Des programmes à la classe : Etude de la transposition didactique interne. Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique.

Laetitia Ravel

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER – GRENOBLE I

THESE
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Ecole doctorale de Mathématiques et Informatique – Sciences et Technologies de l'information

Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement par

Laetitia RAVEL

Le 24 octobre 2003

DES PROGRAMMES A LA CLASSE : ETUDE DE LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE INTERNE

Exemple de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématique

Thèse dirigée par **Jean-Luc DORIER**

Composition du jury :

Annie BESSOT	Examinatrice
Yves CHEVALLARD	Rapporteur
Jean-Luc DORIER	Directeur de Thèse
Colette LABORDE	Examinatrice
Claire MARGOLINAS	Examinatrice
Aline ROBERT	Rapporteur

Thèse préparée au sein de l'équipe de
Didactique des Mathématiques (DDM), Laboratoire Leibniz-IMAG

Au 141201
Et tous ceux qui suivront...

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Jean-Luc Dorier d'avoir accepté de diriger ma thèse, poursuivant ainsi l'aventure commencée en DEA. Ses conseils et ses encouragements m'ont soutenu tout au long de ces quatre années et m'ont permis de mener cette recherche à son terme. Je garde un souvenir fort de nos moments de travail qui m'ont toujours donné l'envie d'aller de l'avant.

Je remercie également Aline Robert et Yves Chevallard de s'être rendus disponibles en acceptant d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs commentaires sur mon travail m'encouragent à poursuivre dans la voie de la recherche en didactique des mathématiques.

Je remercie Colette Laborde d'avoir accepter de présider mon jury de thèse, après celui de DEA.
Je remercie aussi Claire Margolinas d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je n'oublie pas le temps qu'elle m'a accordé, de même que ses remarques sur mon travail en cours de thèse qui m'ont beaucoup appris.

Je remercie tout particulièrement Annie Bessot pour sa disponibilité, son aide et le temps qu'elle a passé à répondre à toutes mes questions sur les théories didactiques. Je garde en mémoire sa bonne humeur, les chouquettes et son bureau toujours ouvert.

Je souhaite de plus exprimer toute ma reconnaissance à Aline et Marie-Claire qui m'ont ouvert les portes dans leur classe pendant un an. Ce n'est pas toujours facile de trouver des enseignants prêts à accepter des observateurs au fond de leur classe pendant si longtemps. Je leur dois beaucoup.

Un grand merci à tous les membres de l'équipe DDM qui, dès le premier jour, m'ont accueilli avec générosité et gentillesse. J'ai partagé avec eux des moments qui m'ont fait chaud au cœur. Merci pour votre soutien sans faille. J'ai une pensée particulière pour Lalina, Hai et Thanh, mes compagnons de bureau. Je n'oublierais pas tous les moments de complicité que l'on a passé ensemble, notamment à la cafèt' autour d'un thé ou d'un café.

Je remercie également tous les thésards du laboratoire Leibniz avec qui j'ai passé des moments très agréables, ainsi que les personnes du deuxième étage. Une pensée spéciale à Mehdi et à Pierre avec qui j'ai partagé beaucoup pendant la dernière année de thèse. Les mots me manquent pour dire à quel point leur bonne humeur et leurs attentions ont été précieuses pour moi. Dites les gars, c'est quand qu'on se refait un RU à 11h30 ?

Merci à Myriam pour nos discussions amicales tard le soir dans les couloirs du laboratoire.

Je remercie chaleureusement tous mes amis qui m'ont accompagnée, de près ou de loin, pendant ces trois années. Ils ont tous été là, à leur façon, pour m'encourager et me remonter le moral dans les moments de doute. Je ne peux pas vous citer tous mais vous savez que je pense à vous.

A mes parents et à toute ma famille qui ont tout fait pour que j'arrive là où je suis arrivée. Sans mes parents et leur passion de leur métier d'enseignant, je crois que je n'aurai jamais fait

une thèse en didactique des mathématiques. Merci aussi pour ces treize années d'Afrique qui m'ont fait comprendre l'importance de l'éducation.
Un petit message reconnaissant à mon frère et à Judith qui m'ont accueilli et m'accueillent toujours gentiment à Paris, même quand je les préviens à la dernière minute…

Enfin, à Michel, qui a vécu tout aussi intensément que moi les deux dernières années de cette thèse. Merci d'avoir tout supporté et de croire en moi.

Et en souvenir des longues heures de rédaction devant mon ordinateur, une dédicace spéciale à Patrice. *Let the sun shine !*

Table des matières

PARTIE D

ANNEXES

PARTIE A

INTRODUCTION ET PROBLEMATIQUE

CHAPITRE A

INTRODUCTION ET PROBLEMATIQUE

INTRODUCTION

Si un observateur curieux ouvre la porte de différentes salles de classe et observe plusieurs professeurs faire un cours sur un même objet mathématique à un niveau scolaire donné, il est fort probable, qu'en refermant les portes, il n'ait pas l'impression d'avoir observé exactement le même objet mathématique dans toutes les classes. Et si ce même observateur, pour essayer de s'expliquer ce phénomène, va ensuite consulter le programme scolaire –première référence à laquelle sont liés les professeurs pour construire leurs cours–, il risque également d'être surpris de constater qu'il existe un écart entre l'objet mathématique présent dans le programme et celui observé dans les classes.
Il est alors légitime de se demander ce qu'il se passe quand un objet de savoir arrive dans les programmes d'enseignement. Comment le système d'enseignement « réagit » face à cette arrivée ? Comment se fait le passage du programme à la classe pour un objet de savoir donné ? Quelles sont les différentes adaptations inhérentes à ce passage ? Quels sont les acteurs du système d'enseignement qui ont la responsabilité de ces adaptations ? Quel(s) rôle(s) jouent-ils au niveau de ces adaptations ? Dans quel(s) système(s) de contraintes et de libertés agissent-ils ?
Ces questions naïves ont été à la base de notre problématique et ont guidé les choix théoriques et méthodologiques que nous allons maintenant présenter.

I. PROBLEMATIQUE

Dans ce paragraphe, nous allons tout d'abord situer nos questions dans un cadre d'étude général, expliciter les raisons qui nous ont conduite à choisir l'arithmétique comme objet d'étude et enfin, présenter les choix méthodologiques et théoriques que nous avons faits.

I.1 La transposition didactique interne

a) Du savoir à enseigner au savoir enseigné

Le concept de transposition didactique, « processus qui fait que les objets du savoir mathématique savant sont transformés en savoirs à enseigner, inscrits dans le projet d'enseignement, puis en savoirs d'enseignement » (Conne 1992, p. 266), a été introduit dans la communauté didactique en 1980 par Chevallard, lors d'un cours donné à la première école d'été de didactique des mathématiques. Ce processus de transformation du savoir se fait en plusieurs étapes ; il est, dans un premier temps, sous la responsabilité de la noosphère[1] :

> « C'est elle [la noosphère], […] qui va procéder à la sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme « savoir à enseigner », seront alors soumis au travail de transposition ; c'est elle, encore, qui va assumer la partie visible de ce travail, ce qu'on peut appeler le travail *externe* de la transposition didactique[2], par opposition au travail *interne*, qui se poursuit, à l'intérieur même du système d'enseignement, bien après l'introduction officielle des éléments nouveaux dans le savoir enseigné. » (Chevallard 1991, p. 31)

Le passage du savoir savant au savoir enseigné peut donc, comme le souligne Arsac (Arsac 1989, p. 12), se décomposer en « deux étages » :

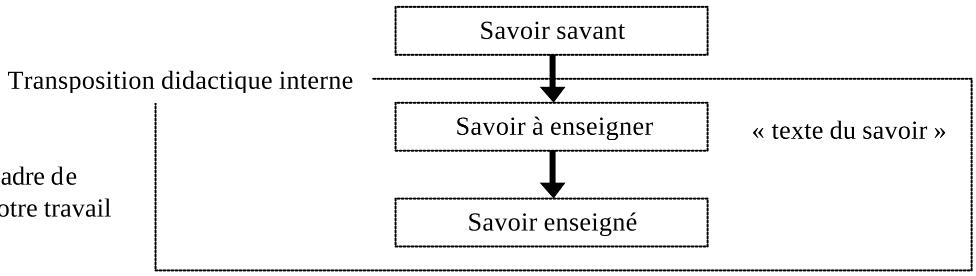


Fig. 1 : Les deux étages de la transposition didactique

Depuis, ce concept a été développé et de nombreux travaux l'ont utilisé[3] ; notre travail se situe dans la lignée de ces recherches et a pour particularité de s'intéresser au processus de **transposition didactique interne**, c'est-à-dire au passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. Pour pouvoir étudier ce processus, il nous faut donc définir le savoir à enseigner et le savoir enseigné.

La citation précédente de Chevallard permet de donner une première définition du savoir à enseigner : c'est le résultat du « travail externe de transposition didactique » de la noosphère. Lorsque la noosphère souhaite introduire des objets de savoir dans les contenus d'enseignement, elle sélectionne des « éléments du savoir savant » et les transforme afin de pouvoir, notamment, rédiger un programme officiel d'enseignement. Les « éléments du savoir savant » ainsi transformés deviennent des savoirs à enseigner. Chevallard précise par ailleurs que le savoir à enseigner ne se réduit pas au contenu des programmes d'enseignement :

> « Les contenus de savoirs [sont] désignés comme étant *à enseigner*, explicitement : dans les *programmes* ; implicitement : par le truchement de la tradition, évolutive, de l'interprétation des programmes [...] » (Chevallard 1991, p. 39)

Arsac, en commentant le schéma présenté ci-dessus, précise la définition du savoir à enseigner donnée par Chevallard :

> « Revenons tout de suite sur la notion de savoir à enseigner : ce dernier ne se réduit pas au programme, nous avons remarqué en effet qu'un texte de programme appelle une interprétation. Le savoir à enseigner est ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme. Chevallard (1985)

[1] La noosphère est la « sphère *où l'on pense* le fonctionnement didactique » qui est constituée des « représentants du système d'enseignement » et des « représentants de la société ». (Chevallard 1991, p. 25)
[2] C'est nous qui soulignons.
[3] Nous pensons notamment à la thèse de Rajoson (1988) qui étudie trois cas de phénomènes de transposition didactique : le problème de Moivre, le procédé de Héron et la symétrie glissante.

> parle de « texte du savoir », en soulignant que ce texte n'est complètement écrit nulle part. » (Arsac 1989, pp. 12-13)

Dans notre travail, nous nous rapprochons de cette définition en considérant que le savoir à enseigner, ou « texte du savoir », se constitue non seulement du programme scolaire mais également, comme le souligne Arsac, des interprétations courantes et des habitudes générales prises à propos de ce programme, ainsi que de « ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner »[4].

Par savoir enseigné, nous considérons le savoir réellement enseigné en classe, c'est-à-dire le savoir que chaque professeur présente de manière effective aux élèves. Il est donc par nature pluriel.

Analyser les écarts entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné pour un même objet mathématique permet une première étude du travail interne de la transposition didactique. Cependant, en voulant comprendre le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne, nous avons été amenée à compléter ce processus en y ajoutant une étape intermédiaire.

b) Le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne

Lorsqu'un enseignant prépare son cours, nous pouvons faire l'hypothèse que pour lui, le texte du savoir est, à ce moment précis, temporairement stable. Cependant, ce texte offre encore au professeur une variété de choix. Les choix que fait l'enseignant pour construire son cours modifient le savoir à enseigner de même que la réalisation effective du projet de cours devant des élèves donne inéluctablement lieu à des modifications de ce projet. Ce travail de l'enseignant est donc un travail transpositif :

> « Le second grand type de tâches au cœur de l'activité du professeur consiste évidemment à diriger l'étude d'une organisation mathématique déterminée, c'est-à-dire à conduire la reconstruction, ou *transposition*, dans la classe, de cette organisation. » (Chevallard 1997, p. 45)

Ainsi, le rôle de l'enseignant est central dans le processus de transposition didactique interne : c'est à lui que revient la charge[5] d'« apprêter » le savoir à enseigner en savoir enseigné. Nous empruntons le terme « d'apprêt didactique » à Chevallard (1991). Ce nom vient du verbe apprêter qui signifie : «rendre prêt, mettre en état en vue d'une utilisation prochaine » (Le Petit Robert 2000). Ainsi, nous nommons « apprêtage » l'action de l'enseignant qui « apprête » ce savoir et « apprêt » le résultat de cette action. Pour analyser le travail interne de la transposition didactique, nous avons choisi d'utiliser ce terme plutôt que celui de transformation que nous avons employé plus haut pour évoquer le passage du savoir savant au savoir à enseigner. Le verbe *transformer*, d'après sa définition (« faire passer d'une forme à une autre, donner un autre aspect à », Le Petit Robert 2000), pourrait convenir pour parler du travail de transposition didactique interne fait par l'enseignant mais nous ne souhaitons pas l'utiliser, afin de distinguer les rôles fondamentalement différents joués par la noosphère et

[4] D'après nous, lorsque Arsac parle de « l'enseignant », il s'agit ici non pas d'un enseignant particulier mais d'un enseignant générique, « bon sujet » de l'institution scolaire française.
[5] Nous verrons par la suite que les auteurs de manuels ou de brochures à destination d'enseignants assument eux aussi une partie de cette charge.

par les enseignants dans le processus de transposition didactique[6]. En effet, l'enseignant n'a pas autant de liberté par rapport au savoir que peut en avoir la noosphère –cela ne signifie cependant pas qu'il n'en ait aucune :

> « Lorsque l'enseignant intervient, pour écrire cette variante locale du texte du savoir qu'il nomme *son cours*, ou pour *faire son cours* (c'est-à-dire pour réaliser le texte du savoir dans le défilé de sa parole), il y a longtemps déjà que la transposition didactique a commencé… […] Sous l'apparence d'un choix théorique, l'enseignant ne choisit pas, parce qu'il n'a pas de puissance de choix. Il retient du processus le seul moment sur lequel il se sache quelque prise : la rédaction du texte du savoir […]. » (Chevallard 1991, p. 19)

Ce que Chevallard veut dire ici c'est que l'enseignant n'a pas autorité pour choisir quels sont les savoirs qui doivent être enseignés à un niveau donné ; ceci est décidé en amont de son champ d'intervention. L'enseignant est donc tenu, de part sa fonction, de respecter les choix de savoirs à enseigner faits par la noosphère. Mais, ces savoirs à enseigner fixés, il est libre de choisir à quel moment les introduire en classe, sous quelle forme etc. Ces choix sont autant d'apprêts possibles du savoir à enseigner et il existe a priori autant d'apprêts possibles que d'enseignants. Nous parlons alors de savoir «apprêté » pour désigner le résultat des choix didactiques et mathématiques faits par un enseignant en vue d'enseigner un objet de savoir mathématique donné. Notons que pour un enseignant, ce savoir « apprêté » s'identifie au projet de cours et que ce savoir est nécessairement autre que le savoir enseigné comme nous l'avons souligné précédemment. Le projet de cours de l'enseignant constitue donc pour nous une étape intermédiaire dans le processus de transposition didactique interne qui mène du savoir à enseigner au savoir enseigné. Ainsi, nous décomposons le processus de transposition didactique interne en deux étapes :

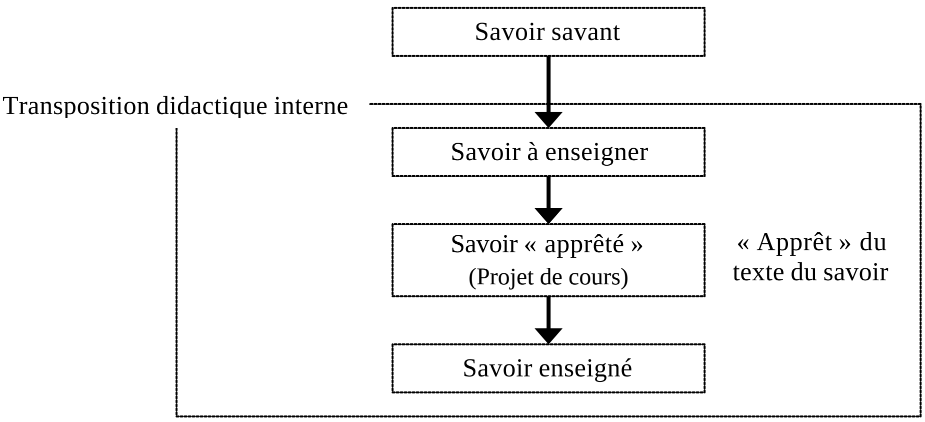


Fig. 2 : Les deux étages de la transposition didactique interne

Le professeur a donc la charge d'« apprêter » le savoir à enseigner en savoir enseigné. Comment remplit-il cette charge ? Chevallard, à ce propos, souligne :

> « Pour l'enseignant, l'outil essentiel de sa pratique *est le texte du savoir* (qui, par lui, devient parole), dans les variations qu'il s'autorise à lui imprimer. Les autres variables de commande dont il peut disposer –notamment celles qui ne sont pas liées spécifiquement à des contenus de savoir– sont des variables subordonnées, et lui permettent surtout d'organiser la mise en œuvre de son arme première, le texte du savoir. » (Ibid., p. 35)

[6] Notons aussi que l'idée d'apprêtage du savoir est plus proche du rôle de l'enseignant que celle de transformation du savoir car dans l'action d'apprêter, la finalité de l'action de modification intervient : il s'agit de modifier le savoir à enseigner **en vue d'une utilisation prochaine** –en vue d'un enseignement effectif !

Ainsi, un professeur qui prépare son cours s'appuie sur le programme, les manuels ou les brochures dont il dispose ou encore sur ses connaissances mathématiques sur le sujet. Il effectue également ses choix dans le texte du savoir en se projetant dans la classe (interviennent alors des contraintes temporelles, d'organisation, d'interaction avec les élèves, etc.) et en s'appuyant sur ses connaissances didactiques. A partir de toutes ces références, il va construire son projet de cours. Comme nous l'avons dit précédemment, le savoir présent dans ce projet est différent du savoir à enseigner ; Chevallard parle de « variations » du « texte du savoir ».

Que peut-on dire de ces « variations » ? L'enseignant dispose-t-il d'une réelle liberté de choix par rapport au «texte du savoir » ? A quel système de contraintes est-il soumis lorsqu'il construit son cours ?
Par ailleurs, au niveau de la classe, observe-t-on des différences significatives entre le savoir apprêté et le savoir enseigné ? Si oui, quelles en sont les principales causes ? Celles-ci sont-elles les mêmes d'un enseignant à l'autre ? Quelles en sont les conséquences ?

c) Le savoir apprêté et les différents acteurs du système d'enseignement

Si le processus en deux étapes savoir à enseigner$\rightarrow$savoir apprêté$\rightarrow$savoir enseigné permet d'analyser le rôle de l'enseignant dans le travail interne de la transposition didactique, il permet également d'analyser celui des différents acteurs du système d'enseignement que sont les auteurs de manuels, de brochures à destination des professeurs ou encore les formateurs.

Prenons l'exemple des manuels. Ils font, selon nous, partie du savoir apprêté et non pas du savoir à enseigner. En effet, un manuel peut être considéré comme un certain apprêt didactique du texte du savoir car il résulte de choix mathématiques et didactiques faits par ses auteurs sur un savoir à enseigner donné. Cependant, cet apprêtage ne s'effectue pas dans le même système de contraintes que celui fait par les enseignants. Il est notamment évident que le temps est une contrainte beaucoup plus forte pour les enseignants que pour les auteurs de manuels et que les contraintes didactiques liées à la mise en scène du savoir en classe pèsent davantage sur les enseignants que sur les auteurs de manuels.
Par ailleurs, alors que chez les enseignants le savoir à enseigner est apprêté en vue d'un enseignement effectif, pour les manuels, le processus de transposition didactique interne s'interrompt au niveau du savoir apprêté.

A quel système de contraintes les auteurs de manuels sont-ils soumis lorsqu'ils apprêtent le savoir à enseigner ? Quelles sont leurs marges de manœuvre ?

L'objet de notre thèse est de donner des éléments de réponse aux questionnements précédents, en prenant pour exemple l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique.

I.2 Pourquoi l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique ?

A l'époque où ce travail a débuté, l'arithmétique venait de réapparaître depuis peu dans les programmes du secondaire (elle est réapparue en classe de spécialité mathématique en

terminale S en 1998, en classe de troisième en 1999 et également en classe de seconde en 2001).
La réapparition dans les contenus d'enseignement d'un savoir qui avait disparu depuis près d'une vingtaine d'années est une occasion unique pour le didacticien d'analyser les conditions de cette réintroduction ainsi que le processus de mise en place d'un nouvel objet d'enseignement dans les classes. En effet, lors d'un changement de programme important, le savoir à enseigner se trouve mis en avant et il est ainsi plus aisé d'étudier les transformations qu'il va subir au cours du processus de transposition didactique interne :

> « Le savoir à enseigner se trouve rapidement oublié, au cours du processus de transposition, en tant que point de départ, objet de référence, source de normativité et fondement de la légitimité. Il demeure ordinairement (c'est-à-dire en dehors des périodes de « crises ») étranger au champ de conscience de l'enseignant comme tel […]. » (Ibid., p. 16)

Pour analyser le processus de mise en place d'un nouveau savoir dans le système d'enseignement, le choix de la classe de terminale nous a semblé plus pertinent que celui de la classe de troisième ou de seconde. En effet, le contenu d'arithmétique de spécialité mathématique est non seulement plus vaste mais également plus autonome que celui de ces deux niveaux –l'arithmétique en terminale S, en étant « cantonnée » à la spécialité mathématique de cette classe, constitue une partie isolée du reste du programme. Nous pouvons donc penser que les professeurs de terminale disposent d'une liberté de choix plus grande et qu'ils seront soumis à moins de contraintes que ceux de troisième ou de seconde du fait de l'isolement de l'arithmétique par rapport au reste du programme de terminale S obligatoire et spécialité mathématique. Par ailleurs, faire le choix d'étudier un domaine très particulier permet souvent de mettre en avant et d'exacerber les variabilités existantes.

Nous avons donc fait l'hypothèse de travail selon laquelle, du fait de cet isolement et de ce contenu substantiel, la réintroduction de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique pourra plus facilement donner lieu à une grande variabilité. Cette singularité nous a semblé propice à nous soustraire à « l'illusion de la transparence » (Chevallard, 1991) qui entoure les phénomènes d'enseignement en général et à nous permettre ainsi de mieux analyser la transposition didactique interne d'un savoir à enseigner.

I.3 Questions de recherche

La plupart des travaux existants sur la transposition didactique se situent dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (TAD), développée par Chevallard. Dans cette approche, les différents acteurs intervenant dans le processus de transposition sont modélisés comme sujets d'une institution –généralement, de plusieurs institutions. Ce point de vue amène à définir le rapport institutionnel[7] à un objet de savoir comme renvoyant à un l'ensemble de pratiques sur cet objet au sein de l'institution considérée. Un des postulats fondamentaux de la TAD énonce que ces pratiques se laissent analyser selon un système de types de tâches T, de techniques τ permettant d'accomplir ces types de tâches, de technologies θ justifiant et légitimant ces techniques et, enfin, de théories Θ justifiant et légitimant ces

[7] Pour Chevallard, tout savoir est savoir d'une ou plusieurs institutions [I] et « un individu concret ne peut entrer en rapport avec un savoir qu'en entrant en relation avec une ou des institutions. […] Le rapport institutionnel à [ce savoir] « énonce », en gros, ce qui se fait, dans I, « avec » [ce savoir], comment [il] y est mis en jeu […] » (Chevallard 1989, p. 213).

technologies. En résumé, les pratiques peuvent être analysées selon une organisation praxéologique [T/τ/θ/Θ].
Se poser la question de la transposition d'un objet de savoir revient à questionner la nature de cet objet transposé, question qui renvoie « au problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé, problème auquel il faut répondre en termes d'organisation praxéologique » (Bosch & Chevallard 1999, p. 88). On est alors amené à s'interroger sur l'écologie des organisations praxéologiques mathématiques liées à cet objet de savoir, c'est-à-dire « s'attache[r] aux conditions qui pèsent sur [la] construction et [la] 'vie' normalisée [de ces organisations praxéologiques] » (Ibid., p. 87) ou encore, comme le souligne Artaud (1997), questionner le réel à propos de ces organisations praxéologiques :

> « Qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ? » (Ibid., p. 101)

Nous nous inscrivons dans la lignée de ces travaux sur la transposition didactique. Dans le cadre de la TAD, la problématique écologique nous conduite à nous poser une première série de questions de recherche :

> **Q_1** : Quel est l'ensemble de contraintes et de conditions qui pèsent sur la transposition didactique interne de l'arithmétique ? Quelles sont les origines et les causes de cet ensemble de contraintes et de conditions ? Quelles sont alors les conséquences sur la nature de l'arithmétique enseignée par rapport à l'arithmétique à enseigner ?

Nous avons souligné précédemment le rôle central de l'enseignant dans la transposition didactique interne. Dans le cadre de la TAD, nous considérons l'enseignant comme sujet de plusieurs institutions dont l'institution scolaire française ou la spécialité mathématique de la terminale S française. Dans cette institution, il est amené à réaliser deux grands types de tâches :

> « L'une des première tâches auxquelles s'affronte le professeur en tant que directeur d'étude d'une classe donnée consiste à déterminer, à partir des indications du programme d'étude officiel, les organisations mathématiques à étudier, en précisant, pour chacune d'elles, son contenu précis, et en particulier, le socle des types de tâches mathématiques qu'elle contient, ainsi que le degré de développement à donner aux composantes technique, technologique et théorique. Le second grand type de tâches au cœur de l'activité du professeur consiste évidemment à diriger l'étude d'une organisation mathématique déterminée […]. » (Chevallard 1997, pp. 44-45)

Pour étudier l'écologie d'un objet mathématique dans le processus de transposition didactique interne, il convient donc de distinguer « deux grandes classes de conditions » (Artaud 1998, p. 136) et de contraintes qui vont déterminer la « nature » et la « vie » de cet objet : l'organisation mathématique construite par l'enseignant pour l'étude de cet objet et l'organisation didactique utilisée par l'enseignant pour mettre en place cette organisation mathématique. Prendre en compte le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne soulève les questions suivantes :

> **Q_2** : Quels sont les assujettissements institutionnels d'un enseignant ? Quel système de contraintes et de conditions pesant sur les choix mathématiques et didactiques[8] de ce dernier ces assujettissements définissent-ils ? Quel est le « poids » de l'organisation

[8] Cela revient entre autres à se poser la question de l'écologie des organisations didactique.

didactique sur la détermination de l'organisation mathématique qu'elle doit mettre en place ? Réciproquement, quel est le « poids » de l'organisation mathématique sur la détermination de l'organisation didactique visant à la mettre en place ?

Les questions précédentes montrent l'importance du principe fondamental de codétermination des organisations mathématiques et des organisations didactiques dans l'identification de l'ensemble de contraintes et de conditions portant sur un objet de savoir dans le processus de transposition didactique interne. Or, pour identifier cet ensemble de contraintes et de conditions, il faut, dans un premier temps, pouvoir décrire les organisations mathématiques construites par l'enseignant ainsi que les organisations didactiques qu'il met en œuvre. Ce point se révèle délicat lorsque l'objet de savoir considéré dans le processus de transposition didactique interne est, non pas un sujet ou un thème d'étude mais un domaine d'étude dans son ensemble[9], comme cela est notre cas avec l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique. Cela nous conduit à reprendre à notre compte les questions suivantes posées par Bosch (2002) à propos des organisations didactiques :

Q_3 : Comment décrire les composants et la structure des organisations didactiques au niveau d'un domaine d'étude ? Comment décrire la «dynamique » de ces organisations didactiques ?

Nous allons maintenant présenter le plan d'étude que nous avons suivi pour répondre à ces ensembles de questions.

II. DES QUESTIONS DE RECHERCHE AU PLAN DE L'ETUDE

Pour analyser la transposition didactique interne de l'arithmétique en terminale S spécialité, nous avons scindé notre étude en deux grandes parties : une analyse institutionnelle de l'enseignement de l'arithmétique et une analyse de pratiques en classe. Les raisons de ce découpage découlent de notre problématique initiale. En effet, l'analyse institutionnelle permet d'identifier un système de contraintes pesant essentiellement sur l'apprêtage didactique du savoir à enseigner tandis que l'analyse de pratiques permet, à partir d'exemples de mise en œuvre spécifiques, d'analyser le passage du savoir apprêté au savoir enseigné.

II.1 Partie B : Etude des contraintes et libertés institutionnelles

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il s'agit ici de mener une analyse institutionnelle de l'enseignement de l'arithmétique en se plaçant dans le cadre de la TAD. Cette étude se décompose en trois parties qui décrivent et analysent l'ensemble de contraintes et de conditions institutionnelles pesant sur l'enseignement de l'arithmétique.

[9] Nous revenons en détail sur ce point dans le chapitre C1 « Analyse des pratiques enseignantes : point de vue théorique et choix méthodologiques ».

a) Chapitre B1 : Analyse écologique des programmes de terminale scientifique depuis 1886. Quelles niches pour l'arithmétique ?

Ce chapitre a pour principal objectif de mettre en évidence les choix de transposition faits par la noosphère lors de la réintroduction de l'arithmétique en spécialité mathématique en 1998 afin de décrire et d'analyser le rapport institutionnel actuel à l'arithmétique. Le questionnement écologique développé ici permet d'analyser les conditions de réintroduction de l'arithmétique en termes de niches[10], c'est-à-dire d'analyser les diverses fonctions que l'arithmétique peut occuper dans l'ensemble de l'enseignement de terminale S. Dans ce sens, l'analyse de programmes ayant existé à d'autres périodes d'enseignement permet d'envisager d'autres choix possibles pour un enseignement d'arithmétique s'inscrivant dans un système de contraintes institutionnelles différent du système actuel.

b) Chapitre B2 : Analyse écologique de manuels de 1971 à 2002. Des contraintes et des libertés institutionnelles.

Comme nous l'avons déjà évoqué, la première étape du processus de transposition didactique interne est le passage du savoir à enseigner (décrit à partir du programme d'enseignement) au savoir apprêté. Parmi les acteurs de ce processus, se trouvent les auteurs de manuels. Ces derniers apprêtent l'arithmétique à enseigner dans le cadre imposé par le système de contraintes institutionnelles découlant du rapport institutionnel à l'arithmétique. Or, comme tout sujet de l'institution, ils conservent cependant « un espace de liberté dans ce premier ensemble de contraintes, à l'aide de [leurs] connaissances : mathématiques et didactiques » (Coulange 2000, p. 6). Ils vont donc faire des choix.
Quelle est alors la «distance » entre l'arithmétique à enseigner et le texte du savoir présenté par les manuels ? Les niches occupées par l'arithmétique dans le programme sont-elles les mêmes que celles qu'elle occupe dans les manuels ? Quelles « libertés » ont pris les auteurs de manuels par rapport aux contraintes institutionnelles ?

Par ailleurs, ces manuels servant à leur tour d'institutions de référence pour les enseignants, leur analyse permet de mettre en évidence un nouveau système de contraintes institutionnelles auquel les professeurs vont être assujettis lors de la préparation de leur cours.

c) Chapitre B3 : Analyse écologique du savoir apprêté par les enseignants. Des contraintes et des libertés institutionnelles

Dans un second temps, nous avons voulu connaître les choix d'apprêtage didactique de l'arithmétique effectués par les enseignants : Quelle est la distance entre ces apprêts effectifs et l'arithmétique à enseigner ou apprêtée dans les manuels ? Observe-t-on une variabilité de choix entre les enseignants ? Quels sont les points essentiels où cette variabilité peut jouer ?

Pour répondre à ces questions, nous avons élaboré un questionnaire afin d'obtenir des données quantitatives significatives sur les choix faits par les enseignants pour construire leur cours d'arithmétique. L'analyse de ce questionnaire nous donne par ailleurs les moyens de

---

[10] « Un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour de [lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où l'on trouve [cet objet] et les objets avec lesquels [il] entre en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis, regarder en chacun de [ses] habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. » (Artaud 1997, p. 111)

montrer quelles sont les marges de manœuvre investies par les enseignants au sein de leur espace de liberté et quel système de contraintes et de conditions a pesé sur leurs choix.

II.2 Partie C : Analyse des pratiques en classe

Jusque là, nos analyses se placent en amont des pratiques en classe, dans la première étape de la transposition didactique interne. Pour étudier la deuxième étape de ce processus, nous présentons une analyse de l'observation « naturaliste »[11] de deux enseignantes durant la totalité de leur enseignement d'arithmétique.

a) Chapitre C1 : Analyse des pratiques enseignantes : point de vue théorique et choix méthodologiques

Nous avons déjà soulevé le problème de la spécificité de notre recherche dans la présentation de nos questions de recherche. Le fait de s'intéresser à la transposition didactique interne d'un domaine d'étude dans son ensemble conduit à s'interroger sur le grain à adopter pour décrire les organisations didactiques et mathématiques en jeu dans le savoir apprêté et le savoir enseigné. En outre, vouloir identifier le savoir enseigné par un enseignant soulève la question de la pertinence du ou des cadres théoriques à utiliser pour décrire les pratiques enseignantes.
Nous abordons ces questions d'ordre théorique et méthodologique dans ce chapitre. Les outils théoriques choisis (utilisation de la hiérarchie des niveaux de détermination surdidactiques et mathématiques de Chevallard (2002b) pour décrire les organisations didactiques et mathématiques et utilisation de la TAD et de la théorie des situations didactiques (TSD) pour l'analyse du savoir enseigné) sont ensuite mis en œuvre dans les trois chapitres suivants.

b) Chapitre C2 : Observations naturalistes de deux enseignantes : diversité des pratiques sur un domaine d'étude

Pour analyser les choix de transposition faits par les deux enseignantes observées P1 et P2 dans le processus de transposition didactique interne, nous procédons par zooms successifs sur leur enseignement d'arithmétique.

Ce chapitre est consacré à l'analyse des choix mathématiques effectués au niveau du domaine d'étude qu'est l'arithmétique. Quelles sont les organisations mathématiques régionales et locales reconstruites respectivement par P1 et par P2 pour enseigner l'arithmétique ? Quelles sont les niches occupées par l'arithmétique dans leur apprêtage du savoir ?
Nous nous interrogeons également sur le mode de fonctionnement didactique habituel de ces deux enseignantes afin de dégager un premier système de contraintes pesant sur leurs choix mathématiques. Cette analyse nous conduit à proposer une méthodologie propre à décrire les organisations didactiques de différents niveaux mises en œuvre par P1 et P2 et à dégager des éléments de dynamique entre ces organisations didactiques. Quelles sont donc les organisations didactiques mises en œuvre par P1 et P2 ? Dans quel système de contraintes s'effectuent leurs choix didactiques ? Observe-t-on des différences significatives entre le savoir apprêté par P1 et celui apprêté par P2 ? Ces différences sont-elles liées plus

[11] Observations sans intervention dans la classe, ni dans la phase de préparation de cours de l'enseignant.

spécifiquement à des choix mathématiques ou à des choix didactiques ? Quelles sont les origines et les causes de cette variabilité –ou de cette non variabilité ?

c) Chapitre C3 : Observations naturalistes de deux enseignantes : comparaison du savoir apprêté autour de la division euclidienne

Nous procédons ensuite à un premier zoom en considérant non plus l'intégralité du projet de cours de P1 et P2 pour l'arithmétique mais uniquement leurs cours autour du théorème de la division euclidienne.

Dans ce chapitre, nous analysons donc la place de la division euclidienne dans le savoir apprêté par P1 et P2. Nous nous interrogeons dans un premier temps sur les choix mathématiques faits par P1 et P2 sur ce thème d'étude. Comment vit la division euclidienne dans leurs projets ? Quelles sont les organisations mathématiques régionales et locales reconstruites respectivement par P1 et par P2 autour du théorème de la division euclidienne ? Quel est le système de contraintes pesant sur leurs choix mathématiques ?
Nous analysons dans un second temps le projet didactique dans lequel s'insèrent les organisations mathématiques construites autour de la division euclidienne. Quelles sont les organisations didactiques mises en œuvre par P1 et P2 ? Dans quel système de contraintes s'effectuent les choix didactiques pour l'enseignement de la division euclidienne de ces deux enseignantes ?
La confrontation de ces deux analyses, mathématique et didactique, nous permet de comparer le savoir apprêté sur la division euclidienne dans le projet de cours des deux enseignantes observées. Observe-t-on des différences significatives entre le savoir apprêté par P1 et celui apprêté par P2 sur le thème de la division euclidienne ? Ces différences sont-elles liées plus spécifiquement à des choix mathématiques ou à des choix didactiques ? Quelles sont les origines et les causes de cette variabilité –ou de cette non variabilité ?

d) Chapitre C4 : Observations naturalistes de deux enseignantes : comparaison du savoir enseigné sur la division euclidienne

Ce chapitre est l'occasion d'un dernier zoom sur le processus de transposition didactique interne conduit par les deux enseignantes P1 et P2. Nous nous centrons sur la séance d'enseignement consacré à la démonstration du théorème de la division euclidienne.

L'analyse des protocoles que nous présentons dans ce chapitre a pour objectif principal de caractériser le savoir enseigné sur la division euclidienne dans les deux classes observées. Après avoir décrit dans le chapitre précédent les choix d'apprêtages didactiques du savoir de P1 et P2 sur ce thème d'étude, nous analysons la réalisation effective de ce projet en classe. La relation didactique qui se noue au sein de la classe fait peser de nouvelles contraintes –dites internes– sur l'enseignant, de même que la survenue d'incidents dans le déroulement de la classe.

Quel est le système de contraintes internes pesant sur la réalisation effective des projets de cours de P1 et P2 ? Par quelles techniques didactiques ces deux enseignantes gèrent-elles les incidents qui perturbent le déroulement de cet enseignement ? Quelles sont les conséquences de ce système de contraintes et de ces incidents sur le « bon » déroulement de la réalisation effective du projet de cours de P1 et P2 ? Quel écart observe-t-on entre le savoir apprêté et le savoir enseigné par P1 et P2 sur le thème de la division euclidienne ?

II.3 Organigramme de la thèse

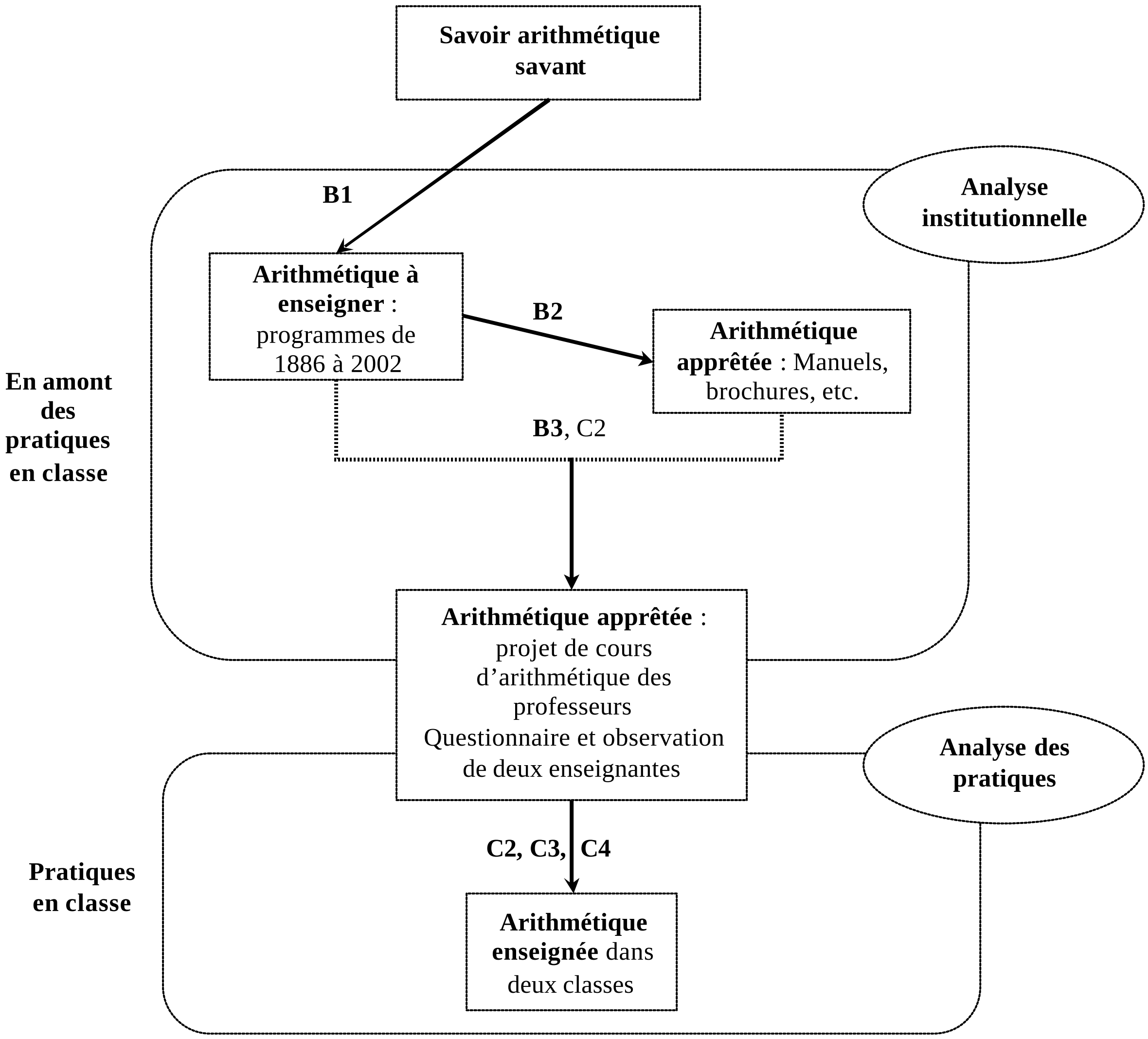


Fig. 3 Etude de la transposition didactique interne de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique.

PARTIE B

ETUDE DES CONTRAINTES ET LIBERTES INSTITUTIONNELLES

CHAPITRE B1

ANALYSE ECOLOGIQUE DES PROGRAMMES DE TERMINALE SCIENTIFIQUE DEPUIS 1886

Quelles niches pour l'arithmétique ?

INTRODUCTION

Lorsqu'un enseignant construit son cours, une des références à laquelle il est fortement lié est le programme. En effet, celui-ci précise, dans un premier temps, ce que le professeur est tenu de faire. En se plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, le concept de rapport institutionnel permet de modéliser l'assujettissement de l'enseignant à l'institution scolaire au sein de laquelle il évolue :

> « Le rapport institutionnel $R_I(O^s)$ est ce qui apparaît quand on observe le destin de O^s dans l'institution I vue comme une totalité (comme un système) […] En réalité, il existe, au sein d'une institution donnée, un système de *positions* p (ou de *places*, de *topos*), à chacune desquelles correspond un rapport institutionnel $R_{I,p}(O^s)$. En ce rapport s'inscrit ce que l'on fait avec O^s *quand on est dans la position p* au sein de l'institution I. […] Ces rapports institutionnels $R_{I,p}(O^s)$ constituent le système essentiel des *conditions et des contraintes* sous lesquelles se forme et évolue le *rapport personnel* à O^s des *acteurs* de l'institution. » (Chevallard 1989, pp. 213-214)

L'analyse d'un programme, produit de la noosphère, permet d'identifier un rapport institutionnel à O^s, l'objet de savoir à enseigner, attendu dans l'institution scolaire. Cette analyse nous permet donc de mettre en évidence un « système de conditions et de contraintes » auxquelles tout enseignant est soumis. Le rapport personnel d'un professeur à cet objet de savoir va donc se forger « sous la contrainte du rapport institutionnel » (Chevallard 1992, p. 89) à ce même objet. La liberté de chaque enseignant, dans ce cadre, est alors définie de la manière suivante :

> « Une personne X est assujettie à une foule d'institutions. Je poserai ici l'axiome qu'une personne n'est en fait rien d'autre que *l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels*. Ce qu'on nomme « liberté » de la personne apparaît alors comme l'effet obtenu en jouant *un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d'autres*. » (Ibid., p. 91)

Plus précisément, ce sont les outils de l'approche écologique du didactique qui, à partir d'une analyse du « texte du savoir », permettent d'identifier le rapport institutionnel à l'objet de savoir en position d'enseignant :

> « […] *l'analyse écologique* du texte d'enseignement […] permet l'exploration de la clôture institutionnelle de *l'univers du savoir enseigné*, et consiste en l'analyse des *interrelations* entre objets, sous-objets et sur-objets présents dans le texte d'enseignement, afin de mettre en lumière, notamment, leurs habitats et leurs niches écologiques, les niveaux trophiques, etc. C'est alors à ce niveau que peut être posé le problème de l'identification des *objets institutionnels* et de l'analyse du *contenu des rapports institutionnel et officiel à un objet O^s et de leur évolution* […]. » (Ibid., p. 233)

Nous allons donc faire une analyse écologique des programmes relatifs à « l'objet de savoir » arithmétique.

Si l'on s'appuie sur les travaux d'Artaud (1997), on se demande alors « étant donné un ensemble de conditions, quels objets », au sein de l'arithmétique, « sont poussés à vivre, ou au contraire sont empêchés de vivre dans ces conditions. » ? Quels seront les « habitats », ou « les différents lieux » de vie, du macro-objet arithmétique ? Quelles seront, dans ces habitats, « les niches écologiques », ou « les fonctions », occupées par l'arithmétique ?

Pour apporter des réponses à ces questions, nous avons choisi de faire une analyse écologique comparative des programmes de terminales scientifiques de 1886 à nos jours. Cette comparaison des programmes nous semble être un moyen pertinent d'analyse de la spécificité des programmes contemporains et de la réintroduction de l'arithmétique dans les classes de spécialité. Pointer les différences, les similitudes et les évolutions des différents programmes permet « d'éclairer » le processus de transposition didactique qui a eu lieu ces dernières années et de déterminer les conditions écologiques actuelles de vie de l'arithmétique dans l'ensemble du corpus d'enseignement. A propos du concept de transposition didactique, Chevallard souligne :

> « Pour le didacticien, c'est un outil qui permet de prendre du recul, d'interroger les évidences, d'éroder les idées simples, de se déprendre de la familiarité trompeuse de son objet d'étude. » (Chevallard 1991, p. 15).

Par ailleurs, se poser la question des conditions de vie de l'arithmétique dans les anciens programmes permet de mieux comprendre et de mieux appréhender les rapports institutionnels de même que les rapports personnels actuels de certains enseignants à l'arithmétique. En effet, les enseignants qui doivent aujourd'hui enseigner l'arithmétique ont été «assujettis », en tant qu'élève ou en tant que professeur, à des systèmes de contraintes institutionnelles qui ont existé à propos de l'arithmétique dans le passé. Ces différents assujettissements, comme nous l'avons souligné précédemment, sont potentiellement source de « libertés » pour l'enseignant.

Notre étude comparative est découpée en cinq périodes :
1. La période classique : de 1886 à 1971 ;
2. La période de la réforme des mathématiques modernes : de 1971 à 1983 ;
3. La période de la contre réforme : de 1983 à 1998 ;
4. La période contemporaine : de 1998 à 2002 ;
5. Le dernier programme d'arithmétique : 2002.

Nous avons choisi de débuter la comparaison des programmes à partir de 1886 et de diviser la période allant de 1886 à 1971 en deux sous-périodes qui vont respectivement de 1886 à 1966 et de 1966 à 1971. Ce choix est justifié par le fait que les programmes d'arithmétique sont relativement stables pendant la période classique :

> « Dans la période classique [qui va jusqu'à la fin des années 60], l'enseignement était organisé essentiellement en trois grands domaines dont l'un était l'arithmétique. Ce domaine était constitué d'un corpus stabilisé d'objets (même s'il y a des variations selon les réformes jusqu'à la période moderne) autour de quatre blocs : les nombres entiers et décimaux, les fractions, les mesures et les rapports et proportions. » (Assude 1998, p. 107)

Ce n'est qu'à partir de 1966 que des changements significatifs commencent à apparaître dans les programmes. En effet, de 1886 à 1966, le programme d'arithmétique reste à peu près similaire à celui en vigueur au début de cette période avec cependant un premier changement d'importance : le procédé d'extraction de la racine carrée devient hors-programme en 1958. Ensuite, de 1966 à 1971, de nouveaux changements sont apportés (disparition du calcul approché des contenus d'arithmétique) même si le contenu « strict » d'arithmétique (contenu portant sur les entiers) reste sensiblement identique.

Pour chaque période, nous donnons un tableau synthétisant les informations contenues dans les programmes que nous commentons succinctement.

I. LA PERIODE CLASSIQUE (1886/1971)

Comme le montrent les tableaux présentés ci-dessous, jusqu'en 1966, les contenus d'arithmétique étaient répartis en huit blocs : l'analyse combinatoire, les entiers, les applications aux fractions, la numération, les fractions décimales et les nombres décimaux, les nombres réels, les progressions arithmétique et géométrique et enfin les calculs approchés.

Les types de tâches qui apparaissent au travers des contenus tels que *condition pour qu'un entier soit le carré, la puissance n-ième d'un entier, simplification des fractions, indications sur la recherche pratique de la racine carrée approchée,* etc., montrent la prégnance du calcul à la main sur les contenus d'arithmétique. Les notions de PGCD et de nombres premiers étaient introduites, notamment, pour permettre l'élaboration et la justification de techniques opératoires concernant les fractions. Comme le souligne Assude :

> « Les nombres premiers, PGCD, PPCM et divisibilité prenaient place dans cette organisation à la suite de l'étude des quatre opérations de l'arithmétique : addition, soustraction, multiplication et division de nombres entiers naturels. Cette organisation était fondée sur la notion de nombre et d'opération (notamment sur les techniques opératoires), et les objets en question avaient donc une niche consistant dans la présentation d'un certain nombre de propriétés des nombres. » (Ibid., p. 107)

L'arithmétique occupait donc à cette époque la niche « calcul numérique » du fait de la place importante occupée dans les programmes par les opérations sur les fractions. Par ailleurs, la vie de cette niche était renforcée par la présence des sections *nombres réels*, *progressions arithmétique et géométrique* et *calculs approchés* qui faisaient partie, à cette époque, des contenus d'arithmétique.

De 1886 à 1966 (Mathématiques élémentaires)	**De 1966 à 1971** (Terminale C)
Les nombres entiers Propriétés de **N** et **Z**. Termes de groupe et anneau *Aucune construction de ces ensembles de nombres. Aucune mention du raisonnement par récurrence.*	***Les nombres entiers*** Construction de **Z**, structure d'anneau commutatif ordonné. *Importance signalée du raisonnement par récurrence.*
L'arithmétique • Analyse combinatoire : permutations, arrangements, combinaisons. • Les entiers : (a priori dans **N**) Multiples, problème de la division, quotient entier, reste. Congruence modulo n. Diviseurs et multiples communs, PGCD, nombres premiers entre eux, PPCM. Nombres premiers, décomposition et application aux diviseurs d'un nombre. Condition pour qu'un entier soit le carré, la puissance n-ième d'un entier. • Application aux fractions : Simplification, irréductibilité. Réduction au plus petit dénominateur commun. Condition pour qu'un rationnel soit le carré, la puissance n-ième d'un rationnel. • Numération : Principe, base, numération décimale. • Fractions décimales, Nombres décimaux : Valeurs approchées d'un réel à 10^{-n} près, périodicité de l'écriture décimale. • Nombres réels : Quotient exact, rapports égaux. Racine n-ième arithmétique. • Progressions arithmétique et géométrique : définitions et somme des termes • Calculs approchés : encadrement, incertitude, erreur absolue et relative, opérations sur les valeurs approchées, racine carrée approchée, indications sur la recherche pratique.	***L'arithmétique*** • Analyse combinatoire : permutations, arrangements, combinaisons et formule du binôme. • Les entiers : (a priori dans **Z**) Même contenu que le programme précédent. • Application aux fractions : Idem, *mais plus de référence au plus petit dénominateur commun.* • Numération : Idem. • Nombres décimaux : Définitions. Anneau commutatif. Valeurs approchées d'un réel à 10^{-n} près. Représentation d'un réel par une suite décimale illimitée éventuellement périodique.
Nos commentaires *Le procédé d'extraction de la racine carrée est hors programme.* Prolongements : Anneau des polynômes : division des polynômes, exemples de transformations de fractions rationnelles.	***Nos commentaires*** En analyse : racine n-ième et progressions arithmétique et géométrique. Calcul approché : paragraphe à part encadrement, incertitude, erreur absolue et relative, opérations sur les valeurs approchées. *Plus de référence à l'anneau des polynômes.*

Fig. 4 Programme d'arithmétique en terminale scientifique pendant la période classique (1886/1971).

Mais, alors que cette niche prenait beaucoup de place pendant toute la première partie de la période classique, elle commence, avec les changements de programme de 1966, à perdre une partie de sa consistance. En effet, les trois blocs *nombres réels, progressions arithmétique et géométrique* et *calculs approchés* quittent le domaine de l'arithmétique. Les nombres réels intègrent le paragraphe « les nombres : extensions successives de la notion de nombre », les progressions arithmétique et géométrique rejoignent le paragraphe « étude de quelques fonctions numériques »[12] et le calcul approché devient un paragraphe à part.

La niche «calcul numérique » n'est pas la seule niche occupée par l'arithmétique dans les programmes de cette époque. Nous reprenons ici les résultats d'Assude (1998) concernant l'évolution de l'enseignement de l'arithmétique de la période classique à la période actuelle. Elle analyse plus spécifiquement l'évolution de l'enseignement des notions de divisibilité, de nombres premiers, de PGCD et de PPCM. Pour la période qui nous intéresse, elle identifie[13] deux niches pour l'arithmétique : la niche « calcul numérique » que nous avons mise en évidence précédemment et la niche « théorie des nombres » :

> « Une des niches occupées par nos objets consiste à donner à l'arithmétique une consistance théorique par rapport à l'algèbre, d'autre part, les décompositions en facteurs premiers et le PGCD de deux nombres permettent la simplification et les opérations sur les fractions. […] En résumant, les objets qui nous intéressent ont une pertinence théorique importante dans l'organisation de l'enseignement de l'arithmétique : on a alors dans l'enseignement deux composantes de l'arithmétique, la composante 'théorie des nombres' et la composante 'calcul numérique'. » (Ibid., p. 108)

Les objets que l'on retrouvera dans les contenus d'arithmétique des programmes suivants – divisibilité, nombres premiers, PGCD et PPCM– et qui sont les objets regardés par Assude ont pour fonction première de justifier les calculs sur les fractions :

> « […] Ces objets permettaient de légitimer l'enseignement de l'arithmétique par l'existence d'une partie théorique et permettaient le travail de simplification des fractions et des opérations sur les fractions, la théorie des fractions ayant une importance décisive tant qu'un nouveau rapport aux nombres n'émerge pas surtout sous l'influence du mathématicien Henri Lebesgue[14]. » (Ibid., p. 109)

Ce programme d'arithmétique, qui était relativement stable depuis le début de la période classique, va être bouleversé par la réforme des mathématiques modernes.

II. LA PERIODE DE LA REFORME (1971/1983)

Le préambule du programme de 1971 montre que l'arithmétique en terminale C devait, à cette époque, être enseignée en privilégiant l'aspect théorique et en adoptant un point de vue des structures algébriques, à l'image de ce que fut la réforme des mathématiques modernes :

> *« Chaque fois que l'occasion s'en présentera on mettra en évidence, sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes et homomorphismes (noyau), automorphismes rencontrés. »*

[12] « […] Le paragraphe concernant les progressions arithmétiques et géométriques (dont l'étude se résume à la somme d'un nombre fini de termes consécutifs) devient en 1966 une rubrique de l'analyse […]. Le transfert à l'analyse s'accompagne du changement de terminologie : c'est là que les « progressions » deviennent « suites » et les progressions arithmétiques et géométriques, un simple cas particulier. » (Bernard & al. 1995, p. 6)
[13] Ces recherches, pour la période classique, s'appuient, entre autre, sur le travail de thèse de Neyret (1995).
[14] « R. Neyret […] a mis en évidence l'influence d'Henri Lebesgue dans le fait que les fractions cessent d'être un des noyaux organisateurs de l'enseignement [primaire] » (Ibid., p. 109)

En effet, les ensembles **N**, **Z** et **Z**/n**Z** fournissent des exemples relativement simples permettant de «mettre en évidence » des structures algébriques variées. Cette hypothèse se vérifie à la lecture du programme :

De 1971 à 1983 (Terminale C)
Les nombres entiers Enoncé des propriétés de **N**. Raisonnement par récurrence. Anneau **Z** : construction. *Aucune construction de **N**.* *Aucune construction d'une « théorie des ensembles »*
L'arithmétique (*L'analyse combinatoire est reportée en Première*) Application de **N** dans un ensemble **X** ; notation indicielle. Multiples d'un entier relatif : notation n**Z**. Congruence modulo n ; l'anneau **Z**/n**Z**. Division euclidienne dans **Z**, dans **N**. Principe des systèmes de numération ; base ; numérations décimale et binaire. Nombres premiers dans **Z** ; si p est premier **Z**/p**Z** est un corps. Décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers ; existence, unicité. PGCD et PPCM ; nombres premiers entre eux ; identité de Bézout
Nos commentaires Le calcul numérique n'apparaît plus dans la rubrique « arithmétique » mais dans la rubrique « Nombres réels ; calcul numérique ; nombres complexes »

Fig. 5 Programme d'arithmétique en terminale scientifique période de la réforme (1971/1983).

La rédaction en elle-même du programme est assez succincte mais une rubrique « commentaire général » en fin de programme précise ce qui est attendu. Voici ce qui est mentionné au sujet du chapitre qui nous intéresse :

> « Les notions d'ensembles et de relation restent en classe de terminale des notions premières »
> « La construction de **C** est au programme ; c'est le seul exemple de symétrisation à donner »
> « L'ensemble des multiples d'un entier relatif a est un sous- groupe du groupe additif **Z**, il est stable par la multiplication, on le notera a**Z** ; la relation dans **Z** : $x_2 - x_1 \in a\mathbf{Z}$ est une relation d'équivalence. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définira et on étudiera l'anneau **Z**/n**Z** [...] »

Comme nous pouvons le constater, le contenu du programme de 1971 à 1983 est axé sur l'étude des structures algébriques mises en œuvre en arithmétique.
Ainsi, de 1971 à 1983, l'algèbre, en tant qu'étude des structures algébriques et des ensembles de nombres (**N**, **Z**, **Q**, **R** et **C**), est l'habitat de l'arithmétique. Les principales niches de cette dernière sont en relation étroite avec l'habitat qu'elle occupe : l'arithmétique permet de revoir et d'approfondir l'étude des structures algébriques (ceci est un thème transversal important

dans le programme du lycée à cette époque) et de compléter l'étude des ensembles de nombres.
Nous constatons aussi, dans le chapitre « nombres réels ; calcul numérique ; nombres complexes », que l'arithmétique occupe la niche « calcul numérique » avec notamment les problèmes de représentations décimales des rationnels et des irrationnels et les calculs de valeurs approchées. Cependant, dans l'esprit de ce programme, les valeurs approchées à 10^{-n} près, par défaut et par excès, d'un nombre réel peuvent être vues comme des «conséquences de l'ensemble des axiomes définissant **R** »[15]. Cette niche, si vivante dans la période classique, vit de plus en plus difficilement dans le programme de la réforme des mathématiques modernes.

Ce « déclin » de la niche « calcul numérique » est à relier, entre autre, au développement de l'utilisation de la calculatrice dans les classes et à la place croissante de l'analyse dans les programmes, comme le souligne Bernard & al. (1995) :

> « La notion de valeur approchée (qui figurait en 1963 dans la rubrique Arithmétique !) subit une évolution inversement proportionnelle à celle de la calculatrice. […] C'est ainsi que les notions d'incertitude et d'opérations sur les valeurs approchées, encore présentes dans les programmes, seront les victimes principales de l'allègement de 1974. Les calculatrices faisant leur apparition sur le marché et dans les commentaires du programme, la précision du calcul est assurée sans peine, passant soudain de 10^{-5} péniblement obtenue avec la tables des logarithmes à 10^{-10}. […] Le problème du contrôle de l'incertitude n'étant pas posé, on semble laisser croire à l'exactitude quasi magique du calcul à la machine. »

> « A partir de 1966, le calcul approché a quitté le champ de l'arithmétique et la recherche de la racine carrée a disparu. Probablement, les auteurs des programmes considèrent-ils que le détour par les logarithmes est maintenant suffisant pour traiter ce problème : l'analyse prend définitivement le pas sur l'arithmétique. » (Ibid., p.6)

Remarquons par ailleurs que le programme définit le PGCD et le PPCM dans le paragraphe consacré aux nombres premiers en conseillant l'ordre d'énumération suivant :

> « (a) Nombres premiers dans **Z** ; si p est premier **Z**/p**Z** est un corps.
> (b) Décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers, existence, unicité.
> (c) PGCD et PPCM ; nombres premiers entre eux; identité de Bézout. »

Il est donc proposé d'introduire le PGCD et le PPCM après avoir donné le théorème de décomposition en facteurs premiers d'un entier. Même s'il est ajouté que «l'ordre de (a), (b), (c) est, bien entendu, laissé au choix du professeur », le programme de 1971 semble avoir pour optique de privilégier la recherche du PGCD et du PPCM de deux ou plusieurs entiers en passant par leur décomposition en facteurs premiers. En effet, les notions de PGCD et de PPCM sont abordées dans le paragraphe sur les nombres premiers, et non pas dans celui de la division euclidienne. L'algorithme d'Euclide n'est donc pas mis en avant comme méthode de recherche d'un PGCD.

III. LA PERIODE DE LA CONTRE REFORME (1983/1998)

[15] C'est le cas dans le manuel Queysanne-Revuz, représentatif de cette époque.

Au moment de la contre réforme, les contenus de l'enseignement secondaire sont remaniés et l'arithmétique disparaît totalement des programmes du lycée dans un premier temps, puis de ceux du collège à partir de 1985 :

> « L'enseignement des mathématiques au collège, comme l'a montré Yves Chevallard, est soumis à une forte idéologie qui est celle de l'empirisme : on doit être proche du concret. L'enseignement de l'arithmétique bascule du côté de la composante numérique dont le titre d'une des divisions actuelles « travaux numériques » est l'emblème. Ainsi, actuellement quand on dit que l'arithmétique a disparu au collège on parle plutôt de la théorie des nombres où la divisibilité, nombres premiers, PGCD, PPCM avaient une part symbolique non négligeable. Le numérique prend en revanche une part considérable et toute la partie théorique disparaît de l'enseignement au collège et aussi de l'enseignement au lycée. » (Assude 1998, p. 116)

Cependant, après une quinzaine d'années d'absence, l'arithmétique va être réintroduite dans les programmes de l'enseignement secondaire : à la rentrée 1998, en terminale S spécialité mathématique, en 1999, en troisième et en 2001, en seconde.

IV. LA PERIODE CONTEMPORAINE (1998/2002)

Les structures algébriques et les notions d'ensemble et de relation n'étant aujourd'hui plus abordées dans le secondaire, le programme de 1998 est en conséquence singulièrement différent de celui en vigueur entre les années 1971 et 1983. En effet, les niches que l'arithmétique occupait en 1971 ne sont plus viables dans l'enseignement dans la période contemporaine. Les structures algébriques et les ensembles de nombres ne sont plus des objets d'étude et les notions de valeurs approchées et de représentations décimales sont prises en charge avant la classe de terminale, sans aucune notion préalable d'arithmétique. L'habitat de l'arithmétique ne peut donc plus rester le même pour des raisons similaires. En analysant le programme de 1998 de terminale S spécialité, nous allons voir quels sont les nouveaux habitats de l'arithmétique ainsi que ses nouvelles niches.

La colonne «connaissances et savoir-faire » du programme de 1998 se présente de la façon suivante :

> « Divisibilité dans **Z**.
> Nombres premiers.
> Division euclidienne, algorithme d'Euclide et, PGCD et PPCM.
> Théorème de Bézout et théorème de Gauss. »

Comme il était prévisible, ce programme ne mentionne plus les structures de ($\mathbf{N}$, +, $\times$), de ($\mathbf{Z}$, +, $\times$) et de ($\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, +, $\times$). Il est même spécifié dans la colonne des commentaires que « toute introduction de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est hors programme ».

De plus, deux autres différences apparaissent entre les programmes de 1971 et 1998 :

- En 1998, l'algorithme d'Euclide est mentionné dans le texte du programme alors que ce n'était pas le cas en 1971.
- L'introduction du PGCD et du PPCM n'intervient pas à la suite des mêmes notions : en 1971, le PGCD et le PPCM font partie du paragraphe se rapportant aux nombres premiers alors qu'en 1998, le PGCD et le PPCM sont placés dans le paragraphe sur la division euclidienne, et plus précisément, après l'algorithme d'Euclide.

De 1998 à 2002 (Spécialité mathématique de Terminale S)
Les nombres entiers *Aucune mention des ensembles* **N** *et* **Z** *dans le programme de spécialité.*
L'arithmétique Divisibilité dans **Z** : diviseurs, multiples d'un entier. Nombres premiers : Existence de la décomposition et d'une infinité de nombres premiers. Division euclidienne et algorithme d'Euclide ; PGCD, PPCM de deux entiers. Entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout et de Gauss. *T.P. : Algorithme de test de primalité, Crible d'Eratosthène. Critères de divisibilité, changements de base de numération. Résolution dans* **Z** *d'équations au+bv=d où d est le PGCD des entiers a et b. Exemples de problèmes de calendrier, de méthode de cryptage ou de codage.*
Nos commentaires *Pas de prolongement dans l'enseignement de spécialité ou obligatoire.*

Fig. 6 Programme d'arithmétique en spécialité mathématique période contemporaine (1998/2002).

Pour voir les profondes différences en terme de transposition didactique et d'écologie des savoirs entre ces deux périodes (autres que celles visibles dans les tableaux 5 et 6, présentés ci-dessus) il faut se pencher sur l'ensemble du chapitre «Arithmétique » du programme de 1998 et notamment sur son introduction et sur le paragraphe concernant les Travaux Pratiques. Nous pouvons ainsi lire dans l'introduction :

> « L'objectif est de donner aux élèves un minimum cohérent de notions élémentaires permettant l'élaboration d'algorithmes[16] simples et fondamentaux [...] »

Cette mise en avant des algorithmes est frappante dans la description des Travaux Pratiques et dans les commentaires qui les accompagnent. Pour ne citer que deux exemples :

- Dans le premier des Travaux Pratiques : « Mise en œuvre de l'algorithme d'essai de division par des nombres successifs pour reconnaître si un entier donné est premier. » suivi du commentaire « Pour tester si un nombre est premier, l'algorithme comporte une condition d'arrêt à indiquer. ».
- Dans le second sur l'utilisation de la division euclidienne : « L'aspect algorithmique sera privilégié. ».

Ainsi, dans le chapitre d'arithmétique, le mot algorithme est mentionné six fois (avec, dans la partie «connaissances et savoir-faire », la dénomination explicite de l'algorithme d'Euclide) alors qu'il n'apparaissait pas une seule fois dans le programme de 1971.

[16] C'est nous qui soulignons.

C'est l'une des différences fondamentales entre ces deux programmes : l'approche structurelle de l'arithmétique est évincée au profit d'une approche algorithmique. Chacun des programmes développe de façon privilégiée un aspect particulier du « savoir savant » arithmétique.

Pour en revenir à une approche écologique, il semblerait que l'arithmétique occupe dans le programme de terminale S actuel une place qui est plutôt « autonome ». Son habitat semble a priori séparé des autres grands lieux d'habitat que sont la géométrie, l'analyse et l'algèbre du fait de la présence de l'arithmétique en enseignement de spécialité uniquement.

Quelles niches pourra donc occuper l'arithmétique dans ce contexte ? L'accent porté sur l'aspect algorithmique de l'arithmétique permet-il d'apporter une première réponse à cette question ?

Ce changement de programme en faveur de la notion d'algorithme est en accord avec les objectifs généraux du programme actuel et répond aux lignes directrices qui y sont développées. Citons pour exemple des extraits du chapitre IV – « objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme », paragraphe 3 – « Problèmes algorithmiques » :

> « Dans l'ensemble du programme, il convient de mettre en valeur les aspects algorithmiques des problèmes étudiés [...]. On explicitera ce type de démarche sur quelques exemples simples : construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leurs performances pour le traitement d'un même problème ; mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves à ce niveau. »

Les compétences attendues sur les algorithmes ne se limitent pas à savoir les utiliser et les manipuler comme outil de résolution de problèmes. Un enseignement de la démarche algorithmique est introduit même si la maîtrise d'une telle démarche ne peut être exigée. Soulignons que l'arithmétique est un domaine privilégié de construction et de mise en œuvre d'algorithmes.

Dans le paragraphe 4 – « Emploi des calculatrices programmables ou ordinateurs de poche » :

> « Savoir recourir à une instruction séquentielle ou conditionnelle et, <u>en classe de terminale, à une instruction itérative, comportant éventuellement un test d'arrêt</u>[17]. »

Les nombreux algorithmes au programme de l'enseignement de l'arithmétique en terminale peuvent donc servir d'exemples pour apprendre à programmer une calculatrice.

Et enfin, dans le paragraphe 5 – « Impact de l'informatique » :

> « La mise en valeur des aspects algorithmiques et l'emploi des calculatrices programmables ont été évoqués ci-dessus ; il convient aussi d'utiliser les matériels informatiques existant dans les établissements [...] et d'habituer les élèves, sur des exemples simples, à mettre en œuvre une démarche algorithmique avec méthode, mais aucune capacité n'est exigible dans ce domaine. »

L'orientation algorithmique qu'a pris l'enseignement de l'arithmétique en 1998, contrairement à l'orientation structurelle théorique qui prévalait en 1971, est soutenue par le développement récent de l'informatique qui utilise de nombreux résultats d'arithmétique (que ce soit pour des problèmes d'affichage, de traitement des données en système binaire ou hexadécimal et de cryptographie par exemple, de virgule flottante, etc.). Citons à cet effet Artaud (1997) :

[17] C'est nous qui soulignons.

« Nous examinerons maintenant –un ouvrage–, dû à Arthur Engel et traitant des Mathématiques élémentaires d'un point de vue algorithmique. Cet ouvrage, dont la traduction française date de 1979, doit être situé dans le mouvement d'ensemble qui voit le surgissement de l'informatique, dont la noosphère s'est fait l'écho, et, plus particulièrement, de ces deux domaines que sont l'algorithmique et la programmation. C'est ainsi que l'auteur, dans son introduction, déclare :
'Les développements récents des ordinateurs et des calculatrices électroniques de poche amèneront, à brève échéance, une nouvelle évolution dont l'idée directrice consistera à souligner le caractère algorithmique des mathématiques. La notion d'algorithme deviendra fondamentale dans l'enseignement et il nous faudra repenser l'ensemble des mathématiques scolaires d'un point de vue algorithmique. Ce livre se voudrait une contribution à une telle évolution.' » (Artaud 1997, p. 117)

Ainsi, la réintroduction de l'arithmétique peut, dans une certaine mesure, se placer dans cette problématique d'évolution « dont l'idée directrice consistera à souligner le caractère algorithmique des mathématiques ». Dans un tel contexte, que le programme de 1998 semble favoriser, une des niches de l'arithmétique est sans nul doute de fournir un certain nombre d'algorithmes pour permettre le travail des notions algorithmique/programmation qui se complètent.

Existe-t-il d'autres niches occupées par l'arithmétique ?

L'analyse du programme montre une autre niche possible pour l'arithmétique, niche que l'on peut qualifier de « culturelle ». Plusieurs passages du programme soutiennent cet aspect important de l'arithmétique :

« Il nous a paru utile de faire figurer un enseignement d'arithmétique en raison de l'importance de celle-ci dans la culture scientifique [...] » (Dans le paragraphe « quelques lignes directrices pour le contenu »)

« [...] Il convient de mettre en valeur le contenu culturel des mathématiques ; en particulier, l'introduction d'une perspective historique peut permettre aux élèves de mieux saisir le sens et la portée des notions et des problèmes étudiés, et de mieux comprendre les ressorts du développement scientifique. » (Rubrique concernant « l'unité de la formation »)

« L'arithmétique mérite de tenir une place dans la série scientifique, pour l'enseignement de spécialité, en raison de son importance dans le développement des mathématiques. » (Introduction au chapitre d'arithmétique dans le texte du programme de spécialité)

Pour sa réintroduction dans les programmes de spécialité mathématique, deux fonctions sont donc attribuées à l'arithmétique : une fonction dominante qui est de faire travailler les élèves sur les aspects algorithmiques des mathématiques et une fonction de sensibilisation à la culture mathématique.

Cependant, nous pouvons dès maintenant émettre des doutes sur la viabilité de la niche « algorithmique » dans les classes, malgré l'insistance du programme sur ce point. En effet, il est bien connu que les calculatrices et autres moyens informatiques ont du mal à vivre dans les classes et que les enseignants sont souvent réticents à la mise en avant de mathématiques « algorithmiques »[18] au détriment des mathématiques « classiques » :

« On pourra ainsi se demander comment, dans une perspective d'évolution que nous avons désignée par l'étiquette de « mathématiques algorithmiques », on pouvait faire vivre ensemble, dans un curriculum postmoderne encore à construire, le point de vue classique et le point de vue algorithmique. <u>Il n'est pas sûr en effet que leur rencontre ne soit pas, profondément, celle de l'huile et de l'eau, et que le principe</u>

[18] Nous appelons mathématiques «algorithmiques » l'enseignement des mathématiques d'un point de vue algorithmique tel que le définit Engel (1979) et Rajoson (1988).

> d'exclusion n'amènerait pas rapidement à la disparition au profit de l'autre, de l'un de ces deux « partenaires »[19]. » (Rajoson 1988, p. 261)

L'analyse de la viabilité de cette niche dans les classes fait l'objet du chapitre B3 « Analyse écologique du savoir apprêté par les enseignants. Des contraintes et des libertés institutionnelles ». Les réponses des enseignants au questionnaire que nous avons construit en 1999 montrent que cette niche n'est pas viable et que les enseignants font vivre la niche « raisonnement » de l'arithmétique dans les classes. Ces résultats confirment l'hypothèse faite par Rajoson une dizaine d'années plus tôt.

V. LE DERNIER PROGRAMME D'ARITHMETIQUE (2002)

Après quatre ans d'application, le programme de spécialité mathématique a subi des changements. A la rentrée 2002, un nouveau programme d'arithmétique entre en vigueur. On peut supposer que les modifications apportées à l'ancien programme ont été motivées par la nécessité d'un réajustement par rapport à l'ancien programme et aux inévitables effets dus à la nouveauté qu'il a entraînés (il ne faut pas oublier que l'arithmétique a été réintroduite après 15 ans d'absence dans les programmes du secondaire).

Quelles sont les évolutions entre les programmes de 1998 et de 2002 ? Ces évolutions sont-elles importantes ? Observe-t-on un effet d'aplanissement ou, au contraire, un changement radical dans les orientations du programme ?

[19] C'est nous qui soulignons.

De 1998 à 2002 (Spécialité mathématique de Terminale S)	**20002** (Spécialité mathématique de Terminale S)
Les nombres entiers *Aucune mention des ensembles **N** et **Z** dans le programme de spécialité.*	***Les nombres entiers*** *Aucune mention des ensembles **N** et **Z** dans le programme de spécialité.* **En 3ième** : Diviseurs communs à deux entiers et fractions irréductibles (algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD) **En 2nde** : Nature et écriture des nombres. Notations **N**, **Z**, **D**, **Q**, **R**. Représentation des nombres dans une calculatrice. Nombres premiers (décomposition).
L'arithmétique Divisibilité dans **Z** : diviseurs, multiples d'un entier. Nombres premiers : Existence de la décomposition et d'une infinité de nombres premiers. Division euclidienne et algorithme d'Euclide ; PGCD, PPCM de deux entiers. Entiers premiers entre eux. Théorème de Bézout et de Gauss. *T.P. : Algorithme de test de primalité, Crible d'Eratosthène. Critères de divisibilité, changements de base de numération. Résolution dans **Z** d'équations au+bv=d où d est le PGCD des entiers a et b. Exemples de problèmes de calendrier, de méthode de cryptage ou de codage.*	***L'arithmétique*** Divisibilité dans **Z**. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. Entiers premiers entre eux. Congruences dans **Z** : Efficacité du langage des congruences, notation, compatibilité opératoire. Nombres premiers : Existence et unicité de la décomposition. PPCM. Théorème de Bézout et de Gauss. *T.P. : Algorithme de test de primalité (calculatrice ou tableur). Critères de divisibilité. Exemples simples d'équations diophantiennes, applications au codage et à la cryptographie, petit théorème de Fermat (à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice)*
Nos commentaires *Pas de prolongement dans l'enseignement de spécialité ou obligatoire.*	***Nos commentaires*** *Pas de prolongement dans l'enseignement de spécialité ou obligatoire.*

Fig. 7 Programme d'arithmétique en spécialité mathématique période contemporaine (1998/2002) et derniers changements de programme (2002).

Le tableau 7, présenté ci-dessus, montre que les contenus sont restés sensiblement les mêmes à deux différences près :

- L'apparition explicite des congruences dans **Z**. Dans le programme de 1998, on établissait les propriétés des opérations sur les restes, compatibles avec les opérations usuelles. Cela pouvait donner lieu à la présentation et à la mise en œuvre des congruences mais « aucune connaissance spécifique ne [pouvait] être exigée » à ce sujet.
- Dans l'ordre de présentation des objets d'arithmétique, le PPCM est dissocié du PGCD et est introduit à la suite des nombres premiers. On peut faire l'hypothèse que la recherche d'un PPCM de deux entiers s'appuiera de façon privilégiée sur la décomposition en produits de facteurs premiers de ceux-ci.

Mais les différences profondes entre ces deux programmes en terme d'écologie s'expriment de façon explicite dans l'introduction du paragraphe concernant « l'enseignement de spécialité » et dans l'introduction à l'ensemble du programme de la « classe de terminale de la série scientifique ».

D'une part, les commentaires montrent que la volonté de faire vivre la niche « algorithmique » dans les classes est renforcée :

> « C'est le lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique[20] […] » (Introduction du paragraphe « enseignement de spécialité »)

> « Les élèves à qui ce programme est destiné ont grandi dans un environnement technologique, qui façonne leur comportement et leurs valeurs et crée des centres d'intérêts profondément nouveaux. La puissance des outils informatiques et l'existence de calculatrices performantes dont la plupart des élèves disposent sont des progrès bienvenus, et leur impact sur la pédagogie des mathématiques est considérable. Il faut accompagner cette évolution, notamment en utilisant ces outils dans les phases de découverte et d'observation par les élèves. » (Introduction du programme de mathématique de terminale S)

Or, nous avons vu, dans l'analyse du programme de 1998 ainsi que dans celle du chapitre B3, que cette niche ne vit pas dans les classes entre 1998 et 2002 malgré l'insistance qui existait déjà à ce sujet dans le programme de 1998. Pour remédier à ce constat, les concepteurs du programme de 2002 ont introduit la remarque suivante :

> « C'est le lieu naturel de sensibilisation à l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement » (Introduction du paragraphe « enseignement de spécialité »)

En liant algorithmique et raisonnement, on peut faire l'hypothèse que les concepteurs de programme souhaitent dépasser le clivage fortement présent dans le corps enseignant entre mathématiques « classiques », qui correspondent au raisonnement et à la rigueur, et les mathématiques «algorithmiques », qui ont une image de mathématiques «expérimentales » non rigoureuses.

Par ailleurs, pour inciter les enseignants à faire vivre la niche « algorithmique » de l'arithmétique dans leur classe, des exemples de mise en œuvre d'algorithmes à l'aide de moyens informatiques sont explicitement mentionnés dans le programme, ce qui n'était pas le cas en 1998. On peut ainsi lire :

> « On étudiera quelques algorithmiques simples et on les mettra en œuvre sur calculatrice ou tableur : recherche d'un PGCD, décomposition d'un entier en facteurs premiers, reconnaissance de la primalité d'un entier. » (Colonne « modalité de mise en œuvre » du contenu d'arithmétique)

> « L'arithmétique est un domaine avec lequel l'informatique interagit fortement ; on veillera à équilibrer l'usage de divers moyens de calculs : à la main, à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice. » (Colonne « commentaires » des contenus d'arithmétique)

Les moyens informatiques à utiliser dans les classes sont précisément identifiés, contrairement au flou de l'ancien programme à ce propos ; il s'agit du tableur et de la calculatrice. Pour aller plus loin dans cette volonté de proposer des exemples concrets de mise en œuvre d'algorithmes à l'aide de calculatrices ou de tableurs en arithmétique, les

[20] C'est nous qui soulignons, ainsi que dans les citations suivantes.

concepteurs du programme mettent un document d'accompagnement du programme de spécialité mathématique à la disposition des enseignants. Dans ce document d'accompagnement[21], cinq exemples de développement des notions du programme sont proposés, dont quatre sont mis en relation avec l'utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice :

1. Division euclidienne : la programmation d'une calculatrice pour obtenir le quotient et le reste d'une division euclidienne dans le cas où le dividende est négatif est envisagée :

   « Si le tableur ou la calculatrice utilisée par l'élève ne permet pas une division euclidienne directe avec des dividendes négatifs, la mise en place d'un programme de calcul peut être envisagée. »

2. Equations diophantiennes : des algorithmes de résolution d'équations diophantiennes sont fournis avec les commentaires suivants pour les enseignants peu familiers avec les langages de programmation :

   « Dans l'écriture ci-dessus, la ligne b←r signifie que dans le registre noté b, on met la valeur r ou le contenu d'un registre dont le nom est r. « Retourner a » signifie que le résultat de l'algorithme est dans le registre dont le nom est a. Les phrases en italique précédées de // sont des commentaires et ne font pas partie de l'algorithmique. L'écriture de tels algorithmes n'est pas standardisée ; bien que ce ne soit pas exigible, il est utile que les élèves sachent lire et comprendre une écriture ci-dessus ou une du même genre. »

3. Congruences dans **Z** : le problème du calcul des clés de contrôle de codages « impossibles à réaliser sur des calculatrices » est évoqué.

4. Nombres premiers : des commentaires sur le domaine de fonctionnement des deux principaux algorithmes de recherche de nombres premiers au lycée sont donnés, ainsi qu'un exemple d'utilisation de tableur pour la recherche de « quelques valeurs de p(n) » où p(n) représente « le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n »

D'autre part, en plus de la niche « algorithmique », une autre fonction est assignée à l'arithmétique dans le programme de 2002 : faire travailler les élèves sur le raisonnement. Remarquons que cette niche n'apparaissait pas explicitement dans le programme de 1998. La vie de cette niche « raisonnement » est justifiée dans le programme par les citations suivantes :

> « Les mathématiques, science du calcul, ne sont pas que cela, et il est important que les élèves comprennent qu'elles sont aussi une école de rigueur qui exige une pensée claire. Il faut pour cela maintenir l'entraînement au calcul et la réflexion, également indispensables au progrès mathématique, et donc présenter dans le cadre nécessairement modeste du programme, des démonstrations qui nourrissent cette réflexion. Les élèves pourront ainsi expliciter des raisonnements sans se limiter à quelques démarches stéréotypées, voir clairement la différence entre ce qu'on établit et ce qui est provisoirement admis et comprendre comment les mathématiques se construisent. » (Introduction du programme de mathématique de terminale S)

L'arithmétique est le domaine privilégié pour la mise en œuvre de cette exigence du programme :

---

[21] Ce document est disponible sur le site Internet du CNDP (Centre National de Documentation Pédagogique) à l'adresse suivante : http://www.cndp.fr/textes_officiels/lycee/maths/pdf/MathsAccTerS03.pdf

> « […] C'est un domaine élémentaire et accessible conduisant à des raisonnements intéressants et formateurs. » (Introduction du paragraphe « enseignement de spécialité »)

> « L'arithmétique, ayant pour objet l'étude des nombres entiers, est une des branches les plus élémentaires des mathématiques. Avec peu d'outils théoriques, on y démontre des résultats non triviaux. C'est aussi l'une des branches les plus difficiles et l'une des seules où des conjectures et des théorèmes dont l'étude théorique est redoutable peuvent être facilement énoncés. » (Introduction de la partie « Arithmétique » du document d'accompagnement du programme)

En ce qui concerne la niche «culturelle », niche qui apparaissait dans le programme de 1998, aucun indice explicite n'atteste de sa présence dans le programme de 2002. Cependant, elle reste inscrite en filigrane dans la rédaction du programme.

Notons avant de conclure que, dans le document d'accompagnement, les concepteurs du programme reviennent sur la réintroduction de l'arithmétique dans le programme 1998 :

> « […] Son introduction dans l'enseignement de spécialité, à l'occasion de la précédente rénovation de programme, a été un succès tant auprès des élèves que des enseignants. » (Introduction de la partie « Arithmétique » du document d'accompagnement du programme)

Les concepteurs de programmes ont eu des «retours » sur la mise en place de l'arithmétique dans les classes en 1998 et la perception tant des élèves que des enseignants sur cette réintroduction. Ces retours leur donnent l'occasion de justifier l'intérêt d'un enseignement d'arithmétique en spécialité mathématique, de part le succès qu'il a rencontré, et de renforcer la volonté du programme de faire vivre les niches « algorithmique » et « raisonnement ».
Leur commentaire sur l'appréciation de l'arithmétique rejoint ceux que les enseignants nous ont spontanément donnés dans leur réponse à notre questionnaire ainsi que ceux qu'ils ont exprimés dans le cadre des enquêtes effectuées par les groupes du Puy (travail coordonné par Pelisse et Planchet) et de Thiers (travail coordonné par Noailles) de l'IREM de Clermont-Ferrand (1999) :

> « Malgré les contraintes des enseignants, l'arithmétique est mieux perçue que la géométrie dans l'enseignement de spécialité. » (Pelisse et Planchet 1999, p. 7)

> « Le programme de la spécialité math en arithmétique vous semble-t-il ?
> - Très intéressant à 19,3 %
> - Intéressant à 51,8 %
> - Peu intéressant à 20,2 %
> - Pas intéressant à 8,7 % » (Ibid., p. 18)

> « Le constat est unanime pour souligner l'intérêt des élèves. Cet intérêt portait aussi bien sur le cours où ils avaient le sentiment d'apprendre (enfin !) à raisonner que sur les exercices où il fallait d'autres qualités que le psittacisme ; les travaux pratiques les ont aussi particulièrement mobilisés. » (Noailles 1999, p. 46)

Par ailleurs, les concepteurs du programme justifient le fait de cantonner l'arithmétique à un habitat « autonome » par le rôle attribué à la spécialité mathématique :

> « Il paraît judicieux de proposer dans la partie spécialité un chapitre relativement indépendant du programme du tronc commun : c'est le cas avec l'arithmétique, peu étudiée pendant le cursus antérieur, et que l'on peut aborder sans être pénalisé par d'éventuels échecs dans d'autres chapitres. » (Introduction de la partie « Arithmétique » du document d'accompagnement du programme)

Pour conclure, nous pouvons affirmer que le programme de 2002 permet un recentrage du programme de 1998. Il apporte des exemples précis de mise en œuvre de la niche « algorithmique » dans les classes. L'absence de ces exemples concrets dans le programme de 1998 permet d'expliquer en partie l'échec relatif de ce programme en ce qui concerne sa volonté de faire vivre la niche « algorithmique » dans les classes. Par ailleurs, il prend en compte explicitement l'existence de la fonction «raisonnement » que les enseignants avaient, de 1998 à 2002, attribuée à l'arithmétique. Les liens entre ces deux niches sont également mis en évidence. Reste à voir si ce renforcement sera suffisant pour que la niche « algorithmique » soit davantage prise en compte par les enseignants et soit, par conséquent, viable dans les classes.

VI. RETOUR SUR LES LIENS EXISTANTS ENTRE ARITHMETIQUE ET INFORMATIQUE

L'analyse des choix de transposition a montré la spécificité des deux programmes d'enseignement de la période contemporaine : l'arithmétique a pour fonction dominante de faire travailler les élèves sur les aspects algorithmiques des mathématiques. Par ailleurs, le programme de 2002 insiste également sur l'aspect raisonnement de l'arithmétique. Deux questions se posent alors :

- Pourquoi séparer les fonctions algorithmiques et raisonnement de l'arithmétique ?
- Si la volonté affichée par la noosphère est de réintroduire l'arithmétique afin de dégager, dans l'enseignement, un lieu permettant un travail sur la démarche algorithmique et sur l'utilisation des outils informatiques dans les classes, quels sont les liens qui unissent arithmétique et informatique ?

VI.1 Niche algorithmique et niche raisonnement

Mettre en œuvre une démarche algorithmique, c'est faire un raisonnement d'un certain type. La séparation entre niche algorithmique et niche raisonnement ne paraît donc pas a priori pertinente. La niche algorithmique pourrait, en effet, faire en quelque sorte partie de la niche raisonnement. C'est ce que le programme de 2002 entend mettre en avant lorsqu'il affirme que l'arithmétique est « le lieu naturel de sensibilisation à <u>l'algorithmique où la nécessité d'être précis impose rigueur et clarté du raisonnement</u> ». Le rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques –dite commission Kahane–, souligne également ce fait à plusieurs reprises :

> « Le rapport sur l'informatique […] insiste, à propos de l'écriture des programmes, sur l'articulation entre raisonnement, formalisation, logique et effectivité. » (Rapport CREM 2002, Présentation des rapports et recommandations, p. 4)

> « L'écriture d'un programme informatique est l'occasion d'appliquer des règles de logique absolue dans un univers clairement défini et limité. Ecrire un « programme qui marche » récompense de ses efforts de réflexion, d'analyse et de synthèse. Cela ne dispense pas d'assurer que l'algorithme termine dans tous les cas envisagés et qu'il le fait en temps raisonnable. » (Ibid., Informatique et enseignement des mathématiques, p. 3)

Les citations prouvent, si besoin est, que l'écriture d'un programme informatique ne dispense pas d'une réflexion sur les objets mathématiques travaillés, sur la formalisation utilisée pour écrire ce programme, de même que sur les règles de logique appliquées. Faire vivre la niche « algorithmique » en proposant par exemple de programmer les algorithmes arithmétiques sur calculatrice fait donc également vivre la niche « raisonnement ». Ainsi, la niche « algorithmique » est clairement une sous-partie de la niche « raisonnement ».

Nous avons cependant choisi de séparer dans notre travail, la niche algorithmique de la niche raisonnement. En effet, même si l'institution scolaire essaie de mettre en avant un rapport institutionnel aux mathématiques qui présente les démarches algorithmiques (notamment par le biais de la programmation informatique) comme des types de raisonnement à part entière (c'est-à-dire comme des raisonnements mathématiques aussi rigoureux que les raisonnements « classiques »), cette position est encore peu partagée, dans les faits, par une majorité d'enseignants. Beaucoup opposent encore mathématiques rigoureuses et mathématiques développées à partir d'outils informatiques.

VI.2 Liens entre arithmétique et informatique

Deux questions se posent si l'on souhaite comprendre quelle peut être l'influence des liens existant entre arithmétique et informatique sur la réintroduction de l'arithmétique dans l'enseignement en 1998 :

- Pourquoi avoir choisi (notamment) l'arithmétique pour mettre en avant l'aspect algorithmique des mathématiques dans l'enseignement ?
- Quels moyens apporte l'informatique pour faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique dans l'enseignement ?

Nous montrons dans un premier temps que la volonté de proposer aux élèves des contenus d'arithmétique sous un aspect algorithmique est justifiée par le développement actuel de l'informatique. Dans un deuxième temps, nous examinons comment l'utilisation d'outils informatiques peut être un moyen de faire vivre la niche algorithmique dans les classes avant d'analyser la viabilité de celle-ci et d'identifier un système de contraintes qui s'y oppose.

Les discours présents dans les programmes, les différentes brochures l'accompagnant et les manuels scolaires semblent soutenir l'idée que ce sont les liens noués récemment entre l'arithmétique et l'informatique qui ont motivé le choix de la noosphère de réintroduire l'arithmétique sous un aspect algorithmique. Cette réintroduction est en effet justifiée dans le programme de 1998 par la phrase suivante :

> « Il a paru utile de faire figurer un enseignement d'arithmétique en raison de l'importance de celle-ci dans la culture scientifique et <u>du développement actuel de ses applications</u>[22]. »

Le programme de 2002 s'inscrit dans cette lignée. Le document d'accompagnement complétant ce programme et ayant pour but « d'expliciter certaines intentions [du programme] et proposer des pistes de mise en œuvre » indique :

> « [La] place dans l'enseignement de spécialité de [l'arithmétique] se justifie à plusieurs titres :

[22] C'est nous qui soulignons.

- […] les applications de l'arithmétique (codages, clés de contrôle…) ont remis ce domaine sous les feux de l'actualité : l'étude de ce chapitre donne quelques éléments pour mieux comprendre les enjeux de ces applications ;
- […] enfin, il ne faut pas négliger la possibilité de construire quelques algorithmes simples puis de les mettre en œuvre sur calculatrice programmable ou tableur. »

La généralisation actuelle de l'outil informatique est ainsi source d'une « nouvelle vie » pour l'arithmétique. Par exemple, les systèmes de numération utilisés par les ordinateurs et le codage d'informations confidentielles sont basés sur des résultats d'arithmétique (en particulier sur les principaux algorithmes : algorithme d'Euclide, décomposition en facteurs premiers, tests de primalité, changements de base de numération, etc.).
Ce « renouveau » de l'arithmétique lié à l'explosion de l'usage de l'informatique dans nos sociétés est repris dans l'ensemble des brochures à destination des enseignants que nous avons consultées et sert là aussi de justification aux choix noosphériens :

> « Plus récemment des problèmes concrets liés à l'informatique, l'électronique ainsi qu'à la représentation, la compression, l'intégrité et la confidentialité des données, ont été résolus dans le cadre de l'arithmétique. […] <u>Ainsi, compte-tenu de son aspect culturel, de son aptitude à la formation du raisonnement, de ses nombreuses applications concrètes récentes, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du champ des mathématiques, convenait-il que l'arithmétique élémentaire ait une place dans la formation des élèves des lycées</u>[23] (tout au moins en spécialité mathématique) » (Groupe de l'IREM d'Aix-Marseille 1999, p. 7)

De même, dans la préface rédigée par une inspectrice pédagogique régionale et académique, de la brochure du CRDP de Clermont-Ferrand :

> « L'importance historique de l'arithmétique serait suffisante pour qu'on s'y intéresse, toutefois [une raison majeure s'impose encore] :
> **L'actualité scientifique** : le regain d'actualité scientifique de l'arithmétique suscité par le développement de l'informatique est indiscutable : les ordinateurs comptent, si l'on peut dire, en base 2, en base 8, en base 16… La transmission électronique des messages pose le problème de la confidentialité de ceux-ci : c'est l'arithmétique qui fournit des outils théoriques et tout à fait pratiques pour le résoudre. C'est là une belle occasion de montrer l'utilité moderne de résultats dont certains sont très anciens, comme ceux établis par Euclide. Plus difficile, peut-être, est l'intervention de l'arithmétique dans la détection et la correction d'erreurs dans des messages électroniques ; on peut cependant aborder le problème dans certains cas rudimentaires. » (CRDP Auvergne 1998, p. 5)

Un discours analogue est présent dans la brochure éditée par l'IREM de Poitiers dans le chapitre intitulé « de bonnes raisons pour enseigner l'arithmétique » :

> « Depuis 1974, grâce à la révolution apportée par les ordinateurs dans les méthodes de calculs, la théorie des nombres a trouvé des applications techniques et industrielles insoupçonnables quelques années auparavant : les clés de contrôle, les systèmes de cryptographie, les codes correcteurs d'erreur […] » (Bonneval & al 2000, pp. 5-6)

Ces arguments ne se cantonnent pas aux publications « proches » de la noosphère. Ils sont repris plus ou moins explicitement dans les manuels scolaires de 1998 qui se font l'écho de ce discours justifiant le choix d'enseigner l'arithmétique du fait de l'importance « du développement actuel de ces applications » :

[23] C'est nous qui soulignons.

> « Et c'est en partie grâce à des théories d'arithmétique appliquées à l'informatique et à l'information chiffrée, que l'on peut aujourd'hui recevoir des images numériques, utiliser une carte de crédit ou un téléphone cellulaire... » (Ter98, p. 7)[24]

> « A l'heure des 'autoroutes' de l'information, le codage de données chiffrées est plus que jamais d'actualité. Même si la méthode de codage que nous avons présentée ferait sourire les spécialistes, il est indéniable que la cryptographie moderne fait usage des théorèmes d'arithmétique parfois très poussés. » (Ter98, p. 47)

Notons, avant d'analyser la place et le rôle des outils informatiques dans les paragraphes d'arithmétique des manuels, que c'est en comprenant l'importance des applications informatiques utilisant des résultats d'arithmétique que l'on peut expliquer, au niveau du savoir à enseigner, le choix de présenter les notions de PGCD et PPCM à la suite de la division euclidienne et de l'algorithme d'Euclide accompagné du commentaire «pour les déterminations de PGCD et PPCM, on évitera le recours systématique à la décomposition[25] en facteurs premiers ».

Au niveau de la classe de terminale, d'un point de vue informatique, la décomposition en facteurs premiers n'est pas un outil efficace de programmation pour la recherche d'un PGCD ou d'un PPCM. La mise en œuvre de l'algorithme d'Euclide est notamment plus économique en terme de coût, non seulement pour trouver le PGCD de deux nombres de taille équivalente (grande ou petite) mais également pour chercher le PGCD de deux nombres de tailles différentes[26]. Ensuite, la recherche du PPCM est immédiate une fois le PGCD calculé ; il ne reste plus qu'à utiliser la relation PPCM(a,b)×PGCD(a,b)=ab.

La difficulté à produire la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel à l'aide d'un ordinateur est à la base de la cryptographie actuelle :

> « Les ordinateurs peuvent décomposer un nombre en facteurs premiers en un temps très court, de quelques secondes à une heure, lorsque ce nombre s'écrit avec trente chiffres environ. Mais dès que le nombre de chiffres grandit, la tâche lui devient presque impossible. Il lui faudrait plusieurs années pour décomposer un nombre de 200 chiffres par exemple. » (Trans98, p. 144)

> « Aujourd'hui, de tels systèmes [de codage] existent et sont quasiment inviolables : les temps de calcul pour casser les codes sont astronomiques. Cependant, les cryptanalystes utilisent aujourd'hui le réseau Internet pour faire fonctionner des milliers d'ordinateurs pendant des plages de temps libérées par leurs utilisateurs : si la partie est gagnée provisoirement par les codeurs, les cryptanalystes n'ont pas dit leur dernier mot. » (Noirfalise 1998, p. 104)

Cette utilisation de plus en plus répandue des systèmes de codage a conduit à un nouvel intérêt pour la recherche en arithmétique et théorie des nombres :

> « Il n'en reste pas moins que la recherche en arithmétique demeure vive aujourd'hui et les problèmes posés par le cryptage via des modes informatiques ont contribué à redynamiser ce secteur de recherche. Par exemple, on ne sait pas aujourd'hui décomposer un nombre en ses facteurs premiers avec un

[24] Les manuels scolaires que nous avons analysés sont notés comme suit : Ter98 et Ter02 pour les éditions 1998 et 2002 de Terracher, Dec98 et Dec02 pour le manuel Déclic, de même que Trans98 et Trans02 pour Transmath.

[25] Le programme de 1998 se place en opposition avec le programme de 1971 sur ce sujet. En 1971, la décomposition en produit de facteurs premiers était une technique « emblématique » de l'arithmétique utilisée pour résoudre un certain nombre de types de tâches ; l'algorithme d'Euclide était beaucoup moins utilisé dans l'enseignement.

[26] Un exercice permet d'établir le résultat suivant : « Quels que soient les nombres a et b, si b est inférieur à 10 000, alors le nombre de divisions à effectuer dans l'algorithme d'Euclide ne dépasse pas 19. » (Trans98, 105 p.136)

> algorithme rapide (en temps polynomial), mais on ne sait pas non plus s'il n'existe pas un tel algorithme ! On peut comprendre que la sécurité d'un système comme le RSA dépende fortement des réponses qui seront apportées à ces questions. » (Ibid., p. 137)

Notons aussi que cette tendance à privilégier l'algorithme d'Euclide aux dépens de la décomposition en facteurs premiers se retrouve dans la réforme actuelle du programme de troisième (programme de 1999) :

> « Le programme de la classe de 3e a pour objectif de permettre [...] dans le domaine numérique [...] de faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et <u>une mise en valeur de processus algorithmiques</u>[27]. »

La colonne des « Commentaires » sur le contenu « diviseurs communs à deux entiers et fractions irréductibles » précise :

> « Depuis la classe de 5eme, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. [...] <u>On construit alors un algorithme</u>, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées <u>ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers</u>. <u>Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit</u>[28]. »

Les objectifs en classe de troisième sont donc cohérents avec ceux de la classe de terminale S spécialité et nous retrouvons la même volonté de développer l'approche algorithmique de résolution de problème et d'introduire de fait l'outil informatique dans la pratique des mathématiques.

Ainsi, le renouveau récent de l'arithmétique au carrefour des mathématiques et de l'informatique a sûrement influencé et conduit la noosphère à introduire l'arithmétique sous un aspect algorithmique dans l'enseignement. Si cette volonté est exprimée dans le programme et dans les brochures que nous avons consultées, qu'en est-il dans les manuels scolaires ?

CONCLUSION

L'analyse menée dans ce chapitre a montré l'évolution des niches occupées par l'arithmétique en terminale scientifique au fil des changements de programmes depuis la fin du 19ème siècle. Depuis sa réintroduction en 1998 en spécialité mathématique, trois fonctions sont assignées à l'arithmétique : mettre en avant l'aspect algorithmique des mathématiques par le biais des principaux algorithmes arithmétiques, permettre un travail «rigoureux » sur le raisonnement, et enfin, sensibiliser à l'histoire des mathématiques.

Nous avons montré le caractère novateur du choix de transposition conduisant à favoriser l'aspect algorithmique de l'arithmétique dans les programmes de la période contemporaine.

[27] C'est nous qui soulignons, ainsi que dans la seconde citation extraite des programmes de 3e.

[28] Remarquons au passage que de nombreuses calculatrices donnent directement la forme irréductible d'une fraction. On observe donc un problème de « concurrence » entre les techniques de résolution attendues par les enseignants et celles rendues possibles par l'utilisation d'outils informatiques ; ce qui peut être problématique dans le contrat de la classe.

Ces choix reflètent en effet le « renouveau » de l'arithmétique dans le savoir savant dû en partie à l'expansion encore récente de l'utilisation de l'informatique dans nos sociétés et des besoins en savoirs arithmétiques engendrés par ce développement.

Cependant, l'analyse comparée du programme de 1998 et des réajustements opérés dans celui de 2002 permet de pointer un système de contraintes qui peut potentiellement, contrarier –voir même empêcher– la vie de la niche algorithmique dans le processus de transposition didactique interne.
Tout d'abord, l'introduction de l'arithmétique sous un angle algorithmique se trouve confrontée à une culture mathématique fortement ancrée chez les enseignants qui leur fait distinguer mathématiques « rigoureuses » et mathématiques « algorithmiques » ; cette distinction conduisant à une péjoration des mathématiques « algorithmiques ». Les réajustements du programme de 2002 peuvent être lus comme une tentative d'atténuer cette distinction dans le corps enseignant.
Par ailleurs, cette introduction se heurte également à des conditions « matérielles » existant dans l'institution scolaire qui laissent envisager une mise en œuvre difficile des volontés du programme dans les classes. En effet, il est reconnu d'une part que les enseignants de mathématiques ne sont pas suffisamment formés à l'utilisation des outils informatiques pour faire des mathématiques, d'autre par que les établissements scolaires sont inégalement dotés en matériel informatique. De plus, se pose la question de la définition des types de tâches « algorithmiques » pouvant être proposés aux élèves dans les classes. Ce manque de référence permettant de mettre en place un enseignement « algorithmique » de l'arithmétique semble avoir été pris en compte par les concepteurs du programme comme le montrent les exemples précis d'utilisation d'outils informatiques en arithmétique dans le document d'accompagnement du programme de 2002.
Ainsi, les conditions ne nous semblent, a priori, pas réunies pour faire vivre la niche algorithmique dans l'institution scolaire contemporaine.

Par ailleurs, la réintroduction des congruences dans **Z** dans le programme de 2002 peut être vue comme un indice de la prégnance de la niche structurelle. Cette hypothèse demande à être confirmée par l'analyse des manuels et des projets de cours des enseignants. Cependant, le recours à une façon de concevoir l'arithmétique telle qu'elle pouvait exister dans les années 70 (en évitant bien entendu l'étude des idéaux de **Z** et de la structure de **Z**/n**Z**) ne nous semble pas exclu. En effet, l'arithmétique enseignée à cette époque véhicule une image de « rigueur » mathématique auprès de nombreux enseignants de spécialité mathématique qui, rappelons-le, ont soit déjà enseigné l'arithmétique dans les années 70, soit reçu cet enseignement d'arithmétique en tant qu'élève et étudiant et peut les conforter dans leurs choix de privilégier le raisonnement au détriment de l'algorithmique dans leur cours d'arithmétique.

CHAPITRE B2

ANALYSE ECOLOGIQUE DE MANUELS DE 1971 A 2002

Des contraintes et des libertés institutionnelles

INTRODUCTION

L'analyse écologique des programmes d'arithmétique de terminale scientifique depuis 1886 menée dans le chapitre précédent nous a permis d'identifier les niches occupées par l'arithmétique au fil des différents programmes de terminale. Ainsi, au niveau du savoir à enseigner, les fonctions assignées à l'arithmétique ont été de favoriser tour à tour la niche calcul numérique et la niche théorie des nombres jusqu'en 1971, la niche structurelle pendant la période de la réforme des mathématiques modernes et, depuis 1998, les niches algorithmique, raisonnement et, dans une moindre mesure, la niche culturelle.
Il nous faut maintenant analyser comment ces décisions de la noosphère vont être prises en compte par les auteurs de manuels. En effet, pour étudier le processus de transposition didactique interne et dans l'optique de comprendre les choix faits par les enseignants au niveau du savoir apprêté et du savoir enseigné, il est nécessaire d'analyser les manuels auxquels la plupart d'entre eux se réfèrent pour construire leurs cours :

> « Depuis la théorisation proposée par Chevallard (1991) sur la transposition didactique, les livres scolaires sont habituellement considérés comme des produits de certaines institutions transpositives. Celles-ci peuvent être des personnes particulières qui deviendront des auteurs, des commissions ou groupes de personnes chargées de rédiger tel ou tel document. L'étude des livres va donc fournir des indications précieuses sur la transposition didactique[29] de certains savoirs […]. » (Neyret 1993, pp. 10-11)

Suivant le travail de Neyret, nous considérons les manuels scolaires « comme produits de certaines institutions transpositives ». Plus exactement, les manuels sont pour nous un des produits de la première étape de la transposition didactique interne. Ils sont le résultat des choix faits par leurs auteurs sur le savoir à enseigner c'est-à-dire le résultat d'un certain apprêtage didactique.

Précisons notre questionnement sur les manuels dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique. Nous avons vu en introduction qu'à l'issue du travail de transposition externe la noosphère rédige, sous un système de conditions et de contraintes, un texte du programme en effectuant des choix mathématiques, didactiques et pédagogiques. Dans ce texte, les objets de savoir présentés comme étant à enseigner vont occuper différentes niches écologiques. Le programme énonce ainsi, dans les grandes lignes, le contenu du rapport institutionnel à ces objets de savoir dans l'institution scolaire.

Ces grandes lignes sont ensuite mises en texte dans les manuels scolaires. Les auteurs de manuels, sujets de l'institution scolaire, vont apprêter les objets de savoir à enseigner afin de

[29] C'est nous qui soulignons.

les rendre « utilisables » par les enseignants et les élèves. Comme tout travail de transposition, cet apprêtage didactique s'effectue sous un « système de conditions et de contraintes »[30], dépendant de l'institution à laquelle les auteurs de manuels s'assujettissent pour rédiger les livres scolaires. Ils vont donc faire des choix pour mettre en texte les directives du programme et proposer à leurs sujets des activités préparatoires, un cours et des exercices. Ils vont alors construire des organisations mathématiques autour de ces objets de savoir pour pouvoir les mettre en place. Ce travail interne de transposition modifie obligatoirement le contenu du rapport institutionnel décrit par le programme. En effet :

> « Quand on passe d'une institution à une autre, dont on puisse dire également que le savoir S y est « mis en jeu », on voit ce savoir S et les objets de savoir O^s pris dans des rapports institutionnels différents. En vérité, le découpage même du savoir S en objets O^s varie. L'écologie institutionnelle des objets O^s –soit le système des objets et des rapports institutionnels qui en constitue l'environnement dans l'habitat où ces objets vont « vivre » – change aussi. » (Chevallard 1989, p. 218)

Cependant, même si les manuels peuvent être considérés comme une institution différente de l'institution «programme d'enseignement », les auteurs de manuels, tout comme les acteurs de la noosphère, sont des sujets de l'institution scolaire. De fait, en tant que «bons sujets de l'institution », les auteurs de manuels sont tenus à mettre en texte les directives du programme afin que le rapport institutionnel dans les manuels soit le reflet –soit idoine– du rapport institutionnel dans l'institution scolaire :

> « Dans les manuels dominants, un rapport institutionnel pour un objet de savoir, va être représentatif du rapport institutionnel à ce même objet pour la position d'enseignant dans l'institution pour lequel il est destiné. » (Neyret 1993, pp. 11)

En spécifiant le questionnement précédent au cadre particulier de notre étude, l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique, nous pouvons donc faire l'hypothèse suivante : les choix faits par les auteurs de manuels pour apprêter l'arithmétique à enseigner doivent s'inscrire dans la volonté du programme de faire vivre les niches algorithmique et raisonnement de l'arithmétique.

Dans ce chapitre, nous allons nous attacher plus particulièrement à l'étude des conditions de vie de la niche algorithmique. En effet, l'analyse écologique des programmes menée dans le chapitre précédent a montré que la vie de cette niche semblait a priori difficile dans le savoir apprêté tandis que celle de la niche raisonnement semblait assurée.

Nous avons donc défini deux axes d'étude des manuels. Ces axes permettent de mettre en lumière les trois principales possibilités de vie de la niche algorithmique :

- Proposer des démonstrations constructives des théorèmes d'arithmétique quand cela est possible. La démonstration du théorème de Bézout par la méthode de l'algorithme d'Euclide étendu est un exemple de démonstration constructive. En effet, elle permet non seulement de prouver l'existence du couple (u,v) solution de au+bv=d où d=PGCD(a,b) mais donne également une méthode pour construire ce couple. Cette démonstration est basée sur un algorithme ; elle nécessite donc l'étude formelle de l'algorithme en question et met en valeur les démarches algorithmiques. Ce n'est pas le cas des démonstrations non constructives de ce théorème comme par exemple celle s'appuyant sur l'ensemble $E=\{am+bn, m\in \mathbf{Z}$ et $n\in \mathbf{Z}\}$.

[30] Par exemple, devoir proposer une certaine variété au niveau des exercices pour que les enseignants puissent avoir du choix, répondre à des contraintes spécifiques aux problèmes d'édition etc.

- Intégrer l'outil informatique dans les manuels[31] par le biais de la programmation informatique des algorithmes du cours d'arithmétique et l'intégration, à un corpus d'exercices plus classiques, d'exercices à résoudre à l'aide d'outils informatiques.
- Proposer des exercices dans lesquels les algorithmes sont soit des outils efficaces de résolution soit des objets d'étude.

Nous avons choisi de mener cette analyse sur trois collections[32] de manuels de 1998 et de 2002 : Déclic, Terracher et Transmath. Par la suite, ces différents manuels seront notés : Dec98, Ter98 et Trans98 pour les manuels du programme de 1998 et Dec02, Ter02 et Trans02 pour ceux du programme 2002.

Nous avons par ailleurs inclus un manuel «dominant »[33] de la période 1971-1983 dans nos analyses pour connaître les choix institutionnels de cette période afin de pouvoir les comparer à ceux de l'époque actuelle. En outre, ceci nous permet de voir si les changements d'orientation du programme d'arithmétique entre les années 1971, 1998 et 2002 se traduisent par des changements « analogues » dans les cours des manuels correspondants à ces périodes ou si le rapport institutionnel à l'arithmétique du programme de 1971 pèse encore sur les choix d'apprêtage didactique de l'arithmétique des auteurs de manuels actuels.

Comment les directives du programme concernant la niche algorithmique sont-elles mises en texte dans les manuels ? Observe-t-on une variabilité entre ces différents apprêtages du savoir arithmétique à enseigner ? Si oui, sur quoi porte cette variabilité ? A l'opposé, quelles sont les régularités observées entre les différents manuels ? Plus généralement, quelles contraintes pesant sur la conception des manuels peuvent expliquer les choix faits par les auteurs de manuels dans la mise en texte des programmes de 1998 et 2002 ?

Pour répondre à ces questions, nous avons organisé notre analyse des manuels selon le plan suivant :

- En introduction, nous commençons par un paragraphe dans lequel nous définissons les termes algorithme, algorithmique, programme et outil informatique ; termes que nous allons employer largement dans ce chapitre.
- Nous proposons dans un second temps une analyse écologique de la partie cours des manuels visant à analyser la vie de la niche algorithmique à travers les choix de démonstration ou de définitions proposés pour quatre des objets principaux du programme d'arithmétique : la division euclidienne, le PGCD, le théorème de Bézout et la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.
- Nous menons ensuite une analyse comparative de la place des outils informatiques dans les manuels de 1998 et 2002 tant au niveau de la programmation qu'au niveau des exercices.

[31] Nous reviendrons par la suite sur la possibilité de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique par le biais de l'intégration de l'outil informatique dans les manuels.

[32] Notons que ces trois manuels font partie des quatre manuels majoritairement utilisés par les enseignants (cf. chapitre B3). Le manuel le plus répandu chez les 43 enseignants interrogés est Belin (16 réponses sur 43). Nous avons cependant choisi de ne pas l'inclure dans nos analyses car Belin n'a pas édité de livre de spécialité mathématique pour le programme 2002. Ter98 est utilisé par 9 enseignants sur 43, Trans98 par 5 et Déclic par 4 enseignants.

[33] Il s'agit du manuel de la collection Queysanne-Revuz, noté Revuz71 dans la suite de notre étude.

I. DEFINITIONS

Il nous faut dans un premier temps définir ce que nous entendons par les termes « algorithme », « algorithmique », « programme » et « outil informatique ».

Comme le souligne Chabert & al (1994), on trouve des traces d'algorithmes depuis les Babyloniens, et ce avant même « l'apparition d'un terme particulier servant à les désigner. ». Ce n'est qu'au Moyen Age que le terme d'*algorisme* va apparaître en Occident, rattaché « au nom 'al-Khwarizmi', nom de l'auteur du plus ancien traité d'algèbre que nous connaissons. », et faisant référence aux « procédés de calcul utilisant le système positionnel ».

Depuis, la signification de ce mot a évolué et définir ce qu'est un algorithme n'est pas chose aisée. Il en existe en effet une multitude de définitions dont voici deux exemples.
D'après le Petit Robert (édition 2000), un algorithme est :

> « (VX) système de numération décimale emprunté des Arabes.
> (mod. Mathématique) Suite finie, séquentielle de règles que l'on applique à un nombre fini de données, permettant de résoudre des classes de problèmes semblables. *L'algorithme d'Euclide permet de trouver le PGCD de deux nombres.* Ensemble des règles opératoires propres à un calcul ou à un traitement informatique. –Calcul, enchaînement des actions nécessaires à l'accomplissement d'une tâche. (→ automate) » (Le Petit Robert 2000)

Dans l'Encyclopaedia Universalis, tome 1, p. 814 :

> « L'objet de l'algorithmique est la conception, l'évaluation et l'optimisation des méthodes de calcul en mathématiques et en informatique. Un algorithme consiste en la spécification d'un schéma de calcul, sous forme d'une suite d'opérations élémentaires obéissant à un enchaînement déterminé. »

Nguyen (2002), dans son mémoire de DEA, a recensé vingt-quatre définitions[34] du mot algorithme dans différents ouvrages tant mathématiques qu'informatiques. A partir de ce travail, il montre que deux notions, la séquencialité et l'effectivité, sont centrales dans les définitions qu'il a relevées :

> « Deux [caractéristiques] sont prépondérantes aussi bien en mathématiques qu'en informatique : la « séquencialité » (un algorithme peut être décrit par une suite d'actions ordonnées) et « l'effectivité » (l'exécution d'un algorithme donne toujours lieu au résultat escompté). Ces caractéristiques sont préalables aux choix de l'écriture des algorithmes dans un langage de programmation compréhensible par une machine. Un tel algorithme nécessite une description des opérations constituantes d'un algorithme, et une particularisation des objets sur lesquels porte le calcul. »
> (Nguyen et Bessot 2003)

Ce travail lui permet, par ailleurs, de donner une définition d'algorithme qui prend en compte les caractéristiques principales de ces différentes définitions et que nous adoptons pour notre recherche :

> « Un algorithme est une **suite finie** (séquence, ensemble, système, processus discret, instruction, description, prescription) **d'actions** (actions élémentaires, opérations, opérations élémentaires,

[34] Toutes ces définitions sont équivalentes. « Grâce aux progrès réalisés par les chercheurs dans les années trente, les deux propositions suivantes furent généralement admises : 1. toutes les définitions rationnelles du terme « algorithme » connues à ce jour sont équivalentes, 2. toutes les définitions rationnelles du terme « algorithme » établies par la suite seront équivalentes aux autres définitions connues ; ou, plus brièvement : 3. tout ce qui peut-être calculé peut l'être avec la machine de Turing. » (Nguyen 2002, p. 3)

> instructions, étapes, règles, règles opératoires) qui sont **déterministes**, pouvant être **écrite dans un langage compréhensible** par un dispositif donné ou un opérateur donné afin de produire avec certitude une **sortie** (output : résultats visés, résolution d'un problème ou d'une classe de problèmes) à partir d'une **entrée** (input) prise dans un ensemble potentiellement infini de données en un **temps raisonnable** dépendant des **compétences de l'opérateur, du problème et du dispositif** (ordinateur, données) dont on dispose. » (Nguyen 2002, p. 4)

A partir de là, nous désignons par « démarche algorithmique » une démarche qui est basée sur la mise en œuvre d'un algorithme (par exemple : on peut résoudre une équation diophantienne par la méthode de descente et de remontée de l'algorithme d'Euclide).

Tout comme Nguyen, nous nous intéressons uniquement aux algorithmes de style impératif[35], qui sont les seuls présents dans le programme d'enseignement du secondaire. Mais tandis que Nguyen axe sa recherche sur les notions de boucles et de variables en mathématiques et informatique, nous centrons notre travail sur trois étapes présentes dans tous les algorithmes accessibles en terminale S spécialité mathématique :

- l'initialisation (choix des conditions initiales) ;
- l'itération ;
- le critère d'arrêt.

Nous avons choisi de nous intéresser à ces notions pour la raison suivante : si l'on souhaite, comme le programme le laisse entendre, faire travailler les élèves sur des démarches algorithmiques et les initier à la programmation informatique, ces trois étapes constituent trois points essentiels dans le passage d'un algorithme mathématique à un algorithme de programmation (implémentable sur une calculatrice ou un ordinateur) et enfin à un programme implémenté :

> « Concepts de base de la programmation et de l'algorithmique. Quels sont-ils ? Pour la programmation : les structures de contrôle (boucles et branchements) et la récursivité. A propos d'algorithmes, mêmes simples, il est important de réfléchir à la structure des données et de se poser la question de leur complexité. Pourquoi les enseigner dans le cadre des sciences mathématiques ? 1) A cause de leur caractère fondamental et universel : ils sont le domaine d'interaction entre logique, algorithmique et informatique ; 2) Pour permettre une meilleure compréhension et appréhension des ordinateurs et calculatrices comme aides à l'enseignement des mathématiques […] 3) Pour préciser certains concepts mathématiques dont l'usage a été précisé, codifié, ou revalorisé par l'informatique (exemples : récurrence et récursivité, structures de données et complexité des algorithmes, distinction entre nom et valeur d'une variable…) » (Rapport CREM 2002, Informatique et enseignement des mathématiques, pp. 13-14)

Par ailleurs, la structure des démonstrations constructives (qui, rappelons-le, sont basées sur des algorithmes) que l'on peut trouver en arithmétique suit ces trois étapes ; ce qui distingue ce type de raisonnement particuliers des autres types de raisonnement plus « classiques ».

Enfin, pour nous, un « programme » (sous-entendu programme informatique) est donc la traduction, dans un langage de programmation, d'un algorithme mathématique.

[35] « La programmation présentée dans les manuels scolaires […] est de style impératif. Le style impératif est fondé sur deux sortes de structures : les structures de contrôle [typiquement : itérations] et les structures de données [typiquement : initialisation]. » (Nguyen 2002, p. 5)

Et par outil informatique, nous entendons tous types d'outils technologiques permettant la programmation d'algorithmes par les élèves : calculatrices programmables, ordinateurs, tableurs, logiciels de calcul formel, etc.

II. ANALYSE ECOLOGIQUE DE LA PARTIE COURS DES MANUELS

Comme nous l'avons souligné en introduction, nous allons analyser les choix de démonstrations des principaux théorèmes d'arithmétique –le théorème sur l'existence et l'unicité de la division euclidienne, de la décomposition d'un entier naturel $n\geq 2$ en produit de facteurs premiers, le théorème de Bézout– ainsi que la définition du PGCD.
Au préalable, nous avons choisi d'étudier la place des notions d'ensembles et de relations dans les manuels afin de voir si, d'une part, les manuels contemporains portent des traces de l'ancien programme d'arithmétique et, d'autre part, s'ils partent de ces notions pour faire des démonstrations constructives « rigoureuses ».

Dans l'annexe de ce chapitre, nous donnons des tableaux permettant de se représenter la structuration en chapitres et parties faite dans chacun des manuels analysés.

II.1 Notions d'ensembles et de relations

Se poser la question de savoir si les manuels actuels portent des traces du rapport institutionnel à l'arithmétique prévalant dans les institutions scolaires de la réforme des mathématiques modernes n'a rien d'incongru ; il est souvent nécessaire de s'appuyer sur les propriétés des parties de **N** pour faire des démonstrations rigoureuses en arithmétique. Par exemple, le fait que l'algorithme d'Euclide ne comporte qu'un nombre fini d'étapes se prouve à l'aide du principe dit de «descente infinie » à savoir que toute suite d'entiers naturels strictement décroissante est finie.
De plus, introduire des notations ensemblistes ou les propriétés des ensembles non vides de **N** peut influencer le choix des démonstrations proposées. En effet, pour pouvoir démontrer le théorème de la division euclidienne à partir de l'ensemble $E=\{am+bn \ / \ m\in \mathbf{Z},\ n\in \mathbf{Z}\}$, il faut utiliser le fait que toute partie non vide de **N** admet un plus petit élément.

Ainsi, s'il est évident que présenter les propriétés de **N** dans les manuels de la réforme des mathématiques modernes contribuait à la vie de la niche structurelle, aujourd'hui cela peut avoir une influence sur la vie des niches raisonnement et algorithmique.

a) Manuel de 1971

En 1971, le programme désigne explicitement une niche pour l'arithmétique : la niche structurelle. Cette niche vit pleinement dans Revuz71. Les deux chapitres d'arithmétique « Entiers naturels » et « Entiers relatifs » commencent par les préambules suivants :

> « La section I de ce chapitre est consacrée à la présentation des entiers naturels[36]. Conformément au programme, nous avons admis les principales propriétés de ($\mathbf{N}$, +, ×, ≤). […] Enfin, la section II

[36] C'est nous qui soulignons, ainsi que dans la citation suivante.

présente la division euclidienne dans **N** et son application à l'étude des systèmes de numération. Nous commencerons par donner des compléments sur les lois de composition interne et sur les relations d'ordre ; cela nous permettra de ne pas rompre l'exposé des propriétés de **N** par l'introduction de nouvelles notions. » (Revuz71, p. 13)

« Les propriétés des entiers relatifs sont exposées dans ce chapitre en quatre sections ; Section I. Groupe additif (**Z**, +) et groupe totalement ordonné (**Z**, +, ≤). Anneau (**Z**, +, ×) et anneau totalement ordonnée (**Z**, +, ×, ≤). Section II. Sous-groupes de **Z**, idéaux de **Z** ; entiers modulo n. Section III. Divisibilité dans l'anneau **Z** ; p.g.c.d. et p.p.c.m. de deux ou plusieurs entiers. Section IV. Nombres premiers.
Ce chapitre est d'abord important parce qu'il développe les propriétés des entiers relatifs qui sont utilisées dans beaucoup de théories mathématiques. Mais il l'est à un autre titre ; en effet, la considération du groupe **Z**, des anneaux **Z**/n**Z** permet de revoir certaines notions étudiées dans les classes précédentes (loi interne, partie stable, groupe, sous-groupe, anneau, sous-anneau, corps) mais encore de préciser certaines notions déjà entrevues et d'étudier des notions nouvelles (idéal d'un anneau commutatif, loi interne compatible avec une relation d'équivalence, homomorphismes et isomorphismes). » (Ibid., p. 47)

Dans ce manuel, l'accent est fortement mis sur l'étude des structures algébriques. Nous ne détaillons pas ici le contenu des choix des auteurs Revuz71 en ce qui concerne les notions d'ensembles et de relations. Les deux citations précédentes nous montrent explicitement que celles-ci occupent une place prépondérante en arithmétique. Nous aurons d'ailleurs l'occasion d'y revenir par la suite, lorsque nous examinerons les choix de démonstrations des principaux théorèmes d'arithmétique.

b) Manuels de 1998

Dans la période contemporaine (1998-2002), l'étude des structures de **N**, **Z** et **Z**/n**Z** ne fait plus partie des contenus d'enseignement. Cependant, bien qu'absentes des programmes depuis la réforme de 1983, les notions d'ensembles et de relations (≤ et |) donnent lieu à des présentations plus ou moins approfondies dans les manuels de 1998.

Ter98 est assez bref sur ces notions ; seules deux propriétés, utilisées par la suite dans les démonstrations, sont énoncées :

« Nous n'envisagerons comme préalable à ce chapitre (Divisibilité, Nombres premiers) guère plus que les deux propriétés suivantes de l'ensemble **N** :
L'axiome du plus petit élément : 'toute partie non vide de **N** admet un plus petit élément', que l'on peut utiliser sous la forme du **principe de descente infinie** : 'si une suite d'entiers naturels est strictement décroissante, elle est nécessairement finie'.
Le principe de récurrence, tel qu'il est dégagé dans le tome Enseignement obligatoire, au chapitre 8. » (Ter98, p. 10)

Par contre, dans Trans98 et Dec98, l'étude des ensembles **N** et **Z** ainsi que celle des propriétés des relations d'ordre = et | sont beaucoup plus développées.

En effet, le cours du premier chapitre de Trans98 débute par le paragraphe « 1. Les ensembles **N** et **Z** », paragraphe dans lequel une partie est consacrée aux sous-ensembles **E** de **N** et de **Z**. La propriété « Tout sous-ensemble E de nombres entiers strictement positifs possède un plus petit élément » est donnée, illustrée par un exemple, et l'on indique aussi comment démontrer l'égalité de deux sous-ensembles par une double inclusion.

Dans le paragraphe suivant, la divisibilité est introduite sous le nom de « relation de divisibilité » et les premières propriétés démontrées de cette « relation » sont celles qui en font une relation d'ordre, sans que cela soit explicitement mentionné :

- La réflexivité : a|a ;
- L'antisymétrie : « si a divise b, et si b divise a, alors a = b ou a = -b » ;
- La transitivité : « si a divise b, et si b divise c, alors a divise c ». (Trans98, pp. 103-104)

Dans Dec98, la définition et les propriétés de la divisibilité dans **Z** sont également présentées sous l'intitulé « la relation 'divise' ». Mais ce manuel se singularise des deux précédents sur trois autres points : l'étude de la relation ≤, la récurrence et l'usage fréquent de notations ensemblistes.

Une première activité, « L'ensemble **N** des entiers naturels », propose de démontrer que = est une relation d'ordre compatible avec l'addition et la multiplication usuelles de **N**.
= est d'ailleurs défini en terme de « relation inférieur ou égal dans **N** » par « **a**=**b** signifie qu' **il existe un entier naturel d tel que b = a + d** » (Dec98, p. 10).
Ceci laisse penser que l'objectif de cette activité consiste à faire travailler les élèves sur des exemples de structures qui ne sont plus au programme. L'activité se poursuit d'ailleurs par l'étude des propriétés des parties **A** non vides de **N**. Il est demandé de démontrer l'unicité du plus petit élément de **A** et, dans le cas où **A** est majorée, l'unicité de son plus grand élément. Elle se termine par l'énoncé de la propriété d'Archimède, illustrée graphiquement. Cette activité est élargie par la suite à l'ensemble **Z** avec l'étude de la relation = dans **Z** et celle des parties non vides de **Z**.

Ensuite, la propriété d'induction « Soit I une partie de **N** vérifiant les deux propriétés suivantes : 0∈I et si p∈I, alors p+1∈I. Dans ces conditions, I=**N**. » (Ibid., p. 12) est l'occasion d'un « Retour sur la récurrence » dans une troisième activité. Cette propriété sert notamment à démontrer le théorème de récurrence utilisé en terminale[37].

De plus, le formalisme ensembliste est fortement utilisé au début de Dec98. Alors que les commentaires du programme soulignent clairement qu'« aucune virtuosité n'est demandée aux élèves » sur les notions de divisibilité et de diviseurs, deux pages de cours sont consacrées à l'ensemble des diviseurs et des multiples d'un entier naturel et d'un entier relatif. On y démontre notamment les propriétés suivantes :

> « Pour tous entiers naturels a, b et d, si d divise a et d divise b, alors : $D_d \subset D_{a+b}$, $D_d \subset D_{|a-b|}$ et pour tous entiers α et β, $D_d \subset D_{|\alpha a+\beta b|}$ » (Ibid., pp. 15-16)

Cet usage des notations ensemblistes masque, selon nous, la propriété en jeu : si d|a et d|b alors d|a+b. Or, toutes les propriétés sur les diviseurs d'un entier naturel sont données et démontrées en utilisant les notations D_a pour l'ensemble des entiers naturels diviseurs de l'entier naturel a et $\mathcal{D}_a$ pour l'ensemble des entiers relatifs diviseurs de l'entier relatif a.
Reste à savoir en quoi cette formalisation peut se relever utile dans la suite du cours d'arithmétique[38] et dans les exercices qui seront proposés. Ce point sera abordé dans la suite.

Ainsi, les notions de structures, d'ensembles et de relations sont encore très présentes dans les manuels contemporains, malgré les recommandations du programme. Deux hypothèses

[37] Notons que le programme précise : « On s'abstiendra de toute considération théorique sur le principe de récurrence ».
[38] Elle pourrait l'être au moment de l'introduction du PGCD et du PPCM par exemple.

peuvent en partie expliquer ce phénomène. Tout d'abord, comme nous l'avons souligné en introduction, la volonté de faire des démonstrations rigoureuses en arithmétique rend incontournable l'étude des propriétés des parties de **N** afin de ne pas laisser de zones d'ombre dans les preuves de certains théorèmes. Par ailleurs, de part leur formation, les auteurs de manuels, tout comme les enseignants, restent marqués par leurs références à l'arithmétique universitaire « savante » et à celle du programme de 1971 qui présentent toutes deux un rapport à l'arithmétique favorisant explicitement son aspect structurel.

c) Manuels de 2002

Le changement de programme de 2002 mettant davantage l'accent sur la niche raisonnement que celui de 1998, nous pensons que les auteurs de manuels se trouvent confortés dans leur choix de partir des propriétés des parties de **N** pour bâtir leur cours.

C'est le cas dans Ter02. Bien que le principe de récurrence ne soit plus évoqué, les propriétés des parties de N sont maintenant présentées avec pour objectif explicite d'être réexploiter[39] :

> « Nous admettons dans ce chapitre la propriété suivante, qui en est un des piliers : ' **Toute partie de N non vide admet un plus petit élément.** ' (Axiome). La séquence qui suit utilise cet axiome. Les résultats dégagés seront exploités dans le cours[40]. » (Ter02, p. 333)

Dans cette séquence, il est demandé de démontrer le principe de descente infinie, le principe de Fermat « toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie », l'existence et l'unicité de la partie entière et l'encadrement de a par deux multiples de b ($bq \leq a < b(q+1)$).
Ces propriétés sont réinvesties dans une séquence sur les nombres premiers :

> « Deux propriétés fondamentales de l'ensemble **N** des entiers naturels sont en toile de fond de ce chapitre ; il ne nous paraît pas inutile de les rappeler :
> **(1) Toute partie non vide de N admet un plus petit élément.**
> **(2) Toute partie majorée de N est finie (et réciproquement).**
> (*Rappel* : une partie A de **N** est dite majorée, s'il existe un nombre M (non nécessairement entier) tel que pour tout a de A, on ait $a \leq M$.)) […]
> Peut-être, la dernière question de la séquence 2 [« que peut-on en conclure sur l'ensemble *P* des nombres premiers ? »] en a laissé quelques-uns sur le bord du chemin, faute de critères « **d'infinitude** ». Réparons cet oubli.
> Une partie A de **N** (non vide) est infinie dès lors qu'elle vérifie l'une des propriétés suivantes :
> **(1) Pour tout n de N, il existe p dans A tel que p>n.**
> **(2) Pour tout q de A, il existe p dans A tel que p>q.**
> **(3) $A=\{a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots\}$ et, pour m et n quelconques distincts, on a $a_m{}^1\ a_n$.**
> La séquence 3 légitime ces critères et propose quelques applications. » (Ibid., p. 367)

Les choix faits dans Trans02 ne suivent pas ceux faits dans Ter02, en faveur d'une utilisation accrue des propriétés des parties de **N**. Trans02 ne présente plus la démonstration de l'égalité de deux sous-ensembles par une double inclusion et les propriétés des parties de **N** sont sorties du cours pour être présentées dans une rubrique intitulée « mieux comprendre » :

> « Une propriété remarquable de l'ensemble **N** :
> Les sous-ensembles de **N** possèdent la propriété évidente suivante : Tout sous-ensemble E de nombres entiers **strictement** positifs possède **un plus petit élément**. Autrement dit, il y a dans E un entier positif plus petit que tous les autres nombres de E.

---

[39] Nous verrons si cela se vérifie dans l'analyse des choix de démonstrations faits dans ce manuel.
[40] C'est nous qui soulignons, ainsi que dans la citation suivante.

> Exemple : Si E est l'ensemble des nombres qui s'écrivent 2n+5, avec n entier, $n \geq 0$, le plus petit élément de E est 5.
> Cette propriété n'est pas vraie dans **Z**. En effet, par exemple, l'ensemble de tous les entiers inférieurs à –20 n'a pas de plus petit élément. » (Trans02, p. 9)

Mais c'est dans Déclic que les différences de choix sont les plus frappantes entre le manuel de 1998 et celui de 2002. Dans Dec02, la relation $\leq$ n'est plus étudiée, les propriétés des parties de **N** ne sont plus démontrées mais vérifiées sur des exemples, l'activité sur le principe de récurrence a disparu et les notations ensemblistes ne sont plus employées. Les propriétés des diviseurs d'un entier relatif deviennent :

> « Quels que soient les entiers non nuls a, b et c, on a : si $c \mid a$ et $c \mid b$, alors pour tous entiers α et β, $c \mid (\alpha a+\beta b)$. » (Dec02, p. 346)

Les trois manuels analysés ont évolué de façon plus ou moins importante sur la question des notions d'ensembles et de relations entre la réintroduction de l'arithmétique en 1998 et de changement de programme de 2002. Cette évolution s'est faite dans le sens d'une focalisation sur les propriétés des parties de **N**, avec l'abandon de l'étude des notions de relations, de celle du principe de récurrence et de l'usage des notations ensemblistes. Elle témoigne selon nous d'un réajustement ayant pour souci de se centrer sur les points fondamentaux intervenant dans les démonstrations des théorèmes d'arithmétique.

d) Conclusion

Contrairement à ce qu'avait laissé penser notre analyse comparée des programmes d'arithmétique, nous trouvons encore aujourd'hui dans les manuels des références au contenu du programme de 1971 sur les propriétés de **N** et le raisonnement par récurrence. Nous expliquons ce phénomène par la volonté affichée plus ou moins explicitement[41] par les auteurs de manuels de fournir aux enseignants et aux élèves toutes les clés nécessaires pour faire des démonstrations rigoureuses en arithmétique. La vie de la niche raisonnement s'en trouve donc renforcer.

Il s'agit maintenant de voir si les notions d'ensembles et de relations vont véritablement servir dans les démonstrations des principaux théorèmes d'arithmétique, tant dans les manuels de 1998 que dans ceux de 2002.

Pour l'analyse des choix de démonstrations qui suit, nous nous appuyons sur les travaux de Bilgot (1998) qui répertorie, de manière exhaustive, toutes les démonstrations que l'on peut trouver pour les théorèmes suivants : la décomposition d'un entier naturel $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers, l'existence d'une infinité de nombres premiers, la division euclidienne, le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
Nous nous limitons au théorème de la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers, à celui de la division euclidienne et au théorème de Bézout. Ces trois théorèmes peuvent être prouvés par une démonstration constructive, qui, selon Bilgot, est le type de démonstration le mieux adapté aux exigences du programme de 1998, à savoir mettre en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique.

[41] Cette volonté est parfois énoncée dans les intentions générales ayant guidé les auteurs de manuels lors de la rédaction qui se trouvent en introduction aux manuels.

II.2 Division euclidienne

Quels que soient l'entier relatif a et l'entier naturel non nul b, il existe des entiers relatifs q et r uniques tels que $a=bq+r$ *et* $0 \leq r < b$

Sept démonstrations de l'existence du quotient et du reste ont été recensées par Bilgot (1998, pp. 83-84) :

1. **Démonstration par soustractions successives** ;
2. **Démonstration par récurrence** : La récurrence porte sur a. On suppose que le résultat est vrai pour a–b avec (q,r) comme solution et on montre alors que (q+1,r) est solution par a ;
3. **Démonstration par la descente de Fermat** : Le point de départ est $(q_0,r_0)=(a,b)$. On distingue alors le cas $r_n<b$ qui donne (q_n,r_n) solution du cas $r_n\geq b$ qui conduit à poser $r_{n+1}=r_n-bq_{n+1}$. La suite (r_n) ainsi construite est strictement décroissante, ce qui assure l'arrêt de l'algorithme et l'existence et l'unicité d'un couple (q,r) solution ;
4. **Démonstration par les propriétés de N** relatives à la relation d'ordre usuelle avec l'ensemble $B=\{n\in \mathbf{N}/nb\leq a\}$: q est le plus grand élément de cet ensemble ;
5. **Démonstration par la propriété d'Archimède** avec l'ensemble $E=\{n\in \mathbf{N}/a<nb\}$: q+1 est le plus petit élément de cet ensemble;
6. **Démonstration par l'utilisation de la partie entière de a/b** : q=E(a/b);
7. **Démonstration par les congruence**s : a appartient à une seule classe d'équivalence pour la relation de congruence modulo b dans Z.

Notons que les quatre dernières démonstrations permettent d'obtenir simultanément l'existence et l'unicité du couple (q,r). Elles paraissent, d'après Bilgot, «ou bien peu dans l'esprit du programme, ou bien à la frontière, ou nettement hors des nouveaux programmes » de 1998.
Selon lui, la démonstration par les soustractions successives, de par son « caractère algorithmique et historique peut la faire apprécier » et la démonstration par récurrence, de par sa forme non classique « présente un intérêt » bien qu'elle soit « moins algorithmique » que la précédente.

Ainsi, si les auteurs de manuels souhaitent se conformer à l'esprit du programme, ils devraient faire le choix de démontrer le théorème de la division euclidienne par les soustractions successives. Or nous allons voir que ce n'est pas le cas.
Par ailleurs, l'introduction de la notion de congruence dans le programme de 2002 rend possible le choix de la septième démonstration. Cependant, dans la progression[42] des manuels de 2002, les congruences sont introduites après la division euclidienne ; cette démonstration ne peut donc, en théorie, être proposée.

a) Manuel de 1971

Dans Revuz71, le théorème de la division euclidienne est vu tout d'abord dans le chapitre consacré aux entiers naturels avant d'être redonné dans celui sur les entiers relatifs.
Conformément aux orientations structurelles du programme de l'époque, la démonstration choisie dans **N** est celle utilisant la propriété d'Archimède avec l'ensemble $E=\{n\in \mathbf{N}/a<nb\}$.

[42] Voir l'annexe de ce chapitre.

La propriété d'Archimède est démontrée en lemme et la preuve de l'existence et de l'unicité de q et r est obtenue simultanément.
La démonstration de ce même théorème dans **Z** se fait par disjonction de cas. Le cas $a \geq 0$ est renvoyé au chapitre sur les entiers naturels et le cas $a<0$ est traité en posant $a= -a'$ où $a'>0$.

b) Manuels de 1998

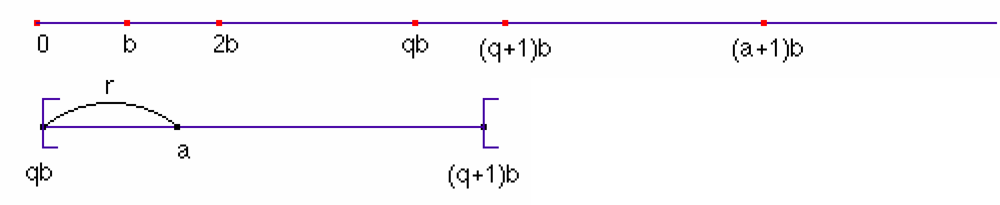
Aucun des manuels de 98 ne propose la démonstration du théorème de la division euclidienne par soustractions successives.

Dec98 et Ter98 donnent une démonstration utilisant plus ou moins explicitement la propriété d'Archimède pour prouver l'existence de q et r :

> « Soit E={n∈**N**, bn>a}. E est non vide donc il admet un plus petit élément q+1 tel que qb=a=(q+1)b. » (Ter98, pp. 32-33)

Ces deux manuels démontrent, dans un deuxième temps, l'unicité du couple (q,r) par l'absurde alors que la méthode choisie permet de prouver simultanément l'existence et l'unicité de ce couple.

Trans98 propose aussi une démonstration centrée sur la propriété d'Archimède mais le raisonnement s'appuie ici sur une représentation graphique de l'ensemble E, qui n'est d'ailleurs pas introduit explicitement dans ce manuel :



Les propriétés de **N** présentées dans ce manuel ne sont pas réinvesties dans cette démonstration[43]. En effet, l'inégalité qb=a=(q+1)b est justifiée de la façon suivante :

> « Puisque (a+1)b>a, <u>a est nécessairement</u>[44], soit l'un des multiples écrits, soit compris entre deux multiples consécutifs, c'est-à-dire que a est dans un intervalle du type [qb,(q+1)b[. » (Trans98, p. 104)

Cet argument permet aussi de montrer que le couple (q,r) est unique du fait que « a n'appartient qu'à un seul intervalle du type [qb,(q+1)b[. » (Ibid., p. 104).

Deux conclusions s'imposent quant aux choix faits par les auteurs des manuels de 1998. Tout d'abord, les démonstrations proposées ne favorisent pas la vie de la niche algorithmique.
Prouver le théorème de la division euclidienne en utilisant les soustractions successives et non pas la propriété d'Archimède aurait permis :

- De faire « fonctionner » un algorithme voisin de l'algorithme d'Euclide traditionnel mais qui est cependant plus simple à comprendre. C'est une bonne approche des

[43] Le travail préalable fait dans ce manuel sur les propriétés des parties de **N** ne sert donc pas quand cela est possible.
[44] C'est nous qui soulignons.

démarches algorithmiques, s'inscrivant dans le contenu du rapport institutionnel du programme.

- De donner à la division euclidienne de a par b le sens de la soustraction réitérée de b à a : le nombre d'étapes de l'algorithme correspondant au nombre de fois où l'on peut soustraire b à a c'est-à-dire au quotient, le nombre b que l'on soustrait de façon réitéré est le diviseur et le reste de la dernière soustraction (reste qui est positif et inférieur à b) correspond au reste de la division euclidienne de a par b.
- De faire vivre la niche «culturelle » car c'est à peu près l'algorithme utilisé dans le septième livre des Éléments d'Euclide.

Par ailleurs, choisir une démonstration par la propriété d'Archimède en séparant la preuve de l'existence de celle de l'unicité témoigne d'une volonté forte des manuels de mettre en avant l'aspect raisonnement de l'arithmétique :

> « La démonstration s'appuie sur l'axiome : « un entier est compris entre deux multiples consécutifs d'un autre ». Le programme nous impose de faire un choix : <u>faut-il partir de l'axiomatique de base de **N** et démontrer cette propriété par un raisonnement ensembliste ou au contraire se contenter du « bon sens commun » et insister sur l'aspect intéressant de la démonstration de l'unicité (raisonnement par l'absurde</u> qui s'appuie sur le fait qu'un entier positif r plus petit qu'un autre b et divisible par celui-ci est nul) ? » (Bonneval & al 1998, p. 245)

Séparer la démonstration de l'unicité de celle de l'existence permet non seulement de présenter aux élèves un type de raisonnement peu courant pour eux mais également de les former aux mathématiques de l'enseignement supérieur car, comme le souligne la brochure de l'IREM de Poitiers, « ces questions d'existence et d'unicité (qu'on traduit par exemple en surjectivité et injectivité d'une application) sont fondamentales pour pouvoir passer des mathématiques algorithmiques (techniques de résolution d'équations) à des mathématiques spéculatives qui sont celles du supérieur » (Ibid., p. 23)

c) Manuels de 2002

Le changement de programme de 2002 ne portant pas sur la division euclidienne, les choix de démonstration des auteurs de manuels ont toutes les chances d'être analogues à ceux faits en 1998.

Trans02 propose en effet la même démonstration que Trans98.

C'est le cas aussi de Dec02. Cependant, dans ce manuel, la division euclidienne est maintenant rattachée au passé de l'élève :

> « La division euclidienne dans **N** est bien connue par les élèves de fin d'Ecole primaire ou de début de Collège :
>
> $$\begin{array}{r|l} 154 & 9 \\ 64 & 17 \\ 1 & \end{array}$$
>
> On a donc $154=9\times17+1$ »
>
> (Dec02, p. 349)

Seul Ter02 choisit de changer de preuve et propose une démonstration par l'utilisation de la partie entière de a/b. L'encadrement $qb=a=(q+1)b$, au cœur de la démonstration, n'est donc plus obtenu à partir des propriétés de l'ensemble $E=\{n\in\mathbf{N},\ bn>a\}$ mais à partir de l'inégalité définissant la partie entière de a/b : $q=a/b=(q+1)$ où $q=E(a/b)$.

L'unicité du couple est toujours montrée dans un deuxième temps.
Ce choix peut s'expliquer par la volonté des auteurs de se conformer aux exigences du programme de 2002 qui insiste sur la place des calculatrices et du tableur en arithmétique. A la suite de la démonstration du théorème de la division euclidienne, une rubrique est rajoutée. Elle s'intitule «calcul pratique du quotient et du reste » et donne les touches pour trouver quotient et reste avec une calculatrice ou un tableur tout en précisant :

> « La démonstration précédente nous livre un moyen de calcul du quotient et du reste, à l'aide des relations : q=E(a/b) et r=a–bq. » (Ter02, p. 335)

d) Conclusion

Les choix de démonstrations des manuels privilégient la niche raisonnement par rapport à la niche algorithmique. Cependant, opter pour des démonstrations par la propriété d'Archimède[45], pose la question du niveau de rigueur que l'on souhaite atteindre dans ces démonstrations. En effet, bien que Trans98 d'une part et Dec98 et Ter98 d'autre part, aient choisi le même type de démonstration, les propriétés de **N** n'y jouent pas le même rôle :

> « La démonstration de l'existence de q (ou q+1) et de r nécessite l'utilisation de la propriété que toute partie non vide de N admet un plus petit élément. Ce résultat est tantôt explicite tantôt implicite dans les manuels. C'est-à-dire est soit considéré comme une évidence, soit comme un axiome ou un théorème. Cela pose la question de la nature même des mathématiques : pourquoi démontre-t-on en mathématiques ? Quelles propriétés doit-on démontrer ? Quelle est la fonction des démonstrations […] ? » (Bonneval & al 1998, p. 21)

Il nous semble que les choix faits par les auteurs de manuels, à l'exception de ceux de Ter02, ont été contraints par la représentation qu'ils ont des mathématiques –représentation également dominante chez les enseignants– et par le fait qu'ils s'adressent à des élèves se destinant à des études supérieures scientifiques. Il est compréhensible alors qu'aucun des manuels ne donne la démonstration de la division euclidienne par soustractions successives.
Seul Ter02 évolue en se libérant de cette contrainte. En proposant une démonstration par l'utilisation de la partie entière, il s'inscrit davantage dans les attentes du programme concernant l'usage des calculatrices et du tableur.

II.3 Définition du PGCD

Il existe plusieurs définitions du PGCD de deux entiers naturels –du plus grand entier engendrant l'idéal (a)+(b) au dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide, en passant par une caractérisation à partir de ces diviseurs– et, principalement, deux méthodes de recherche : l'algorithme d'Euclide et la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers.

a) Manuel de 1971

Conformément à l'esprit du programme de la réforme des mathématiques modernes, le PGCD de deux entiers relatifs est défini par les idéaux dans Revuz71 :

> « **Définition** : Étant donné deux entiers relatifs non nuls a et b, le plus grand entier strictement positif qui engendre l'idéal (a) + (b) est appelé **le plus grand diviseur commun à a et b**. » (Revuz71, p. 78)

[45] A l'exception de Ter02.

Cette définition est maintenant hors programme.

b) Manuels de 1998

Ter98 et Trans98 donnent une définition ensembliste du PGCD, utilisant les propriétés des parties de **N**. Dans Trans98, cette définition est, de plus, l'occasion d'une introduction des notations ensemblistes :

> « Pour tout naturel a, notons D(a) l'ensemble des diviseurs de a. […] Pour tous naturels a et b notons D(a,b) l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Ainsi $D(a,b)=D(a)\cap D(a)$. Il est clair que $D(a,b)=D(b,a)$. […] D(a,b) est un ensemble non vide, il contient toujours 1, et les nombres qu'il contient sont tous inférieurs ou égaux à a ou à b. Donc D(a,b) possède un plus grand élément qui est donc le Plus Grand Commun Diviseur à a et b. » (Trans98, p. 106)

De façon surprenante, Dec98, qui avait introduit ces notations ensemblistes en début de cours d'arithmétique pour établir les propriétés de la relation de divisibilité, ne reprend pas ces notations pour définir le PGCD :

> « Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Le **plus grand commun diviseur** de a et b est l'entier naturel d, noté PGCD(a ; b), qui satisfait aux deux conditions :
> - d divise a et b ;
> - pour tout diviseur d de a et b, on a $d \leq d$. » (Dec98, p. 49)

Cette définition est suivie de la démonstration de l'existence du PGCD (en s'appuyant sur l'algorithme d'Euclide qui est défini avant le PGCD) ainsi que celle de son unicité (par l'absurde).

Formellement, définir le PGCD de a et de b comme le plus grand élément de D(a,b) ou comme le fait Dec98 est équivalent. En effet, $\delta \mid a$ et $\delta \mid b$, et pour tout diviseur d de a et b, $d \leq \delta$ traduit ce qui est « compris » dans le fait que δ soit le plus grand élément de D(a,b). Cependant, le formalisme utilisé par Ter98 et Trans98 masque cette traduction.
Par ailleurs, Trans98 conserve cette notation pour présenter l'algorithme d'Euclide, juste après la définition du PGCD :

> « L'algorithme d'Euclide (lorsque b ne divise pas a) :
> Ainsi, la recherche de D(a,b) se ramène à celle de D(b,r) [..] et donc $D(a,b)=D(b,r)=D(r,r_1)$. Et ainsi de suite tant que l'on obtiendra pas un reste nul. Or, il est certain que l'on finira par trouver un reste nul, car les restes successifs r, r_1, r_2, …, sont des nombres positifs qui vont en décroissant strictement. On obtiendra donc ainsi une suite d'égalités : $D(a,b)=D(b,r)=D(r,r_1)=D(r_1,r_2)= \ldots =D(r_n,0)=D(r_n)$. Donc $D(a,b)=D(r_n)$ et puisque r_n est le plus grand élément de $D(r_n)$, r_n est le plus grand élément de D(a,b), donc le PGCD de a et de b. » (Trans98, p. 107)

Ce choix de faire raisonner sur un ensemble d'éléments et non sur un élément quelconque de cet ensemble, n'est pas dans l'esprit des programmes car il ne permet pas aux élèves de manipuler explicitement la notion de divisibilité ni celle de diviseur qui caractérise le PGCD.
La même démarche est adoptée par Ter98 mais à la suite d'égalités ensemblistes se substitue une suite d'égalité sur les PGCD : « $PGCD(a,b)=PGCD(b,r_0)=PGCD(r_0,r_1)= \ldots =PGCD(r_{i-2},r_{i-1})$ » (Ter98, p. 35).

Par ailleurs, la progression choisie par Dec98 –étudier l'algorithme d'Euclide avant de définir le PGCD– met davantage en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique et permet de montrer l'existence de ce dernier de manière constructive.

c) Manuels de 2002

Les choix faits par les auteurs de manuels de 2002 sont identiques à ceux faits par ceux de 1998.

d) Conclusion

Mis à part les cas de Dec98 et Dec02, les choix faits dans les autres manuels analysés, pour définir le PGCD de deux entiers naturels et pour présenter l'algorithme d'Euclide ne permettent pas de faire vivre la niche algorithmique.
Ils sont plutôt en faveur d'un travail sur les ensembles de diviseurs sous une forme parfois à la limite du programme.

II.4 Nombres premiers entre eux – Théorème de Bézout

Pour tous entiers relatifs non nuls a et b, il existe des entiers relatifs u et v tels que : au+bv=PCGD(a,b)

Trois types de preuves existent pour le théorème de Bézout (Bilgot 1998, p. 85) :

1. **Démonstration par les idéaux de Z**, qui est hors programme : PGCD(a,b)=1 équivaut à (a)+(b)=(1)=**Z**, où (a) est l'idéal engendré par a ;
2. **Démonstration utilisant la division euclidienne et**, de façon sous-jacente, la notion d'idéal avec **l'ensemble G={am+bn/mÎ Z et nÎ Z}** : on montre que **G** admet un plus petit élément D puis on prouve par l'absurde que D divise a et D divise b ;
3. **Démonstration par l'algorithme d'Euclide étendu** (par méthode de descente ou de remontée) : les restes successifs de l'algorithme d'Euclide sont écrits sous la forme au+bv.

Le premier type de preuve doit être celui choisi par Revuz71.
Les manuels actuels devraient quant à eux choisir le troisième type de preuve pour se conformer à l'esprit du programme. Cette démonstration est en effet une démonstration constructive qui permet de mettre en œuvre une démarche algorithmique pour prouver l'existence du couple (u,v) solution tout en le construisant.

a) Manuel de 1971

Comme attendu, Revuz71 choisit de démontrer le théorème de Bézout avec l'utilisation des idéaux. Ce choix est cohérent avec la définition du PGCD donnée par ce manuel. Ainsi, ce manuel montre que « Δ(a,b)=1 est équivalente à (a)+(b)=(1)=**Z** » (Revuz71, p. 78).

b) Manuels de 1998

L'analyse des programmes a montré l'accent mis sur la niche algorithmique et l'utilisation de l'algorithme d'Euclide dans les programmes de 1998 et 2002. Cependant, la démonstration se servant de l'algorithme d'Euclide étendu n'est choisie que par un seul des trois manuels de 1998 : Dec98.

Dans ce manuel, la méthode présentée est celle de descente de l'algorithme d'Euclide. Ainsi, à chaque étape de l'algorithme, l'égalité de division euclidienne est transformée de façon à faire apparaître le reste comme combinaison linéaire de a et b :

> « En poursuivant ce processus, on montre que, pour tous les restes r_p obtenus jusqu'au reste non nul r_n : $r_p=au_p+bv_p$, où u_p et v_p sont des entiers relatifs qui s'expriment en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_p$. » (Dec98, p. 51)

Par ailleurs, Dec98 souligne l'intérêt d'une telle démonstration :

> « Ce procédé permet d'obtenir une valeur particulière de u et une valeur particulière de v ; ce qui prouve l'existence d'un couple (u ; v), mais on n'a pas l'unicité de ce couple. » (Dec98, p.51)

Cette preuve constructive est davantage conforme à l'esprit du programme que ne l'est celle proposée par de Trans98 et Ter98. En effet, ces deux manuels ont choisi de prouver ce théorème à l'aide du deuxième type de preuve mentionné ci-dessus. Comme ce type de démonstration ne donne pas de méthode de recherche de (u,v), la détermination pratique de ce couple est renvoyée en T.P. Dans Ter98, le T.P. « exemples de résolution d'équations ax+by=D (D=PGCD(a,b)) dans $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ » (Ibid., p. 45) présente une recherche de (u,v) par descente puis remontée de l'algorithme d'Euclide. Trans98 choisit quant à lui la même méthode que celle proposée par Dec98.

Le choix de Dec98 et Trans98 de donner une méthode de recherche de (u,v) par descente de l'algorithme d'Euclide peut être expliqué, comme nous le verrons dans la suite, par des contraintes liées à la programmation de cet algorithme.

c) Manuels de 2002

Le seul manuel à changer de démonstration entre 1998 et 2002 est Déclic. Dans Dec02, ce n'est plus la méthode de descente de l'algorithme d'Euclide qui est choisie pour démontrer le théorème de Bézout mais la preuve utilisant la division euclidienne et l'ensemble $G=\{am+bn/m\in \mathbf{Z} \text{ et } n\in \mathbf{Z}\}$. La position des auteurs de ce manuel sur la programmation de la résolution d'une équation diophantienne peut expliquer ce changement de démonstration. Nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe consacré à la place des outils informatiques dans les manuels.

d) Conclusion

Les choix faits par les auteurs de manuels à propos de la démonstration du théorème de Bézout sont représentatifs de la difficulté à faire vivre la niche algorithmique au niveau du savoir apprêté. En effet, ce théorème est à l'origine d'une des tâches emblématiques de l'arithmétique de spécialité mathématique : la résolution d'une équation diophantienne. Cette tâche se résout par une démarche algorithmique (l'algorithme d'Euclide) et peut donner lieu à une programmation sur outils informatiques. Le choix des auteurs de manuels d'en présenter une démonstration ensembliste complexe[46] est un choix qui est explicitement en faveur de la niche raisonnement.

[46] On introduit d le plus petit élément de l'ensemble G. Il s'agit alors de montrer que d est le PGCD de a et b en posant la division euclidienne de a par d et, en raisonnant par l'absurde, de prouver que le reste de cette division euclidienne est nul. D'où d divise a et b (par une démarche analogue) et est divisible par tout autre diviseur commun à a et b. Donc d=PGCD(a,b).

II.5 Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel $n \geq 2$ se décompose de manière unique en un produit de facteurs premiers : $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$ où $p_1, p_2, \dots, p_m$ sont des nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.

Au programme d'arithmétique de 1998 et de 2002, seule la démonstration de l'existence de la décomposition en facteurs premiers est exigible ; l'unicité est admise. Bilgot (1998, pp. 79-80) dénombre trois démonstrations de l'existence de la décomposition accessibles en terminale :

1. **Démonstration par récurrence** : on suppose que le résultat est vrai pour tout entier $k \geq 2$ et $k<n$ puis on regarde si n est premier ou non ;
2. **Démonstration par la méthode de « descente »** : Si n est premier, la démonstration est terminée. Sinon, n admet un diviseur premier p et n=qp. On réitère le raisonnement précédent sur q. Le principe de descente infinie assure l'arrêt de l'algorithme ;
3. **Démonstration par l'absurde** : on suppose le théorème faux et on introduit le plus petit élément de l'ensemble **E** des entiers $n \geq 2$ n'admettant pas de décomposition en produit de facteurs premiers pour aboutir à une contradiction.

La seconde démonstration est constructive car, tout en prouvant l'existence de la décomposition, elle donne l'algorithme permettant de la trouver. Elle s'inscrit donc clairement dans les exigences du programme. L'intérêt de cette démonstration par rapport à la démarche algorithmique réside non seulement dans l'explicitation de la réitération mais également dans le critère qui assure la fin de l'algorithme de « descente » : le principe de descente infinie. La première démonstration peut, elle, être retenue par les manuels de 2002 car, en mettant en œuvre une démarche par récurrence en dehors du domaine des suites, elle permet d'utiliser l'arithmétique pour travailler le raisonnement.

a) Manuel de 1971

La démonstration choisie par Revuz71 est la démonstration par la méthode de « descente ». L'arrêt de l'algorithme est considéré comme évident ; aucun n'argument portant sur les suites strictement décroissantes de **N** n'est évoqué :

> « On obtient ainsi des quotients successifs tels que $1< \dots <|q_1|<|q_2|<|N|$. Il y a donc un nombre fini de valeurs possibles pour ces quotients, et par suite, il est certain qu'il existe un rang k tel que q_k soit premier, égal à p_k. Le nombre N donné peut alors s'écrire : $N=p_1p_2 \dots p_k$ […] » (Revuz71, p. 94)

b) Manuels de 1998

Trans98 et Ter98 choisissent également la méthode de « descente ». Ter98 insiste sur le fait que l'algorithme mis en œuvre va se terminer au bout d'un nombre fini d'étapes du fait du principe de « descente infinie » énoncée en début de manuel. L'arrêt du processus est également justifié dans Trans98, de façon plus intuitive :

> « A partir de q_2 on réitère le processus, et comme les quotients successifs non premiers vont en diminuant strictement, le processus se terminera et le dernier quotient trouvé sera premier sinon on pourrait poursuivre. Ainsi n non premier est produit de facteurs premiers. » (Trans98, p. 139)

Proposer cette démonstration donne une occasion supplémentaire de mettre en œuvre une démarche algorithmique. Cet algorithme de décomposition devant être utilisé par la suite dans les travaux pratiques ou les exercices, la justification théorique (générale et non pas sur un cas particulier) de sa validité est un moyen de comprendre l'importance d'une condition d'arrêt d'un processus algorithmique, cette condition n'étant pas visible lorsque l'on travaille sur un entier particulier.

Dans Dec98, l'existence de la décomposition est justifiée par récurrence. Ce choix de démonstration est intéressant car il permet l'utilisation du raisonnement par récurrence, qui est au programme de la classe de terminale, dans un contexte autre que celui des suites. Par ailleurs, choisir ce type de démonstration pour prouver l'existence de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers permet de donner un exemple de raisonnement par récurrence d'une forme un peu particulière : lorsque l'on veut montrer que la proposition P est vraie au rang n, il faut supposer qu'elle est vraie pour tous les rangs k tels que $n_0 \leq k \leq n-1$ et pas seulement pour le rang $n-1$. Le choix de démonstration fait ici par les auteurs de Dec98 est cohérent avec leur choix de proposer en introduction aux chapitres d'arithmétique une activité de « retour sur la récurrence » (Dec98, p. 12).

c) Manuels de 2002

Les changements de programme de 2002 ne portant pas sur les nombres premiers (l'unicité est toujours admise), les démonstrations choisies par les manuels de 2002 doivent être identiques à celles choisies dans ceux de 1998. C'est le cas pour Dec02 et Trans02.

Seul Ter02 change de preuve et propose une démonstration par analyse-synthèse de ce théorème. La démonstration se termine par la remarque suivante :

> « Il existe d'autres démonstrations […]. Celle-ci est constructive, au sens où elle indique un procédé de décomposition en facteurs premiers (voir l'exemple ci-après). » (Ter02, p. 371)

Or dans la démonstration par analyse-synthèse, le procédé de recherche de la décomposition en produit de facteurs premiers n'est pas explicité comme il peut l'être dans la démonstration par la méthode de « descente ». Elle donne, certes, la forme de cette décomposition mais elle n'utilise pas le fait que cette décomposition se trouve en divisant n par essais de divisions successives par des nombres premiers dans l'ordre croissant.

d) Conclusion

Pour ce théorème, seul Transmath propose une démonstration constructive en 1998 et en 2002. Les choix faits par Dec98, Dec02 et Ter02 font quant à eux vivre la niche raisonnement car ils mettent en œuvre des raisonnements hors de leur champ d'application habituel (les suites pour la récurrence et la géométrie pour l'analyse-synthèse).

II.6 Conclusion de l'analyse écologique de la partie cours des manuels

L'analyse menée ci-dessus a montré que les directives du programme incitant à mettre en valeur l'aspect algorithmique de l'arithmétique sont peu prises en compte par les auteurs de manuels actuels lorsqu'il s'agit de choisir les démonstrations des principaux théorèmes

d'arithmétique. En effet, les démonstrations constructives sont rarement choisies. Leur sont préférées des démonstrations dans lesquelles il s'agit, soit de montrer qu'un ensemble de **N** admet un plus petit ou un plus grand élément, soit de mettre en œuvre un type de raisonnement peu courant (raisonnement par l'absurde ou raisonnement par récurrence en dehors du domaine des suites).
Ces choix semblent motivés par la volonté de partir d'une axiomatique de **N** (propriété des parties non vides de **N**, propriété d'Archimède, principe de descente infinie, principe de récurrence) qui permet de faire des démonstrations « rigoureuses ». Cependant, même si la plupart des manuels énoncent ces propriétés en début de cours d'arithmétique, celles-ci sont peu réutilisées dans le cadre des démonstrations. L'exigence de rigueur présente dans ces démonstrations est donc loin de celle attendue.
Par ailleurs, cette axiomatique n'est pas mise à profit pour faire des liens entre niche algorithmique et niche raisonnement[47].

Ainsi, les auteurs des manuels de 1998 investissent des marges de manœuvre par rapport au programme qui rendent difficile la vie de la niche algorithmique dans leur cours et favorisent la niche raisonnement.

Il semble que les représentations des mathématiques que peuvent avoir les auteurs de manuels ont davantage guidé leurs choix que le contenu du programme officiel. Cela confirme l'analyse faite dans le chapitre B1 (analyse écologique des programmes) qui pointait, parmi l'ensemble de contraintes susceptibles de contrarier la vie de la niche algorithmique, la représentation que les enseignants se font des mathématiques.

Nous allons maintenant voir si cette contrainte pèse également sur la vie de la niche algorithmique au niveau des exercices et des travaux pratiques en nous intéressant plus spécialement à la place et au rôle des outils informatiques dans les manuels actuels.

III. PLACE DES OUTILS INFORMATIQUES DANS LES MANUELS

Nous avons montré en introduction à ce chapitre qu'un des moyens de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique est d'intégrer l'outil informatique dans les manuels, d'une part, par le biais de la programmation des principaux algorithmes d'arithmétique, d'autre part, par l'ajout d'exercices à résoudre à l'aide de ces outils informatiques à un corpus d'exercices plus classiques.

Nous étudions donc maintenant la place des outils informatiques dans les manuels de 1998 et de 2002 en suivant ces deux axes afin d'analyser les conditions de vie de la niche algorithmique au niveau du savoir apprêté par les manuels.

III.1 Quel(s) rôle(s) pour la programmation et les outils informatiques en terminale S spécialité mathématique ?

[47] Rappelons que pour montrer l'arrêt des algorithmes utilisés dans les démonstrations constructives, il est souvent nécessaire de s'appuyer sur le principe de descente infinie.

En examinant le savoir à enseigner, on constate que le programme donne certaines indications pour faire vivre la niche algorithmique dans les classes : utiliser les calculatrices programmables et les ordinateurs. Il faut noter que cette volonté s'inscrit dans le cadre plus général de la réforme de l'enseignement qui a débuté dans les années 90. Comme le souligne Nguyen et Bessot (2003), à cette époque, « une réforme se met en place influencée par le progrès de la technologie informatique que le nouveau programme 2000 va prolonger ».

Dans la présentation générale du programme de 1998, plusieurs paragraphes sont consacrés à l'utilisation des outils informatiques.
Dans le paragraphe 4 – « Emploi des calculatrices programmables ou ordinateurs de poche » de la partie « Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme » nous pouvons lire :

> « Les élèves doivent savoir utiliser leur matériel personnel dans les situations liées au programme de la classe. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui [...] sont seules exigibles : [...] savoir recourir à une instruction séquentielle ou conditionnelle et, en classe de terminale, à une instruction itérative, comportant éventuellement un test d'arrêt [...] »

Le paragraphe 5 – « Impact de l'informatique » précise également :

> « La mise en valeur des aspects algorithmiques et l'emploi des calculatrices programmables ont été évoqués ci-dessus ; il convient aussi d'utiliser les matériels informatiques existant dans les établissements [...] et d'habituer les élèves, sur des exemples simples, à mettre en œuvre une démarche algorithmique avec méthode [...] »

Le programme souhaitant que les élèves soient initiés aux démarches algorithmiques à l'aide, notamment des calculatrices, nous poursuivons l'analyse écologique de trois manuels de 1998 et de 2002, guidée maintenant par les questions suivantes :

- Le programme de 1998 ne donnant pas de consignes précises sur la manière d'intégrer l'outil informatique dans l'enseignement de l'arithmétique, quelles vont être les marges de manœuvre des manuels ?
- Quels sont les objectifs poursuivis par les manuels lorsque ceux-ci intègrent l'utilisation d'outils informatiques dans leurs contenus ?
- L'arithmétique est-elle pour eux un moyen d'apprendre à programmer et, par là, d'effectuer un travail sur ce qu'est une démarche algorithmique –basée sur les trois étapes[48] que nous avons dégagées précédemment ?
- L'utilisation des outils informatiques permet-elle pour eux un travail sur « des objets de savoir » arithmétiques ?
- Observe-t-on des différences entre les manuels de 1998 et ceux de 2002 ?

Nous allons dans un premier temps analyser dans quel dispositif didactique apparaît la programmation des principaux algorithmes du cours d'arithmétique dans les manuels. Nous examinerons ensuite la place occupée par les outils informatiques dans la partie « exercices » des manuels.

[48] Pour rappel, ces trois étapes sont : l'initialisation, l'itération et le critère d'arrêt.

III.2 Quelle intégration de l'outil informatique dans le cours et les T.P. proposés par les manuels de 1998 et 2002 ?

Dans cette partie, nous nous intéressons à la place occupée par les différents outils informatiques dans les activités préparatoires, la partie cours et les travaux pratiques des manuels. Dans les tableaux présentés ci-après, nous avons recensé, d'une part, tous les contenus d'arithmétique donnant lieu à un traitement informatique dans les manuels et, d'autre part, la manière dont est réalisé ce traitement informatique. Nous avons codé de la façon suivante les différents moyens utilisés par les trois manuels pour intégrer l'outil informatique dans leur cours d'arithmétique :

Calculatrice (spécifiée avec une famille de calculatrices ou non) : signifie que le programme informatique est donné dans un langage calculatrice sans que le type de calculatrice soit mentionné de façon détaillée. Il peut être indiqué par exemple que le programme est écrit pour des Casio (cf. Trans02 pour le calcul d'un PGCD, on ne sait pas si le programme donné convient pour toutes les Casio ou non) ou des TI mais cela n'est pas toujours le cas (cf. Dec02, on ne sait pas pour quel type de calculatrice le programme est valable) ;

TI 80-83 (ou notation équivalente) : signifie que le programme informatique est donné dans le langage de programmation de cette calculatrice. Les élèves ayant des calculatrices différentes doivent adapter le programme à la spécificité de leur machine ;

Tableur : signifie que l'on montre comment utiliser le tableur en général sans que le type de tableur utilisé soit indiqué ;

Excel : signifie que l'exemple du manuel est fait en utilisant Excel ;

Touche calculatrice (spécifiée à un type de calculatrice ou non ou à un logiciel) : signifie que le manuel explique quelle touche utiliser sur telle calculatrice ou tel type de calculatrice pour trouver, par exemple, le PGCD de deux entiers ;

Cas général : signifie que le manuel fait (ou demande de faire) le lien entre l'algorithme mathématique et l'algorithme à programmer sans utiliser de langage de programmation spécifique ;

Programme MAPLE : signifie que le programme est donné par le manuel dans le langage du logiciel de calcul formel MAPLE ;

Instruction MAPLE : signifie que le manuel indique les instructions déjà programmées dans le logiciel de calcul formel MAPLE permettant de répondre aux questions que l'on se pose ;

Turbo Pascal : signifie que le programme est donné dans le langage de programmation informatique Turbo Pascal ;

	Dec98	Ter98	Trans98
Ensemble des diviseurs de a		Instruction MAPLE	
Soustractions successives	Touche Ans de la calculatrice	Programme MAPLE	
Déterminer q et r d'une division e uclidienne	Touche Int calculatrice	Touches Int, Floor et Mod calculatrice	
Calculer un PGCD	TI 80-83 Casio 6910	Programme MAPLE	Cas général Casio 7000G Turbo Pascal
Résoudre l'équation au+bv=d	TI 80-83 Casio 6910 et plus	Programme MAPLE	Cas général Casio 7000G Turbo Pascal, Excel
Déterminer si a est premier	TI 80-82-83 Casio 6910-8930-9930	Instruction MAPLE	
Décomposer a en produit de facteurs premiers	TI 92, TI 83 Indications pour Casio 6910-8930	Programme MAPLE Instruction MAPLE	
Crible d'Eratosthène		Programme MAPLE	
Donner le $n^{ième}$ nombre premier		Instruction MAPLE	
Changer de base de numération		Programme MAPLE	

Fig. 8 Algorithmes programmés et type de programmation choisi dans les trois manuels de 1998 analysés.

	Dec02	Ter02	Trans02
Ensemble des diviseurs de a	Calculatrice	Tableur	Cas général Calculatrices Casio et TI
Soustractions successives			
Déterminer q et r d'une division euclidienne	Touches TI et Casio	Touches TI 89, Casio Graph 25 et Tableur	
Calculer un PGCD	Touches List et Ans TI 83 Touche gcd(TI 83 et 89) Tableur TI 83 et Casio 9930	Touches TI 89 et Casio Graph 100	Cas général Calculatrices Casio et TI Tableurs Excel ou Star office
Résoudre l'équation au+bv=d		Cas général Excel	Cas général Calculatrices Casio et TI Tableurs Excel ou Star office
Déterminer si a est premier	Calculatrice		
Décomposer a en produit de facteurs premiers	Touche Factor calculatrice Calculatrice		
Crible d'Eratosthène	Calculatrice		Cas général
Donner le $n^{ième}$ nombre premier			
Changer de base de numération			

Fig. 9 Algorithmes programmés et type de programmation choisi dans les trois manuels de 2002 analysés.

Trois points se dégagent, en première analyse, de la comparaison de ces deux tableaux.
Tout d'abord, la position de Ter98 montre qu'il est possible d'intégrer l'utilisation d'outil informatique pour la plus grande partie des notions d'arithmétique au programme. Ainsi, les différences entre les trois manuels sur les programmes proposés relèvent de choix véritables des auteurs de manuels. Plusieurs positions peuvent guider ces choix dont : proposer aux

élèves les programmes des algorithmes qu'ils utilisent le plus fréquemment (calcul d'un PGCD, résolution d'une équation diophantienne et décomposition en produit de facteurs premiers), proposer les programmes les plus « pertinents » pour travailler la démarche algorithmique ou encore proposer tous les programmes possibles.

Par ailleurs, si la majorité des contenus d'arithmétique peuvent donner lieu à un travail de programmation, les outils informatiques choisis pour ce travail peuvent être très différents. Il peut s'agir de la calculatrice ou d'ordinateur avec l'utilisation soit d'un logiciel de calcul formel, soit d'un tableur. Ces trois outils présentent des caractéristiques différentes du point de vue de la programmation.

Enfin, en plus du choix du contenu et de l'outil informatique, il existe dans les manuels trois façons d'intégrer ces outils informatiques au cours d'arithmétique. Les programmes peuvent être :

- donnés déjà écrits dans un langage de programmation, auquel cas la part de travail laissée à l'élève dans l'étude de la démarche algorithme est inexistante ;
- remplacés par l'utilisation de touches ou de fonctions pré-programmées sur les calculatrices ou les logiciels, auquel cas, il n'y pas non plus de travail sur la démarche algorithmique ;
- donnés dans le cas général, ce qui permet un travail sur le passage de l'algorithme mathématique à l'algorithme de programmation et, par conséquent, un travail sur la démarche algorithmique.

Ces trois choix ne sont donc pas équivalents sur les possibilités qu'ils offrent de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique. Ce n'est pas parce qu'un manuel intègre l'outil informatique dans son cours que la niche algorithmique vit et que les activités proposées permettent de travailler sur la spécificité des démarches algorithmiques.

Une analyse plus détaillée du premier tableau nous montre que les manuels de 1998 intègrent chacun l'outil informatique à leurs cours de manières très différentes. Ils ne proposent pas tous les mêmes programmes : alors que Ter98 donne un traitement informatique de la quasi-totalité des contenus pouvant être programmés, Dec98 n'en propose que la moitié et Trans98 deux uniquement. Seuls deux programmes sont traités dans les trois manuels : le calcul d'un PGCD et la résolution d'une équation diophantienne. Par ailleurs, chaque manuel a fait des choix différents quant au type d'outil informatique utilisé :

- Dec98 choisit de travailler à l'aide des calculatrices Casio et Texas Instruments. Cependant, les programmes ne sont pas toujours donnés pour les mêmes calculatrices. En effet, le programme de calcul d'un PGCD est donné pour les T.I. 80 et 83 tandis que celui de la décomposition en produit de facteurs premiers est donné pour les T.I. 92 et 83. On ne sait pas si les élèves ayant une T.I. 80 peuvent reprendre ces programmes tels quels ou s'il faut qu'ils l'adaptent à leur calculatrice, ni comment cette éventuelle adaptation doit se faire.
- Dans Ter98, le choix est de faire travailler avec le logiciel de calcul formel MAPLE[49]. Ce choix pose problème. En effet, pour pouvoir utiliser MAPLE, il faut disposer d'un

[49] Ce choix de MAPLE s'inscrit dans une logique post-bac. En effet, l'utilisation de ce logiciel est au programme des classes préparatoires scientifiques ; classes auxquelles se destinent bon nombre d'élèves de terminale S spécialité mathématique.

ordinateur, ce qui n'est pas toujours le cas dans les établissements scolaires. On peut donc se questionner sur l'utilisation de ce logiciel dans les classes et la pertinence de ce choix par rapport aux contraintes institutionnelles qui pèsent sur les enseignants.

- Trans98 propose tout d'abord un travail général sur la conversion de l'algorithme mathématique à programmer à l'algorithme de programmation avant de donner la traduction de cet algorithme de programmation en deux langages de programmation différents, celui des Casio 7000G et le Turbo Pascal. Enfin, Trans98 est le seul manuel à introduire l'utilisation du tableur en arithmétique.

En 2002, contrairement à 1998, les deux programmes présents dans les trois manuels sont : le calcul d'un PGCD et la détermination de l'ensemble des diviseurs d'un entier et non plus la résolution d'une équation diophantienne. Par ailleurs, l'incitation du programme officiel à utiliser le tableur a été prise en compte par les trois manuels en 2002.
En comparant les deux tableaux on constate qu'entre 1998 et 2002 chacun des trois manuels a modifié ses choix de programmes présentés ainsi que les outils informatiques utilisés. Ces changements sont plus ou moins importants selon les manuels :

- Trans02 propose deux programmes de plus[50] en gardant le même principe de présentation : travail sur l'algorithme mathématique pour pouvoir le programmer. Il généralise cependant l'usage du tableur conformément aux instructions du programme de 2002.
- Dec02 ne propose plus le programme de résolution d'une équation diophantienne, ni celui des soustractions successives. Par contre, il intègre ceux du crible d'Eratosthène et de la détermination de l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel. Les choix dans l'utilisation des outils informatiques sont également différents de ceux faits dans Dec98. Les touches «pré-programmées » des calculatrices sont privilégiées pour les calculs de PGCD ainsi que pour la recherche de décomposition en produit de facteurs premiers, l'utilisation du tableur apparaît pour le calcul d'un PGCD et les programmes ne sont plus donnés pour des types de calculatrice précis mais dans des langages de programmation de calculatrices sans que ces dernières soient mentionnées. C'est donc aux élèves de voir si ces programmes sont implémentables sur leur calculatrice.
- Les choix les plus différents sont ceux faits par Ter98 et Ter02. Alors que Ter98 proposait dix programmes, Ter02 n'en présente plus que quatre ; tous les programmes autour de la notion de nombres premiers ont disparu. Par ailleurs, dans Ter02, les moyens informatiques utilisés ne sont plus MAPLE mais les calculatrices Casio et Texas Instruments et les tableurs. L'abandon de MAPLE peut s'expliquer par la difficulté d'utilisation de ce logiciel que nous avons soulignée dans l'analyse du tableau précédent.

Que cela soit en 1998 ou en 2002, il n'existe donc pas de consensus entre les manuels sur la place des outils informatiques dans le cours d'arithmétique. Chacun d'eux fait des choix différents, tant au niveau des programmes présentés qu'à celui des outils informatiques utilisés. Cette variabilité dans les choix des manuels donne aux enseignants un espace de liberté pour préparer leurs cours. En effet, en consultant différents manuels, ils peuvent trouver différents moyens d'intégrer la programmation et l'outil informatique dans leur cours et choisir celui qui leur convient le mieux.

[50] Des programmes autour de la notion de nombres premiers ; notion qui ne donnait pas lieu à un traitement informatique en 1998.

Cependant, si cette variabilité importante offre un espace de liberté aux enseignants, le manque de stabilité de la place de l'informatique entre les manuels de 1998 et ceux de 2002 prouve la difficulté à faire vivre la niche algorithmique par l'utilisation d'outils informatiques. On remarque cependant que Transmath n'a que peu bouleversé sa manière d'intégrer l'outil informatique dans sa partie cours. Cette manière a de plus été choisie par Ter02. Faire travailler le passage de l'algorithme mathématique à l'algorithme de programmation semble donc être un moyen adapté pour faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique.
Les choix des deux autres manuels ont été modifiés en profondeur et ces modifications peuvent s'expliquer par un ensemble de contraintes institutionnelles pesant sur l'utilisation des outils informatiques dans les classes ainsi que sur celle de la niche algorithmique.

III.3 Des contraintes institutionnelles fortes

La variabilité des choix entre les manuels de 1998 et 2002 peut être analysée comme des adaptations différentes aux contraintes institutionnelles qui pèsent fortement sur l'intégration des outils informatiques dans l'enseignement. En effet, malgré la volonté « idéologique et politique » de développer l'usage des outils informatiques en mathématiques depuis une vingtaine d'années, la réalité de l'enseignement n'a que peu évolué sur ce sujet.

Une première contrainte, récurrente chez les enseignants, est le temps. Utiliser des outils informatiques en classe demande du temps. En effet, il faut souvent consacrer une première séance à la prise en main de l'outil informatique que l'on souhaite manipuler ; temps que certains enseignants ne sont pas nécessairement prêts à « perdre »[51]. Cependant, le temps est une contrainte moindre pour les auteurs de manuels. En effet, comme nous l'avons souligné dans le chapitre A, le processus de transposition didactique interne s'arrête au niveau du savoir apprêté pour les manuels. Ils n'ont donc pas à se soucier de la réalisation effective de leur cours en classe. Il reste malgré tout d'autres contraintes qui pèsent sur leurs choix.

Tout d'abord, la difficulté connue par les auteurs de manuels d'avoir accès à des ordinateurs dans les établissements scolaires restreint fortement l'utilisation de logiciels de calcul formel comme MAPLE ou de tableurs. On peut alors faire l'hypothèse que cette contrainte a conduit Ter02 à proposer des programmes non plus pour MAPLE mais adaptés aux calculatrices programmables que tous les élèves de lycée possèdent.

Par ailleurs, l'hétérogénéité des calculatrices des élèves rend peu pertinente la donnée de programmes tous faits, écrits dans un langage de programmation spécifique à une calculatrice précise. Les élèves ne sachant pas tous programmer, l'adaptation d'un programme pour une calculatrice au langage de leur calculatrice peut se révéler délicate[52]. Ces deux contraintes montrent la pertinence du choix fait par Transmath et Ter02 de proposer ce que nous avons nommé « cas général ». En effet, ce choix permet de travailler sur la démarche algorithmique sans être contraint par un langage de programmation spécifique.

[51] Cf. chapitre B3 Analyse écologique du savoir apprêté par les enseignants. Des contraintes et des libertés institutionnelles.
[52] Nous faisons l'hypothèse que les différences entre les langages de programmation spécifiques à chaque modèle de calculatrice peuvent faire obstacle à la vie de la niche algorithmique dans les classes car elles semblent difficiles à surmonter par les élèves. La thèse en cours de Nguyen se penche notamment sur cette question.

La Commission de Réflexion sur l'enseignement des Mathématiques souligne également dans son rapport la difficulté de faire vivre l'utilisation de l'outil informatique pour travailler les démarches algorithmiques du fait d'un ensemble de contraintes institutionnelles se révélant extrêmement dures à dépasser :

> « […] Alors qu'on pouvait penser que ce sont les notions les plus proches des mathématiques, les concepts fondamentaux et universels à la base de l'informatique ne sont pas enseignés. Il y a de multiples raisons à cela qu'il faudrait analyser : hésitation devant l'évolution rapide des langages, diversité des implantations, difficulté à dégager ce qui est fondamental et universel » (Rapport CREM 2002, Informatique et enseignement des mathématiques, p. 10)

Après cette analyse générale des choix de programmes et d'outils informatiques faits dans les manuels, nous allons maintenant analyser plus finement la programmation d'un algorithme emblématique du programme d'arithmétique actuel : l'algorithme d'Euclide.

III.4 La programmation de l'algorithme d'Euclide et de la résolution d'une équation diophantienne

L'étude comparative sur la place de l'informatique dans trois manuels entre 1998 et 2002 menée ci-dessus pose la question de la pertinence de l'utilisation de l'outil informatique pour faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique dans le savoir apprêté. Nous allons à présent approfondir cette analyse en nous intéressant au cas précis de la programmation de la méthode de résolution d'une équation diophantienne.

Le programme de la résolution d'une équation diophantienne s'appuie sur l'algorithme d'Euclide. Par ailleurs, la résolution intervient dans la majorité des exercices du baccalauréat, et, dès le programme de la classe de troisième, le programme officiel souligne le fait que les élèves doivent savoir utiliser un tableur pour programmer l'algorithme d'Euclide –algorithme à la base de la résolution. Ces raisons nous ont conduite à analyser de façon plus fine l'utilisation des outils informatiques dans les manuels en nous centrant sur l'étude de la programmation de la résolution d'une équation diophantienne.

Notons également que le théorème de Bézout donne lieu à des choix de démonstration différents dans ces trois manuels. Rappelons brièvement que Trans98, Trans02, Ter98, Ter02 et Dec02 font une démonstration basée sur l'ensemble $E=\{am+bn,\ m\in Z \text{ et } n\in Z\}$ alors que Dec98 utilise l'algorithme d'Euclide étendu ce qui permet de donner une démonstration constructive de ce théorème.

L'algorithme de programmation de la résolution d'une équation diophantienne peut être construit en s'appuyant sur cette démonstration constructive. Par contre, dans le cas d'une démonstration utilisant l'ensemble $E=\{am+bn,\ m\in Z \text{ et } n\in Z\}$, la distance entre la démonstration et l'algorithme de programmation est plus grande car la démonstration ne propose pas d'algorithme pouvant servir de base au travail de programmation.
Nous voulons ainsi savoir si le choix de la démonstration du théorème de Bézout influence le choix de programmation et si les manuels ayant fait le choix de ne pas donner de démonstration constructive de ce théorème vont profiter de la programmation pour faire un travail sur la démarche algorithmique de résolution d'une équation diophantienne.

a) Le cas de Trans98

Dans Trans98, le T.P. « Résolution de l'équation au+bv=g » est l'occasion d'établir un lien entre algorithme mathématique et programmation. Il commence par la « détermination de u et v sur un exemple numérique » afin de donner une méthode de calcul d'un couple (u,v) solution par la méthode de descente de l'algorithme d'Euclide sur un exemple particulier. L'absence de démonstration constructive de ce théorème nécessite en effet l'explicitation[53] de cette méthode.

Cependant, cet algorithme, bien que permettant le calcul de u et v, n'est pas programmable tel quel ; la programmation en langage machine se servant de l'écriture algorithmique générale du procédé de calcul. Il faut donc faire un travail théorique sur la méthode de « descente » si on souhaite la programmer car l'algorithme présenté en exemple n'est pas initialisé, la relation sur laquelle est fondée l'algorithme et le test d'arrêt de celui-ci ne sont pas donnés. Rappelons que ces éléments sont fondamentaux si l'on veut expliciter ce qu'est une démarche de type algorithmique et quelle est sa spécificité par rapport à d'autres types de démarches.

C'est l'objet de la seconde partie de ce T.P. intitulé « généralisation ». Ce travail de généralisation d'une démarche algorithmique qui met en avant l'importance de l'étape d'initialisation des variables, de la nécessité d'établir une relation générique[54] et du test de fin[55] est entièrement pris en charge par le manuel. Tous les calculs et toutes les explications sont donnés dans le T.P. ; l'élève n'a pas à les vérifier.

Dans la troisième partie du T.P., le programme est ensuite écrit en Turbo Pascal et en langage machine pour des calculatrices Casio type 7000G, langages que les élèves peuvent au besoin adapter au langage de leur propre machine et la résolution de l'équation au+bv=1 est également illustrée par l'utilisation d'un tableur, en l'occurrence Excel. Ainsi, même si la place des élèves est réduite dans ce T.P., il faut souligner l'effort fait par ce manuel pour expliquer le passage d'un algorithme mathématique à sa programmation :

> « Pour écrire un algorithme [ici ce terme renvoie au schéma qui permet de visualiser la structure du programme] puis un programme, il est clair qu'il faudra prévoir une sauvegarde à chaque étape, les valeurs de u_k, v_k, r_k correspondant à deux lignes pour pouvoir calculer celle de la ligne suivante au moyen des relations précédentes. » (Trans98, p. 116)

> « Remarquez que l'affectation $u \leftarrow u'$ écrase le contenu de u et que par conséquent si on a besoin de l'ancienne valeur de u, il faut la sauvegarder dans une variable intermédiaire z. » (Ibid., p. 116)

Enfin, ce T.P. se termine par deux exercices : calculer le PGCD g de 33 810 et 4 146 et de 15 561 et 3 470 ainsi que les entiers u et v tels que au+bv=g.
Les nombres proposés sont assez grands comparativement à ceux proposés habituellement dans les exercices. Bien que les deux calculs puissent s'effectuer manuellement, l'utilisation d'une calculatrice ou d'un tableur est ici justifiée.

---

[53] « On met en œuvre l'algorithme d'Euclide et on calcule les restes successifs en fonction de a et b. On sait que le dernier reste non nul est le PGCD. On développe les calculs de façon à faire apparaître à chaque étape une écriture de la forme au+bv. » (Trans98, p. 115)

[54] Ici $r_{i+2}=u_{i+2}a+v_{i+2}b$ avec $\begin{cases} u_{i+2}=u_i-u_{i+1}q_{i+1} \\ v_{i+2}=v_i-v_{i+1}q_{i+1} \end{cases}$ où r_j et q_j sont les restes et les quotients obtenus à la $j^{\text{ème}}$ étape de l'algorithme d'Euclide

[55] $r_{n-1}=r_nq_n+r_{n+1}$ avec $r_{n+1}=0$. Il manque toutefois la justification du fait que l'algorithme comporte un nombre fini d'étapes.

Ainsi, les T.P. de programmation sont, pour Trans98, l'occasion de donner une première approche de la démarche algorithme et des bases minimales requises pour la programmation. En terme d'écologie, la mise en valeur des liens entre algorithmes mathématiques et programmation est un moyen de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique.

Cependant, le manuel ne fait que présenter ces notions ; leur exploitation est laissée à la décision du professeur utilisateur de ce manuel ou à la curiosité de l'élève. De quelles manières un enseignant peut-il exploiter ce T.P. en classe ? Les enseignants vont-ils et peuvent-ils intégrer ce travail entre arithmétique et informatique en classe ? Les analyses menées dans les chapitres B3, « analyse écologique du savoir apprêté par les enseignants, des contraintes et des libertés institutionnelles » et C2, « Observations naturalistes de deux enseignantes : diversité des pratiques sur un domaine d'étude » fourniront des éléments de réponse à ces questions.

b) Le cas de Trans02

Le T.P. de programmation de «l'algorithme de calcul des coefficients dans la relation de Bézout » est quasiment identique à celui proposé dans Trans98. Les seules différences sont :

- le programme n'est plus donné en Turbo Pascal ;
- il n'est pas seulement proposé pour les calculatrices du type 7000G et équivalents, il l'est aussi pour les calculatrices de la famille Casio et celles de la famille TI ;
- Excel n'est pas le seul tableur présenté, Star office l'est également.

c) Le cas de Ter98

Dans Ter98, les programmes ne font pas partie du corps des chapitres d'arithmétique ; ils sont donnés en annexe du manuel.
Le paragraphe consacré à « la détermination d'une solution particulière de l'équation ax+by=D » débute par une explication brève de l'algorithme de programmation retenu. Il est simplement mentionné que le calcul de r_k, u_k et v_k se fait à chaque étape et que la $(k+2)^{\text{ième}}$ égalité fournit une relation de récurrence que l'on va programmer[56]. La nécessité de donner une écriture générale de l'algorithme mathématique[57] servant de structure au programme en MAPLE n'est que peu abordée ici.

De plus, le programme est basé sur la méthode de « descente » de l'algorithme d'Euclide alors que la méthode de calcul à la main présentée dans les T.P. se fait en «remontant les égalités dans l'algorithme »[58]. Le changement de méthode de calcul du couple solution pour la programmation est justifié non pas en annexe mais par une note[59] dans le T.P. consacré aux équations au+bv=d.

Enfin, l'exemple d'application proposé est de déterminer une solution particulière de au+bv=d dans le cas où a=3 129 et b=546. Cet exemple ne permet pas de mettre en avant l'intérêt offert par l'utilisation d'outils informatiques de manipuler des nombres difficilement manipulables

[56] Voir Trans98 pour la relation générique.
[57] L'écriture générale de l'algorithme d'Euclide et de la méthode de « descente » n'apparaît à aucun endroit de ce manuel.
[58] Voir Ter98, p. 45
[59] « Cette méthode est manuelle. Un autre algorithme se prête mieux à la programmation (cf. annexe 3). » (Ter98, p. 45)

autrement. En effet, dans la partie cours, pour illustrer l'utilisation de l'algorithme d'Euclide à la main, ce même manuel propose des nombres plus grands : 1 958 et 4 539.

d) Le cas de Ter02

Contrairement à Ter98, Ter02 n'intègre plus le logiciel de calcul formel MAPLE.
Le T.P. de programmation de la résolution d'une équation diophantienne est donc totalement différent de celui proposé par Ter98. L'objectif de ce T.P., «obtenir un algorithme simple et efficace pour déterminer une solution particulière de l'équation ax+by=D avec D=PGCD(a,b) » (Ter02, p. 350), est présenté en introduction. Or, comme l'algorithme de résolution « à la main » de cette équation donné en cours est celui de descente puis de remontée de l'algorithme d'Euclide, Ter02 doit introduire l'algorithme de calcul d'une solution particulière par la méthode de descente. Le T.P. suit donc une démarche analogue à celle de Trans98 et Trans02. Ainsi, la première question à laquelle les élèves doivent répondre est la suivante :

> « Montrer que, pour tout k ($0 \leq k \leq n$), il existe deux entiers u_k et v_k tels que $au_k+bv_k=r_k$. Définir uk et vk par récurrence. » (Op. cité, p. 350)

Il est demandé ensuite de programmer ce calcul sur un tableur et d'appliquer ce programme sur l'exemple numérique a=78 et b=35.

Ainsi, les choix faits dans Ter02, contrairement à ceux de Ter98, peuvent permettre de faire vivre la niche algorithme de l'arithmétique. Cependant, les choix d'applications numériques restent peu pertinents pour l'usage de l'outil informatique.
Par ailleurs, nous pouvons faire l'hypothèse que l'accent mis sur l'utilisation d'un tableur dans les programmes d'enseignement dès le collège peut expliquer l'abandon de l'utilisation du logiciel de calcul formel MAPLE au profit d'Excel.

e) Le cas de Dec98

Dans Dec98, la démarche est encore différente, car les T.P. portant sur les principaux algorithmes d'arithmétique se terminent par la programmation de ceux-ci dans un langage adapté pour les calculatrices TI ou Casio. Mais ces programmes sont donnés «bruts », sans explication, que ce soit au sujet de l'algorithme retenu pour écrire le programme ou au sujet du langage de programmation utilisé.

Le T.P. : « Recherche de solutions à l'égalité de Bézout » est entièrement consacré à la calculatrice. Il se compose d'une introduction au programme permettant de trouver des couples solutions de l'égalité de Bézout, du dit programme et d'une seule question demandant de mettre en œuvre le programme sur un exemple.

L'introduction est en fait la description sommaire de ce que fait le programme proposé :

> « Pour a et b donnés, le programme ci-dessous teste si a et b sont premiers entre eux : pour cela, il calcule leur PGCD et teste s'il est bien égal à 1. Dans le cas où ils le sont, il détermine les couples (u ; v) vérifiant au+bv=1, avec u et v entiers relatifs compris entre -n et n, où n est un entier naturel non nul fixé. A la fin du programme, il affiche le nombre de solutions trouvées. Les couples de solutions sont obtenus en éditant les listes 1 et 2. Entrer ce programme et les tester pour a=8, b=11, et n=50. » (Dec98, p. 66)

Comme nous pouvons le constater, la notion d'algorithme –aussi bien au sens méthode de résolution de problèmes qu'au sens schéma du programme à écrire– est totalement absente de ce T.P.

De plus, le programme proposé ne se base pas sur la méthode de « descente » de l'algorithme d'Euclide, méthode pourtant retenue par ce manuel pour démontrer le théorème de Bézout et se prêtant à la programmation. En effet, le programme choisi peut se décomposer comme suit :

- Mise en œuvre de l'algorithme d'Euclide pour savoir si PGCD(a,b)=1,
- Recherche systématique et exhaustive de tous les couples solutions sans utiliser les résultats précédents de l'algorithme. Cette recherche systématique se schématise ainsi :

```
Entrer une valeur de n
  pour u allant de -n à n faire
    pour v allant de -n à n faire
      si au+bv=1
      mémoriser le couple (u,v) trouvé
    u=u+1 et retourner au début de la boucle
  afficher tous les couples solutions.
```

Cette recherche systématique de tous les couples entiers solutions (u,v), $(u,v)\in[-n,n]$, repose sur une démarche de type exhaustif. Le choix de cette nouvelle démarche[60] de résolution d'une équation du type au+bv=d n'est pas expliqué aux élèves. Or, elle est singulièrement différente de la méthode qu'ils ont l'habitude d'utiliser pour résoudre «à la main » ce genre d'équations. En effet, tester tous les couples (u,v) pour u et v entiers compris entre -n et n permet bien de donner tous les couples solutions de l'intervalle fixé au départ mais non tous les couples solutions. Les élèves peuvent alors se trouver confrontés aux questions suivantes : Comment choisir la valeur de n pour qu'il y ait des solutions entières dans l'intervalle [-n,n] ? Y a-t-il toujours des solutions ? Sinon, quelles sont les conditions à imposer à n pour qu'il y en ait exactement une ou plusieurs ?

Finalement, les élèves sont invités à entrer ce programme et à le tester sur un exemple[61] dont une solution particulière (u= -4 et v=3) peut être trouvée à la main ; la valeur de n étant imposée sans justification.

La dimension «utilisation des moyens informatiques pour faire vivre l'aspect algorithmique de l'arithmétique » ne semble pas être prise en compte dans ce manuel. Les programmes sont donnés «bruts », c'est à dire sans explication, que ce soit au sujet de l'algorithme retenu pour écrire le programme ou au sujet du langage de programmation utilisé. Le but n'est donc ici ni d'initier les élèves à la démarche algorithme ni de les familiariser à la programmation.

[60] En terme de programmation, cela évite d'avoir à mémoriser les étapes de l'algorithme d'Euclide.
[61] « Donner les solutions de l'égalité au+bv=1, avec a=8 et b=11, où u et v sont des entiers **relatifs** compris entre -50 et 50. » (Dec98, p. 66)

f) Le cas de Dec02

Dans Dec02, la résolution d'une équation diophantienne ne donne plus lieu à un T.P. de programmation. Le changement de démonstration du théorème de Bézout du manuel de 1998 à celui de 2002 est peut-être à l'origine de ce choix.

g) Conclusion

L'analyse précédente met en évidence trois résultats sur l'intégration de l'outil informatique dans les manuels.

Tout d'abord, en 1998, les trois manuels analysés ont investi de façon variée les marges de manœuvre dont ils disposaient pour proposer un T.P. de programmation sur la résolution d'équations diophantiennes. Chacun propose un algorithme de programmation (méthode de descente ou méthode exhaustive) ou un support de programmation (calculatrices, tableurs, langage de programmation sur ordinateur ou logiciel de calcul formel) différent. En 2002, cette diversité de choix a disparu ; seule subsiste la démarche adoptée par Transmath. On observe donc une régulation à l'occasion du changement de programme. En 1998, les choix des auteurs de manuels se sont faits dans une absence de références et de repères au sujet de l'enseignement de l'arithmétique sous un angle algorithmique. Les modifications opérées par Ter02 et Dec02 permettent un réajustement de ces choix et l'abandon de ceux non viables dans le système de contraintes institutionnelles actuel.

Par ailleurs, en 1998, la programmation informatique est rarement utilisée par les auteurs de manuels comme un moyen d'effectuer un travail sur les algorithmes arithmétiques à programmer. En effet, dans le cas de Ter98 et Dec98, les programmes proposés sont basés sur des algorithmes différents de ceux utilisés pour la résolution manuelle et aucun commentaire n'est donné sur le fait que ces algorithmes permettent d'arriver à la solution recherchée. Notons tout de même que les régulations de 2002 se font dans le sens d'un travail sur la démarche algorithmique lors des T.P. de programmation. Il semble donc que cette méthode soit la seule viable dans le cadre des contraintes pesant sur l'enseignement de l'arithmétique.

Enfin, l'utilisation de l'outil informatique se révèle parfois peu pertinente. En effet, dans Ter98 et Ter02, les applications numériques à faire avec calculatrice ou tableur appartiennent au domaine numérique manipulé dans les exercices à résoudre à la main.

III.5 Place de l'informatique dans les exercices d'arithmétique

En introduction, nous avons identifié un second moyen de faire vivre la niche algorithmique par le biais de l'intégration des outils informatiques dans le cours d'arithmétique : proposer des exercices à résoudre à l'aide de ces outils.
Nous allons maintenant voir si les auteurs de manuels ont incorporé cette dimension dans le corpus d'exercices qu'ils proposent.

a) Les outils informatiques dans les exercices des manuels analysés

En 1998

Alors que dans Trans98 les T.P. proposent un travail sur la programmation des principaux algorithmes d'arithmétique ainsi que des applications numériques adaptées à la spécificité de l'outil informatique, aucun énoncé d'exercices ne demande l'utilisation d'outils informatiques.

De même, dans Ter98, aucun exercice portant sur l'utilisation d'une calculatrice ou d'un ordinateur comme moyen de résoudre un problème d'arithmétique n'est proposé.

Seul Dec98 fait un choix différent. En effet, des exercices nécessitant l'emploi d'une calculatrice programmable ou d'un ordinateur complètent, dans les chapitres d'arithmétique, la liste des exercices et problèmes plus «classiques ». Ainsi, onze exercices[62] sont regroupés sous la rubrique «*Avec ordinateur* ». Ils se classent en quatre catégories d'exercices, certains exercices pouvant appartenir à plusieurs catégories :

- des exercices de programmation ;
- des exercices portant sur des « grands » nombres ou permettant d'effectuer beaucoup de calculs ;
- des exercices dont le but est de vérifier sur quelques cas un théorème ou de trouver un contre-exemple ;
- des exercices permettant d'établir des conjectures après avoir effectué un certain nombre de calculs par l'ordinateur.

En 2002
Dans Trans02, un seul exercice nécessite l'utilisation d'un tableur :

> « Conjecturer avec un tableur et démontrer.
> Objectif : trouver tous les entiers positifs p tels que p, p+2, p+6, p+8, p+14 soient premiers […] » (Trans02, 46 p. 89)

Il peut se classer dans la quatrième catégorie décrite ci-dessus.

Tout comme dans Ter98, il n'y a aucun exercice portant sur l'utilisation d'outils informatiques dans Ter02. De plus, dans les exercices du chapitre sur les nombres premiers, quelques précisions sont apportées en introduction :

> « Certains exercices sont précédés du logo [il s'agit du dessin d'une calculatrice barrée]. Comme tout un chacun le devine, il convient de laisser momentanément la calculatrice se reposer : les calculs à la main, d'une part, peuvent permettre de mieux saisir la portée d'une proposition, d'un théorème et, d'autre part, procurent souvent des éléments de réflexion sur la conduite à adopter en présence de moyens de calcul plus puissants (calculatrice, ordinateur…). » (Ter02, p. 382).

Par la suite, cinq exercices d'applications que nous donnons en annexe à ce chapitre sont précédés de ce logo. Notons que ces exercices existaient déjà dans Ter98 mais la calculatrice pouvait être utilisée pour les résoudre !
Il est intéressant de remarquer que les arguments utilisés par les auteurs de Ter02 pour expliquer leur choix d'interdire l'usage de la calculatrice pour certains calculs sont du même ordre que ceux utilisés par les enseignants[63] invités à donner leur avis sur les exercices « Avec ordinateur » de Dec98. Pour beaucoup, le raisonnement reste encore l'apanage des réflexions menées sans l'aide d'outils informatiques.

[62] Quatre exercices dans le chapitre sur la divisibilité, la division euclidienne et les nombres premiers et sept exercices dans celui sur les notions de PGCD et de PPCM.
[63] Voir chapitre B3, Analyse écologique du savoir apprêté par les enseignants. Des contraintes et des libertés institutionnelles.

Tandis que Dec98 consacrait une rubrique «Avec ordinateur » dans la partie exercices, cette rubrique n'existe plus dans Dec02. La niche algorithmique qui bénéficiait de conditions de vie possible dans un des manuels de 1998 au niveau des exercices ne vit plus dans les exercices des manuels de 2002.

En quoi l'outil informatique permet-il, dans les exercices à résoudre « Avec ordinateur », une approche différente des problèmes d'arithmétique ? Ces exercices sont-ils spécifiquement adaptés à une résolution utilisant un ordinateur ou peuvent-ils se résoudre aussi « efficacement » autrement ?

b) Les exercices « *Avec ordinateur* »

Les exercices de programmation

On trouve deux types d'exercices de programmation.

Dans le premier, il est demandé de programmer les résultats du cours dont le programme n'a pas été donné dans les T.P., comme dans l'exercice suivant :

> « Ecrire un programme pour générer les nombres premiers jusqu'à un nombre entier naturel donné » (Dec98, 75 p. 42)

Ce type d'exercice est à la limite du programme d'arithmétique car la tâche est de programmer une calculatrice ou un ordinateur. Cependant, pour accomplir cette tâche, il faut nécessairement dans un premier temps expliciter l'algorithme que l'on souhaite programmer. Ainsi, cela permet de travailler sous un angle nouveau les algorithmes du cours et les démarches algorithmiques et, par conséquent, faire vivre la niche algorithmique.

D'autres exercices demandent également d'écrire des programmes, non pas en se basant cette fois sur un algorithme déjà connu mais en utilisant des propriétés mathématiques pour pouvoir élaborer un algorithme de programmation :

> « […] Ecrire un programme permettant, pour un entier impair $n \geq 5$ donné, de déterminer un couple (p,q) de nombres premiers tels que $n=2p+q$. » (Dec98, 73 p. 80)

La tâche «programmer » est donc l'occasion de mettre en œuvre un travail de recherche et d'application sur la démarche algorithmique.

Les exercices portant sur des grands nombres

Les exercices qui composent cette catégorie appartiennent aussi à la première car il est nécessaire de programmer un ordinateur ou une calculatrice afin de pouvoir ensuite utiliser ce programme sur des applications numériques. Mais, contrairement aux exercices précédents, l'objectif principal n'est pas tant ici le travail sur la démarche algorithmique en elle-même que de faire fonctionner un programme pour résoudre des problèmes qu'il est difficile ou trop coûteux de résoudre autrement. En effet, un des avantages de l'utilisation d'outils informatiques est, nous l'avons déjà mentionné, la possibilité d'avoir accès aux grands nombres –qui restent sinon en dehors du domaine numérique utilisé au sein de la classe– et celle d'effectuer un très grand nombre de calculs dans un laps de temps relativement court. C'est le cas de l'exercice qui suit :

> « Les entiers suivants sont-ils premiers ? Si non, trouver tous les facteurs premiers : 564 567 543 233 123 ; $2^{2^5}-1$; $2^{80^2}+1$. » (Dec98, 72 p. 42)

La résolution ne peut être faite avec une calculatrice standard car les nombres proposés dépassent la capacité de celle-ci. Sans ordinateur, il n'est donc pas imaginable de donner un tel problème à des élèves. Rappelons que la problématique du calcul sur les grands nombres et, notamment, la difficulté à décomposer en un temps raisonnable de tels nombres à l'aide d'un ordinateur justifie, au niveau de la noosphère, l'accent mis sur la niche algorithmique de l'arithmétique.

Les exercices dont la tâche est de vérifier un théorème ou de trouver un contre-exemple

L'utilisation d'outils informatiques permet une approche expérimentale de certains résultats d'arithmétique en donnant la possibilité d'effectuer un grand nombre de calculs :

> « Ecrire un programme qui permet de vérifier [le théorème de Wilson] dans quelques cas. » (Dec98, 69 p. 79)

Ils permettent également de travailler sur la notion de contre-exemple :

> « Donner un contre-exemple de l'affirmation : $2^{2^n}+15$ est premier pour tout entier naturel n. » (Dec98, 76 p. 42)

En testant cette formule pour des petites valeurs de n (de n=1 à n=4), les entiers trouvés sont bien premiers, ce qui pourrait laisser supposer que l'affirmation est vraie. L'utilisation d'un ordinateur permet de vérifier ce critère de primalité sur un nombre beaucoup plus grand d'entiers du fait de sa capacité de calcul et de le faire pour des valeurs de n supérieures à 6 –6 étant la valeur à partir de laquelle la plupart des calculatrices ne sont plus en mesure de donner la valeur exacte de 2^{2^n}. De plus cet exercice peut être mis en parallèle avec un autre exercice proposé par les manuels sur l'affirmation de Fermat qui pensait que, pour tout entier naturel n, l'entier $F_n=2^{2^n}+1$ était premier. Sans moyen de calcul performant, certaines affirmations ne peuvent être remises en cause facilement.
Cette façon de procéder est peu courante dans l'enseignement ; elle est cependant intéressante pour développer les démarches de recherche des élèves dans des problèmes ouverts.

Les exercices dont la tâche est d'établir des conjectures

Un seul exercice de Dec98 sur l'équation $a^m\equiv 1$ (mod n) dépend de cette catégorie. Nous en donnons l'énoncé en annexe à ce chapitre. En rendant possible un grand nombre d'applications numériques, ce que le calcul à la main ne permet pas de faire aussi facilement et en un temps aussi rapide, un ordinateur peut servir à faire apparaître certaines propriétés reliant les entiers n et a et tester leur validité.
Ce type de tâche « conjecturer » est peu présent dans les manuels. Dans cet exercice, aucune démonstration n'est attendue. Il s'agit en effet d'exhiber des propriétés qui semblent vérifiées et auxquelles on attache une valeur de croyance plus ou moins forte, croyance soutenue ou mise en défaut par les calculs que l'on fait avec un ordinateur.

Nous avons vu par ailleurs qu'un exercice de Trans02 fait partie de cette catégorie. Mais à la différence de celui proposé par Dec98, après la conjecture établie, il est demandé d'en faire une démonstration.

c) Conclusion

Comme nous pouvons le constater, l'utilisation de l'outil informatique dans le cadre des exercices « Avec ordinateurs » de Dec98 permettent une approche de l'arithmétique différente de celle présente dans les exercices classiques[64]. L'aspect heuristique est favorisé par le biais de programmation de résultats à vérifier sur un grand nombre de cas ou à conjecturer.
Par ailleurs, l'utilisation de l'outil informatique dans ces exercices semble pertinente car les applications numériques proposées se situent en dehors du cadre numérique du calcul manuel.
Cependant, la disparition de ces exercices dans Dec02 montre la difficulté à faire vivre de tels exercices.

III.6 Conclusion de l'analyse de la place des outils informatiques dans les manuels

Comme nous l'avons montré, les trois manuels de 1998 ont des façons fort différentes d'intégrer les moyens informatiques dans le cours d'arithmétique. Ces différentes façons de faire permettent plus ou moins une réflexion sur les démarches algorithmiques. Néanmoins, la notion d'algorithme reste essentiellement ici une notion paramathématique[65], au sens de Chevallard, alors que la programmation des algorithmes d'arithmétique aurait pu être l'occasion de la travailler en tant qu'objet. L'utilisation d'outils informatiques ne permet donc pas nécessairement de faire vivre la niche algorithmique dans le savoir apprêté par les manuels.

Par ailleurs, l'importance des changements effectués entre 1998 et 2002 (diminution du nombre d'algorithmes programmés, disparition des exercices «Avec ordinateurs ») montre qu'il existe une réelle difficulté à intégrer l'outil informatique dans le cours d'arithmétique, malgré les incitations du nouveau programme de 2002.

Cependant, ces changements montrent une réorientation des choix des manuels vers une homogénéisation des outils informatiques utilisés. En 2002, seuls les tableurs et les calculatrices, conformément aux recommandations du programme, sont présents dans les manuels. Les logiciels de calcul formel ont été abandonnés.

CONCLUSION

Revenons tout d'abord sur les trois moyens à la disposition des auteurs de manuels pour faire vivre la niche algorithmique dans le cours d'arithmétique.
Au niveau des choix de démonstration, peu de théorèmes sont prouvés par l'utilisation d'une démonstration constructive. Les auteurs de manuels préfèrent généralement se servir de l'axiomatique des propriétés de **N** qu'ils introduisent pour proposer des démonstrations de type ensembliste plutôt que de l'utiliser pour montrer l'arrêt des algorithmes sur lesquels sont basées les démonstrations constructives.

[64] Voir les techniques utilisées pour résoudre les principaux types de tâches d'arithmétique présentés dans l'analyse praxéologique des exercices des trois manuels de 1998, extraite de notre mémoire de DEA, que nous proposons en annexe à ce chapitre.
[65] « *Les notions paramathématiques sont des* notions-outils *de l'*activité mathématique *; elles ne sont pas « normalement » des* objets d'étude *pour le mathématicien.* » (Chevallard 1980, p. 50)

Pour ce qui est de l'intégration de l'outil informatique, les différentes éditions des manuels montrent une tendance à diminuer la place accordée à cet outil dans le cours d'arithmétique. Les exercices à résoudre « Avec ordinateur » disparaissent mais les T.P. de programmation qui sont conservés permettent d'aborder un travail sur les algorithmes par le biais d'une formalisation préalable des algorithmes à programmer pour pouvoir ensuite les traduire en algorithmes de programmation.
De plus, l'analyse praxéologique des exercices des manuels de 1998 que nous avons faite dans le cadre de notre mémoire de DEA (en annexe à ce chapitre) montre, d'une part, que dans les exercices, les algorithmes ne sont jamais des objets d'étude et, d'autre part, que les techniques de résolution algorithmiques sont fortement stéréotypées (il s'agit essentiellement de la résolution d'équations diophantienne à partir de l'algorithme d'Euclide).

Ainsi, la vie de la niche algorithmique ne semble pas assurée dans les manuels. Par ailleurs, les changements d'orientation des manuels entre 1998 et 2002 sur la question de l'intégration des outils informatiques laissent transparaître l'existence de contraintes pesant fortement sur l'existence de cette niche dans l'enseignement effectif de l'arithmétique. Ces contraintes ont également conduit les auteurs de manuels à proposer des façons d'intégrer l'outil informatique moins variées. On observe une stabilisation de la place de cet outil dans l'intervalle de quatre ans séparant les deux programmes. En effet, après l'éparpillement des choix des auteurs de manuels, dû à la nouveauté de la réintroduction de l'arithmétique sous un angle algorithmique, l'ensemble des contraintes institutionnelles et les habitudes d'enseignement ont considérablement réduit cette variété de choix.

Ces constats laissent sceptique sur la viabilité de la niche algorithmique dans le savoir apprêté par les enseignants et dans le savoir enseigné. En effet, en rédigeant leur projet de cours, la majorité des enseignants s'inspirent des manuels scolaires. Dans le cas précis de l'arithmétique, réintroduite après une vingtaine d'années d'absence, nous pouvons penser qu'ils utilisent également le programme comme référence importante. Ces deux pôles de références leur permettent d'accroître leur marge de manœuvre comme le souligne Neyret :

> « Notons que lorsqu'un enseignant rédige son cours en utilisant des manuels, il peut être à la fois considéré comme sujet des institutions de formation « manuels », mais aussi comme une institution transpositive. La possibilité pour un même enseignant de s'assujettir à plusieurs manuels, donc à plusieurs institutions différentes, va être pour lui un moyen d'accroître sa marge de manœuvre dans l'institution […]. » (Neyret 1993, p. 11)

Les enseignants se retrouvent donc entre une institution –le programme– mettant en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique dans le savoir à enseigner et une seconde institution –les manuels– qui proposent un apprêtage didactique de l'arithmétique insistant davantage sur la niche raisonnement et laissant peu de place à la niche algorithmique. Par ailleurs, la référence à l'institution scolaire plus ancienne peut conduire à un renforcement de cette dernière tendance.

Comment les enseignants vont-ils apprêter l'arithmétique ? Dans quel système de contraintes effectuent-ils leur choix ? Quelles sont les conséquences de ce système de contraintes sur la vie des niches algorithmique et raisonnement dans les projets de cours des enseignants ? C'est ce questionnement que nous abordons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE B3

ANALYSE ECOLOGIQUE DU SAVOIR APPRETE PAR LES ENSEIGNANTS

Des contraintes et des libertés institutionnelles

INTRODUCTION

Nous avons vu dans le chapitre A « introduction et problématique », que nous pouvions distinguer deux types d'apprêtage didactique du savoir dans la transposition didactique interne. D'une part, l'apprêtage réalisé dans les manuels et, d'autre part, celui réalisé par les enseignants. Ces deux types se différencient par le fait que le processus de transposition didactique interne s'arrête au savoir apprêté pour les manuels alors qu'il continue jusqu'au savoir enseigné pour les enseignants. Par conséquent, les systèmes de contraintes dans lesquels les auteurs de manuels et les enseignants effectuent leurs choix ne sont pas de même nature. En effet, certaines contraintes didactiques, en particulier liées à la gestion du temps, pèsent davantage sur la conception d'un cours d'enseignant que dans la conception d'un cours de manuel où les contraintes d'écriture, voire les pressions éditoriales peuvent, a contrario, avoir un poids important.

Le savoir apprêté par les manuels a fait l'objet du chapitre précédent. Nous avons montré que, contrairement aux exigences du programme, la niche algorithmique avait des difficultés à vivre dans les manuels. Nous allons maintenant analyser les choix d'apprêtage des enseignants afin de voir comment ceux-ci se situent entre les « injonctions » du programme et les cours présentés dans les manuels. Nous avons également l'ambition de mieux comprendre dans quelle mesure le système de contraintes didactiques et temporelles a pu modifier leurs choix par rapport à ceux faits dans les manuels.

Quels sont les écarts entre le cours d'arithmétique apprêté par les enseignants et, l'arithmétique à enseigner (programme) et l'arithmétique apprêtée par les manuels ? Observe-t-on des variabilités dans les choix des enseignants ? Quels sont les points essentiels où cette variabilité peut jouer ? Dans quel système de contraintes ces choix ont été faits ?

Pour apporter des éléments de réponse à ces questions, nous avons élaboré un questionnaire pour confronter les hypothèses que nous avons dégagées précédemment sur la viabilité de la niche algorithmique avec la réalité des pratiques d'enseignement de l'arithmétique dans les classes. Nous avons interrogé les enseignants sur ce point précis car il nous semble particulièrement problématique et donc propice à une large variabilité dans les choix des enseignants. Il est aussi emblématique de l'idéologie ayant conduit à la réintroduction de l'arithmétique en 1998.

Nous avons construit ce questionnaire autour de deux des trois moyens permettant a priori de faire vivre la niche algorithmique : les démonstrations des théorèmes d'arithmétique et l'intégration de l'outil informatique.

Notons pour finir que ce questionnaire a été élaboré au cours de l'année scolaire 1999/2000 et que les réponses ont été obtenues aussi bien durant l'année scolaire 99/00 que 00/01. Les réponses à ce questionnaire ne tiennent donc pas compte des changements de programme intervenus à la rentrée 2002.

I. ANALYSE A PRIORI DU QUESTIONNAIRE

Nous avons formulé trois catégories d'hypothèses qu'il nous semble intéressant de vérifier par le biais de ce questionnaire :

- Les démonstrations : Nous émettons l'hypothèse que le cours d'arithmétique doit donner lieu à un grand nombre de démonstrations rigoureuses comparativement aux autres chapitres de Terminale car celles-ci nécessitent peu de résultats mathématiques complexes en prérequis. Par ailleurs, nous avons supposé, à la fin de l'analyse des programmes, que chaque fois que l'occasion se présenterait, les démonstrations constructives seraient préférées aux autres. Or, l'analyse de la partie cours des manuels ne nous a pas permis de valider cette hypothèse : aucun manuel ne propose systématiquement de démonstration constructive lorsque cela est possible. Il nous semble intéressant de voir si cette attitude se retrouve chez les professeurs ou si ceux-ci optent pour un choix différent dans leur cours.

- Le PGCD : Nous avons dégagé à ce sujet une différence significative entre le programme de 1971 et celui de 1998. La méthode privilégiée par le programme pour la recherche d'un PGCD est l'algorithme d'Euclide, la décomposition en facteurs premiers devenant une technique à connaître mais à ne pas utiliser de façon systématique. Tout comme pour le point précédent, l'analyse de la partie cours des manuels ne nous a pas permis de vérifier complètement nos hypothèses dans ce domaine. Le PGCD est introduit après le chapitre consacré aux nombres premiers dans deux manuels sur trois (ce qui laisse aux élèves le choix de la technique à adopter lors de la recherche d'un PGCD) et le problème de comparaison de l'efficacité en terme de coût d'une méthode par rapport à l'autre est soulevé dans un seul manuel. Nous avons donc voulu savoir si, en classe, les deux techniques vivent de façon équivalente (en terme de fréquence d'utilisation) ou non.

- La niche algorithmique : L'analyse comparée des programmes de 1971 et de 1998 montre l'existence d'une nouvelle niche pour l'arithmétique dans le nouveau programme, niche qui repose sur son caractère algorithmique. Or, un des moyens de faire vivre cette nouvelle niche est d'introduire l'outil informatique dans l'enseignement de l'arithmétique, que ce soit avec la programmation des principaux algorithmes mentionnés dans le programme ou avec l'introduction de nouveaux types d'exercices comme le propose Dec98. Il nous semble donc essentiel de poser aux professeurs des questions concernant leurs pratiques d'enseignement vis à vis de la calculatrice ou d'autres moyens informatiques car c'est pour nous un moyen de nous prononcer sur la viabilité de cette nouvelle fonction de l'arithmétique[66] dans le savoir apprêté et le savoir enseigné.

Partant de ce questionnement, nous avons fabriqué notre questionnaire, conçu en quatre parties :

1. Introduction
2. Questions autour des démonstrations : questions A1, A3 et A4.
3. Questions autour du PGCD : questions A2, F1, F2 et F3.
4. Questions autour des calculatrices : questions B, C, D, E et G.

I.1 L'introduction

Dans cette première partie, outre les questions de « présentation »[67], nous avons voulu interroger les professeurs sur deux sujets : leur ancienneté dans le corps enseignant et leurs sources de travail en arithmétique.

La question « *depuis quand enseignez-vous ?* » permet de savoir si les professeurs de terminale S spécialité avaient déjà pu avoir la possibilité d'enseigner l'arithmétique en terminale avec l'ancien programme. Elle permet également de savoir si ces professeurs ont eu, alors qu'ils étaient eux-mêmes élèves, une formation en arithmétique. Nous espérons ainsi voir si, dans le cas de certains professeurs, le fait d'avoir pu enseigner l'arithmétique en terminale dans les années 70 influence leur manière de traiter ce sujet aujourd'hui. Cette information sera à décoder à travers la lecture des réponses à l'ensemble des questions.

L'objectif de la question suivante (à savoir quel manuel les enseignants utilisent en classe de terminale spécialité) est de voir dans quelle mesure le choix des trois manuels que nous avons analysés (Dec98, Trans98 et Ter98) est représentatif des manuels les plus couramment utilisés en classe.

La question sur les sources de travail des professeurs a pour but de voir à partir de quelles sources ils construisent un cours et choisissent des exercices qu'ils estiment « être en accord » avec le programme d'arithmétique de spécialité. Ce cours étant nouveau, nous voulons savoir comment les enseignants construisent un projet de cours lors d'un changement de programme. Rappelons que, comme le souligne Neyret (1993), le fait que les enseignants consultent différents ouvrages est pour eux «un moyen d'accroître [leur] marge de manœuvre dans l'institution » (Ibid., p. 11). S'attacher à un manuel pour construire un cours conduit à s'inscrire dans un nouveau rapport institutionnel. Il convient alors d'identifier les différents systèmes de contraintes dans lesquels les enseignants agissent et prennent des décisions.

---

[66] Avec un peu de recul, nous aurions pu améliorer le questionnaire sur cette problématique. En effet, l'intégration de l'outil informatique dans l'enseignement de l'arithmétique n'est pas le seul moyen de faire vivre cette nouvelle fonction. Il est également possible de proposer aux élèves soit un grand nombre d'exercices portant sur des tâches dont les principales techniques de résolution sont des techniques basées sur des algorithmes soit des exercices «constructifs » comme ceux portant sur les fractions continues. Il aurait été intéressant de voir si des professeurs avaient donné aux élèves de tels exercices car ce choix n'apparaissait pas dans les manuels (voir chapitre B2, analyse écologique de manuels de 1971 2002).

[67] *Nom-prénom* et *nom de l'établissement*.

I.2 Questions autour des démonstrations

Nous avons choisi de questionner les enseignants sur trois démonstrations importantes du cours d'arithmétique : la démonstration de l'existence et de l'unicité de la division euclidienne, celle du théorème de Bézout et celle de l'existence de la décomposition d'un entier naturel $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers.

Pour chacune de ces démonstrations, nous avons demandé, d'une part, si cette démonstration a été donnée aux élèves lors du cours et, d'autre part, quelle méthode a été retenue pour faire cette démonstration[68]. Les trois démonstrations peuvent donner lieu à plusieurs types de démonstrations dont un de type constructif dont nous avons vu qu'il est rarement choisi par les manuels dans le chapitre précédent.

Avec la première question, nous espérons corroborer notre hypothèse selon laquelle, étant donné le peu de connaissances théoriques nécessaires pour faire les démonstrations d'arithmétique en terminale, beaucoup de démonstrations seraient faites en cours. Très peu de réponses « *non* » devraient être données aux questions A1, A3 et A4.

La question suivante doit permettre de savoir si les professeurs ont donné des démonstrations semblables à celles des trois manuels analysés ou s'ils ont préféré donner des démonstrations constructives, restant ainsi plus conformes à l'esprit du programme. Dans le premier cas, on obtiendra une majorité de réponses « propriétés de **N** » à la question A1, « $E=\{am+bn/(m,n)\in \mathbf{Z}^2\}$ » à la question A3 et enfin « par récurrence » à la question A4.

Nous estimons que peu d'enseignants doivent avoir fait le choix de ne donner que des démonstrations de type constructif à leurs élèves mais cette possibilité devrait apparaître dans les réponses. Il sera intéressant de connaître le nombre d'enseignants ayant fait ce choix.
Nous devons aussi voir apparaître des cas d'enseignants ne donnant aucune démonstration constructive dans leur cours d'arithmétique. Encore une fois, il s'agit de voir quelle proportion des professeurs interrogés cela représente pour pouvoir approfondir notre analyse sur la viabilité de la nouvelle niche de l'arithmétique ainsi que celle sur l'espace de liberté dont disposent les enseignants pour fabriquer leur cours.

I.3 Questions autour du PGCD

Quatre questions concernent ce sujet : les questions A2, F1, F2 et F3.

a) Question A2 :

Cette question permet de savoir à quel moment le PGCD a été introduit en classe par rapport à la décomposition en facteurs premiers d'un entier.
En effet, s'il est introduit avant, cela signifie que la recherche d'un PGCD par l'algorithme d'Euclide est favorisée. S'il est introduit après, les deux méthodes (algorithme d'Euclide ou décomposition en facteurs premiers) sont disponibles et rien ne permet de dire si l'algorithme d'Euclide sera privilégié ou non comme cela est souhaité dans le programme. D'après

[68] Dans cette partie, nous nous sommes appuyée sur le travail de Bilgot (1998).

l'analyse des manuels, nous pouvons penser que beaucoup d'enseignants ont choisi d'introduire le PGCD après le cours sur les nombres premiers.
Cependant, cette question ne permettant pas de conclure sur la méthode favorisée par les enseignants pour la recherche d'un PGCD, nous avons également posé les questions F1, F2 et F3.

b) Question F1 :

« *Pour calculer le PGCD du couple d'entiers (11 475 ; 9 750), entre la méthode utilisant la décomposition en facteurs premiers et celle utilisant l'algorithmique d'Euclide, y'en a-t-il une qui vous semble plus judicieuse (plus économique) que l'autre ? Pourquoi ?*
On donne ci-dessous les résultats des « calculs » […] »

Dans cette question, les professeurs n'ont pas à se prononcer sur leurs pratiques d'enseignement mais sur leurs pratiques personnelles de calcul d'un PGCD. Nous voulons voir quelle technique les enseignants utilisent de façon « naturelle » pour calculer un PGCD et savoir si les explications qu'ils donnent pour justifier ce choix sont du même ordre que celles qu'ils donnent aux élèves (questions F2 et F3).

Une variable didactique importante dans cet exercice est le choix du couple d'entiers dont il faut calculer le PGCD. En effet, suivant le couple d'entiers donné, une méthode de calcul de PGCD pouvait fortement être privilégiée par rapport à une autre. Nous avons proposé le calcul d'un PGCD d'un couple d'entiers choisi parmi les exercices de recherche de PGCD des trois manuels analysés. Le couple (11 475 ; 9 750) est celui qui nous a paru le moins susceptible de privilégier une méthode : le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide est relativement important et le nombre de facteurs dans la décomposition en facteurs premiers des deux nombres l'est aussi (ces facteurs ne sont cependant pas très grands et certains sont visibles directement).

Nous avons choisi de donner le détail des calculs pour des raisons de commodité pour les enseignants qui rempliront ce questionnaire.

c) Question F2 :

« *D'une manière générale, avez-vous conseillé aux élèves une méthode de recherche de PGCD plutôt qu'une autre ? Si oui, laquelle et pourquoi ?* »

Cette question vient compléter la question A2. Elle permet de voir quel choix a été fait par les enseignants sur la méthode à adopter lors de la recherche d'un PGCD en classe.
D'après nos précédentes analyses, nous nous attendons à ce que la plupart des professeurs aient conseillé aux élèves d'utiliser l'une ou l'autre des deux méthodes selon leurs préférences et/ou les conditions imposées dans l'énoncé des exercices.
Un certain nombre d'enseignants devraient toutefois avoir conseillé l'usage exclusif de l'algorithme d'Euclide, excepté dans le cas de consignes explicites sur le choix d'une méthode dans l'énoncé d'un exercice. Aucun professeur ne devrait avoir demandé aux élèves d'utiliser le plus systématiquement possible la décomposition en facteurs premiers étant donné les commentaires faits à ce sujet dans le programme.

d) Question F3 :

« *Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un PGCD ? Si oui, lesquels ?* »

L'efficacité respective en terme de coût de calcul pour un ordinateur des deux méthodes de recherche d'un PGCD nous a semblé être une des raisons ayant motivé la réintroduction de l'arithmétique sous un angle algorithmique en insistant sur la place que peut tenir l'outil informatique dans cet enseignement.
Nous voulons savoir si ce paramètre est pris en compte par les professeurs dans leur enseignement et si oui, comment ils l'abordent en classe.
Cette différence de coût de calcul n'est pas facile à mettre en évidence lorsque l'on travaille avec des « petits » nombres. Nous avons par ailleurs constaté qu'aucun des trois manuels analysés n'a pris en compte cette dimension pour faire un travail de comparaison d'efficacité d'une méthode sur l'autre. De plus, il n'est pas facile de mettre en avant l'efficacité de l'algorithme d'Euclide sur la décomposition en facteurs premiers avec les capacités d'une calculatrice (la plupart peuvent traiter des nombres composés d'au maximum douze chiffres) ; il faut, pour que cela soit plus probant, utiliser un ordinateur.
Par conséquent, nous pensons que relativement peu d'enseignants ont pu expliquer aux élèves ce qui peut conduire à favoriser l'utilisation quasi exclusive de l'algorithme d'Euclide dans la recherche d'un PGCD.

I.4 Questions autour de la calculatrice

Nous avons soutenu précédemment que l'usage de la calculatrice pouvait être un moyen de faire vivre la niche algorithmique. Nous avons donc souhaité nous intéresser à la façon dont les professeurs ont utilisé (et fait utiliser aux élèves) la calculatrice.

a) Question B :

« *Avez-vous demandé à vos élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ? Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ?* »

Trois grands types de réponses peuvent être donnés à cette question :

- Des enseignants ayant demandé aux élèves de programmer les principaux algorithmes mais ayant laissé ces tâches à la charge des élèves ou en leur ayant fourni des programmes déjà faits.
- Des enseignants n'ayant pas demandé des élèves qu'ils possèdent de programmes d'arithmétique dans leurs calculatrices.
- Des enseignants qui ont souhaité que les élèves possèdent certains algorithmes programmés dans leur calculatrice et qui ont mené ce travail en classe.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'un nombre relativement peu important d'exercices peut se résoudre en « faisant tourner » un programme sur une calculatrice. Nous pensons donc que les deux premiers types de réponses seront majoritaires. Cela nous permettra de conclure que la niche algorithmique ne vit pas réellement en classe au travers d'exercices de programmation. Il faudra donc se demander comment elle peut être viable autrement.

b) Questions C et D :

« C) Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément : dont on pouvait se passer, assez important, important, indispensable ?
D) Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ? Si oui, la raison en était : un travail sur les grands nombres, un T.P. ou exercice de programmation, autre(s) (précisez) »

Ces deux questions portent également sur les calculatrices mais ne sont plus uniquement axées sur le rapport algorithme/calculatrice.
Dans le cadre d'une comparaison entre les programmes de 1971 et de 1998, nous nous intéressons à ce que la calculatrice peut apporter aux exercices d'arithmétique aujourd'hui. En effet, si un enseignant répond à la question C que dans les exercices qu'il a donné en arithmétique, l'usage de la calculatrice était un élément «*dont on pouvait se passer* », nous pouvons légitimement penser[69] que ces exercices ne sont pas trop différents de ceux du programme de 1971 ou, tout du moins, qu'ils auraient pu être posés en 1971.
Par contre, le fait que la calculatrice soit indispensable pour résoudre un exercice (cas d'une réponse positive à la question D) montre une évolution dans le type d'exercices proposés en arithmétique entre ces deux périodes. Si ce cas se présente, nous voulons savoir pourquoi ces exercices nécessitent obligatoirement l'emploi d'une calculatrice. Nous avons relevé dans les manuels deux types d'exercices dont la résolution nécessite l'usage d'une calculatrice : les exercices portant sur les grands nombres et les exercices de programmation.

c) Question E :

« *Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ? Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul…) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?* »

Nous pensons que pratiquement aucun enseignant n'aura utilisé d'autres moyens informatiques dans son cours d'arithmétique, par manque de temps ou par absence de matériel informatique dans l'établissement, etc.
Cependant, l'ordinateur est un moyen intéressant de faire vivre le côté algorithmique de l'arithmétique, car ses capacités (de calcul notamment) sont beaucoup plus grandes que celles d'une calculatrice. Les réponses positives des professeurs à cette question devraient nous apporter des pistes sur la manière dont peut être intégré l'outil informatique dans un cours d'arithmétique.

d) Question G :

« Voici l'énoncé d'un exercice :

[69] L'analyse de la partie exercices nous permet d'appuyer ce point de vue.

'Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair n=5 peut s'écrire sous la forme n=2p+q, avec p et q premiers. Par exemple : 51=2×23+5. Ecrire un programme permettant pour un entier impair n=5 donné, de déterminer un couple (p,q) de nombres premiers tels que n=2p+q. (Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)'
Jugez-vous que cet exercice soit un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?
Poseriez-vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ? »

Nous avons souhaité présenter aux enseignants un exercice extrait d'un manuel actuel qui n'aurait pas pu être posé dans l'ancien programme. Il s'agit d'un exercice de Dec98, le seul manuel qui propose dans le chapitre d'arithmétique des exercices d'un type nouveau. Nous n'avons pas mentionné dans ce questionnaire que cet exercice inhabituel est extrait d'un manuel actuel.

Cet exercice a un statut particulier. Il porte certes sur des nombres entiers mais la tâche demandée aux élèves est d'écrire un programme. La place que l'arithmétique y occupe peut être source de questionnement. Dans la quasi-totalité des exercices, l'arithmétique est l'objet sur lequel porte l'exercice. Ici, l'arithmétique est essentiellement un outil pour résoudre le problème car elle permet d'écrire le programme.
Cependant, d'un autre coté, une fois le programme écrit, il va être utilisé, même si ceci n'est pas explicitement demandé dans l'énoncé de l'exercice. Or, en faisant « tourner » ce programme, l'arithmétique redevient l'objet d'étude car on va s'interroger sur la véracité ou non de la conjecture de Lagrange. Toute la question tourne donc autour des différents statuts (outil ou objet) que peut avoir l'arithmétique dans cet exercice. Nous nous demandons donc si cet exercice va être plutôt considéré comme un exercice d'arithmétique ou comme un exercice de programmation.

Par ailleurs, ce qui peut aussi surprendre les enseignants, c'est que l'exercice porte sur une conjecture du mathématicien Lagrange qui n'a toujours pas été démontrée ou invalidée. Il n'est donc pas attendu de démonstration de la part des élèves comme ce qui est habituellement le cas dans les exercices de mathématiques. Les enseignants seraient-ils donc prêts à poser un exercice de ce type à des élèves ?

Nous allons maintenant analyser les réponses des enseignants.

II. ANALYSE A POSTERIORI DU QUESTIONNAIRE

Nous avons envoyé ce questionnaire à des enseignants de terminale S spécialité mathématique et nous avons reçu 43 réponses.
Compte tenu du fait qu'il n'y a en général qu'une ou deux classes (rarement trois) de terminale S spécialité mathématique dans chaque établissement, ce nombre de réponses est satisfaisant. De plus, les 43 enseignants qui ont répondu à notre questionnaire enseignent dans 35 établissements scolaires différents se répartissant sur l'ensemble de la France. Ainsi, ces 43 réponses peuvent être considérées comme représentatives de l'ensemble des pratiques d'enseignement de l'arithmétique dans une classe de terminale S.

D'un point de vue méthodologique, nous ne donnons que rarement les résultats en pourcentage. Étant donné le nombre de réponses, nous préférons les donner sous forme de fraction de l'ensemble des enseignants ou tout simplement en nombre d'enseignants ayant répondu à une question. Nous citons en italique les réponses données mot pour mot par les enseignants. Nous avons par ailleurs mis en annexe en annexe à ce chapitre quelques exemples de réponses.

II.1 Introduction du questionnaire

a) « Depuis quand enseignez-vous ? »

Six enseignants sur 43 enseignent depuis moins de 20 ans. Cependant, en ayant lu l'ensemble de leur questionnaire, ces derniers ne se démarquent pas de manière significative de l'ensemble des réponses.
Par contre, nous avons constaté que quatre enseignants, en activité depuis plus de 20 ans, donnent des réponses aux questions F1 à F3 qui montrent qu'ils sont fortement « attachés » à la décomposition en facteurs premiers. Nous approfondirons cette analyse en temps voulu, dans le troisième paragraphe de ce chapitre consacré aux questions autour du PGCD.

b) « Quel manuel utilisez-vous en classe de spécialité mathématique ? »

Les résultats à cette question sont les suivants :

Belin	Terracher	Transmath	Déclic	Fractale	Aucun livre	Pas répondu
16 réponses	9 réponses	5 réponses	4 réponses	3 réponses	4 réponses dont un poly personnel	2 réponses

Les trois manuels que nous avons choisis pour nos analyses font partie de ceux les plus utilisés dans les établissements. Cependant, les autres sources qu'utilisent les enseignants doivent également être prises en compte. En effet, les enseignants se servent de ces sources pour préparer leurs cours ou pour choisir certains exercices qu'ils donneront aux élèves. Les réponses à la question suivantes vont nous montrer que Déclic, Transmath et Terracher peuvent être considérés comme représentatifs des manuels dont se servent les enseignants de Terminale S pour préparer leur cours.

c) « Quelles sont vos sources de travail pour la partie arithmétique de l'enseignement de spécialité ? »

Deux enseignants n'ont pas répondu à cette question. Les résultats qui suivent sont donc donnés sur un ensemble de 41 réponses.

Tous les enseignants ont cité au moins deux références de sources de travail, la moyenne se situant entre 5 et 6 références par enseignant. Les réponses à cette question peuvent être classées en six grandes catégories :

- <u>Les manuels de spécialité math, les annales</u> : Ils sont toujours cités (les annales plus rarement) sauf dans le cas d'un enseignant dont les sources de travail sont : « *mes* *travaux personnels et les ouvrages du supérieur* ». C'est d'ailleurs un des quatre enseignants n'utilisant aucun manuel en classe mais un polycopié personnel. On retrouve tous les manuels de spécialité mathématique : Fractale (13 réponses), Terracher (12 rép.), Déclic (10 rép.), Dimathème (10 rép.), Transmath (10 rép.), Belin (7 rép.) et, moins souvent, Bréal (4 rép.) et Didier (1 rép.).

- Des ouvrages publiés par les IREM, l'APMEP ou la revue Tangente : Un enseignant sur deux les a utilisés. Les plus couramment cités sont : La revue Tangente «secret des nombres » (citée 12 fois), l'ouvrage de l'IREM d'Aix-Marseille (9 fois), celui de l'IREM de Clermont-Ferrand (8 fois), l'APMEP (5 fois) ainsi que des publications d'autres IREM (Aquitaine, Poitiers, Montpellier, Besançon) qui sont plus rarement cités.

- Des manuels des années 70 : Près d'un enseignant sur sept les cite comme sources de travail. Pour un enseignant, ces manuels sont d'ailleurs l'unique source de travail en dehors de ses propres connaissances et du manuel utilisé en classe. Il ne consulte aucun autre manuel « actuel » de spécialité mathématique, si ce n'est celui utilisé par les élèves : Fractale.

- Des ouvrages universitaires : Ils sont consultés par 5 enseignants dans le cadre de la préparation de leur cours d'arithmétique.

- Leurs connaissances personnelles et universitaires : C'est le cas de 5 enseignants. Il est intéressant de remarquer que parmi les enseignants ayant cité leurs connaissances en arithmétique comme sources de travail, sont représentés aussi bien des enseignants ayant débuté il y a plus de 20 ans que des enseignants ayant débuté plus récemment.

- Des publications officielles : 3 enseignants ont cité comme sources de travail le programme, les commentaires de stages des IPR et les journées inter-académiques.

Notons par ailleurs qu'un enseignant a cité comme référence un site Internet sur lequel se trouvent des cours et des exercices en ligne.

Deux points importants se dégagent de ces réponses :

Tout d'abord, très peu d'enseignants se contentent de manuels de spécialité mathématique pour préparer leur cours d'arithmétique (8 sur 41). La plupart font référence aux autres sources de travail décrites ci-dessus. Cela permet aux enseignants de disposer d'un espace de liberté conséquent pour préparer leur cours. Une variabilité relativement grande devrait donc apparaître dans les réponses aux questions suivantes.
Il est par ailleurs intéressant de noter que les ouvrages des IREM sont très souvent utilisés. Cela s'explique sans doute par le fait que la réintroduction de l'arithmétique est récente et qu'elle se fasse de plus sous un angle particulier qui privilégie la niche algorithmique. Devant cette nouveauté, nous pouvons supposer que les enseignants se sont penchés sur les publications des IREM pour réfléchir à la construction de leur cours. En effet, les ouvrages de l'IREM d'Aix-Marseille et de celui de Clermont-Ferrand (les plus cités par les enseignants) proposent tous les deux des cours d'arithmétique ainsi que des réflexions plus larges pouvant permettre à un enseignant de nourrir ses choix.

L'autre point intéressant qui ressort de ces résultats est le pourcentage non négligeable d'enseignants se référant à des manuels des années 70, à des ouvrages de niveau universitaire ou à leurs propres connaissances en la matière (connaissances que nous assimilons à des connaissances de type universitaires[70]). Ces ouvrages abordent l'arithmétique sous l'angle des structures algébriques qui étaient au programme de terminale dans les années 70.
Ceci va dans le sens de notre conclusion à l'analyse écologique de manuels de 1971 à 2002. En effet, nous avons noté que dans les trois manuels analysés, quasiment aucun exercice ne porte sur l'aspect algorithmique de l'arithmétique (si ce n'est des exercices d'application de l'algorithme d'Euclide et de la décomposition en facteurs premiers, deux algorithmes qui étaient au programme d'arithmétique des années 70). De fait, les exercices de ces manuels diffèrent finalement assez peu de ceux que l'on pouvait trouver dans les années 70 (sauf en ce qui concerne les exercices portant sur les structures de **Z** ou de **Z**/n**Z**). Cela peut expliquer pourquoi près d'un enseignant sur sept les a utilisés dans le cadre de la préparation de son cours d'arithmétique.

II.2 Questions autour des démonstrations

a) Les démonstrations sont-elles souvent données en cours d'arithmétique ?

- « *Avez-vous donné une démonstration de la division euclidienne ?* » : 95 % de réponses positives.
- « *Avez-vous donné une démonstration du théorème de Bézout ?* » : 100 % de réponses positives.
- « *Avez-vous donné une démonstration du théorème d'existence de la décomposition d'un entier naturel n³2 en produit de facteurs premiers ?* » : 77 % de réponses positives.

Nous pouvons donc valider notre hypothèse selon laquelle les démonstrations d'arithmétique sont, en grande majorité, faites en cours.

b) Les démonstrations données sont-elles de type constructif ?

Nous allons donner les réponses théorème par théorème :

- <u>La division euclidienne</u> : parmi les 41 enseignants qui ont donné cette démonstration, 21 l'ont faite en se servant des propriétés de **N** relatives à la relation d'ordre $\leq$, 11 en se basant sur la propriété d'Archimède[71], 7 en utilisant la méthode des soustractions successives, 1 avec les multiples successifs d'un nombre (cette démonstration utilise les propriétés de **N** relatives à la relation $\leq$ « sans le dire ») et 1 autre avec la partie entière de a/b.

[70] Notons que les connaissances universitaires d'arithmétique sont proches de celles qui étaient enseignées dans les années 70.
[71] Dans les démonstrations faites avec les propriétés de **N** relatives à la relation = ou avec la propriété d'Archimède, deux enseignants ont précisé qu'ils avaient également utilisé la notion de partie entière.

- Le théorème de Bézout : 65 % des enseignants ont retenu la démonstration se basant sur l'algorithme d'Euclide contre 35 % qui ont préféré la faire avec l'ensemble $E=\{am+bn/(m,n)\in \mathbf{Z}^2\}$ et la division euclidienne.

- Existence de la décomposition en facteurs premiers : parmi l'ensemble des 33 enseignants qui ont fait cette démonstration en cours, 2/3 d'entre eux l'ont fait en utilisant la méthode de descente, 1/3 ont utilisé la récurrence et aucun n'a choisi de la faire par l'absurde.

Contrairement aux choix qui ont été faits dans les trois manuels étudiés, certains professeurs ont donné une démonstration constructive de la division euclidienne. Par ailleurs, pour les deux autres théorèmes, une grande majorité d'entre eux ont proposé aux élèves des méthodes algorithmiques de démonstrations. Cependant, seuls 4 enseignants ont donné systématiquement des démonstrations constructives. Toutefois, aucun n'a présenté que des démonstrations non-constructives.
Nous voyons donc que les enseignants ont fait des choix différents de ceux des manuels, en faveur des démonstrations constructives. Les enseignants ont donc investi l'espace de liberté qu'ils conservent par rapport aux choix des manuels. Cela n'est pas sans conséquence sur la vie de la niche algorithmique dans les classes.

II.3 Questions autour du PGCD

a) « A quel moment avez-vous introduit la notion de PGCD ? »

Près de 1/6 des enseignants ont introduit le PGCD avant le cours sur les nombres premiers, tous les autres l'ont présenté après[72]. Ces résultats ne nous permettent pas pour l'instant d'affirmer que l'algorithme d'Euclide a été favorisé comme démarche de recherche d'un PGCD.

b) Question F1

« *Pour calculer le PGCD du couple d'entiers (11 475 ; 9 750), laquelle des deux méthodes utiliseriez-vous ?* »

Avant de détailler les réponses obtenues, nous donnons un tableau regroupant les types de réponses :

Algorithme d'Euclide	Décomposition	Pas de préférence	Ca dépend	Pas répondu
12 réponses	12 réponses	7 réponses	11 réponses	1 réponse

[72] Remarquons qu'un enseignant a joint à ce questionnaire le journal de la région de Grenoble N°9 de L'APMEP en nous précisant que l'an dernier, lors de la journée régionale, dans les discussions, les deux choix avaient été faits : « *Il y a deux choix possibles au niveau de l'ordre entre l'algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers : les deux choix sont apparus dans le groupe des participants* ». Notre questionnement à ce sujet témoigne donc d'un questionnement qui existe parmi les enseignants.

Algorithme d'Euclide : il est choisi par 12 enseignants interrogés et ce, pour les raisons suivantes :

- Il semble plus économique ou il paraît plus rapide car les nombres sont assez grands. (5 rép.)
- Il est d'une plus grande facilité. (1 rép.)
- C'est ce qui est à choisir car on ne demande que le calcul du PGCD. (1 rép.)
- Il est « *fait pour ça* ». (1 rép.)
- Il est plus judicieux en terme de programmation et convient autant aux grands nombres qu'aux petits. (2 rép.)
- C'est nouveau pour les élèves et « *pour adopter une nouveauté, il faut faire l'effort de s'y adapter, donc, il faut les pousser à pratiquer l'algorithme d'Euclide* ». (1 rép.)
- Utile pour trouver une relation du type au+bv=d. (1 rép.)

Décomposition en facteurs premiers : cette méthode est aussi choisie par 12 enseignants car :

- Les facteurs sont simples ou le calcul se fait de façon légère[73]. (2 rép.)
- Elle est intéressante pour le calcul à la main. (1 rép.)
- Elle est plus judicieuse et permet également « *d'avoir rapidement le PPCM, ainsi que d'autres diviseurs ou multiples* ». (1 rép.)
- C'est la méthode à choisir car l'exercice est « brut » et qu'une calculatrice donne la décomposition tandis que le programme PGCD donne seulement le résultat. (1 rép.)
- Cette méthode est plus rapide car les nombres donnés sont relativement petits et que les facteurs sont simples. (3 rép.)
- C'est plus de façon évidente. (1 rép.).
- Pas de justification donnée. (2 rép.)
- « *Moi je 'vois' que 9750 est divisible par 10 […] Donc je penche pour cette méthode. Pour les élèves, qui ont actuellement en général peu d'aptitude au calcul mental, le fait que ce soit 'd'assez grands nombres' peut faire pencher pour la division euclidienne. On est en présence ici d'un cas 'limite'* ». (1 rép.)

\- « *elle 'me parle' mieux… Mais les élèves ont préféré la 2^e.* ». (1 rép.)

« On ne choisit pas de méthode particulière » : c'est la réponse de 7 des enseignants interrogés :

- Il n'y a pas de préférence sur cet exemple, les deux méthodes sont quasi-équivalentes. (5 rép.)
- La meilleure méthode est celle que l'élève sait mieux faire. (2 rép.)

« Ca dépend » : 11 professeurs ont indiqué ceci comme réponse en précisant que cela pouvait dépendre :

- des programmes qu'on a dans la calculatrice. (1 rép.)
- du fait d'avoir à faire ou non les calculs à la main (car alors la décomposition est souvent source de moins d'erreurs). (1 rép.)
- de l'utilisation du résultat. (3 rép.)
- du fait de connaître la décomposition ou pas. (2 rép.)
- du contexte. (4 rép.)

---

[73] Un professeur écrit : « *Il est immédiat que 11 475 est multiple de 25, puis que 11 475 / 25 =459 est divisible par 9. Finalement 51=3´17 [...] De même 975 / 50 =195 qui est divisible par 5´3 et 195 / 15 =13 [...] On obtient ainsi le PGCD de façon très 'légère'.* »

Et enfin, 1 enseignant n'a pas répondu à cette question.

Lors de l'analyse a priori de cette question, nous avons précisé les raisons du choix du couple de nombres (11 475 ; 9 750). Comme nous l'avons supposé, ce couple ne permet pas de privilégier trivialement une méthode par rapport à une autre. En effet, les réponses se classent en trois catégories représentées de façon quasi équitable : l'algorithme d'Euclide, la décomposition en facteurs premiers et le choix de ne pas se prononcer sur la méthode.

Seuls deux enseignants paraissent catégoriques dans leur réponse. Un dit que l'algorithme d'Euclide « *est fait pour ça* » et semble donc exclure l'utilisation de la décomposition en facteurs premiers pour la recherche d'un PGCD. Et un autre écrit «*il est évident que la première paraît plus simple* », ce qui n'est pas le cas mais nous permet de penser qu'il est habitué à utiliser la décomposition en facteurs premiers. D'ailleurs, cette question « d'habitude » des enseignants qui les conduit à utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers est explicite dans trois réponses (cf. citations ci-dessus). Ces enseignants « voient » les facteurs premiers de 11 475 et de 9750, cela leur « parle mieux ». Ils sont cependant conscients que cette attitude est due à une maîtrise du calcul mental que n'ont pas les élèves d'aujourd'hui. Leurs réponses montrent que les connaissances qu'ils avaient étant élèves sont celles qu'ils utilisent encore aujourd'hui pour calculer un PGCD.

De plus, nous remarquons que des arguments de même nature sont avancés pour défendre indifféremment le choix de l'algorithme d'Euclide ou celui de la décomposition en facteurs premiers. Par exemple, si on regarde la taille des nombres, ils sont à la fois assez grands pour un enseignant, ce qui fait que l'algorithme d'Euclide est plus efficace et pour un autre, relativement petits, ce qui est en faveur de la décomposition en facteurs premiers. De même, le fait de posséder un programme dans une calculatrice joue autant en faveur de l'algorithme d'Euclide que de la décomposition en facteurs premiers. En effet, un professeur avance que la seconde méthode est plus judicieuse en terme de programmation tandis qu'un autre estime que le programme de décomposition est plus intéressant car il donne la décomposition alors que celui relatif à l'algorithme d'Euclide affiche juste le PGCD. Ainsi, les liens entre informatique et recherche algorithmique d'un PGCD, point central que nous avons soulevé dans les chapitres précédents et qui pouvait expliquer pourquoi l'arithmétique avait été réintroduite sous l'angle algorithmique, sont, sur un même exemple, interprétés de façon différente par les enseignants.

Ceci semble confirmer l'hypothèse que nous avons faite lors de l'analyse a priori de la question F3, à savoir : la différence de coût de calcul n'est pas facile à mettre en évidence lorsque l'on travaille avec des « petits » nombres. Il en découle que la position des enseignants sur ce sujet peut être contradictoire (voir exemple ci-dessus). L'analyse a posteriori de la question F3 devrait nous permettre de mieux cerner ce problème.

Nous voulions de plus, grâce à cette question, savoir si les techniques qu'utilise « naturellement » un enseignant pour calculer un PGCD peuvent influencer les choix de méthodes qu'il conseille aux élèves. Or, à la vue des résultats, il nous semble que ceci ne sera pas souvent le cas. En effet, peu d'enseignants nous ont semblé avoir choisi une méthode par « habitude » et beaucoup ont émis des conditions de réserve quant au contexte dans lequel la recherche du PGCD demandé prenait place.

c) Question F2

« *D'une manière générale, avez-vous conseillé à vos élèves une méthode de recherche de PGCD plutôt qu'une autre ? Si oui, laquelle ?* »

Nous avons dû nous montrer prudente au cours du dépouillement de cette question. En effet, certains enseignants ont répondu qu'ils n'avaient pas conseillé de méthode particulière à leurs élèves en ajoutant qu'ils leur avaient expliqué qu'il fallait choisir, par exemple, en fonction de la situation. Par contre, d'autres ont répondu oui en donnant exactement le même argument.
Nous avons donc décidé de comptabiliser dans l'ensemble des professeurs qui ont répondu oui les professeurs ayant répondu non mais ayant malgré tout donné certaines pistes aux élèves pour leur permettre de choisir une méthode de calcul de PGCD.

Nous obtenons donc comme résultats : près du 1/4 des enseignants n'ont pas conseillé de méthode de recherche de PGCD plutôt qu'une autre aux élèves et 3/4 l'ont fait.

Voyons maintenant quelle(s) méthode(s) a(ont) été conseillée(s) aux élèves et pourquoi :

- <u>Choisir dans tous les cas l'algorithme d'Euclide</u>
  - L'algorithme d'Euclide (sans commentaire). (4 rép.)
  - L'algorithme d'Euclide car il est plus dans l'esprit du programme et que ça permet d'arriver à une bonne dextérité dans le maniement de l'algorithme. (3 rép.)
  - L'algorithme d'Euclide car il est indispensable dans beaucoup de démonstrations même s'il semble plus long. (1 rép.)
  - « *L'algorithme d'Euclide, + performant pour les grands nombre et qui se programme facilement* ». (1 rép.)
- <u>Choisir plutôt la décomposition en facteurs premiers</u>
  - S'il faut utiliser Bézout, on privilégie l'algorithme d'Euclide sinon, décomposition en facteurs premiers. (1 rép.)
  - Décomposition en facteurs premiers. (1 rép.)
- <u>Choisir la méthode selon les nombres donnés</u>
  - L'algorithme d'Euclide dès qu'on ne voit pas les facteurs communs du premier coup d'œil. (1 rép.)
  - L'algorithme d'Euclide pour des raisons d'efficacité sauf si les nombres sont petits, auquel cas, il est préférable d'utiliser la décomposition en facteurs premiers ou lorsque a divise b. (4 rép.)
  - L'algorithme d'Euclide sauf si la décomposition en facteurs premiers est donnée dans l'exercice. (1 rép.)
- <u>Choisir la méthode en fonction de l'exercice</u>
  - Il faut lire l'exercice en entier et choisir en fonction du contexte. (12 rép.)
- <u>Choisir la calculatrice</u>
  - « *Je les ai vivement encouragés à utiliser la touche 'gcd' de leur calculatrice ou à programmer le calcul du PGCD*". (1 rép.)

Par ailleurs, trois des onze enseignants qui ont choisi de ne pas conseiller de méthode aux élèves l'ont justifié en disant qu'il faut connaître toutes les méthodes.

Comme nous en avons fait l'hypothèse de lors l'analyse a priori du questionnaire, une majorité d'enseignants a conseillé aux élèves d'utiliser l'algorithme d'Euclide, sauf dans certains cas particuliers. Par contre, nous ne nous attendions pas à ce que des enseignants conseillent de manière systématique la décomposition en facteurs premiers plutôt que l'algorithme d'Euclide pour la recherche d'un PGCD. En effet, le programme stipule clairement que « pour les déterminations de PGCD et de PPCM, on évitera le recours systématique à la décomposition en facteurs premiers ». Or 2 enseignants ont pourtant conseillé cette méthode. Cela est certes peu mais ne peut être négligé.

Notons qu'un enseignant a conseillé une troisième méthode que nous n'avions pas prévue : l'utilisation de la touche « gcd » de la calculatrice. Cela peut poser des problèmes lors de l'évaluation au baccalauréat car le contrat n'est alors plus le même : le calcul d'un PGCD doit être justifié soit par l'utilisation de l'algorithme d'Euclide soit par la décomposition en produits de facteurs premiers. On peut penser que des élèves de terminale S spécialité mathématique font la différence entre le contrat qui prévaut en classe et celui valable lors de l'examen[74].

En fait, nous nous apercevons que les enseignants attendent des élèves qu'ils fassent preuve d'une certaine autonomie sur ce sujet car beaucoup d'entre eux leur ont indiqué qu'il fallait en fait prendre du recul par rapport à l'ensemble de l'énoncé de l'exercice et des valeurs numériques proposées afin d'essayer de choisir la méthode la mieux adaptée à la situation.

d) Question F3

« *Avez-vous fait à vos élèves des commentaires sur l'efficacité respective de ces deux méthodes pour le calcul d'un PGCD ?* »

De même que dans la question F2, nous avons dû dépouiller les réponses à cette question avec une certaine prudence. Prenons l'exemple d'un enseignant qui renvoie à la réponse qu'il a fournie à la question F2 « *choisir en fonction de la situation* ». Or, dans cette question, nous voulions savoir si les professeurs avaient abordé la notion de l'efficacité en terme de coût de calcul des deux méthodes de recherche de PGCD et non en terme de pertinence par rapport aux questions posées dans un exercice. Nous avons donc classé ce type de réponse de l'ensemble des réponses « pas répondu ».

Les résultats sont les suivants : 15 des enseignants ont fait des commentaires sur l'efficacité respective des deux méthodes pour le calcul d'un PGCD, 13 ne l'ont pas fait et 15 n'ont pas répondu à cette question.

Les commentaires qu'ont pu faire les enseignants qui ont abordé ce sujet sont les suivants :

- On a comparé l'efficacité sur des exemples. (5 rép.)
- La règle étant d'effectuer, si possible, le minimum de calculs, l'algorithme d'Euclide est plus économique sur le plan des temps de calcul en général. (2 rép.)
- L'algorithme d'Euclide est plus simple, plus rapide et convient même quand la décomposition s'avère très coûteuse, par exemple : $10^{100}-1$ ou $10^{200}-1$. (3 rép.)
- Selon l'observation des deux nombres et l'inspiration des élèves, il faut opter pour la plus rapide. (1 rép.)

[74] S'ils manquent d'habitude pour un calcul rapide de PGCD « à la main », ils savent utiliser la calculatrice comme outil de vérification.

- L'algorithme d'Euclide est la meilleure méthode pour Bézout et pour la programmation. (1 rép.)
- « *Nous avons juste évoqué la difficulté de factoriser un entier en produit de facteurs premiers sans approfondir le sujet.* » (1 rép.)
- « *Je leur ai expliqué que la décomposition en nombres premiers est longue et que cette difficulté est à la base des cryptages les plus performants de l'information.* » (1 rép.)

Parmi les enseignants qui n'ont pas parlé de l'efficacité respective des deux méthodes, 2 ont justifié leur position :

- « *N'ayant pas pu les mettre en œuvre sur des grands nombres, avec des ordinateurs, les problèmes de temps de calcul, de coût de calcul qui se posent ne me paraissent pas suffisamment parlants pour les élèves.* » (1 rép.)
- « [...] *Le hasard des données peut mettre en faveur l'une ou l'autre des méthodes* [...] *certains élèves attendaient un avis net et précis, qu'ils n'ont pas obtenu.* » (1 rép.)

On voit donc que moins de la moitié des enseignants ont fait des commentaires sur l'efficacité respective de l'algorithme d'Euclide et de la décomposition en facteurs premiers pour la recherche d'un PGCD.
Par ailleurs, les enseignants qui ont comparé l'efficacité respective des deux méthodes ont généralement fait des commentaires à ce propos analogues à ceux faits par les manuels[75].

Cependant, ce qui nous intéresse le plus dans cette question, ce sont les arguments donnés par les deux enseignants qui ont choisi de ne pas parler de l'efficacité d'une méthode par rapport à l'autre aux élèves. Examinons ces deux arguments :
Un des enseignants dit que « *le hasard des données peut mettre en faveur l'une ou l'autre des méthodes* ». Cet argument est recevable lorsque l'on compare l'efficacité de ces deux méthodes sur les exemples proposés par les manuels étudiés ; aucune des valeurs numériques choisies ne favorise une méthode par rapport à l'autre.
Le second enseignant précise que : « *n'ayant pas pu les mettre en œuvre sur des grands nombres, avec des ordinateurs, les problèmes de temps de calcul, de coût de calcul qui se posent ne me paraissent pas suffisamment parlants pour les élèves.* » Cet argument nous semble particulièrement intéressant et confirme les doutes que nous avons émis dans l'analyse a priori de cette question. En effet, nous pensons que les capacités d'une calculatrice ne sont pas suffisantes pour mettre réellement en évidence la rapidité de l'algorithme d'Euclide par rapport à la décomposition en facteurs premiers sur les nombres qu'elle peut traiter.

Cela pose le problème de la pertinence de la volonté affichée par les programmes, et relayée par les manuels, de favoriser l'algorithme d'Euclide plutôt que la décomposition en facteurs premiers par rapport à ce que l'on peut faire concrètement en classe sur ce sujet. Cela pose par conséquent le problème de la pertinence de l'aspect algorithmique de l'arithmétique tel qu'il est mis en avant dans le programme.

[75] Voir la partie «comparaison des programmes » pour les arguments relatifs à la plus grande efficacité de l'algorithme d'Euclide et à sa facilité de programmation et la partie « comparaison des cours des manuels » pour les arguments du type : on a comparé l'efficacité sur des exemples.

II.4 Questions autour de la calculatrice

a) Question B

« *Avez-vous demandé à vos élèves de programmer certains algorithmes sur leur calculatrice ? Si oui, lesquels ? Cela a-t-il donné lieu à des activités ou à des corrections en classe ?* »

1 enseignant n'a pas répondu à cette question.
35 % des enseignants n'ont pas demandé aux élèves de programmer leur calculatrice en arithmétique. Par contre, les 65 % qui l'ont fait, ont en général demandé aux élèves d'avoir plusieurs algorithmes dans leur calculatrice, 3 en moyenne.

Nous avons classé les programmes suivant la fréquence de leur apparition :

1. Le PGCD (avec l'algorithme d'Euclide) : 20 fois.
2. Test de primalité : 13 fois.
3. Décomposition en facteurs premiers : 12 fois.
4. Division euclidienne : 11 fois.
5. Dresser la liste de tous les diviseurs d'un nombre : 9 fois.
6. Calculer les coefficients u et v de Bézout : 8 fois.
7. Écriture en base a : 1 fois.
8. Trouver le reste dans la division euclidienne de a^b par c : 1 fois.
9. Critère de divisibilité : 1 fois.
10. Trouver le PGCD et le PPCM : 1 fois

Certains enseignants n'ont pas répondu à la troisième partie de la question qui était de savoir s'ils avaient profité de ces programmes pour faire des activités ou des corrections en classe. Nous pouvons supposer dans ce cas que la réponse est non.

Parmi ceux qui ont répondu :

- 4 ont donné les corrigés en classe.
- 5 ont donné directement les programmes aux élèves avec, pour un enseignant, de rapides explications orales et pour un autre, quelques explications sur les structures logiques « *If... Then... Else, Boucle...* »
- 4 ont donné les programmes dans le cadre d'une activité. Un enseignant a rajouté que « *ça a pris du temps en classe* ».
- 1 a répondu : « *les élèves se sont arrangés entre eux car certains savent beaucoup mieux programmer que moi* ».
- 1 enseignant a travaillé sur l'algorithme mathématique : « *pas d'activités ni de correction en classe. Nous avons juste essayé de mettre en place l'algorithme. Pb : langages des calculatrices trop différents.* »
- Un enseignant a précisé la progression des séances qu'il a consacrées à la programmation :
  « *Traité en plusieurs séances :*
  - *écriture sommaire de l'algorithme (en Français)*
  - *écriture formalisée de l'algorithme.*

- *écriture du programme.*
- *Tests et recherche des limites du programme. »*

Ainsi que nous l'avons supposé, une forte majorité d'enseignants, les 3/4, ont souhaité que les élèves disposent de programmes dans leur calculatrice. Ceci corrobore notre hypothèse selon laquelle la programmation des algorithmes peut être l'occasion de travailler sur la notion de démarche algorithmique qui est l'un des objectifs du programme d'arithmétique.

Cependant, d'après ce qui ressort du questionnaire, peu d'enseignants, en donnant quelques explications sur les langages de programmation ou en construisant une séquence complète sur la programmation d'algorithmes mathématiques, ont pu développer ce travail sur les démarches algorithmiques. Notre hypothèse selon laquelle les liens existants entre programmation et algorithme pouvaient faire vivre la niche algorithmique n'est pas viable dans la quasi-totalité des classes. Les raisons à cela sont diverses : manque de temps, calculatrices des élèves très différentes les unes des autres, enseignants non formés à la programmation, élèves ne sachant pas programmer, etc.

Par ailleurs, nous pouvons légitimement nous interroger sur l'utilité de faire programmer autant d'algorithmes aux élèves. En effet, lors de notre analyse des exercices proposés par les manuels, nous avons constaté que peu d'entre eux pouvaient être résolus en faisant « tourner un programme ».
Nous faisons aussi l'hypothèse suivante : la plupart des exercices posés par les enseignants doivent être de même nature que ceux proposés dans les manuels (les exercices « *Avec ordinateur* » de Dec98 sont ici écartés). En effet, même si des disparités existent entre les manuels, nous avons cependant observé une constance entre eux : extrêmement peu d'exercices nécessitent l'emploi d'une calculatrice. La tâche la plus couramment demandée dans les manuels est de montrer qu'un nombre N(n) est divisible par un nombre m[76]. « Faire tourner un programme » ne peut être une technique de résolution d'exercices relatifs à ce type de tâche. Ainsi, les six programmes les plus souvent utilisés peuvent, au plus, permettre de vérifier un résultat dans certains exercices.

b) Question C

« Dans les exercices que vous avez donnés en arithmétique, jugez-vous que l'usage de la calculatrice en était un élément : dont on pouvait se passer, assez important, important, indispensable ? »

Dans cette question, plusieurs cases pouvaient être cochées par un enseignant ; 3 enseignants n'ont pas répondu et 44 cases ont été cochées au total.

Dont on pouvait se passer	16 rep.
Assez important	14 rep.
Important	10 rep.
Indispensable	4 rep.

Nous constatons qu'un tiers des exercices d'arithmétique posés par les enseignants ne nécessitent pas l'utilisation d'une calculatrice pour leur résolution. Comme nous l'avons supposé dans l'analyse a priori, cette proportion ne nous permet cependant pas de conclure

[76] Voir l'analyse praxéologique des exercices des trois manuels de 1998 proposée en annexe au chapitre B2.

que les exercices d'arithmétique ont changé de façon significative entre les années 70 et maintenant. Le fait qu'un seul enseignant ait estimé que l'usage de la calculatrice était un élément indispensable des exercices d'arithmétique tend à montrer que la nature des exercices n'a pas trop évolué entre ces deux périodes. Les réponses à la question suivante devraient nous permettre d'approfondir notre analyse sur le rôle et la place des calculatrices dans l'enseignement de l'arithmétique.

c) Question D

« Avez-vous proposé à vos élèves des exercices ou des activités dans lesquels la calculatrice était indispensable ? Si oui, la raison en était : un travail sur les grands nombres, un T.P. ou exercice de programmation, autre(s) (précisez) »

Un enseignant n'a pas répondu.
40 % des enseignants ayant répondu estiment n'avoir pas donné d'exercices dans lesquels la calculatrice était indispensable contre 60 % pour lesquels l'outil calculatrice était indispensable pour certains exercices.
Parmi les exercices qui nécessitent l'emploi d'une calculatrice, la moitié porte sur les grands nombres, près d'1/3 sont des exercices ou des T.P. de programmation et les autres relèvent de sujets différents.
Ces autres sujets sont :

- la primalité
- la recherche de conditions suffisantes
- les équations ax+by=n à résoudre avec un programme ou par tabulation avec la formule $y = \frac{n - ax}{b}$
- les conjectures
- la recherche de contre-exemples
- le contrôle de résultats
- la recherche de diviseurs

Près des 2/3 des enseignants ont posé des exercices que l'on ne peut résoudre sans calculatrice. Ceci tend à prouver que, malgré les réponses à la question C, tous les exercices que l'on peut trouver dans les manuels d'arithmétique ou donner aux élèves n'auraient pas pu se faire au début des années 70. Ne serait-ce que parce qu'il est très fastidieux d'effectuer des calculs sur des grands nombres sans calculatrice ou de trouver toutes les étapes de l'algorithme d'Euclide en faisant les calculs uniquement à la main.

Dans notre analyse a priori, nous avons souligné que nous voulions savoir si les exercices, posés par les professeurs, pour lesquels la calculatrice est un élément indispensable de résolution, étaient du même type que ceux rencontrés dans les manuels. C'est le cas pour une large majorité d'entre eux : les exercices portant sur les grands nombres ou les T.P. de programmation représentent un peu plus des 3/4 des exercices pour lesquels une calculatrice est indispensable.
Mais nous trouvons aussi d'autres d'exercices plus marginaux comme la recherche d'une condition suffisante, d'un contre-exemple ou un travail sur les conjectures. Nous ne savons pas si ces exercices sont du même type que ceux proposés par Dec98 dans les chapitres « Avec ordinateur ». Nous ne pouvons pas conclure que l'aspect algorithmique de

l'arithmétique ait été effectivement travaillé dans ces exercices. Ils sont cependant très intéressants car ils permettent d'entrer dans une véritable démarche de recherche en mathématiques : poser une conjecture, rechercher un contre-exemple, etc.

d) Question E

« *Avez-vous utilisé d'autres moyens informatiques ? Si oui, lesquels (ordinateur, tableur, logiciel de calcul…) ? Les exercices faits avec un ordinateur auraient-ils pu être faits avec une calculatrice ?* »

Seuls 2 enseignants ont utilisé des moyens informatiques autres que la calculatrice.
Un a en fait écrit en Pascal et en QBasic les programmes que les élèves ont mis dans leur calculatrice pour ceux intéressés et ayant un ordinateur chez eux. L'autre s'est servi d'une T.I. 92 reliée à une tablette de rétroprojection car : « *Les élèves ne possèdent pas tous des calculatrices permettant, sans programmation préalable, les décompositions en facteurs premiers, par exemple.* »

Ceci confirme l'analyse que nous avons faite de la question F3, à savoir que l'outil informatique n'est pas utilisé pour faire vivre la niche algorithmique dans les classes. Par ailleurs, il n'est pas utilisé non plus pour dépasser les limites des calculatrices et travailler sur des nombres « véritablement » grands.

Par ailleurs, deux enseignants ayant répondu « non » ont tenu à préciser que :

- « O*n avait beaucoup de mal au lycée à accéder aux quelques ordinateurs disponibles. Cependant la plupart des élèves avaient des T.I. 89 avec DERIVE* » (1 rép.)
- « *Pas d'accès en salle informatique à ce jour*. » (1 rép.)

Des contraintes matérielles ont donc empêché les enseignants de faire certaines fois les choix qu'ils auraient peut-être souhaité faire.

e) Question G

« Voici l'énoncé d'un exercice :
'Le mathématicien Lagrange conjectura la propriété suivante : tout nombre impair $n=5$ peut s'écrire sous la forme $n=2p+q$, avec p et q premiers. Par exemple : $51=2\times23+5$. Ecrire un programme permettant pour un entier impair $n=5$ donné, de déterminer un couple (p,q) de nombres premiers tels que $n=2p+q$. (Cette conjecture n'est toujours pas démontrée.)'
Jugez-vous que cet exercice soit un exercice d'arithmétique ? Pourquoi ?
Poseriez vous un tel exercice à vos élèves ? Pourquoi ? »

Nous présentons les réponses obtenues en croisant les réponses à la première question (jugez-vous que cet exercice soit un exercice d'arithmétique) avec le fait d'envisager de poser ou non un tel exercice en classe.

Jugez-vous que cet exercice soit un exercice d'arithmétique ?

Poseriez vous un tel exercice ?		OUI	NON	Ne se prononce pas	Pas répondu	Total
	OUI	11	7	4	0	22
	NON	10	6	2	1	19
	Pas répondu	1	0	0	1	2
	Total	22	13	6	2	43

22 enseignants pensent que cet exercice est un exercice d'arithmétique, 13 pensent que ce n'est pas un exercice d'arithmétique, 6 ne se sont pas prononcés et 2 n'ont pas souhaité répondre à cette question.

Nous avons classé dans «Ne se prononce pas » les enseignants qui donnent des éléments de réponses à la question mais qui ne prennent pas explicitement position. Voici les commentaires qu'ils ont fait :

- « *Cet exercice peut effectivement être rattaché à l'arithmétique de terminale S [...] Le principal travail consiste cependant à construire l'algorithme et le programme.* »
- « *Il me semble que l'on peut faire réfléchir à un tel exercice en arithmétique [...]* »
- « *Cet exercice mobilise des compétences en arithmétique [...] Mais son principal intérêt me semple plutôt être dans l'utilisation de l'informatique pour essayer de prendre en défaut cette conjecture.* »
- « *Cet exercice me paraît très intéressant, dans l'hypothèse où, avec plus de temps, j'aurai pu faire un peu 'd'algorithmique' avec eux [...]* »

<u>Raisons qui font que certains enseignants le considèrent comme un exercice d'arithmétique</u> :

- On travaille dans **N**.
- Il y a les notions de nombres premiers et de nombres impairs.
- Il y a un test de primalité.
- C'est un exercice d'arithmétique dans son énoncé et dans le travail demandé.
- « *D'abord l'arithmétique me semble un domaine dans lequel on peut initier nos élèves à la programmation. Ensuite une des méthodes de résolution qui ne s'applique guère facilement dans d'autres domaines que l'arithmétique est la méthode des essais.* »
- Bien sûr, évidemment.

<u>Raisons qui font que certains enseignants ne le considèrent pas comme un exercice d'arithmétique</u> :

- C'est plus un problème d'informatique ou de programmation.

- C'est en trop grande rupture avec les raisonnements demandés en Terminale S spécialité, ce n'est donc pas un exercice d'arithmétique de Terminale S spécialité mathématique.
- « *Je considère que l'exercice proposé ne relève pas de l'arithmétique (contrairement à la conjecture sous-jacente) car sa résolution ne me semble pas mettre en œuvre des propriétés des structures algébriques de **N** et **Z** (en dehors, évidemment, du caractère fini des parties bornées qui assurent la terminaison des algorithmes). J'estime qu'il s'agit plus d'un exercice d'algorithmique.* »

Nous pouvons constater que les avis des enseignants sont partagés sur le fait que cet exercice soit ou non un exercice d'arithmétique.

Des arguments d'un même type sont avancés à la fois pour défendre le fait que cet exercice est un exercice d'arithmétique et pour défendre le fait qu'il n'en est pas un.
En effet, des enseignants estiment que c'est un exercice d'arithmétique dans le travail qui est demandé (à savoir écrire un programme pour «tester » une conjecture d'arithmétique) alors que certains pensent justement que ce travail relève plus d'un exercice d'informatique ou de programmation que d'un exercice d'arithmétique. Nous retrouvons au travers de ces arguments la problématique soulevée dans l'analyse a priori de cette question : ici, l'arithmétique a un rôle d'outil pour résoudre l'exercice ; ce n'est pas l'objet de l'exercice car l'énoncé demande uniquement d'écrire un programme. Cependant, cet argument a plus souvent été avancé pour dire que cet exercice n'est pas un exercice d'arithmétique que pour le contraire. Ainsi, le fait que l'arithmétique soit un outil pour résoudre un exercice amène bon nombre d'enseignants à ne pas considérer cet exercice comme faisant partie des exercices d'arithmétique.

Nous trouvons aussi dans les réponses des enseignants deux autres types d'arguments qui peuvent jouer en faveur d'une prise de position ou de l'autre :

- C'est le cas du type de raisonnement à mettre en œuvre pour résoudre cet exercice. Pour un enseignant, le fait que cet exercice fasse appel à la méthode des essais, qui est, selon lui, surtout une méthode d'arithmétique, suffit pour répondre positivement à la question posée. Par contre, pour d'autres enseignants, le raisonnement demandé dans cet exercice est beaucoup trop éloigné des raisonnements d'arithmétique de la classe de terminale S. Cet argument rejoint, comme nous le verrons dans l'analyse de la seconde partie de cette question, une préoccupation constante des professeurs qui est de préparer au mieux leurs élèves au baccalauréat.

- Le dernier type d'argument est très intéressant et pose un véritable problème : celui de la définition de ce qu'est l'arithmétique. Pour beaucoup d'enseignants, le fait de travailler dans **Z** ou **N**, ou de parler de nombres impairs ou de nombres premiers suffit à faire de cet exercice un exercice d'arithmétique. Cependant, pour un enseignant, un exercice est un exercice d'arithmétique uniquement dans la mesure où il met « *en œuvre des propriétés des structures algébriques de **N** et **Z*** ».

En ce qui concerne la seconde partie de la question, 22 enseignants pourraient poser cet exercice aux élèves, sous conditions pour certains, 19 ne le poseraient pas et 2 n'ont pas répondu à la question.

Les résultats de cette question sont assez surprenants. En effet, ce nouveau genre d'exercices nous avait paru marginal lors de l'étude des manuels. De plus, à la vue des réponses des enseignants en ce qui concerne les questions précédentes relatives à l'usage de la calculatrice, nous ne pensions pas qu'autant de professeurs affirmeraient pouvoir poser un tel exercice aux élèves. Cependant, leurs réponses à la question D nous permettent d'affirmer que même s'ils peuvent donner un tel exercice en classe, quasiment aucun d'entre eux ne l'a fait. En effet, un seul enseignant a posé des exercices dans lesquels l'usage d'une calculatrice est indispensable et qui portent sur des conjectures ou la recherche de contre-exemples.

Notons par ailleurs que certains enseignants ayant répondu que cet exercice n'est pas, selon eux, un exercice d'arithmétique ont tout de même précisé dans cette question qu'ils pourraient poser un tel exercice à des élèves et inversement.

<u>Ceux qui le donneraient invoquent les raisons suivantes</u> :

- Pour l'aspect recherche.
- Intérêt de la programmation pour dépasser les limites des outils mathématiques ou pour montrer ce que l'informatique peut apporter aux mathématiques.
- Car c'est intéressant de temps en temps de réfléchir à un algorithme pour développer chez les élèves logique, clarté, rigueur. (Remarquons que l'enseignant qui donne cette réponse évoque un rapprochement des niches raisonnement et algorithmique que la plupart des professeurs ont tendance à dissocier).
- Pour l'aspect algorithmique.
- « *Exercice très intéressant sur le plan algorithmique, donc formateur (sur le plan méthodologique) en arithmétique.* »

Ils émettent cependant parfois des réticences et posent des conditions sur la manière dont ils le donneraient :

- La conjecture est intéressante, c'est un résultat simple d'apparence mais difficile à démontrer. Cependant l'aspect programmation n'est pas attirant.
- Le côté algorithme est intéressant et est dans l'esprit de cette spécialité mais par manque de temps, il pourrait, peut-être, être posé en DM.
- Il pourrait éventuellement être posé mais qu'aux élèves férus d'informatique.
- Éventuellement et de façon facultative car ça pourrait amuser les élèves.

<u>Ceux qui ne poseraient pas cet exercice aux élèves avancent les arguments suivants</u> :

- L'objectif est de préparer les élèves au baccalauréat et cet exercice n'est pas dans l'esprit d'un exercice de cet examen. Il est plus important de former les élèves aux raisonnements difficiles que l'on rencontre dans les exercices d'arithmétique, en particulier dans ceux donnés au Bac. (Cette position illustre clairement la dissociation faite par certains enseignants entre les niches raisonnement et algorithmique).
- L'algorithmique n'est pas rentrée dans les classes du lycée et l'objectif n'est pas d'en faire (sauf au niveau des algorithmes d'Euclide et d'Eratosthène).
- Les élèves ont des calculatrices différentes et les lycées ne sont pas équipés en matériel informatique.
- On ne fait pas de programmation avec les élèves et on n'a pas de formation à ce sujet.
- Exercice trop dur.

- Préférence pour les exercices de réflexion.
- Par manque de temps et les horaires de mathématiques diminuent.
- Les élèves n'y verraient pas d'intérêt.
- « *Il n'est pas intéressant à mes yeux de chercher à « l'aveuglette » un couple (dont l'existence n'est pas assurée de surcroît).* »
- « *Les élèves ont de grandes difficultés à conceptualiser un programme, avec des tests, des boucles ou des variables qui ont le même nom mais qui prennent des valeurs différentes.* »
- « *Je ne sais pas écrire le programme en question…* » et « *Je ne suis pas à l'aise avec la programmation en général.* »

Nous retrouvons, comme dans la première partie de cette question, des arguments qui servent à la fois à appuyer le fait qu'un enseignant peut donner cet exercice à des élèves et le fait qu'il ne le ferait pas.

Ainsi, l'aspect algorithme et l'aspect recherche de cet exercice rebutent ou au contraire intéressent les enseignants. Les raisonnements à mettre en œuvre dans un tel exercice sont aussi évoqués, aussi bien en sa faveur, qu'en sa défaveur. Pour des enseignants, un raisonnement algorithmique permet de développer clarté, rigueur et logique tandis que d'autres estiment que ce n'est pas un exercice de réflexion.

Par ailleurs, nous retrouvons fortement les contraintes extérieures qui pèsent sur les enseignants comme le fait d'avoir à préparer les élèves au Baccalauréat, le temps dont ils disposent en spécialité et le fait que les horaires de mathématiques diminuent, ce qui ne permet pas aux enseignants de passer du temps sur des exercices comme celui-ci.

Mais le type d'argument qui nous intéresse le plus est celui qui porte sur le bien fondé de la place d'un tel exercice dans le cadre de l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique. Un des enseignants qui ne poserait certainement pas un tel exercice par manque de temps précise cependant qu'il le trouve intéressant et, surtout, dans l'esprit de cette spécialité. D'un autre coté, un enseignant, lui, dit clairement qu'il ne poserait pas un tel exercice car l'algorithmique n'est pas rentrée dans les classes du lycée et que « *l'objectif n'est pas d'en faire* ».

Nous pouvons nous interroger sur la viabilité de la niche algorithmique de l'arithmétique si l'aspect algorithme de l'arithmétique est uniquement exploité lorsque les élèves appliquent l'algorithme d'Euclide ou celui d'Eratosthène. Cette interrogation est aussi présente quand des enseignants écrivent qu'ils ne poseraient pas un tel exercice car les élèves ont tous des calculatrices différentes, ou car les lycées ne sont pas équipés en matériel informatique ou même encore car ils ne sont pas eux-mêmes formés à ces nouveaux outils. Nous sommes là en face de contraintes institutionnelles qui peuvent être un frein à la viabilité de la niche algorithmique.

CONCLUSION

Nous avons dans l'ensemble vérifié les hypothèses faites dans l'analyse a priori de ce questionnaire. Les réponses aux questions sur la calculatrice et la dernière question ont apporté de nouveaux éléments. Nous ne nous attendions pas en effet à ce que l'outil calculatrice soit autant utilisé par les enseignants, comme le montre le nombre important d'algorithmes qu'ils ont demandé aux élèves de programmer.

Un autre élément surprenant est la fréquence des démonstrations constructives des trois principaux théorèmes d'arithmétique, d'autant que ce fait est contraire à la tendance observée dans les manuels.

Espace de liberté des enseignants : Quelle(s) conséquence(s) sur la vie des savoirs ?

L'analyse a posteriori du questionnaire a permis de montrer que les enseignants ont, en arithmétique, investi l'espace de liberté dont ils disposaient par rapport au programme et aux manuels pour construire leur cours. Dans cette analyse, nous avons en effet eu l'occasion de constater que chacune des questions permettait une grande surface de choix et que ces choix, lorsqu'ils étaient faits, étaient généralement très différents.

Cependant, nous n'avons pas toujours pu, par le biais de ce questionnaire, mettre en évidence quelles étaient les raisons qui avaient motivé les décisions des enseignants en ce qui concerne les démonstrations choisies dans le cours d'arithmétique.

Nous avons pu néanmoins être éclairée sur ces raisons lorsque les choix à faire touchaient la calculatrice ou les moyens informatiques. Deux contraintes ont semblé peser fortement sur les choix des enseignants à ce niveau :

- Des contraintes institutionnelles mais qui ne permettent pas aux enseignants de faire obligatoirement les choix qu'ils désirent. Ce sont des contraintes de type « matériel » dues au système d'enseignement. Un enseignant les énumère dans le questionnaire : les élèves n'ont « *pas tous les mêmes moyens* *(calculatrice, PC...). De plus, les moyens au Lycée sont tels qu'il est très difficile d'utiliser la programmation pour ce type de question (classes surchargées ; matériel désuet...). D'autre part : la diminution des horaires de math ne favorise pas cette démarche* ».
- Des contraintes liées au poids de la préparation à l'examen : « *L'objectif est de préparer les élèves au bac. [...] Cet exercice (question G) n'est absolument pas dans l'esprit d'un exercice à 5 points du bac [...]* »
- Des contraintes d'ordre « idéologique » quant à l'utilisation des calculatrices et de l'informatique en classe. Citons à cet effet un enseignant : « *Je ne poserai pas un tel exercice (question G) à mes élèves. Je n'ai pas de 'passion' particulière pour les outils de calcul et je préfère toujours ce qui s'obtient par la réflexion et le raisonnement sans qu'il soit nécessaire d'utiliser une 'machinerie lourde'.* »

Ce questionnaire a permis de mettre en avant le fait que les enseignants avaient, en arithmétique, de réels choix à faire, que ces choix étaient généralement réfléchis, plus que guidés par des habitudes d'enseignement présentes dans l'institution scolaire. En effet, un enseignant nous donne un commentaire général dans la question G: « *Il (l'exercice de la question G) pose le problème de la formation que l'on souhaite dispenser à des élèves de T.S.* ».
Les choix des enseignants semblent, d'après l'analyse a posteriori du questionnaire, avoir des implications futures importantes et non similaires en terme de savoir qui va être enseigné de manière effective aux élèves.

Ceci a des répercussions au niveau de l'écologie de l'arithmétique apprêtée. En effet, nous avons constaté que, suivant les choix faits par les enseignants, la niche algorithmique était plus ou moins viable. Cette analyse nous a permis de dégager les deux hypothèses suivantes :

- La niche algorithmique vit, dans une large majorité des classes, par le biais de démonstrations constructives, ce qui était moins le cas dans les manuels.
- Elle ne vit cependant que dans certaines classes à travers les liens qu'elle entretient avec la programmation. En effet, les choix des enseignants en ce qui concerne l'utilisation des moyens informatiques sont très disparates.

Si la vie de la niche algorithmique reste problématique dans le savoir apprêté et, par conséquent, dans le savoir enseigné, il n'en va pas de même de celle de la niche raisonnement. En effet, les nombreux commentaires que les enseignants ont ajoutés à notre questionnaire (alors qu'aucune question ne les y incitait a priori) montrent l'importance de cette fonction de l'arithmétique pour eux. Ces choix faits par les enseignants « du terrain » peuvent expliquer les réajustements de programme de 2002 évoquant explicitement cette niche dans le texte du savoir, alors qu'elle n'apparaissait pas dans le programme de 1998 (programme de référence des enseignants ayant répondu à notre questionnaire)

La niche raisonnement dans l'arithmétique apprêtée par les enseignants

Plusieurs enseignants, ont, dans leurs commentaires, parlé de la place du raisonnement en arithmétique. Nous allons citer certains des enseignants ayant mentionné ce sujet dans leur réponse :

> « *En arithmétique, la nécessité de maîtriser le raisonnement me paraît très intéressante pour la formation scientifique des élèves.* »

> « *Il me semble plus important de les former (les élèves) au raisonnement difficile qu'on rencontre dans les exercices d'arithmétique en particulier dans ceux donnés au bac.* »

> « *Ce cours d'arithmétique est un <u>lieu privilégié pour 'apprendre à raisonner'</u> on peut d'ailleurs faire une <u>typologie des différents exercices</u>.* »

> « *Pour ma part j'ai mis l'accent sur la démonstration et le raisonnement. <u>J'ai utilisé l'arithmétique pour leur enseigner les rudiments du raisonnement</u>.* »

Les choix des enseignants laissent donc une large place à la niche « raisonnement ». Cette niche est d'autant plus facile à faire vivre que les exercices d'arithmétique nécessitent souvent la mise en œuvre de raisonnements variés, que ce soit des raisonnements par récurrence, de type exhaustif, par disjonction de cas, par l'absurde, de type algorithmique ou encore par condition nécessaire et/ou suffisante.

Par ailleurs, il est clair que les contraintes identifiées précédemment –contraintes matérielles, poids de la préparation au baccalauréat, représentation des enseignants sur les mathématiques– favorisent la vie de la niche raisonnement.

Notons également que les commentaires des enseignants ont permis de dégager que la spécificité de la classe de terminale S spécialité mathématique représente une contrainte qui pèse fortement sur le fait que les enseignants mettent en avant l'aspect raisonnement dans leur cours d'arithmétique. En effet, comme le montrent les enquêtes réalisées par le groupe du Puy

de l'IREM de Clermont-Ferrand, une majorité des élèves de cette classe se destine à des études supérieures scientifiques, il faut donc les habituer au raisonnement, pour les préparer correctement.
Au niveau de l'ensemble des élèves de terminale S, les résultats sont les suivants :

> « Voici les résultats bruts de l'enquête menée auprès de 318 élèves de terminale S du département de Haute-Loire […] :
> Avez-vous choisi la spécialité mathématique : oui à 32,1 %
> Envisagez-vous de faire des études l'année prochaine :
> - En deug math : 7,8 %
> - Math sup : 10,4 %
> - Voie scientifique : 50,4 %
> - Autre voie (sport, droit, psycho etc.) 31,4 % » (Pelisse et Planchet 1999, p. 7)

Le pourcentage d'élèves se destinant vers un DEUG mathématique ou une classe préparatoire aux grandes écoles de type Math Sup augment lorsque l'on interroge uniquement les élèves de spécialité mathématique :

> « Cette deuxième enquête est une suite et un complément de la première partie afin de mieux connaître les élèves qui ont la spécialité math en Term S. 114 élèves ayant la spécialité math en Term S ont répondu au questionnaire :
> Le programme d'arithmétique vous semble :
> - Très intéressant : 19,3 %
> - Intéressant : 51,8 %
> - Peu intéressant : 20,2 %
> - Pas intéressant : 8,7 %
>
> Envisagez vous de faire des études l'année prochaine :
> - En deug math : 19,7 %
> - Math sup : 19,7 % » (Ibid., p. 18)

Pour les enseignants ayant répondu à notre questionnaire, les mathématiques du supérieur sont vues comme des mathématiques emblématiques du raisonnement et de la rigueur. Le fait que, dans une grande majorité, les élèves à qui ils font cours se destinent à des études scientifiques universitaires les conforte dans leur choix de présenter l'arithmétique en favorisant explicitement le raisonnement au détriment de l'aspect algorithmique proposé dans le programme.

En conclusion, nous avons vu dans les trois chapitres consacré à l'analyse institutionnelle que la première étape de la transposition didactique interne donnait lieu, dans le cas de l'arithmétique, à des modifications significatives du savoir à enseigner. Ces modifications peuvent en grande partie s'expliquer par le poids du système de contraintes institutionnelles qui pèsent sur les choix des auteurs de manuels et des enseignants mais également par la représentation que ceux-ci se font des mathématiques. Cet ensemble de contraintes ne permet pas de créer des conditions de vie favorable pour la niche algorithmique.

PARTIE C

ANALYSE DES PRATIQUES EN CLASSE

CHAPITRE C1

ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES : POINT DE VUE THEORIQUE ET CHOIX METHODOLOGIQUES

INTRODUCTION

Comme nous l'avons déjà évoqué en introduction, le processus de transposition didactique ne s'arrête pas au moment où un savoir, désigné comme étant à enseigner par la noosphère, est inscrit dans les programmes officiels d'enseignement. A la suite de cette «partie visible » (Chevallard 1991) du processus de transposition didactique, commence un autre travail, plus masqué, de transformation du savoir qui se situe, cette fois, au sein du système d'enseignement : la transposition didactique interne ou le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné. Ce travail est assumé par plusieurs acteurs dont les auteurs de manuels ou de documents à destination des enseignants, les enseignants ou encore les formateurs.
Nous faisons cependant l'hypothèse que ce sont les enseignants qui jouent un rôle central dans ce processus de transposition didactique interne. En effet, c'est à eux que revient la tâche finale de ce processus : l'enseignement effectif du savoir initialement désigné comme étant à enseigner.

Nous ne pouvons donc étudier la transposition didactique interne sans questionner le rôle spécifique de l'enseignant dans ce processus. Pour ce faire, nous avons été amenée à retravailler la notion d'apprêtage didactique du savoir, au sens de Chevallard (1991, p. 57). Ceci nous a amenée, entre autres, à distinguer deux étapes dans le processus de transposition didactique interne :

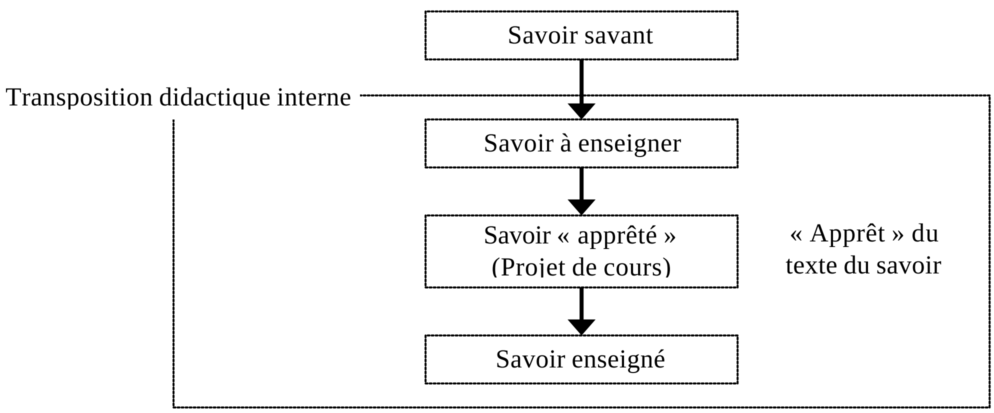


Fig. 8 : Les deux étages de la transposition didactique interne

Nous entendons par savoir apprêté par un enseignant le savoir produit par celui-ci à la suite de choix mathématiques et didactiques faits dans une perspective d'enseignement du savoir à enseigner. Ce savoir apprêté se situe à l'interface de deux « mondes » : emblématique de l'activité de l'enseignant en amont des pratiques en classe, il est également le moteur de son activité en classe.

Rappelons que pour analyser le processus de transposition didactique interne, nous avons fait le choix d'étudier l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique. Ce choix est motivé par deux raisons :

- L'arithmétique ayant été réintroduite dans les contenus d'enseignement en 1998 (au début de nos travaux) après une vingtaine d'années d'absence, le savoir à enseigner est encore visible, contrairement à des savoirs enseignés de plus longue date où la distance entre savoir à enseigner et savoir enseigné risque fort de s'être réduite au fil des ans. Nous faisons l'hypothèse que cette visibilité inhabituelle du savoir à enseigner facilite l'étude de la transposition didactique interne ;
- L'autonomie du contenu mathématique de l'arithmétique et l'isolement de cet enseignement de spécialité nous amènent à faire une seconde hypothèse de travail, celle d'une variabilité du savoir apprêté et du savoir enseigné.

Le schéma présenté ci-dessous illustre cette position spécifique du savoir apprêté, à l'interface des deux « mondes » sur l'exemple de l'arithmétique :

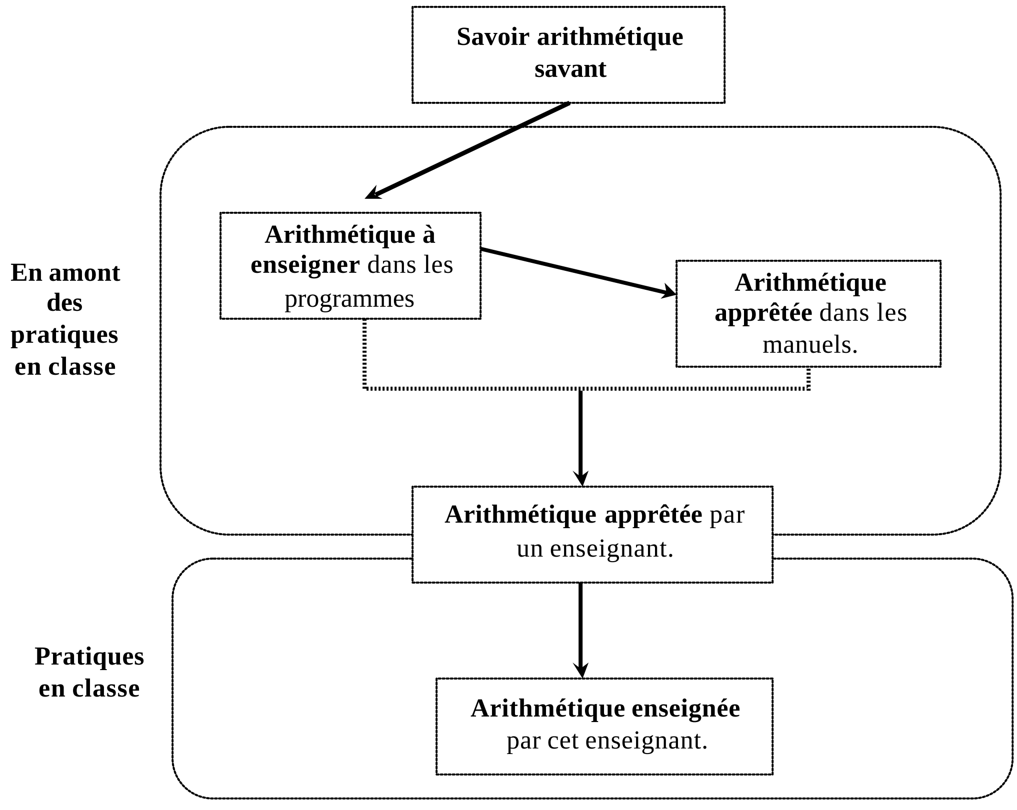


Fig. 9 : Le processus de transposition didactique interne de l'arithmétique

Précisons que l'enseignant n'est pas entièrement libre de ses choix d'apprêtage didactique du savoir. Son activité s'effectue en effet dans le cadre d'un système complexe de contraintes. Il conserve cependant un espace de liberté au sein de ce système et, de par ses choix, investit de façon particulière les marges de manœuvre dont il dispose.

Nous parlons de système complexe de contraintes car ces contraintes sont non seulement externes (« […] relatives à des dispositifs didactiques généraux et […] liées à des aspects épistémologiques de l'objet de savoir à enseigner, aux objectifs d'enseignements associés à cet objet, fixés par les programmes. (Coulange 2001, p. 308) »), mais également internes (relevant des « régulations de la relation didactique 'enseignant-élève' (Coulange, 2000) ») et elles pèsent conjointement sur chaque niveau[77] de l'activité de l'enseignant.

Nous allons donc analyser le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne en terme de contraintes et d'espace de liberté. Cette analyse se situe dans une « approche épistémologique » (Bosch, 2002) de l'étude des pratiques enseignantes et se développe dans différents cadres théoriques : la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), la Théorie des Situations Didactiques (TSD) et le cadre théorique d'analyse des pratiques enseignantes développé par Robert (2001).

Dans ce chapitre, nous allons commencer par présenter le cadre théorique initialement choisi pour analyser les pratiques enseignantes avant de mettre en évidence certaines limites des outils qu'il fournit dans le cadre de notre étude. Nous exposons ensuite la méthodologie suivie pour l'observation de l'activité de l'enseignant en classe. Enfin, nous détaillons la méthodologie d'analyse que nous avons mise en place pour dépasser les limites des outils théoriques utilisés.

I. LIMITES DES OUTILS THEORIQUES INITIALEMENT CHOISIS

Dans la lignée des travaux portant sur l'étude de la transposition didactique, nous nous sommes placée dans le cadre de la TAD. Ce cadre théorique offrant plusieurs outils permettant de décrire et d'analyser les pratiques enseignantes, nous les avions initialement choisis pour étudier le rôle de l'enseignant dans le passage du savoir apprêté au savoir enseigné. Pour pouvoir rendre compte des difficultés auxquelles nous nous sommes heurtée lorsque nous avons mis en œuvre ces outils pour l'analyse de nos protocoles, nous commençons par les resituer brièvement dans le cadre de la TAD.

I.1 Outils d'analyse des pratiques enseignantes dans le cadre de la TAD

Comme nous l'avons déjà développé dans la première partie de cette thèse, nous considérons tout enseignant comme sujet de plusieurs institutions (par exemple, de l'institution scolaire, de celles des professeurs de mathématiques ou encore des parents d'élèves). Ce point d'ancrage de la TAD, qui conduit à modéliser le professeur comme sujet d'une institution et non comme individu isolé, amène à introduire la notion de « rapport » pour appréhender les pratiques de ce dernier au sein de l'institution.

Modéliser l'enseignant comme sujet d'une institution permet d'identifier un système de contraintes qui pèsent sur lui du fait de son assujettissement à une institution donnée. Dans le cadre de celle-ci, les pratiques de l'enseignant doivent alors tendre à se rapprocher des normes

[77] Aussi bien au niveau du savoir apprêté qu'à celui du savoir enseigné.

de l'institution, autrement dit, l'enseignant doit apparaître comme un « bon » sujet de l'institution.

Si l'institution contraint les pratiques du professeur, celui-ci conserve malgré tout un espace de liberté, obtenu en faisant jouer «un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d'autres » (Chevallard 1992, p. 91).

Ainsi, un enseignant qui prépare son cours est assujetti à la fois au programme scolaire, aux différents manuels qu'il consulte mais il est également guidé par ses représentations sur les mathématiques et sur l'apprentissage des élèves. Ces différents assujettissements contraignent sa pratique tout en lui permettant de faire des choix d'apprêtage du savoir dans une relative liberté.

Se pose alors la question de la description et de l'analyse des pratiques de l'enseignant dans le cadre de l'institution scolaire. Un des principes fondateurs de la TAD est que la pratique d'un enseignant, comme toute pratique humaine, peut s'analyser selon un système de types de tâches T à accomplir, de techniques τ permettant de résoudre ces tâches, de technologies θ justifiant ces techniques et de théories Θ justifiant ces technologies, c'est-à-dire selon une organisation praxéologique $[T/\tau/\theta/\Theta]$

La figure 9 présentée en introduction montre que les types de tâches que doit accomplir l'enseignant sont nombreux. En effet, au niveau du savoir apprêté, le professeur doit non seulement construire –reconstruire– une organisation praxéologique mathématique qui représente ce que l'élève doit étudier mais il doit également envisager une manière d'aider l'élève dans son étude. Autrement dit, dans son projet de cours, l'enseignant doit reconstruire une organisation mathématique (OM) en l'insérant dans un projet didactique. Pour cela, il doit « trouver une réponse au problème praxéologique […] qui est le sien » (Chevallard 2002a) à savoir, construire une praxéologie didactique ou organisation didactique (OD) lui permettant de mettre en place l'OM reconstruite en classe.

Pour résumer, analyser les pratiques enseignantes en termes de praxéologies revient à analyser l'OM reconstruite par le professeur ainsi que l'OD mise en œuvre pour permettre l'étude de cette OM.

Il est important de souligner que l'analyse des OM reconstruites par l'enseignant peut se mener indépendamment de l'analyse des OD permettant de les mettre en place. Au contraire, non seulement l'OD est «contrainte » par l'OM qu'elle doit mettre en place mais l'OM reconstruite dépend également fortement de cette OD :

> « Cette détermination réciproque, ou codétermination, entre le mathématique et le didactique constitue, selon Yves Chevallard, 'le principe fondateur des didactiques, au moins au sens qu'a donné Guy Brousseau à ce terme'. (Chevallard 2001) » (Bosch & Gascon 2002, p. 29)

Des outils de description des OM existent et permettent de restituer la dynamique de celles-ci (Chevallard 1999, p. 229). En effet, la description des OM en terme d'OM ponctuelles ou sujets (OM renvoyant à une unique tâche), d'OM locales ou thèmes (OM organisant le regroupement d'un ensemble de types de tâches autour d'une technologie), d'OM régionales ou secteurs (OM organisée par un amalgame d'OM locales autour de la théorie) et d'OM globales ou domaines (regroupement de plusieurs OM régionales) permet de distinguer

différents niveaux d'OM et de tenir compte de la dynamique existant en ces OM de différents niveaux[78].
Par ailleurs, la dynamique des OM peut également être interrogée par la dialectique ancien/nouveau (Chevallard 1991) proposée par la mise en texte du savoir par l'enseignant – par son apprêtage didactique du savoir–, dialectique qui structure le temps didactique et son avancée.

Pour ce qui est des OD, une praxéologie didactique peut être interrogée en premier lieu sur le topos qu'elle crée pour l'élève et l'enseignant. En effet, lorsqu'un enseignant construit son projet de cours, il doit prévoir un partage des responsabilités par rapport au savoir incluant chacun des acteurs de l'étude. Envisager un cours magistral ou une séance d'exercices ou encore de travaux dirigés n'est pas équivalent quant à l'autonomie didactique qui sera celle de l'élève. Créer un topos pour l'élève est une des premières tâches didactiques à laquelle doit répondre un enseignant, tâche qui est généralement problématique.

Par ailleurs, une OD « peut être analysée, en première approximation, en interrogeant la manière dont elle réalise les différents moments de l'étude » d'une OM ponctuelle [T/τ/θ/Θ] (Chevallard 2002a, p. 14). Il définit les six moments didactiques suivants :

1) La première rencontre avec T ;
2) L'exploration du type de tâches T et l'émergence d'une technique τ relative à ce type de tâches ;
3) La construction de l'environnement technologico-théorique [θ/Θ] ;
4) Le travail de la technique τ ;
5) L'institutionnalisation ;
6) L'évaluation.

Ainsi, analyser le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne en termes d'OM et d'OD revient à se poser la question du système de contraintes et de conditions dans lequel il fait ses choix d'OM et d'OD. La problématique écologique permet d'identifier ce système de contraintes qui déterminent ces choix.
Questionner les OD ou OM existantes nécessite d'analyser l'ensemble des contraintes pouvant peser sur ces organisations praxéologiques, de la plus générique à la plus spécifique. En effet, comme le souligne Chevallard (1999) :

> « […] les problèmes spécifiques de l'étude d'une organisation mathématique locale particulière restent en général mal posés tant qu'on n'analyse pas les « choix » didactiques, conscients ou non, faits à des niveaux organisationnels de moindre spécificité. » (Chevallard 1999, p. 246)

Il propose une échelle de hiérarchie des niveaux de détermination de ces contraintes[79] qui permet « un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire » (Chevallard 2002, p. 42). Cette échelle compte huit niveaux dont chacun impose un système de contraintes aux OM et aux OD tout en permettant les conditions nécessaires à leur mise en place :

[78] Pour un exemple d'utilisation, se reporter au travail de Matheron (1999) sur le théorème de Thalès.
[79] Pour une analyse de la dialectique des choix effectifs d'un enseignant et des choix possibles en identifiant les niveaux de détermination didactiques dont relèvent ces choix, voir Noirfalise &Wozniak (2002).

Générique ⟷ Spécifique

Société (-2)? Ecole (-1)? Pédagogie (0)? Discipline (1)? Domaine (2)? Secteur (3)? Thème (4)? Sujet (5)

Fig. 10 : Echelle de hiérarchie des niveaux de détermination surdidactiques et mathématiques

Cette échelle commence donc du niveau de généricité le plus élevé, le niveau -2, celui de la société pour descendre vers des niveaux de spécificité mathématique de plus en plus forte jusqu'au niveau 5, celui du sujet.

I.2 Limites de ces outils pour notre étude

La principale difficulté à laquelle nous avons été confrontée en essayant d'analyser l'activité d'un enseignant en termes de praxéologies didactiques et mathématiques a été celle de la description des OD mises en place par l'enseignant. En effet, l'analyse de l'OD selon les moments de l'étude qu'elle réalise reste insuffisante pour décrire l'OD en question en tenant compte de sa dynamique propre, de même que de celle l'OM qu'elle vise à mettre en place.

Nous avons consulté plusieurs travaux[80] s'intéressant à l'analyse des pratiques enseignantes en utilisant les outils de la TAD. Ces recherches proposent généralement une description et une analyse des OD mises en place par les professeurs pour l'étude d'un sujet (OM ponctuelle) ou d'un thème (OM locale) mathématique.

Selon nous, la description en termes de moments ne permet pas, pour l'instant, de prendre en compte la description des praxéologies didactiques enseignantes lors de la mise en place d'OM mathématiques plus complexes (OM régionales ou secteur d'étude) ni d'analyser complètement l'insertion de l'OM étudiée (quel que soit son niveau) dans l'ensemble du projet de cours d'un enseignant. Ce problème est également soulevé par Bosch et Gascón (2002) :

> « On ne doit cependant pas oublier que, si une OD peut être décrite, en première approximation, à partir de sa structuration en termes de moments, il n'en reste pas moins que les moments ne suffisent pas à une telle description :car l'explicitation des différents moments de l'étude va partir, avant tout, de ce donné qu'est l'OM à mettre en place, qu'il va falloir être capable d'analyser en éléments ni 'trop gros' ni 'trop fins' pour ne pas tuer sa 'structure vitale', tout en montrant comment se réalise ou pourrait se réaliser sa 'recomposition'. En d'autres termes, la description que nous pourrons fournir des OD relatives à une OM donnée va fortement être déterminée par la manière dont nous allons décrire cette OM. Inversement, si nous restons fidèles à la conception initiale de la didactique des mathématiques comme 'épistémologie expérimentale', la description des OD nous apportera des lumières sur cette OM qui, aux yeux du chercheur, ne devrait jamais devenir complètement transparente. » (Ibid., p. 32)

Pour faire un parallèle avec les niveaux de hiérarchisation des OM présentés plus haut, il nous semble que les moments permettent de décrire, au plus, des OD « locales », i.e. des OD visant à mettre en œuvre des OM locales.

Comment décrire les OD visant à mettre en place des OM de niveau de moindre spécificité que celui du thème ? Comment décrire des OD visant mettre en place des OM ponctuelles ?

---

[80] Nous pensons notamment à l'ensemble des T.D. « Structure, fonctionnement et écologie des organisations didactiques » du cours sur les praxéologies didactiques de la onzième école d'été de didactique des mathématiques et au travail de Bosch, Espinoza et Gascón (2003).

Pour décrire en partie ces OD, nous avons choisi de procéder à un découpage des praxéologies didactiques des enseignants qui puisse être mis en parallèle avec celui des praxéologies mathématiques (de même que la mise en place d'une OM locale peut être décrite en première approximation par les moments de l'étude).
Souhaitant pouvoir décrire la dynamique des choix didactiques des enseignants au niveau de l'arithmétique apprêtée, c'est-à-dire au niveau de leur reconstruction d'un texte du savoir sur l'arithmétique, nous avons introduit un découpage de ce texte du savoir en chapitres, parties et paragraphes.
Nous reprenons la définition usuelle de ces termes. Rappelons tout d'abord que l'arithmétique est un domaine d'étude. Pour apprêter ce domaine, l'enseignant va généralement choisir de le partager en plusieurs « morceaux » que nous appelons chapitres. Chacun de ces chapitres va ensuite être découpé en parties, elles-mêmes divisées en paragraphes.
Cette structuration du savoir apprêté n'est pas une structuration d'ordre exclusivement mathématique. En effet, un ensemble de contraintes, dont certaines sont d'ordre avant tout didactique (comme le nombre de séances dont il dispose ou encore les dispositifs didactiques qu'il envisage), conduisent l'enseignant à produire un tel découpage du savoir.

L'objectif d'introduire un tel découpage du savoir apprêté est de pouvoir le comparer à la structure du domaine mathématique traité. Le découpage en chapitres, parties et paragraphes du projet de cours de l'enseignant se rapproche-t-il du découpage en secteurs, thèmes et sujets d'étude du domaine mathématique étudié ? Quelles contraintes peuvent expliquer les choix d'un enseignant de procéder à tel découpage du savoir plutôt qu'un autre ? Quelle en est l'influence sur la dynamique des OM mises en place ? Sur celle des OD de niveaux plus spécifiques ?

Pour apporter des éléments de réponse à ces questions, nous utilisons également des outils d'analyse des pratiques enseignantes provenant d'autres cadres théoriques de la recherche en didactique des mathématiques française (la TSD et le cadre théorique d'analyse des pratiques enseignantes développé par Robert (2001)) comme nous allons maintenant le montrer.

II. METHODOLOGIE D'ANALYSE ET OUVERTURE VERS D'AUTRES CADRES THEORIQUES D'ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES

Nous avons rappelé en introduction notre volonté d'étudier la transposition didactique interne en prenant pour exemple l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématique. Le fait de s'intéresser à un domaine d'étude dans son ensemble nous a conduit à mettre en place le processus de recueil de données suivant.

II.1 Recueil de données et construction des protocoles

Pour pouvoir caractériser le savoir enseigné en arithmétique, nous avons effectué durant l'année scolaire 2000/2001 une observation naturaliste de deux enseignantes, P1 et P2.

Ces deux professeurs sont expérimentées ; elles enseignent depuis plusieurs années en classe de terminale S, et enseignent toutes deux l'arithmétique depuis sa réintroduction dans les programmes en 1998.

P1 était l'un des 43 enseignants ayant rempli notre questionnaire pendant l'année scolaire 1999/2000. Elle faisait partie des rares enseignants qui avaient intégré l'outil informatique dans leur cours d'arithmétique et qui semblaient faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique dans leur classe.

Nous avions à l'époque contacté une autre enseignante qui avait rempli notre questionnaire et qui suivait peu « l'esprit » du programme d'arithmétique[81]. Cette enseignante n'étant pas disposée à nous accueillir dans sa classe, nous avons contacté P2 qui a accepté de nous ouvrir les portes de sa classe. Nous lui avons alors demandé de remplir notre questionnaire, mais elle n'a pas souhaité le faire.

Nous avons ainsi assisté à l'ensemble des séances d'arithmétique des deux classes observées soit 13 séances de 2 heures pour la classe de P1 et 11 séances de 2 heures pour la classe de P2.

Dans ces deux classes, nous avons :

- Enregistré sur cassettes audio l'intégralité des séances ;
- Pris des notes sur l'ensemble des traces écrites au tableau ainsi que sur le déroulement des séances ;
- Recueilli l'ensemble des documents distribués aux élèves ;
- Photocopié l'ensemble des copies corrigées des élèves à tous les D.S ;
- Conduit un entretien en fin d'année avec chacune des deux enseignantes.

Notons également que P1 avait accepté de nous accueillir dans sa classe à condition que nous nous engagions à passer dans les rangs en même temps qu'elle pendant les phases de recherche d'exercices afin de l'aider à répondre aux questions des élèves. Notre intervention dans la classe de P1 s'est limitée à répondre à des questions que les élèves nous posaient individuellement.

A l'issue de ces observations, nous avons reconstruit le déroulement du cours à partir de nos notes d'observation et des documents distribués dans la classe. Ce déroulement du cours est en annexe à ce chapitre.

Il est évident que nous ne pouvions pas matériellement retranscrire l'ensemble des enregistrements des séances. Après comparaison de ces deux cours, nous avons choisi de transcrire la séance sur la division euclidienne. Nous avons ensuite découpé le protocole obtenu en épisodes qui recouvrent une unité d'objet mathématique. Ce protocole est disponible en annexe à ce chapitre.

Par ailleurs, nous avons également retranscrit une séance particulière, l'unique de programmation informatique de P1, ainsi que l'entretien fait avec les deux enseignantes. Ces trois documents sont également en annexe à ce chapitre.

[81] Elle privilégiait systématiquement la décomposition en produit de facteurs premiers à l'algorithme d'Euclide.

II.2 Méthodologie d'analyse par zooms successifs

Rappelons l'ensemble de questions qui guide notre analyse du rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne :

> **Q_2** : Quels sont les assujettissements institutionnels d'un enseignant ? Quel système de contraintes et de conditions pesant sur les choix mathématiques et didactiques[82] de ce dernier ces assujettissements définissent-ils ? Quel est le « poids » de l'organisation didactique sur la détermination de l'organisation mathématique qu'elle doit mettre en place ? Réciproquement, quel est le « poids » de l'organisation mathématique sur la détermination de l'organisation didactique visant à la mettre en place ?

Or, pour apporter des éléments de réponse à ces questions en s'appuyant sur l'exemple d'un enseignement d'un domaine d'étude (l'arithmétique), se posent de nouvelles questions d'ordre méthodologique sur la description des pratiques enseignantes :

> **Q_3** : Comment décrire les composants et la structure des organisations didactiques au niveau d'un domaine d'étude ? Comment décrire la «dynamique » de ces organisations didactiques ?

Pour tenter d'y répondre, nous procédons à une analyse des pratiques enseignantes par zooms successifs. Ces zooms se font en prenant appui sur la dynamique des OM en descendant vers des niveaux de détermination mathématiques de plus en plus spécifiques.

Nous commençons tout d'abord, dans le chapitre C2, par analyser les pratiques de P1 et P2 sur un domaine d'étude dans son ensemble : l'arithmétique.
Nous « zoomons » ensuite, dans le chapitre C3, sur la division euclidienne en analysant quelle est l'OM locale construite autour du théorème de la division euclidienne et quelles sont les OM régionales construites autour de ce même théorème.
Nous « zoomons » finalement, dans le chapitre C4, sur l'OM locale de la division euclidienne et, plus précisément, sur le moment de l'institutionnalisation du bloc technologico-théorique de cette OM : la démonstration du théorème de la division euclidienne.

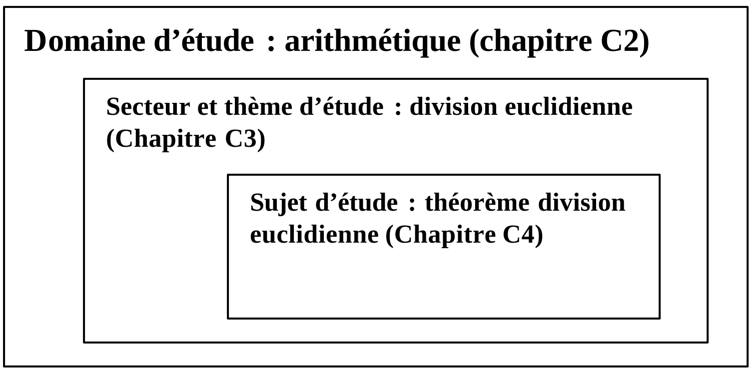


Fig.10 : Zooms successifs sur les niveaux de détermination des OM en arithmétique

[82] Cela revient entre autre à se poser la question de l'écologie des organisations didactiques.

Nous allons suivre ce découpage des OM pour identifier, à chacun des niveaux, les OD didactiques mises en oeuvre par P1 et P2 pour mettre en place ces OM ainsi que les systèmes de contraintes qui pèsent sur leurs choix mathématiques et didactiques.

Cette analyse par zooms successifs nous permet également d'étudier le passage du savoir apprêté au savoir enseigné car les analyses menées dans les chapitres C2 et C3 se font sur le savoir apprêté par P1 et P2 tandis que celle menée dans le chapitre C4 s'appuie sur le déroulement de la séance sur la division euclidienne.

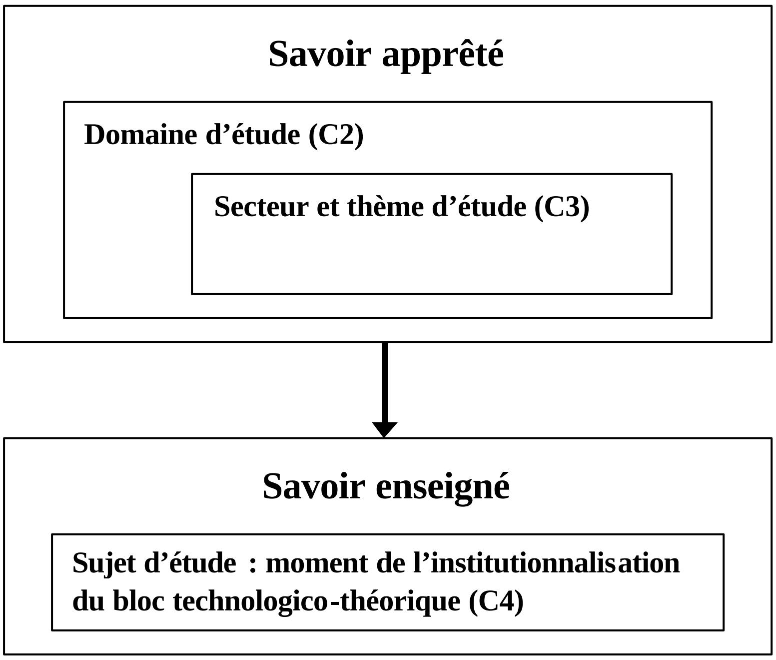


Fig. 11 : Zooms successifs sur les niveaux de détermination mathématique dans le cadre de la transposition didactique interne

Nous avons choisi de nous centrer uniquement sur un sujet d'étude au niveau du savoir enseigné pour des raisons matérielles évidentes[83]. Nous avons tenu cependant à analyser les choix d'apprêtage faits par P1 et P2 dans les niveaux supérieurs de détermination mathématique. En effet, analyser ces choix nous permet d'avoir accès aux différents niveaux (surdidactiques et mathématiques) de contraintes qui pèsent sur les enseignants et nous offre des renseignements précieux pour comprendre le déroulement effectif d'une séance en classe.

Nous allons maintenant entrer dans le détail des analyses menées dans les chapitres C2, C3 et C4 en décrivant notamment les outils théoriques que nous avons utilisés.

II.3 Le niveau du domaine d'étude

L'objectif de ce chapitre est d'analyser les pratiques de P1 et P2 sur un domaine d'étude dans son ensemble : l'arithmétique. Sur ce domaine, nous essayons d'articuler l'analyse des choix

[83] Il nous était matériellement impensable dans le temps dont nous disposions pour notre recherche de transcrire et analyser l'ensemble des 24 séances de 2 heures que nous avons observées.

mathématiques de ces deux enseignantes sur les différents secteurs et thèmes d'étude qu'elles reconstruisent avec l'analyse de leurs praxéologies didactiques, afin de caractériser le savoir apprêté par chacune d'entre elles.

Pour ce faire, nous commençons par une présentation générale du déroulement des séances des deux classes observées. Nous introduisons pour cela la notion de mode de fonctionnement didactique en classe d'un enseignant. Par mode de fonctionnement didactique, nous entendons dégager les routines qui caractérisent l'activité d'un enseignant, indépendamment (du moins, en partie) du contenu mathématique enseigné. Il nous semble important de décrire ces modes de fonctionnement car ils contraignent les choix mathématiques que peut faire un enseignant.
Nous rejoignons en cela les travaux développés dans la lignée de ceux de Robert (2001) qui modélisent les pratiques enseignantes comme un système complexe (les différentes dimensions de ces pratiques ne sont pas indépendantes), stable (il existe des choix globaux, stables sur une période de temps donnée, qui « président aux singularisations des déroulements en classe ») et cohérent (il existe une unité derrière les choix des enseignants, quel que soit le niveau où ces choix ont été faits)[84].
Pour identifier ces modes de fonctionnements didactiques, en plus d'une caractérisation des principaux types de séances mis en place par P1 et P2, nous avons mené une analyse du discours de ces deux enseignantes. Nous considérons en effet que chaque enseignant a une façon propre de faire cours qui influence ses choix mathématiques et didactiques (certains donnent beaucoup d'exemples, d'autres explicitent plus ou moins leur démarches, etc.) et que cette façon peut être en partie appréhendée à travers leur discours. Pour cette analyse, nous avons adapté à la spécificité de notre étude la méthodologie d'analyse du discours des enseignants proposée par Hache (2001). Cette méthodologie définit trois axes d'analyse du discours de l'enseignant : l'objet du discours (de quoi parle l'enseignement ?), la teneur du discours (en quels termes en parle-t-il ?) et la fonction du discours (dans quel but ?). Nous détaillons cette méthodologie dans le chapitre C2.

Nous passons ensuite à l'analyse des choix mathématiques et didactiques faits par P1 et P2 au niveau du domaine d'étude.
Pour objectiver ces analyses, nous introduisons dans un premier temps une reconstruction de l'OM à enseigner à partir du programme d'arithmétique de 1998.
Ensuite, nous reconstruisons un savoir apprêté « conforme » – ou « idoine » – à l'esprit du programme en nous appuyant sur un document, que l'on peut considérer comme proche de la noosphère, présentant un cours d'arithmétique qui a donné lieu à un enseignement effectif en classe. Cela nous offre un point de référence dans la comparaison des choix d'apprêtages du savoir effectués par P1 et P2 et nous permet d'identifier une partie des possibles ainsi qu'un ensemble de contraintes pesant sur les choix de P1 et P2.
Nous comparons alors les découpages du savoir en chapitres et parties faits par P1 et P2 au découpage mathématique en secteurs et thèmes proposé dans le programme.

Par ces analyses, nous essayons de répondre aux questions suivantes :

- Le découpage en chapitres, parties et paragraphes du projet de cours de l'enseignant se rapproche-t-il du découpage en secteurs, thèmes et sujets d'étude du domaine mathématique étudié ?
- Quelles contraintes (pédagogiques, didactiques ?) peuvent expliquer les choix d'un enseignant de procéder à tel découpage du savoir plutôt qu'un autre ?

[84] Voir Robert et Rogalsky (2003)

- Quelle en est l'influence sur la dynamique des OM mises en place ?
- Peut-on en prévoir l'influence sur le choix des OD de niveaux plus spécifiques ?

II.4 Le niveau du secteur et du thème d'étude

Nous « zoomons » ensuite sur la division euclidienne. L'objectif est alors de caractériser l'OM locale reconstruite par P1 et P2 autour du théorème de la division euclidienne et de voir quelles sont les OM régionales définies autour de ce théorème. En existe-t-il ? Si oui, lesquelles ? Si non, quelles raisons permettent d'expliquer cette absence ?

Toujours dans un souci d'objectivation, nous reconstruisons dans un premier temps deux OM locales et régionales à enseigner autour de la division euclidienne : l'une à partir du programme d'arithmétique de 1971 et l'autre à partir de celui de 1998.
Nous choisissons ensuite deux manuels ou documents afin de construire deux OM locales et régionales apprêtées autour de la division euclidienne, l'une « conforme » à l'esprit du programme de 1971, l'autre à celui de 1998.
Nous reconstruisons alors le savoir apprêté par P1 et P2 autour de la division euclidienne à partir des traces écrites au tableau, des documents distribués aux élèves et des éléments extraits de l'entretien nous informant sur les choix mathématiques et didactiques de P1 et P2.
Nous comparons ensuite les savoirs apprêtés par chacune des deux enseignantes entre eux et avec le savoir à enseigner et le savoir apprêté « conforme » à l'esprit du programme.

A travers ces analyses, nous essayons de mettre en évidence en quoi les choix mathématiques et didactiques effectués au niveau du domaine d'étude pèsent sur les choix d'apprêtage du savoir au niveau du secteur et du thème d'étude.

Nous essayons également de dégager, au travers de ces choix, un ensemble de contraintes qui vont provoquer des modifications du projet de cours lors de sa réalisation effective en classe.

II.5 Le niveau de l'institutionnalisation du bloc technologico-théorique

Nous « zoomons » finalement sur l'OM locale de la division euclidienne et plus spécifiquement sur la séance de cours sur la division euclidienne.
L'objectif de ce chapitre est la caractérisation du savoir enseigné sur le bloc technologico-théorique de l'OM locale division euclidienne.

Pour ce faire, à partir de l'analyse des protocoles des séances, nous reconstruisons l'OM locale enseignée sur la division euclidienne par chacune des deux enseignantes afin de la comparer avec l'OM locale apprêtée. Cette reconstruction se fait par une analyse des techniques didactiques utilisées par P1 et P2 pour mettre en place l'OM locale apprêtée en classe, ainsi qu'une analyse de leur gestion dans l'action des régulations de la relation didactique. Pour cette analyse, nous mettons en œuvre des outils de la TSD (la classification des contrats[85] définit par Brousseau (1995), les différents phénomènes didactiques comme

[85] Rechercher les contrats qui sont en œuvre dans une classe permet de « repérer la façon dont le professeur gère l'avancée de son projet et le rôle respectif du professeur et de l'élève dans la construction des connaissances et savoirs dans la classe » (Hersant, à paraître en 2004). Un enseignement se caractérise alors « par la recherche d'un équilibre entre plusieurs types de contrats en classant 'les régulations didactiques suivant la répartition des responsabilités entre le système qui diffuse une connaissance et celui qui la reçoit' » (Comiti 2002, p. 44)

l'effet Topaze, l'effet Jourdain, le glissement métacognitif (Brousseau 1986)) et nous nous appuyons sur des résultats obtenus sur les pratiques dans le cadre de cette théorie.
Nous n'avons pas analysé l'activité de P1 et P2 à l'aide du modèle de structuration du milieu car l'utilisation de ce modèle nous a posé des problèmes d'ordre méthodologique. Il faut en effet pouvoir recueillir «les informations nécessaires à la reconstruction d'un schéma de structuration complet » (Margolinas 1997, p. 49) pour mettre en œuvre ce modèle, informations dont nous ne disposions pas dans le dispositif d'observation que nous avions mis en place. Nous retenons donc du principe de structuration du milieu le fait que le professeur, quel que soit le niveau[86] dans lequel il se trouve, est en tension entre le niveau supérieur et le niveau inférieur :

> « Le professeur acteur en classe (P0) est toujours en tension entre : son projet d'enseignement (+1) et les réactions des élèves (-1). Mais même le professeur qui prépare une leçon (P+1) est en tension entre sa planification du thème mathématique à l'intérieur duquel s'insère la leçon (+2) et ce qu'il sait des conditions de la réalisation en classe (0). D'une façon générale, le professeur est ainsi pris entre des considérations qui le tirent en quelque sorte vers les élèves, et d'autres, qui proviennent de sa condition de professeur de mathématiques, et comme tel fortement assujetti à l'institution scolaire et à l'institution mathématique.

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon	+1
Niveau de la situation didactique	0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

Tableau 1. Résumé des niveaux d'activité du professeur » (Margolinas 2002, pp. 141-142)

Par l'analyse du cours sur la division euclidienne à l'aide de ces différents outils, nous mettons en évidence un ensemble d'éléments permettant d'expliquer l'écart entre l'OM apprêtée et l'OM enseignée. Nous essayons également d'identifier le système de contraintes internes qui pèse sur les régulations de la relation didactique faites par P1 et P2 ainsi que le système de contraintes issu du savoir apprêté qui influence le déroulement effectif du projet de cours.

Nous allons nous attacher, dans les trois chapitres qui suivent, à montrer la codétermination des OM et des OD à différents niveaux de détermination mathématique, du secteur au sujet d'étude. A chaque niveau, nous essayerons d'identifier quelles sont les contraintes qui pèsent sur les choix de l'enseignant et de montrer, comme le souligne Chevallard (2002) que « chaque niveau concourt à déterminer l'écologie des organisations mathématiques et des organisations didactiques par les points d'appui qu'il offre et les contraintes qu'il impose. » (Ibid., p. 51).

[86] Il s'agit ici des niveaux présentés dans le tableau ci-dessous.

CHAPITRE C2

OBSERVATIONS NATURALISTES DE DEUX ENSEIGNANTES : DIVERSITE DES PRATIQUES SUR UN DOMAINE D'ETUDE

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous portons un premier regard sur l'activité de l'enseignant en nous plaçant au niveau de détermination mathématique de moindre spécificité : le domaine d'étude. Comme nous l'avons souligné dans le chapitre C1, notre objectif principal, dans cette partie est d'analyser le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne en identifiant dans quel système de contraintes et de conditions il effectue ses choix mathématiques et didactiques. Cet objectif nous conduit à nous interroger sur le problème de la description des OD à tous les niveaux de l'activité de l'enseignant afin de pouvoir analyser les influences réciproques entre choix d'OM et choix d'OD.

Pour analyser les OD mises en œuvre par l'enseignant au niveau d'un domaine d'étude, nous avons introduit la notion de découpage du texte du savoir apprêté en chapitres, parties et paragraphes. Ce découpage n'est pas, a priori, un découpage effectué uniquement selon une logique mathématique d'exposition du savoir ; des choix d'ordre didactique interviennent dans sa mise en place.
Nous essayons dans ce chapitre d'aborder le problème de la codétermination des OM et des OD au niveau du domaine, des secteurs et des thèmes d'étude en analysant la dynamique existant entre le découpage mathématique et le découpage en chapitres, parties et paragraphes.

Se pose alors la question suivante : Quel système de contraintes pèse sur les choix de structuration du savoir apprêté faits par l'enseignant ?

Suivant Robert et Rogalski (2003), nous partons de l'hypothèse que les pratiques enseignantes forment un système complexe, stable et cohérent. Cette hypothèse nous amène à supposer l'existence d'un premier système de contraintes guidant les choix de l'enseignant que nous appelons le mode de fonctionnement didactique routinier, dont il nous faudra confirmer le poids. Existe-t-il d'autres contraintes pouvant expliquer les choix d'un enseignant de procéder à tel découpage plutôt qu'à un autre ?

Nous allons dans un premier temps identifier le mode de fonctionnement didactique des deux enseignantes observées, P1 et P2, en nous appuyant, d'une part, sur une description de leurs séances à partir de nos notes d'observation et, d'autre part, sur une analyse de leur discours. Nous analyserons ensuite le découpage qu'elles font du savoir apprêté en chapitres, parties et paragraphes.

Par ailleurs, comme l'objectif principal de cette recherche est l'étude de la transposition didactique interne de l'arithmétique, nous nous pencherons sur les choix mathématiques de P1

et P2 afin d'essayer de voir dans quelle mesure leur mode de fonctionnement didactique et leur structuration du savoir produit un écart entre le savoir à enseigner et le savoir apprêté.
Pour cela, nous menons une analyse écologique du savoir apprêté en nous centrant sur les points dégagés dans les analyses conduites dans la partie B. Ainsi, nous étudions les conditions de vie de la niche algorithmique dans le cours de P1 et P2 en examinant leurs choix de démonstration[87] et la place qu'elles accordent aux outils informatiques dans leur cours.

Notons que toutes ces analyses se font en intégrant un cours d'arithmétique nous servant de « référence » : le cours d'arithmétique mis en place durant l'année 1998/99 présenté dans une brochure éditée par l'IREM de Poitiers. Ce cours permet d'envisager d'autres possibles que les choix faits par P1 et P2 ; ce qui éclaire la spécificité de chacun des cours analysés.

I. PRATIQUES ROUTINIERES DES ENSEIGNANTS : PRESENTATION GENERALE DU FONCTIONNEMENT DES CLASSES

Lorsque l'on observe des enseignants, une variable méthodologique importante est l'ancienneté de ces derniers dans le corps professoral. En effet, au fil des années, les professeurs acquièrent une expérience du métier et adoptent des pratiques d'enseignement très stables que l'on peut qualifier de routinières :

> « Pour nous, assez rapidement dans la vie professionnelle d'un enseignant, ses pratiques deviennent stables et présentent une cohérence certaine. Elles sont organisées en un système complexe, cohérent et relèvent de certaines logiques imbriquées, voire hiérarchisées, qui composent et étayent cette cohérence. » (Butlen & alii 2002, p. 221)

Ces pratiques, liées au mode de fonctionnement des enseignants en classe, ne sont que faiblement dépendantes du contenu mathématique enseigné. Or, elles déterminent un ensemble de contraintes de niveau pédagogique qui pèsent sur leurs choix mathématiques et sur les organisations didactiques qu'ils mettent en place. Nous ne pouvons donc comprendre la cohérence des choix concernant les apprêtages didactiques du savoir des enseignants sans analyser leur mode de fonctionnement général en classe.

I.1 Mode de fonctionnement didactique en classe de P1

La classe de P1 compte 22 élèves. C'est l'une des deux classes de spécialité mathématique du lycée. Parmi ces 22 élèves, certains ont également P1 en cours obligatoire tandis que les autres ne l'ont que dans le cadre de la spécialité.

Voici, pour le programme d'arithmétique, la répartition globale des séances de P1 par type :

[87] Rappelons que nous nous intéressons à la place des notions d'ensemble et de relations, au théorème de l'existence et de l'unicité de la division euclidienne, à la définition du PGCD, au théorème de Bézout et à la démonstration de l'existence de la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers.

Cours	Exercices	T.P.	Programmation	D.S.	**Total**
6 séances	2 séances et demie	1 séance	1 séance	2 séances et demie	**13 séances soit 26 heures**

Fig. 12 : Répartition des séances d'arithmétique de P1 classées par type

Nous appelons **séances de cours**, les séances qui débutent par un cours magistral de P1. Ce cours dure au maximum 45 minutes, le reste du temps est ensuite consacré à la résolution d'exercices.
Pendant le cours, P1 est au tableau et a l'entière responsabilité de l'avancée de la leçon. Les élèves n'interviennent que très peu. Rarement sollicités par l'enseignante, ils prennent généralement la parole pour obtenir des précisions sur ce qui est écrit au tableau (problème de lisibilité, demande de confirmation etc.) ou pour demander une nouvelle explication sur un point délicat. Une fois le cours terminé, P1 distribue aux élèves une fiche d'exercices portant sur les notions qui viennent d'être introduites, indique le plan de travail au tableau (ordre dans lequel les exercices doivent être traités, rajout éventuel d'un exercice du manuel ou des annales) et laisse les élèves travailler en autonomie. La séance se déroule alors comme une séance d'exercices.

Les **séances d'exercices** s'appuient intégralement sur une fiche d'exercices que P1 distribue aux élèves. Ceux-ci peuvent alors avancer à leur rythme, en discutant avec leurs voisins proches. Pendant ce temps, P1 passe dans les rangs et répond aux questions des élèves. Souvent, la séance se termine par la distribution du corrigé de la fiche d'exercices.
P1 ne fait que très rarement passer un élève au tableau pour corriger un exercice[88] devant la classe. Pendant le temps de recherche des élèves, il peut lui arriver de donner une explication supplémentaire au tableau (un indice, une formule utile) ou de noter un point méthode si elle s'aperçoit qu'un nombre important d'élèves a les mêmes difficultés. Ces séances interviennent souvent à la suite d'une séance de cours sur laquelle P1 a prévu de faire faire aux élèves un grand nombre d'exercices.

La seule **séance de programmation** ressemble à une séance de cours. Pendant la première moitié de la séance, P1 commente des transparents qu'elle a préparés sur les programmes informatiques. Elle ne pose pas de questions aux élèves et ces derniers n'interviennent pas. Les élèves sont ensuite invités à rentrer les programmes dans leur calculatrice et à continuer la fiche d'exercices distribuée précédemment. P1 passe alors dans les rangs pour aider les élèves qui ont du mal à programmer leur calculatrice et répondre aux questions de ceux qui sont déjà passés aux exercices.

L'unique **séance de T.P.** est particulière dans le sens où c'est l'une des rares séances où des élèves sont envoyés au tableau pour corriger des exercices. Une partie de fiche de T.P. avait été donnée à chercher à la maison la séance précédente. En début de séance, P1 sépare le tableau en trois et envoie simultanément trois élèves au tableau pour corriger trois parties du T.P.. Quand ils ont fini de rédiger leur solution, les élèves retournent à leur place et P1 corrige leurs erreurs. Elle prend ensuite le relais et corrige elle-même au tableau la fin de la partie à chercher de la fiche de T.P.. Ensuite, les élèves doivent chercher la fin de cette fiche et P1 donne des éléments de correction au tableau.

[88] Des élèves sont passés au tableau durant la deuxième séance d'arithmétique pour corriger un exercice portant sur la récurrence et, en fin d'enseignement de l'arithmétique pour résoudre un exercice sur les équations diophantiennes.

L'organisation pédagogique de l'activité mathématique mise en place par P1 se caractérise par une dichotomie très marquée du point de vue de la topogénèse. Dans ce découpage, les élèves et l'enseignante occupent à tour de rôle l'ensemble de l'espace par rapport au savoir. Leurs places sont clairement définies : c'est tout d'abord à P1 de gérer le cours avant de disparaître et de donner à l'élève la responsabilité de l'avancée du travail, de façon individuelle. P1 crée ainsi une mémoire collective de la classe sur les objets du cours uniquement. Son approche pédagogique de l'enseignement est somme toute très classique. Elle ne s'inscrit pas dans le schéma à trois temps préconisé par le programme activités-synthèse-exercices mais dans un schéma à deux temps. C'est elle qui donne les concepts aux élèves mais elle leur laisse beaucoup de temps pour se les approprier et les travailler en classe, tout en leur donnant les moyens de continuer ce travail à la maison, en l'organisant notamment par le biais des fiches corrigées[89].

Ce type d'organisation pédagogique est extrêmement stable chez P1 ; il relève d'un choix explicite fait par cette enseignante :

> « P1 : [je] fonctionne beaucoup avec des exercices. Bon de toutes les façons on n'a pas énormément de temps mais c'est vrai que …
> L : Oui, pour le cours c'est vrai, en général maximum 45 minutes voir 40 et après beaucoup de feuilles d'exercices et chacun avance à son rythme.
> P1 : Oui voilà, c'est ça … Et puis obliger les élèves justement à apprendre à travailler avec des corrigés. Enfin, d'avoir une pédagogie qui permette à la fois bon d'être plus disponible je dirais pour les élèves les plus faibles de la classe en se disant que les plus rapides, ils avancent presque tous seuls et qu'on n'a pas à aller les voir. » (Extraits entretien P1)

Ce choix lui permet de répondre à deux contraintes très fortes qui pèsent sur tout enseignant de spécialité : préparer les élèves au baccalauréat et au post-bac. Dans la classe de P1, une grande majorité des élèves se destinent à intégrer une classe préparatoire aux grandes écoles ou à poursuivre des études universitaires scientifiques. Pour ces élèves, l'épreuve du baccalauréat ne pose généralement pas de problème. P1 a pour eux comme objectif principal de les former à une démarche de travail personnelle afin qu'ils puissent s'adapter à la spécificité de l'enseignement post-bac[90]. Travailler avec des fiches lui donne la possibilité de remplir cet objectif tout en dégageant du temps pour s'occuper plus spécifiquement des élèves les plus faibles de la classe, moins autonomes, afin de les préparer au Baccalauréat, qui n'est pas acquis pour eux.

Ces choix pédagogiques conduisent, comme nous l'avons vu, à un découpage très clair de la place occupée respectivement par les élèves et le professeur. Cette topogénèse organise la chronogénèse. En effet, les choix pédagogiques structurent, dans cette classe, l'avancée du temps didactique : il s'agit d'organiser chaque séance de 2 heures avec un minimum de cours pour pouvoir garder un maximum de temps pour les exercices. De cette organisation centrée sur la praxis et non sur le logos (les exercices sont le moteur de l'activité de cette classe) découle une « atomisation » des organisations mathématiques comme nous le verrons par la suite.

[89] Ces fiches proposent régulièrement plusieurs résolutions possibles pour un même exercice et peuvent donner des indices supplémentaires pour les exercices optionnels plus difficiles.

[90] « Le travail étudiant. C'est une seconde rupture qui atteint le jeune. Elle a trait à son rapport au travail scolaire : à un travail scolaire très accompagné […] au lycée succèdent d'autres formes ; que ce soit en prépa où les élèves sont débordés par la quantité de travail mais bien suivis par leurs professeurs ou en fac où ils sont très peu suivis jusqu'à s'imaginer qu'il n'y a pas de travail personnel… » (Aymes 1997, p. 20)

I.2 Mode de fonctionnement didactique en classe de P2

La classe de P2 compte 11 élèves, tous issus de sa classe de terminale obligatoire, et c'est la seule classe de spécialité mathématique du lycée.

En plus des D.S., P2 organise son enseignement selon un mode de fonctionnement didactique unique : les séances de cours.

Cours	D.S.	**Total**
9 séances et demie	1 séance et demie	**11 séances soit 22 heures**

Fig. 13 : Répartition des séances d'arithmétique de P2 classées par type

Les **séances de cours** de P2 sont très différentes de celles de P1. Tout d'abord, l'exposé du texte du savoir occupe une majeure partie de la séance. L'enseignante est au tableau et organise la leçon de façon très structurée. Elle interroge régulièrement les élèves au cours des démonstrations. Ceux-ci ne répondent que très peu spontanément. Ils sont souvent occupés à recopier le cours sur leur cahier et n'arrivent pas tous à suivre les interventions de P2 dans ce contexte-là. P2 reprend alors ses questions et obtient généralement des réponses par effet Topaze manifeste. Elle sollicite également les élèves pour des exercices d'application directe du cours qu'elle insère souvent à la suite de définitions.
Elle donne à la suite des principaux théorèmes ou à la fin du cours des exercices plus complexes. Ces exercices sont également intégrés au cours, les élèves les notent et les résolvent dans leur cahier de cours. Pendant ces exercices, les élèves disposent d'une autonomie de travail moindre que dans la classe de P1. En effet, comme les exercices sont insérés dans le cours, P2 laisse moins de temps et moins de liberté aux élèves dans leur recherche car le cours doit avancer. Elle laisse en général entre 5 et 10 minutes de travail personnel pendant lesquelles elle passe dans les rangs. Elle envoie ensuite un élève faire la correction de l'exercice au tableau, pendant que les autres recopient celle-ci dans leur cahier. L'élève au tableau est très guidé par P2 qui a des exigences de rédaction fortes. Elle reconnaît ne pas se mettre trop « à la portée des élèves » voire même « les bousculer un peu ». (Extraits entretien P2)

Dans cette organisation pédagogique, les topos respectifs de l'enseignante et des élèves ne sont pas aussi marqués que dans la classe de P1. En effet, P2 semble toujours prise entre la volonté d'accorder une place aux élèves en essayant de les faire participer pendant le cours, les envoyer au tableau pendant les exercices et la nécessité de reprendre la main pour tenir ses exigences de rigueur mathématique et faire avancer le cours.
Finalement, dans la topogénèse qu'elle crée, les élèves sont toujours sous contrôle et n'ont que très peu de responsabilité par rapport au savoir (leur temps de travail en autonomie est réduit). Il nous semble que pour P2, le travail autonome de l'élève est à réaliser essentiellement hors classe. Elle se plaint d'ailleurs du «manque de travail » des élèves. P2 attache une grande importance à ce que les élèves connaissent l'intégralité du cours, ce dont elle s'assure par des interrogations surprises (deux pour l'arithmétique), quand elle s'aperçoit que les élèves n'apprennent pas tous leur cours d'une semaine à l'autre.

Pour P2, c'est la chronogénèse qui organise la topogénèse de la classe. En effet, son activité est centrée sur le logos : elle accorde une place centrale au cours qui est le moteur de l'avancée du temps didactique. Les exercices ne sont là que pour illustrer le cours. Cette centration sur le logos la conduit à définir une topogénèse dans laquelle elle occupe la place principale, alors que sa conscience de la nécessité d'organiser une place à l'élève la conduit à abuser d'effets Topaze plus ou moins marqués, comme nous le verrons dans l'analyse du cours sur la division euclidienne dans le chapitre C4.

I.3 Mode de fonctionnement didactique dans la brochure de l'IREM de Poitiers

Le mode de fonctionnement didactique du cours décrit dans la brochure de l'IREM de Poitiers est encore différent des organisations pédagogiques des classes de P1 et P2. Dans cette classe, « les méthodes pédagogiques choisies visent avant tout à mettre l'élève en situation active et favorisent l'observation et la recherche » (IREM de Poitiers 2000, p. 239). Ainsi, les séances d'arithmétique sont découpées en trois temps : activités-synthèse-exercices. L'avancée du temps didactique se fait donc ici par une dialectique ancien/nouveau au sein de la séance plus marquée que dans les deux classes de P1 et P2.

Afin de mettre « l'élève en situation active », le choix est fait de faire travailler les élèves en groupes et avec le maximum d'outils informatiques :

> « Les élèves travaillent par petits groupes pour favoriser les échanges sur les méthodes, les conjectures. Ils disposent d'ordinateurs équipés du tableur *Excel* et du logiciel de calcul formel *Derive* pour y travailler individuellement ou non et de leurs calculatrices programmables. » (Ibid., p. 239)

Ce choix d'intégrer l'utilisation d'outils informatiques conformément à « l'esprit des programmes » (Ibid., p. 239) est rendu viable par l'organisation pédagogique en trois temps qui prévaut dans cette classe. Par ailleurs, l'intégration de ces outils nourrit également les activités car comme le souligne l'enseignant :

> « […] nous avons tenu à mettre en valeur l'aspect expérimental particulièrement dans les activités de découverte. Nous avons ainsi systématisé l'emploi du tableur Excel pour l'introduction des notions nouvelles. Cela a donc induit une approche et des types de démonstrations adaptés à cette démarche » (Ibid., p. 239)

Dans cette classe, le topos de l'élève est typique d'une approche constructiviste. C'est à lui que revient la « découverte » des concepts alors que dans les classes de P1 et P2, c'est au professeur que revient la charge d'introduire les concepts, même si P1 laisse ensuite une grande autonomie de travail aux élèves.

I.4 Analyse du discours de P1 et P2

Nous avons souligné dans le chapitre précédent que, pour caractériser le mode de fonctionnement didactique d'un enseignant, nous tenions compte de son discours. En effet, nous supposons que chaque enseignant a une façon qui lui est propre de faire cours, et qu'une analyse du discours peut nous permettre d'appréhender en partie cette composante personnelle de l'activité de l'enseignant.

Pour des raisons matérielles déjà évoquées, nous avons analysé le discours de P1 et P2 sur la séance de cours sur le théorème de la division euclidienne. Cette séance fera l'objet d'une analyse spécifique dans le chapitre C4 « Observations naturalistes de deux enseignantes : comparaison du savoir enseigné sur la division euclidienne ». Cependant, sur la base de nos observations, nous considérons l'analyse présentée ici comme représentative de la façon de faire cours de ces deux enseignantes, i.e. qu'elle permet de dégager de grandes tendances au delà des particularités spécifiques à chaque cours.

Par ailleurs, il nous semble d'autant plus important de tenir compte de cette composante de médiation dans la description du mode de fonctionnement didactique de P1 et P2 que, dans les deux classes, les élèves sont quasi-absents dans ces médiations. On ne les entend pas, ou peu. En effet, le cours de P1 est un cours magistral tandis que celui de P2 s'apparente à de la maïeutique[91]. Le discours de ces deux enseignantes est donc un élément essentiel sur lequel s'appuie l'activité mathématique de la classe et dont il faut tenir compte.

Pour mener à bien cette analyse, nous avons choisi de nous appuyer sur les outils développés par Hache (1999). Ces outils nous semblent pertinents dans le cadre de notre étude car, d'une part, ils ont été construits pour rendre compte de la caractérisation de « la fréquentation des mathématiques qu'un enseignant organise pour ses élèves en classe » (Hache 2001, p. 83) et, d'autre part, ils ont été développés pour pouvoir être appliqués à des protocoles présentant la même particularité que les nôtres : une quasi-absence des élèves.

a) Fréquentation des mathématiques organisée par l'enseignant

Dans sa thèse, Hache souhaite rendre compte de la diversité des pratiques professionnelles des enseignants. Or pour pouvoir évaluer cette diversité des pratiques, il faut au préalable, disposer d'outils permettant de décrire et d'analyser ces pratiques. Hache introduit pour cela la notion « d'univers mathématique » pour caractériser en partie le savoir enseigné :

> « Je ne retiens, a priori, des pratiques du professeur que ce qui dans la tâche qu'il se fixe, ou dans son activité, est lié à ce qui est supposé avoir de l'influence sur l'apprentissage en didactique des mathématiques. Je vais appeler univers mathématique élaboré en classe par le professeur face à ses élèves (à chaque élève), ou plus simplement univers, cette partie des pratiques du professeur. » (Hache 1999, p. 22)

Deux points essentiels (supposés avoir « de l'influence sur l'apprentissage en didactique des mathématiques ») vont alors être examinés au travers des activités de l'enseignant : la dévolution et le potentiel d'ouverture didactique de la tâche proposée. En effet, Hache base son étude sur les quatre hypothèses suivantes :

> « A propos de la relation entre élève(s)/savoir(s), je m'appuierai d'après ce qui précède, sur les hypothèses importantes suivantes :
>
> - La description de l'enseignement donné ci-dessus suppose déjà que <u>la dévolution à l'élève des tâches à effectuer, voire de son apprentissage, est fondamentale</u>[92], ce que je reprends.
> - L'apprentissage d'une notion se fait d'autant mieux que cette relation élève/savoir est composée d'allers et retours, par exemple entre des situations où la notion est travaillée dans un contexte donné et des situations où la notion est abordée de façon décontextualisée. Transversalement et de façon générale la diversité des points de vue, des cadres, des registres dans lesquels est rencontrée la notion aide à l'apprentissage, et notamment l'organisation et la structuration des connaissances (lesquelles sont primordiales). Par la suite, <u>j'évoquerai cette variabilité des approches proposées</u>

[91] De la classification de contrat fournit par Brousseau (1995), le contrat dit de maïeutique socratique est définit comme suit : « Le professeur choisit des questions telles que l'élève puisse en trouver les réponses avec ses propres ressources et il les organise de façon à modifier ses connaissances ou ses convictions. Le professeur modifie ses questions en fonction des réponses de l'élève. Mais le choix des questions n'est soumis à aucun contrat didactique, elles peuvent être très ouvertes ou très fermées […], elles pourraient a priori emprunter n'importe quelle voie rhétorique et obtenir la 'bonne' réponse par des analogies, des métaphores etc. » (Ibid., p. 25)

[92] C'est nous qui soulignons.

aux élèves en parlant de déploiement, d'ouverture didactique de la notion, ou plutôt de *potentiel d'ouverture didactique de la notion proposé aux élèves* : le mot potentiel rappelant que cette variété est celle qui est « offerte » à l'élève et pas nécessairement celle qu'il peut entendre ou qu'il peut s'approprier.

- Les deux phénomènes précédents (la dévolution et le potentiel d'ouverture didactique) peuvent être favorisés par les confrontations des points de vue entre élèves, par des échanges, une formalisation ou des explications.
- Les points précédents peuvent être favorisés par une médiation du professeur. Dans l'apprentissage tel qu'il est organisé dans le cadre scolaire, c'est en effet le professeur qui gère cette dévolution, qui propose des situations ayant un fort potentiel d'ouverture didactique, qui favorise ou non les échanges entre les élèves, qui suscite des explications. » (Ibid., p. 20)

Hache développe alors une méthode d'analyse du discours qui lui permet de « mesurer » la qualité de la dévolution que font les enseignants des tâches qu'ils proposent, de même que le leur potentiel d'ouverture didactique.

b) Trois axes pour l'analyse du discours d'un enseignant

Hache analyse le discours du professeur selon trois axes : l'objet du discours (de quoi parle-t-il ?), la teneur du discours (en quels termes en parle-t-il ?) et la fonction du discours (dans quels buts en parle-t-il ?) :

> « […] Le discours a été analysé selon trois grandes caractéristiques. Deux mesurent la variabilité du discours du professeur (comme prenant part au potentiel d'ouverture didactique) : l'une sur le fond (**l'*objet du discours***) permet de préciser la contextualisation du discours et les liens que le professeur fait entre la situation contextualisée étudiée et les mathématiques décontextualisées, l'autre sur la forme (**la *teneur du discours***) décrit la distance entre le discours du professeur et ce que pourrait être un discours strictement mathématique (c'est-à-dire comme on le trouverait par exemple dans un test écrit de mathématiques) et prend en compte aussi le mode du discours (interrogatif, affirmatif). La troisième catégorie (**la *fonction du discours***) retrace les intentions du professeur quant à l'organisation des mathématiques sous-jacentes à son discours, quant au plan sur lequel il place son intervention, quant à la médiatisation choisie (informations, réflexions). La fonction et la teneur permettent aussi de recueillir des indices sur la dévolution aux élèves de ce dont parle le professeur. » (Ibid., pp. 39-40)

Ces trois caractéristiques lui permettent dans un premier temps de coder les discours à analyser puis, dans un deuxième temps, de traiter les données obtenues par des analyses factorielles. Cependant, de l'aveu même de Hache :

> « Des critiques d'ordre technique ont été évoquées au fil du texte : la complexité du codage, par exemple, et notamment la lenteur du codage du discours, cette lenteur étant un obstacle à sa stabilité. […] comme je le souligne ci-dessus, les analyses effectuées sont des analyses très lourdes et leur mise en place sur un nombre important de séances me semble difficile. » (Ibid., pp. 203-204)

Pour le codage de nos protocoles, afin de comparer les discours de P1 et de P2 et de pouvoir caractériser leur façon de faire cours, nous avons choisi de reprendre ces trois caractéristiques. Nous avons cependant ajusté certaines définitions (comme par exemple les définitions de « contextualisé » ou de « décontextualisé ») à la spécificité des discours de P1 et P2, comme nous allons le voir par la suite.

Par ailleurs, nous avons simplifié le traitement du codage du discours obtenu. Nous n'avons pas utilisé d'analyse factorielle. Pour le traitement du discours codé, nous avons utilisé l'outil Statistiques du logiciel Word. Cet outil permet, pour un texte donné, de connaître le nombre de pages, de mots, de caractères espace non compris, de caractères espaces compris, de paragraphes et de lignes. Dans notre travail, nous cherchons à la fois le nombre de mots et le nombre de caractères espaces non compris codés de façon identique. Ces deux fonctions ont été utilisées pour savoir si les résultats obtenus sont concordants en terme de proportion par rapport à la totalité du texte codé. Les résultats que nous présentons sous forme de tableaux dans la suite de ce document ont été obtenus en calculant la moyenne arrondie à l'entier le plus proche du pourcentage en nombre de mots et de celui en nombre de caractères espaces non compris.

Nous allons maintenant analyser les deux protocoles que nous avons recueillis suivant les trois caractéristiques définies par Hache.

c) L'objet du discours

Voici les trois dimensions retenues par Hache pour l'analyse de l'objet du discours des enseignants :

> « Comment est décrit l'objet du discours ? Le but était ici de mesurer, au travers du discours du professeur, certaines dimensions du potentiel d'ouverture didactique proposé aux élèves. Le degré de contextualisation des mathématiques en question et le jeu entre mathématiques contextualisées et décontextualisées sont une des dimensions repérées du potentiel d'ouverture didactique de la notion. L'objet du discours peut donc être **contextualisé**[93], **décontextualisé** ou **porter sur le lien**. » (Ibid., p. 41)

Ces trois dimensions sont définies comme suit :

> « Le discours est **contextualisé** quand il évoque des mathématiques liées à la situation, à l'exercice présent (« nous avons montré que ces deux vecteurs sont colinéaires »), il est **décontextualisé** quand les mathématiques évoquées ont un degré de généralité plus grand et peu de lien avec la situation étudiée (« deux vecteurs orthogonaux ont un produit scalaire nul »), il **porte sur le lien** quand il évoque des mathématiques contextualisées pour illustrer un discours décontextualisé ou quand il fait appel à des mathématiques décontextualisées pour justifier, étayer un discours contextualisé (« d'après le théorème de Thalès, ces deux droites ne sont pas parallèles », « rappelez-vous, nous avons utilisé cette propriété des parallélogrammes pour construire le point A tout à l'heure »), quand il y a une petite généralité mais que la situation étudiée est toujours présente. » (Ibid., p. 41)

Ces distinctions dans l'objet du discours ont été élaborées pour les raisons suivantes :

> « L'objet va donc nous permettre de savoir ce dont parle le professeur, quand il change d'objet de discours, si cela est fréquent, s'il évoque le cours pendant un moment de correction d'exercice, ou l'inverse ; autrement dit de savoir dans quelle dynamique décontextualisation/contextualisation il évolue et tente de faire évoluer les élèves. » (Ibid., p. 42)

Nous avons conservé ces trois dimensions pour l'analyse de l'objet du discours des enseignants. Comme nos protocoles concernent des séances de cours magistraux, nous avons adapté les définitions données par Hache à cette spécificité.

Hache précise que le discours est contextualisé quand « il évoque des mathématiques liées à la situation, à l'exercice présent ». Dans notre cas, nous l'avons aussi considéré comme **contextualisé** quand les enseignants prennent des exemples pour permettrent aux élèves de mieux comprendre la partie « théorique » du cours ou quand, dans une démonstration, le discours porte sur un objet d'un degré de généralité moindre (quand l'enseignant demande par exemple le résultat d'un calcul écrit au tableau).

[93] C'est nous qui soulignons. De même que dans les citations suivantes.

Le discours est décontextualisé « quand les mathématiques évoquées ont un degré de généralité plus grand et peu de lien avec la situation étudiée ». Nous n'avons pas été confrontée à la dernière partie de la définition donnée par Hache. En effet, dans un cours magistral, il est rare d'entendre un discours mathématique général n'ayant que «peu de lien avec la situation étudiée ». Pour nous, le discours est **décontextualisé** quand il est très théorique (par exemple : le discours non exemplifié dans le cadre d'une démonstration).

Pour le discours qui porte sur le **lien**, nous avons repris sans changement la définition de Hache.

Nous avons choisi de proposer un exemple de codage de discours en nous appuyant sur un passage de la démonstration de l'existence du quotient q de la division euclidienne de a par b avant de donner les résultats de l'ensemble du codage du discours des deux enseignantes.
Nous avons également mis le discours de P1 et de P2 en regard avec les traces écrites que nous avons relevées au tableau. Dans les extraits de protocoles qui suivent, il apparaît clairement que l'objet du discours de P1 n'est pas de même nature que celui de P2.

Notons que le codage a été réalisé de la façon suivante :

- en <u>souligné</u> : le <u>discours contextualisé</u> de l'enseignant ;
- en caractère normal : le discours décontextualisé ;
- en *italique* : le *discours* du professeur portant *sur le lien* ;

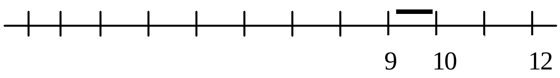
Discours P1	Traces tableau P1
Alors on va toujours travailler en temps réel à côté pour que vous compreniez ce qu’on est en train de faire. Quand je divise 10 par 3, j’ai des multiples, nb c’est les multiples de b. Donc si je regarde l’ensemble des multiples de 3 ici, j’ai ceux qui sont plus grands que 10 et ça démarre à 12 donc ici, cet ensemble là, sur cet exemple là c’est en fait 4, 5, 6, 7 cad le premier multiple qui dépasse 10 c’est 3 fois 4 cad quand n vaut 4. Ca ça va nous permettre de dire que cet ensemble là donc c’est 12, 15 sur l’exemple numérique, c’est un ensemble non vide de N. Bon pour expliquer qu’il est non vide on va utiliser un argument sur les limites. […] Donc ça permettra de travailler sur ce nombre là. Celui-là sera le plus petit de ceux qui seront plus grands que 10. Ca entraînera par conséquence sur cet exemple là que 3 fois 3 c’est celui qui est juste avant sera plus petit que 10 et ça permettra de coincer ce 10 entre deux multiples successifs de 3 et d’expliquer que la différence qui reste ici est bien plus petite que le 3 qui est là. *Donc ce qu’on va faire dans la démonstration théorique c’est la même chose simplement on travaille sur des lettres.* Donc on commence par dire que l’ensemble E est un ensemble non vide. En fait on peut même calculer n. On peut donner soit cet argument là soit ça c’est pareil que n plus grand que a/b, a/b c’est une fraction et je prends n plus grand que la partie entière de a/b + 1 et ça c’est réalisé. Donc vous avez 2 types d’argumentation possibles mais dans tous les cas on peut expliquer que l’ensemble E est non vide. […] Bon ce qu’il faut expliquer c’est l’histoire de l’encadrement entre les 2 multiples. J’ai dit que par hypothèse on a donc q+1 appartient à E. Donc si je reprends mon dessin de tout à l’heure, j’ai 0, 3, 6, 9, 12 ici j’ai 4 fois 3 ici j’ai 3 fois 3 là j’ai 10. 4 fois 3 c’est le plus petit multiple de 3 plus grand que 10 ça veut donc dire que celui qui est avant, cad le 3 fois 3 n’est pas dans E. Ca ça donne une chaîne d’inégalités qui est la même que le 9 inférieur à 10 inférieur à 12. *Ca va permettre d’écrire j’ai pris comme définition nb plus grand que a pour être dans E.* Donc je dis que si je remplace par q+1 j’ai (q+1)b qui est plus grand que a et comme q n’appartient pas à E, qu’est-ce que ça veut dire que q n’appartient pas à E, ça veut dire que je n’ai pas qb plus grand que a. Si je n’ai pas qb plus grand que a, nier un plus grand ça veut dire que qb est inférieur ou égal à a. Bon ce qu’il faut comprendre c’est qu’on est arrivé exactement à la valeur de 1 cad que si je mets à côté sur 10 et 12, j’ai exhibé le quotient en fait en disant que je suis entre 2 multiples consécutifs du diviseur.	Dem : **Existence** 1^{er} cas : $a\in \mathbf{N}$ $E=\{n\in \mathbf{N}, nb>a\}$. $E \neq \emptyset$ car $\lim nb = +\infty$ (ou $n>a/b$ réalisé si $n>E[a/b+1]$). Pour n assez grand, $n\in E$. E admet un plus petit élément Q. $0\notin E$ donc $Q\neq 0$. Il existe $q\in \mathbf{N}$ tel que $Q=q+1$. $(q+1)\in E$ et $q\notin E$ $qb \leq a < (q+1)b$ Schéma 1  […]

Fig. 14 : Codage de l’objet du discours de P1 portant sur l’existence du quotient d’une division euclidienne

Discours P2	Traces tableau P2
Alors démonstration. On va la faire en 2 temps, on va d'abord s'intéresser à l'existence et on établira ensuite l'unicité. Alors est-ce que bq est bien Première question qu'on peut se poser, est-ce qu'ils sont bien rangés déjà ? Parce que sachant qu'on peut avoir à faire avec des entiers relatifs, on pourrait se poser la question. Donc j'ai pris 2 multiples consécutifs de b. Alors est-ce que bq est bien le plus petit ? Pourquoi ? <u>Ca moins ça, ça vaut combien ? La différence entre ces 2 multiples elle est égale à</u> <u>Ce multiple ci moins celui-là, la différence est égale à ?</u> b est un nombre Donc de signe Donc ce nombre là est bien plus petit que celui-ci.	<u>Dem</u> : <u>Existence</u> Soit $a \in \mathbf{Z}$, soit $b \in \mathbf{N}^*$. Encadrons a par deux multiples consécutifs de b Soit $q \in \mathbf{Z}$ tel que $bq \leq a < b(q+1)$ (remarque : $q \leq a/b < q+1 \ldots q=E(a/b)$) […]

Fig. 15 : Codage de l'objet du discours de P2 portant sur l'existence du quotient d'une division euclidienne

On remarque que P2 passe d'un discours décontextualisé à un discours contextualisé lorsque les élèves n'arrivent pas à répondre aux questions qu'elle leur pose. Devant l'incapacité de ces derniers à trouver la réponse, elle « baisse » son niveau d'exigence en formulant des questions de degré de généralité plus bas.

Comme P1 choisit d'assumer à la fois l'illustration de la démonstration sur un exemple numérique donné et les justifications théoriques de celle-ci, il est cohérent d'observer plus de discours portant sur le lien chez P1 que chez P2. En effet, plus il y a d'allers et retours entre un discours contextualisé et un discours décontextualisé, plus le besoin de faire des liens entre les deux se fait sentir (cf. P1) tandis que si l'un a plus de poids par rapport à l'autre, la nécessité de relier les deux est moindre (cf. P2).
Par ailleurs, les extraits de protocoles proposés nous montrent que pour P2, le discours sur le lien porte essentiellement sur des liens que P2 souhaite faire entre la situation mathématique de la séance et des connaissances censées être disponibles chez les élèves (connaissances ayant été vues dans une séance antérieure). Ceci est moins le cas chez P1 dont le discours sur le lien a généralement pour objectif de relier l'exemple sur lequel elle travaille au principe de la démonstration théorique de la division euclidienne.

Voici les résultats obtenus sur le codage de l'ensemble du discours sur la démonstration du théorème de la division euclidienne de P1 et P2. Les résultats présentés portent sur le seul discours codé :

	P1	P2
Discours contextualisé	35 %	9 %
Discours décontextualisé	50 %	85 %
Discours portant sur le lien	15 %	6 %

Fig. 16 : Résultats du codage de l'objet du discours de P1 et P2

Le tableau ci-dessus nous montre que le discours de P2 est presque toujours décontextualisé alors que celui de P1 présente une dynamique contextualisée/décontextualisée plus grande. Cela s'explique par le fait que quand P2 fait cours, elle ne s'appuie que très peu sur des exemples et reste très proche du bloc technologico-théorique. On retrouve explicitement le fait que son activité est centrée sur le logos.
P1, quant à elle, explicite beaucoup plus sa démarche lors du cours. Elle prend appui sur des exemples pour faire le lien entre le logos et la praxis.

Notons que si l'on suit les raisons qui ont amené Hache à introduire l'analyse de l'objet du discours de l'enseignant –« mesurer certaines dimensions du potentiel d'ouverture didactique proposé aux élèves » (Ibid., p. 41)–, les résultats présentés ci-dessus montrent clairement que par son discours, P1 permet un potentiel d'ouverture didactique de son cours plus important que P2. Cela peut sembler contradictoire avec le fait que P1 exclut de faire participer les élèves pendant le cours. Mais les techniques didactiques qu'elle met en œuvre pour pallier l'absence des élèves (travailler parallèlement sur un exemple et fournir des explications sur la démarche suivie avant de la mettre en œuvre) la conduisent à faire des allers-retours incessants entre schéma et démonstration, de même qu'entre explication sur la démarche théorique choisie et mise en œuvre de cette démarche. Il y a donc a priori de plus fortes chances pour que les élèves entrent dans la démarche choisie par leur enseignante dans la classe de P1 que dans la classe de P2. Nous verrons si l'analyse de ce protocole présenté dans le chapitre C4 « observations naturalistes de deux enseignantes : le savoir enseigné sur la division euclidienne » confirme ou non cette hypothèse.

d) La teneur du discours

Hache a également retenu trois valeurs pour l'analyse de la teneur du discours des enseignants : le discours direct, le discours indirect et le mode interrogatif. Il les définit de la façon suivante :

> « La première dimension retenue correspond à la distinction entre discours interrogatif et discours affirmatif. La seconde dimension concerne la distance du discours à ce que pourrait être un discours uniquement mathématique (de type écrit). La teneur du discours peut avoir trois valeurs. On parlera de ***discours direct*** quand le discours du professeur est proche de celui d'un livre de mathématique et de ***discours indirect*** quand le professeur utilise la langue courante, quand il se permet des écarts par rapport à un discours « mathématiquement correct ». Une troisième catégorie a été introduite pour distinguer le ***mode interrogatif***. » (Ibid., p. 47)

Nous avons repris de manière identique les trois valeurs introduites par Hache et nous en avons défini une quatrième, le discours interrogatif impersonnel. Par discours interrogatif impersonnel, nous entendons les questions posées par l'enseignant à l'ensemble de la classe sans réponse attendue. Ceci est le cas quand l'enseignant pose une question et en donne la réponse immédiatement, sans chercher à ce que les élèves la trouvent par eux-mêmes. Ce procédé de questions rhétoriques, peut être utilisé par les enseignants pour faire avancer le cours.

Nous avons donc codé les protocoles en distinguant le **discours strictement mathématique** (discours direct pour Hache), le **discours non strictement mathématique** (discours indirect pour Hache), le **discours interrogatif à la classe** et le **discours interrogatif impersonnel**.

Pour analyser les résultats obtenus, nous reprenons les mêmes extraits que ceux donnés précédemment. Nous allons voir que ce passage permet également d'illustrer de façon parlante les différences qui existent dans la teneur discours de P1 et de P2.

Notons que le codage a été réalisé de la façon suivante :

- en <u>souligné</u> : le <u>discours strictement mathématique</u> de l'enseignant ;
- en caractère normal : le discours non strictement mathématique du professeur ;
- en *italique* : le *discours interrogatif à la classe* ;
- en ***italique gras*** : le ***discours interrogatif impersonnel*** du professeur.

Discours de P1	Discours de P2
Alors on va toujours travailler en temps réel à côté pour que vous compreniez ce qu'on est en train de faire. Quand je divise 10 par 3, j'ai des multiples, nb c'est les multiples de b. Donc si je regarde l'ensemble des multiples de 3 ici, j'ai ceux qui sont plus grands que 10 et ça démarre à 12 donc ici, cet ensemble là, sur cet exemple là c'est en fait 4, 5, 6, 7 cad le premier multiple qui dépasse 10 c'est 3 fois 4 cad quand n vaut 4. Ca ça va nous permettre de dire que cet ensemble là donc c'est 12, 15 sur l'exemple numérique, c'est un ensemble non vide de N. Bon pour expliquer qu'il est non vide on va utiliser un argument sur les limites. […] Donc ça permettra de travailler sur ce nombre là. Celui-là sera le plus petit de ceux qui seront plus grands que 10. Ca entraînera par conséquence sur cet exemple là que 3 fois 3 c'est celui qui est juste avant sera plus petit que 10 et ça permettra de coincer ce 10 entre deux multiples successifs de 3 et d'expliquer que la différence qui reste ici est bien plus petite que le 3 qui est là. Donc ce qu'on va faire dans la démonstration théorique c'est la même chose simplement on travaille sur des lettres. Donc on commence par dire que l'ensemble E est un ensemble non vide. En fait on peut même calculer n. On peut donner soit cet argument là soit ça c'est pareil que n plus grand que a/b, a/b c'est une fraction et je prends n plus grand que la partie entière de a/b + 1 et ça c'est réalisé. Donc vous avez 2 types d'argumentation possibles mais dans tous les cas on peut expliquer que l'ensemble E est non vide. […] Bon ce qu'il faut expliquer c'est l'histoire de l'encadrement entre les 2 multiples. J'ai dit que par hypothèse on a donc q+1 appartient à E. Donc si je reprends mon dessin de tout à l'heure, j'ai 0, 3, 6, 9, 12 ici j'ai 4 fois 3 ici j'ai 3 fois 3 là j'ai 10. 4 fois 3 c'est le plus petit multiple de 3 plus grand que 10 ça veut donc dire que celui qui est avant, cad le 3 fois 3 n'est pas dans E. Ca ça donne une chaîne d'inégalités qui est la même que le 9 inférieur à 10 inférieur à 12.Ca va permettre d'écrire j'ai pris comme définition nb plus grand que a pour être dans E. Donc je dis que si je remplace par q+1 j'ai (q+1)b qui est plus grand que a et comme q n'appartient pas à E, ***qu'est-ce que ça veut dire que q n'appartient pas à E,*** ça veut dire que je n'ai pas qb plus grand que a. Si je n'ai pas qb plus grand que a, nier un plus grand ça veut dire que qb est inférieur ou égal à a. Bon ce qu'il faut comprendre c'est qu'on est arrivé exactement à la valeur de 1 cad que si je mets à côté sur 10 et 12, j'ai exhibé le quotient en fait en disant que je suis entre 2 multiples consécutifs du diviseur.	Alors démonstration. On va la faire en 2 temps, on va d'abord s'intéresser à l'existence et on établira ensuite l'unicité. *Alors est-ce que bq est bien Première question qu'on peut se poser, est-ce qu'ils sont bien rangés déjà ? Parce que sachant qu'on peut avoir à faire avec des entiers relatifs, on pourrait se poser la question.* Donc j'ai pris 2 multiples consécutifs de b. *Alors est-ce que bq est bien le plus petit ?* *Pourquoi ?* *Ca moins ça, ça vaut combien ? La différence entre ces 2 multiples elle est égale à* *Ce multiple ci moins celui-là, la différence est égale à ?* *b est un nombre* *Donc de signe* Donc ce nombre là est bien plus petit que celui-ci.

Fig. 17 : Codage de la teneur du discours de P1 et de P2 portant sur l'existence du quotient d'une division euclidienne

Deux points peuvent être mis en évidence par la comparaison de ces deux passages : la place importante du discours interrogatif chez P2 et celle du discours non strictement mathématique chez P1.

Dans cet extrait, le discours interrogatif de P2 s'adresse à l'ensemble de à la classe. Nous observons, de manière flagrante, beaucoup moins de discours interrogatif dans le discours prononcé par P1 ; celui-ci est même quasiment inexistant. Chez P1, le protocole montre que les questions sont plus des questions rhétoriques que de véritables questions à la classe. Cela montre que P1 a fait le choix d'assumer intégralement le contenu du cours : la place laissée aux élèves au travers de réponses à des questions qui leur sont posées est minime.

Hache justifie ce choix de s'intéresser à la teneur du discours des professeurs par les raisons exposées ci-dessous :

> « Le potentiel d'ouverture didactique de la notion étudiée s'exprime aussi par la variation des formes que prennent les présentations proposées aux élèves. En ce qui concerne le discours du professeur, c'est la teneur du discours qui mesure, ici, cette dimension. Elle permet aussi de recueillir des éléments sur la dévolution possible aux élèves, par exemple simplement au travers du fait que le professeur pose ou non des questions. » (Ibid., p. 47)

Voici les résultats obtenus sur le codage de l'ensemble du discours sur la démonstration du théorème de la division euclidienne de P1 et P2. Les résultats présentés portent sur le seul discours codé :

	P1	P2
Discours mathématique	52 %	48 %
Discours non mathématique	45 %	20 %
Discours interrogatif à la classe	1 %	30 %
Discours interrogatif impersonnel	2 %	2 %

Fig. 18 : Résultats du codage de la teneur du discours de P1 et P2

Ce tableau montre bien que, chez P1, le discours interrogatif est quasiment absent. Ce résultat souligne la description que nous avions faite du mode de fonctionnement didactique de P1 lors des séances de cours. Pendant le cours, l'entière responsabilité de l'avancée du cours est entre les mains de P1, les élèves n'ont aucune place. D'ailleurs, le tableau présenté ci-dessous montre encore plus clairement que le peu de discours interrogatif de P1 est en fait composé de questions rhétoriques. Ces questions, qui n'attendent pas de réponses, permettent à P1 d'avancer le cours en explicitant sa démarche aux élèves (voir extrait de protocole présenté ci-dessus). Le fait de ne pas faire intervenir les élèves conduit également P1 à expliquer davantage ce qu'elle est en train de faire, comme le montre la part équivalente du discours strictement mathématique et du discours non strictement mathématique. Elle compense l'absence des élèves par un discours explicatif sur son discours mathématique. Cette composante est d'ailleurs à mettre en parallèle avec le pourcentage de discours portant sur le lien (voir résultat du codage de l'objet du discours de P1).

Contrairement à P1, P2 pose beaucoup de questions aux élèves. De plus, ces questions sont essentiellement adressées à l'ensemble de la classe comme le montre le tableau ci-dessous. En effet, si l'on considère le discours interrogatif dans son ensemble, on obtient alors le tableau suivant :

	P1	P2
Discours interrogatif/discours total	3 %	32 %
D. interrogatif à la classe/D. interrogatif	33 %	94 %
D. interrogatif impersonnel/D. interrogatif	67 %	6 %

Fig. 19 : Résultats du codage du discours interrogatif de P1 et P2 classé par types

Comme P2 aménage une place aux élèves, son discours non strictement mathématique est beaucoup moins important que celui de P1.

Que conclure de ces résultats, mise à part une description du mode de fonctionnement didactique de P1 et P2 ? Si comme le souligne Hache, l'analyse de la teneur du discours « permet […] de recueillir des éléments sur la dévolution possible aux élèves, par exemple simplement au travers du fait que le professeur pose ou non des questions » (Ibid., p. 47), P2 donne d'avantage d'occasion aux élèves d'entrer dans sa démarche que P1. La dévolution est possible mais elle n'a pas vraiment lieu dans sa classe, comme nous le montrera l'analyse du savoir enseigné dans le chapitre C4. On peut faire l'hypothèse que P1 quant à elle trouve une manière de dévoluer ses objectifs aux élèves en adoptant un discours équilibré entre le discours mathématique et le discours non mathématique.

e) La fonction du discours

La fonction du discours permet à Hache d'obtenir des informations sur les intentions de l'enseignant, comme le souligne l'extrait suivant :

> « La fonction du discours a trait aux intentions du professeur : est-il en train de simplement *transmettre* une information sans commentaire, ou bien organise-t-il, propose-t-il une structuration, ou bien est-il en train d'*argumenter* ou de réfléchir à haute voix ? […] La fonction du discours permet donc d'évaluer une certaine variabilité du discours, mais aussi, sur le fond, de voir quand le professeur propose une organisation des mathématiques : une structuration ou une mise en relation (par exemple) et donc un enrichissement (par rapport à la tâche telle qu'elle est prescrite et aux activités telles qu'elles pourraient en découler) du potentiel d'ouverture didactique. La fonction du discours couplée aux autres dimensions du discours (et notamment la teneur) permet de savoir quelle part de son discours le professeur dévolue (ou tente de dévoluer) à ses élèves. » (Ibid., p. 52)

Pour coder les discours des enseignants qu'il a observés du point vue de leur fonction, Hache a établi les critères de codages présentés ci-dessous :

> « Voici […] les distinctions qui ont été mises en place pour le codage […] :
> Parmi les informations :
> - les informations brutes (énoncés).
> - les résultats (sans commentaires).
> - les évaluations et validations (sans commentaires).
>
> Et des informations un peu « truquées », sans explication toujours : les informations données par le professeur qui joue à l'élève, ou dicte à l'élève au tableau ; les informations données de manière « ostensives » (par exemple, des transformations insidieuses des consignes données comme information, alors que tout un travail aurait pu être fait derrière).

Parmi les fonctions de structuration :

- les appréciations (sur la tâche : facile, connue, à faire rapidement…), les mises en garde, souvent porteuse de renseignement sur le contrat.
- les structurations (des contenus, notamment par des titres, ou du déroulement dans le temps), structuration de ce qui va être fait, ou de ce qui a été fait.
- les bilans et rappels.

Parmi les fonctions d'argumentation et de réflexion :

- les mises en relations et autres structurations indirectes (par rapport au passé immédiat, au passé plus lointain, au futur immédiat, au futur plus lointain), voire implicites. Ces interventions relèvent du méta (puisqu'elles enclenchent une réflexion sur ce qui se joue), tout en ayant un rôle de structuration. […].
- les explications (ajout de quelque chose à un discours déjà tenu suite à une question), justifications, explications.
- les généralisation ou réflexions. » (Ibid., pp. 52-54)

Nous avons codé les transcriptions de P1 et P2 de la façon suivante :

- en <u>souligné</u> : le <u>discours d'information</u> de l'enseignant ;
- en *italique* : le *discours d'argumentation* de l'enseignant ;
- en caractère normal : le discours de structuration du professeur ;

Discours de P1	Discours de P2
Alors on va toujours travailler en temps réel à côté pour que vous compreniez ce qu'on est en train de faire. *Quand je divise 10 par 3, j'ai des multiples, nb c'est les multiples de b.* Donc si je regarde l'ensemble des multiples de 3 ici, j'ai ceux qui sont plus grands que 10 et ça démarre à 12 donc ici, cet ensemble là, sur cet exemple là c'est en fait 4, 5, 6, 7 cad le premier multiple qui dépasse 10 c'est 3 fois 4 cad quand n vaut 4. *Ca ça va nous permettre de dire que cet ensemble là donc c'est 12, 15 sur l'exemple numérique, c'est un ensemble non vide de N. Bon pour expliquer qu'il est non vide on va utiliser un argument sur les limites.* […] *Donc ça permettra de travailler sur ce nombre là.* Celui-là sera le plus petit de ceux qui seront plus grands que 10. Ca entraînera par conséquence sur cet exemple là que 3 fois 3 c'est celui qui est juste avant sera plus petit que 10 et ça permettra de coincer ce 10 entre deux multiples successifs de 3 et d'expliquer que la différence qui reste ici est bien plus petite que le 3 qui est là. Donc ce qu'on va faire dans la démonstration théorique c'est la même chose simplement on travaille sur des lettres. *Donc on commence par dire que l'ensemble E est un ensemble non vide. En fait on peut même calculer n. On peut donner soit cet argument là soit ça c'est pareil que n plus grand que a/b, a/b c'est une fraction et je prends n plus grand que la partie entière de a/b + 1 et ça c'est réalisé.* Donc vous avez 2 types d'argumentation possibles mais dans tous les cas on peut expliquer que l'ensemble E est non vide. […] *Bon ce qu'il faut expliquer c'est l'histoire de l'encadrement entre les 2 multiples.* J'ai dit que par hypothèse on a donc q+1 appartient à E. Donc si je reprends mon dessin de tout à l'heure, j'ai 0, 3, 6, 9, 12 ici j'ai 4 fois 3 ici j'ai 3 fois 3 là j'ai 10. 4 fois 3 c'est le plus petit multiple de 3 plus grand que 10 ça veut donc dire que celui qui est avant, cad le 3 fois 3 n'est pas dans E. *Ca ça donne une chaîne d'inégalités qui est la même que le 9 inférieur à 10 inférieur à 12. Ca va permettre d'écrire j'ai pris comme définition nb plus grand que a pour être dans E. Donc je dis que si je remplace par q+1 j'ai (q+1)b qui est plus grand que a et comme q n'appartient pas à E, qu'est-ce que ça veut dire que q n'appartient pas à E, ça veut dire que je n'ai pas qb plus grand que a. Si je n'ai pas qb plus grand que a, nier un plus grand ça veut dire que qb est inférieur ou égal à a.* *Bon ce qu'il faut comprendre c'est qu'on est arrivé exactement à la valeur de 1* cad que si je mets à côté sur 10 et 12, j'ai exhibé le quotient en fait en disant que je suis entre 2 multiples consécutifs du diviseur.	Alors est-ce que bq est bien Première question qu'on peut se poser, est-ce qu'ils sont bien rangés déjà ? *Parce que sachant qu'on peut avoir à faire avec des entiers relatifs, on pourrait se poser la question.* Donc j'ai pris 2 multiples consécutifs de b. Alors est-ce que bq est bien le plus petit ? *Pourquoi ?* Ca moins ça, ça vaut combien ? La différence entre ces 2 multiples elle est égale à Ce multiple ci moins celui-là, la différence est égale à ? b est un nombre Donc de signe Donc ce nombre là est bien plus petit que celui-ci.

Fig. 20 : Codage de la fonction du discours de P1 et de P2 portant sur l'existence du quotient d'une division euclidienne

Il faut noter que cet extrait n'est pas représentatif des résultats présentés dans le tableau suivant qui donne un pourcentage de 26 % de discours d'argumentation chez P1 et chez P2. Cela vient du fait que l'on a choisi pour P1 un extrait qui correspond à la rédaction de la démonstration de l'existence du quotient q. Or cet extrait est précédé de tout un discours sur l'exemple de la division euclidienne de 10 par 3 et de -10 par 3 qui comporte une part de

discours d'argumentation moins importante. Par ailleurs, il ne montre pas non plus tous les différents passages qui émaillent le discours de P1 et dans lesquels elle structure à la fois le déroulement de la démonstration, du cours et des séances à venir.
Il est cependant intéressant de constater que lorsqu'il s'agit d'écrire la démonstration de l'existence de q, comme P1 choisit de prendre en charge la totalité des responsabilités par rapport au savoir, une part importante de son discours est du discours d'argumentation. Ce n'est pas le cas de P2 qui essaie, en donnant des informations aux élèves, de leur faire assumer la responsabilité de l'argumentation.

Par contre, cet extrait rend bien compte des différences qui existent entre les discours de P1 et de P2 au niveau des discours d'information et de structuration. Alors que le discours de P2 est essentiellement un discours d'information et n'est pas du tout un discours de structuration, ce n'est pas le cas du discours de P1. Le discours de P1 est régulièrement un discours de structuration qui permet soit de donner une appréciation sur ce qui va être fait (« Alors on va toujours travailler en temps réel à côté pour que vous compreniez ce qu'on est en train de faire ») soit de faire un bilan sur ce qui vient d'être fait (« Donc vous avez 2 types d'argumentation possibles mais dans tous les cas on peut expliquer que l'ensemble E est non vide. »). Ceci est favorisé par le fait que P1 doit articuler la démonstration théorique avec l'exemple permettant d'illustrer l'existence de q.

Voici les résultats obtenus sur le codage de l'ensemble du discours sur la démonstration du théorème de la division euclidienne de P1 et P2. Les résultats présentés portent sur le seul discours codé :

	P1	P2
Discours d'information	38 %	60 %
Discours d'argumentation	26 %	21 %
Discours de structuration	36 %	19 %

Fig. 21 : Résultats du codage de la fonction du discours de P1 et P2

Comme nous pouvons le constater, le discours de P2 est essentiellement de type informatif. Dans cette classe, les mises en relation, les bilans et la structuration sont en grande partie à la charge des élèves, comme le montrent les pourcentages de discours d'argumentation et de structuration de P2. Elle laisse aux élèves une part de travail à faire importante pour pouvoir comprendre son cours[94].
Par contre, on constate que P1 assume totalement l'ensemble de ces points. Son discours se répartit de façon équitable entre les informations, les mises en relation, les bilans et les structurations.

I.5 Conclusion

[94] Pour une étude du « rapport entre la structuration du savoir proposée par l'enseignant dans son cours et la structuration effectuée à long terme par l'étudiant », se reporter au travail de Behaj (1999).

Nous avons identifié trois modes de fonctionnement didactique en classe très différents, qui répondent chacun à une forte cohérence de choix, et qui se révèlent, de fait chacun extrêmement stable.

A travers l'analyse du discours de ces deux enseignantes sur une séance, nous retrouvons les mêmes caractéristiques que celles qui guident leur organisation de séance.
En effet, P1 fait beaucoup d'allers-retours entre le contenu mathématique strict de la séance et un exemple (objet du discours), sans poser de questions aux élèves (teneur du discours) et en assumant aussi bien la structuration du savoir qu'elle expose que l'argumentation et les informations nécessaires à la compréhension (fonction du discours). On retrouve ici le fait que l'avancée de son cours soit centrée sur la praxis. Par ailleurs, en ne laissant pas de place aux élèves dans ses cours, elle est amenée à prendre en charge toutes les facettes de la démonstration.
De son côté, P2 tient généralement un discours très proche du contenu mathématique strict de la séance (objet du discours) mais elle essaie d'aménager une place aux élèves en leur posant des questions pour les faire participer (teneur du discours). Elle donne les informations mais l'essentiel du travail d'argumentation et de structuration doit être fait par les élèves (fonction du discours).

Ces résultats montrent que les modes de fonctionnement didactiques qui « président aux singularisations des déroulements en classe » (Robert et Rogalski année ?, page ?) répondent à une cohérence forte de choix plus ou moins conscients et qu'ils se révèlent, de fait, extrêmement stables.

Nous allons maintenant analyser le savoir apprêté par chacun de ces trois enseignants, à la lumière de leur mode de fonctionnement routinier.

II. DIFFERENTS NIVEAUX D'ANALYSE DU SAVOIR APPRETE : CONTRAINTES ET ESPACE DE LIBERTE POUR L'ENSEIGNANT

Analyser l'apprêtage didactique du savoir fait par les enseignants sur un domaine mathématique donné nécessite de faire un choix sur la granularité de descriptions à adopter. Car comme le souligne Bosch (2002, p. 32), il faut « être capable d'analyser [les organisations mathématiques mises en place] en éléments ni 'trop gros' ni 'trop fins' pour ne pas tuer [leur] 'structure vitale' ».
Pour tenir compte tout à la fois, de la dynamique des OM de même niveau de définition sur l'année, et de celle des OM de différents niveaux entre elles nous avons choisi d'utiliser les niveaux de détermination mathématique[95] (Chevallard, 2002).

Nous avons découpé le programme d'arithmétique de 1998 selon cette échelle de niveaux :

[95] Pour plus de détails sur notre méthodologie d'analyse et les outils utilisés, se reporter au chapitre précédent « Analyse des pratiques enseignantes : point de vue théorique et choix méthodologiques ».

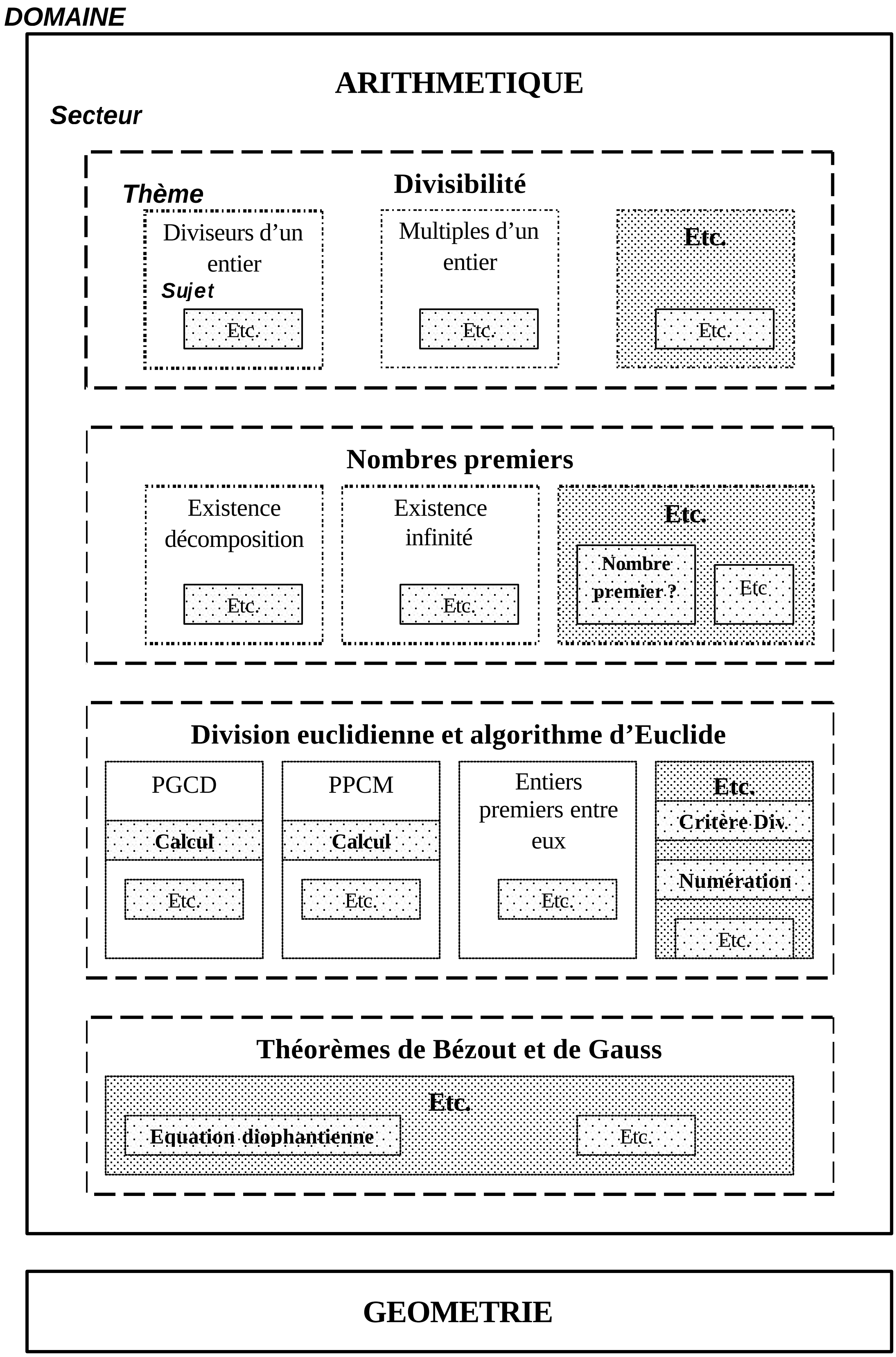


Fig. 22 : Découpage mathématique du programme de spécialité mathématique de 1998 en domaines, secteurs, thèmes et sujets d'étude

Si, dans le programme, les secteurs d'étude sont explicitement inscrits, les thèmes et les sujets d'étude ne sont que peu développés. On ne trouve par exemple aucun thème associé au secteur *théorèmes de Bézout et de Gauss*. Nous avons donc indiqué par «Etc. » le fait que d'autres thèmes, respectivement sujets, d'étude pouvaient prendre place dans un secteur, respectivement thème, d'étude donné.
Dans l'apprêtage didactique du savoir, les enseignants possèdent donc une marge de manœuvre importante dans « les niveaux de plus grande spécificité, sujets et thèmes » (Chevallard 2002, p. 43).

En nous appuyant sur le découpage en secteurs, thèmes et sujets d'étude du programme, nous allons maintenant analyser le découpage du savoir apprêté par P1, P2 et l'IREM de Poitiers afin d'en dégager la dynamique sous-jacente. Comme bien sûr les enseignants n'organisent pas leur cours selon le découpage mathématique proposé par Chevallard mais qu'ils l'organisent généralement en chapitres, parties et paragraphes, en tenant compte de contraintes didactiques et temporelles, nous allons croiser les deux découpages en essayant de voir dans quelle mesure ils sont superposables.

Nous nous arrêtons au découpage en parties ; le découpage en paragraphes sur l'ensemble de l'année scolaire ne nous paraît pas pertinent ici. La dynamique entre ces deux grains de découpage de l'activité mathématique sera analysée en détail dans le cas particulier de l'organisation mathématique régionale construite autour de la division euclidienne[96].
Nous finissons cette analyse par une étude de la contrainte temporelle sur le choix de progression des enseignants sur une année entière.

II.1 Apprêtage didactique du savoir : le découpage en chapitres ou secteurs d'étude ?

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons le découpage en chapitres du cours d'arithmétique de P1, P2 et l'IREM de Poitiers :

[96] Cf. chapitre suivant « Observations naturalistes de deux enseignantes : comparaison du savoir apprêté autour de la division euclidienne. »

ARITHMETIQUE

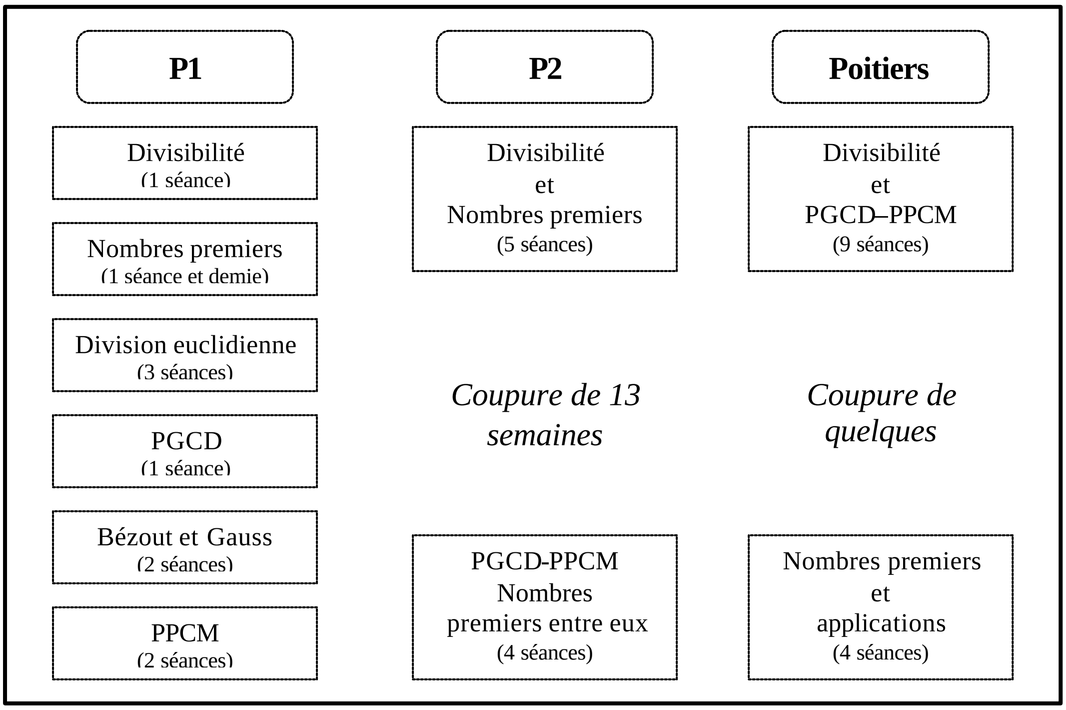


Fig. 23 : Découpage en chapitres du cours d'arithmétique de P1, P2 et l'IREM de Poitiers

Deux points se dégagent de la comparaison de ces différents découpages et de celui proposé par le programme. D'une part, le découpage en chapitres et celui en secteurs ne se superposent pas et, d'autre part, l'introduction des nombres premiers n'intervient pas au même moment dans la progression mathématique de ces cours.

a) Découpage en chapitres et découpage en secteurs

Alors que P2 et l'IREM de Poitiers ont un grain de découpage en chapitre plus grossier que celui en secteurs d'étude du programme, P1 en a un beaucoup plus fin.

Le choix de structuration des OM en deux grands blocs fait par l'IREM de Poitiers s'explique par des contraintes liées à la volonté d'intégrer l'outil informatique dans le cours d'arithmétique. En effet, comme le souligne l'enseignant, « l'emploi [systématisé] du tableur Excel […] induit une approche et des types de démonstrations adaptés à cette démarche » (IREM de Poitiers 2000, p. 239).
En débutant le cours d'arithmétique par une introduction de la notion de divisibilité avec tableur, l'enseignant introduit la partie entière du quotient de deux entiers. A partir de là, la partie entière permet la programmation de la division euclidienne. Il devient alors possible de programmer l'algorithme d'Euclide et donc de rechercher un PGCD ou de résoudre une équation diophantienne. Ainsi le regroupement des secteurs divisibilité, division euclidienne, algorithme d'Euclide et théorèmes de Bézout et de Gauss en un seul chapitre est cohérent avec le choix d'utiliser un tableur en arithmétique.

P2 découpe également son cours en deux grands chapitres. Cependant, l'organisation du savoir qu'elle propose dans ces chapitres est différente de celle de l'IREM de Poitiers. Elle est également différente du découpage proposé par le programme car ces chapitres se composent comme suit :

Divisibilité-Nombres premiers	PGCD-PPCM-Nombres premiers entre eux
Divisibilité Nombres premiers Division euclidienne	PGCD Algorithme d'Euclide Théorèmes de Bézout et de Gauss PPCM

Fig. 24 : Découpage des chapitres en parties faits par P2

Dans le découpage de P2, le secteur division euclidienne et algorithme d'Euclide est scindé en deux. C'est un découpage qui est plutôt traditionnel : dans le premier chapitre, elle introduit les objets et les outils élémentaires du cours d'arithmétique avant de développer les théorèmes et outils plus élaborés dans le second. Ce découpage est lié au fait P2 centre ses pratiques mathématiques sur le logos, comme nous l'avons montré précédemment.

P1 se distingue nettement de P2 et de l'IREM de Poitiers sur l'organisation de son cours en chapitres. Tandis que ces deux derniers opèrent des regroupements de secteurs pour former leur chapitre, le cours de P2 semble « atomisé » en une succession de chapitres indépendants qui occupent une à deux séances au maximum[97]. Les chapitres qu'elle construit correspondent soit à des secteurs d'étude, soit à des thèmes.

Ce découpage fin s'explique par les choix pédagogiques de P1. En souhaitant faire travailler les élèves en autonomie sur des feuilles d'exercices, la praxis devient le moteur de l'avancée de son cours. Il devient alors cohérent de ne proposer que des petites unités de cours centrées sur des thèmes. Rappelons qu'un thème est une OM locale, centrée sur une technologie. Cette technologie outille les techniques nécessaires pour résoudre un ensemble de type de tâches. Les fiches d'exercices de P1 proposent ces types de tâches rattachés à chacun des thèmes. Elles « rythment » donc le découpage du cours en chapitres très courts.

b) Place des nombres premiers

Un point important de divergence possible entre les différents découpages concerne la place des nombres premiers. En effet, la notion de PGCD peut-être introduite soit avant les nombres premiers, soit après. Ces deux possibilités ne sont pas neutres vis-à-vis des choix effectués par la noosphère en 1971 et en 1998. Comme nous l'avons vu dans les chapitres B1 et B2, l'algorithme d'Euclide devient en 1998 la méthode de recherche de PGCD privilégiée alors qu'en 1971, c'était la décomposition en produit de facteurs premiers qui tenait le haut du pavé. Cette différence est liée à la volonté noosphérienne d'introduire l'utilisation des outils informatiques en arithmétique.

P1, tout comme P2, introduit les nombres premiers avant le PGCD. Elles ne privilégient cependant pas la décomposition en produit de facteurs premiers pour le calcul d'un PGCD. D'autres raisons ont motivé leur choix.

[97] Le chapitre sur la division euclidienne mis à part. Nous l'étudierons plus particulièrement dans la suite de notre thèse.

P1 a hésité sur le moment où introduire les nombres premiers la première année où elle a enseigné l'arithmétique :

> « De toutes les façons, y'a des grands ordres, y'a par exemple savoir si on fait la décomposition en nombres premiers d'abord ou PGCD d'abord… Bon je dirais que ça s'est joué dans des discussions avec P11 [il s'agit de la seconde enseignante de spécialité avec qui P1 travaille très régulièrement] et avec… Je dirais que j'ai un peu hésité la première année puis finalement tu vois, à partir du moment où on a pris la brochure de l'IREM de Clermont qui était vraiment structurée, on a décidé de suivre son ordre. » (Extraits entretien P1)

P1, en accord avec P11, a donc adopté cette progression car c'est celle choisie par la brochure qui lui sert de référence pour construire son cours d'arithmétique. Cette brochure propose un projet de cours « qui était vraiment structuré » qui correspondait à leur vision des mathématiques :

> « On aime bien sur certaines parties quand on peut insister sur le raisonnement, la formation, la rigueur du raisonnement, les points de logique, les choses comme ça […] » (Extraits entretien P1)

C'est cette idée de rigueur et de raisonnement qui a guidé la rédaction de ce projet de cours[98] et qui a poussé P1 et P11 à suivre l'ordre de cette brochure.

Le choix de P2 a été guidé par d'autres raisons :

> « […] Je ne me souviens plus de l'ordre précis mais je sais que la seconde année, j'ai pas fait la même chose, pas dans le même ordre. C'est l'introduction des nombres premiers que je n'ai pas faite au même moment. Maintenant, je le fais plus tôt qu'avant. […]. Alors que la première année, je les avais laissés pour les mettre… et en fait ce n'était pas un bon calcul […]. Ca m'a gêné. Y'a des tas de moments où j'aurais eu envie de les utiliser et je ne les avais pas à ma disposition. » (Extraits entretien P2)

P2 a modifié l'ordre d'apparition des nombres premiers d'une année sur l'autre pour des raisons plus globales de structuration mathématique de son cours. Ce choix est cohérent avec l'analyse que nous avons faite du découpage en chapitres qu'elle propose. En effet, les nombres premiers font partie des objets élémentaires de l'arithmétique. Il n'est donc pas surprenant qu'elle se soit sentie mal à l'aise quand elle avait situé les nombres premiers en fin d'enseignement d'arithmétique. Ces objets élémentaires lui manquaient au moment d'aborder des notions plus complexes.
Cependant, cette raison d'ordre mathématique paraît peu fondée si l'on ne s'intéresse qu'au contenu du cours. En effet, les nombres premiers ne sont utiles que dans la 10^{ième} et dernière séance de son cours, quand elle énonce la règle de détermination d'un PGCD ou d'un PPCM de deux entiers à partir de leur décomposition en produit de facteurs premiers. Cette raison semble beaucoup plus toucher à la vision qu'a P2 de l'arithmétique qui reste fortement influencée par le programme de 1971[99].

Contrairement aux cours de P1 et P2, dans le cours de l'IREM de Poitiers, les nombres premiers sont introduits après la notion de PGCD. Comme nous l'avons expliqué précédemment, ce choix est induit par l'intégration des outils informatiques dans le cours

---

[98] Dans l'introduction de ce projet de cours nous pouvons lire : « Sauf erreur de ma part tout ou presque peut se démontrer dans ce cours […]. Enfin, de nombreux types de raisonnement peuvent être utilisés dans ce cours : raisonnement par récurrence, raisonnement par l'absurde etc. L'occasion rêvée de préparer nos élèves aux mathématiques du supérieur. » (Moncorgé 1998, p. 11)
[99] Voir entretien avec P2 qui est émaillé de références au temps où P2 enseignait l'arithmétique en collège il y a maintenant une vingtaine d'années.

d'arithmétique. Il s'inscrit dans la droite ligne des conceptions noosphériennes qui ont guidé la rédaction du programme : l'algorithme d'Euclide est préféré aux nombres premiers pour la recherche d'un PGCD du fait de la volonté de favoriser l'usage d'outils informatiques[100].

II.2 Apprêtage didactique du savoir : le découpage des chapitres en parties ou thèmes d'étude ?

Après avoir analysé le premier grain de découpage du savoir par les enseignants, les chapitres, nous allons maintenant nous intéresser à l'organisation de ces chapitres en parties.
Tout comme précédemment, nous allons analyser ce découpage à la lumière des niveaux de détermination mathématique et de la granularité de description du contenu du programme.

Nous donnons ci-dessous un tableau comparatif du découpage en parties des chapitres de cours de P1, de P2 et de l'IREM de Poitiers.

[100] Cette même volonté se retrouve dans le programme actuel de la classe de troisième. L'algorithme d'Euclide est plus « efficace » en terme de programmation car il n'est pas nécessaire de posséder une liste de nombres premiers.

P1

Divisibilité
- Propriétés de **N**
- Multiples et diviseurs dans **Z**

Nombres premiers
- Critère Eratosthène
- Existence infinité
- Existence décomposition

Division euclidienne
- Division euclidienne
- Congruences

PGCD
- Existence
- Nombres 1^{ers} entre eux
- Propriétés du PGCD
- Méthodes de calcul

Bézout et Gauss
- Théorème de Bézout
- Théorème de Gauss
- Equation diophantienne

PPCM
- Fraction irréductible
- Propriétés PPCM

P2

Divisibilité et Nombres premiers
- Multiples et diviseurs (dans **Z**)
- Nombres premiers. On travaille dans **N**
- Division euclidienne

PGCD-PPCM Nombres premiers
- PGCD
- Nombres 1^{ers} entre eux
- Equation diophantienne
- PPCM
- PGCD-PPCM-Décomposition en produit de facteurs premiers

Poitiers

Divisibilité et PGCD–PPCM
- Divisibilité
- Diviseurs, multiples
- Division euclidienne
- Congruence
- Diviseurs et multiples communs
- PGCD et PPCM
- Base de numération

Nombres premiers et applications
- Les nombres premiers
- Définition
- Décomposition en facteurs premiers
- Infinité des nombres 1^{ers}
- Détermination PGCD-PPCM
- Les nombres 1^{ers} à travers l'histoire
- Une application pratique : la cryptographie

☐ Chapitres
☐ Parties

Fig. 25 : Découpage des chapitres en parties faits par P1, P2 et l'IREM de Poitiers

Nous constatons tout d'abord que le découpage en parties regroupe des niveaux de découpage mathématique très divers. En effet, on a aussi bien des sujets – détermination PGCD-PPCM à partir des nombres premiers de l'IREM de Poitiers–, des thèmes – existence d'une infinité de nombres premiers de P1– que des secteurs – nombres premiers chez P2. Le cas de P2 est ici particulier. En effet, son découpage en parties reste encore à un niveau d'organisation très « grossier ». Son organisation centrée sur le logos contraint fortement son apprêtage didactique du savoir à enseigner.

Il est surprenant de voir qu'aucun des trois enseignants ne présente l'algorithme d'Euclide à ce niveau de découpage alors que c'est un des contenus centraux du programme.

Chez P1, nous voyons apparaître deux parties qui diffèrent de celles présentes chez les deux autres enseignants : les propriétés de **N** et les fractions irréductibles. Le fait de débuter le cours d'arithmétique par les propriétés de **N** correspond à un choix mathématique fort de P1 : faire travailler le raisonnement aux élèves, choix motivé par la spécificité des élèves de spécialité mathématique. Quand on demande à P1 son avis sur la spécialité mathématique, elle répond :

> « Moi je dirai pour les élèves, ben l'objectif de formation qui est plus l'abstraction […]. En cours obligatoire actuellement on fait presque que de la technique alors qu'en spécialité math, sur le cours de géométrie ou le cours d'arithmétique, […] on truande moins sur le départ. C'est-à-dire qu'il y a une axiomatique qui est plus claire, et il y des démonstrations qui sont nettement plus rigoureuses. Donc en fait, ça sert énormément aux élèves qui font des études de mathématiques après, même à ceux qui font de la physique. […] [j'aimais bien enseigner l'arithmétique] parce que je pense que justement ça a l'avantage de partir d'une axiomatique sur les propriétés de N qui sont simples et que ça a l'avantage justement de pouvoir être rigoureux. » (Extraits entretien P1)

Le cours de l'IREM de Poitiers se situe plus dans l'esprit du programme actuel. Les propriétés de **N** ne sont pas introduites et deux parties apparaissent spécifiquement dans ce cours : les nombres premiers à travers l'histoire et leur application pratique à la cryptographie. C'est le seul cours qui fasse vivre la niche « culturelle » du programme en y consacrant une partie. Par ailleurs, c'est également le seul cours qui introduise la cryptographie. Ceci est conforme au programme qui propose dans le cadre des travaux pratiques « l'introduction de quelques exemples de […] méthode de codage ou de cryptage » pour donner aux élèves des « occasions d'applications concrètes » d'algorithme. Nous reviendrons sur ce point lors de l'analyse écologique des cours de chacun des trois enseignants.

II.3 Apprêtage didactique du savoir : poids de la contrainte temporelle sur l'organisation du domaine d'étude

Les analyses faites précédemment ne nous ont pas encore permis de prendre en compte le poids que peut avoir la contrainte temporelle sur les choix d'apprêtage du savoir faits par les enseignants. Or cette contrainte ne peut être ignorée lorsque l'on s'interroge sur les pratiques des enseignants sur un domaine d'étude.

Au début de l'année scolaire, le professeur doit programmer, pour chacune de ses classes, son enseignement de mathématiques. Habituellement, pour les professeurs expérimentés, organiser cette progression n'est pas problématique. L'expérience du métier acquise au fil des

années leur permet d'apprécier le temps à consacrer à chaque domaine d'étude et de prévoir leur répartition sur l'année.
Cependant, sous certaines conditions, cette tâche peut poser problème. Les enseignants débutants, par exemple, éprouvent des difficultés importantes pour « concevoir [un] cours complet sur chaque notion, au sein d'une progression cohérente sur l'année » (Robert 2001, p. 64). En effet, comme le souligne Robert, la prise en compte de cette « double globalité » leur demande de mettre en œuvre « des activités y compris mathématiques dont certaines étaient peu pratiquées jusqu'alors, comme l'organisation des connaissances, avec le choix d'un ordre pour l'année et d'un découpage pour chaque chapitre, avec la prise de conscience, voire la mise en évidence de relations entre les chapitres […] » (Ibid.). Dans une moindre mesure, les professeurs expérimentés peuvent eux aussi être confrontés à ce problème si par exemple les programmes d'enseignement changent ou s'ils ont, pour la première fois, une classe d'un niveau qu'ils n'avaient jamais eu auparavant.

La réintroduction de l'arithmétique a mis les professeurs de terminale S spécialité mathématique face à cette difficulté. En effet, ces derniers ne disposaient pas de repères par rapport à l'enseignement de l'arithmétique, tant au niveau des difficultés d'apprentissage des élèves qu'au niveau du degré de développement à donner à chacune des notions du programme, pour ne citer que ces deux contraintes. Et si certains des enseignants avaient pu enseigner l'arithmétique avant sa disparition des programmes en 1983, cette expérience ne pouvait être suffisante pour dépasser ce problème, les programmes d'arithmétique de la période des mathématiques modernes et ceux de la période contemporaine étant, comme nous l'avons vu, très différents.

Une des premières tâches didactiques dont doit s'acquitter un professeur pour apprêter le savoir à enseigner est de déterminer le temps à consacrer à chacun des domaines d'étude. Tandis que le programme de 1998 ne donnait aucune indication temporelle, le programme de 2002 précise explicitement que la répartition des séances de spécialité doit se faire de façon équitable entre l'arithmétique et les compléments de géométrie. Nous pouvons interpréter ceci comme une régulation de la noosphère aux perturbations entraînées par la réintroduction de l'arithmétique sur une pratique enseignante –choisir une progression cohérente sur l'année– habituellement non problématique, comme nous l'avons souligné précédemment. Les nombreux débats qui ont eu lieu en 1998 sur la façon de programmer l'enseignement de l'arithmétique sur une année scolaire soutiennent cette hypothèse.

Ainsi, le groupe de Thiers[101], consacre une partie de son bilan sur la première année d'enseignement de l'arithmétique à la répartition des séances d'arithmétique sur l'année scolaire 1998/99 :

> « Certains collègues ont enseigné l'arithmétique de façon continue, sans aucune coupure. D'autres ont enseigné en deux fois, (c'est-à-dire deux fois cinq semaines), voire trois fois. » (Noailles 1999, p. 46)

Si le nombre de séances d'arithmétique n'est pas questionné[102], ce n'est pas le cas de la répartition de celles-ci sur l'ensemble de l'année. Le groupe de Thiers a interrogé les enseignants, à la fin de la première année d'enseignement de l'arithmétique et montre que les professeurs qui ont « pratiqué une coupure trouvent celle-ci fort positive » et que « les autres regrettent en général de ne pas avoir scindé leur enseignement ». Ainsi, enseigner

[101] Le groupe Thiers est l'un des groupes de l'IREM de Clermont-Ferrand qui travaille sur la liaison bac/post-bac. Ces groupes réunissent des enseignants du secondaire et des enseignants du supérieur.
[102] La citation semble montrer que les enseignants choisissent d'y consacrer une dizaine de séances.

l'arithmétique d'un «bloc » au cours de l'année scolaire est une moins bonne réponse à la tâche didactique *organiser la progression sur l'année* que de scinder l'arithmétique en deux parties. Sur quelles bases les enseignants ont-ils évalué ces deux organisations didactiques différentes ? Les réponses faites par les professeurs au groupe de Thiers montrent que ce sont les résultats des élèves que les enseignants prennent comme indice pour évaluer leurs choix :

> « Parmi les premiers [ceux qui ont scindé l'enseignement d'arithmétique en deux parties], certains notent une très nette différence dans l'attitude de leurs élèves, entre la première partie du cours et la suivante. Autant les élèves paraissent inhibés et sans réaction devant les exercices dans la partie initiale, autant dans la deuxième partie du cours ils étaient devenus actifs. A l'aide d'algorithmes devenus classiques et des notions vues précédemment, que le temps leur avait permis de bien assimiler, ils avaient plaisir à franchir les premières difficultés. » (Ibid. p. 46)

Dans le cours d'arithmétique proposé par l'IREM de Poitiers, l'enseignement d'arithmétique a été divisé en deux chapitres distincts, appelées ici « unités ». Si les raisons de ce choix ne sont pas totalement explicites, le manque d'habitude des élèves face aux méthodes spécifiques à l'arithmétique semble avoir joué un rôle dans cette décision :

> « Le temps consacré à l'arithmétique et celui passé sur les transformations ont été à peu près équilibrés dans le temps imparti à l'enseignement de spécialité. Le chapitre consacré à la divisibilité a cependant pris plus de temps que prévu car les élèves avaient à se familiariser avec des méthodes totalement nouvelles. L'unité sur la divisibilité a donc pris 9 séquences de 2 heures et l'unité sur les nombres premiers 4 séquences de 2 heures […]. Cette deuxième partie a lieu après une coupure d'environ six semaines pendant laquelle les élèves ont travaillé sur les isométries. » (IREM de Poitiers 2000, pp. 239-260)

P1 et P2 ont, elles aussi, été confrontées à cette tâche problématique d'organiser la progression mathématique sur l'année. Le tableau ci-dessous donne leur progression sur l'année scolaire 2000/2001 :

Séquences	P1	P2
	géométrie	géométrie
	géométrie	géométrie
	géométrie	géométrie
	géométrie	**Arithmétique**
	géométrie	**Arithmétique**
	géométrie	géométrie
	Arithmétique	géométrie
Toussaint	*Vacances*	
	Arithmétique	**Arithmétique**
	Arithmétique	**Arithmétique**
	Arithmétique	**Arithmétique**
	Arithmétique	**Arithmétique**
	Arithmétique	Géométrie
	Arithmétique	Géométrie
	Arithmétique	Géométrie
Noël	*Vacances*	
	Arithmétique	Géométrie
	Arithmétique	Géométrie
	Arithmétique	Géométrie
	Arithmétique	Géométrie
Février	*Vacances*	
	Arithmétique	Géométrie
	Géométrie	Géométrie
	Géométrie	**Arithmétique**
	Géométrie	**Arithmétique**
	Géométrie	**Arithmétique**
	Géométrie	**Arithmétique**
Fin Mars	géométrie	**Arithmétique**

Fig. 26 : Progression sur l'année scolaire 2000/01 des séances de spécialité mathématique de P1 et P2

Contrairement au bilan dressé par le groupe de Thiers, P1, qui avait initialement choisi de séparer en deux blocs son cours d'arithmétique, opte désormais pour un enseignement plus regroupé dans le temps afin de ne garder que des révisions ou des «bricoles » pour la fin de l'année :

> « **Dans les modifications principales, y'a eu le fait de la faire plus tôt plus loin, c'est-à-dire de la grouper plus et finalement de garder qu'un petit bout pour la fin de l'année[103].** C'est-à-dire qu'au début je m'étais dit **et c'est vrai que les élèves ont du mal à rentrer dans le sujet**, c'est-à-dire vu toutes les fautes où par exemple ils n'ont pas envie de travailler avec les entiers donc ils mettent des fractions de partout… Bon y'a toute une typologie d'erreurs qu'on trouve parce qu'en fait il n'ont pas fait d'arithmétique avant. **Donc la première année j'avais vraiment scindé en deux parties à peu près égales**… Bon une partie à peu près là où je l'ai fait c'est-à-dire dès qu'on a révisé homothétie, translation, lieux géométriques, on attaque l'arithmétique. **Mais la première année j'avais fait un bout là et un deuxième bout presque aussi conséquent en fin d'année alors que là on tire presque tout**… **je dirais qu'on garde des bricoles** parce que bon, des changements de base et les machins, ça permet de refaire quelques exercices sur Bézout en fin d'année c'est-à-dire que le fait de ne pas aller jusqu'au bout c'est juste pour permettre un réinvestissement un peu avant le bac. » (Extraits entretien P1)

P1 avait donc fait en 1998/1999 le choix de « scinder » l'arithmétique en deux blocs pour des raisons identiques à celles soulevées par le groupe de Thiers : les difficultés des élèves confrontés à un domaine d'étude complètement nouveau pour eux et qui est assez éloigné des autres domaines d'étude du secondaire. Elle a cependant choisi de changer de stratégie par la suite afin de s'adapter à la contrainte que représente le Baccalauréat.

[103] C'est nous qui soulignons.

Dans son entretien, P2 nous indique qu'elle a changé sa progression pour l'année scolaire 2001/2002. Alors qu'en 2000/2001, pendant nos observations, P2 avait divisé son cours d'arithmétique en trois parties (voir tableau précédent), elle revient, en 2001, sur cette progression pour la modifier :

> « Et puis je commence en début d'année pour laisser des choses décanter. Et la dernière partie, tout ce qui est accessoire [les congruences], je le ferai en fin d'année. Ca permettra de faire des rappels. […]. [Je fais ressortir] le travail sur la divisibilité, le travail sur les nombres premiers qui me parait important. […] Je pense que je ferai les congruences plus tard et puis tous les tas de petits problèmes annexes comme l'écriture en d'autres bases et les choses comme ça qui finalement ne sont pas fondamentales. » (Extraits entretien P2)

Les modifications faites par P1 et P2 nous semblent relever d'un processus d'institutionnalisation des organisations mathématiques à l'échelle d'une année scolaire. A la dynamique ancien/nouveau qui permet l'avancée du temps didactique en classe et l'institutionnalisation par la conversion officielle des connaissances en savoirs au niveau d'une ou plusieurs séances en classe s'articule ici une dynamique « essentiel/accessoire » qui, tout en permettant l'organisation du temps didactique, participe à la mise en exergue des savoirs « officialisés ». Cette dynamique est rendue particulièrement forte du fait de la contrainte du baccalauréat en fin d'année. Pour P1 et P2, choisir de traiter l'arithmétique en un bloc principal, pour ne laisser en fin d'année que les notions « accessoires », leur permet de mettre l'accent sur les savoirs évalués au baccalauréat en les réinvestissant dans l'introduction de ces notions « accessoires »[104] et en gardant un moment pour les révisions spécifiques à l'examen.

Notons également que P1 et P2 ont fait respectivement 13 et 11 séances d'arithmétique. Ce nombre de séances est sensiblement le même que celui indiqué par le groupe de Thiers et la brochure de l'IREM de Poitiers. Il correspond également à peu de choses près aux indications du programme de 2002, invitant les professeurs à consacrer la moitié de leurs séances à l'arithmétique[105].

Les propos tenus ci-dessus sont cependant à nuancer par le fait que l'on ne s'est pas interrogé ici sur la contrainte liée à la planification de l'enseignement de la géométrie, contrainte qui joue nécessairement un rôle dans la planification de la progression de l'arithmétique sur l'année.

II.4 Conclusion

Nous avons montré que, pour P1 et P2, les choix de découpage du savoir mathématique sont intimement liés à leur façon de concevoir l'activité mathématique, centrée sur la praxis pour P1 et sur le logos pour P2. Les découpages effectués ne sont alors que peu dépendants de l'arithmétique. Nous pouvons raisonnablement penser que P1 et P2 organisent l'ensemble de leurs cours de la même manière que celui d'arithmétique.

---

[104] Pour ne citer qu'un exemple, introduire la notion de congruence permet de retravailler sur la division euclidienne et la notion de divisibilité.

[105] Dans le tableau précédent (Fig. 18), nous n'avons pas mentionné les séances de révision de fin d'année auxquelles nous n'avons pas assistées.

Les choix écologiques faits par la noosphère et transcris dans le programme sont peu pris en compte par P1 et P2 pour organiser leur enseignement. Même P1 qui, à l'analyse du questionnaire[106], semblait être la plus volontariste sur l'introduction des outils informatiques en arithmétique ainsi que sur l'importance de la programmation dans un enseignement de mathématiques, ne prend que très peu en compte ce paramètre pour concevoir son cours. Seul le cours présenté dans la brochure de l'IREM de Poitiers est organisé avec pour objectif de faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique. Le fait que cette brochure puisse être considérée comme une publication relevant de la sphère noosphérienne est certainement un facteur essentiel ici.

Nous allons présenter maintenant l'analyse écologique de ces trois cours en suivant la même méthode que celle adoptée pour l'analyse des manuels[107].

III. ANALYSE ECOLOGIQUE DU SAVOIR APPRETE PAR L'ENSEIGNANT

Nous allons à présent analyser la place du raisonnement et de l'algorithmique dans les cours de P1, P2 et de l'IREM de Poitiers. Nous distinguons trois points dans cette analyse :

1. Ces enseignants ont-ils introduit les notions d'ensemble et de relations dans leur cours ? Bien que ces notions soient actuellement hors programme, le choix de les présenter aux élèves est nécessaire pour faire des démonstrations « rigoureuses », même dans le cas des démonstrations constructives.
2. Proposent-ils des démonstrations constructives des théorèmes d'arithmétique au programme ? Nous avons vu que le choix de donner des démonstrations constructives est l'une des trois possibilités pour faire vivre la niche algorithmique de l'arithmétique. Nous analysons dans ce sens les démonstrations du théorème de la division euclidienne, du théorème de Bézout, de l'existence de la décomposition en produit de facteurs premiers et la définition du PGCD.
3. Font-ils une place à l'outil informatique dans leur projet de cours ? Si oui, comment l'intègrent-ils ?

III.1 Les notions d'ensemble et de relations

a) Cours de P1

P1 fait le choix de débuter le cours d'arithmétique par l'énonciation des propriétés des parties non vides de **N**. Nous avons déjà souligné que, dans une optique de formation des élèves au post-bac, P1 insiste sur le raisonnement en arithmétique, et ce d'autant plus qu'il est possible de « partir d'une axiomatique sur les propriétés de **N** qui sont simples ». Nous verrons dans la

[106] L'analyse de ce questionnaire fait l'objet du chapitre B3 « Analyse écologique du savoir apprêté par les enseignants. Des contraintes et des libertés institutionnelles ».

[107] Se rapporter au chapitre B2 « Analyse écologique de manuels de 1971 à 2002. Des contraintes et des libertés institutionnelles ».

suite de cette analyse si ces propriétés sont effectivement utilisées par P1 lors des démonstrations des théorèmes d'arithmétique.
Néanmoins, les notations ensemblistes sont peu employées par P1. Elle s'appuie dessus essentiellement pour démontrer l'existence du PGCD et du PPCM. Ceci lui permet de réinvestir les propriétés des parties de **N** dans son cours, comme nous le verrons par la suite.

Elle présente par ailleurs le principe de récurrence à la suite des propriétés des parties de **N** et donne deux exemples d'applications directes dans le cours, suivis de deux exercices dans la première fiche d'exercices. Dans l'entretien que nous avons eu avec elle, P1 souligne que le raisonnement par récurrence fait partie des grandes composantes du contenu du cours d'arithmétique. Comme « c'est un des grands modes de raisonnement en arithmétique », elle estime devoir présenter ce sujet en début de cours d'arithmétique, surtout que « pour la plupart [des élèves], c'est pas acquis en fin de première S. ». Ainsi, pour être cohérente avec son souci de formation des élèves aux modes de raisonnement, elle commence son projet de cours par une présentation du principe de récurrence. La maîtrise de ce type de raisonnement sera d'ailleurs évaluée dans le premier D.S. d'arithmétique par le biais d'un exercice portant sur la divisibilité.

b) Cours de P2

Les propriétés de N et le principe de récurrence ne font pas partie du cours de P2.
Cependant, elle utilise les notations ensemblistes. Ainsi, le premier cours d'arithmétique « Divisibilité – Nombres premiers » débute par la définition d'un multiple, suivi par un exemple et la convention de notation « M_a : multiples de a ».
Se déclinent alors deux exemples de détermination d'un ensemble de diviseurs :

> « $M_0=\{0\}$, 0 a un seul multiple.
> $M_1=Z=M_{-1}$
> $M_a=\{ka/k\in Z\}$, $M_a=M_{-a}$. » (Extraits Cours n°1 de P2)

Les mêmes notations sont introduites pour les ensembles de diviseurs de a : D_a.
Celles-ci seront réutilisées lors du cours sur l'algorithme d'Euclide (Voir cours n°7 de P2 en annexe).

c) Cours de l'IREM de Poitiers

Il n'y a pas d'introduction des notions d'ensemble et de relations dans ce cours. L'enseignant a fait des choix qui ne nécessitent pas l'usage de notations ensemblistes (notamment pour l'algorithme d'Euclide) et ne revient pas en arithmétique sur le principe de récurrence, même si des exercices utilisant ce type de raisonnement sont prévus.
Par ailleurs, il fait le choix explicite de ne pas appuyer son cours sur l'énoncé formel des propriétés de N, préférant faire appel à l'intuition des élèves à ce sujet, quitte à admettre certains résultats :

> « La démonstration [de la division euclidienne] s'appuie sur l'axiome : 'un entier est compris entre deux multiples consécutifs d'un autre'. Le programme nous impose de faire un choix : faut-il partir de l'axiomatique de base de N et démontrer cette propriété par un raisonnement ensembliste ou au contraire se contenter du 'bon sens commun' et insister sur l'aspect intéressant de la démonstration de l'unicité […] ? Nous avons fait le second choix. Les élèves utilisent spontanément le résultat de cet axiome, c'est lors de la synthèse que le professeur soulève le problème de l'axiomatisation. » (Poitiers 2000, p. 245)

III.2 La division euclidienne

Les choix de démonstration du théorème de la division euclidienne étant commentés en détail dans la suite de cette thèse, nous nous contentons ici de mentionner les démonstrations proposées par les trois enseignants.
Aucun des trois enseignants ne fait une démonstration constructive du théorème de la division euclidienne. P2 base sa démonstration sur l'encadrement de a par deux multiples consécutifs de b tandis que P1 s'appuie sur la propriété d'Archimède et l'IREM de Poitiers sur les propriétés de **N**.

III.3 Définition du PGCD

a) Cours de P1

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, P1 définit le PGCD de deux entiers relatifs non nuls à partir de la caractérisation de ces diviseurs :

> « D_1={diviseurs de a appartenant à **N**}
> D_2={diviseurs de b appartenant à **N**}
> $D_1 \cap D_2$ est une partie de N, non vide, finie : admet un plus grand élément : PGCD(a,b) » (Extraits cours n°7 de P1)

Ce choix mathématique local est cohérent avec sa volonté de faire des mathématiques rigoureuses en arithmétique, en partant « d'une axiomatique sur les propriétés de **N** ». L'introduction des notations ensemblistes répond ici à la nécessité d'un choix mathématique.

b) Cours de P2

P2 choisit également de définir le PGCD de a et b à partir de leurs diviseurs, cependant sans utiliser les notations D_a et D_b alors qu'elles sont disponibles, car introduites dans le premier cours :

> « Définition : on appelle PGCD de deux entiers naturels (non nuls simultanément) leur Plus Grand Commun Diviseur. » (Extraits cours n°7 de P2)

Or ces notations sont ré-utilisées dans la même séance pour la présentation de l'algorithme d'Euclide (voir en annexe). Ce choix s'explique par le fait que P2 ne souhaite pas se servir des propriétés des parties de **N** dans son cours. Utiliser les notations ensemblistes comme P1 l'aurait contrainte à justifier le fait que $D_1 \cap D_2$ admette un plus grand élément.

c) Cours de l'IREM de Poitiers

Dans ce cours, le PGCD est d'abord introduit «par conjecture » (Poitiers 2000, p. 252) avec l'utilisation d'Excel. Son existence est ensuite démontrée à partir de considérations sur les diviseurs de a et b.

Remarquons qu'aucun des trois enseignants ne définit le PGCD à partir de l'algorithme d'Euclide, démonstration constructive qui aurait pu paraître la plus en accord avec le programme.

III.4 Nombres premiers entre eux – Théorème de Bézout

a) Cours de P1

P1 choisit de prouver le théorème de Bézout par la démonstration utilisant la division euclidienne avec, de façon sous-jacente, la notion d'idéal avec l'ensemble G={am+bn, $m\in \mathbf{Z}$ et $n\in \mathbf{Z}$}. Elle utilise ainsi explicitement la propriété «toute partie non vide de **N** admet un plus petit élément », de même qu'un raisonnement par l'absurde[108].
Ce choix de démonstration, s'inscrit dans la logique de choix qu'elle met en place tout au long de son cours : partir d'une axiomatique de **N** en arithmétique pour démontrer rigoureusement toutes les propriétés et former les élèves au raisonnement.

b) Cours de P2

P2 ne donne pas la démonstration de ce théorème dans son cours. Elle indique simplement la méthode à suivre pour pouvoir la faire :

> « Si a et b sont des entiers naturels non nuls et si δ est leur PGCD alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que δ=au+bv.
> On montre par récurrence que tous les restes successifs des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide s'écrivent sous cette forme. » (Extraits cours n°7 de P2)

La démonstration choisie par P2 s'appuie sur la méthode de descente de l'algorithme d'Euclide. Alors que P2 fait habituellement toutes les démonstrations de son cours, elle décide de ne pas faire celle-ci. C'est peut-être une question de temps ; en effet, si l'on veut formaliser cette démonstration[109], il faut introduire des notations assez complexes et le principe de récurrence à mettre en œuvre n'est pas celui qui est habituellement utilisé par les élèves.

c) Cours de l'IREM de Poitiers

Dans ce cours, la démonstration du théorème s'appuie explicitement sur l'activité Excel qui a permis d'introduire les notions de PGCD et de PPCM. Elle utilise le fait que l'activité réalisée permet de trouver un « u » et un « v » tels que au+bv=D ou D est le PGCD de a et de b. Cette démonstration se sert des résultats obtenus sur 4 exemples pour généraliser, sans preuve générale, ce résultat.

III.5 Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

[108] Voir cours n°8 de P1 en annexe.
[109] Un manuel que nous n'avons pas analysé propose de démontrer ce théorème par récurrence : Belin. Cette démonstration est assez technique car, pour montrer l'hérédité de la propriété, il faut supposer que celle-ci est vraie pour deux rangs consécutifs. Cette démonstration se base sur l'algorithme d'Euclide mais il est à craindre que les difficultés liées à la récurrence masque, pour les élèves, la descente de l'algorithme d'Euclide et donc, son caractère algorithmique.

a) Cours de P1

Ce théorème n'est pas démontré par P1. En effet, pour le cours sur les nombres premiers, P1 choisit de faire ce qu'elle appelle un « bis » du livre : elle s'appuie fortement sur le livre pour ce cours et ne détaille au tableau que les points qui lui semblent importants. Dans ce cours, elle met ainsi l'accent sur la démonstration de l'infinité des nombres premiers, qu'elle refait au tableau, tandis qu'elle renvoie les élèves à leur manuel pour la démonstration de l'existence de la décomposition en produit de facteurs premiers.
Le manuel de la classe est Ter98 et la démonstration de ce théorème présentée par ce manuel est la méthode de descente[110].

b) Cours de P2

La démonstration choisie par P2 pour prouver l'existence de la décomposition d'un entier naturel $n \geq 2$ en produit de facteurs premiers est la démonstration par la méthode de descente. La vérification de l'arrêt de l'algorithme de « descente » est mentionnée mais le fait que toute suite d'entiers naturels strictement décroissante est finie est admis.

c) Cours de l'IREM de Poitiers

Le choix fait dans ce cours est le même que celui fait par P2.

III.6 Place de l'outil informatique

a) Cours de P1

Comme nous l'avons souligné précédemment, P1 est l'enseignante qui, à l'analyse des questionnaires[111], était apparue comme la plus favorable à l'introduction de l'outil informatique en arithmétique.
Si l'on analyse le projet de cours de P1, on constate que la calculatrice occupe une place bien déterminée : absente des cours, des exercices et d'un D.S., elle rentre dans le projet de P1 dans le cadre d'une séance particulière sur la programmation et de fiches d'arithmétique particulières[112].
Voici une description succincte des trois fiches sur la calculatrice faites par P1. Les deux premières fiches présentent un programme écrit dans un ou deux langages de programmation avec des commentaires tandis que la troisième propose un programme sans commentaire et il est demandé aux élèves de décrire ce que fait ce programme :

1. **Une fiche « arithmétique et calculatrice »** : dans cette fiche, P1 propose les instructions ou les programmes permettant de :
   - *déterminer si un nombre est multiple d'un nombre donné dans un programme,*
   - *déterminer si un nombre N est premier ou non et dans le second cas, de trouver son plus petit diviseur entier,*
   - *décomposer un nombre N en facteurs premiers.*

   Ces programmes sont tous précédés d'une explication portant sur le principe sur lequel est construit le programme et des valeurs numériques sont données pour permettre de

[110] Voir chapitre B2 « analyse écologique de manuels de 1971 à 2002. Des contraintes et des libertés institutionnelles ».
[111] Le questionnaire rempli par P1 est présenté au début de l'annexe au chapitre B3.
[112] Ces fiches sont présentées dans l'annexe au chapitre C1.

les tester. Ils sont par ailleurs tous transcris en langage Casio et en langage Texas pour que les élèves puissent essayer de les rentrer dans leur calculatrice, quitte à faire des adaptations minimes.

2. **Une fiche « Programmation-Théorème de Bézout »** : cette fiche suit le même principe que la fiche « arithmétique et calculatrices » si ce n'est que le programme est uniquement transcrit pour les T.I. 80.
3. **Une fiche « Calcul de PGCD(a,b) par l'algorithme d'Euclide »** : Cette fiche présente un programme permettant de calculer le PGCD de deux entiers en langage Texas, « facilement adaptable aux autres marques ». A la différence des deux autres fiches, celle-ci comporte la tâche suivante : « traduire par une phrase de commentaire le programme ». P1 a trouvé ici une technique didactique lui permettant de faire travailler l'ensemble des élèves de la classe sur cette fiche. En effet, sans cela, les élèves qui, par exemple, ont déjà une touche de calcul de PGCD implémentée sur leur calculatrice n'auraient pas de raison de travailler sur ce programme.

Remarquons qu'au travers des commentaires inscrits à côté des programmes proposés dans les deux premières fiches ou de ceux que les élèves doivent écrire, P1 met l'accent sur des points essentiels de la démarche algorithmique : l'initialisation des variables, le critère permettant de définir l'arrêt de la répétition et la relation à réitérer.

Ce choix d'intégrer la calculatrice dans le cours d'arithmétique est le résultat d'une réflexion plus générale de P1 sur l'enseignement des mathématiques et le rôle de la calculatrice dans cet enseignement. Au cours de son entretien, P1 parle beaucoup de la place de la calculatrice en mathématiques, pour elle, mais également pour ses collègues. Elle définit explicitement ses objectifs par rapport à l'usage de la calculatrice dans sa classe :

> « [La calculatrice] ça permet une plus grande richesse au niveau des exercices mais pour moi par exemple, ça ne dispense pas de justement bien comprendre ce qu'est un algorithme bon par exemple en faisant le théorème de Bézout à la main […] c'est un peu des approches complémentaires et je crois que pour les élèves ce qui m'intéresse le plus, c'est à la fois un peu d'initiation à la programmation mais très élémentaire, c'est-à-dire les structures de boucle ou les tests conditionnels et des choses comme ça et puis surtout qu'ils apprennent à être cohérents dans les démonstrations et à s'auto-contrôler. » (Extraits entretien P1)

Pour P1, intégrer la calculatrice dans son cours d'arithmétique est d'abord le moyen d'initier les élèves aux concepts de base de la programmation. Cet objectif d'apprentissage apparaît également dans ses réponses à notre questionnaire. Pour elle, l'arithmétique est d'abord un moyen pour travailler l'algorithmique et non l'inverse. Elle poursuit également un second objectif en introduisant la calculatrice et en proposant des programmes aux élèves. C'est pour elle un moyen didactique supplémentaire, avec les fiches d'exercices et leurs corrigés, de former les élèves à un travail autonome, en leur donnant des moyens de « s'auto-contrôler ».

Cependant, elle se heurte à un certain nombre de contraintes. Elle en évoque huit dans son entretien : l'intérêt et la motivation des élèves pour la programmation, le temps, la position de chaque enseignant par rapport à la calculatrice, le manque de formation, les fonctionnalités des calculatrices, l'évaluation difficile des connaissances de programmation, l'hétérogénéité du niveau des élèves en programmation et l'existence de différents types de calculatrices dans une même classe.

Certains élèves ne sont pas intéressés par la programmation et utilisent la calculatrice uniquement en «presse bouton », c'est-à-dire sans rentrer dans la démarche d'initiation à la programmation que P1 souhaite mettre en place.

C'est également un choix didactique qui demande un investissement en temps considérable. D'ailleurs, P1 souligne qu'elle avait passé beaucoup plus de temps la première année sur la programmation des algorithmes d'arithmétique mais qu'elle est revenue sur ce choix car « il faut corriger plusieurs trucs [prévoir différents corrigés], trouver des erreurs sur des modèles [de calculatrices] qu'on n'a pas… Et comme le programme de géométrie plane est quand même très long […] y'avait des choix stratégiques. C'est pour ça que, la calculatrice, j'ai […] continué à en parler mais un peu moins effectivement ». Ceci l'amène à revoir à la baisse ses objectifs par rapport à la calculatrice et à proposer des programmes prêts à l'emploi pour les élèves non intéressés par la programmation et ne s'investissant pas à ce sujet.

Par ailleurs, P1 change son enseignement au fil des années et elle dit avoir une «évolution personnelle qui [la] conduit à évaluer de moins en moins avec la calculatrice ». De fait, la calculatrice occupe une place de moins en moins importante dans sa classe.

Si P1 s'est formée de façon autonome à la programmation en assistant à des stages de constructeurs de calculatrices, elle déplore le manque de formation de ses collègues. Ceux qui n'ont pas fait l'effort de se former tous seuls à la programmation sur différents types d'outils informatiques ne les utilisent pas dans leur classe et s'ils le font, ne travaillent pas sur un point essentiel : « le passage de la théorie de l'algorithme […] à la calculatrice » (Extraits entretien P1)

Souvent, les instructions disponibles dans les calculatrices ne sont pas suffisantes pour permettre aux élèves de rentrer les programmes dans leur machine[113] ou alors, ils disposent de fonctionnalités qui rendent obsolète l'implémentation de tels programmes[114].

De plus, se pose également la question de l'évaluation des élèves sur l'utilisation de l'outil informatique. Ce point fait l'objet d'un débat pour l'option « mathématique-informatique de Première L » comme le souligne P1.

L'analyse succincte que nous allons présenter de l'extrait de séance[115] de l'enseignante P1 sur la programmation en classe des programmes « déterminer si un nombre est premier » et « décomposer un nombre en produit de facteurs premiers » montre par ailleurs le poids des contraintes liées à l'hétérogénéité du niveau des élèves en programmation et à l'existence de plusieurs modèles de calculatrices différents dans la classe, sur la réalité de l'enseignement.

P1 conduit cette séance en classe malgré deux contradictions qu'elle évoque lors de son cours : savoir programmer n'est pas du niveau d'un élève de terminale (ligne 72 : *ce qui serait important c'est que vous compreniez les structures, pas que vous soyez capables je dirais forcément de me faire un programme, ce n'est pas le but ici (…). Je pense que c'est un objectif trop difficile pour la classe de … de terminale*) et cette compétence ne peut pas faire

[113] « Les élèves qui ont des calculatrices bas de gamme, ils ont pas le for ou le while. Donc c'est vrai qu'on est aussi un peu coincé. » (Extraits entretien P1)
[114] « Je veux dire que je trouve que c'est dommage que [les H.P. aient introduit le programme de Bézout]. Ca enlève toute envie de programmer. […] C'est-à-dire que le problème c'est aussi de savoir justement si on veut que ça reste un outil pédagogique. » (Extraits entretien P1)
[115] Voir en annexe au chapitre C1.

l'objet d'une évaluation (ligne 19 : *[…] sachant qu'en fait, en terminale, le fait de faire des programmes ne fera pas partie des … évaluations, […] il n'est pas question de vous donner un programmation à taper [en devoir surveillé et au bac]*).

Elle estime donc devoir justifier auprès des élèves la raison qui la conduit à leur proposer des programmes. Elle leur explique qu'elle souhaite leur donner un minimum de culture générale en programmation (ligne 19 : *Donc les programmes, ce que je voudrais vous expliquer c'est donc un peu plus les … euh les structures, pour que en cas où vous voudriez vous amuser à faire d'autres programmes à l'occasion ou des choses comme ça, vous ne soyez pas quand même complètement ignares en programmation […] il faut faire une différence entre ce qui est culture générale que je veux que vous ayez en sortant de terminale et ce qu'on peut vous demander un jour de devoir surveillé ou au bac.*).

Au niveau du savoir apprêté, P1 a un but qu'elle exprime très clairement pendant la séance : introduire les notions essentielles de programmation comme les *instructions de base* (lignes 1 et 4), les tests conditionnels (ligne 4), les *test d'arrêt final* (ligne 32) et les listes statistiques (ligne 5). Elle a prévu dans un premier temps de mener cette séance à l'aide d'un rétroprojecteur pour que la classe puisse suivre ses explications sur les programmes puis de laisser un moment aux élèves pour rentrer ces programmes dans leur machine avec son aide si besoin est. Consciente des différences de niveau des élèves en programmation (ligne 4) et de l'existence de plusieurs types de calculatrices dans la classe, elle prend en compte ces contraintes, mais celles-ci « font du bruit » dans son discours (voir par exemple ligne 6 et lignes 13 à 17). Elle doit par ailleurs prévoir des activités pour les élèves qui possèdent des calculatrices dans lesquelles des touches pré-programmées existent pour ces deux programmes (lignes 75 à 76 : *Donc ... je voudrais que vous rentriez les programmes … donc je dis sauf si vous avec une 89 ou une 92 … ou une HP 40, c'est pas la peine puisqu'à ce moment là, vous utilisez les touches, c'est ce que je vous ai mis dans la colonne. Vous utilisez les touches Factor et ça revient au même hein. Euh donc à ce moment-là, vous vous dispensez de rentrer les … de rentrer les programmes. Donc du coup, je vais donner des plans de travail un peu étalés puisque vous n'avez pas les mêmes choses à faire…*)

Ainsi, malgré la volonté forte de P1 de se servir des contenus d'arithmétique afin d'enseigner les bases de la programmation, la séance de programmation qu'elle met en place semble ne pas atteindre cet objectif, du fait du nombre important de contraintes auxquelles P1 doit faire face pendant cette séance.

b) Cours de P2

Que cela soit dans la partie cours ou dans la partie exercices, P2 n'aménage pas de place spécifique à la calculatrice dans sa classe. Les élèves l'ont à leur disposition et l'utilisent pour faire des calculs mais son intégration dans le cours n'est pas reliée à des contenus d'arithmétique.
Par ailleurs, P2 essaie de favoriser chez les élèves le calcul à la main. Quand ils passent au tableau, ils doivent souvent effectuer des calculs de tête. De plus, un des exercices qu'elle donne à la suite du théorème de décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers doit être résolu sans calculatrice alors qu'il porte sur un nombre plutôt grand :

« Exercice 2 : Pour la prochaine fois, décomposer à la main 954 493 » (Extraits cours n°3 de P2)

Or, quand on demande à P2, au cours de l'entretien, quel est le rôle de la calculatrice en arithmétique, elle répond :

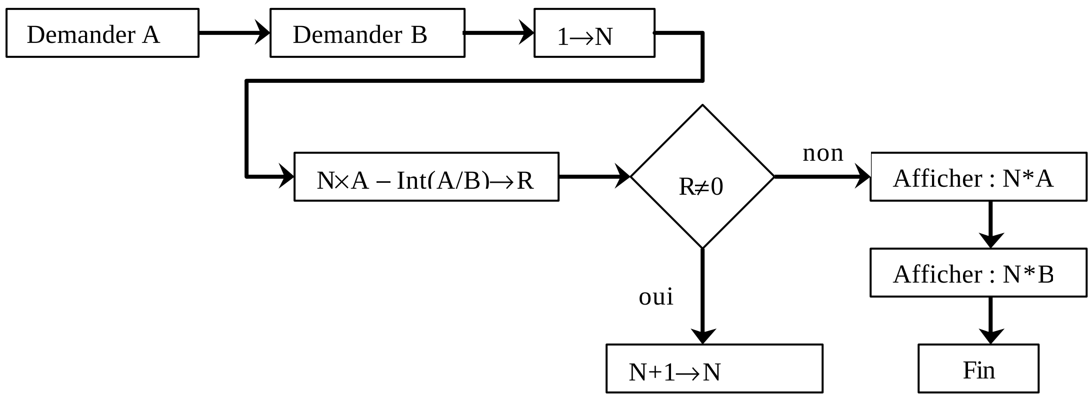
> « P2 : Bon, elle peut servir à conjecturer, elle peut aussi servir à faire des calculs quand ils sont longs et fastidieux. Maintenant élaborer des petits programmes aussi. Mais je reconnais que je n'ai pas beaucoup le temps d'en faire.
> L : C'est sûr que le temps c'est une contrainte très forte.
> P2 : non négligeable. » (Extraits entretien P2)

P2 connaît le discours institutionnel lié à la place de la calculatrice en mathématique. Elle évoque le temps comme contrainte pesant sur ses choix vis-à-vis de la calculatrice. Mais sa réponse laisse penser que ce n'est pas la seule contrainte qui ait dirigé ses choix. Il semble que la représentation que P2 a des mathématiques joue tout autant que le temps comme barrière à l'intégration de la calculatrice dans sa classe.

c) Cours de l'IREM de Poitiers

Ce cours a été construit autour de l'utilisation des outils informatiques, comme nous l'avons déjà mentionné précédemment.
En plus des activités d'introduction sur les nouvelles notions d'arithmétique sur lesquelles nous ne reviendrons pas dans cette partie, le cours de l'IREM de Poitiers propose une série d'exercices répondant aux types de tâches suivants : expliquer ce que fait un algorithme, écrire un programme correspondant à un algorithme en langage adapté à une calculatrice et tester un programme. Ces exercices se présentent généralement comme suit :

> « Que fait l'algorithme suivant :



> Ecrire le programme correspondant dans votre calculatrice et le tester (on pourra aussi réfléchir au cas où A est négatif. » (Poitiers 2000, exercice 17 p. 254)

Comme le souligne l'enseignant, « cette démarche est un choix intermédiaire entre donner le programme clé en main sans la moindre analyse, et la mise en place intégrale de l'algorithme et du programme qui prendrait trop de temps. Il permet néanmoins de sensibiliser l'élève à une démarche soigneuse de programmation : conception de l'algorithme [et] écriture en langage machine » (Ibid., p. 242) Ainsi, ce choix de démarche est la réponse de l'enseignant au système de contraintes dans lequel il agit. En adoptant ce type d'exercices, il évite d'avoir à gérer les problèmes pratiques rencontrés par P1 lors de sa séance de programmation en classe entière.

Deux programmes sont proposés suivant cette démarche : la détermination des diviseurs communs de deux entiers et celle du PGCD et du PPCM de deux entiers,
Les autres (déterminer le reste de la division euclidienne de deux nombres, déterminer les coefficients u et v de Bézout, test de primalité d'un nombre, décomposer un nombre en produit de facteurs premiers) font l'objet d'exercices de programmation (voir chapitre B2 « analyse écologique des manuels de 1971 à 2002. Des contraintes et des libertés institutionnelles »).

Un exercice de ce cours est particulier :

> « L'algorithme d'Euclide :
> 4. a) concevoir un programme sur calculatrice [utilisant cet algorithme] (comparer la vitesse de cet algorithme avec celui du précédent). » (Ibid., exercice 18, p. 255)

C'est le seul exercice que nous ayons rencontré qui rentre dans une problématique d'efficacité de programme en terme de temps. L'enseignant pointe d'ailleurs les objectifs qu'il poursuit en proposant deux algorithmes différents à programmer pour la détermination d'un PGCD :

> « Ce programme [celui présenté à l'aide d'un schéma ci-dessus] est nettement plus lent que celui de l'algorithme d'Euclide […] mais il présente l'intérêt de concrétiser la démarche employée jusqu'à une conclusion concrète[116]. Il est en outre assez simple à programmer. Notons enfin que l'intérêt pratique sera très relatif pour ceux dont les calculatrices contiennent la fonction intégrée mais l'intérêt pédagogique demeure. » (Ibid., p. 255)

III.7 Conclusion de l'analyse écologique du savoir apprêté

L'analyse que nous venons de mener montre une variabilité de la vie des niches algorithmique et raisonnement dans le cours des trois enseignants. Ils ont chacun investi l'espace de liberté de façon différente pour prendre en compte l'aspect raisonnement et introduire l'outil informatique en arithmétique.

P1 bâtit l'ensemble de son cours sur une axiomatique définie par les propriétés des parties de **N**. Cette décision, liée à l'idée qu'elle se fait à la formation mathématique à apporter à ses élèves, guide ses choix de démonstration des principaux théorèmes d'arithmétique. Elle favorise les démonstrations qui s'appuient sur les propriétés de **N** et non celles basées sur un algorithme. Seule la démonstration de l'existence de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers rentre dans ce cadre, mais elle est renvoyée au manuel. Ainsi, la niche algorithmique n'occupe qu'une place insignifiante dans son cours.
Par ailleurs, P1 laisse à la calculatrice une place autonome, en dehors du cours, des exercices et des D.S. La calculatrice n'est cependant pas présente dans sa classe pour mettre en avant l'aspect l'algorithmique de l'arithmétique mais plutôt pour utiliser l'arithmétique afin d'introduire les concepts de base de la programmation. Mais un système fort de contraintes tend à réduire cette place au fil des années et entrave les objectifs de formation fixés par P1 (notamment les élèves ne s'investissant pas dans les séances de programmation). De plus, l'analyse succincte de la séance de programmation montre que la calculatrice est, en classe, essentiellement dans le topos de P1. La vie de la niche algorithmique n'est donc pas assurée dans cette classe.

[116] Ce programme est basé sur un algorithme qui sert d'introduction à la notion de PGCD et de PPCM à l'aide d'Excel.

P2, de son côté, a fait le choix de ne pas utiliser les propriétés de **N**. De fait, plusieurs de ses démonstrations comportent des passages dans lesquels elle s'appuie sur l'intuition que peuvent avoir les élèves à ce sujet. La niche raisonnement se trouve donc un peu affaiblie dans ce cours. En effet, même si elle propose des démonstrations qui mettent en œuvre des types de raisonnement variés, celles-ci sont moins rigoureuses que celles de P1.
Pour ce qui est de la calculatrice, elle est totalement absente de l'enseignement de P2. Et même si la démonstration de l'existence de la décomposition en produit de facteurs premiers est basée sur la méthode de descente, la vie de la niche algorithmique n'est pas assurée dans ce cours.

Le cas de l'IREM de Poitiers est encore différent. Comme pour P2, l'enseignant a fait le choix de ne pas utiliser les propriétés de **N** dans ses démonstrations. Par contre, l'ensemble du cours a été construit à partir de la volonté de faire des mathématiques « expérimentales » à l'aide de l'outil informatique. Par conséquent, les niches algorithmique et raisonnement[117] se retrouvent intimement liées dans ce cours dans un projet didactique commun. Ce point de vue est peu courant, comme nous le montre l'analyse du questionnaire aux enseignants. En effet, la majorité des enseignants séparent clairement niche algorithmique et niche raisonnement, les désignant comme incompatibles. Cet exemple vient corroborer notre analyse visant à montrer que ces deux niches peuvent très bien coexister.

CONCLUSION

Nous avons montré dans ce chapitre que le mode de fonctionnement didactique d'un enseignant détermine fortement la structuration de son cours en chapitres, parties et paragraphes.
En effet, le mode de fonctionnement didactique centré sur la praxis de P1 la conduit à procéder à une « atomisation » de son cours pour pouvoir proposer un temps de recherche d'exercices important pour chaque nouvelle notion introduite. Le découpage du savoir apprêté qu'elle met en place est plus fin que le découpage mathématique.
D'un autre côté, le mode de fonctionnement didactique centré sur le logos de P2 l'amène à construire son cours selon un découpage beaucoup plus gros que le découpage mathématique.

Le mode de fonctionnement didactique, qui est stable et cohérent pour un enseignant[118], est donc une contrainte qui pèse fortement sur les choix mathématiques qui peuvent être faits au niveau des secteurs et des thèmes d'étude.

De plus, les analyses que nous avons menées nous ont également permis de mettre en évidence une contrainte importante : la programmation dans le temps de l'enseignement du domaine d'étude. A ce niveau de détermination mathématique, ce n'est pas une dynamique ancien/nouveau qui structure l'organisation du savoir apprêté mais une dynamique essentiel/accessoire. Le poids de cette contrainte se trouve par ailleurs renforcé du fait de la présence du baccalauréat en fin d'année.

[117] Nous pensons notamment à la définition du PGCD qui est démontrée à partir d'une démarche mise en œuvre dans une activité Excel.
[118] Du moins pour les enseignants ayant acquis une certaine expérience.

L'analyse écologique menée dans un deuxième temps nous a également permis de mettre en évidence le poids du mode de fonctionnement didactique sur la viabilité de la niche algorithmique dans le savoir apprêté.
En effet, intégrer l'utilisation d'outils informatiques dans le cours d'arithmétique suppose que cette intégration puisse se faire dans un mode de fonctionnement didactique routinier. On ne voit pas comment P2 pourrait intégrer l'utilisation de ces outils dans ses séances, pas plus que P1. Malgré une forte volonté de le faire, cette intégration se fait en suivant le même mode de fonctionnement que celui d'une séance de cours habituel : elle explique, seule, les programmes au tableau puis les élèves doivent les rentrer de façon autonome dans leur calculatrice. Intégrer les outils informatiques dans son cours de manière à faire vivre la niche algorithmique demande l'utilisation de techniques didactiques permettant de le faire ; ces techniques s'insérant dans un mode de fonctionnement didactique différent[119] que celui mis en place par P1 ou par P2.
De fait, le seul moyen de faire vivre cette niche est de donner des démonstrations constructives des principaux théorèmes d'arithmétique. Or, nous avons vu qu'à ce niveau, les choix mathématiques de P1 et de P2 favorisaient la niche raisonnement.

Ainsi, le mode de fonctionnement didactique est une contrainte qui vient s'ajouter au système de contraintes mis en évidence dans la partie B (contraintes institutionnelles externes, représentations des enseignants sur les mathématiques, spécificité de la classe de spécialité mathématique), ce qui explique la difficulté à faire vivre cette niche dans les classes.

[119] Le cours de l'IREM de Poitiers fournit un exemple de mode de fonctionnement didactique permettant d'intégrer les outils informatiques afin de mettre en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique. Ce n'est sûrement pas le seul.

CHAPITRE C3

OBSERVATIONS NATURALISTES DE DEUX ENSEIGNANTES : COMPARAISON DU SAVOIR APPRETE AUTOUR DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons analysé les choix mathématiques et didactiques de P1 et P2 au niveau du domaine d'étude que représente l'arithmétique. Nous avons montré que le mode de fonctionnement didactique de ces deux enseignantes contraint fortement leur structuration du texte du savoir apprêté.

A présent, nous effectuons un second zoom sur l'activité de P1 et P2 en nous plaçant à des niveaux de détermination mathématique inférieurs : les secteurs et les thèmes d'étude. Pour ce faire, nous nous centrons plus spécifiquement sur la notion de division euclidienne.

Dans un premier temps, nous allons décrire et analyser les OM locales re-construites par P1 et P2 autour du théorème de l'existence et de l'unicité de la division euclidienne. Nous examinons plus spécialement leur choix de démonstration[120] et les types de tâches proposés dans ces OM. Nous cherchons également à voir si leur projet de cours comprend des OM régionales autour de ce théorème. Si tel est le cas, nous décrivons et analysons ces OM régionales.

Pour effectuer ce travail, nous présentons dans un premier temps les OM locales et régionales autour de la division euclidienne proposées dans le savoir à enseigner, afin d'identifier d'éventuels écarts entre le savoir à enseigner et le savoir apprêté sur cette notion.

Dans un second temps, nous identifions –chaque fois que cela est possible[121]– les OD didactiques prévues par les deux enseignantes pour mettre en scène ces OM. Bien que nous situions ce chapitre au niveau d'un thème d'étude avec l'analyse des OM locales reconstruites par P1 et P2, nous ne détaillons pas les OD prévues à l'aide des moments de l'étude. En effet, ces OM locales sont mises en place dans des séances de cours. Or, la description des modes de fonctionnement didactique faite dans le chapitre précédent montre que l'organisation de ces séances réalisent deux moments seulement : le moment technologico-théorique (pendant que l'enseignante fait cours au tableau) et le moment du travail de la technique (lorsque les élèves cherchent ensuite les exercices). Bosch, Espinoza et Gascón (2003) ont mis en évidence cette stratégie didactique classique dans leurs travaux et soulignent l'existence, dans de tels cas, de « fortes restrictions mathématiques qui empêchent de construire une OM relativement 'complète' qui puisse permettre d'intégrer et d'articuler le bloc de la praxis avec

[120] Nous avons choisi d'accorder une place importante à l'analyse du choix de démonstration prévue car les protocoles que nous analysons dans le chapitre suivant portent sur la séance de cours sur la division euclidienne.
[121] La détermination des OD au niveau du projet de cours peut parfois se révéler délicate et dépend notamment des données d'observation recueillies. Dans notre cas, l'absence d'entretien avec les enseignantes avant et après les séances observées rend difficile cette détermination.

les éléments technologico-théoriques pertinents et légitimes pour décrire et justifier cette pratique. »[122] (Ibid., p. 124).

Nous allons donc essayer de mettre en évidence les techniques didactiques envisagées par P1 et P2 pour mettre en place les OM locales (et, plus spécifiquement la démonstration du théorème de la division euclidienne) ainsi que les mises en scène prévues des OM régionales. Nous examinons également la place de l'évaluation dans ces projets de cours.

Ces différentes analyses devraient nous permettre de répondre aux questions suivantes. Dans quel système de contraintes, P1 et P2 effectuent-elles leur choix d'apprêtage didactique au niveau des secteurs et du thème d'étude sur la division euclidienne ? Quelles sont les différences entre les savoirs apprêtés par P1 d'une part et P2 de l'autre ?

Notons que, d'une façon analogue au chapitre C2, nous menons ces analyses en intégrant des cours d'arithmétique qui nous servent de référence : le cours de Revuz71 pour le programme de 1971 et le cours proposé dans la brochure de l'IREM de Poitiers pour le programme de 1998.

Nous donnons, avant de commencer, les deux énoncés du théorème de la division euclidienne que l'on peut rencontrer :

- 1er énoncé : le dividende et le diviseur sont des entiers naturels :

  Quels que soient $a\in\mathbf{N}$ et $b\in\mathbf{N}^*$, il existe un couple unique (q,r) d'entiers naturels tels que : $a=bq+r$ et $0\leq r<b$

- 2nd énoncé : le dividende est un entier relatif et le diviseur un entier naturel non nul :

  Quels que soient $a\in\mathbf{Z}$ et $b\in\mathbf{N}^*$, il existe un couple unique (q,r) d'entiers relatifs tels que : $a=bq+r$ et $0\leq r<b$

I. SAVOIR A ENSEIGNER SUR LA DIVISION EUCLIDIENNE : OM « CONFORMES » AUX PROGRAMMES DE 1971 ET 1998

Avant d'analyser les OM autour de la division euclidienne qui apparaissent dans le contenu du savoir apprêté par P1 et P2, nous nous intéressons à la place de la division euclidienne dans les programmes de 1971 et 1998. A partir de là, nous reconstruisons une OM « conforme » aux directions noosphériennes qui sous-tendent la rédaction de chacun de ces programmes. Par OM «conforme », nous entendons OM qui fait vivre, au niveau du savoir apprêté, les niches de l'arithmétique favorisées par le programme.
Ainsi, pour le programme de 1971, nous nous appuyons sur un des manuels emblématiques de cette époque, le Queysanne-Revuz (noté Revuz71 par la suite) qui présente l'arithmétique en mettant en valeur son aspect structurel.

[122] Notre traduction.

Pour le programme de 1998, nous avons choisi la brochure de l'IREM de Poitiers qui, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédant, propose un cours d'arithmétique construit autour de l'utilisation de l'outil informatique.

Il nous semble important de construire ces deux OM qui nous servent par la suite de « référence » pour deux raisons au moins.
Tout d'abord, P1 et P2 ont toutes les deux « vécu » l'OM « conforme » au programme de 1971 ; P1 en tant qu'élève et P2 en tant que jeune enseignante. Elles gardent par ailleurs un bon souvenir de l'arithmétique enseignée à cette époque. A partir de l'analyse des caractéristiques spécifiques de l'OM « conforme » au programme de 1971, nous allons voir si les OM construites par P1 et P2 autour de la division euclidienne portent des traces de cette époque et si cette dernière constitue une contrainte pesant sur les choix mathématiques de P1 et P2.
Par ailleurs, construire une OM « conforme » au programme de 1998 permet de voir quels choix mathématiques alternatifs P1 et P2 auraient pu faire. Cela nous donne également la possibilité d'identifier un ensemble de contraintes qui ont guidé les choix de P1 et P2.

I.1 Le programme de 1971 ou la valorisation de la niche structurelle

Nous rappelons ci-dessous les contenus d'arithmétique tels qu'ils sont mentionnés dans le programme de 1971 :

> « I. Nombres entiers naturels – Arithmétique
> I. Enoncé des propriétés attribuées à l'ensemble **N** des entiers naturels. Raisonnement par récurrence. Applications de **N** dans un ensemble **X** ; notation indicielle ; exemples.
> II. Anneau **Z** des entiers relatifs ; multiples d'un entier relatif : notation n**Z**. Congruences modulo n ; l'anneau **Z**/n**Z** ; division euclidienne dans **Z**, dans **N**. Principe des systèmes de numération ; base ; numérations décimale et binaire.[123]
> III. a) Nombres premiers dans **Z** ; si p est premier, **Z**/p**Z** est un corps.
> b) Décomposition d'un entier naturel en facteurs premiers ; existence, unicité.
> c) Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple ; nombres premiers entre eux; identité de Bézout. »

Le programme de 1971 ne donne aucun exemple de types de tâches qui pourraient se référer à une OM locale construite autour de la division euclidienne. Par contre, l'ordre des contenus suggère que, dans le cadre de ce programme, une OM régionale autour de la division euclidienne est signalée : les changements de base de numération. Des commentaires qui accompagnent ce programme soutiennent ce choix :

> « La division euclidienne dans **Z** suppose le diviseur strictement positif, elle introduit un quotient et un reste, le reste étant positif ou nul ; les propriétés des restes sont liées à l'étude des congruences ; en application des congruences et des systèmes de numération, on pourra énoncer les caractères usuels de divisibilité, (par 2, 9, 5, 3 dans le système décimal). »

Par ailleurs, la citation précédente montre que les congruences peuvent éventuellement être envisagées comme OM régionales autour de la division euclidienne (ce qui n'est pas le cas dans l'ordre de présentation du programme, c'est pourquoi nous la mettons en grisé dans le schéma ci-dessous) et elle introduit une nouvelle OM régionale : les critères de divisibilité.

Si l'on schématise la place de la division euclidienne dans le programme de 1971, on obtient :

[123] C'est nous qui soulignons.

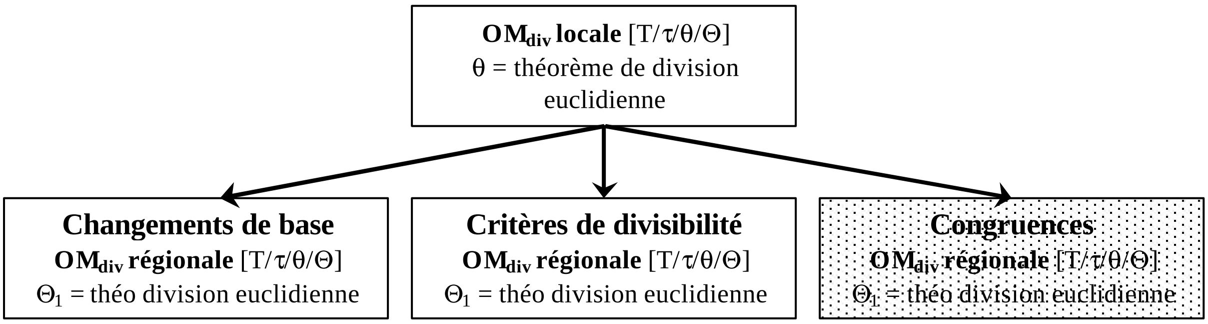


Fig. 27 : Structure du secteur d'étude autour de la division euclidienne dans le programme de 1971

Nous allons à présent analyser les choix d'apprêtage didactique faits par les auteurs de Revuz71 autour de la division euclidienne. Pour comprendre ce qui peut, ou non, être une OM$_{div}$ régionale dans ce manuel, il est nécessaire de s'interroger sur l'ordre d'introduction des notions de congruences, de base de numération et de critères de divisibilité par rapport à la division euclidienne. C'est pourquoi nous proposons le tableau ci-dessous qui présente la structuration des chapitres d'arithmétique de Revuz71 :

Chapitre 1 : Entiers naturels	**Chapitre 2 : Entiers relatifs**
Section 1 : présentation des entiers naturels (structure algébrique, raisonnement par récurrence, dénombrement) Section 2 : <u>division euclidienne dans **N**, systèmes de numération</u>	Section 1 : anneau totalement ordonné (**Z**, +, ×, ≤) Section 2 : sous-groupes de (**Z**, +), idéaux de (**Z**, +, ×), entiers modulo n (<u>Attention, cette section débute par la division euclidienne dans **Z**</u>) Section 3 : divisibilité dans l'anneau **Z**, PGCD et PPCM Section 4 : nombres premiers.

Fig. 28 : Les chapitres d'arithmétique de Revuz71

L'organisation de ce manuel en chapitres et en parties (intitulées sections) montre deux OM$_{div}$ régionales autour de la division euclidienne : les changements de base de numération et les congruences ; les critères de divisibilité n'apparaissent pas à ce niveau de découpage.

a) OM$_{div}$ locale dans Revuz71

A cette époque, l'introduction de la division euclidienne se fait dans un contexte mettant l'accent sur l'étude des structures algébriques. Dans Revuz71, le théorème de la division euclidienne est situé à la suite de l'étude de l'ensemble **N** et des ensembles finis. Il n'est pas étonnant que la démonstration choisie pour montrer ce théorème dans **N** soit celle basée sur la propriété d'Archimède :

> « [Dans cette démonstration], q+1 est le plus petit élément de l'ensemble E des entiers naturels k tels que a<kb. E est non vide d'après la propriété d'Archimède et donc a un plus petit élément. L'existence et l'unicité de q et r en résultent. » (Bilgot 1998, p. 84)

La démonstration du théorème dans **Z** est renvoyée à celle dans **N** pour le cas $a \geq 0$ et le cas $a<0$ est traité en posant $a=-a'$ où a' est un entier naturel auquel on peut appliquer le théorème de la division euclidienne dans **N**.
Dans les deux démonstrations, l'existence et l'unicité sont traitées simultanément par le fait que le plus petit élément d'une partie non vide de **N**, lorsqu'il existe, est unique.

Il existe un seul type de tâches relatif à la division euclidienne dans ce manuel :

T_1 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés.

L'OM_{div} étudiée est donc une OM ponctuelle. Cela nous conduit à penser que la division euclidienne est introduite dans ce cours non pas pour être étudiée en elle-même mais pour servir d'élément théorique dans des OM à construire qui, elles, seront objets d'étude. Par ailleurs, le fait que cette OM soit ponctuelle laisse penser que la division euclidienne est un savoir naturalisé pour les élèves de cette époque et qu'elle n'est plus enjeu d'apprentissage.

Les exercices qui relèvent de T_1 sont des exercices d'application directe du cours qui se trouvent dans la partie cours du manuel et non pas dans la partie exercices. On en compte 7 : 3 à la suite du théorème de la division euclidienne dans **N** et 4 à la suite de celui dans **Z**. Ces exercices sont choisis afin de mettre en évidence différents cas de division euclidienne que l'on peut rencontrer :

- cas général : $a=293$ et $b=45$;
- cas où le reste est nul : $a=420$ et $b=35$;
- cas où le quotient est nul : $a=75$ et $b=120$
- cas où deux dividendes opposés n'ont pas de quotients opposés : $a=513$ et $b=25$ à comparer avec $a=-513$ et $b=25$;
- cas où des dividendes opposés, avec des restes nuls, ont des quotients opposés : $a=436$ et $b=4$ à comparer avec $a=-436$ et $b=4$.

Voici le tableau récapitulatif de l'OM_{div} ponctuelle présente dans ce cours :

	OM_{div} dans Revuz71 : OM ponctuelle
Θ	Propriété d'Archimède Propriété des parties non vides de **N** Propriété de la relation d'ordre dans **Z**
θ	Quels que soient $a\in$ **N** (resp. $a\in$ **Z**) et $b\in$ **N***, il existe un couple unique (q,r) d'entiers naturels (resp. relatifs) tels que : $a=bq+r$ et $0\leq r<b$
T	T_1 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés.
τ	τ_1 : Poser la division euclidienne

Fig. 29 : Structure du sujet d'étude sur la division euclidienne dans Revuz71

b) OM_{div} régionales dans Revuz71

La division euclidienne dans **N** est suivie, dans Revuz71, par les systèmes de numérations, qui sont présentés selon le plan suivant :

1. Le principe des systèmes de numération ;
2. La comparaison de nombres écrits dans le système de numération de base x ;

3. Deux exemples de calculs dans le système de numération de base deux.

Le théorème d'existence et d'unicité de l'écriture d'un nombre dans un système de numération de base x est démontré en utilisant les propriétés de l'égalité et de l'inégalité de la division euclidienne. Par la suite, ces propriétés permettent d'établir le critère de comparaison de deux nombres quelconques écrits dans la base x avec le même nombre de chiffres[124].
Un troisième résultat technologique, sur les propriétés du reste de la division par x^p d'un nombre écrit dans la base x, est démontré en utilisant l'égalité et l'inégalité de la division euclidienne :

> « Le reste de la division par x^p d'un nombre N écrit dans le système de numération de base x est égal au nombre formé par les p chiffres de droite du nombre N écrit dans cette base. » (Revuz71, p. 35)

Remarquons par ailleurs que les liens entre division euclidienne et écriture dans une base x donnée sont renforcés par les notations utilisées dans ce manuel. En effet, la convention choisie est :

$$N = \overline{q_n r_{n-1} \dots r_2 r_1 r_0}$$

r_0 est le reste de la division euclidienne de N par x : $N=q_1x+ r_0$
Les r_i suivants sont les restes des divisions euclidiennes des q_i par x, le processus s'arrêtant au premier quotient, q_n, strictement inférieur à x.

On rencontre deux types de tâches en application directe du cours :

T_1^{base} : Effectuer une addition en base x, $x\neq 10$ (additionner 1 011 001 et 101 101, x=2)
T_2^{base} : Effectuer une multiplication en base x, $x\neq 10$ (multiplier 1 101 par 11 011, x=2)

Dans la partie « exercices » du chapitre sur les entiers naturels, on trouve 25 exercices référencés dans la catégorie «Système de numération», on en trouve un dans le chapitre sur les entiers relatifs, dans la catégorie « Division euclidienne et numération décimale ». Au total, 26 exercices portent donc sur les changements de base, sans compter les sujets d'étude.
Les principaux types de tâches dont relèvent ces exercices sont :

T_1^{base} : Effectuer une addition en base x, $x\neq 10$.
T_2^{base} : Effectuer une multiplication en base x, $x\neq 10$.
T_3^{base} : Déterminer la base du système de numération dans lequel on a effectué une addition donnée. (Exemple : Déterminer la base du système de numération dans lequel on a 46+53=132).
T_4^{base} : Déterminer la base du système de numération dans lequel on a effectué une multiplication donnée.
T_5^{base} : Déterminer l'écriture en base y d'un nombre écrit en base x, $x\neq y$.
T_6^{base} : Etablir les tables d'addition dans un système de numération de base x, $x\neq 10$.
T_7^{base} : Etablir les tables de multiplication dans un système de numération de base x, $x\neq 10$.
T_8^{base} : Déterminer le système de numération de base x, $x\neq 10$ dans lequel un nombre donné en base 10 s'écrit sous une forme donnée.

[124] « Si deux nombres N et N' écrits dans le système de numération de base x ont le même nombre de chiffres, la comparaison de leurs chiffres distincts de même rang le plus grand possible permet de les comparer, et ils sont dans le même ordre que ces deux chiffres. » (Revuz71, p. 37)

T_9^{base} : Soit l'ensemble {a, b, c, a', b', c', etc. les chiffres d'un nombre n et x, y etc. des bases dans lesquelles ce nombre n est donné}. Déterminer l'un ou plusieurs de ces éléments en connaissant des relations entre les éléments de cet ensemble.

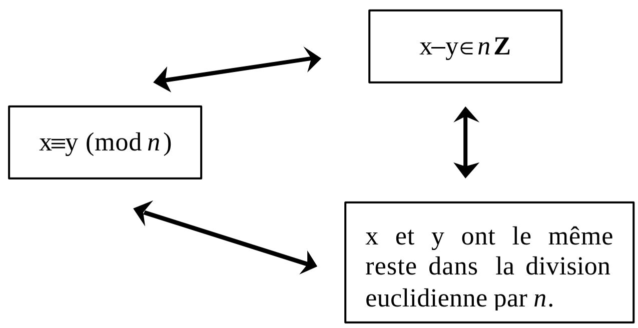
T_{10}^{base} : Soit l'ensemble {dividende a, diviseur b, quotient q, reste r}. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble quand on connaît les autres ou des relations entre eux, dans le système de numération décimale.

T_{11}^{base} : Trouver le nombre de chiffres d'un nombre donné dans une base x ou déterminer le $n^{ième}$ chiffre de ce nombre ou déterminer combien de nombres on peut écrire sous certaines conditions dans une base donnée.

Comme nous pouvons le constater, l'OM_{div} régionale sur les changements de base est très riche au niveau des types de taches proposés. Cela confirme notre hypothèse selon laquelle la division euclidienne n'est plus un enjeu d'apprentissage pour les élèves à cette époque mais un élément théorique qui permet d'introduire de nouvelles notions (les changements de base) ainsi qu'un élément technologique qui outille les techniques associées à ces notions.

Une seconde OM_{div} régionale est présente dans Revuz1 : l'OM_{div} régionale sur les congruences. En effet, le secteur « sous-groupes de (**Z**, +), idéaux de (**Z**, +, ×), entiers modulo n » débute par le théorème de la division euclidienne dans **Z**. Ce théorème est utilisé ensuite pour démontrer que tout sous-groupe de (**Z**, +) est de la forme n**Z** où n est un entier naturel quelconque. Le lien entre congruence modulo n et les restes dans la division euclidienne par n est ensuite étudié et résumé par le schéma suivant :

« En résumé si n>0 quels que soient x et y de **Z** on a :



(Revuz71, p. 64)

On trouve, dans la partie exercices, 16 exercices dans la catégorie « Congruences modulo *n* ». Les principaux types de tâches présentés sont :

T_1^{cong} : Résoudre une équation ou un système d'équations dans **Z**/n**Z**.

T_2^{cong} : Montrer que tout entier naturel n non nul s'écrit sous la forme n=bk+r où b est un entier strictement positif fixé et où r∈{0, …, b–1}.

T_3^{cong} : Etudier les restes de la division d'un entier a donné par des puissances d'un entier b donné.

T_4^{cong} : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), ∀n∈**N,** par un entier b donné.

T_5^{cong} : Montrer qu'un nombre N(n), ∀n∈**N**, est divisible par un entier b donné.

T_6^{cong} : Trouver les conditions sur n pour qu'un nombre N(n), ∀n∈**N**, soit divisible par un entier b donné.

Par contre, Revuz71 ne développe pas d'OM_{div} régionale sur les critères de divisibilité à la suite du théorème de la division euclidienne.

Si l'on schématise les OM qui sont construites autour du théorème de la division euclidienne dans ce manuel, nous obtenons donc le tableau ci-dessous :

OM_{div} ponctuelle [T/τ/θ/Θ]
θ : théorème de division euclidienne
Θ : Propriété d'Archimède, etc.

	Changements de base OM_{div} régionale
Θ	Division euclidienne dans **N** Etc.
θ	Existence et unicité de l'écriture dans une base donnée Comparaison de nombres en base x Principe de calcul en base 2
T	11 types de tâches principaux 26 exercices

	Congruences OM_{div} régionale
Θ	Division euclidienne dans **Z** Etc.
θ	Sous-groupes de (Z, +) Définition congruence modulo n.
T	6 types de tâches principaux 16 exercices

Fig. 30 : Structure du secteur d'étude autour de la division euclidienne dans Revuz71

I.2 Le programme de 1998 ou la valorisation de la niche algorithmique

Disparue des programmes au début des années 80, l'arithmétique est réintroduite en terminale S spécialité mathématique en 1998. Cette réintroduction se fait dans un contexte d'enseignement des mathématiques complètement différent. Les structures algébriques n'étant plus étudiées, l'introduction de **Z**/n**Z** devient hors programme et les congruences ne font plus partie des contenus du programme. Nous pouvons donc faire l'hypothèse que l'OM_{div} régionale sur les congruences sera absente des manuels ou autres projets de cours.
Par ailleurs, le programme de 1998 met en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique. Ainsi, la démonstration du théorème de la division euclidienne qui semble la mieux adaptée à cet « esprit » du programme est celle basée sur les différences successives et non celle utilisant la propriété d'Archimède, comme cela est présenté dans Revuz71.

Nous commençons par étudier la place de la division euclidienne dans le programme de 1998. Ensuite, nous analysons le savoir apprêté autour de la division euclidienne dans la brochure de l'IREM de Poitiers car elle présente un cours d'arithmétique marquant une volonté forte d'intégrer l'outil informatique.

Au niveau des contenus, le programme de 1998 consacre une ligne à la division euclidienne :

Division euclidienne	*Il s'agit d'exploiter l'ensemble constitué de l'égalité et de l'inégalité définissant une division euclidienne*

Ensuite, la partie travaux pratiques en propose quelques exemples d'utilisation :

Sur des exemples, utilisation de la division euclidienne pour obtenir des critères de divisibilité. Exemple de changements de base	*La division euclidienne permet d'établir des compatibilités avec les opérations nécessaires pour les problèmes étudiés. Ceux-ci pourront être l'occasion de présenter et de mettre en œuvre la notion de congruence, au sujet de laquelle aucune connaissance spécifique ne peut être exigée. Toute introduction de* $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ *est hors programme. L'aspect algorithmique sera privilégié.*

Tout d'abord, remarquons que le programme ne précise pas si le théorème de la division euclidienne est à énoncer dans **N** ou dans **Z**. Ce choix est laissé à l'appréciation des enseignants, de même que le choix de la démonstration.
Une indication permet de définir un savoir-faire à privilégier lors de l'étude du thème division euclidienne : « exploiter l'ensemble constitué de l'égalité et l'inégalité définissant une division euclidienne ». Cette indication donne une piste aux enseignants pour choisir les types de tâches associés à ce thème d'étude.

Les commentaires indiquent que deux OM_{div} régionales peuvent être construites autour de la division euclidienne : une OM_{div} régionale sur les changements de base et une autre sur les critères de divisibilité. L'OM_{div} régionale sur les congruences n'est pas explicitement au programme, qui laisse toutefois la possibilité aux enseignants de l'introduire. Quoiqu'il en soit, cette OM_{div} régionale doit rester dans un état de développement incomplet, autour du bloc $[T/\tau]$, sans qu'aucune connaissance ne puisse être exigée à ce propos. Elle peut cependant être remplacée par une OM_{div} régionale sur les restes qui permet d'énoncer, de démontrer et d'utiliser les opérations possibles entre les restes. Cette façon de procéder est beaucoup plus lourde que d'utiliser les congruences.

Ainsi, si l'on schématise la place de la division euclidienne dans le programme de 1998, on obtient :

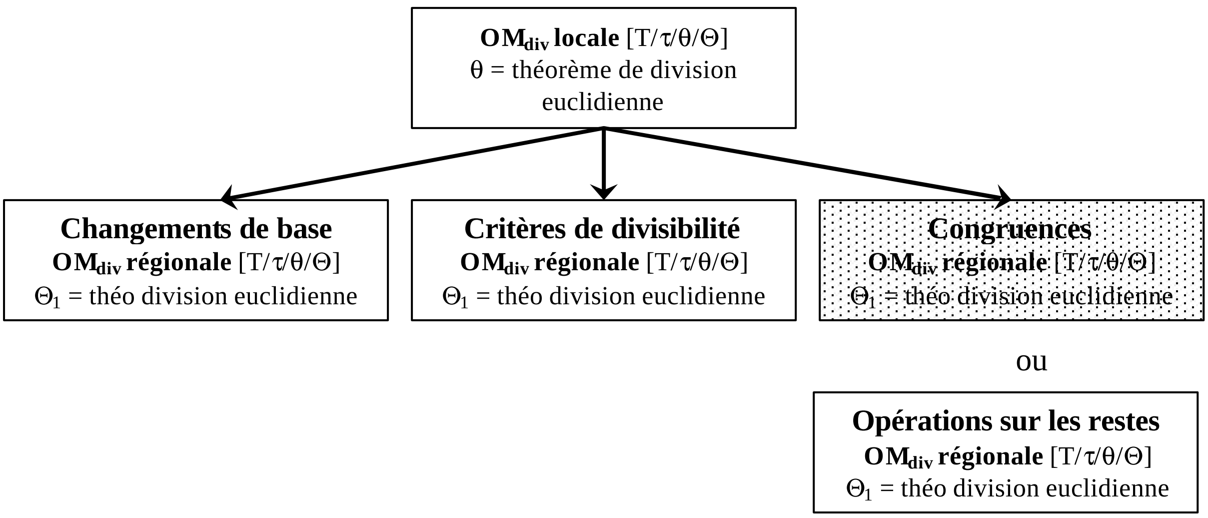


Fig. 31 : Structure du secteur d'étude autour de la division euclidienne dans le programme de 1998

Ce schéma est en apparence assez proche de celui que nous avons construit pour le programme de 1971. La différence entre les deux est que, en 1971, les OM_{div} régionales étaient des thèmes d'étude à part entière alors qu'en 1998, elles sont des exemples d'application du cours, faisant partie des travaux pratiques. De plus, officiellement, aucune connaissance des élèves ne peut être exigée sur ces thèmes :

> « […] Les travaux pratiques […] qui portent la mention 'exemples de' (ce sont les plus nombreux) visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée : les élèves devront, au terme de l'année, avoir une certaine familiarité avec le type de problème considéré, mais aucune connaissance spécifique ne peut être exigée à leur propos et toutes les indications utiles doivent être fournies aux élèves lors des épreuves évaluées. » (Programme de 1998, présentation du texte du programme)

Nous analysons maintenant comment la brochure de l'IREM de Poitiers a apprêté ces savoirs autour de la division euclidienne dans le cours qu'elle propose. Rappelons que nous avons fait l'hypothèse que ce cours est «conforme » à l'esprit du programme dans le sens où il a été construit en donnant une « place particulière à la programmation » car « l'esprit des programmes dès la seconde [pousse] à la mise en place de la démarche algorithmique et à l'apprentissage de la programmation dans des situations mathématiques. » (Ibid., p. 239)

a) OM_{div} locale dans la brochure de l'IREM de Poitiers

Dans cette brochure, la division euclidienne est introduite à partir d'une activité Excel qui permet de conjecturer l'existence et l'unicité dans une division euclidienne. Dans cette activité, il s'agit de déterminer le reste r de la division de a=50 par b=8. Le principe qui sous-tend cette activité est celui de l'algorithme des soustractions successives dans lequel «pour $a\geq 0$, on pose r=a et q=0 ; tant que $r\geq b$, on remplace r par r–b et q par q+1. » (Bilgot 1998, p. 83). Dans cette activité, on part de $q=n_0=-10$ et de r=a–bn. Les calculs sont disposés de la sorte (Ibid., p.244) :

	50	8
-10	130	-80
-9	122	-72
-8	114	-64

a–bn bn

La valeur initiale de n n'est pas questionnée : pourquoi commence-t-on à $n_0=-10$ et non pas $n_0=0$? Il nous semble que le choix de partir de $n_0=-10$ est fait pour exploiter les propriétés de calcul qu'offre le tableur. Pour conjecturer qu'il va y avoir une case et une seule dans la deuxième colonne qui soit telle que $0\leq a-bn<b$, l'enseignant semble penser qu'il faut faire un nombre important de calculs. Or, étant donné le choix de a et b, si on applique l'algorithmique des soustractions successives, le résultat apparaît au bout de 6 étapes seulement.
Selon nous, l'utilisation du tableur masque ici, non seulement l'aspect algorithmique de cette procédure, mais également le sens des soustractions réitérées.

Par ailleurs, alors que cet algorithme aurait pu servir de base à la démonstration de la division euclidienne, ce qui aurait permis d'éclaircir le problème de l'initialisation des variables, la démonstration choisie ici s'appuie sur le résultat admis suivant : « un entier est compris entre deux multiples consécutifs d'un autre » (Ibid., p. 245). Ce choix a été fait pour « insister sur l'aspect intéressant de la démonstration de l'unicité (raisonnement par l'absurde qui s'appuie sur le fait qu'un entier positif r plus petit qu'un autre b et divisible par celui-ci est nul) » (Ibid., p.245) en évitant de soulever explicitement le problème de l'axiomatique de base de l'arithmétique (celui des propriétés des parties non vides de **N**).

On compte ensuite 5 exercices sur la division euclidienne. Aucun d'entre eux ne porte sur l'unique type de tâches présent dans Revuz71 : T_1 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés.
Les types de tâches posés sont :

- T_2 : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n.
- T_3 : Soit l'ensemble {dividende a, diviseur b, quotient q, reste r}. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble si l'on connaît les autres ou des relations entre eux.
- T_4 : Montrer qu'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné, en utilisant le fait que $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$.
- T_5 : Concevoir un programme qui détermine le reste de la division euclidienne de deux nombres.

L'OM_{div} présentée ici est donc une OM locale. Elle peut être représentée comme suit :

	OM_{div} dans IREM de Poitiers : OM locale
Θ	Il existe q tel que $qb \leq a < (q+1)b$ (admis) Un entier positif r plus petit qu'un autre b et divisible par celui-ci est nul Raisonnement par existence et unicité et raisonnement par l'absurde
θ	Quels que soient $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$, il existe un couple unique (q,r) d'entiers tels que : $a=bq+r$ et $0 \leq r < b$
T	T_2 : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n. T_3 : Soit l'ensemble {dividende a, diviseur b, quotient q, reste r}. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble si l'on connaît les autres ou des relations entre eux. T_4 : Montrer qu'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné, en utilisant le fait que $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$. T_5 : Concevoir un programme qui détermine le reste de la division euclidienne de deux nombres.

Fig. 32 : Structure du thème d'étude sur la division euclidienne dans le cours de la brochure de l'IREM de Poitiers

Il est important de souligner que l'enseignant qui a construit ce cours poursuit quatre objectifs au travers des trois premiers types de tâches exposés ci-dessus (Ibid., pp. 246-247) :

1. Insister sur l'unicité du reste compris entre 0 et b ;
2. Manipuler la division euclidienne (i.e. manipuler l'ensemble constitué de l'égalité et de l'inégalité de la division euclidienne) ;
3. Déterminer le reste dans la division d'entiers variables (ce qui permet de travailler sur l'inégalité de la division euclidienne) ;
4. Faire la transition avec les congruences (les opérations sur les restes se révèlent assez vite fastidieuses sans l'outil adapté à ce travail que sont les congruences).

Le quatrième objectif montre que cet enseignant a choisi d'introduire la notion de congruence dans son cours.

b) OM_{div} régionales dans la brochure de l'IREM de Poitiers

Bien que l'OM_{div} régionale sur les congruences ne soit pas au programme, l'IREM de Poitiers choisit de la traiter pour insister sur l'importance de la division euclidienne en arithmétique :

> « […] L'objectif est ici d'introduire les congruences comme outil pratique de démonstration. Ce paragraphe n'est pas exigé par les programmes mais ils nous apparaît pratique et intéressant, pour bien comprendre tout l'intérêt de la division euclidienne, de maîtriser les congruences. Il devient presque indispensable lorsqu'on veut aborder, dans le cadre des nombres premiers les problèmes de cryptage. En contrepartie, cela implique d'y consacrer un temps suffisant afin de bien mettre en place quelques propriétés des congruences […]. » (Poitiers 2000, p. 247)

Cette citation souligne un point important par rapport au programme d'arithmétique de 1998. La notion de congruence n'étant pas exigible, les enseignants peuvent avoir du mal à traiter sans elle les problèmes de cryptage. Or ces derniers font le lien entre l'arithmétique scolaire et les problèmes arithmétiques « savants » qui ont conduit à la réintroduction de l'arithmétique sous un angle algorithmique[125].
Par ailleurs, choisir de traiter les congruences permet de donner de la consistance à la division euclidienne dans l'ensemble du savoir apprêté. Les OM régionales pouvant être construites autour du théorème de la division euclidienne n'étant plus aujourd'hui des thèmes d'étude faisant partie des contenus du programme, la division euclidienne se trouve quelque peu isolée, avec comme seule application, l'algorithme d'Euclide. Nous pensons que c'est un point important qui a conduit à l'introduction explicite des congruences dans le savoir à enseigner lors de l'ajustement de programme qui a eu lieu en 2002.

Dans ce cours, les congruences sont introduites à l'aide du tableur, qui permet de mettre en évidence la périodicité des restes dans la division par un entier donné. Sont alors institutionnalisés la définition de a congru à b modulo n (a et b ont le même reste dans leur division euclidienne par n), le théorème « $a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a-b$ divisible par n » qui est démontré en utilisant la division euclidienne et les propriétés des congruences.
Le cours propose ensuite 5 exercices dont un portant sur les critères de divisibilité et un autre sur le problème de cryptage des numéros I.N.S.E.E.. Les types de tâches dans les trois premiers exercices sont :

- T_4^{cong} : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné.
- T_5^{cong} : Montrer qu'un nombre N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné.
- T_6^{cong} : Trouver les conditions sur n pour qu'un nombre N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, soit divisible par un entier b donné.
- T_7^{cong} : Vérifier qu'un nombre donné est bien congru à un autre modulo un troisième.
- T_8^{cong} : Trouver le reste de la division d'un nombre de la forme $(a)^b$, a et b entiers naturels, par un entier c donné.

On ne trouve aucun exercice sur les changements de base dans ce cours. On peut modéliser la place de la division euclidienne dans ce cours de la façon suivante :

[125] Voir chapitre B1 et chapitre B2 sur les liens entre arithmétique et informatique pour le codage des informations.

OM_{div} locale [T/τ/θ/Θ]
θ = théorème de division euclidienne

Congruences
OM_{div} régionale [T/τ/θ/Θ]

Θ	Division euclidienne dans **Z**
θ	Définition a congru à b modulo n Théorème $a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a-b$ divisible par n. Propriétés des congruences
T	5 types de tâches principaux

Critères divisibilité
Type de tâches associé aux congruences

Fig. 33 : Structure du secteur d'étude sur la division euclidienne dans le cours de la brochure de l'IREM de Poitiers

L'apprêtage didactique du savoir fait par cet enseignant autour de la division euclidienne est fort différent de celui proposé par le programme. Ce sont des choix mathématiques –exposés ci-dessus– qui ont conduit cet enseignant à organiser son cours de la sorte. Ces choix l'emportent d'ailleurs sur la contrainte du temps, ce qui montre l'importance que cet enseignant accorde aux congruences en arithmétique. Néanmoins, nous ne pouvons pas associer cette introduction à une « résurgence » du programme de 1971 ou de ses connaissances arithmétiques universitaires. Ce ne sera pas le cas pour l'enseignante P2, comme nous le verrons par la suite.

I.3 Conclusion

Si l'on regarde les places respectives de la division euclidienne dans les programmes de 1971 et de 1998, des différences apparaissent essentiellement sur le développement à donner à telle ou telle notion ainsi que sur les moyens dont on dispose pour faire les démonstrations. De plus, si les deux programmes prévoient des OM_{div} régionales portant sur les mêmes objets, dans un cas, ce sont des thèmes d'étude (programme de 1971) alors que dans l'autre des exemples d'application de la division euclidienne (programme de 1998).

En fait, aussi bien en 1971 qu'en 1998, les principales différences apparaissent entre le savoir à enseigner présenté par le programme et l'apprêtage didactique qui en est fait dans des manuels proches de « l'esprit » du programme. Par exemple, Revuz71 ne construit pas d' OM_{div} régionale sur les critères de divisibilité et fait apparaître explicitement l'OM_{div} régionale sur les congruences à la suite du théorème de la division euclidienne dans **Z**.
De même, le cours de l'IREM de Poitiers présente et étudie la notion de congruence, pourtant à la limite du programme. Les critères de divisibilité sont ainsi présentés comme exemples d'application des congruences, et non par les propriétés sur les restes –sans utilisation des congruences– qui sont au programme. Par ailleurs, les changements de base de numération, figurant pourtant parmi les exemples d'application de la division euclidienne inscrits dans les T.P. au programme, sont totalement ignorés.

Ces différences observées entre savoir à enseigner et savoir apprêté au niveau d'un thème d'étude semblent essentiellement liées à des choix d'ordre mathématique dépendant du domaine et de la place que doit occuper ce thème, pour l'enseignant ou l'auteur de manuel, dans le domaine. Ainsi, l'IREM de Poitiers favorise l'OM_{div} régionale sur les congruences par rapport aux OM_{div} régionale sur les critères de divisibilité et sur les changements de base pour illustrer l'importance de la division euclidienne en arithmétique, importance minorée sans cela, d'après l'enseignant.

Nous allons maintenant étudier les cours de P1 et P2 autour de l'objet division euclidienne, en utilisant les OM que nous venons de dégager comme références.

II. SAVOIR APPRETE PAR P1 AUTOUR DE LA NOTION DE DIVISION EUCLIDIENNE

Rappelons brièvement ici la méthodologie d'analyse utilisée. Nous reconstruisons le projet de cours de P1 (ou P2) –ou son apprêtage didactique du savoir à enseigner– à partir des observables que nous avons recueillis dans sa classe. Nous comparons ensuite ce projet avec les deux OM_{div} locales et régionales décrites précédemment. A partir de cette comparaison, nous pouvons saisir sur certains points les choix faits par P1 et décrire quelle(s) alternative(s) étai(en)t envisageable(s). L'analyse des pratiques de P1 en arithmétique[126], celle des OM_{div} locales et régionales qu'elle souhaite mettre en place dans sa classe, appuyées par l'analyse de l'entretien avec P1, permettent alors d'identifier un système de contraintes expliquant en partie les choix de P1.
Nous poursuivons cette étude des organisations mathématiques par celle des organisations didactiques.

II.1 Organisations mathématiques

a) OM_{div} locale

Nous avons vu dans le chapitre précédent que P1 fait le choix d'une démonstration basée sur la propriété d'Archimède. Nous avons montré également que ce choix s'inscrit dans une cohérence mathématique au niveau du domaine d'étude : il s'agit de construire le cours d'arithmétique sur « une axiomatique des propriétés de **N** qui sont simples » (Extraits entretien P1) afin de pouvoir faire « des démonstrations qui sont nettement plus rigoureuses » qu'en enseignement obligatoire.

P1 choisit d'aborder le thème de la division euclidienne dans sa quatrième séance d'arithmétique, après avoir exposé les propriétés des parties de **N** et introduit les notions de multiples et diviseurs dans la première, les nombres premiers dans la seconde et avoir prévu un D.S. d'une heure dans la troisième.

[126] Voir chapitre précédent : « Observation naturaliste de deux enseignantes : diversité des pratiques sur un domaine d'étude. »

Elle choisit d'établir le théorème de la division euclidienne dans **Z** :

> « **Théo et déf** :
> $a\in Z$, $b\in N^*$. Il existe un couple (q,r) unique avec $q\in Z$, $r\in N$ et $0 \leq r < b$ tel que $a=bq+r$
> a = dividende, b = diviseur
> q = quotient, r = reste. » (Cours n°4 de P1)

Comme nous l'avons souligné, elle choisit de démontrer ce théorème en s'appuyant sur l'axiomatique qu'elle a mis en place dans le premier cours d'arithmétique :

> « <u>Dem</u> : <u>**Existence**</u>
> 1^{er} cas : $a\in \mathbf{N}$
> $E=\{n\in \mathbf{N}, nb>a\}$. $E \neq \varnothing$ car $\lim nb = +\infty$ (ou $n>a/b$ réalisé si n>partie entière de $(a/b)+1$). Pour n assez grand, $n\in E$. E admet un plus petit élément Q. $0\notin E$ donc $Q\neq 0$.
> Il existe $q\in \mathbf{N}$ tel que $Q=q+1$. $(q+1) \in E$ et $q\notin E$. $qb \leq a < (q+1)b$
> $a=bq+r \Leftrightarrow r=a-bq$. $0 \leq a-bq < b$
> Donc $a=bq+r$ avec $0 \leq r < b$
> 2^{nd} cas : $a < 0$ $(-a) > 0$
> En utilisant le 1^{er} cas, $-a=bq'+r'$ avec $q'\in N$ et $0 \leq r' < b$
> $a=b(-q') - r'$ $-b < r' \leq 0$
> α) Si $r'=0$, $a=b(-q') - 0$
> β) Si $r'\neq 0$, $a=b(-q') - b + b - r' = b(-q' - 1) + b - r'$ avec $b - r'\in]0,b]$
>
> <u>**Unicité**</u>
> $a=bq+r=bs+t$ avec $(q,s) \in \mathbf{Z}^2$, $0 \leq r < b$ et $0 \leq t < b$
> $b(q - s)=t - r$
> $0 \leq t < b$
> $\underline{-b < -r \leq 0}$
> $-b < t - r <b$ et $(t - r)$ multiple de b d'où $t=r$; d'où $bq=bs$; $q=s$ car $b\neq 0$. »

Trois points ressortent de cette de démonstration.

Tout d'abord, P1 choisit de démontrer l'inégalité $qb\leq a<(q+1)b$, quitte à introduire une complexité au niveau du raisonnement qui n'est pas habituelle pour les élèves auxquels ce cours s'adresse. En effet, le plus petit élément de l'ensemble E n'est pas le nombre cherché dans cette démonstration –le quotient– mais le quotient augmenté d'une unité. L'introduction de q comme étant l'entier précédant Q est motivée par l'inégalité à laquelle on veut aboutir : $qb\leq a<(q+1)b$. Ce passage est délicat et très formel d'un point de vue mathématique. Il répond entièrement à la volonté de P1 de former les élèves aux mathématiques du supérieur.

Par ailleurs, en choisissant d'établir le théorème de la division euclidienne dans **Z** et en tenant à faire des «démonstrations nettement plus rigoureuses » en arithmétique, P1 est amenée à faire une démonstration de l'existence par disjonction de cas. Et pour démontrer l'existence de r dans le cas $a<0$, de faire une seconde disjonction de cas sur les valeurs possibles de r : $r=0$ et $r\neq 0$. Nous avons donc ici une imbrication de raisonnements par disjonction de cas qui, dans leur déroulement, nécessitent la mise en œuvre de connaissances extrêmement techniques sur la manipulation d'entiers relatifs et de leurs opposés[127]. Soulignons qu'en choisissant n dans Z dans la définition de l'ensemble E, elle aurait pu éviter la démonstration technique du cas $a<0$.

[127] Pour une analyse des démonstrations d'arithmétique en terme de dimensions organisatrice et opératoire, se référer à la thèse de Battie (2003).

Enfin, P1 choisit de démontrer l'existence du couple (q,r) en distinguant la partie existence de la partie unicité. Or, en se basant sur la propriété d'Archimède et les propriétés des parties de **N**, l'existence et l'unicité de q et r peuvent s'obtenir simultanément. On peut se demander pourquoi P1 décide de séparer la démonstration de l'existence et celle de l'unicité alors que les choix qu'elle fait semblent montrer qu'elle privilégie les démonstrations mathématiques « rigoureuses ». Deux raisons peuvent expliquer ce choix. Tout d'abord, comme cela est souligné dans le cours de l'IREM de Poitiers, c'est l'occasion de mettre en œuvre un raisonnement intéressant –le raisonnement par l'absurde– et d'utiliser une propriété spécifique à l'arithmétique pour montrer qu'un nombre est nul –c'est un multiple de b strictement compris entre –b et b. Faire ce choix permet donc de répondre à l'un des objectifs de P1 : la formation des élèves au raisonnement. De plus, distinguer la démonstration de l'existence de celle de l'unicité répond également à un second objectif de P1 : préparer les élèves aux mathématiques du supérieur[128].

Nous venons de montrer la cohérence des choix de démonstration de P1 pour le théorème de la division euclidienne avec ses objectifs d'enseignement de niveau mathématique. Cependant, choisir de traiter une démonstration aussi délicate pose le problème de sa mise en scène en classe. Quelle technique didactique P1 prévoit-elle d'utiliser pour « faire passer » cette démonstration aux élèves sans les perdre ? Nous examinerons ce point par la suite, dans le chapitre C4 « observations naturalistes de deux enseignantes : comparaison du savoir enseigné sur la division euclidienne ».

Voici les types de tâches que P1 choisit de proposer sur la division euclidienne :

- T_1 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés.
- T_2 : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n.
- T_3 : Soit l'ensemble {dividende a, diviseur b, quotient q, reste r}. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble si l'on connaît les autres ou des relations entre eux.
- T_6 : Trouver le reste de la division euclidienne d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné, en utilisant le fait que $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$.
- T_7 : Montrer que tout entier n s'écrit sous la forme $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$, $k \in \mathbf{N}$, et b est un entier donné.
- T_8 : Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que le reste de la division de N(n), par un entier donné a, soit fixé.
- T_9 : Trouver le reste de la division d'un nombre entier a par un nombre entier b connaissant certaines propriétés de a.
- T_{10} : Montrer qu'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné.
- T_{11} : Etablir une règle permettant de déterminer le reste de la division euclidienne de a^n par un entier b donné.
- T_{12} : Etablir un critère de divisibilité.

Comme nous pouvons le constater, P1 prévoit une assez grande variété de types de tâches autour du théorème de la division euclidienne. Elle propose plusieurs types de tâches tournant autour de la notion de reste de la division euclidienne (T_2, T_6, T_7, T_8 et T_9) et un exercice

[128] « […] Ces questions d'existence et d'unicité (qu'on traduit par exemple en surjectivité et injectivité d'une application) sont fondamentales pour pouvoir passer des mathématiques algorithmiques (techniques de résolution d'équations) à des mathématiques spéculatives qui sont celles de l'enseignement supérieur. » (IREM de Poitiers 2000, p. 23)

portant sur les critères de divisibilité (n'utilisant pas les congruences mais les opérations sur les restes). On trouve également un type de tâches associé à la notion de divisibilité (T_{10}) qui fait l'objet du premier cours d'arithmétique. Cependant sa place dans le cours sur la division euclidienne s'explique par le fait que le théorème de la division permet d'outiller une nouvelle technique propre à résoudre ce type de tâches : faire une disjonction de cas selon des restes de la division de n par b.

Voici un tableau qui récapitule les différents éléments de l'OM_{div} locale construite par P1 autour de la division euclidienne :

	OM_{div} chez P1 : OM locale
Θ	Propriété d'Archimède Propriétés des parties non vides de **N**. Relation d'ordre dans **Z**. Caractérisation des multiples d'un nombre. Raisonnement par existence et unicité, raisonnement par l'absurde et raisonnement par disjonction de cas.
θ	Quels que soient $a\in\mathbf{Z}$ et $b\in\mathbf{N}^*$, il existe un couple (q,r) unique avec $q\in\mathbf{Z}$ et $r\in\mathbf{N}$, et $0\leq r<b$ tels que $a=bq+r$
T	T_1 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés. T_2 : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n\in\mathbf{N}$, par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n. T_3 : Soit l'ensemble {dividende a, diviseur b, quotient q, reste r}. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble si l'on connaît les autres ou des relations entre eux. T_6 : Trouver le reste de la division euclidienne d'un entier N(n), $\forall n\in\mathbf{N}$, par un entier b donné, en utilisant le fait que $n=bk+r$ où $r\in\{0, \ldots, b-1\}$. T_7 : Montrer que tout entier n s'écrit sous la forme $n=bk+r$ où $r\in\{0, \ldots, b-1\}$, $k\in\mathbf{N}$, et b est un entier donné. T_8 : Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que le reste de la division de N(n), par un entier donné a, soit fixé. T_9 : Trouver le reste de la division d'un nombre entier a par un nombre entier b connaissant certaines propriétés de a. T_{10} : Montrer qu'un entier N(n), $\forall n\in\mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné. T_{11} : Etablir une règle permettant de déterminer le reste de la division euclidienne de a^n par un entier b donné. T_{12} : Etablir un critère de divisibilité.

Fig. 34 : Structure du thème d'étude sur la division euclidienne dans le savoir apprêté par P1

Nous allons maintenant voir si P1 réutilise le théorème de la division euclidienne pour introduire de nouvelles notions comme les congruences, les changements de base de numération, ou les critères de divisibilité.

b) OM_{div} régionales

La deuxième séance après la division euclidienne est consacrée à la notion de congruence. Il s'agit d'une séance qui s'appuie sur une fiche de T.P. extraite du manuel Dec98[129], dans laquelle aucun résultat théorique sur les congruences n'est institutionnalisé. Au cours de cette séance, les types de tâches suivants sont travaillés :

[129] Rappelons que le manuel utilisé dans cette classe est Ter98.

T_7^{cong} : Vérifier qu'un nombre donné est bien congru à un autre modulo un troisième.
T_8^{cong} : Trouver le reste de la division d'un nombre de la forme $(a)^b$, a et b entiers naturels, par un entier c donné.
T_9^{cong} : Etablir les propriétés des congruences.
T_{10}^{cong} : Montrer qu'un nombre de la forme $(a)^b-1$, a et b entiers naturels, est divisible par un entier c donné.
T_{11}^{cong} : Etablir un critère de divisibilité en utilisant les congruences.

Nous verrons dans la suite de ce chapitre comment P1 envisage de mettre en place cette séance en classe.

P1 ne consacre pas de séance particulière aux critères de divisibilité. Nous avons vu que le type de tâches *Etablir un critère de divisibilité* apparaît aussi bien dans l'OM_{div} locale comme type de tâches isolé que dans l'OM_{div} régionale sur les congruences, où il fait l'objet de plusieurs exercices. De même que dans le cas des congruences, aucun résultat technologique n'est institutionnalisé sur les critères de divisibilité.

P1 n'aborde pas les changements de base de numération dans son cours. L'OM_{div} régionale sur les changements de base est donc absente.

La place de la division euclidienne dans ce cours de P1 se schématise de la façon suivante :

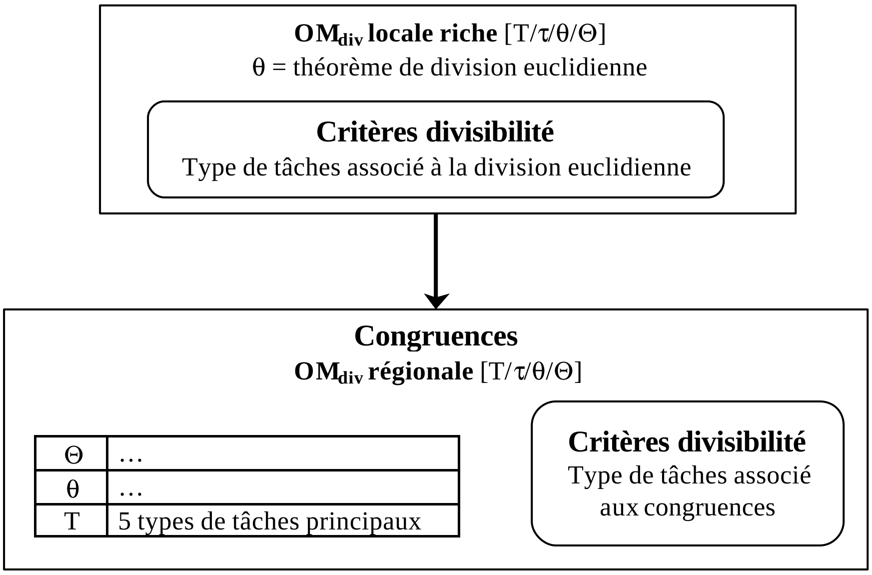


Fig. 35 : Structure du secteur d'étude sur la division euclidienne dans le savoir apprêté par P1

II.2 Organisations didactiques

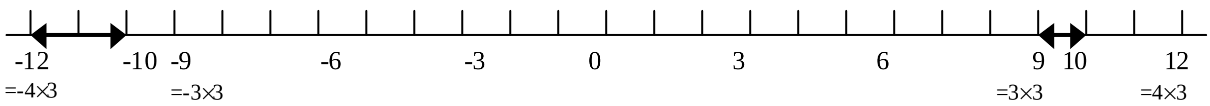
a) Mise en place des OM_{div} locale et régionales

Les organisations didactiques que P1 envisage pour mettre en place l'OM_{div} locale et l'OM_{div} régionale sur les congruences sont fortement liées aux choix mathématiques que nous avons explicités ci-dessus.

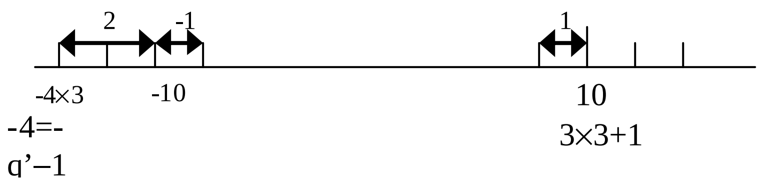
Tout d'abord, au niveau de la démonstration du théorème de la division euclidienne, nous avions souligné le point suivant : le choix de démonstration fait par P1 est cohérent avec ses objectifs d'enseignement. Cependant, cette démonstration étant délicate, nous nous posions le problème de sa mise en place en classe : quelle technique didactique P1 prévoit-elle d'utiliser pour « faire passer » cette démonstration aux élèves sans les perdre ?

Elle fait le choix, dans toute la démonstration, de travailler parallèlement sur un schéma qui lui permet d'illustrer sur un exemple numérique les objets qu'elle est en train de manipuler dans la démonstration.
Trois schémas interviennent :

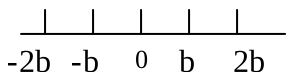
<u>Le schéma 1</u> : ce schéma permet d'illustrer l'existence de q et l'inégalité $qb \leq a<(q+1)b$ quand a=10 et a=-10 et quand b=3. Il permet également de visualiser le reste.



<u>Le schéma 2</u> : il permet de comprendre les manipulations algébriques effectuées dans le cas d'un dividende négatif et de voir que le reste change dans le cas a=-10 par rapport au cas a=10.



<u>Le schéma 3</u> : ce schéma permet de visualiser l'ensemble des multiples de b.



Ainsi, pendant tout son cours, P1 utilise une technique didactique d'ostension des propriétés générales sur un exemple contextualisé pour permettre aux élèves de suivre le raisonnement.
Notons également que si P1 peut se permettre de faire une démonstration aussi complexe en classe –et qui reste complexe, même avec l'appui des trois schémas– c'est qu'elle fait des cours magistraux[130]. La place très faible laissée aux élèves pendant le cours lui permet d'introduire des démonstrations difficiles, car c'est elle seule qui en a la charge. En résumé : l'OD basée sur la technique du cours magistral (niveau pédagogique) permet à P1 de choisir une démonstration difficile du théorème de la division euclidienne. Mais la difficulté du bloc [θ/Θ] de l'OM_{div} locale choisie par P1 l'a conduite à utiliser une technique didactique particulière –utilisation de schémas– pour répondre à une contrainte liée à l'exercice du métier : il faut faire en sorte qu'un maximum d'élèves puissent suivre et comprendre le cours.

L'OD choisie pour mettre en place l'OM_{div} régionale est, elle aussi, fortement liée aux choix mathématiques de P1. Elle dépend de la place que P1 accorde à cette OM_{div} régionale dans

[130] Voir chapitre précédent sur le mode de fonctionnement didactique de P1 en classe.

l'ensemble de son projet mathématique. Comme P1 décide de ne pas institutionnaliser de résultats sur les congruences, elle ne peut pas avoir recours au même mode de fonctionnement didactique qui régit la plus grande partie des séances : faire un cours magistral suivi d'une fiche d'exercices. Elle fait donc le choix d'un mode de fonctionnement particulier, entre le cours magistral et la fiche d'exercices seule : les élèves doivent chercher l'ensemble du T.P. (sauf la partie sur les critères de divisibilité) à la maison pour la sixième séance d'arithmétique. Au début de cette sixième séance, P1 envoie des élèves au tableau pour corriger la partie du T.P. cherchée à la maison. P1 corrige ensuite devant l'ensemble de la classe les exercices sur les critères de divisibilité, avant de reprendre la fin de la fiche d'exercices « division euclidienne ».

Ce mode de fonctionnement didactique permet à P1 de distinguer les savoirs exigibles des savoirs non exigibles. La notion de congruence, qui n'est pas vue dans le cadre d'un cours magistral mais d'une séance de travaux pratiques, est donc un savoir non exigible. Ce choix didactique permet aux élèves d'avoir une lisibilité sur ce que l'enseignante est en droit d'attendre, ou non, d'eux en D.S., par exemple.

b) Types de tâches évalués

Un autre choix didactique important qu'un enseignant est amené à faire est de choisir les types de tâches qu'il va évaluer sur une OM donnée. Si on compare les types de tâches donnés par P1 dans le cadre des exercices ou des T.P. et ceux proposés en D.S., nous obtenons le tableau ci-dessous.

Le tableau présenté ci-dessous nous montre que P1 évalue essentiellement des types de tâches déjà vus en exercices. Le fait que la technique « écrire un nombre sous la forme n=bk+r où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$ » soit un objectif d'apprentissage peut expliquer l'absence d'évaluation des types de tâches T_6 et T_7. Nous pouvons faire l'hypothèse que P1 s'attend à ce que cette technique soit disponible[131] chez les élèves. En effet, un des exercices dépendant du type de tâches T_{10} qu'elle donne en D.S., nécessite la mise en œuvre de cette technique pour être résolu.

Par ailleurs, il n'est pas surprenant que l' OM_{div} régionale sur les congruences ne soit pas évaluée en D.S. au vu du dispositif didactique mis en place par P1 pour son introduction.

[131] Au sens de Robert (2001).

	En exercices	**En D.S.**
DIVISION EUCLIDIENNE	**T_1 :** Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés. **T_2 :** Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n\in$ **N,** par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n. **T_3 :** Soit l'ensemble {dividende a, diviseur b, quotient q, reste r}. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble si l'on connaît les autres ou des relations entre eux. **T_6 :** Trouver le reste de la division euclidienne d'un entier N(n), $\forall n\in$ **N**, par un entier b donné, en utilisant le fait que n=bk+r où $r\in\{0, \ldots, b-1\}$. **T_7 :** Montrer que tout entier n s'écrit sous la forme n=bk+r où $r\in\{0, \ldots, b-1\}$, $k\in$ **N**, et b est un entier donné. **T_8** : Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que le reste de la division de N(n), par un entier donné a, soit fixé. **T_9 :** Trouver le reste de la division d'un nombre entier a par un nombre entier b connaissant certaines propriétés de a. **T_{10} :** Montrer qu'un entier N(n), $\forall n\in$ **N,** est divisible par un entier b donné. **T_{12} :** Etablir un critère de divisibilité.	**T_1** : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés. **T_2 :** Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n\in$ **N,** par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n. **T_3 :** Soit l'ensemble {dividende a, diviseur b, quotient q, reste r}. Trouver un ou deux éléments de cet ensemble si l'on connaît les autres ou des relations entre eux. **T_9 :** Trouver le reste de la division d'un nombre entier a par un nombre entier b connaissant certaines propriétés de a. **T_{10} :** Montrer qu'un entier N(n), $\forall n\in$ **N,** est divisible par un entier b donné. **T_{11} :** Etablir une règle permettant de déterminer le reste de la division euclidienne de a^n par un entier b donné.
CONGRUENCES	**T_7^{cong} :** Vérifier qu'un nombre donné est bien congru à un autre modulo un troisième. **T_8^{cong} :** Trouver le reste de la division d'un nombre de la forme $(a)^b$, a et b entiers naturels, par un entier c donné. **T_9^{cong} :** Etablir les propriétés des congruences. **T_{10}^{cong} :** Montrer qu'un nombre de la forme $(a)^b-1$, a et b entiers naturels, par un entier c donné. **T_{11}^{cong} :** Etablir un critère de divisibilité en utilisant les congruences.	

Fig. 36 : Types de tâches évalués et types de tâches proposés en exercice dans le cours de P1

II.3 Conclusion de l'analyse de l'apprêtage du savoir autour de la division euclidienne fait par P1

Quatre points peuvent être dégagés au vu de l'analyse précédente.

Tout d'abord, on observe chez P1 une articulation des OM et des OD qui lui permet une certaine marge de manœuvre dans ses choix mathématiques. En effet, le fonctionnement didactique en cours magistral autorise P1 à proposer une démonstration du théorème de la division euclidienne qui est exigeante, tant au niveau de son organisation, qu'au niveau de sa mise en œuvre technique. De plus, choisir de proposer une fiche de T.P. quand les contenus abordés ne font pas l'objet d'une institutionnalisation lui permet de différencier clairement les savoirs exigibles de ceux qui ne le sont pas.

Par ailleurs, on constate que son projet de cours est déjà inscrit dans une mise en scène didactique. En effet, l'utilisation de schémas dans la démonstration du théorème de la division euclidienne est une technique didactique qui lui permet, a priori, de contrebalancer la difficulté prévue de la démonstration. Nous verrons dans le chapitre suivant si l'utilisation de cette technique didactique a bien les effets escomptés.

De plus, le mode de fonctionnement didactique en s'appuyant sur des fiches d'exercices permet à P1 de balayer un vaste ensemble de types de tâches autour de la division euclidienne et de donner plusieurs exercices sur un même type de tâches. La fonction de travail de la technique est bien assurée par le biais de ces fiches.

Enfin, le savoir apprêté par P1 se distingue du savoir enseigné par l'absence de l'OM_{div} régionale sur les changements de base de numération. Cependant, contrairement à ce qui est le cas dans le cours de la brochure de l'IREM de Poitiers, les congruences et les critères de divisibilité sont traités comme des exemples d'application de la division euclidienne (en accord avec les recommandations du programme) et non comme des thèmes d'étude en eux-mêmes.

III. SAVOIR APPRETE PAR P2 AUTOUR DE LA NOTION DE DIVISION EUCLIDIENNE

Nous allons adopter la même méthodologie pour analyser l'apprêtage didactique de P2 autour de la notion de division euclidienne.

III.1 Organisations mathématiques

a) OM_{div} locale

Nous avons vu dans le chapitre précédent que P2 a choisi de ne pas introduire les propriétés de **N** dans son cours d'arithmétique. Par conséquent, elle ne peut choisir de baser la démonstration du théorème de la division euclidienne sur celles-ci ou sur la propriété d'Archimède. Parmi les démonstrations qui restent envisageables, elle choisit de s'appuyer sur le fait que a puisse être encadré par deux multiples consécutifs de b afin d'obtenir l'inégalité centrale de la démonstration : $qb \leq a<(q+1)b$.

De même que P1, elle aborde le thème de la division euclidienne lors de la quatrième séance d'arithmétique, après avoir traité les multiples, les diviseurs et les nombres premiers et fait un D.S. d'une heure.

Comme P1, elle choisit également d'établir le théorème de la division euclidienne dans **Z** :

> « **Théorème** :
> Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul ; Il existe un unique couple d'entiers (q,r) tel que a=bq+r avec $0 \leq r < b$
> Remarque : q est un entier relatif, r est un entier naturel. » (Cours n°4 de P2)

Voici la démonstration qu'elle propose pour ce théorème :

> « Dem :
> Existence
> Soit $a \in \mathbf{Z}$, soit $b \in \mathbf{N}^*$. Encadrons a par deux multiples consécutifs de b.
> Soit $q \in \mathbf{Z}$ tel que $bq \leq a < b(q+1)$ *(remarque : q £ a/b < q+1 q =E(a/b))*
> $a = bq + a - bq$ avec $r = a - bq$.
> Comme $bq \leq a < b(q+1)$, on a $0 \leq r < b$
>
> Unicité
> Soit (q,r) et (q',r') deux couples solution. On a $\begin{cases} a = bq + r & \text{avec } 0 \leq r < b \\ a = bq' + r' & \text{avec } 0 \leq r' < b \end{cases}$
> $\begin{cases} 0 \leq r < b \\ -b < -r \leq 0 \end{cases}$ donc $-b < r-r' < b$
>
> De plus, $bq + r = bq' + r'$ donc $r-r' = b(q'-q)$ avec q'-q entier, donc r-r' multiple de b
> D'où $r-r' = 0$ donc $r = r'$, donc $q'-q = 0$ donc $q' = q$ d'où l'unicité. »

Quatre points se dégagent à l'analyse de cette démonstration.

Premièrement, P2 ne prouve pas que a peut être encadré par deux multiples consécutifs de b. Cet encadrement semble aller de soi. Peut-être s'appuie-t-elle, tout comme l'IREM de Poitiers, sur « le bon sens commun » et sur le fait que « les élèves utilisent spontanément [ce] résultat » (Ibid., p. 245). Ou peut-être envisage-t-elle de développer ce point en classe. L'analyse fine de la séance sur la division euclidienne, dans le chapitre suivant, permettra de répondre à cette question.

Par ailleurs, P2 fait une remarque sur la partie entière de a/b qui peut paraître surprenante. En effet, l'utilisation de la partie entière aurait pu permettre de prouver l'existence de q et d'obtenir de façon « rigoureuse » l'inégalité recherchée. Le fait que la partie entière soit traitée en remarque peut laisser penser que P2 n'avait pas prévu ce point dans son projet de cours. Cependant, à la lecture de la réalisation effective de cours en classe, P2 semble avoir prévu de parler de la partie entière dans la démonstration. Il semble donc bien que la partie entière fasse partie du projet de cours de P2.

De plus, alors que P2 a choisi d'établir le théorème de la division euclidienne dans **Z**, elle ne fait pas de disjonction de cas selon le signe de a. Elle évite de la sorte un passage technique de la démonstration en introduisant l'inégalité $qb \leq a < (q+1)b$ directement avec a et q à valeurs dans **Z**. Notons que l'utilisation de la partie entière permet aussi d'éviter de distinguer le cas a positif du cas a négatif.

En introduisant la partie entière, P2 aurait pu faire simultanément la démonstration de l'existence et de l'unicité du quotient et du reste. Cependant, de même que P1 et l'IREM de Poitiers, elle choisit de prouver séparément l'existence et l'unicité de (q,r). Les raisons évoquées pour expliquer le choix de P1 à ce sujet nous semblent valables pour comprendre celui de P2. En effet, P2 a également comme objectif de former les élèves au raisonnement en arithmétique :

> « […] C'est la seule partie du programme où on raisonne vraiment. Donc pour moi c'est le plus grand des intérêts. […] avec des raisonnements intéressants, construits, pas un simple si alors. » (Extraits entretien P2)

En définitive, le choix de P2 nous semble problématique sur un point : le rôle effectif de la partie entière dans la démonstration. Est-elle introduite pour obtenir une caractérisation du quotient dont l'existence est prouvée précédemment par le fait que a puisse être encadré par deux multiples consécutifs de b ou joue-t-elle un rôle dans la démonstration de l'existence de q ? La démonstration écrite par P2 tend à valider le premier rôle. Si cela est effectivement le cas, la démonstration comporte un point d'ombre : la validité de l'inégalité $qb \leq a<(q+1)b$, inégalité centrale dans le raisonnement mis en œuvre.
Cela mis à part, le fait de séparer la démonstration de l'existence de celle de l'unicité est cohérent avec la volonté de P2 de former les élèves aux « raisonnements intéressants » que l'on peut trouver en arithmétique.

Voici maintenant les types de tâches que P2 choisit de traiter sur la division euclidienne :

- T_1 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés.
- T_2 : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n.
- T_4 : Montrer qu'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné, en utilisant le fait que $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$.
- T_6 : Trouver le reste de la division euclidienne d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné, en utilisant le fait que $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$.
- T_7 : Montrer que tout entier n s'écrit sous la forme $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$, $k \in \mathbf{N}$, et b est un entier donné.

L'OM_{div} locale construite par P2 est moins variée que celle de P1 au niveau du nombre de types de tâches abordés. Voici le tableau récapitulatif de ses principaux éléments :

	OM_{div} chez P2 : OM locale
Θ	Encadrement de a par deux multiples consécutifs de b. Caractérisation des multiples d'un nombre. Problème de la partie entière ! Raisonnement par existence et unicité, raisonnement par l'absurde.
θ	Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul ; Il existe un unique couple d'entiers (q,r) tel que $a=bq+r$ avec $0 \leq r<b$ Remarque : q est un entier relatif, r est un entier naturel.
T	T_1 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés. T_2 : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n. T_4 : Montrer qu'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné, en utilisant le fait que $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$. T_6 : Trouver le reste de la division euclidienne d'un entier N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, par un entier b donné, en utilisant le fait que $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$. T_7 : Montrer que tout entier n s'écrit sous la forme $n=bk+r$ où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$, $k \in \mathbf{N}$, et b est un entier donné.

Fig. 37 : Structure du thème d'étude sur la division euclidienne dans le savoir apprêté par P2

Nous allons voir maintenant que si l'OM_{div} locale de P2 est moins riche que celle de P1, ce n'est pas le cas des OM_{div} régionales.

b) OM_{div} régionales

Dans le chapitre « Divisibilité-Nombres premiers », P2 organise la partie sur la division euclidienne de la façon suivante :

« III. Division Euclidienne
1) Théorème
2) Changement de base de numération
3) Congruences »

P2 fait donc le choix de proposer deux OM_{div} régionales ; une sur les changements de base de numération et l'autre sur les congruences.

P2 introduit d'abord les conventions d'écriture concernant les chiffres que l'on utilise dans une base de numération donnée.

Aucun résultat théorique général n'est institutionnalisé. Les résultats sont vus au travers d'exemples Le bloc technologico-théorique de cette OM est donc absent. Les types de tâches proposés sont :

T_1^{base} : Effectuer une addition en base x, $x \neq 10$. (base 2)
T_{11}^{base} : Trouver le nombre de chiffres d'un nombre donné dans une base x ou déterminer le $n^{ième}$ chiffre de ce nombre ou déterminer combien de nombres on peut écrire sous certaines conditions dans une base donnée.
T_{12}^{base} : Ecrire en base 10 un nombre écrit dans une base x, $x \neq 10$.
T_{13}^{base} : Ecrire en base x, $x \neq 10$ un nombre écrit en base 10.
T_{14}^{base} : Résoudre une équation du type $\overline{a}^{x}=\overline{b}^{10}$ où a et b sont des nombres donnés.

L'OM_{div} régionale sur les changements de base de numération construite par P2 est relativement riche. Il semble étonnant de développer autant cette OM dans le cadre du programme actuel d'arithmétique. Or, P2 est une enseignante « nostalgique » de l'arithmétique qu'elle a enseignée à la fin des années 70. A cette époque, les changements de base de numération donnaient lieu à un grand nombre d'exercices, comme le montre la variété de types de tâches relevés dans Revuz71. De plus, c'étaient une application classique de la division euclidienne. La spécificité de l'arithmétique de l'ancien programme semble donc avoir joué un rôle déterminant dans le choix fait par P2 de traiter les changements de base de numération[132].

Après avoir traité les changements de base de numération, P2 introduit les congruences. Les types de tâches proposés dans l'OM_{div} régionale sur les congruences sont :

T_5^{cong} : Montrer qu'un nombre N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné.

[132] Remarquons cependant que l'année qui a suivi nos observations, P2 est revenue sur son choix d'introduire les changements de base après le théorème de la division euclidienne. Dans son entretien, elle souligne qu'elle garde désormais ces problèmes « annexes » pour la fin de l'année. Cette modification peut être vue comme une adaptation de P2 aux exigences du programme d'arithmétique de 1998.

T_6^{cong} : Trouver les conditions sur n pour qu'un nombre N(n), $\forall n \in \mathbf{N}$, soit divisible par un entier b donné.
T_7^{cong} : Vérifier qu'un nombre donné est bien congru à un autre modulo un troisième.
T_{11}^{cong} : Etablir un critère de divisibilité en utilisant les congruences.

Le dernier type de tâches (T_{11}) montre que P2 choisit d'aborder les critères de divisibilité dans le cadre des congruences. Or, elle traite également ce sujet dans la partie « multiples et diviseurs », au tout début du premier chapitre d'arithmétique. Il s'agit donc de revenir sur une notion déjà vue en introduisant une nouvelle technique de résolution. On ne peut donc pas considérer que les critères de divisibilité soient une OM régionale de la division euclidienne dans le cours de P2.

Voici donc la place de la division euclidienne dans le projet de cours de P2 :

OM_{div} locale [T/τ/θ/Θ]
θ : théorème de division euclidienne

	Changements de base OM_{div} régionale
Θ	…
θ	Ecriture dans une base donnée Systèmes de chiffres
T	5 types de tâches principaux

	Congruences OM_{div} régionale
Θ	Division euclidienne dans **Z** Propriétés des multiples, etc.
θ	Définition congruence modulo n. Propriétés des congruences
T	4 types de tâches dont 1 sur les critères de divisibilité.

Fig. 38 : Structure du secteur d'étude sur la division euclidienne dans le savoir apprêté par P2

Elle est très différente de celle mise en évidence respectivement pour la brochure de l'IREM de Poitiers et pour le cours de P1, qui ne comptent tous deux qu'une OM_{div} régionale, les congruences.
La place de la division euclidienne dans le cours de P2 se rapproche plus de la place qu'elle occupe dans Revuz71, avec toutefois un bloc technologico-théorique moins dense et une moins grande variété de types de tâches associés.

III.2 Organisations didactiques

a) Mise en place des OM_{div} locale et régionales

Le fait que P2 n'utilise qu'un seul mode de fonctionnement didactique en classe (faire cours et insérer les exercices dans le contenu du cours) la conduit à introduire les deux OM_{div} régionales dans son cours. Elle est donc contrainte de développer de façon significative ces OM_{div} régionales afin de préserver la consistance mathématique de son cours. Elles occupent alors une place plus importante que celles présentées dans le cours de P1. Par exemple, comme P2 introduit les congruences dans son cours, il est alors logique qu'elle énonce et démontre l'intégralité des propriétés des congruences.

La « pauvreté » des techniques didactiques qu'elle met en œuvre pour introduire une notion pèse donc sur ses choix mathématiques.

Par ailleurs, ce type d'OD induit des pratiques d'évaluation complètement différentes de celles de P1.

b) Types de tâches évalués

Si l'on compare les types de tâches proposés par P2 selon s'ils sont évalués ou non, nous obtenons le tableau suivant :

	En exercices	**En D.S.**
DIVISION	**T_1 :** Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés. **T_2 :** Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n\in \mathbf{N}$, par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n.	**T_4 :** Montrer qu'un entier N(n), $\forall n\in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné, en utilisant le fait que n=bk+r où $r\in \{0, \ldots, b-1\}$. **T_6 :** Trouver le reste de la division euclidienne d'un entier N(n), $\forall n\in \mathbf{N}$, par un entier b donné, en utilisant le fait que n=bk+r où $r\in \{0, \ldots, b-1\}$. **T_7 :** Montrer que tout entier n s'écrit sous la forme n=bk+r où $r\in \{0, \ldots, b-1\}$, $k\in \mathbf{N}$, et b est un entier donné.
CONGRUENCES	**T_5^{cong} :** Montrer qu'un nombre N(n), $\forall n\in \mathbf{N}$, est divisible par un entier b donné. **T_6^{cong} :** Trouver les conditions sur n pour qu'un nombre N(n), $\forall n\in \mathbf{N}$, soit divisible par un entier b donné. **T_7^{cong} :** Vérifier qu'un nombre donné est bien congru à un autre modulo un troisième. **T_{11}^{cong} :** Etablir un critère de divisibilité en utilisant les congruences.	
NUMERATION	**T_1^{base} :** Effectuer une addition en base x, $x\neq 10$. (base 2) **T_{11}^{base} :** Trouver le nombre de chiffres d'un nombre donné dans une base x ou déterminer le n^{ième} chiffre de ce nombre ou déterminer combien de nombres on peut écrire sous certaines conditions dans une base donnée. **T_{12}^{base} :** Ecrire en base 10 un nombre écrit dans une base x, $x\neq 10$. **T_{13}^{base} :** Ecrire en base x, $x\neq 10$ un nombre écrit en base 10. **T_{14}^{base} :** Résoudre une équation du type $a^x=b^{10}$ où a et b sont des nombres donnés.	**T_{12}^{base} :** Ecrire en base 10 un nombre écrit dans une base x, $x\neq 10$. **T_{13}^{base} :** Ecrire en base x, $x\neq 10$ un nombre écrit en base 10. **T_{14}^{base} :** Résoudre une équation du type $a^x=b^{10}$ où a et b sont des nombres donnés.

Fig. 39 : Types de tâches évalués et types de tâches proposés en exercice dans le cours de P2

Tout d'abord, au niveau de l'OM_{div} locale, on constate que P2 n'évalue que des types de tâches nouveaux. Le mode de fonctionnement didactique de P2 permet d'expliquer ce phénomène. En effet, comme P2 insère les exercices dans le contenu du cours, elle ne peut en proposer qu'un nombre réduit, contrairement à P1 qui fonctionne avec des fiches d'exercices indépendantes. Sur la division euclidienne, P2 choisit de ne faire que deux exercices, relevant des types de tâches T_1 et T_2. Or, elle ne peut baser son évaluation sur T_1, qui est une application directe du théorème de la division euclidienne. Elle axe donc son évaluation autour de la technique «écrire un nombre sous la forme n=bk+r où $r \in \{0, \ldots, b-1\}$ » qu'elle veut être mobilisable sans qu'il soit indispensable de l'avoir travaillée en exercice. Par conséquent, le nombre de types de tâches étudiés en exercices sur la division euclidienne est très faible comparativement à celui donné sur les congruences ou les changements de base ; surtout que ces deux notions ne font pas partie des connaissances exigibles d'après le programme.

Il nous semble donc que P2 sur-estime la familiarité des élèves avec la division euclidienne, qu'ils ont certes déjà vue en primaire, mais qu'ils n'ont jamais utilisée autrement que comme technique opératoire. L'analyse détaillée de la réalisation effective du cours sur la division euclidienne confirmera ou non cette hypothèse. Nous pouvons cependant avancer (dans le cas où cette hypothèse serait validée) que la prégnance de l'ancien programme d'arithmétique sur les représentations qu'a P2 de l'arithmétique la conduit à sous-estimer la difficulté de la division euclidienne pour les élèves.

Le tableau nous montre également que parmi les deux OM_{div} régionales, une seule est évaluée. Ce choix s'inscrit clairement en faux par rapport aux directives du programme. Cependant, il est cohérent dans le mode de fonctionnement didactique de P2. En effet, comme les OM_{div} régionales font partie du cours et que les principaux résultats théoriques sont institutionnalisés (soit par des démonstrations formelles soit par le biais d'exercices insérés dans le cours) elles doivent faire, pour P2, l'objet d'une évaluation.

c) Eléments d'analyse a priori des deux exercices du cours

Notons que, comme P2 inclut les exercices dans son cours, nous avons décidé de tenir compte dans l'analyse du projet de cours de P2 sur la division euclidienne[133] des deux exercices qu'elle donne à la suite du cours.
Nous présentons ici les éléments principaux de l'analyse a priori des deux exercices sur la division euclidienne qui suivent le cours.

Exercice 1

$\underline{Ex_1}$: quotient et reste de la division euclidienne de 343 par 15, de 234 765 par 311, de -2 345 par 29.

Cet exercice dépend du type de tâches «T_1 : Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de deux entiers donnés. ». Les techniques suivantes peuvent être utilisées pour le résoudre :

[133] Nous ne prenons pas en compte les exercices proposés par P1 car son mode de fonctionnement didactique sépare de façon nette la partie cours de la partie exercices.

τ_1^1 : Effectuer le calcul de tête.
τ_2^1 : Poser la division à la main.
τ_3^1 : Calculer a/b à la calculatrice et en déduire le reste.
τ_4^1 : Utiliser la touche Int de la calculatrice pour calculer (a/b) et en déduire le reste.
τ_5^1 : Utiliser un programme implémenté dans la calculatrice qui donne le quotient et le reste d'une division euclidienne.

Plusieurs procédures sont envisageables pour un élève de terminale S spécialité mathématique. Nous en détaillons quelques unes :

- S_1 : l'élève peut poser la division euclidienne à la main (τ_1^1)et identifier dans le résultat obtenu, le quotient et le reste de la division euclidienne.
- S'_1 : l'élève utilise la même technique que dans S_1 mais éprouve des difficultés à passer de la forme

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

  à celle $a=bq+r$ avec $0\leq r<b$.
- S_2 : l'élève utilise τ_3^1 et prend la partie entière du résultat obtenu pour obtenir le quotient.
- S'_2 : l'élève utilise τ_3^1 et prend la partie à gauche de la virgule du résultat obtenu pour obtenir le quotient.
- S''_2 : l'élève utilise τ_3^1 et arrondit le résultat obtenu à l'entier le plus proche pour obtenir le quotient.
- S_3 : l'élève utilise τ_4^1.

Nous avons identifié au moins cinq variables didactiques sur lesquelles P2 peut jouer : la taille des nombres (V_1), la taille de a par rapport à celle de b (V_2), le fait que a soit un multiple de b ou non (V_3), le signe de a (V_4), la valeur de l'arrondi de a/b à l'entier le plus proche par rapport à la valeur de E(a/b) (V_5).

Suivant les valeurs de ces variables, les procédures décrites ci-dessus permettent ou non de résoudre correctement l'exercice. Par exemple, un élève qui utilise la procédure S''_2 réussira l'exercice si V_5 est fixée de telle sorte que la valeur de l'arrondi de a/b à l'entier le plus proche soit égale à la partie entière de a/b. De même, un élève suivant la procédure S'_2 ne donne pas une réponse juste quand $a<0$.

Pour analyser les valeurs de a et b choisies par P2, nous nous intéresserons plus particulièrement aux variables V_4 et V_5. Nous faisons l'hypothèse que P2 prévoit que la majorité des élèves utilisent de façon préférentielle leur calculatrice au calcul de tête ou à la main.

Le premier couple de valeurs est a=343 et b=15. a est positif et $a/b\approx 22{,}87$. Les procédures S_2, S'_2 et S_3 fournissent la bonne réponse q=22 ($343=15\times 22+13$). La procédure S''_2 donne q=23.

Le deuxième couple de valeurs est a=234 765 et b=311. a est positif et $a/b\approx 754{,}87$. Les procédures S_2, S'_2 et S_3 fournissent la bonne réponse q=754 ($234\,765=311\times 754+271$). La procédure S''_2 donne q=755.

Le dernier couple de valeurs choisi par P2 est a=-2 345 et b=29. a est négatif et a/b≈-80,86. Les procédures S_2, S''_2 et S_3 fournissent la bonne réponse q=-81 (234 765=311×754+271). La procédure S'_2 donne q=-80.

Deux moyens de validation peuvent permettre aux élèves de contrôler leur résultat :

1. Connaître la définition de la partie entière de a/b. Si les élèves connaissent cette définition, les procédures S'_2 et S''_2 n'ont pas de raison d'exister.
2. L'inégalité que doit vérifier le reste de la division euclidienne. Dans le cas du dernier couple de valeurs, cela permet d'obtenir les résultats suivants :

   Si on prend q=-80, on obtient $-2\,345 = -80\times 29 + (-25)$. r ne vérifie pas $0\leq r<29$ car il est négatif. L'égalité obtenue n'est donc pas une égalité de division euclidienne.

   Si on prend q=-81, on obtient $-2\,345 = -81\times 29 + 4$. r vérifie bien $0\leq r<29$. L'égalité obtenue est donc une égalité de division euclidienne.

Comment P2 va-t-elle mettre en place cet exercice en classe ? Le milieu qu'elle va construire permettra-t-il aux élèves d'obtenir des rétroactions sur la validité de leur réponse ? L'analyse du savoir enseigné, dans le chapitre suivant, permettra d'apporter des éléments de réponse à ces questions.

Exercice 2

> Ex$_2$: Soit $n\in \mathbf{N}$, $n\geq 3$
> Déterminer (en discutant selon les valeurs de l'entier n) le quotient et le reste de la division euclidienne de n^3-2 par $n-2$.

Cet exercice dépend du type de tâches « T_2 : Trouver le reste de la division d'un entier N(n), $\forall n\in$ **N,** par un entier b donné, cet entier b pouvant également dépendre de n. ».

Pour résoudre l'exercice demandé, plusieurs procédures sont envisageables :

- S_1 : calculer le reste de la division euclidienne en testant des valeurs de n.
- S'_1 : calculer le reste de la division euclidienne en testant des valeurs de n et en essayant de conjecturer le résultat possible.
- S_2 : mettre $n-2$ en facteur dans n^3-2 pour obtenir $n^3-2=(n-2)(n^2+2n+4) + 6$ (différentes techniques sont disponibles en terminale S spécialité mathématique) et proposer 6 comme reste de division euclidienne.
- S'_2 : poser la division de n^3-2 par $n-2$ ce qui donne :

$$
\begin{array}{r|l}
n^3-2 \qquad\qquad & n-2 \\ \cline{2-2}
-n^3+2n^2 \qquad\qquad & n^2+2n+4 \\ \cline{1-1}
2n^2-2 \qquad & \\
-2n^2+4n \qquad & \\ \cline{1-1}
4n-2 & \\
-4n+8 & \\ \cline{1-1}
6 &
\end{array}
$$

et proposer 6 comme reste de division euclidienne.

- S_3 : arriver, par S_2 ou S'_2 à la relation $n^3-2=(n-2)(n^2+2n+4) + 6$ et écrire l'inégalité $0\leq 6<n-2$ sans aller plus loin.
- S'_3 : Trouver les valeurs de n pour lesquelles $0\leq 6<n-2$ est une inégalité de division euclidienne. (c'est une inégalité de division euclidienne pour n>8).
- S''_3 : Trouver les valeurs du reste pour $n\leq 8$ en calculant le reste de la division pour n=3, n=4, …, n=8.
- S'''_3 : Trouver les valeurs du reste pour $n\leq 8$ en «enlevant » une fois de plus $n-2$ à n^3-2 car 6 n'est pas un reste de division euclidienne, ce qui conduit à écrire :
- $n^3-2=(n-2)(n^2+2n+5) + 6-(n-2)$ etc.

Une des variables didactiques de cet exercice est la valeur n_0 de n à partir de laquelle le reste trouvé en posant la division de n^3-2 par $n-2$ ou en mettant $n-2$ en facteur dans n^3-2 est un reste de division euclidienne. Si n_0 est grand, la procédure de type S''_3, qui permet d'arriver à la solution, se révèle fastidieuse. Ici, $n_0=8$, il reste donc 6 valeurs de n à tester, ce qui est relativement peu coûteux si l'on dispose d'une calculatrice.

Cet exercice est difficile, surtout si l'on considère que c'est le deuxième que les élèves ont à faire sur la division euclidienne, qu'ils viennent de voir une dizaine de minutes dans la même séance. Nous pensons que les connaissances –en construction– des élèves sur la division euclidienne ne leur permettront pas de dépasser des procédures allant de S_1 à S_3. P2 a-t-elle prévu cette difficulté ? Si oui, comment a-t-elle prévu de gérer cela en classe ? Si non, comment va-t-elle gérer la résolution de cet exercice en classe ?

Remarquons avant de conclure que P2 propose des exercices qui insistent tous les deux sur l'importance de l'inégalité portant sur le reste d'une division euclidienne. C'est un point qui semble important dans son projet mathématique.

III.3 Conclusion de l'analyse de l'apprêtage du savoir autour de la division euclidienne fait par P2

Contrairement à ce que l'on a constaté chez l'enseignante P1, il semble que le mode de fonctionnement didactique de P2, centré sur le logos, et ses représentations de l'arithmétique pèsent fortement sur ses choix mathématiques. Ainsi, dans le savoir qu'elle apprête, les OM_{div} régionales sont soit des thèmes d'étude (cas de la notion de congruence) soit des objets évalués (cas des changements de base de numération) alors que le programme ne les envisage que comme des applications de la division euclidienne. De plus, le nombre de types de tâches qu'elle propose aux élèves pour qu'ils puissent entrer dans un travail de la technique est très réduit. Elle ne peut pas en proposer plus dans le cadre d'un cours ; les élèves ont donc la responsabilité d'effectuer ce moment de travail de la technique en dehors du cadre de la classe.

Par ailleurs, si, à première vue, les choix mathématiques faits par P2 pour la démonstration du théorème de la division euclidienne peuvent sembler peu cohérents et faiblement insérés dans un projet didactique, la prise en compte des deux exercices donnés à la suite du cours permet de redonner une cohérence à son projet mathématique, non seulement à propos du rôle de la partie entière (exercice 1) mais également à propos de celui de l'inégalité portant sur le reste (exercices 1 et 2).

CONCLUSION

Les analyses menées dans ce chapitre montrent que les différents investissements des marges de manœuvre au niveau du savoir apprêté pour des secteurs et des thèmes d'étude dépendent fortement du mode de fonctionnement didactique des enseignants.
En effet, pour ce qui est des OM régionales autour de la division euclidienne, le degré de développement que leur donnent P1 et P2 est contraint par leur façon de faire cours. Suivant si le mode de fonctionnement didactique est axé sur la praxis ou sur le logos, les OM régionales deviennent soit des applications directes du cours, soit des thèmes d'étude pour pouvoir prendre place dans le cours. Nous avons également montré que ce mode de fonctionnement didactique pèse sur la variété de types de tâches proposés et détermine le type d'évaluation mis en place.
De fait, les principales différences qui apparaissent à la comparaison des savoirs apprêtés par P1 et P2 semblent liées au mode de fonctionnement didactique particulier de chacune de ces enseignantes.

Une autre contrainte paraît guider fortement les choix mathématiques de P1 et P2 et peut expliquer leur choix de démonstration pour le théorème de la division euclidienne : leur représentation de ce qu'elles estiment être une formation mathématique destinée à des élèves de spécialité.

Nous allons maintenant procéder au dernier zoom sur l'activité de l'enseignant en analysant la réalisation effective de la démonstration du théorème de la division euclidienne dans les classes de P1 et P2. L'analyse des choix de démonstration articulée avec la description du mode de fonctionnement didactique de ces deux enseignantes nous permet de supposer, a priori, que les modifications du savoir apprêté engendrées par la réalisation effective du projet de cours en classe seront moindres pour P1 que pour P2.
En effet, non seulement P2 s'expose davantage à la survenue d'incidents en essayant de faire intervenir les élèves pendant la démonstration, mais elle ne semble pas non plus avoir pensé son projet mathématique (notamment le rôle de la partie entière de a/b) dans le cadre d'un projet didactique précis. De son côté, P1 a prévu de s'appuyer sur des schémas pour expliquer la démonstration aux élèves et n'envisage pas de les faire participer pendant son cours. Elle devrait donc pouvoir mener à bien son projet sans avoir à le transformer.

CHAPITRE C4

OBSERVATIONS NATURALISTES DE DEUX ENSEIGNANTES : COMPARAISON DU SAVOIR ENSEIGNE SUR LA DIVISION EUCLIDIENNE

INTRODUCTION

Dans les deux chapitres précédents, nous avons procédé à des analyses du savoir apprêté par P1 et P2 en effectuant des zooms progressifs sur leur activité. Commençant de l'analyse de leurs choix mathématiques et didactiques au niveau de leur projet d'enseignement de l'arithmétique dans son intégralité, nous passons ensuite à l'analyse des choix au niveau de leur projet de cours sur la notion de division euclidienne.

Ce chapitre est l'occasion d'un dernier zoom sur l'activité de l'enseignant. Nous étudions la réalisation effective du cours sur la division euclidienne dans les classes de P1 et P2. L'analyse de ce moment d'institutionnalisation du bloc technologico-théorique de l'OM_{div} locale nous permet non seulement d'atteindre le niveau de détermination mathématique le plus spécifique dans la description de l'enseignement de l'arithmétique mais également d'étudier la dernière étape du processus de transposition didactique interne : le passage du savoir apprêté au savoir enseigné.

La relation didactique qui se noue au sein de la classe lors de la réalisation effective du projet de cours de l'enseignant fait naître de nouvelles contraintes, dites internes, qui pèsent sur les choix du professeur. De plus, elle génère la survenue d'incidents dans le déroulement des séances en classe qui perturbent le projet initial de l'enseignement.
Cette démarche nous conduit à poser les questions suivantes : Quel est système de contraintes internes pesant sur la réalisation effective des projets de cours de P1 et P2 ? Par quelles techniques didactiques ces deux enseignantes gèrent-elles les incidents qui perturbent le déroulement de cet enseignement ? Quelles sont les conséquences de ce système de contraintes et de ces incidents sur le « bon » déroulement de la réalisation effective du projet de cours de P1 et P2 ? Quel écart observe-t-on entre le savoir apprêté et le savoir enseigné par ces deux enseignantes sur le thème de la division euclidienne ?

Pour apporter des éléments de réponse à ces questions, nous allons mener une analyse des cours réalisés par P1 et P2 en nous appuyant sur les résultats concernant leur projet de cours initial dégagés dans les chapitres C2 (étude de la diversité des pratiques sur l'arithmétique) et C3 (comparaison du savoir apprêté par P1 et par P2 autour de la notion de division euclidienne).

Pour ce faire, nous identifions, a priori, dans un premier temps les principales tâches didactiques (et les techniques associées) auxquelles tout enseignant est confronté quand il doit faire une démonstration. Cette description des tâches et techniques didactiques nous permettra de caractériser les OD utilisées par P1 et P2 pour gérer la mise en place de la démonstration du théorème de l'existence et de l'unicité de la division euclidienne en cours.

Nous menons ensuite l'analyse des protocoles en utilisant également des outils empruntés à la théorie des situations didactiques, comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre C1 « Analyse des pratiques enseignantes : point de vue théorique et méthodologique ».

A partir de ces analyses, nous essayons, d'une part, de caractériser le savoir enseigné par chacune des deux enseignantes et, d'autre part, de mettre en évidence un ensemble d'éléments permettant d'expliquer les écarts existants entre le savoir apprêté par P1 et par P2 et le savoir enseigné.

Nous rappelons pour mémoire l'énoncé du théorème de la division euclidienne choisi par ces deux enseignantes afin de faciliter la lecture des analyses qui suivent :

> Quels que soient $a\in \mathbf{Z}$ et $b\in \mathbf{N}^*$, il existe un couple unique (q,r) d'entiers relatifs tels que : $a=bq+r$ et $0\leq r<b$

I. PRAXEOLOGIES DIDACTIQUES

Nous avons vu dans les deux chapitres précédents que P1 et P2 ont le même mode de fonctionnement didactique quand il s'agit d'introduire une nouvelle notion dans leur cours d'arithmétique. Elles commencent par énoncer et démontrer le(s) théorème(s) central(aux) de l'OM qu'elles souhaitent mettre en place avant de passer à une phase d'exercices plus ou moins longue.

La première séance sur la division euclidienne ne déroge pas à cette règle. P1 et P2 énoncent le théorème de la division euclidienne devant leur classe respective, le démontrent et proposent une série d'exercices sur la division euclidienne.
Cette séance débute donc par le cinquième moment de l'étude[134], plus précisément par l'institutionnalisation du bloc technologico-théorique de l'OM_{div} locale, et se poursuit des exercices d'applications qui présentent les types de tâches constitutifs de l'OM_{div} locale. Rappelons que, pour P2, ces exercices font partie intégrante de son projet de cours.

Dans ce chapitre, nous nous centrons plus particulièrement sur l'institutionnalisation du bloc technologico-théorique. Nous avons mis en évidence un ensemble de types de tâches didactiques (T_d) auxquelles tout enseignant est confronté lorsqu'il est amené à réaliser ce moment classe :

- Td_1 : Planter le décor dans lequel s'inscrit le théorème ;
- Td_2 : Enoncer le théorème ;
- Td_3 : Introduire la démonstration du théorème ;
- Td_4 : Faire la démonstration du théorème ;
- Td_5 : Conclure la démonstration du théorème.

Bien entendu, la numérotation des différents types de tâches didactiques ne renvoie pas à un ordre chronologique fixé. Pendant la préparation de son cours, l'enseignant peut très bien

[134] Voir Chevallard (1999)

envisager de répondre à la quatrième tâche[135] avant de s'intéresser à la façon de résoudre la première, si toutefois il prévoit une réponse à cette tâche au moment de sa préparation. De même, en classe, l'enseignant peut choisir de faire la démonstration du théorème avant de donner son énoncé.

Nous avons relevé différentes techniques didactiques pour chacun de ces types de tâches. Ce travail ne prétend pas être exhaustif. Nous avons, en fait, uniquement pris en compte des techniques didactiques susceptibles d'apparaître dans l'institution scolaire française actuelle. Cet ensemble de techniques nous permet de situer, dans la suite de nos analyses, les techniques didactiques utilisées par P1 et P2 dans un ensemble de possibles et d'essayer d'identifier le système de contraintes qui les amène à choisir telle technique plutôt que telle autre.

<u>Td_1 : « Planter le décor dans lequel s'inscrit le théorème »</u> :

- τd_1^1 : Ne pas introduire le théorème.
- τd_2^1 : Situer le théorème par rapport à la structure du cours (quel numéro de paragraphe ? Quel cours ?).
- τd_3^1 : Situer le théorème par rapport à la progression du cours (quel lien avec ce qui a déjà été fait dans les séances précédentes ?).
- τd_4^1 : Situer le théorème par rapport à des connaissances antérieures (à quelles notions déjà vues précédemment se rattache ce théorème ?).
- τd_5^1 : Demander aux élèves ce qu'ils connaissent à propos de ce théorème ou leur demander de le situer par rapport à leurs connaissances antérieures.
- τd_6^1 : Donner un exemple d'application du théorème dans un cas particulier simple.
- τd_7^1 : Proposer aux élèves un exercice ou une activité préparatoires simples.

<u>Td_2 « Enoncer le théorème »</u> :

- τd_1^2 : Ne pas énoncer oralement le théorème et ne pas l'écrire (se référer au manuel des élèves par exemple).
- τd_2^2 : Enoncer oralement le théorème puis l'écrire.
- τd_3^2 : Enoncer oralement le théorème et l'écrire en même temps.
- τd_4^2 : Ecrire le théorème uniquement.
- τd_5^2 : Faire énoncer le théorème aux élèves (possible par exemple si l'enseignant a dans un premier temps introduit le théorème avec τd_6^1 ou τd_7^1 par exemple).
- τd_6^2 : Enoncer le théorème de différentes façons.
- τd_7^2 : Enoncer le théorème en faisant des remarques ou des commentaires sur les hypothèses de celui-ci ou sur la conclusion.

<u>Td_3 : « Introduire la démonstration »</u> :

- τd_1^3 : Ne pas introduire la démonstration.
- τd_2^3 : Donner la structure de la démonstration.
- τd_3^3 : Faire trouver aux élèves la structure de la démonstration.
- τd_4^3 : Faire appel à des démonstrations déjà faites.

[135] Il s'agit bien ici d'une tâche et non d'un type de tâche car la question qui se pose à l'enseignant pendant la préparation de son cours est : « Comment faire la démonstration du théorème de la division euclidienne ? ».

$\tau d_5^{\,3}$: Donner un exemple illustrant la démonstration.

Td_4 : « Faire la démonstration » :

$\tau d_1^{\,4}$: Admettre la démonstration.
$\tau d_2^{\,4}$: Faire chercher la démonstration aux élèves et la leur faire rédiger.
$\tau d_3^{\,4}$: Faire la démonstration au tableau en posant des questions aux élèves.
$\tau d_4^{\,4}$: Distribuer aux élèves la démonstration et faire des commentaires sur cette démonstration.
$\tau d_5^{\,4}$: Donner un exemple qui montre comment la démonstration pourrait être faite.
$\tau d_6^{\,4}$: Démontrer seulement les points importants de la démonstration.
$\tau d_7^{\,4}$: Faire la démonstration en s'appuyant sur un exemple.
$\tau d_8^{\,4}$: Faire la démonstration en donnant des explications préalables sur la démarche adoptée.

Td_5 : « Conclure la démonstration » :

$\tau d_1^{\,5}$: Passer à la suite sans commentaire particulier.
$\tau d_2^{\,5}$: Situer le théorème par rapport à la suite de la leçon.
$\tau d_3^{\,5}$: Faire des commentaires sur les applications possibles du théorème.
$\tau d_4^{\,5}$: Expliquer comment appliquer le théorème.
$\tau d_5^{\,5}$: Faire le bilan de ce que l'on a démontré.

Nous n'avons pas précisé les éléments technologiques ou théoriques a priori de ces praxéologies didactiques. Il nous semble en effet délicat d'énoncer des « théorèmes didactiques » qui permettraient de justifier ces techniques didactiques sans évoquer le sujet – et, par conséquent, les institutions dont il dépend– qui applique ces techniques. Nous essaierons néanmoins de faire apparaître certains éléments contextualisés de logos didactique $[\theta_d/\Theta_d]$ par le biais des analyses qui suivent.

II. SAVOIR ENSEIGNE DANS LA CLASSE DE P1

Avant de procéder à l'analyse a posteriori du savoir enseigné par P1, nous allons préciser le contexte dans lequel se déroule le cours de la division euclidienne.

P1 fait son cours sur la division euclidienne lors de la quatrième séance d'arithmétique, devant 22 élèves (effectif habituel de la classe). Les trois premières séances ont porté sur :

- Propriétés de **N**, récurrence, multiples et diviseurs (première séance) ;
- Nombres premiers (deuxième séance) ;
- Exercices sur les nombres premiers et D.S. d'une heure sur les notions de divisibilité et nombres premiers (troisième séance).

La séance sur la division euclidienne débute par une vingtaine de minutes consacrée à la correction en classe du D.S. qui s'est tenu la semaine précédente. Une fois la correction terminée, P1 consacre près de quarante minutes au théorème de la division euclidienne. Elle passe ensuite une petite vingtaine de minutes à répondre individuellement aux questions des élèves sur leur copie et/ou leur calculatrice avant de demander à l'ensemble de la classe de chercher les exercices de la fiche sur la division euclidienne[136].

Déroulement séance	**Durée des parties**	**Parties de séance**
De 08h00 à 08h22	22 minutes	Correction du premier D.S. d'arithmétique.
De 08h22 à 09h00	38 minutes	Cours sur la division euclidienne (théorème et démonstration)
De 09h00 à 09h18	18 minutes	Passage dans les rangs pour des questions sur la correction du D.S. et retour sur les calculatrices et les parties entières.
De 09h18 à 10h00	42 minutes	Feuille d'exercices sur la division euclidienne.

Fig. 40 : Organisation de la séance sur la division euclidienne dans la classe de P1

Cette séance correspond au type de séances que nous avons désigné comme étant des « séances de cours » dans le chapitre C2. P1 sépare en effet de façon nette la partie cours de la séance, pendant laquelle elle assume l'entière responsabilité de l'avancée de la leçon, de la partie exercices durant laquelle les élèves travaillent en autonomie pendant qu'elle passe dans les rangs pour répondre aux questions.

Rappelons que l'analyse du savoir apprêté (chapitre C3) a montré la cohérence des choix de P1 à propos de la démonstration de la division euclidienne. Elle choisit de démontrer ce théorème par une preuve en deux étapes : la preuve de l'existence du couple (q,r) dans un premier temps puis la preuve de son unicité. Pour la démonstration de l'existence, elle s'appuie sur les propriétés des parties non vides de **N** qu'elle a introduites dans sa première séance d'arithmétique et démontre l'existence de q et r par disjonction de cas sur le signe de a. Elle choisit de démontrer l'unicité à l'aide d'un raisonnement par l'absurde (alors que l'utilisation des propriétés des parties non vides de **N** aurait pu lui permettre de prouver simultanément l'existence et l'unicité de q et de r). Dans le cadre de ce raisonnement, elle se sert d'une technique spécifique à l'arithmétique pour montrer que r–r'=0 (r–r' étant un multiple de b strictement compris entre –b et b, r–r' est forcément nul).

Rajoutons également que P1 a prévu de s'appuyer sur trois schémas pour présenter la démonstration aux élèves.

II.1 Analyse a posteriori du cours de P1

Nous avons reproduit ci-dessous les trois schémas auxquels P1 fait appel pendant la démonstration du théorème de la division euclidienne. Ces schémas sont numérotés pour pouvoir indiquer, dans la colonne « remarques » de présentation du protocole, de quel schéma P1 est en train de parler.

[136] Remarque : les élèves qui n'avaient pas de question à poser à l'enseignante disposaient de la fiche sur la division euclidienne et pouvaient commencer à chercher les exercices.

Schéma 1 :

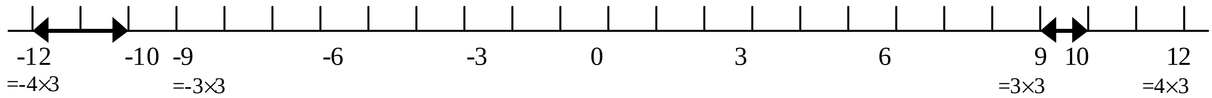


Schéma 2 :

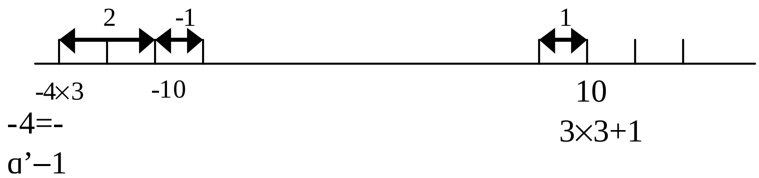
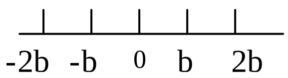


Schéma 3 :



II.2 Introduction et énonciation du théorème (lignes 1 à 37 ; 12 minutes)

a) Lignes 1 à 7 (3 minutes)

Lignes 1 à 2 :

Lignes	Discours	Remarques
1	**P** : Bon ce que je propose c'est que je fais le cours sur la division et tout à l'heure si vous avez des questions sur des trucs que j'ai marqués dans vos copies, j'y répondrai en passant dans les rangs.	8h22 (Brouhaha dans la classe)
2	**P** : Aujourd'hui on va faire la théorie de la division qui est un cours qui est pas très long et après quoi on commencera des exercices. Par contre c'est un cours qui va prendre donc 20 minutes je pense, il y a 20 minutes de cours mais il y a 2h30-3h d'exercices sur les notions de division. C-à-d que le problème c'est qu'il y a énormément de démarches.	

P1 vient de terminer la correction du premier D.S. d'arithmétique. Elle veut maintenant passer au cours sur la division euclidienne. Elle est donc confrontée au type de tâche didactique Td_1 : « Planter le décor dans lequel s'inscrit le théorème ». Pour l'accomplir, elle va utiliser successivement plusieurs techniques.
Elle commence, ici, par le situer par rapport à la structure du cours (τd_2^1), en ajoutant des indications relatives au temps prévu pour chacune des parties de l'OM_{div} locale. Elle souligne que ce cours va prendre 20 minutes. Or il en prend presque le double comme nous l'avons vu ci-dessus. On constate ici une mauvaise anticipation de la part de P1 du temps que va lui prendre la démonstration. Elle indique ensuite que le temps consacré aux exercices sur la division euclidienne sera relativement long du fait du nombre important de « démarches » à voir sur la division euclidienne. En effet, l'analyse de l'OM_{div} locale apprêté par P1 a montré la diversité des types de tâches rencontrés dans la fiche d'exercices sur la division euclidienne.

Soulignons ici que l'on voit explicitement la centration de P1 sur la partie praxis de l'activité mathématique. En début de cours, elle fait déjà allusion aux exercices qui sont pour elle ce qui est le plus important.

Lignes 3 à 5 :

3	**P** : Je pense que vous n'allez pas apprendre grand chose de nouveau sur les nombres positifs. C-à-d que sur les nombres positifs il s'agit de faire la théorie de la division de l'école primaire, d'expliquer que je sais pas que 12 c'est divisé par 5, 2 fois 5 plus 2 ou des choses analogues.	
4	**P** : Donc pour les nombres positifs, vous n'allez rien apprendre de bien nouveau si ce n'est la seule différence c'est qu'on va faire la théorie de la division c-à-d qu'à partir des propriétés de N qu'on a données le premier jour que toute partie non vide de grand N admet un plus petit élément on va prouver l'existence et l'unicité du quotient et du reste dans la division.	
5	**P** : Par contre il y a un petit problème pour diviser un nombre négatif par un nombre positif parce que là il y a des petites choses à apprendre. Les critères sur les restes c'est qu'on impose des restes positifs et donc il y a un problème du côté des nombres négatifs.	

Elle continue à « Planter le décor dans lequel s'inscrit le théorème » en utilisant maintenant les techniques τd_4^1 « Situer le théorème par rapport à des connaissances antérieures (à quelles notions déjà vues précédemment se rattache ce théorème ?) » et τd_3^1 « Situer le théorème par rapport à la progression du cours (quel lien avec ce qui a déjà été fait dans les séances précédentes ?) ».

Elle explique donc tout d'abord l'objectif de ce cours en le situant par rapport à la division vue à l'école primaire en s'appuyant sur un exemple numérique. Elle indique ensuite quelles seront les nouveautés introduites par ce cours sur cette notion que les élèves connaissent déjà. Ces nouveautés portent sur le bloc technologico-théorique permettant de justifier la technique de division utilisée depuis l'école primaire. P1 explique alors comment la démonstration qu'elle a choisie s'inscrit dans le cadre du cours d'arithmétique.

Par ailleurs, pendant qu'elle plante « le décor dans lequel s'inscrit le théorème », P1 commence déjà à répondre au type de tâche Td_3 (« Introduire la démonstration ») en indiquant que ce sera une démonstration d'existence et d'unicité mais fait également des commentaires sur le théorème (« on impose des restes positifs ») alors même qu'elle ne l'a pas encore énoncé.

Ligne 6 :

6	**P** : Donc ce que je vous propose c'est qu'on va faire une introduction à partir des multiples. Je vais vous le montrer sur un nombre positif et un nombre négatif et après on fera la démonstration théorique.	(Brouhaha dans la classe)

P1 dévolue aux élèves le mode de fonctionnement didactique qu'elle a choisi d'adopter pour faire cette démonstration. Elle « propose » de faire tourner dans un premier temps la démonstration sur un exemple numérique puis de s'appuyer sur celui-ci pour faire la démonstration « théorique ». P1 est encore une fois en train de répondre au type de tâche Td_3 (« Introduire la démonstration ») alors qu'elle n'a toujours pas énoncé le théorème. Cette façon d'agir perturbe les élèves, comme le montre le brouhaha qui commence à apparaître dans la classe. En effet, nous pouvons faire l'hypothèse que pour les élèves, la division est une technique opératoire (qu'ils ont d'ailleurs peut-être oubliée) et non un théorème qui nécessiterait une démonstration. Le discours de P1 ne paraît donc pas adapté pour pouvoir capter l'attention des élèves. Il semble donc que ces derniers attendent d'avoir le théorème pour s'intéresser aux interventions de P1 sur la démonstration de ce dernier.

<u>Ligne 7</u> :

7	**P** : Donc le cours d'aujourd'hui c'est ce qu'on appelle la division, on précise souvent que c'est la division euclidienne à cause des livres d'Euclide et de la théorie qu'il a développée. Dans la pratique division tout court c'est ce que je dirai souvent.	(Brouhaha dans la classe)

P1 continue cependant à répondre à Td_1 « Planter le décor dans lequel s'inscrit le théorème ». Elle situe maintenant le théorème dans le cadre de l'histoire des mathématiques en expliquant d'où vient le nom « division euclidienne ». Les élèves sont toujours dissipés.

b) Lignes 8 à 13 (1 minute)

<u>Lignes 8 à 10</u> :

8	**P** : Alors y'a … Je vais commencer par théorème et définition, je vais les faire tourner avant de les démontrer.	8h25 (Classe plus calme)
9	**P** : Au départ on prend un entier donc vous faites bien attention aux hypothèses. a est un entier relatif par contre, ce par quoi je divise, vous savez que vous n'avez pas le droit de diviser par 0 et pour des histoires de convention on va systématiquement diviser par des nombres positifs. Donc a appartient à Z et b appartient à N étoile. Et on va démontrer qu'il existe un couple q r unique avec q dans Z, r dans N est le reste	(P écrit au tableau) *a Î**Z**, b Î**N***. Il existe un couple (q,r) unique avec q Î**Z**, r Î**N***
10	… (*Silence*)	

Finalement, 3 minutes après le début du cours, P1 énonce le théorème de la division euclidienne et les élèves redeviennent attentifs. Pour l'énoncer, P1 utilise la technique τd_7^2 « Enoncer le théorème en faisant des remarques ou des commentaires sur les hypothèses de celui-ci ou sur la conclusion ». Elle explique pourquoi b doit être choisi appartenant à $\mathbf{N}^*$.

Cependant, P1 n'énonce pas le théorème en une seule fois. Elle s'arrête après avoir fini ses commentaires sur l'appartenance de a, b, q et r à **N**, $\mathbf{N}^*$ ou **Z**.

<u>Lignes 11à 13</u> :

11	**P** : Bon quand vous faites… on prend un exemple simple, quand vous faites une division par 5 vous savez que le reste d'une division par 5 c'est 0, 1, 2, 3 ou 4.	
12	**P** : Donc de manière générale, si je divise par b, le reste, sa propriété ça va être qu'il peut être nul mais par contre il est strictement inférieur à b et on écrit a=bq+r.	(P écrit au tableau) *et 0£ r<b tel que a=bq+r*
13	**P** : Bon c'est ce que vous écrivez quand vous écrivez 10 divisé par 3 ça fait 3 fois 3 plus 1. Le quotient c'est 3 et le reste c'est 1.	

Avant d'écrire l'égalité et l'inégalité de le division euclidienne, P1 illustre la propriété du reste d'une division euclidienne en prenant l'exemple de la division par 5. Elle généralise ensuite cette propriété pour écrire l'inégalité portant sur le reste puis l'égalité de la division euclidienne.

Elle illustre enfin cette égalité sur un exemple numérique : la division de 10 par 3.

Il semble que le fait de faire des allers-retours entre exemple numérique et théorie soit une technique didactique que P1 utilise couramment. En effet, elle avait indiqué aux élèves qu'elle allait l'employer pour mener la démonstration de la division euclidienne mais elle l'utilise dès le début du cours (que cela soit pour introduire le théorème ou pour l'énoncer).

c) Lignes 14 à 18 (1 minute)

<u>Lignes 14 à 18</u> :

14	**P** : Alors il y a des problèmes de vocabulaire là-dessus, il faut que je vérifie que vous soyez au point. En général, quotient et reste c'est du vocabulaire que vous possédez. a et b est-ce que vous connaissez leur nom en terme de vocabulaire ?	8h26
15	**Els** : …	
16	**P** : Bon b c'est le diviseur et a ça porte un nom	
17	…	(Des élèves parlent entre eux)
18	**P** : a ça s'appelle le dividende, b ça s'appelle le diviseur, c'est la division de a par b, q on l'appelle par cette lettre là, on prend les premières lettres donc r c'est le reste.	(P écrit au tableau) *a=dividende b=diviseur q=quotient, r=reste.*

Une fois le théorème énoncé, P1 fait des rappels de vocabulaire sur la division euclidienne. P1 interroge les élèves mais ceux-ci ne répondent pas. P1 n'essaie pas de leur faire trouver la réponse, elle leur donne le vocabulaire tout en l'écrivant au tableau.

d) Lignes 19 à 24 (3 minutes)

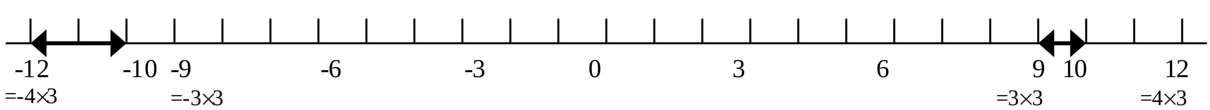
<u>Lignes 19 à 20</u> :

19	**P** : Bon ça fait partie des théorèmes qu'on doit démontrer et comme je trouve la démonstration relativement délicate on va commencer par expliquer sur un axe avec des nombres positifs et des nombres négatifs.	8h27
20	**P** : J'ai besoin qu'en gros vous alliez de -15 à 15 que vous preniez des petites unités. Et je voudrais montrer sur un axe 10 divisé par 3 qui pose pas de problème et mettons -10 divisé par 3 car si vous comprenez l'idée sur un exemple numérique vous allez après suivre la démonstration théorique.	(Voir schéma 1)

P1 se retrouve maintenant face au type de tâche « Introduire la démonstration ». Comme elle l'avait déjà mentionné, elle va d'abord faire tourner la démonstration sur un exemple (τd_5^3).

La remarque de P1 sur ces choix (ligne 19) montre qu'elle anticipe les difficultés à venir de la démonstration. Elle se justifie toujours par rapport à ce qui va se passer.

Schéma 1 :



<u>Lignes 21 à 24</u> :

21	**P** : Pourquoi est-ce que vous dites que 10 c'est 3 fois 3 plus 1 et pas autre chose ? C'est parce qu'en fait 10 on essaie de le placer par rapport aux multiples de 3. C-à-d si sur l'axe ici je représente les multiples de 3 c'est 0, 3, 6, 9, 12 et puis du côté des négatifs, les multiples de 3 c'est -3, -6, -9, -12. Donc si je place 10 il va être par là et si je place -10 il va être ici.	(Voir schéma 1)
22	**P** : Bon quand vous apprenez à l'école primaire à faire la division, pourquoi est-ce qu'on dit que 10 le quotient c'est 3? C'est parce qu'en fait si vous prenez 3 fois 3 c'est encore plus petit que 10 mais quand vous prenez 4 fois 3 qui fait 12, ça dépasse.	
23	**P** : Et la démonstration qu'on va faire elle va être basée sur cette idée là, c-à-d que le nombre 10 ici, il est coincé entre 3 fois 3, il pourrait être éventuellement égal s'il y avait un reste nul et il est plus petit que 4 fois 3. Ca ça veut dire que le quotient va être 3.	
24	**P** : Et le reste, où est-ce qu'on le voit ? C-à-d que 10 divisé par 3, si j'écris la définition d'au-dessus, 10 c'est 3 fois 3 plus 1 c-à-d que le reste c'est 1 ce dont j'ai besoin donc pour tout à l'heure c'est arriver à lire le reste sur la différence avec le multiple de 3 qui précède.	(Voir schéma 1) (P écrit au tableau) *10 divisé par 3* *10=3´3+1*

P1 utilise le schéma 1 pour ré-expliquer aux élèves le principe de la division de l'école primaire dans le cadre d'une problématique centrée sur les multiples du diviseur. Elle pose des questions à la classe (« pourquoi est-ce qu'on dit que là, le quotient c'est trois ? » et « Et le reste, où est-ce qu'on le voit ? ») mais ce sont des questions rhétoriques qui n'attendent pas de réponse. Ces questions peuvent avoir plusieurs fonctions didactiques :

- Elles permettent à P1 d'exposer directement son questionnement afin que les élèves puissent avoir des repères pour suivre sa démarche ;
- Elles peuvent jouer le rôle d'une technique didactique permettant de gérer l'avancée du cours ;
- Nous pensons également que cette technique permet à P1 de « pallier » l'absence de participation des élèves, absence voulue de sa part, en endossant elle-même le rôle d'un élève. En effet, les applications techniques ou numériques sont généralement représentatives du topos de l'élève tandis que les théorèmes ou démonstrations sont plutôt du domaine de l'enseignant. P1, dans cette démonstration, joue sur les deux tableaux.

- **Lignes 25 à 30 (2 minutes)**

<u>Lignes 25 à 26</u> :

25	**P** : Donc ça, ça va être la démonstration.	8h30
26	**P** : Donc pour les nombres positifs je dirai qu'il n'y a pas de nouveauté, ce qui m'intéresse juste, que vous ayez compris en préliminaire, c'est que le quotient on va le trouver par l'inégalité sur … en plaçant le nombre par rapport aux multiples de 3.	

P1 fait le bilan du travail qu'elle vient d'effectuer sur 10 divisé par 3 en pointant l'élément essentiel sur lequel reposera la démonstration à venir : la place de 10 par rapport aux multiples de 3. Cependant, le fait que P1 reprenne sa phrase « le quotient on va le trouver par l'inégalité sur … en plaçant le nombre par rapport aux multiples de 3 » est symptomatique de l'attitude de P1 que nous avons relevée des lignes 19 à 20. P1 est toujours en tension avec ce qu'elle est en train de faire et ce qu'elle a prévu de faire par la suite. Dans son bilan, elle se reprend car elle commence à fournir une explication dans le cadre théorique (l'inégalité centrale dans la démonstration : $qb \leq a < (q+1)b$) alors qu'elle se situe encore dans le cadre de l'application numérique.

<u>Lignes 27 à 29</u> :

27	**P** : Alors pour les nombres négatifs, il y a juste une histoire de convention. La convention importante c'est que par convention le reste est un nombre positif.	
28	**P** : Donc -10, donc le raisonnement est le même, -10 il est entre -4 fois 3 et -3 fois 3. Mais si je prenais ce nombre là, -9, si je veux aller de -9 à -10 le problème c'est qu'il faut soustraire -a ou rajouter enfin soustraire a ou rajouter -a. Donc par définition, la division de -10 par 3 on va écrire que -10 c'est plutôt -4 par 3 plus quelque chose et donc ce quelque chose ce qu'on trouve là c-à-d c'est le +2.	(Voir schéma 1)
29	**P** : Donc la division ça va s'écrire -10 égal -4 fois 3 plus 2 donc voilà le quotient et voilà le reste.	(P écrit au tableau) *-10 divisé par 3* *-10=-4´3+2* ~~*-10=-3´3-1*~~

Après avoir traité le cas 10 divisé par 3, P1 passe au cas –10 divisé par 3. Elle suit le même ordre que celui choisi dans la démonstration ($a \geq 0$ puis $a < 0$).
Elle indique auparavant le point qui va permettre de déterminer si l'égalité trouvée est bien une égalité de division euclidienne : « la convention sur le reste ». Elle écrit d'ailleurs au tableau les deux égalités que l'on peut obtenir, suivant que l'on choisisse –3 ou –4 comme quotient et barre celle qui ne vérifie pas la condition sur le reste. Ce choix d'écrire les deux égalités permet de montrer aux élèves qu'il existe différentes égalités qui peuvent avoir la forme d'une égalité de division euclidienne mais que seule celle qui vérifie la condition $0 \leq r < b$ représente une égalité de division euclidienne [137].

<u>Ligne 30</u> :

30	**P** : Ca c'est un exemple numérique pour vous expliquer comment on va faire cette démonstration.	

P1 explique à nouveau le mode de fonctionnement qu'elle a décidé d'adopter pour cette démonstration : travailler sur des exemples numériques permettant de comprendre la démonstration délicate.

- **Lignes 31 à 37 (2 minutes)**

[137] Nous verrons dans l'analyse du protocole de P2 que les élèves ont des difficultés à faire intervenir la condition portant sur le reste pour vérifier si une égalité est bien une égalité de division euclidienne. Le fait qu'une égalité soit de la forme $a=bq+\alpha$ leur suffit pour affirmer que c'est une égalité de division euclidienne. Mais P2 gère cette difficulté d'une façon totalement différente de P1.

<u>Lignes 31 à 33</u> :

31	**P** : La démonstration va être faite en 2 temps.	8h32
32	**P** : Premier temps on va pas s'occuper du cas où a est négatif et on va faire donc en théorie cette démonstration là en prenant un nombre positif et en comparant à des multiples.	
33	**P** : Dans un deuxième temps, on se servira de la démonstration qu'on a faite du côté positif pour passer du côté négatif.	

10 minutes après le début du cours, P1 aborde la démonstration. Rappelons qu'elle avait envisagé de passer 20 minutes sur celle-ci. Or, la moitié du temps prévu vient de s'écouler et elle n'a pas encore commencé la démonstration théorique. Nous allons voir si cela la conduit à accélérer son cours ou non.

P1 doit de nouveau résoudre le type de tâche « Introduire la démonstration ». Elle va maintenant « Donner la structure de la démonstration » (τd_2^3). Elle indique que la démonstration va se faire en deux temps : le cas $a\geq 0$ puis le cas $a<0$. Or, au niveau du projet de cours de P1, cette distinction de cas n'intervient que dans un second temps, après la distinction faite entre la démonstration de l'existence et celle de l'unicité.
Deux hypothèses permettent d'expliquer cet oubli de P1 :

- Soit elle est toujours dans une dynamique d'anticipation qui la conduit à « brûler » des étapes ;
- Soit elle est encore « accrochée » à l'exemple numérique qu'elle vient d'exposer et sur lequel elle a introduit la distinction des cas $a\geq 0$ et $a<0$ sans évoquer explicitement la question de l'existence et de l'unicité du couple (q,r).

<u>Lignes 34 à 36</u> :

34	**P** : Et ce qui m'intéresse c'est l'observation de ce qui s'est passé ici entre le reste 1 et le reste 2. La propriété que vous avez sur cet exemple là et qu'on aura sur les lettres tout à l'heure c'est que 2 plus 1 ici ça redonne 3 qui est le diviseur.	
35	**P** : Donc il y aura un petit problème pour passer des nombres positifs aux nombres négatifs.	
36	**P** : Pour les nombres négatifs il faut bien que vous ayez compris qu'il faut absolument pas oublier la condition que r est positif ou nul. Il ne faut pas me proposer comme division de -10 la division c'est pas -3 fois 3 moins 1 car ça, ça donnerait un r négatif hein.	

Avant de commencer la démonstration, P1 fait des mises en garde sur les difficultés à venir dans la démonstration du cas où le dividende est négatif. Elle insiste à nouveau sur la condition portant sur le reste.
L'importance que semblent revêtir pour P1 les difficultés liées à la division des nombres négatifs nous permet de faire l'hypothèse que P1 estime que la partie la plus difficile de son projet de démonstration est non pas la démonstration de l'existence de q[138] en s'appuyant sur les propriétés des parties non vides de **N**, ni le raisonnement par l'absurde et la technique particulière pour montrer l'unicité de r mais la preuve de l'existence de r dans le cas $a<0$.

[138] Alors que cette démonstration de type ensembliste est nouvelle pour les élèves.

<u>Ligne 37</u> :

37	**P** : Bon dans la pratique y'a au moins 90% des exercices qui portent sur la division dans grand N c-à-d que le détour par Z c'est en fait un détour pour le post-bac parce que c'est là-dessus que portent les structures en post-bac. Au niveau de la terminale presque tous les exercices portent sur des divisions dans N et pas dans Z. On fera très peu d'exercices sur ces idées là.	

P1 justifie l'importance qu'elle accorde au cas a<0 par le post-bac. En effet, comment sinon justifier ses choix alors qu'en spécialité mathématique, l'essentiel des exercices relatifs à la division euclidienne sont donnés dans **N**.

Notons que P1 fait de nouveau allusion aux exercices à venir sur la division euclidienne.

- **Conclusion de cette partie**

Dès le début du cours, on constate que P1 est en tension permanente entre les objectifs de son projet et son déroulement effectif en classe. Par conséquent, elle anticipe les difficultés à venir en s'appuyant sur un exemple numérique pour expliquer la démonstration qu'elle fera plus tard. Cependant, les difficultés qu'elle prévoit, notamment la difficulté du cas a<0 dans la démonstration de l'existence, l'empêchent d'avancer dans son cours. Elle revient toujours à ces difficultés et à l'exemple numérique qui lui permet de les identifier.
Cet effet est également induit par la centration sur la partie praxis de l'activité mathématique. Ce sont tout autant les exercices à venir que la démonstration que P1 anticipe.

II.3 Existence du couple (q,r) (lignes 38 à 107 ; 19 minutes)

a) Lignes 38 à 40 (1 minute)

<u>Lignes 38 à 40</u> :

38	**P** : Bon alors ceci étant dit donc on va se lancer dans la démonstration.	8h34
39	… (*Un surveillant vient chercher la feuille d'absence*)	
40	**P** : Bon donc la démonstration on va faire une démonstration en 2 cas. Donc premier cas on prend a dans N c-à-d l'analogue du 10. Pour se repérer sur cette démonstration là…	(P écrit au tableau) *<u>Dem</u> : <u>Existence</u>* *1er cas : a Î**N***

Ligne 38, P1 décide de commencer la démonstration (tout comme elle avait voulu le faire ligne 25, ligne 30 et ligne 31).
P1 indique à nouveau la structure de la démonstration qui va être faite en deux cas et écrit en même temps au tableau :

« Dém : Existence
1^{er} cas : a∈**N** »

b) Ligne 41 (<1 minute)

<u>Ligne 41</u> :

41	**P** : Bon donc le théorème se fera en 2 temps, quand je dis qu'il existe et qu'il est unique j'ai 2 choses à démontrer qui est l'existence et l'unicité. Donc en fait on va commencer par le problème de l'existence et quand on aura fait le problème de l'existence on s'intéressera au problème de l'unicité.	8h35

Ce qu'elle vient d'écrire au tableau permet à P1 de se rendre compte qu'elle a oublié d'indiquer la structure principale de la démonstration qui est séparée en deux temps, la démonstration de l'existence puis celle de l'unicité.

c) Lignes 42 à 49 (>2 minutes)

<u>Ligne 42</u> :

42	**P** : Alors pour faire cette démonstration là, on va considérer l'ensemble des entiers naturels tel que n fois b soit plus grand que a.	8h35 (P écrit au tableau) *E={n Î**N**, nb>a}*

P1 introduit l'ensemble **E**={n∈**N**, nb>a}, ensemble des multiples de b strictement supérieurs à a.

<u>Lignes 43 à 44</u> :

43	**P** : Alors on va toujours travailler en temps réel à côté pour que vous compreniez ce qu'on est en train de faire.	
44	**P** : Quand je divise 10 par 3, j'ai des multiples, n fois b c'est les multiples de b. Donc si je regarde l'ensemble des multiples de 3 ici, j'ai ceux qui sont plus grands que 10 et ça démarre à 12 donc ici, cet ensemble là, sur cet exemple là c'est en fait 4, 5, 6, 7… hein le premier multiple qui dépasse 10 c'est 3 fois 4 c-à-d quand n vaut 4. Ca ça va nous permettre de dire que cet ensemble là donc c'est 12, 15 sur l'exemple numérique, c'est un ensemble non vide de grand N.	

P1 a alors recours au schéma 1 pour représenter l'ensemble **E** et montrer que la propriété qu'elle va établir (cet ensemble est non vide) est vérifiée sur cet exemple.

<u>Lignes 45 à 47</u> :

45	**P** : Bon pour expliquer qu'il est non vide on va utiliser un argument sur les limites.	
46	**P** : Si n est très grand, n fois b tend vers l'infini et donc va finir par être plus grand que a quelque soit la valeur de a. C-à-d que si je prends a égal un million peut-être qu'il faudra que j'aille loin mais ce nombre là existe toujours.	
47	**P** : Donc ça permettra de travailler sur ce nombre là.	

P1 revient à la démonstration « théorique » et prouve que **E** est non vide en utilisant un « argument sur les limites », plus familier aux élèves que la propriété d'Archimède, qui est pourtant sous-jacente dans la question des limites infinies.

<u>Lignes 48 à 49</u> :

48	**P** : Celui-là sera le plus petit de ceux qui seront plus grands que 10. Ca entraînera par conséquence sur cet exemple là que 3 fois 3 c’est celui qui est juste avant sera plus petit que 10 et ça permettra de coincer ce 10 entre deux multiples successifs de 3 et d’expliquer que la différence qui reste ici est bien plus petite que le 3 qui est là.	

49	**P** : Donc ce qu’on va faire dans la démonstration théorique c’est la même chose simplement on travaille sur des lettres.	

De nouveau, elle utilise la même technique didactique : elle se reporte au schéma 1 pour mettre en évidence les éléments dont elle va ensuite prouver l’existence. Elle montre ici aux élèves qu’on peut encadrer a par deux multiples consécutifs de b (qui deviendra $qb \leq a < (q+1)b$ dans la démonstration) et que parmi ces multiples, le plus grand, $12=3\times4$ est dans E (4 joue le rôle de Q, plus petit élément de **E**) et le plus petit, $9=3\times3$, ne l’est pas (3 joue le rôle de $q=Q-1$).
On constate qu’au delà de faire appel à un exemple, l’oralisation de la démonstration qui précède son écriture « formelle » est également une technique didactique très souvent employée par P1.

d) Lignes 50 à 53 (1 minute)

Lignes 50 à 53 :

50	**P** : Donc on commence par dire que l’ensemble E est un ensemble non vide parce que limite quand n tend vers plus l’infini de nb c’est plus l’infini donc pour n assez grand, l’entier n appartient à E.	8h38 (P écrit au tableau) *E ¹ Æ car lim nb = + ¥* *Pour n assez grand, n Î E.*
51	**P** : En fait on peut même calculer hein.	
52	**P** : On peut donner soit cet argument là soit ça c’est pareil que n plus grand que a/b, a/b c’est une fraction et je prends n plus grand que la partie entière de a/b plus 1 et ça c’est réalisé ces conditions là hein.	(P écrit au tableau) *(ou n>a/b réalisé si n>partie entière de a/b+1)*
53	**P** : Donc vous avez 2 types d’argumentation possibles mais dans tous les cas on peut expliquer que l’ensemble E est non vide.	

Après avoir montré sur le schéma 1 les éléments pertinents pour la démonstration, P1 rédige la démonstration au tableau. Elle propose deux arguments pour montrer que **E** est non vide. L’argument sur les limites qu’elle a déjà utilisé lignes 45 à 47 (cf. propriété d’Archimède) et la partie entière de a/b.
Notons que l’utilisation de la partie entière à ce stade de la démonstration peut sembler surprenante. En effet, si P1 suppose que les élèves connaissent la partie entière et si elle utilise le fait que $E(a/b) \leq a/b < E(a/b)+1$, elle n’est plus obligée d’introduire l’ensemble **E** dans la démonstration. C’est sûrement la raison qui a poussé P1 à mettre cet argument entre parenthèses et à ne pas insister plus sur ce point.

e) Lignes 54 à 63 (2 minutes)

Lignes 54 à 57 :

54	**P** : Bon deuxième type d'argument qu'on va utiliser, c'est que cet ensemble là.	8h39
55	**P** : Donc E est un ensemble non vide de grand N, donc E admet un plus petit élément.	(P écrit au tableau) *E admet un plus petit élément Q*
56	**P** : Bon je l'appelle grand Q parce que pour l'instant c'est pas le quotient.	
57	**P** : Sur 10 le plus petit qui est multiple de 3 qui est plus grand que 10 c'est 4 donc c'est 1 de trop par rapport à ce dont j'ai besoin.	

P1 démontre que **E** admet un plus petit élément Q. Elle justifie cette notation en s'appuyant toujours sur le schéma 1.

Lignes 58 à 59 :

58	**P** : Bon il faut que j'explique que ce nombre là est non nul	
59	**P** : Pourquoi est-ce qu'il est non nul ? Parce que c'est un élément de E; Si je prends n=0 ici j'ai 0 fois b. J'ai supposé que a appartient à N donc j'ai pas 0 plus grand que a. Donc j'ai 0 qui n'appartient pas à E. Donc Q est différent de 0.	(P écrit au tableau) *0ÏE donc Q¹0*

P1 continue la démonstration en utilisant la technique didactique suivante : elle indique ce qu'elle veut obtenir puis met en œuvre les arguments pour l'obtenir. Cette technique lui permet de jalonner la démonstration par des étapes clairement identifiées pouvant servir de points de repère aux élèves qui doivent se contenter de suivre la démonstration de P1.
La question rhétorique qu'elle pose est également un moyen de donner une place fictive à l'élève dans l'avancée de la démonstration, comme nous l'avons vu précédemment.

Lignes 60 à 63 :

60	**P** : Bon si j'ai donc maintenant un entier naturel non nul, un entier naturel non nul je dis que je peux toujours l'écrire un entier plus un, l'entier restant naturel.	
61	**P** : Le plus petit entier naturel non nul c'est 1, 1 peut s'écrire 1+0. Bon s'ils sont plus grands, si vous prenez 3, 3 c'est 1+2.	
62	**P** : Donc je dis qu'il existe q, cette fois-ci il est petit, c'est celui que je veux, il existe petit q appartenant à grand N tel que grand Q égale q plus 1.	(P écrit au tableau) *Il existe qÎ**N** tel que Q=q+1*
63	**P** : Ca ça vient juste du fait que Q est non nul.	

P1 utilise la même technique que précédemment pour montrer qu'il existe q entier naturel tel que Q=q+1.

f) Lignes 64 à 70 (2 minutes)

Lignes 64 à 65 :

64	**P** : Bon et ce qu'il faut expliquer c'est l'histoire de l'encadrement entre les 2 multiples.	8h41
65	**P** : J'ai dit que par hypothèse on a donc q+1 appartient à l'ensemble grand E. Et comme q, grand Q c'est le plus petit élément de E, il faut comprendre que le petit q il appartient pas à E.	(P écrit au tableau) *(q+1) ÎE et qÏE*

Elle se sert également de cette technique pour indiquer qu'elle en est maintenant à la démonstration de l'encadrement de a par des multiples de b.

<u>Lignes 66 à 67</u> :

66	**P** : Hein, q plus 1, si je reprends mon dessin de tout à l'heure avec 10, j'ai 0, 3, 6, 9, 12 ici j'ai 4 fois 3 ici j'ai 3 fois 3 là j'ai 10. 4 fois 3 c'est le plus petit multiple de 3 plus grand que 10 ça veut donc dire que celui qui est avant, c-à-d le 3 fois 3 n'est pas dans E.	
67	**P** : Ca ça donne une chaîne d'inégalités qui est la même que le 9 inférieur à 10 inférieur à 12.	

P1 s'appuie de nouveau sur le schéma 1 pour expliquer la démonstration. Ce retour à l'exemple numérique est justifié ici du fait qu'elle avait justement introduit cet exemple avec comme objectif de montrer le rôle des multiples du diviseur dans une division euclidienne (lignes 6, 21 et 26).

<u>Lignes 68 à 70</u> :

68	**P** : Ca va me permettre d'écrire, j'ai pris comme définition nb plus grand que a pour être dans E. Donc je dis que si je remplace par q+1 j'ai (q+1)b qui est plus grand que a et que comme q n'appartient pas à E, qu'est-ce que ça veut dire que q n'appartient pas à E, ça veut dire que je n'ai pas qb plus grand que a.	
69	**P** : Si je n'ai pas qb plus grand que a, nier un plus grand ça veut dire que qb est inférieur ou égal à a.	
70	**P** : Bon ce qu'il faut comprendre c'est qu'on est arrivé exactement à la valeur de 1 c-à-d que si je mets à côté sur 10 et 12, j'ai exhibé le quotient en fait en disant que je suis entre 2 multiples consécutifs du diviseur.	(P écrit au tableau) *qb£ a<(q+1)b*

P1 revient ensuite à la démonstration pour traduire dans le langage utilisé dans la démonstration les propriétés mises en évidence sur le schéma 1 ainsi que pour les justifier.

g) Lignes 71 à 75 (2 minutes)

<u>Ligne 71</u> :

71	**P** : Bon, ce qui me reste à expliquer, donc ça c'est en fait exhiber le quotient, c'est que maintenant si je m'intéresse à a moins bq, quand j'écris a=bq+r, mon objectif, c'est pareil que r=a-bq, il faut que j'explique a-bq est bien un bon candidat pour être un reste de division euclidienne.	8h43 (P écrit au tableau) *a=bq+r Û r=a-bq*

P1 a de nouveau recours à la technique didactique «indiquer ce que l'on veut obtenir puis mettre en œuvre les arguments pour l'obtenir » pour poser le problème de l'existence du reste.

<u>Lignes 72 à 75</u> :

72	**P** : Il faut donc encadrer a-bq, c'est pas difficile, il faut juste oublier chaque fois un des côtés. Donc je fais a-bq.	
73	**P** : Dans un premier temps j'oublie ce côté-là, le qb là où le bq je le passe de l'autre côté. Donc a-bq il est bien positif ou nul.	

74	**P** : Après vous oubliez la première, on développe ça. Ca, ça fait qb plus b donc si je fais a-bq ça veut dire que je prendrais le premier terme du produit, il restera b ici donc il reste bien ce qu'il me faut c-à-d que j'ai bien démontré que a-bq est entre 0 et b.	(P écrit au tableau) *0£ a-bq<b*
75	**P** : Donc j'ai bien démontré que a=bq+r et avec un reste compris entre 0 et b	8h45 (P écrit au tableau) *Donc a=bq+r avec 0£ r<b*

P1 explique donc comme elle s'y prend pour vérifier si 0≤a–bq<b. L'abondance d'explications de P1 sur ses objectifs, ses démarches, ce qu'elle écrit au tableau, est due au fait qu'elle garde pour elle l'entière responsabilité de la démonstration. Mais comme c'est une enseignante et qu'elle doit faire en sorte que les élèves comprennent ce qui se passe en classe[139], elle est contrainte à détailler ce qu'elle fait. Le nombre important de répétitions peut être dû au fait que P1 n'interroge pas les élèves sur leur compréhension de la démonstration et qu'elle est donc obligée de décider sans indication si ses explications sont suffisantes ou non. Dans le doute, elle peut être amenée à se répéter, jusqu'au moment où elle estimera qu'un nombre suffisant d'élèves doit avoir compris ce qu'elle dit.
P1 explicite donc au mieux ce qu'elle a compris de la démonstration en essayant d'anticiper les difficultés des élèves.

h) Ligne 76

<u>Ligne 76</u> :

76	**P** : Donc ça, ça termine la démonstration de l'existence dans le cas où je divise un nombre positif par un nombre positif.	

23 minutes après le début du cours, P1 conclut sur la démonstration de l'existence dans le cas a≥0. Elle va aborder le point le plus difficile de la démonstration, selon elle : le cas a<0.

Ligne 37, avant le début de la démonstration, nous nous étions demandée si P1 allait accélérer son rythme du fait qu'elle semblait en retard par rapport à la durée prévue pour la démonstration[140]. Cela n'a pas été le cas.

i) Lignes 77 à 79 (<1 minute)

<u>Lignes 77 à 79</u> :

77	**P** : Bon le deuxième temps de la démonstration, c'est l'analogue du -10. Cette fois-ci il faut diviser un nombre négatif par un nombre positif.	8h45
78	**P** : Alors on va être relativement flemmard parce que comme on a déjà fait la démonstration du côté positif, on va simplement je veux dire que quand j'ai fait la division pour 10, pour passer à -10, -10 c'est l'opposé. C-à-d que si j'ai -10, si je prends -(-10) ça me redonne plus 10.	
79	**P** : Donc on va baser la démonstration sur cette idée là.	

[139] Nous pouvons identifier ceci comme une technologie didactique justifiant, pour P1, la technique didactique qu'elle utilise au cours de cette démonstration.
[140] Rappelons que P1 avait dit aux élève que la démonstration allait durer 20 minutes.

Pour introduire la démonstration du cas a<0, P1 s'appuie sur la mémoire de la classe en faisant appel à l'exemple de la division de –10 par 3 et introduit l'élément de départ de la démonstration (elle va poser la division euclidienne de –a par b pour se ramener au cas a≥0) en l'illustrant par un exemple.

j) Lignes 80 à 84 (2 minutes)

Lignes 80 à 81 :

80	**P** : Donc deuxième cas, a est un nombre négatif. Donc ce qu'on peut raconter c'est que dans ce cas là, moins a est un nombre positif.	8h45 (P écrit au tableau) 2nd cas : a< 0 (-a)>0
81	**P** : Donc on sait diviser, donc en utilisant le premier cas, moins a peut s'écrire sous la forme euh je vais l'appeler q prime car ça sera pas encore le bon reste. Moins a s'écrit bq' plus r' avec comme conditions donc que q'en fait appartient à **N** et que r', donc c'est un reste, il est compris entre 0 et b.	(P écrit au tableau) *En utilisant le 1er cas* *-a=bq'+r' avec q' Î**N** et 0£ r'<b*

P1 introduit maintenant les notations dont elle a besoin pour la démonstration, en se justifiant toujours par rapport à ce qui est à venir : le quotient de la division de –a par b est appelé q' car on verra plus tard que ce n'est pas le quotient de la division de a par b.

Lignes 82 à 84 :

82	**P** : Et il faut que je refasse le passage de moins a à a.	
83	**P** : Alors en fait là, il va y avoir 2 cas. Donc pour passer de a à -a ce qu'il est naturel de faire c'est de changer les signes de partout. On va garder le b car le b c'est le diviseur positif donc on va pas le changer on va plutôt écrire b fois (-q)' moins r'.	(P écrit au tableau) *a=b(-q')-r'* *-b< r'£0*
84	… (*Silence*)	

P1 continue à mener les calculs algébriques au tableau en justifiant ses choix (pourquoi quand elle obtient –(bq') elle choisit de faire porter le signe « – » par q' et non par b). Cependant, la remarque qu'elle fait au début de ligne 83 montre qu'elle anticipe de nouveau un peu trop par rapport à la suite de son projet. En effet, elle précise qu'il va y avoir deux cas (r'=0 et r'≠0) alors qu'elle n'a pas encore effectué le passage de a à –a.
Cela peut s'expliquer par le fait que cette « ruse » dans la démonstration n'est pas naturelle. Il serait beaucoup plus juste de faire d'un même coup la démonstration pour le cas a≥0 et a<0 en remplaçant l'argument sur la limite en +∞ par un argument en -∞ (voir analyse des choix de démonstration de P1 dans le chapitre précédent).

k) Lignes 85 à 88 (1 minute)

Lignes 85 à 88 :

85	**P** : Bon le problème qui surgit tout de suite c'est le problème qui surgit sur le passage du 10 au -10. Le problème c'est que l'encadrement qu'on a de r' maintenant n'est pas bon. C-à-d que enfin du moins r'. Si r' est un nombre entre 0 et b, -r' est un nombre qui lui est entre -b et 0.	8h48

86	**P** : Donc on va être obligé de subdiviser en 2 cas parce que si r' est 0 c'est fini.	

87	**P** : C-à-d qui si c'était le cas gentil, sur le dessin de tout à l'heure, si j'avais -9, -9 c'est -3 fois 3. Dans toutes les valeurs qui sont ici, la valeur qui reste admissible pour un reste est le cas où r' est nul.	
88	**P** : Donc si r' égale 0, j'ai a, moins a pardon, égale b fois moins q' plus 0 et ça c'est admissible pour une distance euh… pour le reste de la division. Ca voilà mon quotient et voilà le reste et c'est fini.	(P écrit au tableau) *a) <u>Si r'=0</u>, -a=b(-q')-0*

P1 arrive maintenant au point le plus délicat, selon elle, de sa démonstration : expliquer pourquoi il est nécessaire de séparer le cas r'=0 du cas r'≠0. Conformément à son projet initial, elle fait appel au schéma 1. Or, si P1 avait effectivement montré comment déterminer le reste de la division d'un nombre négatif (lignes 28 à 29) sur le schéma 1, elle ne l'avait pas utilisé pour illustrer le problème de l'encadrement du reste mais celui de l'encadrement du dividende par des multiples consécutifs du diviseur. Ceci permet d'expliquer en partie pourquoi, lorsque P1 commence à s'appuyer sur ce schéma pour parler du problème de l'encadrement du reste, elle revient rapidement à des arguments d'ordre théorique (ligne 85). Elle se trouve sans argument pour expliquer ce qui va suivre (la disjonction des cas r'=0 et r'≠0). Cela confirme la remarque que nous avons faite précédemment de traiter par des arguments identiques les cas a≥0 et a<0 au lieu de recourir à la « ruse » qui consiste à distinguer r'=0 de r'≠0.

Par un argument d'autorité, elle introduit la nécessité de cette disjonction de cas et traite le cas r'=0.
Elle débute de nouveau la démonstration en s'appuyant sur le schéma 1 mais elle change cette fois-ci la valeur numérique du dividende : alors que depuis le début de la séance a=10 ou a=-10, elle prend maintenant a=-9.

En fait, le schéma 1 n'est pas pertinent pour illustrer le cas où r'=0. La confusion des justifications[141] de P1 valide cette hypothèse. En effet, le schéma 1 permet de regarder les restes en terme de distance entre le dividende et les multiples du diviseur qui l'encadrent. Or ici, le dividende est un multiple du diviseur ; le problème de savoir quel reste il faut accepter comme reste de division euclidienne ne se pose pas.

Ce passage laisse penser que P1, au niveau de son projet, n'avait pas anticipé de difficultés pour le cas r'=0. Or, en réalisant son projet, le problème de la justification de la disjonction de cas sur les valeurs de r' se pose, de même que l'illustration de la démonstration du cas r'=0. Il semble qu'au niveau projet, l'attention de P1 se soit portée principalement sur le cas r'≠0.

l) Lignes 89 à 91 (<1 minute)

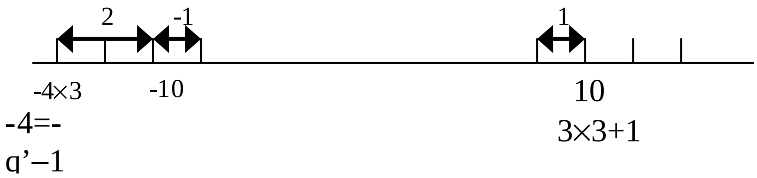
<u>Lignes 89 à 91</u> :

89	**P** : Bon le deuxième cas qui marche pas directement c'est si r' est différent de 0.	8h49
90	**P** : Alors si r' est non nul, il faut jouer au jeu auquel on a joué tout à l'heure, je vais refaire un petit dessin.	(Voir schéma 2)
91	**P** : Quand j'avais 10 ici, c'était 3 fois 3 + 1.	

[141] Ligne 86 : « la valeur qui reste admissible pour un reste est le cas où r' est nul. » et ligne 87 « a égale b fois – q' plus 0 et ça c'est admissible pour une distance euh… pour le reste de la division. »

P1 en est à la démonstration du cas r'≠0. Elle fait toujours appel à la mémoire de la classe et au schéma 1 pour introduire la démonstration mais elle décide de réaliser un second schéma. Elle avait peut-être prévu de faire ce deuxième schéma en préparant son cours. Mais il se peut également qu'elle décide d'en faire un nouveau à la suite du dysfonctionnement du déroulement de son projet auquel elle vient d'être confrontée.

Schéma 2 :



m) Lignes 92 à 96 (<1 minute)

<u>**Lignes 92 à 96**</u> **:**

92	**El1** : Madame, vous avez écrit -a=b(-q') enfin là je comprends pas.	8h49
93	**P** : J'ai divisé le nombre que j'ai divisé -a. Ah la ligne d'en dessous	
94	**El2** : non plus bas encore.	
95	**El3** : non c'est a	
96	**P** : Ah oui pardon, c'est a, merci.	(P corrige au tableau) *a) <u>Si r'=0</u>, a=b(-q')-0*

Alors qu'elle commence à expliquer le principe de la démonstration sur le schéma 2, P1 est interrompue par un élève. 27 minutes après le début du cours, c'est la première fois qu'un élève prend la parole. Cet élève, El_1, intervient pour indiquer à P1 qu'il ne comprend pas ce qu'elle vient d'écrire au tableau : -a=b(-q').
P1 interprète cette intervention comme un signe de non compréhension de la démarche qu'elle a adoptée et commence à lui répondre sur ce plan.
Deux élèves prennent alors la parole pour faire comprendre à P1 ce que le premier élève voulait dire. Un de ces élèves identifie même la cause de l'incompréhension de El_1, et lui répond tout en indiquant à P1 la faute qu'elle a commise dans la démonstration.

Cet échange bref (moins d'une minute) semble montrer que certains élèves au moins suivent vraiment la démonstration.

n) Lignes 97 à 107 (3 minutes)

<u>**Lignes 97 à 100**</u> **:**

97	**P** : Donc si donc r' est différent de 0 c'était le cas avec -10 tout à l'heure je reprends l'exemple numérique pour expliquer ce qu'il s'est passé.	8h50 (P écrit au tableau) *b) <u>Si r'¹0</u>*
98	**P** : Quand j'avais 10, ici qui était 3 fois 3 plus 1 je vous ai expliqué tout à l'heure que ici, par rapport à ce quotient là, en valeur absolue je suis obligée de passer à -4. C-à-d que ici vous aviez un cas où vous aviez ici q'=3 et si vous regardez ce que c'est qu'on est amené ici à mettre, le nombre -4 ici c'est du -q' moins1.	
99	**P** : Bon l'idée étant qu'en fait la différence que j'avais de 1 ici, si je veux une différence positive, là je vais me retrouver avec le -1 pour aller à -9.	

100	**P** : Mais si je veux la différence positive par rapport au précédent je suis amenée à prendre le +2.	

Suite à cette intervention, P1 reprend la démonstration du cas r'≠0 en la faisant d'abord tourner sur un exemple numérique.
P1 raisonne non plus en terme d'encadrement mais en terme de distance, ce qui semble plus adapté au schéma 2 qu'elle est en train de réaliser.

Toute la complexité de ce passage et de celui qui suit vient du choix non pertinent de traiter le cas –10 à partir du cas 10. Il aurait mieux valu, pour a<0, raisonner sur le plus petit élément de l'ensemble G={n∈ **Z**/nb>a} de façon analogue au cas a≥0. Il aurait cependant fallu, pour cela, introduire le théorème « toute partie non vide minorée de **Z** admet un plus petit élément ».

<u>Lignes 101 à 107</u> :

101	**P** : Donc ici, il y a un petit bricolage à faire parce que la valeur de -r' est un encadrement non admissible et est entre -b et 0.	
102	**P** : Si vous avez un nombre entre -b et 0, la manière de le passer dans l'intervalle 0 b c'est en fait de rajouter b. Et rajouter b ça se fait en enlevant b et en le rajoutant.	
103	**P** : Donc ce qu'on va faire c'est qu'on va dire que ce résultat là c'est pareil que b fois –q' moins b plus b moins r'. Quand je fais ça j'ai rien changé hein. J'ai introduit un moins b et j'ai remis un plus b.	(P écrit au tableau) $a=b(-q')-b+b-r'$ $=b(-q'-1)+b-r'$
104	**P** : Et cette fois ci donc ça va marcher. J'ai b facteur de moins q' moins 1 plus b moins r'.	
105	**P** : Mais cette fois ci, r' était différent de 0 ce qui veut dire que mon encadrement il est entre -b est 0.	(P écrit au tableau) *avec b-r' Î]0,b]*
106	**P** : Donc quand je rajoute b à cette inégalité là, mon b-r' il appartient à l'intervalle 0 exclu et b exclu puisque j'ai exclu le cas b égal 0. C-à-d que comme le nombre r' est entre moins b et 0 je rajoute b qui est un nombre positif donc ici j'obtiens 0 en borne inférieure ici j'obtiens b en borne supérieure. Donc ça c'est bien un résultat admissible pour la division.	
107	**P** : Et l'effet que ça a c'est le même que celui que ça avait du passage du 10 à -10, c'est qu'en fait le quotient on va prendre -4 au lieu du 3 du côté positif.	

Le passage du raisonnement en terme de distance à celui en terme d'encadrement est réalisé dans le cadre de la démonstration. Adoptant toujours la même technique didactique, P1 explique dans un premier temps la technique qu'elle va utiliser pour se ramener à un encadrement admissible pour un reste de division euclidienne puis la met en œuvre.

Une fois la démonstration terminée, P1 resitue sur le schéma 2 ce qui vient d'être conduit dans le cadre théorique.

o) Conclusion de cette partie

Lors de la démonstration de l'existence du couple (q,r), P1 semble à plusieurs reprises être en tension entre les difficultés à venir de la démonstration qu'elle anticipe et la gestion effective de la démonstration. Cela la conduit alors à introduire de façon prématurée certains points de la démonstration. Ces incidents sont révélateurs du poids du projet de cours de P1 sur sa réalisation effective en classe : elle doit se reprendre pour tenir compte des élèves et fournir les explications intermédiaires qui manquent.

En fait, depuis le début du cours, une grande partie de ces anticipations sont axées sur la démonstration du cas r'≠0 quand a<0 ; démonstration qui commence 28 minutes après le début du cours. Maintenant que cette démonstration est terminée, nous allons voir comment P1 va gérer la démonstration de l'unicité du couple (q,r).

II.4 Unicité du couple (q,r) (lignes 108 à 125 ; 5 minutes)

a) Lignes 108 à 109 (<1 minute)

Lignes 108 à 109 :

108	**P** : Bon la fin de la démonstration elle est plus facile, la partie théorique c'était plus celle là. Il reste à faire l'unicité et l'unicité elle est facile à démontrer.	8h53
109	**P** : Quand en arithmétique on veut démontrer qu'un résultat est unique, ce qu'on fait c'est qu'on suppose qu'on a 2 divisions et puis on démontre qu'en fait y'a … on arrivera à démontrer que les deux quotients sont égaux et que les deux restes sont égaux.	

P1 introduit la démonstration de l'unicité (tâche relevant de Td_3). Comme c'est la première fois que les élèves rencontrent ce type de démonstration en arithmétique, elle leur en indique la structure.

b) Lignes 110 à 115 (>1 minute)

Lignes 110 à 113 :

110	**P** : Donc ce qu'on suppose qu'il y a a priori deux divisions. C-à-d on pose a égale bq plus r égale aussi bq' plus r'.	8h53 (P écrit au tableau*)* *Unicité* *a=bq+r*
111	**P** : Euh, je vais pas prendre cette écriture là, j'ai peur que vous mélangiez. Euh, bs plus t, parce que ça n'a rien avoir avec le q' du deuxième cas.	
112	**P** : Et on suppose donc que les conditions que q et s sont des entiers relatifs et on suppose que r et t sont des candidats à être des restes c-à-d qu'ils sont tous les deux plus petits que b.	(P écrit au tableau) *=bs+t avec (q,s) ÎZ*^{2} *0£ r<b et 0£ t<b*
113	**P** : Et on essaie d'aboutir donc, à l'égalité, l'objectif c'est de montrer que q=s et t=r.	

Au moment d'introduire les deux divisions, elle se rend compte qu'elle utilise les mêmes notations que celles de la démonstration de l'existence de q et de r dans le cas a<0. Pour éviter tout risque de confusion, elle change de notation.
De même que précédemment, elle indique quel est l'objectif final de la démonstration.

Lignes 114 à 116 :

114	**P** : Donc pour faire ça on va regrouper les termes de même type de chaque côté d'un côté on met tous les termes en b et de l'autre côté on met tous les termes qui sont tout seuls et on oublie que c'est égal à a, ça servira en fait à rien.	

115	**P** : La seule chose qui servira c'est cette égalité là.	
116	**P** : Donc je dis que je passe les termes en b mettons dans le premier membre ça fait b facteur de q moins s égale t moins r.	8h55 (P écrit au tableau) *b(q-s)=t-r*

Avant de se lancer dans la transformation de l'équation bq+r=bs+t, P1 explique quelles manipulations algébriques elle va faire et dans quel but.

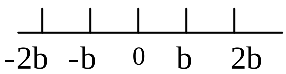
c) Lignes 116 à 124 (2 minutes)

<u>Lignes 117 à 119</u> :

117	**P** : Et on va raisonner juste sur les inégalités sur t-r et sur b fois (q-s). On va dire d'une part que b fois (q-s) c'est de manière lisible un multiple de b.	
118	**P** : Bon les multiples de b, c'est le même genre de dessin que tout à l'heure, on sait que c'est 0, b, 2b du côté positif et -b, -2b etc. du côté des négatifs.	(Voir schéma 3)
119	**P** : Et pour prouver qu'ils sont égaux, on va prouver que le seul multiple que ça peut être vu les encadrements c'est 0.	

P1 explique quel est l'élément pertinent à lire dans l'égalité b(q-s)=t-r obtenue : le fait que t-r soit un multiple de b. Elle introduit alors un nouveau schéma, le schéma 3, pour illustrer le raisonnement qu'elle va ensuite mettre en œuvre.

Schéma 3 :



<u>Lignes 120 à 124</u> :

120	**P** : Donc on va encadrer t-r. Donc t on le garde comme il est. Il nous faut un encadrement, pour voir un encadrement de t-r il nous faut un encadrement de -r.	(P écrit au tableau) *0£t<b*
121	**P** : Quand vous passez aux nombres négatifs, ça va vous changer les côtés, c-à-d que le minorant c'est moins b et le majorant c'est 0. Et ça, ça va permettre d'encadrer t moins r.	(P écrit au tableau) *-b< -r£0*
122	**P** : Alors il faut être un peu précis pour bien repérer que ici, dans chacun des deux côtés quand je fais des inégalités, chaque fois j'ai une des deux inégalités au moins qui est stricte. C-à-d que quand j'additionne membre à membre, si vous devez additionner des inégalités dont au moins une est stricte, je dis que l'inégalité à l'arrivée, ce sont des inégalités strictes.	(P écrit au tableau) *0£t<b* <u>*-b< -r£0*</u> *-b<t-r<b*
123	**P** : Et donc je me retrouve avec -b et b bon je dis qu'après c'est fini.	
124	**P** : On raconte que t-r est un multiple de b qui est strictement compris entre -b et b. Le seul multiple de b qui vérifie cette condition là c'est 0.	

Elle passe alors à la démonstration en détaillant toujours à l'avance les manipulations algébriques qu'elle compte effectuer tout en expliquant les raisons de celles-ci.

d) Ligne 125 (< 1 minute)

<u>Ligne 125</u> :

125	**P** : Et t moins r multiple de b d'où t égale r et quand j'ai t égale r je pense que vous me ferez le cadeau que j'ai fini. Si j'ai r égale t, ici je peux simplifier, j'ai bq égale bs. Et comme j'ai pas fait de division par 0 j'ai q égale s car b différent de 0.	8h57 (P écrit au tableau) *et (t-r) multiple de b d'où t=r ; d'où bq=bs ; q=s car b≠0*

Estimant les difficultés de la démonstration maintenant passées, P1 conclut rapidement sur l'unicité de q.

e) Conclusion de cette partie

P1 accélère nettement le rythme pour la démonstration de l'unicité du couple (q,r). Par ailleurs, elle fait beaucoup moins d'allers-retours entre le schéma et la démonstration, de même qu'il y a moins de répétition dans son discours. Cela confirme l'hypothèse selon laquelle son projet de cours et la difficulté centrale qu'elle avait prévue (la démonstration de l'existence de q et de r quand a<0) sont des contraintes fortes sur le déroulement effectif de la démonstration en classe. C'est d'ailleurs sur ce point qu'elle conclut la démonstration.

II. 5 Conclusion et organisation de la suite (lignes 126 à 131 ; 2 minutes)

a) Lignes 126 à 131 (2 minutes)

<u>Lignes 126 à 128</u> :

126	**P** : Donc on a démontré l'existence et l'unicité de la division.	
127	**P** : Donc la seule différence par rapport à ce que vous avez fait en primaire c'est qu'au lieu, en primaire en fait on apprend à compter à des petits, pour apprendre à diviser on fait exactement faire ça. On fait chercher les multiples au-dessus, c-à-d on dit que c'est trop petit ou c'est trop grand on peut aller plus loin pour trouver quel est le bon quotient. C-à-d qu'on apprend exactement sur ce même principe.	8h58
128	**P** : La seule vraie grosse nouveauté pour vous c'est la division par des nombres négatifs où il faut être un peu prudent, il faut bien avoir en tête que le reste est toujours par définition un nombre positif donc il faut aller en fait au multiple précédent pour pouvoir rajouter quelque chose de positif.	

P1 doit donc maintenant résoudre le type de tâches Td_5 : « Conclure la démonstration ». Elle fait alors le bilan de ce qui vient d'être démontré après 35 minutes de cours (τd_5[5]). Elle revient ensuite sur le lien entre la division de l'école primaire et la démonstration qu'elle a choisi de faire à travers le rôle des multiples du diviseur ce qui lui permet de conclure sur la nouveauté, pour elle, de cette démonstration : la division dans le cas où le dividende a est négatif.

<u>Lignes 129 à 131</u> :

129	**P** : Alors la division ça va donc nous occuper à peu près la séance d'aujourd'hui et je pense encore toute la séance de la prochaine fois.	8h59
130	**P** : Je vais peut-être plutôt vous donner des exercices sur la division aujourd'hui et la semaine prochaine j'ai besoin que tout le monde ait ses calculatrices car on parlera un peu des programmes avec éventuellement des feuilles, je vous les donnerai peut-être à rentrer avant pour tous ceux qui les ont pas et puis je ferai un commentaire au rétroprojecteur de quels sont les programmes et quels sont les programmes que vous pourrez rajouter.	
131	**P** : C-à-d que ceux parmi vous qui sont étourdis auront peut-être intérêt à se faire un programme qui donne par exemple la liste des diviseurs parce que ça permet des contrôles les jours où je laisse les machines pour ceux qui ont tendance à en oublier, on peut faire des programmes pas très difficiles.	(Sonnerie de 9h)

P1 prend ensuite une minute pour organiser la suite de la séance ainsi que la séance suivante. Cette organisation de la suite est d'autant plus importante qu'avec la fin de la démonstration, P1 s'apprête à « disparaître » et à laisser la place aux élèves.

b) Conclusion de cette partie

Le dispositif didactique que P1 utilise pour faire cours correspond à un cours magistral. Comme le souligne Chevallard (1997) :

> « Dans le cours magistral, le professeur présente aux « étudiants » la matière à étudier, c'est-à-dire la matière que, au sortir du cours, ceux-ci devront se mettre à étudier –et cela durant tout le temps qui courra jusqu'au prochain cours magistral. […] Au sortir du cours magistral, l'élève est donc censé avoir été préparé utilement à s'adonner, « en étude » ou ailleurs, à l'étude de la matière présentée et analysée par le professeur. […] Ainsi, lorsque le cours s'achève, l'étude peut commencer ; l'étude *stricto-sensu* commence. » (Ibid., pp. 33-34)

En fonctionnant avec une succession de cours magistraux et de fiches d'exercices, P1 crée dans sa classe les conditions permettant de réaliser non seulement le temps du cours magistral dont elle a l'entière responsabilité mais également le temps de l'étude « stricto-sensu » dans lequel les élèves agissent en « autonomie didactique, en même temps que [leur] responsabilité didactique devient presque totale » (Ibid., p. 35).

II.6 Conclusion : du savoir apprêté au savoir enseigné dans la classe de P1

Nous allons conclure l'analyse a posteriori du protocole de P1 en développant deux points : une analyse des techniques didactiques utilisées par P1 et une analyse du savoir enseigné pendant cette démonstration.

a) Techniques didactiques

Voici un tableau récapitulant les principales techniques didactiques mises en œuvre par P1 pour répondre aux types de tâches didactiques caractérisant l'activité d'un enseignant devant faire un cours :

Regroupement d'épisodes	**Temps**	**Lignes**	**Tâches et techniques didactiques**
Introduction du cours et énonciation du théorème	12 minutes	1 à 37	Td_1 « Planter le décor dans lequel s'inscrit le théorème de la division euclidienne » τd_2^1 : Situer par rapport à la structure du cours τd_3^1 : Situer par rapport à la progression du cours τd_4^1 : Situer par rapport à des connaissances antérieures Td_2 « Enoncer le théorème de la division euclidienne » τd_3^2 : Enoncer et écrire le théorème en même temps τd_7^2 : Enoncer le théorème en faisant des remarques ou des commentaires sur les hypothèses Td_3 « Introduire la démonstration de la division euclidienne » τd_2^3 : Donner la structure de la démonstration. τd_5^3 : Donner un exemple illustrant la démonstration.
Existence du couple (q,r)	19 minutes	38 à 107	Td_3 : « Introduire la démonstration de l'existence » τd_5^3 : Donner un exemple illustrant la démonstration. Td_4 : « Faire la démonstration de l'existence » τd_7^4 : Faire la démonstration en s'appuyant sur un exemple. τd_8^4 : Faire la démonstration en donnant des explications préalables sur la démarche adoptée. Td_5 : « Conclure la démonstration de l'existence » τd_1^5 : Passer à la suite sans commentaire particulier.
Unicité du couple (q,r)	5 minutes	108 à 125	Td_3 : « Introduire la démonstration de l'unicité » τd_2^3 : Donner la structure de la démonstration. Td_4 : « Faire la démonstration de l'unicité » τd_7^4 : Faire la démonstration en s'appuyant sur un exemple. τd_8^4 : Faire la démonstration en donnant des explications préalables sur la démarche adoptée. Td_5 : « Conclure la démonstration de l'unicité » τd_1^5 : Passer à la suite sans commentaire particulier.
Conclusion et organisation de la suite du cours	2 minutes	126 à 131	Td_5 : « Conclure la démonstration de la division euclidienne » τd_5^5 : Faire le bilan de ce que l'on a démontré.

Fig. 41 : Techniques didactiques utilisées par P1 au cours de la démonstration du théorème de la division euclidienne

Comme nous pouvons le voir, P1 met en œuvre un ensemble de techniques didactiques relativement restreint pour chacune des tâches qu'elle doit accomplir. Ces techniques sont stables tout au long du cours.
Un examen détaillé des techniques choisies par P1 montre qu'elle favorise les techniques didactiques lui permettant de structurer son cours au détriment de celles faisant intervenir les élèves. Cette description des « gestes professoraux » de P1 est conforme avec les conclusions de l'analyse du discours de P1 que nous avons présentée dans le chapitre C2.

Le mode de fonctionnement didactique de P1, décrit dans le chapitre C2, permet d'expliquer ce choix de techniques. Occupant tout l'espace par rapport au savoir, P1 doit malgré tout créer une place aux élèves et s'assurer de leur compréhension. Les techniques didactiques τd_7^4

(Faire la démonstration en s'appuyant sur un exemple) et τd_8^4 (Faire la démonstration en donnant des explications préalables sur la démarche adoptée) lui offrent une réponse à ce problème.

b) Savoir enseigné

P1 ne faisant pas intervenir les élèves dans le déroulement du cours sur la division euclidienne, elle évite l'apparition d'éventuelles perturbations pouvant la conduire à s'écarter de son projet initial. Il n'est donc pas étonnant de constater peu d'écarts, au niveau des contenus, entre le savoir enseigné et le savoir apprêté.

Un point cependant mérite d'être souligné. Tout au long de l'analyse précédente, nous avons vu que le déroulement du cours est fortement contraint par le projet mathématique de P1 ; en particulier du début du cours à la fin de la démonstration de l'existence du couple (q,r). Cette analyse a également permis de révéler des éléments supplémentaires sur l'apprêtage didactique de la démonstration de la division euclidienne fait par P1. Cette enseignante a identifié une difficulté principale dans cette démonstration : la preuve de l'existence du couple (q,r) dans le cas $a<0$. Du début de la séance jusqu'à la fin de la démonstration de l'existence – et même en conclusion générale sur la démonstration, ligne 128–, son activité en classe est guidée par son activité au niveau[142] +1. Elle met donc en place dès le début du cours des techniques lui permettant d'anticiper les difficultés à venir (elle avertit à plusieurs reprises les élèves sur le fait que la division avec les nombres négatifs est quelque chose de nouveau, elle insiste sur la détermination du reste de la division de –10 par 3 sur le schéma 1 etc.). Ainsi, elle met fortement en exergue le cas de la division euclidienne d'un nombre négatif.

Dans le cas de P1, le savoir enseigné est donc conforme au savoir apprêté avec cependant une mise en relief significative de la division euclidienne d'un nombre négatif et, par conséquent, de l'importance de l'inégalité sur le reste pour la détermination d'un reste admissible pour une division euclidienne.

III. SAVOIR ENSEIGNE DANS LA CLASSE DE P2

Avant d'entrer dans le détail de l'analyse du savoir enseigné, voici le contexte dans lequel a lieu la séance sur la division euclidienne.

Cette séance se déroule devant 11 élèves, ce qui représente l'effectif normal de cette classe. C'est la quatrième séance d'arithmétique depuis le début de l'année ; elle suit :

- la 1ère séance : multiples, diviseurs, propriétés de la relation « divise » ;
- la 2ème séance : critères de divisibilité, nombres premiers (définition, infinité) ;
- et la 3ème séance : nombres premiers (décomposition en produit de facteurs premiers).

[142] Il s'agit ici des niveaux d'activité du professeur de Margolinas (2002) et non des niveaux de détermination didactique de Chevallard (2002b)

Cette séance commence par une correction d'exercice de 10 minutes –exercice sur la somme des diviseurs d'un entier dont la correction avait débuté lors de la séance précédente. P2 fait ensuite 20 minutes de cours sur la division euclidienne puis consacre 26 minutes aux exercices d'application. La séance se termine par un D.S. d'une heure sur les diviseurs d'un entier naturel, la notion de divisibilité, les nombres premiers –c'est-à-dire sur le contenu des trois premières séances d'arithmétique.

Déroulement séance	Durée des parties	Parties de séance
De 10h à 10h11	11minutes	Correction d'un exercice sur la somme des diviseurs d'un entier commencé la semaine précédente.
De 10h11 à 10h31	20 minutes	Cours sur la division euclidienne (théorème et démonstration)
De 10h31 à 10h57	26 minutes	Recherche et correction des 2 exercices sur la division euclidienne
De 10h57 à 12h	Environ 1 heure	1er D.S. d'arithmétique sur les notions de divisibilité et de nombres premiers.

Fig. 42 : Organisation de la séance sur la division euclidienne dans la classe de P2

Rappelons que cette séance suit le mode de fonctionnement didactique général de P2. L'introduction d'une nouvelle notion –ici, la division euclidienne– se fait par un « cours » proprement dit, suivi d'« exercices d'application » qui sont inclus dans le cours de P2.

Rappelons également que P2 a choisi de démontrer le théorème de la division euclidienne en séparant la démonstration de l'existence du couple (q,r) de celle de son unicité. Pour prouver l'existence de q, elle admet le fait que a puisse être encadré par deux multiples consécutifs de b. Cela lui permet d'arriver à $bq \leq a < b(q+1)$, l'encadrement clé de la démonstration. Elle traite de façon simultanée le cas $a<0$ et $a \geq 0$. Nous avons soulevé un point problématique dans le projet de cours de P2 : le rôle de la partie entière dans la démonstration de l'existence de q.
Au niveau de la démonstration de l'unicité, P2 a choisi de faire un raisonnement par l'absurde et de montrer que $r'-r=0$ par une technique spécifique à l'arithmétique (en montrant que $-b<r'-r<b$ et $r'-r$ multiple de b).

Nous avons également vu que P2 fait suivre cette démonstration de deux exercices. Les éléments d'analyse a priori exposés dans le chapitre C3 montrent l'importance de l'inégalité portant sur le reste d'une division euclidienne dans ces exercices. Vu la difficulté du second exercice, nous nous interrogeons sur la manière dont P2 va le traiter en classe

III.1 Analyse a posteriori du cours de P2

Nous avons vu, en conclusion du chapitre précédent, que nous nous attendions à ce que la réalisation effective du projet de cours de P2 donne lieu à davantage de modifications que celui de P1, du fait de la place que cette enseignante souhaite accorder aux élèves pendant son cours et du « manque » a priori d'insertion du projet mathématique dans un projet didactique.
Nous allons voir si l'analyse a posteriori du projet de cours de P2 confirme cette hypothèse.

III.2 Introduction et énonciation du théorème (lignes 1 à 13 ; 4 minutes)

a) Lignes 1 à 10 (3 minutes)

Lignes 1 à l4 :

1	**P** : On continue le cours. Donc paragraphe suivant. Grand 4 grand 5? Donc on venait de travailler sur les nombres premiers. Donc c'est grand 3 maintenant ?	10h11
2	**El** : oui	
3	**P** : Division euclidienne	(P écrit au tableau) *III] Division euclidienne*
4	**P** : Sous un nom savant, c'est la première division que vous avez apprise à l'école primaire, c-à-d la division avec reste et sans virgule.	

Après avoir terminé la correction de l'exercice sur la somme des diviseurs d'un entier naturel, P2 débute sa séance sur la division euclidienne par un cours (énoncé et démonstration du théorème). Elle doit alors résoudre le type de tâche didactique Td_1 « Planter le décor dans lequel s'inscrit le théorème ». Pour l'accomplir, elle utilise successivement deux techniques didactiques. Tout d'abord, elle situe le théorème par rapport à la structure du cours (τd_2^1) puis elle le situe par rapport à des connaissances antérieures, la division vue à l'école primaire (τd_4^1).

Les questions au début du cours (ligne 1), qui sont un moyen de mettre en œuvre la technique τd_2^1, permettent à P2 de mobiliser l'attention des élèves après un exercice difficile. C'est un moyen d'impliquer les élèves dans le cours qui commence.

Après avoir indiqué aux élèves que le cours débute, P2 situe de façon emblématique le théorème de la division euclidienne par rapport à la division apprise à l'école primaire. De cette façon, les connaissances sur la division vue à l'école primaire, au collège et éventuellement au lycée sont explicitement rappelées par le professeur et P2 peut penser pouvoir les réutiliser si besoin est.

Cependant, l'analyse de la suite du protocole montre que cette technique n'est pas suffisante pour rendre ces connaissances mobilisables. En effet :

- Les connaissances de l'école primaire sont des connaissances lointaines pour les élèves[143] que P2 n'évoque que très vaguement, en indiquant que la division euclidienne est « la division avec reste et sans virgule ». Les connaissances sur la division du primaire ne sont pas réutilisées par P2 pendant la démonstration. Ces dernières ne peuvent donc pas servir de point d'appui technique aux élèves pour mieux comprendre la démarche suivie par P2. Or, s'appuyer de manière plus concrète (en posant par exemple une division comme à l'école primaire) sur ces connaissances aurait pu être un moyen de faire le lien entre la division de l'école primaire et la division euclidienne et aurait pu permettre aux élèves de comprendre que q est la partie entière de a/b. En n'identifiant pas nommément q comme le quotient[144] de la division euclidienne de a par b, le fait que q soit la partie entière de a/b ne peut pas être utilisé par les élèves qui n'ont pas le temps, ni les indications nécessaires, pour faire ce travail de lien.

[143] Nous verrons ceci par la suite (lignes 5 à 8).
[144] Le fait que a soit le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste n'est donné qu'en fin de démonstration par P2.

- Par ailleurs, le passage de la notation de l'école primaire :

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

–qui est une notation attachée à l'algorithme de calcul et non à un objet mathématique– à celle $a=bq+r$ avec $0 \leq r<b$ ne va pas de soi, surtout que les élèves n'ont plus posé de divisions à la main depuis un certain temps. Une des difficultés[145] soulevées par le passage d'une notation à l'autre provient du fait que la notation de l'école primaire se situe dans le cadre de l'arithmétique élémentaire tandis que la seconde se situe dans le cadre algébrique. Une autre difficulté provient du fait que, dans la notation de l'école primaire, il n'existe pas de relations écrites entre a, b, q et r et que les conditions portant sur r ne sont pas visibles. Ces relations et conditions se trouvent dans le petit discours qui accompagne l'algorithme de division à la main mais l'écrit n'en garde pas de trace. On observe une dualité entre l'algorithme de calcul et l'objet mathématique formel.

Ainsi, P2 risque de ne pas pouvoir s'appuyer sur des connaissances utiles pour comprendre la démonstration qu'elle a choisie de faire aux élèves. En effet, ces connaissances ne sont pas mobilisables chez les élèves, ce qui ne leur permettra pas de répondre aux différentes questions de P2 sur l'existence de q, comme nous le verrons par la suite.

Lignes 5 à 8 :

5	**El** : (inaudible)	
6	**P** : Oui ?	
7	**El** : faut que je réapprenne.	
8	**P** : Faut que je réapprenne. Je préfère avancer un petit peu le cours. Y'en a pas besoin pour le moment.	

Un indice de l'oubli des élèves en ce qui concerne ce qu'ils ont vu sur « la division avec reste et sans virgule » à l'école primaire est l'échange qui se déroule entre P2 et un élève des lignes 5 à 8 : un élève qui ne se souvient plus de la manière d'effectuer une division comme à l'école primaire le dit à l'enseignante. P2 est donc confrontée au type de tâche didactique « Répondre à une incompréhension d'élève ». Or, P2 a fait le choix de faire le lien entre la division euclidienne et la division de l'école primaire de façon orale et rapide mais elle n'a pas envisagé de passer plus de temps sur la division à l'école primaire. C'est pour cela qu'elle choisit la technique «Renvoyer la réponse à plus tard » pour gérer cette incompréhension d'élève. Par conséquent, P2 annule l'effet de sa mise en scène du théorème ; le lien avec la division du primaire est évoqué mais n'est pas effectif.

Par ailleurs, elle n'interprète pas cette incompréhension exprimée par un élève comme indice d'un manque de connaissances mobilisables sur la division de l'école primaire. Ceci va avoir des conséquences pendant le reste de la séance[146].
Répondre à cet élève aurait sûrement nécessité de donner un exemple de division euclidienne posée comme à l'école primaire. Cet exemple, encore une fois, aurait pu permettre de faire

[145] La difficulté des élèves à traiter des expressions littérales en arithmétique en restant dans le cadre des entiers, sans passer par des techniques de résolution classiques du cadre algébrique, est bien montrée par l'analyse du premier D.S. d'arithmétique donné par P1 (Ravel, 2003).
[146] Que cela soit au niveau de la démonstration du théorème que lors de la correction de l'exercice 2.

explicitement le lien entre la division de l'école primaire et l'égalité et l'inégalité de la division euclidienne pour l'ensemble de la classe.

<u>Lignes 9 à 10</u> :

9	**P :** Alors premièrement, théorème qui est à la base de la division euclidienne. Soit a un entier relatif et n un entier naturel non nul. Et bien on va démontrer l'affirmation suivante : il existe un unique couple d'entiers q et r tels que a s'écrive b que multiplie q plus r avec la contrainte 0 inférieur ou égal à r strictement inférieur à b.	(P écrit au tableau) *1) <u>Théorème</u>* *<u>Théo</u> :* *Soit a un entier relatif et n un entier naturel non nul. Il existe un unique couple d'entiers (q,r) tel que a=bq+r avec 0£r<b*
10	(Silence pour que les élèves recopient)	10h14

Pour le type de tâche didactique Td_2 « Enoncer le théorème », P2 met en œuvre la technique τd_3^2 « Enoncer oralement le théorème complet et l'écrire en même temps ».

En énonçant le théorème, P2 se place d'emblée dans le cadre de la démonstration. En effet, elle ne dit pas exactement ce qu'elle écrit ; elle rajoute « et bien on va démontrer l'affirmation […] ». Elle structure ainsi l'avancée du cours, en restant centrée sur le bloc technologico-théorique de l'OM_{div} locale.

b) Lignes 11 à 13 (1 minute)

<u>Ligne 11</u> :

11	**P** : Une remarque tout de suite à propos de ce théorème, c'est que q est un entier relatif. Bon en pratique on travaille la plupart du temps sur des entiers naturels. Et r, mais a et q peuvent être des entiers relatifs mais le reste r est toujours un entier naturel, comme le diviseur b.	(P écrit au tableau) *<u>Remarque</u> : q est un entier relatif, r est un entier naturel*

Une fois le théorème énoncé et écrit au tableau, P2 doit répondre au type de tâches « Commenter le théorème ». Immédiatement après l'énonciation du théorème, elle choisit de faire une remarque importante sur le choix des hypothèses du théorème et ce que cela implique sur la nature de q et de r –entiers relatifs ou entiers naturels. Cette remarque est d'autant plus importante que P2 a fait le choix mathématique de démontrer simultanément le cas où le dividende est positif et celui où il est négatif.

Nous pouvons faire l'hypothèse que cette remarque permet à P2 de :

- prévenir les erreurs classiques sur les restes des divisions euclidiennes lorsque le dividende est négatif ;
- sensibiliser les élèves aux difficultés à venir dans la démonstration de l'existence du quotient (lignes 14 à l32).

<u>Ligne 12</u> :

12	**P :** Ah je l'ai appelé b, pardon, y'a pas de n, b. Donc je vais diviser a par b. (inaudible) utilisé les notations habituelles, j'avais mis n donc vous rectifiez.	

Alors que P2 est en train de commenter le théorème qu'elle vient d'énoncer, elle se rend compte qu'elle a commis une erreur dans l'écriture de celui-ci au tableau : le diviseur est noté n au lieu de b. Elle stoppe immédiatement sa remarque pour rectifier son erreur.

La perturbation occasionnée par cette erreur dans le déroulement du cours a de fortes chances de marquer davantage les élèves que la remarque orale de P2 sur la nature des entiers présents dans le théorème. De plus, la priorité de P2 est alors de faire face au type de tâche « Gérer une erreur commise au tableau » –ce qui est toujours délicat– en s'assurant que tous les élèves ont bien corrigé l'erreur sur leur cahier de cours. Elle ne reprend pas ses commentaires oraux sur l'importance des hypothèses du théorème.

<u>Ligne 13</u> :

13	**P :** Soit a un entier relatif et b un entier naturel non nul. On va prouver qu'il existe un unique couple d'entiers (q, r) tels que a s'écrive b que multiplie q plus r. Alors démonstration. On va la faire en 2 temps, on va d'abord s'intéresser à l'existence et on établira ensuite l'unicité.	

Pour relancer la démonstration et s'assurer que tous les élèves ont bien changé les notations, P2 est ainsi obligée de répéter l'énoncé du théorème. Elle est ensuite confrontée à Td_3 « Introduire la démonstration ». Pour ce faire, P2 décide d'annoncer la structure de cette démonstration (τd_2^3) en indiquant qu'elle sera divisée en deux temps : existence et unicité.
Elle fait comme si cette structure de démonstration était naturelle. Or, c'est une des premières fois que les élèves rencontrent ce type de démonstration en arithmétique[147] ; type de raisonnement qui est assez atypique par rapport aux démonstrations qu'ils ont pu voir jusqu'ici.

c) Conclusion de cette partie

P2 vient donc de passer quatre minutes, sur les vingt que dure le cours, pour « planter le décor dans lequel se situe le théorème », « énoncer le théorème » et « introduire la démonstration ». L'intervention de l'élève en début de cours et l'erreur qu'elle a commise dans la notation du dividende occupent près de la moitié de ces quatre minutes. P2 avait sûrement prévu de passer moins de temps pour démarrer son cours. Son discours qui s'inscrit directement dans le cadre de la démonstration semble le confirmer.
Du fait que P2 voit, dès le début du cours, le déroulement de son projet retardé risque de donner un poids fort à la contrainte du temps dans la suite de la séance.

III.3 Existence du couple (q,r) (lignes 14 à 96 ; 8 minutes)

a) Lignes 14 à 32 (3 minutes)

<u>Lignes 14 à 15</u> :

[147] En géométrie, les élèves ont déjà rencontré des propriétés d'existence et d'unicité mais celles-ci sont la plupart du temps prouvées en utilisant un raisonnement par analyse-synthèse.

14	**P** : Soit a un entier relatif. Soit b un entier naturel non nul. Alors on va … il est possible d'encadrer a par 2 entiers consécutifs, deux multiples de b consécutifs. Donc ça va être le premier travail. Encadrons a par deux multiples consécutifs de b. Donc soit q appartenant à Z tel que a	10h15 (P écrit au tableau) *<u>Dem</u> :* *<u>Existence</u>* *Soit a Î **Z**, soit b Î **N***.* *Encadrons a par deux multiples consécutifs de b*
15	(silence)	(P écrit au tableau) *Soit q Î **Z** tel que bq£a<b(q+1)*

L'encadrement de a par des multiples de b est donné comme allant de soi. Il n'est ni problématisé (notamment sur le fait que l'une des inégalités est large alors que l'autre est stricte), ni exemplifié.

Rappelons que nous avons fait l'hypothèse que P2 choisit de passer cette difficulté sous silence pour éviter d'introduire les propriétés des parties de **N** dans son cours.

<u>Lignes 16 à 32</u> :

16	**P** : Alors est-ce que bq est bien ? Première question qu'on peut se poser, est-ce qu'ils sont bien rangés déjà ? Parce que sachant qu'on peut avoir à faire avec des entiers relatifs, on pourrait se poser la question.	10h16
17	…	
18	**P** : Donc j'ai pris 2 multiples consécutifs de b. Alors est-ce que bq est bien le plus petit ?	
19	…	
20	**El** : oui	
21	**P** : Pourquoi ?	
22	…	
23	**P** : Ca moins ça, ça vaut combien ? La différence entre ces 2 multiples elle est égale à	
24	…	
25	**P** : Ce multiple-ci moins celui-là, la différence est égale à ?	
26	**El** : b	
27	**P** : b est un nombre	
28	**El** : entier…entier naturel non nul	
29	**P** : Donc de signe	
30	**El** : positif	
31	**P** : Donc ce nombre là est bien plus petit que celui-ci. Une petite remarque, si q n'est pas nul et est positif … on a aussi ça	(P écrit au tableau) *b£a/q<b(1+1/q)*
32	(Silence)	

P2, en choisissant de traiter simultanément les cas positifs et négatifs, propose aux élèves une inégalité dans laquelle peuvent se trouver des nombres négatifs. Or, pour éviter tout risque d'erreur et par souci de rigueur, il faut se montrer vigilant lorsque l'on travaille avec des inégalités portant sur des nombres négatifs. P2, qui vient juste d'admettre l'existence de cette inégalité dans le cas général, se trouve alors face à une difficulté didactique : elle veut faire prendre conscience du problème aux élèves alors qu'elle introduit l'inégalité comme allant de soi et non problématique. Cette « incohérence » risque de rendre l'entrée des élèves dans la problématique de la validité de l'inégalité délicate.

Pour la surmonter, P2 essaie de donner corps à ce problème en le désignant explicitement (« parce que sachant qu'on peut avoir à faire avec des entiers relatifs […] ») et en questionnant les élèves sur la validité de l'inégalité proposée (« est-ce qu'ils sont bien rangés

[…] »). Bien que P2 pointe aux élèves le problème qu'elle souhaite éclaircir, ces derniers ne peuvent répondre aux questions qu'elle pose. Deux raisons peuvent expliquer selon nous cette absence de réponse :

- Le fait que l'on puisse avoir des nombres négatifs dans l'inégalité proposée n'est pas directement visible (il n'y a pas de signe moins par exemple). Par ailleurs, les commentaires de P2 sur les signes de a, b et q avaient été interrompus par la correction d'une erreur de notation dans l'énoncé du théorème.
- Les élèves ne possèdent pas de techniques leur permettant de prouver la validité d'une inégalité. La technique que P2 attend de la part des élèves ne fait pas partie de leur milieu ; celle-ci n'est pas mobilisable.

P2 se voit donc dans l'obligation de résoudre un type de tâche didactique « Raviver une connaissance non mobilisable chez les élèves ». Pour ce faire, elle va utiliser différentes techniques :

- fermer progressivement les questions. C'est ce que l'on observe des lignes 23 à 24 ;
- baisser le niveau des exigences attendues. C'est la technique utilisée par P2 des lignes 16 à 18 ainsi que ligne 23 ;
- obtenir des réponses par effet Topaze.
- obtenir des réponses en attendant seulement des élèves qu'ils complètent par un mot une phrase commencée par le professeur. Cette technique est illustrée par le dialogue se déroulant des lignes 27 à 30.

P2 met donc deux minutes pour obtenir la validité de l'inégalité. Le comportement des élèves montre bien que ceux-ci ne sont pas entrés dans la problématique que P2 souhaitait aborder.

Notons également qu'aucun des élèves de la classe n'a publiquement « contesté » l'existence de l'encadrement de a que P2 écrit au tableau.

b) Lignes 33 à 84 (3 minutes)

<u>Lignes 33 à 40</u> :

33	**P** : Si je divise par q je vais avoir 1 + b que multiplie 1 + quelque chose mais surtout qu'est-ce que c'est finalement a/q ?	10h18
34	…	
35	(Silence)	(P écrit au tableau) *b£a/q<b+b/q*
36	…	
37	**P** : Personne n'a d'idée ?	
38	…	
39	**P** : Oui, ça m'étonne pas, c'est pas celui là qu'ils vous donnent. J'ai pas fait la bonne remarque. Si je divise par b, qu'est-ce que j'obtiens ici ?	10h19
40	…	(P barre au tableau) *q£a/b<q+1*

Dans la description du savoir apprêté par P2 pour la démonstration du théorème de la division euclidienne, nous n'avons pas pu définir explicitement le rôle que P2 voulait faire jouer à la partie entière de a/b, ni même si elle avait prévu d'introduire cette partie entière. L'extrait de protocole ci-dessus semble montrer que P2 avait pour objectif d'introduire la partie entière pendant la démonstration. En effet, c'est P2 qui propose de diviser l'inégalité par q, cet événement ne paraît pas improvisé ; il n'arrive pas non plus comme réponse à une intervention d'élève. On peut cependant également penser que P2 a décidé d'introduire la partie entière après avoir constaté les difficultés des élèves pour montrer la validité de l'inégalité. Mais cette hypothèse nous paraît moins probable que la première[148].

Le projet de P2 est donc de se servir de cette inégalité pour montrer que q est la partie entière de a/b. Elle transforme donc l'inégalité $bq \leq a < b(q+1)$ en divisant par q. Or, pour faire apparaître la partie entière, il faut diviser l'inégalité par b. Elle ne se rend compte de son erreur qu'une minute plus tard après un long moment d'absence de réponse des élèves à sa question.

P2 se retrouve donc face à la même tâche que celle qu'elle devait accomplir ligne 12 et la résout en utilisant la même technique didactique qui est de stopper ce qu'elle est en train de faire pour rectifier son erreur sans la commenter. Elle laisse alors du temps aux élèves pour corriger leur cahier et s'approprier l'inégalité rectifiée.

<u>Lignes 41 à 44</u> :

41	**P** : Donc là vous devez avoir la réponse tout de suite. Qu'est-ce que ça caractérise ça ?	
42	…	
43	**P** : Quelqu'un a une idée ?	
44	…	

P2 relance son projet et « re-motive » les élèves en leur indiquant que « là vous devez avoir la réponse tout de suite ». Mais aucun élève ne répond.
L'absence de reconnaissance des élèves de la caractérisation qui définit la partie entière de a/b place P2 dans la même situation que celle vécue des lignes 16 à 32.
Des lignes 45 à 84, elle doit faire reconnaître cette caractérisation et, pour cela, elle va mettre en œuvre les mêmes techniques que celles qu'elle a utilisées pour leur faire vérifier la validité de l'inégalité $bq \leq a < b(q+1)$.

<u>Lignes 45 à 49</u> :

45	**P** : q et q+1 sont des entiers consécutifs. Donc, vous connaissez la définition, vous connaissez ça, ça doit vous rappeler quelque chose.	
46	**El** : c'est divisible par b	
47	**P** : Oui ?	
48	**El** : c'est divisible par b	
49	**P** : Non.	

P2, en précisant que q et q+1 sont des entiers consécutifs, ferme la question. En effet, elle livre aux élèves des éléments sur l'inégalité $q \leq a/b < q+1$ dont elle attendait, lignes 41 à 44, qu'ils les tirent par eux-mêmes. Elle désigne par ailleurs cette inégalité particulière comme étant une définition connue des élèves.

[148] La deuxième hypothèse aurait été plus probable si P2 avait décidé de recourir à la partie entière pour prouver la validité de l'inégalité et non pas après l'avoir prouvée.

Par effet de contrat, un élève répond que «c’est divisible par b », sans préciser ce qui est divisible par b. Pour donner sa réponse, cet élève se place dans le cadre des cours d’arithmétique et, parmi les différentes notions vues par la classe dans ce cours (diviseurs, multiples, divisibilité et nombres premiers), la réponse la plus plausible est le fait que l’inégalité $q\leq a/b<q+1$ représente une relation de divisibilité. Il existe en effet une proximité symbolique entre la fraction «a/b » et de la relation « $a \mid b$» introduite en début de cours ; proximité symbolique qui peut entraîner des confusions car les rôles de a et de b sont inversés d’une expression à l’autre.
P2 rejette cette réponse sans donner d’explication.

<u>Lignes 50 à 52</u> :

50	**El** : c’est un encadrement	
51	**P** : Oui c’est un encadrement mais encore ?	(rires)
52	…	

Un élève, cherchant à deviner ce que P2 attend d’eux, change de contexte pour donner sa réponse et, toujours par effet de contrat, affirme que cette inégalité est un «encadrement ». Il donne cette réponse dans le cadre algébrique. Cela peut s’expliquer par l’insistance faite par P2 des lignes 16 à 32 sur le travail algébrique nécessaire pour vérifier des inégalités négatives.

C’est une réponse correcte que P2 accepte mais hors contrat, ce qui est bien compris des élèves comme le montrent les rires dans la classe.

<u>Lignes 53 à 73</u> :

53	**P** : C’est une petite … On l’utilise assez fréquemment cette fonction parce que c’est la seule qui marche pas comme les autres. Elle a des tas de petites propriétés qui sont anachroniques. Je veux dire : elle est pas continue, elle est pas toujours dérivable la fonction qu’il y a là dessous.	
54	…	

55	**P** : Non, vous connaissez pas de fonctions qui … un petit peu bizarres ?	
56	**El** : la fonction inverse ?	
57	**P** : Oui, elle est, la fonction inverse, une fonction rationnelle elle rentre dans la grande famille des fonctions classiques.	
58	…	
59	**P** : Non ?	
60	…	
61	**P** : On en a parlé nous pourtant.	
62	…	

63	**P** : En d’autres termes, q c’est le plus grand entier inférieur ou égal à a/b. Oui, non ?	
64	**El** : Oui	

65	**P** : Ben vous connaissez, ça s’appelle comment ?	
66	…	
67	**P** : Oui ?	
68	**El** : la fonction entière non ?	
69	**P** : Presque.	
70	**E**l : f(x)…	
71	**P** : La...	
72	...	
73	**El** : la part entière de...	

Suite aux deux interventions précédentes d'élèves, P2 se trouve toujours confrontée au fait de devoir « Raviver une connaissance non mobilisable chez les élèves ». Mais la première technique didactique « fermer progressivement les questions » qu'elle a mise en œuvre pour y répondre n'a pas fonctionné.

Elle essaie donc une nouvelle technique (« faire appel à diverses propriétés de la connaissance que l'on souhaite mobiliser ») pour sortir la classe de l'incompréhension dans laquelle elle semble se trouver. P2 décide alors de donner des indications aux élèves en posant des questions dans le cadre fonctionnel. Mais la distance entre les écritures habituellement rencontrées dans ce cadre et l'écriture $q \leq a/b < q+1$ que les élèves lisent au tableau est trop importante. Les symboles présents dans l'inégalité ne sont pas représentatifs du cadre fonctionnel : il n'y a pas de « x », ni de « f(x) » ou de « y ». Les élèves ne peuvent donc pas répondre aux questions de P2.

Et bien que P2 continue à resserrer ses questions en donnant les caractéristiques de la fonction partie entière (ligne 53) puis en faisant appel à leurs souvenirs de « fonctions … un petit peu bizarres », les élèves, après avoir essayé une fonction « bizarre » qu'ils connaissent, la fonction inverse sans pouvoir valider par eux-mêmes leur réponse, finissent par ne plus répondre aux questions de P2.

Il n'y a plus de logique épistémologique dans les questions que P2 pose aux élèves au sujet de la partie entière ; la situation se transforme alors en un jeu de devinette. Ce passage confirme notre hypothèse selon laquelle le « flou » autour du rôle de la partie entière dans la démonstration dès le projet de cours était porteur de difficultés prévisibles dans la réalisation effective de ce projet en classe
C'est un indice du fait que P2 n'a pas réellement problématisé le rôle de la partie entière dans cette démonstration ; elle s'attendait sûrement à ce que cette connaissance soit disponible sans difficulté chez les élèves.

Pour gérer cette situation où la classe n'arrive pas à décrypter ses attentes, P2 a le choix entre donner la réponse exacte ou continuer à essayer de faire trouver aux élèves la réponse qu'elle attend. Elle opte pour la seconde possibilité, ce qui conforte notre hypothèse initiale selon laquelle la partie entière de a/b fait partie de son projet. Par rapport à la cohérence de celui-ci, elle ne peut pas donner la bonne réponse et continuer la démonstration. Cette manière de gérer l'absence de réponse des élèves sur des points autour desquels s'articule son projet de cours se retrouvera lors de la démonstration de l'unicité du quotient et du reste d'une division euclidienne (lignes 97 à 117).

En optant pour la seconde possibilité, P2 doit toujours « Raviver une connaissance non mobilisable chez les élèves ». Elle va de nouveau mettre en œuvre les techniques « baisser le niveau des exigences attendues » et «obtenir des réponses en attendant des élèves qu'ils complètent une phrase par un mot » pour y répondre.

Des lignes 63 à 64, P2 abandonne le cadre fonctionnel et se centre sur les propriétés de la partie entière qui sont en jeu dans la démonstration. Cependant, même si les élèves n'ont plus comme responsabilité que de répondre oui ou non à la question de P2, cette technique didactique ne permet pas à P2 de « rattraper » la classe. En effet, des lignes 65 à 67, les élèves ne savent pas donner le nom du plus grand entier inférieur ou égal à a/b.

Quand un élève finit par tenter une réponse, on s'aperçoit qu'il est resté dans le cadre fonctionnel que P2 a essayé de mettre en place comme guide pour trouver la bonne réponse des lignes 53 à 62. La réponse de l'élève à la ligne 68, bien que répondant aux questions posées par P2 des lignes 53 à 62, n'est pas acceptée par cette dernière qui la juge insuffisante.
Or les élèves qui n'ont d'autres moyens de validation que l'approbation ou non de P2 à leurs réponses, considèrent le «presque » de P2 comme un indice de mauvaise réponse. Un élève essaie donc de deviner la réponse en proposant « f(x) », réponse que P2 ignore, sans doute car celle-ci s'éloigne trop de ce qu'elle veut faire dire aux élèves.

Un élève, ligne 73, finit par fournir la bonne réponse, mais là aussi P2 l'ignore. Le fait que P2 choisisse de ne pas tenir compte de cette réponse peut s'expliquer de deux façons :

- Soit elle ne l'a pas entendue et continue en posant un quatrième type de questions pour faire trouver la réponse à la classe. Et la situation continue ici à n'être pour les élèves qu'un jeu de devinette bien que depuis la ligne 63 P2 ait retrouvé une cohérence au niveau logique épistémologique de la démonstration en se centrant sur la définition de la partie entière et non sur ses propriétés en tant que fonction.
- Soit elle tire des indices de la classe (incompréhension visible des élèves, etc.) qui lui font ignorer délibérément cette réponse car même si elle est donnée par un élève, le reste de la classe est perdu et il est impératif pour P2 de la «récupérer » car elle n'est même pas encore à la moitié de la démonstration qu'elle souhaite faire (il lui reste à démontrer l'existence de r ainsi que l'unicité de q et de r, qui ne sont pas des parties sans difficulté).

<u>Lignes 74 à 84</u> :

74	**P** : Quel est le plus grand entier inférieur ou égal à 3,5 ?	
75	**El** : 4	
76	**P** : Inférieur ?	
77	**El** : euh 3	
78	**P** : A 2,7 ?	
79	**El** : 2	
80	**P** : Alors qu'est-ce que c'est que 2 pour 2,7 ? Qu'est-ce que c'est que 3 pour 3,5 ?	
81	**El1** : approximation ? **El2** : La part entière de...	(simultanément)
82	**P** : Oui, c'est une valeur approchée...par défaut...à une unité près. Mais encore ?	
83	**Els** : La partie entière	(Classe)
84	**P** : C'est la partie entière. Donc q c'est ce qu'on appelle la partie entière de a/b. Est-ce que vous connaissez la notation ? E de a/b.	(P écrit au tableau) q=E(a/b)

Ainsi, au lieu de reprendre la réponse « la part entière de… » et de la compléter, P2 choisit de s'appuyer sur des exemples numériques et elle réemploie à nouveau, sur ces exemples, les mêmes techniques pour obtenir des élèves la réponse qu'elle attend.

Des lignes 74 à 79, elle demande aux élèves de donner le plus petit entier inférieur ou égal à un nombre décimal positif sur deux exemples numériques (3,5 et 2,7). Puis, elle demande aux élèves ce que représente cet entier pour le nombre décimal (ligne 80). De nouveau, un élève donne une réponse correcte mais hors contrat (« approximation ») que P2 traite de la même

manière que la réponse « l’encadrement » de la ligne 50, en demandant d’aller plus loin : « Oui […] mais encore ? » (ligne 50 et ligne 82).
Finalement, plusieurs élèves affirment que c’est « la partie entière » et P2 conclut rapidement sur le fait que q est la partie entière de a/b.

La vitesse avec laquelle P2 passe à l’existence de r après avoir pris trois minutes pour l’encadrement de a par deux multiples consécutifs de b et trois autres minutes pour faire dire aux élèves que q est la partie entière de a/b montre bien l’influence du temps sur la transformation du projet de cours lors de sa réalisation effective dans la classe. En effet, après avoir obtenu avec beaucoup d’efforts la bonne réponse, P2 continue son cours sans mentionner que le fait pour q d’être la partie entière de a/b permet de prouver son existence. De fait, la démonstration de l’existence de q présentée aux élèves n’est pas faite avec la rigueur que P2 affirme vouloir faire passer aux élèves[149]. L’encadrement $bq\leq a<b(q+1)$ est effectivement admis et elle ne revient pas sur le rôle de la partie entière qui permet d’obtenir l’existence du quotient ainsi que l’encadrement précédent.
On peut se demander ce que les élèves peuvent retenir de cette démonstration car au final, c’est à eux de faire les liens entre partie entière et existence de q. On peut aussi se poser des questions sur la cohérence de la démonstration de l’existence de q présentée aux élèves.

c) Lignes 85 à 90 (1 minute)

<u>Lignes 85 à 90</u> :

85	**P** : Alors dans ces conditions là, a va s’écrire comment ?	10h21
86	…	
87	**P** : Il va s’écrire bq + a–bq. Ca je vais l’appeler r.	(P écrit au tableau) $a=bq+a-bq$ avec $r=a-bq$
88	**P** : Alors est-ce que r va vérifier les bonnes conditions ?	
89	…	
90	**P** : Donc si j’enlève bq je vais trouver 0 à gauche et à droite b. Donc on les a trouvés. q c’est la partie entière de a/b et r c’est la différence a–bq. Alors maintenant deuxième	(P écrit au tableau) Comme $bq\leq a<b(q+1)$, on a $0\leq r<b$

P2 prouve l’existence de r très rapidement ; cela lui prend en tout une minute. Elle pose des questions aux élèves mais ce sont des questions rhétoriques[150], elle n’attend pas que les élèves lui répondent. C’est une technique didactique qui lui permet d’accélérer son cours tout en impliquant les élèves dans la démonstration, même si c’est elle qui, ici, joue à la fois le rôle de l’enseignant en posant des questions et le rôle de l’élève en donnant la réponse. P2 prend donc entièrement en charge la démonstration de l’existence du reste.

On peut faire l’hypothèse qu’elle décide de ne pas attendre les réponses des élèves car elle pense –au vu de ce qui s’est passé lorsqu’elle a abordé le problème de la validité de l’inégalité $bq\leq a<b(q+1)$– que ces derniers vont avoir besoin de beaucoup de temps pour faire les calculs sur les inégalités nécessaires pour montrer que r vérifie les bonnes conditions. Par ailleurs, on peut penser qu’elle se permet d’accélérer ce passage car :

- Ce n’est pas un enjeu principal du projet de cours.

[149] Voir extraits de l’entretien de P2 dans les chapitres précédents.
[150] Voir analyse de la teneur du discours de P2.

- En ayant eu à gérer plus d'incidents que prévu, P2 a sûrement l'impression d'avoir perdu du temps lors de la démonstration de l'existence de q. Pour faire tenir son projet dans le temps imparti, il lui faut avancer plus rapidement la démonstration.
- On peut aussi penser qu'après cette série de dysfonctionnements, il faut que P2, ainsi que les élèves, retrouvent un mode de fonctionnement avec moins de « tension » visible.

d) Lignes 91 à 96 (1 minute)

Lignes 91 à 96 :

91	**El** : c'est où que vous avez trouvé ça là ?	10h22
92	**P** : Comment ?	
93	**El** : euh bq + a–bq ?	
94	**P** : Ben j'ai essayé d'écrire...	
95	**El** : ah ouais d'accord, ouais non c'est bon	
96	**P** : D'écrire a sous cette forme, simplement en vérifiant que ce que j'ai mis à côté vérifiait bien les conditions du théorème d'accord ? Donc j'ai trouvé 2 nombres qui satisfont la condition. q c'est la partie entière de a/b et r c'est la différence entre a et bq.	

La démonstration de l'existence de r a pris 1 minute. Un moyen pour les élèves de ralentir le rythme imposé par P2 afin de trouver le temps de comprendre ce qui est en train d'être fait est de poser des questions. C'est ce que fait un élève qui demande des explications sur les manipulations algébriques faites par P2 au tableau et qu'il n'a pas eu le temps de suivre.
Le fait que P2 fasse une pause donne le temps à l'élève de comprendre ce qu'elle a écrit et il n'a alors plus besoin d'explication. Cet incident permet à P2 de réaliser qu'elle est allée trop vite dans la fin de la démonstration de l'existence du couple (q,r). Elle en profite alors pour faire une synthèse de ce qu'elle a fait jusqu'à présent.
On voit comment ici l'intervention d'un élève permet de réguler la gestion du temps faite par l'enseignante et permet à celle-ci d'avoir l'occasion de redonner une cohérence globale à ce qu'elle a présenté à la classe –ce qu'elle n'avait pas pu faire dans l'action immédiate.

e) Conclusion de cette partie

On observe, dans cette partie, une technique de gestion didactique des perturbations dans le déroulement des projets de cours qui semble routinière à P2. En effet, pendant la démonstration[151], lorsque P2 pose des questions par rapport aux objets qui occupent une place importante dans son projet et qu'elle n'obtient pas exactement la réponse qu'elle attend de la part des élèves, elle gère ces perturbations en utilisant toujours le même panel de techniques didactiques jusqu'à ce que les élèves finissent par dire exactement le mot qu'elle souhaite. Sur ces objets, elle ne s'autorise pas à donner elle-même la bonne réponse.

[151] C'est le cas, comme nous l'avons montré, pour la validité de l'encadrement de a et le fait que q soit la partie entière de a/b et, comme nous le montrerons dans la suite de cette analyse, pour la manière de prouver une unicité.

III.4 Unicité du couple (q,r) (lignes 97 à 151 ; <7 minutes)

a) Lignes 97 à 117 (1 minute)

Lignes 97 à 100 :

97	**P** : Donc maintenant, pour terminer, l'unicité. Donc c'est une démonstration que vous avez peut-être pas eu l'occasion de faire souvent. Comment est-ce qu'on pourrait faire pour montrer que quelque chose est unique ?	10h23
98	…	
99	**P** : Qu'en pensez-vous ?	
100	...	

Lorsqu'elle commence la démonstration de l'unicité, ligne 97, P2 précise aux élèves qu'ils n'ont «peut-être pas eu l'occasion de faire souvent » ce type de démonstration. En situant cette démarche par rapport aux connaissances des élèves sur les différents types de démonstration, P2 affiche publiquement un des enjeux de son cours : utiliser l'arithmétique pour travailler le raisonnement. Cela confirme l'hypothèse selon laquelle P2 choisit de séparer la démonstration de l'existence de (q,r) de celle de l'unicité pour des raisons liées à un objectif de formation des élèves au raisonnement.

P2 doit donc accomplir le type de tâche didactique « Introduire un type nouveau de démonstration ». La première technique didactique qu'elle utilise est de « questionner les élèves sur ce qu'ils pensent a priori de ce type de démarche ». Mais les élèves ne répondent pas et ne peuvent pas répondre car ils n'ont pas d'indice sur ce que P2 attend comme réponse.

<u>Lignes 101 à 117</u> :

101	**P** : Le bon sens vous suggèrerait de faire quoi ?	
102	**El** : ben on montre qu'il en existe pas pour d'autres (inaudible)	
103	**P** : Je sais pas, je comprends pas bien, ça n'existe pas pour d'autres, qu'est-ce que ça veut dire ?	
104	…	
105	**P** : Être unique ça veut dire qu'on va trouver qu'un seul résultat. Donc il existe le résultat mais il est tout seul.	
106	**El** : montrer qu'il est (inaudible)	
107	**P** : Effectivement, il va falloir montrer qu'il y en a pas d'autre possible. Alors pour faire ça, comment on fait ?	
108	**El** : on va supposer qu'il y a un possible…	
109	**P** : On va supposer qu'il y en a un deuxième et on va montrer…	
110	**El** : euh que…	
111	**P** : Que les deux résultats en fait…	
112	**El** : (inaudible)	
113	**P** : Si concordent mais n'en font…	
114	**El** : qu'un	
115	**P** : Qu'un seul. Je suppose qu'il y en a deux et je montre qu'ils sont … Qu'ils sont les mêmes en fait.	
116	…	
117	(Silence)	(P écrit au tableau) *<u>Unicité</u>* *Soit (q,r) et (q',r') deux couples solutions.* *On a* $\begin{cases} a=bq+r & \text{avec } 0 \le r<b \\ a=bq'+r' & \text{avec } 0 \le r'<b \end{cases}$

Face à l'absence de réponse des élèves, P2 va changer de technique pour utiliser à nouveau le panel de techniques didactiques qu'elle avait utilisé pour gérer les incidents précédents. Pour faire trouver aux élèves un résultat nouveau, elle met donc en œuvre les mêmes techniques didactiques que pour leur faire retrouver un savoir qu'ils possèdent déjà mais qui n'est pas mobilisable dans la situation vécue. Les lignes 108 à 115 sont des exemples clairs d'effet Topaze.

Notons également qu'elle semble considérer comme évident le passage du registre de la langue naturelle (« Je suppose qu'il y en a deux et je montre qu'ils sont … qu'ils sont les mêmes en fait ») à celui de la langue symbolique (Soit (q,r) et (q',r') etc.).

b) Lignes 118 à 121 (3 minutes)

<u>Lignes 118 à 121</u> :

118	**P** : Bon supposons soit q, r et q', r' deux couples solutions. Et je veux montrer qu'en fait qu'ils sont égaux. Donc puisqu'ils vérifient tous les 2 les conditions on va avoir a égale bq plus r avec 0 inférieur ou égal à r strictement inférieur à b et on va avoir aussi a égale bq' plus r' avec r' compris entre 0 et b. Donc l'égalité large du côté de 0, stricte du côté de b. -r' lui il va être compris entre -b et 0. Donc r moins r' est compris au sens strict … entre -b et b.	10h24 (P écrit au tableau) $\begin{cases} 0 \le r<b \\ -b<-r' \le 0 \end{cases}$ *donc* $-b<r-r'<b$ *De plus,* $bq+r=bq'+r'$ *donc* $r-r'=b(q'-q)$ *avec* $q'-q$ *entier*

119	(Silence, laisse les élèves écrire)	
120	**P** : Vous êtes d'accord ?	
121	…	

La ligne 118 et les lignes précédentes (de 101 à 117) montrent que si P2 souhaitait laisser une place aux élèves dans l'explication générale du type de raisonnement à utiliser, c'est elle qui se charge totalement de sa mise en forme (conversion de la démarche en langage symbolique) et de sa mise en œuvre. Elle fait les calculs avec un but précis (elle connaît la suite de la démonstration) qu'elle n'explicite pas aux élèves. De fait, les élèves ne peuvent pas répondre à la question que P2 leur pose ligne 120 car s'ils peuvent se prononcer sur la validité des transformations algébriques effectuées par P2, ils ignorent totalement dans quel but elle a fait ces transformations. Ils sont peut-être d'accord mais ils ne savent pas où ils vont.

P2 a bien indiqué, ligne 118, qu'elle veut montrer que r et r' sont égaux (r=r') mais elle ne dit pas qu'elle veut prouver pour cela que r–r'=0. Or, ce passage est délicat pour des élèves qui n'ont encore jamais rencontré de démonstration d'unicité en-dehors de celles faites en géométrie. De plus, c'est la première fois qu'ils sont confrontés à la technique arithmétique[152] permettant de montrer l'égalité de r et de r'. Les élèves partent donc en aveugle. P2 fait fonctionner un contrat d'adhésion (ligne 120).

c) Lignes 122 à 150 (2 minutes)

Lignes 122 à 130 :

122	**P** : Ce que je viens d'écrire me fait apparaître quoi, r-r' ?	10h27
123	…	
124	**El** : c'est un multiple	
125	**P** : Oui c'est un multiple…	
126	**El** : c'est un multiple de q-q'	
127	**P** : Oui mais c'est pas celui-là qui m'intéresse.	
128	**El** : de b	
129	**P** : C'est aussi un multiple de b oui.	
130	(Silence)	(P écrit au tableau) *donc r-r' multiple de b*

Bien qu'elle ait décidé de prendre en charge la responsabilité de la démonstration, P2 aménage malgré tout une place aux élèves dans l'avancée de celle-ci. Les élèves ont donc comme responsabilité, des lignes 122 à 150, de répondre aux questions locales de P2 sans avoir les moyens de comprendre la logique globale de la démonstration qui les sous-tend.
Cette vision locale à court terme des élèves qui avancent « le nez dans le guidon » permet de comprendre l'échange qui se déroule entre P2 et les élèves des lignes 122 à 130. En effet, les élèves savent qu'ils doivent se prononcer sur un diviseur mais ils ne peuvent pas savoir qu'ici, q–q' est un diviseur de r–r' moins intéressant –pour reprendre l'expression de P2– que b.

[152] Voir l'analyse du savoir apprêté par P2 dans le chapitre précédent.

Lignes 131 à 134 :

131	**P** : J'ai d'une part r-r' multiple de b et d'autre part r-r' strictement compris entre -b et b. Alors, est-ce qu'il y en a un multiple de b strictement compris entre -b et b ? Y'en a combien en fait ?	
132	…	
133	**P** : Y'en a, y'en a pas, y'en a plusieurs ?	
134	…	

Nous pouvons faire l'hypothèse que le fait que les élèves n'aient pas eu le temps ni les moyens de faire des liens entre les deux relations importantes portant sur r–r' (il s'agit des relations $-b<r-r'<b$ et $r-r'=b(q'-q)$) et l'objectif de la démonstration ne leur permet pas de répondre à P2.
De nouveau, face à l'absence de réponse des élèves, P2 va mettre en œuvre les mêmes techniques didactiques qui sont une variation autour de l'effet Topaze. Elle aurait pu ici choisir d'interpréter cette absence de réponse comme un indice de trop grande distance entre l'objectif de la démonstration et la capacité d'anticipation des élèves et faire alors le point sur ce qu'elle voulait montrer. Elle aurait aussi pu fournir la réponse aux élèves[153].

Lignes 135 à 150 :

135	**P** : Si je vous demandais la liste des multiples positifs de b, qu'est-ce que vous me diriez comme b est positif, c'est entier naturel ?	
136	…	
137	**P** : Si je vous demandais de me citer les multiples de b par ordre croissant ?	
138	…	
139	**P** : 0, 1 fois b, 2 fois b, 3 fois b etc. Et les multiples négatifs de b par ordre décroissant ?	
140	…	
141	**P** : 0	
142	**El** : -b	
143	**P** : -b	
144	**El** : -2b	
145	**P** : -2b etc. Bon alors, dans l'intervalle ouvert -b, b, est-ce qu'il y a un ou plusieurs ou pas du tout multiple de b ?	
146	**El** : 0	
147	**P** : Y'en a combien ?	
148	**El** : un seul	
149	**P** : Un seul et c'est ?	
150	**El** : 0	

De nouveau, par une suite d'effets Topaze, elle finit par obtenir des élèves les mots qu'elle attend.

d) Ligne 151 (<1 minute)

Ligne 151 :

[153] Nous avons vu que c'est une technique qu'elle n'a jamais utilisée lors de cette séance.

151	**P** : 0. D'où comme r-r' est un multiple de b et qu'il est strictement compris entre -b et b, il est nul. Donc r égale r'. Ben si r égale r' ça entraîne que q' moins q est aussi égal à 0 donc que q' et q sont égaux d'où unicité.	10h29 (P écrit au tableau) *D'où r-r'=0 donc r=r' donc q'-q=0 donc q'=q d'où l'unicité.* 10h29

Ce n'est que cinq minutes après avoir débuté la démonstration de l'unicité, que P2 reconstruit la logique de ce qui a précédé en faisant le point sur les réponses obtenues et en indiquant, dans la conclusion, le but vers lequel elle tendait. Elle en déduit alors l'unicité de q. P2 passe très rapidement sur cette partie (moins d'une minute) alors qu'elle a consacré cinq minutes pour y arriver. Tout comme dans la phase de conclusion de l'existence du couple (q,r), il se peut qu'elle ait eu l'impression de perdre trop de temps dans cette partie (elle met notamment 2 minutes pour obtenir que r–r' est un multiple nul de b) et que, par conséquent, elle accélère lors de la phase de conclusion.

e) Conclusion de cette partie

La gestion de la réalisation effective de la démonstration de la division euclidienne choisie montre que P2 ne prévoit pas –ou peu– la mise en scène didactique des choix mathématiques qu'elle fait au niveau du savoir apprêté. Ce manque de mise en scène la conduit à gérer au coup par coup les incidents qui surviennent par des « automatismes » non reliés au contenu. Les techniques didactiques qu'elle utilise ne re-questionnent pas le sens mathématique de la connaissance en jeu[154] et transforment la plupart du temps la situation en un jeu de devinette. Elle ne parvient pas non plus à dévoluer ses choix mathématiques aux élèves.

Par ailleurs, elle dispose d'un panel de techniques didactiques qui se révèle particulièrement stable. Cette stabilité nous semble être un indice d'un bloc technologico-théorique qui guide la praxéologie didactique de P2. Deux « théorèmes » didactiques peuvent être avancés pour expliquer la gestion didactique des incidents faite par P2 :

- Il faut que les élèves participent en cours. Pour cela, il faut leur aménager une place coûte que coûte en leur posant des questions, même si celles-ci se transforment généralement en une série d'effet Topaze et que le topos des élèves est en résumé presque inexistant.
- Il est interdit de donner la bonne réponse aux élèves quand on commence à leur poser des questions, quitte à ce que cela prenne du temps.

Finalement, on peut se demander si le projet mathématique de P2 se révèle opérationnel du fait qu'il ne soit pas réellement inséré dans un questionnement didactique préalable au moment de la préparation du cours. N'ayant pas anticipé la plupart des dysfonctionnements qui émaillent la réalisation de la démonstration, elle ne peut adapter sa gestion didactique de la situation aux difficultés des élèves.

III.5 Conclusion et organisation de la suite (ligne 152 à 159 ; >1 minute)

[154] Elle fait par exemple appel à des propriétés de la partie entière qui ne sont pas pertinentes par rapport au problème posé.

a) Lignes 152 à 159 (>1 minute)

Lignes 152 à 158 :

152	**P** : Alors des petits exercices pour voir ce que ça donne … Donc pratiquement … Je vous ai pas dit le nom mais q ça s'appelle comment ?	
153	…	
154	**P** : Dans une division, le ?	
155	**El** : le quotient	
156	**P** : Et r ?	
157	**El** : reste	
158	**P** : Le reste oui.	

Après avoir prouvé l'unicité du couple d'entiers (q,r), P2 passe immédiatement aux exercices sur la division euclidienne. Elle résout donc la tâche « Conclure la démonstration du théorème de la division euclidienne » en utilisant la technique τd_1[5]. Ceci peut paraître surprenant au vu de la complexité de la démonstration et des difficultés rencontrées. Mais à plusieurs reprises, P2 a passé plus de temps qu'elle n'en avait prévu sur des points précis de cette démonstration. Elle est donc amenée à accélérer l'avancée du cours, surtout qu'en deuxième heure, elle donne le premier D.S. d'arithmétique.

Par ailleurs, on peut remarquer que P2 ne se souvient d'avoir oublié de définir le vocabulaire lié à la division euclidienne qu'en raison de la forme de l'énoncé de l'exercice 1 qu'elle veut donner aux élèves. Ce n'est donc que dix-huit minutes après le début du cours sur la division euclidienne que les mots « quotient » et « reste » sont enfin prononcés.
On peut se demander ce qui aurait pu se passer si P2 avait introduit ces termes au moment de l'énonciation du théorème. Le lien entre q et la partie entière de a/b aurait pu être facilité par l'utilisation de ce vocabulaire.

Ligne 159 :

159	(Silence) **P** : Alors on va commencer par ça, après je donnerai un petit exercice	10h31 (P écrit au tableau) *Pratiquement :* *Ex1 : quotient et reste de la division euclidienne de 343 par 15, de 234 765 par 311, de -2 345 par 29.*

Après vingt minutes de cours sur la division euclidienne, P2 donne à faire aux élèves des divisions sur des exemples numériques.

b) Conclusion de cette partie

P2 organise la suite de la démonstration sans revenir sur le travail qui vient d'être fait (soit pour faire le point sur ce qui a été vu, soit pour situer le théorème dans l'ensemble du cours, etc.) et sans temps de répit qui aurait pu permettre aux élèves de relire la démonstration qui venait d'être faite. Ils doivent se mettre à chercher immédiatement un premier exercice d'application. Remarquons tout de même que le temps de recherche et de correction qui va suivre le premier exercice peut donner malgré tout la possibilité aux élèves de revenir sur

cette démonstration (car ne l'oublions pas, pour P2, les exercices font partie intégrante du cours).
Au vu des difficultés des élèves et du manque de temps qui leur est laissé pour revenir sur ce qui vient de se passer, nous pouvons cependant faire l'hypothèse que la recherche des exercices (et plus spécialement du deuxième exercice) va poser des problèmes aux élèves.

III.6 Exercice 1 (lignes 160 à 222 ; 10 minutes)

a) Lignes 160 à 173 (5 minutes)

Lignes 160 à 165 :

160	**P** : Donc les trois premiers exemples, les deux premiers au moins ne doivent pas poser de problème, vous pouvez faire avec votre machine.	10h31
161	**P** : Donc qu'est-ce qu'on détermine tout de suite ? Compte tenu de ce qu'on a vu tout à l'heure ?	
162	(Silence - les élèves travaillent avec leur machine)	
163	**El** : elle donne pas le reste.	
164	**P** : Elle ne donne pas le reste mais elle fait la plupart des calculs quand même. Vous pouvez le faire à la main si voulez hein, c'est pas interdit. Alors sur les machines un peu sophistiquées le travail doit se faire tout seul.	
165	(Silence)	

Après avoir écrit l'énoncé de l'exercice au tableau, P2 doit le dévoluer aux élèves. Pour ce faire, elle commente la difficulté de chacune des divisions à effectuer et indique une technique de résolution. En donnant aux élèves l'autorisation d'utiliser leur calculatrice, elle les guide vers des procédures de résolution[155] de type :

- S_2 : l'élève calcule a/b avec une calculatrice et prend la partie entière du résultat obtenu pour obtenir le quotient.
- S'_2 : l'élève calcule a/b avec une calculatrice et prend la partie à gauche de la virgule du résultat obtenu pour obtenir le quotient.
- S''_2 : l'élève calcule a/b avec une calculatrice et arrondit le résultat obtenu à l'entier le plus proche pour obtenir le quotient.

Devant les difficultés rencontrées par les élèves sur l'existence du quotient, la partie entière ne pourra pas fonctionner comme moyen de validation pour les élèves utilisant S'_2 et S''_2.

P2 indique également que d'autres techniques peuvent être utilisées : τ_2^1 (Poser la division à la main) et τ_4^1 (Utiliser la touche Int de la calculatrice pour calculer (a/b) et en déduire le reste).

Lignes 166 à 169 :

166	**P** : Alors une bonne habitude à prendre c'est chaque fois qu'on vous parle de division euclidienne, prenez la peine d'écrire l'égalité qui définit la division euclidienne et la condition portant sur le reste.	

[155] Voir les éléments d'analyse a priori de ces deux exercices présentés dans le chapitre C3.

167	**P** : Ca vous permettra d'éviter bien…d'écrire bien des bêtises. Parce que souvent la contrainte sur le reste, vous l'oubliez et l'égalité que vous proposez, ce n'est pas une égalité de division euclidienne. Donc attention.	
168	**P** : avec ? Mettez la contrainte sur le reste, écrivez la systématiquement parce que c'est quelque chose que vous avez tendance à oublier et qui vous fait faire des bêtises la plupart du temps.	*Prof dans les rangs, parle à un élève en particulier*
169	(Silence)	

Avant de passer dans les rangs et de laisser les élèves chercher l'exercice, P2 les guide à nouveau en leur faisant la mise en garde suivante : il faut toujours «prendre la peine d'écrire l'égalité qui définit la division euclidienne et la condition qui porte sur le reste ». Cette remarque de P2 est motivée par les difficultés qu'elle anticipe dans cet exercice ainsi que dans le suivant. Par ailleurs, il est fort probable que son expérience d'enseignement de l'arithmétique l'année précédente l'amène à prendre en compte des erreurs d'élèves qu'elle a déjà rencontrées.

Les éléments d'analyse a priori de ces exercices ont montré le rôle central de l'inégalité sur les restes comme moyen de validation des réponses et nous ont permis d'émettre des réserves sur la disponibilité de ce moyen de validation pour les élèves.
La remarque de P2 justifie notre hypothèse. Elle sait, par expérience, que les élèves ont tendance à faire des erreurs qui sont liées au fait qu'ils oublient de prendre en compte l'inégalité portant sur le reste. Pour remédier à ce problème, elle invoque « des bêtises » attendues qui sont dues à un oubli régulier des élèves d'écrire la contrainte sur le reste. On peut se demander si cette incitation à écrire « systématiquement » la contrainte sur le reste est suffisante pour que les élèves s'approprient le fait que cette contrainte leur permet de vérifier leur résultat.

<u>Lignes 170 à 173</u> :

170	**P** : à la machine !Je ne vais quand même pas vérifier si vous savez encore faire les divisions !	*P parle à un élève en particulier*
171	**El** : non	
172	**P** : c'est vrai que ça peut être utile	*P toujours à cet élève*
173	(Silence)	

La question du calcul à la main d'une division comme à l'école primaire est reposée par un élève. Rappelons que le cours sur la division euclidienne avait commencé par cette même question (lignes 5 à 8). P2 choisit une nouvelle fois de ne pas répondre à la demande de l'élève de lui ré-expliquer la façon de poser une division à la main. Nous pensons que P2 estime que les élèves doivent posséder cette connaissance est que ce n'est ni le moment, ni son rôle de faire un rappel dessus.

b) Lignes 174 à 222 (5 minutes)

<u>Lignes 174 à 186</u> :

174	**P** : Alors pour la première, est-ce que tout le monde sait comment trouver facilement en utilisant sa machine, le quotient et le reste ?	10h36
175	**P** : Donc on vous demande le quotient et le reste. Alors qu'est-ce que vous avez fait comme calcul ? Qu'avez-vous posé comme opérations sur votre machine à calculer ?	

176	**El** : je divise 343	
177	**P** : On divise 343 par 15 et on prend	
178	**El** : euh… la partie entière	
179	**P** : La partie entière du résultat, ça donne combien ?	
180	**El** : 22	
181	**P** : Peut-être, 22 c'est ça ?	
182	**El** : 22	
183	**P** : Et pour avoir le reste eh bien il suffit de faire 343 moins 15 fois 22 et on trouve	(P écrit au tableau) *343=15×22+*
184	**El** : 13	
185	**P** : 13. Et 13 est bien…	
186	**P** : Donc le quotient c'est 22 et le reste 13.	(P écrit au tableau) *343=15×22+13 avec 0£13<15* *quotient=22 ; reste=13*

Remarquons que P2 écarte explicitement la technique «poser la division à la main » comme technique valide de résolution lors de la correction de l'exercice ; alors qu'elle l'avait indiquée avant de laisser les élèves chercher. En effet, quand elle décide de commencer la correction du premier exemple numérique au tableau, elle demande aux élèves de lui fournir le résultat en utilisant leur calculatrice (lignes 174 à 175). Ainsi, la seule technique institutionnalisée est τ_3^1 « Calculer a/b à la calculatrice et en déduire le reste. ».

L'échange qui suit entre P2 et les élèves, des lignes 176 à 186, montre que P2 ne leur laisse pas la possibilité d'exprimer leur démarche de calcul du quotient et du reste. Cette méthode est imposée par P2 qui utilise pour cela une technique didactique qu'elle avait déjà utilisée auparavant et qui est une forme d'effet Topaze.

P2 impose également un schéma de rédaction de la solution : il faut écrire l'égalité et l'inégalité portant sur le reste puis compléter les phrases « quotient= … » et « reste= … »

Lignes 187 à 193 :

187	**P** : 234 765 c'est 311 que multiplie…	10h37
188	**P** : Combien ?	
189	**El** : 754	
190	**P** : 754 plus…	(P écrit au tableau) *234 765=311×754+*
191	**El** : 271	
192	**P** : Deux cents… 271.	
193	**P** : Donc quotient 754, reste 271	(P écrit au tableau) *234 765=311×754+271* *quotient=754* *reste=271*

La correction du deuxième exemple numérique se fait de façon analogue et le schéma de rédaction de la solution est identique.

Lignes 194 à 206 :

194	**P** : Et la dernière ?	10h38
195	(Silence)	
196	**P** : Alors cette partie entière ?	
197	**El** : moins 80, moins 81	
198	**P** : J'ai pas entendu.	

199	**El** : euh c'est moins 80	
200	(Silence)	
201	**P** : C'est ça ?	
202	**El** : 81	
203	**P** : Tout le monde est d'accord ?	
204	**P** : Le problème se pose parce que vous ne savez pas s'il faut prendre	
205	**El** : 80 ou 81	
206	**P** : 80 ou 81.	

Les élèves butent sur la partie entière d'un nombre négatif. Les réponses des élèves qui oscillent entre –80 et –81 montrent que ces derniers ne disposent pas de moyen pour valider leur réponse par eux-mêmes. Ils ne connaissent pas la définition de la partie entière et bien que P2 ait insisté sur le fait d'écrire systématiquement la contrainte sur le reste, ils ne le font pas. En essayant d'obtenir l'adhésion des élèves (lignes 201 et 203), P2 identifie le problème pour toute la classe.

<u>Lignes 207 à 219</u> :

207	**P** : Si on revient à la démonstration, c'est la partie entière de -2 345 divisé par 29.	
208	**P** : Quel est le résultat affiché par votre machine ?	
209	**Els** : -80,8	
210	**P** : Moins 80,8 et d'autres choses derrière.	
211	**P** : Donc la partie entière c'est le plus grand entier relatif inférieur ou égal.	
212	**P** : Donc est-ce que c'est -80 ?	
213	**P** : Non.	
214	**P** : Donc si on a fait le travail comme il faut, on a pris -81.	(P écrit au tableau) *-2 345=29×(-81)+*
215	**P** : Et qu'est-ce qu'on trouve ici ?	
216	**El** : 4	
217	**P** : Plus	
218	**El** : 4	
219	**P** : Plus 4.	(P écrit au tableau) *-2 345=29×(-81)+4*

Les élèves ne disposent d'aucun moyen leur permettant de lever leur incertitude sur la partie entière de –80,8. P2 en impose un en faisant d'abord appel à la mémoire de la classe (ligne 207) puis en rappelant la définition de la partie entière (ligne 211).
A partir de là, dans un contrat d'adhésion, elle obtient la bonne réponse et rédige la solution : -2 345 = -81×29 + 4.

Une incohérence apparaît dans l'objectif que P2 semblait s'être fixé dans cet exercice. En effet, elle n'écrit pas l'inégalité vérifiée par le reste alors que :

- Cette inégalité faisait partie de la rédaction de la solution des deux premiers exemples numériques (et ce même si elle ne servait pas explicitement de moyen de validation car les élèves donnaient la bonne partie entière de a/b) ;
- C'est un moyen de validation qui rentre dans le cadre des consignes qu'elle avait données en début d'exercices ;
- Les valeurs de a et b rendent l'utilisation de ce moyen de validation pertinent ;
- Cela permet d'éviter le recours à la partie entière, notion qui a déjà soulevé beaucoup de difficultés depuis le début du cours sur la division euclidienne.

Tout se passe comme si P2, ayant pris conscience au cours de la séance des difficultés des élèves sur la partie entière, tienne à revenir sur cette notion.

Lignes 220 à 222 :

220	**P** : Donc de toute façon, il y a une vérification possible : il faut absolument que ce nombre soit positif et plus petit que le diviseur.	10h40
221	**P** : Si vous prenez -80 ici vous trouvez un nombre négatif, donc vous n'avez pas choisi, vous n'avez pas pris le bon quotient.	
222	**P** : Donc quotient égale à -81 et reste égal à 4.	

P2 indique ensuite, par cohérence avec son objectif initial annoncé, qu'il existe un autre moyen de validation de la réponse. Cependant, elle ne le fait pas fonctionner quand il permet justement d'écarter des réponses fausses.

c) Conclusion de cette partie

Finalement, alors que l'objectif de P2 était de montrer l'importance de la contrainte sur le reste pour décider si une égalité est ou non une égalité de division euclidienne, la correction de cet exercice permet avant tout un retour sur la notion de partie entière. L'objectif d'apprentissage visé est différent de l'objectif d'apprentissage qui s'est réellement mis en place.

On entrevoit par ailleurs ici les difficultés que peuvent rencontrer les enseignants quand il s'agit de faire face au type de tâche didactique « Gérer la situation quand on sait qu'il y a une erreur 'piège' dans l'exercice ». On peut être tenté de faire en sorte que les élèves ne se trompent pas, ou peu, ou de les guider vers une procédure de résolution attendue, comme le fait P2. Cela peut être dû au fait de vouloir perdre le moins de temps possible. Mais essayer de prévenir cette erreur en indiquant d'office un moyen de validation ne se révèle pas pertinent si l'on ne permet pas à celui-ci de vraiment jouer un rôle dans la validation des réponses.

III.7 Exercice 2 (lignes 223 à 341 ; 16 minutes)

a) Lignes 223 à 237 (4 minutes)

Lignes 223 à 225 :

223	**P** : Un petit peu plus technique, l'exercice 2.	10h41
224	**P** : Donc déterminer en discutant suivant les valeurs de l'entier n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3, le quotient et le reste de la division euclidienne de n cube moins 2 par n moins 2.	(P écrit au tableau) *Soit n ÎN, n³3. Déterminer (en discutant selon les valeurs de l'entier n) le quotient et le reste de la division euclidienne de n^3-2 par n-2.*
225	(Silence- Laisse les élèves chercher)	

P2 introduit le second exercice comme le premier, en écrivant l'énoncé au tableau. Elle fait alors une pause très courte (moins d'une minute) pour laisser aux élèves le temps de s'approprier l'énoncé de l'exercice.

Lignes 226 à 232 :

226	**P** : Trouver quotient et reste ça veut dire écrire, arriver à écrire n cube moins deux sous la bonne forme, c-à-d n moins deux que multiplie quelque chose plus un autre nombre qui pourrait faire office de reste.	10h42
227	**P** : Alors quel…quel point de départ pourrait-on prendre ?	
228	(Silence)	
229	**P** : Je peux effacer le tableau central ?	
230	(Silence)	
231	**P** : Ah, voilà une bonne initiative. … Il faut toujours essayer.	(P passe dans les rangs et s'adresse à un élève)
232	(Silence)	

De même que dans l'exercice précédent, elle dévolue le problème aux élèves en leur indiquant une technique de résolution sans leur avoir laissé le temps d'essayer différentes pistes par eux-mêmes. Cette technique lui permet d'éviter que des élèves se retrouvent bloqués dès le début de la résolution. Si certains élèves n'arrivent pas à envisager une stratégie de base ou se fourvoient dans une impasse, ils peuvent toujours s'appliquer à résoudre la tâche identifiée par P2 : « Ecrire n^3-2 sous la forme n-2 que multiplie quelque chose ».

Cette technique permet également à P2 d'engager directement les élèves dans des procédures de résolution proches de celle qu'elle attend en favorisant explicitement les procédures de type S_2 et S_3 et en discréditant les procédures heuristiques de type S_1[156].
Cela nous semble également être un moyen pour P2 :

- D'éviter d'avoir à gérer au moment de la correction des procédures de résolution très différentes ;
- De gagner du temps, car il ne faut pas oublier qu'il reste environ un quart d'heure avant la fin de la première heure de la séance et qu'un D.S. est prévu dans la deuxième. Laisser les élèves s'engager dans des procédures de résolution de type S_1 pourrait s'avérer extrêmement coûteux en temps.

Elle passe ensuite dans les rangs pour voir comment les élèves résolvent la tâche « Ecrire n^3-2 sous la forme n-2 que multiplie quelque chose ». Cette tâche est ici motivée non pas par la situation mais par P2.

Lignes 233 à 237 :

233	**P** : Donc première étape, c'est peut-être la plus facile, trouver une égalité, c-à-d essayer d'écrire n cube moins deux comme étant le produit de n-2 par un entier plus un autre entier. Donc ça va être la première étape de notre travail.	(P écrit au tableau) $n^3-2=(n-2)(\ldots)+\ldots$
234	Et la deuxième étape consistera à voir dans quelle condition cette égalité est une égalité de division euclidienne ou pas.	
235	**P** : Alors vous avez quelques camarades qui ont des idées…	
236	(Silence)	
237	**P** : Vous allez nous faire ça au tableau ?	(Un élève va au tableau)

[156] Dans ces procédures, les élèves testent des valeurs de n.

P2, pour commencer la correction, indique la structure de la démarche à suivre en essayant de dévoluer celle-ci aux élèves en leur indiquant qu'il s'agit ici d'un travail collectif (« notre travail », (lignes 233 à 234)) et envoie un élève au tableau.
Cette technique didactique lui permet de répondre à l'exigence didactique que nous avons mise en évidence plus haut. En effet, P2 veut aménager une place aux élèves. Or, en les guidant fortement dans le temps de recherche de l'exercice, elle limite leur topos. Pour leur redonner une place, elle peut soit les interroger (comme ce fut le cas dans l'exercice 1) soit en faire passer un au tableau.
Or, devant le peu de temps qu'elle a laissé aux élèves pour chercher cet exercice difficile (trois minutes), on peut se demander quel sera le rôle de l'élève envoyé au tableau par rapport au savoir. Il y a de forte chance pour qu'il se réduise à celui d'un « porte-craie ».

b) Lignes 238 à 341 (12 minutes)

<u>Lignes 238 à 246</u> :

238	**P** : Donc première idée effectivement, c'est que vous savez diviser un polynôme par un autre hein donc on peut essayer cette division et en tirer une égalité. Et puis l'étape suivante, l'égalité obtenue est-elle ou non une égalité de division euclidienne ?	10h45 (Elève écrit au tableau, après correction des erreurs de signe) n^3-2 | $n-2$ n^3-2n^2 | n^2+2n+4 $2n^2-2$ $2n^2-4n$ $4n-2$ $4n-8$ 6
239	(Prof contrôle le tableau)	
240	**P** : Oui	
241	**El** : y'a un moins là	
242	**P** : Oui et puis l'autre aussi, c'était deux moins. Donc attention, deuxième ligne, y'a aussi une erreur de signe.	
243	**P** : Voilà donc à enlever, il nous reste deux n carré moins deux hein…oui…ça m'étonnerait que ça soit des n carré encore… oui, non ça c'était bon. Donc deux n carré moins quatre n à enlever, ce qui fait qu'il nous reste quatre n moins deux… plus quatre oui.	
244	(Silence)	(Elève écrit au tableau) n^3-2
245	**P** : Pourquoi vous complétez pas au-dessus, remplacez les pointillés…	(Elève écrit au tableau) $n^3-2=$ $(n-2)(n^2+2n+4)+6$
246	**P** : Donc n au carré plus deux n plus quatre plus six. Donc ça c'est une égalité qui est vraie pour tout n.	

P2 semble avoir choisi d'envoyer au tableau un élève qui, pendant le temps de recherche, avait posé la division polynomiale de n^3-2 par $n-2$.
Le commentaire que P2 fait à la ligne 246 montre qu'elle prépare la suite de la résolution. L'élève n'a pas d'autonomie ici pour mener la correction de l'exercice. On observe progressivement un dédoublement de la situation (Comiti, Grenier et Margolinas, 1995).
Pour P2, la tâche « Ecrire n^3-2 sous la forme $n-2$ que multiplie quelque chose » s'inscrit dans un processus de résolution tandis que pour l'élève, elle semble être une tâche isolée dont la

résolution fournit une réponse à l'exercice. Il a effectivement trouvé une égalité qui ressemble à une égalité de division euclidienne, et ce d'autant plus que le reste 6 ne dépend pas de n.

Lignes 247 à 254 :

247	**P** : Mais c'est pas fini. Maintenant on va se poser la question la plus intéressante.	10h47
248	**P** : Est-ce que c'est une égalité de division euclidienne ou pas ?	
249	**El** : ben oui parce que c'est positif. Et (inaudible)	(Elève écrit au tableau, après correction.) *Û 0£6<n-2*
250	**P** : Non, attention, elle est large d'un côté et stricte de l'autre.	
251	**P** : Vous êtes sur de ce que vous m'écrivez ?	
252	**El** : non	
253	**P** : Quel est le diviseur ?	
254	**El** : n moins deux.	

Le fait que l'élève veuille retourner s'asseoir et que P2 soit obligée, ligne 247, de lui dire que la correction n'est pas finie confirme le dédoublement de situation qui s'est opéré. La problématique soulevée par l'exercice n'a pas été dévolue aux élèves. Ils se sont donc attachés à la tâche « Ecrire n^3-2 sous la forme n-2 que multiplie quelque chose » pour répondre aux attentes de P2. Cette tâche n'étant pas motivée par la situation, l'élève au tableau ne peut comprendre qu'il n'a pas fini de résoudre l'exercice.

P2 doit donc réinstaller le problème initial et demande à l'élève si l'égalité qu'il a obtenue est « une égalité de division euclidienne ou pas ». Cela paraît évident à l'élève qui n'arrive pas à décrypter les attentes de P2. Pour lui, le fait que le reste soit « positif » suffit à justifier le fait que cette égalité est bien une égalité de division euclidienne.

Par ailleurs, l'hypothèse[157] selon laquelle les connaissances des élèves sur la division euclidienne et notamment l'inégalité portant sur le reste allaient se relever insuffisantes pour leur permettre de valider leur réponse est confirmée. L'élève au tableau commence par se tromper dans l'écriture de l'inégalité, en ne mettant que des inégalités larges puis, quand P2 l'interroge pour savoir s'il est sûr de ce qu'il fait, il avoue ne pas l'être.

Lignes 255 à 264 :

255	**El** : Euh…il y a une condition	10h48
256	**P** : Ah oui. D'ailleurs on le savait dès le départ qu'il y aurait des conditions, c'était écrit dans l'énoncé. Où ?	
257	**El** : …	
258	**P** : Où est-ce que c'était écrit dans l'énoncé qu'il y aurait une condition ?	
259	**El** : …	
260	**P** : Vous avez lu l'énoncé ?	
261	**El** : là…	
262	**P** : Je ne suis pas tout à fait d'accord. Vous relisez l'énoncé et puis répondez à ma question.	
263	**El** : … discussion sur les valeurs de l'entier n.	
264	**P** : Oui.	

[157] Voir les éléments d'analyse a priori des deux exercices présentés dans le chapitre précédent.

La question de P2 sur le diviseur fait prendre conscience à l'élève que l'inégalité qu'il a écrite dépend de n. Il dit à P2 «il y a une condition». P2 utilise cette réponse pour essayer de dévoluer à nouveau le problème. Elle renvoie l'élève à la consigne écrite dans l'énoncé et la tâche qu'il doit alors résoudre est la suivante «Reconnaître dans l'énoncé à quel endroit on évoque les conditions sur n». La démarche de résolution n'est plus motivée ni par la situation, ni par P2 mais par l'énoncé de l'exercice.
L'élève ne comprend pas les attentes de P2. Alors qu'il semble avoir compris, du moins en partie, (ligne 255) le problème que P2 voulait lui faire comprendre des lignes 247 à 254, P2 change l'objet de ses questions et l'interroge maintenant sur l'énoncé de l'exercice. L'élève a par conséquence du mal à suivre. P2 paraît avoir sous-estimé ici le niveau de la réponse de l'élève qui est au tableau. Cependant, cette gestion de la réponse de l'élève lui permet peut-être de re-situer le problème pour l'ensemble des élèves de la classe. Car si l'élève qu'elle a choisi de faire passer au tableau, parce qu'il avait commencé à «avoir des idées» pendant le temps de recherche de l'exercice, n'a pas compris l'objectif de l'exercice, le reste de la classe risque d'être dans le même cas. Il est nécessaire pour elle de trouver un moyen de relier pour toute la classe l'exercice à la tâche «Ecrire n^3-2 sous la forme n-2 que multiplie quelque chose».

L'élève finit par identifier le passage dans l'énoncé.

<u>Lignes 265 à 271</u> :

265	**P** : Donc j'aimerais que vous m'écriviez cette égalité est une égalité de division euclidienne si et seulement si je donne quelles conditions pour n ?	10h49
266	**P** : … n strictement supérieur à 8.	(Elève écrit au tableau) Û *n>8*
267	**P** : Ce qui veut dire qu'il va falloir regarder ce qui se passe pour n = 3, 4, 5, 6, 7, 8.	10h50
268	**P** : Alors soit on…on fait toutes les études au cas par cas soit on essaie de se débrouiller autrement.	
269	**P** : Donc ça veut dire que si n est plus grand que 8, cette égalité est une égalité de division euclidienne avec un quotient égale à n carré plus deux n plus quatre et un reste égale à six.	
270	**P** : Et maintenant si n n'est pas plus grand que 8, ça ne marche pas.	
271	**P** : Donc il faut aussi regarder ce qui se passe pour les autres valeurs de n.	

Des lignes 265 à 266, P2 prend en charge la résolution de l'exercice. L'élève écrit sous sa dictée que $n^3-2=(n-2)(n^2+2n+4) + 6$ si et seulement si n>8.
Ligne 267, elle indique qu'il reste encore à chercher les valeurs du reste pour n allant de 3 à 8. Il s'agit d'un nouveau problème à résoudre. Elle utilise alors la même technique didactique qu'elle avait utilisée au début de l'exercice 1 et de l'exercice 2. Face à un nouveau problème, elle guide les élèves en leur indiquant les méthodes qu'ils peuvent utiliser. Elle propose ici deux techniques pour résoudre ce problème :

- Faire une étude de cas en testant les 6 valeurs de n qu'il reste à traiter ;
- Se débrouiller autrement.

Des lignes 269 à 271, elle refait le bilan de ce qui a été fait et de ce qui reste à faire pour s'assurer qu'un maximum d'élèves (et notamment celui au tableau) puisse entrer dans le nouveau problème posé.

<u>Lignes 272 à 289</u> :

272	**P** : Alors si n…	
273	**El** : on prend pour n égale 0…	
274	**P** : Je ne suis pas d'accord non plus	
275	**El** : ah ben non, euh oui, pour 3	
276	**P** : Pour n égale 3 donc on peut faire un catalogue pour les valeurs 3, 4, 5, 6, 7, 8. Ca en fait 6, moi ça me paraît un petit peu beaucoup.	10h51
277	**P** : Alors pour n=3 vous l'écrivez…	
278	**P** : Qu'est ce que vous allez faire ?	
279	**El** : Non, pour n égale 3, ce qu'on a là. A quoi c'est égal ça.	
280	**P** : Oui, j'aimerai que ça soit rédigé clairement donc vous ne voulez pas écrire pour n=3 n cube moins 2 égale et n moins 2 égale ?	
281	(Silence)	(L'élève écrit au tableau) *Pour n=3,* $n^3 - 2$
282	**P** : Égale 3. n cube moins 3 ça vaut…	
283	(Silence)	(L'élève écrit au tableau) *Pour n=3,* $n^3 - 2 = 25$ *et n*
284	**P** : Égale 5 et n moins 2 ?	
285	(Silence)	(L'élève écrit au tableau) *Pour n=3,* $n^3 - 2 = 25$ *et* $n-2=1$
286	**P** : Donc le quotient ? 25 c'est 1 fois 25 plus un reste égale à	
287	**El** : 0	
288	**P** : A zéro donc vous l'écrivez. 25 égal 1 fois 25 plus zéro donc le quotient vaut 25 et le reste…	
289	(Silence)	(L'élève écrit au tableau) *Pour n=3,* $n^3 - 2 = 25$ *et* $n-2=1$ $25=1\times 25+0$

Ligne 273, l'élève au tableau prend l'initiative d'utiliser la première technique proposée par P2 : «Faire une étude de cas en testant les 6 valeurs de n qu'il reste à traiter ». Cela n'est pas surprenant vu qu'en fait P2 a évoqué une seconde technique sans la décrire explicitement. P2 accepte ce choix de l'élève bien qu'il ne corresponde pas à son projet (ligne 276).
L'élève rédige la solution pour n=3 sous la conduite de P2.

Lignes 290 à 292 :

290	**P** : Alors pour n=4 et puis etc.	10h52
291	*Changement de face de la K7.* *P explique à l'oral le principe de division de 35 par 12 (Voir ligne 331)*	**(*Fin de K7*)**
292	**P** : On pourra alors après réitérer l'opération. Ca peut être intéressant quand il y a beaucoup de cas particuliers à étudier.	

Cependant, si P2 a laissé l'élève choisir la technique de l'étude au cas par cas, elle ne souhaite pas qu'il l'applique à toutes les valeurs de n. En effet, elle a choisi cet exercice pour travailler la seconde technique[158], qui est liée à la signification de la division euclidienne comme

[158] « Quand le reste est plus grand que le diviseur, soustraire une fois de plus le diviseur au dividende et examiner si le reste obtenu est un reste de division euclidienne ».

soustraction réitérée du diviseur au dividende jusqu'à l'obtention d'un reste plus petit que le diviseur.
Elle fait appel pour la première fois depuis le début du cours sur la division euclidienne à la division de l'école primaire pour expliquer aux élèves la technique qu'elle veut leur faire utiliser. Elle justifie l'utilisation de cette technique par rapport à l'étude de cas par l'efficacité de la première en terme de temps lorsque de nombreux cas sont à étudier. Or, ce n'est pas nécessairement vrai ici vu qu'il n'y a que 6 cas à traiter.

<u>Lignes 293 à 306</u> :

293	**P** : Alors c'est une égalité de division euclidienne. Voilà. Il est plus petit que n moins 2 donc équivalent à… mais on sait déjà que n est plus petit que 8. Donc cette partie là elle est réalisée hein dans ce cadre là.	10h53 (P écrit au tableau) Si $n \leq 8$ $n^3-2=(n-2)(\ldots)+\ldots$ $n^3-2=(n-2)(n^2+2n+5)$ $+ 6-(n-2)$ $n^3-2=(n-2)(n^2+2n+5)$ $+8-n$
294	**P** : Donc il nous reste… quoi ?	
295	**El** : ... ben rien.	
296	**P** : Si, il nous reste quelque chose, une condition sur n à cause de ça. Celles-ci elles sont pas toujours réalisées de conditions.	
297	**P** : Donc qu'est-ce qu'elles nous donnent sur n ?	
298	(Silence)	(P écrit au tableau) *C'est une égalité de division euclidienne* *Û 0£8-n<n-2*
299	**P** : Ben ça donne ?	
300	(Silence)	
301	**P** : Ca donne 8 et 2 dix plus petit que 2n. 10 plus petit que 2n ça fait ?	
302	**Classe** : 5 plus petit que n.	
303	**P** : Donc autrement dit, n supérieur à…	
304	**Classe** : 5	
305	**P** : à 5.	(P écrit au tableau) *Û n>5*
306	**P** : Donc ça règle le problème de 8, de 7 et de 6.	

P2 choisit alors de prendre la craie et de rédiger elle-même la solution tandis que l'élève envoyé au tableau reste sur le côté et regarde l'enseignante faire les calculs qui lui permettent d'aboutir à $n^3-2=(n-2)(n^2+2n+5) + 8-n$.
P2 a sûrement choisi cette solution pour deux raisons :

- elle sait que c'est un passage technique assez délicat et elle pense que l'élève au tableau ne pourra pas le faire de lui-même ;
- le temps avance, on s'approche de la fin de la première heure de la séance et il faut qu'elle termine l'exercice rapidement pour pouvoir garder une heure pour le D.S. à venir.

Remarquons qu'elle ne fait pas explicitement le lien entre ses calculs et l'exemple numérique qu'elle venait juste de donner et qu'elle n'accompagne pas ses calculs d'un discours permettant de les expliquer.

L'élève au tableau ne reconnaît pas ce qui pourrait jouer le rôle du reste dans l'égalité $n^3-2=(n-2)(n^2+2n+5) + 8-n$ (lignes 294 à 295). P2 décide alors de prendre en charge les réponses aux questions qu'elle pose et n'attend pas de réponse de la part de l'élève pour écrire la condition portant pour le reste.

La classe intervient alors (à partir de la ligne 302) pour répondre aux questions de P2. Ces interventions ne se font qu'à partir du moment où les questions de P2 portent, non plus sur des questions d'arithmétique, mais sur la résolution d'une inégalité. Par effet Topaze, P2 obtient la réponse puis rédige la condition portant sur n : « $\Leftrightarrow$ n>5 » avant de faire le bilan oralement des cas qui viennent d'être réglés.

Notons que tout ce passage s'est déroulé très vite, en une minute trente environ.

<u>Lignes 307 à 322</u> :

307	**P** : Donc pour n= 6, 7 ou 8, on a un quotient égale à	10h54 (milieu) (P s'adresse à l'élève au tableau)
308	**El** : euh j'ai pas suivi là…	
309	**P** : Donc ça règle le problème…	
310	**P** : ici, je traite combien de cas en même temps ?	
311	**El** : .. 8	
312	**P** : Non pas 8.	
313	**P** : Pour n inférieur ou égal à 8, cette égalité là est une égalité de division euclidienne à condition que n soit plus grand que 5.	
314	**P** : Donc là, vous réglez combien de cas en même temps ?	
315	**El** : 3	
316	**P** : 3. Je viens de régler n=6, n=7 et n=8. Donc pour n=6, n=7 ou n=8, le quotient s'écrit	(Pendant ce temps, l'élève écrit au tableau) *Pour n=6, n=7 ou n=8*
317	**P** : le quotient vaut combien ?	
318	**El** : n carré…	
319	**P** : n carré plus 2n plus 5 et le reste ?	
320	**El** : 8 moins n.	
321	**P** : 8 moins n.	
322	**P** : Donc quotient égale n carré plus 2n plus 5 et reste égale 8 moins n.	(Pendant ce temps, l'élève écrit au tableau) *Pour n=6, n=7 ou n=8, quotient=n^2+2n+5 et reste=8-n*

P2 souhaite rendre sa place à l'élève qui est toujours au tableau. Elle lui demande donc quel est le quotient trouvé dans les cas n=6, 7 et 8. Mais l'élève, en lui laissant sa place, ligne 293, au moment où P2 a pris la craie, n'a pas suivi l'intervention de P2 au tableau (ce qui est confirmé par l'échange des lignes 310 à 312).

Par une succession d'effets Topaze, P2 finit par obtenir de l'élève les réponses qu'elle attend et lui dicte la conclusion à rédiger à la suite de ses calculs.

On a ici un partage de responsabilité de l'écriture au tableau. L'enseignante intervient pour faire, rapidement, les calculs permettant d'aboutir à la solution, l'élève rédige alors la conclusion tirée de ces calculs pour répondre à la question posée dans l'exercice. Mais cette technique dysfonctionne car l'élève, du moment qu'il n'avait plus en charge la responsabilité d'écrire au tableau, s'est désintéressé de ce qui y était écrit. Il ne peut donc pas en reprendre la responsabilité au moment de la rédaction de la conclusion.

Lignes 323 à 325 :

323	**P** : Voilà, et puis maintenant, si n est inférieur ou égal à 6, le reste est à nouveau trop grand donc je réitère l'opération.	10h55 (milieu)
324	**P** : Donc il me reste à régler le problème, n=5, n=4, il n'y en a que 2, on peut les régler à la main directement donc là c'est bon.	
325	**P** : Vous avec le choix. Y'en a plus que 2 à régler, donc on peut essayer de faire le même travail ou régler au cas par cas.	P s'adresse à l'élève au tableau

De même qu'à la ligne 269, P2 fait le bilan de ce qui vient d'être fait et de ce qui reste à faire pour traiter l'exercice. Un nouveau problème est introduit : il s'agit maintenant de trouver le reste de la division euclidienne de n^3-2 par (n-2) quand n=5 et n=4 ; le cas n=3 ayant déjà été traité. Elle utilise toujours la même technique pour dévoluer ce problème aux élèves : elle leur indique différentes techniques permettant de résoudre ce problème.

Lignes 326 à 330 :

326	**P** : Est-ce que vous avez compris comment se faisait ce travail là ou pas ?	10h56
327	**El** : la deuxième partie elle est un peu chaude, j'ai pas très bien compris.	
328	**P** : Ben est-ce que…	
329	**P** : ici ça veut dire que le reste allait être trop grand.	
330	**P** : Donc si le reste est trop grand, ça veut dire que j'ai pas fait ma division correctement.	

Comme l'élève ne réagit pas suite à son intervention, P2 tient à s'assurer de sa compréhension de la démarche suivie jusque là. Or l'élève n'a pas compris comment l'enseignante avait réglé les cas n=6, 7 et 8.
C'est donc à partir de la ligne 329 que P2 explique la logique qui a guidé ses calculs, logique qui n'avait pas été explicitée lors de la réalisation de ceux-ci (voir lignes 290 à 292).

Lignes 332 à 339 :

332	**P** : Si je divise 35 par 12 et je vais mettre une fois, il va me rester 23 donc mon reste est trop grand.	(P écrit au tableau) *35=12×1+23* *35=12×2+11*
333	**P** : Mon reste est trop grand ça veut dire que mon diviseur est trop petit. Donc je l'augmente d'une unité et puis je regarde.	
334	**P** : Donc 2 fois 12, 24, 24 pour aller à 35, 11, cette fois c'est bon puisque 11 est plus petit que 12.	
335	**P** : Et bien, si n est plus petit que 8, n moins 2 va être inférieur ou égal à 6 donc j'ai un reste qui est trop grand.	
336	**P** : Puisque ce reste est trop grand, ça veut dire que mon diviseur est trop petit donc j'augmente mon diviseur d'une unité et je diminue mon reste puisque j'ai mis une fois n moins 2 de plus ici, je l'enlève là pour conserver l'égalité.	
337	**P** : Et ensuite je regarde si ça, ça traduit une division euclidienne et dans quelles conditions.	
338	**P** : D'accord ?	
339	**P** : Sinon vous pouvez faire tous les cas hein, de n=3 jusqu'à n=8, c'est à vous de choisir.	

L'incompréhension de l'élève au tableau à propos de la démarche de résolution choisie pour résoudre les cas n=6, 7 et 8 semble faire prendre conscience à P2 qu'elle a sûrement résolu trop rapidement ces trois cas.

Cette incompréhension lui permet de revenir sur l'objectif d'apprentissage qu'elle visait à travers cet exercice. Elle reprend alors l'explication de la logique qui sous-tend la résolution en l'expliquant d'abord sur un exemple numérique et ensuite sur les nombres de l'exercice.

Par ailleurs, comme cette méthode s'est relevée difficile pour les élèves, elle revient sur la technique qu'elle avait rejetée (lignes 290 à 292) pour des raisons d'efficacité. Elle donne par là aux élèves en difficulté une technique leur permettant de résoudre l'exercice au cas où ils ne comprennent pas du tout celle qu'elle veut mettre en avant.

Elle ne corrige pas les cas n=4 et n=5.

Lignes 340 à 341 :

340	**P** : Alors je crois qu'on va en rester là car après c'est les bases de numération, donc la semaine prochaine encore de l'arithmétique.	10h57
341	(Silence)	*En deuxième heure, c'est le premier DS d'arithmétique*

Finalement, comme la première heure de la séance vient de se terminer, P2 décide d'arrêter son cours pour passer au D.S. Sa remarque peut laisser penser qu'elle avait prévu de passer moins de temps sur la division euclidienne.

c) Conclusion de cette partie

Dans la correction de cet exercice, on constate que les élèves et P2 se partagent les rôles de façon relativement claire : P2 a en charge la logique de la situation et l'avancée de la correction suivant cette logique tandis que les élèves ont en charge l'application des techniques correspondant aux sous-tâches identifiées par P2. Ce partage des rôles a pour principal effet de créer une incompréhension profonde chez les élèves qui se retrouvent à résoudre des tâches pour eux isolées, motivées non pas par la situation mais par les demandes de P2.
Ce partage marqué des responsabilités de chacun est dû à la technique didactique que P2 utilise pour dévoluer les exercices aux élèves. Elle leur indique la première tâche à résoudre pour débuter l'exercice et mentionne toujours les techniques à utiliser. Cette technique didactique pour remplir la tâche «Faire faire un exercice aux élèves » semble être justifiée chez P2 par rapport aux résultats « technologiques didactiques » suivants : il ne faut pas qu'un élève ne puisse pas démarrer l'exercice et il faut également que tous les élèves arrivent d'emblée à entrer dans la démarche de résolution souhaitée même si cela s'obtient par une négociation à la baisse de la responsabilité des élèves par rapport au savoir.
Par ailleurs, il est possible que le fait que les exercices soient intégrés au cours justifie ces « technologies ». En effet, cela renforce le poids de la contrainte du temps sur la gestion de P2 des exercices[159]. Le topos des élèves est par conséquent fortement réduit dans un domaine dans lequel il est généralement important.

[159] Le cours étant l'élément moteur de l'avancée du temps didactique pour cette enseignante (voir chapitre C2), elle ne peut pas se permettre de passer trop de temps sur des exercices qui sont insérés dans le cours en tant qu'applications.

III.8 Conclusion : du savoir apprêté au savoir enseigné dans la classe de P2

Tout comme nous l'avons fait pour P1, nous allons conclure l'analyse a posteriori du protocole de P2 en développant deux points : une analyse des techniques didactiques utilisées par P2 et une analyse du savoir enseigné pendant cette démonstration.

a) Techniques didactiques

Voici un tableau récapitulatif des principales techniques didactiques mises en œuvre par P2 dans son cours sur la division euclidienne[160] :

Regroupement d'épisodes	Temps	Lignes	Tâches et techniques didactiques
Introduction du cours et énonciation du théorème	4 minutes	1 à 13	Td_1 « Planter le décor dans lequel s'inscrit le théorème de la division euclidienne » τd_2^1 : Situer par rapport à la structure du cours τd_4^1 : Situer par rapport à des connaissances antérieures Td_2 « Enoncer le théorème de la division euclidienne » τd_3^2 : Enoncer et écrire le théorème en même temps Td_3 « Introduire la démonstration de la division euclidienne » τd_2^3 : Donner la structure de la démonstration.
Existence du couple (q,r)	8 minutes	14 à 96	Td_3 : « Introduire la démonstration de l'existence » τd_1^3 : Ne pas introduire la démonstration. Td_4 : « Faire la démonstration de l'existence » τd_3^4 : Faire la démonstration au tableau en posant des questions aux élèves. Td_5 : « Conclure la démonstration de l'existence » τd_1^5 : Passer à la suite sans commentaire particulier.
Unicité du couple (q,r)	7 minutes	97 à 151	Td_3 : « Introduire la démonstration de l'unicité » τd_3^3 : Faire trouver aux élèves la structure de la démonstration. Td_4 : « Faire la démonstration de l'unicité » τd_3^4 : Faire la démonstration au tableau en posant des questions aux élèves. Td_5 : « Conclure la démonstration de l'unicité » τd_1^5 : Passer à la suite sans commentaire particulier.
Conclusion et organisation de la suite du cours	1 minute	152 à 159	Td_5 : « Conclure la démonstration de la division euclidienne » τd_1^5 : Passer à la suite sans commentaire particulier.

Fig. 43 : Techniques didactiques utilisées par P2 au cours de la démonstration du théorème de la division euclidienne

De même que P1, P2 met en œuvre un éventail de techniques didactiques restreint pour répondre à chaque type de tâche et ces techniques se révèlent stables pendant tout le cours.

[160] Nous n'avons pas inclus ici la partie exercices.

Cependant, contrairement à P1, P2 fait le choix de faire intervenir les élèves pendant la démonstration. La mise en œuvre de ces techniques donne lieu à des effets Topaze manifestes, comme nous avons pu le voir.

Il faut noter l'absence systématique de conclusion (τd_1^5) quand P2 finit la démonstration ou une partie de la démonstration. La structuration du cours de P2 se situe donc essentiellement aux moments d'introduction des démonstrations (utilisation des techniques didactiques τd_2^3 et τd_3^3).

b) Savoir enseigné

En faisant participer les élèves dans la démonstration, P2 s'expose à des interventions pouvant perturber plus ou moins fortement le déroulement prévu de son projet. C'est d'ailleurs ce qui se passe tout au long de la séance. Il en résulte un écart entre le savoir apprêté et le savoir enseigné.
P2 est contrainte de revoir à la baisse ses exigences au niveau de la démonstration. Par exemple, la tâche mathématique « identifier que q est la partie entière de a/b à partir de l'inégalité $q \leq a/b < q+1$ » devient « retrouver le nom 'partie entière' à partir de l'exemple 'trouver le plus petit entier inférieur ou égal à 2,7' ».

En faisant intervenir les élèves, P2 est contrainte « d'atomiser » son projet en tâches isolées car elle semble ne pas disposer de techniques didactiques lui permettant de gérer ce genre d'incidents autrement, dans le feu de l'action. Cette atomisation du projet est renforcée par le fait que P2 ne fait pas de conclusion après chaque étape de la démonstration.

CONCLUSION

Tout comme nous l'avons montré dans les deux chapitres précédents, nous constatons que le mode de fonctionnement didactique routinier des deux enseignantes observées représente une contrainte forte. En effet, il conditionne leur activité et pèse fortement sur les modifications apportées sur le savoir apprêté lors de sa réalisation effective en classe.

Pour P1, l'écart entre le savoir apprêté et le savoir enseigné est moindre que pour P2. Cela s'explique en grande partie par la place que chacune d'elles laisse aux élèves dans leur manière habituelle de faire cours.

P1 évite de façon délibérée de faire intervenir les élèves. Ce choix correspond-il à la vision qu'elle se fait de la manière dont elle doit organiser l'activité mathématique en classe ou bien lui permet-il de se « protéger » des incidents pouvant l'éloigner de son projet ? En effet, comme le souligne Chevallard (1997, p. 35), « le cours magistral bannit en particulier le corps à corps didactique avec les élèves ». Se pose alors le problème de la compréhension des élèves et de l'effet de ce mode de fonctionnement sur l'apprentissage des élèves. Une technique de structuration forte de son discours, d'oralisation importante de l'explication des démarches choisies et d'allers-retours fréquents entre exemple numérique et démonstration peut-elle remplacer des indices de compréhension relevés dans l'intervention des élèves ?

De son côté, P2 cherche au maximum à faire participer les élèves. Or, nous avons mis en évidence un manque de cadrage du projet mathématique par un projet didactique suffisant[161]. Son projet ne résiste pas aux perturbations venant des élèves. Il en découle une « atomisation » en tâches isolées et seulement identifiées par l'enseignante, sans motivation réelle pour les élèves. En classe, l'activité des élèves, guidés par l'enseignante, se résume essentiellement à l'application de techniques permettant de résoudre ces tâches isolées. La reconstruction de la cohérence du projet est à leur charge (P2 ne fait que peu de bilans et de structurations pendant la démonstration) et doit s'effectuer en dehors de la classe.

Nous avons par ailleurs mis en évidence que P1 et P2 disposent toutes deux d'un ensemble de techniques didactiques très stable mais relativement restreint. Par conséquent, les régulations de la relation didactique ne peuvent se faire que par l'utilisation de ces techniques, ce qui contraint les choix mathématiques que P1 et P2 peuvent faire lors du déroulement de la séance en classe. Le panel de techniques didactiques à la disposition de l'enseignant fait donc partie du système de contraintes et de conditions qui détermine le passage du savoir apprêté au savoir enseigné.

Nous finirons par une remarque d'ordre théorique. Dans l'étude menée dans ce chapitre, nous avons utilisé des outils d'analyse des pratiques enseignantes provenant de différents cadres théoriques. Chacun d'entre eux nous permet en effet d'appréhender une dimension particulière de l'activité du professeur. Cependant, nous n'avons pas entièrement réussi à articuler l'utilisation de ces différents outils. Une des raisons vient du fait que l'analyse des pratiques enseignantes dans le cadre de la TAD est davantage développée dans cette recherche que celles menées dans les deux autres cadres théoriques utilisés. Il faut cependant souligner que la spécificité de nos protocoles ne nous a pas permis, pour le moment, d'approfondir les analyses dans les autres cadres théoriques (nous pensons notamment à l'analyse de l'activité de l'enseignant en termes de structuration du milieu). Néanmoins, nous pensons que cette partie de notre travail amène à se questionner sur les possibilités, la pertinence, les limites et la complémentarité des différents modèles théoriques existants dans le champ de la didactique des mathématiques pour modéliser les pratiques ordinaires en classe des enseignants.

[161] Il s'agit bien d'un problème de projet didactique (et non pédagogique) car il est lié à des problèmes de gestion de classe dans un rapport spécifique au savoir en jeu (cf. rôle de la partie entière et des deux exercices).

PARTIE D

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CHAPITRE D

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Revenons sur le questionnement initial qui nous a conduite à mener ce travail. Comme nous l'avons souligné en introduction au chapitre A, nous voulions comprendre « ce qu'il se passe quand un objet de savoir arrive dans les programmes d'enseignement ». Ce point de départ nous a amenée à situer notre recherche dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et à prendre pour objet d'étude l'arithmétique de terminale S spécialité mathématique.

De l'arithmétique à enseigner à l'arithmétique enseignée : une analyse écologique

Ainsi, notre objectif principal était de comprendre les mécanismes du passage du programme à la classe pour un objet de savoir mathématique donné. Nous avons choisi l'arithmétique comme « objet » de savoir car, à l'époque où cette recherche a débuté, l'arithmétique venait d'être réintroduite dans les programmes officiels d'enseignement après une vingtaine d'années d'absence. Nous supposions que ce bouleversement dans les habitudes d'enseignement nous donnerait l'occasion de mener à bien notre projet car, contrairement aux autres notions présentes depuis plus longtemps dans les contenus du programme, l'effet de nouveauté était propice à mieux mettre en évidence les effets du passage du savoir à enseigner au savoir enseigné.

Ce questionnement nous a conduite, dans un premier temps, à retravailler le concept de transposition didactique interne et à introduire la notion de savoir apprêté afin de pouvoir distinguer, par le biais des différents apprêts didactiques qui peuvent être faits de ce savoir, tous les niveaux de systèmes de contraintes pesant sur ce processus de transposition.
Nous avons alors mené une analyse institutionnelle de l'arithmétique dans une perspective écologique pour dégager les différents systèmes de contraintes et de conditions qui pèsent sur les modifications de ce savoir au cours du processus de transposition didactique interne.
Nous avons obtenu les résultats suivants.

Le programme de 1998 –année de la réintroduction de l'arithmétique– se fait l'écho de choix transpositifs noosphériens en rupture avec ceux qui avaient guidé la rédaction des programmes de terminales scientifiques avant le début des années 80. En effet, en 1998, l'arithmétique est réintroduite dans les contenus du programme avec une volonté affichée d'en faire un lieu d'enseignement des mathématiques expérimentales. L'arithmétique a, dans une large mesure, pour fonction « officielle » de permettre un travail sur les démarches algorithmiques. Ce domaine d'étude pouvait, a priori, sembler propice à la mise en œuvre d'une telle volonté, qui correspondait à une idéologie dominante issue de la société. En effet, plusieurs facteurs peuvent conduire à faire de l'arithmétique un lieu de vie idéal pour le travail de telles démarches. Tout d'abord, l'arithmétique est, historiquement, un domaine qui présente de nombreux algorithmes non triviaux. Par ailleurs, ces algorithmes peuvent être abordés à partir d'un nombre restreint de pré-requis relativement simples (en arithmétique, on travaille sur les nombres entiers, qui sont connus depuis longtemps des élèves). Enfin, l'arithmétique de terminale S spécialité mathématique est un « îlot » dans le programme d'enseignement. N'entretenant que peu de liens avec les autres notions au programme, l'arithmétique peut permettre d'introduire des idées « novatrices » sans bouleverser la globalité de l'enseignement.

Or, nous avons montré que la volonté de mettre en avant l'aspect algorithmique de l'arithmétique n'est pas relayée par les manuels de 1998. En effet, ces derniers ne donnent non seulement que très rarement des démonstrations constructives des principaux théorèmes d'arithmétique mais ils ne proposent également aucun exercice dans lequel un algorithme est un objet d'étude et peu d'exercices dans lesquels un algorithme est un outil efficace de résolution, en dehors de la résolution d'équations diophantiennes. Par ailleurs, l'usage fait dans les manuels de l'outil informatique dans le cadre des cours n'est pas, dans la plupart des cas, inséré dans un projet didactique permettant un travail sur la démarche algorithmique (à l'exception notable du manuel Transmath). Par conséquent, l'intégration de ces outils dans les manuels se révèle difficilement viable, comme le montrent les importantes modifications qui portent sur ce sujet dans les manuels édités en 2002, à l'occasion des réajustements de programme d'arithmétique.

Cette difficulté à faire vivre l'aspect algorithmique de l'arithmétique par le biais de l'utilisation de calculatrices, de tableurs ou d'autres moyens informatiques se retrouve dans les choix de cours des enseignants. Tout comme les manuels, ils n'utilisent que très peu les outils informatiques pour effectuer un véritable travail sur les démarches algorithmiques en arithmétique. Et bien que ces derniers proposent davantage de démonstrations constructives, la vie de cet aspect de l'arithmétique dans le savoir apprêté et dans le savoir enseigné n'est pas assurée. En fait, les enseignants et les manuels favorisent explicitement l'aspect raisonnement de l'arithmétique au détriment de son aspect algorithmique.
Notons que parmi les facteurs qui font, a priori, de l'arithmétique un lieu idéal pour l'enseignement des démarches algorithmiques, deux peuvent être vus comme faisant de l'arithmétique un lieu idéal pour l'enseignement du raisonnement. En effet, comme les pré-requis sont peu nombreux et simples et comme cet enseignement s'insère dans un « îlot » du curriculum du lycée, on peut faire en arithmétique des démonstrations « rigoureuses » en partant par exemple d'une axiomatique sur les propriétés des parties de **N**. Ajoutons que si, historiquement, l'arithmétique est un domaine qui comporte de nombreux algorithmes, elle présente également toutes sortes de types de raisonnement.

Trois facteurs peuvent expliquer le fait que cette volonté du programme n'est pas reprise par les manuels et les enseignants. Tout d'abord, mettre en avant l'aspect algorithme est en rupture avec les représentations dominantes de ce qu'est l'activité mathématique dans l'institution scolaire française et encore plus avec celles que les enseignants se font de l'activité mathématique dans les cursus scientifiques post-bac (études vers lesquelles se dirigent la majorité des élèves de spécialité mathématique). Par ailleurs, de nombreuses contraintes d'ordre matériel freinent l'utilisation des outils informatiques dans les classes. Enfin, il manque de références et d'habitudes pour la mise place d'un enseignement « algorithmique » de l'arithmétique (par exemple, l'utilisation des outils informatiques semble rarement guidée par un questionnement didactique initial).
Suite à cela, en 2002, le programme d'arithmétique est modifié afin d'effectuer les réajustements nécessaires après une période d'enseignement de quatre ans du programme de

1998. Les nouveautés de programme résident essentiellement dans deux points : la donnée d'exemples de mise en œuvre explicite d'utilisation des outils informatiques et la mise en avant de l'aspect raisonnement. Si l'introduction d'exemples d'utilisation d'outils informatiques apporte une première réponse au manque de référence permettant la mise en place d'un enseignement « algorithmique » de l'arithmétique, le second point conforte les enseignants et les auteurs de manuels dans leur choix de se servir de l'arithmétique pour enseigner le raisonnement.

Faire vivre l'aspect algorithmique de l'arithmétique semble donc difficile dans le cadre des systèmes de contraintes qui pèsent à chaque niveau du processus de transposition didactique interne. Or, cette fonction de l'arithmétique ne devrait pas être « écrasée » par la fonction « raisonnement ». En effet, ces deux aspects de l'arithmétique sont intimement liés : mettre en œuvre une démarche algorithmique c'est utiliser un type de raisonnement particulier. Cependant, un ensemble de contraintes externes au savoir empêche la réunion de ces deux aspects de l'arithmétique.

Comment faire vivre alors l'aspect algorithmique de l'arithmétique dans le savoir apprêté et le savoir enseigné ? Deux pistes nous semblent intéressantes. En dehors des questions de formation des enseignants, un travail peut être fait au niveau des manuels. En effet, il nous paraît insuffisant de mettre dans les programmes des incitations à l'utilisation des outils informatiques en classe ou même de proposer des brochures de type IREM présentant des réflexions sur un enseignement algorithmique de l'arithmétique. Ces brochures fournissent un point d'appui pour les enseignants construisant leur cours mais encore peu de professeurs les consultent. A contrario, la quasi-totalité des enseignants utilisent les manuels scolaires comme référence pour construire leur cours. Ces manuels peuvent être considérés comme des institutions de formation pour les enseignants d'après les travaux de Neyret (1993, 1995). Ainsi, proposer, dans les manuels, une véritable réflexion didactique sur l'utilisation des outils informatiques dans le cours d'arithmétique ainsi que des démonstrations constructives articulant raisonnement et démarche algorithmique permettrait, a priori, de fournir des conditions davantage favorables à la vie de l'aspect algorithmique de l'arithmétique en classe.

De l'arithmétique à enseigner à l'arithmétique enseignée : le rôle de l'enseignant dans la transposition didactique interne

Les résultats présentés ci-dessus soulignent l'existence de différents acteurs jouant un rôle dans la transposition didactique interne : les auteurs de manuels et les enseignants. Nous avons montré dans notre travail le rôle central du professeur dans ce processus de transposition. En effet, contrairement aux auteurs de manuels, les enseignants réalisent les deux étapes du processus de transposition didactique interne : après avoir apprêté le savoir à enseigner, ils sont chargés de l'enseignement effectif de ce projet en classe. Afin d'analyser, sur une étude de cas, ce rôle du professeur dans la transposition didactique interne, nous avons observé de façon naturaliste deux enseignantes (P1 et P2) sur une année entière.

Nos analyses ont montré des différences entre ces deux enseignantes au niveau du savoir apprêté. En effet, alors que P1 intègre dans son cours des éléments de programmation informatique, P2 n'utilise jamais la calculatrice autrement que pour faire –ou vérifier– des calculs. L'aspect algorithmique de l'arithmétique est donc diversement mis en valeur dans ces deux projets de cours. A contrario, ces deux enseignantes favorisent explicitement l'aspect raisonnement de l'arithmétique. Cependant, cet aspect est plus ou moins développé selon les démonstrations choisies pour les théorèmes d'arithmétique (il faut souligner que P1 base l'ensemble de son cours sur l'axiomatique des propriétés de **N**). Par ailleurs, ces deux enseignantes ne présentent pas les mêmes contenus dans leur cours d'arithmétique. Sur l'exemple du cours construit autour de la division euclidienne, alors que P2 ne propose que deux exercices et utilise le théorème de la division euclidienne pour introduire les changements de base de numération et démontrer les propriétés des congruences, P1 donne une dizaine d'exercices sur ce thème d'étude et ne se sert du théorème de la division euclidienne que pour introduire la notion de congruence, réinvestie à son tour pour établir les critères de divisibilité classiques.

Nous avons identifié plusieurs systèmes de contraintes permettant d'expliquer ces différences d'apprêtage didactique de l'arithmétique à enseigner. Deux nous semblent particulièrement importants : la représentation que ces deux enseignantes se font de l'activité mathématique ainsi que leur mode de fonctionnement didactique –ces deux contraintes n'étant pas indépendantes. Nous avons montré le poids de ces contraintes à tous les niveaux d'activité de l'enseignant.
Dans le cas de l'enseignante P1, le fait de centrer l'activité mathématique sur la partie « praxis » la conduit à mettre en œuvre une organisation didactique particulière pendant ses séances : elle fait d'abord cours au tableau sans faire intervenir les élèves avant de les laisser ensuite travailler de façon autonome sur des fiches d'exercices. Ce mode de fonctionnement pèse sur ses choix mathématiques et sa structuration du cours d'arithmétique sur l'année : son cours est organisé en une succession de petits chapitres portant, au plus, sur un thème d'étude, afin de pouvoir donner régulièrement des fiches d'exercices. Par ailleurs, le fait de ne pas faire intervenir les élèves pendant les cours lui permet d'éviter l'apparition d'incidents. Le savoir enseigné dans sa classe est donc proche du savoir apprêté.
Pour P2, c'est la partie « logos » de l'activité mathématique qui est le moteur de l'activité mathématique. Ainsi, les cours occupent une place importante dans son enseignement d'arithmétique et la plupart des exercices qu'elle donne sont insérés dans ce cours pour fournir des exemples d'applications. Son cours est alors organisé en deux grandes parties afin de pouvoir créer une cohérence mathématique au niveau des notions et théorèmes présentés dans ces parties. A la différence de P1, elle fait intervenir les élèves pendant ses cours en leur posant des questions et en les faisant passer au tableau. Des incidents apparaissent inévitablement et, en conséquence, le savoir enseigné dans sa classe peut s'éloigner du savoir apprêté car la gestion de ces incidents la conduit généralement à découper son projet en sous-tâches non motivées par la logique interne de la situation.

Si les choix mathématiques et didactiques de ces deux enseignantes se révèlent différents, nous avons cependant mis en évidence une stabilité forte des techniques didactiques utilisées par chacune d'elles, même si celles-ci sont en nombre relativement restreint.

Ces résultats ont été obtenus à partir d'une méthodologie d'analyse que nous avons construite. Si, dans un premier temps, l'introduction de la notion de savoir apprêté nous donne un outil efficace pour décrire et identifier le travail mené en amont des classes (en distinguant clairement le rôle de chacun des acteurs intervenant dans le processus de transposition didactique interne et en permettant, à travers les différents apprêts qu'ils font du savoir à enseigner, d'identifier leurs choix et les systèmes de contraintes qui pèsent sur ces choix), il reste insuffisant pour analyser les différents niveaux de l'activité de l'enseignant (du niveau

de détermination mathématique le plus générique, le domaine d'étude –OM globale–, au niveau le plus spécifique, le sujet d'étude –OM ponctuelle–).
Il ne donne pas non plus de moyens pour décrire la structure des organisations didactiques utilisées par les enseignants, ni leur dynamique.

Pour ce faire, nous avons proposé une « boite à outils » permettant, selon nous, d'appréhender l'analyse des pratiques enseignantes. Nous procédons par zooms successifs sur l'activité de l'enseignant en utilisant, à chaque niveau, des outils théoriques spécifiques nous permettant de décrire et d'analyser les choix mathématiques et didactiques des professeurs.
Au niveau du domaine d'étude, nous analysons le savoir apprêté par P1 et P2 en caractérisant, dans un premier temps, leur mode de fonctionnement didactique (à l'aide notamment d'une analyse de leur discours) puis en comparant la structuration de leur cours découpé en chapitres, parties et paragraphes avec la structuration mathématique du savoir à enseigner, découpé en secteurs, thèmes et sujets d'étude.
En descendant au niveau des secteurs et thèmes d'étude, nous décrivons les organisations mathématiques mises en place par les enseignants autour d'un théorème donné. Nous caractérisons, d'une part, l'organisation locale construite autour de cet élément technologique et, d'autre part, les organisations mathématiques régionales utilisant ce théorème comme élément théorique. Les choix didactiques des enseignants sont, à ce niveau, décrits en terme de moments[162] et nous analysons plus particulièrement les choix des types de tâches évalués.
Finalement, nous nous intéressons à la réalisation effective d'un moment de l'étude. Nous analysons alors les protocoles recueillis à l'aide de la notion de praxéologies didactiques et d'outils empruntés à la théorie des situations didactiques.

Ainsi, nous utilisons des outils d'analyse des pratiques enseignantes développés dans trois cadres théoriques différents (la théorie anthropologique du didactique, les recherches menées dans la lignée des travaux de Robert (2001) et la théorie des situations didactiques).
Il faut souligner que nous n'avons pas réussi, dans le cadre de cette étude, à articuler ces trois cadres théoriques. Nous avons seulement confronté les différents points vue qu'ils offrent sur les pratiques enseignantes. Amorcer ce travail d'articulation nous semble nécessaire mais soulève des questions d'ordre méthodologique difficiles. Par exemple, pour articuler la théorie anthropologique du didactique avec la théorie des situations didactiques[163] dans le cadre de notre étude, il aurait fallu pouvoir mener une analyse en termes de structuration du milieu. Or, nous ne disposions pas d'éléments suffisants sur le projet des deux enseignantes observées et sur l'activité des élèves pour mener à bien cette étude. Nous pensons toutefois qu'il serait intéressant d'essayer de conduire cette analyse[164].
Par ailleurs, nous n'avons pas introduit l'analyse des devoirs surveillés d'arithmétique dans cette recherche alors que cela nous permettrait d'appréhender une partie de l'activité des élèves, qui sont pratiquement absents des protocoles que nous avons analysés. Il nous semble important, dans la suite de ce travail, d'intégrer cette analyse à l'étude de la transposition didactique interne.

---

[162] Etant donné le mode de fonctionnement didactique des deux enseignantes que nous avons observées, la description des organisations didactiques en termes de moments d'étude n'a pas fait l'objet d'une étude approfondie.
[163] Pour un exemple d'articulation possible, se référer au travail de Coulange (2000).
[164] En nous appuyant par exemple sur le travail de Sensevy (2002) qui introduit notamment le taux d'adidacticité caractérisant l'aménagement du milieu afin d'analyser l'action du professeur en classe ordinaire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC, G. & al. (1989). La transposition didactique en mathématiques, In IREM et LIRDIS de Lyon (eds.), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie*, (pp. 3-36). Lyon

ARTAUD, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques, In Bailleul et al. (eds.), *Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Houlgate, 1997*, (pp. 101-139).

ASSUDE, T. (1993). Ecologie didactique des savoirs : quelques principes et exemples, *Actes du séminaire de Didactique et Technologiques cognitives en mathématiques année 1993-1994*, LSD2-IMAG, Grenoble, 137-165.

ASSUDE, T. (1998). Evolution de l'enseignement de l'arithmétique et formation des maîtres, *Actes du XXVème Colloque COPIRELEM*, Loctudy, 103-118.

ATTIKLEME, K. (2002). *Programme d'enseignement de la natation dans les collèges : contraintes et conditions d'élaboration. Le point de vue de l'anthropologie didactique,* Thèse de doctorat, Université Sidi Mohamed Ben Abdellah - Fes.

AYMES, J., (1997). Bac : passage ou rupture, *Repères - IREM* **n°26**, 17-40.

BATTIE, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot – Paris 7.

BEHAJ, A. (1999). *Eléments de structuration a propos de l'enseignement et l'apprentissage à long terme de l'algèbre linéaire,* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

BERNARD, R. & al. (1995). Arithmétique : demandez le programme !, in IREM de Montpellier (ed.), *Arithmétique, le retour…*, (pp. 5-9). Montpellier.

BESSOT, A., COMITI, C. (1985). Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **6(2-3)**, 305-346.

BILGOT, J.-F. (1998). Quelques remarques au sujet de démonstrations des principaux résultats, In *Arithmétique en terminale S, enseignement de spécialité nouveau programme*, (pp. 77-88). CRDP Auvergne (ed.).

BLOCH, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 125-140). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BONNEVAL, L.-M. & al (2000). *Enseigner l'arithmétique*, IREM de Poitiers (ed.).

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19(1)**, 77-123.

BOSCH, M., GASCON, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories et empiries. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 23-40 Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOSCH, M., ESPINOZA, L., GASCON, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **23(1)**, 79-136.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9(3)**, 309-336.

BROUSSEAU, G. (1988). Le contrat didactique : le milieux, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7(2)**, 33-115.

BROUSSEAU, G. (1990). Utilité et intérêt de la didactique, *Grand N, 1990-1991,* **n°47**, 93-114.

BROUSSEAU, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. In Noirfalise, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (eds), *Actes de la 8e école d'été de didactique des mathématiques – Saint-Sauve d'Auvergne – 22-31 Août 1995*, (pp. 3-45). IREM de Clermont-Ferrand.

BUTLEN, D., MASSELOT, P., ROBERT, A., VANDEBROUCK, F. (2002). Deux exemples de routines : la gestion du tableau en seconde ; la gestion par un professeur d'école en première nomination d'une séance en CP. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 221-230). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHABERT, J.-L. & al. (1994). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin éd.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique année 1988-1989*, LSD-IMAG, Grenoble, 211-236.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage éd. (1ère édition : 1985).

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12(1)**, 73-111.

CHEVALLARD, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **17(3)**, 17-54.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19(2)**, 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2002a). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001,* (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (2002b). Organiser l'étude 3. Ecologie et régulations. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

C.R.E.M. (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques), (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques,* sous la direction de J.-P. Kahane, Editions Odile Jacob. (Disponible également sur le site Internet : http://www.apmep.asso.fr/comJPK.html)

COMITI, C., GRENIER, D., MARGOLINAS, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In Arsac, G. & alii. (eds), *Différents types de savoirs et leur articulation,* (pp. 93-127). Grenoble : La Pensée Sauvage.

COMITI, C. (2002). A la recherche d'une modélisation de l'enseignant. In Bessot, A. (eds), *Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant, (Actes de la journée scientifique en l'honneur de Claude Comiti),* (pp. 37-58). Cahier du laboratoire Leibniz n°53. (Ces actes sont disponibles sur le site Internet du laboratoire Leibniz-IMAG : http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2002/Cahier53/ResumCahier53.html)

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12(2.3)**, 221-270.

CONNE, F. (1997). L'activité du couple enseignant/enseigné, In Bailleul et alii. (eds.), *Actes de la IXème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Houlgate, 1997,* (pp. 15-24). ARDM.

COULANGE, L. (2000). *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

COULANGE, L. (2001). Enseigner les systèmes d'équations en Troisième. Une étude économique et écologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **21(3)**, 305-354.

CRDP Auvergne (1998). Arithmétique en terminale S, enseignement de spécialité nouveau programme, *CRDP Auvergne (ed.).*

ENGEL, A. (1979). *Mathématiques élémentaires du point de vue algorithmique,* Paris : Cédic.

EGRET, M.-A. (1999). Problèmes d'écriture de démonstrations chez des élèves de lycée en arithmétique, In Bailleul et alii. (eds.), *Actes de la Xème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Houlgate, 1999,* (pp. 95-101).

Groupe de travail liaison Lycées-Universités de l'IREM d'Aix-Marseille (1999). Cours et activités en arithmétique pour les classes de terminales, *IREM d'Aix-Marseille (ed.)*, N° 22, 2ème édition.

HACHE, C. (1999). *L'enseignant de mathématiques au quotidien : Etude de pratiques en classe de seconde*, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot - Paris VII.

HACHE, R. (2001). L'univers mathématique proposé par le professeur en classe, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **21(1.2)**, 81-98.

HERSANT, M. (2001). Interactions didactiques et pratiques d'enseignement : le cas de la proportionnalité au collège. In Assude, T. & Grugeon, B. (eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématique. Année 2001*, (pp. 295-319). IREM et ARDM.

HERSANT, M. (2002). Interactions didactiques et pratiques d'enseignement. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, Cédérom. Grenoble : La Pensée Sauvage.

HERSANT, M. (à paraître en 2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies.*

MARGOLINAS, C. (1993). Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Actes du séminaire de Didactique et Technologiques cognitives en mathématiques année 1993-1994*, LSD2-IMAG, Grenoble, 27-83.

MARGOLINAS, C. (1997). Projet pour l'étude du rôle du professeur en situation, *Actes du séminaire de DidaTech, séminaires 1997*, Laboratoire Leibniz, Grenoble, 37-54.

MARGOLINAS, C. (1998). Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situation d'enseignement. In Noirfalise, R. (eds), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'université d'été– Corps- 4-11 Juillet 1998*, (pp. 3-16). IREM de Clermont-Ferrand.

MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 141-155). Grenoble : La Pensée Sauvage.

MATHERON, Y. (1999). Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques, *Petit x, Année 1999-2000* **n°54**, 51-78.

MONCORGE, D. (1998). Un projet de cours d'arithmétique pour les spécialités maths en TS, In *Arithmétique en terminale S, enseignement de spécialité nouveau programme*, (pp. 101-139). CRDP Auvergne (ed.).

NEYRET, R. (1993). Un essai d'analyse de l'évolution du fonctionnement des systèmes de nombres dans les institutions de formation des maîtres, *Actes du séminaire de Didactique et Technologiques cognitives en mathématiques année 1993-1994*, LSD2-IMAG, Grenoble, 5-26.

NEYRET, R. (1995). *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

NGUYEN, C.-T. (2002). *La notion d'algorithme dans l'enseignement des mathématiques au lycée. Comment l'émergence des notions de boucle et de variable en informatique s'articule à des connaissances en mathématiques ?*, Mémoire de DEA EIAH-D, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

NGUYEN, C.-T., BESSOT, A. (2003). La prise en compte des notions de boucle et de variable informatique dans l'enseignement des mathématiques au lycée, *Petit X*, **62**

NOAILLES, J. (1999). Arithmétique en terminale S du bac au post-bac, In Noirfalise A. (ed.), *Autour de la liaison Bac/Post-Bac : Problèmes de contenus, problèmes d'orientation*, (pp. 45-64). IREM de Clermont-Ferrand.

NOIRFALISE, R. (1998). Arithmétique et cryptographie, In *Arithmétique en terminale S, enseignement de spécialité nouveau programme*, (pp. 101-139). CRDP Auvergne (ed.).

NOIRFALISE, R., WOZNIAK, F. (2002). Structure, fonctionnement et écologie des organisations didactiques. A propos de statistique en 2^de^. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11^e^ école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 65-74). Grenoble : La Pensée Sauvage.

PELISSE, M.-J., PLANCHET, M. (1999). Les élèves de terminale S et les mathématiques, In Noirfalise A. (ed.), *Autour de la liaison Bac/Post-Bac : Problèmes de contenus, problèmes d'orientation*, (pp. 7-24). IREM de Clermont-Ferrand.

RAJOSON, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas*, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille III.

RAVEL, L. (2000). *Des programmes … à la classe, en passant par les manuels. Etude de la réintroduction de l'arithmétique en Terminale S spécialité*, Mémoire de DEA EIAH-D, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

RAVEL, L., (2002). Arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques : quel(s) enseignement(s) ?, *Repères - IREM* **n°49**, 93-116.

RAVEL, L., (2003). Raisonnement et nombres entiers. Comportements d'élèves de terminale S spécialité mathématique en arithmétique, *Bulletin de l'APMEP*, **447**, pp.419-429.

ROBERT, A. (1997). Quelques outils d'analyse épistémologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. In Bailleul, M. & alii. (eds), *Actes de la 9^e^ école d'été de didactique des mathématiques – Houlgate- 19-27 Août 1997*, (pp. 192-212). ARDM.

ROBERT, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **21(1.2)**, 57-80.

ROBERT, A., ROGALSKI, J. (2003). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies.*

ROBERT, A., VANDEBROUCK, F. (2001). Recherches sur l'utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques de seconde pendant des séances d'exercices (rapport de réponse à l'appel d'offre de l'IUFM de Versailles de 99-00), *Cahier de DIDIREM*, **36**.

RODITI, E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième*, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot - Paris VII.

SALIN, M.-H. (2002). Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 111-124). Grenoble : La Pensée Sauvage.

SENSEVY, G. (2002) Des catégories pour l'analyse comparée de l'action du professeur : un essai de mise à l'épreuve, In Venturi, P. & alii. (eds.), *Etudes des pratiques effectives : l'approche des didactiques*, (pp. 3-36). Grenoble : La pensée Sauvage.

SOURY-LAVERGNE, S., CHAACHOUA, H. (2002). Etayage et effet Topaze : routines et stratégie de régulation. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 231-240). Grenoble : La Pensée Sauvage.

TISSERON, C. (2002). Synthèse – Routines et régulations dans les pratiques du professeur : confrontation de différentes approches. Quels modèles pour l'enseignant. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001*, (pp. 263-278). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Manuels scolaires et programmes officiels

Manuels scolaires

ANTIBI, A., BARRA, R. (1998). *Math, Term S, spécialité*, Collection Nouveau Transmath, Editions Nathan.

ANTIBI, A., BARRA, R., MORIN, J. (2002). *Transmath, Term S, spécialité*, Collection Transmath, Editions Nathan.

BELTRAMONE, J.-P. & Alii. (2002). *Maths, Terminale S, enseignement obligatoire et de spécialité*, Collection Déclic, Editions Hachette Education.

DEBRAY, M., QUEYSANNE, M., REVUZ, D. (1971). *Mathématique Tome 1 Nombres Probabilités, Terminales C E*, Collection Queysanne-Revuz, Editions Fernand Nathan.

FERACHOGLOU, R., TERRACHER, P.-H. (1998). *Math, enseignement de spécialité, Terminale S*, Collection Terracher, Editions Hachette Education.

FERACHOGLOU, R., TERRACHER, P.-H. (2002). *Math, obligatoire et spécialité, Terminale S*, Collection Terracher, Editions Hachette Education.

GALANDRIN, J.-P. & Alii. (1998). *Maths, Terminale S, enseignement de spécialité*, Collection Déclic, Editions Hachette Education.

Textes des programmes ou accompagnements

Classe de Troisième :

Programme de 1999 : B.O. hors-série n°10 du 15 Octobre 1998.

Classe de seconde :

Programme de 2001 : B.O. hors-série n°2 du 30 Août 2001.

Classe de Terminale :

Programme de Terminale C de 1967 : Horaires, programmes, instructions du second cycle long conduisant au baccalauréat publié par l'Institut Pédagogique National en 1967.

Programme de Terminale C 1969 : Horaires, programmes, instructions du second cycle long conduisant au baccalauréat publié par l'Institut Pédagogique National en 1969.

Programme de Terminale C de 1971 : Circulaire n° 71-244 du 26 juillet 1971 (reproduite dans le manuel Queysanne-Revuz)

Programme de Terminale S spécialité mathématique de 1998 :

- B.O. hors-série n°4 du 12 juin 1997 ;
- Horaires/Objectifs/Programmes/Instructions de mathématiques des classes de 2nde, de 1ières et de terminales séries ES, L et S publié par le Centre Nationale de Documentation pédagogique en 1998.

Programme de Terminale S spécialité mathématique de 2002 : B.O. hors-série n°4 du 30 Août 2001.

Accompagnement du programme de Terminale S spécialité mathématique de 2002 : Ce document est disponible sur le site Internet du CNDP à l'adresse suivante : http://www.cndp.fr/textes_officiels/lycee/maths/pdf/MathsAccTerS03.pdf