end{aligned}$$

Or, le déterminant d'une sous matrice de rang n pris au point $\hat{\mathbf{A}}$ correspond simplement au produit des termes diagonaux, et

$$\det \mathbf{M}(\mathcal{L}_\hat{\mathbf{A}}^0)^{(n)} = (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{v_{i_k}^2(K, \tau)}{n_{i_k j_k}(K, \tau)}. \quad (4.34)$$

Ce déterminant est négatif lorsque $n = 2p - 1$, $p = 1, \dots, d/2$ et positif pour $n = 2p$, $p = 1, \dots, d/2$. Les inégalités sont strictes pour $v_i(K, \tau) > 0$.

Notons que, par le lemme 4.1., la variable aléatoire $N_{ij}(K, \tau)$ tend vers l'infini pour $K \rightarrow \infty$, lorsque $a_{ij} \neq 0$. Donc, pour un assez grand nombre d'observations, $n_{ij}(K, \tau) > 0$, et (4.34) a un sens. Pratiquement, cela signifie que lors de l'estimation sur des trajectoires réelles, nous calculons uniquement l'estimateur des éléments a_{ij} du générateur pour lesquels au moins une transition de i à j a été observée.

La fonction \mathcal{L}_A^0 atteint donc un maximum au point \hat{A} , c'est-à-dire que l'estimateur (4.30) est un estimateur du maximum de vraisemblance pour \mathcal{L}_A^0 , défini pour les éléments $a_{ij} \neq 0$ du générateur tels que $i \neq j$. Les éléments diagonaux sont obtenus par la propriété (2.3) du générateur, ainsi pour $i \in E$

$$\hat{a}_{ii}(K, \tau) = - \sum_{\ell \neq i} \hat{a}_{i\ell} = - \frac{\sum_{\ell \in E \setminus \{i\}} n_{i\ell}(K, \tau)}{v_i(K, \tau)}. \quad (4.35)$$

Enfin, lorsque $v_i(K, \tau) = 0$, c'est-à-dire lorsque l'état i n'est visité sur aucune des K trajectoires, le déterminant (4.34) est nul, donc l'estimateur du maximum de vraisemblance n'existe pas. Nous adoptons par convention

$$\hat{a}_{ij}(K, \tau) = 0. \quad (4.36)$$

Nous retrouvons finalement l'EMV (4.25) énoncé dans le théorème 4.2.

4.2.3 Propriétés asymptotiques de l'estimateur

Nous démontrons ici les parties b, c et d du théorème 4.2.

Convergence de l'estimateur

D'après (4.18c) et (4.18d), l'expression (4.25) de l'estimateur $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ peut s'écrire

$$\hat{a}_{ij}(K, \tau) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K N_{ij}^k(\tau^k) \bigg/ \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K V_i^k(\tau^k).$$

Les $(\mathcal{H}^k)_{k=1, \dots, K}$ sont i.i.d. au sens défini par (4.19), donc les $N_{ij}^k(\tau^k)$, respectivement $V_i^k(\tau^k)$, pour $k = 1, \dots, K$, sont également i.i.d. Ainsi, la loi forte des grands nombres implique que

$$\hat{a}_{ij}(K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} \frac{\mathbb{E}N_{ij}^1(\tau)}{\mathbb{E}V_i^1(\tau)},$$

où \mathbb{E} est l'espérance relative à la densité $f_{\mathcal{H}_\tau}$. Nous introduisons maintenant \mathbb{E}^* , l'espérance relative à la densité $f_{\mathcal{H}_t}$. Elle correspond à l'espérance sur l'espace des trajectoires censurées au même instant fixe du temps. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\frac{\mathbb{E}N_{ij}^1(\tau)}{\mathbb{E}V_i^1(\tau)} = \int_0^\infty \mathbb{E}^* N_{ij}^1(s) f_\tau(s) ds \bigg/ \int_0^\infty \mathbb{E}^* V_i^1(s) f_\tau(s) ds,$$

où nous avons fait apparaître les variables aléatoires $N_{ij}^1(t)$ et $V_i^1(t)$, définies sur une trajectoire de longueur $t > 0$ fixée. D'après le théorème 5.1 de Albert (1962), nous avons, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* N_{ij}^1(t) &= a_{ij} \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) ds, \\ \mathbb{E}^* V_i^1(t) &= \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) ds.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{\mathbb{E} N_{ij}^1(\tau)}{\mathbb{E} V_i^1(\tau)} = a_{ij},$$

ce qui achève la démonstration.

Normalité asymptotique

Par définition de l'estimateur (4.25), nous avons, pour tout $i, j \in E$ tels que $i \neq j$,

$$\sqrt{K} (\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij}) = \frac{K}{\sum_{k=1}^K V_i^k(t_k)} \left(\frac{N_{ij}(K, \tau) - a_{ij} V_i(K, \tau)}{\sqrt{K}} \right).$$

Par le théorème de Slutsky, et puisque les V_i^k sont i.i.d., les variables aléatoires $\left\{ \sqrt{K} (\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij}) \right\}_{i \neq j}$ ont la même distribution asymptotique que

$$\left\{ \frac{1}{\mathbb{E} V_i^1(\tau)} \left(\frac{N_{ij}(K, \tau) - a_{ij} V_i(K, \tau)}{\sqrt{K}} \right) \right\}_{i \neq j}.$$

Puis, par application du théorème de la limite centrale, le vecteur aléatoire suit asymptotiquement une loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance dont les éléments sont donnés par

$$\sigma^2(i, j; p, q) = \frac{\mathbb{E} \left[(N_{ij}^1(\tau) - a_{ij} V_i^1(\tau))(N_{pq}^1(\tau) - a_{pq} V_p^1(\tau)) \right]}{\mathbb{E} V_i^1(\tau) \mathbb{E} V_p^1(\tau)}. \quad (4.37)$$

Le théorème 5.1 de Albert (1962) donne, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^* \left[(N_{ij}^1(t) - a_{ij} V_i^1(t))(N_{pq}^1(t) - a_{pq} V_p^1(t)) \right] \\ = \delta(i, j; p, q) a_{ij} \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) ds.\end{aligned} \quad (4.38)$$

Le numérateur de (4.37) peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[(N_{ij}^1(\tau) - a_{ij} V_i^1(\tau))(N_{pq}^1(\tau) - a_{pq} V_p^1(\tau)) \right] \\ = \int_0^\infty \mathbb{E}^* \left[(N_{ij}^1(t) - a_{ij} V_i^1(t))(N_{pq}^1(t) - a_{pq} V_p^1(t)) \right] f_\tau(t) dt \\ = \delta(i, j; p, q) a_{ij} \int_0^\infty \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) f_\tau(t) ds dt.\end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{E}V_i^1(\tau) = \int_0^\infty \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) f_\tau(t) ds dt, \text{ pour tout } i \in E,$$

ce qui permet de retrouver l'expression (4.28) de la covariance.

Remarque 4.2 *Quand τ est une variable aléatoire dégénérée en un unique point positif $t > 0$, $f_\tau(s) = \delta_t(s)$, alors*

$$\sigma^2(i, j; p, q) = \delta(i, j; p, q) a_{ij} \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) ds,$$

qui correspond bien à la variance trouvée par Albert dans le cas de trajectoires définies sur le même intervalle $[0, t]$, $t > 0$.

Efficacité asymptotique

Pour prouver l'efficacité asymptotique de l'EMV, on s'intéresse à l'information de Fisher d'une seule des K histoires du processus X_t étant donné que les trajectoires sont i.i.d. Prenons par exemple \mathcal{H}^1 , pour laquelle l'information de Fisher est définie par

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \log f_{\mathcal{H}_\tau}(\mathcal{H}_{\tau^1}^1)}{\partial a_{ij}} \right)^2 \right]. \quad (4.39)$$

L'estimateur $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ est asymptotiquement efficace (voir Cramer 1946) pour un couple (i, j) de E si $\sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij})$ est asymptotiquement normale, ce que nous avons démontré précédemment, et si l'information de Fisher est égale à l'inverse de la variance de $\sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij})$. C'est-à-dire que nous devons avoir

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \log f_{\mathcal{H}_\tau}(\mathcal{H}_{\tau^1}^1)}{\partial a_{ij}} \right)^2 \right] = (\sigma^2(i, j))^{-1}, \quad (4.40)$$

où les variances $\sigma^2(i, j)$ pour $i \neq j$ sont les termes diagonaux de la matrice de covariance Σ définie par (4.28), c'est-à-dire que $\sigma^2(i, j) = \sigma^2(i, j; p, q)$ pour $(i, j) = (p, q)$.

Il suffit alors d'écrire l'information de Fisher sur l'espace des trajectoires censurées aléatoirement comme une fonction de l'information de Fisher calculée sur des trajectoires à censure fixe :

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \log f_{\mathcal{H}_\tau}(\mathcal{H}_{\tau^1}^1)}{\partial a_{ij}} \right)^2 \right] = \int_0^\infty \mathbb{E}^* \left[\left(\frac{\partial \log f_{\mathcal{H}_t}(\mathcal{H}_t^1)}{\partial a_{ij}} \right)^2 \right] f_\tau(t) dt \quad (4.41)$$

où on rappelle que \mathbb{E}^* est l'espérance sur l'espace des trajectoires à censure fixe. Des calculs de dérivation similaires à ceux faits lors du calcul du maximum de vraisemblance mènent à

$$\frac{\partial \log f_{\mathcal{H}_t}(\mathcal{H}_t^1)}{\partial a_{ij}} = \frac{N_{ij}^1(t)}{a_{ij}} - V_i^1(t). \quad (4.42)$$

Comme vu précédemment en (4.38), mais cette fois pour $(i, j) = (p, q)$, nous avons, pour $t > 0$,

$$\mathbb{E}^* [N_{ij}(t) - a_{ij}V_i(t)]^2 = a_{ij} \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) ds.$$

Finalement,

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial \log f_{\mathcal{H}_\tau}(\mathcal{H}_\tau^1)}{\partial a_{ij}} \right)^2 \right] = \frac{1}{a^2(i, j)} \int_0^\infty a_{ij} \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) ds f_\tau(t) dt, \quad (4.43)$$

ce qui est égal à $(\sigma^2(i, j))^{-1}$. Ainsi, $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ est asymptotiquement efficace lorsque le nombre de trajectoires K tend vers l'infini.

4.2.4 Fiabilité des processus markoviens censurés

Au-delà de l'utilisation privilégiée dans le cadre des systèmes dynamiques stochastiques, les résultats développés dans la partie précédente sont d'importance pour l'estimation des mesures de fiabilité associées à un système markovien à espace d'état fini. Nous décrivons brièvement la théorie de la fiabilité des systèmes markoviens et nous donnons des estimateurs pour les mesures de fiabilité, basés sur l'EMV du générateur obtenu dans le cas de la censure indépendante des observations. Nous démontrons les propriétés de convergence et de normalité asymptotique de ces estimateurs.

Nous considérons un système modélisé par un processus de Markov X_t d'espace d'état fini $E = \{1, \dots, r, \dots, s\}$ partitionné en deux sous-ensembles : un ensemble $U = \{1, \dots, r\}$ définissant les bons états du système et un ensemble $D = \{r + 1, \dots, s\}$ définissant les états de panne. Le générateur \mathbf{A} et la loi initiale α du processus sont partitionnés de la sorte :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} U & D \\ \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} U \\ D \end{matrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} U & D \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Nous rappelons les définitions classiques des principaux indicateurs de fiabilité d'un système et leurs expressions particulières dans le cas d'un système markovien à espace d'état fini (voir par exemple Balakrishnan et al. 2001). Notons $\mathbf{1}_r$ un vecteur colonne de dimension r dont les éléments sont tous égaux à 1 et $\mathbf{1}_{s,r}$ un vecteur colonne de dimension s dont les r premiers éléments sont égaux à 1, alors que les $s - r$ restant sont nuls.

– La *fiabilité*, notée $R(t)$, est donnée par

$$R(t) = \mathbb{P}(X_s \in U, 0 \leq s \leq t) = \alpha_1 \exp(t\mathbf{A}_{11})\mathbf{1}_r. \quad (4.44)$$

– La *disponibilité*, notée $A(t)$ est donnée par

$$A(t) = \mathbb{P}(X_t \in U) = \alpha \exp(t\mathbf{A})\mathbf{1}_{s,r}. \quad (4.45)$$

– Le *taux de défaillance*, noté $\lambda(t)$, est donnée par

$$\lambda(t) = \begin{cases} -\frac{dR(t)}{dt} / R(t) = -\frac{\alpha_1 \exp(t\mathbf{A}_{11})\mathbf{A}_{11}\mathbf{1}_r}{\alpha_1 \exp(t\mathbf{A}_{11})\mathbf{1}_r} & \text{si } R(t) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.46)$$

Nous cherchons donc à trouver des estimateurs lorsque K trajectoires du système markovien sont censurées par la variable τ , dans le cas indépendant.

Comme suggéré par Sadek et Limnios (2005), nous proposons comme estimateurs pour les indicateurs de la fiabilité ceux obtenus en remplaçant dans les expressions (4.44), (4.45) et (4.46) le générateur \mathbf{A} par l'EMV $\hat{\mathbf{A}}$. De même, nous obtenons un estimateur pour la fonction de transition $P_{ij}(t)$ de X_t , en remplaçant la valeur du générateur par son estimateur dans les équations de Kolmogorov. Nous obtenons les estimateurs suivants, définis pour $t \geq 0$:

- un estimateur de la fonction de transition de X_t

$$\hat{P}_{ij}(t; K, \tau) = (\exp(t\hat{\mathbf{A}}))_{ij}, \quad (4.47)$$

- un estimateur de la fiabilité

$$\hat{R}(t; K, \tau) = \alpha_1 \exp(t\hat{\mathbf{A}}_{11})\mathbf{1}_r, \quad (4.48)$$

- un estimateur de la disponibilité

$$\hat{A}(t; K, \tau) = \alpha \exp(t\hat{\mathbf{A}})\mathbf{1}_{s,r}, \quad (4.49)$$

- un estimateur du taux de défaillance

$$\hat{\lambda}(t; K, \tau) = \begin{cases} -\frac{\alpha_1 \exp(t\hat{\mathbf{A}}_{11})\hat{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{1}_r}{\alpha_1 \exp(t\hat{\mathbf{A}}_{11})\mathbf{1}_r} & \text{si } R(t) > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.50)$$

Nous obtenons immédiatement un résultat de convergence.

Théorème 4.3 *Soient K trajectoires indépendantes d'un système markovien irréductible à espace d'état fini. Pour τ une variable aléatoire de censure à valeurs dans \mathbb{R}_+ telle que $f_\tau(t) \neq \delta(t)$, les estimateurs (4.47), (4.48), (4.49) et (4.50) sont fortement convergents pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé :*

- i) $\hat{P}_{ij}(t; K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} P_{ij}(t), \quad i, j \in E,$
- ii) $\hat{R}(t; K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} R(t),$
- iii) $\hat{A}(t; K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} A(t),$
- iv) $\hat{\lambda}(t; K, \tau) \xrightarrow[K \rightarrow \infty]{p.s.} \lambda(t).$

Démonstration. Pour l'estimateur $\hat{P}_{ij}(t; \tau, K)$, il suffit de remarquer que $P_{ij}(t; K, \tau)$ s'écrit comme une fonction continue de a_{ij} . Ainsi, la convergence de $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ pour $K \rightarrow \infty$ du théorème 4.2 couplé au lemme 4.1 entraîne la convergence de $\hat{P}_{ij}(t; K, \tau)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Il en est de même pour les estimateurs $\hat{R}(t)$, $\hat{A}(t)$ et $\hat{\lambda}(t)$. \square

Théorème 4.4 *Soient K trajectoires du système markovien à espace d'état fini et τ une variable aléatoire de censure à valeurs dans \mathbb{R}_+ de densité $f_\tau(t) \neq \delta(t)$.*

i) Pour $t \geq 0$, la suite de variables aléatoires $\sqrt{K}(\widehat{P}_{ij}(t; K, \tau) - P_{ij}(t))$ est asymptotiquement normale lorsque $K \rightarrow \infty$, de moyenne nulle et de variance

$$\sigma_{\widehat{P}}^2(t; i, j, p, q) = \sum_{\substack{u, v \in E \\ u \neq v}} \Psi(t; i, j, p, q, u, v). \quad (4.51)$$

ii) Pour $t \geq 0$, la suite de variables aléatoires $\sqrt{K}(\widehat{R}(t; K, \tau) - R(t))$ est asymptotiquement normale lorsque $K \rightarrow \infty$, de moyenne nulle et de variance

$$\sigma_{\widehat{R}}^2(t) = \sum_{\substack{i, p \in U \\ j, q \in U}} \alpha(i)\alpha(p) \sum_{\substack{u \in U, v \in E \\ u \neq v}} \Psi(t; i, j, p, q, u, v). \quad (4.52)$$

iii) Pour $t \geq 0$, la suite de variables aléatoires $\sqrt{K}(\widehat{A}(t; K, \tau) - A(t))$ est asymptotiquement normale lorsque $K \rightarrow \infty$, de moyenne nulle et de variance

$$\sigma_{\widehat{A}}^2(t) = \sum_{\substack{i, p \in E \\ j, q \in U}} \alpha(i)\alpha(p) \sum_{\substack{u, v \in E \\ u \neq v}} \Psi(t; i, j, p, q, u, v). \quad (4.53)$$

iv) Pour $t \geq 0$, la suite de variables aléatoires $\sqrt{K}(\widehat{\lambda}(t; K, \tau) - \lambda(t))$ est asymptotiquement normale lorsque $K \rightarrow \infty$, de moyenne nulle et de variance

$$\sigma_{\widehat{\lambda}}^2(t) = \sum_{\substack{u, v \in U \\ u \neq v}} a(u, v) \Psi_{\lambda}^2(t; u, v) \Big/ \int_0^{\infty} \int_0^x \mathbb{P}(X_s = u) ds f_{\tau}(x) dx. \quad (4.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi(t; i, j, p, q, u, v) &= \left[\sum_{n>0} \frac{t^n}{n!} \sum_{h=1}^n \left(-a_{iu}^{h-1} a_{uj}^{n-h} + a_{iu}^{h-1} a_{vj}^{n-h} \right) \right] \\ &\times \left[\sum_{n>0} \frac{t^n}{n!} \sum_{h=1}^n \left(-a_{pu}^{h-1} a_{uq}^{n-h} + a_{pu}^{h-1} a_{vq}^{n-h} \right) \right] \\ &\times a(u, v) \Big/ \int_0^{\infty} \int_0^x \mathbb{P}(X_s = u) f_{\tau}(x) ds dx \quad (4.55) \end{aligned}$$

où a_{ij}^h est l'élément (i, j) de la matrice \mathbf{A}^h , et

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda}(t; u, v) &= \\ &= -\frac{1}{R(t)} \sum_{i, j \in U} \alpha(i) \left\{ \lambda(t) \left[\sum_{n>0} \frac{t^n}{n!} \sum_{h=1}^n \left(-a_{iu}^{h-1} a_{uj}^{n-h} + a_{iu}^{h-1} a_{vj}^{n-h} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in U} \left[\sum_{n>0} \frac{t^n}{n!} \sum_{h=1}^n \left(-a_{iu}^{h-1} a_{uk}^{n-h} + a_{iu}^{h-1} a_{vk}^{n-h} \right) a_{kj} \right] \right\}. \quad (4.56) \end{aligned}$$

Démonstration. La démarche est similaire à Sadek et Limnios (2005); seul le terme

$$a(u, v) \Big/ \int_0^{\infty} \int_0^x \mathbb{P}(X_s = u) ds f_{\tau}(x) dx$$

diffère au cours des calculs, puisqu'il est le seul faisant intervenir le temps de censure. \square

4.3 ILLUSTRATIONS NUMÉRIQUES

Dans un premier temps, nous proposons une application numérique illustrant les bonnes propriétés des estimateurs du générateur et des mesures de fiabilité d'un système markovien à espace d'état fini observé sur des trajectoires avec censure aléatoire indépendante du processus.

Dans un second temps, nous utilisons ces résultats pour estimer la composante markovienne de saut d'un système dynamique lorsque l'on dispose de trajectoires d'un processus de dégradation observé jusqu'à l'entrée dans la zone défaillance.

4.3.1 Processus markovien de saut avec censure aléatoire

Pour les simulations numériques, nous utilisons un processus markovien de saut d'espace d'état $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de graphe d'état donné à la figure 2.4, de générateur (2.25) et de loi initiale (2.24) (confer section 2.4.1). Les ensembles de bon fonctionnement et de panne U et D sont définis par

$$U = \{1, 2, 3, 4\}, \quad D = \{5\},$$

c'est-à-dire que seul l'état 5 est défaillant.

Nous générons un jeu de données de K trajectoires de ce système en les censurant par une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\mu = 0.01$. Le temps de censure moyen est donc de 100. Les trajectoires simulées sont ensuite utilisées pour estimer le générateur à l'aide de l'estimateur du maximum de vraisemblance (4.30), dont nous étudions le comportement numérique avant de l'utiliser pour estimer les mesures de la fiabilité du système.

Estimation du générateur

Nous commençons par écrire un intervalle de confiance pour $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ en fonction du nombre K de trajectoires simulées. D'après le théorème 4.2.c, pour un couple $(i, j) \in E^2$ fixé tel que $i \neq j$, la variable $\sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij})$ est asymptotiquement normale lorsque $K \rightarrow \infty$, de moyenne nulle et de variance donnée le cas échéant par

$$\begin{aligned} \sigma^2(i, j) &= a_{ij} \int_0^\infty \int_0^t \mathbb{P}(X_s = i) ds f_\tau(t) dt \\ &= a_{ij} \int_0^\infty \int_0^t \alpha \exp(s\mathbf{A}) \mathbf{e}_i \mu \exp(-\mu s) ds dt, \end{aligned}$$

où \mathbf{e}_i est le i^e vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^5 . Nous proposons l'estimateur suivant pour la variance :

$$\hat{\sigma}^2(i, j; K, \tau) = \hat{a}_{ij}(K, \tau) \left(\int_0^\infty \int_0^t \alpha \exp(s\hat{\mathbf{A}}) \mathbf{e}_i \hat{\mu}(K, \tau) \exp(-\hat{\mu}(K, \tau)s) ds dt \right)^{-1}, \quad (4.57)$$

où $\hat{\mathbf{A}}$ est l'estimateur du générateur et $\hat{\mu}(K, \tau)$ l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre μ , donné par

$$\hat{\mu}(K, \tau) = \frac{1}{\bar{\tau}}, \quad \text{avec } \bar{\tau} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \tau^k. \quad (4.58)$$

Cet estimateur existe uniquement quand l'état i a été visité au moins une fois sur les K trajectoires, c'est-à-dire lorsque $v_i(K, \tau) > 0$.

Les propriétés asymptotiques de $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ et l'estimateur (4.57) de σ^2 nous permettent d'écrire pour a_{ij} l'intervalle de confiance asymptotique suivant :

$$\left[\hat{a}_{ij}(K, \tau) - u_{1-\gamma/2} \frac{\hat{\sigma}(i, j; K, \tau)}{\sqrt{K}}; \hat{a}_{ij}(K, \tau) + u_{1-\gamma/2} \frac{\hat{\sigma}(i, j; K, \tau)}{\sqrt{K}} \right], \quad (4.59)$$

où u_γ est le fractile d'ordre γ de la loi normale centrée réduite.

À l'aide des résultats statistiques obtenus ci-dessus, nous pouvons représenter les éléments $\{\hat{a}_{ij}(K, \tau)\}_{i \neq j}$ du générateur estimé et les intervalles de confiance associés en fonction du nombre K de trajectoires utilisées pour la procédure d'estimation. Nous avons tracé ces grandeurs pour l'élément a_{12} du générateur à la figure 4.3. Nous avons également représenté l'estimateur de la variance pour l'élément a_{12} à la figure 4.4.

Les résultats pour les autres éléments du générateur sont du même ordre bien que la vitesse de convergence de chaque élément dépende du système. Par exemple, dans le cas présent, les états 1 et 2 sont plus visités que l'état 5 de par la nature du processus markovien associé au système. Ainsi, sur un même intervalle de temps, et par extension sur un même jeu de trajectoires, on observe en général plus de transitions de l'état 1 vers l'état 2 que de 5 vers 4. Cela implique une convergence moins rapide pour $\hat{a}_{54}(K, \tau)$ que pour $\hat{a}_{12}(K, \tau)$ vers la vraie valeur du générateur, par rapport à la longueur des trajectoires.

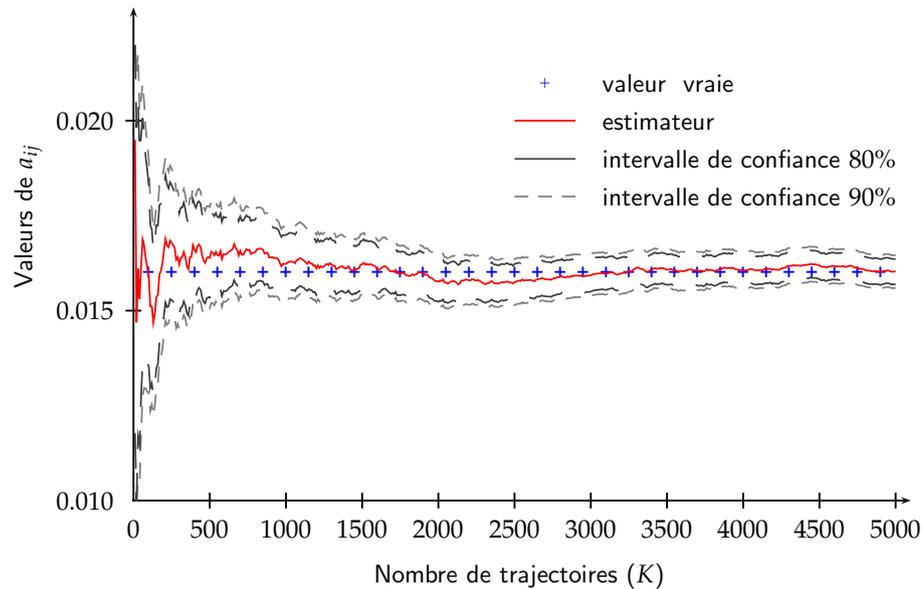


Fig. 4.3 – Estimateur de l'élément a_{12} du générateur

Une autre manière d'évaluer la vitesse de convergence de $\hat{a}_{ij}(K, \tau)$ est d'observer le niveau d'une fonction d'erreur entre l'estimateur et a_{ij} . Nous proposons d'estimer l'erreur moyenne quadratique (ou *Mean squared error*: voir par exemple Härdle 1990) adaptée à notre contexte :

$$\text{MSE}(K) = \sum_{\substack{i, j \in E \\ i \neq j}} \mathbb{E} \left[(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij})^2 \right]. \quad (4.60)$$

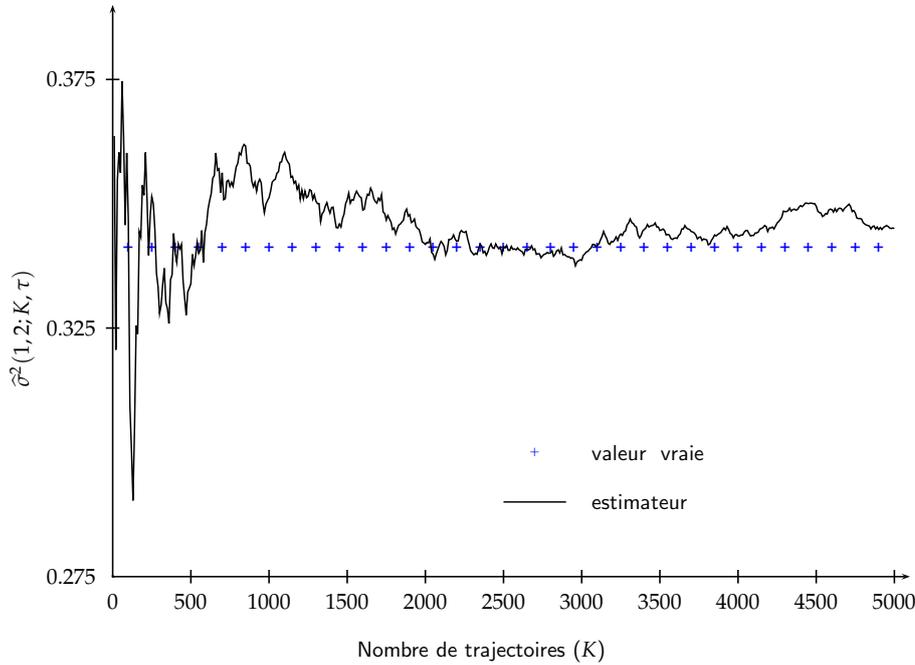


Fig. 4.4 – Estimateur de la covariance σ_{12}

Notons G_{ij} la fonction de répartition de la variable aléatoire $\sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij})$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij})^2] &= \frac{1}{K} \mathbb{E}[(\sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij}))^2] \\ &= \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij}))^2 dG_{ij}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Lorsque $v_i(K, \tau) > 0$, nous utilisons la normalité asymptotique de la variable aléatoire $\sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij})$ définie pour tout $i \neq j$. La fonction de répartition G_{ij} peut être estimée par sa valeur asymptotique, c'est-à-dire par une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2 dont l'estimateur est donné par (4.57). De plus, en remarquant que l'intégrale (4.61) correspond au moment d'ordre deux de $\sqrt{K}(\hat{a}_{ij}(K, \tau) - a_{ij})$, nous obtenons l'estimateur suivant pour l'erreur moyenne quadratique.

$$\widehat{\text{MSE}}(K) = \frac{1}{K} \sum_{\substack{i,j \in E \\ i \neq j}} \hat{\sigma}^2(i, j; K, \tau). \quad (4.62)$$

Nous représentons les résultats à la figure 4.5. On peut constater le bon comportement de l'estimateur $\hat{\mathbf{A}}$ du générateur.

Fiabilité des systèmes markoviens censurés

Nous utilisons les estimateurs des mesures de fiabilité donnés par les équations (4.48), (4.49) et (4.50), en partitionnant convenablement le générateur et la loi initiale sur les ensembles U et D .

Les résultats sont tracés aux figures 4.6, 4.7 et 4.8 pour différents nombres de trajectoires utilisées dans la procédure d'estimation. Nous indiquons également le nombre total de sauts effectués par le processus

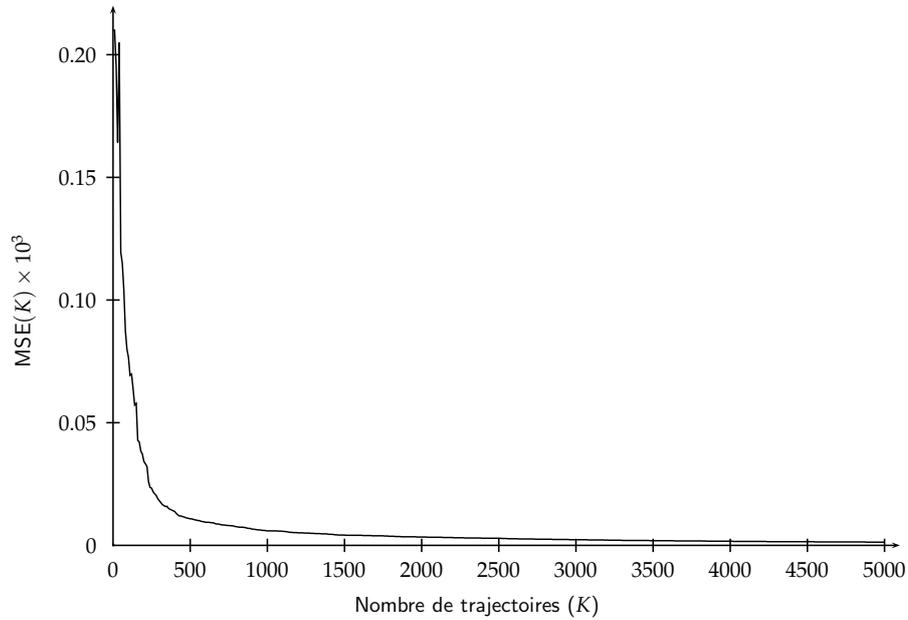


Fig. 4.5 – Erreur moyenne quadratique sur l'estimateur du générateur (MSE)

puisque les trajectoires n'ont pas la même longueur dans le cas d'une censure aléatoire.

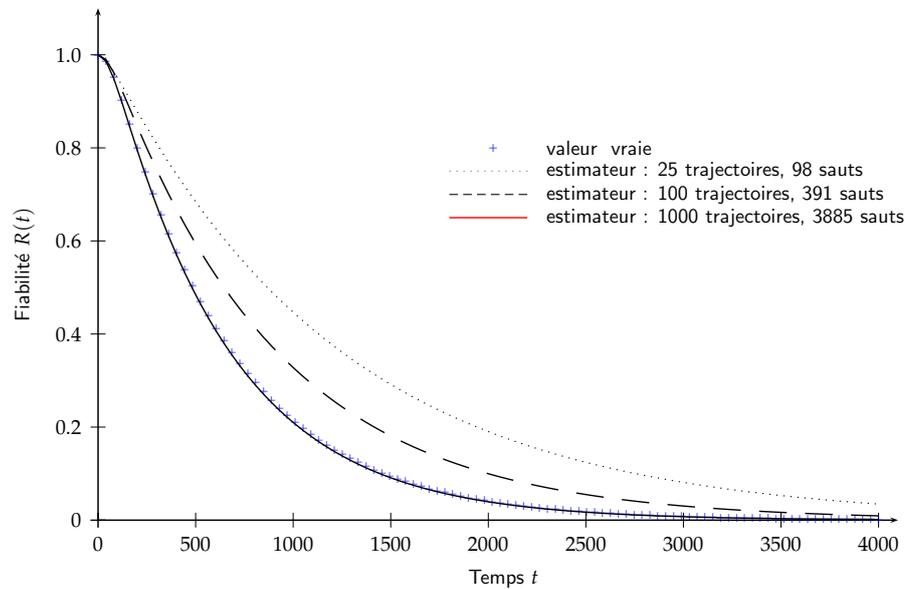


Fig. 4.6 – Estimateur de la fiabilité du système

On peut constater le bon comportement des estimateurs de la fiabilité, de la disponibilité et du taux de défaillance. Nous soulignons que ces estimateurs sont satisfaisants même pour des instants du temps largement supérieurs au temps de censure (la fiabilité est calculée jusqu'à des instants $t = 4000$ unités de temps, alors que le temps moyen de censure est de 100 unités de temps). Nous pouvons nous y attendre de par les résultats de convergence obtenus au théorème 4.4 et au lemme 4.1.

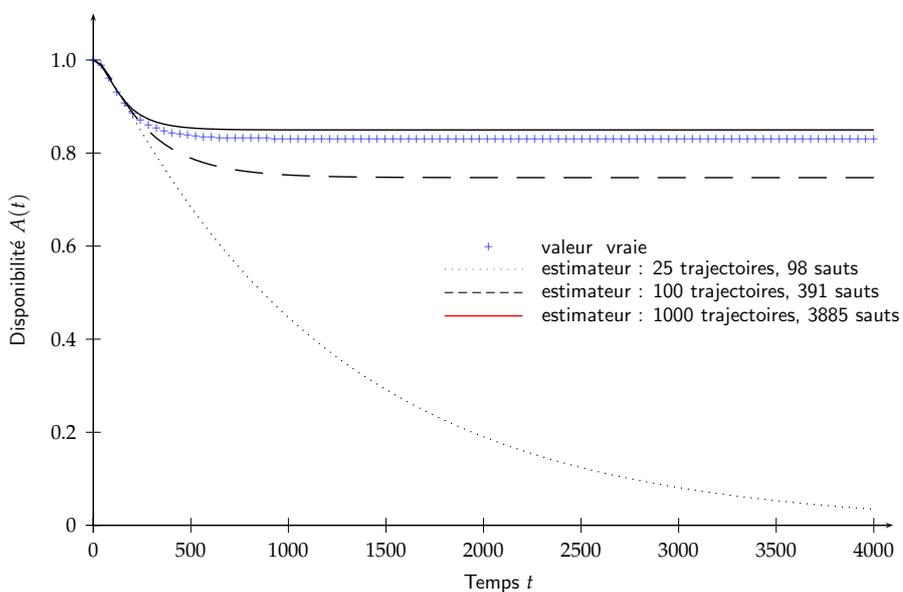


Fig. 4.7 – Estimateur de la disponibilité du système

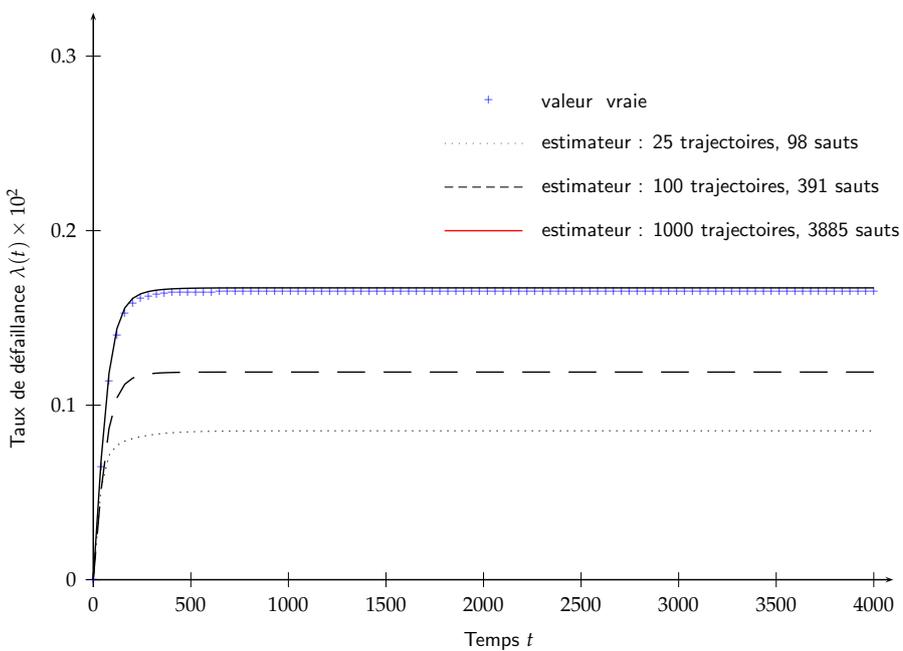


Fig. 4.8 – Estimateur du taux de défaillance du système

4.3.2 Estimation des systèmes dynamiques

L'application des méthodes d'estimation des processus de Markov où la censure est indépendante du processus conduit à un estimateur du maximum de vraisemblance approchée lorsqu'on l'applique à l'estimation du générateur de la composante markovienne de saut du PMDM observé jusqu'à la défaillance. Le recours au numérique nous permet de voir comment cet estimateur se comporte pratiquement.

Nous générons un ensemble de trajectoires à partir d'un système entièrement connu afin de comparer des grandeurs estimées sur le système théorique et sur le système dont on estime la composante markovienne. À l'aide du système dynamique (2.22) utilisé lors de l'application numérique de la section 2.4.1, nous générons un ensemble de données *d'apprentissage* composé de 100 trajectoires telles que celles apparaissant à la figure 2.5. Elles sont considérées comme étant les seules données disponibles. Nous cherchons à proposer un modèle qui reproduise le comportement du système théorique. Nous utilisons le modèle suivant

$$\begin{cases} \dot{Z}_t = aZ_t \times X_t, \\ Z_0 = z, \end{cases} \quad (4.63)$$

où les paramètres a et z sont connus. Il reste à estimer l'espace d'état du processus markovien de saut X_t , son générateur et sa loi initiale.

On réalise successivement :

1. l'estimation des dérivées \dot{Z}_t^k à l'aide de (4.4) ;
2. l'estimation des \tilde{X}_t^k à l'aide de la fonction G définie dans le cas général par (4.2), qui lie Z_t , X_t et \dot{Z}_t . Dans le cas présent,

$$\tilde{X}_t^k = \frac{1}{a} \left(Z_t^k \right)^{-1} \times \hat{Z}_t^k; \quad (4.64)$$

3. l'estimation et la réduction de l'espace d'état, pour obtenir des trajectoires \hat{X}_t^k à valeurs dans un espace \hat{E} , à l'aide de l'algorithme des centres mobiles décrit à la section 3.1.2. ;
4. l'estimation du générateur \mathbf{A} sur les trajectoires \hat{X}_t^k , en utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance approchée (4.25).

Pour l'estimation de l'espace d'état de la composante aléatoire, nous avons représenté à la figure 4.9 la valeur de l'erreur finale (4.6) de la méthode des centres mobiles réalisée pour divers nombres de classes. On remarque sur cette figure une stabilisation complète de l'erreur commise au-delà de 5 classes. Même sans connaissance *a priori* sur le système, ce choix est visiblement le plus valable dans le cas de cet exemple numérique simple.

Ainsi pour 5 classes, c'est-à-dire 5 états pour X_t , l'algorithme donne

$$\hat{E} = \{0.4998928, 1.0000043, 1.499983, 2.0000958, 4.0097199\}, \quad (4.65)$$

ce qui est très proche de l'espace d'état théorique $E = \{0.5, 1, 1.5, 2, 4\}$. Lorsque nous choisissons un nombre de classes supérieur à 5, les résultats de la méthode de classification confirme un espace d'état à 5 modes : en

effet, si nous appliquons l'algorithme des centres mobiles avec 10 classes, nous obtenons

$$\hat{E} = \{0.5, 0.5, 0.5, 1.0000001, 1.0000001, 1, 1.5000028, 1.9999998, 2, 4.0099504\}.$$

Il est clair dans ce cas que nous obtenons les 5 mêmes modes pour l'espace d'état de X_t , puisque les 10 classes obtenues sont simplement des redondances parmi 5. Le choix de 5 états pour l'espace E est donc valable *a posteriori*, et nous le conservons dans la suite de l'application numérique.

Nous avons représenté à la figure 4.10 les fréquences normalisées de visites d'état sur les trajectoires X_t^k de la composante markovienne théorique, issue de l'ensemble d'apprentissage, ainsi que celles obtenues sur les trajectoires estimées \hat{X}_t^k . La fréquence normalisée dans un état $i \in E$ sur K trajectoires est donnée par

$$\text{fr}_i(K) = \frac{v_i(K)}{\sum_{j \in E} v_j(K)}.$$

On peut noter la bonne similarité des résultats.

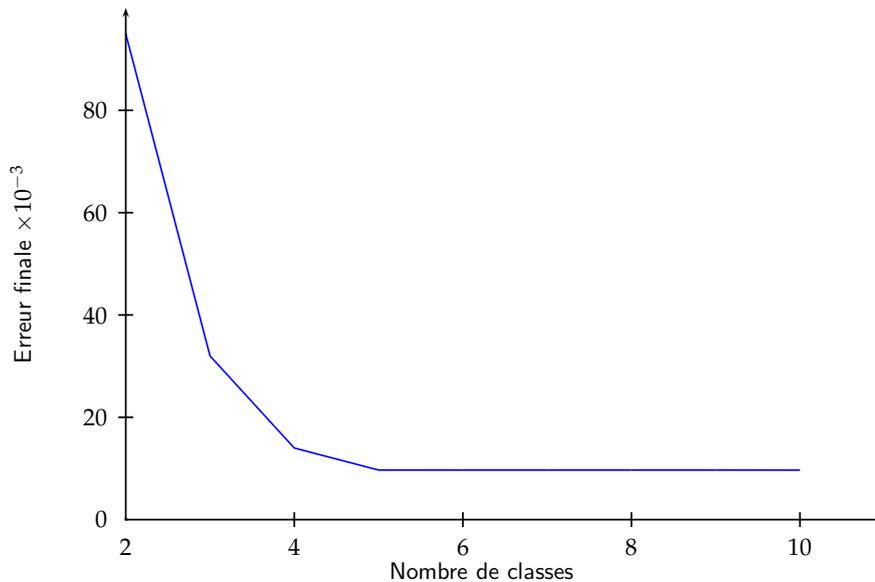


Fig. 4.9 – Erreur finale de la méthode des centres mobiles pour différents nombres de classes

Nous calculons l'EMV $\hat{\mathbf{A}}$ sur les trajectoires X_t^k . Pour la loi initiale, nous utilisons l'estimateur suivant :

$$\hat{\alpha}(i) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{\{\hat{X}_0^k=i\}}, \forall i \in E. \quad (4.66)$$

C'est l'estimateur du maximum de vraisemblance lorsque que τ est indépendant de \mathbf{A} .

Par ailleurs, il peut être intéressant de vérifier que la méthode d'estimation conserve le caractère markovien du processus markovien de saut sous jacent. Pour se faire, considérons les trajectoires \hat{X}_t^k sur l'espace d'état

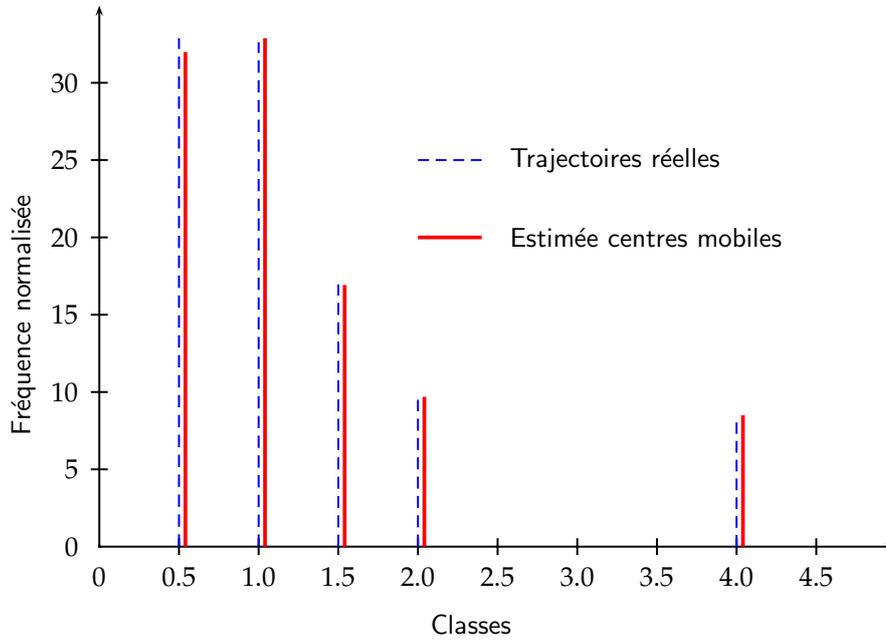


Fig. 4.10 – Histogramme des fréquences de visites des états théoriques et estimés

estimé : nous associons à chacune des K trajectoires les chaînes \widehat{W}_n^k , pour $k = 1, \dots, K$ et pour $n = 0, \dots, \widehat{N}(\tau^k) - 1$, décrivant les temps de séjour sur les trajectoires estimées. Nous multiplions alors chaque \widehat{W}_n^k par $\widehat{a}_{j_n^k} = -\widehat{\mathbf{A}}_{j_n^k, j_n^k}$ qui correspond au taux de sortie estimé de l'état de départ j_n^k . Soit Λ_n^k la chaîne ainsi formée, c'est-à-dire

$$\Lambda_n^k = \widehat{W}_n^k \times \widehat{a}_{j_n^k}.$$

Si le processus estimé est bien markovien, les Λ_n^k pour $n = 0, \dots, \widehat{N}(\tau^k), k = 1, \dots, K$, sont des échantillons de loi d'exponentielle de paramètre 1. Un test de Kolmogorov-Smirnov permet de vérifier cette hypothèse : nous avons représenté à la figure 4.11 la fonction de répartition empirique calculée sur les Λ_n^k ainsi que la fonction de répartition d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Le test de Kolmogorov-Smirnov confirme la bonne impression visuelle laissée par cette figure, puisque l'on conserve l'hypothèse H_0 de répartition exponentielle au niveau de risque $\alpha^* = 1\%$.

Enfin, il convient de tester les performances de l'estimation du système dynamique. Pour ce faire, nous estimons la fiabilité et les fonctions de répartition des variables Z_t et T_x définies aux équations (2.18), (2.30) et (2.32) à l'aide des estimateurs empiriques (2.38), (2.31) et (2.33). Étant donné que le système (4.63) a la même forme que celui utilisé lors de l'application numérique du chapitre deux, nous utilisons la procédure optimisée construite sur le processus V_t du cumul des coûts : nous n'avons pas à simuler de trajectoires de Z_t . Nous générons uniquement des trajectoires de \widehat{X}_t , dont nous avons estimé le générateur, et du processus $V_t = \int_0^t \widehat{X}_s ds$ de cumul des coûts à l'aide de l'algorithme 2. De ces tra-

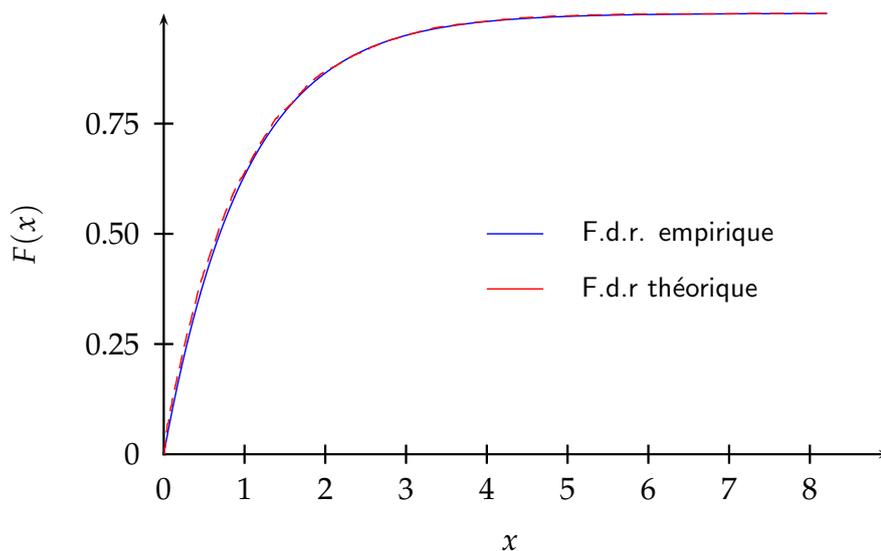


Fig. 4.11 – Fonctions de répartition empirique et théorique des temps séjour normalisés

jectoires, nous calculons les estimateurs empiriques de la fiabilité et des fonctions de répartition de Z_t et de T_x comme décrit à la section 2.4.3.

Nous comparons ces résultats avec les mêmes estimateurs calculés sur le jeu de données d'apprentissage. Les résultats sont présentés aux figures 4.12, 4.13 et 4.14. On note la convergence rapide vers les valeurs empiriques à l'aide du système estimé. Par ailleurs, on remarque que la modélisation permet de *lisser* les estimateurs, témoignant qu'on ne fait pas de « sur-apprentissage » sur les données réelles.

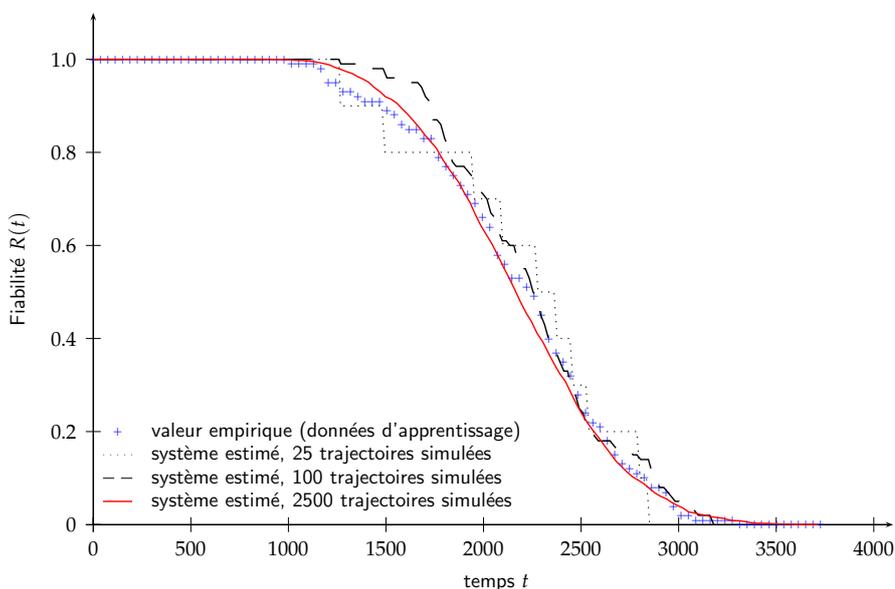


Fig. 4.12 – Estimateur de la fiabilité du système, ensemble d'apprentissage de 100 trajectoires

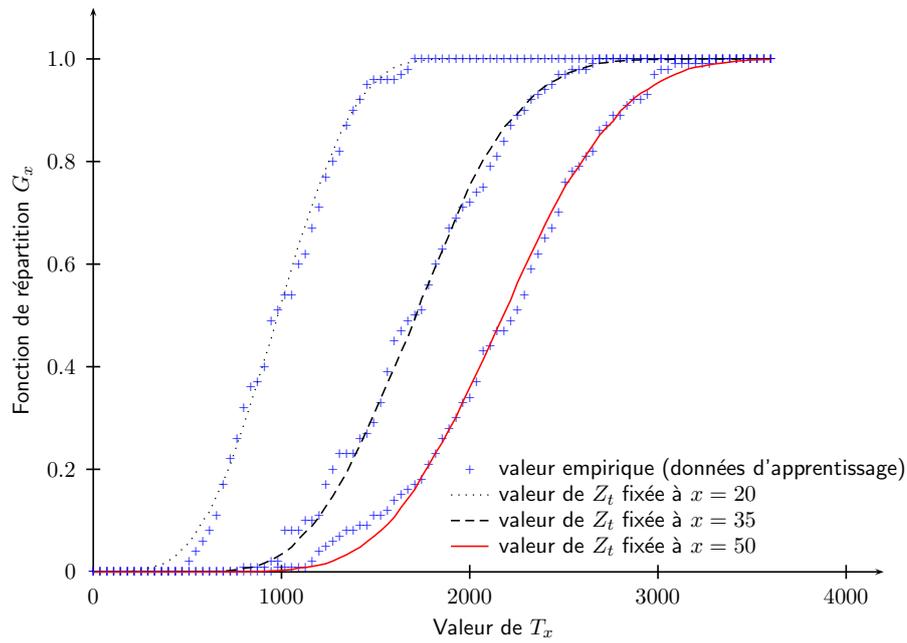


Fig. 4.13 – Estimation des fonctions de répartition de T_x

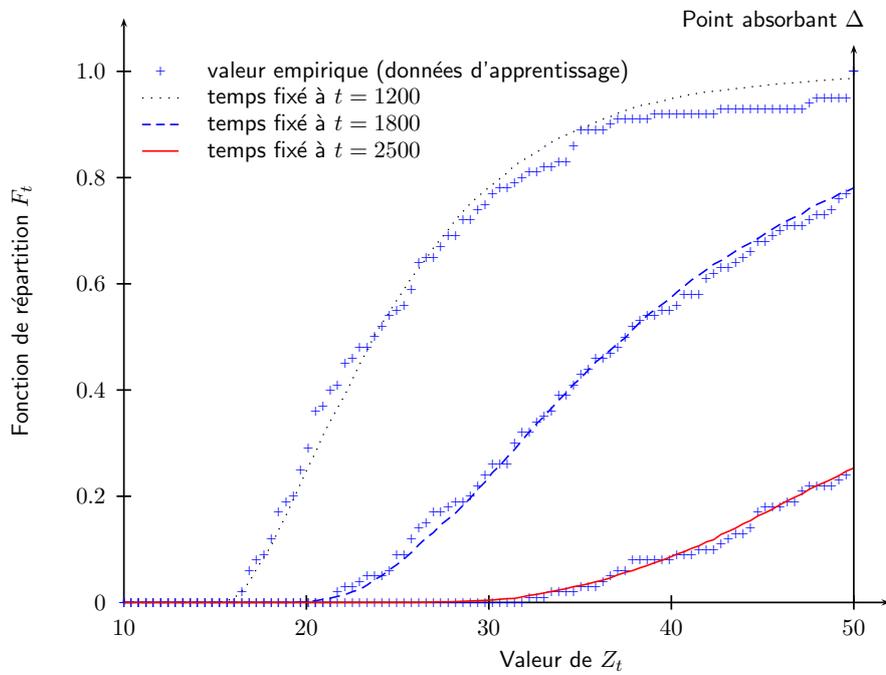


Fig. 4.14 – Estimation des fonctions de répartition de Z_t

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons proposé des méthodes pour l'estimation de la composante de saut d'un PMDM. En particulier, des résultats d'estimation des processus markoviens de saut censurés aléatoirement ont été développés. Nous avons donné des résultats pour les estimateurs de la fiabilité. Des illustrations numériques ont été proposées pour la problématique sous-jacente de la fiabilité des systèmes markoviens censurés, et pour l'estimation des systèmes dynamiques stochastiques.

Lorsque les trajectoires du système dynamique sont observées jusqu'à la défaillance du système, les trajectoires de la composante de saut sont de longueur aléatoire et il existe une dépendance entre la longueur et le processus lui-même. Cette dépendance a été négligée dans ce chapitre mais nous avons vu que les applications numériques donnaient tout de même de bons résultats.

APPLICATIONS

5

SOMMAIRE

5.1	PROPAGATION DES FISSURES MODÉLISÉE PAR UN PMDM	109
5.1.1	Estimation des paramètres de la loi de propagation	109
5.1.2	Estimation du processus markovien de saut	113
5.2	RÉSULTATS ET COMPARAISON AVEC UN MODÈLE EXISTANT . . .	118
5.2.1	Intégration du modèle	118
5.2.2	Modèle de diffusion pour la propagation des fissures . . .	121
5.2.3	Fiabilité du système et répartition des fissures	123
5.2.4	Remarques sur l'implémentation numérique	124
	CONCLUSION	125

C E chapitre est l'occasion de confronter les modèles et les méthodes de calcul proposés au cours de la thèse à un jeu de données réelles. Nous modélisons le phénomène de propagation des fissures décrit à la section 1.3 du premier chapitre à l'aide d'un système dynamique décrivant l'accroissement des fissures. Ce système gouverne l'évolution d'un processus de Markov déterministe par morceaux. Nous utilisons successivement les propriétés asymptotiques du PMDM et les méthodes développées au cours de ce mémoire pour estimer l'espace d'état et le générateur du processus markovien de saut sous-jacent. Nous calculons la fiabilité estimée du système et la répartition des fissures au cours du temps. Nous comparons ces résultats avec les données et avec les résultats d'un modèle existant, bâti sur une approximation du processus de taille de fissures par un processus de diffusion.

5.1 PROPAGATION DES FISSURES MODÉLISÉE PAR UN PMDM

La problématique de propagation des fissures a été présentée en détail à la section 1.3. Nous cherchons ici à fournir un modèle qui reproduise le comportement de la population de fissures observée par Virkler et al. (1979), représentée à la figure 1.4. La validation de nos modèles sur un jeu de données réelles est indispensable avant un développement plus poussé et avant d'envisager son utilisation dans un contexte industriel.

Nous proposons de représenter l'évolution de la taille des fissures par un PMDM, puisqu'il traduit bien l'hypothèse physique de variations brutales dans l'évolution de l'accroissement de la taille des fissures.

Nous nous basons sur la version stochastique (1.8) du modèle de Paris-Erdogan, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{dZ_t}{dt} = a (Z_t)^b \times X_t, \\ Z_0 = z, \end{cases} \quad (5.1)$$

où X_t est un processus markovien de saut d'espace d'état E fini, de générateur \mathbf{A} et de loi initiale α . Les paramètres $a > 0$ et $b > 0$ sont à estimer sur les données disponibles de même que le processus X_t . Nous disposons de 68 trajectoires de propagation du processus de dégradation Z_t , c'est-à-dire de K copies indépendantes $(Z_t^k)_{k=1,\dots,K}$ avec $K = 68$. Chaque trajectoire comporte 164 points de discrétisation du temps. Les trajectoires sont mesurées jusqu'au seuil Δ correspondant à une taille critique de fissure, définissant le domaine de défaillance (voir la section 1.3.2 pour le détail des spécifications des mesures de laboratoire).

Nous avons choisi de fonder le modèle stochastique de propagation des fissures sur le modèle phénoménologique de Paris-Erdogan car il est le plus utilisé et qu'il s'adapte à différents types de matériaux. Il a été appliqué dans le cadre d'études de mécanique des structures à une large classe de matériaux. C'est en particulier le cas de l'acier qui est le matériau le plus répandu pour les composants sensibles susceptibles de se dégrader dans les centrales nucléaires (voir par exemple Marshall 1976-1982, Dufresne et al. 1983, Provan 1987).

Remarque 5.1 *Pour le jeu de données de Virkler, certains auteurs (Kung et Ortiz 1990, Spencer 1993) ont montré que la loi de propagation (1.6c) était plus adaptée; cependant, nous perdons avec cette loi la possibilité de calcul analytique et surtout le potentiel de généralisation du modèle de Paris-Erdogan à d'autres jeux de données pour d'autres matériaux.*

5.1.1 Estimation des paramètres de la loi de propagation

La plupart des modèles stochastiques de propagation de fissures repose sur l'adjonction d'un processus aléatoire paramétrique multiplicatif; ainsi l'estimation des paramètres a et b se fait en même temps que les paramètres de la composante aléatoire (voir Spencer 1993, pour quelques méthodes d'estimation adaptées à cette problématique). Dans notre modèle, l'estimation porte également sur le générateur et la loi initiale du processus de markovien de saut X_t , et nous devons adopter une stratégie différente.

Nous proposons d'estimer dans un premier temps les paramètres de la loi de propagation des fissures en raisonnant sur le processus déterministe asymptotique, à l'aide du principe de Bogolyubov (voir section 2.2.3). Le processus asymptotique correspond à la courbe de propagation « moyenne » sur laquelle se fait l'estimation des paramètres de la loi de Paris-Erdogan.

Nous considérons le système asymptotique associé au modèle (5.1) en réalisant le changement d'échelle $t \rightarrow t/\varepsilon$, « accélérant » la composante aléatoire X_t :

$$\begin{cases} \frac{dZ_t^\varepsilon}{dt} = a (Z_t^\varepsilon)^b \times X_{t/\varepsilon}, \\ Z_0^\varepsilon = z. \end{cases} \quad (5.2)$$

L'espace d'état E est supposé fini et le processus X_t ergodique. Il admet donc une loi stationnaire π . Ainsi, d'après le théorème 2.2, le processus Z_t^ε converge faiblement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ vers un processus déterministe asymptotique \tilde{z}_t , gouverné par le système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}_t}{dt} &= \sum_{i \in E} a (\tilde{z}_t)^b \times \pi(i) \times i \\ &= a (\tilde{z}_t)^b \sum_{i \in E} \pi(i) \times i = a (\tilde{z}_t)^b \mathbb{E}_\pi X_t, \end{aligned}$$

où \mathbb{E}_π est l'espérance sur la loi stationnaire π . En notant $a_0 = a \mathbb{E}_\pi X_t$, nous avons

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{z}_t}{dt} = a_0 (\tilde{z}_t)^b, \\ \tilde{z}_0 = z. \end{cases} \quad (5.3)$$

Le système différentiel (5.3) est un cas particulier d'équation différentielle de Bernoulli. Ici a_0 et b sont des réels strictement positifs avec $\tilde{z}_t > 0$.

- Lorsque $b = 1$, la solution associée à la condition initiale $\tilde{z}_0 = z > 0$ est

$$\tilde{z}_t = z \exp \{a_0 t\}.$$

- Lorsque $b \neq 1$, l'intégration de (5.3) sur l'intervalle $[0, t]$ donne

$$\int_z^{\tilde{z}_t} (\tilde{z}_s)^{-b} d\tilde{z}_s = a_0 \int_0^t ds \Leftrightarrow z^{1-b} - (\tilde{z}_t)^{1-b} = a_0(b-1)t,$$

et finalement

$$\tilde{z}_t = \left(z^{1-b} + a_0(1-b)t \right)^{1/(1-b)}, \quad (5.4)$$

ce qui correspond au processus asymptotique.

De la même manière, nous pouvons calculer pour \tilde{z}_t le temps déterministe T_Δ d'entrée dans l'état défaillant Δ . Par intégration sur l'intervalle $[0, T_\Delta]$, nous avons

$$\int_z^\Delta (\tilde{z}_s)^{-b} d\tilde{z}_s = a_0 \int_0^{T_\Delta} ds = a_0 T_\Delta,$$

et nous trouvons

$$T_\Delta = \frac{\ln(\Delta/z)}{a_0},$$

lorsque $b = 1$. Pour $b \neq 1$, alors

$$T_\Delta = \frac{\Delta^{1-b} - z^{1-b}}{a_0(1-b)}.$$

Le processus asymptotique étant identifié, nous pouvons passer à l'estimation des paramètres a_0 et b . Nous raisonnons par la suite sur le modèle stochastique de propagation suivant, équivalent au système dynamique initial (5.1), mais qui facilite la procédure d'estimation des paramètres.

$$\begin{cases} \frac{dZ_t}{dt} = a_0 (Z_t)^b \times v(X_t), \\ Z_0 = z, \end{cases} \quad (5.5)$$

où $v(X_t)$ est un processus markovien de saut d'espace d'état E' , de même générateur que X_t et v une fonction qui associe à chaque élément de E un élément de E' , définie par

$$v : x \mapsto x / \mathbb{E}_\pi(X_t).$$

Le processus $v(X_t)$ est donc une version « normalisée » du processus X_t . Dans le système (5.5), cette normalisation est compensée par l'absorption dans le terme a_0 de la valeur de $\mathbb{E}_\pi(X_t)$, par rapport au paramètre initial a . Comme nous allons le voir, le fait de raisonner sur le processus $v(X_t)$ normalisé facilite l'estimation par régression des paramètres a_0 et b .

Dans cette optique, nous linéarisons le système (5.5) au moyen du logarithme. Ainsi,

$$\ln \dot{Z}_t = \ln a_0 + b \ln Z_t + \ln v(X_t). \quad (5.6)$$

Nous pouvons représenter le jeu de données $(Z_t^k)_{k=1,\dots,68}$ sous la forme de N points $\{(t_i, Z_{t_i})\}$ pour $i = 1, \dots, N$, avec $N = 68 \times 164$. Nous transformons ce N -échantillon en un autre N -échantillon $\{(\ln Z_{t_i}, \ln \hat{Z}_{t_i})\}$, plus adapté aux méthodes de régression au vu de l'équation (5.6). Les estimateurs \hat{Z}_{t_i} sont calculés à l'aide de la méthode de la sécante (4.4) définie à la section 4.1. Ici, nous avons plus précisément

$$\hat{Z}_{t_i} = \frac{Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}}{t_{i+1} - t_i}. \quad (5.7)$$

Par souci de clarté, notons $x_i = \ln Z_{t_i}$, $y_i = \ln \hat{Z}_{t_i}$, $\varepsilon_i = \ln v(X_{t_i})$. Ainsi, nous avons

$$y_i = \ln a_0 + b x_i + \varepsilon_i. \quad (5.8)$$

Au sens du principe de Bogolyubov, le processus Z_t^ε du système (5.5) converge asymptotiquement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ vers le processus \tilde{z}_t de (5.3). Cela signifie aussi que, *en moyenne*, $v(X_t)$ vaut 1. Le terme *en moyenne* doit être compris ici dans le sens de la moyenne temporelle associée au changement d'échelle dans le principe de Bogolyubov. C'est ici que la normalisation de X_t se justifie puisque les $\varepsilon_i = \ln v(X_{t_i})$ sont en moyenne nuls et jouent le rôle des *résidus* dans le problème de régression (5.8).

La méthode des moindres carrés appliquée au N -échantillon $\{(x_i, y_i)\}$ consiste à minimiser le carré des résidus ε_i , c'est-à-dire à minimiser l'erreur \mathbf{E} donnée par

$$\mathbf{E}(a_0, b) = \min_{a_0, b} \sum_{i=1}^N (y_i - \ln a_0 - bx_i)^2.$$

Nous obtenons un extremum en cherchant une solution annulant les dérivées premières, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial a_0} \mathbf{E}(a_0, b) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \mathbf{E}(a_0, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum y_i - N \ln a_0 - b \sum x_i = 0, \\ \sum x_i y_i - N \ln a_0 \sum x_i - b \sum x_i^2 = 0. \end{cases}$$

On peut également facilement vérifier, après le test sur la matrice hessienne, que les estimateurs suivants minimisent l'erreur $\mathbf{E}(a_0, b)$:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \exp(\bar{y} - \hat{b}\bar{x}), \\ \hat{b} &= \frac{\sum x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

où

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum y_i.$$

Les résultats de la régression sont représentés à la figure 5.1 sur une échelle logarithmique, c'est-à-dire pour l'équation (5.8). La figure 5.2 donne le processus asymptotique sur le jeu de données réelles, où nous avons remplacé dans (5.4) les valeurs des paramètres a_0 et b par leurs estimateurs (5.9).

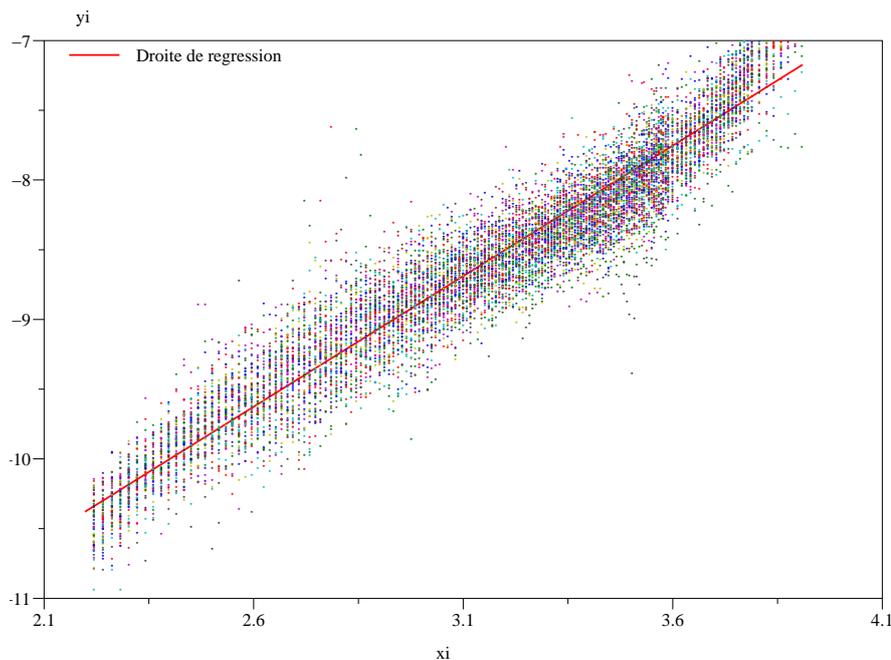


Fig. 5.1 – Droite de régression sur le nuage de points expérimentaux

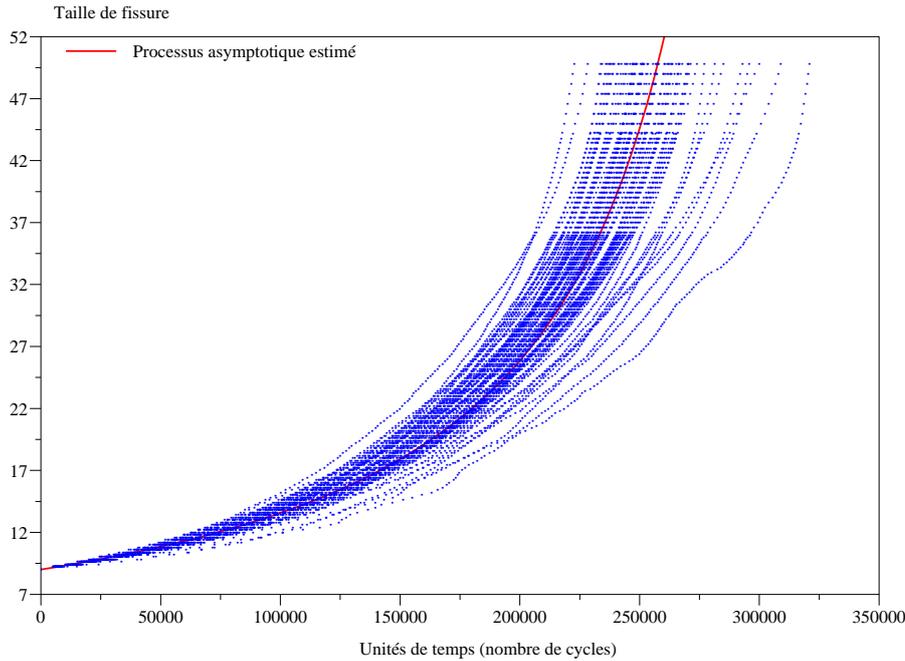


Fig. 5.2 – *Processus asymptotique estimé sur les trajectoires de fissuration réelles*

Remarque 5.2 *Au cours de l'application de la méthode de régression, les résidus $\varepsilon_i = \ln v(X_{t_i})$ sont en moyenne nuls, c'est-à-dire que le processus $v(X_t)$ est en moyenne égal à 1 dans le système dynamique (5.5). Physiquement, les variations autour de cette moyenne, modélisées par les sauts d'état dans le cas d'un processus de Markov, rendent compte de la manière dont « diffusent » les trajectoires de Z_t autour du processus asymptotique moyen.*

5.1.2 Estimation du processus markovien de saut

Disposant des paramètres estimés \hat{a}_0 et \hat{b} , nous pouvons passer à l'estimation du processus markovien de saut sur le schéma décrit au chapitre 4. L'estimation se déroule en deux étapes majeures : d'une part, l'estimation des trajectoires et de l'espace d'état (confer section 4.1) et d'autre part, l'estimation du générateur infinitésimal (confer section 4.2.1 et 4.2.2). Pour le système (5.5), nous travaillons sur le processus markovien de saut $v(X_t)$.

Estimation des trajectoires et de l'espace d'état

Nous obtenons une estimation des trajectoires « brutes » à l'aide de la relation

$$(\widetilde{v(X_t)})^k = \frac{1}{\hat{a}_0} (Z_t^k)^{-\hat{b}} \hat{Z}_t^k, \quad (5.10)$$

où les \hat{Z}_t^k sont obtenues, pour chacun des points du temps $t_i, i = 1, \dots, N$ des K trajectoires $Z_t^k, k = 1, \dots, K$, par

$$\hat{Z}_{t_i}^k = \frac{Z_{t_{i+1}}^k - Z_{t_i}^k}{t_{i+1} - t_i}. \quad (5.11)$$

Nous appliquons ensuite l'algorithme des centres mobiles (voir l'algorithme 5 de l'annexe A.2) pour obtenir une estimation \hat{E} de l'espace d'état

du processus de saut. Nous calculons l'erreur finale commise entre les trajectoires $\widehat{(v(X_t))}^k$ sur l'espace d'état \widehat{E} estimé et les trajectoires brutes $(v(X_t))^k$ pour un nombre de classes variant de 2 à 30. La figure 5.3 représente l'erreur intra-classe définie par (4.6) à la fin de l'algorithme des centres mobiles en fonction du nombre de classes choisi. On remarque qu'il est inutile d'aller au-delà d'une vingtaine d'états pour la représentation des trajectoires de $v(X_t)$, le gain sur l'erreur commise devenant peu significatif.

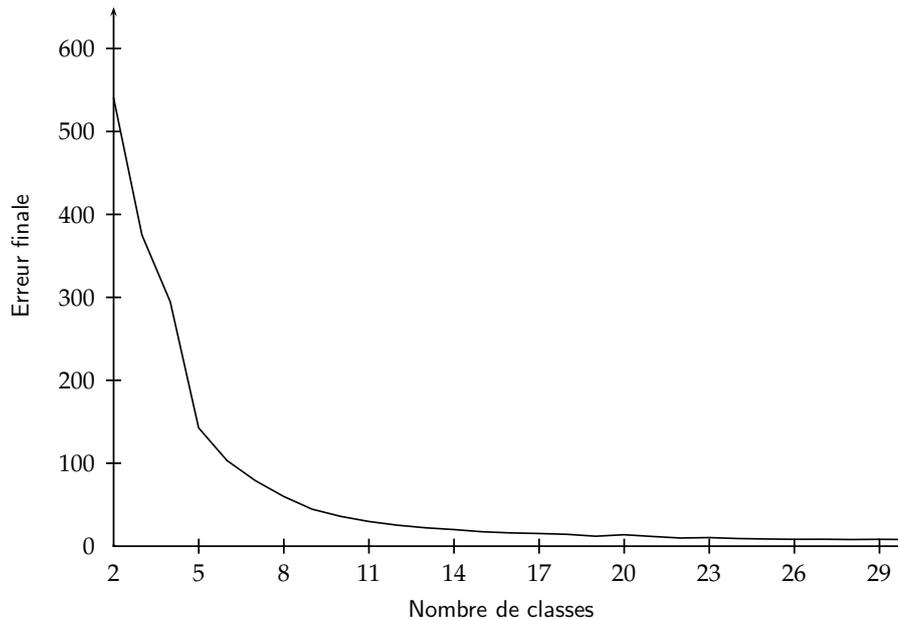


Fig. 5.3 – Erreur finale de la méthode des centres mobiles pour différents nombres de classes

À la lecture de la figure 5.3, nous proposons de choisir par exemple un nombre de 7 ou 18 classes pour l'espace d'état de $v(X_t)$. Nous représentons aux figures 5.4 et 5.5 les valeurs des états obtenus et leur répartition pour ces deux choix sur les trajectoires $\widehat{(v(X_t))}^k$ à espace d'état \widehat{E} .

À la figure 5.6, nous comparons pour un k fixé une trajectoire brute $(v(X_t))^k$ obtenue via (5.10) avec la trajectoire correspondante $\widehat{(v(X_t))}^k$ à valeurs dans l'espace d'état réduit \widehat{E} pour $|\widehat{E}|$ égal à 7 et 18 respectivement. On voit sur la figure comment opère l'approximation des centres mobiles sur les trajectoires du processus de saut : les états proches les uns des autres sur la trajectoire de $\widehat{(v(X_t))}^k$ sont « regroupés » sur les trajectoires $\widehat{(v(X_t))}^k$ à espace d'état réduit. Évidemment, lorsque l'on choisit $|\widehat{E}| = 18$, la représentation est plus proche de la réalité que pour $|\widehat{E}| = 7$. Il nous faut également souligner que l'on n'observe pas nécessairement de passages dans tous les états de \widehat{E} sur une seule des trajectoires, ainsi la trajectoire de $\widehat{(v(X_t))}^k$ pour $|\widehat{E}| = 7$ représentée ici ne visite que 5 des 7 états possibles. Notons aussi qu'en fin de trajectoire, la fréquence des sauts de $v(X_t)$ semble s'amplifier, ce qui indiquerait que le processus de saut n'est pas homogène par rapport au temps. Cette piste est donc à explorer en vu de l'affinement des modèles.

D'après les deux histogrammes 5.4 et 5.5 et les trajectoires de la fi-

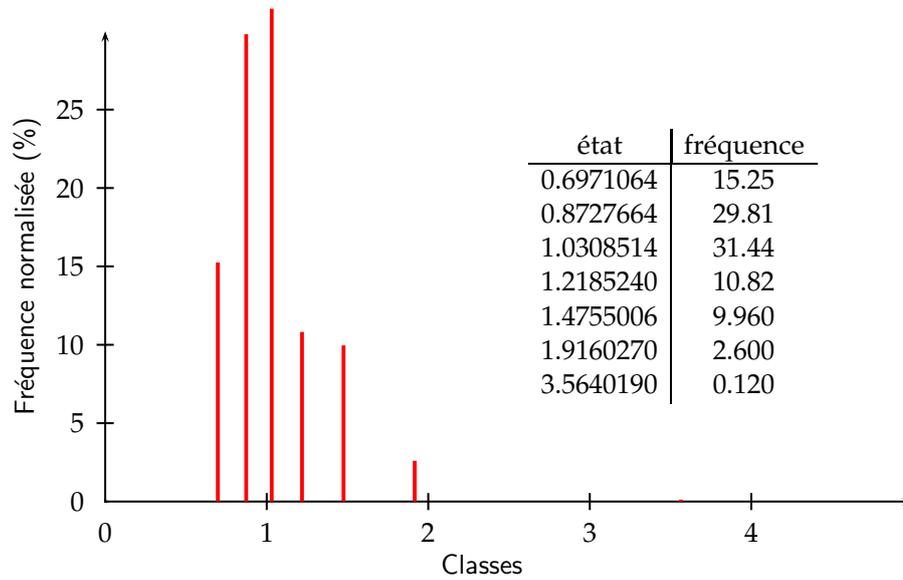


Fig. 5.4 – Histogramme des fréquences des visites des états estimés de la composante aléatoire – 7 états

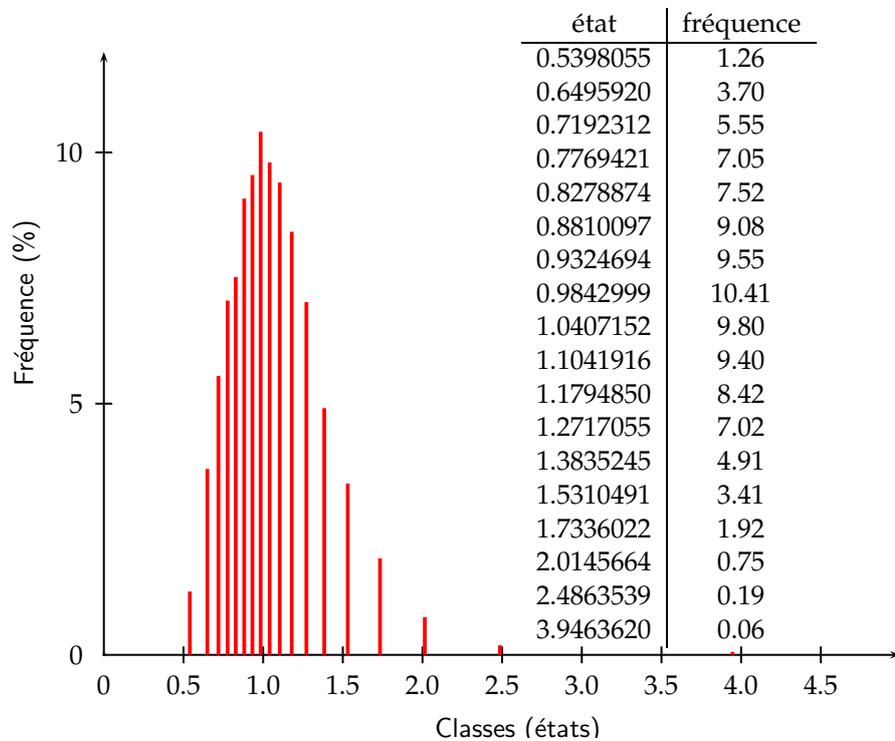


Fig. 5.5 – Histogramme des fréquences des visites des états estimés de la composante aléatoire – 18 états

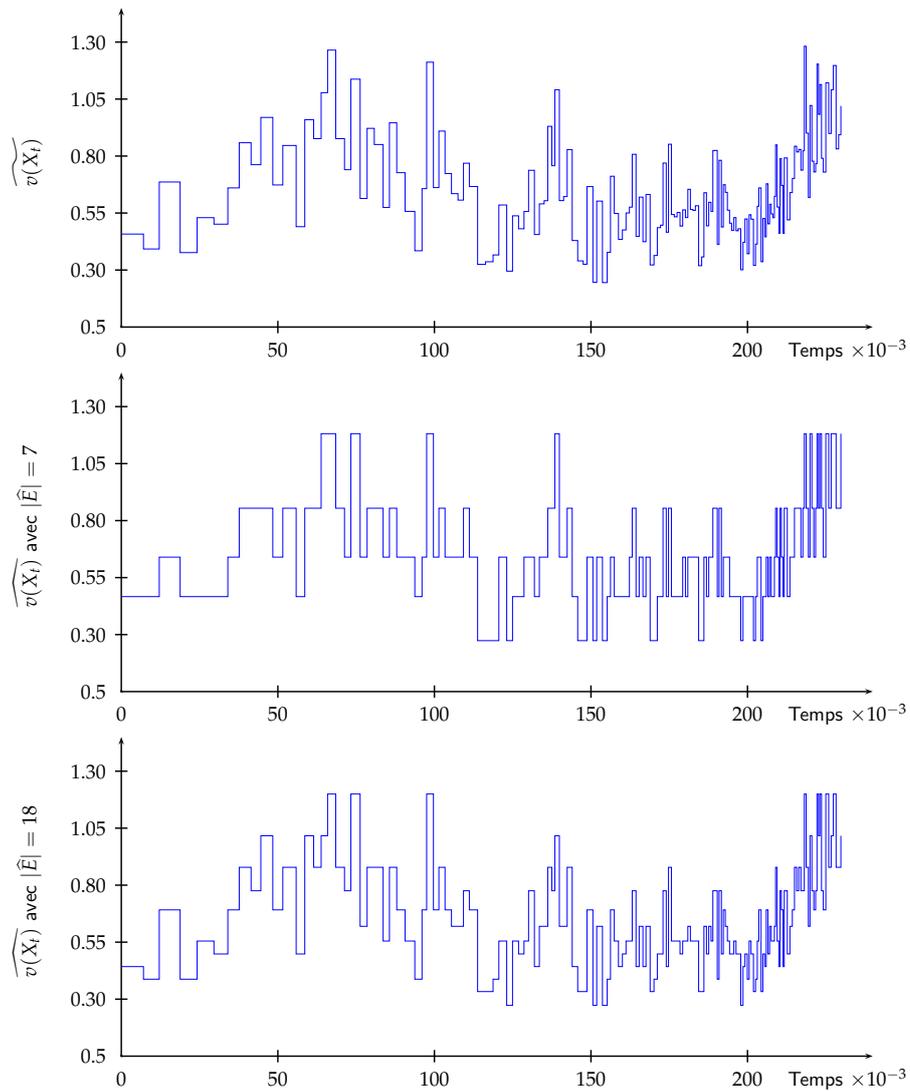


Fig. 5.6 – Exemple d'une trajectoire de $v(X_t)$ après estimation avec 7 et 18 états

gure 5.6, nous observons que la valeur la plus probable se situe autour de 1. Nous calculons l'espérance estimée du processus pour les trajectoires $(\widehat{v(X_t)})^k$ avec 7 et 18 états, en utilisant comme estimateur

$$\widehat{\mathbb{E}}v(X_t) = \sum_{i \in \widehat{E}} i \times \text{fr}_i(K),$$

où $\text{fr}_i(K)$ sont les fréquences définies par

$$\text{fr}_i(K) = \frac{v_i(K)}{\sum_{j \in \widehat{E}} v_j(K)}.$$

Rappelons que la variable $v_i(K)$ représente le temps total passé dans l'état i sur K trajectoires. Nous calculons les $v_i(K)$ sur les $(\widehat{v(X_t)})^k$ pour $|\widehat{E}| = 7$, respectivement 18. Nous obtenons les valeurs 1.0234778 et 1.0292941 pour l'estimateur de l'espérance. Ces valeurs étaient attendues puisque nous avons estimé les paramètres a_0 et b sur le système (5.5), où l'apport du processus de saut $v(X_t)$ est en moyenne égal à 1. Cela correspond à l'hypothèse de résidus de moyenne nulle dans la méthode des moindres carrés, sur l'équation (5.8) linéarisée à l'aide du logarithme. Nous ne trouvons pas exactement 1 de par les erreurs résiduelles commises lors de l'approximation des dérivées de Z_t et de l'espace d'état E par la méthode des centres mobiles.

Physiquement, les différents états pris par le processus $v(X_t)$ correspondent aux variations dans la vitesse d'accroissement des fissures. On suit en moyenne le processus asymptotique et pour des valeurs de $v(X_t) > 1$ on accélère l'accroissement des fissures, alors que la propagation diminue pour des valeurs de $v(X_t) < 1$.

Il est intéressant de noter que les répartitions observées aux figures 5.4 et 5.5 ont un profil de distribution lognormale. Cela rejoint l'hypothèse faite pour certains modèles stochastiques existants de propagation des fissures, où la composante aléatoire est modélisée par un processus multiplicatif lognormal (voir par exemple Yang et al. 1987, Yang et Manning 1990; 1996). De plus, lorsque le processus lognormal est stationnaire alors l'approximation par un processus de diffusion est valable, ce qui correspond à l'autre de famille de modèle stochastique de propagation existant (voir Sobczyk 1993, Spencer 1993, et les autres références de la section 1.4.4).

Estimation de la loi initiale et du générateur

À l'aide des trajectoires estimées $(\widehat{v(X_t)})^k$ sur l'espace d'état \widehat{E} , nous pouvons estimer la loi initiale et le générateur du processus. On peut montrer facilement que l'estimateur du maximum de vraisemblance pour la loi initiale (voir par exemple Billingsley 1961) est

$$\widehat{\alpha}(i) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_{\{(\widehat{v(X_0^k)})=i\}}, \quad i \in \widehat{E}. \quad (5.12)$$

Pour le générateur, nous utilisons les résultats obtenus à la section 4.2. En première approximation, nous pouvons négliger l'influence du temps de censure τ et utiliser l'estimateur du maximum de vraisemblance pour des

trajectoires à censure aléatoire, mais indépendante. Nous rappelons que l'EMV est donné, pour $i, j \in \hat{E}$ tels que $i \neq j$, par

$$\hat{a}_{ij}(K) = \frac{N_{ij}(K, \tau)}{V_i(K, \tau)}, \quad (5.13)$$

où le temps de censure τ est dans ce cas précis le temps d'entrée du processus de taille de fissure Z_t dans la taille critique $\Delta = 49.8\text{mm}$. Les $N_{ij}(K, \tau)$ et $V_i(K, \tau)$ sont calculés sur les trajectoires estimées $(\widehat{v(X_t)})^k, k = 1, \dots, K$.

5.2 RÉSULTATS ET COMPARAISON AVEC UN MODÈLE EXISTANT

5.2.1 Intégration du modèle

Nous disposons d'estimateurs pour chacun des paramètres apparaissant dans le système dynamique (5.5). Ainsi, des trajectoires de taille de fissures peuvent être simulées en utilisant une procédure similaire à celle décrite dans l'algorithme 1 du deuxième chapitre. La fonction φ , solution du système différentiel sur les intervalles de sauts successifs de $v(X_t)$, diffère légèrement. Pour la version stochastique (5.5) du modèle de Paris-Erdogan, la solution φ est dans ce cas donnée par

$$Z_t = \varphi(t) := \begin{cases} (z^{1-b} + a_0(1-b)t v(J_0))^{1/(1-b)}, & \text{si } 0 \leq t < S_1, \\ \dots \\ (Z_{S_n}^{1-b} + a_0(1-b)(t - S_n)v(J_n))^{1/(1-b)}, & \text{si } S_n \leq t < S_{n+1} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

On remplace chacun des paramètres ainsi que le générateur et la loi initiale de $v(X_t)$ par les valeurs estimées. Nous obtenons des trajectoires du type de celles représentées à la figure 5.7.

Nous pourrions estimer la fiabilité du système à partir de ces trajectoires simulées. Pourtant, suivant le même schéma que celui développé à la section 2.4.3, nous pouvons une nouvelle fois utiliser le processus V_t du cumul des coûts, c'est-à-dire

$$V_t = \int_0^t v(X_s) ds,$$

pour calculer le temps de défaillance τ et la fiabilité associée. Là encore, ceci améliore la précision des résultats et réduit considérablement les temps de calcul. Voyons comment utiliser le processus V_t dans le cadre du modèle de propagation des fissures :

D'après le système (5.5), nous avons

$$\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s^b} = aV_t.$$

Puis, pour $b > 1$, par des calculs similaires à ceux faits précédemment,

$$Z_t = \left(z^{1-b} + a_0(1-b)V_t \right)^{1/(1-b)}.$$

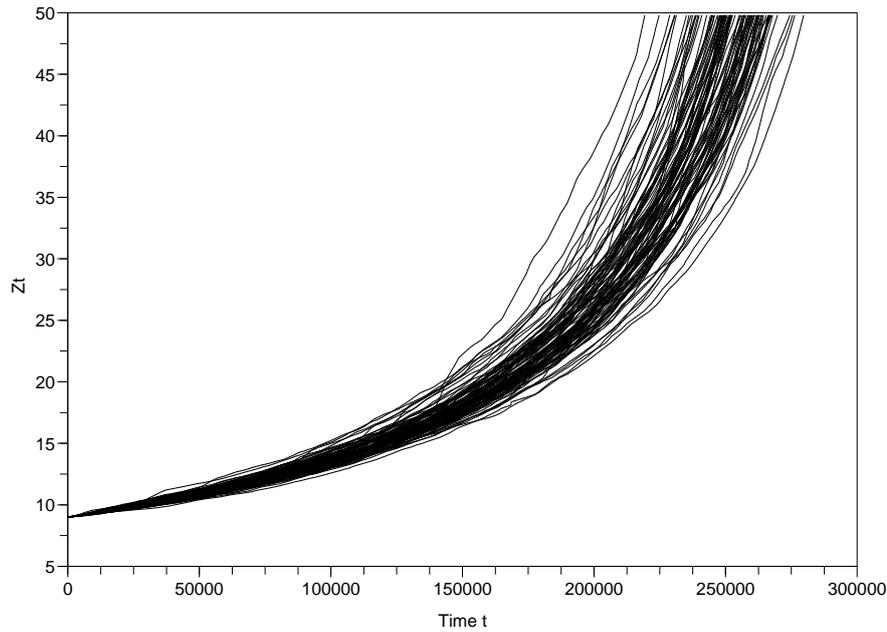


Fig. 5.7 – Simulation de 100 trajectoires du processus Z_t

Ainsi, partant de cette égalité, on montre que les deux événements suivants, définissant les états de bon fonctionnement du système, sont équivalents :

$$\{Z_t < \Delta\} \Leftrightarrow \left\{ V_t < \frac{\Delta^{1-b} - z^{1-b}}{a_0(1-b)} \right\}. \quad (5.14)$$

L'algorithme 2 du chapitre deux est facilement adaptable au système (5.5). Il suffit de changer la condition d'entrée dans la zone de défaillance en utilisant la relation (5.14). Le temps de défaillance calculé devient

$$\tau = S_n + \frac{W_n((\Delta^{1-b} - z^{1-b})/(a_0(1-b)) - V_{S_n})}{V_{S_{n+1}} - V_{S_n}}.$$

Nous obtenons alors un estimateur de la fonction de répartition F_τ du temps de défaillance, via les N valeurs de τ produites par l'algorithme 2. L'estimation Monte-Carlo de la fiabilité associée est

$$\widehat{R}_{MC}(t) = 1 - \widehat{F}_\tau(t) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{\{\tau^k \leq t\}}. \quad (5.15)$$

L'algorithme 4 synthétise l'ensemble des résultats et méthodes numériques de la thèse. Il incorpore les méthodes d'estimation des paramètres du système différentiel décrites dans la section précédente et intègre les algorithmes 1, 2 et 3, ce qui permet de donner deux estimateurs de la fiabilité du système :

1. le premier estimateur $\widehat{R}_{MC}(t)$ est donné par 5.15, issue de simulations de trajectoires du processus de cumul des coûts V_t ;
2. le second estimateur $\widehat{R}_{RM}(t)$ repose sur le calcul de la fiabilité par résolution de l'équation de renouvellement markovien décrit au chapitre trois (c'est l'algorithme 3).

Dans l'algorithme 4, $|E|$ est le nombre d'états choisi pour le processus $v(X_t)$, c'est-à-dire le nombre de classes à utiliser lors de la méthode des centres mobiles. Pour les calculs numériques, nous avons choisi $|E| = 18$. Les paramètres L et M sont les nombres de points de discrétisation pour les intervalles $[0, t]$ et $[z, \Delta[$ utilisés lors de la résolution numérique de l'équation de renouvellement markovien.

Algorithme 4 : Estimation, simulation de trajectoires de fissures et calculs de fiabilité

```
// A. INITIALISATION
// -----

Entrées :  $Z_t^k, \Delta, z, |E|, L, M, N$ 
définition des fonctions :
- secantMethod avec la relation (5.11)
- leastSquares avec les relations (5.6), (5.8), (5.9)
- kmeans avec l'algorithme 5, annexe A.2
- fonctionG avec la relation (5.10)
- estimAlpha avec l'estimateur (5.12)
- estimGenerator avec l'estimateur (5.13)
- simuCrackPaths avec l'algorithme 1, section 2.4.2
- simuFailureTimes avec l'algorithme 2, section 2.4.3
- reliabilityMonteCarlo avec l'estimateur (5.15)
- reliabilityRenewal avec l'algorithme 3, section 3.3.1

// B. ESTIMATION
// -----
 $\hat{Z}_t^k \leftarrow \text{secantMethod}(Z_t^k)$ 
 $[a_0, b] \leftarrow \text{leastSquares}(Z_t^k, \hat{Z}_t^k)$ 
 $(\widehat{v(X_t)})^k \leftarrow \text{fonctionG}(Z_t^k, \hat{Z}_t^k)$ 
 $[\hat{E}, (\widehat{v(X_t)})^k] \leftarrow \text{kmeans}(|E|, (\widehat{v(X_t)})^k)$ 
 $\hat{\alpha} \leftarrow \text{estimAlpha}(\hat{E}, (\widehat{v(X_0)})^k)$ 
 $\hat{\mathbf{A}} \leftarrow \text{estimGenerator}(\hat{E}, (\widehat{v(X_t)})^k)$ 

// C. SIMULATION
// -----
 $\zeta_t^k \leftarrow \text{simuCrackPaths}(z, \hat{\mathbf{A}}, \Delta, \hat{\alpha}, \hat{E}, \hat{a}_0, \hat{b}, N)$ 
 $\tau_k \leftarrow \text{simuFailureTimes}(z, \hat{\mathbf{A}}, \Delta, \hat{\alpha}, \hat{E}, \hat{a}_0, \hat{b}, N)$ 

// C. FIABILITÉ
// -----
 $\hat{R}_{\text{MC}}(t) \leftarrow \text{reliabilityMonteCarlo}(\tau_k, N)$ 
 $\hat{R}_{\text{MR}}(t) \leftarrow \text{reliabilityRenewal}(z, \hat{\mathbf{A}}, \Delta, \hat{\alpha}, \hat{E}, \hat{a}_0, \hat{b}, L, M)$ 
```

5.2.2 Modèle de diffusion pour la propagation des fissures

Nous proposons de comparer les résultats de notre modèle, basé sur un processus de Markov déterministe par morceaux, avec un modèle de dif-

fusion existant. Nous en donnons les grandes lignes dans le paragraphe suivant. Pour plus de détails, on peut consulter Sobczyk (1982), Lin et Yang (1985), Tsurui et Ishikawa (1986), Spencer (1993). Nous avons fait une étude précise de ce type de modèle dans un rapport technique CEA (Chiquet 2005).

Le système dynamique proposé est

$$\begin{cases} \frac{dZ_t}{dt} = a(Z_t)^b \zeta_t, \\ Z_0 = z, \end{cases} \quad (5.16)$$

où ζ_t est un processus lognormal de moyenne μ_ζ , de variance σ_ζ^2 , de médiane égale à 1 et de covariance

$$\text{Cov}(\zeta_s, \zeta_t) = \sigma_\zeta^2 \exp \left\{ -\frac{|t-s|}{\lambda} \right\}.$$

Le processus normal Ξ_t associé à ζ_t , c'est-à-dire $\Xi_t = \ln \zeta_t$, est de moyenne nulle du fait que la médiane de ζ soit égale à 1 et de variance $\sigma_\Xi^2 = \ln(1 + \sigma_\zeta^2)$. On peut exprimer la moyenne μ_ζ de ζ_t en fonction de σ_Ξ uniquement, c'est-à-dire que $\mu_\zeta = \exp \sigma_\Xi^2/2$.

En posant $\zeta_t = \mu_\zeta + \sigma_\zeta \tilde{\zeta}_t$ où $\tilde{\zeta}_t$ est lognormal centré réduit et de covariance

$$\text{Cov}(\tilde{\zeta}_s, \tilde{\zeta}_t) = \exp \left\{ -\frac{|t-s|}{\lambda} \right\},$$

nous pouvons écrire le système (5.16) sous la forme

$$\frac{dZ_t}{dt} = a\mu_\zeta(Z_t)^b + a\sigma_\zeta(Z_t)^b \tilde{\zeta}_t, \quad Z_0 = z. \quad (5.17)$$

Le processus $\tilde{\zeta}_t$ vérifie les conditions de stationnarité nécessaires à l'approximation de Z_t par un processus de diffusion lorsque le temps de corrélation défini par λ dans la fonction de covariance est suffisamment petit. En effet, lorsque $\lambda \rightarrow 0$, nous avons

$$\text{Cov}(\tilde{\zeta}_s, \tilde{\zeta}_t) = \delta(t-s), \quad t \geq s,$$

où δ est la distribution de Dirac. Dans ce cas, le processus $\tilde{\zeta}_t$ converge faiblement vers un processus lognormal centré réduit et non corrélé, c'est-à-dire un bruit blanc lognormal stationnaire.

Ainsi, lorsque $\lambda \rightarrow 0$, nous pouvons approcher le processus Z_t gouverné par (5.17) par un processus de diffusion \tilde{Z}_t , gouverné par une équation différentielle stochastique de la forme

$$d\tilde{Z}_t = \mu(\tilde{Z}_t) + \sigma(\tilde{Z}_t)dB_t, \quad \tilde{Z}_0 = z, \quad (5.18)$$

où les coefficients de dérive μ et de diffusion σ sont calculés via l'équation (1.13) et s'expriment uniquement en fonction de a, b et σ_Ξ .

L'équation différentielle stochastique (5.18), interprétée au sens de Stratonovich (voir Stratonovich 1963, Sobczyk 1982, Lin et Yang 1985),

est soluble et on peut formuler une équation de Fokker-Plank régissant la densité conditionnelle $\tilde{f}_t(\cdot|z)$ de \tilde{Z}_t , où z est l'état initial du processus. L'équation de Fokker-Plank est donnée par

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\tilde{f}_t(x|z) = -\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)\tilde{f}_t(x|z) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sigma^2(x)\tilde{f}_t(x|z), \\ \tilde{f}_0(x|z) = \delta_z(z). \end{cases} \quad (5.19)$$

On peut montrer que cette équation admet une solution explicite, donnée pour $b \neq 1$ par

$$\begin{cases} \tilde{f}_t(x|z) = \frac{1}{x^b\sqrt{2\pi\Gamma t}} \exp\left\{-\frac{[z^{1-b} - x^{1-b} - \Lambda t(b-1)]^2}{2\Gamma t(b-1)^2}\right\}, \\ \tilde{f}_0(x|z) = \delta_z(x), \end{cases}$$

où

$$\Lambda = a \exp \sigma_{\Xi}^2 / 2, \quad \Gamma = 2\lambda a^2 \exp \sigma_{\Xi}^2 \times (\exp \sigma_{\Xi}^2 - 1).$$

La fonction de répartition de \tilde{Z}_t est donnée par :

$$\tilde{F}_t(x|z) = \Phi \left[\frac{z^{1-b} - x^{1-b} - \Lambda t(b-1)}{(b-1)\sqrt{\Gamma t}} \right], \quad \text{pour } b \neq 1, \quad (5.20)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale.

Les paramètres a, b et σ_{Ξ}^2 s'obtiennent par régression sur le jeu de données réelles. Le paramètre λ , déterminant la durée de corrélation de ζ_t , est obtenu de manière à minimiser l'erreur commise entre la fonction de répartition des points expérimentaux et $\tilde{F}_t(\cdot|z)$, tout en gardant à l'esprit qu'il doit être suffisamment petit pour que l'approximation de diffusion soit physiquement valable.

Il est intéressant de noter que, lorsque $b = 1$, la densité conditionnelle est donnée par

$$\tilde{f}_t(x|z) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\Gamma t}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x/z) - \Lambda t]^2}{2\Gamma t}\right\},$$

la fonction de répartition associée étant

$$\tilde{F}_t(x|z) = \Phi \left[\frac{\ln(x/z) - \Lambda t}{\sqrt{\Gamma t}} \right].$$

Nous retrouvons ainsi une distribution lognormale. L'hypothèse d'une répartition lognormale du processus Z_t de taille de fissure est faite dans une autre famille de modèles de propagation de fissures (voir par exemple Yang et al. 1987, Yang et Manning 1990; 1996) dont les résultats sont proches de ceux de l'approximation de diffusion, qui en est donc une justification théorique (voir Chiquet 2005, pour une comparaison de ces modèles).

Nous pouvons obtenir un estimateur de la fiabilité avec le modèle de diffusion, en remarquant simplement que

$$R(t) = \mathbb{P}(Z_t < \Delta) = F_t(\Delta). \quad (5.21)$$

5.2.3 Fiabilité du système et répartition des fissures

Pour notre modèle, nous pouvons estimer la fiabilité du système en utilisant l'algorithme 4. Les résultats sont proposés à la figure 5.8 et comparés aux données expérimentales et aux résultats du modèle de diffusion pour lequel nous avons utilisé (5.21).

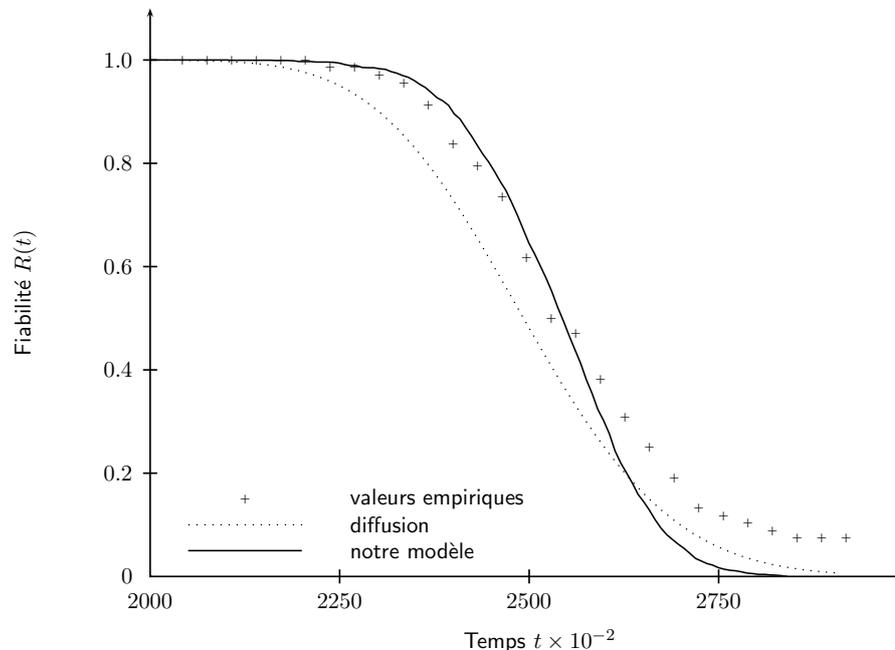


Fig. 5.8 – Comparaison des estimateurs de la fiabilité

Un autre indicateur très important pour les études de durée de vie est la distribution du processus de taille de fissure dans le temps, conditionnellement à son état initial. Le modèle de diffusion donne une approximation de la fonction de répartition de taille de fissure par l'expression (5.20). Avec notre modèle et l'algorithme 4, nous pouvons calculer la fiabilité $R(t)$. Or, en utilisant la relation (5.21), nous pouvons facilement passer de la fiabilité à la fonction de répartition.

Les résultats sont représentés à la figure 5.9. Nous avons tracé les résultats obtenus à différents instants du temps pour le modèle de diffusion et notre modèle, c'est-à-dire le système dynamique à composante markovienne de saut. Nous avons aussi représenté la répartition empirique calculée sur les données réelles.

Pour l'estimateur de la fonction de répartition de la taille des fissures, notre modèle donne des résultats meilleurs que le modèle de diffusion, notamment dans la partie supérieure des fonctions de répartition. Les deux modèles sont un peu conservatifs dans les queues de distribution. Pour la fiabilité, les deux approches ont un comportement différent. Le modèle de diffusion est conservatif pour la fiabilité, alors que notre modèle est meilleur sur la première partie de la courbe et plus conservatif en queue de distribution. L'erreur globale commise par rapport à la répartition empirique de la fiabilité reste inférieure avec notre modèle.

Les écarts entre les modèles et les données empiriques ont différentes origines : outre chacune des erreurs intrinsèques aux régressions successives effectuées pour l'estimation des paramètres du système dynamique

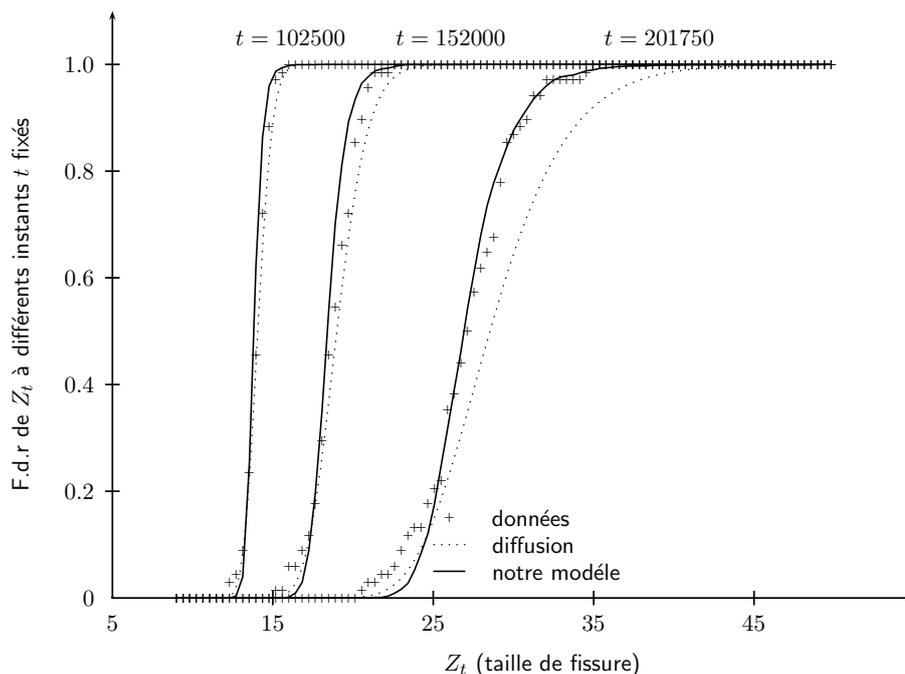


Fig. 5.9 – Comparaison de la fonction de répartition du processus de taille de fissure Z_t

et pour l'estimation des dérivées \dot{Z}_t , la structure même du modèle de Paris-Erdogan est en cause. Cette loi est de forme exponentielle, donc très instable, et l'erreur commise sur l'estimation des paramètres a_0 et b , bien que très faible, peut avoir une influence non négligeable sur l'accroissement des trajectoires.

Globalement, les résultats donnés par nos modèles sont tout à fait satisfaisants et complémentaires aux résultats des modèles existants.

5.2.4 Remarques sur l'implémentation numérique des algorithmes

Notre modèle donne de bons résultats sur des données réelles de propagation de fissures. Au-delà de cette application, nous pensons qu'il pourrait servir pour d'autres jeux de données ou au développement de modèles dédiés à d'autres mécanismes de dégradation. Plus généralement, il peut convenir à des problèmes physiques dont la description en termes de système dynamique de type (2.5) est pertinente.

Il nous a donc semblé opportun de faciliter l'utilisation des outils numériques développés au cours de la thèse. L'idée est de regrouper l'ensemble de ces outils sous la forme d'un « laboratoire numérique ». Nous entendons fournir des solutions numériques qui permettent d'appliquer facilement les modèles à divers jeux de données, de saisir interactivement les paramètres et d'intégrer les différentes méthodes de calculs utilisées. On réalise ainsi des « expériences numériques » basées sur des retours d'expériences de laboratoire ou sur des hypothèses d'expertises. Ces outils sont autant de « boîtes noires » qui constituent le laboratoire numérique dans lequel l'utilisateur ne doit pas intervenir à un bas niveau de programmation ou comprendre le fonctionnement précis des modèles. Il s'agit alors d'un gain de temps considérable.

L'intégration des outils numériques répond à une volonté du CEA. Elle

permet de pérenniser le travail effectué au cours de la thèse en rendant les modèles facilement réutilisables. De plus cela correspond aux spécificités liées au champ d'application et aux problèmes de durée de vie. On peut ainsi réévaluer rapidement la fiabilité d'un système en fonction de l'évolution des connaissances. Cette évolution peut être consécutive à l'apparition de nouveaux jeux de données ou des retours d'expertises issus d'autres disciplines. En mécanique, cela peut correspondre à une valeur imposée pour certains paramètres du modèle, par exemple a_0 et b dans la loi de Paris-Erdogan. Par ailleurs, la sensibilité des données dans les applications nucléaires rend leur accès difficile, ainsi nous n'avons pas pu appliquer nos modèles à des données spécifiques au nucléaire. Néanmoins, en validant les modèles sur un jeu de données qualitativement identique et en développant quelques solutions numériques, nous espérons fournir des outils utilisables sur ces données sensibles, accessibles par les personnes qualifiées.

L'implémentation a été réalisée en `Scilab`. Nous avons choisi ce logiciel car il est multi-plateforme, il propose nativement des solutions d'interface utilisateur et il est adapté au développement. Ainsi, l'adjonction de modules est facilitée, permettant de compléter les outils selon les demandes. Nous pensons notamment à l'ajout d'un module pour intégrer les opérations de maintenance. Nous pensons également au support de différentes formes pour la fonction C dans le système dynamique, pour ne pas se limiter au modèle (5.5).

Par ailleurs, nous avons déjà intégré numériquement l'estimation et la simulation d'un système différentiel

$$\frac{dZ_t}{dt} = C(Z_t, Y_t), \quad Z_0 = z,$$

où le processus Y_t est un processus semi-markovien à espace d'état dénombrable. Nous utilisons les estimateurs empiriques pour les processus semi-markovien (Moore et Pyke 1968, Ouhbi et Limnios 2005).

D'importants efforts théoriques pour montrer la validité de ce modèle restent à faire. Pourtant, nous avons appliqué ce système avec composante de saut semi-markovienne au jeu de données de Virkler, et nous obtenons des résultats analogues à ceux obtenus avec la composante de saut markovienne. Nous pensons que pour certains phénomènes, où les occurrences des "chocs" faisant varier l'évolution du processus Z_t suivent des distributions de probabilités particulières, un modèle avec des chocs semi-markoviens pourrait donner de meilleurs résultats puisque celui-ci est plus souple.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Dans ce chapitre, nous avons montré que nos modèles étaient adaptés à la modélisation et à l'estimation d'un mécanisme réel de dégradation. Ils offrent une bonne alternative aux modèles existants.

Comme nous pensons qu'ils peuvent être utilisés pour une large classe d'applications, nous avons proposé des solutions numériques adaptées

à l'enrichissement des modèles, en vu de leur utilisation pour d'autres mécanismes, voire d'autres champs d'application.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Au cours de ce mémoire, nous avons développé un modèle décrivant la dynamique d'un processus de dégradation au moyen d'un processus de Markov déterministe par morceaux. Nous pouvons résumer les résultats obtenus en quatre points :

1. Modélisation

Dans les deux premiers chapitres, nous avons proposé et présenté un système dynamique stochastique, constituant un processus de Markov déterministe par morceaux, permettant une description originale de l'évolution aléatoire de la dégradation observable d'une structure. Nous avons montré l'adéquation de ce modèle avec les phénomènes réels de dégradation.

2. Calculs de fiabilité

Dans le chapitre trois, nous avons interprété le processus de Markov déterministe par morceaux comme un processus semi-markovien. Ainsi, nous avons pu construire et résoudre une équation de renouvellement markovien pour la fonction de transition du processus de Markov déterministe par morceaux. Nous avons utilisé ces résultats pour calculer la fiabilité et d'autres mesures associées au processus de dégradation.

Nous avons également présenté l'implémentation pratique de ces méthodes en détaillant un algorithme de calcul de la fonction de transition et de la fiabilité. La comparaison avec l'estimateur de Monte-Carlo a montré la cohérence entre les deux méthodes de calcul de la fiabilité (calcul direct par renouvellement markovien et Monte-Carlo).

3. Inférence statistique

Des méthodes statistiques en vue de l'application du modèle à des problèmes réels ont été développées, exposées principalement dans le chapitre quatre. À partir des trajectoires du processus de dégradation Z_t observées jusqu'à l'entrée dans la zone de défaillance, nous avons proposé :

- une méthode d'estimation des paramètres de la fonction C , en considérant le comportement asymptotique déterministe du processus Z_t par le principe de Bogolyubov (chapitres deux et cinq) ;
- une méthode d'estimation des trajectoires du processus markovien de saut X_t et une réduction de l'espace d'état observé utilisant l'algorithme de classification des centres mobiles (chapitre quatre).
- l'estimation par maximisation de la vraisemblance du générateur du processus markovien de saut X_t , où nous n'avons pas pris en

compte la dépendance existant entre le processus et la longueur aléatoire des trajectoires (chapitre quatre).

4. Validation du modèle sur un problème réel

Dans le chapitre cinq, les méthodes développées au cours de la thèse ont été appliquées à un jeu de données réelles de dégradation, c'est-à-dire la propagation des fissures en fatigue. Nous obtenons de bons résultats avec notre modèle, que nous avons comparé aux modèles existants.

PERSPECTIVES

Dans la continuité directe de notre travail de thèse, nous pouvons dégager des orientations de recherche qui permettraient de consolider le modèle basé sur le processus de Markov déterministe par morceaux.

En particulier, nos efforts portent actuellement sur la prise en compte dans les méthodes d'estimation de la dépendance qui existe entre le temps de censure τ des observations et le processus markovien de saut X_t . En effet, lors de la construction de la fonction de vraisemblance associée au générateur de X_t faite au chapitre quatre, nous avons constaté que la densité de probabilité f_τ du temps de censure apparaissait. Cette partie de la vraisemblance a été négligée pour la maximisation. Cependant, nous avons obtenu au théorème 3.2 du chapitre trois une forme de f_τ en fonction des puissances de convolution du noyau semi-markovien associé au processus de Markov déterministe par morceaux. Nous espérons pouvoir utiliser ce résultat afin d'inclure la contribution due à la dépendance entre τ et X_t dans la maximisation de la vraisemblance. Puisqu'il semble difficile de faire apparaître explicitement les éléments du générateur de X_t dans toutes les puissances de convolution du noyau, nous pensons nous orienter vers des méthodes de maximisation numériques : nous savons calculer numériquement les puissances de convolution via les résultats du chapitre trois et nous pourrions les utiliser pour maximiser la vraisemblance complète à l'aide de méthodes numériques du type algorithme EM. Ceci met d'ailleurs en exergue la complémentarité entre les résultats probabilistes basés sur le renouvellement markovien du chapitre trois et les méthodes d'estimation du chapitre quatre.

De même, des avancées statistiques intéressantes devraient être faites en nous intéressant non pas à la vraisemblance associée au seul processus X_t mais du couple (Z_t, X_t) . Les résultats de Jacobsen (2006) seront alors précieux.

Toujours dans le cadre de l'estimation, mais cette fois des trajectoires non observées et de l'espace d'état du processus markovien de saut, nous testons actuellement des méthodes de classification plus puissantes que celle des centres mobiles. Il existe à cet effet des logiciels intégrant des résultats avancés de classification s'interfaçant facilement avec Scilab, langage dans lequel nos propres méthodes ont été développées (Voir le logiciel MIXMOD, présenté dans Biernacki et al. 2006)¹.

¹page web : <http://www-math.univ-fcomte.fr/mixmod/>

Enfin, une généralisation importante du modèle serait de relaxer l'hypothèse d'une évolution monotone du processus de dégradation Z_t , et de voir comment obtenir des résultats de fiabilité similaires à ceux obtenus au chapitre trois.

À plus long terme, nous pourrions donner des versions plus générales de notre modèle en explorant les pistes suivantes :

Une première idée consiste à considérer un système dynamique où le processus markovien de saut serait non homogène par rapport au temps. Cette option est motivée par les observations faites lors du chapitre cinq, dédié aux applications : les trajectoires de la composante de saut obtenues sur les données réelles de propagation de fissures indiquaient une augmentation de la fréquence des sauts en fin de trajectoire, ce qui traduit une non homogénéité du générateur par rapport au temps. Dans (Chiquet 2003), nous avons travaillé sur l'estimation et la modélisation de températures extérieures journalières en considérant une chaîne de Markov non homogène. Les résultats obtenus alors pourraient être adaptés et utilisés pour prendre en compte la non homogénéité de X_t .

Une autre option consiste à ajouter au système différentiel décrivant l'évolution du processus Z_t un bruit modélisé par un mouvement brownien B_t en plus du processus de saut X_t . Nous obtenons alors un modèle de diffusion non homogène, modulée par le processus X_t . Si nous ajoutons en plus une autre composante de saut permettant de décrire des discontinuités dans les trajectoires de Z_t , nous nous situons alors dans des modèles de *diffusions généralisées*, où Z_t est gouverné par un système de la forme

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \mu(Z_s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(Z_s, X_s) dB_s + \text{« sauts »}.$$

Du fait de l'évolution par saut du processus X_t , à valeurs constantes entre ces sauts, on peut se ramener à une succession d'équations différentielles stochastiques homogènes sur chaque intervalle de saut de X_t .

Enfin, une autre direction de recherche consiste à considérer le système dynamique de la forme

$$\frac{dZ_t}{dt} = C(Z_t, Y_t), \quad Z_0 = z,$$

en prenant Y_t un processus de saut *semi-markovien*, c'est à dire en relaxant l'hypothèse de distribution exponentielle des temps de séjour entre les sauts. Ceci ajouterait une grande souplesse au modèle. En ce qui concerne l'inférence statistique de Y_t , nous pouvons obtenir une estimation des trajectoires et une réduction de l'espace d'état avec les mêmes techniques que celles décrites dans ce mémoire. Puis, tout comme nous avons obtenu une estimation du générateur de X_t sur K trajectoires à censure aléatoire, il nous faut obtenir le même type de résultats pour l'estimation du noyau semi-markovien de Y_t . À l'annexe A.3, nous avons observé numériquement qu'une généralisation des estimateurs du noyau existants pour K trajectoires avec censure fixe (voir Ouhbi et Limnios 2005, Moore et Pyke 1968, Lagakos et al. 1978) à K trajectoires avec censure aléatoire semblait

être raisonnable. Il convient cependant de donner une preuve du bon comportement de ces estimateurs.

ANNEXES

A

SOMMAIRE

A.1	PREUVE DU THÉORÈME 2.1	133
A.2	ALGORITHME DES CENTRES MOBILES	135
A.3	PROCESSUS SEMI-MARKOVIEEN AVEC CENSURE ALÉATOIRE	136
A.3.1	Estimateurs du noyau	136
A.3.2	Application numérique en fiabilité	137

A.1 PREUVE DU THÉORÈME 2.1

Ce théorème est un résultat classique donné, par exemple, par Lapeyre et Pardoux (1998). Nous en proposons une démonstration afin de permettre une lecture autonome du mémoire.

Démonstration. Rappelons la définition 2.3 du générateur :

$$\mathcal{B}f(z, i) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \{ \mathbb{E}_{z,i} f(Z_t, X_t) - f(z, i) \}.$$

Nous faisons apparaître le temps de premier saut S_1 du processus X_t et le terme $\mathbb{E}_{z,i} f(z, X_t)$. Ainsi il s'agit de calculer la limite quand $t \rightarrow 0^+$ de

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \mathbb{E}_{z,i} f(Z_t, X_t) - f(z, i) &= \frac{1}{t} \mathbb{E}_{z,i} [\{f(Z_t, X_t) - f(z, X_t)\} \mathbb{1}_{\{t < S_1\}}] \\ &\quad + \frac{1}{t} \mathbb{E}_{z,i} [\{f(Z_t, X_t) - f(z, X_t)\} \mathbb{1}_{\{t \geq S_1\}}] \\ &\quad + \frac{1}{t} \mathbb{E}_{z,i} [f(z, X_t) - f(z, i)]. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Nous étudions la convergence respective de chacun des termes du membre de droite dans l'expression (A.1) dans les trois points suivants :

- i) L'indicatrice montre que X_t n'a pas encore effectué le premier saut, ainsi, $X_t = i$ et $Z_t = \varphi_{z,i}(t)$, solution du système différentiel (2.5) avant le premier saut, c'est-à-dire pour $X_t = i$. On a donc

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_{z,i} [\{f(Z_t, X_t) - f(z, X_t)\} \mathbb{1}_{\{t < S_1\}}] \\ = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \{f(\varphi_{z,i}(t), i) - f(z, i)\} \mathbb{P}_{z,i}(t < S_1), \end{aligned}$$

où $\mathbb{P}_{z,i}(\cdot)$ est la probabilité conditionnée par $Z_0 = z, X_0 = i$. Évidemment, nous avons

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{P}_{z,i}(t < S_1) = 1.$$

Pour simplifier, plaçons nous tout d'abord en dimension $d = 1$ pour la première composante de la fonction f . Par développement limité sur $f(\varphi_{z,i}(t), i)$ et en remarquant que $f(\varphi_{z,i}(0), i) = f(z, i)$, nous avons

$$f(\varphi_{z,i}(t), i) - f(z, i) = (\varphi_{z,i}(t) - \varphi_{z,i}(0)) \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi_{z,i}(t), i) + \mathcal{O}(t).$$

Puis

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (f(\varphi_{z,i}(t), i) - f(z, i)) \\ = \lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{\varphi_{z,i}(t) - \varphi_{z,i}(0)}{t} \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi_{z,i}(t), i) + \frac{\mathcal{O}(t)}{t} \right) = C(z, i) \frac{\partial}{\partial z} f(z, i), \end{aligned}$$

car sur $[0, S_1[$, nous avons $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{z,i}(t) = C(\varphi_{z,i}(t), i)$, par définition du système différentiel (2.5) et $\varphi_{z,i}(0) = z$. En généralisant à d dimensions, il vient

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (f(\varphi_{z,i}(t), i) - f(z, i)) = \sum_{k=1}^d C_k(z, i) \frac{\partial}{\partial z_k} f(z, i).$$

ii) L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer que ce terme est nul :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \mathbb{E}_{z,i} [\{f(Z_t, X_t) - f(z, X_t)\} \mathbf{1}_{\{t \geq S_1\}}] \\ & \leq \frac{1}{t} (\mathbb{E}_{z,i} [\{f(Z_t, X_t) - f(z, X_t)\}^2])^{1/2} (\mathbb{E}_{z,i} [(\mathbf{1}_{\{t \geq S_1\}})^2])^{1/2} \\ & \leq \kappa (\mathbb{P}_{z,i}(t \geq S_1))^{1/2} = 0, \end{aligned}$$

car il est évident que

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbb{P}_{z,i}(t \geq S_1) = 0.$$

iii) Par définition du générateur de X_t ,

$$\lim_{t \downarrow 0} \{\mathbb{E}_{z,i} f(z, X_t) - f(z, i)\} = \sum_{j \in E} a_{ij} [f(z, j) - f(z, i)].$$

À l'aide des résultats partiels i), ii) et iii) dans (A.1), nous trouvons le résultat escompté. \square

A.2 ALGORITHME DES CENTRES MOBILES

Nous donnons ici une version de l'algorithme des centres mobiles adaptée aux notations de la section 3.1.2.

Algorithme 5 : Algorithme des centres mobiles

```

// Initialisation
Entrées : vecteur de données  $x$  ( $\tilde{\mathcal{D}}$ ), nombre de classes  $C$ 
Initialiser les  $(\mu_i)_{i=1,\dots,C}$  aléatoirement sur  $\tilde{\mathcal{D}}$ 

// Construction des classes initiales
pour  $i = 1$  à  $C$  faire
   $\mathcal{C}_i \leftarrow \{x \in \tilde{\mathcal{D}} : \|x - \mu_i\|^2 = \min_{\ell} \|x - \mu_{\ell}\|^2\}$ 
fin

// Descente de gradient
tant que non stabilisation des  $\mu_i$  faire
  // mise à jour des centres  $\mu_i$ 
  pour  $i = 1$  à  $C$  faire
     $\mu_i \leftarrow 1/|\mathcal{C}_i| \times \sum_{x \in \mathcal{C}_i} x$ 
  fin

  // Re-construction des classes
  pour  $i = 1$  à  $C$  faire
     $\mathcal{C}_i \leftarrow \{x \in \tilde{\mathcal{D}} : \|x - \mu_i\|^2 = \min_{\ell} \|x - \mu_{\ell}\|^2\}$ 
  fin
fin

```

A.3 PROCESSUS SEMI-MARKOVIEN AVEC CENSURE ALÉATOIRE

Nous donnons ici les premiers résultats que nous avons obtenus pour l'estimation d'un système semi-markovien à espace d'état fini observé sur des trajectoires de longueurs aléatoires. Nous utilisons un estimateur empirique généralisé, sans démonstration, et nous observons le fonctionnement numérique assez satisfaisant de cet estimateur à travers une application de calcul de fiabilité.

A.3.1 Estimateurs du noyau

Remarque A.1 *Les définitions générales des processus semi-markoviens sont données à la section 3.1.1. Nous renvoyons à Pyke (1961b) pour les notions théoriques spécifiques aux processus de renouvellement à espace d'état fini.*

Soit $(Y_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus semi-markovien à espace d'état E fini et (J_n, S_n) le processus de renouvellement markovien associé. La chaîne markovienne J_n est caractérisée par

$$p_{ij} = \mathbb{P}(J_{n+1} = j | J_n = i), i, j \in E, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

En posant $(F_{ij}(t))_{i,j \in E}$ la distribution conditionnelle des temps de séjour, nous avons

$$F_{ij}(t) = \mathbb{P}(S_{n+1} - S_n \leq t | J_n = i, J_{n+1} = j), \quad i, j \in E, t \geq 0. \quad (\text{A.3})$$

Avec (A.2) et (A.3), le noyau semi-markovien $(Q_{ij}(t))_{i,j \in E}$ est défini pour $t \geq 0$ par

$$Q_{ij}(t) = \mathbb{P}(J_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | J_n = i) = p_{ij} F_{ij}(t). \quad (\text{A.4})$$

D'une manière similaire au cas markovien, nous considérons K histoires du processus Y_t et nous notons $N_{ij}(K, \tau)$ et $N_i(K, \tau)$ les variables aléatoires décrivant le nombre de transitions de i vers j , respectivement le nombre de passages dans l'état i .

Nous introduisons $M_{ij}(t; K, \tau)$ le nombre de temps de séjour inférieurs à t pour les transitions de i vers j , cumulés sur les K trajectoires censurées par la variable τ , c'est-à-dire

$$M_{ij}(t; K, \tau) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=0}^{N^k(\tau^k)-1} \mathbb{1}_{\{J_{n+1}^k=j, J_n^k=i, S_{n+1}^k-S_n^k \leq t\}}, \quad (\text{A.5})$$

où $N^k(\tau^k)$ est la variable aléatoire décrivant le nombre de sauts sur la k^e histoire du processus, censurée par la k^e copie τ^k de la variable de censure τ .

Nous utilisons les estimateurs suivants pour le noyau Q et les fonctions p et F :

$$\hat{Q}_{ij}(t; K, \tau) = \hat{p}_{ij}(K, \tau) \hat{F}_{ij}(t; K, \tau), \quad (\text{A.6})$$

avec

$$\hat{p}_{ij}(K, \tau) = \frac{N_{ij}(K, \tau)}{N_i(K, \tau)}, \quad \hat{F}_{ij}(t; K, \tau) = \frac{M_{ij}(t; K, \tau)}{N_{ij}(K, \tau)}.$$

Ces estimateurs sont une généralisation des *estimateurs empiriques* de Moore et Pyke (1968), proposés par Ouhbi et Limnios (2005).

A.3.2 Application numérique en fiabilité

On définit U et D les ensembles respectifs des bons états et des états de panne d'un système modélisé par un processus semi-markovien Y_t , de loi initiale α . Nous avons s et r tels que $E = \{1, \dots, r, \dots, s\}$, $U = \{1, \dots, r\}$ et $D = \{r + 1, \dots, s\}$. Le noyau et la loi initiale de Y_t sont partitionnés de la sorte

$$(Q_{ij}(t))_{i,j \in E} = \begin{bmatrix} U & D \\ Q^{11}(t) & Q^{12}(t) \\ Q^{21}(t) & Q^{22}(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} U \\ D \end{matrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} U & D \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Pour l'application numérique, on prend $E = \{1, 2, 3\}$ avec

$$(p_{ij})_{i,j \in E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et F telle que

$$(F_{ij}(t))_{i,j \in E} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E}_1 & 0 \\ \mathcal{W}_1 & 0 & \mathcal{W}_2 \\ \mathcal{E}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

où $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ sont des lois exponentielles de paramètre 0.02 et 0.01; $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ sont des lois de Weibull de paramètres (4, 2) et (2, 0.5). Les sous ensembles de bons et mauvais états sont donnés par

$$U = \{1, 2\}, \quad D = \{3\}.$$

La distribution initiale est $\alpha = [1, 0, 0]^\top$, c'est-à-dire que le système part de l'état 1 presque sûrement. Le graphe d'état est donné à la figure ??, avec les arcs valués par les probabilités de transition.

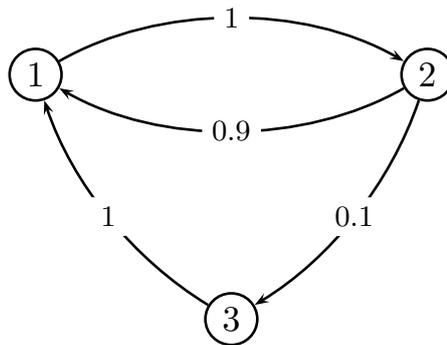


Fig. A.1 – Graphe d'état du processus semi-markovien

Nous générons 1000 trajectoires de ce système que nous censurons par une variable exponentielle de paramètre 0.02. Nous utilisons alors ces trajectoires pour estimer le noyau avec les estimateurs empiriques (A.6).

La théorie de la fiabilité des systèmes semi-markoviens à espace d'état fini est bien étudiée dans la littérature (par exemple par Ouhbi et Limnios 1996; 1998). La fonction de fiabilité d'un système semi-markovien est donnée par

$$\begin{aligned} R(t) &= \mathbb{P}(X_s \in U, \forall s \leq t) \\ &= \alpha_1 \psi_{ij}^{11} * (I - H^{11}(t)) \mathbf{1}_r, \end{aligned}$$

où ψ^{11} est la fonction de renouvellement markovien calculée avec la sous matrice $Q^{11}(t)$ du noyau, c'est-à-dire

$$\psi_{ij}^{11}(t) = \sum_{n \geq 0} Q_{ij}^{11(n)}(t).$$

On a également noté $H^{11}(t)$ la matrice diagonale définie pour $i \in E$ par

$$H_i^{11}(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^r Q_{ij}^{11}(t), & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons noté I la matrice identité de dimension r et $\mathbf{1}_r$ un vecteur de sommation comportant r éléments égaux à 1.

Nous calculons la fiabilité théorique avec le noyau réel Q^{11} et le noyau estimé $\hat{Q}^{11}(t; K, \tau)$ avec les estimateurs (A.6) sur les 1000 trajectoires censurées aléatoirement. Les résultats sont proposés à la figure ???. On note un assez bon comportement de l'estimateur malgré une apparente sous évaluation de la fiabilité.

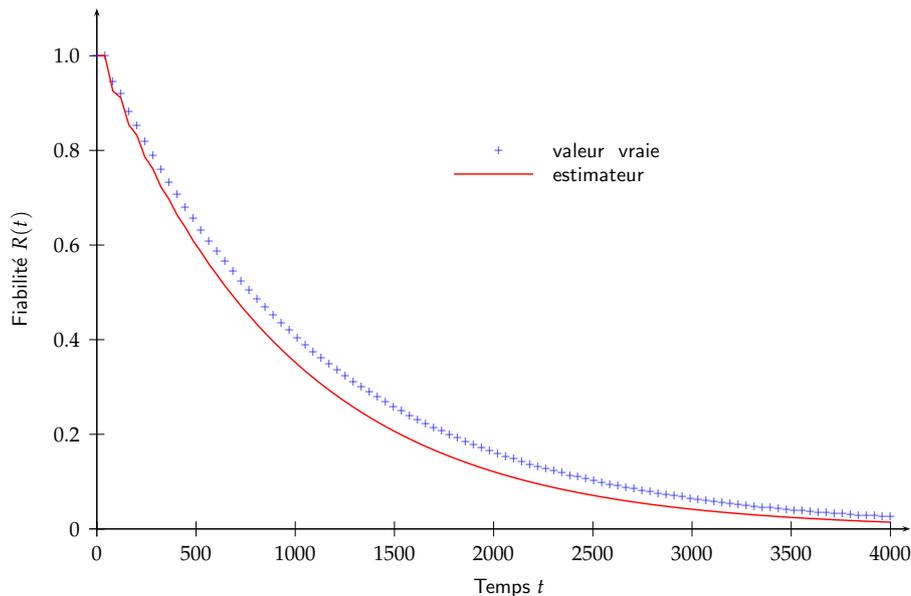


Fig. A.2 – Estimation de la fiabilité d'un processus semi-markovien censuré

BIBLIOGRAPHIE

- A. Albert. Estimating the infinitesimal generator of a continuous time, finite state Markov process. *Annals of Mathematical Statistics*, 38 :727–753, 1962.
- P. K. Andersen, Ø. Borgan, R.D. Gill, et N. Keiding. *Statistical Models Based on Counting Processes*. Springer, N.Y., 1993.
- V.V. Anisimov. Switching processes. *Cybernetics*, 13(4) :590–595, 1977.
- V.V. Anisimov. Switching processes : averaging principle, diffusion approximation and applications. *Acta Applicandae Mathematicae*, 40 :95–141, 1995.
- V. Bagdonavicius, A. Bikelis, V. Kazakevicius, et M. Nikulin. Non-parametric estimation in degradation-renewal-failure models. Dans *Probability, Statistics and Modelling in Public Health*, pages 23–36. Springer, 2006.
- N. Balakrishnan, N. Limnios, et C. Papadocoulos. Basic probabilistic models in reliability. Dans *Advances in Reliability*. Elsevier, Amsterdam, 2001.
- A. Basu et N. Ebrahimi. On the reliability of stochastic processes. *Statistics and Probability Letters*, 1(5) :265–268, 1983.
- C. Bataille et C. Birraux. La durée de vie des centrales nucléaires et les nouveaux types de réacteurs. Rapport de l'assemblée Nationale 832-1, Office parlementaire des choix scientifiques et technologiques, 2003.
- A.T. Beck et R.E. Melchers. Overload failure of structural components under random crack propagation and loading : a random process approach. *Structural Safety*, 26 :471–488, 2004.
- A. Bensoussan, J.P. Lions, et G.C. Papanicolaou. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, volume 5 de *Studies in mathematics and its applications*. North-Holland, 1978.
- C. Biernacki, G. Celeux, G. Govaert, et F. Langrognet. Model-based cluster and discriminant analysis with the mixmod software. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(2) :587–600, 2006.
- P. Billingsley. *Statistical Inference for Markov Processes*. The University of Chicago, Chicago Press, 1961.
- Z. Birnbaum et R.C. McCarthy. A distribution free upper confidence bound for $p(y < x)$ based on independent samples of x and y . *Annals of Mathematical Statistics*, 1 :13–17, 1958.

- M. Bladt et M. Sorensen. Statistical inference for discretely observed markov jump processes. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 67 :395–410, 2005.
- J.L. Bogdanoff et F. Kozin. *Probabilistic Models of Cumulative Damage*. John Wiley, New York, 1985.
- N.N. Bogolyubov et Y.A. Mitropol'skii. *Asymptotics Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*. Gordon and Breach, 1961.
- B. Bousfiha, B. Delaporte, et N. Limnios. Évaluation numérique de la fiabilité des systèmes semi-markoviens. *RAIRO-APII-JESA*, 30 :557–571, 1996.
- R. Bullough et al. A review of methods and applications of the reliability analysis for structural integrity assessment of UK nuclear plant. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 76 :909–919, 1999.
- E. Çinlar. Markov renewal theory. *Advances in Applied Probability*, 1 :123–187, 1969a.
- E. Çinlar. On semi-Markov processes on arbitrary spaces. *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 66 :381–392, 1969b.
- J. Chiquet. Estimation des températures journalières à l'aide de techniques markoviennes. Mémoire de master 2, Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- C. Coccozza-Thievent, R. Eymard, S. Mercier, et M. Roussignol. Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, pages 1–18, 2006.
- O.L.V. Costa et F. Dufour. On the Poisson equation for piecewise-deterministic Markov process. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 42(3) :985–1001, 2003.
- O.L.V. Costa, C.A.B. Raymundo, et F. Dufour. Optimal stopping with continuous control of piecewise deterministic Markov processes. *Stochastics and Stochastic Reports*, 70(1-2) :41–73, 2000.
- H. Cramer. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, 1946.
- D. Dacunha-Castelle et M. Duflo. *Probabilité et Statistique*, volume 2. Masson, Paris, 1983.
- A. Dassios et P. Embrechts. Martingales and insurance risk. *Communications in Statistical and Stochastic Models*, 5 :181–217, 1989.
- R Dautray, éditeur. *Méthodes Probabilistes pour les Équations de la Physique*. Synthèse. Eyrolles, 1989.
- R.N. Dave. Characterization and detection of noise in clustering. *Pattern Recognition Letters*, 12(11) :657–664, 1991.

- M.H.A. Davis. Piecewise-deterministic Markov processes : a general class of non-diffusion stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society*, 46(3) :353–388, 1984.
- M.H.A Davis. *Markov Models and Optimization*. Monographs On statistics and Applied Probability 49. Chapman & Hall, 1993.
- J. Devooght. Advances in nuclear science and technology. *Dynamic Reliability*, pages 217–278, 2002.
- J. Devooght et C. Smidts. Probabilistic dynamics as a tool for dynamic PSA. *Reliability Engineering and System Safety*, 52 :185–196, 1996.
- F. Dufour et O.L.V. Costa. Stability of piecewise-deterministic Markov processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 37(5) :1483–1502, 1999.
- J. Dufresne, A.C. Lucia, J. Grandmange, et A. Pellisier-Tanon. Étude probabilistique de la rupture de cuve de réacteurs à eau sous pression. Rapport Technique DSN-651, Direction de la Sureté Nucléaire, 1983.
- P. Embrechts, R. Frey, et H. Furrer. Stochastic processes in insurance and finance. Dans *Stochastic Processes : Theory and Methods*, volume 19 de *Handbook of Statistics*, pages 365–412. Elsevier Science, Amsterdam, 2001.
- P. Embrechts et H. Schmidli. Ruin estimation for a general insurance risk models. *Advances in Applied Probability*, 26 :404–422, 1994.
- B.S. Everitt, S. Landau, et M. Leese. *Cluster Analysis*. Arnold, quatrième édition, 2001.
- I.I. Ezhov et A.V. Skorokhod. Markov processes homogeneous with respect to the second component. *Theory of Probability and its Applications*, 14 :3–14, 1969.
- R.G.. Forman. Numerical analysis of crack propagation in cyclic load structures. *Journal of Basic Engineering*, 89 :459–465, 1967.
- I.I. Gikhman et A.V. Skorokhod. *Introduction to the Theory of Random Processes*. Dover Publications, 1969.
- I.I. Gikhman et A.V. Skorokhod. *Theory of Stochastic processes*, volume II : Markov processes. Springer, Classic in Mathematics, 2001.
- C. Guohua et D. Shuho. Study on the reliability assessment methodology for pressure vessels containing defects. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 69 :273–277, 1996.
- D.O. Harris et E.Y. Lim. Application of a fracture mechanics model of structural reliability to the effects of seismic events and reactor piping. *Progress in Nuclear Energy*, 10 :125–159, 1982.
- W. Härdle. *Applied Nonparametric Regression*. Econometric Society Monographs, 1990.

- H. Ishikawa, A. Tsurui, et H. Kimura. Stochastic fatigue crack growth model and its wide applicability in reliability-based design. Dans *Statistical Research on Fatigue and Fracture*, pages 45–58. Elsevier Applied Science, 1987.
- A. Ivanova et A. Naess. Importance sampling for dynamical systems by approximate calculation of the optimal control function. Dans *Modern Statistical and Mathematical Methods in Reliability*, volume 10 de *Quality, Reliability and Engineering Statistics*. World Scientific, 2004.
- M. Jacobsen. *Statistical Analysis of Counting Processes*. Springer-Verlag, New-York, 1982.
- M. Jacobsen. Martingales and the distribution of the time to ruin. *Stochastic Processes and their Applications*, 107 :29–51, 2003.
- M. Jacobsen. *Point Process Theory and Applications*. Birkhauser, 2006.
- Anil K. Jain et Richard C. Dubes. *Algorithms for Clustering Data*. Prentice-Hall, 1988. URL http://www.cse.msu.edu/~jain/Clustering_Jain_Dubes.pdf.
- R.A Johnson. Stress-strength models for reliability. Dans *Handbook of Statistics*, volume 7 de *Handbook of Statistics*, pages 27–54. Elsevier Science Publishers, 1988.
- G.O. Johnston. Statistical scatter in fracture toughness and fatigue crack growth data. Dans *Probabilistic Fracture Mechanics and Fatigue Methods : Applications for Structural Design and Maintenance*. American Society for Testing materials, 1983.
- R.Z Khasminskii. A limit theorem for the solutions of differential equations with random right-hand sides. *Theory of Probability and its Applications*, 11 :390–406, 1966a.
- R.Z Khasminskii. On stochastic process defined by differential equations with small parameters. *Theory of Probability and its Applications*, 11 :211–228, 1966b.
- D.J. Kirkner, K. Sobczyk, et B.F. Spencer. On the relationship of the cumulative jump model for random fatigue to empirical data. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 14 :257–267, 1999.
- P.E Kloeden et E. Platen. *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, 1992.
- V.S Koroliuk et N. Limnios. Average and diffusion approximation of stochastic evolutionary systems in an asymptotic split state space. *The Annals of Applied Probability*, 14 :489–516, 2004.
- V.S. Koroliuk et N. Limnios. *Stochastic Systems in Merging Phase Space*. World Scientific, 2005.
- S. Kotz, Y. Lumelskii, et M. Pensky. *The Stress-Strength Model and its Generalizations*. World Scientific, New Jersey, 2003.

- C.J. Kung et K. Ortiz. Objective comparison of fatigue crack growth laws. *Structural Safety and Reliability*, 2 :1627-1630, 1990.
- S.W. Lagakos, C.J. Sommer, et M. Zelen. Semi-Markov models for partially censored data. *Biometrika*, 65 :311-317, 1978.
- B. Lapeyre et E. Pardoux. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Springer, 1998.
- A. Lehmann. Degradation-threshold-shok models. Dans *Probability, Statistics and Modelling in Public Health*, pages 286-298. Springer, 2006.
- P. Lévy. Processus semi-markoviens. Dans *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, pages 416-426, 1954.
- A.B. Lidiard. Fracture mechanics, current status, future prospects. Dans R.A. Smith, éditeur, *Proceedings of a Conference at the Cambridge University, England*, 1979.
- N. Limnios. Processus stochastiques et fiabilité. Cours de Master 2 à l'Université de Technologie de Compiègne, 2003.
- N. Limnios et V. Girardin. *Probabilités en vue des applications*. Vuibert, 2001.
- N. Limnios et G. Oprişan. *Semi-Markov Processes and Reliability*. Birkhäuser, 2001.
- N. Limnios, B. Oubhi, et A. Sadek. Empirical estimator of stationary distribution for semi-Markov processes. *Communications in Statistics : Theory and Methods*, 34 :987-996, 2005.
- Y. K. Lin et J. N. Yang. On statistical moments of fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 18 :243-256, 1983.
- Y. K. Lin et J. N. Yang. A stochastic theory of fatigue crack propagation. *AIAA Journal*, 23 :117-124, 1985.
- J. B. MacQueen. Some methods for classification and analysis of multivariate observations. Dans *Proceedings of 5-th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1, pages 281-297. Berkeley, University of California Press, 1967.
- W. Marshall. An assessment of the integrity of PWR pressure vessels. Rapport technique, United Kingdom Atomic Energy Authority, 1976-1982.
- E.H. Moore et R. Pyke. Estimation of the transition distributions of a Markov renewal process. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 20 :411-424, 1968.
- E. Myötyri, U. Pulkkinen, et K. Simola. Application of stochastic filtering for lifetime prediction. *Reliability Engineering and System Safety*, 91(2) : 200-208, 2006.
- M. Nikulin, L. Gerville-Réache, et V. Couaillier. Modélisation des processus de dégradation. Dans *Statistique des essais accélérés*. Hermès, 2007.

- B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer, sixth édition, 2003.
- D.F. Ostergaard et B.M Hillberry. Characterization of the variability in fatigue crack propagation. Dans *Probabilistic Fracture Mechanics and Fatigue Methods : Applications for Structural Design and Maintenance*. American Society for Testing materials, 1983.
- B. Ouhbi et N. Limnios. Nonparametric estimation for semi-Markov kernels with application to reliability analysis. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 12 :209–220, 1996.
- B. Ouhbi et N. Limnios. Estimation of kernel, availability and reliability of semi-markov systems. Dans *Statistical and Probabilistic Methods in Reliability*. Birkhauser, Boston, 1998.
- B. Ouhbi et N. Limnios. Nonparametric estimation for semi-Markov processes based on k-sample paths with application to reliability. Dans *ASMDA : Applied Stochastic Models and Data Analysis 2005*, 2005.
- B. Palmberg, A.F. Blom, et S. Eggwertz. Probabilistic damage tolerance analysis of aircraft structure. Dans *Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability*. Martinus Nijhoff publishers, 1987.
- G.C. Papanicolaou. Asymptotic analysis of transport processes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 81(2) :330–392, 1975.
- G.C. Papanicolaou et W. Kohler. Asymptotic theory of mixing stochastic ordinary differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 27 :641–668, 1974.
- P.C. Paris et F. Erdogan. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, 85 :528–534, 1963.
- D. Pollard. Strong consistency of k -means clustering. *The Annals of Statistics*, 9(1) :135–140, 1981.
- J. Provan et K. Frahangdoost. A stochastic systems approach to fatigue reliability - an application to Ti-6Al-4v. *Engineering Fracture Mechanics*, 53 :687–706, 1996.
- J.W. Provan, éditeur. *Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability*. Martinus Nijhoff publishers, 1987.
- R. Pyke. Markov renewal process : definitions and preliminary properties. *Annals of Mathematical Statistics*, 32 :1231–1241, 1961a.
- R. Pyke. Markov renewal processes with finitely many states. *Annals of Mathematical Statistics*, 32 :1242–1259, 1961b.
- R. Pyke et R. Schaufele. Limit theorems for Markov renewal processes. *Annals of Mathematical Statistics*, 1964.
- T.D. Righiniotis. Influence of managements actions on fatigue reliability of welded joint. *International Journal of Fatigue*, 26 :231–239, 2004.

- A. Sadek et N. Limnios. Nonparametric estimation of reliability and survival function for continuous time finite Markov process. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 133 :1–21, 2005.
- W. Shen, A.B.O. Soboyejo, et W.O. Soboyejo. Probabilistic modeling of fatigue crack growth in Ti-6Al-4V. *International Journal of Fatigue*, 23 : 917–925, 2001.
- W.L. Smith. Regenerative stochastic processes. Dans *Royal Society of London Proceedings Series A*, volume 232, pages 6–31, 1955.
- K. Sobczyk. On the markovian models for fatigue accumulation. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Numéro spécial :147–160, 1982.
- K. Sobczyk. *Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering*. Kluwer, 1991.
- K. Sobczyk, éditeur. *Stochastic Approach to Fatigue*. Springer Verlag ; Wien - New York, 1993.
- K. Sobczyk et J. Trębicki. Approximate probability distributions for stochastic systems : maximum entropy method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 168 :91–111, 1999.
- G.P. Solomos. First-passage solutions in fatigue crack propagation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 4 :32–39, 1989.
- B.F. Spencer. Diffusion models for fatigue crack growth. Dans *Stochastic Approach to Fatigue*. Springer Verlag ; Wien - New York, 1993.
- B.F. Spencer, J. Tang, et M.E. Artley. A stochastic approach to modeling fatigue crack growth. *AIAA Journal*, 114 :1628–1635, 1989.
- R.L. Stratonovich. *Topic in the Theory of Random Noise*, volume 1. Gordon and Breach, 1963.
- L. Takacs. Some investigations concerning recurrent stochastic processes of a certain type. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kzl.*, 3 :115–128, 1954.
- H. Tanaka. Importance sampling simulation for a stochastic fatigue crack growth model. Dans R.E. Melchers et M.G. Stewart, éditeurs, *Proceeding of ICASP8*, volume 2, pages 907–914, 1999.
- H. Tanaka et T. Akira. Reliability degradation of structural components in the process of fatigue crack propagation under stationary random loading. *Engineering Fracture Mechanics*, 27 :501–516, 1987.
- J. Tang et B.F. Spencer. Reliability solution for the stochastic fatigue crack growth problem. *Engineering Fracture Mechanics*, 34 :419–433, 1989.
- A. Tsurui et H. Ishikawa. Application of the Fokker-Plank equation to a stochastic fatigue crack growth model. *Structural Safety*, 4 :15–29, 1986.
- D. Vermes. Optimal control of piecewise deterministic Markov process. *Stochastics*, 14 :165–207, 1985.

- D.A. Virkler, B.M. Hillberry, et P.K. Goel. The statistical nature of fatigue crack propagation. *Journal of Engineering Material Technology ASME*, 101 : 148–153, 1979.
- W.F. Wu et C.C Ni. A study of stochastic fatigue crack growth modeling through experimental data. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18 :107–118, 2003.
- W.F. Wu et C.C Ni. Probabilistic models of fatigue crack growth propagation and their experimental verification. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19 :247–257, 2004.
- J Xing, Q.P. Zhong, et Y.J. Hong. A simple lognormal random crack process approach of the fatigue crack growth considering the distribution of initial crack size and loading condition. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 74 :7–12, 1997.
- J.N. Yang. Simulation of random envelope processes. *Journal of Sound and Vibration*, 21 :73–85, 1972.
- J.N. Yang, S.D. Mannig, W.H. HSI, et J.L. Rudd. Stochastic crack growth models for applications to aircraft structures. Dans J.W. Provan, éditeur, *Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability*. Martinus Nijhoff publishers, 1987.
- J.N. Yang et S.D. Manning. Stochastic crack growth analysis methodologies for metallic structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 37 :1105–1124, 1990.
- J.N. Yang et S.D. Manning. A simple second order approximation for stochastic crack growth analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 53 : 677–686, 1996.
- B. Ycart. *Modèles et Algorithmes Markoviens*. Springer, 2002.

PUBLICATIONS DE LA THÈSE

REVUES INTERNATIONALES AVEC COMITÉ DE LECTURE

- J. Chiquet et N. Limnios. Estimating stochastic dynamical systems driven by a continuous-time jump markov process. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 8, 2006. (Cité page 3.)
- J. Chiquet, N. Limnios, et M. Eid. Piecewise deterministic Markov processes Applied to fatigue crack growth modelling. *Journal of Statistical Planning and Inference*, en révision. (Cité page 3.)
- J. Chiquet et N. Limnios. A method to compute the reliability of a piecewise deterministic Markov process. *Statistics and Probability Letters*, Soumis. (Cité page 3.)

CHAPITRE DE LIVRE

- J. Chiquet et N. Limnios. Chapitre Reliability of stochastic dynamical systems applied to fatigue crack growth modelling, dans *Mathematical Methods in Reliability and Survival Analysis*, à paraître aux éditions Hermès. (Cité page 3.)

CONFÉRENCES INTERNATIONALES AVEC ACTES

- J. Chiquet, M. Eid, et N. Limnios. Modelling the reliability of degradation processes through Markov renewal theory. Dans *Proceedings of ESREL 2007 - Safety and Reliability Conference*, à paraître, 2007. (Cité page 3.)
- J. Chiquet et N. Limnios. Modelling degradation processes through a piecewise deterministic Markov process with applicaiton to fatigue crack growth. Dans *Proceedings of RASOR 2007 - International Workshop on Recent Advanced in Stochastic Operations Research*, 2007. (Cité page 3.)
- J. Chiquet, N. Limnios, et M. Eid. Modelling and estimating the reliability of stochastic dynamical systems with markovian switching. Dans *Proceedings of ESREL 2006 - Safety and Reliability for managing Risks*, 2006. (Cité page 3.)

CONFÉRENCES FRANCOPHONES AVEC ACTES

- J. Chiquet, N. Limnios, et M. Eid. Processus markoviens de saut dans les équations différentielles stochastiques appliquées à la modélisation de

la fatigue des matériaux. Dans *Actes du Congrès Français de Mécanique 2005*, 2005. (Cité page 3.)

- J. Chiquet, T. Yurizin, et M. Eid. Modèle stochastique de taille critique de fissure dans les structures soumises au vieillissement sous irradiation. Dans *Actes du Congrès Français de Mécanique 2005*, 2005. (Cité page 3.)

NOTES TECHNIQUES CEA

- J. Chiquet. Équations différentielles stochastiques dans les modèles de propagations des fissures en fatigue. Rapport technique, Commissariat à l'Énergie Atomique, 2005. (Cité pages 3, 121 et 122.)
- J. Chiquet. Prise en main du logiciel pascal : Probabilistic fracture mechanics analysis of structural component in aging lwr. Rapport technique, Commissariat à l'Énergie Atomique, 2004. (Cité page 3.)
- J. Chiquet. Vers le développement de modèles de vieillissement et de fiabilité des structures : une approche stochastique. Rapport technique, Commissariat à l'Énergie Atomique, 2004. (Cité page 3.)

NOTATIONS

PMDM	Processus de Markov déterministe par morceaux
<i>p.s.</i>	presque sûrement
\mathbb{N}, \mathbb{N}^*	ensemble des entiers naturels, des entiers strictement positifs
\mathbb{R}, \mathbb{R}_+	ensembles des réels et des réels positifs
\mathbb{R}^d	ensemble des vecteurs réels à d dimensions
\mathbb{P}, \mathbb{E}	probabilité et espérance
Var, Cov	variance, covariance
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace probabilisé
(E, \mathcal{E})	espace mesurable E muni de la tribu \mathcal{E}
$\mathcal{B}, \mathcal{B}_+, \mathcal{B}^d$	tribus des boréliens de \mathbb{R} , de \mathbb{R}_+ et de \mathbb{R}^d
\otimes	produit de Kronecker
$\mathbb{1}_A(x)$	fonction indicatrice d'un sous ensemble A
$\delta_x(B), \delta(B)$	distribution de Dirac au point x , au point 0
$(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$	processus markovien de saut
π	loi stationnaire du processus markovien de saut X_t
$X_t(\omega)$	trajectoire d'un processus X_t
$(Z_t, t \in \mathbb{R}_+)$	processus de dégradation
$(Z_t, X_t, t \in \mathbb{R}_+)$	processus couple ou PMDM
$(J_n, n \in \mathbb{N})$	chaîne de Markov immergée associée au processus X_t
$(J_n, S_n, n \in \mathbb{N})$	processus de renouvellement markovien
$(\zeta_n, J_n, S_n, n \in \mathbb{N})$	processus de renouvellement markovien étendu
\mathbb{P}_i	probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot X_0 = i) = \mathbb{P}(\cdot J_0 = i)$
$\mathbb{P}_{z,i}$	probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot Z_0 = z, X_0 = i) = \mathbb{P}(\cdot \zeta_0 = z, J_0 = i)$
$\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_{z,i}$	espérance conditionnelle correspondant à $\mathbb{P}_i, \mathbb{P}_{z,i}$
α, β, μ	lois initiales des processus X_t, Z_t et du couple (Z_t, X_t)
$P(x, B, t)$	fonction de transition d'un processus de renouvellement markovien
$P_{ij}(t)$	fonction de transition du processus markovien de saut X_t
$P_{ij}(x, B, t)$	fonction de transition du PMDM (Z_t, X_t)
Δ	seuil de défaillance de Z_t
$\varphi_{z,i}(t)$	solution pour Z_t sans saut de X_t , conditionnellement à l'état initial (z, i)
$t_{z,i}(y)$	temps d'entrée de Z_t dans y , sans saut de X_t , conditionnellement à l'état initial (z, i)
\mathcal{P}_t	opérateur du semi-groupe des fonctions de transition
\mathcal{A}, \mathcal{B}	générateur d'un processus de Markov, cas général
$\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j \in E}$	générateur du processus X_t d'espace d'état dénombrable

$\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in E}$	matrice de transition de la chaîne de Markov immergée
$Q(x, B, t)$	noyau semi-markovien d'un processus
$Q_{ij}(t)$	noyau semi-markovien d'un processus semi-markovien de saut
$Q_{ij}(x, B, t)$	noyau semi-markovien du processus de renouvellement étendu (ζ_n, J_n, S_n)
$\psi(x, B, t)$	fonction de renouvellement markovien
$\psi_{ij}(x, B, t)$	fonction de renouvellement markovien de (ζ_n, J_n, S_n)
*	produit de convolution au sens de Stieltjes
$Q * Q$	convolution au sens de Stieltjes de deux noyaux semi-markoviens
$Q^{(n)}$	puissance n^e au sens de la convolution de Stieltjes
$R(t)$	fonction de fiabilité du système
$A(t)$	disponibilité du système
$\lambda(t)$	taux de défaillance du système
τ	temps de défaillance
F_τ, f_τ	fonction de répartition, densité du temps de défaillance
U, D	ensembles des états de fonctionnement et de panne
$\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{22}$	partitions du générateur sur les ensembles U et D
α_1, α_2	partitions de la loi initiale sur les ensembles U et D
$\mathbf{1}_r$	vecteur de dimension r dont tous les éléments sont égaux à 1
$\mathbf{1}_{s,r}$	vecteur de dimension s dont les r premiers éléments sont égaux à 1, les autres étant nuls
\mathbf{L}_A	fonction de vraisemblance
\mathcal{L}_A	fonction de log-vraisemblance du générateur A
\mathcal{L}_A^0	fonction de log-vraisemblance approchée
$\mathcal{H}_t, \mathcal{H}_\tau$	histoire du processus avec censure t fixée, et avec censure aléatoire τ
$N(t), N(\tau)$	nombre de sauts sur l'intervalle $[0, t]$, resp. $[0, \tau]$
$N_i(t), N_i(\tau)$	nombre de passages dans l'état i sur $[0, t]$, resp. $[0, \tau]$
$N_{ij}(t), N_{ij}(\tau)$	nombre de transitions de i vers j sur $[0, t]$, resp. $[0, \tau]$
$V_i(t), V_i(\tau)$	temps passé dans l'état i sur $[0, t]$, resp. $[0, \tau]$
$X_t^k, Z_t^k, N^k(t), \mathcal{H}^k, \text{etc.}$	k^e copie i.i.d. de $X_t, Z_t, N(t), \mathcal{H}, \text{etc.}$
$N(K, \tau), N_i(K, \tau), \text{etc.}$	variables aléatoires $N^k(\tau^k), N_i^k(\tau^k), \text{etc.}$ cumulées sur K trajectoires
$\hat{a}_{ij}, \hat{\alpha}, \text{etc.}$	estimateurs de a_{ij}, α, \dots
$f_{\mathcal{H}_t}$	densité de \mathcal{H}_t
$f_{\mathcal{H}_\tau}$	densité de \mathcal{H}_τ
EMV	estimateur du maximum de vraisemblance
Φ	fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
B_t	mouvement brownien
$ E $	cardinal de l'ensemble E

Ce document a été préparé à l'aide de l'éditeur de texte GNU Emacs et du logiciel de composition typographique L^AT_EX 2_ε.

Titre Modélisation et estimation des processus de dégradation avec application en fiabilité des structures

Résumé Nous décrivons le niveau de dégradation caractéristique d'une structure à l'aide d'un processus stochastique appelé processus de dégradation. La dynamique de ce processus est modélisée par un système différentiel à environnement markovien. Nous étudions la fiabilité du système en considérant la défaillance de la structure lorsque le processus de dégradation dépasse un seuil fixe. Nous obtenons la fiabilité théorique à l'aide de la théorie du renouvellement markovien. Puis, nous proposons une procédure d'estimation des paramètres des processus aléatoires du système différentiel. Les méthodes d'estimation et les résultats théoriques de la fiabilité, ainsi que les algorithmes de calcul associés, sont validés sur des données simulées. Notre méthode est appliquée à la modélisation d'un mécanisme réel de dégradation, la propagation des fissures, pour lequel nous disposons d'un jeu de données expérimental.

Mots-clés Système différentiel à environnement markovien · Processus de Markov · Processus de renouvellement markovien · Processus de Markov déterministe par morceaux · Propagation des fissures · Fiabilité · Estimation des processus

Title Modelling and estimating degradation processes with application in structural reliability

Abstract The characteristic level of degradation of a given structure is modeled through a stochastic process called the degradation process. The random evolution of the degradation process is governed by a differential system with markovian environment. We put the associated reliability framework by considering the failure of the structure once the degradation process reaches a critical threshold. A closed form solution of the reliability function is obtained thanks to Markov renewal theory. Then, we build an estimation methodology for the parameters of the stochastic processes involved. The estimation methods and the theoretical results, as well as the associated numerical algorithms, are validated on simulated data sets. Our method is applied to the modelling of a real degradation mechanism, known as crack growth, for which an experimental data set is considered.

Keywords Differential systems with markovian environment · Markov processes · Markov renewal processes · Piecewise deterministic Markov processes · Crack growth · Reliability · Estimation of processes