Méthode de Dandelin-Graeffe et méthode de Baker

Ismaïla Diouf

Université Louis Pasteur

de strasbourg

Ecole doctorale

Doctorat de

Mathématiques

Par

DIOUF Ismaïla

Méthode de Dandelin-Graeffe et Méthode de Baker

Thèse dirigée par **M. MIGNOTTE Maurice**

Soutenue le …………………..

Jury :

F. AMOROSO (Rapporteur)

Y. BUGEAUD (Examinateur)

V. KOMORNIK (Rapporteur)

G. RHIN (Rapporteur)

Remerciements

L'organisation, la réalisation et l'aboutissement de cette thèse n'aurait pu se faire sans un cadre de travail matériel et intellectuel favorable. C'est pourquoi je tiens tout particulièrement à remercier le Professeur Maurice MIGNOTTE, mon directeur de thèse. Il m'a beaucoup aidé, il m'a surtout compris et a tout mis en œuvre pour la réussite de cette thèse. Je tiens aussi à remercier très sincèrement les membres du jury, les Professeurs AMOROSO, KOMORNIK, et RHIN d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Surtout pour leurs corrections et contributions très pertinentes. Je remercie beaucoup le Professeur Yann BUGEAUD d'être examinateur, de sa gentillesse et de sa disponibilité à chaque fois que je l'ai sollicité. Je sais pas comment remercier Madame Hannie MIGNOTTE qui a été d'un grand soutien moral, elle est d'une gentillesse sans limite. Avec son mari, ils m'ont presque donné un second foyer. Je pouvais passer quand je voulais chez eux, soit pour des séances de travail avec son mari, sans que ça ne la dérange, soit pour goûter aux succulents mets qu'elle mettait à notre disposition, sans compter les gâteaux de Noël et autres.
Je remercie tout le personnel de l'UFR de math-Info et de l'IRMA pour leur gentillesse et disponibilité plus particulièrement à Madame BORELL que je ne cesserai de remercier. Elle m'a montré une gentillesse et d'une courtoisie exceptionnellement.
Je remercie aussi le Professeur Mamadou SANGHARE de l'UCAD de DAKAR, pour m'avoir permis d'obtenir une bourse pour terminer cette thèse. Il n'a cessé de m'encourager et d'être disponible. Je remercie aussi les autres collègues de DAKAR, notamment Babacar DIAKHATE, Omar DIANKHA et Abdoul WATT.
Pour finir je tiens à remercier tous mes amis qui m'ont aidé et soutenu, vraiment je les remercie tous : plus particulièrement, FOALENG Tela, DIOKHE Saer et toute ma famille qui est loin, certes, mais qui n'a jamais cessé de m'encourager et de me comprendre.

Dieureudieuf !

Table des matières

Historique

La méthode de DANDELIN-GRAEFFE est une méthode itérative de recherche des racines des polynômes en une seule variable. Cette méthode a été exposée par DANDELIN en 1826. Né au Bourget le 12 Avril 1794, **GERMINAL PIERRE DANDELIN** étudia à Gand et, en 1813, il entra à l'Ecole Polytechnique de Paris. Notons que ses premiers intérêts allèrent à la géométrie. Il découvrit en 1822 un théorème important relatif aux sections d'un cône par un plan et aux sphères inscrites. Ce théorème montre qu'une section plane est une conique dont les foyers sont les points de contact des sphères inscrites. En 1826, il généralisa son théorème à un hyperboloïde de révolution, en montrant les relations entre les théorèmes de Pascal, Brianchon et l'hexagone formé par les génératrices de l'hyperboloïde. Il travailla également sur la projection stéréographique d'une sphère sur un plan (1827), dans le domaine des probabilités et dans l'algèbre. Il est mort à Bruxelles le 15 Février 1847.

Indépendamment de DANDELIN, en 1834, **NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY** découvrit cette méthode de recherche des racines. Né le 1^{er} Décembre 1792, il fut l'un des fondateurs de la géométrie non-euclidienne (on peut également citer **JANOS BOLYAI**[1]) et en particulier le père de la géométrie hyperbolique qui constitue l'une des plus belles théories de la géométrie. Il mourut le 24 Février 1856 à Kazan en Russie.

C'est **KARL GRÄFFE** (ou Karl Graeffe pour certains), né le 7 Novembre 1799 à Brunswick en Allemagne qui, après ces deux hommes, a dévéloppé cette méthode pour en faire l'une des méthodes les plus populaires aux $19^{ième}$ et $20^{ième}$ siècles. Et ceci, dans le but de répondre à la question du "Prix de l'Académie de Berlin". Il mourut le 2 Décembre 1873 à Zurich en Suisse.

[1]–15 Déc. 1802 - 27 Janv. 1860 –, mathématicien hongrois. Fils de FARKAS BOLYAI, mathématicien reconnu et ami de GAUSS. Entre 1820 et 1823, il prépara un traité sur un système complet de géométrie non euclidienne qui fut publié en 1832 comme un appendice de 24 pages d'un ouvrage de son père, "Le Tentamen". En 1848, il découvrit que LOBATCHEVSKY avait publié un travail similaire en 1829.

1 Introduction

1.1 Problématique

Pour calculer les valeurs approchées des racines d'un polynôme, il existe des méthodes itératives très anciennes comme celle de Bernoulli et celle de Dandelin-Graeffe. On peut montrer, grâce au théorème élémentaire de Dirichlet sur l'approximation rationnelle simultanée, la convergence de la méthode de Bernoulli mais pas celle de Graeffe. En effet, dans le cas de la méthode de Bernoulli, on parcourt tous les termes d'une certaine suite récurrente linéaire et grâce au théorème de Dirichlet, on sait que certains d'entre eux sont “bons”. Par contre, la méthode de Graeffe est l'analogue de la méthode de Bernoulli mais, cette fois, on ne parcourt que les termes dont les indices sont des puissances de deux et, pour de tels indices, ni le théorème de Dirichlet, ni l'algèbre linéaire ne peuvent être appliqués. La seule méthode possible est celle de Baker.

1.2 La méthode de DANDELIN-GRAEFFE

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{A}[X]$, où $\mathbf{A}$ est un anneau intègre. Décomposons P en sa partie paire[2] et sa partie impaire[3] : soit $P(x) = F(x^2) + x\,G(x^2)$. Cette décomposition est unique.

Proposition 1.1.
Avec les notations ci-dessus, le polynôme

$$P_1(x) = P(\sqrt{x})\ P(-\sqrt{x})$$

est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{A}$ *qui vérifie :*

$$P_1(x) = F^2(x) - xG^2(x).$$

Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sont les racines de* P *dans un anneau* $\mathbf{B}$ *contenant* $\mathbf{A}$ *alors les racines de* P_1 *dans* $\mathbf{B}$ *sont les carrés des racines de* P*.*

Calcul approché des racines

Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes dont les racines sont $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Quitte à les renommer, on peut supposer que les z_i sont telles que :

$$|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \cdots \geqslant |z_n|.$$

[2]elle s'obtient en regroupant les monômes de degré pair

[3]elle s'obtient en regroupant les monômes de degré impair

Plus généralement, on pose

$$\mathcal{G}_k(P) = \prod \left(X - z_j^k\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(k)}\, X^i;$$

le cas précédent, le plus classique, correspond au choix de $k = 2$. Supposons qu'il existe un indice i tel que $|z_i| > |z_{i+1}|$. Alors si les indices j_k, $k \leqslant i$, sont distincts, soit $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_i$, on a

$$|z_1 \dots z_i| > |z_{j_1} \dots z_{j_i}| \qquad \text{si} \quad \{j_1, j_2, \dots, j_i\} \neq \{1, 2, \dots, i\}.$$

Et, en utilisant les relations de VIETE, il vient dans ce cas

$$|a_{n-i}^{(k)}| \sim |z_1 \dots z_i|^k,$$

d'où la relation :

$$\boxed{|z_1 \dots z_i| \simeq |a_{n-i}^{(k)}|^{1/k}.}$$

1.3 Application du Théorème de DIRICHLET

Proposition 1.2. *Soit* $T_n = \gamma_1^n + \cdots + \gamma_r^n + \gamma_{r+1}^n + \cdots + \gamma_d^n$, *où* $\gamma_1, \dots, \gamma_d$ *sont des nombres complexes vérifiant :*

$$|\gamma_1| = \cdots = |\gamma_r| > |\gamma_{r+1}| \geqslant \cdots \geqslant |\gamma_d|.$$

Il existe alors une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$|T_n| \geqslant \frac{r}{2\sqrt{2}} |\gamma_1|^n.$$

Théorème 1.1.
Avec les notations de la Proposition précédente, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} |T_n|^{1/n} = |\gamma_1| = \max\left\{|\gamma_j|;\ 1 \leqslant j \leqslant d\right\}.$$

1.4 La méthode de BERNOULLI

La plupart des méthodes d'itérations sont efficaces lorsqu'on part d'une bonne approximation des valeurs initiales. Cependant, obtenir de telles valeurs s'avère être un problème délicat pour des équations sans "propriétés ou conditions spéciales".

Cependant, pour les polynômes, il existe des algorithmes qui peuvent fournir de telles valeurs en n'utilisant que les coefficients du polynôme. Deux algorithmes sont connus, l'un qui est classique est l'œuvre de BERNOULLI et l'autre, une extension ou variante du premier, est dû à RUTISHAUSER. La méthode de BERNOULLI, en particulier, est celle qui fournit toutes les racines dominantes[4] d'un polynôme.

Pour commencer, considérons le cas le plus simple où le polynôme considéré de degré N,

$$P(X) = a_0 X^N + a_1 X^{N-1} + \cdots + a_N, \tag{1}$$

admet N racines distinctes $z_1, z_2, \ldots, z_N$. En résolvant l'équation aux différences homogène

$$a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \cdots + a_N X_{n-N} = 0 \tag{2}$$

dont le polynôme caractéristique est (1), la solution $X = \{x_n\}$ doit être de la forme

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_N z_N^n, \tag{3}$$

où $c_1, \ldots, c_N$ sont des constantes. Si de plus on suppose que :

(i) Le polynôme P admet une racine dominante, soit z_1 :

$$|z_1| > |z_k|, \qquad k = 2, 3, \ldots, N. \tag{4}$$

(ii) Les valeurs initiales sont telles que la racine dominante soit présente dans la relation (3), i.e on a :

$$c_1 \neq 0. \tag{5}$$

On considère maintenant le quotient de deux solutions consécutives de la suite X. On a la relation

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{c_1 z_1^{n+1} + c_2 z_2^{n+1} + \cdots + c_N z_N^{n+1}}{c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_N z_N^n}.$$

Par suite,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = z_1.$$

1.5 La méthode de BAKER

Classiquement, on ne démontre la convergence de la méthode de Dandelin-Graeffe que s'il n'y a qu'une racine dominante. Nous allons montrer ici que les résultats théoriques de la méthode de Baker impliquent la convergence sous des hypothèses plus faibles.

[4] au sens du module

Minoration du terme général d'une récurrence linéaire

Théorème 1.2. *Soit $\mathcal{U}$ une suite récurrente à valeurs entières telle que le polynôme caractéristique P associé possède au plus 3 racines de module maximal et que ces racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ ($l \leqslant 3$) soient simples. Alors, il existe des constantes effectives C_1, C_2, C_3 telles que si,*

$$U_n = R_1\alpha_1^n + \cdots + R_l\,\alpha_l^n + R_{l+1}(n)\,\alpha_{l+1}^n + \cdots + R_r(n)\,\alpha_r^n,$$

avec $R_1, \ldots, R_l$ constantes, et

$$U_n' = R_1\alpha_1^n + \cdots + R_l\,\alpha_l^n,$$

on ait

$$|U_n| > C_1|\alpha_1|^n n^{-C_2} \qquad \text{si} \quad U_n' \neq 0 \quad \text{et} \quad n \geqslant C_3.$$

Sous des conditions plus générales, on obtient encore une minoration effective du terme général U_n donnée dans le théorème suivant.

Théorème 1.3. *Supposons toujours $l \leqslant 3$, mais avec des racines éventuellement multiples. Supposons de plus qu'au moins une des quantités $\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant l$ ne soit pas racine de l'unité Alors il existe des nombres $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ calculables dépendant uniquement de la suite $\mathcal{U}$ tels que*

$$|U_n| \geqslant |\alpha_1|^n \exp\left(-C_1(\log m)^2\right) \tag{6}$$

dès que $n \geqslant C_2$.

Application à la méthode de DANDELIN-GRAEFFE

Du théorème 1.3 résulte

Théorème 1.4. *Considérons un polynôme P avec les notations du théorème de Dandelin-Graeffe énoncé précédemment. Sous les conditions du théorème 1.3, la méthode de Dandelin-Graeffe appliquée à P converge et on a*

$$\lim_{k\to\infty} \left|a_1^{(k)}\right|^{2^{-k}} = |z_1|.$$

Ceci constitue le résultat principal de notre travail.

Remarque 1. *Il est important de noter que les hypothèses "arithmétiques" utilisées ci-dessus ne peuvent être supprimées. Si elles ne sont pas vérifiées, on peut construire des suites pour lesquelles le résultat précédent est faux, l'idée est d'utiliser des nombres transcendants de Liouville convenables.*

1.6 Généralisation aux matrices

Dans un dernier chapitre, nous généralisons cette étude au cas de l'estimation des valeurs propres d'une matrice : méthode de Bernoulli, quotient de Rayleigh, méthodes itératives. Nous examinons aussi l'élimination d'une valeur propre par déflation : méthodes de Hotelling et de Wielandt.

Tout au long de ce travail, de nombreux exemples réalisés grâce au logiciel de calcul formel MAPLE illustrent les algorithmes étudiés.

2 Généralités

2.1 Fonctions symétriques élémentaires

Considérons un anneau commutatif $\mathbf{A}$, et soient $x, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ des éléments de $\mathbf{A}$. Soit P_n le produit suivant :

$$P_n = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i). \tag{7}$$

On voit que P_n est la somme de tous les termes possibles $b_1, b_2, \ldots, b_n$, où, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, b_i est l'un des éléments x et $-a_i$ du $i^{\text{ième}}$ facteur de P_n. Soit k le nombre de facteurs où $b_i = -a_i$ et soit J l'ensemble des indices de ces facteurs. Si $k = 0$, (i.e $J = \emptyset$), alors on a : $b_1 b_2 \cdots b_n = x^n$; si $k \geqslant 1$ (i.e $J \neq \emptyset$), on a :

$$b_1 b_2 \cdots b_n = (-1)^k x^{n-k} \prod_{i \in J} a_i.$$

En ordonnant par paquets la somme de tous les $b_1 b_2 \cdots b_n$, et en groupant dans un même paquet, pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, ceux pour lesquels $\mathrm{card}(J) = k$. On obtient ainsi :

$$P_n = x^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^{n-k} \left(\sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!], \\ \mathrm{card}(J) = k}} \left(\prod_{i \in J} a_i \right) \right). \tag{8}$$

La donnée d'une $k-partie$ J de $[\![1, n]\!]$ équivaut à celle d'une suite strictement croissante à k termes à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, la suite $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ telle que $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$: on a alors

$$\prod_{i \in J} a_i = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}.$$

Introduisons les fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ de $\mathbf{A}^n$ dans $\mathbf{A}$ définies par :

$$\begin{aligned} \sigma_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k} \\ &= \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!], \\ \mathrm{card}(J) = k}} \left(\prod_{i \in J} a_i \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Alors (8) peut s'écrire :

$$P_n = x^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k(a_1, a_2, \ldots, a_n) x^{n-k}. \tag{10}$$

Notons en particulier qu'on a :

$$\sigma_1(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{et} \quad \sigma_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Les fonctions $\sigma_k : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ mises en évidence ci-dessus présentent un grand intérêt en Algèbre. On les nomme, les *fonctions symétriques élémentaires* de la variable $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{A}^n$. Cette appellation se justifie par le fait que, pour toute permutation s d'ordre n, et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\sigma_k(a_{s(1)}, a_{s(2)}, \dots, a_{s(n)}) = \sigma_k(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

qui est une conséquence de la définition des σ_k et de la relation

$$\sigma_k(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!], \\ \mathrm{card}(J)=k}} \left(\prod_{i \in J} a_i \right).$$

De manière générale, on dit qu'une fontion $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ est *s*ymétrique si, et seulement si, elle vérifie

$$f(a_{s(1)}, a_{s(2)}, \dots, a_{s(n)}) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

pour toute permutation s d'ordre n et tout $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{A}^n$.

Relations de VIETE

Considérons l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

admettant pour racines $z_1, z_2, \dots, z_n$. Alors on a les relations suivantes connues sous le nom des *formules de Viète* :

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_0 \sum_i z_i = -a_0\, \sigma_1 \\ a_2 &= a_0 \sum_{i<j} z_i\, z_j = +a_0\, \sigma_2 \\ a_3 &= -a_0 \sum_{i<j<k} z_i\, z_j\, z_k = -a_0\, \sigma_3 \\ &\dots\dots \\ a_n &= (-1)^n a_0 z_1\, z_2\, \dots z_n = (-1)^n a_0\, \sigma_n. \end{aligned}$$

Les σ_i s'appellent les fonctions symétriques élémentaires des racines. Elles ne changent pas si on permute deux indices quelconques. Il est connu que tous les polynômes symétriques en les z_i peuvent s'exprimer par un polynôme de fonctions symétriques du type précédent (d'où le nom de fonctions symétriques «élémentaires»).

2.2 Inverse de la matrice de Vandermonde

Soit n un entier $\geqslant 1$, et soit $\mathbf{E} = \mathbf{K}_{n-1}[X]$, ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ et de degré plus petit que n, qui est un $\mathbf{K}-$espace vectoriel.

On se donne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, des éléments distincts dans $\mathbf{K}$ (ce qui sous-entend que $\text{card}(\mathbf{K}) \geqslant n$). Notons ϕ_i la forme linéaire $P \mapsto P(a_i)$ sur $\mathbf{E}$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit $W = \text{Vect}(\phi_1, \ldots, \phi_n)$, alors

$$W = \{P \in \mathbf{E} \setminus P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n) = 0\} = \{0\}.$$

Donc $W = \mathbf{E}^*$, et comme $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{E}^* = n$, on a alors : $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ est une base de $\mathbf{E}^*$.
En outre l'unique base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{E}$, dont $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ est la base duale, est définie par les relations $\phi_i(e_j) = \delta_{ij} \quad \text{pour} \quad (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, ce qui donne immédiatement

$$e_i = \frac{1}{A_i} \prod_{j \neq i} (X - a_j) \qquad \text{avec} \quad A_j = \prod_{j \neq i} (a_i - a_j).$$

Soit $P \in \mathbf{E}$. On a : $P = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, d'où $\forall\ k \in [\![1, n]\!]$:

$$P(a_k) = \phi_k(P) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_k(e_i) = \lambda_k.$$

Remarquons qu'on retrouve en particulier, la célèbre formule d'interpolation de Lagrange

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) e_i.$$

Considérons maintenant l'application linéaire

$$\begin{aligned} &\psi : \mathbf{E} \to \mathbf{K}^n, \\ &\quad P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n)) = (\phi_1(P), \ldots, \phi_n(P)), \end{aligned}$$

et notons $\mathcal{B}$ la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ de $\mathbf{E}$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
L'application ψ est surjective car $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont indépendants, elle est donc bijective car $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{K}^n = n$. Sur les bases ainsi choisies, l'application ψ est représentée par la matrice

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\psi) = \left[(a_i)^{j-i}\right]_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2},$$

soit sous forme développée :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par définition cette matrice est appelée matrice de VANDERMONDE de $a_1, \dots, a_n$ et se notera $\mathrm{Vand}(a_1, \dots, a_n)$. Ce qui précède prouve sans calculs que la matrice de VANDERMONDE est inversible (sous l'hypothèse de départ : $a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$).
D'ailleurs ψ^{-1} associe, à $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^n$, l'unique polynôme $P \in \mathbf{E}$ tel que $P(a_i) = b_i$, pour tout i.
En particulier :

$$\psi^{-1}(\varepsilon_j) = e_j = \frac{1}{A_j} \prod_{k \neq j} (X - a_k) = \frac{1}{A_j} \left(X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sigma_{j,k} X^{n-1-k} \right),$$

en notant $(\sigma_{j,k})_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ les fonctions symétriques élémentaires des termes $(a_l)_{l \in [\![1,n]\!]}$, $l \neq j$.
On en déduit aussitôt la matrice inverse V^{-1} de $\mathrm{Vand}(a_1, \dots, a_n)$:

$$V^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\psi^{-1}) = \mathrm{Mat}_{(1,X,\dots,X^{n-1})}(e_1, \dots, e_n),$$

soit sous forme développée :

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n-1}}{A_1}\sigma_{1,n-1} & \frac{(-1)^{n-1}}{A_2}\sigma_{2,n-1} & \dots & \frac{(-1)^{n-1}}{A_n}\sigma_{n,n-1} \\ \frac{(-1)^{n-2}}{A_1}\sigma_{1,n-2} & \frac{(-1)^{n-1}}{A_2}\sigma_{2,n-1} & \dots & \frac{(-1)^{n-2}}{A_n}\sigma_{n,n-2} \\ \vdots & \dots\dots\dots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{A_1} & \frac{1}{A_2} & \dots & \frac{1}{A_n} \end{pmatrix}.$$

2.3 Notions de "taille" d'un polynôme

Nous allons donner quelques définitions et notations qui seront utiles pour une lecture plus aisée de ce document.

Définitions et notations

Soit P un polynôme à coefficients complexes,

$$P = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n.$$

On définit les quantités suivantes pour mesurer la "taille" de P :

- $\mathrm{H}(P) = \max_{i=0,1,\ldots,n} \{|a_i|\}$ est la **hauteur** du polynôme P,
- $||P|| = ||P||_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2}$ est la **norme quadratique** de P,
- $\mathrm{L}(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ est la **longueur** de P,
- $\mathrm{M}(P) = |a_n| \prod_{i=1}^{n} \max\{1, |z_i|\}$ (où les z_i sont les racines complexes de P) est la **mesure de Mahler** de P,
- $\| P \|_\infty = \max\{|P(z)|, |z| = 1\}$ est la **norme infinie** de P,
- Le **coefficient dominant** de P sera noté lcoef(P) (notation qui rappelle celle de maple).

Inégalités de W. Specht

Soit $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ dont les racines α_1, α_2, ..., α_d vérifient $|\alpha_1| \geqslant |\alpha_2| \geqslant \cdots \geqslant |\alpha_d|$. Alors on a

$$|\alpha_1 \cdots \alpha_n| \leqslant n\mathbf{H} + 1, \tag{11}$$

où $\mathbf{H}$ est la hauteur de P.

2.4 Algèbre linéaire

Théorème 2.1.

Soit $\mathbf{K}$ *un corps. Si* $a_1, \ldots, a_h \in \mathbf{K}$*, avec* $h \geqslant 1$*, sont tels que* $a_h \neq 0$*, alors l'ensemble* $\mathcal{E}$ *des suites* (u_n) *à valeurs dans* $\mathbf{K}$ *vérifiant la relation*

$$u_{n+h} = a_1 u_{n+h-1} + \cdots + a_h u_n \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0,$$

est un $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension* h*.*

De plus si $(v_n) \in \mathcal{E}$ *est d'ordre exactement* h*, alors* $\forall\ (u_n) \in \mathcal{E}$*, il existe* $c_1, \ldots, c_h \in \mathbf{K}$ *tels que :*

$$u_n = c_1 v_n + c_2 v_{n+1} + \cdots + c_h v_{n+h-1}.$$

Démonstration. Presque triviale. □

Exemple 1. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$ *un polynôme de racines simples* $\theta_1, \ldots, \theta_d$ *non nulles. Si*

$$s_n = \theta_1^n + \cdots + \theta_d^n, \quad n \geqslant 0,$$

alors il existe $c_1, \ldots, c_d$ *tels que*

$$\theta_1^n = c_1 s_n + c_2 s_{n+1} + \cdots + c_d s_{n+d}.$$

3 Méthode de GRAEFFE

3.1 Méthode classique $k = 2$ (cas de $\mathcal{G}_2$)

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{A}[X]$, où $\mathbf{A}$ est un anneau intègre. Décomposons P en sa partie paire[5] et sa partie impaire[6] : soit $P(x) = F(x^2) + x\,G(x^2)$. Cette décomposition est unique.

Proposition 3.1.
Avec les notations ci-dessus, le polynôme

$$P_1(x) = P(\sqrt{x})\;P(-\sqrt{x})$$

est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{A}$ *qui vérifie :*

$$P_1(x) = F^2(x) - xG^2(x).$$

Si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *sont les racines de* P *dans un anneau* $\mathbf{B}$ *contenant* $\mathbf{A}$ *alors les racines de* P_1 *dans* $\mathbf{B}$ *sont les carrés des racines de* P.

Démonstration.
On a posé
$$P_1(x) = P(\sqrt{x})P(-\sqrt{x}).$$
Puisque P vérifie
$$P(x) = F(x^2) + xG(x^2),$$
(où les polynômes F et G sont déterminés de manière unique) on a :

$$P_1(x) = \big(F(x) + \sqrt{x}\;G(x)\big)\,\big(F(x) - \sqrt{x}\;G(x)\big) = F^2(x) - xG^2(x).$$

Les polynômes F et G étant à coefficients dans $\mathbf{A}$, F^2 et G^2 le sont aussi et il en est de même de leur combinaison. Donc $P_1 \in A[X]$.

La deuxième assertion se démontre facilement en utilisant la forme factorisée de P_1 :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (-1)^n\;a_n^2(\sqrt{x} - z_1)\cdots(\sqrt{x} - z_n)\,(\sqrt{x} + z_1)\cdots(\sqrt{x} + z_n) \\ &= (-1)^n\;a_n^2(x - z_1^2)\cdots(x - z_n^2). \end{aligned}$$

□

[5]elle s'obtient en regroupant les monômes de degré pair
[6]elle s'obtient en regroupant les monômes de degré impair

Remarque 2.
Notons au passage que le polynôme P_1 n'est rien d'autre que notre $\mathcal{G}_2$ défini précédemment (cf. paragraphe 1.2). On construit le polynôme P_2 de la même manière, à partir de P_1. Ainsi, P_2 représentera $\mathcal{G}_2(P_1) = \mathcal{G}_4(P)$ (i.e $\mathcal{G}_4 \; = \; \mathcal{G}_2^2 = \mathcal{G}_2 \circ \mathcal{G}_2$) :

$$P_2(x) = P_1(\sqrt{x})\, P_1(-\sqrt{x})$$

et donc

$$P_2(x) = F_1^2(x) - x\; G_1^2(x),$$

où F_1 et G_1 sont déterminés de manière unique par la décomposition

$$P_1(x) = F_1(x^2) + x\; G_1(x^2).$$

Par itération, on a :

$$P_k(x) = P_{k-1}(\sqrt{x})\; P_{k-1}(-\sqrt{x})$$

et

$$P_k(x) = F_{k-1}^2(x) - x\; G_{k-1}^2(x),$$

où les F_{k-1} et G_{k-1} sont déterminés de manière unique par la relation

$$P_{k-1}(x) = F_{k-1}(x^2) + x\; G_{k-1}(x^2).$$

Exemple 2. *Considérons le polynôme $P(X) = X^3 - X - 1 \in \mathbb{R}[X]$. La relation*

$$P(X) = -1 + X(X^2 - 1)$$

est la décomposition de P en parties paire et impaire : $F(X^2) = -1$ et $G(X^2) = X^2 - 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_1(X) &= (-1)^2 - X(X-1)^2 \\ &= -X^3 + 2X^2 - X + 1 \\ &= (1 + 2X^2) + X(-X^2 - 1), \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire P_2 :

$$\begin{aligned} P_2(X) &= (1 + 2X)^2 - X(X+1)^2 \\ &= -X^3 + 2X^2 + 3X + 1 \\ &= (1 + 2X^2) + X(-X^2 + 3), \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} P_3(X) &= (1+2X)^2 - X(-X+3)^2 \\ &= -X^3 + 10X^2 - 5X + 1 \\ &= (1+10X^2) + X(-X^2-5). \end{aligned}$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned} P_4(X) &= (1+10X)^2 - X(X+5)^2 \\ &= -X^3 + 90X^2 - 5X + 1 \\ &= (1+90X^2) + X(-X^2-5). \end{aligned}$$

Arrêtons-nous à P_5 :

$$\begin{aligned} P_5(X) &= (1+90X)^2 - X(X+5)^2 \\ &= -X^3 + 8090X^2 - 155X + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, au bout de cinq itérations on obtient le polynôme

$$\boxed{P_5(X) = -X^3 + 8090X^2 - 155X + 1}$$

dont les racines sont les puissances $32^{ièmes}$ de celles de P, en effet $2^5 = 32$.

Programmation sous maple : cas classique

```
graeffeClassic :=proc(p :: polynom, x :: name, k :: nonnegint)
local P, i ;
P := unapply(p, x) ;
for i from 1 to k do
P := expand (P (sqrt(x)) * P (-sqrt(x))) ;
P := unapply(P, x) ;
end do ;
return(P(x)) ;
end proc :
```

Si nous reprenons le même exemple que ci-dessus, à l'aide de ce programme, on a le déroulement suivant.

Exemple 3. $p := x^3 - x - 1;$

$$x^3 - x - 1. \tag{1}$$

Pour $k = 5$;

graeffeClassic($p,\ x,\ 5$) ;

$$-x^3 + 8090x^2 + 155x + 1. \tag{2}$$

Pour $k = 6$ *;*

graeffeClassic($p,\ x,\ 6$) ;

$$-x^3 + 65448410x^2 - 7845x + 1. \tag{3}$$

Pour $k = 8$ *;*

graeffeClassic($p,\ x,\ 8$) ;

$-x^3 + 1834832403077849634255092271369 0x^2 + 3757178568712795x + 1.$

On voit que les coefficients explosent très rapidement lorsque que k grandit. Les calculs étant effectués sur une machine qui tourne à $3Ghz$, pour $k = 8$, le temps de calcul est presque nul. Cependant, à l'ordre 20, on a chronométré $0.047s$ et pour $k = 25$ le temps de calcul est de $3.687s$. La machine sur laquelle on effectue les tests est équipée de $1Go$ de RAM. Cela n'empêche pas qu'elle soit incapable de faire les calculs dès que k est $\geqslant 30$. Pour de telles valeurs, on a comme message d'erreur :
“ Error, (in graeffeClassic[0]) Cannot allocate memory ($size = 109068288$) ”.

3.2 Généralisation de la méthode de GRAEFFE

3.2.1 Préliminaires

Résultant

Soient f et g deux polynômes en une variable à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ donnés par

$$f(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \qquad et \qquad g(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j.$$

Definition 3.1.
Le résultant de ces deux polynômes f et g est le déterminant de la matrice

$$S = \begin{pmatrix} a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est appelée la matrice de Sylvester des polynômes f et g.

Notation.

Le résultant de f et g sera noté $\mathrm{R}\boldsymbol{es}(\mathbf{f},\mathbf{g})$ *ou* $\mathrm{R}\boldsymbol{es}_{\mathbf{X}}(\mathbf{f},\mathbf{g})$ *lorsqu'il sera utile de préciser la variable.*

Il est clair que $\mathrm{R}es(f,g)$ est un élément de $\mathbf{K}$ (d'une manière générale, si f et g sont dans $\mathbf{A}[X]$, où $\mathbf{A}$ est un anneau, $\mathrm{R}es(f,g)$ est aussi dans $\mathbf{A}$).

La matrice S est d'ordre $n+m$. Si l'on note $S=[c_{i,j}]$, alors :

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= a_{m-j+i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n, \\ c_{n+i,j} &= b_{n-j+i} \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n, \end{aligned}$$

où on a posé : $a_i = 0$ pour $i \notin \{0,1,\dots,m\}$ et $b_j = 0$ pour $j \notin \{0,1,\dots,n\}$.

Propriétés 1.

Le résultant possède les propriétés suivantes.

1. $\mathrm{R}es(f,0) = 0$;

2. $\mathrm{R}es(g,f) = (-1)^{mn}\,\mathrm{R}es(f,g)$ *;*

3. *Si* $\deg(f) = m \leqslant n = \deg(g)$ *et si h est le reste de la division euclidienne de g par f, alors on a*

$$\mathrm{R}es(f,g) = a_m^{n-m}\,\mathrm{R}es(f,h).$$

4. $\mathrm{R}es(f,g) = 0$ *si et seulement si f et g ont un facteur commun non trivial.*

5. *Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ les racines de f et $\beta_1,\dots,\beta_n$ celles de g dans une extension convenable de* $\mathbf{K}$ *alors on a les relations suivantes*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}es(f,g) &= a_m^n \prod_{i=1}^{m} g(\alpha_i) \\ &= (-1)^{mn}\, b_n^m \prod_{j=1}^{n} f(\beta_j) \\ &= a_m^n\, b_n^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} (\alpha_i - \beta_j). \end{aligned}$$

6. Soient f, g et h trois polynômes. On a alors

$$\mathrm{R}es(f, gh) = \mathrm{R}es(f, g)\,\mathrm{R}es(f, h).$$

Cette dernière relation est une conséquence directe de la première des relations 5.

3.3 Propriétés

Considérons un polynôme P de degré n et un polynôme Q de degré m, à coefficients dans $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ est un corps. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les racines respectives de P et Q dans une extension de $\mathbf{K}$.

Proposition 3.2.
Soit h un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$, le polynôme

$$g(Y) = \mathrm{R}es_X\left(P(X), Y - h(X)\right)$$

admet pour racines les éléments $h(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. Le résultat vient directement des propriétés ci-dessus. En effet, on utilise la première des relations 5. en notant que les racines du polynôme $Y - h(\alpha_i)$ sont exactement les $h(\alpha_i)$. □

Proposition 3.3.
On considère les polynômes P et Q suivants :

$$P(X) = a_m \prod_{i=1}^{m}(X - \alpha_i) \quad \text{et} \quad Q(X) = b_n \prod_{j=1}^{n}(X - \beta_j),$$

alors le polynôme

$$R(X) = (-1)^{mn} g\, a_m^n\, b_n^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(X - \gamma_{ij}),$$

admet $m\,n$ racines γ_{ij} telles que pour :

1. $R(X) = \mathrm{R}es_Y\left(P(X - Y), Q(Y)\right), \qquad \gamma_{ij} = \alpha_i + \beta_j, \quad g = 1,$
2. $R(X) = \mathrm{R}es_Y\left(P(X + Y), Q(Y)\right), \qquad \gamma_{ij} = \alpha_i - \beta_j, \quad g = 1,$
3. $R(X) = \mathrm{R}es_Y\left(Y^m\, P(X/Y), Q(Y)\right), \qquad \gamma_{ij} = \alpha_i\, \beta_j, \quad g = 1,$

4. $\quad R(X) = \mathrm{Res}_Y\left(P(X\,Y), Q(Y)\right), \qquad \gamma_{ij} = \alpha_i/\beta_j, \quad Q(0) \neq 0$

$$\text{et} \quad g = (-1)^{mn} Q(0)^m / b_n^m.$$

Démonstration. Nous allons juste donner la démonstration du premier point, les autres se faisant de manière analogue. On a

$$P(X-Y) = a_m \prod_{i=1}^{m} (X - Y - \alpha_i) = (-1)^m\, a_m \prod_{i=1}^{m} (Y - (X - \beta_i)).$$

En utilisant la dernière relation du point 5. des propriétés précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_Y\left(P(X-Y), Q(Y)\right) &= \left((-1)^m\, a_m\right)^n\, b_n^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (X - \alpha_i - \beta_j) \\ &= (-1)^{mn} a_m^n\, b_n^m \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} \left(X - (\alpha_i + \beta_j)\right) \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.1.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de P, alors on a :

1. *$R_1(Y) = \mathrm{Res}_X\left(P(Y-X), P(X)\right)$ admet pour racines les sommes $\alpha_i + \alpha_j$, pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*
2. *$R_2(Y) = \mathrm{Res}_X\left(P(Y+X), P(X)\right)$ admet pour racines les différences $\alpha_i - \alpha_j, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n$.*
3. *Si aucune des racines de P n'est nulle, alors le polynôme S_1, tel que $S_1(Y) = \mathrm{Res}_X\left(P(Y/X), P(X)\right)$ admet pour racines les produits $\alpha_i\,\alpha_j$.*
4. *Si aucune des racines de P n'est nulle, alors le polynôme S_2, tel que $S_2(Y) = \mathrm{Res}_X\left(P(YX), P(X)\right)$ admet pour racines les quotients α_i/α_j.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition vient directement des propriétés précédentes. Nous allons donner, par exemple, la démonstration du point 2., les autres se prouvant de manière analogue.

On sait, d'après la deuxième égalité du point 5. des propriétés précédentes, que :

$$\mathrm{Res}_X\left(P(Y+X), P(X)\right) = (-1)^{n^2} a_n^n \prod_{i=1}^{n} P(\alpha_i + Y).$$

En utilisant la forme factorisée de P, on a la relation :

$$R(Y) = (-1)^{n^2} a_n^{n+1} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \big(Y + (\alpha_i - \alpha_j)\big).$$

Et donc, les racines de R sont bien les $\alpha_i - \alpha_j$. □

Théorème 3.1. *On supposera dans toute la suite de cette section que* $\mathbf{K}$ *est un corps de caractéristique première*[7] *avec* k*. Avec les notations ci-dessus, pour* $h(X) = X^k$, $k \geqslant 2$ *on a :*

$$g(Y) = \mathrm{R}es_X \left(P(X), Y - X^k\right) = (-1)^{(k+1)n} \prod_{i=0}^{k-1} P(\zeta_{i,k}\, Z),$$

où $\zeta_{i,k}^k = 1$ *et* $Z^k = Y$*. (Les* $\zeta_{i,k}$ *sont les racines* $k^{\text{ièmes}}$ *de l'unité dans une extension de* $\mathbf{K}$*.)*

Remarque 3. *Notons que* $g(Y) = \mathcal{G}_k(P)(Y)$*.*

Démonstration. D'après les propriètés des résultants, on a

$$\begin{aligned} g(Y) &= (-1)^{nk}\, (-1)^n \prod_{\substack{\beta_j \text{ racines de} \\ Y - X^k}} P(\beta_j) \\ &= (-1)^{(k+1)n} \prod_{j=0}^{k-1} P\left(\zeta_{j,k}\, Y^{1/k}\right) \end{aligned}$$

(car β_j est de la forme $\zeta_{j,k}\, Y^{1/k}$ avec $\zeta_{j,k} = \exp\left(i\, 2\pi j/k\right)$, $j = 0, \ldots, k-1$). D'où le résultat en posant $Z^k = Y$. □

En fait ceci n'est rien d'autre qu'un corollaire de la Proposition précédente.

Exemple 4. *Considérons à nouveau le polynôme*

$$P(X) = X^3 - X - 1 \in \mathbb{C}[X].$$

Si $k = 2$ *on a :*

$$\begin{aligned} g(Y) = \mathcal{G}_2(P) &= -P(\zeta_{0,2} Y^{1/2})\, P(\zeta_{1,2} Y^{1/2}) \\ &= -P(Y^{1/2})\, P(-Y^{1/2}) \\ &= -\left(Y^{3/2} - Y^{1/2} - 1\right)\left(-Y^{3/2} + Y^{1/2} - 1\right) \\ &= Y^3 - 2Y^2 + Y - 1. \end{aligned}$$

[7] Si $p \mid k$, disons $k = pk'$, alors on a la relation $X^k - 1 = \left(X^{k'} - 1\right)^p$ et donc il n'y a pas k racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité dans toute extension $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$.

Pour $k=3$, on obtient :

$$\begin{aligned} g(Y) = \mathcal{G}_3(P) &= P(\zeta_{0,3}\, Y^{1/3})\; P(\zeta_{1,3}\, Y^{1/3})\; P(\zeta_{2,3}\, Y^{1/3}) \\ &= \left(Y - Y^{1/3} - 1\right)\left(Y - j\, Y^{1/3} - 1\right)\left(Y - j^2\, Y^{1/3} - 1\right) \\ &= Y^3 - 3Y^2 + 2Y - 1, \qquad (\text{av}ec \quad j = \exp(2i\,\pi/3))\,. \end{aligned}$$

Et pour $k=5$, on a :

$$\begin{aligned} g(Y) = \mathcal{G}_5(P) &= P(\zeta_{0,5}Y^{1/5})P(\zeta_{1,5}Y^{1/5})P(\zeta_{2,5}Y^{1/5})P(\zeta_{3,5}Y^{1/5})P(\zeta_{4,5}Y^{1/5}) \\ &= \left(Y^{3/5} - Y^{1/5} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{4}{5}i\pi}Y^{3/5} - \mathrm{e}^{\frac{2}{5}i\pi}Y^{1/5} - 1\right) \\ &\quad \times \left(\mathrm{e}^{\frac{2}{5}i\pi}Y^{3/5} - \mathrm{e}^{\frac{4}{5}i\pi}Y^{1/5} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{2}{5}i\pi}Y^{3/5} - \mathrm{e}^{-\frac{4}{5}i\pi}Y^{1/5} - 1\right) \\ &\quad \times \left(\mathrm{e}^{\frac{4}{5}i\pi}Y^{3/5} - \mathrm{e}^{-\frac{2}{5}i\pi}Y^{1/5} - 1\right) \\ &= Y^3 - 5Y^2 + 4Y - 1. \end{aligned}$$

Remarque 4. *On peut généraliser les formules vues pour $k = 2$ au cas $k = 3$. (Pour $k \geqslant 4$ c'est possible mais cela devient "compliqué", pour $k = 4$ voir formule* **(3.18)** de l'annexe 1*). On écrit :*

$$P = F(X^3) + XG(X^3) + X^2H(X^3).$$

Et alors on trouve (à l'aide de Maple : voir Annexe 1 : Graeffe, **(3.10)**) *:*

$$P(Y^{1/3})P(jY^{1/3})P(j^2Y^{1/3}) = F^3(Y) + YG^3(Y) + Y^2H^3(Y) - 3F(Y)G(Y)H(Y).$$

Application : *Prenons $P = X^3 - X - 1$.*

On a ici $F(X) = X - 1$, $G(X) = -1$ et $H(X) = 0$ alors

$$g(Y) = F^3(Y) + YG^3(Y) + Y^2H^3(Y) - 3F(Y)G(Y)H(Y) = (Y-1)^3 - Y.$$

D'où $g(Y) = Y^3 - 3Y^2 + 2Y - 1$.

Programmation de la méthode de Graeffe généralisée

3.3.1 Sous maple

```
GraeffeGen :=proc(p :: polynom, x :: name, k :: nonnegint)
local G, y ;
if (k < 2) then
print(" Erreur...k doit être ⩾ 2 ") ;
else
print(" Le polynome obtenu à l'ordre k : ") ;
G := sort(resultant(p, y - x^k, x)) ;
 end if ;
end proc :
```

3.3.2 Propriétés

La transformée de Graeffe $\mathcal{G}_k$ possède les propriétés suivantes.

1. Multiplicativité :
$$\mathcal{G}_k(P\,Q) = \mathcal{G}_k(P)\,\mathcal{G}_k(Q)$$
En effet, $\mathcal{G}_k(P\,Q) = (-1)^{(k+1)(m+n)} \prod_{i=0}^{k-1} P(\zeta_{i,k}\,Z)\,Q(\zeta_{i,k}\,Z)$
(cf. Théorème 3.1). En distribuant ce produit on obtient :
$$\mathcal{G}_k(P\,Q) = (-1)^{(k+1)m} \prod_{i=0}^{k-1} P(\zeta_{i,k}Z)\ (-1)^{(k+1)n} \prod_{i=0}^{k-1} Q(\zeta_{i,k}Z).$$

2. Norme infinie de $\mathcal{G}_k$:
$$\| \mathcal{G}_k(P) \|_\infty = \max |\mathcal{G}_k(P)| \leqslant \| P \|_\infty^k .$$

3. Transformée de Graeffe et mesure :
$$\mathrm{M}\left(\mathcal{G}_k(P)\right) = \left(\mathrm{M}(P)\right)^k .$$
En effet,
$$\begin{aligned}\mathrm{M}\left(\mathcal{G}_k(P)\right) &= |a_n|^k \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant k-1}} \max\left\{1, \left|\frac{\alpha_j}{\zeta_{i,k}}\right|\right\}\\ &= |a_n|^k \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 0\leqslant i\leqslant k-1}} \max\left\{1, |\alpha_j|\right\}\\ &= |a_n|^k \left\{\prod_{j=1}^{n} \max\left\{1, |\alpha_j|\right\}\right\}^k .\end{aligned}$$

4. Transformée de Graeffe et tailles :
$$\mathrm{H}\left(\mathcal{G}_k(P)\right) \leqslant \| \mathcal{G}_k(P) \| \leqslant \| \mathcal{G}_k(P) \|_\infty \leqslant \| P \|_\infty^k \leqslant (n+1)^k \mathrm{H}^k(P).$$

Ces inégalités sont évidentes à l'exception de la deuxième inégalité où l'on pensera à utiliser l'identité de PARSEVAL[8].

[8] $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} |P(\exp(i\,\theta))|^2 \,\mathrm{d}\theta$

3.4 Calcul approché des racines

Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients complexes dont les racines sont $z_1, z_2, \dots, z_n$. Quitte à les renommer, on peut supposer que les z_i sont telles que :

$$|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \cdots \geqslant |z_n|.$$

On peut écrire

$$\mathcal{G}_k(P) = \prod \left(X - z_j^k\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{(k)} X^i.$$

Supposons qu'il existe un indice i tel que $|z_i| > |z_{i+1}|$. Alors si les indices j_k, $k \leqslant i$, sont distincts, soit $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_i$, on a

$$|z_1 \dots z_i| > |z_{j_1} \dots z_{j_i}| \qquad \text{si} \quad \{j_1, j_2, \dots, j_i\} \neq \{1, 2, \dots, i\}.$$

Et, en utilisant les relations de VIETE, il vient dans ce cas

$$|a_{n-i}^{(k)}| \sim |z_1 \dots z_i|^k,$$

d'où la relation :

$$\boxed{|z_1 \dots z_i| \simeq |a_{n-i}^{(k)}|^{1/k}.}$$

Exemple 5. *Soit* $P(X) = X^3 - X - 1 \in \mathbb{C}[X]$.
Ci-dessus nous avions trouvé les valeurs de $\mathcal{G}_k$ pour ce polynôme. Par exemple,

$$\mathcal{G}_5(P) = Y^3 - 5Y^2 + 4Y - 1.$$

Pour le module de la plus grande racine on trouve :

$$\begin{aligned} |z_1| &\simeq |a_2^{(5)}|^{1/5} \\ &= |5^{1/5}| \approx 1,37... \end{aligned}$$

Cette valeur est encore un peu loin de la valeur exacte qui est de

$$1,324717957244783934600274031254409557544931408028420...$$

En poussant le calcul à $\mathcal{G}_{32}(P)$, i.e à $\mathcal{G}_{2^5}(P)$, on trouve une approximation plus raisonnable :

$$\mathcal{G}_{32}(P) = y^3 - 8090y^2 - 155y - 1.$$

Pour le module de la plus grande racine on obtient l'estimation

$$\begin{aligned}|z_1| &\simeq |a_2^{(32)}|^{1/32} \\ &= |8090^{1/32}| \approx 1,3247178...\end{aligned}$$

On remarque que l'erreur commence cette fois à partir du $7^{\text{ième}}$ *chiffre. Cependant, en évaluant cet exemple à l'ordre* $64 = 2^6$*, on a*

$$\mathcal{G}_{64}(P) = y^3 - 65448410y^2 + 7845y - 1.$$

Pour le module de la plus grande racine on trouve maintenant

$$\begin{aligned}|z_1| &\simeq |a_2^{(64)}|^{1/64} \\ &\simeq |65448410^{1/64}| \\ &\approx 1,32471795724478393460027403125440955754493140802842 0...\end{aligned}$$

une valeur quasi-identique à la valeur "exacte" donnée plus haut.

Jusqu'à plus de 100 chiffres on a identité, et le temps de calcul est presque nul : "0.″. MAPLE affiche ce résultat lorsque le temps de calcul est négligeable.

4 Questions de convergence

Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{d-i}$ un polynôme non nul à coefficients complexes. Supposons que $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ soient ses racines, avec

$$|\alpha_1| \geqslant \cdots \geqslant |\alpha_t| > 1 = |\alpha_{t+1}| = \cdots = |\alpha_s| > |\alpha_{s+1}| \geqslant \cdots \geqslant |\alpha_d| > 0.$$

Considérons la famille de polynômes $\mathcal{G}_k(P) \in \mathbb{C}$ définie par :

$$\mathcal{G}_n(P) = \mathrm{Res}\big(P(Y), Y^n - X\big) = \sum_{i=0}^{d} a_i^{(n)} X^{d-i}.$$

Application du Théorème de DIRICHLET

Lemme 4.1.
Soient $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ tels que $|\beta_1| = \cdots = |\beta_r| = \rho > 0$ et soit

$$S_n = \beta_1^n + \cdots + \beta_r^n.$$

Il existe une infinité de nombres entiers q tels que :

$$|S_q| \geqslant \frac{r\rho^q}{\sqrt{2}}.$$

Démonstration. Posons $\beta_j = \rho \mathrm{e}^{2i\pi\phi_j}$, pour $j = 1, 2, \ldots, r$. On a :

$$|S_n| = \rho^n \left| \sum_{j=1}^{r} \mathrm{e}^{2ni\pi\theta_j} \right|, \quad \theta_j = \phi_j - \phi_r.$$

Prouvons d'abord qu'il existe un tel entier q.

D'après un théorème de DIRICHLET, pour un entier Q donné, il existe $q \geqslant 1$ tel que

$$q \leqslant Q^r \quad \text{et} \quad ||2q\theta_j|| < \frac{1}{Q} \quad \text{pour tout} \quad 1 \leqslant j < r,$$

où $||x|| = \min_{m\in\mathbb{Z}} |x - m|$ (cette quantité est donc la distance de x à l'entier le plus proche).
On en déduit la minoration d'un terme S_q : par exemple, pour $Q = 4$, on a $\Re\left(\mathrm{e}^{2i\pi q\theta_j}\right) \geqslant 1/\sqrt{2}$ pour tout $1 \leqslant j < r$. Ainsi on obtient $|S_q| \geqslant r\rho^q/\sqrt{2}$, pour un certain q avec $1 \leqslant q \leqslant 4^r$. Après on choisit Q_1 tel que $\max_j ||2q\theta_j|| > 1/Q_1$. On a au moins un entier q_1 qui vérifie cette inégalité et $q_1 > q$. Ensuite, on choisit Q_2 tel que $\max_j ||2Q_1\theta_j|| > 1/Q_2$. Donc on obtient $q_2 > q_1$ et ainsi de suite. D'où l'existence d'une infinité de solutions q. □

Remarque 5. *Il est très difficile d'obtenir des informations précises sur l'ensemble des entiers q tels que $|S_q| \geqslant r\rho^q/\sqrt{2}$. Cette preuve montre que le plus petit de tels q est inférieur ou à égal à 4^r, mais on ne connaît pas d'algorithme efficace pour déterminer un tel entier q.*

Proposition 4.1.

Soit $T_n = \gamma_1^n + \cdots + \gamma_r^n + \gamma_{r+1}^n + \cdots + \gamma_d^n$, où $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ sont des nombres complexes vérifiant :

$$|\gamma_1| = \cdots = |\gamma_r| > |\gamma_{r+1}| \geqslant \cdots \geqslant |\gamma_d|.$$

Il existe alors une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$|T_n| \geqslant \frac{r}{2\sqrt{2}}|\gamma_1|^n.$$

Démonstration. Posons $S_n = \gamma_1^n + \cdots + \gamma_r^n$. On a clairement

$$|\gamma_{r+1}^n + \cdots + \gamma_d^n| \leqslant (d-r)|\gamma_{r+1}|^n$$

et il s'ensuit que :

$$|T_n| \geqslant |S_n| - (d-r)|\gamma_{r+1}|^n.$$

Pour obtenir le résultat á partir du Lemme 4.1, il suffit d'avoir la relation

$$(d-r)|\gamma_{r+1}|^n \leqslant \frac{r|\gamma_1|^n}{2\sqrt{2}} \tag{12}$$

pour n suffisamment grand.

Par hypothèses on a $\left|\dfrac{\gamma_1}{\gamma_{r+1}}\right| > 1$, il existe donc un entier n_0 tel que :

$$\left|\frac{\gamma_1}{\gamma_{r+1}}\right|^n \geqslant \frac{2\sqrt{2}(d-r)}{r}$$

pour tout $n \geqslant n_0$. D'où le résultat. □

Théorème 4.1.

Avec les notations de la Proposition 4.1, on a :

$$\limsup_{n\to\infty} |T_n|^{1/n} = |\gamma_1| = \max\{|\gamma_j|;\ 1 \leqslant j \leqslant d\}.$$

Démonstration. On a d'abord

$$|T_n|^{1/n} = |\gamma_1^n + \cdots + \gamma_d^n|^{1/n} \leqslant d^{1/n}|\gamma_1|,$$

donc
$$\limsup_{n\to\infty} |T_n|^{1/n} \leqslant |\gamma_1|. \tag{13}$$
D'autre part, d'après la Proposition 4.1, on a
$$|T_n|^{1/n} \geqslant |\gamma_1| \left(\frac{r}{2\sqrt{2}}\right)^{1/n}$$
pour une infinité d'entiers n. En passant à la limite sup de part et d'autre de l'inégalité, on a :
$$\limsup_{n\to\infty} |T_n|^{1/n} \geqslant |\gamma_1|. \tag{14}$$
D'où le résultat d'après (13) et (14). □

Proposition 4.2. *Avec les notations au début de cette section, on a*
$$|a_0\alpha_1 \cdots \alpha_k| = \limsup_{n\to\infty} |a_k^{(n)}|^{1/n}$$
pour tout k*, tel que* $1 \leqslant k < d$*.*

Démonstration. Considérons le polynôme $\mathcal{G}_n(P)$. Puisque $\alpha_1^n, \ldots, \alpha_d^n$ sont les racines de $\mathcal{G}_n(P)$, on a les relations
$$a_k^{(n)} = (-1)^k a_0^{(n)} \sum_{i_1,\ldots,i_k} (\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k})^n. \tag{15}$$
Soit $\Pi_I = \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k}$, où $I = (i_1, \ldots, i_k)$. Posons $U_n = \sum_I \Pi_I^n$. Du fait que $|\alpha_1 \cdots \alpha_k| \geqslant |\Pi_I|$ pour tout I, d'après le Théorème 4.1 on a
$$\limsup_{n\to\infty} |U_n|^{1/n} = |\alpha_1 \cdots \alpha_k|.$$
D'après (15),
$$\limsup_{n\to\infty} |a_k^{(n)}/a_0^{(n)}|^{1/n} = |\alpha_1 \cdots \alpha_k|.$$
Puisque $|a_0^{(n)}|^{1/n} = |a_0|$, on a bien
$$|a_0\alpha_1 \cdots \alpha_k| = \limsup_{n\to\infty} |a_k^{(n)}|^{1/n}.$$
□

Théorème 4.2.

Pour tout entier k *tel que* $1 \leqslant k < d$*, on a*
$$|\alpha_k| = \frac{\limsup_{n\to\infty} |a_k^{(n)}|^{1/n}}{\limsup_{n\to\infty} |a_{k-1}^{(n)}|^{1/n}}.$$

Démonstration. D'après la Proposition 4.2 on obtient :

$$|\alpha_k| = \frac{|a_0\alpha_1 \cdots \alpha_k|}{|a_0\alpha_1 \cdots \alpha_{k-1}|} = \frac{\limsup_{n\to\infty} |a_k^{(n)}|^{1/n}}{\limsup_{n\to\infty} |a_{k-1}^{(n)}|^{1/n}}.$$

□

Remarque 6. *Attention ! Nous n'avons pas écrit* $|\alpha_k| = \limsup \left| a_k^{(n)}/a_{k-1}^{(n)} \right|^{1/n}$, *formule qui peut être fausse.*

Proposition 4.3.
Pour tout entier n, $n \geqslant 1$ *et* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant d$, *on a :*

$$|a_0\alpha_1 \cdots \alpha_k| \leqslant \left(|a_0|^n + k \max_{1 \leqslant j \leqslant d} \left| a_j^{(n)} \right| \right)^{1/n}.$$

Démonstration. Si on applique les inégalités de W. Specht (cf. section Généralités), au polynôme $\mathcal{G}_n(P)$, on obtient la majoration

$$|a_0^n \alpha_1^n \cdots \alpha_k^n| \leqslant |a_0^{(n)}| + k\mathrm{H}(\mathcal{G}_n(P)),$$

où $\mathrm{H}(\mathcal{G}_n(P))$ est la hauteur de $\mathcal{G}_n(P)$. □

Proposition 4.4.
Pour tout entier n, $n \geqslant 1$ *et* $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant d$, *on a :*

$$|\alpha_1 \cdots \alpha_k| \leqslant (1+k)\beta_n^k, \quad |\alpha_k| \leqslant (1+k)^{1/k}\beta_n,$$

où $\beta_n = \max \left\{ \left| a_1^{(n)}/a_0^n \right|, \left| a_2^{(n)}/a_0^n \right|^{1/2}, \ldots, \left| a_d^{(n)}/a_0^n \right|^{1/d} \right\}$.

Démonstration. Notons que le résultat à été prouvé par W. Specht pour $n = 1$ et $a_0 = 1$ et on applique ceci au polynôme $(1/a_0^n)\mathcal{G}_n(P)$. □

Remarque 7.
1. *Les coefficients de* $\mathcal{G}_n(P)$ *augmentent de manière exponentielle avec* n, *ainsi* $\mathrm{H}(\mathcal{G}_n(P))$ *et* β_n *deviennent vite très grands dès que* n *devient grand.*
2. *Le plus grand indice* t, *tel que* $|\alpha_t| > 1$ *peut être calculé en utilisant l'algorithme de* SCHUR-COHN *qui est assez coûteux, mais, pour des approximations de* t, *les résultats suivants sont utiles et moins coûteux, leur démonstration est facile et nous l'omettons.*

Corollaire 4.1.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant n_0$ *et pour tout* j *tel que* $\max_h |a_h^{(n)}| = |a_j^{(n)}|$, *on ait :*

$$t \leqslant j \leqslant s.$$

Corollaire 4.2.

Si P n'a aucume racine sur le cercle unité, alors t est l'unique j pour lequel $\max_h |a_h^{(n)}|$ *est atteint pour n assez grand.*

Démonstration. Dans ce cas-ci, $t = s$ dans le Corollaire 4.1. □

Rappelons que la mesure $\mathrm{M}(\alpha)$ d'un nombre algèbrique α est la mesure d'un quelconque polynôme minimal F de α sur $\mathbb{Z}$, autrement dit,

$$\mathrm{M}(\alpha) = \mathrm{M}(F) = \mathrm{lc}(F) \prod_{j=1}^{m} \max\{1, |z_j|\},$$

où $\mathrm{lc}(F)$ représente le coefficient dominant de P et $z_1, \ldots, z_m$ sont les racines de P.

Les résultats qui vont suivre nous permettront de calculer les indices t et s.

Proposition 4.5.

Pour tout j, avec $t \leqslant j \leqslant s$,

1. *on a :*
$$\mathrm{M}(P) = |a_0 \alpha_1 \cdots \alpha_j| > |a_0 \alpha_1 \cdots \alpha_u|$$
si $u < t$ ou $u > s$,
2. *et*
$$\mathrm{M}(P) = \limsup_n \left| a_j^{(n)} \right|^{1/n} = \limsup_n \left\{ \max_h \left| a_h^{(n)} \right|^{1/n} \right\}.$$

Démonstration. 1. D'après la définition de la mesure et celles de t et s, on a
$$\mathrm{M}(P) = |a_0 \alpha_1 \cdots \alpha_t| = |a_0 \alpha_1 \cdots \alpha_s|.$$
Notons que
$$|\alpha_1 \cdots \alpha_t| = |\alpha_1 \cdots \alpha_j| = |\alpha_1 \cdots \alpha_s| \quad \text{pour tout} \quad t \leqslant j \leqslant s,$$
alors que $|\alpha_1 \cdots \alpha_t| > |\alpha_1 \cdots \alpha_u|$ pout tout $u < t$ et $u > s$.

2. Remarquons que $\mathrm{M}(P) = |a_0 \alpha_1 \cdots \alpha_t|$ et appliquons la Proposition 13 pour $k = t$, puis on utilise 1.

□

Dans la section suivante, on se propose de déterminer un majorant du module de la plus grande racine d'un polynôme à coefficients complexes donné. D'abord, on utilisera quelques itérations de la méthode de DANDELIN-GRAEFFE et ensuite grâce à KNUTH on fournira un majorant.

Sur la borne de CAUCHY

Considérons un polynôme à coefficients complexes

$$f(X) = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots + a_0.$$

D'après Cauchy, on peut trouver un majorant, noté $C(f)$ de tous les modules des racines de f. Le nombre $C(f)$ peut être choisi comme l'unique racine réelle positive du polynôme

$$f^*(X) = X^k - |a_{k-1}|X^{k-1} - \cdots - |a_0|.$$

Soit ρ le module de la plus grande racine de f. Il est clair que

$$f^*(x) \geqslant 2x^k - (x+\rho)^k.$$

Par suite, $C(f)$ satisfait

$$\rho \leqslant C(f) \leqslant \rho \left(2^{1/k} - 1\right)^{-1}. \tag{16}$$

L'inégalité de gauche devient une égalité lorsque $f = f^*$, alors que celle de droite devient une égalité lorque $f(x) = (x+\rho)^k$. Ceci montre en particulier que $C(f)$ peut être trop grand à un facteur près voisin de $k/\log 2$. Certainement l'on préférerait une borne qui soit fonction des modules des coefficients a_i, ce qui nous éviterait de calculer la racine $C(f)$ de f^*. Il existe plusieurs bornes de Cauchy basées sur le calcul de f^*. Celle donnée par KNUTH [9] est :

$$C(f) \leqslant K(f) = 2\max\left\{|a_{k-1}|, |a_{k-2}|^{1/2}, |a_{k-3}|^{1/3}, \ldots, |a_0|^{1/k}\right\}, \tag{17}$$

KNUTH a montré que $K(f) \leqslant 2k\rho$. Avec les notations ci-dessus, cela vient de l'inégalité

$$\binom{k}{i}^{1/i} \leqslant k, \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

La puissance de la méthode de GRAEFFE

Dans cette section, on utilise la méthode de Graeffe pour borner les racines de f. On va montrer que cette méthode est utilisable pour déterminer un bon majorant pour la mesure d'un polynôme.

[9] mais dont Lagrange connaissait déjà un raffinement.

Si nous appliquons la méthode de Graeffe généralisée au polynôme f, on obtient

$$\mathcal{G}_n(f) = \mathrm{Res}\,(f(Y), Y^n - X)\,.$$

Si on applique (16) au polynôme $\mathcal{G}_n(f)$, on obtient

$$\rho \leqslant C(\mathcal{G}_n(f))^{2^{-n}} \leqslant (k/\log 2)^{2^{-n}}\rho,$$

et le dernier terme converge rapidement vers ρ lorsque n croît.

En utilisant (17) au lieu de (16) on obtient le même comportement : convergence rapide pour les entiers n petits, plus précisément, on a

$$\rho \leqslant K(\mathcal{G}_n(f))^{2^{-n}} \leqslant (2k)^{2^{-n}}\rho.$$

4.1 Applications : Cas des polynômes dégénérés

4.1.1 Terminologie

Théorème 4.3. *Soit u_n une suite récurrente linéaire de nombres complexes, alors l'ensemble d'indices de ses zéros, $Z = \{n : u_n = 0\}$, est une union finie de suites arithmétiques.*

De plus, si Z est infini, alors le polynôme associé de u_n admet deux racines distinctes dont le quotient est une racine de l'unité.

En général, une suite récurrente linéaire dont le polynôme associé possède deux racines distinctes telles que leur quotient soit une racine de l'unité est dite *dégénérée*. Dans ce papier, nous étendons cette terminologie au cas complexe. Ainsi, nous dirons qu'un polynôme à coefficients complexes P est *dégénéré* s'il admet deux racines distinctes α et β telles que leur quotient $\eta := \alpha/\beta$ soit une racine de l'unité ; nous utiliserons cette notation tout au long de ce papier. Sans nuire à la généralité, nous nous restreindrons au cas des polynômes P à coefficients entiers tels que $P(0) \neq 0$.

Dans [3], il a été prouvé que la question suivante "*Z est-il infini ?*" est décidable. Cependant la preuve est essentiellement théorique et les auteurs n'ont pas pris en compte l'aspect pratique de la calculabilité. Ici, étant donné un polynôme P à coefficients entiers, on étudie la question "*P est-il dégénéré ?*".

Puisque la factorisation sans facteur carré n'est pas très coûteuse, sans perte de généralité, nous supposerons que P est sans facteur carré. Nous noterons d le degré de P.

4.1.2 Recherche d'un facteur cyclotomique

Un cas spécialement simple de polynôme dégénéré est un polynôme qui admet un facteur cyclotomique. Cette question a déjà été traitée par *R.J.*

Bradford et *J.H. Davenport* dans [2]. Nous allons donner une présentation brève et plus ou moins fidèle de leur papier.

D'abord nous donnons cette remarque :
On calcule $Q_1 := \gcd(P, P^*)$, où $P^* = X^d\, P(X^{-1})$ est le polynôme réciproque de P : d'où l'on a la partie réciproque de P, et — si P possède un facteur cyclotomique, alors c'est aussi un facteur de Q_1.

Nous remarquerons que si ζ est une racine de l'unité d'ordre k et si P est un polynôme non identiquement nul à coefficients complexes tels que $P(\zeta) = 0$, alors pour tout entier m premier avec k, le polynôme P satisfait $P(\zeta^m) = 0$. Définissons P_k la transformée de *Graeffe* de P d'ordre k, on a

$$P_k(X) := \prod_{j=1}^{k} P\big(\mathrm{e}^{2ij\pi/k}\, X^{1/k}\big) = \mathrm{Res}_Y\,(P(Y), X - Y^k),$$

le cas classique correspond à $k = 2$, la transformation de *Dandelin-Graeffe*. Donc, la condition $P(\zeta) = 0$ implique que

$$\gcd(P, P_m) \neq 1, \qquad \text{lorsque} \quad \gcd(m, n) = 1.$$

En particulier, si ζ est une racine de l'unité de degré k impair qui est aussi racine de P, alors $\gcd(P, P_k) \neq 1$, plus précisément le polynôme minimal de ζ divise ce gcd. Lorsque P possède une racine de l'unité ζ de degré pair, alors $P(-\zeta) = 0$ et donc, le polynôme minimal de ζ divise le polynôme $\gcd(P(X), P(-X))$, qui est un polynôme "pair " (i.e. un polynôme en X^2).

4.1.3 Cas général

1. Une première idée pour tester si P est dégénéré ou non est la suivante :
   (i) On calcule le polynôme Q dont les racines sont les quotients de celles de P. Ce polynôme peut être obtenu par la formule
   $$Q(X) = \mathrm{Res}_Y\,(P(XY), P(Y))$$
   et son degré est d^2.
   (ii) On factorise Q.

   Cette méthode devient impraticable pour d assez grand (au delà de 17) puisque le calcul effectué dans (i) est très coûteux.
2. Voici une autre idée qui sans doute être meilleure. On commence par trois observations assez simples.

(i) Soit $\eta = \alpha/\beta$ le quotient de deux racines distinctes de P. Si η est une racine de l'unité d'ordre k alors $\alpha^k = \beta^k$, en particulier le polynôme

$$P_k(X) := \prod_{j=1}^{k} P\big(\eta^j X^{1/k}\big) = \mathrm{Res}_Y\left(P(Y), X - Y^k\right)$$

n'est pas sans facteur carré.

(ii) Soient δ et δ' respectivement les degrés de deux racines α et β de P données. Alors le quotient η est de degré $D \leqslant \delta\delta'$ (et $\leqslant \delta(\delta-1)$ lorsque α et β sont conjugués). De plus, si η est une racine de l'unité d'ordre n alors $D = \phi(n)$, où ϕ est la fonction d'Euler.

(iii) Il est connu que la fonction ϕ vérifie l'inégalité

$$\phi(n) \geqslant c_1 n/\log\log n$$

pour une certaine constante positive c_1. Par exemple, dans *Hardy* and *Wright* [6], on trouve l'estimation $\phi(n) \geqslant \mathrm{e}^{-\gamma} n/\log\log n$ avec n assez grand, où $\gamma = 0.57\ldots$ est la constante d'Euler.

Dans [2] d'autres bornes utiles sont données, par exemple,

$$n \leqslant 3\,\phi(n)^{3/2}, \qquad \text{pour tout} \quad n \geqslant 1.$$

On vérifie que

$$n \leqslant 5\phi(n), \qquad n \leqslant 30000$$

et aussi que

$$n \leqslant 2.42\phi(n)\log\log\phi(n), \qquad \text{pour} \quad 30000 < n \leqslant 10^6.$$

Partant des faits ci-dessus, on aboutit au résultat suivant :

Proposition 4.6. *Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré d admettant deux racines distinctes α et β dont le quotient est une racine de l'unité d'ordre k, alors*

$$\alpha^k = \beta^k \quad \text{et} \quad k \leqslant N := c_2\delta\delta'\log\log\big(\max\{\delta\delta', 3\}\big),$$

où $\delta = \deg(\alpha)$ et $\delta' = \deg(\beta)$, et c_2 est une constante positive.

L'étude précédente conduit à l'algorithme suivant pour une solution à notre problème.

D'abord, on calcule $Q_2 := gcd(P, \tilde{P})$ où $\tilde{P} = P(-X)$.

Si $Q_2 \neq 1$, on conclut que P admet au moins une racine α telle que $P(-\alpha) = 0$).

Pour n allant de 2 à N, on calcule P_n et $\gcd(P_n, P_n')$.

4.1.4 Expériences

On se contentera ici de comparer les différentes méthodes de calcul du polynôme P_k obtenu. Le reste étant de simples opérations sur les coefficients de ce dernier (comme nous l'avons déjà fait dans les sections précédentes).

Considérons le polynôme P suivant :

$$\begin{aligned} P(X) = x^{13} - 2x^{12} + 59x^{11} - 113x^{10} + 193x^9 - 93x^8 \\ - 89x^7 + 178x^6 - 136x^5 + 109x^4 - 36x^3 - 78x^2 + 81x - 27 \end{aligned}$$

En utilisant la relation :

$$P_k(X) := \prod_{j=1}^{k} P\big(\mathrm{e}^{2ij\pi/k}\, X^{1/k}\big), \tag{18}$$

on obtient pour $k = 6! = 720$, un temps de calcul relativement rapide, soit $0.109\,s$. Pour des exemples plus détaillés ou pour voir la forme de ce polynôme se référer à l'annexe 3 (Polynômes dégénérés).
Cependant en utilisant la relation :

$$P_k(X) := \mathrm{Res}_Y\left(P(Y), X - Y^k\right), \tag{19}$$

pour le même polynôme P ci-dessus, le temps de calcul de P_k dans les mêmes conditions (i.e même machine, même logiciel et même session), est de $2.844\,s$ qui est qu'en même relativement important comparé au temps obtenu précédemment ($>$ 20 fois plus lent).

Considérons maintenant le polynôme irréductible (de FERGUSON) P suivant :

$$\begin{aligned} P(X) = x^{12} - 6x^{11} + 23x^{10} - 73x^9 + 191x^8 - 405x^7 + 766x^6 \\ - 1164x^5 + 1368x^4 - 1539x^3 + 1863x^2 - 1701x + 729. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (18), on obtient un temps de calcul de $0.045\,s$. Alors qu'avec la relation (19), ce temps est de $2.953\,s$. Ici l'écart n'est pas maintenu, il est même plus important que précédemment. C'est dire que suivant les polynômes avec lesquels on travaille, cet écart peut être très très grand.

Remarque 8. *Dans tous les cas, il est plus intéressant d'utiliser la formule (18) lorsque le degré du polynôme est élevé et que la "nature " (forme) du polynôme obtenu nous intéresse peu. Cependant, avec la relation (19), le polynôme obtenu est directement exploitable et ne fait intervenir aucune puissance fractionnaire ni de termes complexes (bien qu'après des manipulations, on peut toujours s'en débarrasser; cela devient très fastidieux lorsque le degré est très élevé). Nous recommanderons donc la deuxième formule lorsque*

le temps de calcul est supportable, d'autant plus que de nos jours, les machines sont de plus en plus puissantes. Avec les technologie $64 - bits$ *et les processeurs de plus en plus rapides, sans compter les "RAM" de plus en plus rapide en cadence et énormes en quantité, ces temps de calculs seront sous peu réduits à zéro et même pour des degrés plus importants.*
Pour voir les formes de ces résultats, suivant que l'on utilise la relation (18) ou (19), voir l'annexe X : polynômes dégénérés.

5 La méthode de DANDELIN-GRAEFFE par E. DURAND

5.1 Formation de l'équation aux puissances $m = 2^k$ des racines

Considérons l'équation de degré n :

$$P(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \, X^{n-i} = 0, \tag{20}$$

admettant pour racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. On forme l'équation

$$A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \cdots + A_n = \sum_{i=0}^{n} A_i \, X^{n-i} = 0, \tag{21}$$

dont les racines sont les puissances $m^{ièmes}$ des racines de l'équation (20), soit

$$\beta_i = \alpha_i^m \quad \text{avec} \quad m = 2^k, \tag{22}$$

où k est un nombre entier.

Détermination des coefficients A_i de l'équation (21)

L'équation (20) peut encore s'écrire :

$$a_0 \, (X - \alpha_1) \, (X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n) = 0. \tag{23}$$

Si on multiplie l'équation (23) par le polynôme

$$Q(X) = a_0 \, (X + \alpha_1) \, (X + \alpha_2) \cdots (X + \alpha_n),$$

on obtient l'équation

$$P(X)Q(X) = a_0^2 \, (X^2 - \alpha_1^2) \cdots (X^2 - \alpha_n^2) = 0 \tag{24}$$

dont les racines sont les carrées des racines de (20).
Remarquons que Q s'obtient aussi, (à un signe près sans importance) en changeant X en $-X$ dans le polynôme P. On peut donc l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} Q(X) &= a_0 X^n - a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \cdots + (-1)^n a_n = 0 \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j a_j \, z^{n-j} = (-1)^n \, P(-X). \end{aligned} \tag{25}$$

On peut étendre la somme sur j dans l'équation (25) à condition de convenir que $a_j = 0$, dès que $j > n$. Convenons la même chose pour l'indice i dans l'équation (20). On obtient alors l'expression

$$\begin{aligned} P(X)Q(X) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \, a_j \, X^{n-j} \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, X^{n-i} \\ &= \sum_{i,j} (-1)^j \, a_j \, a_i \, X^{2n-(i+j)} = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Mais d'après (24), seules les puissances paires doivent subsister. On peut donc écrire $i = r + s$ et $j = r - s$, d'où $i + j = 2r$, et mettre (26) sous la forme

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \, B_r \, (X^2)^{n-r} = 0, \tag{27}$$

où l'on a posé

$$B_r = \sum_{s=-r}^{s=r} (-1)^s \, a_{r-s} \, a_{r+s}. \tag{28}$$

En identifiant (27) à (21), on en déduit

$$A_i = (-1)^i \, B_i. \tag{29}$$

Nous allons expliciter, à titre d'exemple, l'équation (28) dans les cas suivants : $n = 3$ et $n = 4$.

$\mathbf{n = 3}$

$$\begin{cases} B_0 = a_0^2 \\ B_1 = a_1^2 - 2a_0 \, a_2 \\ B_2 = a_2^2 - 2a_1 \, a_3 \\ B_3 = a_3^2 \end{cases}$$

$\mathbf{n = 4}$

$$\begin{cases} B_0 = a_0^2 \\ B_1 = a_1^2 - 2a_0 \, a_2 \\ B_2 = a_2^2 - 2a_1 \, a_3 + 2a_0 \, a_4 \\ B_3 = a_3^2 - 2a_2 \, a_4 \\ B_4 = a_4^2. \end{cases}$$

En réécrivant (21) à l'aide des B_i, on obtient :

$$B_0 \, X^n - B_1 \, X^{n-1} + B_2 \, X^{n-2} + \cdots + (-1)^n \, B_n = 0. \tag{30}$$

En opérant sur l'équation (24) comme on l'a fait pour l'équation (20), on obtient l'équation dont les racines sont les puissances $4^{ième}$ de celles de (20). Ainsi progressivement, on forme les puissances $8^{ièmes}$, $16^{ièmes}$,..., $2^{k-ièmes}$ des racines de (20).

Après k élevations au carré, on a donc l'équation dont les racines β_i sont les puissances $m^{ièmes}$ des racines de (20) avec $m = 2^k$ et β verifiant (22).

La relation (28) est donc la relation de récurrence entre les coefficients $B^{(k)}$ et $B^{(k+1)}$, soit

$$\boxed{B_i^{(k+1)} = \sum_{s=-i}^{i} (-1)^s \, B_{i-s}^{(k)} \, B_{i+s}^{(k)}} \tag{31}$$

avec $\quad i = 0, 1, \ldots, n \quad$ et $\quad B_i = 0 \quad$ si $i > n$.

Nous allons voir comment les coefficients $B^{(k)}$ permettent de calculer les racines de l'équation (21) puis celles de (20), en distinguant les cas où il n'y a que des racines réelles et les cas où il peut y avoir des racines complexes.

5.2 Lorsque les racines sont toutes réelles

Supposons que k soit grand et notons dans la suite de ce paragraphe $m = 2^k$.

Si les racines de (20) sont distinctes : les racines de (21) sont largement séparées. quitte à les renommer, supposons que les racines β_i de (21) soient classées dans l'ordre des modules décroissants de telle sorte que l'on ait

$$\beta_1 \gg \beta_2 \gg \cdots \gg \beta_n. \tag{32}$$

En utilisant les relations de VIÈTE et (32), on obtient :

$$\begin{aligned} B_1/B_0 &= \sum_i \beta_i \simeq \beta_1, \\ B_2/B_0 &= \sum_{i,j} \beta_i \, \beta_j \simeq \beta_1 \, \beta_2, \\ B_3/B_0 &= \sum_{i,j,k} \beta_i \, \beta_j \, \beta_k \simeq \beta_1 \, \beta_2 \, \beta_3 \ldots \; etc. \end{aligned} \tag{33}$$

On en déduit les valeurs approchées des racines de (21) par

$$\beta_1 \simeq B_1/B_0, \qquad \beta_2 \simeq B_2/B_1, \qquad \beta_3 \simeq B_3/B_2 \ldots \tag{34}$$

et comme $\beta_i = (\alpha_i)^m$, on a aussi les racines de (20) par

$$\boxed{\alpha_i = \pm \sqrt[m]{\beta_i} \simeq \pm \sqrt[m]{B_i/B_{i-1}}}. \tag{35}$$

Le signe des racines n'est pas déterminé par cette méthode. Pour l'obtenir, on porte les deux valeurs de α_i dans l'équation (20) pour voir celui qui convient. Il est parfois facile d'avoir des renseignements par la règle de DESCARTES, ce qui évite les essais précédents.

Exemple 6. *Prenons l'exemple suivant, où l'équation admet les racines positives* 1, 2 *et* 3,

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0. \tag{36}$$

Pour déterminer une approximation des racines de cette équation, nous allons d'abord expliciter les coefficients $B_i^{(k)}$ *de la relation (31) aux étapes* $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, *et* $k = 4$. *Ainsi on a respectivement :*

Etape 0

$$\begin{aligned} B_0^{(0)} &= 1 \\ B_1^{(0)} &= -6 \\ B_2^{(0)} &= 11 \\ B_3^{(0)} &= -6 \end{aligned}$$

Etape 1

$$\begin{aligned} B_0^{(1)} &= 1 \\ B_1^{(1)} &= 14 \\ B_2^{(1)} &= 49 \\ B_3^{(1)} &= 36 \end{aligned}$$

Etape 2

$$\begin{aligned} B_0^{(2)} &= 1 \\ B_1^{(2)} &= 98 \\ B_2^{(2)} &= 1393 \\ B_3^{(2)} &= 1296 \end{aligned}$$

Etape 3

$$\begin{aligned} B_0^{(3)} &= 1 \\ B_1^{(3)} &= 6818 \\ B_2^{(3)} &= 1686433 \\ B_3^{(3)} &= 1679616 \end{aligned}$$

Etape 4

$$\begin{aligned}
B_0^{(4)} &= 1\\
B_1^{(4)} &= 43112258\\
B_2^{(4)} &= 2821153019713\\
B_3^{(4)} &= 2821109907456
\end{aligned}$$

Etape 5

$$\begin{aligned}
B_0^{(5)} &= 1\\
B_1^{(5)} &= 1853024483819138\\
B_2^{(5)} &= 7958661111799425368211073\\
B_3^{(5)} &= 7958661109946400884391936
\end{aligned}$$

Dans cet exemple nous allons donner les estimations aux ordres $k = 4$ et $k = 5$. En se servant des relations (35) on obtient successivement :

Pour $k = 4$:
Pour la plus "grande racine" :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\simeq \pm \sqrt[2^4]{B_1^{(4)}/B_0^{(4)}}\\
&\simeq \pm 3,000285258117516.
\end{aligned}$$

Et pour la deuxième,

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &\simeq \pm \sqrt[2^4]{B_2^{(4)}/B_1^{(4)}}\\
&\simeq \pm 1,999811756059797.
\end{aligned}$$

Et enfin pour la dernière :

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &\simeq \pm \sqrt[2^4]{B_3^{(4)}/B_2^{(4)}}\\
&\simeq \pm 0,9999992664249567.
\end{aligned}$$

Et pour $k = 5$:
Pour la plus "grande racine" :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\simeq \pm \sqrt[2^5]{B_1^{(5)}/B_0^{(5)}}\\
&\simeq \pm 3,000000217295393,
\end{aligned}$$

pour la deuxième,

$$\alpha_2 \simeq \pm \sqrt[2^5]{B_2^{(5)}/B_1^{(5)}}$$
$$\simeq \pm 1,99999985515097363l9249.$$

Et pour la dernière :

$$\alpha_3 \simeq \pm \sqrt[2^5]{B_3^{(5)}/B_2^{(5)}}$$
$$\simeq \pm 0,9999999999927240255223.$$

Il est facile de vérifier que les racines sont les valeurs positives associées aux α_i : i.e $3,00..$, $1,99...$ et $0,999...$

S'il y a des racines multiples : Dans ce cas la signification des coefficients B_i n'est plus la même que dans (33).
Si $\beta_1 = \beta_2$ on a alors

$$B_1/B_0 \simeq 2\beta_1, \qquad B_2/B_0 \simeq \beta_1^2, \qquad B_3/B_0 \simeq \beta_1^2\beta_3, \dots \tag{37}$$

On a donc le carré de la racine α_1 en prenant la racine $m^{i\grave{e}me}$ de B_2/B_0 ou la racine α_1 elle-même par la racine $m^{i\grave{e}me}$ de $(B_1/2B_0)$
Si l'on a une racine triple $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$, on a cette fois

$$B_1/B_0 \simeq 3\beta_1, \quad B_2/B_0 \simeq 3\beta_1^2, \quad B_3/B_0 \simeq \beta_1^3, \quad B_4/B_0 \simeq \beta_1^3\beta_4, \dots,$$

d'où :

$$\alpha_1 \simeq \pm \sqrt[m]{B_2/B_1} \qquad \text{ou} \qquad \alpha_1 \simeq \pm \sqrt[m]{B_1/3B_0}. \tag{38}$$

Pour une racine quadruple $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$

$$\begin{aligned} B_1/B_0 \simeq 4\beta_1, \qquad B_2/B_0 \simeq 6\beta_1^2, \qquad B_3/B_0 \simeq 4\beta_1^3, \\ B_4/B_0 \simeq \beta_1^4, \qquad B_5/B_0 \simeq \beta_1^4\beta_5, \dots, \end{aligned} \tag{39}$$

d'où :

$$\alpha_1^2 \simeq \sqrt[m]{B_3/B_1} \quad \text{et} \quad \alpha_1 \simeq \pm \sqrt[2m]{B_3/B_1} \text{ ou } \alpha_1 \simeq \pm \sqrt[m]{B_1/4B_0}. \tag{40}$$

La généralisation de ces formules pour une racine $p-$uple est évidente et l'on voit apparaître les coefficients du développement du binôme ; d'où :

$$\alpha_1 \simeq \pm \sqrt[m]{B_1/pB_0}. \tag{41}$$

Remarque 9. *En fait, comme $a^{\frac{1}{m}}$ tend vers 1 pour toute constante $a > 0$, on peut ignorer le coefficient $p^{\frac{1}{m}}$ ou $p^{-\frac{1}{m}}$ dans (41), mais cela ralentit la convergence.*

Exemple 7. *Nous allons considérer l'exemple suivant, où l'équation admet une racine triple à savoir* 3 *et une racine simple qui vaut* 1*,*

$$X^4 - 10X^3 + 36X^2 - 54X + 27 = 0.$$

Déterminons d'abord les coefficients $B_i^{(k)}$ *de cette équation. D'après la relation (31) on a :*

$$B_0^{(0)} = 1,\ B_1^{(0)} = -10,\ B_2^{(0)} = 36,\ B_3^{(0)} = -54,\ B_4^{(0)} = 27.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
B_0^{(1)} &= \left(B_0^{(0)}\right)^2 = 1,\\
B_1^{(1)} &= \left(B_1^{(0)}\right)^2 - 2B_0^{(0)}B_2^{(0)} = 100 - 72 = 28,\\
B_2^{(1)} &= \left(B_2^{(0)}\right)^2 - 2B_1^{(0)}B_3^{(0)} + 2B_0^{(0)}B_4^{(0)} = 270,\\
B_3^{(1)} &= \left(B_3^{(0)}\right)^2 - 2B_2^{(0)}B_4^{(0)} = 972,\\
B_4^{(1)} &= \left(B_4^{(0)}\right)^2 = 729.
\end{aligned}$$

A l'ordre 2*, i.e pour* $m = 4$*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
B_0^{(2)} &= \left(B_0^{(1)}\right)^2 = 1,\\
B_1^{(2)} &= \left(B_1^{(1)}\right)^2 - 2B_0^{(1)}B_2^{(1)} = 244,\\
B_2^{(2)} &= \left(B_2^{(1)}\right)^2 - 2B_1^{(1)}B_3^{(1)} + 2B_0^{(1)}B_4^{(1)} = 19926,\\
B_3^{(2)} &= \left(B_3^{(1)}\right)^2 - 2B_2^{(1)}B_4^{(1)} = 551124,\\
B_4^{(2)} &= \left(B_4^{(1)}\right)^2 = 531441.
\end{aligned}$$

Pour $m = 8$*, on a :*

$$\begin{aligned}
B_0^{(3)} &= \left(B_0^{(2)}\right)^2 = 1,\\
B_1^{(3)} &= \left(B_1^{(2)}\right)^2 - 2B_0^{(2)}B_2^{(2)} = 19684,\\
B_2^{(3)} &= \left(B_2^{(2)}\right)^2 - 2B_1^{(2)}B_3^{(2)} + 2B_0^{(2)}B_4^{(2)} = 129159846,\\
B_3^{(3)} &= \left(B_3^{(2)}\right)^2 - 2B_2^{(2)}B_4^{(2)} = 282558676644,\\
B_4^{(3)} &= \left(B_4^{(2)}\right)^2 = 282429536481.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $m = 16$, on a :

$$\begin{aligned}
B_0^{(4)} &= \left(B_0^{(3)}\right)^2 = 1,\\
B_1^{(4)} &= 129140164,\\
B_2^{(4)} &= 5559060695695686,\\
B_3^{(4)} &= 7976644863593307641888 4,\\
B_4^{(4)} &= 79766443076872509863361.
\end{aligned}$$

On s'arrête à $m = 32$, cas où on trouve

$$\begin{aligned}
B_0^{(5)} &= 1,\\
B_1^{(5)} &= 5559060566555524,\\
B_2^{(5)} &= 10301051460877543013034113823366,\\
B_3^{(5)} &= 636268544113595265952628964007598820443748416 4,\\
B_4^{(5)} &= 6362685441135942358474828762538534230890216321.
\end{aligned}$$

En utilisant les relations (38), il vient :
Si $m = 8$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \simeq 3.000038100 \text{ et } \alpha_4 \simeq 0.9999428583.$$

Pour $m = 16$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \simeq 3.000000003 \quad \text{et } \alpha_4 \simeq 0.9999999954.$$

Et pour $m = 32$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \simeq 2.999999998 \quad \text{et} \quad \alpha_4 \simeq 0.9999999997.$$

Nous avons supposé que les racines de plus grand module étaient multiples, mais les formules sont du même type lorsque les racines multiples sont á l'intérieur de la suite des racines (ordonnée par modules décroissants).

Groupe de racines très voisines. Dans cette situation, on a une convergence lente. On n'a malheureusement pas des relations simples comme on l'avait dans le cas de racines multiples. Une manière de procéder consiste à grouper plusieurs termes consécutifs de l'équation en Z. Par exemple, s'il y a deux racines voisines de plus grand module, on prend

$$Z^2 - B_1 Z + B_2 = 0$$

d'où Z_1 et Z_2 réels ou complexes.

S'il y a trois racines, on résout l'équation du troisième degré

$$Z^3 - B_1\,Z^2 + B_2\,Z - B_3 = 0$$

ce qui donne trois racines réelles ou complexes. Mais en général, il vaut mieux élever une fois de plus au carré, plutôt que de faire ce calcul.

Cas où il y a des racines complexes. Dans ce cas on procède en deux étapes :

Détermination du module des racines. Supposons qu'on ait une paire de racines complexes conjuguées, soit :

$$\beta_p = \mathrm{R}e^{i\alpha}, \qquad \beta_{p+1} = \mathrm{R}e^{-i\alpha}.$$

Alors pour les coefficients B_i on a :

$$\begin{aligned} &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{p-1}/B_0 &= \beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-1}, \\ B_p/B_0 &= \beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-1}\,2\mathrm{R}\cos\alpha, \\ B_{p+1}/B_0 &= \beta_1\beta_2\ldots\beta_{p-1}\mathrm{R}^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{42}$$

On a donc le carré du module qui vaut $\mathrm{R}^2 = B_{p+1}/B_{p-1}$ et le carré du module de la racine du polynôme donné par

$$r^2 = \sqrt[m]{\mathrm{R}^2} = \sqrt[m]{B_{p+1}/B_{p-1}}. \tag{43}$$

On voit sur (42) que l'on reconnaîtra la présence d'une racine complexe par une oscillation avec éventuellement changement de signe dans la suite des B_p, à cause du cosinus. Les autres racines réelles de l'équation sont toujours données (au signe près) par les formules du paragraphe précedent.

Exemple 8. *Considérons l'équation suivante*

$$X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 18X + 20 = 0,$$

admettant $1, 2, -3 \pm i$ *pour racines. On regroupe les résultats dans les tableaux suivants. Le premier contient les coefficients à chaque* *étape et le second le module des racines.*

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
B_i^0	3	-6	-18	20
B_i^1	21	184	564	400
B_i^2	73	10968	170896	160000
B_i^3	-16607	95666208	25695682816	25600000000
B_i^4	84460033	$10[13digits]88$	$65[17digits]56$	65536.10^{16}

Remarquons que les coefficients explosent très vite. Les changements de signes montrent qu'il s'agit d'une racine complexe. Voyons comment se comportent les racines (leur module).

	$\sqrt[m]{B_1/B_0}$	$\sqrt[m]{B_2/B_1}$	$\sqrt[m]{B_3/B_2}$	$\sqrt[m]{B_4/B_3}$
2	4.5825757	2.96005148	1.75077623	0.84215192
4	2.9230128	3.50107283	1.986786105	0.98366455
8	3.36927452	2.95160625	2.01204505	0.999533779
16	3.12907306	3.19594507	1.99993280	0.99999905
32	3.18736871	3.13738408	2.00000003456	1.0
64	3.10965958	3.21578608	2.0	1.0
128	3.17795486	3.14667779	2.0	1.0

On voit que les deux premières colonnes n'ont pas une convergence normale.

Si l'on a deux paires de racines commplexes conjuguées de même module, $\mathrm{R}e^{\pm ia}$ et $\mathrm{R}e^{\pm ib}$, la suite des B_p a la signification suivante :

$$\begin{array}{cccc} 2\mathrm{R}(\cos a+\cos b), & 2\mathrm{R}^2(1+2\cos a\cos b), & 2\mathrm{R}^3(\cos a+\cos b), & \mathrm{R}^4 \\ B_j & B_{j+1} & B_{j+2} & B_{j+3} \end{array}$$

On a donc le carré du module R^2 par B_{j+2}/B_j et le carré du module de la racine du polynôme donné par

$$r^2 = \sqrt[m]{B_{j+2}/B_j}. \tag{44}$$

Remarquons qu'on a aussi $B_{j+3}/B_{j-1} = \mathrm{R}^4$.

Remarque 10. *D'une manière générale, si l'on a q paires de racines conjuguées ayant le même module, on est amené à résoudre une équation de degré $2q$ et le rapport des coefficients extrêmes de cette équation donne encore R^{2q} (et on trouve donc R). On peut* *aussi avoir une racine réelle qui ait le même module qu'une racine complexe, soit* R *et* $\mathrm{R}e^{\pm ia}$ *; la signification des coefficients* B_j *est alors*

$$\begin{array}{ccc} B_j & B_{j+1} & B_{j+2} \\ \mathrm{R}(1+2\cos a) & \mathrm{R}^2(1+2\cos a) & \mathrm{R}^3 \end{array}$$

On a donc encore R *égal au quotient* B_{j+1}/B_j*. Pour des équations de degré élevé, on rencontre des cas encore plus compliqués et la méthode de Graeffe est à déconseiller*[10]*.*

Détermination des phases des racines. En principe, quand on a déterminé les modules R_j et les phases Φ_j de l'équation (21), avec (22) on en déduit les modules r_j et les phases ϕ_j de l'équation (20) par

$$r_j = \sqrt[m]{\mathrm{R}_j}, \qquad \phi_j = \frac{2p\pi + \Phi_j}{m}, \tag{45}$$

avec $p = 0, 1, 2, \ldots, (m-1)$.

Au lieu d'une valeur de ϕ_j, on en trouve donc $m = 2^k$; c'est parce que les élevations au carré ont introduit toutes ces racines parasites dont il faut maintenant se débarrasser. Pour cela, on peut séparer la partie réelle de (20) qui s'écrit

$$r^n a_0 \cos(n\phi) + r^{n-1} a_1 \cos((n-1)\phi) + r^{n-2} a_2 \cos((n-2)\phi) + \cdots + a_n = 0 \tag{46}$$

et voir laquelle de toutes les valeurs (5.2) de ϕ_j satisfait cette équation (46). C'est là un travail particulièrement long et fastidieux pour les équations de degré élevé ; dans ce cas la méthode de Graeffe ne sera pas recommandée.

Néanmoins, il y a des méthodes générales qui permettent de diminuer le nombre des essais. En voici deux qui ont été indiquées par Graeffe et Carvallo.

1. Il s'agit de calculer $\cos\phi$ quand on connaît $\cos(m\phi)$; or on a la relation de récurrence

$$\cos(2^{k-1}\phi) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2^k\phi)}{2}} \tag{47}$$

ou bien,

$$\cos\left(\frac{m}{2}\phi\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(m\phi)}{2}}. \tag{48}$$

[10] Cependant, pour les équations que l'on rencontre dans la pratique, des complications de ce genre sont assez rares.

Comme $r^{1/2}\cos(m/2)$ doit être une solution de l'équation avec les B_j^{k-1} on peut choisir le signe de (48). De proche en proche, on calculera donc $\cos\phi$ puis $\sin\phi$ et $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$. Cette méthode diminue le nombre des essais, qui était de $m = 2^k$ avec la formule (5.2), à seulement k, ce qui est une simplification considérable.

2. En séparant les parties paires et impaires, l'équation (30) s'écrit

$$\sum_j B_{2j}^{(k-1)} X_{(k-1)}^{2j} = X_{k-1} \sum_j B_{2j+1}^{(k-1)} X_{(k-1)}^{2j}, \tag{49}$$

mais $X_{(k-1)}^2 = X_{(k)}$. La relation (49) s'écrit donc

$$X_{(k-1)} = \frac{\sum_j B_{2j}^{(k-1)} X_{(k)}^j}{\sum_j B_{2j+1}^{(k-1)} X_{(k)}^j}; \tag{50}$$

(50) est une relation de récurrence qui permet de proche en proche de passer de $X_{(k)}$ à $X_{(0)}$, c'est-à-dire à x. La formule (50) est plus simple, mais moins précise que la formule (48), car les extractions de racines successives ne produisent pas d'accumulation d'erreurs dues aux arrondis.

Avantages et inconvénients de la méthode de GRAEFFE .

Cette méthode posséde l'avantage de déterminer simultanément toutes les racines sans qu'il soit nécessaire d'avoir à estimer des valeurs de départ. La convergence est assez rapide car c'est l'équivalent d'un processus du second ordre et chaque nouvelle élevation au carré double le nombre des chiffres exacts des racines comme nous l'avons vu dans les exemples précédents. On peut aussi séparer facilement des racines très voisines [11]. Pour ce qui est des inconvénients :

- Toute erreur à une étape fausse tous les résultats. Par exemple des erreurs de signe ou de positionnement de la virgule qui sont très facile à commettre. Les méthodes itératives, au contraire, voient leur convergence diminuer dans les mêmes conditions mais le résultat est quand même exact.
- L'élimination de toutes les racines parasites introduites, quand il y a des racines complexes, est toujours une opération laborieuse et il faut examiner à part tous les cas particuliers. Dans le cas des racines réelles, il faut encore vérifier les résultats obtenus en les portant dans le polynôme pour choisir entre le signe $(+)$ et le signe $(-)$.

On peut utiliser conjointement cette méthode avec les méthodes itératives. On ne lui demande alors que des valeurs de départ et on ne fait qu'une ou deux élevations au carré. Ces valeurs de départ sont ensuite améliorées par itération. On peut aussi séparer davantage les racines par une ou deux élevations au carré et utiliser ensuite la méthode de BERNOULLI qui se trouve alors dans de bonnes conditions de convergence.

5.3 Exemples : Calcul numérique versus calcul formel

Dans les exemples qui suivent, On vérifie non seulement la convergence de la méthode de Dandelin-Graeffe, mais aussi son comportement suivant que l'on utilise un logiciel de calcul formel ou numérique.

Exemple 1

Considérons le polynôme $p = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ de racines 1, 2 et 3. Nous allons regrouper les résultats obtenus grâce à deux logiciels un de calcul formel (Maple) et le second de calcul numérique (Scilab) dans le tableau

[11] Lorsque les racines sont voisines au départ, après plusieurs élevations au carré, elles deviennent nettement séparées.

suivant :

Ordre k	Avec Scilab	Avec Maple
$k = 6$	3.00000000000000251798582	3.00000000000002518260777
	1.99999999999998321342787	1.99999999999998321159499
	1.	0.999999999999999999999915
$k = 8$	3.	3.
	2.	2.
	1.	1.

Pour les polynômes de degré inférieur à 4, les tests donnent les mêmes résultats jusqu'aux environs de 15 digits. Par comparaison aux racines approchées avec la commande “polroots” du logiciel pari-GP[12].

Exemple 2

Soit le polynôme p de degré 4 suivant $p = x^4 - x + 1$.

Ordre k	Avec Scilab	Avec Maple
$k = 10$	1.1831969702590556803301	1.183196970259055747219056
	1.184306927047872104453	1.184306927047872172271260
	0.8453200899339927687492	0.8453200899339928206753904
	0.8442236048035078876950	0.8442236048035078668083983
$k = 11$	1.1840296846613092007772	1.184029684661309202469338
	1.1834740176642501996440	1.183474017664250262442775
	0.8450090162667605042657	0.8450090162667604750054404
	0.8445343893367552867701	0.8445343893367552998463482

Ici, les racines diffèrent à partir du 18$^{\text{ème}}$ digit. Grâce, aux résultats obtenus avec pari-GP, on constate que Maple l'emporte légèrement sur Scilab.

Prenons maintenant un polynôme de degré supérieur à 4.

[12]Ces racines sont approximativement les mêmes que celles données par Maple (avec la commande solve).

Exemple 3

Soit $p = x^7 + 5x^2 + 3x + 1$.

Ordre k	Algo. 1	Algo. 2
	1.49254245950422514966	1.4925424595042250813568
	1.46277292987496609910 6	1.4627729298749661308172
	1.32978536937740998702 40	1.3297853693774100262734
$k = 6$	1.3661984190557949769840	1.3661984190557950135358
	1.2663358528532826507984	1.2663358528532827658521
	0.4510538477172644777902	0.45105384771726447964256
	0.4413912981140276081682	0.44139129811402760653650
	1.4750989581418603169283	1.4750989581418602995625
	1.4801228585180794539156	1.4801228585180794705019
	1.3491245135875595817510	1.3491245135875596338344
$k = 8$	1.3467355338552216004189	1.3467355338552216684140
	1.2661774258522617842004	1.2661774258522617969958
	0.4474008946996755331504	0.44740089469967555441828
	0.4449951837867763271284	0.44499518378677635012399

Nous constatons à nouveau que les racines ne diffèrent qu'à partir du $15^{\text{ème}}$ digit en moyenne pour les deux logiciels. Cependant, Maple s'avère être plus efficace que Scilab par rapport à pari-GP (comme référence).
On remarquera ces deux logiciels donnent des approximations beaucoup plus précises pour les racines réelles. Par exemple, pour le polynôme p ci-dessus,la racine réelle obtenue à l'aide de pari-GP montre que les 10 premiers digits des racines obtenues avec ces deux logiciels sont corrects. Tandis que pour les modules des racines complexes, 3 digits seulement sont corrects.

Examinons le cas de certains polynômes particuliers : les polynômes de WILKINSON et ceux de MIGNOTTE ([12]).

Exemple 4

Considérons le polynôme de WILKINSON $p = \prod_{i=1}^{20}(x - i)$.

Les calculs obtenus avec Scilab s'arrête à l'ordre $k = 4$, et la convergence est mauvaise. Par contre, "Maple " converge parfaitement à partir de l'ordre $k = 7$.

Définitions

On appelle polynôme de MIGNOTTE 1, les polynômes de la forme

$$P(x) = x^n - (ax+1)^m, \qquad n \gg m > 1, \quad |a| > 1.$$

Le polynôme

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right),$$

est dit polynôme de MIGNOTTE réciproque.
Remarque : Ces polynômes sont construits exprès pour posséder m racines très proches de $-1/a$.

Exemple 5

Ici on considère le polynôme de Mignotte pour $n = 20$, $n = 3$ et $a = -3$, soit $p(x) = x^{20} + 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$.

Ordre k	Algo. 1	Algo. 2
$k = 7$	1.2511547316021054410129	1.251154731602105384251957
	1.2407025836889933323448	1.24070258368899343898881
	1.2948241117419088119789	1.294824111741908722463585
	1.2639304249668694701825	1.263930424966869408236575
	1.2448032315751518250835	1.244803231575151907118849
	1.2489880928244700974972	1.248988092824469994291838
	1.2490798661581890005579	1.249079866158189015461586
	1.2218787408198887867172	1.221878740819888798325708
	1.2343030033478330498298	1.234303003347833110179515
	1.210351534770826242848	1.210351534770826262804440
	1.2071162354993081322618	1.207116235499306699725452
	1.1807465175245563937523	1.180746517524612402699419
	1.1908398773576991391820	1.190839877357577423145914
	1.1682513543700201452680	1.168251354370149568699373
	1.1582037104947462414	1.158203710494671851193895
	1.1474732299863998896683	1.147473229986407651225841
	1.1376732735670156415608	1.137673273567018447776208
	0.3362062708332321792071	0.3362062708332324515471454
	0.3333338499939903498692	0.3333338499939899005204356
	0.3304844171010052900073	0.3304844171010055234562204

Jusqu'à l'ordre 7, les conclusions précédentes restent valables. De plus, pour $k > 7$, scilab atteint ses limites (affiche l'infini ou NAN, il en est de même pour Matlab qui est la vesion commerciale) alors que Maple continue de donner des racines approchées de plus en plus précises (au moins jusqu'à l'ordre 19 mais avec un temps de calcul relativement long).

6 La méthode de BERNOULLI

La plupart des méthodes d'itérations sont efficaces lorsqu'on effectue une bonne approximation des valeurs initiales. Cependant, obtenir de telles valeurs s'avère être un problème délicat pour des équations sans "propriétés ou conditions spéciales".

Cependant, pour les polynômes, il existe des algorithmes qui peuvent fournir de telles valeurs en n'utilisant que les coefficients du polynôme. Deux algorithmes sont connus, l'un qui est classique est l'œuvre de BERNOULLI et l'autre, une extension ou variante du premier, est dû à RUTISHAUSER. La méthode de BERNOULLI, en particulier, est celle qui fournit toutes les racines dominantes[13] d'un polynôme.

6.1 Une seule racine dominante

On sait que l'équation aux différences finies à coefficients constants peut être résolue de manière analytique en déterminant les racines du polynôme caractéristique associé. La méthode de BERNOULLI consiste en la procédure inverse.

Le polynôme dont les racines sont recherchées est considéré comme le polynôme caractéristique d'une certaine équation aux différences, et cette équation associée est résolue (de manière numérique) en résolvant la relation de récurrence induite par elle. A partir de cette solution, il est facile d'extraire des informations à propos des racines comme nous le verrons plus loin.

Pour commencer, considérons le cas le plus simple où le polynôme considéré de degré N,

$$P(X) = a_0 X^N + a_1 X^{N-1} + \cdots + a_N, \tag{51}$$

admet N racines distinctes $z_1, z_2, \ldots, z_N$. En résolvant l'équation aux différences homogène

$$a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \cdots + a_N X_{n-N} = 0 \tag{52}$$

dont le polynôme caractéristique est (51), la solution $X = \{x_n\}$ doit être de la forme

$$x_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_N z_N^n, \tag{53}$$

où $c_1, \ldots, c_N$ sont des constantes. Si de plus on suppose que :

(i) Le polynôme P admet une racine dominante, i.e si on la nomme $|z_1|$, on a :

$$|z_1| > |z_k|, \qquad k = 2, 3, \ldots, N. \tag{54}$$

[13] au sens du module

(ii) Les valeurs initiales sont telles que la racine dominante soit présente dans la relation (53), i.e on a :

$$c_1 \neq 0. \tag{55}$$

On considère maintenant le quotient de deux solutions consécutives de la suite X. On a la relation

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{c_1 z_1^{n+1} + c_2 z_2^{n+1} + \cdots + c_N z_N^{n+1}}{c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_N z_N^n}.$$

Par suite,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = z_1.$$

D'où cette formulation de la méthode de BERNOULLI.

Algorithme 1. *Choisissons arbitrairement les valeurs* $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-N+1}$, *et déterminons la suite* $\{x_n\}$ *à partir de la relation de récurrence*

$$x_n = -\frac{a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_N x_{n-N}}{a_0}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Alors à partir de la suite des quotients,

$$q_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}, \tag{56}$$

on a donc prouvé :

Théorème 6.1.
Si le polynôme P *donné par* (51) *admet une racine dominante, et si les valeurs initiales sont telles que* (54) *soit vérifiée, alors les quotients* q_n *sont bien définis et convergent vers la racine dominante de* P.

Exemple 9. *Considérons le polynôme*

$$P(X) = X^2 - X - 1.$$

Appliquons la méthode de Bernoulli à ce polynôme, avec les valeurs initiales $x_0 = 1, x_{-1} = 0$, *on obtient la suite de Fibonacci. En effet, ce polynôme est le polynôme caractéristique de l'équation*

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

On sait que les deux racines du polynôme caractéristique sont

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Et donc deux solutions de notre équation aux différences sont données par :

$$X^{(1)} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad X^{(2)} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Il est évident que le WRONSKIEN [14] *de ces deux solutions est non nul, d'où la solution générale de l'équation aux différences est :*

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 z_1^n + c_2 z_2^n \\ &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

D'après les conditions initiales, c_1 et c_2 vérifient les relations

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = 0. \end{gathered}$$

En résolvant ces deux équations, on trouve facilement que les valeurs

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \qquad c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Par conséquent,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right].$$

Il est clair qu'ici (i) et (ii) sont satisfaits. Le quotient de deux termes consécutifs de la suite $\{x_n\}$ nous donne :

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{x_{n+1}}{x_n} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit la convergence exponentielle du quotient q_n vers la racine dominante de P :

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = z_1.$$

[14] $\begin{vmatrix} z_1^n & z_2^n \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} \end{vmatrix} = (z_1 z_2)^{n-1}(z_1 - z_2).$

Exemple 10. *Considérons le polynôme P de degré 4 suivant :*

$$P(X) = 70X^4 - 140X^3 + 90X^2 - 20X + 1.$$

L'équation aux différences associée à P s'écrit

$$x_n = \frac{140x_{n-1} - 90x_{n-2} + 20x_{n-3} - x_{n-4}}{70}.$$

Prenons pour valeurs initiales, la suite suivante :

$$x_0 = 1, \quad x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = 0.$$

Remarque 11. *Il est facile de vérifier que ce choix des valeurs initiales conduit toujours à $c_1 \neq 0$ (notation ci-dessus).*

Etudions la convergence de q_n vers la racine du polynôme P. Notons que le module de la racine dominante de ce polynôme est : 0.9305681558. *Le tableau suivant donne les valeurs de x_n et de q_n suivant n.*

n	x_n	q_n
0	1	$\cdots$
1	2	1.357142857
2	2.714285714	1.157894737
3	3.142857143	1.066883117
4	3.353061224	1.017650639
5	3.412244898	0.9883800410
6	3.372594752	0.9699170124
7	3.271137026	0.9578036669
8	3.133107039	0.9496383559
9	2.975318617	0.9440291180
10	2.808787410	0.9401238665
11	2.640608080	0.9373789475
12	2.475250423	0.9354364431
13	2.315439451	0.9340550835
14	2.162747990	0.9330693373
15	2.017993834	0.9323641419
16	1.881505089	0.9318587435
17	1.753296968	0.9314960679
18	1.633189232	0.9312355691
19	1.520883904	0.9310483358
20	1.416016428	$\cdots$

On voit bien que q_n converge vers la plus grande racine de P. Cependant, en observant les résultats, cette convergence est très lente car après plusieurs itérations, on s'approche difficilement (de manière précise) de la solution. Dans la section qui suit, nous allons voir comment accélérer cette convergence.

6.2 Amélioration de la vitesse de convergence

Même si les conditions de convergence de la méthode de Bernoulli sont satisfaites, la vitesse de convergence peut être lente. En d'autres termes, l'erreur de l'approximation de la plus grande racine z_1 par x_{n+1}/x_n, soit

$$e_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} - z_1,$$

tend lentement vers 0.

Il est possible d'accélérer cette convergence par un choix judicieux de la manière dont e_n tend vers 0. Dans le but d'y voir plus clair, examinons de plus près l'erreur e_n.

Nous supposons toujours que les conditions (i) et (ii) précédentes sont vérifiées. Supposons de plus que l'on a :

$$|z_1| > |z_2| > |z_k|, \qquad k = 3, 4, \ldots, N \tag{57}$$

(la deuxième plus grande racine, étant unique par le module), donc

$$c_2 \neq 0 \tag{58}$$

dans l'expression (53). Sous ces hypothèses, l'erreur

$$\begin{aligned} e_n &= \frac{c_1 z_1^{n+1} + c_2 z_2^{n+1} + \cdots + c_N z_N^{n+1} - z_1(c_1 z_1^n + \cdots + c_N z_N^n)}{c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_N z_N^n} \\ &= \frac{c_2(z_2 - z_1) z_2^n + \cdots + c_N(z_N - z_1) z_N^n}{c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \cdots + c_N z_N^n} \end{aligned}$$

peut être écrite sous la forme

$$e_n = A t^n (1 + \varepsilon_n), \tag{59}$$

où

$$A = \frac{c_2(z_2 - z_1)}{c_1}, \qquad t = \frac{z_2}{z_1},$$

et

$$1+\varepsilon_n = \frac{1+\dfrac{c_3(z_3-z_1)}{c_2(z_2-z_1)}\left(\dfrac{z_3}{z_2}\right)^n+\cdots+\dfrac{c_N(z_N-z_1)}{c_2(z_2-z_1)}\left(\dfrac{z_N}{z_2}\right)^n}{1+\dfrac{c_2}{c_1}\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^n+\cdots+\dfrac{c_N}{c_1}\left(\dfrac{z_N}{z_1}\right)^n}.$$

En tenant compte des conditions (57), on voit que

$$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{z_k}{z_2}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty$$

pour $k=3,4,\ldots,N$, et donc il s'ensuit :

$$\lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon_n)=1;$$

autrement dit :

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0. \tag{60}$$

Comme conséquence, on a :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = t\frac{1+\varepsilon_{n+1}}{1+\varepsilon_n} = t(1+\delta_n),$$

où

$$\delta_n = \frac{\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty.$$

Nous sommes donc dans les conditions d'utilisation du Théorème d'Aitken suivant.

Théorème 6.2. Théorème d'aitken

Soit $\{x_n\}$ une suite convergeant vers une certaine limite l telle que la suite $\{e_n\}$ définie par $e_n = x_n - l$ vérifie :

$$\begin{aligned} &e_n \neq 0, \\ &e_{n+1} = (A+\epsilon_n)e_n, \qquad \text{pour tout} \quad n, \end{aligned} \tag{61}$$

où A est une constante telle que, $|A|<1$, et $\epsilon_n \longrightarrow 0$ lorsque $n\to\infty$. On construit la suite $\{x'_n\}$ à partir de $\{x_n\}$ par la relation :

$$x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}.$$

Alors la suite $\{x'_n\}$ est définie pour n suffisamment grand et converge plus rapidement vers l que la suite $\{x_n\}$ en ce sens que :

$$\frac{x'_n - l}{x_n - l} \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque} \quad n\to\infty. \tag{62}$$

Démonstration. D'après (61), on a

$$\begin{aligned} e_{n+2} &= (A + \epsilon_{n+1})e_{n+1} \\ &= (A + \epsilon_{n+1})(A + \epsilon_n)e_n. \end{aligned}$$

En utilisant l'opérateur Δ sur x_n comme suit : $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, on a

$$\begin{aligned} \Delta^2 x_n &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \\ &= e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n \\ &= \left[(A-1)^2 + \epsilon'_n\right] e_n, \end{aligned}$$

où $\epsilon'_n = A(\epsilon_n + \epsilon_{n+1}) - 2\epsilon_n + \epsilon_n \epsilon_{n+1}$. Puisque $\epsilon_n \to 0$, alors on a

$$\epsilon'_n \to 0, \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty. \tag{63}$$

Pour n suffisamment grand, disons à partir d'un certain rang n_0, on a : $(A-1)^2 + \epsilon'_n \neq 0$. Il s'ensuit $\Delta^2 x_n \neq 0$ pour tout $n > n_0$. Donc la suite

$$x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \tag{64}$$

est définie pour tout $n > n_0$. On a

$$\Delta x_n = \Delta e_n = (A + \epsilon_n - 1)e_n.$$

En soustrayant l de part et d'autre de l'égalité dans (64), on a

$$\begin{aligned} x'_n - l &= e_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} \\ &= e_n - \frac{(A - 1 + \epsilon_n)^2 e_n}{(A-1)^2 + \epsilon'_n} \\ &= \frac{\epsilon'_n - 2\epsilon_n(A-1) - \epsilon_n^2}{(A-1)^2 + \epsilon'_n} e_n. \end{aligned}$$

Ainsi, du fait que $\epsilon_n \to 0$ et $\epsilon'_n \to 0$, on a

$$\frac{x'_n - l}{e_n} = \frac{\epsilon'_n - 2\epsilon_n(A-1) - \epsilon_n^2}{(A-1)^2 + \epsilon'_n} \longrightarrow 0,$$

d'où le résultat recherché i.e (62). □

Théorème 6.3.
*Sous les hypothèses précédentes, la suite $\{q'_n\}$, obtenue à partir de q_n comme construit dans le Théorème d'*Aitken

$$q'_n = q_n - \frac{(\Delta q_n)^2}{\Delta^2 q_n},$$

converge plus rapidement vers la racine dominante z_1 que la suite $\{q_n\}$.

.

Exemple 11. *Reprenons l'exemple précédent. Rajoutons la colonne* q'_n*. On a :*

n	x_n	q_n	q'_n
0	1	$\cdots$	$\cdots$
1	2	1.357142857	0.9903551902
2	2.714285714	1.157894737	0.9596351618
3	3.142857143	1.066883117	0.9454598390
4	3.353061224	1.017650639	0.9383758390
5	3.412244898	0.9883800410	0.9346949324
6	3.372594752	0.9699170124	0.9327508888
7	3.271137026	0.9578036669	0.9317197866
8	3.133107039	0.9496383559	0.9311736838
9	2.975318617	0.9440291180	0.9308854820
10	2.808787410	0.9401238665	0.9307339807
11	2.640608080	0.9373789475	0.9306546181
12	2.475250423	0.9354364431	0.9306131622
13	2.315439451	0.9340550835	0.9305915543
14	2.162747990	0.9330693373	0.9305803098
15	2.017993834	0.9323641419	0.9305744651
16	1.881505089	0.9318587435	0.9305714296
17	1.753296968	0.9314960679	0.9305698540
18	1.633189232	0.9312355691	$\cdots$
19	1.520883904	0.9310483358	$\cdots$
20	1.416016428	$\cdots$	$\cdots$

Dans ce tableau, on constate la convergence rapide de la suite $\{q'_n\}$ *vers le module de la plus grande racine, i.e* 0.9305681558*, contrairement à la suite* $\{q_n\}$*. Si on observe de plus près ce tableau, on a* q'_8 *(i.e pour* $n = 8$*) est meilleure que la valeur de* $\{q_n\}$ *au rang* $n = 18$*. On remarque que* q'_{17} *est déjà assez proche de la plus grande racine.*

6.3 Cas de racines multiples

Si le polynôme P possède des racines multiples non dominantes parmi $z_2, .., z_N$, alors la formule (53) de la solution générale de l'équation aux différences (52) contient des termes de la forme $n^k z_2^n$. Par conséquent l'expression du quotient x_{n+1}/x_n précédent contient des termes de la forme $n^k\left(z_2/z_1\right)^n$ en plus des $\left(z_2/z_1\right)^n$.
Cependant, ces termes ne perturbent pas la convergence de la méthode,

puisque si $|q| < 1$, on a non seulement $q^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ mais aussi $n^k q^n \to 0$ pour toute valeur fixée de k (convergence exponentiellement rapide).

La situation est différente si la racine dominante a une multiplicité supérieure strictement à 1. Pour se fixer les idées, nous allons supposer qu'il n'y a qu'une seule racine dominante et qu'elle est de multiplicité 2. La relation (53) prend la forme suivante :

$$x_n = c_1 n z_1^n + c_2 z_1^n + c_3 z_3 + \cdots ,$$

où $|z_3| < |z_1|$. Et donc on a (en supposant toujours $c_1 \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{c_1(n+1)z_1^{n+1} + c_2 z_1^{n+1} + c_3 z_3^{n+1} + \cdots}{c_1 n z_1^n + c_2 z_1^n + c_3 z_3^n + \cdots} \\
&= z_1 \frac{(n+1)c_1 + c_2}{nc_1 + c_2} \frac{1 + \dfrac{c_3}{(n+1)c_1 + c_2}\left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)^{n+1} + \cdots}{1 + \dfrac{c_3}{nc_1 + c_2}\left(\dfrac{z_3}{z_1}\right)^{n} + \cdots}.
\end{aligned} \tag{65}$$

On a toujours la convergence mais à un facteur près. Ce facteur,

$$\frac{(n+1)c_1 + c_2}{nc_1 + c_2} = 1 + \frac{1}{n + \dfrac{c_2}{c_1}},$$

ralentit la convergence. L'erreur commise après n étapes est de l'ordre de $1/n$ contrairement à $(z_2/z_1)^n$ dans le cas où la multiplicité de la racine dominante est de 1. Pour améliorer cette convergence très lente, le choix des valeurs initiales sera déterminant.

6.4 Choix des valeurs initiales

Une des conditions de convergence de la méthode de Bernoulli est $c_1 \neq 0$. On montre en algèbre linéaire que cette condition est satisfaite lorsque les valeurs initiales sont choisies comme suit :

$$x_{-N+1} = x_{-N+2} = \cdots = x_{-1} = 0, \quad x_0 = 1. \tag{66}$$

Un choix différent et plus sophistiqué est défini dans l'algorithme suivant :

Algorithme 2.
Étant donné les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_N$*, on calcule* $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ *par les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1 &= -\frac{1}{a_0}(2a_2 + a_1 x_0), \\ x_2 &= -\frac{1}{a_0}(3a_3 + a_2 x_0 + a_1 x_1), \end{aligned}$$

et plus généralement, pour $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$,

$$x_k = -\frac{1}{a_0}\left[(k+1)a_{k+1} + a_k x_0 + a_{k-1}x_1 + \cdots + a_1 x_{k-1}\right], \tag{67}$$

Les valeurs initiales générées par cet algorithme ont la propriété suivante qui s'avère très pratique.

Théorème 6.4.
Considérons le polynôme $P(X) = a_0 X^N + a_1 X^{N-1} + \cdots + a_N$ *dont les racines* $z_1,\ z_2, \ldots,\ z_M$ $(M \leqslant N)$ *sont toutes distinctes. Supposons que la multiplicité de* z_i *soit* m_i *pour tout* $i = 1,\ 2, \ldots,\ M$.
Si les valeurs initiales de la méthode de Bernoulli sont données par l'algorithme (2)*, alors la relation* (53) *prend la forme*

$$x_n = m_1 z_1^{n+1} + m_2 z_2^{n+1} + \cdots + m_M z_M^{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{68}$$

La preuve de ce théorème sera omise ici car s'établit assez facilement en algèbre linéaire.

La relation (68) est remarquable dans le sens où aucune puissance de n n'apparaît et ceci malgré la présence de racines de multiplicité plus grande que 1. Ainsi la difficulté mentionnée dans (53) peut être évitée par un choix approprié des valeurs initiales. Le quotient x_{n+1}/x_n converge alors à une vitesse dépendant uniquement du quotient des modules des deux plus grandes racines.

Exemple 12. *Nous allons comparer les suites* $\{q_n\}$ *associées au polynôme*

$$P(X) = (X-3)^2(x+1)^2 = X^4 - 4X^3 - 2X^2 + 12X + 9,$$

générées par les valeurs initiales données dans (66) *et dans l'algorithme* 2.

Dans les deux cas, la relation de récurrence est

$$x_n = 4x_{n-1} + 2x_{n-2} - 12x_{n-3} - 9x_{n-4}.$$

Rang	**Méthode** (66)		**Algorithme** 2	
n	x_n	q_n	x_n	q_n
-3	0			
-2	0			
-1	0			
0	1		4	5
1	4	4	20	2.600000000
2	18	4, 500000000	52	3.153846154
3	68	3.777777778	164	2.951219512
4	251	3.691176471	484	3.016528926
5	888	3.537848606	1460	2.994520548
6	3076	3.463963964	4372	3.001829826
7	10456	3.399219766	13124	2.999390430
8	35061	3.353194338	39364	3.000203231
9	116252	3.315706911	118100	2.999932261
10	381974	3.285741321	354292	3.000022580
11	1245564	3.260860687	1062884	2.999992473
12	4035631	3.240002922	3188644	3.000002509
13	13003696	3.222221259	9565940	2.999999164
14	41701512	3.206896870	28697812	3.000000279
15	133175792	3.193548282	86093444	2.999999907
16	423741161	3.181818217	258280324	3.000000031
17	1343864820	3.171428560	774840980	2.999999990
18	4249518490	3.162162166	2324522932	3.000000003
19	13402327540	3.153846153	6973568804	2.999999999
20	42168298851			
		$\cdots$		$\cdots$
		3.000000000		3.000000000

On voit clairement que dès les premières valeurs, avec l'algorithme (2), on s'approche de la limite. Avec les choix de la méthode (66), la suite $\{q_n\}$ converge très très lentement vers la solution. Ce n'est qu'à l'ordre 50 qu'on a quelque chose qui se rapproche mais difficilement de 3. Cette valeur qui vaut, $q_{50} = 3.0594059405940594060$, montre combien cette convergence est mauvaise.

Avec les valeurs initiales $\{x_i\}_{i\in[\![0,N-1]\!]}$ obtenues dans le tableau ci-dessus grâce à l'algorithme (2), on vérifie que la relation (68) est correcte. En effet,

$m_1 = m_2 = 2$, $z_1 = 3$ et $z_2 = -1$. En évaluant la relation (68) successivement pour $n = 0$, 1, 2 et 4, on a :

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot (-1)^1 = 6 - 2 = 4\\
x_1 &= 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot (-1)^2 = 18 + 2 = 20\\
x_2 &= 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot (-1)^3 = 54 - 2 = 52\\
x_3 &= 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot (-1)^4 = 162 + 2 = 164.
\end{aligned}$$

Ce qui correspond parfaitement aux valeurs obtenues dans l'exemple précédent.

Remarque 12. *Considérons un polynôme $P(X) = a_0X^N + a_1X^{N-1} + \cdots + a_N$ quelconque de racines $z_1, z_2, \ldots, z_N$. En utilisant les relations de Viète, on vérifie facilement la formule* (68)*. A titre d'exemple, vérifions-le ici pour $n = 0$ et $n = 1$. On a*

$$x_0 = \sum_{i=1}^{N} z_i^{0+1},$$

$$\text{i.e} \qquad -\frac{a_1}{a_0} = \sum_{i=1}^{N} z_i,$$

$$\text{d'où} \qquad a_1 = -a_0 \sum_{i=1}^{N} z_i,$$

*qui correspond bien à la première formule dans les relations de Viète (*c.f.§ 2.1*). Et pour $n = 1$, on a d'après* (68)*,*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sum_{i=1}^{N} z_i^{1+1},\\
2a_2 &= -a_1x_0 - a_0 \sum_{i=1}^{N} z_i^2\\
&= \frac{a_1^2}{a_0} - a_0 \sum_{i=1}^{N} z_i^2\\
&= a_0 \left[\left(\sum_{i=1}^{N} z_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{N} z_i^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\text{d'où} \qquad a_2 = a_0 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} z_iz_j,$$

qui correspond à la deuxième relation des formules de Viète (c.f.§ 2.1)*.*

Bon courage pour $n \geqslant 2$! !

6.5 Deux racines complexes conjuguées dominantes

La théorie développée précédemment reste valable lorsque les coefficients du polynôme P sont réels ou complexes. Cependant, jusque-là, nous avions toujours supposé que z_1 était l'unique racine dominante de P. Maintenant, nous allons considérer le cas où P est un polynôme à coefficients réels admettant deux racines dominantes complexes conjuguées : z_1 et $z_2 = \bar{z}_1$ (tous les deux de multiplicité égale à 1). Les autres racines vérifient par conséquent

$$z_k < z_1, \qquad k \in [\![3, N]\!]. \tag{69}$$

Pour simplifier, nous supposerons aussi que les racines non dominantes sont simples (quoique cela ne soit pas essentiel pour les résultats obtenus).

Si les valeurs initiales de la suite $\{x_n\}$ sont réelles, alors l'équation (53) prend la forme

$$x_n = c_1 z_1^n + \bar{c}_1 \bar{z}_1^n + c_3 z_3^n + \cdots + c_N z_N^n.$$

En représentant les nombres complexes c_1 et z_1 sous forme trigonométrique, on écrit

$$z_1 = r\mathrm{e}^{i\varphi}, \qquad c_1 = a\mathrm{e}^{i\delta}, \quad r > 0 \quad \text{et} \quad a > 0.$$

Supposons de plus que z_1 soit la racine située dans le demi-plan supérieur i.e que $0 < \varphi < \pi$. L'expression de x_n devient alors

$$x_n = 2ar^n \cos(n\varphi + \delta) + c_3 z_3^n + \cdots + c_N z_N^n,$$

ce qui peut s'écrire encore

$$x_n = 2ar^n \left[\cos(n\varphi + \delta) + \theta_n\right], \tag{70}$$

où

$$\theta_n = \frac{c_3}{2a}\left(\frac{z_3}{r}\right)^n + \cdots + \frac{c_N}{2a}\left(\frac{z_N}{r}\right)^n.$$

Par conséquent, pour une constante C convenable, on a

$$|\theta_n| \leqslant Ct^n,$$

où t représente le maximum des quotients $|z_k/r|$, $k = 3, \ldots, N$. Et d'après (69), la quantité t est plus petite que 1, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0. \tag{71}$$

Notre objectif est de retrouver les quantités r et φ à partir de la suite $\{x_n\}$. Pour trouver leurs solutions, supposons d'abord que $\theta_n = 0$. Rappelons que la suite $\{x_n\}$ d'éléments

$$x_n = 2ar^n \cos(n\varphi + \delta)$$

est une solution de l'équation aux différences

$$x_n + Ax_{n-1} + Bx_{n-2} = 0, \tag{72}$$

où $B = r^2,\ A = -2r\cos\varphi$. Pour déterminer les coefficients A et B à partir de la solution de $\{x_n\}$, on remarque que l'équation (72), qui équivaut à l'ordre $n+1$ à

$$x_{n+1} + Ax_n + Bx_{n-1} = 0,$$

représente un système de deux équations linéaires à deux inconnues A et B. Le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} x_{n-1} & x_{n-2} \\ x_n & x_{n-1} \end{vmatrix} \tag{73}$$

équivaut, d'après une identité trigonométrique, à

$$4a^2r^{2n-2}\big\{\cos^2[(n-1)\varphi+\delta] - \cos(n\varphi+\delta)\cos[(n-2)\varphi+\delta]\big\} = 4a^2r^{2n+2}\sin^2\varphi,$$

et par conséquent est différent de zéro puisque $0 < \varphi < \pi$. On peut donc trouver A et B par

$$A = -\frac{E_n}{D_n}, \quad B = \frac{D_{n+1}}{D_n},$$

où

$$E_n = \begin{vmatrix} x_n & x_{n-2} \\ x_{n+1} & x_{n-1} \end{vmatrix}. \tag{74}$$

Ainsi, les quantités recherchées r et φ peuvent s'exprimer par

$$r = \sqrt{B} = \sqrt{\frac{D_{n+1}}{D_n}}, \quad \cos\varphi = -\frac{A}{2r} = \frac{E_n}{\sqrt{2D_nD_{n+1}}}. \tag{75}$$

La relation (75) résout notre problème si la suite $\{x_n\}$ est une solution de l'équation aux différences (52), $\theta_n \neq 0$ en général ; en utilisant (71), il n'est pas difficile de montrer que

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} \to r^2, \quad \frac{E_n}{2D_n} \to r\cos\varphi \quad \text{lorsque } n \to \infty. \tag{76}$$

On obtient ainsi la convergence de l'algorithme suivant pour la détermination d'une paire de racines complexes conjuguées dominantes.

Algorithme 3. *A partir de la solution* $\{x_n\}$ *de l'équation aux différences* (52), *on calcule les déterminants* D_n *et* E_n *définis dans* (73) *et* (74). *On forme ainsi la suite des quotients* D_{n+1}/D_n *et* $E_n/2D_n$.

Le théorème de la convergence correspondante est le suivant :

Théorème 6.5.

Considérons le polynôme défini dans (51). *Supposons qu'il admette exactement 2 racines dominantes complexes conjuguées* $z_1 = \bar{z}_2 = r\mathrm{e}^{i\varphi}$, *toutes les deux étant de multiplicité* 1, *où* $0 < \varphi < \pi$. *Si la solution de l'équation aux différences* (52) *est telle que* $c_1 \neq 0$ *dans la relation* (53) *alors les convergences dans* (76) *sont justifiées :*

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} \to r^2, \quad \frac{E_n}{D_n} \to 2\,r\cos\varphi \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Exemple 13.

Considérons le polynôme

$$P(X) = 81X^4 - 108X^3 + 24x + 20.$$

(Les racines dominantes sont exactement $z_1 = 1 + i/3$ *et* $z_2 = 1 - i/3$*).*

Les calculs étant produits par le programme (*) les résultats sont présentés dans le tableau ci-après.

x_n	D_n	$\frac{D_{n+1}}{D_n}$	E_n	$\frac{E_n}{2D_n}$
−0.658436214				
−0.9657064472	1.185185185	0.9629629630	1.843621399	0.7777777778
−1.828989483	1.141289438	0.3931623932	0.9949702789	0.4358974359
−2.565462582	0.4487120866	1.285024155	1.391657776	1.550724638
−3.118223848	0.5766058697	1.408521303	1.147431229	0.9949874687
−3.377262951	0.8121616511	1.068406485	1.597347589	0.9833926453
−3.291277865	0.8677187747	1.012309126	1.680915208	0.9685829427
−2.831004759	0.8783996347	1.205690661	1.822708184	1.037516474
−2.004070693	1.059078236	1.079206306	2.087411665	0.9854851108
−0.8630087295	1.142963911	1.112425763	2.287804244	1.000820858
0.5007991201	1.271462500	1.115750115	2.549349595	1.002526458
1.960544405	1.418634431	1.108895632	2.833132141	0.9985420061
3.364597767	1.573117524	1.111436927	3.147295195	1.000336958
4.550834006	1.748420907	1.111155035	3.496875572	1.000009654
5.363222525	1.942766695	1.111171387	3.885516157	0.9999955649
5.669960472	2.158746762	1.111017756	4.317389659	0.9999759433
5.380787154	2.398405983	1.111156176	4.796890019	1.000016272
4.461617184	2.665003621	1.111108031	5.329999110	0.9999984741
2.944582149	2.961106926	1.111102357	5.922190559	0.9999960669
		...		...
		1.111111		1.000000

Oscillation de signes

La formule (70) montre qu'en présence d'une paire de racines complexes conjuguées dominantes, les éléments de la suite $\{x_n\}$ se présente sous la forme

$$x_n = 2ar^n \cos(n\varphi + \delta). \tag{77}$$

Cette équation montre en particulier que le signe de x_n oscille. De plus, en regardant la fréquence avec laquelle ces oscillations se produisent, on pourra poser une condition sur φ. Plus précisément, lorsque φ est petit, les oscillations sont allongées, et lorsque φ est proche de π, elles sont courtes. Dans le cas extrême où $\varphi = \pi$, alors les signes "+" et "−" alternent strictement.

Pour des soucis de clarté, voyons d'abord le cas d'un polynôme P de degré 2. L'équation (77) peut s'écrire sous la forme

$$x_n = 2ar^n \sin\left(n\varphi + \delta + \frac{\pi}{2}\right). \tag{78}$$

Lorsque n varie, le signe de x_n alterne de "−" à "+" à chaque fois que

$$n\varphi + \delta + \frac{\pi}{2} = 2k\pi,$$

où k est un entier quelconque. Soit n_k, le premier entier qui vient après k changements de signes de "−" et "+" de la fonction sinus dans la relation (78), i.e soit

$$n_k = \frac{2k\pi - \delta + \frac{\pi}{2}}{\varphi} + \theta_k, \tag{79}$$

où $0 \leqslant \theta_k < 1$. Ce qui signifie que pour tout entier positif k,

$$\operatorname{sign}(x_{n_k-1}) = -1, \qquad \operatorname{sign}(x_{n_k}) = 1.$$

Remplaçons maintenant dans (79) la relation correspondante à $k = 0$. On obtient

$$n_k - n_0 = \frac{2k\pi}{\varphi} + \theta_k - \theta_0,$$
$$\frac{n_k - n_0}{k} = \frac{2\pi}{\varphi} + \frac{\theta_k - \theta_0}{k}.$$

Puisque les θ_k sont des nombres compris entre 0 et 1, à la limite on a alors

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\theta_k - \theta_0}{k} = 0,$$

et donc la limite

$$T = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k - n_0}{k}$$

existe et vaut $2\pi/\varphi$. Ainsi on trouve

$$\varphi = \frac{2\pi}{T}. \tag{80}$$

Voici quelques problèmes de recherche posés par Henrici.

Problème 1. Comment la présence de plus de deux racines dominantes se manifeste au niveau des signes de la suite $\{x_n\}$, et comment peut-on retrouver les arguments ?

Le problème qui suit est un autre problème de recherche posé par Henrici et résolu par M.Mignotte.

Problème 2. Supposons qu'un polynôme admette exatement trois racines dominantes, une réelle et deux complexes conjuguées. Concevoir une modification de la méthode de Bernoulli qui prend en compte cette situation.

6.6 Solution du Problème 2 par M. Mignotte

Soit une polynôme à coefficients complexes

$$P(X) = a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d, \quad a_0 \neq 0, \tag{81}$$

de racines distinctes $z_1, \ldots, z_k$, où z_i est de multiplicité m_i, et où on a la relation $|z_1| \geqslant \cdots \geqslant |z_k|$.

On montre d'abord qu'il est toujours possible de calculer $|z_1|$ par la méthode de Bernoulli.

6.6.1 Calcul de $|z_1|$

Nous considérons les deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant la relation de récurrence

$$a_0x_{n+d} + a_1x_{n+d-1} + \cdots + a_dx_n = 0 \quad \text{pour } n \geqslant 0,$$

et définies par les conditions initiales

$$u_i = -\frac{1}{a_0}\left[(j+1)a_{j+1} + a_ju_0 + a_{j-1}u_1 + \cdots + a_1u_{j-1}\right] \quad j \in [\![0, d-1]\!]$$
$$v_0 = \cdots = v_{d-2} = 0, \quad v_{d-1} = 1.$$

On pose

$$U_n = \max_{k \leqslant n} |u_k|^{1/k}, \quad V_n = \max_{k \leqslant n} |v_k|^{1/k}. \tag{82}$$

Le résultat suivant fournit un encadrement de $|z_1|$.

Théorème 6.6. *Soit P un polynôme défini par* (81). *Alors z_1 vérifie les inégalités*

$$U_n d^{-1/n} \leqslant |z_1| \leqslant V_n \left(\frac{\| P \|}{|a_0|} + 2 \right)^{2d/n} \qquad (\text{avec } \ \| P \| = \max |a_i|).$$

Démonstration. On vérifie facilement la relation

$$z_1^i = \sum_{i=0}^{d-1} z_1^{d-i-1} v_{i+j} \quad j \geqslant 0.$$

Il en résulte

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant d-1} |v_{i+n}| \geqslant |z_1|^n \left(1 + |z_1| + \cdots + |z_1|^{d-1}\right)^{-1} \geqslant |z_1|^n \left(|z_1| + 1\right)^{1-d}.$$

D'où l'inégalité de droite, grâce à l'inégalité bien connue

$$|z_1| = 1 + \left(\frac{\| P \|}{a_0} \right).$$

D'autre part, l'inégalité de gauche provient de la relation (68),

$$u_n = \sum_i m_i z_i^n, \quad n \geqslant 0. \tag{83}$$

□

Remarque 13. *En fait, U_n et V_n tendent vers $|z_1|$. Pour le voir, on utilise respectivement le théorème de Dirichlet sur l'approximation simultanée des nombres réels par des rationnels (appliqué aux arguments des z_i) et l'expression de v_n comme polynôme exponentiel. En particulier, on a*

$$V_n - |z_1| = O(\log n/n) \tag{84}$$

et même $O(1/n)$ si les racines de module $|z_1|$ sont simples.

Sur le problème

On suppose donc z_1 réel positif, $z_3 = \bar{z}_2$, $m_1 = m_2 = 1$, $z_1 = |z_2| > |z_4|$. Posons $w_n = u_n - V_n u_{n-1}$. Des relations (83) et (84), on déduit (en posant $r = |z_1|$, $z_2 = r\mathrm{e}^{i\varphi}$)

$$\begin{aligned} w_n &= 2r^n(\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi + O(1/n)) \\ &= 4r^n \left(\sin\left(\frac{2n-1}{2}\varphi\right) \sin\frac{\varphi}{2} + O(1/n) \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$D_n = \begin{vmatrix} w_n & w_{n-1} \\ w_{n+1} & w_n \end{vmatrix} = 16r^{2n}\left(\sin^2\varphi\sin^2\frac{\varphi}{2} + O(1/n)\right)$$

et

$$E_n = \begin{vmatrix} w_n & w_{n-2} \\ w_{n+1} & w_{n-1} \end{vmatrix} = 16r^{2n-1}\left(2\sin^2\varphi\cos\varphi\sin^2\frac{\varphi}{2} + O(1/n)\right).$$

Ce qui montre que

$$\frac{D_{n+1}}{D_n} \to r^2, \qquad \frac{E_n}{D_{n-1}} \to 2r\cos\varphi.$$

D'où la détermination de z_1, z_2 et z_3. Cette méthode s'étend assez facilement au cas où z_1 et z_2 sont des racines multiples.

7 Utilisation de la méthode de BAKER

7.1 Notation et définitions

Une suite $\mathcal{U} = (U_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres est dite récurrente s'il existe un entier h, et des nombres q_1, q_2, ..., q_h ($q_h \neq 0$) tels que

$$U_{n+h} = q_1 U_{n+h-1} + \cdots + q_h U_n, \qquad \text{si} \quad n \geqslant 0. \tag{85}$$

On ne considérera que le cas où les q_j et U_n sont des entiers. Posons

$$\mathcal{U}_n = \begin{pmatrix} U_n \\ U_{n+1} \\ \vdots \\ U_{n+h-1} \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ q_h & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & q_1 \end{pmatrix}.$$

Exprimée sous forme matricielle, la relation (85) devient

$$\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{Q}\mathcal{U}_n = \mathcal{Q}^{n+1}\mathcal{U}_0, \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 0. \tag{86}$$

Le polynôme caractéristique associé à $\mathcal{U}$ est

$$P(X) = X^h - q_1 X^{h-1} - q_2 X^{h-2} - \cdots - q_h = (X - \alpha_1)^{k_1} \cdots (X - \alpha_r)^{k_r},$$

où les α_i sont distincts. En utilisant par exemple la décomposition de Jordan de $\mathcal{Q}$, on voit qu'il existe des polynômes $R_1, \ldots, R_r$, de degré au plus $k_1 - 1, \ldots, k_r - 1$ respectivement, de sorte que l'on ait

$$U_n = R_1(n)\alpha_1^n + \cdots + R_r(n)\alpha_r^n, \qquad \text{si} \quad n \geqslant 0. \tag{87}$$

Definition 7.1. *On dira qu'une suite $\mathcal{U}$ vérifiant (85), est d'ordre au plus égal à h ; elle sera dite d'ordre h si elle ne vérifie aucune relation d'ordre plus petit. Dans ce cas, les $R_j(t)$; $j = 1, \ldots, r$, sont de degré $k_j - 1$.*

Inversement, une suite $\mathcal{U}$, définie par (87) vérifie (85).

Si $\mathcal{U}$ vérifie (85), et si on considère la suite $\mathcal{V} = (V_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$V_n = U_{nT+m}, \quad n \geqslant 0 \quad (T > 0, \quad m \geqslant 0 \quad \text{entiers fixés}).$$

La relation (87) montre que l'on a

$$V_n = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j^m R_j(nT + m)(\alpha_j^T)^n. \tag{88}$$

On en déduit que $\mathcal{V}$ vérifie la relation de récurrence d'ordre $\leqslant h$ et que cette relation ne dépend que de T.

7.2 Application de la méthode de BAKER

7.2.1 Minoration du terme général

Théorème 7.1. *Soit $\mathcal{U}$ une suite récurrente à valeurs entières telle que le polynôme caractéristique P associé possède au plus 3 racines de module maximal et que ces racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ ($l \leqslant 3$) soient simples. Alors, il existe des constantes effectives C_1, C_2, C_3 telles que si,*

$$U_n = R_1\alpha_1^n + \cdots + R_l\alpha_l^n + R_{l+1}(n)\alpha_{l+1}^n + \cdots + R_r(n)\alpha_r^n,$$

avec $R_1, \ldots, R_l$ constantes, et

$$U'_n = R_1\alpha_1^n + \cdots + R_l\alpha_l^n,$$

on ait

$$|U_n| > C_1|\alpha_1|^n n^{-C_2} \qquad \text{si} \quad U'_n \neq 0 \quad \text{et} \quad n \geqslant C_3.$$

Démonstration. D'après les hypothèses, il existe λ positif tel que l'on ait

$$U_n = U'_n + O(|\alpha_1|^n \mathrm{e}^{-\lambda n}).$$

Il suffit donc de démontrer l'existence des constantes effectives $C'_1,\ C'_2,\ C'_3$ telles que

$$(U'_n \neq 0) \Rightarrow \left(U'_n \geqslant C'_1|\alpha_1|^n n^{-C'_2} \quad \text{si} \quad n \geqslant C'_3\right).$$

On supposera $R_1 \neq 0$.

– Si $R_2 = R_3 = 0$,

$$U'_n = R_1\alpha_1^n + R_2\alpha_2^n + R_3\alpha_3^n = R_1\alpha_1^n, \quad \text{trivial}.$$

– Pour simplifier et mieux voir ce qui se passe, supposons d'abord que $l = 2$,

$$U'_n = R_1\alpha_1^n + R_2\alpha_2^n \quad \text{avec} \quad R_1 = \bar{R}_2, \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_1.$$

En utilisant la notation exponentielle, on peut écrire :

$$R_1 = |R_1|\,\mathrm{e}^{i\theta}, \quad \alpha_1 = |\alpha_1|\,\mathrm{e}^{i\varphi}.$$

Par suite, on a :

$$U'_n = |R_1|\,\mathrm{e}^{i\theta}\,|\alpha_1|^n\,\mathrm{e}^{in\varphi} + |R_1|\,\mathrm{e}^{-i\theta}\,|\alpha_1|^n\,\mathrm{e}^{-in\varphi}.$$

D'où

$$U'_n = 2\,|R_1\alpha_1^n|\cos(\theta + n\varphi), \quad \theta,\ \varphi \in]-\pi, \pi]$$

or, $\cos(\theta+n\varphi)$ petit $\Leftrightarrow$ $\theta+n\varphi-k\pi/2$ petit pour un certain $k\in\mathbb{Z}$.
On sait que $\cos(\theta+n\varphi)=\sin(\theta+n\varphi+\pi/2)$. On sait aussi que

$$|\sin(x)|\geqslant\frac{|x|}{2}\qquad\text{pour}\quad|x|\leqslant\pi/4,$$

Donc, il convient de distinguer deux cas :
1^{er} cas : $\quad|\theta+n\varphi-\pi/2|\geqslant\pi/4 \mod \pi/2$ alors

$$|\sin(\theta+n\varphi-k\pi/2)|\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{Ok!}$$

$2^{ème}$ cas : $\quad|\theta+n\varphi-\pi/2|\leqslant\pi/4 \mod \pi/2$ alors

$$|\cos(\theta+n\varphi)|\geqslant\frac{1}{2}\left|\theta+n\varphi-k\frac{\pi}{2}\right|.$$

En appliquant la méthode de Baker à la forme linéaire de logarithmes $i\theta+in\varphi-ik\pi/2$, on obtient

$$|\theta+n\varphi-k\pi/2|\geqslant C_1n^{-C_2},$$

ce qui implique

$$|U'_n|\geqslant 2\,|R_1\alpha_1^n|\,\frac{1}{2}C_1n^{-C_2}=C'_1|\alpha_1|^nn^{-C_2}.$$

– Si $l=3$, quitte à diviser par $|\alpha_3|^n$, on peut se ramener à l'étude d'une expression du type

$$U'_n=R_1a_1^n+\bar{R}_1\bar{a}_1^n+R_3;$$

avec R_1, a_1 algébriques, $R_1\neq 0$, $|a_1|=1$, $R_3=0$ ou 1. Il est clair qu'il suffit de considérer le cas $R_3\leqslant 2|R_1|$. Posons alors

$$U_1=|R_1|\mathrm{e}^{i\theta},\quad a_1=\mathrm{e}^{i\varphi},\quad R_3|R_1|^{-1}=-2\cos\psi;$$

où θ, φ, $\psi\in\,]-\pi,\pi]$. On a

$$\begin{aligned}U'_n&=|R_1|\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{in\varphi}+|R_1|\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{e}^{-in\varphi}-2|R_1|\cos\psi\\&=2|R_1|\left(\cos(\theta+n\varphi)-\cos\psi\right)\\&=4|R_1|\left(\sin\frac{\theta+n\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\theta+n\varphi+\psi}{2}\right).\end{aligned}$$

D'où

$$|U'_n|=4|R_1|\left|\sin\frac{\theta+n\varphi-\psi}{2}\sin\frac{\theta+n\varphi+\psi}{2}\right|.$$

– Si $\psi = 0$, cette méthode se ramène au cas précédent. En effet minorer $\sin^2$ revient à minorer $|\sin|$.
– Si $\psi \neq 0$ alors

$$\sin(\theta + n\varphi + \varepsilon\psi) \text{ petit} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta + n\varphi + \varepsilon\psi + m\pi \text{ petit}, \; (\varepsilon = \pm 1),$$

pour un certain entier m. Puisque

$$|\sin(\theta + n\varphi + \varepsilon\psi + m\pi)| \geqslant \frac{|\theta + n\varphi + \varepsilon\psi + m\pi|}{2}$$

lorsque $|\theta + n\varphi + \varepsilon\psi + m\pi| \leqslant \pi/4$, on se retrouve dans l'étude de cas faite pour $l = 2$.

□

Remarque 14. *Pour plus de détails sur les formes linéaires de logarithmes, voir [1].*

Sous des conditions plus générales, on obtient encore une minoration effective du terme général U_n donnée dans le théorème suivant :

Théorème 7.2. *Supposons toujours $l \leqslant 3$, mais avec des racines éventuellement multiples. Supposons de plus qu'au moins une des quantités $\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant l$ ne soit pas racine de l'unité. Alors il existe des nombres $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ calculables dépendant uniquement de la suite $\mathcal{U}$ tels que*

$$|U_n| \geqslant |\alpha_1|^n \exp\left(-C_1 (\log m)^2\right) \tag{89}$$

dès que $n \geqslant C_2$.

Démonstration. Voir M.S.T. □

7.2.2 Conséquences

Théorème 7.3. *Sous les hypothèses (arithmétiques) du théorème 7.1, on a*

$$\liminf |U_n|^{1/n} \geqslant |\alpha_1|.$$

On a d'office l'inégalité

$$\limsup |U_n|^{1/n} \leqslant |\alpha_1|,$$

et cela sans hypothèse aucune.

Démonstration. Triviale. □

Corollaire 7.1. *Sous les hypothèses (arithmétiques) du théorème 7.1, on a la convergence de* $|U_n|^{1/n}$ *vers* $|\alpha_1|$ *:*

$$\lim_{n\to\infty} |U_n|^{1/n} = |\alpha_1|.$$

Corollaire 7.2. *Soit* $\mathcal{U}$ *une suite récurrente à valeurs entières telle que le polynôme caractéristique associé* P *possède au plus trois racines de module maximal et que ces dernières soient simples. Supposons qu'au moins une des quantités* α_i/α_j, $1 \leqslant i < j \leqslant 3$, *ne soit pas racine de l'unité.*
Alors le module de la racine dominante peut être obtenu par la méthode de Graeffe traditionnelle.

Démonstration. Notons d'abord que la méthode de Graeffe fait apparaître des suites récurrentes linéaires, données par les coefficients des polynômes successifs dont les racines sont les puissances d'ordre 2^i des racines du polynôme initial. En particulier la suite $\mathcal{U}$ des coefficients du second terme vérifie les hypothèses du théorème 7.2 lorsque les conditions de l'énoncé du corollaire sont satisfaites. D'où la conclusion. □

Remarque 15. *Le point important et original de ce corollaire est qu'il concerne la méthode de Graeffe. Nous avions en effet montré, grâce au théorème élémentaire de Dirichlet, la convergence de la méthode de Bernoulli mais pas celle de Graeffe. En effet, dans le cas de la méthode de Bernoulli, on parcourt tous les termes d'une certaine suite récurrente linéaire et grâce au théorème de Dirichlet, on sait que certains d'entre eux sont "bons". Par contre, la méthode de Graeffe est l'analogue de la méthode de Bernoulli mais, cette fois, on ne parcourt que les termes dont les indices sont des puissances de deux et, pour de tels indices, le théorème de Dirichlet ne peut être appliqué* [15] *(même si le résultat est vrai) ; la seule méthode possible est celle de Baker [en effet, nous avons vu que l'estimation donnée équivaut exactement à une minoration d'une certaine forme linéaire de "logarithmes de nombres algébriques"]. De plus il est important de montrer que les hypothèses "arithmétiques" utilisées ci-dessus ne peuvent être supprimées. Si elles ne sont pas vérifiées, on peut construire des suites pour lesquelles le résultat précédent est faux, l'idée est d'utiliser des nombres transcendants de Liouville convenables.*

7.3 Exemples

Bien que le théorème précédent ait un caractère beaucoup plus théorique que pratique, nous donnons ici quelques exemples numériques. La raison principale est la suivante : les estimations sur les formes linéaires de logarithmes

[15] Dit de manière informelle, il n'y a aucune raison que les puissances de deux soient de "bons" indices pour le théorème de Dirichlet.

font à ce jour apparaître des constantes astronomiques, mais sur des exemples le comportement effectif est bien meilleur que ce que donne la théorie, comme nous allons le voir dans les calculs qui suivent.

Exemple 14. *Considérons le polynôme P de degré 5 suivant admettant deux racines de module maximal (cette valeur étant égale à 2) :*

$$P(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x + 4.$$

A l'aide de Maple, on construit les polynômes P_k décrits dans le théorème de Dandelin-Graeffe. Puis on détermine le coefficient $a_1^{(k)}$ afin d'obtenir une approximation du module de la plus grande racine $|z_1|$. Regroupons les résultats dans le tableau ci-dessous.

k	$a_1^{(k)}$	$\lvert z_1\rvert$
5	8884229123	2.045946944
6	369800974183955553795	2.021852646
7	680572235[...]32556803	2.010859975
8	231584178[...]42504963	2.005422550

En fait,

$$P(x) = (x + 2i)(x - 2i)(x + 1.839)(x - 0.420 + 0.606i)(x - 0.420 - 0.606i).$$

On observe une convergence tardive et lente, on ne gagne qu'un bit à chaque itération. Remarquons que ce n'est pas le cas pour une racine dominante simple.

Exemple 15. *On considère ici le polynôme Q de degré 7 suivant possédant trois racines de module maximal (cette valeur maximale étant 3) :*

$$Q(x) := x^7 - 2x^6 + 5x^5 - 14x^4 - 40x^3 + 39x^2 - 36x + 27.$$

On obtient ainsi le tableau suivant

k	$a_1^{(k)}$	$\lvert z_1\rvert$
5	5559061885623618	3.104783324
6	1030105146[...]2801961474	3.051941989
7	3537055373[...]3701378562	3.025859542
8	4170253571[...]1284624898	3.012902027
9	5797004949[...]7250061314	3.006444093

Ici aussi, la convergence est lente, plus lente que dans l'exemple précédent. Cela est dû au fait qu'il y a trois racines de module maximal et un degré plus élevé (7). On gagne environ un bit après 3 itérations.

8 Valeurs propres d'une matrice

8.1 Définitions et notations

Soit un système de n équations linéaires homogènes du type

$$AX = \lambda X \qquad \text{ou} \qquad a_{ij}x^j = \lambda x_i, \tag{90}$$

où A est une matrice carrée, X une matrice colonne et λ un scalaire. Cela s'écrit aussi

$$(A - \lambda U)X = 0 \qquad \text{ou} \qquad (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})\, x^j = 0, \tag{91}$$

où U est la matrice unité d'ordre n. Un tel système admet toujours la solution $X = 0$ qui ne présente aucun intérêt. Pour qu'il admette d'autres solutions non nulles, il faut que le déterminant des inconnues soit nul, d'où

$$\parallel A - \lambda U \parallel = 0 \qquad \text{ou} \qquad \parallel a_{ij} - \lambda\delta_{ij} \parallel = 0, \tag{92}$$

soit

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{93}$$

Le développement de ce déterminant conduit à un polynôme en λ de degré n qui s'écrit

$$P(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right] = 0. \tag{94}$$

Par conséquent, seules les racines λ_i de ce polynôme, au nombre de n, réelles ou complexes, correspondent à des solutions non nulles de (90).
Le polynôme $P(\lambda)$ est appelé le *polynôme caractéristique* et (94) est *l'équation caractéristique* de A. Les racines λ_i de $P(\lambda)$ sont les *valeurs propres*[16] de la matrice A. A chaque valeur propre λ_i correspond une solution non nulle de (90) que nous désignons par X_i et que l'on appelle *vecteur propre* de A associé à λ_i. On a donc

$$AX_i = \lambda_i X_i. \tag{95}$$

[16]On dit aussi valeurs latentes ou valeurs caractéristiques.

8.2 Itération d'un vecteur

8.2.1 Multiplication itérée d'un vecteur arbitraire par la matrice

a) **Principe de la méthode**

Soit A une matrice et X_i ses vecteurs propres. Si les X_i sont linéairement indépendants, c'est-à-dire si le déterminant $\| X_1 X_2 \dots X_n \|$ n'est pas nul, un vecteur arbitraire V_1 peut être développé suivant les X_i, ce qui donne [17]

$$V_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n. \tag{96}$$

Si on multiplie m fois en avant l'expression (96) par A, on obtient, en vertu de $AX_i = \lambda_i X_i$

$$A^m V_1 = a_1 \lambda_1^m X_1 + a_2 \lambda_2^m X_2 + \cdots + a_n \lambda_n^m X_n. \tag{97}$$

Si les λ_i sont réels et si $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$ quand $m \to \infty$ on a

$$A^m V_1 \sim a_1 \lambda_1^m X_1, \tag{98}$$

pourvu que a_1 soit non nul. Si on pose

$$V_{m+1} = A^m V_1, \tag{99}$$

on a alors, d'après (98),

$$\lambda_1 = \lim_{m \to \infty} \left(\frac{V_{m+1}}{V_m} \right). \tag{100}$$

Le rapport qui figure dans (100) pouvant être calculé avec l'une quelconque des n composantes de V_{m+1} et la composante correspondante de V_m.

Remarque 16. *Toujours d'après (98) (sous l'hypothèse $a_1 \neq 0$), V_{m+1} converge vers le vecteur propre X_1 à un coefficient près $a_1 \lambda_1^m$ qui est sans importance puisque les vecteurs propres ne sont définis qu'à un facteur multiplicatif près.*

$$V_{m+1} \longrightarrow X_1, \quad \text{quand} \quad m \to \infty. \tag{101}$$

[17] Les coefficients a_i sont donnés par $a_i = \dfrac{Y_i V_1}{Y_i X_i}$, les Y_i étant les vecteurs propres lignes.

Exemple 16. *Considérons la matrice A suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{102}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 9$. Il est facile de trouver deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres à savoir

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs successives de V_m sont

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
1	5	41	365	3281	29525	265721
0	4	40	364	3280	29524	265720

(103)

Les valeurs des rapports de deux composantes successives sont

5	8.2	8.90	8.989	8.9988	8.99986
∞	10	9.10	9.011	9.0012	9.00014

(104)

Chacune des deux suites tend vers la valeur 9 qui est la valeur propre de plus grand module.

Remarque 17. *Le raisonnement précédent suppose que le vecteur arbitraire V_1 possède une composante non nulle suivant X_1, c'est-à-dire que a_1 est différent de zéro. Si l'on avait $a_1 = 0$, on obtiendrait λ_i et X_i pour un certain $i \geqslant 2$ (en fait le premier i tel que $a_i \neq 0$).*

b) **Procédé :**

C'est un processus qui est tout à fait analogue à la méthode de Bernoulli que nous avons déjà étudiée pour les racines d'un polynôme. La convergence est donc lente car le nombre de chiffres exacts augmente d'une même quantité à chaque itération (ou il faut un même nombre d'itérations pour avoir un chiffre exact supplémentaire) ; on est en présence d'une *convergence linéaire.*

Quand on ne possède aucune information a priori sur X_1, on part du vecteur $V_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, comme nous l'avons fait dans (103).

Si le coefficient a_1 du développement (96) est petit, la convergence peut être lente. Elle est rapide dans le cas contraire. Mais parfois, une convergence rapide correspond à de mauvaises conditions pour obtenir les autres valeurs propres (du moins avec le même vecteur de départ V_1).

Pour calculer la suite $A^m V_1$, on ne calcule pas la suite des puissances de A, mais on passe d'un vecteur itéré au suivant par

$$V_{p+1} = AV_p. \tag{105}$$

Le calcul de V_2, V_3, ..., V_m exige donc dans ces conditions mn^2 multiplications, alors qu'autrement il en faudrait n fois plus.
Au lieu de laisser croître l'ensemble des composantes de V_m comme dans (103), on peut les normaliser ; cela peut se faire de plusieurs manières ; on peut diviser toutes les composantes de V_p par $\left(V_p^t V_p\right)^{1/2}$ si la matrice est symétrique. On peut aussi, ce qui est beaucoup plus simple et efficace, ramener à la valeur 1 l'une des composantes par exemple la plus grande. Ce dernier procédé a l'avantage que la composante correspondante du vecteur itéré suivant donne le rapport à la valeur précédente, c'est-à-dire tend vers la valeur propre de plus grand module.

Exemple 17.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1,\ 2,\ 8. \tag{106}$$

	7	7.5714285	7.8679246	7.9640288
1	1	1	1	1
0	0.14285714	0.20754718	0.22781775	0.23336345
0	−0.14285714	−0.18867924	−0.20143885	−0.20475761
V_1	V_2	V_3	V_4	V_5

7.9906655	7.9976259	7.9994016	7.9998498
1	1	1	1
0.23480424	0.23517079	0.23526319	0.23528638
−0.20559973	−0.20581154	−0.20586464	−0.20587793
V_6	V_7	V_8	V_9

7.9999624	7.9999906	7.9999976
1	1	1
0.23529219	0.235229364	0.23529401
−0.20588126	−0.205888208	−0.20588229
V_{10}	V_{11}	V_{12}

8
1 0.23529410 -0.20588235
V_{13} : *valeurs exactes*

Remarque 18. $\diamond$ *S'il y a des racines multiples et plusieurs vecteurs associés à un même λ, il arrive que l'on observe des oscillations d'un vecteur à un autre, ce qui est très gênant pour le test d'arrêt.*
$\diamond$ *Il est préférable de ne pas égaler à 1 systématiquement la première composante. En effet, si elle est nulle, les autres composantes deviennent énormes et ceci peut être gênant pour la suite des calculs (par exemple pour l'élimination de la racine). On cherche donc la plus grande des composantes et c'est elle que l'on égale à 1.*
$\diamond$ *Il faut tester toutes les composantes car certains rapports restent fixes très tôt (parfois même dès le début ; voir l'exemple suivant).*

Exemple 18. *Itérer le vecteur $V' = (1, 0, 0)$ avec la matrice*

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -4 & 6 & 2 \\ -2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 7,\ 8,\ 9.$$

En itérant avec A, on a le tableau suivant

1 0 0	9 -4 -2	81 -64 -32	729 -772 -386	6521 -8320 -4160	59049 -84484 -42242	531441 -827584 -413792
V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7

Les premières composantes des vecteurs successifs donnent 9 dès le début. On tend vers le vecteur ${}^tX = (1, -2, -1)$.
En itérant avec cette fois-ci $A - 9Id$ (Id étant la matrice identité ou unitaire), on trouve $\lambda = 7$ et ${}^tX = (0, 4, 2)$.

c) Itération d'un vecteur ligne.

Au lieu de partir d'un vecteur colonne arbitraire, on peut partir d'un vecteur ligne H_1 et former les vecteurs itérés successifs H_1, H_2, ..., H_m par la relation

$$H_p A = H_{p+1}. \qquad (107)$$

Tous les résultats précédents restent valables et on l'on peut obtenir le vecteur ligne Y_i associé à la valeur propre λ_i de plus grand module.

Exemple 19. *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 9, \tag{108}$$

et les deux vecteurs

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voici les résultats jusqu'à $m = 7$ de l'itération d'un vecteur colonne V_1 et d'un vecteur ligne H_1 ; pour la commodité de l'écriture et pour avoir une disposition commune des deux tableaux, on a utilisé le vecteur transposé ${}^tH_p$ de H_p, qui est un vecteur colonne.

1	3	33	291	2625	23619	212577
0	4	32	292	2624	23620	212576
V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7

(109)

1	3	33	291	2625	23619	212577
0	6	48	438	3936	35430	318864
${}^tH_1$	${}^tH_2$	${}^tH_3$	${}^tH_4$	${}^tH_5$	${}^tH_6$	${}^tH_7$

(110)

Les valeurs exactes des vecteurs propres lignes et colonnes de A sont

$$\begin{array}{ccc} \lambda \to & 9 & -1 \\ \hline & 1 & 3 \\ & 1 & -2 \\ & \uparrow & \uparrow \\ & X_1 & X_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \lambda_i & & & & \\ \downarrow & & & & \\ 9 & 2 & 3 & \leftarrow & Y_1 \\ -1 & 1 & -1 & \leftarrow & Y_2 \end{array} \tag{111}$$

On voit que les suites (109) et (110) tendent vers les valeurs X_1 et Y_1. Les rapports des deux premières composantes de V_7 et de ${}^tH_7$ aux mêmes composantes de V_6 et H_6 donnent 9.000254033 *au lieu de* 9.

d) Quotient de Rayleigh

Si on connaît les valeurs approchées de H_m et V_m respectivement du vecteur ligne Y et du vecteur colonne X correspondant à la valeur propre λ d'une matrice A, on peut calculer une valeur de λ qui a deux fois plus de chiffres exacts que les vecteurs à l'aide du quotient de Rayleigh qui s'écrit

$$\frac{H_m A V_m}{H_m V_m} = \lambda_m. \tag{112}$$

Soient E_m et F_m les erreurs sur les vecteurs V_m et H_m,

$$X - V_m = E_m, \qquad Y - H_m = F_m. \tag{113}$$

Le quotient de Rayleigh donne

$$\lambda_m H_m V_m = H_m A V_m, \tag{114}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(\lambda - \lambda_m) H_m V_m = H_m (\lambda U - A) V_m. \tag{115}$$

Mais d'après

$$Y(\lambda U - A) = 0, \qquad (\lambda U - A)X = 0 \tag{116}$$

et en tenant compte de (113), la relation (115) prend la forme

$$(\lambda - \lambda_m) H_m V_m = F_m (\lambda U - A) E_m. \tag{117}$$

Cette relation montre que l'erreur $(\lambda - \lambda_m)$ sur λ est proportionnelle au produit de l'erreur sur V_m par l'erreur sur H_m. Elle est donc du second ordre par rapport aux erreurs sur les vecteurs.
Si l'on arrête le processus itératif à V_m et H_m, on a deux fois plus de chiffres exacts en calculant λ_m par (112) plutôt qu'en faisant le rapport de deux composantes analogues dans V_{m-1} et V_m (ou H_{m-1} et H_m). On peut noter que (112) peut encore s'écrire

$$\lambda_m = \frac{H_m V_{m+1}}{H_m V_m} = \frac{H_{m+1} V_m}{H_m V_m}, \tag{118}$$

ce qui simplifie beaucoup les calculs.

Exemple 20. *Reprenons les suites (109) et (110). Elles donnent*

$$\lambda_6 = \frac{H_6 V_7}{H_6 V_6} = \frac{12552243843}{1394713761} = 8.99999999569804, \tag{119}$$

avec 9 *chiffres exacts alors que les rapports dans (104) avec* (V_7/V_6), *on n'avait que* 4 *chiffres exacts.*

Remarque 19. *Si la matrice* A *est symétrique, il est inutile de calculer les vecteurs lignes puisque* $H_m = {}^tV_m$. *On a alors*

$$\lambda_m = \frac{{}^tV_m V_{m+1}}{{}^tV_m V_m}. \tag{120}$$

Exemple 21. *Reprenons la suite (103) ; d'après (104) on a*

$$\lambda_7 = \frac{15690529805}{1743392201} = 8.99999999770562, \tag{121}$$

avec 9 *chiffres exacts alors que les rapports dans (104) n'en donnaient que* 4.

8.3 Elimination d'une valeur propre par déflation

Dans les méthodes qui suivent, on calcule d'abord une valeur propre et son vecteur propre. Avant de passer au calcul de la seconde valeur propre, il faut éliminer la première et si possible réduire l'ordre de la matrice d'une unité. Cette opération est appelée la déflation. Il existe plusieurs procédés de déflation mais nous allons seulement exposer la méthode de Hotelling et la méthode de Wielandt que nous utiliserons plus tard.

8.3.1 Méthode de HOTLELLING

Si l'on a trouvé une valeur propre λ_i d'une matrice A ainsi que ses vecteurs propres X_i et Y_i normalisés, soit

$$Y_i X_i = 1, \tag{122}$$

la matrice B, de même ordre n que A, définie par

$$B = A - \lambda_i X_i Y_i, \tag{123}$$

possède les mêmes valeurs propres que A sauf la valeur propre λ_i qui est remplacée par zéro. Dans l'expression (123), le produit $X_i Y_i$ est une matrice carrée d'ordre n telle que $(X_i Y_i)_{m,n} = x_{mi} y_{in}$.

Pour établir les propriétés énoncées il suffit de multiplier (123) par X_k, ce qui donne

$$BX_k = AX_k - \lambda_i X_i \left(Y_i X_k\right) = \lambda_k X_k - \lambda_i X_i \left(Y_i X_k\right). \tag{124}$$

Si $i \neq k$, on a $Y_i X_k = 0$ et il reste

$$\big(B - \lambda_k\big) X_k = 0. \tag{125}$$

Ce qui prouve que λ_k est une valeur propre de B avec le même vecteur propre X_k que la matrice A.

Si $i = k$ on a $Y_i X_i = 1$ et il reste

$$BX_i = 0. \tag{126}$$

Ceci prouve que X_i est aussi un vecteur propre de B mais avec la valeur propre zéro.

Si la première valeur propre λ_1 et ses vecteurs propres $\big(X_1, Y_1\big)$ ont été obtenus par itération d'un vecteur arbitraire V, il n'est pas nécessaire de recommencer le processus itératif avec B car on peut calculer directement $B^m V$. On a en effet, la relation

$$B^m = \big(A - \lambda_i X_i Y_i\big)^m = A^m - \lambda_i^m X_i Y_i. \tag{127}$$

Pour démontrer (127) vérifions que, si elle est vraie pour m, elle est encore vraie pour $m+1$. On a en effet

$$B^{m+1} = \big(A - \lambda_i X_i Y_i\big)\big(A^m - \lambda_i^m X_i Y_i\big) = A^{m+1} - \lambda_i^{m+1} X_i Y_i, \tag{128}$$

en tenant compte de $Y_i X_i = 1$, de $AX_i = \lambda_i A$ et $Y_i A^m = \lambda_i^m Y_i$. Comme la propriété se vérifie immédiatement pour $m = 1$, elle est générale.

De (127) on déduit

$$B^m V = A^m V - \lambda_1^m X_1 Y_1 V = V_m - \lambda_1^m (Y_1 V) X_1. \tag{129}$$

Comme on a calculé V_m, X_1, Y_1 dans les itérations avec A on a directement $B^m V$ par (129) ce qui permet de calculer $B^{m+1}V$ puis λ_2 et X_2. On aurait de même avec un vecteur ligne initial arbitraire L

$$LB^m = L_m - \lambda_1^m (LX_1) Y_1. \tag{130}$$

Il faut cependant noter que, dans (129), le vecteur $B^m V$ est donné par la différence de deux termes assez voisins et il y a beaucoup de chiffres significatifs qui disparaissent. L'erreur relative sur $B^m V$ est donc assez grande. Néanmoins (129) conduit à une assez bonne valeur de départ pour λ_2 et X_2. On peut l'améliorer ensuite par d'autres méthodes.

L'avantage de la méthode de Hotelling sur celle qui consiste à calculer λ_2 avec un vecteur initial orthogonal à X_1, c'est que λ_1 et X_1 ne tendent pas à reparaître au cours des itérations ultérieures.

Exemple 22.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad Y_1 = (1,1,0), \qquad X_1 = \begin{pmatrix} -34 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La matrice A possède la valeur propre $\lambda_1 = 8$ et les vecteurs propres X_1 et Y_1 (les deux autres valeurs propres sont 1 *et* 2*).*
On a

$$\frac{X_1 Y_1}{Y_1 X_1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 34 & 34 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice B donnée par (123) s'écrit

$$B = \left(A - 8\,\frac{X_1Y_1}{Y_1X_1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{11}{21} & \frac{-10}{21} & 2 \\ -\frac{11}{21} & \frac{10}{21} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier qu'elle admet les valeurs propres 0, 1, 2, *soit*

$$||B|| = 0, \qquad ||B - U|| = 0, \qquad ||B - 2U|| = 0.$$

La matrice B a l'avantage d'avoir les mêmes valeurs propres que A, mais en contrepartie elle est toujours d'ordre n au lieu d'être réduite d'une unité comme dans les autres méthodes de déflation. Elle oblige à calculer le vecteur ligne Y après avoir calculé le vecteur colonne, ce qui allonge la durée des calculs et complique le programme. Cette difficulté disparaît si la matrice est symétrique puisque $Y = {}^tX$; elle est atténuée si A est le produit BC de deux matrices symétriques puisque dans ce cas on a ${}^tY = CX$.

La méthode de Hotelling est surtout intéressante pour les matrices symétriques car elle conserve la symétrie. On peut donc appliquer à la matrice B la même méthode qu'à la matrice A.

Remarque 20. *La formule (123) peut s'écrire*

$$B = (U - X_iY_i)A. \tag{131}$$

Si on a déterminé p valeurs propres de la matrice A et les vecteurs propres X et Y correspondants, on peut les éliminer en formant la matrice

$$C = (U - X_pY_p)\cdots(U - X_2Y_2)(U - X_1Y_1)A. \tag{132}$$

La matrice C possède les autres valeurs propres de A et p fois la racine zéro. En particulier si l'on a obtenu un couple de valeurs propres conjuguées et leurs valeurs, on les élimine en formant

$$C = (U - X^*Y^*)(U - XY)A. \tag{133}$$

Comme $Y^*X = 0$, on peut aussi écrire

$$C = (U - X^*Y^* - XY)A = A - \lambda^*X^*Y^* - \lambda XY. \tag{134}$$

La matrice C est donc réelle.

Remarque 21. *La méthode de Hotelling s'applique sans difficulté quand il y a des valeurs propres multiples correspondant à des diviseurs élémentaires linéaires. Par contre, elle ne fonctionne plus lorsque la valeur propre correspond à un diviseur élémentaire non linéaire. Dans ce cas, en effet on ne peut faire*[18]

$$Y_i X_i = 1 \qquad \text{car on a} \qquad Y_i X_i = 0.$$

8.3.2 Méthode de Wielandt

Dans cette méthode il est question d'élimination de racine et de réduire l'ordre de la matrice d'une unité.

a) **Formules générales.** Supposons que l'on ait déterminé une valeur propre λ_k et le vecteur propre colonne correspondant X_k d'une matrice A d'un type quelconque ; considérons la matrice B définie par

$$B = A - \lambda_k X_k L \tag{135}$$

avec

$$LX_k = 1, \tag{136}$$

où L est un vecteur ligne uniquement soumis à la condition (136). Le produit $X_k L$ est une matrice carrée alors que l'expression LX_k est le produit scalaire de deux vecteurs ligne et colonne, soit un scalaire.

En multipliant (135) par X_k et en tenant compte de (136), on a

$$BX_k = 0. \tag{137}$$

Ceci montre que X_k est aussi un vecteur propre de B avec la valeur propre zéro.

Considérons le vecteur propre Z_i défini par

$$Z_i = X_i - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} X_k (LX_i) \qquad \text{avec} \quad i \neq k. \tag{138}$$

Il est facile de voir que Z_i est un vecteur propre de B avec la valeur propre λ_i ; on a, en effet, d'après (138) et (135)

$$BZ_i = AX_i - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \underbrace{(AX_k)} (LX_i) + \frac{\lambda_k^2}{\lambda_i} X_k \underbrace{(LX_k)} (LX_i),$$

[18] Considérez par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

ce qui, d'après (136) et du fait que $AX_k = \lambda_k X_k$, s'écrit simplement

$$BZ_i = \lambda_i Z_i; \tag{139}$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

De (137) et (139) il résulte que la matrice B a les mêmes valeurs propres que la matrice A, sauf la valeur propre λ_k qui a été remplacée par la valeur propre zéro.

Les vecteurs propres de A et B sont reliés par les expressions (138) quand $i \neq k$. Il est utile de pouvoir remonter des vecteurs de B à ceux de A. Pour cela, nous multiplions (138) en avant par L ; ceci donne

$$LX_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_k}(LZ_i). \tag{140}$$

En portant cette expression (140) dans (138), on obtient la relation cherchée

$$X_i = Z_i + \frac{\lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}(LZ_i)X_k, \tag{141}$$

qui permet de calculer le vecteur X_i associé à A une fois que l'on a déterminé Z_i associé à B.

Remarque 22. *On notera que si $L = Y_k$ (Y_k est le vecteur ligne associé à λ_k) la méthode de Wielandt devient identique à la méthode de Hotelling ; on a alors $LX_i = 0$ et (140) montre que $LZ_i = 0$; la formule (141) se réduit donc à $X_i = Z_i$.*

b) Choix du vecteur L. Supposons que le vecteur X_k soit normé sur sa composante de plus grand module ; on a donc

$$^tX_k = \left(x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{(j-1)k}, 1, x_{(j+1)k}, \ldots, x_{nk}\right), \tag{142}$$

si c'est la composante j qui a le plus grand module.

Dans ces conditions, le vecteur L le plus commode que l'on puisse considérer est le vecteur A_{j*}, formé par la j-ème ligne de la matrice A dont toutes les composantes ont été divisées par λ_k, soit

$$\lambda_k L = A_{j*}. \tag{143}$$

On a en effet avec (143),

$$LX_k = \frac{1}{\lambda_k} A_{j*} X_k = x_{jk} = 1. \tag{144}$$

Avec (143), les formules fondamentales (135) et (141) prennent la forme simple

$$B = A - X_k Aj*, \tag{145a}$$

$$X_i = Z_i + \frac{A_{j*}Z_i}{\lambda_i - \lambda_k} x_k. \tag{145b}$$

Puisque $x_{jk} = 1$, la formule (145a) montre que la $j^{ième}$ ligne de la matrice B est nulle, soit

$$B_{j*} = 0. \tag{146}$$

Grâce à la formule (143), la formule (138) s'écrit

$$Z_i = X_i - x_{ji} X_k. \tag{147}$$

Elle nous montre que la $j^{ième}$ composante de Z_i est nulle, toujours à cause de la relation $x_{jk} = 1$; d'où l'égalité

$$z_{ji} = 0. \tag{148}$$

Grâce aux relations (146) et (148), on peut utiliser à la place de la matrice B, la matrice d'ordre $(n-1)$ obtenue en supprimant dans B la ligne j (déjà nulle) et la colonne j. Cette matrice d'ordre $(n-1)$ possède les mêmes valeurs propres que B (sauf la valeur propre zéro) et des vecteurs propres qui ont les mêmes composantes que les vecteurs propres de B, sauf la $j^{ième}$ (qui avait la valeur zéro dans les vecteurs propres de B). En définitive, on a éliminé la valeur propre λ_k et réduit l'ordre de la matrice. Sur la matrice obtenue, on peut recommencer le processus et arriver ainsi de proche en proche à une matrice d'ordre 1.

Remarque 23. *Au lieu d'utiliser la notation A_{j*}, on pourrait introduire le vecteur ligne E'_j*

$$E'_j = (0\ 0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0), \tag{149}$$

qui a sa $j^{ième}$ composante égale à 1 et toutes les autres nulles. On a alors

$$E'_j A = A_{j*}. \tag{150}$$

Ainsi, les formules (145a) et (147) s'écrivent

$$B = (U - X_k E'_j)A, Z_i = (U - X_k E'_j)X_i, \tag{151}$$

où U est la matrice unité d'ordre n.

Exemple 23. *Considérons par exemple la matrice A ci dessous qui admet pour valeurs propres :* 1, 2, 3 *et* 4.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad X_4 = \begin{pmatrix} 22 \\ -3 \\ -31 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

On trouve d'abord $\lambda_4 = 4$ et le vecteur X_4 ci-dessus. La plus grande[19] *composante de ce vecteur est -31 ; on divise donc toutes les composantes par ce nombre, ce qui donne*

$$X_4' = \begin{pmatrix} -\frac{22}{31} & \frac{3}{31} & 1 & -\frac{21}{31} \end{pmatrix}.$$

On a donc ici $j = 3$. On trouve aisément

$$X_4 A_3 = \begin{pmatrix} -\frac{88}{31} & \frac{44}{31} & -\frac{110}{31} & \frac{66}{31} \\ \frac{12}{31} & -\frac{6}{31} & \frac{15}{31} & -\frac{9}{31} \\ 4 & -2 & 5 & -3 \\ -\frac{84}{31} & \frac{42}{31} & -\frac{105}{31} & \frac{63}{31} \end{pmatrix}.$$

On en déduit B par

$$B = A - X_4 A_{3*} = \frac{1}{31} \begin{vmatrix} 26 & -13 & 17 & -4 \\ 19 & 37 & 16 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 239 & -73 & 260 & 123 \end{vmatrix}.$$

En supprimant la troisième ligne et la troisième colonne, on obtient la matrice C d'ordre 3 suivante

$$C = \begin{vmatrix} 26 & -13 & -4 \\ 19 & 37 & 9 \\ 239 & -73 & 123 \end{vmatrix}.$$

Cette matrice admet la valeur propre $\lambda = 3$ et le vecteur propre W_3 tel que

$$W_3' = (11 \ \ -17 \ \ -129).$$

[19]au sens de la valeur absolue bien évidemment.

Le vecteur propre correspondant Z_3 de B est tel que

$$Z_3' = (11 \ \ -17 \ 0 \ \ -129)\,.$$

On a $A_{3*}Z_3 = 465$, $(\lambda_3 - \lambda_4) = -1$; dans ces conditions, la formule (145b) donne le vecteur propre X_3 de A, soit

$$X_3 = \begin{pmatrix} 341 \\ -62 \\ -465 \\ 186 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c}\text{ou tout simplement,} \\ \text{après division par } \mathit{31}\end{array} \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Remarque 24. *L'avantage de la méthode de Wielandt sur celle de Hotelling, c'est qu'il n'est pas nécessaire de calculer le vecteur Y et qu'elle réduit d'une unité l'ordre de la matrice.*

En contrepartie, les vecteurs propres des matrices "déflationnées" ne sont pas les mêmes que les vecteurs propres de la matrice A. Il y a donc un calcul de remontée[20] *qui est assez compliqué. Elle n'est pas indiquée pour les matrices symétriques car elle détruit la symétrie ; ceci dans la mesure où l'on veut utiliser des méthodes de calcul spéciales aux matrices symétriques.*

8.4 Analogie avec la méthode de Bernoulli

La formule (91) étant semblable à celle rencontrée dans la méthode de Bernoulli (53), on en déduit qu'il doit exister une formule de récurrence à $n+1$ termes du type de la formule définie dans (Algorithme 1). Les méthodes deviennent même identiques si la matrice est sous la forme standard de Frobenius. Soit en effet

$$\begin{pmatrix} -p_1 & -p_2 & -p_3 & \cdots & \cdots & \cdots & -p_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{152}$$

[20] Quand on a obtenu les vecteurs propres des matrices réduites d'ordre respectivement $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 2, 1, il faut remonter aux vecteurs propres de A. Pour cela, il faut stocker au fur et à mesure des éliminations et réductions les éléments qui seront nécessaires pour ces calculs.

et

$$(x_{k+n-1}, x_{k+n-2}, \ldots, x_{k+2}, x_{k+1}, x_k), \tag{153}$$

les n composantes du vecteur colonne V_k. Avec la forme (152), la première composante du vecteur itéré V_{k+1} s'écrit

$$(V_{k+1})_1 = -[p_1 x_{k+n-1} + p_2 x_{k+n-2} + \cdots + p_{n-1} x_{k+1} + p_n x_k]. \tag{154}$$

Si on appelle x_n cette composante, on a bien la relation de récurrence de la méthode de Bernoulli.
Les autres composantes sont

$$\begin{cases} (V_{k+2})_2 = x_{k+n-1}, \\ (V_{k+1})_3 = x_{k+n-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots . \end{cases} \tag{155}$$

Elles sont donc égales aux précédentes décalées d'un rang vers le bas. A l'itération suivante, on aura

$$x_{k+n+1} = -[p_1 x_{k+n} + p_2 x_{k+n-1} + \cdots + p_{n-1} x_{k+2} + p_n x_{k+1}]; \tag{156}$$

c'est donc encore (154) où k est remplacé par $(k+1)$. Au lieu des composantes x_i qui correspondent aux vecteurs colonnes, on peut songer aux composantes y_i d'un vecteur ligne $H_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ qui serait itéré de la droite par A. Si les composantes de H_k sont écrites sous la forme

$$H_k = [y_1^{(k)}, y_2^k, \ldots, y_n^{(k)}], \tag{157}$$

les solutions de $H_{k+1} = H_k A$ sont reliées aux précédentes par les relations

$$\begin{cases} y_m^{(k+1)} = p_m y_1^{(k)} + y_{m+1}^{(k)}, & \text{si} \quad m = 1, 2, \ldots (n-1), \\ y_n^{(k+1)} = p_n y_1^{(k)}, & \text{si} \quad m = n, \end{cases} \tag{158}$$

ces relations sont plus simples que celles de Bernoulli, mais elles sont plus nombreuses. La valeur propre de plus grand module λ_1 est toujours donnée par

$$\lambda_1 = \lim_{k \to \infty} \frac{y_m^{(k+1)}}{y_m^{(k)}}. \tag{159}$$

Revenons au cas d'une matrice A quelconque, la formule (91) étant la même que dans la méthode de Bernoulli, tous les développements de cette méthode pour les racines d'un polynôme sont encore valables ici. Toutes ces méthodes s'appliquent à l'une quelconque des n composantes du vecteur itéré V_m (ou

du vecteur H_m).
En particulier du fait que l'erreur tend vers zéro comme $(\lambda_2/\lambda_1)^m$ en fonction du numéro m de l'itération, on en conclut que la convergence sera rapide quand la racine qui suit la racine de plus grand module est nettement plus petite. Dans le cas contraire, la convergence peut être très lente et à la limite on a le cas des racines multiples.
Le cas le plus défavorable pour la convergence est celui où le rapport $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ est voisin de 1 et où le coefficient a_1 de la formule (90) est petit.

8.5 Calcul en chaîne des vecteurs X_i et valeurs propres λ_i

8.5.1 Matrices symétriques.

Dans ce cas, la méthode d'élimination de Hotelling est particulièrement indiquée. On calcule donc par itération λ_m et X_m, puis on forme la matrice B

$$B = A - \lambda_m \frac{X_m {}^t X_m}{{}^t X_m X_m} \tag{160}$$

et on recommence avec la matrice B comme avec la matrice A. De proche en proche, on obtiendra ainsi toutes les valeurs propres et leurs vecteurs.
Le test d'arrêt doit porter sur le vecteur, avec

$$\begin{cases} P = \sum_i \left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|, \\ Q = \sum_i \left|x_i^{(k+1)}\right|. \end{cases} \tag{161}$$

On arrête si

$$P/Q < 10^{-n_0}.$$

Exemple 24.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -6 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\lambda =$	-9	-6	-3
	2	1	2
$X =$	-2	2	1
	1	2	-2

Nous allons regrouper les valeurs obtenues dans le tableau ci-dessus.

Nombre d'itérations	42	22	4
λ	9.00000000	−6.0000009	−3.0000000
	0.99999999	0.99999999	0.99999999
X	−0.99999997	2.0000003	0.50000023
	0.50000001	2.0000007	−0.99999946

Commentaires :
Pour la valeur propre -6, la convergence est presque parfaite aux alentours de la 22^e itération alors que pour $\lambda = 9$, il en faudra davantage.

8.5.2 Matrices non symétriques à valeurs propres réelles

Dans ce cas, la méthode d'élimination de Hotelling nécessiterait le calcul du vecteur Y qui est en général sans intérêt. Il vaut donc mieux utiliser la méthode de déflation de Wielandt avec chaque fois une réduction de l'ordre de la matrice.

8.6 Itération d'un vecteur complexe

Quand on a deux racines conjuguées de même module, il faut calculer leur somme s et leur produit p si l'on veut itérer un vecteur réel. On peut aussi dans ce cas, itérer avec la matrice $(A - ipU)$ où p est un nombre réel ; on sépare alors les deux racines conjuguées de même module mais le vecteur itéré devient complexe. On peut donc avoir un programme qui soit utilisable pour une matrice quelconque à éléments complexes.

Le choix du paramètre p devrait correspondre au maximum du rapport $[\mu + i(p+\nu)]/[\mu + i(p-\nu)]$, soit $p^2 = \mu^2 + \nu^2$, mais ce choix est difficile quand on a aucune information sur le module de la racine que l'on cherche.

Références

[1] A. Baker, *The theory of linear forms in logarithms*, Transcendence theory : Advances and Applications, Acad. Press (London and New York, 1977).

[2] R.J. Bradford, J.H. Davenport .— *Effective tests for cyclotomic polynomials*. Symbolic and algebraic computation (Roma, 1988), p. 244–251, Lecture Notes in Comput. Sci., 358, Springer, Berlin, 1989.

[3] J. Berstel, M. Mignotte .— *Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires*, Bull. Soc. Math. France, **104**, 1976, p. 175–184.

[4] E. Durand, *Solutions numériques des équations algébriques*, Tome I, Masson & Cie, 1960.

[5] E. Durand, *Solutions numériques des équations algébriques*, Tome II, Masson & Cie, 1961.

[6] G.H. Hardy, E.M. Wright .— *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxfrod, 1979.

[7] G.Haris, C.Martin, *Proceedings of the American Mathematical* Society, Vol. 100, No. 2 (Jun., 1987), pp. 390-392.

[8] Peter Henrici, *Applied and Computional Complex Analysis*, Vol. 1, John Wiley & Sons,Inc., 1974.

[9] Peter Henrici. *Elements of numerical analysis*, Ed. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1964.

[10] R. Ferguson .— *Irreducible polynomails with many roots of equal modulus*, Acta Arith., **78**, No 3, 1997, p. 221–225.

[11] Maurice Mignotte, *Mathématiques pour le calcul formel*, puf, 1989.

[12] Maurice Mignotte, *Mathematics for Computer Algebra*, Springer-Verlag, 1991.

[13] Maurice Mignotte. *Algèbre concrète*, Éd. ellipses, Paris, Août 2002.

[14] M. Mignotte, T. N. Shorey and R. Tijdeman, *The distance between terms of an algebraic recurrence sequence*, J. Reine Angew. Math. 349 (1984), 63–76.

[15] M. Mignotte, Doru Ştefănescu, *Linear recurrent sequences and polynomial roots.* J. Symbolic Comput. 35 (2003), no. 6, 637–649.

[16] M. Mignotte and Doru Ştefănescu, *Estimates for Polynomial Roots*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 12 (2001), no. 6, 437–453.

[17] Moris Marden, *Geometry of polynomials*, Math. Survey, no. 3, Amer. Math. Soc., providence, R. I., 1966.

[18] G. Wüstholz, *A Panorama of Number Theory or The View from Baker's Garden*, Cambridge University Press, 2002.

ANNEXES

Annexe 1 : Graeffe

Graeffe classique

```
graeffeClassic := proc(p :: polynom, x :: name, k :: nonnegint)
local P, i;
P := unapply(p, x);
for i from 1 to k do
P := expand(P(sqrt(x)) · P(−sqrt(x)));
P := unapply(P, x);
end do;
return P(x);
 end proc:
```

(1.1)

Exemple

```
p:=randpoly(x, degree = 5)
```

$$-56-7x^5+22x^4-55x^3-94x^2+87x \qquad (2.1)$$

```
graeffeClassic(p, x, 8);
```

```
3436646907605115310038172632483234363723797981545259911687578602184058634\
    968938307632941715738300655518638454334163822926410688151619430834\
    045488096674782801514912631273000608901996257522445132112765802832\
    986976027192359823047051318583059337813873439769067380600647290416\
    759674742287999838247012640050175821471921211291741963932630851045\
    203384723750945639199169820954918513383345066612673504854837092108\
    647050734719768173639560934485540695447699456 +
    1755570749913696073200161174678553753069323868641019249807527479007\
    886162584731996035724946269422909730891212069876586821910304726860\
    613969133858471754004949036892771235882267983600788333842027346612\
    042013747637642035126339324569615904025034179993306064475646410476\
    027676320888779915171986811942065296937328626588739543103008171963\
    924948511412472723185893415487075380202628520481362357652078872178\
    942920404783586717516523482745095013144447394020613188969236431258\
    5570952174422543083433243389118463 x−
    221359540004604815545018861547494593716251705026007306991636639052\
    470497400798999684800343383794038078279445526231260759886736342594\
    056001485602786638194645895120583737911647366324673350968072126424\
    6243189632348313601 x^5 +
    764162405834451601873148559479240008373094949750869440961765093861\
    788763822882434750858019903980879138918625262132153535743266063328\
```

(2.2)

$$
\begin{array}{l}
01425211608982239531862882343112968862823618559403948197922377876\backslash \\
25652529035315651027509931353765712452212059526103548502498869243\backslash \\
54078964511987492799353775820082346135765393226848394864539255428\backslash \\
0891571278335787920843262\, x^4 - \\
15013835982741877298798266181646607307837261803051206660443710774\backslash \\
93067049257421336866760487394842667423732647215322678433169595066\backslash \\
13997280569332525491132208719620105551361722528573762622178401126\backslash \\
79663906398980598544709761856113188106562072577919695372406419459\backslash \\
37711377591882046176054164571403669846427625971074304641934156131\backslash \\
01420475361494376625942138190077186547837352469082442637748165567\backslash \\
31337876474196852194953196600764113820433688006696913544666137428\backslash \\
1158147851782129081533381711213188611\, x^3 + \\
43229441818080832305840859581640166873719631639154840774212944985\backslash \\
91848681762291956479893556869657711167320114522519386221632756909\backslash \\
15840053164930363215508731283803175452473254284681113652684815719\backslash \\
67217776173986425101328794966261208989875580232844335503674385867\backslash \\
48291956997010412119801979861453602675358522108510932497762999993\backslash \\
35027757406212485472841604932935856199737241338433025413932813288\backslash \\
59281258112914756283627593747326982519955677684012485553680500086\backslash \\
24003746776661928976857295924017201662609183344119698262449916068\backslash \\
30676239229241787908606\, x^2
\end{array}
$$

On remarque que les coefficients explosent très vite, ce qui assure une convergence presque parfaite.

Généralisation de la méthode de Graeffe classique pour les cas 3 et 4

$F: x \rightarrow F(x)$

$$x \rightarrow F(x) \tag{3.1}$$

$G: x \rightarrow G(x)$

$$x \rightarrow G(x) \tag{3.2}$$

$H: x \rightarrow H(x)$

$$x \rightarrow H(x) \tag{3.3}$$

$P := x \rightarrow F(x^3) + x\ G(x^3) + x^2\ H(x^3)$

$$x \rightarrow F(x^3) + x\,G(x^3) + x^2\,H(x^3) \tag{3.4}$$

$P\left(\sqrt[3]{x}\right)$

$$F(x) + x^{1/3}\,G(x) + x^{2/3}\,H(x) \tag{3.5}$$

$j := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\,\pi}{3}}$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3} \tag{3.6}$$

$P\left(\sqrt[3]{x}\right)\ P\left(j\ \sqrt[3]{x}\right)\ P\left(j^2\ \sqrt[3]{x}\right)$

$$\begin{aligned}&\left(F(x) + x^{1/3}\,G(x) + x^{2/3}\,H(x)\right)\left(F\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 x\right)\right.\\&\quad + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right) x^{1/3}\,G\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 x\right)\\&\quad \left.+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^2 x^{2/3}\,H\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 x\right)\right)\left(F\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^6 x\right)\right.\\&\quad + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^2 x^{1/3}\,G\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^6 x\right)\\&\quad \left.+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^4 x^{2/3}\,H\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^6 x\right)\right)\end{aligned} \tag{3.7}$$

simplify(%)

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}\left(F(x) + x^{1/3}\,G(x) + x^{2/3}\,H(x)\right)\left(-2\,F\left(\frac{1}{8}\left(-1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 x\right)\right.\\&\quad + x^{1/3}\,G\left(\frac{1}{8}\left(-1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 x\right) - \mathrm{I}\,x^{1/3}\,G\left(\frac{1}{8}\left(-1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 x\right)\sqrt{3}\\&\quad \left.+ x^{2/3}\,H\left(\frac{1}{8}\left(-1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 x\right) + \mathrm{I}\,x^{2/3}\,H\left(\frac{1}{8}\left(-1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)^3 x\right)\sqrt{3}\right)\left(2\,F\left(\frac{1}{64}\right.\right.\\&\quad \left.\left(-1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)^6 x\right) - x^{1/3}\,G\left(\frac{1}{64}\left(-1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)^6 x\right) - \mathrm{I}\,x^{1/3}\,G\left(\frac{1}{64}\left(-1 + \mathrm{I}\sqrt{3}\right)^6 x\right)\sqrt{3}\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$-x^{2/3}H\left(\frac{1}{64}\left(-1+\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^6 x\right)+\mathrm{I}x^{2/3}H\left(\frac{1}{64}\left(-1+\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^6 x\right)\sqrt{3}\right)$$

evala(%)

$$-\frac{1}{4}\left(F(x)+x^{1/3}G(x)+x^{2/3}H(x)\right)\left(-2F(x)+x^{1/3}G(x)-\mathrm{I}x^{1/3}G(x)\sqrt{3}+x^{2/3}H(x)+\mathrm{I}x^{2/3}H(x)\sqrt{3}\right)\left(2F(x)-x^{1/3}G(x)-\mathrm{I}x^{1/3}G(x)\sqrt{3}-x^{2/3}H(x)+\mathrm{I}x^{2/3}H(x)\sqrt{3}\right) \tag{3.9}$$

expand(%) # **La formule à l'ordre 3 :**

$$-3F(x)\,x\,G(x)\,H(x)+F(x)^3+x\,G(x)^3+x^2H(x)^3 \tag{3.10}$$

$L: x \rightarrow L(X)$

$$x\rightarrow L(X) \tag{3.11}$$

$k := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$$\mathrm{I} \tag{3.12}$$

$P := X \rightarrow F(X^4)+X\ G(X^4)+X^2\ H(X^4)+\ X^3\ L(X^4)$

$$X\rightarrow F(X^4)+X\,G(X^4)+X^2H(X^4)+X^3L(X^4) \tag{3.13}$$

$P\left(Y^{\frac{1}{4}}\right)\ P\left(k\ Y^{\frac{1}{4}}\right)\ P\left(k^2\ Y^{\frac{1}{4}}\right)\ P\left(k^3\ Y^{\frac{1}{4}}\right)$

$$\left(F(Y)+Y^{1/4}G(Y)+\sqrt{Y}H(Y)+Y^{3/4}L(Y)\right)\left(F(Y)+\mathrm{I}Y^{1/4}G(Y)-\sqrt{Y}H(Y)-\mathrm{I}Y^{3/4}L(Y)\right)\left(F(Y)-Y^{1/4}G(Y)+\sqrt{Y}H(Y)-Y^{3/4}L(Y)\right)\left(F(Y)-\mathrm{I}Y^{1/4}G(Y)-\sqrt{Y}H(Y)+\mathrm{I}Y^{3/4}L(Y)\right) \tag{3.14}$$

expand(%);

$$-Y^3L(Y)^4-Y\,G(Y)^4+Y^2H(Y)^4+2\,Y^2G(Y)^2L(Y)^2-2\,F(Y)^2\,Y\,H(Y)^2+F(Y)^4-4\,F(Y)^2\,Y\,L(Y)\,G(Y)+4\,F(Y)\,Y\,G(Y)^2H(Y)-4\,Y^2G(Y)\,H(Y)^2L(Y)+4\,F(Y)\,Y^2L(Y)^2H(Y) \tag{3.15}$$

sort(%)

$$-L(Y)^4\,Y^3+4\,F(Y)\,H(Y)\,L(Y)^2\,Y^2+2\,G(Y)^2L(Y)^2\,Y^2-4\,G(Y)\,H(Y)^2L(Y)\,Y^2+H(Y)^4\,Y^2-4\,F(Y)^2G(Y)\,L(Y)\,Y-2\,F(Y)^2H(Y)^2\,Y+4\,F(Y)\,G(Y)^2H(Y)\,Y-G(Y)^4\,Y+F(Y)^4 \tag{3.16}$$

simplify(%)

$$-L(Y)^4\,Y^3+4\,F(Y)\,H(Y)\,L(Y)^2\,Y^2+2\,G(Y)^2L(Y)^2\,Y^2-4\,G(Y)\,H(Y)^2L(Y)\,Y^2+H(Y)^4\,Y^2-4\,F(Y)^2G(Y)\,L(Y)\,Y-2\,F(Y)^2H(Y)^2\,Y \tag{3.17}$$

$$+4\,F(Y)\,G(Y)^2\,H(Y)\,Y - G(Y)^4\,Y + F(Y)^4$$

collect(%, Y) #` `**La formule à l'ordre 4 :**

$$-L(Y)^4\,Y^3 + \left(H(Y)^4 + 2\,G(Y)^2\,L(Y)^2 - 4\,G(Y)\,H(Y)^2\,L(Y) + 4\,F(Y)\,H(Y)\,L(Y)^2\right)Y^2 + \left(-G(Y)^4 - 2\,F(Y)^2\,H(Y)^2 + 4\,F(Y)\,G(Y)^2\,H(Y) - 4\,F(Y)^2\,G(Y)\,L(Y)\right)Y + F(Y)^4 \tag{3.18}$$

On peut ainsi déterminer une formule pour les cas 5, 6 et plus. Seulement la formule devient vite compliquée et presque inexploitable.
On verra pour de tels cas de nouvelles formules ou relations plus pratiques notamment à l'aide du résultant de deux polynômes.

Graeffe Généralisée

$graeffeGen := proc(p :: polynom, x :: name, k :: nonnegint)$
local $P, G, y;$
 if $k < 2$ *then*
print("Erreur -- k doit être plus grand que 2 !");
else
#*print*("Le polynôme G[k] obtenu est : ");
 $P := unapply(p, x);$
$G := sort\left(resultant\left(P(y), x - y^k, y\right)\right);$
end if;
end proc;

```
proc(p::polynom, x::name, k::nonnegint)
    local P, G, y;
    if k < 2 then
        print("Erreur -- k doit être plus grand que 2 !")
    else
        P := unapply(p, x);
        G := sort(resultant(P(y), x - y^k, y))
    end if
end proc
```
(4.1)

Exemple

$p := randpoly(x, degree = 10) + 19;$

$$-10\,x^9 + 62\,x^8 - 82\,x^4 + 80\,x^3 - 44\,x^2 + 71\,x + 19 \quad (5.1)$$

$graeffeGen(p, x, 5)$

$$-100000\,x^9 + 912032832\,x^8 + 5461324800\,x^7 + 11159581680\,x^6 + 13712772320\,x^5 + 11168268888\,x^4 + 2056956380\,x^3 + 428756276\,x^2 + 4596709701\,x + 2476099 \quad (5.2)$$

$graeffeGen(p, x, 8)$

$$100000000\,x^9 - 217006545904896\,x^8 + 214058591355648\,x^7 + 6341419697190912\,x^6 + 18099560948586848\,x^5 + 18758888045099488\,x^4 + 5335025089044144\,x^3 + 632951704181728\,x^2 + 2883234303235409\,x - 16983563041 \quad (5.3)$$

$k := 2 \cdot 6!:$

(5.4)

$time(graeffeGen(p, x, k))$

$$16.188 \quad (5.5)$$

Ici on a la généralisation de la méthode de Graeffe. A l'aide de graeffeGen, on calcule le polynôme G_k le transformé de Graeffe à l'ordre k. Ce calcule prend un peu de temps lorsque k devient trop grand. Par exemple, pour $k = 1440$ le calcul prend $10.592\ s$.

Calcul des racines par Dandelin-Graeffe (Méthode de Durand)

Coefficents des polynômes obtenus à chaque étape dans l'algorithme de Graeffe

Programme

```
> with(PolynomialTools):
> with(linalg):
> dur1:=proc(p::polynom, x::name, k::nonnegint)

  local a, b, c, n, i, j, s, B, q, D, f, F;

  n:=degree(p,x);
  c:=array(1..n+1);
  c:=CoefficientList(p,x);
  a:=array(0..2*n);
  b:=array(1..n,-n..n);
  B:=array(1..n);
  D:=array(0..k,0..n);

  for i from 0 to n do
           a[n-i]:=c[i+1];
  end do;
  for i from n+1 to 2*n do
           a[i]:=0;
  end do;

  for i from 0 to n do
           D[0,i]:=a[i];
  end do;
  for q from 0 to k do
           D[q,0]:=a[0];
  end do;

  for q from 1 to k do
           for j from 1 to n do
                    for s from -j to j do
                             b[j,s]:=(-1)^s*a[j-s]*a[j+s];
                    end do;
                    B[j]:=add(b[j,s],s=-j..j);
                    D[q,j]:=B[j];
           end do;
```

```
                for i from 1 to n do
                           a[i]:=B[i];
                end do;
    end do;

    for q from 0 to k do
                F[q]:=[seq(D[q,j],j=1..n)];
    end do;

    f:=(i,j)->F[i][j];
    Matrix(k, n, f);

    end proc:
```

Exemples

```
> Digits:=12;
```

$$Digits := 12$$

```
> p:=x^7-2*x^6+5*x^5-14*x^4-40*x^3+39*x^2-36*x+27;
```

$$p := x^7 - 2\,x^6 + 5\,x^5 - 14\,x^4 - 40\,x^3 + 39\,x^2 - 36\,x + 27$$

```
> dur1(p,x,9);
```

[-6, -111, 512, 2440, -2115, -810, 729], [258, 23345, 830824, 8307928, 9172521,
3739770, 531441], [19874, 132899697, 307096901952, 53954502116320,
22878729577089, 4236572187378, 282429536481], [129176482,
5563750808136353, 7996834259769681365904 0,
289703745073963014580398908 8, 66445447433255616538317825,
502528591940202868794726 6, 79766443076872509863361], [
5559061885623618, 10301058793656968969987978724225,
636269902892426935517516488461819449680437824 0,
83928153639234220828313964915336654346612998028680655 36,
-247018727761783924024105816148886702981276395692693 11,
146532645709360752618685821010037817877137154551 06,
636268544113594235847482876253853423089021632 1], [
1030105146087927739461280196147 4,
353705537332336727326264533424556579184174332485397940394370 57,
4048376602290482407505783609106768009914272889139634695293056138\
004612683283542006396459379 2,
7043934973322338502034551657497041165684029595747095106681490176\
753311793381248351899901739288339438599829952 0,
3642182306054100790598731538664958206612741637071301487265965831\
335290929380816361089766762109133092711 69,
5290586551494154814431443241292810565739404197837279324305167488\
411469287270972727552701260947208 98,

```
404837660228432814111844721895716547522075068820903057422001161\
    1065766026718820758174775041], [
353705537332157495145626216116309841270665539844187937013785 62,
417025357131434198294819467449565830600182924271925344081338606 4\
    01624016377144905335366511115160996466102662499318974281473,
163893531139232011916690067804264461692455639042830124379775993 0\
    42971084613449873010353982100291928862334252499867881136054 7\
    619040784965837524711037952398606576334049173472588342758400,
496170199083935736243548273606183483687150345853273979166093486 0\
    955661843410446217216872989609559433166868650591113520026281\
    895191758657324689949488639976053472681137586217488025829000\
    679610506766348586000299694217758208,
581218242264186707125300185220330063152259962945968719405859037 3\
    027439073640708360865075630428748020847840880590795076726395\
    982514123319561183312604333953483379274967062551818773220993\
    335932595000677305017958 5,
250413209330341333296290839843698876316228444750235813473188433 3\
    144842419513239479082523123510743895135193991712430186129127\
    701394622914554060589547645506184443043006030374587165366907\
    55512033740546,
163893531139232011916689941554281907364112471221181552394829848 2\
    694235538906271958706896595665141002450684974003603106305516\
    970574177405212679151205373697500164072550932748470956551681],
[
417025357131434198294819360368983909342656552425596579085783158 1\
    968475133751586020008306600846258424186910471645812846248 98,
579700494968667453163622061660587431662043972848138077342284779 3\
    477331880115105414631971752222795038916739862354018132360388\
    553920416391022415751235443884645710709675866671764522746998\
    819475328206189135442329864403482832496683780114850565572454\
    5,
268610895492864131419063378493990698271093113723909226692546823 8\
    329208361095423897868690489558486470971852316647895418252731\
    984961206659742582616596369491369562614300832261541080794186\
    812733137792664603236537925406784890028925563504706816923416\
    981379261191175018351586435189209113618145923242437187574851\
    621780046062947654667596477265231718010287280266064741745031\
    680,
246184866458992422917390926581319516715777812973172718444395507 3\
    519728428041785621427200962426497131442057961036871694791384\
    500737105409811972765630524754557205590571616455587247815594\
    735681774429228305884612930049189690022470295708139062743841\
```

```
    94201013414274988009331497047000537768920034960418242240486\
    58637746034256960249528556131954555589923115759806821801836\
    70592626514576790516802968082484784689994314528758972219615\
    8485187333326336,
8931950128730536468047046351546008380918248957013720149215981173\
    60681501942004667231462091270129079084047806303067435070418\
    46981569146378051674259616538562131426858349022509172612862\
    25063025580309897912795683199141855551815568349021193095639\
    94163560090577165254423731045666314691213766899646218745961\
    55534501346664262569090226374608697228682544150815230926315\
    95735108459836677415016299269681733956280102476709889,
62516259586946917422236564225433144651809862272126772922688288\
    22764111119212770393926170121771025926516797382040022746723\
    08830866475257806895287583225269705341744995586886993483291\
    69334640667926501269483062444123537979133310605361351408475\
    25106698122754862519935618502016209239566744257749565837583\
    00072375869089091378446398467965685974259647501023276721447\
    3902701552608542878069677113346,
26861089549286413141906337849399069827109311372385609649889692\
    96249721028668959479925266195502952470875233404219802234338\
    05062592256957262070910386697072556470221573750761364729267\
    55096528943582397008130676013120184410229551464254963475481\
    32560806048742978789740579181401284603266555610480218165415\
    61559257576892324301200249476789945708869823477234725842392\
    761], [
57970049496866745316362206166058743166204397284809985650553612\
    67074002392466110000538182893580881471695060561921479197329\
    58526483213077225965304217969495959475651179274635748463853\
    35391768141235258871895014928549510761573495913897972500613\
    4,
11201755462230601305988792625545997646762293303512020232519107\
    16623712185179575368998106681641193653084750108626457770550\
    07896725629259618235201106815175588790098981293819363699467\
    88496059733291260425086143178744443729530094768922026975814\
    68753761196156398174574463440531597025954732040737588906519\
    01612355286537757897352879748877303984140436800345783826389\
    05179695259923195691587317481606748527800123824327182449423\
    28007536752317683479377496770228119816101500356046505137572\
    572417,
72151813177478376150659520357456964094890291457132263374888049\
    82843129290324537358946216369422244755642467549152321912334\
    17168439415368458010848267620405707273331870401903894149332\
```

```
    03222579305921056483068301573532295275489201953115837616612 6\
    95070190836899865973394278573349737369525782988526077387508 3\
    19777273100779953557053609156198545340386444625964734681848 7\
    11747675986252461530342235312902487965409923467700469983878 7\
    57215422310009117278422327125566115749922335581196889628941 6\
    34749913013185785231972893752316053902418152157052951273616 4\
    33408729917948016494214044562911986384384852006007466390457 7\
    80386991539106260138288623210097180821762115555138503645253 2\
    84097864769406361319112640023958885257198304125200418768933 1\
    893594112,
606069884734319324725404729556530181180912039853678383724697608 0\
    52221775514001672015779294810466442613989109342212126943950 7\
    14262053751950887411584916214989223778106764215245610495945 9\
    99076934297899125938775909058376965818874561330526536244943 4\
    04695391883559266062271265761889260191798683406536882784565 1\
    95946456037012222062220462408698448487092878776634213220698 3\
    29302712715339014294324110837792316459101848298262176949990 2\
    95727704112575506520788144224053223531625180897559631760055 2\
    98006716756555426175942286131325206510302093088773188335603 6\
    88894587223029658646666608042787411723839536450197102136984 5\
    98814079694578276406032080076016762993281125479827143800105 5\
    30083419899692497252303683035970834018546918757334139793017 0\
    76321551735076700370727616420388853958004098398173231565463 5\
    73682433780084100609152232992245307673288435548192386599799 5\
    745950462576177083832190017927782 40,
-
    22803140725643518650193751945087757522630809548986144010292 4\
    82834413282749483562286832650751210781179773475624175785129 0\
    77856111502024837079676440681669425701093251664532025159117 0\
    44030960158263353855259225004362098490926085479131466276605 5\
    44578810681515582670459063318608393396722848650337874429518 0\
    61841145460218574482032724791472953751666233604819542354467 7\
    72211678796322552513217988272521472882409414673505641156328 2\
    22079260134269039914352597459052629694566714217049871106690 7\
    79812229368172571101130207026211595065861692462451695236028 2\
    85456324660011058438771543636989668528399026500598962447140 1\
    38861329106370864495188799874220537604994446925382474871542 8\
    80490775626424037610326855922757662831430648958508260631503 7\
    09913098011895868438955659747134523647542503020180104932880 7\
    006893667002495621115186537668045658135922259326115123 1,
390827791430428721032207751339399499088177676488972647222524684 2\
    85352261386027518020848192162271080497344429804361488780440 6\
```

```
969568985628225061018679317975240616816165347836742479642829\
001412790137566722155672439137263357493707177690953925124562\
439179404415946772284624248156044813430396059978314226359620\
362647316391107046083090261836409165352177693548195195985395\
875562005451072417996732768447839177345534662847748714086080\
616581126294088416780779411449962798156410535838733860857390\
649454792550994455157100094739416117491954412405956959412262\
467285318076094678405094083043809241903111499141944353091171\
247794244171092655530177033128051919731073751107578852559882\
118567039441126153659089078508107527753246602857133851765710\
066965061120946598785192648734721607016916766467395237058390\
214658,
721518131774783761506595203574569640948902914571322633748880
4954\
828431292903245373589462163694222353462508766316835948019933\
348064558522339817473232266628130767011447267753973490369490\
570577337475337180433976929304799561641336843089132447949573\
650146698515353843014699728552078460267979662604414271387358\
271697650218872906340986878848207913945677821171464681215055\
768549702315076484637250410259548074258190556351670559748082\
269130915903489479663741648687303798243647948340409540306620\
016222466546017233539677425529448237881589583521198798102486\
035620979740359320115415371977798465235009828856873039309161\
784779711373382988781671100692992349802739506576551776292358\
322767243066160193980416375768835670831518290566510387539726\
839429121]
```

On voit combien les coefficients explosent. Plus ça explose, plus la convergence sera meilleure. Cependant cela devient vite très coûteux en temps de calcul et en ressources notamment pour la mémoire de l'ordinateur.

```
> q:=x^3-x-1;
```

$$q := x^3 - x - 1$$

```
> dur1(q,x,4);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 10 & 5 & 1 \\ 90 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Détermination des racines à chaque étape de l'algorithme

Programme

```
> dur2:=proc(p::polynom, x::name, k::nonnegint)
```

```
local q, f, r, R,j, i, n, M;

n:=degree(p,x);
M:=dur1(p,x,k);

for q from 1 to k do
          for j from 1 to n do
                    R[q,j]:=M[q,j];
          end do;
end do;
for j from 1 to k do
          R[j,0]:=1
end do;

f:=(i,j)->identify(evalf((R[i,j]/R[i,j-1])^(1/2^i)));

Matrix(k, n,f);

end proc:
```

Exemples

```
> Digits:=12;
```

$$Digits := 12$$

```
> p:=x^4+3*x^3-6*x^2-18*x+20;
```

$$p := x^4 + 3\,x^3 - 6\,x^2 - 18\,x + 20$$

```
> q:=x^3-x-1;
```

$$q := x^3 - x - 1$$

```
> abs(evalf(dur2(p,x,7)));
```

$$\begin{bmatrix} 4.58257569496 & 2.96005147962 & 1.75077622536 & 0.842151921064 \\ 2.92301278569 & 3.50107283226 & 1.98678610497 & 0.983664552204 \\ 3.36927452438 & 2.95160625327 & 2.01204504978 & 0.999533778405 \\ 3.12907305581 & 3.19594506652 & 1.99993279159 & 0.999999045806 \\ 3.18736870659 & 3.13738407686 & 2.00000003456 & 1. \\ 3.10965957830 & 3.21578608468 & 2. & 1. \\ 3.17795486268 & 3.14667779503 & 2. & 1. \end{bmatrix}$$

p admet 4 racines; 1 et 2 et deux racines complexes conjuguées de module maximal, $\sqrt{10} \simeq 3.16227766016838\ldots$
La convergence est très nette pour les deux premières racines (1 et 2) et se dessine bien mais lentement pour les racines complexes. La convergence se réalisant en terme de module.

```
> abs(evalf(dur2(q,x,5)));
```

$$\begin{bmatrix} 1.41421356237 & 0.707106781185 & 1. \\ 1.18920711500 & 1.10668191970 & 0.759835685650 \\ 1.33352143216 & 0.917004043205 & 0.817765433958 \\ 1.32476899971 & 0.834728935597 & 0.904303839402 \\ 1.32471785920 & 0.883739922095 & 0.854185381063 \end{bmatrix}$$

Pour ce qui est du polynôme q le module de la racine dominante est 1.324717958..., on voit que la convergence se dessine progressivement sur la première colonne de cette matrice. Remarquons qu'elle est assez lente du fait de la difficulté du polynôme choisi (cas complexe), laconvergence des deux autres est donc plus lente.

Annexe 2 : Bernoulli

La méthode de Bernoulli

Cas d'une seule racine dominante

Programme

```
> with(PolynomialTools):
> with(linalg):
  bern2:=proc(p::polynom, x::name, k::nonnegint)

  local n,i,c,j,b,q,f,r,y,g,h,X,A,Q,s,R;

   n:=degree(p,x);
   c:=CoefficientList(p,x);
   y:=array(-n+1..k);
   X:=array(-n+1..k);


   for i from 1-n to -1 do
          y[i]:=0;
   end do;
   y[0]:=1;

   for q from 1 to k do
          y[q]:=sum(-(c[n+1-j]*y[q-j])/c[n+1],j=1..
  n);
          X[q]:=evalf(y[q]);
   end do;

   f:=i->X[i];
   g:=i->i;
```

```
  r:=Matrix(k, 1, f);
  b:=Matrix(k, 1, g);

  A:=augment(b,r);

  h:=i->r[i+1,1]/r[i,1]:
  Q:=Matrix(k-1, 1, h);

  #s:=i->Q[i+floor(k/3),1];
  #R:=Matrix(floor((2/3)*k)-2, 1,s);

  s:=i->Q[i,1];
  R:=Matrix(k-1,1,s);
end proc:
```

Exemples

```
> p:=70*x^4-140*x^3+90*x^2-20*x+1;
```

$$p := 70\,x^4 - 140\,x^3 + 90\,x^2 - 20\,x + 1$$

```
> bern2(p,x,11);
```

$$\begin{bmatrix} 1.357142857 \\ 1.157894737 \\ 1.066883117 \\ 1.017650639 \\ 0.9883800409 \\ 0.9699170124 \\ 0.9578036671 \\ 0.9496383558 \\ 0.9440291181 \\ 0.9401238665 \end{bmatrix}$$

La convergence est très mauvaise, la solution oscille autour de la vraie valeur 0.9305681558.. ., les oscillations étant très fortes, on ne peut parler de bonne convergence, en tout cas pas pour des valeurs de k d'ordre relativement moyen.

Convergence accélérée

Programme

```
> bern21:=proc(p::polynom, x::name,k::nonnegint)

   local i,X, Q, d, D, v, R,f;

   X:=bern2(p, x, k);
   #Q:=array(1..k-1);
   d:=array(1..k-2);
   D:=array(1..k-3);
   v:=array(1..k-3);
   R:=array(1..k-3);

   for i from 1 to k-2 do
          d[i]:=X[i+1,1]-X[i,1];
   end do;
   #f:=i->d[i];
   #Matrix(k-2, 1, f);

   for i from 1 to k-3 do
          D[i]:=X[i+2,1]-2*X[i+1,1]+X[i,1];
   end do;
   #print(D);

   for i from 1 to k-3 do
          v[i]:=-(d[i])^2/D[i];
   end do;
   #print(v);

   for i from 1 to k-3 do
          R[i]:=X[i,1]+v[i];
   end do;
  print(R);

  end proc:
```

Exemples

```
> Digits:=20;
```

$$Digits := 20$$

```
> p:=70*x^4-140*x^3+90*x^2-20*x+1;
```

$$p := 70\,x^4 - 140\,x^3 + 90\,x^2 - 20\,x + 1$$

```
> time(bern21(p,x,64));
```

[0.99035519015410328798, 0.95963516182080004406,
0.94545983901039956158, 0.93837583903778903070,
0.93469493235854270545, 0.93275088884570437406,
0.93171978658356152840, 0.93117368376500914729,
0.93088548199008966132, 0.93073398074365836401,
0.93065461806964186355, 0.93061316222142834608,
0.93059155433000272941, 0.93058030980407195434,
0.93057446506322005668, 0.93057142956390108714,
0.93056985397786929695, 0.93056903649726265288,
0.93056861247358875434, 0.93056839257730920322,
0.93056827855571070364, 0.93056821943820716766,
0.93056818878913245880, 0.93056817290001949884,
0.93056816466302244877, 0.93056816039300902348,
0.93056815817948899967, 0.93056815703203976070,
0.93056815643722650116, 0.93056815612888936010,
0.93056815596905516703, 0.93056815588620132928,
0.93056815584325214395, 0.93056815582098847079,
0.93056815580944760477, 0.93056815580346514550,
0.93056815580036400771, 0.93056815579875646652,
0.93056815579792316207, 0.93056815579749120154,
0.93056815579726728573, 0.93056815579715121388,
0.93056815579709104619, 0.93056815579705985653,
0.93056815579704368826, 0.93056815579703530745,
0.93056815579703096424, 0.93056815579702871129,
0.93056815579702754440, 0.93056815579702693823,
0.93056815579702662594, 0.93056815579702646191,
0.93056815579702637779, 0.93056815579702633541,

0.93056815579702631136, 0.93056815579702630051,

0.93056815579702629388, 0.93056815579702629123,

0.93056815579702628921, 0.93056815579702628823,

0.93056815579702628777]]

0.068

Ici par contre, la convergence est plus nette et très rapide. En regardant la ligne ci-dessous, on voit que la convergence est vraiment bonne.D'où l'intérêt de l'accélération de la convergence. Le temps de calcul est très acceptable pour cet ordre.

```
> fsolve(p,x);
```

0.069431844202973712388, 0.33000947820757186760,

0.66999052179242813240, 0.93056815579702628761

```
> q:=x^4-7*x^3+13*x^2-8*x+12;
```

$$q := x^4 - 7\,x^3 + 13\,x^2 - 8\,x + 12$$

```
> bern21(q,x,20);
```

[[4.3224569415171062997, 4.2158301778248582606, 4.2055469516413957160,

4.1989281076167185826, 4.1934088438530409614, 4.1911649508116210255,

4.1903981119298898513, 4.1900629141084435731, 4.1899067174719026310,

4.1898399793690068051, 4.1898121277094031751, 4.1898001791989202520,

4.1897950082066707385, 4.1897927899332127601, 4.1897918413115239276,

4.1897914345307868279, 4.1897912599027073533]]

```
> fsolve(q,x);
```

2.7438807206869612705, 4.1897911287660730449

```
> r:=x^4-4*x^3-2*x^2+12*x+9;
```

$$r := x^4 - 4\,x^3 - 2\,x^2 + 12\,x + 9$$

```
> time(bern2(r,x,50));
```

0.020

Choix approprié des valeurs initiales

Programme

```
> bern22:=proc(p::polynom, x::name, k::nonnegint)

  local n,i,c,j,q,f,y,g,X,a,Q;
```

```
 n:=degree(p,x);
 c:=CoefficientList(p,x);
 y:=array(0..k);
 X:=array(0..k);
 a:=array(0..n);
 Q:=array(0..k-1);

 for i from 0 to n do
         a[i]:=c[n+1-i];
 end do;

 y[0]:=-a[1]/a[0];
 for i from 1 to n-1 do
         y[i]:=(-1/a[0])*((i+1)*a[i+1]+add(a[j]*y
[i-j], j=1..i));
 end do;

 for q from n to k do
         y[q]:=sum(-(a[j]*y[q-j])/a[0],j=1..n);
         X[q]:=evalf(y[q]);
 end do;

 #for i from n to k do
#        print(X[i]);
# end do;

f:=i->evalf(y[i-1]);
Matrix(k,1,f);

for i from 0 to k-1 do
        Q[i]:=evalf(y[i+1]/y[i]);
end do;

g:=i->Q[i-1];
```

```
Matrix(k, 1, g);
end proc:
```

Exemples

```
> Digits:=10;
```

$$Digits := 10$$

```
> p:=x^4-4*x^3-2*x^2+12*x+9;
```

$$p := x^4 - 4\,x^3 - 2\,x^2 + 12\,x + 9$$

```
> bern22(p,x,10);
```

$$\begin{bmatrix} 5. \\ 2.600000000 \\ 3.153846154 \\ 2.951219512 \\ 3.016528926 \\ 2.994520548 \\ 3.001829826 \\ 2.999390430 \\ 3.000203231 \\ 2.999932261 \end{bmatrix}$$

```
> bern2(p,x,11);
```

$$\begin{bmatrix} 4.500000000 \\ 3.777777778 \\ 3.691176471 \\ 3.537848606 \\ 3.463963964 \\ 3.399219766 \\ 3.353194338 \\ 3.315706911 \\ 3.285741321 \\ 3.260860687 \end{bmatrix}$$

On a ici deux racines doubles. Lorsque la convergence est accélérée, ce qui est le cas de la première matrice, on a une convergence assez bonne, rappelons que la valeur cherchée est 3. Par contre lorsqu'elle ne l'est pas, même si les racines ne sont pas complexes, la convergence est très lente.

Cas de deux racines complexes conjuguées dominantes

Programme

```
> bern23:=proc(p::polynom, x::name, k::nonnegint)

  local n,i,c,j,q,y,X,a,Q,D,d,f,E,g,r,e,l,h,t,M;

   n:=degree(p,x);
   c:=CoefficientList(p,x);
   y:=array(0..k);
   X:=array(n..k);
   d:=array(2..k);
   D:=array(2..k);
   r:=array(2..k-1);
   E:=array(2..k-1);
   e:=array(2..k);
   a:=array(0..n);
   Q:=array(0..k-1);
   M:=array(1..5);
   for i from 0 to n do
           a[i]:=c[n+1-i];
   end do;

   y[0]:=-a[1]/a[0];
   for i from 1 to n-1 do
           y[i]:=(-1/a[0])*((i+1)*a[i+1]+add(a[j]*y
  [i-j], j=1..i));
   end do;

   #for i from 1-n to -1 do
   #       y[i]:=0;
   #end do;
   #y[0]:=1;

   for q from n to k do
```

```
          y[q]:=sum(-(a[j]*y[q-j])/a[0],j=1..n);
          X[q]:=evalf(y[q]);
 end do;

for i from 2 to k do
          d[i]:=Matrix([[y[i-1], y[i-2]],[y[i], y[i
-1]]]);
          D[i]:=det(d[i]);
end do;

for i from 2 to k-1 do
          r[i]:=D[i+1]/D[i];
end do;

for i from 2 to k-1 do
      e[i]:=Matrix([[y[i], y[i-2]],[y[i+1], y[i-1]]
]);
      E[i]:=det(e[i]);
end do;

f:=i->X[n+i-1];
M[1]:=Matrix(k-n+1,1,f);

g:=i->evalf(D[i+1]);
M[2]:=Matrix(k-1,1,g);

h:=i->evalf(r[i+1]);
M[3]:=Matrix(k-2, 1, h);

t:=i->evalf(E[i+1]);
M[4]:=Matrix(k-2, 1, t);

l:=i->evalf(E[i+1]/(2*D[i+1]));
M[5]:=Matrix(k-2, 1, l);
```

```
print(M[1], M[2], M[3], M[4],M[5]);
end proc:
```

Exemples

```
> p:=81*x^4-108*x^3+24*x+20;
```

$$p := 81\,x^4 - 108\,x^3 + 24\,x + 20$$

> $solve(p, x)$

$$1 + \frac{1}{3}\ \mathrm{I},\ 1 - \frac{1}{3}\ \mathrm{I},\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\ \mathrm{I},\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\ \mathrm{I} \qquad (1.4.2.1)$$

> $map(abs, evalf[12]([\%]))$

$$[1.054092553, 1.054092553, 0.4714045207, 0.4714045207] \qquad (1.4.2.2)$$

```
> bern23(p,x,11);
```

$$\begin{bmatrix} -0.06584362140 \\ -.9657064472 \\ -1.828989483 \\ -2.565462582 \\ -3.118223848 \\ -3.377262951 \\ -3.291277865 \\ -2.831004759 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.185185185 \\ 1.141289438 \\ 0.4487120866 \\ 0.5766058697 \\ 0.8121616511 \\ 0.8677187747 \\ 0.8783996347 \\ 1.059078236 \\ 1.142963911 \\ 1.271462500 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.9629629630 \\ 0.3931623932 \\ 1.285024155 \\ 1.408521303 \\ 1.068406485 \\ 1.012309126 \\ 1.205690661 \\ 1.079206306 \\ 1.112425763 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.843621399 \\ 0.9949702789 \\ 1.391657776 \\ 1.147431229 \\ 1.597347589 \\ 1.680915208 \\ 1.822708184 \\ 2.087411665 \\ 2.287804244 \end{bmatrix}, [$$

$$0.7777777778], [0.4358974359], [1.550724638], [0.9949874687], [0.9833926453], [0.9685829427], [1.037516474], [0.9854851108], [1.000820858]$$

> $time(bern23(p, x, 30))$

$$\begin{bmatrix} \textit{27 x 1 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textit{29 x 1 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textit{28 x 1 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textit{28 x 1 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textit{28 x 1 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran\_order} \end{bmatrix}$$

$$0.084 \qquad (1.4.2.3)$$

Annexe 3 : Polynômes dégénérés

Tests sur les polynômes dégénérés

Programme 1 :

polydegen1 := **proc**(*P* :: *polynom*, *x* :: *name*, *k* :: *nonnegint*)

local *p*, *T*;

$p := unapply(P, x);$

$$\prod_{j=1}^{k} p\left(\exp\left(2 \cdot \mathrm{i} \cdot j \cdot \frac{\pi}{k}\right) \cdot x^{\frac{1}{k}}\right);$$

end proc;

proc(*P*::*polynom*, *x*::*name*, *k*::*nonnegint*) (1.1.1)

local *p*, *T*;

$p := unapply(P, x);$

product(*p*(exp(2 * I * *j* * π / *k*) * *x*^(1 / *k*)), *j* = 1 ..*k*)

end proc

Exemple :

$> P_{ferg} := x^{12} - 6\,x^{11} + 23\,x^{10} - 73\,x^{9} + 191\,x^{8} - 405\,x^{7} + 766\,x^{6} - 1164\,x^{5} + 1368\,x^{4} - 1539\,x^{3} + 1863\,x^{2} - 1701\,x + 729$

$$P_{ferg} := x^{12} - 6\,x^{11} + 23\,x^{10} - 73\,x^{9} + 191\,x^{8} - 405\,x^{7} + 766\,x^{6} - 1164\,x^{5} + 1368\,x^{4} - 1539\,x^{3} + 1863\,x^{2} - 1701\,x + 729 \quad (1.2.1)$$

$> time(polydegen1(P_{ferg}, x, 6!));$

$$0.046 \quad (1.2.2)$$

$> polydegen1(P_{ferg}, x, 4!);$

$$\Bigg(\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{12}\sqrt{x} - 6\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{11}x^{11/24} + 23\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{10}x^{5/12} - 73\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{9}x^{3/8} \quad (1.2.3)$$
$$+ 191\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{8}x^{1/3} - 405\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{7}x^{7/24}$$
$$+ 766\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{6}x^{1/4} - 1164\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{5}x^{5/24}$$
$$+ 1368\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{4}x^{1/6} - 1539\Big(\mathrm{e}^{\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\Big)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(e^{\frac{1}{12}I\pi}\right)^{2}x^{1/12}-1701\,e^{\frac{1}{12}I\pi}x^{1/24}+729\Big)\ \bigg(\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{12}\sqrt{x}$$

$$-6\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}I\right)x^{1/24}+729\bigg)\ \bigg($$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)x^{1/24}+729\bigg)$$

$$\bigg(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)x^{1/24}+729\bigg)\ \bigg($$

$$\left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{12} \sqrt{x} - 6 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{11} x^{11/24} + 23 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{10} x^{5/12} - 73 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{9} x^{3/8}$$
$$+ 191 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{8} x^{1/3} - 405 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{7} x^{7/24}$$
$$+ 766 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{6} x^{1/4} - 1164 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{5} x^{5/24}$$
$$+ 1368 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{4} x^{1/6} - 1539 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{3} x^{1/8}$$
$$+ 1863 \left(e^{\frac{5}{12} I\pi}\right)^{2} x^{1/12} - 1701\, e^{\frac{5}{12} I\pi} x^{1/24} + 729\Big) \left(\sqrt{x} + 6 I x^{11/24} - 23 x^{5/12}\right.$$
$$- 73 I x^{3/8} + 191 x^{1/3} + 405 I x^{7/24} - 766 x^{1/4} - 1164 I x^{5/24} + 1368 x^{1/6}$$
$$\left.+ 1539 I x^{1/8} - 1863 x^{1/12} - 1701 I x^{1/24} + 729\right) \Bigg(\left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{12} \sqrt{x}$$
$$- 6 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{11} x^{11/24} + 23 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{10} x^{5/12} - 73 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{9} x^{3/8}$$
$$+ 191 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{8} x^{1/3} - 405 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{7} x^{7/24}$$
$$+ 766 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{6} x^{1/4} - 1164 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{5} x^{5/24}$$
$$+ 1368 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{4} x^{1/6} - 1539 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{3} x^{1/8}$$
$$+ 1863 \left(e^{\frac{7}{12} I\pi}\right)^{2} x^{1/12} - 1701\, e^{\frac{7}{12} I\pi} x^{1/24} + 729\Bigg) \Bigg(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{12} \sqrt{x}$$
$$- 6 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{11} x^{11/24}$$
$$+ 23 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{10} x^{5/12} - 73 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{9} x^{3/8}$$
$$+ 191 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{8} x^{1/3} - 405 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{7} x^{7/24}$$
$$+ 766 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{6} x^{1/4} - 1164 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{5} x^{5/24}$$
$$+ 1368 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{4} x^{1/6} - 1539 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{3} x^{1/8}$$
$$+ 1863 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right)^{2} x^{1/12} - 1701 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{3}\right) x^{1/24} + 729\Bigg) \Bigg($$
$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right)^{12} \sqrt{x} - 6 \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right)^{11} x^{11/24}$$
$$+ 23 \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right)^{10} x^{5/12} - 73 \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} I\sqrt{2}\right)^{9} x^{3/8}$$

$$+191\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{7}x^{7/24}$$
$$+766\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{5}x^{5/24}$$
$$+1368\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{3}x^{1/8}$$
$$+1863\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\sqrt{2}\right)x^{1/24}+729$$
$$\Bigg)\Bigg(\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{11}x^{11/24}$$
$$+23\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{9}x^{3/8}$$
$$+191\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{7}x^{7/24}$$
$$+766\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{5}x^{5/24}$$
$$+1368\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{3}x^{1/8}$$
$$+1863\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\mathrm{I}\right)x^{1/24}+729\Bigg)\Bigg($$
$$\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{11}x^{11/24}+23\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{9}x^{3/8}$$
$$+191\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{7}x^{7/24}$$
$$+766\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{5}x^{5/24}$$
$$+1368\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{3}x^{1/8}$$
$$+1863\left(\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{2}x^{1/12}-1701\,\mathrm{e}^{\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}x^{1/24}+729\Bigg)\left(\sqrt{x}+6\,x^{11/24}+23\,x^{5/12}\right.$$
$$+73\,x^{3/8}+191\,x^{1/3}+405\,x^{7/24}+766\,x^{1/4}+1164\,x^{5/24}+1368\,x^{1/6}$$
$$\left.+1539\,x^{1/8}+1863\,x^{1/12}+1701\,x^{1/24}+729\right)\Bigg(\left(\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{12}\sqrt{x}$$
$$-6\left(\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{11}x^{11/24}+23\left(\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{9}x^{3/8}$$
$$+191\left(\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{7}x^{7/24}$$
$$+766\left(\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\mathrm{e}^{-\frac{11}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(e^{-\frac{11}{12}I\pi}\right)^4 x^{1/6}-1539\left(e^{-\frac{11}{12}I\pi}\right)^3 x^{1/8}$$

$$+1863\left(e^{-\frac{11}{12}I\pi}\right)^2 x^{1/12}-1701\,e^{-\frac{11}{12}I\pi}x^{1/24}+729\Big)\Big(\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{12}\sqrt{x}$$

$$-6\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{10}x^{5/12}-73\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{8}x^{1/3}-405\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\right)x^{1/24}+729\Big)\Big($$

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{2}\right)x^{1/24}+729\Big)$$

$$\Big(\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)x^{1/24}+729\right)\Bigg($$

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{2}x^{1/12}-1701\,\mathrm{e}^{-\frac{7}{12}\mathrm{I}\pi}x^{1/24}+729\Bigg)\left(\sqrt{x}-6\,\mathrm{I}x^{11/24}-23\,x^{5/12}\right.$$

$$+73\,\mathrm{I}x^{3/8}+191\,x^{1/3}-405\,\mathrm{I}x^{7/24}-766\,x^{1/4}+1164\,\mathrm{I}x^{5/24}$$

$$\left.+1368\,x^{1/6}-1539\,\mathrm{I}x^{1/8}-1863\,x^{1/12}+1701\,\mathrm{I}x^{1/24}+729\right)\Bigg(\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{12}\sqrt{x}$$

$$-6\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{11}x^{11/24}+23\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{2}x^{1/12}-1701\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{12}\mathrm{I}\pi}x^{1/24}+729\Bigg)\Bigg(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{12}\sqrt{x}$$

$$-6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\right)x^{1/24}+729\Bigg)\Bigg($$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{2}\right)x^{1/24}+729\Bigg)\Bigg($$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)^{2}x^{1/12}-1701\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\right)x^{1/24}+729\Bigg)\Bigg($$

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{12}\sqrt{x}-6\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{11}x^{11/24}$$

$$+23\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{10}x^{5/12}-73\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{9}x^{3/8}$$

$$+191\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{8}x^{1/3}-405\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{7}x^{7/24}$$

$$+766\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{6}x^{1/4}-1164\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{5}x^{5/24}$$

$$+1368\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{4}x^{1/6}-1539\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{3}x^{1/8}$$

$$+1863\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}\right)^{2}x^{1/12}-1701\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{12}\mathrm{I}\pi}x^{1/24}+729\Bigg)\left(\sqrt{x}-6\,x^{11/24}\right.$$

$$+23\,x^{5/12}-73\,x^{3/8}+191\,x^{1/3}-405\,x^{7/24}+766\,x^{1/4}-1164\,x^{5/24}$$

$$+ 1368\, x^{1/6} - 1539\, x^{1/8} + 1863\, x^{1/12} - 1701\, x^{1/24} + 729\big)$$

> *restart* :

Programme 2 :

```
> polydegen2 := proc(P :: polynom, x :: name, k :: nonnegint)
    local p, T;
    p := unapply(P, x);
    T := resultant(p(y), x-y^k, y);
  end proc;
```

$$polydegen2 := \mathbf{proc}(P::polynom,\ x::name,\ k::nonnegint) \tag{1.3.1}$$

```
    local p, T;
    p := unapply(P, x);
    T := resultant(p(y), x - y^k, y)
  end proc
```

Exemple

> $P_{ferg} := x^{12} - 6\, x^{11} + 23\, x^{10} - 73\, x^9 + 191\, x^8 - 405\, x^7 + 766\, x^6 - 1164\, x^5 + 1368\, x^4 - 1539\, x^3 + 1863\, x^2 - 1701\, x + 729$

$$P_{ferg} := x^{12} - 6\, x^{11} + 23\, x^{10} - 73\, x^9 + 191\, x^8 - 405\, x^7 + 766\, x^6 - 1164\, x^5 + 1368\, x^4 - 1539\, x^3 + 1863\, x^2 - 1701\, x + 729 \tag{1.4.1}$$

> $time\big(polydegen2\big(P_{ferg}, x, 6!\big)\big)$

$$3.389 \tag{1.4.2}$$

> $polydegen2\big(P_{ferg}, x, 4!\big)$

$$\begin{aligned} &50752878605641560071975415974169635690874225019166388726362744211488 1\\ &- 1157332998242424620317370819871868288049155742731282914388328798079\, x\\ &+ 3109909510578420109859158389890720617363083984716137380825672801\, x^2\\ &- 626755346077744707458910893476541190317322668026817791286895 9\, x^3\\ &+ 9528071437660849077230002155634559676357026301282997126881\, x^4\\ &- 10863583554478457608335961899276733030922312943137823039\, x^5\\ &+ 14595959984811420839575460910314969983375941105543841\, x^6\\ &+ 6799018137970942931533220907466965930971712 1\, x^7\\ &+ 1194498704094469896967383202961752 01\, x^8\\ &+ 1573931073719260137536782 41\, x^9 + 488773103644614881\, x^{10} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

$$+ 1138388161\, x^{11} + x^{12}$$

> *restart* :

Programme 3 :

```
> polydegen3 := proc(P :: polynom, x :: name)
    local p, T;
    p := unapply(P, x);
    T := resultant(p(x·y), p(y), y);
   end proc;
```

```
polydegen3 := proc(P::polynom, x::name)
    local p, T;
    p := unapply(P, x);
    T := resultant(p(x*y), p(y), y)
end proc
```
(1.5.1)

Exemple :

> $P_{ferg} := x^{12} - 6\, x^{11} + 23\, x^{10} - 73\, x^{9} + 191\, x^{8} - 405\, x^{7} + 766\, x^{6} - 1164\, x^{5} + 1368\, x^{4} - 1539\, x^{3} + 1863\, x^{2} - 1701\, x + 729$

$$P_{ferg} := x^{12} - 6\, x^{11} + 23\, x^{10} - 73\, x^{9} + 191\, x^{8} - 405\, x^{7} + 766\, x^{6} - 1164\, x^{5} + 1368\, x^{4} - 1539\, x^{3} + 1863\, x^{2} - 1701\, x + 729 \tag{1.6.1}$$

> $polydegen3(P_{ferg}, x)$

$$\begin{aligned}
&177811125820894455434581469798615652184233013542\, x^{92} \\
&\quad - 162991369486648650585335914067702889339749139939\, x^{93} \\
&\quad - 155449470283274352340685945743292331706328133183\, x^{89} \\
&\quad + 171452812661969577261296230765407222007864446285\, x^{90} \\
&\quad + 332178237019529203038065040952507971823367174 64\, x^{38} \\
&\quad - 36841733691672430522703903554042287600335336415\, x^{39} \\
&\quad + 383279534259047425550795779420867224865791629 55\, x^{40} \\
&\quad - 37921294086471397355973020698130364460773278979\, x^{41} \\
&\quad + 367765440862023017915923383693153527063489244 21\, x^{42} \\
&\quad - 36468609908458842092800417567259676402431996085\, x^{43} \\
&\quad + 384894127414194439745460527436946960907490126 24\, x^{44} \\
&\quad - 44050327145214983393643638445855438840893733486\, x^{45} \\
&\quad + 540792840638117286978339915137644351784876018 52\, x^{46} \\
&\quad - 69179926835689119837563391792975770155823414778\, x^{47}
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

$$+ 89408625692067909196312853710410731784508177062\, x^{48}$$
$$-113816593643593908045739264528303010109672388809\, x^{49}$$
$$+ 139839712630712589513673241250084562402654045731\, x^{50}$$
$$-162991369486648650585335914067702889339749139939\, x^{51}$$
$$+ 177811125820894455434581469798615652184233013542\, x^{52}$$
$$-180484948523019593501327508320667173736529776897\, x^{53}$$
$$+ 171452812661969577261296230765407222007864446285\, x^{54}$$
$$-155449470283274352340685945743292331706328133183\, x^{55}$$
$$+ 138971526015509038452860926801456303889987089842\, x^{56}$$
$$-127707154491467888433618258335437619192984297310\, x^{57}$$
$$+ 125581959375890419807016455189580623391624926356\, x^{58}$$
$$-134952780712074757369747003993545141318960083424\, x^{59}$$
$$-28853067175076500372808140631092228301192653 5\, x^{25}$$
$$-31539759362914844176576207024681697 4\, x$$
$$-3173404609808441511671097033623497937662680 6\, x^{123}$$
$$-191176252779628400492281214712730392230173226037\, x^{61}$$
$$-113816593643593908045739264528303010109672388809\, x^{95}$$
$$+ 89408625692067909196312853710410731784508177062\, x^{96}$$
$$-69179926835689119837563391792975770155823414778\, x^{97}$$
$$+ 54079284063811728697833991513764435178487601852\, x^{98}$$
$$-44050327145214983393643638445855438840893733486\, x^{99}$$
$$+ 38489412741419443974546052743694696090749012624\, x^{100}$$
$$-36468609908458842092800417567259676402431996085\, x^{101}$$
$$+ 36776544086202301791592338369315352706348924421\, x^{102}$$
$$-37921294086471397355973020698130364460773278979\, x^{103}$$
$$+ 38327953425904742555079577942086722486579162955\, x^{104}$$
$$-36841733691672430522703903554042287600335336415\, x^{105}$$
$$+ 33217823701952920303806504095250797182336717464\, x^{106}$$
$$-28098597969861521477288237455789120873685021136\, x^{107}$$
$$+ 22481941486690870980124278418610554013984430840\, x^{108}$$
$$-17189928461237733003046069362646020723444580779\, x^{109}$$
$$+ 12673561050818707942827602031402300874732094556\, x^{110}$$
$$-9071653441567931688970153135742315438202410322\, x^{111}$$
$$+ 6335643436290485097607208399582986248783320703\, x^{112}$$
$$-4331598875294321346322278437578529643545195967\, x^{113}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 290420872456980504473228084577202272045849071 4\, x^{114}\\
&-19100602688279197969897024377909834317978029 26\, x^{115}\\
&+ 1231026074475742695822845035879131624597573459\, x^{116}\\
&+ 478509030705209958564540674434673310553995792\, x^{118}\\
&-28853067175076500372808140631092228301192653 5\, x^{119}\\
&+ 170516502335047156701479438659514529175110393\, x^{120}\\
&-98973362386341346794308613444099835287033237\, x^{121}\\
&-77626778577677244337664527868523926131869629 7\, x^{117}\\
&+ 1398397126307125895136732412500845624026540457 31\, x^{94}\\
&-1804849485230195935013275083206671737365297768 97\, x^{91}\\
&-3336387594187742382852211840684199200385 1\, x^{11}\\
&+ 149080989892341940007570154874833547591 89\, x^{10}\\
&-646781967023875816479280605903196195335 0\, x^{9}\\
&+ 270371496823149238442463342654903498061 5\, x^{8}\\
&-107749750257535685828797444490588332539 0\, x^{7}\\
&+ 403254767088502836588904664163981064536\, x^{6}\\
&-13867175556434170408425885788561748522 9\, x^{5}\\
&+ 42433492120645431625501576308127312248\, x^{4}\\
&-11009712296128607643119657452134259185\, x^{3}\\
&+ 2245330487978937716380068071519006553\, x^{2}\\
&+ 507479895273283233573675978729542750494813 2\, x^{126}\\
&-264889972042734083425601738519833814580257 7\, x^{127}\\
&+ 1351570640176094199713961539681742335245908\, x^{128}\\
&-67335320911468592382181157160876062426282 1\, x^{129}\\
&+ 327705135228519466788980887933296504964449\, x^{130}\\
&-15610171016704049131078151488915313154927 3\, x^{131}\\
&+ 72906029582786752480370354017965113802657\, x^{132}\\
&-3336387594187742382852211840684199200385 1\, x^{133}\\
&+ 149080989892341940007570154874833547591 89\, x^{134}\\
&-646781967023875816479280605903196195335 0\, x^{135}\\
&+ 270371496823149238442463342654903498061 5\, x^{136}\\
&-107749750257535685828797444490588332539 0\, x^{137}\\
&+ 403254767088502836588904664163981064536\, x^{138}\\
&-13867175556434170408425885788561748522 9\, x^{139}\\
&+ 42433492120645431625501576308127312248\, x^{140}
\end{aligned}
$$

$-1100971229612860764311965745213425918 5 x^{141}$
$+ 22453304879789377163800680715190065 53 x^{142}$
$-315397593629148441765762070246816974 x^{143}$
$+ 2252839954493917441184014787477264 1 x^{144}$
$+ 478509030705209958564540674434673310553995792 x^{26}$
$+ 1569162411216901295629481529676124001743458812 66 x^{60}$
$+ 72906029582786752480370354017965113802657 x^{12}$
$+ 2252839954493917441184014787477264 1$
$+ 2353195187217521430086599927316934275363177428 47 x^{62}$
$-2836866872316424590874831039643219229713474557 83 x^{63}$
$+ 3267836353351378906734203654355247797141754105 26 x^{64}$
$-3531668403907532939416993473295662536438086574 40 x^{65}$
$+ 3546520305105854901759905471358047840396249239 17 x^{66}$
$-3314835030837311165781165254350802317214483486 70 x^{67}$
$+ 2923567243386017923198326527468333118967713496 11 x^{68}$
$-2492903840848948200150486644536573872666926049 72 x^{69}$
$+ 2124453299851186027534915520613276648221868789 99 x^{70}$
$-1882358976962434834486294652116859399360262397 26 x^{71}$
$+ 1798552332886098268520970636370537626946271216 10 x^{72}$
$-1882358976962434834486294652116859399360262397 26 x^{73}$
$+ 2124453299851186027534915520613276648221868789 99 x^{74}$
$-2492903840848948200150486644536573872666926049 72 x^{75}$
$+ 2923567243386017923198326527468333118967713496 11 x^{76}$
$-3314835030837311165781165254350802317214483486 70 x^{77}$
$+ 3546520305105854901759905471358047840396249239 17 x^{78}$
$-3531668403907532939416993473295662536438086574 40 x^{79}$
$+ 3267836353351378906734203654355247797141754105 26 x^{80}$
$-2836866872316424590874831039643219229713474557 83 x^{81}$
$+ 2353195187217521430086599927316934275363177428 47 x^{82}$
$-1911762527796284004922812147127303922301732260 37 x^{83}$
$+ 1569162411216901295629481529676124001743458812 66 x^{84}$
$-1349527807120747573697470039935451413189600834 24 x^{85}$
$+ 1255819593758904198070164551895806233916249263 56 x^{86}$
$-1277071544914678884336182583354376191929842973 10 x^{87}$
$+ 1389715260155090384528609268014563038899870898 42 x^{88}$

$$
\begin{aligned}
&+ 5649799656108032168149445023709058277721855\,x^{122} \\
&+ 12310260744757426958228450358791316245975734 59\,x^{28} \\
&-7762677857767724433766452786852392613186962 97\,x^{27} \\
&-1910060268827919796989702437790983431797802926\,x^{29} \\
&+ 2904208724569805044732280845772022720458490714\,x^{30} \\
&-4331598875294321346322278437578529643545195967\,x^{31} \\
&+ 6335643436290485097607208399582986248783320703\,x^{32} \\
&-9071653441567931688970153135742315438202410322\,x^{33} \\
&+ 12673561050818707942827602031402300874732094556\,x^{34} \\
&-17189928461237733003046069362646020723444580779\,x^{35} \\
&+ 22481941486690870980124278418610554013984430840\,x^{36} \\
&-28098597969861521477288237455789120873685021136\,x^{37} \\
&+ 1753452302354951019149208497058513724465647 9\,x^{124} \\
&-952236841380663544143318086301749038225323 6\,x^{125} \\
&-1561017101670404913107815148891531315492 73\,x^{13} \\
&+ 3277051352285194667889808879332965049644 49\,x^{14} \\
&-6733532091146859238218115716087606242628 21\,x^{15} \\
&+ 13515706401760941997139615396817423352459 08\,x^{16} \\
&-26488997204273408342560173851983381458025 77\,x^{17} \\
&+ 50747989527328323357367597872954275049481 32\,x^{18} \\
&-95223684138066354414331808630174903822532 36\,x^{19} \\
&+ 17534523023549510191492084970585137244656479\,x^{20} \\
&-31734046098084415116710970336234979376626806\,x^{21} \\
&+ 56497996561080321681494450237090582777721855\,x^{22} \\
&-98973362386341346794308613444099835287033237\,x^{23} \\
&+ 170516502335047156701479438659514529175110393\,x^{24}
\end{aligned}
$$