



HAL
open science

Imagerie laser à synthèse d'ouverture par réinjection optique

Arnaud Witomski

► **To cite this version:**

Arnaud Witomski. Imagerie laser à synthèse d'ouverture par réinjection optique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT: . tel-00144904

HAL Id: tel-00144904

<https://theses.hal.science/tel-00144904>

Submitted on 7 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

Discipline : PHYSIQUE

par

Arnaud WITOMSKI

Imagerie laser à synthèse d'ouverture par réinjection optique

Soutenue le 24 avril 2007, devant le jury composé de Madame et Messieurs

Rapporteurs

Hervé GILLES

Marc VALLET

Examineurs

Isabelle SCHANEN, Présidente

Daniel DOLPHI

Xavier ORLIK

Eric LACOT, Directeur de thèse

Thèse réalisée au Laboratoire de Spectrométrie Physique,

B.P. 87 - 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France.

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

Discipline : PHYSIQUE

par

Arnaud WITOMSKI

Imagerie laser à synthèse d'ouverture par réinjection optique

Soutenue le 24 avril 2007, devant le jury composé de Madame et Messieurs

Rapporteurs

Hervé GILLES

Marc VALLET

Examineurs

Isabelle SCHANEN, Présidente

Daniel DOLPHI

Xavier ORLIK

Eric LACOT, Directeur de thèse

Thèse réalisée au Laboratoire de Spectrométrie Physique,

B.P. 87 - 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France.

Remerciements

Ce travail de thèse a été l'occasion pour moi de comprendre ce que signifie "faire de la recherche" et m'a autant apporté sur la démarche et la connaissance scientifique que sur moi-même. Je voudrais remercier Eric Lacot de m'avoir donné l'opportunité de poursuivre en thèse après mon projet de fin d'études et de m'avoir laissé la liberté de bifurquer vers un sujet plus appliqué et plus proche de ma sensibilité scientifique que celui initialement prévu. Je lui suis reconnaissant de son encadrement et de sa disponibilité qui ont contribué au bon déroulement de ce travail.

Je remercie les membres du jury de l'honneur qu'ils me témoignent en acceptant de participer à la soutenance de ma thèse : Messieurs Hervé Gilles et Marc Vallet, en qualité de rapporteurs ; Madame Isabelle Schanen et Messieurs Daniel Dolfi et Xavier Orlik, en qualité d'examineurs.

Je voudrais saluer mes collègues de l'équipe, Olivier Hugon, Olivier Jacquin et Corinne Félix, qui m'ont tous, à un moment ou à un autre, aidé et apporté de nouvelles idées dans mon travail.

Je suis très reconnaissant à Thomas Erneux d'avoir contribué à une partie de mes travaux de thèses, dont le savoir et la pratique en analyse mathématique ont été précieux.

Je remercie les équipes techniques du laboratoire pour leur efficacité, et plus particulièrement Jean-Luc Martin et Sylvain Rochat pour leur aide en électronique.

Je voudrais témoigner de ma sympathie à Yannick Petit, Fabien Gravier, Vincent Fesquet et Mariem Triki pour tous ces moments au café, à table, au bar ou encore au ski. Merci pour leur bonne humeur ! Je remercie aussi chaleureusement mes amis, Clément, Florent et Julien de

m'avoir souvent changé les idées et aidé à traverser cette période parfois difficile.

Cette thèse représente aussi l'aboutissement de mes études supérieures : je voudrais ainsi remercier mes parents de m'avoir encouragé et donné les moyens d'arriver jusqu'à ce niveau. Un grand merci à mes frères Romain et Vincent de m'avoir toujours soutenu. Merci aussi à Lison, Maurice et Chloé.

Enfin et surtout, je voudrais remercier mon amie Emilie, qui a été patiente, à mon écoute et qui a toujours su me rendre plus confiant dans les moments de doute.

Grenoble, février 2007

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire une technique d'imagerie laser à synthèse d'ouverture par réinjection optique. L'imageur de base, appelé Laser Optical Feedback Imaging (LOFI), détecte la faible quantité de lumière rétrodiffusée par la cible à analyser, qui est décalée en fréquence et réinjectée dans la source laser pour être amplifiée par la dynamique du laser. Le grand avantage de cette technique est qu'elle est auto-alignée, c'est à dire que le laser est à la fois la source et le détecteur. La résolution spatiale des images LOFI est limitée par la diffraction : nous proposons d'adapter la technique de synthèse d'ouverture, bien connue dans le domaine radar, pour nous affranchir de ce problème. En mettant à profit le balayage du laser sur la cible pour faire l'acquisition de l'image pixel par pixel, nous montrons qu'il est possible d'augmenter synthétiquement l'ouverture de collection du système et donc la résolution de l'image. Nous présentons le traitement du signal adapté à la reconstruction de l'image super-résolue à partir des données acquises pour les différentes positions successives du laser. Nous montrons qu'on peut étendre cette technique utilisée en balayage linéaire à un balayage angulaire et que nous pouvons obtenir une résolution, non seulement meilleure que la limite de diffraction, mais également meilleure que celle obtenue avec un balayage linéaire. Nous validons cette technique expérimentalement en comparant des images LOFI obtenues avec et sans synthèse d'ouverture.

Nous présentons ensuite dans ce mémoire le dispositif LOFI en régime paramétrique soumis à une modulation de pompage. Nous présentons l'analyse d'un laser soumis de manière synchronisée à une réinjection optique décalée en fréquence et une modulation de pompage et nous montrons qu'il est possible d'amplifier paramétriquement le signal rétrodiffusé par la cible. Nous validons cette analyse par des résultats numériques et expérimentaux et nous démontrons qu'il est possible de déterminer la quantité de lumière réinjectée dans le laser.

Mots-clés : imagerie laser, réinjection optique, synthèse d'ouverture, filtrage adapté, amplification paramétrique.

Titre et résumé en anglais

Synthetic aperture laser optical feedback imaging

We present in this PhD thesis a technique of synthetic aperture laser imaging. The basic imager, called Laser Optical Feedback Imaging (LOFI) detects the weak frequency-shifted optical feedback retrodiffused by the target, which is amplified by the laser dynamics. The great advantage of this technique is its self-alignment, i.e. the laser is the source and the detector. The spatial resolution of the images LOFI is diffraction-limited : we propose to adapt the technique of synthetic aperture, well known in radar to overcome this problem. Using the scanning of the laser on the target required to form the image pixel by pixel, we show that it is possible to increase the collection aperture of the system, hence the resolution. We present the signal processing aimed at the reconstruction of the super-resolved image from the history datas along the direction of motion. We show that it is possible to extend the technique using a linear scanning, to an angular scanning and that we can obtain a resolution not even better than the diffraction limit, but also better than the resolution reachable with a linear scanning. We illustrate this technique with experimental results that compare the images LOFI with and without synthetic aperture operation.

Then, we present the parametric working of the LOFI device subject to a pump modulation. We present the analysis of a laser subject to a synchronized frequency-shifted optical feedback and a pump modulation and we show that it is possible to have parametric amplification of the weak feedback from the target. We illustrate this analysis with numerical and experimental results and we demonstrate that it is possible to determinate the amount of light retrodiffused in the laser.

Key-words : laser imaging, optical feedback, synthetic aperture, adapted filtering, parametric amplification

Table des matières

Introduction	5
1 La technique LOFI : Laser Optical Feedback Imaging	9
1.1 Introduction	9
1.2 Principe	10
1.2.1 Dispositif expérimental	10
1.2.2 Laser réinjecté décalé en fréquence	12
1.2.3 Signal LOFI	13
1.2.4 Représentation en coordonnées polaires	15
1.3 Quelques exemples d'applications et limites	18
1.3.1 Imagerie d'amplitude	18
1.3.2 Imagerie de phase	20
1.3.3 Velocimétrie Doppler	22
1.3.4 Limites	24
1.4 Conclusion	26
2 Imagerie LOFI à synthèse d'ouverture	29
2.1 Introduction	29
2.2 Principe de la synthèse d'ouverture	31
2.2.1 Objectif	31
2.2.2 Signature d'une cible ponctuelle	32
2.2.3 Diamètre d'éclairement et angle de visée	35
2.2.4 Réponse fréquentielle	37
2.2.5 Filtrage adapté	42
2.2.6 Résolution	47

2.2.7	Résumé des opérations	49
2.3	Synthèse d'ouverture à géométrie angulaire	50
2.3.1	Balayage galvanométrique	50
2.3.2	Analogie espace-angle des signatures	50
2.3.3	Axe de visée et décalage Doppler	53
2.3.4	Paramètres du filtre adapté angulaire	55
2.3.5	Résolution	56
2.3.6	Résultat expérimental	58
2.4	Application à l'imagerie bidimensionnelle	65
2.4.1	Indépendance des signatures	65
2.4.2	Axes de visées et décalages Doppler	66
2.4.3	Paramètres du filtre adapté angulaire bidimensionnel	69
2.4.4	Résolution de l'image	70
2.4.5	Résultats numériques	71
2.4.6	Résultats expérimentaux	74
2.5	Conclusion	82
3	LOFI paramétrique	85
3.1	Introduction	85
3.2	Double modulation : régime forcé	86
3.2.1	Equations de base	86
3.2.2	Analyse linéaire	87
3.2.3	Résultat numérique	89
3.2.4	Résultat expérimental	91
3.3	Principe de l'analyse multi-échelle	94
3.3.1	Oscillateur paramétrique	94
3.3.2	Loi d'échelles	95
3.3.3	Amplification paramétrique	97
3.4	Double modulation : régime paramétrique	99
3.4.1	Mélange non linéaire	99
3.4.2	Réduction des équations de base	100
3.4.3	Analyse multi-échelle	102
3.4.4	Etats stationnaires	106

3.4.5	Résultats numériques	110
3.4.6	Résultats expérimentaux	112
3.5	Application à la mesure de réflectivité	116
3.5.1	Mélange non linéaire	116
3.5.2	Deux méthodes de mesure	118
3.6	Conclusion	121
Conclusion et Perspectives		123
A Démodulation synchrone		127
B Théorème de la phase stationnaire		131

Introduction

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Spectrométrie Physique à Grenoble au sein de l'équipe Optique, Lasers et Applications qui a pour activité principale l'étude de nouvelles sources de rayonnement cohérent et leurs applications aux interfaces : matériaux, imagerie, astronomie et environnement. Le groupe "imagerie laser par réinjection optique" étudie depuis plusieurs années la dynamique des lasers réinjectés et développe des applications pour la réalisation de dispositifs de mesures optiques. Le contexte de ce travail s'inscrit dans la poursuite des travaux de thèse de Richard Day [1] sur la technique d'imagerie laser LOFI (*Laser Optical Feedback Imaging*).

Le développement de la technique LOFI repose sur la grande sensibilité de certains lasers à la réinjection optique [2], c'est à dire à la réinjection dans la cavité laser d'une faible quantité de lumière rétrodiffusée par une surface diffusante sur le trajet du faisceau laser. A première vue, ce phénomène parasite est une source de problème pour l'utilisation d'un laser, car il augmente le bruit et crée des instabilités [3]. Cependant, il est possible de mettre à profit la réinjection optique pour l'affinement spectral ou pour stabiliser une cavité laser [3]. La sensibilité des lasers à la réinjection optique leur confère une double fonction particulièrement intéressante : ils peuvent servir à la fois de source et de détecteur. Ainsi, il est possible d'analyser une cible à distance à partir de la lumière qu'elle rétrodiffuse dans le laser. La méthode LFI (*Laser Feedback Interferometry*) permet par exemple de mesurer la réflectivité, la distance ou encore la vitesse d'une cible à partir de l'analyse de la modification de l'état stationnaire du laser, induite par la réinjection optique provenant de cette cible [4, 5]. L'inconvénient principal de cette technique est qu'elle nécessite une cible suffisamment réfléchissante pour récupérer assez de signal de réinjection. Dans le cas de cibles non coopératives, comme une surface diffusante, le signal rétrodiffusé par la cible est trop faible pour être analysé. Une solution consiste alors à mettre

à profit la dynamique du laser pour amplifier le signal réinjecté. La technique d'imagerie LOFI consiste donc à décaler en fréquence le signal réinjecté dans le laser [6] : dans la cavité, il se produit alors un battement optique entre le champ intracavité et le champ réinjecté qui est amplifié par la dynamique du laser lorsque la fréquence de décalage est résonante avec la fréquence de relaxation du laser. L'amplitude de modulation est proportionnelle à la racine carrée de la réflectivité de la cible et la phase est proportionnelle à la distance entre le laser et la cible [1]. Grâce au décalage en fréquence, la détection n'est limitée que par le bruit du laser d'origine quantique [7]. Plusieurs applications ont été démontrées en exploitant soit l'amplitude de la modulation de l'intensité laser, pour réaliser par exemple des images en milieux diffusants [6] ou des images tridimensionnelles [8], soit la phase pour faire de la profilométrie [1] ou encore de la vibrométrie [9]. En outre, la réponse d'un laser soumis à une réinjection optique décalée en fréquence optique par effet Doppler a été étudiée et utilisée pour une expérience de vélocimétrie auto-alignée [10, 11].

L'objectif de mon travail a été de développer deux nouvelles applications de la technique LOFI utilisant conjointement l'amplitude et la phase du signal de modulation de l'intensité laser.

Le premier thème d'étude traite de l'imagerie à synthèse d'ouverture, inspirée du principe du radar à antenne synthétique [12]. Pour contourner le problème de la dégradation de la résolution des images à longue distance par la limite de diffraction, le radar à synthèse d'ouverture met à profit son déplacement par rapport à la cible pour augmenter synthétiquement son ouverture de collection. En faisant l'acquisition de l'amplitude et de la phase du signal renvoyé par la cible pour les différentes positions du radar, on peut reconstruire une image avec une résolution spatiale selon la direction de vol, au-delà de la limite de diffraction [13]. Il est intéressant de souligner que cette technique a d'abord été développée dans le domaine radar, car on ne possède pas d'élément focalisant dans cette région du spectre électromagnétique. Puis, cette technique a été étendue au domaine optique d'abord avec des sources lasers CO₂ [14, 15] à une longueur d'onde $\lambda=10 \mu\text{m}$, puis plus récemment avec les microlasers Nd :YAG³⁺ à $\lambda=1\mu\text{m}$ [16] pour réaliser des images unidimensionnelles (1D). Par la suite, des images bidimensionnelles (2D) super-résolues ont été obtenues par résolution synthétique partielle [17] ou complète [18, 19], en résolvant l'image selon la direction transverse au déplacement du laser par une modulation de fréquence d'émission laser [20], une séquence de pulses codés [21] ou par un balayage 2D qui

permet de résoudre la troisième dimension par une des méthodes citées précédemment [22]. Nous allons combiner la technique de synthèse d'ouverture au dispositif LOFI en mettant à profit le balayage du laser sur la cible lors de l'acquisition d'une image pixel par pixel, afin d'améliorer la résolution spatiale des images au-delà de la limite de diffraction.

Le deuxième thème est une étude plus fondamentale qui traite du régime paramétrique du laser soumis simultanément à la réinjection optique décalée en fréquence et une modulation de pompage externe. Cette étude a été motivée par la culture de l'équipe pour la dynamique des lasers et la perspective d'étendre le fonctionnement du dispositif LOFI à un régime non linéaire [23]. La réponse sous-harmonique d'un laser soumis à une réinjection optique avec un retard temporel a déjà été étudiée analytiquement, numériquement et expérimentalement [24]. En outre, la réponse d'un laser soumis à une modulation de pompage peut avoir un comportement chaotique [25]. Nous allons mettre à profit la modulation de pompage pour amplifier paramétriquement le signal réinjecté dans le laser dans le but d'améliorer la sensibilité de mesure. Cela nous conduira à étudier les effets de couplages entre l'amplitude et la phase du signal réinjecté.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter le principe de la technique LOFI et nous allons résumer les résultats importants qui seront nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Ce chapitre sera illustré par quelques exemples d'applications démontrées avec ce dispositif et nous discuterons également des limites et des améliorations possibles.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons l'imagerie LOFI à synthèse d'ouverture. Tout d'abord, nous expliquerons l'objectif et le principe de cette technique qui repose sur le balayage du laser sur la cible. Nous traiterons le cas simple du balayage en translation, et nous verrons comment, par un traitement du signal dédié, appelé le filtrage adapté, nous arrivons à atteindre des résolutions spatiales au-delà de la limite de diffraction. Nous présenterons ensuite l'étude analogue réalisée dans le cas où le balayage est rotatif. Nous en déduirons les caractéristiques du filtrage à réaliser ainsi que les performances que l'on peut attendre en terme de résolution. Enfin, nous étendrons ces résultats à deux dimensions en expliquant comment opérer une synthèse d'ouverture dans chaque direction avec un seul balayage de la cible, que nous illustrerons par des résultats numériques. Nous présenterons également les résultats expérimentaux d'images LOFI réalisées avec et sans synthèse d'ouverture afin de conclure sur l'amélioration de leur résolution par cette technique.

Dans le troisième chapitre, nous décrivons le fonctionnement en régime paramétrique du système LOFI superposé à une modulation de pompage. Nous décrivons analytiquement les équations d'un laser doublement modulé en pertes et en pompage et nous verrons comment obtenir le seuil du régime paramétrique de la réponse du laser. Nous traiterons deux applications possibles : l'amplification paramétrique du signal de modulation de l'intensité laser qui permet d'augmenter la sensibilité de mesure et la mesure la quantité de lumière réinjectée dans la cavité.

Nous concluons en discutant la faisabilité de ces applications reposant sur l'utilisation conjointe de l'amplitude et de la phase du signal en évoquant les perspectives d'évolution de l'imagerie LOFI à synthèse d'ouverture et du fonctionnement en régime non linéaire.

Chapitre 1

La technique LOFI : Laser Optical Feedback Imaging

1.1 Introduction

La détection laser par rétrodiffusion optique consiste à sonder une cible avec une source laser et récupérer la lumière retrodiffusée par cette cible afin de pouvoir l'analyser. Par exemple, la microscopie confocale laser permet d'imager des objets micrométriques en détectant directement la lumière qu'ils rétrodiffusent à l'aide d'une simple photodiode [1]. L'inconvénient de cette technique est qu'elle est donc limitée par le bruit de détecteur. La Tomographie Optique Cohérente (ou OCT pour Optical Coherent Tomography) est une autre technique d'imagerie laser qui permet de s'affranchir du bruit du détecteur par une mesure interférométrique entre le signal renvoyé par la cible et un signal de référence [1]. L'inconvénient de cette technique est de devoir aligner le faisceau laser sonde et le faisceau laser de référence. Pour éviter les problèmes d'alignement et simplifier le dispositif expérimental, la technique LFI (Laser Feedback Interferometry) utilise la réinjection optique, c'est à dire que le laser est à la fois la source et le détecteur, ce qui permet d'être en configuration auto-alignée. Le signal de référence est alors le champ électrique intra-cavité et l'interférence entre le signal renvoyé par la cible et le signal de référence se produit donc dans la cavité laser. Le signal mesuré est alors la modification de l'état stationnaire du laser induit par la réinjection optique [4]. La technique LOFI (Laser Optical Feedback Imaging) est une amélioration de la technique LFI qui consiste à décaler en fréquence le signal réinjecté dans le laser afin de créer un battement optique à la fréquence de décalage qui va être amplifié par la dynamique du laser [1]. Dans ce premier chapitre introductif, nous

allons présenter le principe de la technique LOFI. Nous illustrerons cette partie par quelques exemples d'applications développées avec ce dispositif et nous discuterons enfin de ses limites et des perspectives d'amélioration.

1.2 Principe

1.2.1 Dispositif expérimental

La Figure 1.1 montre le schéma de principe du dispositif LOFI : il comprend une source laser, une lentille de collimation, un système de décalage de fréquence (DF), une lentille de focalisation, la cible à analyser, une lame séparatrice, une photodiode (PD) et une détection synchrone (DS). La réinjection optique est caractérisée par trois paramètres : la fréquence de décalage F_e , la distance laser-cible d_e et la réflectivité effective de la cible R_e , qu'on définit par la quantité de lumière réinjectée et donc détectée par le laser [1]. La source laser est un microlaser Nd :YAG³⁺ émettant à la longueur d'onde $\lambda=1064$ nm qui est pompé optiquement par une diode laser à 808 nm (non représentée sur la Figure 1.1 par souci de clarté). Le décalage de fréquence (DF) est généré par deux modulateurs acousto-optiques (MAO), comme l'illustre la Figure 1.2. Le premier MAO est piloté par un générateur radio-fréquence à $f_m=81,5$ MHz et le faisceau laser diffracté (ordre -1) est envoyé sur le second MAO qui est piloté par un générateur radio-fréquence à $f_m + F_e/2$ où $F_e/2$ est une fréquence de l'ordre de quelques centaines de kilohertz fournie par un générateur basse fréquence. Le faisceau diffracté par le second MAO (ordre +1) est donc décalé en fréquence optique de $F_e/2$. La lumière rétrodiffusée par la cible fait un second passage dans les modulateurs acousto-optiques et est réinjectée dans la cavité laser en étant donc décalée en fréquence optique de F_e . Dans la cavité laser, il se produit alors un battement optique entre le champ électrique intracavité et le champ électrique réinjecté, à la fréquence de décalage F_e , qui a pour effet de moduler le gain net du laser, et donc l'intensité de sortie du laser que l'on va mesurer. Une partie du faisceau laser est ainsi prélevée par une lame séparatrice et envoyée sur une photodiode (PD) pour être analysée.

La détection synchrone (DS) permet de détecter la modulation de l'intensité du faisceau laser à la fréquence F_e et d'extraire l'amplitude A et la phase Φ de cette modulation. On fait l'acquisition de ces signaux en sortie de la détection synchrone par une carte d'acquisition connectée à un PC et on affiche l'une ou l'autre des grandeurs, selon l'information que l'on souhaite visualiser de la cible. Comme nous le verrons plus loin, une image d'amplitude informe

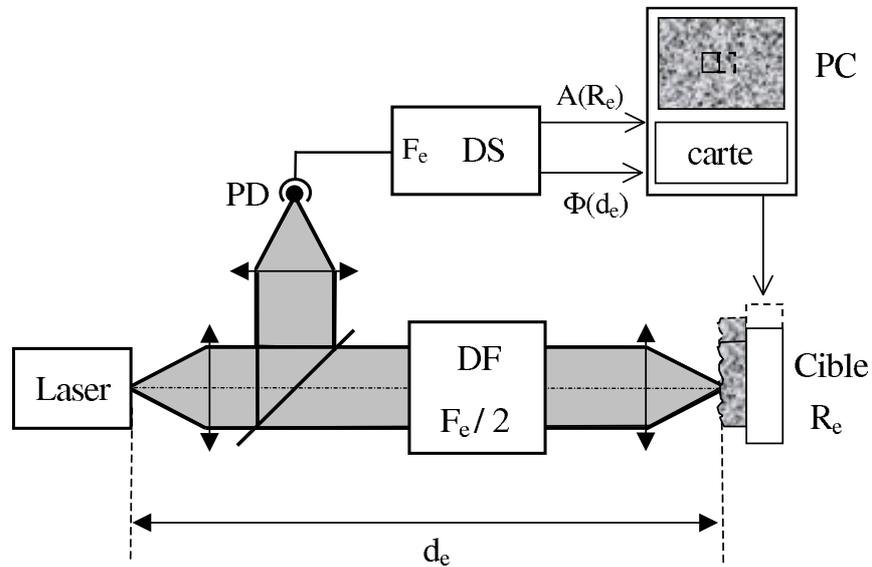


FIG. 1.1 – Schéma de principe de la technique LOFI. PD : photodiode, DS : détection synchrone, DF : décalage en fréquence. Pour un aller-retour, F_e représente le décalage total subi par la fréquence optique du laser. R_e est la réflectivité effective de la cible à analyser et d_e est la distance laser-cible. A et Φ : amplitude et phase de la modulation de l'intensité du laser à la fréquence de décalage F_e induite par la réinjection optique.

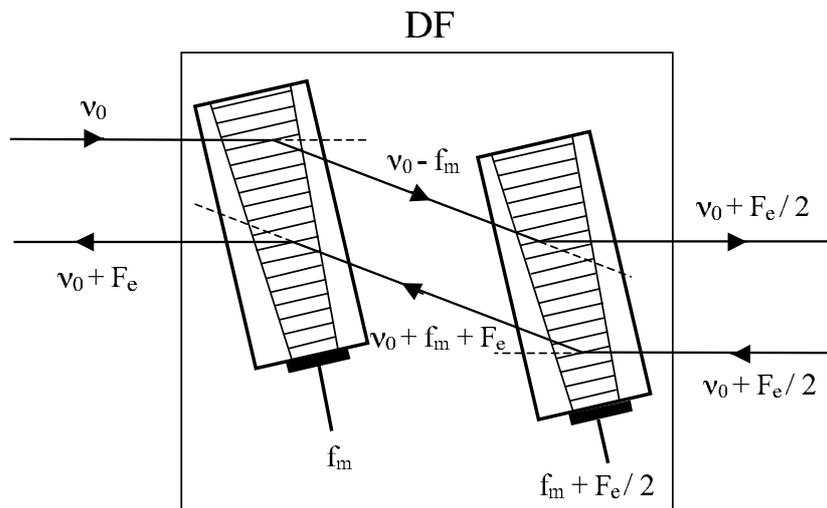


FIG. 1.2 – Décalage en fréquence (DF) constitué de deux modulateurs acousto-optiques (MAO). ν_0 est la fréquence optique du laser. Sur un aller retour, la lumière est décalée en fréquence de F_e . Les pointillés représentent les ordres 0 de diffraction qui sont arrêtés par des surfaces absorbantes.

sur le contraste de réflectivité de la cible et une image de phase informe sur le profil de la surface de la cible ou éventuellement ses modes de vibrations si elle est en mouvement. Pour réaliser des images, on fait une acquisition point par point de la cible, et chaque zone d'éclairement du laser sur la cible, au voisinage du point de focalisation, correspond à un pixel de l'image. Il est donc nécessaire de balayer le faisceau laser sur la surface de la cible pour l'imager complètement. Pour cela, on peut par exemple monter la cible sur une platine de translation pilotée par le PC. A chaque position de la platine correspond un pixel sur l'image. On verra par la suite qu'on peut utiliser également, et avec préférence, un scanner galvanométrique (c.-à-d. un système de miroirs rotatifs à moteurs galvanométriques) qui permet de balayer le faisceau laser sur la cible sans déplacer ni la cible ni le laser. On limite ainsi les vibrations mécaniques qui perturbent fortement les mesures de phase.

1.2.2 Laser réinjecté décalé en fréquence

Le comportement dynamique d'un laser soumis à une faible réinjection optique ($R_e \ll 1$) décalée en fréquence peut être décrit par les équations de Lang et Kobayashi [2] modifiées

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma_1 (N_0 - N(t)) - BN(t) |E(t)|^2, \quad (1.1a)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \left[i(\omega_c - \omega) + \frac{1}{2}(BN(t) - \gamma_c) \right] E(t) + \gamma_e E(t - t_e) e^{i\Omega_e t} e^{-i\omega t_e}. \quad (1.1b)$$

où $N(t)$ est l'inversion de population et $E(t)$ est l'enveloppe lentement variable du champ électrique complexe à l'intérieur de la cavité laser. $\gamma_1 N_0$ est le taux de pompage, γ_1 est le taux d'amortissement de l'inversion de population, γ_c est le taux d'amortissement de la cavité laser, ω_c est la pulsation de la cavité laser, ω est la pulsation optique du champ électrique et B est le coefficient d'Einstein. Le dernier terme de l'équation en champ traduit la réinjection optique décalée en fréquence caractérisée par le temps d'aller-retour des photons entre le laser et la cible ($t_e = 2d_e/c$), le taux de réinjection des photons dans la cavité laser ($\gamma_e = \gamma_c \sqrt{R_e}$) et la pulsation de décalage $\Omega_e = 2\pi F_e$. En posant $E(t) = E_c(t) e^{i\Phi_c(t)}$, le système d'équations (1.1) se réécrit [1]

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma_1 (N_0 - N(t)) - BN |E_c(t)|^2, \quad (1.2a)$$

$$\frac{dE_c(t)}{dt} = \frac{1}{2} (BN(t) - \gamma_c) E_c(t) + \gamma_e E_c(t - t_e) \cos [\Omega_e t - \omega t_e - \Phi_c(t) + \Phi_c(t - t_e)], \quad (1.2b)$$

$$\frac{d\Phi_c(t)}{dt} = \omega_c - \omega + \gamma_e \frac{E_c(t - t_e)}{E_c(t)} \sin [\Omega_e t - \omega t_e - \Phi_c(t) + \Phi_c(t - t_e)]. \quad (1.2c)$$

Dans le système d'équations (1.2), les fonctions périodiques traduisent l'interaction cohérente (i.e. le battement optique) entre le champ laser et le champ réinjecté. Le gain net du laser est alors modulé à la pulsation de décalage Ω_e .

1.2.3 Signal LOFI

Pour une réinjection faible, le système d'équations différentielles (1.2) peut être résolu par linéarisation en posant

$$N(t) = N_s + \Delta N(t), \quad \text{avec} \quad \Delta N(t) \ll N_s \quad (1.3a)$$

$$E_c(t) = E_s + \Delta E_c(t), \quad \text{avec} \quad \Delta E_c(t) \ll E_s \quad (1.3b)$$

$$\Phi_c(t) = \Phi_s + \Delta \Phi_c(t). \quad \text{avec} \quad \Delta \Phi_c(t) \ll 2\pi \quad (1.3c)$$

où $\Delta N(t)$, $\Delta E_c(t)$ et $\Delta \Phi_c(t)$ représentent les fluctuations des variables du laser et où N_s et E_s représentent respectivement les états stationnaires de l'inversion de population et de l'amplitude du champ électrique du laser donnés par

$$N_s = \frac{\gamma_c}{B}, \quad (1.4a)$$

$$I_s = |E_s|^2 = \frac{\gamma_1}{B}(\eta - 1). \quad (1.4b)$$

où I_s est l'intensité stationnaire du laser et où $\eta = BN_0/\gamma_c$ est le paramètre de pompage normalisé ($\eta=1$ au seuil de fonctionnement du laser). On fait l'hypothèse que la réinjection dans la cavité est suffisamment faible pour que la pulsation optique ω du champ électrique ne soit pas modifiée ($\omega \approx \omega_c$). Cela revient à dire qu'on prendra toujours comme pulsation optique celle de l'émission laser. On suppose également que le temps de vol est bien inférieur à la période de modulation ($\Omega_e t_e \ll 1$), ce qui signifie qu'on néglige le retard temporel t_e dans les Eqs.(1.2) et on a alors la simplification $E_c(t) \approx E_c(t - t_e)$ et $\Phi_c(t) \approx \Phi_c(t - t_e)$. En substituant les équations (1.3) dans le système d'équations différentielles (1.2) et avec nos hypothèses de simplification, on obtient au premier ordre la solution suivante pour la valeur relative de la modulation de la puissance de sortie du laser, qui représente le signal LOFI qu'on mesure [1]

$$\frac{\Delta P_{out}(t, \Omega_e)}{P_{out}} = \frac{2\Delta E_c(t)}{E_s} = 2\sqrt{R_e}G(\Omega_e) \cos(\Omega_e t - \omega_c t_e + \phi(\Omega_e)). \quad (1.5)$$

où $P_{out} = \gamma_c I_s$ est la puissance de sortie du laser exprimée en nombre de photons par secondes. $G(\Omega_e)$ est le gain dynamique du laser défini par

$$G(\Omega_e) = \frac{\gamma_c \sqrt{(\eta\gamma_1)^2 + \Omega_e^2}}{\sqrt{(\Omega_R^2 - \Omega_e^2)^2 + (\eta\gamma_1)^2 \Omega_e^2}}. \quad (1.6)$$

où Ω_R désigne la pulsation de relaxation du laser qui a pour expression [1]

$$\Omega_R = \sqrt{\gamma_1 \gamma_c (\eta - 1)}. \quad (1.7)$$

Cette pulsation de relaxation est caractéristique des lasers de classe B (dont les lasers solides et à semiconducteur font partie) dont les paramètres dynamiques vérifient la condition $\gamma_1 < \gamma_c$, qui signifie que le temps de vie d'un photon dans la cavité est très inférieur au temps de vie de l'inversion de population. Ces lasers présentent un régime d'oscillations de relaxation à la pulsation Ω_R , qui correspond à leur pulsation propre. D'après l'Eq.(1.6), le gain dynamique $G(\Omega_e)$ est résonant à la pulsation Ω_R : plus on réinjecte le laser à une pulsation Ω_e proche de sa pulsation de relaxation Ω_R , plus il va répondre en résonance : c'est ici l'origine de la sensibilité de détection de la technique LOFI. Enfin, dans l'expression (1.5), le terme $\phi(\Omega_e)$ est un déphasage additionnel induit par la dynamique du laser et défini par

$$\phi(\Omega_e) = \arctan \left(\frac{\Omega_e \left[(\Omega_R^2 - \Omega_e^2) - (\eta\gamma_1)^2 \right]}{\eta\gamma_1 \Omega_R^2} \right). \quad (1.8)$$

A la résonance ($\Omega_e = \Omega_R$), le signal de modulation LOFI (Equation (1.5)) présente un maximum d'amplitude avec un gain $G(\Omega_R) \approx \gamma_c / \eta\gamma_1$. Pour un microlaser Nd³⁺:YAG, qui est la source qu'on utilisera dans toute cette étude, le taux de relaxation de l'inversion de population vaut $\gamma_1 \approx 5.10^3 s^{-1}$ et le taux de relaxation de la cavité laser $\gamma_c \approx 10^{10} s^{-1}$. Pour un paramètre de pompage normalisé $\eta=2$, le maximum du gain dynamique vaut alors $G(\Omega_R) \approx 10^6$. Par comparaison avec un interféromètre hétérodyne standard, le contraste de modulation est multiplié par un facteur un million, ce qui rend la détection du système LOFI considérablement plus sensible : avec une puissance optique $P_{out}=1mW$, dans une bande de détection de 1 KHz, il est possible de détecter une réflectivité effective de l'ordre de $R_e = 10^{-13}$ [1].

La Figure 1.3 représente le spectre de puissance du signal LOFI obtenu expérimentalement lorsqu'on éclaire une cible de réflectivité effective $R_e = 10^{-10}$ située à une distance $d_e=80$ cm, avec une puissance optique $P_{out}=4mW$. La courbe présente une résonance centrée sur la fréquence

de relaxation $F_R = \Omega_R/2\pi=850$ kHz, de largeur caractéristique $\eta\gamma_1$ de quelques kilohertz. On observe expérimentalement la deuxième harmonique de la relaxation à $2F_R$ qu'on ne peut pas décrire par l'analyse linéaire des Eqs.(1.1). Le signal LOFI correspond au pic à la fréquence de décalage $F_e=500$ KHz et on mesure un rapport signal sur bruit de 20 dB. On a représenté à titre de comparaison le bruit de détecteur qui illustre que le système de détection n'est limité que par le bruit du laser d'origine quantique [7].

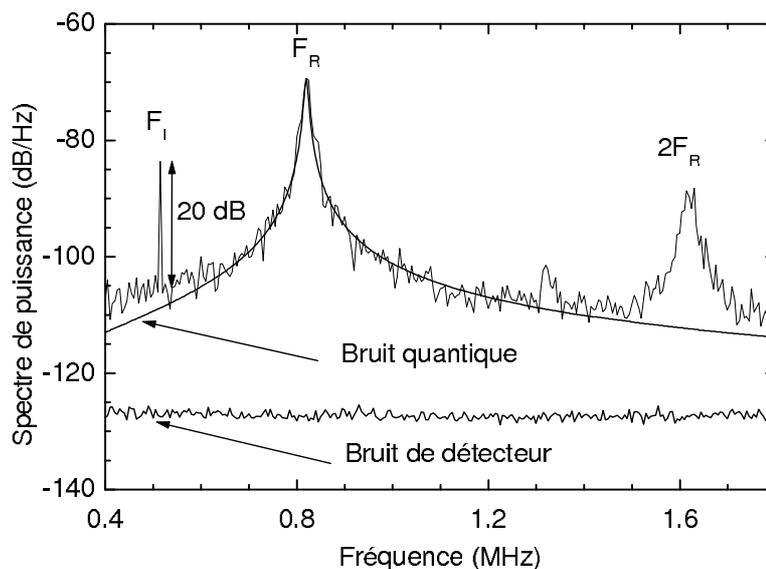


FIG. 1.3 – Spectre de puissance du signal LOFI obtenu expérimentalement avec un microlaser Nd^{3+} :YAG émettant à $\lambda=1064$ nm avec une puissance optique $P_{out}=4$ mW sur une cible de réflectivité effective $R_e = 10^{-10}$. Fréquence de relaxation $F_R=850$ kHz, fréquence de décalage $F_e=500$ kHz [27].

1.2.4 Représentation en coordonnées polaires

D'après l'expression (1.5) du signal LOFI, les informations sur la cible, c'est à dire sa réflectivité R_e et sa distance d_e , sont respectivement contenues dans l'amplitude et la phase de la modulation d'intensité du laser. On les obtient en démodulant le signal à l'aide d'une détection synchrone à la fréquence de décalage F_e , dont le principe est expliqué en Annexe A. Elle opère comme un filtre passe bande, autour de la fréquence de détection, de largeur $\Delta F \propto 1/T_{int}$ où T_{int} est le temps d'intégration. Plus le temps d'intégration est grand, plus le signal détecté est filtré du bruit du laser, et donc meilleure est la précision de mesure sur l'amplitude et la phase de modulation qui ont pour expression

$$A(R_e) = 2\sqrt{R_e}G(\Omega_e)P_{out} \quad (1.9a)$$

$$\Phi(d_e) = \omega_c \frac{2d_e}{c} = \frac{4\pi}{\lambda}d_e. \quad (1.9b)$$

Etant donné que la phase délivrée par la détection synchrone est comprise entre 0 et 2π , on ne peut mesurer que des phases relatives d'un point à l'autre de la cible, qui correspondent à une variation de distance laser-cible d_e maximale de $\lambda/2$. Pour nous affranchir du déphasage additionnel $\phi(\Omega_e)$ (Eq.(1.8)), qui ne porte aucune information sur la cible, il est possible d'adapter la référence de phase. On peut aussi représenter les composantes en quadrature du signal démodulé

$$p(R_e, d_e) = A(R_e) \cos[\Phi(d_e)] \quad (1.10a)$$

$$q(R_e, d_e) = A(R_e) \sin[\Phi(d_e)]. \quad (1.10b)$$

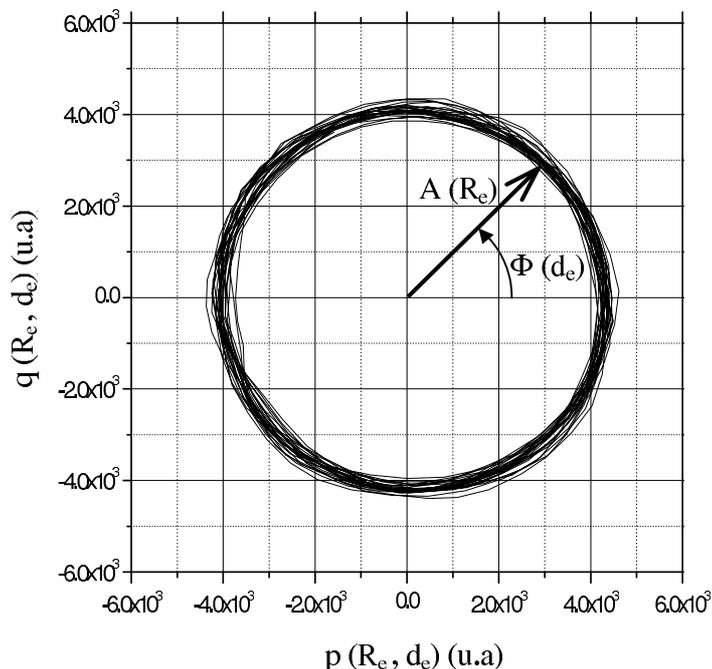


FIG. 1.4 – Représentation du signal LOFI en coordonnées polaires ($q(R_e, d_e)$ en fonction de $p(R_e, d_e)$) obtenu expérimentalement pour une cible diffusante montée sur un transducteur piézo-électrique, qui fait varier la distance laser-cible d_e d'une vingtaine de longueurs d'onde.

La Figure 1.4 montre la représentation en coordonnées polaires du signal LOFI ($q(R_e, d_e)$ en fonction de $p(R_e, d_e)$) obtenu expérimentalement pour une cible diffusante se déplaçant sur

l'axe du faisceau laser (c.-à-d. pour d_e variable). Pour un déplacement correspondant à la moitié de la longueur d'onde du laser, le signal LOFI décrit un cercle dont le rayon est proportionnel à la quantité de lumière réinjectée dans le laser (c.-à-d. à la réflectivité effective de la cible R_e). Cette représentation est très pratique car elle permet de visualiser simultanément l'amplitude et la phase du signal. On peut vérifier par cette expérience simple dite "du cercle" qu'on réinjecte correctement la lumière dans le laser en contrôlant la dimension du rayon du cercle qui doit s'agrandir si la réflectivité effective de la cible R_e augmente. A différence de fréquence $|F_e - F_R|$ constante, le cercle doit s'agrandir lorsqu'on augmente la puissance de sortie du laser P_{out} ; à puissance optique constante, il doit aussi s'agrandir lorsque la fréquence de décalage F_e se rapproche de la fréquence de relaxation F_R , car on augmente alors le gain dynamique $G(\Omega_e)$ (Eq.(1.6)).

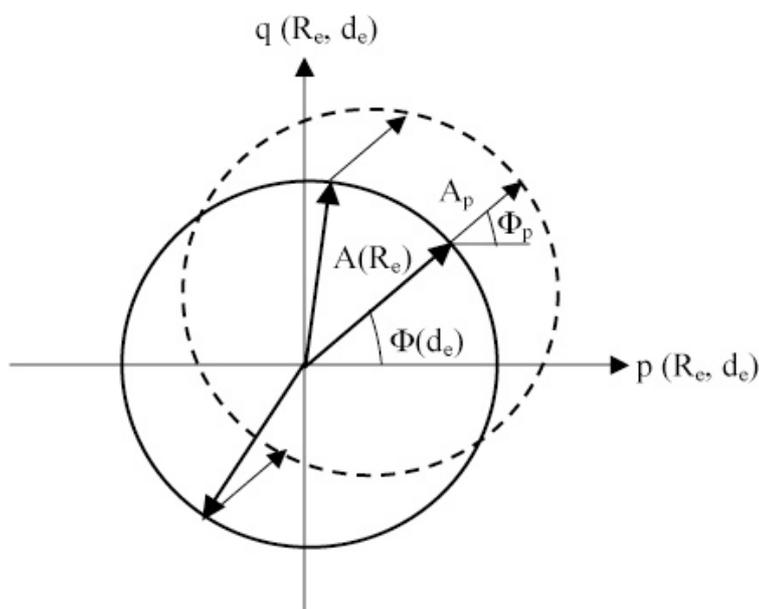


FIG. 1.5 – Représentation en coordonnées polaires du signal LOFI avec une réinjection parasite d'amplitude A_p et de phase constante Φ_p .

On peut également détecter une réinjection parasite, c'est à dire de la lumière réinjectée dans le laser provenant d'un autre objet que la cible à analyser (une lentille, même avec un traitement de surface anti-reflets adapté rétrodiffuse de la lumière que le laser détecte). Le surplus de lumière parasite réinjectée provenant d'un objet à distance constante (c.-à-d. pour une phase Φ_p) sur le trajet du faisceau laser correspond en représentation polaire à un vecteur de norme proportionnelle à la quantité de lumière A_p qu'il rétrodiffuse et de direction constante

fixée par la phase Φ_p . L'addition vectorielle pour chaque valeur de phase Φ du vecteur tournant correspondant au signal LOFI et du vecteur constant correspondant à la réinjection parasite a pour résultante le cercle LOFI décentré d'un déplacement proportionnel à la quantité de lumière parasite réinjectée A_p , comme le montre la Figure 1.5. A partir de cette constatation, on peut alors optimiser le montage pour supprimer ces échos parasites, qui perturbent la mesure. Nous utiliserons beaucoup la représentation en coordonnées polaires du signal LOFI dans le troisième chapitre lorsque nous étudierons les effets de couplages entre amplitude et phase en régime paramétrique.

1.3 Quelques exemples d'applications et limites

Nous allons présenter quelques exemples d'applications de la technique LOFI qui mettent à profit soit l'amplitude soit la phase du signal, puis nous donnerons les limites du dispositif.

1.3.1 Imagerie d'amplitude

L'amplitude du signal LOFI à la fréquence de décalage (Equation (1.9a)) est proportionnelle à la racine carrée de la réflectivité de la cible, c'est à dire à la quantité de lumière réinjectée dans le laser, et au gain dynamique $G(\Omega_e)$ que l'on peut ajuster en accordant la pulsation de décalage Ω_e par rapport à la pulsation de relaxation Ω_R (Eq.(1.6)). La mesure de l'amplitude permet de faire par exemple de l'imagerie de retro-réfectance en milieu diffusant, car en ajustant le gain de détection, on améliore la sensibilité de la mesure jusqu'à un facteur un million, et il est donc possible de détecter la très faible quantité de lumière rétrodiffusée par une cible après qu'elle a traversé un milieu diffusant. Nous allons présenter deux exemples d'applications du dispositif LOFI en imagerie d'amplitude : la première illustre la mise à profit du gain dynamique ajustable du laser et la seconde illustre la spécificité de la mesure de la lumière rétrodiffusée par rapport à l'imagerie en transmission en microscopie optique.

1.3.1.1 Vision en milieu diffusant

A une distance d'environ 40 mètres, nous avons réalisé une image d'un panneau de circulation routière à travers une cuve (Figure 1.6a) contenant un milieu diffusant (du lait mélangé à de l'eau pour différentes concentrations C). L'augmentation de la concentration de diffuseurs se traduit par une baisse du contraste à l'emplacement de la cuve sur l'image (Figure 1.6b et Figure 1.6c).

Cependant, en mettant à profit la dynamique du laser (c.-à-d. en rapprochant la fréquence de décalage F_e de la fréquence de résonance F_R), on peut suffisamment amplifier le signal pour retrouver un contraste comparable à celui obtenu pour une concentration de diffuseurs presque cinq à six fois plus faible (Figure 1.6d et Figure 1.6e). La diminution du signal réinjecté à cause de l'augmentation de la concentration de diffuseurs est compensée par une augmentation du gain de détection. En revanche, à l'extérieur de la cuve, les photons ne subissent aucune diffusion, donc l'amplification dynamique du signal réinjecté dans la cavité laser saturé complètement le gain net du laser et le contraste de modulation est alors perdu (Figure 1.6d et Figure 1.6e).

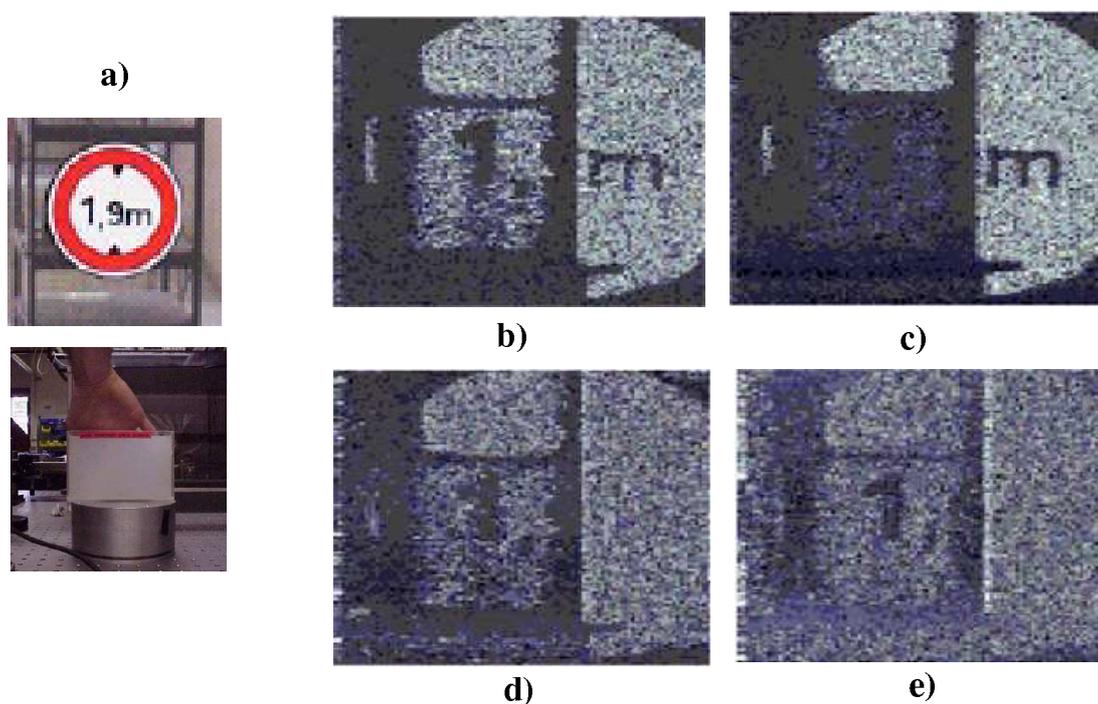


FIG. 1.6 – Image LOFI d'amplitude d'un panneau de circulation routière à travers un milieu diffusant de concentration C . a) photo du panneau et de la cuve remplie du milieu diffusant : la partie de la main derrière la cuve est invisible à l'oeil. b) $C=22 \text{ ml.l}^{-1}$, $|F_e - F_R|=100 \text{ kHz}$, $G(\Omega_e) \approx 10^4$. c) $C=44 \text{ ml.l}^{-1}$, $|F_e - F_R|=100 \text{ kHz}$, $G(\Omega_e) \approx 10^4$. d) $C=100 \text{ ml.l}^{-1}$, $|F_e - F_R|=10 \text{ kHz}$, $G(\Omega_e) \approx 10^5$. e) $C=122 \text{ ml.l}^{-1}$, $|F_e - F_R|=0 \text{ kHz}$, $G(\Omega_e) \approx 10^6$.

1.3.1.2 Microscopie LOFI

En couplant le système LOFI à un objectif de microscope permettant de focaliser le faisceau laser à un diamètre de tâche de l'ordre de la longueur d'onde, c'est à dire le micromètre, nous

avons réalisé une image d'un globule rouge d'une dizaine de micromètres de diamètre (Figure 1.7). On remarque que contrairement à l'imagerie en transmission (Figure 1.7a) qui aplati les détails, l'imagerie par rétrodiffusion (Figure 1.7b) permet d'accéder à des informations sur la morphologie de l'objet étudié. En effet, on perçoit nettement la concavité au centre du globule et les reliefs du bord de la membrane qui apparaissent plus foncés à l'image. L'explication de cet effet est que sur les zones inclinées, le diagramme de rayonnement de l'objet est modifié, ce qui entraîne une baisse de la quantité de lumière réinjectée, puisqu'on ne détecte que la lumière rétrodiffusée selon l'axe du laser, et donc une baisse du contraste de l'image. Ces informations supplémentaires par rapport à la microscopie optique par transmission, intéressent particulièrement les biologistes qui étudient la morphologie des cellules vivantes pour en déduire d'éventuelles dégénérescences. En effet, la différence de morphologie permet de différencier une cellule saine d'une cellule malade.

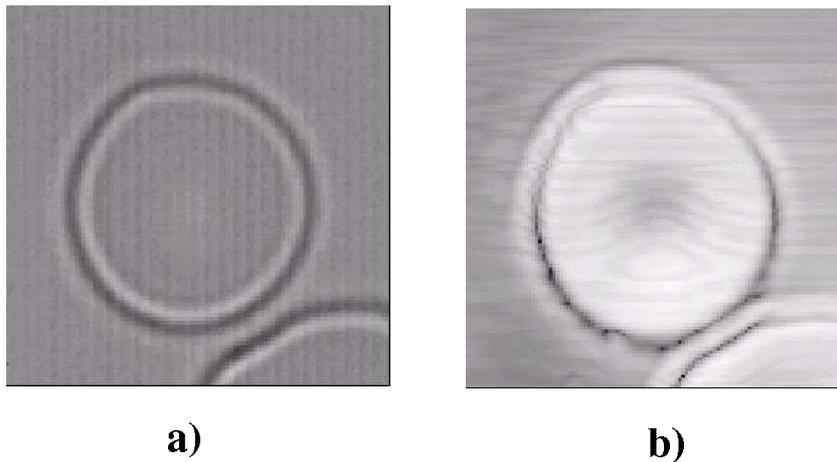


FIG. 1.7 – a) Image par transmission d'un globule rouge réalisée avec un microscope optique. b) Image LOFI d'amplitude du globule rouge : on perçoit nettement la forme concave de l'objet [26].

1.3.2 Imagerie de phase

La phase du signal LOFI est proportionnelle à la distance entre le laser et la cible (Equation (1.9b)). Nous avons vu par l'illustration du cercle LOFI en représentation polaire, que la phase changeait de 2π pour une variation de différence de distance de $\lambda/2$. A partir de la mesure de la phase, il est donc possible de mesurer les petites variations de relief d'une surface à caractériser, inférieures à $\lambda/2$. Nous allons présenter deux exemples d'applications du dispositif LOFI en

imagerie de phase : la première illustre la reconstitution d'un profil d'un objet dont les reliefs sont sub-micrométriques et la deuxième illustre les potentialités en vibrométrie pour la détection de défauts sans contact.

1.3.2.1 Profilométrie

Nous avons réalisé l'image de phase d'un échantillon de calibrage en silicium pour microscope en champ proche sur lequel est gravé la lettre "r" [1]. La Figure 1.8 représente son image de phase LOFI avec des courbes de niveaux séparées de 40 nm. La résolution en profondeur dépend de la stabilité mécanique du balayage et est de l'ordre de 10 nm. La lettre gravée a une profondeur d'environ 240 nm. La courbure de champ due au balayage galvanométrique du faisceau laser sur l'objet induit des variations de phase importantes aux extrémités de la surface de support de la lettre. Sur l'image, cela se traduit par une déformation du profil dans les coins. Dans le chapitre 2, nous verrons comment mettre à profit la courbure du front d'onde pour améliorer la résolution transversale des images (c.-à-d. dans le plan (x,y)).

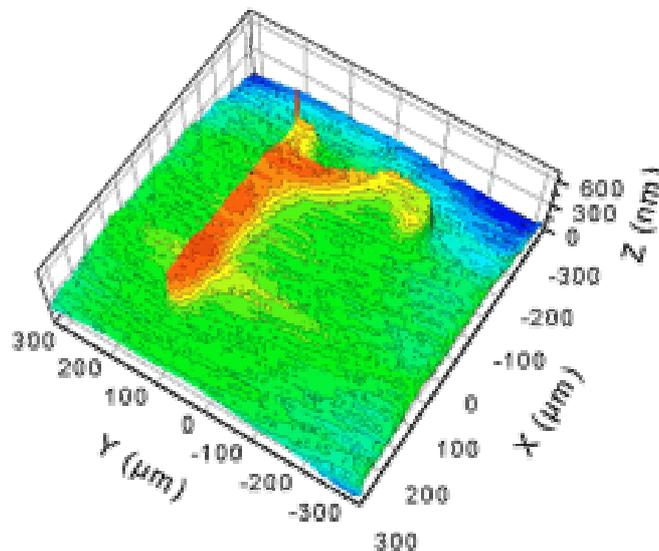


FIG. 1.8 – Image LOFI de phase de la lettre "r" gravée sur une surface de silicium. Les courbes de niveaux sont séparées de 40 nm. Les axes x , y et z ne sont pas à la même échelle [1].

1.3.2.2 Vibrométrie

Nous avons réalisé des mesures d'amplitude de vibrations afin d'analyser l'évolution de la position d'une surface dans le temps et en déduire la présence éventuelle de défauts non visibles

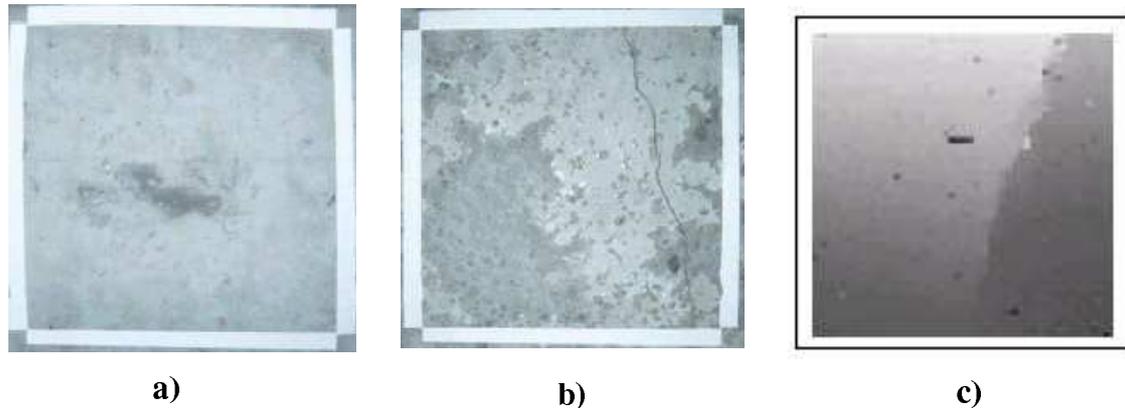


FIG. 1.9 – a) Face avant de la dalle de béton. Aucune fissure n'est visible. Les bandes blanches délimitent la zone imagée de la dalle. b) Face arrière de la dalle fissurée. c) Image LOFI de phase de la face avant de la dalle : la fissure est visible [9].

de l'objet à étudier. A une distance d'une dizaine de mètres, nous avons mené une expérience pour détecter une fissure non débouchante sur une dalle de béton [9]. La face avant (Figure 1.9a) ne présente aucune fissure, tandis que la face arrière est nettement fissurée de bas en haut (Figure 1.9b) sur plusieurs dizaines de centimètres. En excitant la dalle avec un haut-parleur à la fréquence $f=117,2$ Hz, l'onde acoustique délivrée se propage de manière discontinue au niveau de la fissure. On focalise le laser sur la face avant de la dalle et on détecte pour chaque pixel, en balayant la surface, la phase de modulation du signal réinjecté à la fréquence f de vibration. La transformée de Fourier ¹ du signal de phase de la modulation de l'intensité lumineuse donne l'amplitude de vibration de la dalle pour chaque pixel à la fréquence d'excitation f . L'amplitude de vibration présente une discontinuité le long de la fissure : l'image obtenue de la face avant de la dalle révèle alors la présence de la fissure non débouchante en face arrière (Figure 1.9c).

1.3.3 Velocimétrie Doppler

Il est possible de mesurer la composante selon l'axe optique de la vitesse d'une cible grâce à la technique LOFI qui est sensible aux variations de position de la cible. Le principe repose sur l'effet Doppler généré lorsque la cible que l'on souhaite imager est en mouvement. Si on considère le cas simple d'un mouvement en translation de la cible (ou du laser par rapport à la

¹Pour calculer sa transformée de Fourier, il est indispensable que le signal soit de carré intégrable, donc nécessairement continu. La phase délivrée par la détection synchrone étant comprise entre 0 et 2π , les discontinuités éventuelles du signal doivent être supprimées par un algorithme de déballage de phase [28]

cible) à la vitesse constante v , comme l'illustre la Figure 1.10, alors en projetant la composante de la vitesse sur l'axe optique, on peut écrire le trajet optique d_e en fonction du temps

$$d_e(t) = d_e + (v \sin \theta) t \quad (1.11)$$

où θ est l'angle d'inclinaison entre la normale à l'axe optique et la direction de la vitesse.

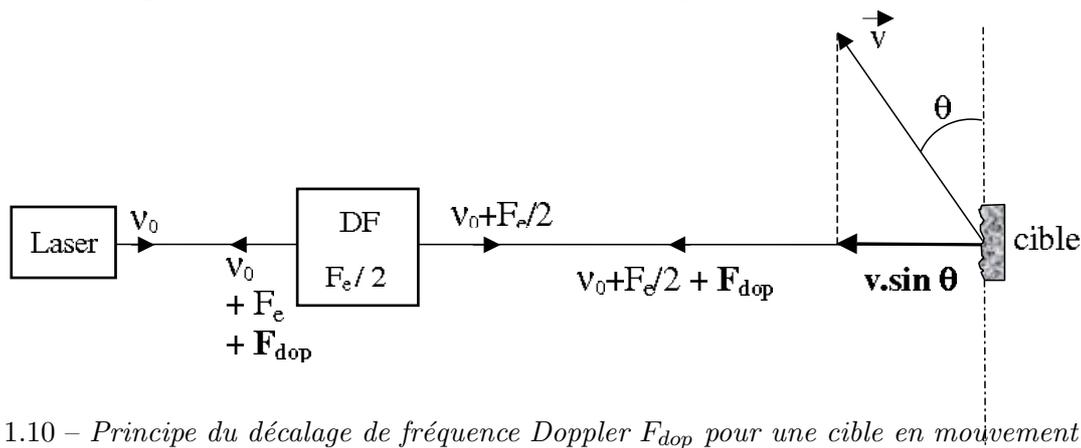


FIG. 1.10 – Principe du décalage de fréquence Doppler F_{dop} pour une cible en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v .

D'après l'Eq.(1.9b), on en déduit l'expression de la fréquence Doppler de décalage

$$F_{dop} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta\Phi(t)}{\delta t} = \frac{2v}{\lambda} \sin \theta \quad (1.12)$$

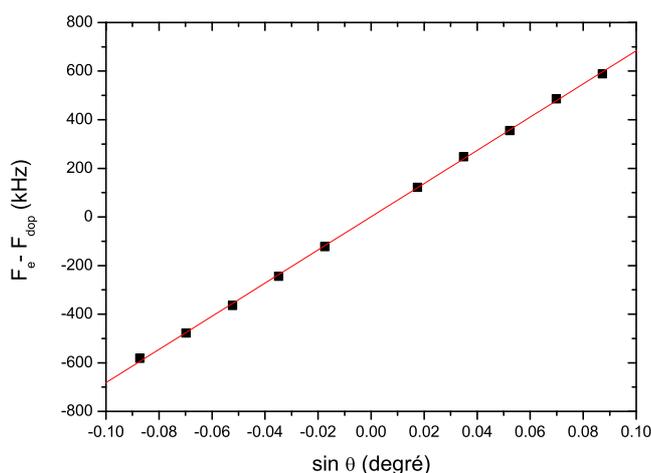


FIG. 1.11 – Mesure du décalage de fréquence Doppler en fonction de $\sin \theta$.

A partir du décalage de fréquence F_{dop} par rapport à la fréquence F_e , on peut en déduire

la vitesse de la cible et à partir du signe de $F_e - F_{dop}$, on peut connaître le signe de la vitesse, qui indique si la cible se rapproche ou s'éloigne du laser. La Figure 1.11 montre la différence de fréquence $F_e - F_{dop}$ en fonction de $\sin \theta$ obtenu pour une cible se déplaçant à une vitesse v constante. La pente de la droite $2v/\lambda$ nous permet de calculer la vitesse de déplacement de la cible $v \approx 3,5 m.s^{-1}$. Nous verrons au chapitre 2 que la sensibilité de la technique LOFI aux variations de positions de la cible par rapport au laser est à la base de la technique de synthèse d'ouverture.

1.3.4 Limites

1.3.4.1 Sensibilité de détection

La sensibilité de la technique LOFI est limitée par le bruit d'amplitude du laser d'origine quantique. La limitation sur la mesure d'amplitude est illustrée par la Figure 1.12 : des réflectivités de l'ordre de $R_e \approx 10^{-13}$ sont accessibles avec un laser de quelques milliwatts dans une bande passante de l'ordre du kHz [7].

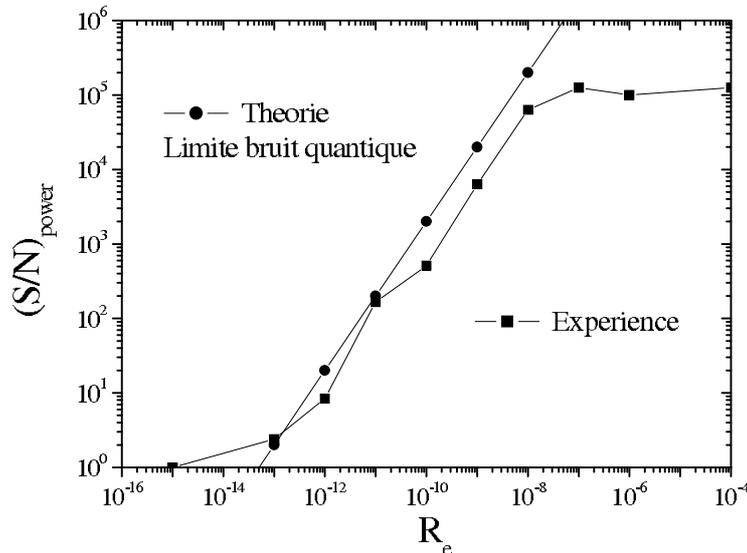


FIG. 1.12 – Rapport signal sur bruit théorique et expérimental en fonction de la réflectivité effective R_e pour $F_e = 1,2 MHz$ et $F_R = 900 kHz$. Puissance de sortie du laser $P_{out} = 4 mW$, bande passante de détection 1 kHz. [7]

1.3.4.2 Résolution longitudinale

La mesure de phase est également limitée par le bruit d'amplitude du laser. Avec une puissance de sortie de quelques milliwatts envoyée sur une cible de réflectivité effective de l'ordre de 10^{-10} , dans une bande passante $\Delta F=1$ kHz on arrive à mesurer une amplitude de déplacement d'environ 1 nm (Figure 1.13).

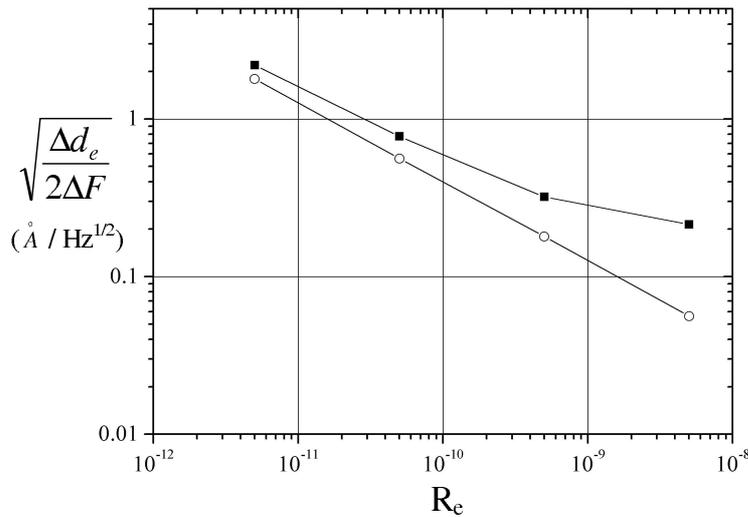


FIG. 1.13 – Résolution longitudinale (selon l'axe optique) théorique (rond) et expérimentale (carrés) Δd_e d'une cible en fonction de sa réflectivité effective R_e dans une bande passante ΔF . Puissance de sortie du laser $P_{out}=1$ mW. [27]

1.3.4.3 Résolution transversale

La limite de résolution spatiale (ou transversale) des images est fixée par le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser au niveau de la cible. À une distance de focalisation d'une centaine de microns, un objectif de microscope standard permet d'obtenir un diamètre de tâche de l'ordre de la longueur d'onde $\approx 1\mu\text{m}$ et des résolutions micrométriques sont donc possibles. Cependant, la cible à imager se situe parfois à une distance supérieure à la distance de focalisation, notamment en microscopie lorsqu'on souhaite imager dans des tissus épais. Il n'est alors pas toujours possible d'ajuster le point de focalisation du microscope à cause de l'encombrement de l'objectif. Dans ces conditions, la résolution des images de microscopie LOFI est limitée par la diffraction. Enfin, à une distance d'observation de plusieurs dizaines de mètres,

il est nécessaire d'avoir des ouvertures numériques très importantes pour suffisamment focaliser le faisceau laser pour obtenir un diamètre de tâche de quelques millimètres. Nous verrons au chapitre 2 comment la synthèse d'ouverture permet d'améliorer la résolution des images au-delà de la limite de diffraction en mettant à profit le balayage du laser sur la cible à imager.

1.3.4.4 Temps d'acquisition

Le temps d'acquisition est déterminé par le nombre de pixels de l'image et le temps d'intégration T_{int} : pour réaliser une image 100 par 100 avec un temps d'intégration de $T_{int} = 300\mu s$, il faut attendre 3 secondes. Le temps d'acquisition devient critique dès lors que l'on veut faire de l'imagerie dynamique, c'est à dire de cibles en mouvement, en particulier dans les phénomènes biologiques. C'est le taux de relaxation de l'inversion de population du laser qui détermine la limite ultime du temps de réponse du système : dans le cas d'un microlaser Nd :YAG³⁺, il vaut une centaine de microsecondes. Pour améliorer ce temps de réponse, nous avons envisagé d'utiliser comme source une diode laser, qui a un temps de réponse de l'ordre de la nanoseconde, donc 10^6 fois plus rapide. Cependant la fréquence de relaxation de ces lasers à semiconducteur est de l'ordre du GHz, ce qui nécessite d'associer une instrumentation rapide et complexe.

1.4 Conclusion

Nous avons résumé dans ce chapitre le principe de la technique LOFI. Elle repose sur la grande sensibilité de certains lasers à la réinjection optique provenant de l'objet à analyser. Le champ électrique rétrodiffusé par la cible est décalé en fréquence et réinjecté dans la cavité laser où il se produit alors un battement optique entre le champ intra-cavité et le champ réinjecté qui est amplifié par la dynamique du laser lorsque la fréquence de décalage est résonante avec la fréquence de relaxation du laser. L'amplitude de cette modulation est proportionnelle à la racine carrée de la réflectivité effective de la cible et la phase est proportionnelle à la distance parcourue entre le laser et la cible. Cette technique a donc plusieurs avantages : une détection cohérente, auto-alignée et une grande sensibilité de détection grâce à la mise à profit de la dynamique du laser. Nous avons présenté quelques exemples d'applications : l'imagerie d'amplitude permet d'améliorer la vision en milieux diffusants et d'apporter des informations sur la morphologie des objets étudiés ; l'imagerie de phase permet de reconstituer des profils sub-micrométriques ou de faire de la vibrométrie pour le contrôle non destructif. Nous avons enfin donné les limites du

dispositif : la sensibilité et la résolution en profondeur de cette technique est limitée par le bruit du laser d'origine quantique ; la résolution spatiale des images est limitée par la diffraction et le temps d'acquisition par le temps de vie de l'inversion de population. Ces limitations nécessitent donc de trouver le meilleur compromis pour obtenir une image de qualité dans des conditions raisonnables avec les contraintes physiques et technologiques du dispositif. En perspective, certains points pourront être améliorés afin de rendre cette technique encore plus performante.

Dans le but de diminuer le temps d'acquisition, une solution envisagée est de rendre l'acquisition multiplexe. Dans ce cas, tous les pixels de l'image sont acquis en même temps, et on s'affranchit alors du balayage. Le laboratoire de l'IMEP à Grenoble conçoit des réseaux de lasers en optique intégré sur verre [29] dans le but d'augmenter la capacité des canaux optiques de télécommunication. Cette puce constituée de quinze guides d'onde codopés Er/Yb (milieu amplificateur) et d'un réseau de Bragg (résonateur) joue le rôle de multiplexeur en émettant quinze faisceaux laser à des fréquences optiques espacées de 25 GHz ou 100 GHz avec une largeur spectrale très fine (3 kHz). Chaque laser de la puce émet une puissance optique de quelques milliwatts et possède une fréquence de relaxation d'une centaine de kilohertz. En utilisant ces réseaux de lasers, qui présentent des caractéristiques très comparables aux microlasers que nous utilisons actuellement, comme sources pour le dispositif LOFI, on pourrait envisager de réaliser une acquisition partiellement multiplexe d'une image 100 par 100 et diviser le temps d'acquisition de l'ordre de la seconde par le nombre de lasers intégrés, c'est à dire par quinze, et ainsi obtenir un temps d'acquisition de l'ordre de la centaine de microsecondes.

Une autre voie de recherche à explorer pour l'acquisition multiplexe des images est l'holographie dynamique par mélange à quatre ondes dans un milieu à gain [30]. Le principe est le suivant : l'interférence entre le champ intracavité et le champ réinjecté génère des franges d'interférences dans le gain du laser : c'est l'enregistrement de l'hologramme. L'onde contra-propageante intracavité est alors diffractée par ce réseau de gain et donne naissance à une quatrième onde conjuguée en phase qui ressort de la cavité laser : c'est la relecture de l'hologramme qui correspond à l'objet, qu'on peut visualiser en temps réel sur une caméra CCD rapide fonctionnant au kilohertz.

La transportabilité du système est un facteur important pour le transfert technologique de la technique LOFI : actuellement, cette expérience est montée sur une table optique et il est donc

impossible de réaliser des images sur le terrain, en conditions réelles. Afin de rendre le dispositif plus compact, nous envisageons de réaliser un prototype fibré. L'avantage du laser fibré est qu'il ne nécessite aucun alignement et qu'il s'adapte facilement à des composants en optique intégré (comme un modulateur électro-optique pour le décalage de fréquence), d'où un gain de place conséquent. En collaboration avec le Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées de Strasbourg, nous envisageons de réaliser une campagne de mesures de vibrométrie avec le futur prototype fibré dans le but de détecter des fissures non visibles à l'oeil sur un pont en conditions réelles (à l'extérieur, à une portée d'une centaine de mètres, sur une cible non accessible).

Enfin, les applications en biotechnologies pour l'imagerie de cellules vivantes ont des perspectives médicales très intéressantes. En collaboration avec des biologistes de l'INSERM, nous allons utiliser la technique LOFI pour l'étude de cellules cancéreuses, car elle permet d'obtenir des informations déterminantes (comme la morphologie) sans avoir à utiliser de marqueurs fluorescents. En effet, ces substances sont potentiellement dangereuses pour l'organisme, et détecter une dégénérescence cellulaire sans avoir à injecter de tels produits constituerait une avancée majeure pour le diagnostic *in vivo* [26].

Chapitre 2

Imagerie LOFI à synthèse d'ouverture

2.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 1 que l'acquisition d'une image se fait pixel par pixel en mesurant en chaque point de la cible l'amplitude ou la phase du signal LOFI, selon le type d'information que l'on souhaite obtenir. Il est donc nécessaire de balayer le faisceau laser d'un point à l'autre sur la cible. Une possibilité consiste à monter la cible sur une platine de translation de telle sorte qu'elle se déplace pas à pas dans le faisceau laser fixe. Une autre possibilité est d'utiliser un scanner galvanométrique, constitué de miroirs rotatifs, qui permet de balayer le faisceau laser sur la cible fixe. Le balayage galvanométrique est plus adapté à l'imagerie pour plusieurs raisons : d'une part, il est plus commode de balayer le faisceau laser sur la cible parfois éloignée à laquelle on a pas accès, ou qu'on ne peut tout simplement pas déplacer. D'autre part, l'utilisation de ce dispositif réduit considérablement les vibrations mécaniques, ce qui améliore la qualité des mesures interférométriques. Enfin, ce scanner compact peut être aisément intégré dans un prototype en vue d'applications industrielles. Nous utiliserons donc uniquement le balayage galvanométrique pour l'imagerie LOFI à synthèse d'ouverture.

Actuellement, la résolution spatiale des images est limitée par la diffraction, c'est à dire qu'on ne peut pas observer de détails plus fins que le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser au niveau de la cible. A une distance de focalisation d'une centaine de microns, un objectif de microscope permet d'obtenir un diamètre de tâche de l'ordre de la longueur d'onde $\approx 1\mu m$, et donc d'obtenir des résolutions spatiales micrométriques. En revanche, si l'on souhaite imager une

cible à une distance supérieure à la distance de focalisation, il est parfois impossible d'ajuster le focus à cause de l'encombrement de l'objectif et la résolution de l'image est encore limitée par la diffraction. Au-delà d'une distance de focalisation de l'ordre du mètre, même avec une optique de dimension centimétrique, il est difficile d'obtenir un diamètre de tâche de diffraction, et donc une résolution, meilleure que millimétrique. Il serait donc intéressant, à courte comme à plus longue distance, de pouvoir reporter la haute résolution que l'on obtient en focalisant le faisceau laser avec une optique, afin de s'affranchir de la limite de diffraction.

L'imagerie à synthèse d'ouverture, bien connue dans le domaine radar, permet d'atteindre des résolutions spatiales au-delà de la limite de diffraction [12]. Prenons l'exemple de l'imagerie satellitaire radar qui utilise un rayonnement de longueur d'onde λ centimétrique pour imager des cibles situées à une distance d'observation h de plusieurs centaines de kilomètres. La taille typique W d'une antenne radar sur un satellite étant de l'ordre de quelques mètres, la taille de la tâche de diffraction au sol $D \approx \lambda h/W$ est alors de plusieurs kilomètres. Or, l'imagerie satellitaire radar fournit des images avec une résolution décimétrique [12]. Si l'on veut augmenter la résolution des images pour une longueur d'onde λ donnée et à une distance d'observation h fixe, le seul moyen est d'augmenter la taille de l'antenne W . Cependant, pour atteindre une résolution décimétrique, les satellites devraient se munir d'antennes mesurant plusieurs kilomètres, ce qui n'est absolument pas concevable techniquement. Le principe du radar à synthèse d'ouverture (SAR pour Synthetic Aperture Radar), par opposition au radar à ouverture réelle, a été établi en 1951 par Carl Wirley. Il utilise le déplacement relatif du radar par rapport à la cible à imager pour acquérir des données (amplitude et phase du signal renvoyé par la cible) selon différents angles de vue. Au final, tout se passe comme si le radar avait collecté toutes ces données en une seule fois grâce à une grande ouverture synthétique. La clé de cette technique réside dans le traitement des données acquises pour les différentes positions successives du radar. On appelle filtrage adapté le traitement du signal dédié à la synthèse d'ouverture qui permet, à partir de cet ensemble de données qui constituent "l'histoire" du signal renvoyé par la cible au cours du déplacement du radar, d'améliorer la résolution des images.

L'objectif de ce travail est de combiner la technique d'imagerie LOFI avec la synthèse d'ouverture pour augmenter la résolution des images en mettant à profit le balayage galvanométrique du laser sur la cible. Dans une première partie, nous allons présenter le principe opératoire de la synthèse d'ouverture dans le cas simple du balayage en translation. Puis nous analyserons le cas de la synthèse d'ouverture à géométrie angulaire, c'est à dire dans le cas du balayage galvanométrique.

Enfin, nous présenterons le dispositif d'imagerie LOFI à synthèse d'ouverture bidimensionnelle que nous illustrerons par des résultats numériques et expérimentaux permettant de conclure sur l'amélioration de la résolution des images par cette technique.

2.2 Principe de la synthèse d'ouverture

2.2.1 Objectif

Au chapitre 1, nous avons déterminé l'expression du signal LOFI, qui correspond à la valeur relative de la modulation de la puissance de sortie du laser par une faible quantité de lumière réinjectée, décalée à la pulsation Ω_e , provenant d'une cible de réflectivité effective R_e et située à une distance d_e (Eq.(1.5)). Considérons à présent la zone de la cible éclairée lorsqu'on fait l'acquisition d'un pixel de l'image et qui correspond au diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser au niveau de la cible, comme le montre le schéma simplifié de la Figure 2.1. On suppose que dans cette zone, la cible est composée de N points se comportant chacun comme une cible élémentaire orthotrope de réflectivité $R_{e,i}$ et localisée à une distance $d_{e,i}$ du laser. Le signal réinjecté est formé par l'interaction cohérente du champ électrique renvoyé par chaque cible ponctuelle et on peut donc réécrire sous forme discrète le signal LOFI (Eq.(1.5))

$$\frac{\Delta P_{out}}{P_{out}} = \sum_{i=1}^N 2\sqrt{R_{e,i}}G(\Omega_e) \cos\left(\Omega_e t - \frac{4\pi}{\lambda}d_{e,i} + \phi(\Omega_e)\right). \quad (2.1)$$

D'après l'Eq.(2.1), la démodulation du signal LOFI par la détection synchrone, dont le principe est décrit à l'annexe A, à la fréquence de décalage Ω_e nous donne les composantes en quadrature

$$p(R_{e,i}, d_{e,i}, N) = 2G(\Omega_e)P_{out} \sum_{i=1}^N \sqrt{R_{e,i}} \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}d_{e,i}\right), \quad (2.2a)$$

$$q(R_{e,i}, d_{e,i}, N) = 2G(\Omega_e)P_{out} \sum_{i=1}^N \sqrt{R_{e,i}} \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda}d_{e,i}\right). \quad (2.2b)$$

Pour éviter le problème de recouvrement de spectre induit par la démodulation (cf Annexe A) nous travaillons préférentiellement avec le signal LOFI complexe démodulé sous la forme

$$s(R_{e,i}, d_{e,i}, N) = 2G(\Omega_e)P_{out} \sum_{i=1}^N \sqrt{R_{e,i}} \exp\left(j\frac{4\pi}{\lambda}d_{e,i}\right). \quad (2.3)$$

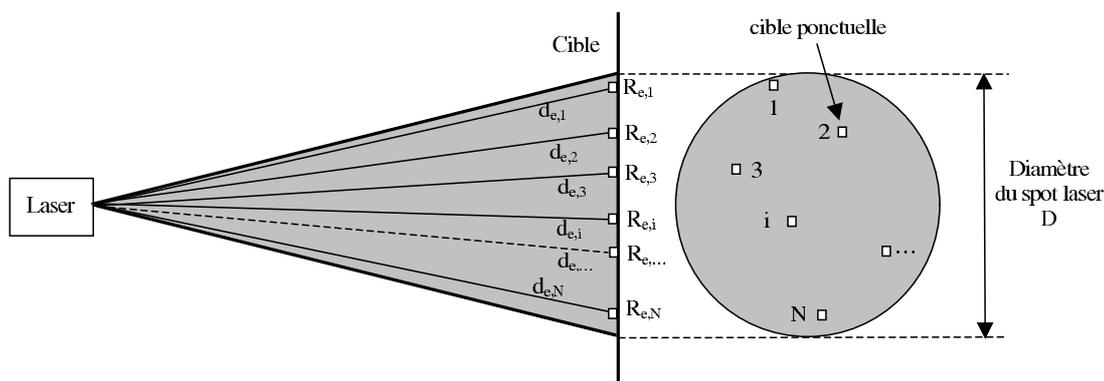


FIG. 2.1 – Schéma simplifié du laser éclairant la cible dont le motif est constitué de N cibles ponctuelles indexées de 1 à N . Dans une expérience LOFI standard, le signal réinjecté est formé par l'interaction cohérente du champ électrique renvoyé par chaque cible sans qu'on puisse dissocier chaque contribution. La résolution spatiale est fixée par le diamètre du faisceau laser D . Le but de la synthèse d'ouverture est d'aller au-delà de cette limite afin de pouvoir résoudre chaque cible individuelle incluse dans le diamètre du faisceau laser.

L'objectif de la synthèse d'ouverture est d'arriver à résoudre les N cibles ponctuelles contenues dans le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser, ce qui revient à atteindre une résolution spatiale au-delà de la limite de diffraction. Pour cela, nous allons mettre à profit le balayage qui induit un déplacement relatif de la source laser par rapport à la cible et qui permet de faire l'acquisition du signal LOFI $s(R_{e,i}, d_{e,i}, N)$ sous différents angles de vues. Tout se passe comme si on avait acquis le signal en une seule fois avec une plus grande ouverture de collection : c'est le principe de la synthèse d'ouverture. A partir du signal $s(R_{e,i}, d_{e,i}, N)$, il faut pouvoir séparer la contribution de chaque cible au cours du déplacement du laser. Nous allons dans un premier temps déterminer la signature d'une cible ponctuelle quelconque i caractérisée par son amplitude A_i , proportionnelle à la racine carrée de la réflectivité $R_{e,i}$ et par sa phase Φ_i , proportionnelle à la distance $d_{e,i}$.

2.2.2 Signature d'une cible ponctuelle

D'après l'Eq.(2.3) le signal LOFI complexe démodulé pour une cible i quelconque s'écrit

$$s_i(R_{e,i}, d_{e,i}, 1) = 2G(\Omega_e)P_{out}\sqrt{R_{e,i}}\exp\left(j\frac{4\pi}{\lambda}d_{e,i}\right). \quad (2.4)$$

La figure 2.2(a) représente le schéma de principe de la synthèse d'ouverture dans le cas simple d'un balayage en translation du laser par rapport à une cible ponctuelle i , à une distance

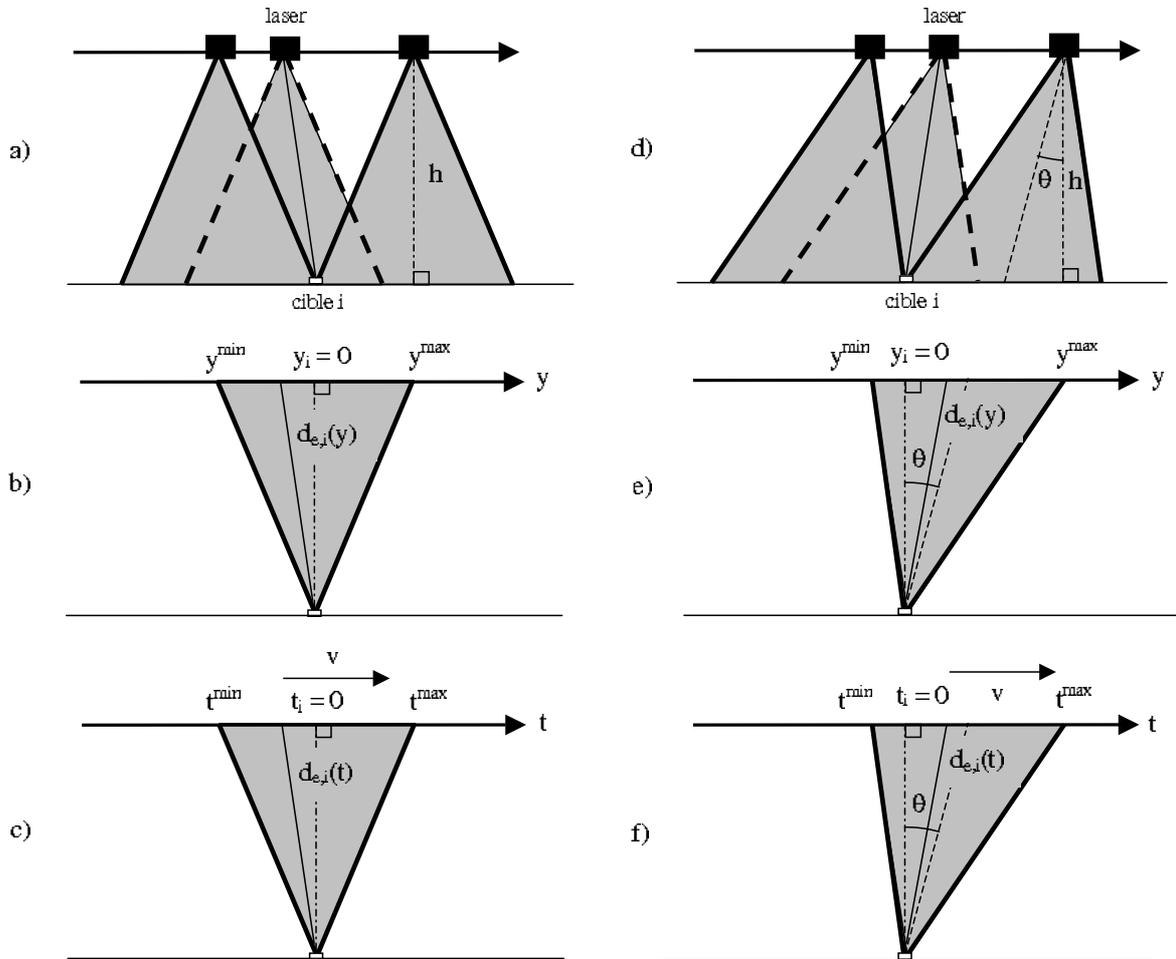


FIG. 2.2 – Schéma de principe de la synthèse d'ouverture pour un balayage en translation. a) différentes positions successives occupées par le laser par rapport à une cible ponctuelle i à une distance d'observation constante h . La flèche indique le sens de déplacement. b) Ouverture synthétisée, $d_{e,i}(y)$ est la distance entre la cible i de coordonnée $y_i = 0$ et le laser dont la position y est comprise entre les bornes d'éclairage y^{\min} et y^{\max} . c) Représentation temporelle dans le cas particulier d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v . d), e) et f) mêmes légendes respectives que a), b) et c) dans le cas d'un angle de visée θ non nul.

d'observation h . La zone grisée représente le champ d'illumination du laser pour différentes positions successives. Plus le champ d'observation est large, plus le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau au niveau de la cible est grand et plus la cible ponctuelle i est éclairée sur une distance importante de déplacement du laser. La figure 2.2(b) représente l'ouverture de collection synthétisée par le déplacement du laser par rapport à la cible. Pour une position y du laser, comprise entre les bornes d'éclairément y^{min} et y^{max} , par rapport à la cible localisée en $y_i = 0$, la distance laser-cible $d_{e,i}(y)$ s'écrit simplement

$$d_{e,i}(y) = \sqrt{h^2 + y^2}. \quad (2.5)$$

Dans l'hypothèse où $h \gg y$ (que l'on vérifie dans l'approximation du champ lointain), on peut écrire un développement limité au premier ordre

$$d_{e,i}(y) \approx h \left(1 + \frac{y^2}{2h^2} \right) = h + \frac{y^2}{2h}. \quad (2.6)$$

et on en déduit l'expression de la phase du signal renvoyé par la cible i en fonction de la position du laser

$$\Phi_i(y) = \frac{4\pi}{\lambda} d_{e,i}(y) = \frac{4\pi}{\lambda} h + \frac{2\pi}{\lambda h} y^2. \quad (2.7)$$

Par rapport à l'Eq.(1.9b), on retrouve la phase standard du signal LOFI qui correspond à une distance h entre le laser et la cible et on prend maintenant en compte le terme quadratique suivant qui, d'un point de vue ondulatoire, correspond à la courbure du front d'onde du faisceau laser au niveau de la cible.

Considérons maintenant le cas particulier représenté à la figure 2.2(c), d'un mouvement rectiligne uniforme du laser à la vitesse v par rapport à la cible i et à une distance d'observation h constante pour lequel on a la relation $y = vt$. La phase du signal renvoyé par la cible s'écrit alors en fonction du temps

$$\Phi_i(t) = \frac{4\pi}{\lambda} d_{e,i}(t) = \frac{4\pi}{\lambda} h + \frac{2\pi v^2}{\lambda h} t^2. \quad (2.8)$$

Il est commode d'interpréter le signal renvoyé par la cible en fonction de la position du laser

dans le domaine fréquentiel en dérivant la phase $\Phi_i(t)$ par rapport au temps

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta\Phi_i(t)}{\delta t} = \frac{2v^2}{\lambda h} t \quad (2.9)$$

On voit donc que la fréquence instantanée du signal renvoyé par la cible est modulée linéairement autour de la fréquence nulle¹ avec le taux de modulation

$$K = \frac{2v^2}{\lambda h} \quad (2.10)$$

Le signal LOFI correspond alors en terminologie anglaise à un *chirp* linéaire et en faisant l'hypothèse d'un éclairage uniforme et pour une cible i orthotrope, à partir de l'Eq.(2.4), on obtient l'expression

$$s_i(t) = 2G(\Omega_e)P_{out}\sqrt{R_{e,i}}e^{j(\Phi_0+\pi Kt^2)}. \quad (2.11)$$

où $\Phi_0 = 4\pi h/\lambda$ désigne la phase LOFI standard (Eq.(1.9b)) pour une distance laser-cible h . La signature de la cible ponctuelle i est donc caractérisée par l'amplitude $A_i = 2G(\Omega_e)P_{out}\sqrt{R_{e,i}}$ et la phase $\Phi_i(t)$ dont le paramètre caractéristique est le taux de modulation K . Ainsi, si l'imagerie LOFI standard est soit d'amplitude, soit de phase, l'imagerie LOFI à synthèse d'ouverture est à la fois d'amplitude pour obtenir la réflectivité de la cible, et de phase pour pouvoir la localiser à l'intérieur de la tâche de diffraction du faisceau laser.

2.2.3 Diamètre d'éclairage et angle de visée

Le diamètre d'éclairage correspond au diamètre D de la tâche de diffraction du faisceau laser au niveau de la cible (Figure 2.1), qui est délimité selon l'axe y par les bornes spatiales y^{min} et y^{max} (Figure2.2(b)). Le temps d'éclairage correspond alors au temps T pendant lequel la cible ponctuelle i a été éclairée par le faisceau laser, qui est borné par t^{min} et t^{max} (Figure2.2(c)). Dans le cas d'une ouverture d'émission rectangulaire, le diamètre d'éclairage et le temps d'éclairage valent [31]

$$D = y^{max} - y^{min} \propto \frac{\lambda h}{W}, \quad (2.12a)$$

$$T = t^{max} - t^{min} \propto \frac{\lambda h}{vW}. \quad (2.12b)$$

¹Si on ne démodule pas le signal LOFI, alors la fréquence instantanée $f(t)$ du signal renvoyé par la cible est modulée linéairement autour de la fréquence de décalage F_e

En imagerie laser, les faisceaux sont gaussiens, et l'ouverture d'émission est donc le waist ω_0 . La propagation libre² d'un faisceau gaussien de waist ω_0 sur une distance h aboutit donc à un diamètre de tâche de diffraction

$$D = y^{max} - y^{min} = \frac{2\lambda h}{\pi\omega_0}, \quad (2.13a)$$

$$T = t^{max} - t^{min} = \frac{2\lambda h}{\pi v\omega_0}. \quad (2.13b)$$

Dans le cas de référence d'une ouverture d'émission rectangulaire et dans le cas réel d'une ouverture d'émission gaussienne, le diamètre d'éclairage est proportionnel à la distance d'observation h , et inversement proportionnel à la dimension caractéristique de l'ouverture d'émission (W dans le cas d'une ouverture rectangulaire et ω_0 dans le cas d'une ouverture gaussienne). Cela signifie que plus le laser est éloigné de la cible et plus l'ouverture d'émission est petite, plus le faisceau diverge, donc plus la cible est éclairée sur un déplacement important du laser. Ces propriétés sont des conséquences directes du phénomène de diffraction qui limitent la résolution du système à ouverture réelle. En effet, dans une configuration statique, le diamètre d'éclairage fixe la plus petite dimension que l'on peut résoudre. Dans le cas de la synthèse d'ouverture, le problème est inversé : plus le diamètre d'éclairage est grand, plus on récupère d'informations sur la cible pour davantage de prises de vue du laser, et donc plus on peut la localiser avec précision.

L'angle de visée θ du faisceau laser indique la direction de l'axe optique par rapport à la verticale (Figure 2.2(d)). Il induit un décalage du centre de la tâche de diffraction au niveau de la cible dont l'expression est donnée par

$$\frac{y^{max} + y^{min}}{2} = h \tan \theta, \quad (2.14a)$$

$$\frac{t^{max} + t^{min}}{2} = \frac{h}{v} \tan \theta. \quad (2.14b)$$

Nous avons vu au paragraphe 1.3.3, que la projection de la vitesse d'une cible selon l'axe optique du laser induisait un effet Doppler que le laser détecte, et qui a pour conséquence de décaler sa fréquence optique d'une fréquence F_{dop} (Eq.(1.12)). Ainsi, on voit d'après la Figure

²dans le cas où l'on focalise avec une lentille, on peut toujours se ramener à une configuration équivalente en propagation libre avec un waist ω_{eq} et une distance d'observation h_{eq} [18]

2.2(f) que pour un angle de visée non nul (c.-à-d. pour une projection non nulle de la vitesse selon l'axe optique), le déplacement du laser à la vitesse constante v selon la direction y va induire un effet Doppler additionnel. Nous allons à présent étudier la réponse fréquentielle de la signature de la cible i afin d'identifier plus facilement le décalage Doppler et surtout la modulation linéaire de fréquence instantanée.

2.2.4 Réponse fréquentielle

Nous avons déterminé la signature temporelle de la cible i (Eq.(2.11))

$$s_i(t) = A_i(t)e^{j(\Phi_0 + \pi K t^2)}. \quad (2.15)$$

L'amplitude $A_i(t)$ dépend du temps, car on considère maintenant un éclairage non uniforme qui prend en compte le profil d'éclairage du faisceau. La transformée de Fourier du signal $s_i(t)$ s'écrit

$$S_i(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_i(t)e^{j(\Phi_0 + \pi K t^2)} e^{-2j\pi f t} dt = e^{j\Phi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} A_i(t)e^{j\pi K t^2} e^{-2j\pi f t} dt. \quad (2.16)$$

On peut reformuler cette expression sous forme factorisée

$$S_i(f) = e^{j\left(\Phi_0 - \frac{\pi f^2}{K}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} A_i(t)e^{j\pi K\left(t - \frac{f}{K}\right)^2} dt. \quad (2.17)$$

Pour calculer le terme intégral de l'Eq.(2.17), on utilise le théorème de la phase stationnaire [32], énoncé en annexe B, qui permet d'affirmer que la seule contribution non nulle à l'intégrale est celle à calculée au temps particulier $t = f/K$, qui correspond à l'instant où la fréquence instantanée du chirp s'annule. Partout ailleurs, la somme des alternances positives et négatives du signal oscillant convergent vers une valeur nulle. On obtient ainsi une expression approchée de la réponse fréquentielle du signal $s_i(t)$

$$S_i(f) \approx \frac{1}{\sqrt{K}} e^{j\left(\Phi_0 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi f^2}{K}\right)} A_i\left(\frac{f}{K}\right). \quad (2.18)$$

La phase fréquentielle comporte un terme constant $\Phi_0 + \frac{\pi}{4}$ et un terme quadratique $-\frac{\pi f^2}{K}$. On retrouve très schématiquement le résultat bien connu que la transformée de Fourier d'une gaussienne est aussi une gaussienne. On note également le résultat remarquable qui découle du théorème de la phase stationnaire que l'enveloppe de la réponse fréquentielle du chirp a même

allure que l'enveloppe du chirp temporel lui-même. Nous allons maintenant illustrer ces résultats dans le cas idéal d'une enveloppe $A_i(t)$ rectangulaire puis dans le cas réel d'une enveloppe gaussienne.

2.2.4.1 Cas d'une enveloppe rectangulaire

L'éclairement est alors uniforme entre les bornes t^{min} et t^{max} et nul à l'extérieur et l'expression du signal $s_i(t)$ s'écrit donc (Eq.(2.11))

$$s_i(t) = A_i e^{j\Phi_i(t)} \quad \text{si } t^{min} < t < t^{max}, \quad (2.19a)$$

$$= 0 \quad \text{sinon.} \quad (2.19b)$$

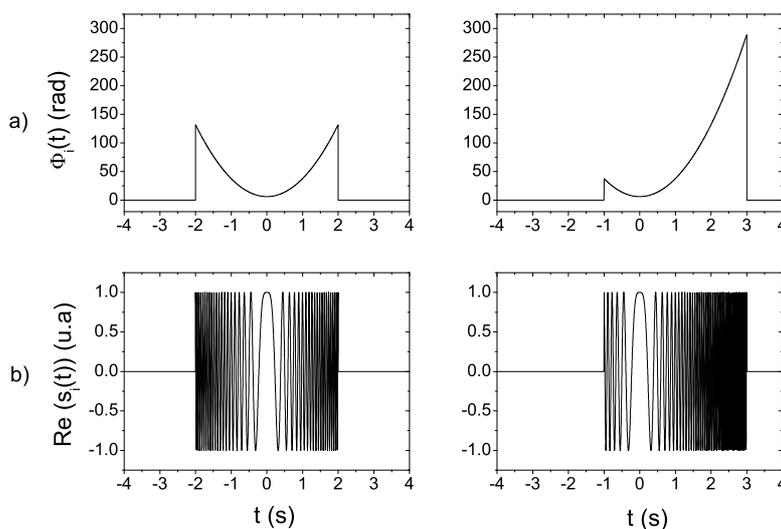


FIG. 2.3 – Réponse temporelle $s_i(t)$ rectangulaire pour une cible i ponctuelle en $t_i = 0$. a) phase $\Phi_i(t)$, c) partie réelle de $s_i(t)$. $K=10 \text{ s}^{-2}$, $\Phi_0=1 \text{ rad}$, $A_i=1 \text{ u.a.}$, $T=4 \text{ s}$. A gauche : $\theta = 0$, $t^{min}=-2 \text{ s}$, $t^{max}=2 \text{ s}$. A droite : $\theta \neq 0$, $t^{min}=-1 \text{ s}$, $t^{max}=3 \text{ s}$.

Les figures 2.3(a) et (b) représentent respectivement la phase $\Phi_i(t)$ et la partie réelle du signal $s_i(t)$ pour une enveloppe $A_i(t)$ rectangulaire, à gauche dans le cas où l'angle de visée est nul ($\theta = 0$, voir Figure 2.2(c)) et à droite dans le cas où l'angle de visée est non nul ($\theta \neq 0$, voir Figure 2.2(f)). On remarque que dans les deux cas, le sommet de la parabole $\Phi_i(t)$ indique la

position de la cible en $t_i=0$. D'après l'Eq.(2.18), la réponse fréquentielle $S_i(f)$ a pour expression

$$S_i(f) \approx \frac{A_i}{\sqrt{K}} e^{j\left(\Phi_0 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi f^2}{K}\right)} \quad \text{si } Kt^{min} < f < Kt^{max}, \quad (2.20a)$$

$$= 0 \quad \text{sinon.} \quad (2.20b)$$

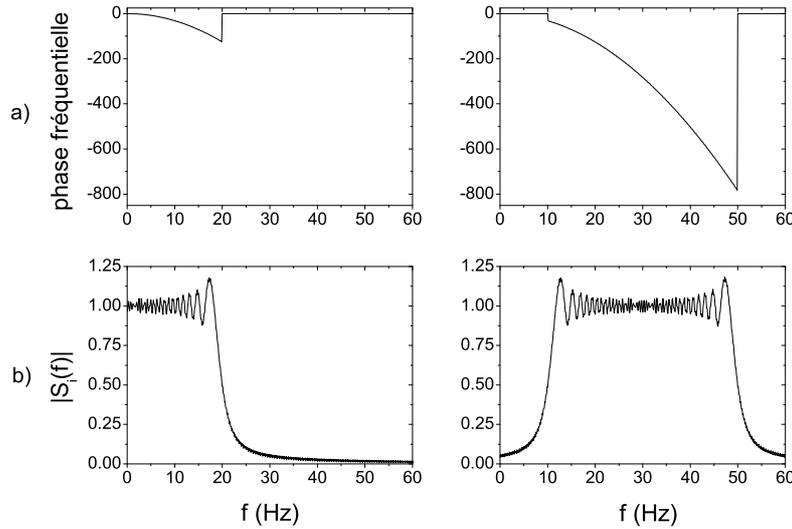


FIG. 2.4 – Réponse fréquentielle $S_i(f)$ pour une cible i ponctuelle en $t_i = 0$ et pour une enveloppe rectangulaire. a) phase, b) module normalisé. $K=10 \text{ s}^{-2}$, $A_i=1 \text{ u.a.}$, $T=4 \text{ s}$. A gauche : $\theta = 0$, $t^{min} = -2\text{s}$, $t^{max} = 2\text{s}$, $B=40 \text{ Hz}$, $F_{dop}=0 \text{ Hz}$. A droite : $\theta \neq 0$, $t^{min} = 1 \text{ s}$, $t^{max} = 5 \text{ s}$, $B=40 \text{ Hz}$, $F_{dop}=30 \text{ Hz}$.

Les figures 2.4(a) et (b) représentent respectivement la phase de la réponse fréquentielle $S_i(f)$ et le module normalisé de son spectre $|S_i(f)|$, à gauche dans le cas où l'angle de visée est nul ($\theta = 0$) et à droite le cas où l'angle de visée est non nul ($\theta \neq 0$). Le profil de la phase fréquentielle est parabolique comme le prédit l'Eq.(2.18). L'allure du module du spectre s'apparente à une porte de largeur B centrée sur la fréquence de décalage Doppler F_{dop} dont les expressions sont définies par

$$B = K(t^{max} - t^{min}), \quad (2.21a)$$

$$F_{dop} = K \left(\frac{t^{max} + t^{min}}{2} \right). \quad (2.21b)$$

La largeur de bande B est égale au produit du taux de modulation K de la fréquence temporelle instantanée $f(t)$ par le temps d'éclairement $T = t^{max} - t^{min}$. La fréquence centrale F_{dop} correspond au décalage de fréquence induit par l'effet Doppler lorsque l'angle de visée θ est non nul. D'après les Eqs.(2.10), (2.12b) et (2.14b), on en déduit les expressions de B et F_{dop} en fonction des grandeurs physiques

$$B = \frac{2v}{W}, \quad (2.22a)$$

$$F_{dop} = \frac{2v}{\lambda} \tan \theta. \quad (2.22b)$$

On retrouve bien l'expression de la fréquence de décalage Doppler F_{dop} exprimée par l'Eq.(1.12) si l'on se place dans l'approximation des petits angles, c'est à dire $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$.

2.2.4.2 Cas d'une enveloppe gaussienne

L'expression du signal $s_i(t)$ apodisé par une enveloppe gaussienne de largeur caractéristique du temps d'éclairement T et centré sur le milieu du faisceau laser s'écrit

$$s_i(t) = A_i \exp \left[- \left(\frac{t - \frac{t^{max} + t^{min}}{2}}{\frac{t^{max} - t^{min}}{2}} \right)^2 \right] \exp(j\Phi_i(t)). \quad (2.23)$$

Les Figures 2.5(a) et (b) représentent respectivement la phase $\Phi_i(t)$ et la partie réelle du signal $s_i(t)$ pour une enveloppe $A_i(t)$ gaussienne à gauche dans le cas où l'angle de visée est nul ($\theta = 0$) et à droite dans le cas où l'angle de visée est non nul ($\theta \neq 0$). On voit que la position de la cible correspond toujours au sommet de la parabole. Contrairement aux Figures 2.3, les courbes $\Phi_i(t)$ et $s_i(t)$ ne sont pas tronquées car la gaussienne est une fonction définie de $-\infty$ à $+\infty$.

D'après l'Eq.(2.18), la réponse fréquentielle $S_i(f)$ a pour expression

$$S_i(f) = \frac{A_i}{\sqrt{K}} \exp \left[- \left(\frac{f - \left[F_i + K \left(\frac{t^{max} + t^{min}}{2} \right) \right]}{\frac{K(t^{max} - t^{min})}{2}} \right)^2 \right] \exp \left[j \left(\Phi_0 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi f^2}{K} \right) \right]. \quad (2.24)$$

Les Figures 2.6(a) et (b) illustrent respectivement la phase de la réponse fréquentielle $S_i(f)$ et le module normalisé de son spectre gaussien $|S_i(f)|$. La phase a toujours un profil quadratique et le module du spectre s'apparente à une gaussienne de largeur caractéristique B (Eq.(2.21a))

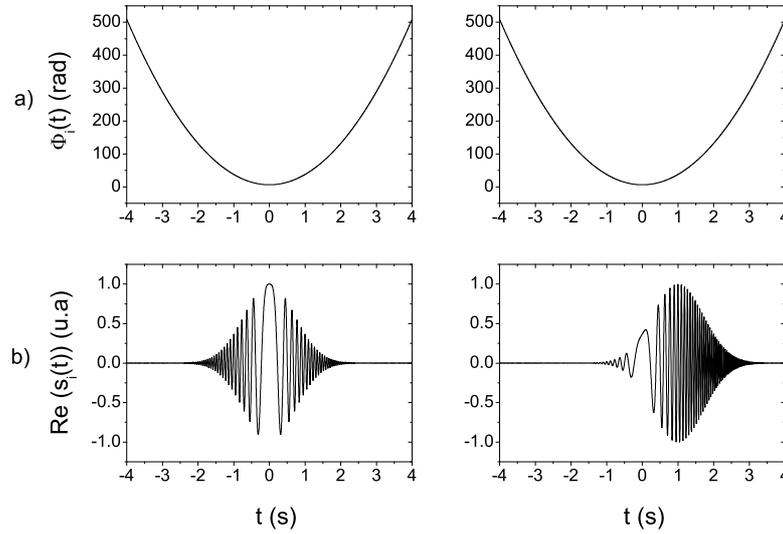


FIG. 2.5 – Réponse temporelle $s_i(t)$ à enveloppe gaussienne pour une cible i ponctuelle en $t_i = 0$. a) phase $\Phi_i(t)$, b) partie réelle de $s_i(t)$. $K=10 \text{ s}^{-2}$, $\Phi_0=1 \text{ rad}$, $A_i=1 \text{ u.a.}$, $T=2 \text{ s}$. A gauche : $\theta = 0$, $t^{\min}=-1 \text{ s}$, $t^{\max}=1 \text{ s}$. A droite : $\theta \neq 0$, $t^{\min}=0 \text{ s}$, $t^{\max}=2 \text{ s}$.

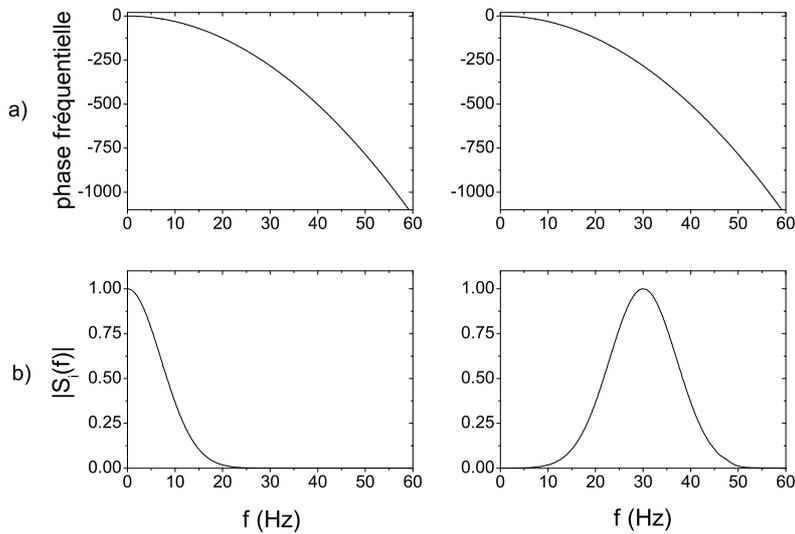


FIG. 2.6 – Réponse fréquentielle $S_i(f)$ pour une cible ponctuelle i en $t_i = 0$ et pour une enveloppe gaussienne. a) phase, b) module normalisé. $K=10 \text{ s}^{-2}$, $A_i=1 \text{ u.a.}$, $T=2 \text{ s}$. A gauche : $\theta = 0$, $t^{\min}=-1 \text{ s}$, $t^{\max}=1 \text{ s}$, $B=20 \text{ Hz}$, $F_{\text{dop}}=0 \text{ Hz}$. A droite : $\theta \neq 0$, $t^{\min}=2 \text{ s}$, $t^{\max}=4 \text{ s}$, $B=20 \text{ Hz}$, $F_{\text{dop}}=30 \text{ Hz}$.

et centrée sur la fréquence Doppler F_{dop} (Eq.(2.21b)). D'après les Eqs.(2.10), (2.12b) et (2.14b), on en déduit à nouveau les expressions des paramètres fréquentiels B et F_{dop} en fonction des grandeurs physiques pour une enveloppe gaussienne

$$B = \frac{4v}{\pi\omega_0}, \quad (2.25a)$$

$$F_{dop} = \frac{2v}{\lambda} \tan \theta. \quad (2.25b)$$

On vérifie que B dépend toujours linéairement de la vitesse de déplacement et est inversement proportionnel à la taille de l'ouverture caractéristique. On vérifie également que l'expression de la fréquence F_{dop} est la même que dans le cas d'une enveloppe rectangulaire, ce qui est cohérent car le décalage Doppler ne dépend pas du profil du faisceau, mais uniquement de l'angle d'inclinaison de l'axe de visée.

Nous connaissons à présent la signature temporelle et fréquentielle de la cible ponctuelle i localisée en $t_i = 0$. Il est facile d'en déduire la signature temporelle de n'importe quelle autre cible j en considérant une translation

$$s_j(t) = \frac{A_j}{A_i} s_i(t - t_j) = s_i(t) \star \frac{A_j}{A_i} \delta(t - t_j). \quad (2.26)$$

où $\delta(t)$ est une distribution de dirac et le rapport A_j/A_i exprime le fait que toutes les cibles ne renvoient pas la même quantité de lumière, donc que l'amplitude du signal LOFI correspondant à chaque cible est différente. La signature en fréquence de la cible j est alors donnée par

$$TF[s_i(t - t_i)] = \frac{A_j}{A_i} TF[s_i(t)].TF[\delta(t - t_i)] = \frac{A_j}{A_i} S_i(f) e^{2j\pi f t_i}. \quad (2.27)$$

Nous allons maintenant étudier comment filtrer la signature de chaque cible du reste du signal pour la localiser à l'intérieur du diamètre de la tâche de diffraction.

2.2.5 Filtrage adapté

Le filtrage adapté est une technique courante en traitement du signal qui consiste à maximiser le signal sur bruit en comprimant l'énergie d'un signal temporel sur une durée très courte [33]. On s'en sert principalement pour comprimer des impulsions temporelles en radar afin d'augmenter la résolution des écholocalisations [12]. L'adjectif "adapté" signifie ici que l'on cherche à adapter

le filtre $h(t)$ pour qu'il corresponde au mieux à la signature $s_i(t)$ et que la fonction de corrélation $g_i(t)$ définie de la manière suivante soit alors maximale

$$g_i(t) = s_i(t) \star h(t). \quad (2.28)$$

On montre que le filtre optimal a pour expression [12, 31]

$$h(t) = s_i^*(-t). \quad (2.29)$$

La corrélation d'un signal chirpé "en accordéon" (voir Figure 2.3(b)) avec ce même signal conjugué et retourné dans le temps est donc une auto-corrélation qui va être non nulle sur une fenêtre très étroite. Au maximum de la corrélation $g_i(t)$ correspond l'accord optimal entre la phase du filtre et la phase du signal $s_i(t)$, c'est à dire que les sommets des deux paraboles se correspondent, et on en déduit alors la position temporelle de la cible avec une grande précision. Nous travaillerons préférentiellement dans le domaine fréquentiel, car d'après les propriétés de la Transformée de Fourier, cette opération de filtrage s'effectue simplement comme un produit

$$TF[g_i(t)] = TF[s_i(t)].TF[h(t)], \quad (2.30a)$$

$$G_i(f) = S_i(f)H(f), \quad (2.30b)$$

$$= S_i(f)S_i^*(f), \quad (2.30c)$$

$$= |S_i(f)|^2 = \frac{1}{K} \left[A_i \left(\frac{f}{K} \right) \right]^2. \quad (2.30d)$$

La transformée de Fourier inverse de l'Eq.(2.30d) donne l'expression du signal filtré

$$g_i(t) = \frac{1}{K} TF^{-1} \left\{ \left[A_i \left(\frac{f}{K} \right) \right]^2 \right\} \quad (2.31)$$

2.2.5.1 Cas d'une enveloppe rectangulaire

D'après l'analyse de Fourier d'une fonction porte, le filtrage adapté de l'expression (2.19) donne

$$g_i(t) = A_i^2 T \operatorname{sinc}(\pi Bt) \exp(2j\pi F_{dop}t). \quad (2.32)$$

Le filtrage adapté permet donc de transformer le signal $s_i(t)$ de durée T en un sinus cardinal dont la largeur du lobe centrale est égale à $2/KT$ (Figure 2.7 de gauche). On définit la compression temporelle comme le rapport de la durée du signal $s_i(t)$ avant et après filtrage adapté. Plus cette compression est importante, plus on améliore la précision avec laquelle on localise la position temporelle de la cible. On retrouve ainsi la remarque faite précédemment que plus la cible est éclairée longtemps et avec un taux de modulation élevé, meilleure est la compression, donc meilleure est la résolution.

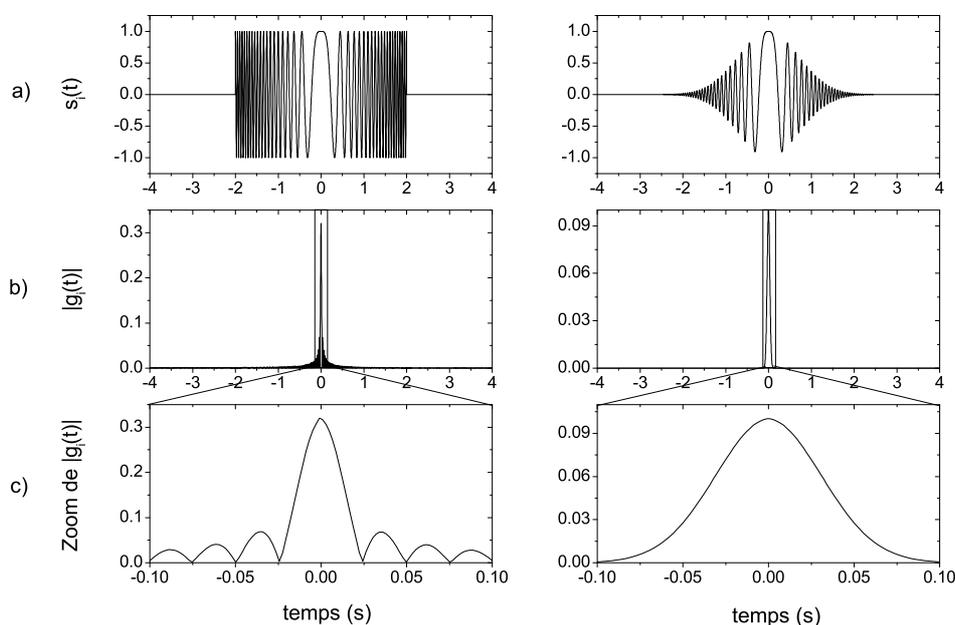


FIG. 2.7 – Filtrage adapté du signal $s_i(t)$. a) signal $s_i(t)$, b) module du signal filtré $|g_i(t)|$, c) zoom du signal $|g_i(t)|$. $K=10s^{-2}$, $F_{dop}=0$ Hz, $\Phi_0=1$ rad, $A_i=1$ u.a. A gauche, enveloppe rectangulaire : $T=4s$. A droite, enveloppe gaussienne : $T=2s$.

2.2.5.2 Cas d'une enveloppe gaussienne

La transformée de Fourier inverse d'une gaussienne est toujours une gaussienne et on peut donc écrire le signal (2.23) après filtrage sous la forme

$$g_i(t) = A_i^2 \sqrt{\frac{\pi}{8}} T \exp \left[-2 \left(\frac{\pi B}{4} \right)^2 t^2 \right] \exp (2j\pi F_{dop} t). \quad (2.33)$$

Le filtrage adapté permet de comprimer le signal $s_i(t)$ à enveloppe gaussienne de largeur

caractéristique T en une gaussienne $g_i(t)$ de largeur caractéristique $8/\pi KT$ (Figure 2.7 de droite). A temps d'éclairement T et à taux de modulation K égaux, on trouve que la compression dans le cas d'une enveloppe gaussienne est moins bonne que dans le cas d'une enveloppe rectangulaire. Cela est dû à l'effet d'apodisation de la gaussienne, car à temps d'éclairement égaux, l'énergie du signal rectangulaire est supérieure à l'énergie de la gaussienne.

2.2.5.3 Application au cas général

Maintenant que nous avons étudié le principe du filtrage adapté dans le cas d'une cible ponctuelle i , nous allons en déduire le résultat dans le cas général, qui on le rappelle, correspond à une somme discrète de N cibles ponctuelles contenues dans le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser. Le filtrage adapté du signal LOFI démodulé s'écrit de la manière suivante

$$g(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) \star h(t). \quad (2.34)$$

Pour calculer cette corrélation, on détermine le filtre adapté $h(t)$ une fois pour toute pour une cible ponctuelle i quelconque, par exemple la cible indexée 1, et on a alors $h(t) = s_1^*(-t)$. Pour expliciter le résultat dans le cas général, à partir de l'Eq.(2.26), on décompose la somme discrète

$$g(t) = s_1(t) \star \left(\frac{A_1}{A_i} \delta(t - t_1) + \frac{A_2}{A_i} \delta(t - t_2) + \dots + \frac{A_i}{A_i} \delta(t - t_i) + \dots + \frac{A_N}{A_i} \delta(t - t_N) \right) \star s_1^*(-t) \quad (2.35a)$$

$$= g_1(t) \star \left(\frac{A_1}{A_1} \delta(t - t_1) + \frac{A_2}{A_1} \delta(t - t_2) + \dots + \frac{A_i}{A_1} \delta(t - t_i) + \dots + \frac{A_N}{A_1} \delta(t - t_N) \right) \quad (2.35b)$$

$$= \frac{A_1}{A_1} g_1(t - t_1) + \frac{A_2}{A_1} g_1(t - t_2) + \dots + \frac{A_i}{A_1} g_1(t - t_i) + \dots + \frac{A_N}{A_1} g_1(t - t_N) \quad (2.35c)$$

L'Eq.(2.35c) montre que le résultat du filtrage adapté du signal LOFI dans le cas général de N cibles ponctuelles est la somme des résultats du filtrage adapté obtenu pour une cible ponctuelle quelconque, par exemple la cible indexée 1, translaté sur la position temporelle respective de chaque cible et pondéré par l'amplitude de chaque cible. Le calcul de la fonction de corrélation pour une cible quelconque i que nous avons mené correspond donc à un cas de référence qui permet de déterminer le filtre adapté. Ce filtre adapté $h(t)$ a ensuite pour entrée le signal LOFI $s(t)$, constitué de la contribution mélangée des N cibles ponctuelles et il joue le rôle "d'identificateur de signatures de cibles ponctuelles" pour générer en sortie un signal qui dissocie

temporellement la position de chaque cible. La figure 2.8(a) représente la partie réelle du signal $s(t)$ dans le cas de deux cibles ponctuelles de même réflectivité et localisées en t_1 et t_2 de telle manière qu'elles soient décalées d'un temps inférieur au temps d'éclairage (i.e. $|t_1 - t_2| < T$). On observe la somme des réponses $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ et on ne peut alors pas résoudre les deux cibles. La figure 2.8(b) montre le résultat du signal $g(t)$ après filtrage adapté : on observe deux pics qui correspondent aux maxima de corrélation et donc aux positions temporelles t_1 et t_2 des deux cibles. En effet, si l'on reprend l'Eq.(2.35c) pour $N = 2$, dans le cas où les amplitudes $A_1 = A_2$, on obtient

$$g(t) = g_1(t - t_1) + g_1(t - t_2) \quad (2.36)$$

La figure 2.8(c) montre un zoom de la figure 2.8(b) et on constate que l'allure de chaque pic est identique et est une duplication des résultats présentés à la figure 2.7(c).

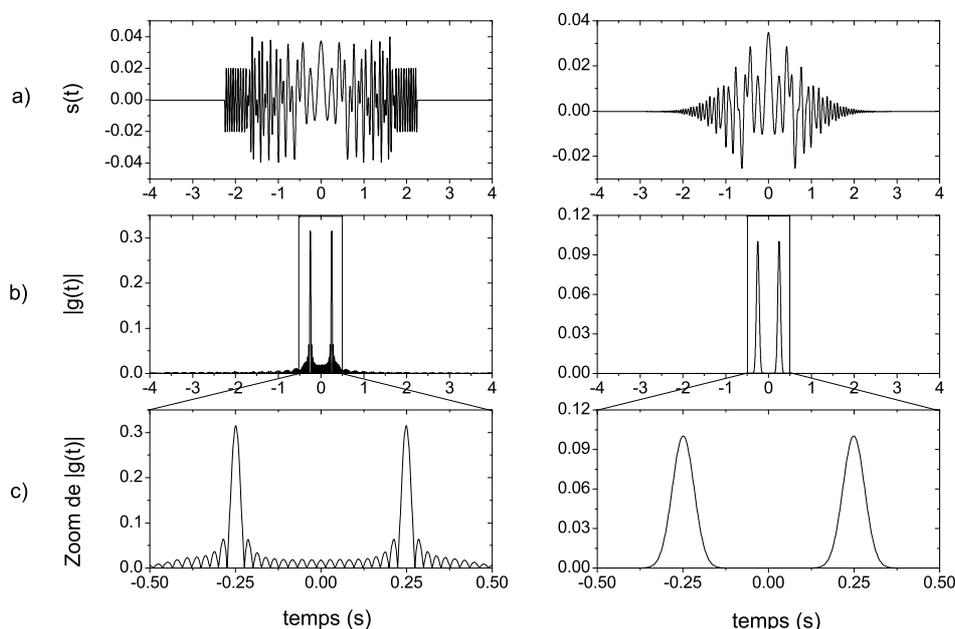


FIG. 2.8 – Filtrage adapté dans le cas de deux cibles ponctuelles ($N=2$). a) signal brut $s(t)$, b) module du signal filtré $|g(t)|$, c) zoom du signal $|g(t)|$. $K=10s^{-2}$, $\Phi_0=1$ rad, $A_1=1$ u.a., $A_2=1$ u.a., $t_1=-0,25s$, $t_2=0,25s$. A gauche, enveloppe rectangulaire : $T=4s$. A droite, enveloppe gaussienne : $T=2s$.

Nous avons montré dans ce paragraphe comment le filtrage adapté permet de localiser, à partir du signal mesuré pour différentes positions du laser lors de la synthèse d'ouverture, l'ensemble des cibles contenues à l'intérieur du diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser. Nous allons à présent définir quel est le critère de résolution en synthèse d'ouverture, c'est à dire l'écart minimal entre deux cibles que l'on peut résoudre avec cette technique.

2.2.6 Résolution

Le critère de résolution en synthèse d'ouverture va définir la capacité à séparer deux pics de corrélation correspondant à la position de deux cibles ponctuelles. Puisque nous avons étudié en parallèle le cas de référence d'une enveloppe rectangulaire, et le cas réel d'une enveloppe gaussienne, il convient de trouver un critère de résolution qui permette de comparer objectivement les résultats du filtrage adapté pour une enveloppe rectangulaire et une enveloppe gaussienne.

2.2.6.1 Cas d'une l'enveloppe rectangulaire

D'après l'Eq.(2.32), on définit comme critère la demi-largeur du lobe central du sinus cardinal de la fonction de corrélation

$$\delta t = \frac{1}{B}. \quad (2.37)$$

A partir de la résolution temporelle (Eq.(2.37)) et l'expression de B donnée par l'Eq.(2.22a), on en déduit la résolution spatiale après synthèse d'ouverture

$$\delta y = v\delta t = \frac{W}{2}. \quad (2.38)$$

La résolution après synthèse d'ouverture dans le cas d'un balayage en translation ne dépend donc ni de la longueur d'onde, ni de la distance d'observation et est proportionnelle à la taille caractéristique de l'ouverture W , ce qui est le contraire de la résolution d'un système optique classique. Surtout, on montre que la résolution après synthèse d'ouverture est meilleure que la limite de diffraction quand on a la condition $\delta y < D$ qui se traduit par

$$\frac{W}{2} < \frac{\lambda h}{W} \quad (2.39)$$

2.2.6.2 Cas d'une l'enveloppe gaussienne

D'après l'Eq.(2.33), on définit le critère propre suivant, que l'on va justifier à l'aide de la Figure 2.9

$$\delta t = \frac{4}{\pi B}. \quad (2.40)$$

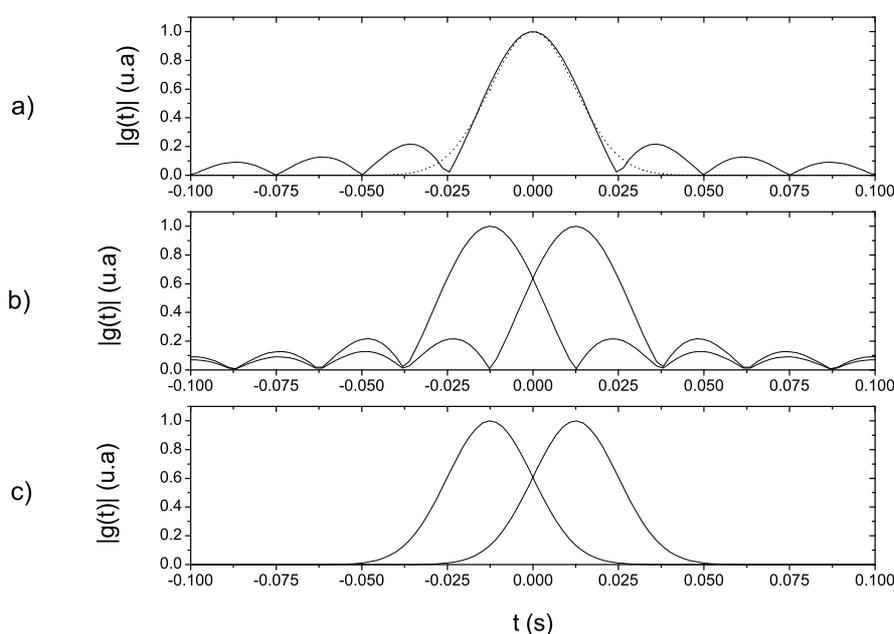


FIG. 2.9 – Critère de résolution en synthèse d'ouverture après filtrage adapté. a) comparaison du profil du module de la réponse filtré $|g(t)|$ normalisée dans le cas d'une enveloppe rectangulaire (ligne) et d'une enveloppe gaussienne (pointillés) pour $\delta t = 0,025$ s. b) limite de résolution selon le critère de Rayleigh dans le cas d'une enveloppe rectangulaire. Positions temporelles des deux cibles : $t_1 = t_2 = \delta t / 2 = 1,25$ ms. c) limite de résolution dans le cas d'une enveloppe gaussienne. Positions temporelles des deux cibles : $t_1 = t_2 = \delta t / 2 = 1,25$ ms.

Nous avons fait le choix de calquer le critère de résolution de la gaussienne sur celui du sinus cardinal pour nous placer dans les conditions proche du critère de Rayleigh, comme le montre la Figure 2.9(a). Le lobe central du sinus cardinal et la gaussienne épousent une forme très semblable, ce qui permet d'affirmer de manière satisfaisante et objective que le critère de résolution aboutit, pour les deux expressions (Eq.(2.37) et (2.40)), à un résultat comparable. La

Figure 2.9(b) montre la fonction de corrélation $|g(t)|$ normalisée dans le cas où il y a deux cibles ($N=2$) à résoudre, en limite de résolution et pour une enveloppe rectangulaire. Le maximum d'un lobe de sinus cardinal correspond au premier zéro de l'autre. La Figure 2.9(c) représente la fonction de corrélation $|g(t)|$ normalisée dans le cas où il y a deux cibles ($N=2$) à résoudre, en limite de résolution et pour une enveloppe gaussienne. D'après le critère de résolution propre (2.40) : le recouvrement des deux courbes est proche de celui des sinus cardinaux. A partir de la résolution temporelle (Eq.(2.40)) et l'expression de B donnée par l'Eq.(2.25a), on obtient la résolution spatiale en synthèse d'ouverture

$$\delta y = v\delta t = \omega_0. \quad (2.41)$$

Dans le cas d'un faisceau gaussien, la résolution après synthèse d'ouverture pour un mouvement relatif de translation entre le laser et la cible, est déterminée par la taille du waist ω_0 qui, on le rappelle, joue à la fois le rôle d'émetteur et de récepteur dans une expérience LOFI. La résolution est meilleure que la limite de diffraction pour la condition $\delta y \ll D$ qui, d'après l'Eq.(2.13a), se traduit par

$$\omega_0 < \frac{2\lambda h}{\pi\omega_0}. \quad (2.42)$$

2.2.7 Résumé des opérations

Pour conclure ce paragraphe introductif destiné à présenter le principe de la synthèse d'ouverture, nous nous proposons de résumer la suite des opérations à réaliser étapes par étapes

1. Calcul de la distance laser-cible $d_{e,i}$ en fonction de la position du laser pour déterminer la signature d'une cible ponctuelle,
2. Détermination du filtre adapté $h(t)$ et calcul de sa transformée de Fourier $H(f)$,
3. Acquisition pour chaque position du laser des composantes en quadratures $p(t)$ et $q(t)$ du signal LOFI démodulé, écriture sous forme $s(t) = p(t) + jq(t)$ et calcul de sa transformée de Fourier $S(f)$,
4. Filtrage adapté du signal LOFI dans le domaine fréquentiel en calculant le produit $G(f) = S(f)H(f)$, puis affichage de la transformée de Fourier inverse du signal filtré $TF[G(f)]^{-1}$.

2.3 Synthèse d'ouverture à géométrie angulaire

2.3.1 Balayage galvanométrique

Dans la partie précédente, nous avons présenté le principe de la synthèse d'ouverture dans le cas où le balayage, assurant un déplacement relatif entre le laser et la cible, est une translation, et en particulier lorsque celle-ci s'effectue à vitesse constante. Or, pour réaliser les images LOFI, nous allons effectuer un balayage galvanométrique du laser sur la cible. Nous parlons de balayage galvanométrique pour désigner le dispositif de scanner optique à moteur galvanométrique qui permet de déplacer le faisceau laser sur la cible avec un mouvement rotatif et dont le principe est le suivant : le faisceau laser incident est dirigé sur un miroir incliné et pivotant qui le réfléchit sur la cible. La rotation du miroir fait varier l'angle d'incidence du faisceau et par conséquent l'angle de réflexion de la même quantité, ce qui a pour effet de déplacer le faisceau laser sur la cible. On contrôle ainsi la position du laser par rapport à la cible grâce à la position angulaire du miroir, commandée par une tension électrique. L'avantage de cette méthode est que le laser et la cible sont immobiles, ce qui limite les vibrations mécaniques qui sont sources de perturbation des mesures interférométriques. Nous nous proposons donc dans cette partie de tout d'abord déterminer l'expression de la distance entre le laser et une cible ponctuelle i en fonction de la position du miroir, afin d'en déduire le filtre adapté au mouvement de rotation du scanner.

2.3.2 Analogie espace-angle des signatures

La Figure 2.10 représente le schéma de principe de la synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique. Par rapport à la Figure 2.2 qui décrit le schéma de principe de la synthèse d'ouverture à balayage en translation, on passe d'une géométrie axiale (où la variable principale est la position du laser y) à une géométrie angulaire (où la variable principale est l'angle α repérant la position du miroir). L'origine du repère (x,y) est définie par le centre de rotation du miroir. La position de référence du miroir est $\epsilon=45^\circ$ et on suppose que l'axe optique du laser est toujours parallèle à la direction y . Il est pratique de représenter virtuellement le symétrique du laser par rapport au miroir afin de "déplier" l'axe optique. Le laser a pour coordonnées $(x_L=L, y_L=0)$ où L est la distance laser-miroir et la cible a pour coordonnées $(x_i=-l, y_i=0)$ où l est la distance miroir-cible. La Figure 2.10(b) illustre l'effet du balayage en rotation : lorsque le miroir tourne d'un angle α , tout se passe comme si le laser s'était déplacé d'un angle 2α sur un arc de cercle de rayon L . Le champ d'illumination du laser s'est alors déplacé au niveau de la cible selon la

direction y : nous allons ainsi réaliser une opération de synthèse d'ouverture selon la direction de balayage y .

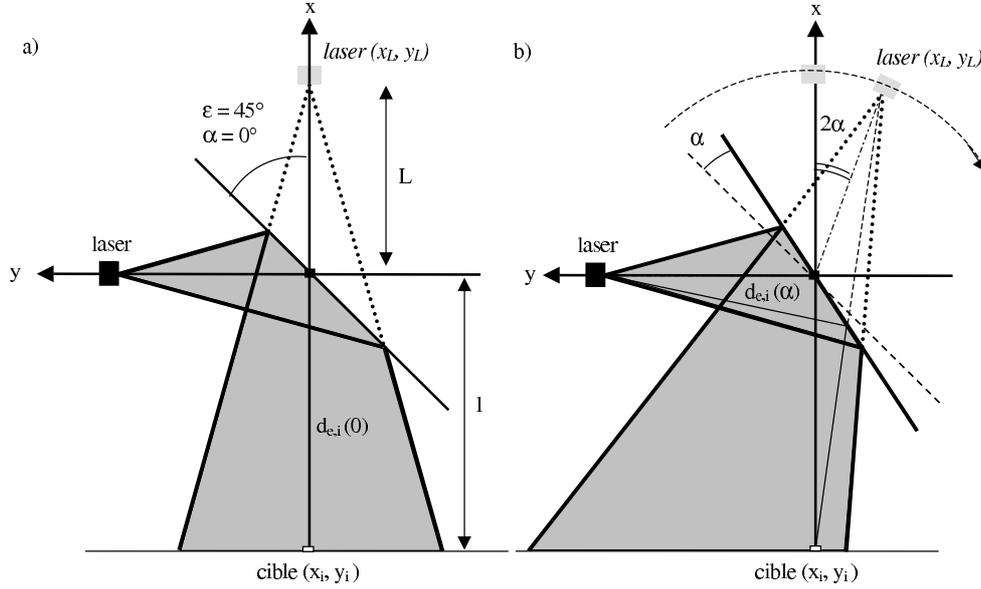


FIG. 2.10 – Schéma de principe de la synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique. a) Position de référence du miroir ($\epsilon=45^\circ$) et représentation virtuelle du symétrique du laser par rapport au miroir. L'origine du repère (x, y) est le centre de rotation du miroir. Coordonnées du laser : $(x_L=L, y_L=0)$, coordonnées de la cible : $(x_i=-l, y_i=0)$. b) Balayage en rotation : lorsque la position du miroir varie d'un angle α , tout se passe comme si le laser s'était déplacé d'un angle 2α sur un arc de cercle de rayon L . $d_{e,i}(\alpha)$ représente la distance laser-cible en fonction de l'angle de rotation α .

Pour une cible ponctuelle i localisée en $y_i=0$, la distance laser-cible s'écrit

$$d_{e,i}(\alpha) = \sqrt{(x_L(\alpha) + l)^2 + (y_L(\alpha))^2}. \quad (2.43)$$

Pour déterminer l'expression des coordonnées du laser, on fait l'approximation de petites variations d'angles α autour de sa position de référence et on a alors

$$x_L(\alpha) \approx L(1 - 2\alpha^2), \quad (2.44a)$$

$$y_L(\alpha) \approx 2L\alpha. \quad (2.44b)$$

En remplaçant les coordonnées du laser et de la cible par leur expression, on obtient au

premier ordre

$$d_{e,i}(\alpha) \approx \sqrt{(L+l)^2 - (2\alpha)^2 Ll}. \quad (2.45)$$

En faisant un développement limité au premier ordre dans le cadre de notre approximation des petits angles α et en posant la distance d'observation $h = L + l$, on a alors

$$d_{e,i}(\alpha) \approx h - \frac{1}{2} \frac{(2\alpha)^2 Ll}{h}. \quad (2.46)$$

et on en déduit la phase du signal renvoyé par la cible i en fonction de la position angulaire du miroir

$$\Phi_i(\alpha) = \frac{4\pi}{\lambda} d_{e,i}(\alpha) = \frac{4\pi}{\lambda} h - \frac{8\pi Ll}{\lambda h} \alpha^2. \quad (2.47)$$

Par rapport à l'Eq.(2.7), on retrouve une expression très similaire comprenant la phase standard du signal LOFI qui correspond à une distance h entre le laser et la cible (Eq.(1.9b)) et un terme quadratique en angle qui correspond à la courbure du front d'onde au niveau de la cible. On montre donc qu'il y a une analogie entre la dépendance spatiale en y^2 dans le cas du balayage en translation et la dépendance angulaire en α^2 dans le cas du balayage en rotation. On peut également interpréter le signal renvoyé par la cible en fonction de la position du miroir dans le domaine des fréquences angulaires en dérivant la phase $\Phi_i(\alpha)$

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta\Phi_i(\alpha)}{\delta\alpha} = -\frac{8Ll}{\lambda h} \alpha. \quad (2.48)$$

On voit donc que la fréquence instantanée angulaire du signal renvoyé par la cible est modulée linéairement autour de la fréquence nulle avec le taux de modulation

$$\hat{K} = -\frac{8Ll}{\lambda h}. \quad (2.49)$$

Le signal LOFI correspond alors à un *chirp* angulaire linéaire dont l'expression est

$$s_i(\alpha) = 2G(\Omega_e) P_{out} \sqrt{R_{e,i}} e^{j(\Phi_0 + \pi \hat{K} \alpha^2)}. \quad (2.50)$$

La signature de la cible ponctuelle i en synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique est donc analogue à celle en synthèse d'ouverture à balayage en translation (Eq.(2.11)). On peut

donc transposer au domaine angulaire l'analyse de la réponse fréquentielle de la cible que l'on a réalisée au paragraphe 2.2.4.

$$TF[s_i(\alpha)] = S_i(\hat{f}). \quad (2.51)$$

En revanche, la différence de géométrie entre le balayage axial en translation et le balayage angulaire galvanométrique apparaît dans l'expression du taux de modulation \hat{K} qui fait intervenir la distance laser-miroir L et la distance miroir-cible l . Nous verrons que ce rapport des longueurs intervient alors dans la résolution en synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique après filtrage adapté.

2.3.3 Axe de visée et décalage Doppler

Nous avons vu que l'angle de visée du laser induisait un décalage de fréquence Doppler additionnel dans la réponse de la cible, dans le cas d'un balayage en translation (Eq.(2.22b)). Or, nous avons pris comme hypothèse que l'axe optique du laser était parallèle à la direction y , ce qui signifie, d'après la Figure 2.10(a) que l'on se place dans les conditions expérimentales où $\theta = 0$. Cependant, nous allons prendre en compte le cas où l'axe optique du faisceau laser est décalé parallèlement à l'axe y , d'une quantité Δy , comme le montre la Figure 2.11(a). On suppose que pour un décalage Δy suffisamment faible, le laser se déplace toujours d'un angle 2α sur un arc de cercle de rayon L et on obtient les coordonnées du laser au premier ordre

$$x_L(\alpha) \approx L(1 - 2\alpha^2) - 2\alpha\Delta y, \quad (2.52a)$$

$$y_L(\alpha) \approx 2L\alpha + \Delta y. \quad (2.52b)$$

La distance laser-cible $d_{e,i}(\alpha)$ a alors pour expression, dans l'approximation des petits angles

$$d_{e,i}(\alpha) \approx h - \frac{1}{2} \frac{(2\alpha)^2 L l}{h} - \frac{1}{2} \frac{4\alpha l \Delta y}{h} + \frac{1}{2} \frac{\Delta y^2}{h}. \quad (2.53)$$

et on en déduit donc la phase du signal renvoyé par la cible i en fonction de la position angulaire du miroir

$$\Phi_i(\alpha) = \frac{4\pi}{\lambda} d_{e,i}(\alpha) = \frac{4\pi}{\lambda} h + \frac{2\pi}{\lambda h} \Delta y^2 - \frac{8\pi l \Delta y}{\lambda h} \alpha - \frac{8\pi L l}{\lambda h} \alpha^2. \quad (2.54)$$

Par rapport à l'Eq.(2.47), on voit que le décalage de l'axe optique du faisceau laser par rapport à l'axe du centre de rotation du miroir d'une quantité Δy induit une dépendance linéaire dans

la phase du signal renvoyé par la cible en fonction de la position angulaire du miroir. Il est plus facile d'interpréter la signification physique de ce terme additionnel dans le domaine des fréquences angulaires en dérivant la phase $\Phi_i(\alpha)$

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta\Phi_i(\alpha)}{\delta\alpha} = -\frac{4l}{\lambda h} \Delta y - \frac{8Ll}{\lambda h} \alpha. \quad (2.55)$$

Par rapport à l'Eq.(2.48), la fréquence instantanée angulaire du signal renvoyé par la cible est modulée linéairement autour d'une fréquence angulaire

$$\hat{F} = -\frac{4l}{\lambda h} \Delta y. \quad (2.56)$$

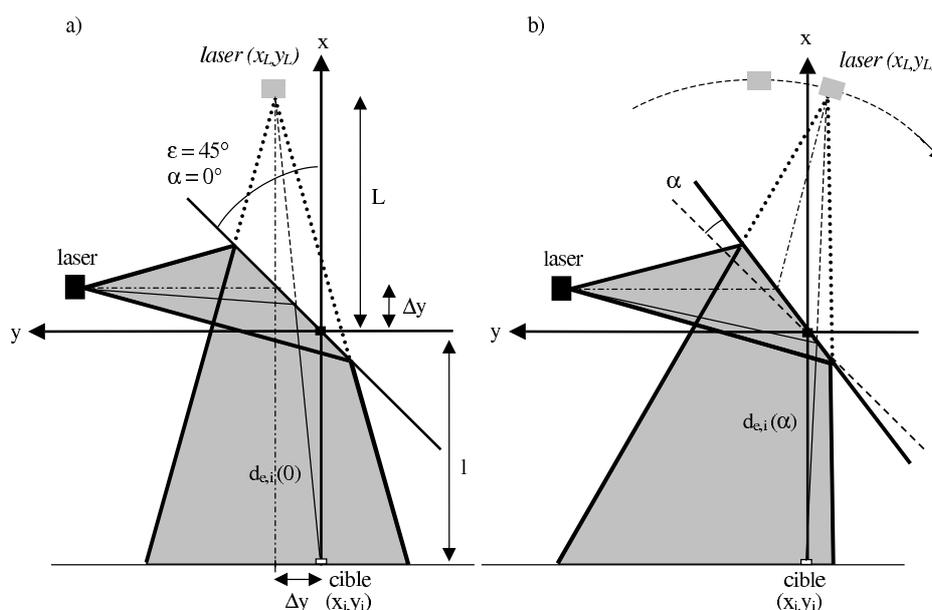


FIG. 2.11 – Décalage de l'axe optique du faisceau laser. a) Position de référence du miroir ($\epsilon=45^\circ$) et représentation virtuelle du symétrique du laser par rapport au miroir. L'axe optique du faisceau laser est décalé d'une distance Δy par rapport à l'axe de rotation du miroir. Coordonnées du laser : $(x_L=L, y_L=\Delta y)$. Coordonnées de la cible $(x_i=-l, y_i=0)$. b) Balayage en rotation : lorsque la position du miroir varie d'un angle α , tout se passe comme si le laser s'était déplacé d'un angle 2α sur un arc de cercle de rayon L . $d_{e,i}(\alpha)$ représente la distance laser-cible en fonction de l'angle de rotation α .

Le décalage de l'axe optique du faisceau laser induit donc un effet Doppler additionnel et le

signal LOFI correspondant a alors pour expression

$$s_i(\alpha) = 2G(\Omega_e)P_{out}\sqrt{R_{e,i}}e^{j(\Phi_0+\Delta\Phi+2\pi\hat{F}\alpha+\pi\hat{K}\alpha^2)}. \quad (2.57)$$

où $\Delta\Phi$ est une phase constante additionnelle qui vaut

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda h}\Delta y^2. \quad (2.58)$$

L'analyse fréquentielle de la réponse $s_i(\alpha)$ avec un décalage Doppler peut se déduire de la réponse fréquentielle de la réponse $s_i(\alpha)$ sans décalage Doppler en écrivant

$$s_i(\alpha) = 2G(\Omega_e)P_{out}\sqrt{R_{e,i}}e^{j(\Phi_0+\Delta\Phi+\pi\hat{K}\alpha^2)}e^{2j\pi\hat{F}\alpha}. \quad (2.59)$$

L'analyse de Fourier prévoit donc que la réponse fréquentielle avec décalage Doppler est égale à la réponse fréquentielle sans décalage Doppler (Eq.(2.51)) décalée de la fréquence \hat{F} et multipliée par un terme de phase constant, comme le montre la relation

$$TF[s_i(\alpha)] = 2G(\Omega_e)P_{out}\sqrt{R_{e,i}}TF[e^{j(\Phi_0+\Delta\Phi+\pi\hat{K}\alpha^2)}] \star TF[e^{2j\pi\hat{F}\alpha}], \quad (2.60a)$$

$$TF[s_i(\alpha)] = e^{j\Delta\Phi} \left[S_i(\hat{f}) \star \delta(\hat{f} - \hat{F}) \right], \quad (2.60b)$$

$$TF[s_i(\alpha)] = e^{j\Delta\Phi} \left[S_i(\hat{f} - \hat{F}) \right]. \quad (2.60c)$$

2.3.4 Paramètres du filtre adapté angulaire

Nous avons vu que l'expression du filtrage adapté se déduisait du signal LOFI correspondant à une cible ponctuelle en posant $h(t) = s_i^*(-t)$ (Eq.(2.29)). Nous avons également montré qu'il est beaucoup plus simple de calculer ce filtrage dans le domaine fréquentiel (Eq.(2.30)). Pour calculer le filtre adapté en fréquence dans le cas du balayage galvanométrique, il faut donc déterminer la largeur de bande B et la fréquence centrale F_{dop} . On calcule d'après la Fig.2.11, par analogie avec les bornes spatiales y^{min} et y^{max} délimitant le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser (Eq.(2.13a)), les bornes angulaires α^{min} et α^{max} qui correspondent respectivement à la position angulaire du miroir pour laquelle le faisceau laser commence à illuminer la cible ponctuelle i et la position angulaire du miroir pour laquelle le faisceau laser termine d'illuminer la cible

$$\alpha^{min} = \frac{\Delta y}{2l} - \frac{\lambda h}{2\pi\omega_0 l}, \quad (2.61a)$$

$$\alpha^{max} = \frac{\Delta y}{2l} + \frac{\lambda h}{2\pi\omega_0 l}. \quad (2.61b)$$

On déduit des Eqs.(2.61), l'expression des paramètres du filtre dans le domaine angulaire par analogie avec les Eqs.(2.21a) et (2.21b)

$$\hat{B} = |\hat{K}| (\alpha^{max} - \alpha^{min}) = \frac{8L}{\pi\omega_0}, \quad (2.62a)$$

$$F_{dop}^{\hat{}} = \hat{F} + \hat{K} \left(\frac{\alpha^{max} + \alpha^{min}}{2} \right) = -\frac{4\Delta y}{\lambda}. \quad (2.62b)$$

Il est plus facile de travailler avec des fréquences temporelles, notamment lorsqu'on doit calculer des transformées de Fourier, c'est pourquoi on convertit ces paramètres en les multipliant par la vitesse de rotation du miroir $\dot{\alpha}$

$$B = \frac{8L\dot{\alpha}}{\pi\omega_0}, \quad (2.63a)$$

$$F_{dop} = -\frac{4\Delta y\dot{\alpha}}{\lambda}. \quad (2.63b)$$

L'expression de la largeur de bande va nous permettre de calculer la résolution en synthèse d'ouverture à géométrie angulaire.

2.3.5 Résolution

Par analogie avec l'Eq.(2.40) qui donne le critère de résolution de la fonction de corrélation du filtrage adapté, la résolution angulaire, pour une enveloppe gaussienne qui correspond au profil gaussien du faisceau laser, est donnée par la relation

$$\delta\alpha = \frac{4}{\pi\hat{B}} = \frac{\omega_0}{2L}. \quad (2.64)$$

Pour obtenir la résolution spatiale, il faut multiplier la résolution angulaire par la longueur l que parcourt le faisceau laser entre le miroir et la cible et multiplier par un facteur 2 qui provient du fait que lorsque le miroir tourne d'un angle α , le faisceau réfléchi s'est déplacé d'un angle 2α (voir Figure 2.12). On obtient le résultat suivant

$$\delta y = 2l \frac{4}{\pi\hat{B}} = \omega_0 \Gamma. \quad (2.65)$$

où $\Gamma = l/L$ est le rapport de la distance miroir-cible sur la distance laser-miroir, caractéristique du balayage galvanométrique.

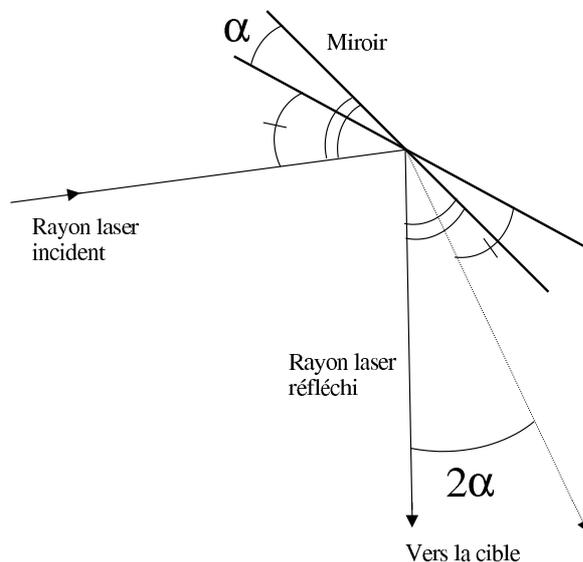


FIG. 2.12 – *Ecart angulaire d'un rayon laser après réflexion sur le miroir pour un décalage d'angle α . Le principe est identique à celui d'un goniomètre : lorsque le miroir tourne d'un angle α , le rayon laser réfléchi se décale d'un angle 2α .*

Si on compare l'Eq.(2.65) à l'Eq.(2.41), on voit que la résolution est toujours proportionnelle à l'ouverture caractéristique du système, c'est à dire le waist du laser ω_0 , indépendante de la longueur d'onde utilisée et proportionnelle au rapport Γ . La résolution est d'autant meilleure que ce rapport est petit : plus la cible est proche du miroir, plus l'écart minimal angulaire du miroir (c.-à-d. la résolution angulaire) correspond à un écart minimal entre deux points sur la cible petit et donc meilleure est la résolution spatiale. De même, lorsque le laser est loin du miroir, la tâche de diffraction du faisceau laser sur le miroir est plus grosse et l'écart angulaire total permettant l'éclairement de la cible est alors plus important, ce qui revient à synthétiser une plus grande ouverture de collection, et donc à obtenir une meilleure résolution spatiale. La résolution en synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique est meilleure que la limite de diffraction lorsqu'on a la condition $\delta y < D$, qui se traduit d'après l'Eq.(2.13a) par

$$\omega_0 \Gamma < \frac{2\lambda(L+l)}{\pi\omega_0}. \quad (2.66)$$

On peut minimiser le rapport Γ en ayant la condition $l \ll L$ (comme c'est le cas en microscopie par exemple) afin d'atteindre une résolution meilleure que celle obtenue avec un

balayage en translation (pour $\Gamma < 1$, $\delta y < \omega_0$). Cependant, la résolution δy est de toutes façons limitée par la longueur d'onde utilisée. On peut alors définir une plage de fonctionnement optimal pour la synthèse d'ouverture en balayage galvanométrique telle que la résolution soit comprise entre la limite ultime de la longueur d'onde et la limite de diffraction, c'est à dire $\lambda < \delta y = \omega_0 \Gamma < D$ où D est le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser qui définit la limite de diffraction. Pour un waist $\omega_0 = 100\mu m$, une longueur d'onde $\lambda \approx 1\mu m$ et une distance d'observation $h \approx 1,5$ m, on obtient une plage de fonctionnement correspondant à un rapport Γ compris entre 10^{-2} et 10^2 .

2.3.6 Résultat expérimental

Nous avons vérifié expérimentalement le principe de synthèse d'ouverture à géométrie angulaire à une dimension en réalisant un balayage galvanométrique sur un motif diffusant composé de deux cibles ponctuelles. Le but de cette expérience est de montrer qu'on peut résoudre les cibles dont l'écartement est inférieur au diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser qui les éclaire, c'est à dire d'atteindre une résolution après filtrage adapté au-delà de la limite de diffraction. De plus, nous allons montrer que cette résolution peut être inférieure à la dimension de l'ouverture d'émission (c.-à-d. le waist du laser ω_0) lorsque le rapport des paramètres géométriques expérimentaux $\Gamma < 1$.

2.3.6.1 Montage et acquisition des signaux

La Figure 2.13 illustre le schéma de l'expérience LOFI à synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique. Le montage est identique à celui présenté à la Figure 1.1 sauf que l'on ne focalise pas le faisceau laser au niveau de la cible de manière à profiter de la divergence du faisceau pour augmenter la dimension d'éclairement D (c.-à-d. la taille du faisceau laser au niveau de la cible), et donc augmenter l'effet de compression du filtrage adapté (voir paragraphe 2.2.5). De plus, le balayage est assuré ici par le scanner galvanométrique : le mouvement de rotation du miroir est assuré par un pilotage du moteur galvanométrique par le PC qui envoie une rampe de tension $V_y(t)$ de période T_y , délivrée par une sortie de la carte d'acquisition. La variation d'angle α est proportionnelle à cette rampe de tension et par conséquent, la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ est constante. Les paramètres expérimentaux sont récapitulés dans le tableau 2.1.

Le protocole de balayage et d'acquisition du signal est illustré par la Figure 2.14. L'angle α est augmenté régulièrement pour scanner la cible selon la direction y avec une vitesse angulaire

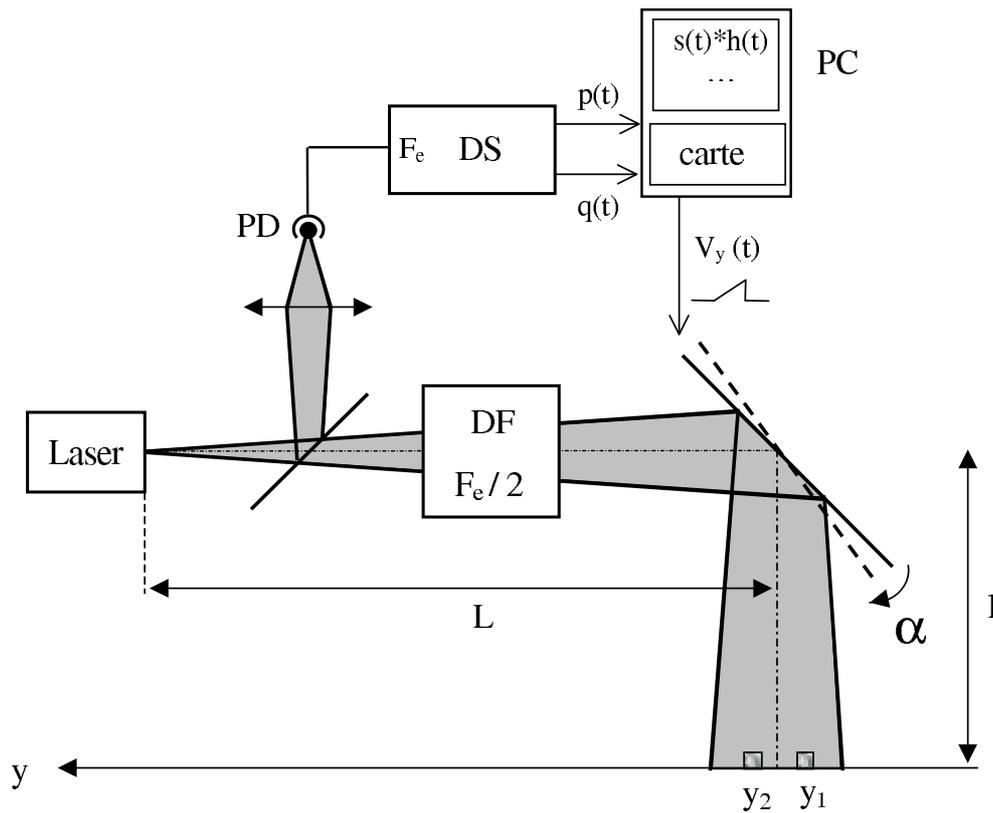


FIG. 2.13 – Schéma de principe de la technique LOFI à synthèse d'ouverture utilisant un balayage galvanométrique unidimensionnel. PD : photodiode, DS : détection synchrone, DF : décalage en fréquence. L est la distance laser-miroir, l est la distance miroir-cible, y_1 et y_2 sont les positions des cibles ponctuelles. La position angulaire du miroir est repérée par l'angle α par rapport à sa position de référence à 45° . La rotation du miroir est pilotée par le PC et la carte d'acquisition qui envoie une rampe de tension $V_y(t)$ proportionnelle à l'angle α .

constante α . On fait l'acquisition des signaux $p(t)$ et $q(t)$ en sortie de la démodulation synchrone à la fréquence de décalage F_e , échantillonnés temporellement au pas dt , ce qui correspond aussi à un pas d'échantillonnage angulaire $d\alpha$ et donc un pas d'échantillonnage spatial $dy = 2ld\alpha$. On choisit un temps d'intégration de la détection synchrone T_{int} le plus proche du pas d'échantillonnage dt , parmi les valeurs disponibles sur l'appareil. On forme ensuite numériquement le signal LOFI $s(t) = p(t) + jq(t)$ et on calcule sa transformée de Fourier numérique $|S(f)|$. Le filtrage adapté consiste alors simplement au produit $G(f)$ du signal $S(f)$ par la transformée de Fourier du filtre $H(f)$ et on affiche la transformée de Fourier inverse du résultat $TF[G(f)]^{-1}$.

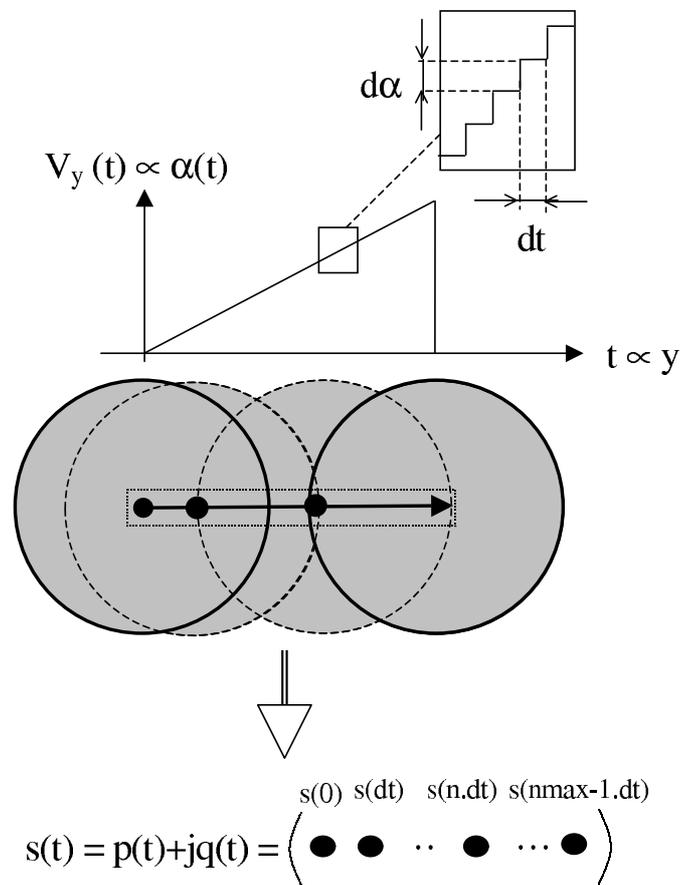


FIG. 2.14 – Protocole de balayage 1D de la cible et acquisition du signal LOFI. $d\alpha$: pas d'échantillonnage angulaire, dt : pas d'échantillonnage temporel. On fait l'acquisition du signal LOFI $s(t) = p(t) + jq(t)$ pour chaque position successive du faisceau laser, et donc pour chaque position angulaire α du miroir. On construit ainsi un vecteur dont les éléments sont le signal LOFI pour différentes positions du miroir. On indice chaque élément par n et le nombre total d'éléments vaut n_{max} .

La cible est une bifente transparente à laquelle nous avons apposé derrière un matériau

Paramètres du laser
Longueur d'onde : $\lambda = 1064 \text{ nm}$
Waist : $\omega_0 = 550 \text{ }\mu\text{m}$
Diamètre du faisceau laser au niveau de la cible : $D \approx 2,2 \text{ mm}$
Paramètres géométriques
Distance laser-miroir : $L = 147,5 \text{ cm}$
Distance miroir-cible : $l = 40 \text{ cm}$
Distance d'observation : $h = 187,5 \text{ cm}$
Rapport galvanométrique : $\Gamma \approx 0,27$
Résolution synthétique : $\delta y = 150 \text{ }\mu\text{m}$
Décalage de l'axe de visée : $\Delta y = 1125 \text{ }\mu\text{m}$
Largeur d'une fente : $100 \text{ }\mu\text{m} < \delta y$
Espacement entre les cibles : $250 \text{ }\mu\text{m}$ et $500 \text{ }\mu\text{m} < D$
Paramètres d'acquisition
Balayage
Période de la rampe de tension : $T_y = 100 \text{ ms}$
Vitesse angulaire du miroir : $\dot{\alpha} = 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$
Vitesse linéaire de balayage : $v \approx 2l\dot{\alpha} = 8.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$
Echantillonnage
Nombre d'échantillons : $n_{max} = 200$
Pas d'échantillonnage angulaire : $d\alpha = 0,5.10^{-4} \text{ rad}$
Pas d'échantillonnage spatial : $dy \approx 40 \mu\text{m}$
Pas d'échantillonnage temporel : $dt = 500 \text{ }\mu\text{s}$
Temps d'intégration : $T_{int} = 300 \text{ }\mu\text{s}$
Filtrage
Largeur de bande du filtre : $B \approx 680 \text{ Hz}$
Décalage Doppler du filtre : $F_{dop} \approx 450 \text{ Hz}$

TAB. 2.1 – Synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique 1D : paramètres expérimentaux

rétro réflecteur afin de la rendre diffusante. Le support de la bifente est un plastique noir qui absorbe la lumière qui n'arrive pas sur l'une des deux fentes. La largeur de chaque fente est inférieure à la résolution synthétique $100 \mu\text{m} < \delta y \approx 150 \mu\text{m}$: on peut donc considérer chaque fente comme une cible ponctuelle. L'espacement entre les fentes est inférieur au diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser au niveau de la cible ($250 \mu\text{m} < D \approx 2,2 \text{mm}$). On dispose d'une deuxième fente double dont la largeur de fente vaut aussi $100 \mu\text{m}$ et l'écartement entre les fentes vaut $500 \mu\text{m} < D$.

2.3.6.2 Estimation et ajustement des paramètres du filtre adapté

Nous avons vu que le filtre adapté correspond à la réponse d'une cible ponctuelle i . Or, ici le signal mesuré correspond à la réponse de deux cibles ponctuelles. Les Figures 2.15(a) et (b) comparent le module du spectre de la réponse de deux cibles ponctuelles écartées de $500 \mu\text{m}$ au module du spectre de la réponse d'une cible ponctuelle calculés numériquement. On voit que l'on peut estimer assez fidèlement la largeur de bande B et la fréquence centrale F_{dop} de la réponse fréquentielle d'une cible, et donc du filtre adapté, à partir du spectre de la réponse des deux cibles ponctuelles. La surmodulation du spectre de la Figure 2.15(a) provient de l'interférence entre les deux cibles. Ainsi, expérimentalement, nous allons estimer et ajuster au mieux les paramètres fréquentiels du filtre adapté $H(f) = S_i^*(f)$ à partir du spectre du signal LOFI $S(f)$. La Figure 2.16 représente le spectre expérimental du signal LOFI mesuré : la fréquence centrale F_{dop} permet d'estimer le décalage Δy (Eq.(2.63b)) de l'axe optique du laser par rapport à l'axe de rotation du miroir, qui est difficile à mesurer directement, car il ne représente en général que quelques centaines de microns, ce qui correspond à la précision que l'on obtient par un alignement du faisceau à l'oeil nu. On mesure $F_{dop} = 450 \text{ Hz}$ et connaissant la vitesse angulaire $\dot{\alpha} = 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$ et la longueur d'onde $\lambda = 1064 \text{ nm}$, on en déduit $\Delta y \approx 1125 \mu\text{m}$.

2.3.6.3 Compression

La Figure 2.17 illustre le signal LOFI après filtrage adapté, converti spatialement par l'intermédiaire de la vitesse linéaire de balayage approchée $v \approx 2l\dot{\alpha}$. Il correspond ainsi à la fonction de corrélation $|g(y)|$ en fonction de la position y pour les deux écartements de cibles. La position des deux réflecteurs est clairement identifiable par les deux pics qui correspondent au maximum de la fonction de corrélation. A titre de comparaison, le profil gaussien du faisceau laser est représenté en pointillés avec un diamètre de faisceau d'environ $D = 2,2 \text{ mm}$. Chaque réflecteur

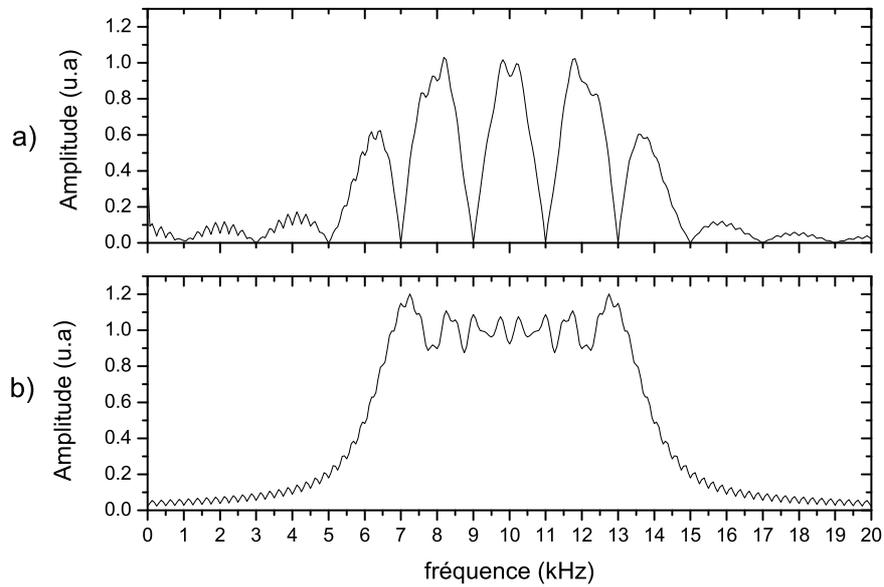


FIG. 2.15 – Comparaison du module du spectre de la réponse de deux cibles ponctuelles écartées de $500 \mu\text{m}$ (a) et du module du spectre de la réponse d'une cible ponctuelle (b) calculés numériquement.

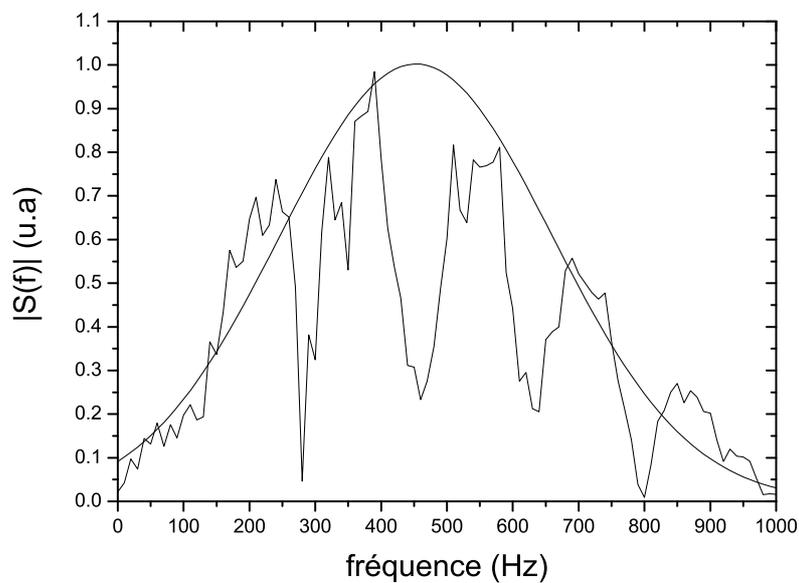


FIG. 2.16 – Module du spectre expérimental du signal LOFI $|S(f)|$ et du spectre numérique du filtre adapté $|H(f)| = |S_i^*(f)|$.

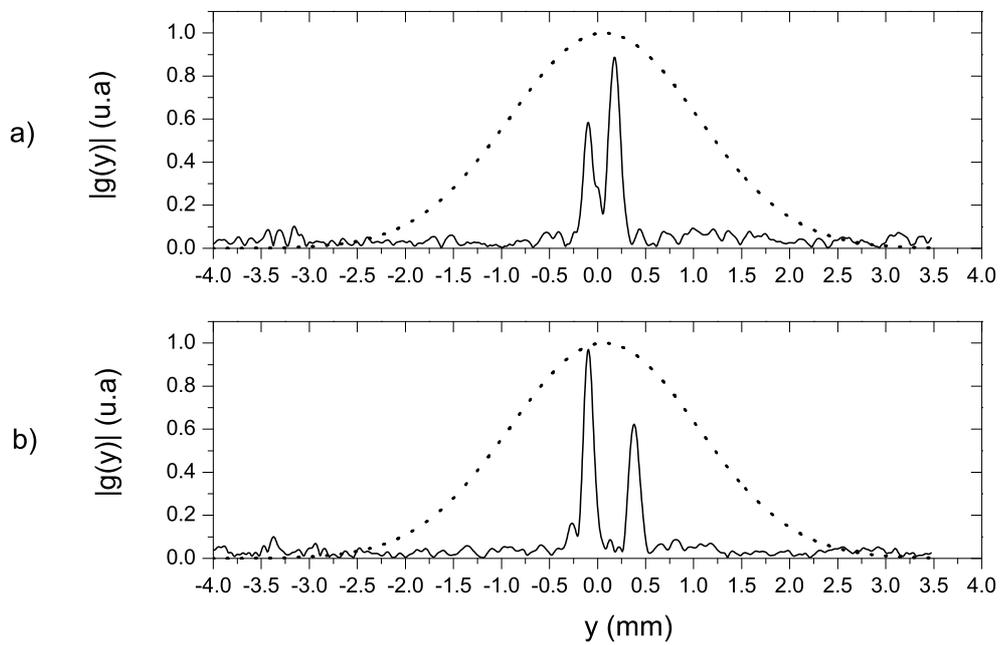


FIG. 2.17 – Résultat expérimental de la synthèse d'ouverture en balayage galvanométrique après filtrage adapté pour deux cibles ponctuelles espacées de $250 \mu\text{m}$ (a) et $500 \mu\text{m}$ (b). La courbe en pointillés représente le profil du faisceau gaussien au niveau de la cible : diamètre de la tâche de diffraction $D \approx 2,2 \text{ mm}$ [34]

est résolu au-delà de la limite de diffraction, avec une précision d'environ $150 \mu\text{m} < D$, ce qui est en accord avec la résolution prédit par l'Eq.(2.65). De plus, on démontre ainsi que la résolution spatiale est inférieure à l'ouverture d'émission (c.-à-d. le waist du laser $\omega_0=550\mu\text{m}$), c'est à dire que la résolution est meilleure que ce que l'on peut obtenir avec un balayage en translation (Eq.(2.41)), pour un rapport caractéristique du balayage galvanométrique $\Gamma \approx 0,27 < 1$.

La différence d'amplitude entre les pics peut venir de la différence de réflectivité du matériau rétro réflecteur non homogène apposé derrière chaque fente. D'autre part, l'écart entre les pics de corrélation ne correspond pas exactement à l'écart réel entre les cibles : dans le cas de la bifente de $250\mu\text{m}$ (Figure 2.17(a)), on mesure un écart entre les pics de corrélation de $220\mu\text{m}$, et dans le cas de la bifente de $500\mu\text{m}$ (Figure 2.17(b)), on mesure un écart de $450\mu\text{m}$. Cette erreur peut être induite par l'approximation linéaire de la vitesse linéaire v au niveau de la cible.

2.4 Application à l'imagerie bidimensionnelle

Dans ce paragraphe, nous allons étendre le principe de la synthèse d'ouverture à géométrie angulaire à deux dimensions. Le balayage est alors opéré par la rotation de deux miroirs galvanométriques.

2.4.1 Indépendance des signatures

Lorsqu'on fait l'acquisition d'une image, on balaye le faisceau laser point par point, ligne après ligne grâce à un balayage galvanométrique à deux dimensions qui est assuré par deux miroirs M_x et M_y . En supposant que lorsqu'un miroir est en mouvement, l'autre est fixe, la rotation du miroir M_x permet de balayer le faisceau laser sur la cible selon la direction x et la rotation du miroir M_y permet de balayer le faisceau laser sur la cible selon la direction y . L'orientation angulaire des miroirs est respectivement donnée par les angles α_x et α_y . D'un point de vue géométrique, on peut donc traiter le problème du balayage bidimensionnel comme deux problèmes de balayage unidimensionnel équivalent à celui que l'on a résolu au paragraphe 2.3. Par commodité de représentation, les Figures 2.18(a) et (b) représentent donc le cas où le miroir M_y est fixe et le miroir M_x est en mouvement et les Figures 2.18(c) et (d) représentent le cas où le miroir M_x est fixe et le miroir M_y est en mouvement. L est la distance laser- M_x , a est la distance entre les miroirs M_x et M_y et l est la distance M_y -cible avec $a \ll L, l$. D'après l'Eq.(2.46), on en déduit l'expression de la distance laser-cible dans l'approximation de petits

angles α_x et α_y et en posant la distance d'observation $h = L + a + l$

$$d_{e,i}(\alpha_x, \alpha_y) \approx h - \frac{1}{2} \frac{(2\alpha_x)^2 L(a+l)}{h} - \frac{1}{2} \frac{(2\alpha_y)^2 (L+a)l}{h}. \quad (2.67)$$

et on en déduit la phase du signal renvoyé par la cible i en fonction des positions angulaires des miroirs

$$\Phi_i(\alpha_x, \alpha_y) = \frac{4\pi}{\lambda} d_{e,i}(\alpha_x, \alpha_y) = \frac{4\pi}{\lambda} h - \frac{8\pi L(a+l)}{\lambda h} \alpha_x^2 - \frac{8\pi(L+a)l}{\lambda h} \alpha_y^2. \quad (2.68)$$

On peut également interpréter le signal renvoyé par la cible en fonction des positions angulaires des miroirs dans le domaine des fréquences angulaires en dérivant la phase $\Phi_i(\alpha_x, \alpha_y)$

$$\hat{f}_x(\alpha_x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \Phi_i(\alpha_x, \alpha_y)}{\delta \alpha_x} = -\frac{8L(a+l)}{\lambda h} \alpha_x, \quad (2.69a)$$

$$\hat{f}_y(\alpha_y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \Phi_i(\alpha_x, \alpha_y)}{\delta \alpha_y} = -\frac{8(L+a)l}{\lambda h} \alpha_y. \quad (2.69b)$$

On voit donc que la fréquence instantanée angulaire du signal renvoyé par la cible est modulée linéairement autour de la fréquence nulle respectivement selon les directions x et y avec les taux de modulation

$$\hat{K}_x = -\frac{8L(a+l)}{\lambda h}, \quad (2.70a)$$

$$\hat{K}_y = -\frac{8(L+a)l}{\lambda h}. \quad (2.70b)$$

Le signal LOFI correspond alors à un *chirp* angulaire linéaire selon chaque direction dont l'expression est

$$s_i(\alpha_x, \alpha_y) = 2G(\Omega_e) P_{out} \sqrt{R_{e,i}} e^{j(\Phi_0 + \pi \hat{K}_x \alpha_x^2 + \pi \hat{K}_y \alpha_y^2)}. \quad (2.71)$$

2.4.2 Axes de visées et décalages Doppler

Si on considère un désalignement de l'axe optique pour chaque problème unidimensionnel, la position finale du faisceau gaussien au niveau de la cible est donnée par les coordonnées $(\Delta x, \Delta y, z=0)$. D'après l'Eq.(2.53), la distance laser-cible $d_{e,i}(\alpha_x, \alpha_y)$ a alors pour expression, dans

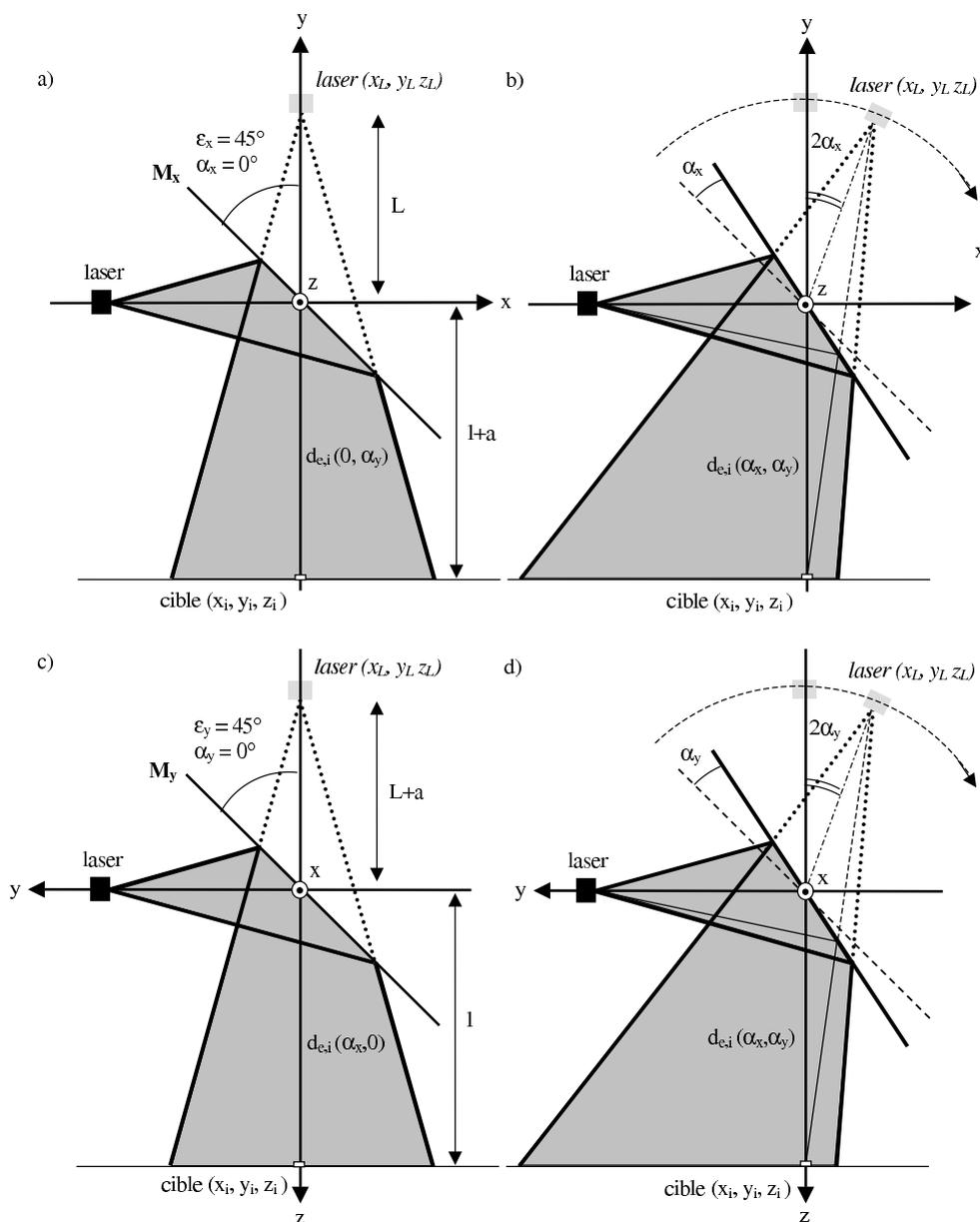


FIG. 2.18 – Synthèse d'ouverture 2D à balayage galvanométrique pour deux miroirs M_x et M_y espacés d'une distance a . Pour le miroir M_y fixe et pour $z=0$: a) position de référence du miroir M_x ($\epsilon_x=45^\circ$). Coordonnées du laser : $(x_L=0, y_L=L, z=0)$, coordonnées de la cible : $(x_i=0, y_i=-l, z=0)$. b) Balayage selon la direction x par rotation de l'angle α_x . $d_{e,i}(\alpha_x, \alpha_y)$: distance laser-cible en fonction de l'angle de rotation α_x pour une position angulaire fixe α_y du miroir M_y . Pour le miroir M_x fixe et pour $x=0$: c) position de référence du miroir M_y ($\epsilon_y=45^\circ$). Coordonnées du laser : $(x=0, y_L=0, z_L=-L)$, coordonnées de la cible : $(x=0, y_i=0, z_i=l)$. d) Balayage selon la direction y par rotation de l'angle α_y . $d_{e,i}(\alpha_x, \alpha_y)$: distance laser-cible en fonction de l'angle de rotation α_y pour une position angulaire fixe α_x du miroir M_x .

l'approximation des petits angles

$$d_{e,i}(\alpha_x, \alpha_y) \approx h - \frac{1}{2} \frac{(2\alpha_x)^2 L(a+l)}{h} - \frac{1}{2} \frac{(2\alpha_y)^2 (L+a)l}{h} - \frac{2\alpha_x(a+l)\Delta x}{h} - \frac{2\alpha_y l \Delta y}{h} + \frac{\Delta x^2}{2h} + \frac{\Delta y^2}{2h}. \quad (2.72)$$

et on en déduit donc la phase du signal renvoyé par la cible i en fonction des positions angulaires des miroirs

$$\begin{aligned} \Phi_i(\alpha_x, \alpha_y) &= \frac{4\pi}{\lambda} d_{e,i}(\alpha_x, \alpha_y) = \frac{4\pi}{\lambda} h + \frac{2\pi}{\lambda h} \Delta x^2 + \frac{2\pi}{\lambda h} \Delta y^2 - \frac{8\pi(a+l)\Delta x}{\lambda h} \alpha_x - \frac{8\pi l \Delta y}{\lambda h} \alpha_y \\ &\quad - \frac{8\pi L(a+l)}{\lambda h} \alpha_x^2 - \frac{8\pi(L+a)l}{\lambda h} \alpha_y^2. \end{aligned} \quad (2.73a)$$

On voit que pour chaque direction de balayage x et y , les décalages de l'axe optique par rapport aux axes de rotations des miroirs respectifs induisent une dépendance linéaire angulaire qu'on peut interpréter physiquement dans le domaine des fréquences angulaires en dérivant la phase $\Phi_i(\alpha_x, \alpha_x)$

$$\hat{f}_x(\alpha_x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \Phi_i(\alpha_x, \alpha_x)}{\delta \alpha_x} = -\frac{4(a+l)}{\lambda h} \Delta x - \frac{8L(a+l)}{\lambda h} \alpha_x, \quad (2.74a)$$

$$\hat{f}_y(\alpha_y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta \Phi_i(\alpha_x, \alpha_x)}{\delta \alpha_y} = -\frac{4l}{\lambda h} \Delta y - \frac{8(L+a)l}{\lambda h} \alpha_y. \quad (2.74b)$$

Par rapport à l'Eq.(2.69), les fréquences instantanées angulaires du signal renvoyé par la cible selon chaque direction sont modulées autour des fréquences angulaires

$$\hat{F}_x = -\frac{4(a+l)}{\lambda h} \Delta x, \quad (2.75a)$$

$$\hat{F}_y = -\frac{4l}{\lambda h} \Delta y. \quad (2.75b)$$

Le décalage de l'axe optique du faisceau laser induit donc selon chaque direction un effet Doppler additionnel et le signal LOFI correspondant a alors pour expression

$$s_i(\alpha_x, \alpha_y) = 2G(\Omega_e) P_{out} \sqrt{R_{e,i}} e^{j(\Phi_0 + \Delta\Phi + 2\pi \hat{F}_x \alpha_x + 2\pi \hat{F}_y \alpha_y + \pi \hat{K}_x \alpha_x^2 + \pi \hat{K}_y \alpha_y^2)}. \quad (2.76)$$

où $\Delta\Phi$ est une phase constante additionnelle qui vaut

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda h} (\Delta x^2 + \Delta y^2). \quad (2.77)$$

2.4.3 Paramètres du filtre adapté angulaire bidimensionnel

Pour pouvoir synthétiser une image, il faut appliquer un filtre adapté à deux dimensions. Il faut donc déterminer les paramètres fréquentiels du filtre B_x et $F_{dop,x}$ selon la direction x et les paramètres fréquentiels du filtre B_y et $F_{dop,y}$ selon la direction y . A partir des Eqs.(2.61), on en déduit les bornes angulaires pour la rotation du miroir M_x

$$\alpha_x^{min} = \frac{\Delta x}{2(a+l)} - \frac{\lambda h}{2\pi\omega_0(a+l)} \quad (2.78a)$$

$$\alpha_x^{max} = \frac{\Delta x}{2(a+l)} + \frac{\lambda h}{2\pi\omega_0(a+l)} \quad (2.78b)$$

et les bornes angulaires pour la rotation du miroir M_y

$$\alpha_y^{min} = \frac{\Delta y}{2l} - \frac{\lambda h}{2\pi\omega_0 l} \quad (2.79a)$$

$$\alpha_y^{max} = \frac{\Delta y}{2l} + \frac{\lambda h}{2\pi\omega_0 l} \quad (2.79b)$$

Par analogie avec l'Eq.(2.62), selon la direction x , le filtre adapté pour la synthèse d'ouverture est caractérisé par la largeur de bande dans le domaine angulaire

$$\hat{B}_x = |\hat{K}_x| (\alpha_x^{max} - \alpha_x^{min}) = \frac{8L}{\pi\omega_0} \quad (2.80)$$

et par le décalage fréquentiel Doppler dans le domaine angulaire

$$F_{dop,x}^{\hat{}} = \hat{F}_x + \hat{K}_x \left(\frac{\alpha_x^{max} + \alpha_x^{min}}{2} \right) = -\frac{4\Delta x}{\lambda} \quad (2.81)$$

tandis que selon la direction y , le filtre adapté est caractérisé par la largeur de bande

$$\hat{B}_y = |\hat{K}_y| (\alpha_y^{max} - \alpha_y^{min}) = \frac{8(L+a)}{\pi\omega_0} \quad (2.82)$$

et le décalage Doppler

$$F_{dop,y}^{\hat{}} = \hat{F}_y + \hat{K}_y \left(\frac{\alpha_y^{max} + \alpha_y^{min}}{2} \right) = -\frac{4\Delta y}{\lambda} \quad (2.83)$$

On peut réécrire ces paramètres dans le domaine des fréquences temporelles en multipliant respectivement les grandeurs selon la direction x par la vitesse angulaire $\dot{\alpha}_x$

$$B_x = \frac{8L\dot{\alpha}_x}{\pi\omega_0} \quad (2.84)$$

$$F_{dop,x} = -\frac{4\Delta x \dot{\alpha}_x}{\lambda} \quad (2.85)$$

et les grandeurs selon la direction y par la vitesse angulaire $\dot{\alpha}_y$

$$B_y = \frac{8(L+a)\dot{\alpha}_y}{\pi\omega_0} \quad (2.86)$$

$$F_{dop,y} = -\frac{4\Delta y \dot{\alpha}_y}{\lambda} \quad (2.87)$$

Les expressions des largeurs de bande B_x et B_y vont nous permettre de calculer la résolution de l'image après filtrage selon les directions x et y .

2.4.4 Résolution de l'image

Par analogie avec l'Eq.(2.40), la résolution angulaire pour chaque miroir est donnée par

$$\delta\alpha_x = \frac{4}{\pi\hat{B}_x} = \frac{\omega_0}{2L} \quad (2.88)$$

$$\delta\alpha_y = \frac{4}{\pi\hat{B}_y} = \frac{\omega_0}{2(L+a)} \quad (2.89)$$

En prenant en compte le facteur 2 multiplicatif pour des considérations géométriques (Figure 2.12), la résolution spatiale finale de l'image après synthèse d'ouverture vaut

$$\delta x = 2(a+l)\delta\alpha_x = \omega_0 \frac{(a+l)}{L} \quad (2.90)$$

$$\delta y = 2l\delta\alpha_y = \omega_0 \frac{l}{(L+a)} \quad (2.91)$$

Si on fait l'hypothèse $a \ll L, l$, les Eqs.(2.90) et Eq.(2.91) montrent que la résolution spatiale est à peu près la même selon les deux directions x et y et vaut

$$\delta x \approx \delta y = \omega_0 \Gamma \quad (2.92)$$

où $\Gamma = l/L$ est le rapport de la distance miroir M_y -cible sur la distance laser-miroir M_x . La résolution de l'image après synthèse d'ouverture est donc indépendante de la longueur d'onde, est proportionnelle à l'ouverture optique du système (c.-à-d. le waist du laser) et est proportionnelle

au rapport Γ , selon les deux directions x et y . La résolution après synthèse d'ouverture est meilleure que la limite de diffraction quand on a la condition $\delta x, \delta y \ll D$, qui se traduit par

$$\omega_0 \Gamma < \frac{2\lambda(L + a + l)}{\pi\omega_0} \quad (2.93)$$

Pour illustrer l'effet du filtrage adapté à deux dimensions sur une image, nous allons présenter quelques résultats numériques dans le cas simple où le motif est constitué de quatre cibles ponctuelles.

2.4.5 Résultats numériques

2.4.5.1 Compression

La Fig.2.19 montre le traitement numérique d'une image par synthèse d'ouverture utilisant un balayage galvanométrique 2D. Nous entendons par traitement numérique un filtrage adapté selon chaque direction x et y . Nous avons modélisé un motif composé de quatre réflecteurs ponctuels répartis de telle sorte que le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau gaussien D soit plus grande que la distance entre les cibles. Les coordonnées des quatre cibles sont les suivantes : $(x_1=0; y_1=0), (x_2=2\omega_0; y_2=0), (x_3=-2\omega_0; y_3=-2\omega_0), (x_4=2\omega_0; y_4=-2\omega_0)$. On choisit un rapport $\Gamma=1$ tel que la résolution en synthèse d'ouverture soit la moitié de l'espacement minimal entre chaque cible ($\delta_x = \delta_y = \omega_0$). La Fig.2.19(a) représente l'image non traitée (c.-à-d. limitée par la diffraction) et on voit qu'elle n'est pas exploitable puisque les cibles ne sont pas résolues. La Fig.2.19(d) représente la même image après filtrage adapté selon les directions x et y : on distingue nettement les quatre cibles, ce qui montre que par rapport à l'image initiale (Fig.2.19(a)), on a amélioré la résolution au-delà de la limite de diffraction. La Fig.2.19(b) montre l'étape intermédiaire de filtrage, c'est à dire l'image standard filtrée uniquement selon la direction y . On observe la compression sous forme de deux lignes horizontales, qui correspondent aux maxima de corrélation du résultat du filtrage adapté selon la direction y et qui traduit la localisation spatiale des cibles en $y_{1,2}=0$ et $y_{3,4}=-2\omega_0$. Cependant, il est impossible de localiser leur position selon la direction x . Sur chaque ligne, on peut constater des franges résultant de l'interférence entre les deux cibles individuelles. La Fig.2.19(c) montre l'autre étape intermédiaire complémentaire du filtrage, c'est à dire l'image standard filtrée uniquement selon la direction x . On observe la compression sous forme de trois lignes verticales, qui correspondent aux maxima de corrélation du résultat du filtrage adapté selon la direction x et qui traduit la position des

cibles en $x_1=0$, $x_{2,4}=2\omega_0$ et $x_3=-2\omega_0$. Cependant, il est impossible de localiser leur position selon la direction y . Sur la ligne de droite, on peut également voir les franges résultant de l'interférence entre les cibles indexées 2 et 4. Dans les deux cas représentés aux Figures 2.19(b) et 2.19(c), les images convergent vers le résultat présenté à la Fig.2.19(d) après la deuxième opération complémentaire, quelque soit l'ordre des opérations.

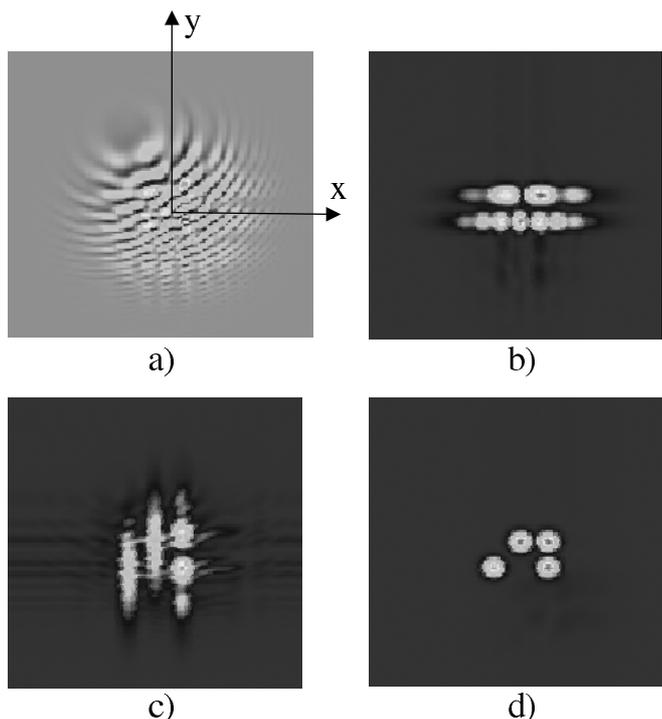


FIG. 2.19 – *Traitement numérique d'une image par simulation de synthèse d'ouverture avec un balayage galvanométrique bidimensionnel. a) image non traitée. b) image après filtrage adapté selon la direction y . c) image après filtrage adapté selon la direction x d) image après filtrage adapté selon les deux directions x et y . Paramètres numériques : $\omega_0=300 \mu\text{m}$, $\lambda=1064 \text{ nm}$, $L=50 \text{ cm}$, $a=1 \text{ cm}$, $l=50 \text{ cm}$, $\Gamma=1$, $\Delta x=0,04 \text{ mm}$, $\Delta y=0,08 \text{ mm}$. Le motif est constitué de quatre cibles ponctuelles situées aux positions suivantes : $(x_1=0 ; y_1=0)$, $(x_2=2\omega_0=2\delta x ; y_2=0)$, $(x_3=-2\omega_0=-2\delta x ; y_3=-2\omega_0=-2\delta y)$, $(x_4=2\omega_0=2\delta x ; y_4=-2\omega_0=-2\delta y)$ [35].*

2.4.5.2 Effet du rapport Γ

Pour une distance donnée laser-cible ($h = L + a + l=101 \text{ cm}$), la Fig.2.20 montre l'effet du rapport $\Gamma=l/L$ (c.-à-d. de la position du scanner entre le laser et la cible) sur la résolution du système après synthèse d'ouverture. Le motif, composé de quatre cibles ponctuelles, est le même

que précédemment (Fig.2.19). Si on compare les Figs.2.20(a), 2.20(b) et 2.20(c), on vérifie que la résolution se dégrade lorsque Γ augmente. La Figure 2.20(c) représente le cas où $\Gamma=2$, c'est à dire que la résolution vaut $\delta x = \delta y = 2\omega_0$, ce qui correspond à la distance minimale entre les cibles : on est alors à la limite de résolution en synthèse d'ouverture et on voit que l'on ne distingue plus les cibles indexés par 1,2 et 4.

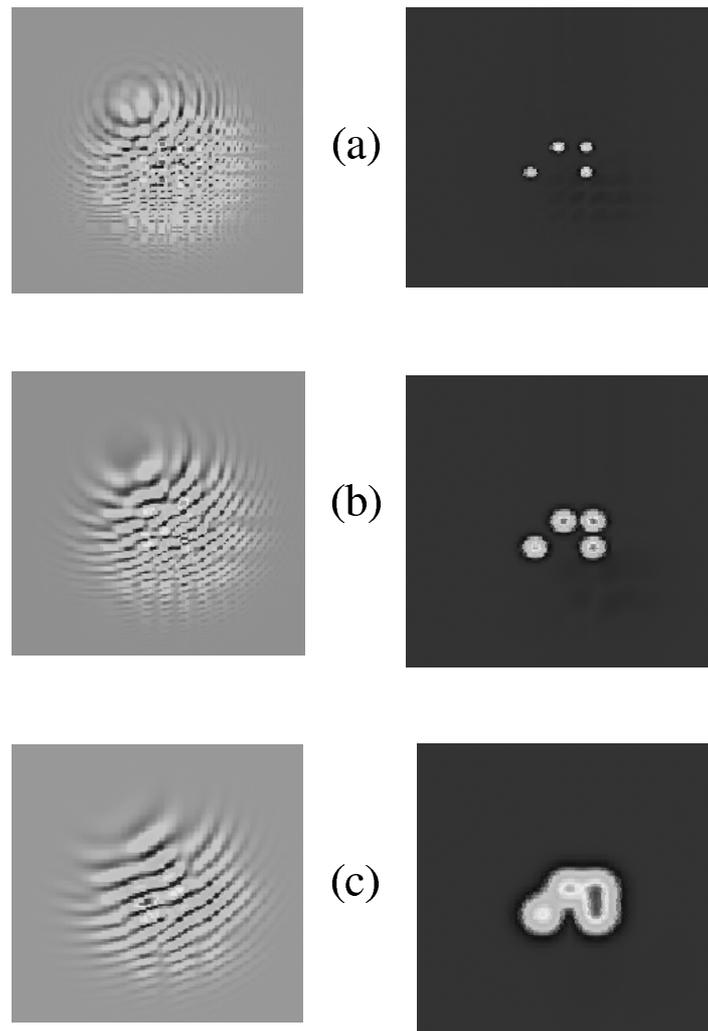


FIG. 2.20 – Effet du rapport $\Gamma = l/L$ sur la résolution en synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique bidimensionnel. Colonne de gauche : image non traitée. Colonne de droite : image après traitement de synthèse d'ouverture. a) $L=100 \times \frac{2}{3}$ cm, $a=1$ cm, $l=100 \times \frac{1}{3}$ cm, $\Gamma = 1/2$. b) $L=100 \times \frac{1}{2}$ cm, $a=1$ cm, $l=100 \times \frac{1}{2}$ cm, $\Gamma=1$. c) $L=100 \times \frac{1}{3}$ cm, $a=1$ cm, $l=100 \times \frac{2}{3}$ cm, $\Gamma=2$. Paramètres numériques : $\omega_0=300$ μm , $\lambda=1064$ nm, $\Delta x=0,04$ mm, $\Delta y=0,08$ mm [35].

2.4.6 Résultats expérimentaux

Pour illustrer expérimentalement l'amélioration des images LOFI par la technique de synthèse d'ouverture, nous avons réalisé une expérience sur un motif bidimensionnel diffusant composé de quatre cibles ponctuelles. Le but de cette expérience est de montrer qu'on peut résoudre un motif dont le détail est plus fin que le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser et vérifier donc que l'on peut obtenir après filtrage adapté une image avec une résolution au-delà de la limite de diffraction.

2.4.6.1 Montage et acquisition du signal

La Figure 2.21 représente le schéma de principe de l'expérience d'imagerie LOFI à synthèse d'ouverture bidimensionnelle. Les miroirs galvanométriques M_x et M_y sont pilotés par une carte d'acquisition qui délivre deux rampes de tension : une lente $V_x(t)$ d'une période T_x , proportionnelle à α_x qui commande le miroir M_x et une rapide $V_y(t)$ d'une période T_y , proportionnelle à α_y qui commande M_y . Les paramètres expérimentaux sont récapitulés dans le tableau 2.2. Le protocole de balayage se fait en deux étapes (en supposant que lorsqu'un miroir est en mouvement, l'autre est fixe) comme le montre la Figure 2.22. Pour une position x , l'angle α_y augmente régulièrement pour scanner la cible selon la direction y (ou parallèle) avec une vitesse angulaire constante $\dot{\alpha}_y$. Puis, l'angle α_x est incrémenté de $d\alpha_x$ pour déplacer le faisceau laser sur la cible selon la direction x (ou transversale) de la position x à la position $x + dx$ (avec $dx = (a+l)2d\alpha_x$). Ces deux étapes successives du protocole de balayage sont répétées jusqu'à ce que la cible soit complètement scannée.

Pour chaque position angulaire des miroirs, on fait l'acquisition des signaux $p(t)$ et $q(t)$ en sortie de la démodulation synchrone à la fréquence de décalage F_e , échantillonnés temporellement au pas dt , selon la direction y et spatialement tous les dx selon la direction x . On choisit un temps d'intégration de la détection synchrone T_{int} le plus proche du pas d'échantillonnage dt , parmi les valeurs disponibles. On forme ensuite numériquement la matrice du signal LOFI $[\mathbf{s}] = [\mathbf{p}] + j[\mathbf{q}]$, dont le module correspond à l'image non traitée. On calcule la matrice \mathbf{S} de la transformée de Fourier numérique du signal LOFI. Le filtrage adapté consiste alors simplement au produit matriciel \mathbf{G} du signal \mathbf{S} par la matrice de la transformée de Fourier du filtre \mathbf{H} et on affiche la transformée de Fourier inverse du résultat $TF[\mathbf{G}]^{-1}$, qui correspond à l'image traitée.

La cible est constituée de deux bifentes croisées, transparentes à laquelle nous avons apposé derrière un matériau rétro-réflécteur, de manière à former un motif composé de quatre carrés,

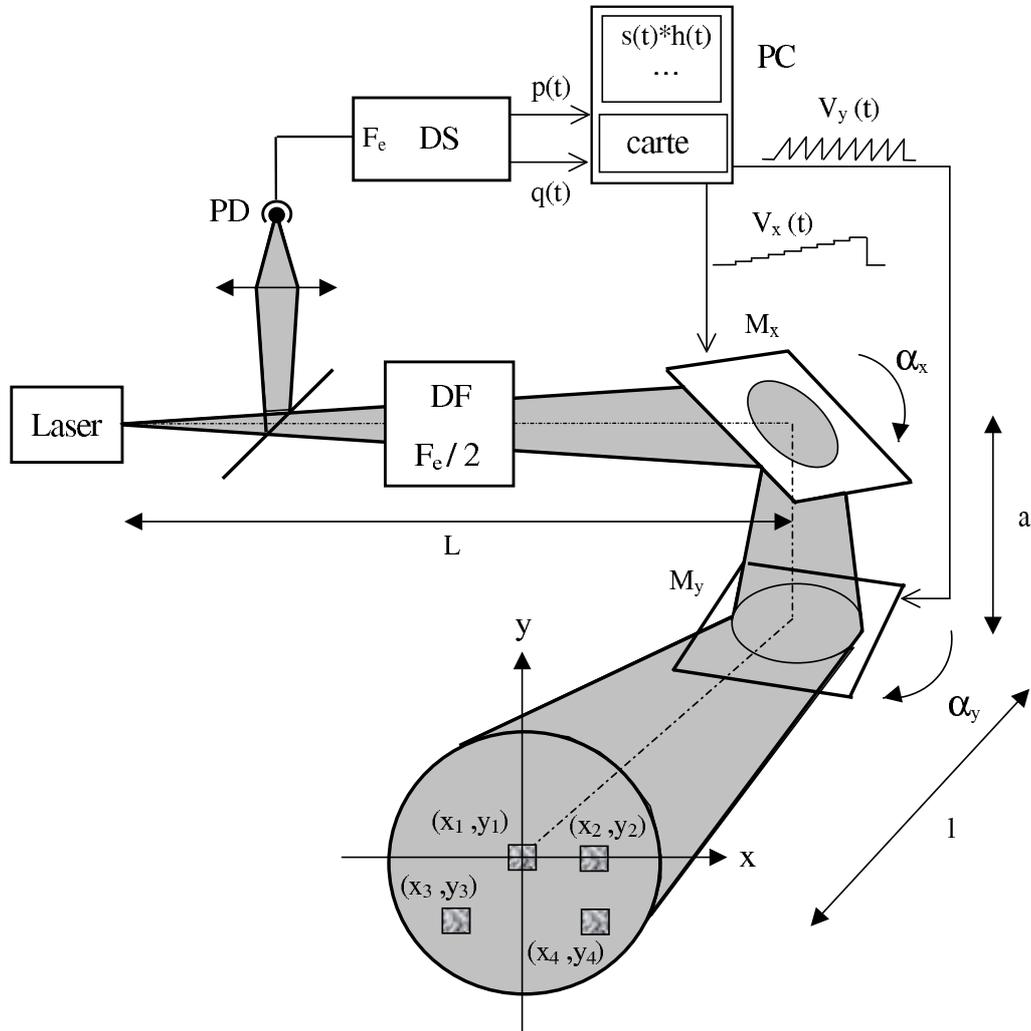


FIG. 2.21 – Schéma de principe de l'imagerie laser LOFI à synthèse d'ouverture utilisant un balayage galvanométrique bidimensionnel. PD : photodiode, DS : détection synchrone, DF : décalage en fréquence. L est la distance laser-miroir M_x , a est la distance miroir M_x - M_y , l est la distance miroir M_y -cible, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) et (x_4, y_4) sont les positions des cibles ponctuelles. La rotation du miroir M_x permet de scanner la cible selon la direction x et la rotation du miroir M_y permet de scanner la cible selon la direction y . Les miroirs M_x et M_y sont pilotés par le PC et la carte d'acquisition qui envoient respectivement une rampe de tension lente $V_x(t)$ proportionnelle à la variation d'angle α_x du miroir M_x et une rampe de tension rapide $V_y(t)$ proportionnelle à la variation d'angle α_y du miroir M_y . Lorsqu'un miroir est en mouvement, l'autre est immobile.

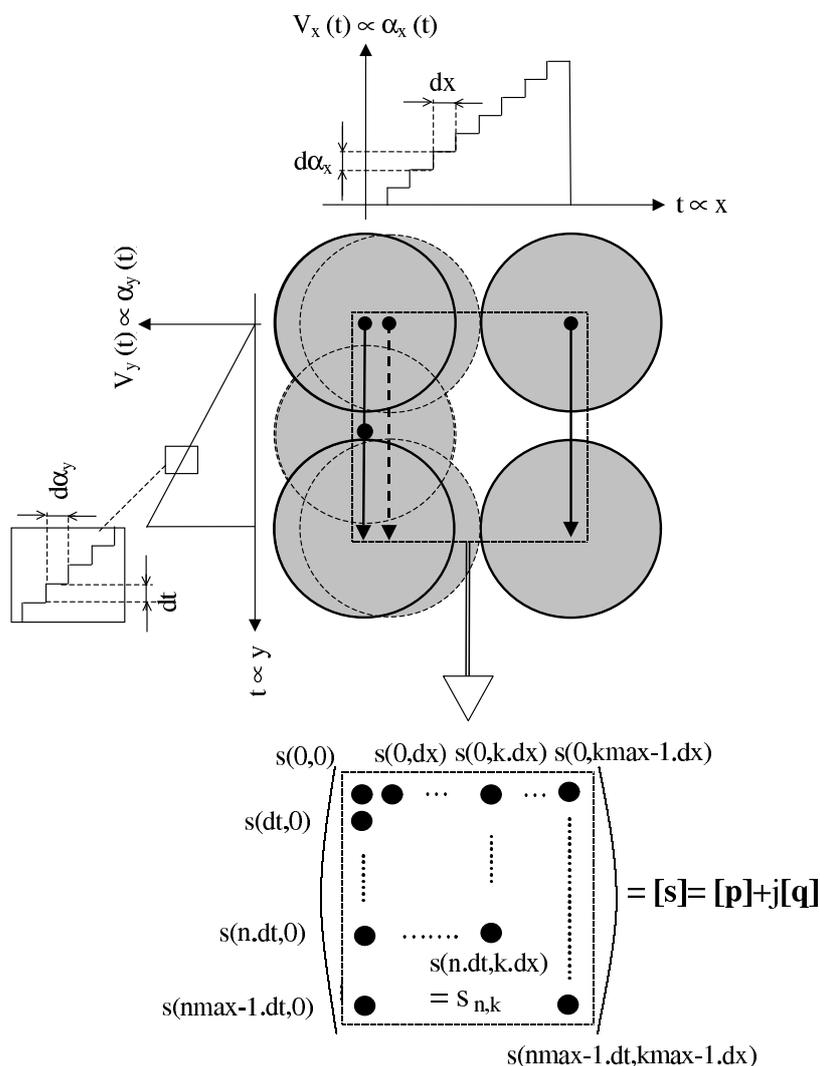


FIG. 2.22 – Protocole de balayage 2D de la cible et acquisition du signal LOFI : $d\alpha_x$: pas d'échantillonnage angulaire selon la direction x , $d\alpha_y$: pas d'échantillonnage angulaire selon la direction y . $dx = 2ld\alpha_x$: pas d'échantillonnage spatial selon la direction x , dt : pas d'échantillonnage temporel selon la direction y . Pour une position x , l'angle α_y augmente régulièrement pour scanner la cible selon la direction y (ou parallèle) avec une vitesse angulaire constante $\dot{\alpha}_y$. Puis, l'angle α_x est incrémenté de $d\alpha_x$ pour déplacer le faisceau laser sur la cible selon la direction x (ou transversale) de la position x à la position $x + dx$. Ces deux étapes successives du protocole de balayage sont répétées jusqu'à ce que la cible soit complètement scannée. On fait l'acquisition du signal LOFI $\mathbf{s}(t, x) = \mathbf{p}(t, x) + j\mathbf{q}(t, x)$ pour chaque position successive du faisceau laser et on construit ainsi une matrice $[\mathbf{s}]$. L'élément $s_{n,k}$ correspond à la $n^{\text{ième}}$ mesure selon la direction y pour la $k^{\text{ième}}$ position x . k_{\max} est le nombre d'éléments selon la direction x et n_{\max} est le nombre d'éléments selon la direction y .

qui correspondent à l'intersection des deux bifentes. Le support de chaque bifente est un plastique noir qui absorbe la lumière qui n'arrive pas sur l'un des quatre carrés. Comme la largeur de chaque fente est de $100\ \mu\text{m}$, la taille d'un carré est donc de $100\ \mu\text{m} \times 100\ \mu\text{m} < \delta x, \delta y \approx 150\ \mu\text{m}$: on peut donc considérer chaque carré comme une cible ponctuelle. L'espacement entre chaque carré est inférieur au diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser au niveau de la cible ($500\ \mu\text{m} \times 500\ \mu\text{m} < D$).

2.4.6.2 Estimation et ajustement des paramètres du filtre adapté

Nous avons vu que l'on peut estimer assez fidèlement la largeur de bande B et la fréquence centrale F_{dop} de la réponse fréquentielle d'une cible, et donc du filtre adapté, à partir du spectre de la réponse de deux cibles ponctuelles (Figure 2.15). Les Fig.2.23(a) et 2.23(b) représentent les spectres expérimentaux du signal LOFI obtenus selon la direction transversale x et parallèle y pour le motif composé des quatre cibles. La comparaison entre les résultats expérimentaux et les filtres adaptés calculés numériquement à partir des Eqs.(2.84) à (2.87) permet d'estimer les décalages de l'axe de visée du laser Δx et Δy en mesurant le décalage Doppler fréquentiel pour chaque direction $F_{dop,x}$ et $F_{dop,y}$. On mesure $F_{dop,x}=3,6\ \text{Hz}$ et $F_{dop,y}=290\ \text{Hz}$ et connaissant $\dot{\alpha}_x = 10^{-3}\ \text{rad.s}^{-1}$ et $\dot{\alpha}_y = 10^{-1}\ \text{rad.s}^{-1}$ et $\lambda=1064\ \text{nm}$, on en déduit $\Delta x \approx 900\ \mu\text{m}$ et $\Delta y \approx 725\ \mu\text{m}$.

2.4.6.3 Compression 2D

La Figure 2.24(a) montre l'image brute des quatre cibles ponctuelles, qui correspond au module de la matrice du signal LOFI avant filtrage adapté, c'est à dire telle qu'on l'obtient par le balayage galvanométrique 2D. Comme la résolution de l'image est limitée par le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser au niveau du motif, on ne sépare pas les cibles. La Figure 2.24(b) représente traitée, qui correspond au module de la matrice du signal LOFI après filtrage adapté 2D. Le filtre synthétise dans chaque direction et on observe alors quatre tâches qui correspondent aux maxima de la fonction de corrélation du filtrage, c'est à dire à la position des quatre cibles. La résolution de chaque tâche correspond environ à la résolution théorique de $150\ \mu\text{m} \times 150\ \mu\text{m}$ et l'écart entre les maxima d'intensité correspond bien à l'écart entre les cibles de $500\ \mu\text{m} \times 500\ \mu\text{m}$. L'image est bruitée, car la surface du support du motif n'est pas parfaitement absorbante et le laser détecte donc une petite quantité de lumière renvoyée par celle-ci. Le filtre opère alors indifféremment sur les cibles du motif et sur les résidus parasites rétroreflecteurs du support, ce qui a pour résultat une image où le maximum d'intensité correspond à la position

Paramètres du laser
Longueur d'onde : $\lambda = 1064 \text{ nm}$
Waist : $\omega_0 = 550 \text{ }\mu\text{m}$
Diamètre du faisceau laser au niveau de la cible : $D \approx 2,2 \text{ mm}$
Paramètres géométriques
Distance laser-miroir M_x : $L = 145 \text{ cm}$
Distance miroir M_y -cible : $l = 40 \text{ cm}$
Distance miroir M_x -miroir M_y : $a = 2,5 \text{ cm}$
Distance d'observation : $h = 187,5 \text{ cm}$
Rapport galvanométrique : $\Gamma \approx 0,27$
Résolution synthétique de l'image : $\delta x \approx \delta y = 150 \text{ }\mu\text{m}$
Décalages de l'axe de visée : $\Delta x = 900 \text{ }\mu\text{m}$ et $\Delta y \approx 725 \text{ }\mu\text{m}$
Taille d'une cible : $100 \text{ }\mu\text{m} \times 100 \text{ }\mu\text{m} < \delta_y, \delta_x$
Espacement entre les cibles : $500 \text{ }\mu\text{m} \times 500 \text{ }\mu\text{m} < D$
Paramètres d'acquisition
Balayage
Période des rampes de tension : $T_x = 10 \text{ s}$, $T_y = 100 \text{ ms}$
Vitesses angulaires des miroirs : $\dot{\alpha}_x = 10^{-3} \text{ rad.s}^{-1}$, $\dot{\alpha}_y = 10^{-1} \text{ rad.s}^{-1}$
Vitesse linéaire de balayage selon la direction y : $v \approx 2l\dot{\alpha} = 8.10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$
Echantillonnage
Nombre d'échantillons : $n_{max} = 100$, $k_{max} = 100$
Pas d'échantillonnages angulaires : $d\alpha_x = 10^{-4} \text{ rad}$, $d\alpha_y = 10^{-4} \text{ rad}$
Pas d'échantillonnages spatiaux : $dy \approx 80 \text{ }\mu\text{m}$, $dx \approx 80 \text{ }\mu\text{m}$
Pas d'échantillonnage temporel selon la direction y : $dt = 1 \text{ ms}$
Temps d'intégration : $T_{int} = 1 \text{ ms}$
Filtrage
Largeur de bande du filtre : $B_x \approx 6,7 \text{ Hz}$, $B_y \approx 680 \text{ Hz}$
Décalage Doppler du filtre : $F_{dop,x} \approx 3,6 \text{ Hz}$, $F_{dop,y} \approx 290 \text{ Hz}$

TAB. 2.2 – Synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique 2D : paramètres expérimentaux

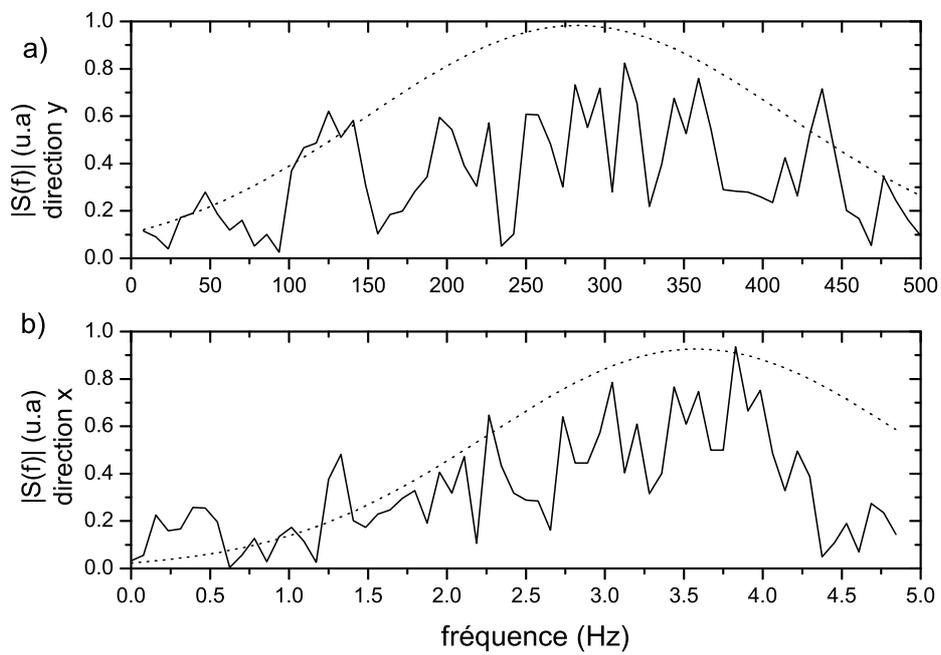


FIG. 2.23 – Module du spectre expérimental du signal LOFI et du spectre du filtre adapté (pointillés) a) selon la direction parallèle y pour une position $x = -500 \mu\text{m}$. b) selon la direction transversale x pour une position $y = 500 \mu\text{m}$.

des quatre cibles et le bruit de fond au support légèrement diffusant du motif. Il est possible d'améliorer le contraste par un effet de seuillage de l'image. De plus, la qualité de l'image n'est pas excellente, car le rapport du signal sur bruit est peu élevé, du fait que la quantité de lumière renvoyée par les quatre cibles de $100\mu\text{m}\times 100\mu\text{m}$ par rapport au diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser $D \approx 2,2$ mm est faible. Il faut donc trouver un compromis entre la résolution spatiale et la sensibilité de mesure : plus on éclaire le motif avec un diamètre de faisceau laser grand, meilleure est la résolution synthétique, mais on répartit alors l'énergie sur une surface plus importante, et le signal sur bruit diminue alors. Une solution consisterait à utiliser une source laser plus puissante, car celle dont nous disposons ne délivre que quelques milliwatts. En outre, il n'est pas forcément opportun de travailler au voisinage de la fréquence de relaxation du laser pour bénéficier du gain dynamique (Eq.(1.6)), car la mesure est alors perturbée par le bruit du laser.

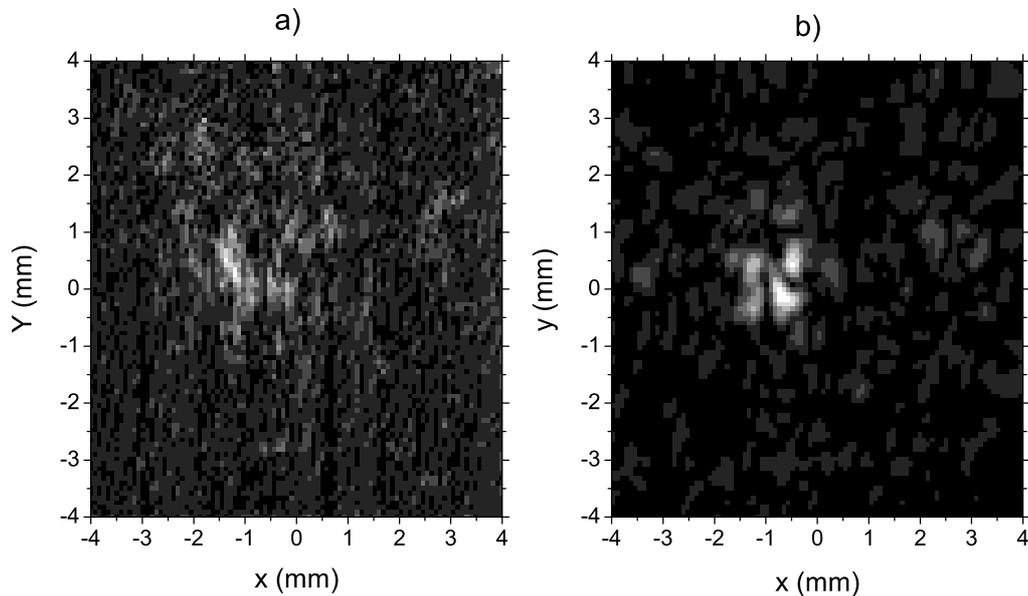


FIG. 2.24 – a) Image LOFI brute non traitée de quatre cibles espacées selon la direction x de $500\ \mu\text{m}$ et selon la direction y de $500\ \mu\text{m}$. b) Image LOFI après filtrage adapté. Diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser $D=2,2$ mm.

2.4.6.4 Reconnaissance de forme

Nous avons réalisé dans les mêmes conditions expérimentales que précédemment l'image d'une lettre X transparente imprimée sur un support en plastique noir. Nous avons apposé derrière le matériau rétroreflécteur afin que la lettre se comporte comme une cible diffusante.

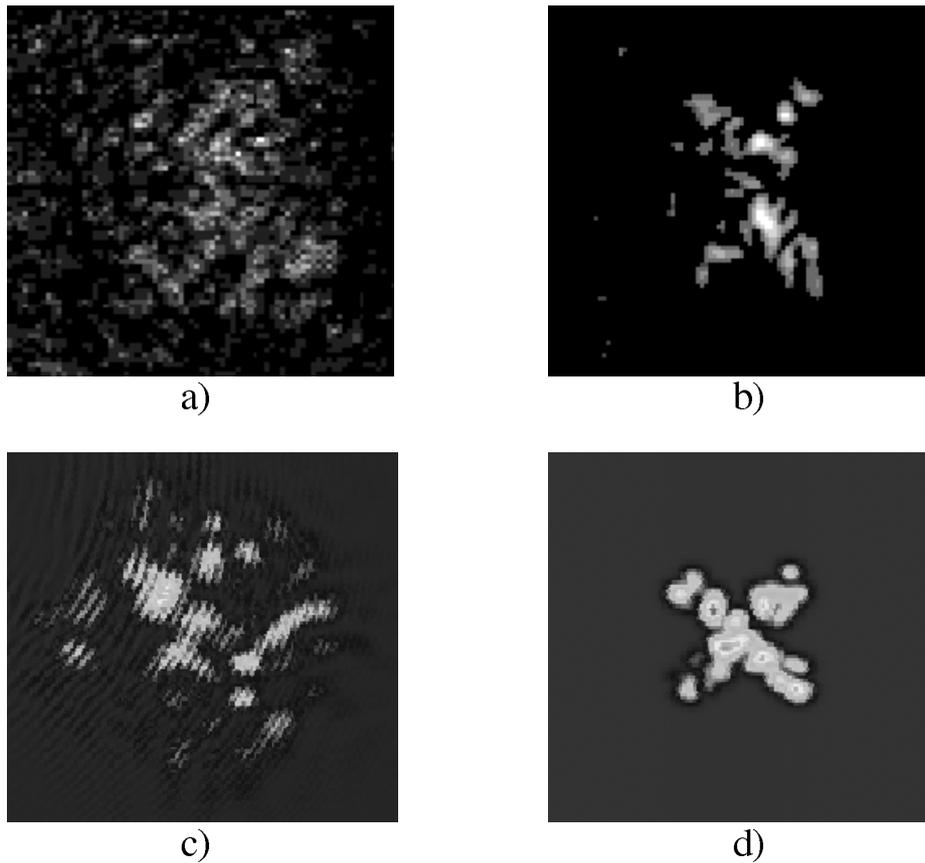


FIG. 2.25 – *Imagerie LOFI à synthèse d'ouverture 2D. a) image LOFI expérimentale brute. b) image LOFI expérimentale après synthèse d'ouverture 2D. c) image numérique brute. d) image numérique après synthèse d'ouverture 2D. Dimensions de la lettre X : 1 mm × 2 mm [35].*

Cette expérience a pour but de voir si qualitativement, la synthèse d'ouverture permet d'augmenter la finesse des détails d'une image LOFI. La dimension de la lettre (1mm×2mm) est plus petite que la taille du diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser qui l'illumine ($D \approx 2,2$ mm). Sans traitement de synthèse d'ouverture, la Fig.2.25(a) représente l'image LOFI brute et rien n'est lisible. La Fig.2.25(b) représente l'image LOFI après synthèse d'ouverture : la lettre X est maintenant lisible malgré un effet de speckle important qui provient de la structure en petites billes du matériau rétroreflécteur. Chaque bille se comporte comme une source de lumière

et l'interaction cohérente des ondes réémises va former un motif de speckle. A titre de comparaison, les Fig.2.25(c) et Fig.2.25(d) montrent, pour les mêmes conditions expérimentales, respectivement l'image standard et l'image après traitement par filtrage adapté d'une lettre X modélisée numériquement, par une densité de réflecteurs ponctuels proche du matériau, que l'on a évaluée au microscope optique. On observe un résultat comparable à l'image obtenue expérimentalement. Ainsi, si la qualité de l'image après filtrage n'est pas excellente, par rapport à l'image brute, la synthèse d'ouverture permet de reconnaître la forme de la lettre X, ce qui prouve une amélioration de la résolution des images LOFI.

2.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le principe de l'imagerie LOFI à synthèse d'ouverture. Cette technique repose sur le balayage galvanométrique de la cible à imager et a pour objectif d'améliorer la résolution des images au-delà de la limite de diffraction. Nous avons tout d'abord expliqué le principe de la synthèse d'ouverture dans le cas simple du balayage en translation. En faisant l'acquisition du signal renvoyé par la cible pour différentes positions du laser, on accède à davantage d'informations que pour une prise de vue unique, ce qui revient à augmenter synthétiquement l'ouverture de collection du système et donc la résolution spatiale. Le signal renvoyé par une cible ponctuelle a alors une dépendance quadratique en fonction de la position du laser. Nous avons montré comment le filtre adapté, qui correspond à la signature de cette cible ponctuelle, permet de comprimer le signal acquis pour les différentes positions du laser et ainsi localiser la position d'une cible avec une précision meilleure que le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau d'éclairement. La résolution en synthèse d'ouverture à balayage en translation est égale à la taille de l'ouverture caractéristique d'émission du système, qui est le waist du laser dans notre cas. Puis, nous avons présenté l'analyse menée pour déterminer le filtre adapté et la résolution dans le cas d'un balayage galvanométrique. Le signal renvoyé par une cible ponctuelle a une dépendance quadratique en fonction de l'angle de rotation du miroir, ce qui est l'analogue dans le domaine angulaire du résultat obtenu avec un balayage en translation dans le domaine spatial. Par rapport à la synthèse d'ouverture à balayage en translation, la résolution est encore indépendante de la longueur d'onde, proportionnelle à l'ouverture du système et proportionnelle à un facteur Γ égal au rapport de la distance scanner-cible sur la distance laser-scanner. En minimisant ce rapport, il est donc possible d'atteindre une résolution meilleure que celle obtenue

en synthèse d'ouverture à balayage en translation. Enfin, nous avons étendu ce résultat à deux dimensions en déterminant le filtre adapté pour un balayage galvanométrique bidimensionnel. Nous avons montré que ce problème 2D se ramène à deux problèmes 1D indépendants : selon chaque direction, le filtre adapté a une dépendance quadratique en fonction de l'angle de rotation du miroir assurant le balayage de la direction correspondante. La résolution de l'image est alors approximativement la même dans les deux directions, et vaut la résolution déterminée dans le cas 1D. Nous avons enfin montré expérimentalement qu'il est possible d'améliorer la résolution d'une image LOFI au-delà de la limite de diffraction en appliquant un filtrage adapté à deux dimensions sur l'image de base.

En vue des résultats obtenus, nous pouvons conclure que la technique de synthèse d'ouverture à balayage galvanométrique est plus adaptée à l'imagerie à courte distance comme la microscopie. En effet, il est alors possible d'atteindre non seulement une résolution meilleure que la limite de diffraction, mais surtout une résolution fortement améliorée par rapport au balayage en translation, par le rapport galvanométrique Γ . Il est en principe possible d'atteindre la limite ultime de résolution en champ lointain qui est la longueur d'onde du rayonnement. Même à des distances d'observation suffisamment courtes pour que le faisceau laser puisse être focalisé à la longueur d'onde, l'imagerie à synthèse d'ouverture peut avoir un avantage significatif : par exemple, lorsque la distance de la cible à imager est supérieure à la distance de focalisation, alors un imageur conventionnel est limité par la diffraction. On peut alors considérer la synthèse d'ouverture comme un cas particulier d'un imageur confocale généralisé [36]. A longue distance, la résolution est dégradée par le facteur Γ et de plus, les perturbations atmosphériques (courant d'air, gradient de températures) induisent des fluctuations de phase qui rendent la mesure très difficile, voire impossible. Une optique adaptative est alors nécessaire pour pouvoir mesurer correctement la phase, essentielle à la reconstruction en synthèse d'ouverture.

Les perspectives de ce travail sont d'une part d'étudier expérimentalement l'amélioration de la résolution en balayage galvanométrique en fonction des paramètres géométriques. Cette étude amènera à s'intéresser à la notion d'ouverture équivalente lorsqu'on opère une synthèse d'ouverture en propagation non libre, c'est à dire lorsqu'on insère une lentille sur le chemin optique entre le laser et la cible, afin de simuler des distances de travail non accessibles avec l'encombrement de l'expérience [18].

D'autre part, il serait intéressant d'étudier le rapport signal sur bruit résultant de la détection hétérodyne du signal renvoyé par la cible lorsqu'on opère une synthèse d'ouverture, et plus par-

ticulièrement dans notre cas où l'on est limité par le bruit du laser. Pour cela, il faut prendre en considération la limite imposée par la statistique de photons pour laquelle la reconstruction du signal est possible [37, 38, 39]. D'autre part, dans l'idée de réaliser une synthèse d'ouverture en milieux diffusants, il est nécessaire d'étudier les erreurs de phases induites par les inhomogénéités du milieu afin d'estimer la résolution que l'on peut atteindre [40, 31].

Une autre perspective serait de mettre à profit la phase standard LOFI dans l'expression du filtre adapté pour réaliser une focalisation numérique. En effet, il serait possible de séparer deux cibles en profondeur en adaptant la phase standard du filtre qui correspond à la distance entre le laser et la cible choisie. Ainsi, on pourrait arriver à synthétiser en profondeur, résoudre les deux cibles, ce qui reviendrait à pouvoir focaliser la lumière sur l'une d'entre-elles.

Enfin, l'interférométrie en synthèse d'ouverture est une technique couramment utilisée en radar et qui a pour but de réaliser des images 3D où la troisième distance est obtenue par interférométrie entre deux prises de vues d'une même scène [13]. On pourrait donc associer cette méthode à l'imagerie LOFI et ainsi réaliser de l'imagerie laser tridimensionnelle à haute sensibilité de détection, et en configuration auto-alignée.

Chapitre 3

LOFI paramétrique

3.1 Introduction

La motivation de cette troisième partie à caractère plus fondamental vient de la culture de l'équipe pour la dynamique des lasers. Le comportement d'un laser soumis à une réinjection optique peut être très différent selon le type de laser utilisé, la quantité de lumière rétrodiffusée [41], le décalage ou non en fréquence, ou encore selon que le pompage du laser est constant ou modulé. Nous avons vu au chapitre 1 que la technique LOFI est basée sur la grande sensibilité de certains lasers à la réinjection optique, qui leur confère un gain dynamique intrinsèque permettant de détecter de très faibles quantité de lumière rétrodiffusée. Dans l'idée de toujours augmenter ce gain, des travaux antérieurs ont montré qu'en superposant à la réinjection optique décalée en fréquence, une réinjection optique non décalée en fréquence, on arrive à générer des instabilités de Hopf dans la réponse du laser pour amplifier encore davantage le signal LOFI, et donc d'améliorer la sensibilité du système [23]. D'un point de vue mathématique, des études ont montré comment analyser et déterminer l'évolution de la stabilité de la réponse d'un laser soumis à une réinjection optique à l'aide d'une analyse multi-échelle [24]. Dans ce chapitre, nous allons montrer comment contrôler et mettre à profit le régime non linéaire du système LOFI, qui est basé sur l'exploitation conjointe de l'amplitude et la phase du signal de modulation de l'intensité laser. On se propose pour cela de superposer une modulation de pompage à la réinjection optique décalée en fréquence. Le laser est alors doublement modulé : d'une part, par la réinjection optique qui induit une modulation des pertes de la cavité, et d'autre part, par la modulation de pompage. En synchronisant les pulsations de modulation, on souhaite atteindre un régime d'instabilité paramétrique (c'est à dire dépendant d'un paramètre qui est ici la modulation de

pompage) afin d'amplifier encore davantage le signal rétrodiffusé et déterminer la quantité de lumière réinjectée dans la cavité.

3.2 Double modulation : régime forcé

Dans un premier temps, nous allons décrire le comportement du laser soumis à la double modulation à l'aide d'une analyse linéaire, semblable à celle menée au premier chapitre pour déterminer l'expression du signal LOFI. Nous allons ainsi pouvoir déterminer la réponse du laser lorsqu'il est soumis, soit à la modulation de pompage, soit à la réinjection optique, soit les deux.

3.2.1 Equations de base

Reprenons les équations de base d'un laser soumis à une faible réinjection (Eq.(1.1)) auquel on superpose une modulation de pompage

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma_1 [N_0 (1 + m_N \cos(\Omega_N t + \Phi_N)) - N(t)] - BN(t) |E(t)|^2, \quad (3.1a)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \left[i(\omega_c - \omega) + \frac{1}{2}(BN(t) - \gamma_c) \right] E(t) + \gamma_e E(t - t_e) e^{i\Omega_e t} e^{-i\omega t_e} \quad (3.1b)$$

La modulation de pompage est caractérisée par le taux de modulation m_N , la pulsation Ω_N , et la phase Φ_N . On fait l'hypothèse que la réinjection dans la cavité est suffisamment faible pour que la pulsation optique ω du champ électrique ne soit pas modifiée ($\omega_c \approx \omega$). Cela revient à dire qu'on prendra toujours comme pulsation optique celle de l'émission laser. On suppose également que le temps de vol est bien inférieur à la période de décalage en pulsation ($\Omega_e t_e \ll 1$), ce qui permet de négliger le retard temporel dans les équations. Dans cette étude, nous allons nous intéresser à l'amplitude de la modulation de l'intensité laser, donc on peut se passer de l'information de phase du champ électrique. En posant $I = |E(t)|^2$ on se ramène au système d'équations suivant

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma_1 [N_0 (1 + m_N \cos(\Omega_N t + \Phi_N)) - N(t)] - BN(t)I(t) \quad (3.2a)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t) [BN(t) - \gamma_c (1 + m_I \cos(\Omega_I t + \Phi_I))] \quad (3.2b)$$

La modulation d'intensité du laser est caractérisée par la pulsation Ω_I , la phase Φ_I (Eq.(1.9b))

et le taux de modulation m_I

$$m_I = -2\sqrt{R_e} = -2\frac{\gamma_e}{\gamma_c} \quad (3.3)$$

Le signe moins dans l'Eq.(3.3) traduit le fait que la réinjection rajoute des photons dans la cavité laser.

3.2.2 Analyse linéaire

Pour une réinjection faible ($m_I \ll 1$), le système d'équations différentielles (3.2) peut être résolu par linéarisation en posant

$$N(t) = N_s + \Delta N(t) \quad \text{avec} \quad \Delta N(t) \ll N_s \quad (3.4a)$$

$$I(t) = I_s + \Delta I(t) \quad \text{avec} \quad \Delta I(t) \ll I_s \quad (3.4b)$$

où $\Delta N(t)$ et $\Delta I(t)$ représentent des petites variations autour des états stationnaires N_s et I_s (Eqs.(1.4)), qui correspondent à des perturbations du premier ordre. En substituant les équations (3.4) dans le système d'équations différentielles (3.2), on obtient alors l'équation différentielle du second ordre suivante sur la variation d'intensité stationnaire du laser

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta I(t)}{dt^2} + \eta\gamma_1 \frac{d\Delta I(t)}{dt} + \Omega_R^2 \Delta I(t) = & \eta\gamma_1\gamma_c I_s m_N \cos(\Omega_N t + \Phi_N) + \eta\gamma_1\gamma_c I_s m_I \cos(\Omega_I t + \Phi_I) \\ & + \Omega_I \gamma_c I_s m_I \sin(\Omega_I t + \Phi_I) \end{aligned} \quad (3.5a)$$

L'Eq.(3.5) correspond à l'équation d'un oscillateur harmonique, de fréquence propre égale à la fréquence de relaxation du laser $\Omega_R = \sqrt{\gamma_1\gamma_c(\eta - 1)}$, amorti par le terme $\eta\gamma_1$ et dont le régime est forcé par la réinjection optique (ou la modulation des pertes de la cavité) avec une amplitude proportionnelle au taux de réinjection m_I et par la modulation de pompage avec une amplitude proportionnelle au taux de modulation m_N . Par linéarité, on peut en conséquence décomposer la solution de l'équation différentielle comme une somme de deux perturbations, celle provenant uniquement de la réinjection optique $\Delta I_I(t)$ et celle provenant uniquement de la modulation de pompage $\Delta I_N(t)$ que l'on écrit

$$\Delta I(t) = \Delta I_I(t) + \Delta I_N(t) \quad (3.6)$$

Pour chaque contribution, on cherche respectivement une solution sous la forme $\Delta I_I(t) = A_I \cos(\Omega_I t + \Phi_I + \Phi_{A_I})$ et $\Delta I_N(t) = A_N \cos(\Omega_N t + \Phi_N + \Phi_{A_N})$. Lorsque le laser est soumis uniquement à une réinjection optique et pas de modulation de pompage ($m_N = 0, m_I \neq 0$), la solution à l'Eq.(3.5) aboutit à l'amplitude du signal LOFI (Eq.(1.5)), résonante à la pulsation de relaxation, et à la phase dynamique additionnelle

$$A_I = \frac{\gamma_c I_s m_I}{\left[4(\Omega_I - \Omega_R)^2 + (\eta\gamma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.7a)$$

$$\tan \Phi_{A_I} = \frac{2(\Omega_I - \Omega_R)}{\eta\gamma_1} \quad (3.7b)$$

A la résonance ($\Omega_I = \Omega_R$), on obtient le contraste de modulation de l'intensité du laser, proportionnel au taux de modulation des pertes de la cavité m_I , et donc à la quantité de lumière réinjectée dans la cavité, ou encore à la réflectivité effective de la cible, et d'autant plus grand que le rapport des paramètres dynamiques γ_c/γ_1 est grand

$$\frac{\Delta I_I}{I_s} = \frac{\gamma_c m_I}{\eta\gamma_1} = \frac{2\gamma_c \sqrt{R_e}}{\eta\gamma_1} \quad (3.8)$$

Lorsque le laser est soumis uniquement à une modulation de pompage et aucune réinjection optique ($m_N \neq 0, m_I = 0$), la solution de l'Eq.(3.5) donne l'amplitude, résonante à la pulsation de relaxation, et la phase additionnelle de la variation d'intensité du laser

$$A_N = \frac{\eta\gamma_1 \gamma_c I_s m_N \Omega_R^{-1}}{\left(4(\Omega_N - \Omega_R)^2 + (\eta\gamma_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.9a)$$

$$\tan \Phi_{A_N} = \frac{\eta\gamma_1}{2(\Omega_N - \Omega_R)} \quad (3.9b)$$

A la résonance ($\Omega_N = \Omega_R$), on obtient le contraste de modulation de l'intensité du laser uniquement soumis à une modulation de pompage, qui est proportionnel au taux de modulation de pompage, et qui est d'autant plus grand que le rapport $\sqrt{\gamma_c/\gamma_1}$ est grand

$$\frac{\Delta I_N}{I_s} = \frac{\gamma_c m_N}{\Omega_R} = m_N \sqrt{\frac{\gamma_c}{\gamma_1}} \frac{1}{\sqrt{\eta - 1}} \quad (3.10)$$

On note que l'amplification dynamique du laser est moins importante en modulation de pompage qu'en modulation des pertes. Dans le cas où les deux modulations sont synchrones ($\Omega_N = \Omega_I$), on peut trouver une condition destructive pour laquelle $\Delta I(t) = 0$ qui vérifie

$$A_N = A_I \quad (3.11a)$$

$$\Phi_N + \Phi_{A_N} = \Phi_I + \Phi_{A_I} + \pi \quad (3.11b)$$

En utilisant les Eqs.(3.7) et (3.9), on aboutit à la relation simple qui exprime le taux de modulation des pertes de la cavité, c'est à dire la quantité de lumière réinjectée, en fonction du taux de modulation de pompage et des paramètres dynamiques du laser, pour une condition d'accord de phase

$$m_I = \frac{\eta\gamma_1 m_N}{\Omega_R} \quad (3.12a)$$

$$\Phi_I = \Phi_N \pm \frac{\pi}{2} \quad (3.12b)$$

En ajustant le taux de modulation de pompage m_N pour réaliser l'interférence destructive de l'intensité du laser, et en connaissant les paramètres dynamiques du laser η , γ_1 et Ω_R , on peut déterminer le taux de modulation m_I , c'est à dire la quantité de lumière réinjectée dans le laser, proportionnelle à la réflectivité effective de la cible (Eq.(3.3)).

3.2.3 Résultat numérique

Pour illustrer ce résultat et comprendre comment on contrôle la condition d'interférence destructive, il est commode de visualiser le signal de modulation en coordonnées polaires, qui correspond au cercle LOFI (Figure 1.4) lorsqu'on fait varier la phase Φ_I entre 0 et 2π . En représentant soit l'amplitude $A(R_e)$ et la phase $\Phi_I(d_e)$ de la modulation, soit les composantes en quadratures $p(R_e, d_e)$ et $q(R_e, d_e)$ données par la démodulation du signal à la fréquence de décalage Ω_I (Eq.(1.10)), on obtient un cercle centré sur l'origine, qui correspond à la condition $m_I = 0$ (c.-à-d. pas de signal LOFI). La Fig.3.1 représente une simulation numérique de la résolution du système d'équations du laser doublement modulé et synchronisé ($\Omega_I = \Omega_N$). Quand il y a juste la réinjection et pas de modulation de pompage ($m_N = 0, m_I \neq 0$), le cercle est centré sur zéro et son rayon est proportionnel à l'amplitude de modulation A_I . Quand on applique la modulation de pompage, on voit que le cercle se décentre. L'addition des deux modulations que décrit l'Eq.(3.6), peut se traduire sous forme vectorielle comme l'addition de deux vecteurs, comme le montre la Fig.3.2.

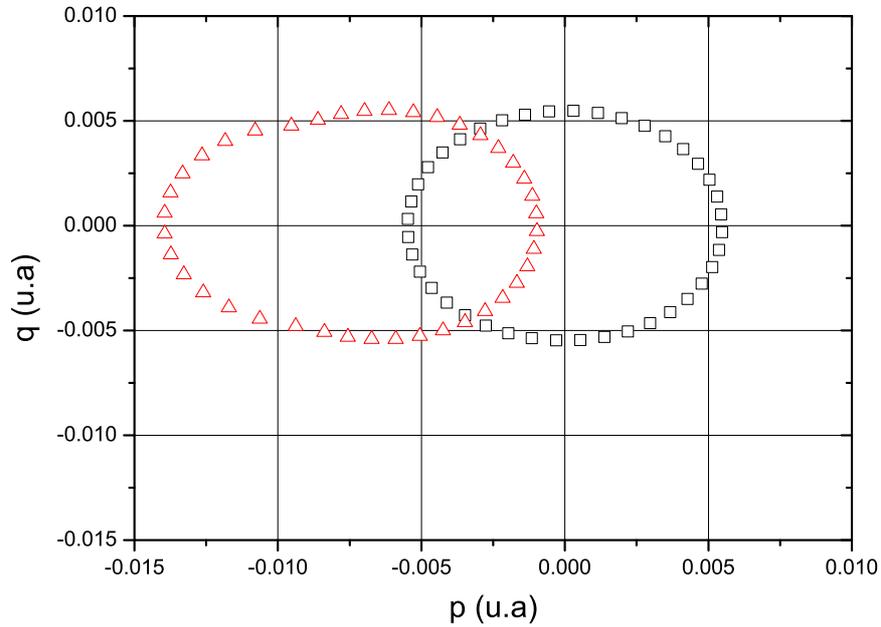


FIG. 3.1 – Représentation numérique du signal LOFI en coordonnées polaires ($q(R_e, d_e)$ vs $p(R_e, d_e)$) à la pulsation $\Omega_I = \Omega_N$ sans modulation de pompe $m_N = 0$ (carrés) et avec une modulation de pompe $m_N = 0.04$ (triangles). Paramètres numériques : $m_I = 4 \times 10^{-5}$, $R_e = 4 \times 10^{-10}$. [42]

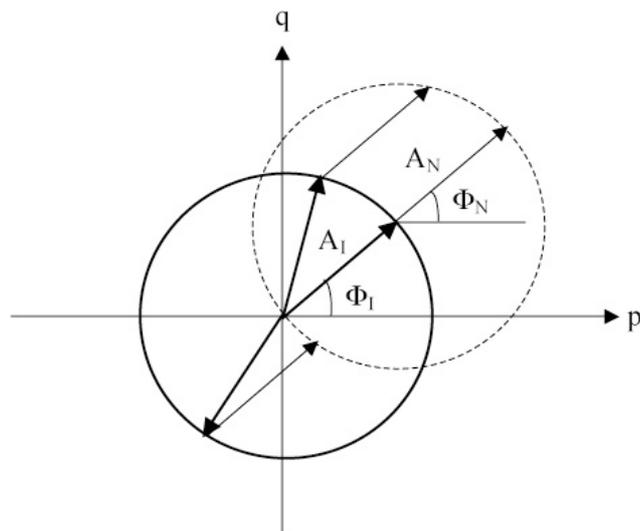


FIG. 3.2 – Décentrage du cercle LOFI induit par la modulation de pompe. Condition d'interférence destructive.

Un vecteur tournant de norme A_I et de phase Φ_I variante, qui représente le signal LOFI ou encore la modulation des pertes de la cavité, et un vecteur de norme A_N et de phase Φ_N constantes, qui représente la modulation de pompage. La résultante de cette addition vectorielle pour chaque valeur de la phase Φ_I forme le cercle décentré. En ajustant le taux de modulation de pompage m_N , il est possible de décentrer le cercle d'une quantité égale à l'amplitude du signal LOFI ($A_I=A_N$) et alors annuler la modulation d'intensité du laser pour une phase Φ_I , qui vérifie la condition (3.12b). La distortion du cercle qui apparaît est due à un effet de couplage non-linéaire entre les deux modulations que cette analyse linéaire ne peut donc pas expliquer.

3.2.4 Résultat expérimental

Pour vérifier ce résultat, nous avons réalisé l'expérience du laser doublement modulé dont le schéma de principe est représenté à la Figure 3.3. La partie droite du schéma est identique à la Figure 1.1 qui explique le fonctionnement de l'expérience LOFI sans modulation de pompage. A gauche, nous avons ajouté la partie supplémentaire du dispositif de modulation de pompage et de synchronisation avec le décalage en fréquence. La modulation de pompage est générée par un simple modulateur acousto-optique (MAO) qui module l'intensité du faisceau de pompe de la diode laser à la fréquence $F_N = 2 \times F_I/2 = F_I$ grâce à un multiplicateur de fréquence. Ainsi, on module le pompage et les pertes de manière synchronisée à la même fréquence. Une petite quantité du faisceau de la diode laser est prélevée et envoyée à une photodiode (PD2) pour contrôler le taux de modulation de pompage. La cible est un miroir placé sur un transducteur piézoélectrique (PZT) afin de faire varier la phase Φ_I en modifiant légèrement la distance laser-miroir d_e . Ainsi, on peut observer le cercle LOFI et surtout trouver la condition d'accord de phase pour réaliser l'interférence destructive. Le faisceau laser traverse une densité optique (DO) sur son trajet afin d'ajuster la quantité de lumière réinjectée dans le laser. La Fig.3.4 représente le résultat expérimental de la mesure du signal LOFI avec et sans modulation de pompage. On observe bien un décentrage du cercle lorsqu'on applique une modulation de pompage. En ajustant le taux de modulation m_N , on arrive à annuler l'amplitude de modulation de l'intensité du laser. Dans nos conditions expérimentales, avec $\eta \approx 1,1$, $\gamma_1 = 5.10^3 s^{-1}$ et $\Omega_R/2\pi=265$ kHz, avec un taux de modulation de pompage de $m_N = 4.6 \times 10^{-2}$, d'après l'Eq.(3.12a), on en déduit un taux de modulation des pertes $m_I \approx 1,5.10^{-4}$, et donc une réflectivité effective de la cible $R_I \approx 6 \times 10^{-9}$, qui tient compte de l'atténuation par la densité optique.

L'analyse linéaire permet de calculer l'amplitude de la modulation de l'intensité du laser

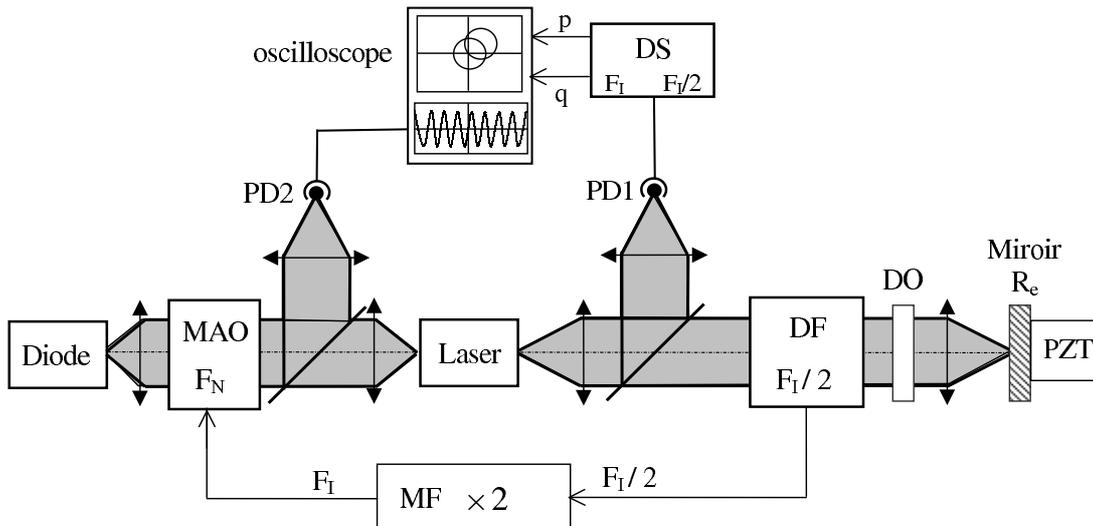


FIG. 3.3 – LOFI en modulation de pompe. PD1 et PD2 : photodiodes, DS : détection synchrone, DF : décalage en fréquence. Pour un aller-retour, F_I représente le décalage total subi par la fréquence optique du laser. La cible est un miroir de réflectivité effective R_e monté sur un transducteur piézoélectrique (PZT) afin de faire varier la phase Φ_I en modifiant légèrement et périodiquement la distance laser-miroir d_e . Le faisceau traverse une densité optique (DO) afin d'ajuster la quantité de lumière réinjectée dans le laser. La modulation de pompe est réalisée par un modulateur acousto-optique (MAO) qui module l'intensité du faisceau de pompe de la diode laser à la fréquence $F_N = 2F_I/2 = F_I$ grâce à un multiplicateur de fréquence synchronisé (MF).

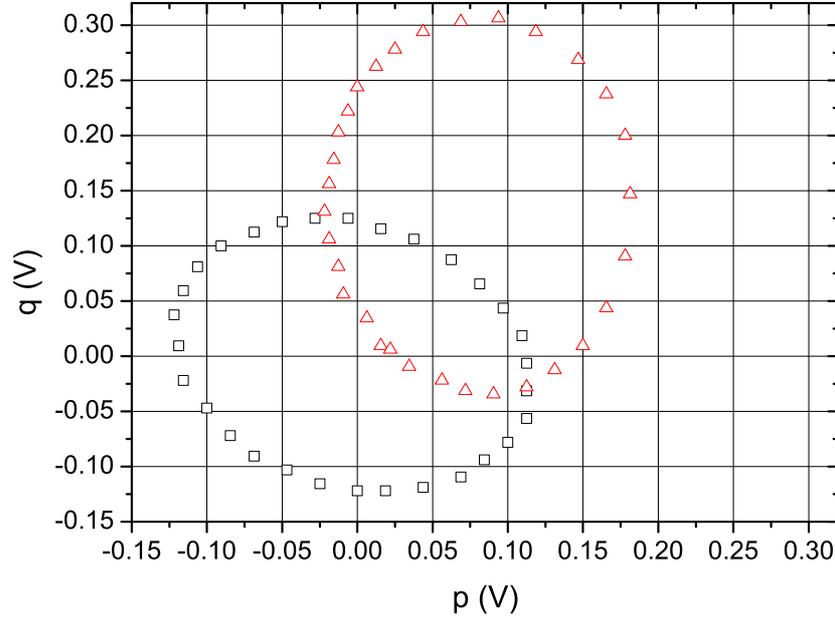


FIG. 3.4 – *Signal LOFI expérimental en représentation polaire q vs p à la fréquence de démodulation $F_I = F_N$ sans modulation de pompage $m_N = 0$ (carrés) et avec une modulation de pompage $m_N = 4.6 \times 10^{-2}$ (triangles). Conditions expérimentales : $\Omega_R/2\pi = 265$ kHz, $\Omega_I/2\pi = 500$ kHz, $\Omega_N/2\pi = 500$ kHz. [42]*

soumis à une double modulation des pertes et du pompage. En revanche, il est impossible de connaître l'évolution de cette amplitude, c'est à dire si elle est stable ou non. Pour cela il est nécessaire de pouvoir travailler à deux échelles de temps : la première est celle que l'on a étudiée dans cette partie, qui est l'oscillation du laser à la pulsation Ω_I , proche de la pulsation propre de relaxation du laser qui est l'échelle de temps rapide du problème. La deuxième échelle de temps est celle des variations lentes de l'enveloppe de la modulation auxquelles on n'a pas accès avec une analyse linéaire. Nous allons présenter dans la prochaine partie le principe de l'analyse multi-échelles qui permet de traiter une résolution d'équation différentielle à différentes échelles selon l'information que l'on veut avoir sur le comportement d'un système. Pour illustrer notre explication, nous allons prendre le cas d'école d'un oscillateur paramétrique amorti.

3.3 Principe de l'analyse multi-échelle

3.3.1 Oscillateur paramétrique

Un oscillateur paramétrique est un oscillateur dont l'un des paramètres caractéristiques est modulé dans le temps. A titre d'exemple, considérons un pendule simple de masse m et de longueur l_0 , avec un amortissement γ , placé dans un champ de pesanteur g . Cette masse oscille dans un plan vertical et $\theta(t)$ mesure l'angle que fait, à l'instant t , le pendule avec la verticale. Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{g}{l_0} \sin \theta(t) = 0 \quad (3.13)$$

Dans l'approximation des petits angles ($\sin \theta \approx \theta$), l'équation (3.13) s'intègre facilement et vaut

$$\theta(t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (3.14)$$

où $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$ est la pulsation propre du pendule et le coefficient d'amortissement γ est très inférieur à la pulsation propre ($\gamma \ll \omega_0$). Pour ce cas simple, il est inutile de faire une analyse multi-échelle de l'équation du pendule pour étudier la stabilité, car son comportement est complètement déterminé par le signe du coefficient d'amortissement. Si $\gamma > 0$, alors l'oscillation du pendule va s'amortir dans le temps pour atteindre la valeur stationnaire $\theta_s = 0$. A l'inverse, si $\gamma < 0$, alors l'oscillation du pendule va s'amplifier et s'emballer au fil du temps et la solution de l'Eq.(3.14) va diverger, ce qui n'est pas un comportement physiquement acceptable. Considérons maintenant ce même pendule, et imaginons que nous modulions sa longueur $l(t)$ en fonction du temps avec une pulsation d'excitation ω

$$l(t) = l_0 + l_1 \cos(\omega t) \quad (3.15)$$

en supposant une petite excitation ($l_1 \ll l_0$). Nous avons donc constitué un oscillateur paramétrique, puisque la pulsation propre du pendule dépend à présent du temps et l'Eq.(3.13) se réécrit sous la forme suivante, toujours dans l'approximation des petits angles

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta(t)}{dt} + \omega_0^2 [1 + h \cos(\omega t)] \theta(t) = 0 \quad (3.16)$$

en posant $h = -l_1/l_0$ qui désigne l'amplitude d'excitation. Cette équation ne peut pas être résolue par une analyse linéaire. On se propose de la résoudre à l'aide d'une analyse multi-échelles qui va permettre de dissocier les deux échelles de temps dans ce problème : celle de l'oscillation propre du pendule à la pulsation ω_0 , qui est rapide et celle de l'amortissement γ , qui est beaucoup plus lente car on suppose $\gamma \ll \omega_0$.

3.3.2 Loi d'échelles

Pour construire une loi d'échelles, on introduit un petit paramètre ϵ que l'on définit ici, comme le rapport de l'échelle de temps lente caractérisée par l'amortissement γ , sur l'échelle de temps rapide caractérisée par la pulsation propre ω_0

$$\epsilon = \frac{\gamma}{\omega_0} \quad (3.17)$$

On développe ainsi différentes échelles par des puissances du petit paramètre, en constatant que plus la puissance est élevée plus l'échelle de temps est petite (car $\epsilon \ll 1$)

$$t_0 = t, \quad t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t, \quad \dots \quad t^n = \epsilon^n t \quad (3.18)$$

Nous allons nous limiter dans cette étude à l'ordre 1. Ecrivons la dérivée première de la fonction $\theta(t) = \theta(t_0, t_1)$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(t_0, t_1)}{dt} &= \left(\frac{\delta\theta}{\delta t_0} \right) \left(\frac{\delta t_0}{\delta t} \right) + \left(\frac{\delta\theta}{\delta t_1} \right) \left(\frac{\delta t_1}{\delta t} \right) \\ &= \frac{\delta\theta}{\delta t_0} + \epsilon \frac{\delta\theta}{\delta t_1} \end{aligned} \quad (3.19a)$$

et on en déduit la dérivée seconde

$$\frac{d^2\theta(t_0, t_1)}{dt^2} = \frac{\delta^2\theta}{\delta t_0^2} + 2\epsilon \frac{\delta^2\theta}{\delta t_0 \delta t_1} \quad (3.20a)$$

On peut donc réécrire l'Eq.(3.16) sous forme développée au premier ordre, en posant $\theta(t_0, t_1) = \theta_0(t_0, t_1) + \epsilon\theta_1(t_0, t_1)$, en considérant l'amplitude d'excitation comme une perturbation du premier ordre qu'on écrit alors en fonction du petit paramètre de la loi d'échelle

$$h = 2\epsilon\Delta h \quad (3.21)$$

Par analogie, on pose $\gamma = \epsilon\Delta\gamma$, où Δh et $\Delta\gamma$ permettent de relier les petits termes d'une même échelle à leur grandeur physique. En introduisant ces deux lois d'échelles dans l'Eq.(3.16), on obtient l'équation différentielle suivante

$$\frac{\delta^2\theta_0}{\delta t_0^2} + 2\epsilon\frac{\delta^2\theta_0}{\delta t_0\delta t_1} + \epsilon\frac{\delta^2\theta_1}{\delta t_0^2} + \epsilon\Delta\gamma\left[\frac{\delta\theta_0}{\delta t_0} + \epsilon\frac{\delta\theta_0}{\delta t_1} + \epsilon\frac{\delta\theta_1}{\delta t_0}\right] + \omega_0^2[1 + 2\epsilon\Delta h \cos(\omega t_0)](\theta_0 + \epsilon\theta_1) = 0 \quad (3.22)$$

On identifie les termes ordre par ordre et on commence par résoudre l'ordre $O(1)$

$$\frac{d^2\theta_0}{dt_0^2} + \omega_0^2\theta_0 = 0 \quad (3.23)$$

qui a pour solution

$$\theta_0(t_0) = A(t_1)e^{j\omega_0 t_0} + A^*(t_1)e^{-j\omega_0 t_0} \quad (3.24)$$

Pour déterminer l'expression de l'amplitude $A(t_1)$, c'est à dire les variations lentes de l'amplitude d'oscillation du pendule au cours du temps, il faut travailler à une échelle plus petite, qui correspond à l'ordre suivant $O(\epsilon)$ dont l'identification des termes donne

$$\frac{\delta^2\theta_1}{\delta t_1^2} + \omega_0^2\theta_1 = -2\frac{\delta^2\theta_0}{\delta t_0\delta t_1} - \Delta\gamma\frac{\delta\theta_0}{\delta t_0} - 2\omega_0^2\theta_0\Delta h \cos(\omega t_0) \quad (3.25)$$

En injectant la solution de l'Eq.(3.24) dans l'Eq.(3.25), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2\theta_1}{\delta t_1^2} + \omega_0^2\theta_1 = & -2j\omega_0\frac{\delta A(t_1)}{\delta t_1}e^{j\omega_0 t_0} + 2j\omega_0\frac{\delta A^*(t_1)}{\delta t_1}e^{-j\omega_0 t_0} \\ & - \omega_0^2\Delta h A(t_1)e^{j(\omega+\omega_0)t_0} - \omega_0^2\Delta h A^*(t_1)e^{-j(\omega+\omega_0)t_0} \\ & - \omega_0^2\Delta h A(t_1)e^{j(\omega_0-\omega)t_0} - \omega_0^2\Delta h A^*(t_1)e^{-j(\omega_0-\omega)t_0} \\ & - \Delta\gamma A(t_1)j\omega_0 e^{j\omega_0 t_0} - \Delta\gamma A^*(t_1)j\omega_0 e^{-j\omega_0 t_0} \end{aligned} \quad (3.26a)$$

L'Eq.(3.26) correspond à l'équation d'un oscillateur non amorti de pulsation propre ω_0 dont le régime est forcé par les termes de droites. Les deux premiers et les deux derniers termes sont des forces à la pulsation propre de l'oscillateur, et les quatre autres le sont aussi s'ils vérifient la condition $\pm(\omega \pm \omega_0) = \omega_0$ dont la seule solution non triviale est $\omega = 2\omega_0$. Cette condition de résonance qui correspond à une pulsation d'excitation qui vaut le double de la pulsation propre est à la base du mécanisme d'amplification paramétrique. Pour éviter la divergence de la solution

de l'Eq.(3.26), il est nécessaire d'annuler les termes dits séculaires qui y contribuent en forçant l'oscillateur à sa fréquence propre. On aboutit alors à un critère de solvabilité

$$-2j\omega_0 \frac{\delta A(t_1)}{\delta t_1} e^{j\omega_0 t_0} - \omega_0^2 \Delta h A^*(t_1) e^{-j(\omega_0 - \omega)t_0} - \Delta \gamma A(t_1) j\omega_0 e^{j\omega_0 t_0} = 0 \quad (3.27)$$

La résolution de cette équation différentielle va nous permettre de connaître l'évolution de l'amplitude de modulation du pendule $A(t_1)$.

3.3.3 Amplification paramétrique

Pour résoudre l'équation différentielle (3.27), on cherche une solution de la forme

$$A(t_1) = B(t_1) e^{-j\sigma t_1} \quad (3.28)$$

où σ exprime une petite variation de pulsation du premier ordre autour de la pulsation propre pour la condition de résonance

$$\omega = 2(\omega_0 - \epsilon\sigma) \quad (3.29)$$

La détermination de l'amplitude d'oscillation $A(t_1)$ se résume donc au calcul de $B(t_1)$. La dérivée première de l'Eq.(3.28) s'écrit

$$\frac{\delta A(t_1)}{\delta t_1} = \left(\frac{\delta B(t_1)}{\delta t_1} - j\sigma B(t_1) \right) e^{-j\sigma t_1} \quad (3.30)$$

En réinjectant l'Eq.(3.30) dans l'Eq.(3.27), on en déduit la loi de variation de $B(t_1)$

$$\frac{\delta B(t_1)}{\delta t_1} = \left(j\sigma - \frac{\Delta \gamma}{2} \right) B(t_1) + j\frac{\omega_0}{2} \Delta h B^*(t_1) \quad (3.31)$$

On pose $B = B' + jB''$ et on identifie la partie réelle et la partie imaginaire

$$\frac{\delta B'(t_1)}{\delta t_1} = B''(t_1) \left(\Delta h \frac{\omega_0}{2} - \sigma \right) - \frac{\Delta \gamma}{2} B'(t_1) \quad (3.32a)$$

$$\frac{\delta B''(t_1)}{\delta t_1} = B'(t_1) \left(\Delta h \frac{\omega_0}{2} + \sigma \right) - \frac{\Delta \gamma}{2} B''(t_1) \quad (3.32b)$$

En injectant l'Eq.(3.32b) dans l'Eq.(3.32a), on obtient

$$\frac{\delta^2 B'(t_1)}{\delta t_1^2} + \Delta \gamma \frac{\delta B'(t_1)}{\delta t_1} - \left[\left(\Delta h \frac{\omega_0}{2} \right)^2 - \sigma^2 - \left(\frac{\Delta \gamma}{2} \right)^2 \right] B'(t_1) = 0 \quad (3.33)$$

On peut remarquer qu'il n'y a pas d'état stationnaire de l'amplitude d'oscillation du pendule $B'(t_1)$, à part la valeur triviale $B'(t_1) = 0$ qui correspond à sa position de repos. D'autre part, pour une condition proche de la résonance $\omega = 2\omega_0$, $B'(t_1)$ ne peut pas être une fonction oscillante, d'après le signe positif du discriminant de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle (3.33). Cela signifie que :

- soit le pendule est au repos ($B'(t_1) = 0$, donc $A(t_1) = 0$) et la solution au problème à l'ordre $O(1)$ donné par l'Eq.(3.24) est triviale

$$\theta_0(t_0) = 0 \quad (3.34)$$

- soit le pendule est en mouvement et alors son amplitude d'oscillation $A(t_1)$ va être amplifiée paramétriquement par l'excitation apportée à la pulsation ω . La solution au problème s'écrit alors

$$\theta_0(t_0) = B(t_1)e^{-j(\omega_0 - \frac{\omega}{2})t_0}e^{j\omega_0 t_0} + B^*(t_1)e^{j(\omega_0 - \frac{\omega}{2})t_0}e^{-j\omega_0 t_0} \quad (3.35a)$$

$$= B(t_1)e^{j\frac{\omega}{2}t_0} + B^*(t_1)e^{-j\frac{\omega}{2}t_0} \quad (3.35b)$$

La réponse du pendule est alors une oscillation à la pulsation moitié $\omega/2$ dont l'amplitude $B(t_1)$ va diverger lorsqu'on dépasse le seuil d'instabilité paramétrique

$$h > 2\sqrt{\frac{(\omega_0 - \frac{\omega}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2})^2}{(\frac{\omega_0}{2})^2}} \quad (3.36)$$

D'après l'Eq.(3.36), on voit que plus la pulsation d'excitation est proche de la condition de résonance $\omega = 2\omega_0$, plus le seuil d'instabilité est bas. Si il n'y a pas d'amortissement γ du pendule, alors à la résonance, on atteint le seuil d'instabilité au cas limite d'excitation $h = 0$.

Le mécanisme d'amplification paramétrique découle donc d'un transfert d'énergie synchronisé entre l'oscillation propre du système et l'excitation apportée par la modulation d'un de ses paramètres. Le maximum d'efficacité est obtenu quand la fréquence d'excitation est égale à deux fois la fréquence propre. L'analyse multi-échelles permet d'étudier l'évolution de la réponse du système, mettre en évidence des oscillations sous-harmoniques et déterminer le seuil d'instabilité paramétrique, ce qui est impossible avec une analyse purement linéaire.

3.4 Double modulation : régime paramétrique

Au paragraphe 3.2, nous avons étudié, à l'aide d'une analyse linéaire, la réponse d'un laser soumis à une double modulation : celle des pertes de la cavité (par réinjection optique) et celle du pompage. Nous avons vu qu'au premier ordre, cette double modulation revient à forcer le régime d'oscillation du laser à la pulsation de modulation des pertes et de pompage. Nous avons pu ainsi déterminer l'amplitude de l'oscillation laser qui résulte de l'addition des deux modulations d'intensité. Cependant, si l'on regarde de plus près le système d'équation du laser réinjecté et modulé en pompage, on s'aperçoit qu'il ressemble fortement à celui d'un oscillateur paramétrique, dont on a étudié le comportement dans le paragraphe 3.3 à l'aide d'une analyse multi-échelles. Nous allons donc reprendre les équations du laser doublement modulé, justifier pourquoi elles correspondent à un oscillateur paramétrique et étudier son comportement à l'aide d'une analyse multi-échelle. Par rapport à l'analyse linéaire, nous allons pouvoir déterminer si la réponse du laser contient des oscillations sous-harmoniques, comme dans le cas de l'exemple du pendule paramétrique, et nous allons en déduire comment aboutir une amplification paramétrique du signal LOFI.

3.4.1 Mélange non linéaire

On rappelle le système d'équations à résoudre qui correspond aux équations d'un laser faiblement réinjecté et soumis à une modulation de pompage

$$\frac{dN(t)}{dt} = \gamma_1 [N_0 (1 + m_N \cos(\Omega_N t + \Phi_N)) - N(t)] - BN(t)I(t), \quad (3.37a)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t) [BN(t) - \gamma_c (1 + m_I \cos(\Omega_I t + \Phi_I))]. \quad (3.37b)$$

L'analyse linéaire du système (3.37) a abouti à une solution de l'intensité du laser de la forme

$$I(t) = I_s + \Delta I(t) = I_s + \Delta I_I(t) + \Delta I_N(t), \quad (3.38a)$$

$$= I_s + A_I \cos(\Omega_I t + \Phi_I + \Phi_{A_I}) + A_N \cos(\Omega_N t + \Phi_N + \Phi_{A_N}). \quad (3.38b)$$

où A_I , Φ_{A_I} et A_N , Φ_{A_N} sont respectivement données par les Eqs.(3.7) et (3.9). Pour évaluer la stabilité de cette solution, on peut par exemple la soumettre à une nouvelle petite variation

$\Delta\hat{I}(t)$ telle que

$$I\hat{(t)} = I(t) + \Delta\hat{I}(t) \quad \text{avec} \quad \Delta\hat{I}(t) \ll I\hat{(t)}. \quad (3.39)$$

En introduisant cette perturbation dans le système d'équations (3.37), on voit que l'on va générer des mélanges non linéaires entre la modulation de l'intensité du laser à la pulsation Ω_I , et la modulation de l'intensité laser à la pulsation Ω_N . On a donc bien un oscillateur paramétrique, c'est à dire un oscillateur dont les paramètres caractéristiques, qui sont ici l'intensité du laser $I(t)$ et l'inversion de population $N(t)$, sont modulés au cours du temps. On aboutit alors à la génération de signaux sous-harmoniques, comme dans l'exemple du pendule paramétrique que l'on a traité au paragraphe 3.3. En particulier, si l'on se place dans le cas où $\Omega_I \approx \Omega_R$, la pulsation de modulation des pertes de la cavité est proche de la pulsation de relaxation du laser, qui est l'analogie de la pulsation propre dans l'exemple du pendule paramétrique. De plus, si l'on module le pompage du laser à la pulsation $\Omega_N = 2\Omega_I \approx 2\Omega_R$, alors la modulation de pompage, qui est l'analogie de la pulsation d'excitation dans l'exemple du pendule paramétrique, vaut le double de la pulsation de relaxation du laser et on est alors dans les conditions de résonance paramétrique dans lesquelles on peut générer une amplification paramétrique du signal. En effet, le mélange non-linéaire du signal à la pulsation Ω_I avec le signal à la pulsation $\Omega_N = 2\Omega_I$ va régénérer un signal à la pulsation $\Omega_N - \Omega_I = 2\Omega_I - \Omega_I = \Omega_I$, et donc amplifier le signal de modulation des pertes de la cavité, qui on le rappelle correspond au signal qui nous intéresse : le signal réinjecté provenant de la cible. Pour décrire le régime paramétrique du signal LOFI soumis à une modulation de pompage, nous allons faire une analyse multi-échelle du système d'équations (3.37).

3.4.2 Réduction des équations de base

Nous avons vu que l'analyse multi-échelles repose sur la construction d'une loi d'échelles à partir d'un petit paramètre ϵ . Dans ce problème, le petit paramètre est donné par le rapport de l'échelle de temps lente donnée par le taux d'amortissement du laser γ_1 , sur l'échelle de temps rapide donnée par la pulsation de relaxation du laser Ω_R . On pose donc

$$\epsilon = \frac{\gamma_1}{\Omega_R}. \quad (3.40)$$

Il est pratique d'introduire des variables réduites pour la résolution analytique afin de nous affranchir des grandeurs stationnaires du laser qui ne nous intéressent pas pour cette étude

focalisée sur l'évolution des variations de l'intensité laser. En s'inspirant de l'analyse linéaire, on peut définir une petite variation y autour de l'intensité stationnaire du laser I_S et une petite variation x autour de l'inversion de population stationnaire N_S

$$I = I_S (1 + y), \quad (3.41a)$$

$$N = N_S \left(1 + \frac{\Omega_R}{\gamma_c} x \right). \quad (3.41b)$$

On définit les paramètres de modulation réduits suivants en rapportant les pulsations de modulations des pertes et du pompage à celle de la relaxation du laser

$$\sigma_I = \frac{\Omega_I}{\Omega_R}, \quad (3.42a)$$

$$\sigma_N = \frac{\Omega_N}{\Omega_R}. \quad (3.42b)$$

On peut redéfinir sous forme réduites les taux de modulation à partir des contrastes de modulation de l'intensité laser induit par chaque modulation calculés par l'analyse linéaire au paragraphe 3.2 (Eqs.(3.8) et (3.10)) et en considérant que ce sont de petites perturbations

$$\delta_I = \epsilon \eta \frac{\Delta I_I}{I_s} = m_I \frac{\gamma_c}{\Omega_R}, \quad (3.43a)$$

$$\delta_N = \epsilon \eta \frac{\Delta I_N}{I_s} = \frac{\eta}{\eta - 1} m_N. \quad (3.43b)$$

On définit enfin une variable de temps rapide réduite, rapportée à l'échelle de temps rapide du système, c'est à dire la pulsation de relaxation du laser

$$s = \Omega_R t. \quad (3.44)$$

et une variable de temps lente réduite

$$\xi = \epsilon s. \quad (3.45)$$

D'après les Eqs.(3.41) à (3.44), les Eqs.(3.37) peuvent se réécrire sous la forme réduite suivante

$$\frac{dx}{ds} = -y - \epsilon x [1 + (\eta - 1)(1 + y)] + \delta_N \cos(\sigma_N s + \Phi_N), \quad (3.46a)$$

$$\frac{dy}{ds} = (1 + y) [x + \delta_I \cos(\sigma_I s + \Phi_I)]. \quad (3.46b)$$

3.4.3 Analyse multi-échelle

Nous nous intéressons au cas où la pulsation de modulation des pertes de la cavité est au voisinage de la fréquence de relaxation du laser $\Omega_I \approx \Omega_R$ et nous nous plaçons dans la condition de résonance paramétrique, c'est à dire $\Omega_N = 2\Omega_I \approx 2\Omega_R$. En introduisant une petite variation Σ_N de pulsation de la modulation de pompage au voisinage de la condition de résonance, on peut écrire le développement

$$\sigma_N = 2 + \epsilon \Sigma_N, \quad (3.47a)$$

$$\sigma_I = \frac{\sigma_N}{2}. \quad (3.47b)$$

Pour pouvoir identifier les grandeurs physiques aux différentes échelles, on introduit les paramètres Δ_N et Δ_I avec la loi d'échelle suivante

$$\delta_N = \epsilon \Delta_N, \quad (3.48a)$$

$$\delta_I = \epsilon^{\frac{3}{2}} \Delta_I. \quad (3.48b)$$

Les puissances 1 et 3/2 du petit paramètre dans les Eqs.(3.48a) et (3.48b) sont déterminées de manière à ce qu'on aboutisse à un critère de solvabilité qui ait une solution non triviale. En introduisant les Eqs.(3.47a) à (3.48b) dans les Eqs.(3.46a) et (3.46b), on obtient

$$(2 + \epsilon \Sigma_N) \frac{dx}{dS} = -y - \epsilon x [1 + (\eta - 1)(1 + y)] + \epsilon \Delta_N \cos(S + \Phi_N), \quad (3.49a)$$

$$(2 + \epsilon \Sigma_N) \frac{dy}{dS} = (1 + y) \left[x + \epsilon^{\frac{3}{2}} \Delta_I \cos\left(\frac{S}{2} + \Phi_I\right) \right]. \quad (3.49b)$$

où $S = \sigma_N s$ est une variable 2π -périodique. On cherche des solutions de la forme

$$x(S, \xi) = \sqrt{\epsilon} x_1(S, \xi) + \epsilon x_2(S, \xi) + \epsilon^{\frac{3}{2}} x_3(S, \xi), \quad (3.50a)$$

$$y(S, \xi) = \sqrt{\epsilon} y_1(S, \xi) + \epsilon y_2(S, \xi) + \epsilon^{\frac{3}{2}} y_3(S, \xi). \quad (3.50b)$$

En introduisant les Eqs.(3.50a) et (3.50b) dans les Eqs. (3.49a) et (3.49b), on obtient une série de systèmes d'équations à résoudre à différents ordres dont le premier s'écrit

$O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$:

$$2\frac{dx_1}{dS} = -y_1, \quad (3.51a)$$

$$2\frac{dy_1}{dS} = x_1. \quad (3.51b)$$

et qui a pour solutions

$$x_1 = ae^{j\frac{S}{2}} + a^*e^{-j\frac{S}{2}}, \quad (3.52a)$$

$$y_1 = -jae^{j\frac{S}{2}} + ja^*e^{-j\frac{S}{2}}. \quad (3.52b)$$

où a est une amplitude complexe qu'on peut écrire sous la forme $a = re^{i\theta}$ et qui représente la variation lente de l'amplitude d'oscillation de l'intensité et de l'inversion de population du laser. Pour déterminer son expression, il faut résoudre le système d'équation au deuxième ordre qui s'écrit

$O(\epsilon)$:

$$2\frac{dx_2}{dS} = -y_2 + \Delta_N \cos(S + \Phi_N), \quad (3.53a)$$

$$2\frac{dy_2}{dS} = x_2 + x_1y_1. \quad (3.53b)$$

et qui a pour solutions

$$x_2 = be^{j\frac{S}{2}} + pe^{jS} + b^*e^{-j\frac{S}{2}} + p^*e^{-jS}, \quad (3.54a)$$

$$y_2 = -jbe^{j\frac{S}{2}} + qe^{jS} + jb^*e^{-j\frac{S}{2}} + q^*e^{-jS}. \quad (3.54b)$$

où b est une amplitude complexe inconnue et avec les coefficients

$$p = -i\frac{[a^2 + \Delta_N e^{j\Phi_N}]}{3}, \quad (3.55a)$$

$$q = -\left[-\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{6}\Delta_N e^{j\Phi_N}\right]. \quad (3.55b)$$

En comparant les solutions (3.54) et (3.52), on voit qu'en augmentant l'échelle de résolution, on affine le résultat analytique, puisqu'au deuxième ordre, on a non seulement l'oscillation laser à la pulsation de modulation des pertes $S/2 = \sigma_N s/2 = \Omega_N t/2 = \Omega_I t$, mais également l'oscillation laser à la pulsation de modulation de pompage $S = \sigma_N s = \Omega_N t$. On introduit la loi d'échelle de l'amplitude d'oscillation de l'intensité $R = \sqrt{\epsilon} r$ et de l'inversion de population du laser, et à partir des Eqs.(3.50), (3.52), (3.54) et (3.55), on en déduit les solutions du système réduit (Eq.(3.46))

$$x = 2R \cos\left(\frac{S}{2} + \theta\right) + \frac{2}{3}\delta_N \sin(S + \Phi_N) + \frac{2}{3}R^2 \sin(S + 2\theta), \quad (3.56a)$$

$$y = 2R \sin\left(\frac{S}{2} + \theta\right) - \frac{1}{3}\delta_N \cos(S + \Phi_N) - \frac{4}{3}R^2 \cos(S + 2\theta). \quad (3.56b)$$

Si on décompose la solution y de la variation d'intensité du laser par rapport à l'état stationnaire donnée par l'Eq.(3.56b)

- le premier terme correspond au signal LOFI d'amplitude $2R$ à la pulsation moitié de la pulsation de modulation de pompage, c'est à dire la pulsation de modulation des pertes de la cavité ou encore la pulsation de décalage puisque $S/2 = \sigma_N s/2 = \Omega_N t/2 = \Omega_I t$,
- le second terme correspond au régime forcé de l'oscillateur laser soumis à la modulation de pompage d'amplitude δ_N et qui oscille donc à la pulsation $S = \sigma_N s = \Omega_N t$,
- le troisième terme vient s'ajouter à l'oscillation du laser à la pulsation de forçage $S = \sigma_N s = \Omega_N t$ et ne présente pas d'intérêt physique significatif. Il est obtenu par un couplage non linéaire entre la modulation de pompage et la modulation de pertes.

Il faut maintenant déterminer l'expression de l'amplitude R d'oscillation du laser à la pulsation Ω_I qui contient le mélange non linéaire des deux modulations qui amène à l'amplification paramétrique. Pour cela, il faut résoudre le système d'équations (3.46) à l'ordre suivant

$O\left(\epsilon^{\frac{3}{2}}\right)$:

$$\Sigma_N \frac{dx_1}{dS} + 2 \frac{dx_3}{dS} = - \frac{dx_1}{d\xi} - y_3 - \eta x_1, \quad (3.57a)$$

$$\Sigma_N \frac{dy_1}{dS} + 2 \frac{dy_3}{dS} = - \frac{dy_1}{d\xi} + x_3 + y_2 x_1 + x_2 y_1 + \Delta_I \cos\left(\frac{S}{2} + \Phi_I\right). \quad (3.57b)$$

Les termes croisés du second membre des Eqs.(3.57a) et (3.57b) et le terme de modulation des pertes sont des termes séculaires, c'est à dire des termes forçant à la pulsation propre du laser $S/2 \approx \Omega_R t$. Ces équations doivent donc vérifier une condition de solvabilité que l'on obtient en annulant la somme des termes séculaires

$$\frac{da}{d\xi} = -j \frac{\Sigma_N a}{2} - \frac{a\eta}{2} - j \frac{a^2 a^*}{6} + j \frac{a^* \Delta_N e^{j\Phi_N}}{12} + j \frac{\Delta_I e^{i\Phi_I}}{4}. \quad (3.58)$$

Comme pour l'exemple du pendule paramétrique (Eq.(3.27)), on obtient alors une loi de variation de l'amplitude complexe lentement variable. En séparant l'amplitude et la phase de l'amplitude complexe $a = r e^{i\theta}$, on peut réécrire l'Eq.(3.58) sous la forme d'un système

$$\frac{dr}{d\xi} = -\frac{\eta r}{2} - \frac{r \Delta_N}{12} \sin(\Phi_N - 2\theta) - \frac{\Delta_I}{4} \sin(\Phi_I - \theta), \quad (3.59a)$$

$$r \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{r \Sigma_N}{2} - \frac{r^3}{6} + \frac{r \Delta_N}{12} \cos(\Phi_N - 2\theta) + \frac{\Delta_I}{4} \cos(\Phi_I - \theta). \quad (3.59b)$$

En introduisant le petit paramètre ϵ , on peut finalement réexprimer ce système d'équations différentielles en fonction des paramètres de modulation réduits initiaux δ_I , δ_N et σ_N pour en déduire l'amplitude d'oscillation R

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{\eta \epsilon R}{2} - \frac{R \delta_N}{12} \sin(\Phi_N - 2\theta) - \frac{\delta_I}{4} \sin(\Phi_I - \theta), \quad (3.60a)$$

$$R \frac{d\theta}{ds} = \frac{(2 - \sigma_N) R}{2} - \frac{R^3}{6} + \frac{R \delta_N}{12} \cos(\Phi_N - 2\theta) + \frac{\delta_I}{4} \cos(\Phi_I - \theta). \quad (3.60b)$$

Par rapport à l'équation d'évolution de l'amplitude d'oscillation dans l'exemple du pendule paramétrique (Eq.(3.33)), on voit que pour le laser, il existe un état stationnaire, à part la solution triviale $R = 0$ qui correspond au laser non réinjecté ($\delta_I = 0$) en régime forcé à la pulsation de modulation de pompage (Eq.(3.56)) et qui n'est donc pas un régime paramétrique. Le terme en R^3 est un terme stabilisateur qui permet d'éviter la divergence de l'oscillation laser, ce qui n'était pas le cas dans l'exemple du pendule paramétrique, qui était soit au repos, soit en mouvement avec une amplitude d'oscillation qui s'emballe. Nous allons déterminer les états stationnaires de l'amplitude d'oscillation R à partir du système d'équations différentielles dans les trois cas suivants

- le laser est soumis uniquement à la réinjection optique décalée en fréquence ($\delta_I \neq 0$, $\delta_N = 0$), ce qui correspond au signal LOFI sans modulation de pompage,

- le laser est soumis uniquement à la modulation de pompage sans réinjection optique ($\delta_I = 0$, $\delta_N \neq 0$), ce qui correspond au signal paramétrique de pompage,
- le laser est soumis à la double modulation ($\delta_I \neq 0$, $\delta_N \neq 0$), ce qui correspond à l'amplification paramétrique du signal LOFI.

3.4.4 Etats stationnaires

3.4.4.1 Signal LOFI

Ce cas correspond à une simple réinjection optique ($\delta_I \neq 0$) sans modulation de pompage ($\delta_N = 0$), c'est à dire le signal LOFI. En ne conservant que les termes du premier ordre (c.-à-d. en négligeant le terme $R^3/6$ traduisant l'effet de saturation), on obtient l'amplitude d'oscillation de l'intensité du laser que l'on note comme référence R_0

$$R_0 = R(\delta_I, 0) = \left(\frac{\delta_I}{2}\right) \frac{1}{\left((2 - \sigma_N)^2 + (\eta\epsilon)^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.61)$$

En exprimant R_0 en fonction des paramètres physiques et dans le cas où le rapport de synchronisation des pulsations est $\sigma_N = 2\sigma_I$, on retrouve l'expression du contraste de modulation de pertes qu'on a déterminée grâce à l'analyse linéaire (Eq.(3.7))

$$R_0 = \frac{A_I}{I_s} = \frac{\gamma_c m_I}{\left(4(\Omega_I - \Omega_R)^2 + (\eta\gamma_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.62)$$

L'amplitude R_0 du signal LOFI est bien proportionnelle au taux de modulation des pertes de la cavité m_I (c.-à-d. la quantité de lumière réinjectée dans la cavité), et est résonante à la fréquence de relaxation du laser avec une largeur caractéristique $\eta\gamma_1$.

3.4.4.2 Signal paramétrique de pompage

Ce cas correspond au laser uniquement modulé en pompage ($\delta_N \neq 0$) sans réinjection optique ($\delta_I = 0$). La solution stationnaire non nulle $R \neq 0$ amène à la résolution de l'équation suivante

$$R^4 + 6(\sigma_N - 2)R^2 = \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^2 - \left(\frac{\delta_N^*}{2}\right)^2. \quad (3.63)$$

où δ_N^* est le seuil paramétrique du laser défini par

$$\delta_N^* = 6\sqrt{(\eta\epsilon)^2 + (2 - \sigma_N)^2}. \quad (3.64)$$

L'oscillation sous-harmonique apparaît lorsque R devient non nul et d'après l'Eq.(3.63) pour $R = 0$, on en conclut que le point de bifurcation se situe au seuil $\delta_N = \delta_N^*$. L'Eq.(3.64) montre que le seuil le plus bas est obtenu pour $\sigma_N = 2$, c'est à dire à la condition de résonance paramétrique. La résolution de l'équation polynômiale (3.63) aboutit à deux solutions de l'état stationnaire de l'intensité laser R , dont une seule stable

$$R(0, \delta_N) = \sqrt{3(2 - \sigma_N) + \sqrt{[3(2 - \sigma_N)]^2 + \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^2 - \left(\frac{\delta_N^*}{2}\right)^2}}. \quad (3.65)$$

La Fig.3.5 représente une simulation numérique de l'amplitude de modulation de l'intensité du laser ($R(0, \delta_N)/R_0$) normalisée par l'amplitude du signal LOFI (c.-à-d. pour une modulation de pompage nulle) en fonction du taux de modulation de pompage normalisé par le seuil paramétrique du laser (δ_N/δ_N^*). On voit que pour ($\delta_N/\delta_N^* < 1$), aucune oscillation sous harmonique n'est générée ($R = 0$). Pour ($\delta_N/\delta_N^* > 1$), l'amplitude de l'oscillation sous-harmonique augmente avec la modulation de pompage δ_N .

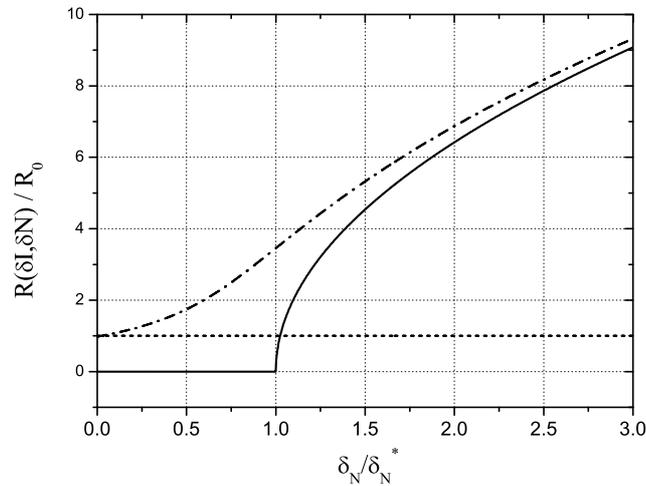


FIG. 3.5 – Résultat numérique de l'amplitude de modulation de l'intensité du laser normalisée ($R(\delta_I, \delta_N)/R_0$) en fonction du taux de modulation de pompage normalisé (δ_N/δ_N^*). La courbe en pointillés représente le signal LOFI R_0 , la courbe en trait plein représente le signal paramétrique de pompage $R(0, \delta_N)$ et la courbe en points et traits représente le signal LOFI amplifié paramétriquement $R(\delta_I, \delta_N)$. Paramètres numériques : $|\sigma_N - 2| = 0,07$ et pour une condition d'interférence constructive ($\cos(\Phi_I + \theta) = +1$) [43].

3.4.4.3 Amplification paramétrique du signal LOFI

Ce cas correspond au laser soumis simultanément à une réinjection optique décalée en fréquence et une modulation de pompage. En combinant les Eqs.(3.60a) et (3.60b), on obtient l'équation suivante

$$(\eta\epsilon R)^2 + \left[\frac{R^3}{3} - (2 - \sigma_N) R \right]^2 = \left(\frac{R\delta_N}{6} \right)^2 + \left(\frac{\delta_I}{2} \right)^2 + \frac{R\delta_N\delta_I}{6} \cos(\Phi_I + \theta). \quad (3.66)$$

Le terme $(R\delta_N/6)$ correspond au signal paramétrique de pompage et le terme $(\delta_I/2)$ correspond au signal LOFI. Le couplage non-linéaire de la modulation de pompage et de la réinjection optique décalée en fréquence est traduit par le terme $\frac{R\delta_N\delta_I}{6} \cos(\Phi_I + \theta)$. Le mélange non linéaire du signal LOFI à la fréquence $S/2$ avec le signal de modulation de pompage à la fréquence S regénère un signal à la fréquence $S - S/2 = S/2$ qui vient renforcer le signal LOFI : c'est le mécanisme d'amplification paramétrique. Pour une condition d'interférence constructive ($\cos(\Phi_I + \theta) = +1$), en considérant simplement les termes du premier ordre (c.-à-d. en négligeant $R^3/3$ dans l'Eq.(3.66)), on obtient

$$R(\delta_I, \delta_N) = 6 \left(\frac{\delta_I}{2} \right) \frac{1}{\delta_N^* - \delta_N} > R_0. \quad (3.67)$$

alors que pour une condition d'interférence destructive ($\cos(\Phi_I + \theta) = -1$), on obtient

$$R(\delta_I, \delta_N,) = 6 \left(\frac{\delta_I}{2} \right) \frac{1}{\delta_N^* + \delta_N} < R_0. \quad (3.68)$$

L'Eq.(3.67) montre que l'amplification du signal LOFI est possible ($R/R_0 > 1$) si la phase Φ_I de modulation des pertes de la cavité permet une condition d'interférence constructive. La Fig.3.5 représente l'amplitude d'oscillation de l'intensité du laser normalisée ($R(\delta_I, \delta_N)/R_0$) (obtenue par la résolution numérique de l'Eq.(3.66)) en fonction de la modulation de pompage normalisée (δ_N/δ_N^*). Comme le prédit l'Eq.(3.67), une amplification paramétrique du signal LOFI est possible ($R/R_0 > 1$) même en dessous du seuil paramétrique ($\delta_N/\delta_N^* < 1$). La divergence $R(\delta_I, \delta_N^*) = +\infty$ apparaissant à l'Eq.(3.67) est en fait évitée par le terme d'ordre supérieur ($R^3/3$) auparavant négligé pour une compréhension plus simple de l'effet d'amplification paramétrique.

On définit le gain paramétrique $G_p(\delta_I, \delta_N)$ qui permet de mesurer l'amplification effective du signal LOFI par la modulation de pompage, en soustrayant la contribution du signal pa-

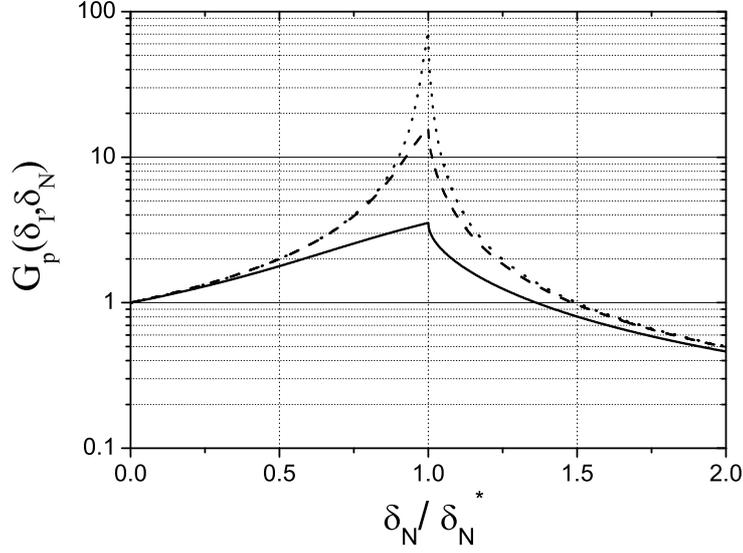


FIG. 3.6 – Gain paramétrique normalisé $G_p(\delta_I, \delta_N)$ en fonction du taux de modulation de pompage normalisé (δ_N/δ_N^*) . La courbe en trait plein correspond à une forte réinjection $m_I = 3.16 \times 10^{-6}$, la courbe en tirets correspond à une réinjection moyenne $m_I = 3.16 \times 10^{-7}$ et la courbe en points tillés correspond à une faible réinjection $m_I = 3.16 \times 10^{-8}$. Paramètres numériques : $|\sigma_N - 2| = 0,07$ et pour une condition d'interférence constructive $(\cos(\Phi_I + \theta) = +1)$ [43].

ramétrique de pompage qui apparait à la même pulsation (Eq.(3.65)) et en normalisant par le signal LOFI sans modulation de pompage

$$G_p(\delta_I, \delta_N) = \frac{R(\delta_I, \delta_N) - R(0, \delta_N)}{R_0}. \quad (3.69)$$

La Fig.3.6 représente le gain effectif $G_p(\delta_I, \delta_N)$ en fonction du taux de modulation de pompage normalisé par le seuil paramétrique de pompage (δ_N/δ_N^*) . Les trois courbes correspondent à trois niveaux de réinjection optique m_I différents. Pour chaque cas, le gain a un profil résonant avec un maximum atteint pour $\delta_N = \delta_N^*$. Pour $\delta_N > \delta_N^*$, G_p décroît significativement car le contraste entre le signal LOFI et le signal paramétrique diminue (voir Figure 3.5). En comparant les trois courbes, on montre que l'amplification paramétrique est d'autant meilleure que la quantité de lumière réinjectée dans le laser est faible, ce qui est un avantage pour notre système de détection. Dans nos conditions de modulation $|\sigma_N - 2| > \eta\epsilon$, en nous plaçant au seuil paramétrique de pompage, le signal LOFI est amplifié par deux ordres de grandeur dans le cas

d'une faible réinjection ($m_I = 3.16 \times 10^{-8}$) par rapport au signal LOFI sans modulation de pompage. On peut donc mettre à profit l'amplification paramétrique pour augmenter encore la sensibilité de détection du système LOFI et ainsi faciliter la mesure de très faibles réflectivités où le signal sur bruit est très faible.

3.4.5 Résultats numériques

Afin de vérifier la validité de notre analyse multi-échelle du laser soumis à une double modulation, nous avons résolu numériquement le système d'équations différentielles (3.37). La Figure 3.7 représente le signal LOFI avec et sans modulation de pompage pour une faible réinjection ($m_I = 3.16 \times 10^{-6}$), en coordonnées polaires, c'est à dire en représentant les composantes en quadratures q en fonction de p issues de la démodulation du signal à la pulsation Ω_I et où Φ_I varie de 0 à 2π . Sans modulation de pompage ($m_N = 0$), on retrouve que le signal LOFI est un cercle dont le rayon est $R = R_0$, proportionnel à la quantité de lumière réinjectée dans le laser m_I . Lorsqu'on applique la modulation de pompage ($m_N = 0.04$), le cercle devient une ellipse avec un grand axe (respectivement un petit axe) plus grand (respectivement plus petit) que le diamètre du cercle. La distortion du cercle est la traduction directe de l'amplification paramétrique du signal LOFI provenant de l'interaction non linéaire entre la modulation de pompage et la modulation des pertes qui est sensible en phase (c.-à-d. la nécessité qu'il y ait une condition d'accord de phase) comme le prédit l'Eq.(3.66). On observe une périodicité double de l'amplification par rapport au signal LOFI sans modulation de pompage, car il y a deux conditions d'accord de phase opposées de π qui permettent l'amplification paramétrique. Cela est dû au fait que l'on module le pompage avec une pulsation deux fois plus grande que la pulsation de modulation des pertes. En comparant le diamètre du cercle avec le grand axe de l'ellipse, on estime un gain paramétrique d'environ deux. Dans nos conditions de modulation de pompage $|\sigma_N - 2| = 0,07$, pour un seuil paramétrique correspondant à un taux de modulation seuil $m_N^* = 0,07$ et un taux de réinjection $m_I = 3,16 \times 10^{-6}$, ce résultat est bien en accord avec le gain paramétrique effectif G_p mesuré sur la Figure 3.6 avec $m_N/m_N^* \approx 0,57$ et déterminée par l'analyse multi-échelles. Pour une modulation de pompage plus forte, l'ellipse est fortement décentrée et son grand axe (respectivement son petit axe) est plus petit (respectivement plus petit) que le diamètre du cercle LOFI. En effet, lorsqu'on augmente le taux de modulation de pompage, on génère un signal paramétrique de pompage dont l'amplitude est plus grande (Eq.(3.65)) et dont la phase reste constante, et cela induit un décentrage du centre de l'ellipse proportionnel au taux

de modulation δ_N . La diminution de la longueur du grand axe de l'ellipse traduit une baisse de l'amplification paramétrique, à cause de la dégradation du contraste entre le signal LOFI amplifié et le signal paramétrique de pompage, comme le montre la Fig.3.5 lorsqu'on module le pompage avec un taux très supérieur au seuil paramétrique.

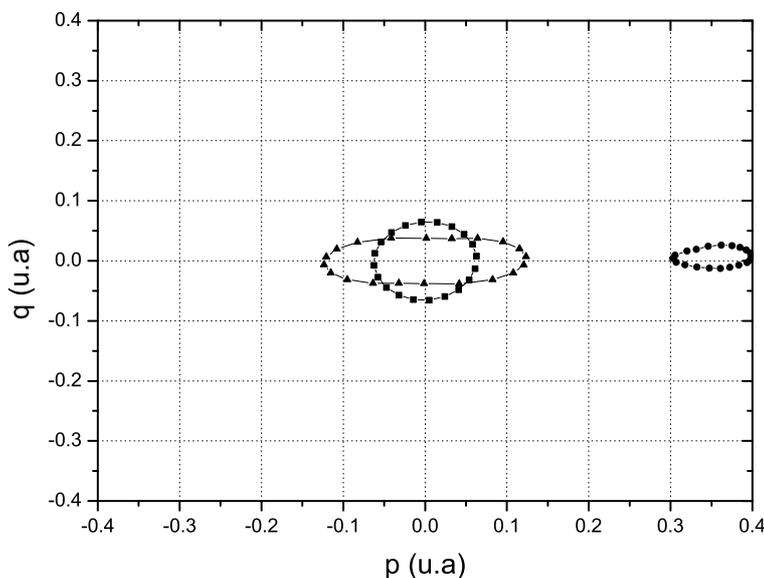


FIG. 3.7 – Signal LOFI numérique en représentation polaire dans le cas d'une faible réinjection sans modulation de pompage $m_N = 0$ (carrés), avec une faible modulation de pompage $m_N = 0.04$ (triangles) et avec une forte modulation de pompage $m_N = 0.14$ (ronds). Paramètres numériques : $|\sigma_N - 2| = 0.07$, $m_I = 3.16 \times 10^{-6}$, $m_N^* = 0.07$ [43].

La Figure 3.8 représente le signal LOFI avec et sans modulation de pompage pour une forte réinjection ($m_I = 3.16 \times 10^{-5}$). Sans modulation de pompage ($m_N = 0$), on observe toujours le signal LOFI qui est un cercle dont le rayon est agrandi par rapport à la Figure 3.8, ce qui traduit une augmentation de la réinjection optique, et donc du taux de modulation des pertes de la cavité. Lorsqu'on applique la modulation de pompage, on voit que la distorsion du cercle en forme d'ellipse est moins importante, ce qui traduit le fait que l'amplification paramétrique du signal LOFI est moins significative que dans le cas d'une faible réinjection.

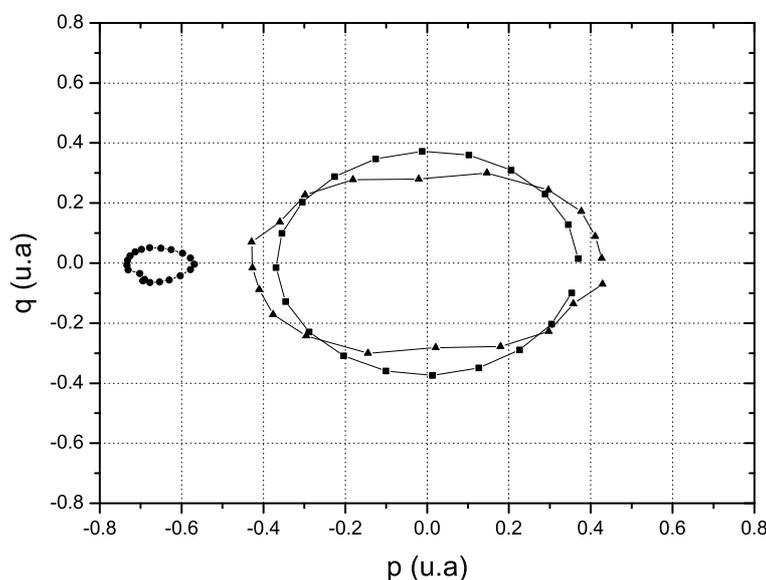


FIG. 3.8 – Signal LOFI numérique en représentation polaire dans le cas d’une forte réinjection sans modulation de pompage $m_N = 0$ (carrés), avec une faible modulation de pompage $m_N = 0,04$ (triangles) et avec une forte modulation de pompage $m_N = 0,42$ (ronds). Paramètres numériques : $|\sigma_N - 2| = 0,07$, $m_I = 3,16 \times 10^{-5}$, $m_N^* = 0,07$ [43].

3.4.6 Résultats expérimentaux

Afin de compléter l’analyse mathématique et la simulation numérique du laser doublement modulé en régime paramétrique, nous avons réalisé une expérience LOFI en régime paramétrique dont le schéma de principe est représenté à la Figure 3.9. Le schéma est identique à la Figure 3.3 qui explique le fonctionnement de l’expérience LOFI en modulation de pompage pour la condition de synchronisation $F_N = F_I$ en régime linéaire. Ici, la modulation de pompage est générée par le modulateur acousto-optique (MAO) qui module l’intensité du faisceau de pompe de la diode laser à la fréquence $F_N = 4 \times F_I/2 = 2F_I$ grâce au multiplicateur de fréquence. Ainsi, on module le pompage de manière synchronisée à la fréquence double de la modulation des pertes afin d’être dans les conditions de résonance paramétrique. Les paramètres expérimentaux ainsi que le rappel des paramètres réduits de l’analyse mutli-échelles sont résumés au tableau 1.1.

La Fig.3.10 montre le résultat expérimental du signal LOFI obtenu avec et sans modulation de pompage pour un taux de réinjection $m_I \approx 10^{-6}$. On ajuste la quantité de lumière réinjectée dans le laser grâce à la densité optique et le maximum du taux de modulation de pompage est

Paramètres du laser
Longueur d'onde $\lambda = 1064\text{nm}$
Taux d'amortissement de la cavité $\gamma_c \approx 10^{10}\text{s}^{-1}$
Taux d'amortissement de l'inversion de population $\gamma_1 = 5 \times 10^3\text{s}^{-1}$
Paramètre de pompage normalisé $\eta = 1.2$
Fréquence de relaxation $\Omega_R/2\pi \approx 500\text{ kHz}$
Puissance de sortie du microlaser $P_{\mu l} \approx 2\text{ mW}$
Paramètres de modulation
Taux de modulation de pompage $0 \leq m_N \leq 2.5 \times 10^{-2}$
Taux de modulation des pertes de la cavité
$3 \times 10^{-8} \leq m_I = 2\sqrt{R_e} \leq 2 \times 10^{-5}$
Fréquence de la modulation de pompage $\Omega_N/2\pi \approx 1\text{ MHz}$
Fréquence de la modulation de pertes (ou fréquence de décalage)
$\Omega_I/2\pi \approx \Omega_R/2\pi \approx 500\text{ kHz}$
Paramètres réduits
Petit paramètre $\epsilon = \gamma_1/\Omega_R = 1.6 \times 10^{-3}$
Modulation de pompage $0 \leq \delta_N = \frac{\eta}{\eta-1}m_N \leq 0,15$
Modulation des pertes de la cavité $5 \times 10^{-4} \leq \delta_I = \frac{m_I\gamma_c}{\Omega_R} \leq 0.3$
Fréquence de la modulation de pompage $\sigma_N = \Omega_N/\Omega_R \approx 2$
Fréquence de la modulation de pertes de la cavité $\sigma_I = \Omega_I/\Omega_R \approx 1$

TAB. 3.1 – *Amplification paramétrique du signal LOFI : résumé des paramètres expérimentaux et réduits.*

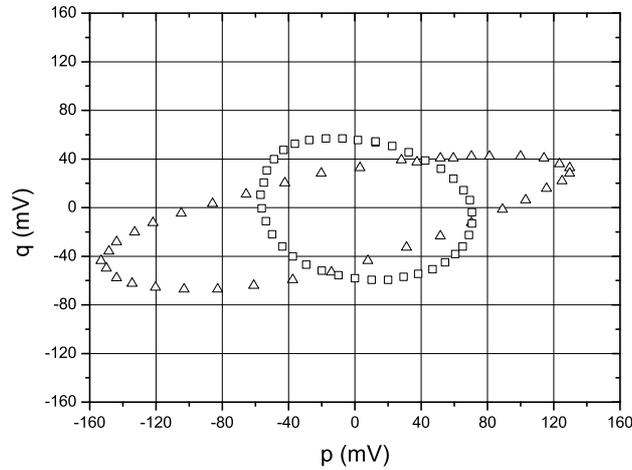


FIG. 3.10 – *Signal LOFI expérimental en représentation polaire q vs p pour un taux de réinjection $m_I \approx 10^{-6}$ sans modulation de pompe $m_N = 0$ (carrés) et avec une modulation de pompe $m_N = 2.5 \times 10^{-2}$ (triangles). Paramètres expérimentaux : $\Omega_R/2\pi = 570\text{kHz}$, $\Omega_I/2\pi = 550\text{kHz}$, $\Omega_N/2\pi = 1.1\text{MHz}$ [43].*

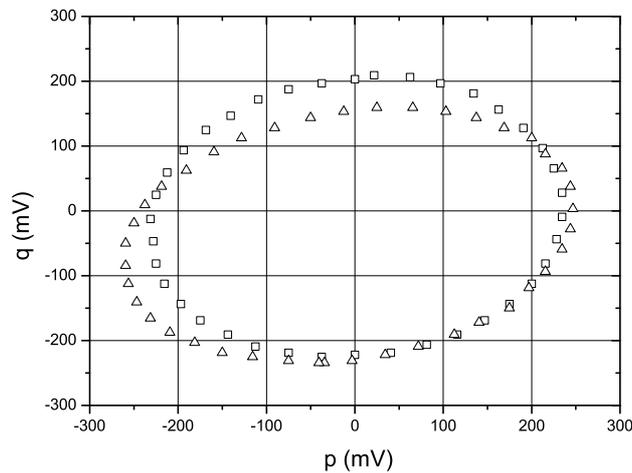


FIG. 3.11 – *Signal LOFI expérimental en représentation polaire q vs p pour un taux de réinjection $m_I \approx 10^{-5}$ sans modulation de pompe $m_N = 0$ (carrés) et avec modulation de pompe $m_N = 2.5 \times 10^{-2}$ (triangles). Paramètres expérimentaux : $\Omega_R/2\pi = 570\text{kHz}$, $\Omega_I/2\pi = 550\text{kHz}$, $\Omega_N/2\pi = 1.1\text{MHz}$ [43].*

$m_N = 2.5 \times 10^{-2}$. Le signal elliptique montre qu'une amplification paramétrique du signal LOFI est possible et que cet effet est sensible à la phase. Dans nos conditions expérimentales assez proche des paramètres numériques utilisés précédemment, $\eta \approx 1, 2$, $m_I \approx 10^{-6}$, $m_N^* \approx 3.5 \times 10^{-2}$, $|\sigma_N - 2| = 0,035$, le gain obtenu d'environ deux est en accord avec les prédictions théoriques et numériques. On pourrait obtenir une amplification plus importante de trois manière différentes. Par exemple, en travaillant plus près de la résonance du laser, mais la mesure est alors difficile, car on est gêné par le bruit du laser d'origine quantique. On pourrait également diminuer la quantité de lumière réinjectée dans le laser, mais la nécessité de travailler près de la relaxation du laser fait qu'il est également difficile d'obtenir un signal sur bruit suffisant. Enfin, on pourrait augmenter le taux de modulation de pompage afin de se rapprocher du seuil paramétrique de pompage du laser, mais le dispositif électronique de modulation de pompage dont on dispose ne permet pas d'atteindre un taux de modulation supérieur à $m_N = 2.5 \times 10^{-2}$. La Fig.3.11 montre le résultat expérimental obtenu pour un taux de réinjection $m_I \approx 10^{-5}$, donc dix fois supérieur au cas précédent et avec les mêmes paramètres expérimentaux. On constate que le signal avec et sans modulation de pompage est quasiment le même, ce qui traduit, comme cela avait été prévu théoriquement et numériquement, que l'effet d'amplification paramétrique diminue lorsque le taux de modulation des pertes de la cavité augmente.

3.5 Application à la mesure de réflectivité

Pour conclure ce chapitre, nous allons étudier une application particulière du régime paramétrique du système LOFI modulé en pompage qui permet de déterminer la quantité de lumière réinjectée dans la cavité d'une autre manière que celle présentée au paragraphé 3.2. Ici, on souhaite mettre à profit l'instabilité paramétrique du laser soumis à la réinjection et la modulation de pompage comme méthode de détection. En effet, en mettant à profit le franchissement du seuil paramétrique induit par le mélange non linéaire du signal réinjecté et du signal paramétrique de pompage, on peut développer un capteur précis de la quantité de lumière réinjectée dans le laser, et donc de la réflectivité effective de la cible à analyser.

3.5.1 Mélange non linéaire

Dans l'étude précédente, on mélangeait non linéairement la modulation de pompage à une pulsation double de la modulation des pertes pour générer un signal sous-harmonique renforçant

le signal LOFI pour l'amplifier paramétriquement. Pour cette application, nous allons nous intéresser au cas où $\Omega_N = \Omega_I \approx 2\Omega_R$: on module à la même pulsation le pompage du laser et les pertes de la cavité, dans une condition proche de la résonance paramétrique, c'est à dire à deux fois la pulsation propre du laser Ω_R . Ainsi, on souhaite que le signal réinjecté à la pulsation Ω_I fasse franchir le seuil paramétrique de pompage du laser pour générer un signal sous-harmonique à la pulsation $\Omega_I - \Omega_N/2 = \Omega_N - \Omega_N/2 = \Omega_N/2$. La résolution analytique par une méthode multi-échelle équivalente à celle présentée dans le paragraphe précédent aboutit aux solutions suivantes [42]

$$x = \frac{1}{3}\delta_I \cos(S + \Phi_I) + \frac{2}{3}\delta_N \sin(S + \Phi_N) + 2R \cos\left(\frac{S}{2} + \theta\right) + \frac{2}{3}R^2 \sin(S + 2\theta), \quad (3.70a)$$

$$y = \frac{2}{3}\delta_I \sin(S + \Phi_I) - \frac{1}{3}\delta_N \cos(S + \Phi_N) + 2R \sin\left(\frac{S}{2} + \theta\right) - \frac{4}{3}R^2 \cos(S + 2\theta). \quad (3.70b)$$

Si on décompose la solution y de la variation d'intensité du laser par rapport à l'état stationnaire donnée par l'Eq.(3.70)

- le premier terme correspond au signal LOFI à la pulsation de modulation des pertes $S = \Omega_I t$,
- le second terme correspond au régime forcé de l'oscillateur laser soumis à la modulation de pompage d'amplitude δ_N et qui oscille donc à la pulsation $S = \Omega_N t$,
- le troisième terme est le signal paramétrique de pompage, sous-harmonique généré à la pulsation moitié $S = \Omega_N t/2$,
- le dernier terme vient s'ajouter au signal LOFI à la pulsation $S = \Omega_I t$ et il est obtenu par un couplage non linéaire entre la modulation de pompage et la modulation de pertes.

Pour déterminer l'expression de l'amplitude d'oscillation R , le critère de solvabilité de l'analyse multi-échelles aboutit au système d'équations différentielles suivant [42]

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{\eta\epsilon R}{2} - \frac{R}{6}D \cos(2\theta - \Psi), \quad (3.71a)$$

$$R \frac{d\theta}{ds} = \frac{(2 - \sigma)R}{2} - \frac{R^3}{6} + \frac{R}{6}D \sin(2\theta - \Psi). \quad (3.71b)$$

avec

$$D^2 = (\delta_I)^2 + \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^2 - \delta_I \delta_N \sin \Phi_I. \quad (3.72)$$

et

$$\tan \Psi = \tan \Phi - \frac{\delta_N}{2\delta_I \cos \Phi_I}. \quad (3.73)$$

En annulant les dérivées dans les termes de gauche des Eqs.(3.71), on obtient une équation polynômiale sur l'amplitude R

$$R^4 - 6(2 - \sigma)R^2 = D^2 - \left(\frac{\delta_N^*}{2}\right)^2. \quad (3.74)$$

où δ_N^* est le seuil paramétrique défini par l'Eq.(3.64). On voit que la génération du signal sous-harmonique apparaît à $R = 0$ et d'après l'Eq.(3.74), on en conclut que le point de bifurcation se trouve au seuil paramétrique $D = \delta_N^*/2$.

3.5.2 Deux méthodes de mesure

Pour mesurer la quantité de lumière réinjectée dans le laser, et donc la réflectivité effective de la cible, nous allons voir deux méthodes. Celle de l'interférence destructive que nous avons abordée au paragraphe 3.2 et celle de la détection de seuil paramétrique.

3.5.2.1 Interférence destructive

En dessous du seuil paramétrique ($D < \delta_N^*/2$), on a $R = 0$ et l'Eq.(3.70b) devient

$$y = \frac{2}{3}\delta_I \sin(S + \Phi_I) - \frac{1}{3}\delta_N \cos(S + \Phi_N). \quad (3.75)$$

L'Eq.(3.75) montre que l'intensité du signal LOFI peut interférer destructivement ($y=0$) avec l'intensité du signal paramétrique de pompage pour la condition de taux de modulation et d'accord de phase suivante

$$\delta_N = 2\delta_I, \quad (3.76a)$$

$$\Phi_I = \Phi_N \pm \frac{\pi}{2}. \quad (3.76b)$$

On retrouve donc la condition déterminée par l'analyse linéaire (Eq.(3.12)) et la différence du facteur 2 provient du fait qu'on a réalisé ici l'analyse dans le cas où $\Omega_N = \Omega_I \approx 2\Omega_R$, alors que

l'analyse linéaire a été menée au voisinage de la pulsation de relaxation du laser $\Omega_N = \Omega_I \approx \Omega_R$. Pour $\sigma = \sigma_N = \sigma_I \neq 2$ (c.-à-d. $\Omega_N = \Omega_I \neq 2\Omega_R$), la condition d'interférence destructive donnée par l'Eq.(3.76) pourrait être généralisée par $\delta_N = \sigma\delta_I$ et $\Phi_I = \Phi_N \pm \pi/2$.

3.5.2.2 détection de seuil

Au seuil paramétrique ($D = \delta_N^*/2$), en considérant les Eqs.(3.72) et (3.74), les paramètres de modulation doivent vérifier l'égalité suivante

$$(\delta_I)^2 + \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^2 - \delta_I\delta_N \sin \Phi_I = \left(\frac{\delta_N^*}{2}\right)^2. \quad (3.77)$$

- Pour $\delta_I=0$, l'Eq.(3.77) montre que le signal sous-harmonique est généré quand le taux de modulation de pompage est égal au seuil paramétrique de pompage

$$\delta_N = \delta_N^*. \quad (3.78)$$

- Pour $\delta_I \neq 0$ et $\Phi_I = -\pi/2$, le signal sous-harmonique est généré pour un taux de modulation de pompage inférieur au seuil paramétrique de pompage

$$\delta_N = \delta_N^* - 2\delta_I < \delta_N^*. \quad (3.79)$$

- Pour $\delta_I \neq 0$ et $\Phi_I = +\pi/2$, le signal sous-harmonique est généré pour un taux de modulation de pompage supérieur au seuil paramétrique de pompage

$$\delta_N = \delta_N^* + 2\delta_I > \delta_N^*. \quad (3.80)$$

Il est donc possible à partir de l'Eq.(3.77) de déterminer la quantité de lumière réinjectée dans le laser en connaissant le seuil paramétrique du laser δ_N^* et le taux de modulation de pompage δ_N nécessaire pour franchir le seuil paramétrique de pompage du laser. Pour illustrer cette détection de seuil, la Fig.3.12 montre le résultat de la simulation numérique de la résolution du système d'équation du laser doublement modulé (Eq.(3.37)). On représente le signal paramétrique de pompage à la pulsation de démodulation $\Omega_I/2$ en coordonnées polaires avec et sans modulation de pompage. Sans modulation de pompage, il n'y a pas de signal sous-harmonique et avec une modulation de pompage $m_N = 0.04$, on franchit le seuil paramétrique pour une phase Φ_I qui vérifie la condition d'accord de phase donnée par l'Eq.(3.76b). Dans ce cas, il n'y a qu'une seule

condition d'accord de phase entre 0 et 2π , car on module le pompage et les pertes à la même pulsation.

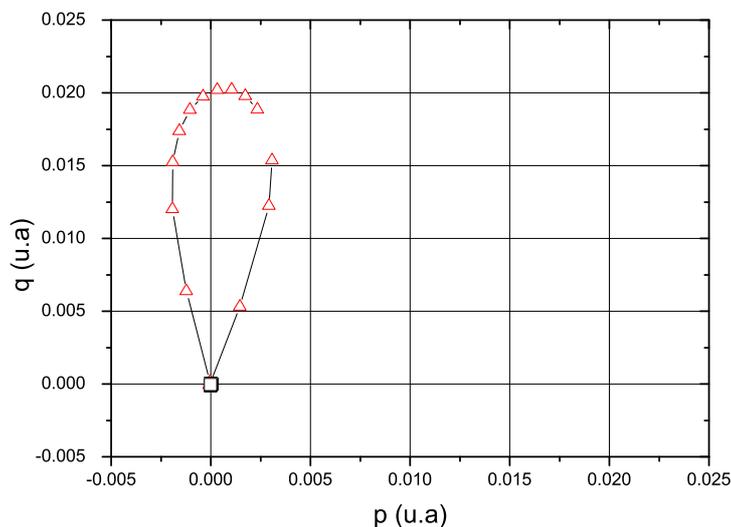


FIG. 3.12 – Signal LOFI sous harmonique numérique en représentation polaire à la pulsation de démodulation $\Omega_I/2$ sans modulation de pompage $m_N = 0$ (carrés) et avec une modulation de pompage $m_N = 0.04$ (triangles). Paramètres numériques : $|\sigma - 2| = 0.1$ et $m_I = 4 \times 10^{-5}$, $m_N^* = 0,6$ [42].

Enfin, pour valider expérimentalement la mesure de la quantité de lumière réinjectée dans le laser, nous avons réalisé l'expérience dont le montage est similaire à celui présenté à la Figure 3.3 c'est à dire pour une synchronisation des fréquences de modulation $F_N = 2 \times F_I/2 = F_I$. Ici, on détecte le signal non pas à la fréquence de décalage F_I du signal LOFI, mais à la fréquence moitié $F_I/2$ afin de mesurer le signal sous-harmonique, ou plutôt, l'apparition de ce signal au franchissement du seuil paramétrique. La Fig.3.13 représente le signal LOFI paramétrique avec et sans modulation de pompage à la fréquence de démodulation $F_I/2=250$ kHz. On voit que le seuil paramétrique n'est franchit uniquement lorsqu'on applique une modulation de pompage et pour une certaine condition de phase. A partir du taux de modulation permettant le franchissement du seuil paramétrique, qu'on peut déterminer en contrôlant sur l'oscilloscope l'amplitude de la modulation de pompage, on peut en déduire la réflectivité effective de la cible, comme le prédit l'Eq.(3.77).

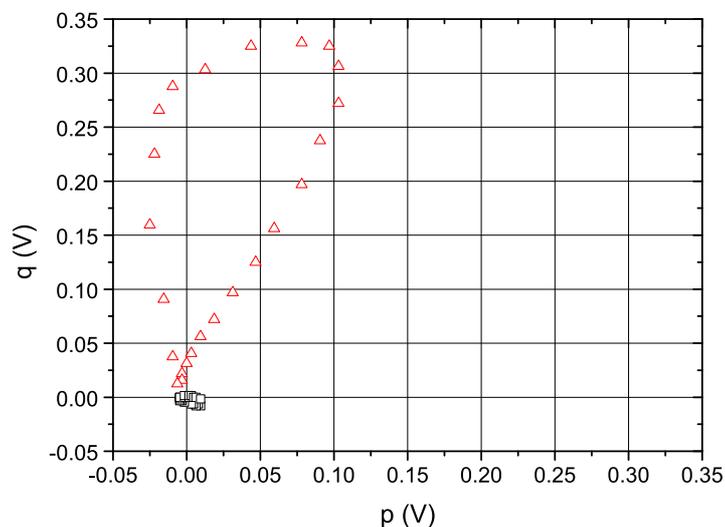


FIG. 3.13 – *Signal LOFI expérimental en coordonnées polaires q vs p à la fréquence de démodulation $F_I/2$ sans modulation de pompe $m_N = 0$ (carrés) et avec modulation de pompe $m_N = 4.6 \times 10^{-2}$ (triangles). Paramètres expérimentaux : $\Omega_R/2\pi = 265\text{kHz}$, $\Omega_I/2\pi = 500\text{kHz}$, $\Omega_N/2\pi = 500\text{kHz}$ [42].*

D'après l'Eq.(3.77), il est clair que le seuil paramétrique peut être franchi pour une plus petite quantité de lumière réinjectée et avec une plus forte modulation de pompe. Donc, il est théoriquement possible de mesurer des réflectivité plus faibles, mais avec un dispositif de modulation qui nous permette d'atteindre des taux de modulation plus élevés que ce que l'on peut faire actuellement.

3.6 Conclusion

Nous avons étudié analytiquement, numériquement et expérimentalement, la réponse d'un laser soumis à une double modulation : celle des pertes de la cavité, induite par la réinjection optique décalée en fréquence et celle de pompe induite par la modulation de l'intensité du faisceau de pompe. Une analyse linéaire nous a permis de déterminer la réponse du laser soumis soit à la réinjection optique, soit à la modulation de pompe, soit les deux. Lorsque les deux modulations sont synchrones, on peut trouver une condition d'accord de phase telle qu'elles interfèrent destructivement et la modulation de l'intensité du laser s'annule alors. Cette méthode permet de déterminer la quantité de lumière réinjectée dans le laser à partir du taux de mo-

dulation de pompage nécessaire pour avoir la condition d'interférence destructive. En revanche, l'analyse linéaire ne permet pas de connaître l'évolution de cette amplitude. Pour cela, nous avons analysé les équations du laser doublement modulé avec une méthode multi-échelle dont le principe a été illustré avec l'étude d'un oscillateur paramétrique. En effet, si au premier ordre le comportement du laser doublement modulé correspond à un oscillateur forcé, au deuxième ordre, il a un comportement paramétrique, c'est à dire que dans la réponse du laser, il y a des fréquences sous-harmoniques. Nous avons ainsi montré comment le signal LOFI peut être amplifié paramétriquement par le mélange non linéaire du signal réinjecté et du signal paramétrique de pompage pour une condition d'accord de phase. Puis, nous avons montré une nouvelle méthode de mesure de la quantité de lumière réinjectée en détectant le franchissement du seuil paramétrique du laser induit par la réinjection optique. Les perspectives de ce travail sont maintenant d'une part d'étudier la stabilité des solutions stationnaires [24] de la modulation d'intensité du laser doublement modulé et d'autre part d'analyser le comportement de la phase de l'oscillation sous-harmonique de la réponse du laser. A plus long terme, cette étude pourrait amener à étudier l'amélioration du signal sur bruit grâce à l'amplification paramétrique et plus particulièrement les états comprimés au-delà de la limite quantique de détection [44].

Conclusion et Perspectives

Nous avons présenté dans ce mémoire deux nouvelles applications du dispositif d'imagerie laser LOFI (Laser Optical Feedback Imaging) basé sur la grande sensibilité de certains laser à la réinjection optique : l'une concerne l'imagerie à synthèse d'ouverture qui permet de réaliser des images avec une résolution spatiale meilleure que la limite de diffraction, et l'autre concerne l'amplification paramétrique du signal réinjecté par une modulation de pompage. Dans le premier chapitre, nous avons résumé le principe de la technique LOFI. Le signal rétrodiffusé par la cible à analyser est décalé en fréquence avant d'être réinjecté. Dans la cavité, il se produit alors un battement optique entre le champ intracavité et le champ réinjecté qui a pour effet de moduler le gain net du laser, et donc l'intensité du laser à la fréquence de décalage. L'amplitude de cette modulation est proportionnelle à la racine carrée de la réflectivité effective de la cible et la phase est proportionnelle à la distance entre le laser et la cible. Il est possible d'amplifier le signal réinjecté par la dynamique du laser en accordant la fréquence de décalage sur la fréquence de relaxation du laser : par rapport à un interféromètre hétérodyne standard, le contraste de modulation est multiplié par un facteur un million. De plus, la détection n'est limitée que par le bruit du laser d'origine quantique. Nous avons présenté quelques exemples d'applications : en exploitant l'amplitude du signal de modulation, il est possible de faire de l'imagerie en milieu diffusant et de la microscopie sur des tissus biologiques ; en exploitant la phase, il est possible de reconstituer des profils sub-micrométriques et de faire de la vibrométrie sur des ouvrages d'art. Enfin, nous avons donné les limites du dispositif : la sensibilité de mesure et la résolution longitudinale sont limitées par le bruit d'amplitude du laser et la résolution spatiale est limitée par la diffraction.

Au deuxième chapitre, nous avons présenté le principe de l'imagerie à synthèse d'ouverture, inspirée de la théorie des radars. Cette technique repose sur le balayage du laser par rapport à la cible à imager afin d'augmenter synthétiquement l'ouverture de collection. Dans un premier

temps, nous avons expliqué le principe de la synthèse d'ouverture dans le cas du balayage en translation et nous avons montré que le signal renvoyé par une cible ponctuelle a une dépendance quadratique en fonction de la position du laser. Nous avons ensuite étudié la réponse fréquentielle de cette cible, et nous en avons déduit qu'elle correspond au filtre adapté qu'il faut appliquer au signal réinjecté pour obtenir une précision spatiale meilleure que le diamètre de la tâche de diffraction du faisceau laser. Nous avons montré que cette résolution est égale à la taille de l'ouverture caractéristique du système, qui est le waist du laser dans notre cas. Puis, nous avons déterminé le filtre adapté au balayage galvanométrique, qui a une dépendance quadratique en fonction de la position angulaire du miroir. Nous en avons déduit la résolution que l'on peut atteindre en synthèse d'ouverture à géométrie angulaire : elle est égale à la résolution en balayage en translation multipliée par un rapport caractéristique du balayage galvanométrique égal à la distance entre le scanner et la cible sur la distance entre le laser et le scanner. Ainsi, on montre qu'il est possible d'atteindre une résolution non seulement meilleure que la limite de diffraction mais aussi meilleure que la taille de l'ouverture réelle du système. Enfin, nous avons étendu cette technique à deux dimensions, en remarquant que le problème bidimensionnel se ramène à deux problèmes unidimensionnels. La résolution de l'image après synthèse d'ouverture est donc environ la même selon chaque direction et est meilleure que la limite de diffraction. Nous avons vérifié expérimentalement l'amélioration de la résolution d'une image LOFI en montrant que sans traitement, l'image est inexploitable, car les détails sont plus fins que le diamètre de la tâche de diffraction, et avec traitement, on arrive à reconnaître la cible, qui était une lettre. Les perspectives de cette étude sont de coupler le traitement de synthèse d'ouverture avec la microscopie LOFI pour réaliser des images sur des tissus biologiques, qu'il est difficile parfois d'imager à cause de la contrainte de focalisation de l'objectif du microscope. D'autre part, il serait intéressant d'étudier le rapport signal sur bruit résultant de la détection hétérodyne du signal renvoyé par la cible lorsqu'on opère une synthèse d'ouverture, et plus particulièrement dans notre cas où l'on est limité par le bruit du laser. Une autre perspective serait de mettre à profit la phase standard LOFI dans l'expression du filtre adapté pour réaliser une focalisation numérique. Enfin, en faisant de l'interférométrie en synthèse d'ouverture, on pourrait réaliser de l'imagerie tridimensionnelle à haute sensibilité de détection, et en configuration auto-alignée.

Au troisième chapitre, nous avons étudié analytiquement, numériquement, et expérimentalement la réponse d'un laser soumis à une double modulation : celle des pertes de la cavité, induite

par la réinjection optique décalée en fréquence, l'autre de pompage. Nous avons tout d'abord fait une analyse linéaire qui nous a permis de trouver une condition d'interférence destructive entre les deux modulations lorsqu'elles sont synchrones et pour une condition d'accord de phase. Il est alors possible de déterminer la quantité de lumière réinjectée dans la cavité à partir du taux de modulation de pompage nécessaire pour réaliser cette condition d'interférence. Puis nous avons fait une analyse multi-échelles qui nous a permis de décrire le régime paramétrique du laser : nous avons déterminé le seuil d'instabilité paramétrique et nous avons montré qu'il est possible d'amplifier paramétriquement le signal de modulation de l'intensité laser par la modulation de pompage pour une condition d'accord de phase et que cette amplification est d'autant meilleure que la réinjection optique est faible. Enfin, nous avons montré qu'en contrôlant le franchissement du seuil paramétrique, il est aussi possible de déterminer la quantité de lumière réinjectée dans le laser. Les perspectives intéressantes de ce travail seraient d'étudier la stabilité des solutions stationnaires de la modulation d'intensité du laser doublement modulé et le comportement de la phase de l'oscillation sous-harmonique de la réponse du laser. On pourrait alors par la suite s'intéresser à l'amélioration du rapport signal sur bruit du dispositif LOFI en régime paramétrique.

Annexe A

Démodulation synchrone

Dans cette annexe, nous nous proposons de rappeler le principe de fonctionnement de la démodulation synchrone permettant d'extraire l'amplitude et la phase d'une modulation à la fréquence F_e . Nous allons ensuite expliquer pourquoi travailler préférentiellement en notation complexe à partir des composantes en quadrature, lorsqu'on travaille avec des sommes de signaux.

1) Considérons un signal harmonique $x(t)$ à la fréquence F_e , d'amplitude A et de phase Φ_0 constantes qui s'écrit

$$x(t) = A \cos(2\pi F_e t + \Phi_0) \quad (\text{A.1})$$

Le principe de la démodulation synchrone est le suivant : on multiplie le signal $x(t)$ par deux signaux de référence en quadrature, à la fréquence de détection F_e , d'amplitude A_{ref} et de phase Φ_{ref} ¹, puis on intègre pendant un temps $T_{int} \propto 1/\Delta F$. On obtient les composantes en quadrature p et q en sortie de la détection synchrone

$$p = \frac{2}{T_{int}} \int_{-\frac{T_{int}}{2}}^{\frac{T_{int}}{2}} x(t) \cos(2\pi F_e t) dt, \quad (\text{A.2a})$$

$$q = -\frac{2}{T_{int}} \int_{-\frac{T_{int}}{2}}^{\frac{T_{int}}{2}} x(t) \sin(2\pi F_e t) dt. \quad (\text{A.2b})$$

¹par souci de simplicité, on prendra $A_{ref}=1$ et $\Phi_{ref} = 0$

Pour chaque composante, le produit du signal $x(t)$ à analyser par le signal de référence donne un terme oscillant à la fréquence $F_e + F_e = 2F_e$ (de l'ordre du MHz pour une fréquence F_e de l'ordre de quelques centaines de kilohertz) que l'on élimine, car il ne rentre pas dans la bande passante de la détection synchrone ΔF (de l'ordre de la dizaine de kilohertz), et un terme de fréquence nulle ($F_e - F_e = 0$). Les Eqs.(A.2) se résument alors aux expressions

$$p(A, \Phi_0) = A \cos(\Phi_0), \quad (\text{A.3a})$$

$$q(A, \Phi_0) = A \sin(\Phi_0). \quad (\text{A.3b})$$

On en déduit l'amplitude A et la phase Φ_0 du signal $x(t)$ à la fréquence de détection F_e

$$A = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad (\text{A.4a})$$

$$\Phi_0 = \arctan\left(\frac{q}{p}\right). \quad (\text{A.4b})$$

Pour illustrer le principe de la démodulation synchrone dans le domaine fréquentiel, la Figure A.1(a) représente le spectre du signal $x(t)$ avant démodulation (un dirac en F_e de poids $A/2$ et de phase Φ_0 et un dirac en $-F_e$ de poids $A/2$ et de phase $-\Phi_0$) et après démodulation (un dirac d'amplitude A et de phase Φ_0). Cela se traduit donc par une simple translation du spectre de la fréquence F_e (et $-F_e$) vers la fréquence nulle.

2) Considérons maintenant le signal (A.1) de fréquence F_e que l'on détecte à une fréquence légèrement supérieure $F_e + \delta F$ (de manière à ce que $F_e + \delta F$ soit comprise dans la bande passante ΔF de la détection synchrone). La démodulation de ce signal, de la même manière que précédemment (Eq.(A.2)), donne les composantes en quadrature

$$p(A, \Phi_0) = \frac{A}{\pi \delta F T_{int}} \sin(\pi \delta F T_{int}) \cos(\Phi_0), \quad (\text{A.5a})$$

$$q(A, \Phi_0) = \frac{A}{\pi \delta F T_{int}} \sin(\pi \delta F T_{int}) \sin(\Phi_0). \quad (\text{A.5b})$$

On en déduit l'amplitude A et la phase Φ_0 de la modulation

$$A = \frac{\pi \delta F T_{int}}{\sin(\pi \delta F T_{int})} \sqrt{p^2 + q^2}, \quad (\text{A.6a})$$

$$\Phi_0 = \arctan\left(\frac{q}{p}\right). \quad (\text{A.6b})$$

La Figure A.1(b) représente le spectre du signal $x(t)$ avant et après démodulation : on observe cette fois-ci une translation du dirac respectivement en F_e et en $-F_e$ vers δF et $-\delta F$.

3) Pour aller un peu plus loin, considérons à présent le cas d'un signal composé d'une somme de deux signaux à deux fréquences différentes : l'une légèrement supérieure à la fréquence de décalage F_e et l'autre légèrement inférieure, de la même quantité (toujours de manière à ce que $F_e + \delta F$ et $F_e - \delta F$ soient comprises dans la bande passante ΔF de la détection synchrone). Le signal à la fréquence $F_e + \delta F$ est caractérisé par son amplitude A_1 et sa phase Φ_1 et le signal à la fréquence $F_e - \delta F$ est caractérisé par son amplitude A_2 et sa phase Φ_2 . Le signal $x(t)$ s'écrit alors

$$x(t) = A_1 \cos [2\pi(F_e + \delta F)t + \Phi_1] + A_2 \cos [2\pi(F_e - \delta F)t + \Phi_2]. \quad (\text{A.7})$$

La démodulation de ce signal donne les composantes en quadrature

$$p(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) = \frac{A_1}{\pi\delta FT_{int}} \sin(\pi\delta FT_{int}) \cos(\Phi_1) + \frac{A_2}{\pi\delta FT_{int}} \sin(\pi\delta FT_{int}) \cos(\Phi_2), \quad (\text{A.8a})$$

$$q(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2) = \frac{A_1}{\pi\delta FT_{int}} \sin(\pi\delta FT_{int}) \sin(\Phi_1) + \frac{A_2}{\pi\delta FT_{int}} \sin(\pi\delta FT_{int}) \sin(\Phi_2). \quad (\text{A.8b})$$

Chaque composante $p(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2)$ et $q(A_1, A_2, \Phi_1, \Phi_2)$ est constituée d'une somme de la contribution du signal à la fréquence $F_e + \delta F$ et du signal à la fréquence $F_e - \delta F$, c'est à dire que les amplitudes A_1 , A_2 et les phases $\Phi_{e,1}$ et $\Phi_{e,2}$ sont mélangées. La Figure A.1(c) représente le spectre du signal $x(t)$ avant et après démodulation et on observe que la partie négative et la partie positive du spectre se sont recouvertes et ont ainsi mélangées les amplitudes et les phases respectives de chaque contribution. En conséquence, il est plus compliqué de déterminer l'amplitude et la phase de chaque signaux composant le signal $s(t)$. Pour remédier à ce problème, on peut passer en écriture complexe et écrire le signal sous la forme

$$s = p + jq = \frac{A_1}{\pi\delta FT_{int}} \sin(\pi\delta FT_{int}) e^{j\Phi_1} + \frac{A_2}{\pi\delta FT_{int}} \sin(\pi\delta FT_{int}) e^{j\Phi_2}. \quad (\text{A.9})$$

D'un point de vue spectral, le passage à l'écriture complexe correspond à supprimer la partie des fréquences négatives et redondantes. Ainsi, après démodulation, on évite le recouvrement des spectres symétriques en notations réelles.

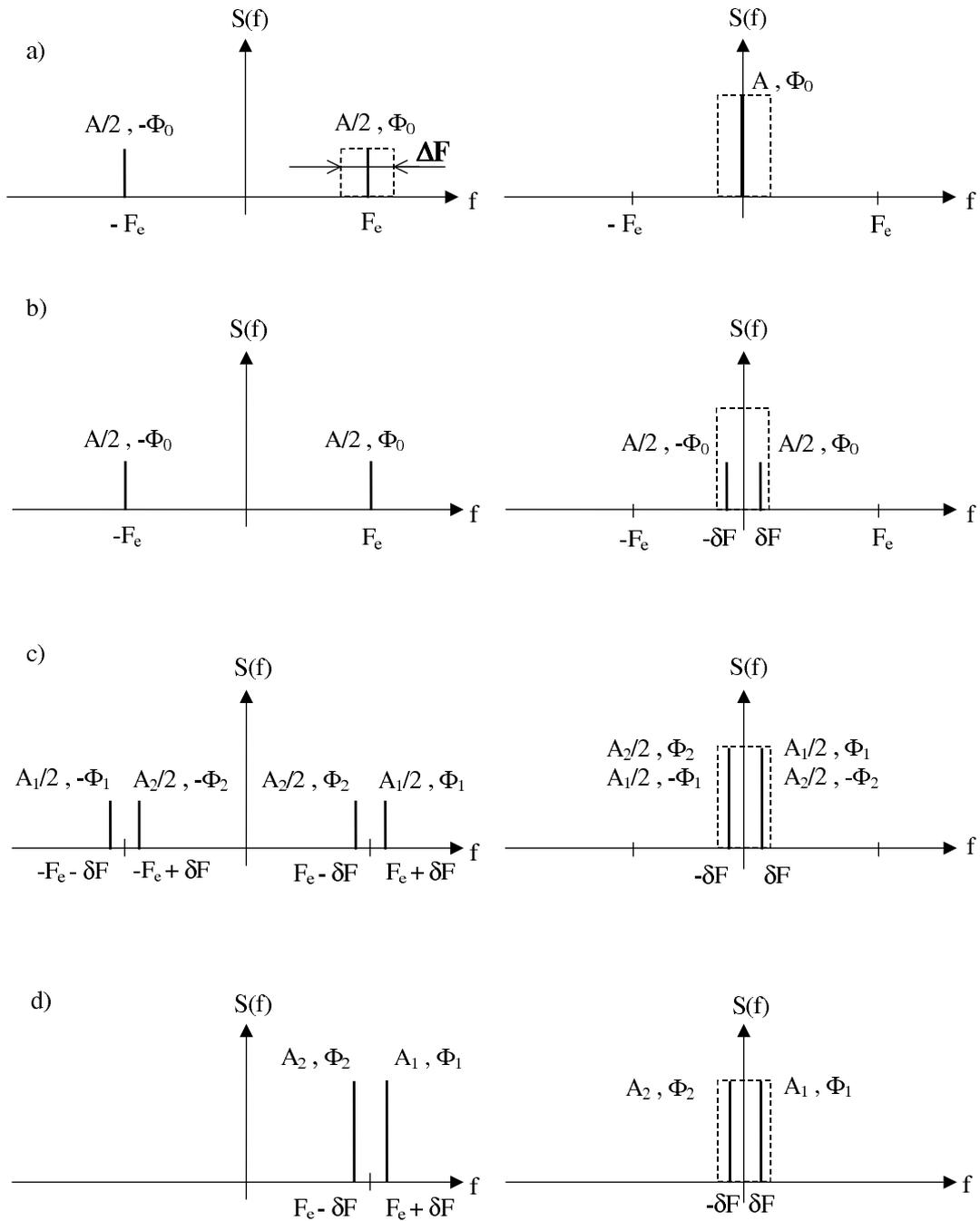


FIG. A.1 – Principe de la démodulation synchrone dans le domaine fréquentiel. a) cas d'un signal à la fréquence F_e , d'amplitude A et de phase Φ_0 , détecté à la fréquence F_e . b) cas d'un signal à la fréquence F_e , d'amplitude A et de phase Φ_0 , détecté à la fréquence $F_e + \delta F$. c) cas composé d'une somme de deux signaux à la fréquence $F_e + \delta F$, d'amplitude A_1 et de phase Φ_1 et à la fréquence $F_e - \delta F$, d'amplitude A_2 et de phase Φ_2 . d) représentation du signal c) en notation complexe. ΔF représente la bande passante de la détection synchrone.

Annexe B

Théorème de la phase stationnaire

Le théorème de la phase stationnaire permet de calculer la transformée de Fourier de fonctions oscillantes de phase $k\mu(t)$ avec une amplitude $x(t)$ quelconque mais suffisamment lisse. Il s'énonce de la manière suivante :

Si la fonction $x(t)$ est continue et la fonction $\mu(t)$ vérifie en un point t_0 de l'intervalle $[-\infty, +\infty]$, $\mu'(t_0) = 0$ et $\mu''(t_0) \neq 0$, alors pour un k suffisamment grand, on peut faire l'approximation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{jk\mu(t)} dt \approx e^{jk\mu(t_0)} x(t_0) \sqrt{\frac{2j\pi}{k\mu''(t_0)}}. \quad (\text{B.1})$$

Ce théorème permet donc de déterminer un résultat approché du calcul de l'aire de la courbe d'une fonction oscillante apodisée par une enveloppe lisse, en remarquant que partout où la phase de ce signal varie (c'est à dire où la fréquence est modulée), il y a compensation entre les alternances positives et négatives et donc l'intégrale tend vers zéro (Figure B.1). En revanche, lorsque la phase devient stationnaire (c'est à dire lorsque la fréquence s'annule), l'aire de la fonction oscillante prend une valeur non nulle, qui est finalement la seule contribution à l'intégrale. On rappelle l'expression de l'intégrale (2.17) à calculer

$$S_i(f) = e^{j\left(\Phi_0 - \frac{\pi f^2}{K}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} A_i(t) e^{j\pi K\left(t - \frac{f}{K}\right)^2} dt. \quad (\text{B.2})$$

En identifiant l'Eq.(B.2) avec l'Eq.(B.1), on obtient

$$x(t) = A_i(t) \quad (\text{B.3a})$$

$$k = \pi K \quad (\text{B.3b})$$

$$\mu(t) = \left(t - \frac{f}{K}\right)^2 \quad (\text{B.3c})$$

D'après le calcul simple de la dérivé première et seconde de l'Eq.(B.3c), on en déduit que $t_0 = \frac{f}{K}$, c'est à dire que la seule contribution non nulle à l'intégrale est celle calculée en ce point. On en déduit le résultat de l'expression (2.18)

$$S_i(f) \approx \frac{1}{\sqrt{K}} e^{j\left(\Phi_0 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi f^2}{K}\right)} A_i\left(\frac{f}{K}\right). \quad (\text{B.4})$$

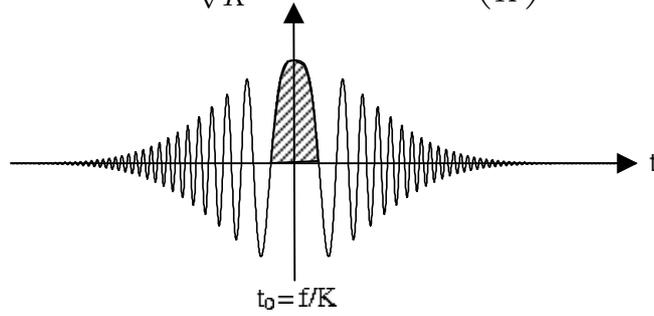


FIG. B.1 – *Signal modulé linéairement en fréquence (chirp) : la zone hachurée correspond à la contribution non nulle à l'aire de la courbe.*

Bibliographie

- [1] R. Day, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier (2000).
- [2] R. Lang et K. Kobayashi, IEEE J. Quantum Electron. QE-16, 347 (1980).
- [3] P.Besnard, B.Meziane et G.M. Stephan, IEEE J. Quantum Electron. QE-29, 1271 (1993).
- [4] A.Bearden, M.P. O'Neil, L.C. Osborne et T.L. Wong, Opt. Lett. 18, 238 (1993).
- [5] T. Bosch, N. Servagent et S. Donati, Opt. Eng. 40, 20 (2001).
- [6] E. Lacot, R. Day et F. Stoeckel, Opt. Lett. 24, 744 (1999).
- [7] E. Lacot, R. Day et F. Stoeckel, Phys. Rev. A, 64, 043815 (2001).
- [8] R. Day, E. Lacot, F. Stoeckel et B. Berge, Appl. Opt. 20, 1921 (2001).
- [9] V. Muzet, E. Lacot, O. Hugon et Y. Guillard, Proc. of SPIE 5856 (2005).
- [10] K. Otsuka, Jpn. Appl. Phys. 31, L1546 (1992).
- [11] L. Kervevan, H. Gilles, S. Girard et M. Laroche, IEEE Photo. Tech. Lett. 16, 7 (2004).
- [12] J.M Nicolas, Cours de Synthèse RSO, GET-Telecom Paris, department TSI (2004).
- [13] C. Henry, Thèse de doctorat de l'Institut Nationale Polytechnique de Toulouse (2003).
- [14] T.S. Lewis et H.S. Hutchins, Proc. IEEE 58, 1781-1782 (1970).
- [15] S. Yoshikado et T. Aruga, Appl. Opt., 39, 9 (2000).
- [16] S. Markus, B.D. Colella et T.J. Green, Jr., Appl. Opt. 33, 960 (1994).
- [17] T.J. Green, Jr., S. Markus et B.D. Colella, Appl. Opt. 34, 6941 (1995).
- [18] M. Bashkansky, R.L. Lucke, E. Funk, L.J. Rickard et J. Reintjes, Opt. Lett. 27, 1983-1985 (2002).
- [19] S.M. Beck, J.R. Buck, W.F. Buell, R.P. Dickinson, D.A. Kozlowski, N.J. Marechal et T.J.Wright, Appl. Opt. 44, 35 (2005).
- [20] M.C Amann, T. Bosch, M. Lescure, R. Myllyla et M. Rioux, Opt. Eng. 40(1), 10-19 (2001).

- [21] T.G. Kyle, *Appl. Opt.*, 28, 13 (1989).
- [22] C.C. Aleksoff, J.S. Accetta, L.M. Peterson, A.M. Tai, A. Klossler, K.S. Schroeder, R.M. Majwski, J.O. Abshier et M. Fee, *Laser Radar II*, R.J. Becherer et R.C. Harney, eds, *Proc.Soc.Photo-Opt.Instrum.Eng.* 783,29-40 (1987).
- [23] E. Lacot, O. Hugon et F. Stoeckel, *Phys. Rev. A* 67, 053806 (2003).
- [24] T. Erneux, S. Bielawski, D. Deroziert et P. Glorieux, *Quantum Semiclass. Opt.* 7, 951-963 (1995).
- [25] D. Derozier, S. Bielawski et P. Glorieux, *Opt. Comm.* 83, 12 (1991).
- [26] O. Hugon, I.A. Paun, C. Ricard, B. Van der Sanden, E. Lacot, O. Jacquin et A. Witomski, soumis à *Ultramicroscopy* (2007).
- [27] E. Lacot et O. Hugon, *Phys. Rev. A* 70, 053824 (2004).
- [28] R.C. Hardie, M.I. Younus et J. Blackshire, *Appl.Opt.* 37, 4468-4476 (1998).
- [29] L. Bastard, S. Blaize et J.E. Broquin, *Opt. Eng.* 42, 2800-2804 (2003).
- [30] A. Brignon, L. Loiseau, C. Larat, J-P. Huignard et J-P. Pocholle, *Appl. Phys. B* 69 (1999).
- [31] D. Park et J.H. Shapiro, *Laser Radar III*, R.J. Becherer et R.C. Harney, eds, *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.* 999,100-116 (1988).
- [32] R.O Papoulis, *Signal analysis* (Mc Graw-Hill, 1977) Chap.8, pp.263-272.
- [33] L. Almeida, *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 42, 11 (1994).
- [34] A. Witomski, E. Lacot, O. Hugon et O. Jacquin, *Opt. Lett.* 31, 20 (2006).
- [35] A. Witomski, E. Lacot, O. Hugon et O. Jacquin, soumis à *Appl. Opt.* (2007).
- [36] E.N. Leith, K.D. Mills, P.P. Naulleau, D.S. Dilworth, I. Iglesias et H. Chen, *J. Opt. Soc. Am. A*, 16, 12 (1999).
- [37] R.L. Lucke et L.J. Rickard, *Appl. Opt.*, 41, 24 (2002).
- [38] M. Bashkansky, R.L. Lucke, E. Funk, L.J. Rickard et J.Reintjes, *Proc. of SPIE*, 4849 (2002).
- [39] J.H. Shapiro, B.A. Capron et R.C. Harney, *Appl. Opt.*, 20, 19 (1981).
- [40] T.J. Karr, *J. Opt. Soc. Am. A*, 20, 6 (2003).
- [41] E. Lacot, R. Day, J. Pinel et F. Stoeckel, *Opt. Lett.* 26, 1483 (2001).
- [42] A. Witomski, E. Lacot, O. Hugon et S. Fechner, *Opt. Commun.* 254, 119-127 (2005).
- [43] A. Witomski, E. Lacot, O. Hugon et T. Erneux, *Phys. Rev. A* 72, 023801 (2005).
- [44] Y. Li, D. Guzun et M. Xiao, *Phys. Rev. Lett.*, 82, 26 (1999).

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire une technique d'imagerie laser à synthèse d'ouverture par réinjection optique. L'imageur de base, appelé Laser Optical Feedback Imaging (LOFI), détecte la faible quantité de lumière rétrodiffusée par la cible à analyser, qui est décalée en fréquence et réinjectée dans la source laser pour être amplifiée par la dynamique du laser. Le grand avantage de cette technique est qu'elle est auto-alignée, c'est à dire que le laser est à la fois la source et le détecteur. La résolution spatiale des images LOFI est limitée par la diffraction : nous proposons d'adapter la technique de synthèse d'ouverture, bien connue dans le domaine radar, pour nous affranchir de ce problème. En mettant à profit le balayage du laser sur la cible pour faire l'acquisition de l'image pixel par pixel, nous montrons qu'il est possible d'augmenter synthétiquement l'ouverture de collection du système et donc la résolution de l'image. Nous présentons le traitement du signal adapté à la reconstruction de l'image super-résolue à partir des données acquises pour les différentes positions successives du laser. Nous montrons qu'on peut étendre cette technique utilisée en balayage linéaire à un balayage angulaire et que nous pouvons obtenir une résolution, non seulement meilleure que la limite de diffraction, mais également meilleure que celle obtenue avec un balayage linéaire. Nous validons cette technique expérimentalement en comparant des images LOFI obtenues avec et sans synthèse d'ouverture.

Nous présentons ensuite dans ce mémoire le dispositif LOFI en régime paramétrique soumis à une modulation de pompage. Nous présentons l'analyse d'un laser soumis de manière synchronisée à une réinjection optique décalée en fréquence et une modulation de pompage et nous montrons qu'il est possible d'amplifier paramétriquement le signal rétrodiffusé par la cible. Nous validons cette analyse par des résultats numériques et expérimentaux et nous démontrons qu'il est possible de déterminer la quantité de lumière réinjectée dans le laser.