



**HAL**  
open science

# Propagation d'ondes cohérentes et résonances dans des milieux élastiques présentant des inclusions cylindriques périodiquement ou aléatoirement distribuées

Sébastien Robert

► **To cite this version:**

Sébastien Robert. Propagation d'ondes cohérentes et résonances dans des milieux élastiques présentant des inclusions cylindriques périodiquement ou aléatoirement distribuées. Autre. Université du Havre, 2004. Français. NNT : . tel-00143062

**HAL Id: tel-00143062**

**<https://theses.hal.science/tel-00143062>**

Submitted on 24 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

*présentée par*

**Sébastien ROBERT**

*pour l'obtention du titre de*

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DU HAVRE**

*Discipline : Sciences pour l'ingénieur*

*Spécialité : Acoustique*

---

**PROPAGATION D'ONDES COHÉRENTES ET RÉSONANCES  
DANS DES MILIEUX ÉLASTIQUES PRÉSENTANT DES  
INCLUSIONS CYLINDRIQUES PÉRIODIQUEMENT OU  
ALÉATOIREMENT DISTRIBUÉES**

---

*Soutenue le 25 novembre 2004 devant le jury composé de :*

Mme A.-S. BONNET-BENDHIA	Directeur de Recherche au CNRS (ENSTA/UMA, Paris)	<i>Rapporteur</i>
MM. G. FEUILLARD	Professeur à l'Université François-Rabelais (LUSSI-EIVL, Blois)	<i>Rapporteur</i>
J.-M. CONOIR	Directeur de Recherche au CNRS (LAUE, Le Havre)	
H. FRANKLIN	Maître de Conférences HDR à l'Université du Havre (LAUE, Le Havre)	
J.-L. GUYADER	Professeur à l'INSA de Lyon (LVA/INSA, Lyon)	
A. NICOLAS	Professeur à l'École Centrale de Lyon (CEGELY, Lyon)	

**Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Électronique  
UMR CNRS 6068  
Université du Havre**

# **Propagation d'ondes cohérentes et résonances dans des milieux élastiques présentant des inclusions cylindriques périodiquement ou aléatoirement distribuées**

## **Résumé**

L'étude du champ acoustique qui résulte de la propagation des ondes au travers d'un milieu contenant une distribution quelconque de diffuseurs fait l'objet de la diffusion multiple. Le cadre général dans lequel s'inscrit cette thèse est la diffusion multiple dans les milieux solides élastiques. L'objectif est la caractérisation de la propagation acoustique au travers de distributions périodiques ou aléatoires d'inclusions de forme cylindrique. Ce travail est à forte dominante théorique, appuyé également par de nombreux résultats expérimentaux.

Avant d'envisager l'étude de milieux multidiffusants périodiques ou aléatoires, l'interaction acoustique entre quelques inclusions est préalablement étudiée. En présence d'inclusions d'eau, un fort couplage résonant entre ces diffuseurs est mis en évidence ; ce couplage se manifeste par une multiplication des résonances par rapport à la situation où les inclusions sont très éloignées les unes des autres. Lorsque les inclusions renferment de l'air, un phénomène purement interférentiel est observé. Les effets du couplage résonant sur la diffusion par un réseau linéaire, infini et périodique d'inclusions d'eau sont ensuite analysés. L'effet le plus marquant est une dépendance des fréquences de résonance vis-à-vis de la direction sous laquelle on excite le réseau.

L'étude de la propagation acoustique au travers d'un « empilement » périodique d'un nombre fini de réseaux linéaires (cet empilement constituant un réseau dit « bidimensionnel » périodique) est axée sur l'analyse des bandes spectrales interdites et permises. L'évolution de ces dernières est analysée en fonction de la concentration d'inclusions, de la nature du fluide contenu dans les inclusions (air ou eau) et de l'angle sous lequel on excite le réseau. Enfin, en distribuant de façon aléatoire les réseaux linéaires, le calcul exact des champs moyens réfléchis et transmis par le milieu aléatoire (les moyennes étant calculées en réalisant un grand nombre de tirages aléatoires sur les positions des réseaux linéaires) a permis de valider la théorie de Twersky. Cette théorie probabiliste fournit, moyennant l'approximation de Foldy, les caractéristiques de l'onde plane, dite « cohérente », qui se propage dans le milieu homogène équivalent (vu de l'onde cohérente) au milieu aléatoire. Cette validation (envisageable seulement si l'on considère cette distribution « semi-aléatoire » de diffuseurs) constitue le résultat central de cette thèse de par son originalité et de l'intérêt à justifier le bien-fondé de l'approximation de Foldy.

**Mots-clés :** Propagation d'ondes acoustiques / Matériaux présentant des inclusions cylindriques / Distributions périodiques ou aléatoires d'inclusions / Diffusion multiple / Résonances / Milieux effectifs / Propagation d'ondes cohérentes

## **Propagation of coherent waves and resonances in elastic media containing either periodic or random distributions of cylindrical inclusions**

### **Abstract**

In the present thesis, the propagation of acoustic waves in elastic solid media containing either periodic or random distributions of cylindrical inclusions is studied. For each type of distribution, the inclusions are either empty or water-filled and their number is assumed to be infinite. This work is a theoretical study, but the main results are validated by experimental results.

Before considering periodic or random distributions of inclusions, the scattering by a few inclusions is studied from a resonant point of view. In the case of water-filled inclusions very close to each other, a strong resonant coupling is shown, this interaction being characterized by the emergence of a large number of new resonances. For empty inclusions, only purely interferential phenomena are shown. Next, the effects of the resonant coupling on the scattering by an infinite number of water-filled inclusions are analyzed. The inclusions are periodically distributed in only one direction of space (linear periodic array). For this distribution, the dependence of the resonance frequencies with the incidence angle is emphasized.

Next, the propagation of waves in two-dimensional periodic arrays is studied. Each two-dimensional array is assumed to be a periodic series of a finite number of linear periodic arrays. Here, the effects on the propagation of waves, particularly on the stop-bands and pass-bands, due to : the resonances, the concentration of inclusions and the incidence angle, are examined thoroughly. In the last part, the two-dimensional periodic arrays are partly randomized by considering random distributions of linear periodic arrays. The media obtained are thus periodic in one dimension, and random in the other one : they are half-periodic media. The reflection and transmission coefficients of the half-periodic media are then calculated exactly in the same way as those of the two-dimensional periodic ones. The results are compared with those obtained by extending Twersky's theory, originally developed for purely random distributions, to these half-periodic media considered.

**Keywords :** Propagation of acoustic waves / Materials containing cylindrical inclusions / Periodic or random distributions of inclusions / Multiple scattering / Resonances / Effective media / Propagation of coherent waves

---

## *Table des matières*

---

<b>Notations.....</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale.....</b>	<b>5</b>
<b><u>Chapitre premier</u> : Interactions résonantes dans un réseau limité d'inclusions cylindriques.....</b>	<b>11</b>
I. Introduction.....	12
II. Théorie modale de la diffusion multiple en milieu élastique.....	16
II.1 Modèle de la diffusion par une inclusion seule.....	16
II.1.1 Mise en équation des ondes en présence.....	17
II.1.2 Introduction des opérateurs de transition.....	18
II.2 Calcul du champ acoustique diffusé par $N$ inclusions.....	20
II.2.1 Champ diffusé par chaque inclusion.....	21
II.2.2 Champ diffusé par $N$ inclusions.....	26
II.3 Formalisme de la matrice $S$ .....	29
II.3.1 Introduction des opérateurs de diffusion $\hat{S}$ .....	29
II.3.2 Éléments de la matrice $S$ .....	32
II.3.3 Conservation des flux d'énergie et construction de la matrice $S$ .....	35
a) Relations de conservation des flux d'énergie.....	35
b) Construction de la matrice $S$ .....	38
III. Étude numérique des interactions acoustiques.....	43
III.1 Identification et analyse des interactions entre les inclusions d'air.....	46
III.1.1 Résultats acquis sur la diffusion par une inclusion d'air.....	46
III.1.2 Interaction entre deux inclusions d'air.....	49
III.2 Identification et analyse des interactions entre les inclusions d'eau.....	57
III.1.1 Résultats acquis sur la diffusion par une inclusion d'eau.....	57
III.1.2 Interaction entre deux et trois inclusions d'eau.....	61
IV. Validation expérimentale.....	67
IV.1 Dispositif expérimental et méthode d'isolement des résonances.....	67
IV.1.1 Dispositif expérimental.....	67

IV.1.2 Caractéristiques du transducteur.....	69
IV.1.3 Méthode expérimentale d'isolement des résonances.....	71
IV.2 Contraintes expérimentales.....	73
IV.3 Comparaison théorie/expérience.....	74
V. Conclusion.....	78

**Chapitre deuxième : Diffusion résonante par un réseau linéaire infini d'inclusions cylindriques..... 79**

I. Introduction.....	80
II. Réflexion et transmission par un réseau linéaire infini.....	82
II.1 Position du problème.....	82
II.2 Reformulation des équations de la diffusion multiple sous l'hypothèse de périodicité.....	83
II.3 Décomposition du champ diffusé en une somme d'ondes planes.....	86
II.3.1 Décomposition en ondes planes de $\Sigma_0^{L,T}$ .....	87
II.3.2 Décomposition en ondes planes de $\Sigma_n^{L,T}$ .....	92
II.4 Coefficients de réflexion et de transmission.....	93
II.5 Fréquences de coupure.....	95
II.6 Relations de conservation des flux d'énergie.....	99
III. Étude des résonances d'un réseau d'inclusions d'eau.....	104
III.1 Étude des résonances <i>via</i> les coefficients de transmission.....	104
III.2 Étude des résonances <i>via</i> la matrice $S$ .....	109
III.2.1. Construction de la matrice $S$ .....	109
III.2.2. Problème du fond potentiel.....	113
III.2.3. Valeurs propres de la matrice $S$ .....	114
IV. Fréquences de coupure expérimentales.....	118
IV.1 Dispositif expérimental.....	118
IV.2 Comparaison théorie/expérience.....	122
V. Conclusion.....	126

**Chapitre troisième : Propagation d'ondes dans des réseaux bidimensionnels d'inclusions cylindriques..... 129**

I. Introduction.....	130
II. Réflexion et transmission par un réseau 2-d composé de $N$ réseaux linéaires infinis mis en parallèle.....	132

II.1 Réflexion et transmission par deux réseaux linéaires infinis.....	132
II.1 Généralisation à $N > 2$ réseaux linéaires infinis.....	137
III. Équation caractéristique pour un réseau 2-d infini et périodique.....	139
IV. Étude numérique.....	143
IV.1 Étude de réseaux 2-d périodiques.....	143
IV.1.1. Bandes interdites d'un réseau d'inclusions d'air.....	145
IV.1.2. Effets dus aux résonances d'inclusions d'eau.....	150
IV.1.3. Effets dus à une incidence oblique.....	152
IV.2 Étude de réseaux 2-d aperiodiques.....	155
IV.2.1. Effets d'une décroissance des rayons des inclusions.....	155
IV.2.2. Effets d'une répartition aléatoire des réseaux linéaires.....	157
V. Bandes interdites expérimentales.....	160
V.1 Dispositif expérimental.....	160
V.2 Comparaison théorie/expérience.....	165
VI. Conclusion.....	170

**Chapitre quatrième : Diffusion par une répartition aléatoire de réseaux linéaires :  
théorie de Twersky..... 172**

I. Introduction.....	173
II. Étude numérique préliminaire.....	175
III. Théorie de Twersky appliquée à une distribution aléatoire de réseaux linéaires.....	181
III.1 Introduction du formalisme en incidence normale.....	181
III.1.1. Équations de Foldy-Twersky des champs moyens.....	181
a) Réécriture des équations fondamentales de la diffusion multiple.....	181
b) Introduction des densités de probabilité.....	183
III.1.2. Équations intégrales conduisant au calcul des nombres d'onde effectifs.....	185
III.1.3. Calcul des coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif.....	189
III.2 Généralisation du formalisme à une incidence oblique.....	193

III.2.1. Réécriture des équations de Foldy-Twersky des champs moyens.....	193
III.2.2. Calcul des nombres d'onde effectifs.....	197
III.2.3. Coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif.....	204
III.2.4. Réécriture du formalisme pour une distribution aléatoire d'inclusions dans les directions $O_x$ et $O_y$ .....	209
IV. Étude comparative des résultats exacts et de ceux prédits par la théorie de Twersky.....	215
IV.1 Comparaison des résultats pour $b = 0$ .....	215
IV.2 Comparaison des résultats pour $b \neq 0$ .....	220
IV.3 Interprétation des résultats.....	224
IV.4 Comparaison avec une distribution aléatoire d'inclusions dans les directions $O_x$ et $O_y$ .....	229
V. Conclusion.....	235
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>236</b>
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>239</b>
<b>ANNEXE 1</b> <b>Tube élastique immergé dans l'eau ou inclusion d'eau dans un solide élastique :</b> <b>description des ondes d'interface en présence.....</b>	<b>243</b>
<b>ANNEXE 2</b> <b>Diffusion par un réseau limité : analyse des temps de calcul numérique.....</b>	<b>248</b>
<b>ANNEXE 3</b> <b>Calcul des séries de Schlömilch.....</b>	<b>254</b>
<b>ANNEXE 4</b> <b>Diffusion par un réseau linéaire infini : analyse des temps de calcul numérique.....</b>	<b>256</b>
<b>ANNEXE 5</b> <b>Diffusion par des réseaux 2-d périodiques ou aléatoires : analyse des temps de calcul numérique.....</b>	<b>258</b>

---

## *Notations*

---

- $a$  : rayon des inclusions.
- $A_n^{(\varepsilon)L,T}$  : amplitude d'une fonction d'onde, associée à un mode de vibration  $n$ , d'une onde plane longitudinale ( $L$ ) ou transversale ( $T$ ) incidente sur une inclusion  $\varepsilon$ .
- $\alpha_{L,T}$  : angle d'incidence associé à une onde plane incidente longitudinale ( $L$ ) ou transversale ( $T$ ).
- $\alpha_p^{L,T}$  : composante, selon  $Oy$ , du vecteur d'onde  $\vec{K}_p^{L,T}$  d'un mode  $p$  longitudinal ( $L$ ) ou transversal ( $T$ ) diffracté par un réseau linéaire infini.
- $b$  : distance limite d'approche entre deux inclusions.
- $\beta$  : paramètre adimensionné caractérisant l'espacement  $\beta a$  entre deux inclusions identiques de rayons  $a$ .
- $c_{L,T}, c_f$  : vitesses de phase des ondes longitudinales et transversales dans le solide et vitesse de phase des ondes de volume dans le fluide.
- $C_n^{(\varepsilon)l_1l_2}$  : coefficient de diffusion  $l_1 \rightarrow l_2$ , associé à un mode de vibration  $n$ , d'une inclusion  $\varepsilon$  dans un réseau fini ou infini d'inclusions.
- $d$  : pas d'un réseau linéaire et infini.
- $D$  : espacement des réseaux linéaires infinis dans un réseau 2-d périodique.
- $\Delta$  : opérateur laplacien.
- $e$  : épaisseur des réseaux 2-d périodiques et des milieux aléatoires ou semi-aléatoires.
- $f$  : fréquence.
- $f^{l_1l_2}$  : amplitude de diffusion  $l_1 \rightarrow l_2$  en champ lointain d'un réseau fini de  $N \geq 1$  inclusion(s).
- $F^{l_1l_2}$  : fonction de forme en champ lointain associée à une diffusion  $l_1 \rightarrow l_2$  par un réseau fini de  $N \geq 1$  inclusion(s).



- $f_p^{L,T}$  : fréquence de coupure associée à un mode  $p$  longitudinal ( $L$ ) ou transversal ( $T$ ) diffracté par un réseau linéaire infini.
- $\phi$  : potentiel scalaire des vecteurs déplacements longitudinaux.
- $G_{L,Tnm}^{(\tau\varepsilon)}$  : opérateur de Graff exprimant une fonction d'onde (d'ordre  $n$ ) diffusée par une inclusion  $\tau$  en tant que somme de fonctions d'onde (d'ordre  $m$ ) incidentes sur une inclusion  $\varepsilon$ .
- $\gamma_{L,T}$  : nombre d'onde effectif selon  $Ox$  d'une onde cohérente longitudinale ( $L$ ) ou transversale ( $T$ ) se propageant dans un réseau 2-d périodique.
- $\bar{\gamma}_{L,T}$  : nombre d'onde effectif  $\gamma_{L,T}$  normalisé par  $\pi/D$  (frontière de la première zone de Brillouin dans le réseau réciproque de période  $2\pi/D$  et  $2\pi/d$ ).
- $\Gamma_{L,T}$  : nombre d'onde effectif selon  $Ox$  d'une onde cohérente longitudinale ( $L$ ) ou transversale ( $T$ ) se propageant dans un milieu aléatoire ou semi-aléatoire.
- $H_n^{(1)}$  : fonction de Hankel de première espèce et d'ordre  $n$ .
- $I_d$  : matrice identité.
- $J_n$  : fonction de Bessel d'ordre  $n$ .
- $\varphi_{inc}$  : potentiel scalaire ou vectoriel (projeté sur  $Oz$ ) d'une onde plane incidente longitudinale ou transversale.
- $k_{L,T} k_f$  : nombres d'onde des ondes longitudinales et transversales dans le solide et nombre d'onde des ondes de volume dans le fluide.
- $\bar{k}_{L,T}$  : nombre d'onde  $k_{L,T}$  normalisé par  $\pi/D$  (frontière de la première zone de Brillouin dans le réseau réciproque de période  $2\pi/D$  et  $2\pi/d$ ).
- $k_p^{L,T}$  : composante selon  $Ox$  du vecteur d'onde  $\vec{K}_p^{L,T}$  d'un mode  $p$  longitudinal ( $L$ ) ou transversal ( $T$ ) diffracté par un réseau linéaire infini.
- $\vec{K}_p^{L,T}$  : vecteur d'onde d'un mode  $p$  longitudinal ( $L$ ) ou transversal ( $T$ ) diffracté par un réseau linéaire infini.
- $L_s$  : libre parcours moyen élastique.
- $\lambda, \mu$  : coefficients de Lamé.

- $\lambda_{L,T}$  : longueur d'onde d'une onde longitudinale ou transversale.
- $A_n^{L,T}$  : opérateur de « création » ( $n > 0$ ) ou d'« annihilation » ( $n < 0$ ) opérant sur  $\Sigma_0^{L,T}$ .
- $M_{L,T}^{(\tau\varepsilon)}$  : opérateur matriciel de Graff exprimant toutes les fonctions d'onde diffusées par une inclusion  $\tau$  en tant que somme de fonctions d'onde incidentes sur une inclusion  $\varepsilon$ .
- $\bar{n}$  : densité surfacique d'inclusions.
- $N$  : nombre d'inclusions ou de réseaux linéaires infinis.
- $\bar{P}$  : valeur moyenne d'un vecteur de Poynting sur une période  $T = 2\pi/\omega$ .
- $\theta_p^{L,T}$  : angle sous lequel est diffracté un mode  $p$  longitudinal ( $L$ ) ou transversal ( $T$ ) par un réseau linéaire infini.
- $r^{l_1 l_2}, t^{l_1 l_2}$  : coefficients de réflexion et de transmission  $l_1 \rightarrow l_2$  d'un réseau linéaire infini pour  $f < f_{-1}^T$ .
- $r_p^{l_1 l_2}, t_p^{l_1 l_2}$  : coefficients de réflexion et de transmission  $l_1 \rightarrow l_2$  d'un mode  $p$  diffracté par un réseau linéaire infini.
- $R^{l_1 l_2}, T^{l_1 l_2}$  : coefficients de réflexion et de transmission  $l_1 \rightarrow l_2$  d'un réseau 2-d périodique ou apériodique.
- $\bar{R}_{\pm}^{l_1 l_2}, \bar{T}_{\pm}^{l_1 l_2}$  : opérateurs de transition caractérisant l'action de chaque inclusion ou réseau linéaire infini sur les champs moyens se propageant dans un milieu effectif associé à une distribution aléatoire ou semi-aléatoire d'inclusions.
- $R_{eff}^{l_1 l_2}, T_{eff}^{l_1 l_2}$  : coefficients de réflexion et de transmission  $l_1 \rightarrow l_2$  d'un milieu effectif associé à une distribution aléatoire ou semi-aléatoire d'inclusions.
- $S$  : matrice de diffusion associée à la diffusion par un réseau fini ou par un réseau linéaire infini d'inclusions (les notations sont les mêmes bien que les matrices ne soient pas les mêmes dans les deux cas).
- $\hat{S}^{l_1 l_2}$  : opérateur de diffusion  $l_1 \rightarrow l_2$  d'un réseau fini de  $N \geq 1$  inclusion(s).
- $S^{l_1 l_2}$  : opérateur matriciel de diffusion  $l_1 \rightarrow l_2$  d'un réseau fini de  $N \geq 1$  inclusion(s).
- $S_0$  : matrice de diffusion associée à la diffusion par un réseau linéaire infini d'inclusions d'air.

- $S^{(*)}$  : matrice de diffusion d'un réseau linéaire infini d'inclusions d'eau après factorisation par  $S_0$ .
- $S_{diag}^{(*)}$  : matrice de diffusion  $S^{(*)}$  diagonalisée.
- $\sigma$  : tenseur des contraintes.
- $\sigma_q^{L,T}$  : séries de Schlömilch d'ordre  $q$ .
- $\Sigma_n^{L,T}$  : somme infinie d'ondes cylindriques de type longitudinal ( $L$ ) ou transversal ( $T$ ) diffusées par toutes les inclusions d'un réseau linéaire infini pour un mode de vibration  $n$ .
- $T_n^{l_1 l_2}$  : opérateur de transition d'une seule inclusion associé à un mode vibration  $n$  et à une conversion  $l_1 \rightarrow l_2$ .
- $T^{l_1 l_2}$  : opérateur matriciel de transition (regroupant tous les modes de vibration  $n$ ) d'une seule inclusion associé à une conversion  $l_1 \rightarrow l_2$ .
- $\tau_{diag}^{(*)}$  : matrice de transition (ou d'amplitude) associée à la matrice de diffusion diagonalisée  $S_{diag}^{(*)}$ .
- $\vec{u}_f, \vec{u}_s$  : vecteurs déplacements dans le fluide et dans le solide.
- $\omega$  : fréquence angulaire.
- $x_L, x_T, x_f$  : fréquences réduites (produit des nombres d'onde par le rayon des inclusions).
- $\vec{\xi}_{L,T}$  : nombre d'onde effectif d'une onde cohérente longitudinale ( $L$ ) ou transversale ( $T$ ) se propageant dans un milieu effectif associé à une distribution aléatoire ou semi-aléatoire d'inclusions.
- $\psi$  : projection sur Oz du potentiel vectoriel des vecteurs déplacements transversaux.

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

L'étude du champ acoustique qui résulte de la propagation d'ondes dans un milieu contenant une distribution de diffuseurs, en nombre fini ou infini, fait l'objet de la diffusion multiple. Le cadre général dans lequel s'inscrit cette thèse est celui de la diffusion multiple dans les milieux élastiques présentant des distributions, aléatoires ou périodiques, d'une infinité d'inclusions de forme cylindrique, vides ou remplies d'un liquide.

## ↪ *Distribution aléatoire*

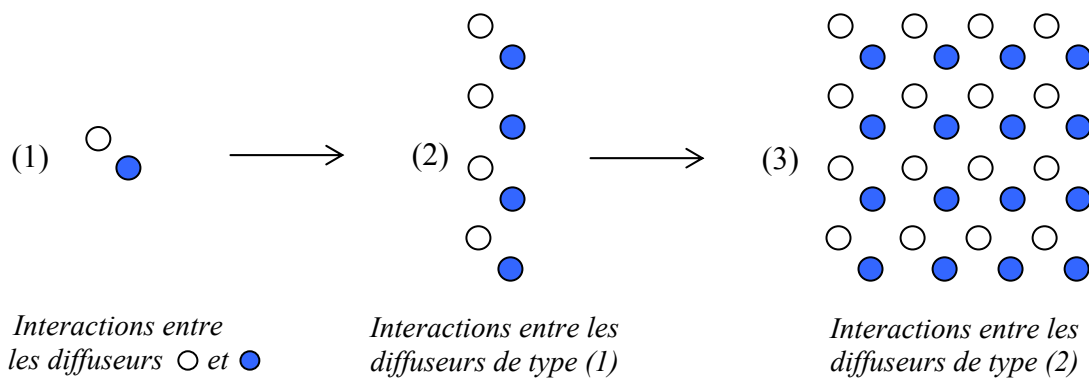
Pour des distributions aléatoires de diffuseurs cylindriques ou sphériques dans un milieu fluide, le nombre important d'études passées et en cours reflète la diversité des situations où le problème se rencontre. A titre d'exemple, dans l'industrie alimentaire ou pétrochimique, une application très concrète est le contrôle de la taille des particules en suspension dans des émulsions (gouttes d'huile dans de la mayonnaise ou « boulettes » de caoutchouc dans de l'hexane) soit pour contrôler la stabilisation de l'émulsion (pour la mayonnaise), soit pour optimiser son acheminement dans des canalisations (pour le caoutchouc). Ici, dans ces deux exemples, la distribution aléatoire des diffuseurs conduit à des théories probabilistes consistant à déterminer les caractéristiques d'un milieu homogène équivalent au milieu multidiffusant aléatoire. Ces théories conduisent aux notions de milieu effectif et d'onde cohérente. Paradoxalement, ces théories ont été peu souvent étendues aux milieux élastiques alors que les comportements acoustiques d'une grande variété de milieux solides pourraient être modélisés. Pour les matériaux de construction, on peut citer les bétons « fibrés », c'est-à-dire des bétons non armés à base de fibres synthétiques permettant de limiter les microfissures du béton au jeune âge. Une autre voie d'application, explorée depuis les années 80, est la modélisation du comportement acoustique de l'os trabéculaire en vue du contrôle de sa perte de masse caractérisant l'ostéoporose\*.

---

\* Cette modélisation est l'un des thèmes de recherche au laboratoire. Le squelette est formé d'os trabéculaires et corticaux (ou compacts). L'os trabéculaire, formé de tiges ou travées de soutien, occupe l'intérieur des vertèbres, du bassin, des os plats et des extrémités des os longs. L'os cortical, qui compose 80% du squelette, recouvre tous les os ; c'est le principal constituant de la diaphyse des os longs. L'ostéoporose se caractérise par une perte uniquement de la masse osseuse trabéculaire, allant jusqu'à 50% chez la femme. Cette perte de masse osseuse

## ↪ Distribution périodique

Pour ce qui concerne la diffusion multiple dans des milieux présentant une distribution périodique d'objets, un nombre important d'études porte sur la diffusion par des réseaux de tubes ou de cylindres élastiques immergés dans un fluide. Ces études sont orientées vers des applications telles que le contrôle des réseaux de tubes dans les échangeurs de chaleur de certaines installations industrielles (échangeur de chaleur dans un réacteur nucléaire, par exemple). Par contraste, l'étude de la propagation acoustique dans des matériaux élastiques à pores périodiques (inclusions liquides ou gazeuses) ou composites (inclusions solides), envisagée sous l'angle de la diffusion multiple, fait l'objet de peu de publications. Les théories et les méthodes de calcul (et les interprétations qui en découlent) sont le plus souvent héritées des travaux en physique de l'état solide. Pourtant, aborder le problème sous l'angle de la diffusion multiple permet d'envisager des approches alternatives comme celle illustrée ici.



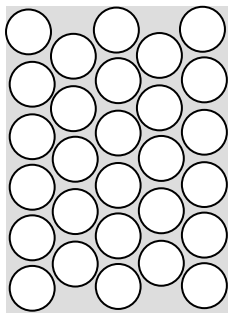
La structure périodique (3) est une distribution périodique du « motif » (2), lui-même est une distribution périodique du motif (1). Le motif de base (1) peut être composé d'inclusions en nombre arbitraire et différentes les unes des autres quant à leurs compositions ou/et à leurs tailles. L'intérêt de cette approche réside dans le fait que certaines caractéristiques de la propagation acoustique dans le matériau périodique (3) peuvent être rattachées, de proche en proche, à certaines caractéristiques du champ diffusé par le motif de base (1). A titre d'exemple, supposons que les inclusions soient des diffuseurs très résonants. Certaines études portant sur les interactions acoustiques entre deux tubes élastiques en milieu fluide ont montré que, sous certaines conditions, ces interactions se manifestent par une multiplication des résonances par rapport à la situation où les deux tubes sont éloignés l'un de l'autre. Parallèlement,

---

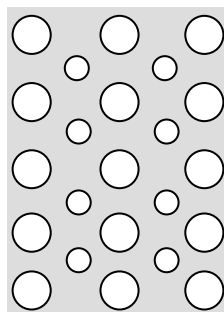
entraîne une grande fragilisation des os. La modélisation de l'os trabéculaire consiste à considérer la moelle comme des diffuseurs liquides, et les travées comme des diffuseurs solides.

d'autres études axées sur la propagation acoustique dans un réseau périodique de tubes élastiques ont mis en évidence qu'à chaque résonance d'un tube correspond une bande interdite (ce vocabulaire est emprunté à la physique de l'état solide), c'est-à-dire une bande de fréquence pour laquelle les ondes qui se propagent dans le milieu périodique sont caractérisées par une forte atténuation. En revenant au cas élastique, si un phénomène comparable de multiplication des résonances a lieu pour les deux inclusions du motif (1), on pourrait alors prédire (en fonction de la distance séparant ces deux inclusions ou/et de leur composition), le nombre et les positions fréquentielles des bandes interdites caractérisant le matériau périodique (3). De la même façon, lorsque le comportement résonant du « diffuseur » (1) est connu, les interactions acoustiques dans le motif (2) peuvent être à leur tour étudiées en fonction de la distance séparant les diffuseurs (1). Si cette distance est relativement faible, des éventuelles interactions résonantes entre les diffuseurs (1) peuvent de nouveau conduire à l'émergence de nouvelles bandes interdites. Le même phénomène d'interaction résonante peut également se produire entre les diffuseurs (2) de la structure périodique (3). Cette approche est donc une alternative intéressante par rapport à la plupart des méthodes d'investigation (décomposition en séries de Fourier de toutes les quantités périodiques, discrétisation spatiale et temporelle des équations de mouvement, entre autres) de la propagation acoustique dans ces types de matériaux. Etant empruntées le plus souvent à la physique de l'état solide, ces méthodes (méthodes semi-analytiques ou numériques) ne sont pas de nature à expliquer les phénomènes d'interaction où, en acoustique, les résonances jouent un rôle fondamental. L'étude des interactions à différentes échelles dans des réseaux périodiques est une approche héritée de l'électromagnétisme (pour la conception ou l'optimisation d'antennes).

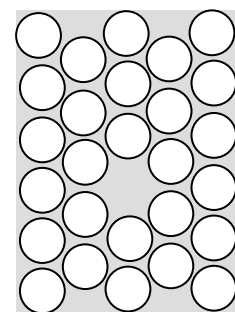
Pour ce qui concerne les matériaux périodiques, le travail présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans des perspectives d'études, à plus ou moins long terme, de la propagation acoustique dans des matériaux comme ceux décrits ci-dessous. Ce sont quelques exemples de répartitions périodiques de pores que l'on rencontre, le plus souvent, dans des matériaux servant d'isolants phoniques.



a) Réseau hyper dense de pores répartis en quinconce



b) Réseau peu dense de pores répartis en quinconce

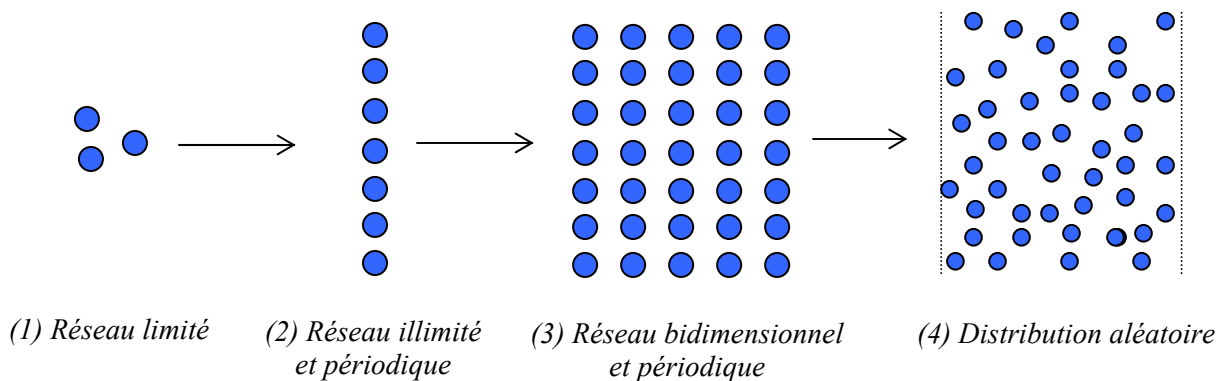


c) Défaut lacunaire répartis en quinconce

Le matériau a) est constitué d'un réseau hyper dense de pores disposés en quinconce. L'intérêt de cette répartition est d'assurer une bonne isolation phonique tout en garantissant la légèreté et la flexibilité du matériau. Pour privilégier la robustesse de l'isolant, on peut choisir au contraire un réseau peu dense. En jouant en effet sur les tailles des pores dans le motif de base du matériau b), il est alors possible d'obtenir les bandes interdites souhaitées dans le spectre des fréquences. Le dernier exemple donné est un réseau de pores c) présentant un défaut de type lacunaire (pore manquant). Par une mesure ultrasonore en transmission (ou en réflexion) à travers le matériau c), on peut en effet envisager de pouvoir détecter ce type de défaut. Cette dernière perspective est encouragée par certains travaux sur les cristaux photoniques visant à identifier les effets, sur les bandes spectrales interdites, d'un défaut ponctuel dans un cristal.

### ↪ Objectifs

Le travail proposé dans ce manuscrit se situe plus en amont (en précisant que certaines perspectives, telles que l'étude de la propagation acoustique dans le matériau b), peuvent être des objectifs à très court terme). L'objectif qui a orienté ce travail est l'étude de la propagation acoustique dans les milieux élastiques périodiques ou aléatoires. Cependant, l'insuffisance, voire même l'absence de travaux portant notamment sur les interactions acoustiques (interférentielles ou résonantes) en milieu élastique, nous a conduits à étudier préalablement des distributions intermédiaires.



En effet, les phénomènes d'interaction acoustique en milieu élastique entre des diffuseurs, résonants ou non, n'ont pas fait l'objet d'études exhaustives. En fonction du fluide contenu dans les inclusions ou de la distance séparant ces dernières, on ne sait pas à ce jour si ces interactions seront de nature interférentielle ou résonante, et *a fortiori* comment se manifestent ces interactions. En premier lieu, il était donc nécessaire d'identifier et d'analyser ces interac-

tions en considérant le cas le plus simple d'un réseau fini, formé de quelques inclusions (1). Par suite, les effets de ces interactions devaient être identifiés dans le cas plus complexe d'une distribution linéique et périodique d'une infinité d'inclusions (2). En suivant plusieurs travaux portant sur des réseaux périodiques de tubes immergés dans l'eau, le réseau périodique bidimensionnel (3) a en effet été considéré comme un empilement de réseaux linéaires, périodiques et infinis. Tout comme celui d'un réseau limité, le comportement résonant d'un tel réseau en milieu élastique (ni même en milieu fluide) ne semble pas avoir retenu l'attention de beaucoup d'auteurs. Ces lacunes rencontrées dans la littérature nous ont donc conduits à progresser dans ce travail en suivant les quatre étapes illustrées ci-dessus.

La diffusion multiple par un réseau de deux ou trois inclusions cylindriques est étudiée dans le premier chapitre. Tout au long de cette étude, les inclusions sont supposées être de longueurs infinies et toutes parallèles entre elles. Le réseau est d'autre part excité par une onde plane harmonique dans la direction perpendiculaire aux axes des inclusions. L'objectif, dans ce chapitre, est d'identifier la nature des interactions dominantes (interférentielle ou résonante) entre les diffuseurs et de comparer ces interactions avec celles existantes entre des tubes immergés dans un fluide. Les résultats sont présentés dans le cas d'inclusions d'air (peu résonantes), puis dans le cas d'inclusions d'eau (très résonantes). Le paramètre clé de cette étude est la distance séparant les diffuseurs car elle détermine le degré d'interaction entre les diffuseurs. Dans le deuxième chapitre, le comportement résonant d'un réseau linéaire infini est étudié en fonction du même paramètre. Plusieurs outils de détection des résonances seront utilisés dans ces deux premiers chapitres. L'un d'entre eux, utilisé pour l'étude des résonances du réseau linéaire infini, est un nouvel outil de détection et d'analyse des résonances basé sur l'analyse des valeurs propres de la matrice de diffusion.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la propagation d'ondes dans les réseaux bidimensionnels. Le formalisme utilisé permet d'envisager l'étude de réseaux périodiques (réseaux linéaires identiques et périodiquement espacés) aussi bien qu'apériodiques (réseaux linéaires différents les uns des autres ou/et espacés de façon irrégulière). Pour les réseaux périodiques, l'un des objectifs est de caractériser les effets dus à une diffusion résonante sur les bandes spectrales interdites obtenues dans le cas non résonant. En comparant les résultats avec ceux caractérisant le cas périodique, les effets dus à différents types de perturbation de la périodicité sont ensuite analysés. L'une des perturbations considérées est une distribution aléatoire des réseaux linéaires autour de leur position initiale de périodicité. L'intérêt principal de cette dernière étude est qu'elle constitue un trait d'union entre les milieux périodiques et ceux aléatoires. En effet, dans le dernier chapitre, l'idée n'est pas de considérer directement



une distribution purement aléatoire (distribution aléatoire d'inclusions dans deux directions de l'espace) mais de conserver une distribution aléatoire de réseaux linéaires (distribution d'inclusions semi-aléatoire) pour une raison bien précise. Au début de cette introduction, il a déjà été précisé que la propagation d'ondes dans un milieu aléatoire fait l'objet des théories de milieux effectifs. Ces théories visent à déterminer (à l'aide d'une approximation) les caractéristiques d'une onde plane, dite cohérente, qui se propagerait dans un milieu homogène équivalent au milieu aléatoire. Cependant, aucune de ces théories n'a été validée par un calcul exact, donc sans approximation(s), en raison des temps de calcul que nécessiterait le calcul de la diffusion par une infinité de diffuseurs répartis aléatoirement. L'idée consiste alors à adapter l'une de ces théories à une distribution aléatoire d'un nombre fini de réseaux linéaires infinis. En effet, tout en conservant l'hypothèse d'un nombre infini de diffuseurs (qui est une hypothèse commune à toutes les théories de milieux effectifs), les temps de calcul de la diffusion par une répartition semi-aléatoire d'inclusions sont incomparablement plus courts que dans le cas d'une répartition purement aléatoire. Cette astuce rend alors envisageable le projet de validation de l'une de ces théories. Cette validation est le résultat central de ce travail puisque, à notre connaissance, aucune de ces théories n'avait été vérifiée par un calcul exact. Pour clore ce dernier chapitre, les résultats sont ensuite interprétés et comparés avec ceux obtenus dans le cas d'une distribution purement aléatoire.

Pour les trois premiers chapitres, certains résultats théoriques fondamentaux sont validés par un travail expérimental. La conclusion qui termine ce manuscrit résume les résultats majeurs obtenus et donne quelques perspectives d'étude à court terme. Enfin, précisons que pour chaque chapitre une analyse des temps de calcul numérique est présentée en annexe.

## **INTERACTIONS RÉSONANTES DANS UN RÉSEAU LIMITÉ D'INCLUSIONS CYLINDRIQUES**

---

---

*Ce chapitre a pour objet l'étude des interactions acoustiques en milieu solide dans un réseau constituée d'un nombre fini d'inclusions cylindriques. En particulier, il s'agit d'identifier la nature des interactions dominantes entre les inclusions — soit interférentielle soit résonante — et de comparer ces interactions à celles existantes en milieu fluide entre des tubes élastiques. Ce chapitre comporte cinq sections. La première est une introduction résumant la littérature existante sur les interactions résonantes en milieu fluide et présentant les modèles mathématiques que nous emploierons. Le formalisme de la diffusion multiple en milieu solide est ensuite développé dans la seconde section. La troisième section est une étude numérique des phénomènes interactionnels dans deux cas distincts : les réseaux sont composés ou bien d'inclusions d'air ou bien d'inclusions d'eau. La quatrième section est une validation expérimentale des résultats numériques, et la dernière une conclusion résumant les résultats majeurs à retenir pour envisager l'étude, dans les prochains chapitres, de réseaux comportant un nombre infini de diffuseurs.*

---

## I. INTRODUCTION

L'étude de la diffusion résonante par un nombre fini  $N$  d'inclusions cylindriques dans un solide élastique fait l'objet du présent chapitre. Les multiples interactions entre les diffuseurs ont conduit à qualifier cette branche de l'acoustique de diffusion multiple. L'évidente nécessité de cette étude apparaît à la lecture de travaux antérieurs portant sur les interactions résonantes entre des tubes élastiques immergés dans un fluide. Dans le cas d'une cible constituée de deux tubes identiques très proches l'un de l'autre, S. Lethuillier *et al.* [1,2] ont observé que les résonances d'un tube seul, attribuées à l'onde circonférentielle de Scholte-Stoneley, pouvaient toutes se dédoubler. L'onde de Scholte-Stoneley boucle alors en phase avec elle-même autour de chacun des tubes (résonances de type local) et autour de la cible elle-même (résonances de type global). Ce phénomène de couplage résonant entre les deux tubes vient de ce que les ondes de Scholte-Stoneley se propagent sur la surface extérieure de chacun des tubes, côté fluide, avec une atténuation relativement faible (voir l'Annexe 1 décrivant les caractéristiques de toutes les ondes d'interface se propageant autour d'un tube et à l'intérieur de celui-ci). La faible distance entre les deux tubes permet alors à ces ondes de se propager et de résonner autour de la cible. L'onde de Franz est également une onde de surface externe portée par le fluide, mais sa forte atténuation ne lui permet pas de résonner significativement, pas même autour d'un tube seul. Les autres ondes circonférentielles, ondes de galerie à écho et ondes de Rayleigh, sont des ondes de surface dites internes (c'est-à-dire qu'elles se propagent avec une énergie localisée principalement dans l'épaisseur du tube) et ne sont donc pas de nature à interagir d'un tube à l'autre. Plus récemment, en étudiant différentes cibles constituées d'un nombre variable  $N$  de tubes alignés, P.-Y. Le Bas *et al.* [3,4] ont observé que, pour des directions d'excitation hors des axes de symétrie des cibles, les résonances du tube seul pouvaient en fait se subdiviser en  $2N$  nouvelles résonances. La relation effective entre le nom-

---

[1] S. Lethuillier, P. Pareige, J.-L. Izbicki et J.-M. Conoir, *Scattering by two adjacent immersed shells : Theory and Experiment*, Proceedings of the fourth European Conference on Underwater Acoustics, Éd. A. Alippi et G. B. Cannelli, Rome, pp. 837-842, septembre 1998.

[2] S. Lethuillier, P. Pareige, J.-M. Conoir et J.-L. Izbicki, *Scattering by two very close immersed shells : numerical results*, Proceedings of the IEEE International Ultrasonics Symposium, Lake Tahoe, Nevada, USA, pp. 731-734, 17-21 octobre 1999.

[3] P.-Y. Le Bas, F. Luppé, J.-M. Conoir et H. Franklin, *N-shell cluster in water : Multiple scattering and splitting of resonances*, J. Acoust. Soc. Am. 115, pp. 1460-1467, 2004.

[4] P.-Y. Le Bas et P. Pareige, *Numerical and experimental study of the resonant behavior of N elastic shells embedded in water*, Proceedings of the IEEE International Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 50<sup>th</sup> Anniversary and Joint Conference, Montréal, 24-27 août 2004.

bre de tubes et le nombre maximal de nouvelles résonances en cas de couplage serait donc de  $2N$  résonances pour  $N$  tubes. Dès lors, la question que l'on peut se poser est la suivante. Lorsqu'il y a couplage résonant en milieu élastique, assiste-t-on à des subdivisions des résonances d'un diffuseur seul et, si c'est le cas, existe-t-il une relation phénoménologique évidente, comme en milieu fluide, entre le nombre de diffuseurs et le nombre de nouvelles résonances ? La réponse à cette question s'avérera déterminante dans les chapitres suivants pour la connaissance des effets liés aux phénomènes d'interaction à l'échelle locale, entre un diffuseur et ses plus proches voisins, dans les milieux élastiques multidiffusants à forte concentration en diffuseurs, qu'ils soient périodiquement ou aléatoirement répartis.

En milieu élastique, comme en milieu fluide, on s'attend en fait à observer deux phénomènes interactionnels entre des diffuseurs : l'un de type interférentiel [5,] et l'autre de type résonant, l'observation de l'un ou de l'autre des phénomènes dépendant à la fois de la nature des diffuseurs — ou, plus précisément, de la nature des ondes se propageant sur la surface externe des diffuseurs — et de la distance qui les sépare. Ce dernier paramètre est donc un paramètre clé dans cette étude. Celle-ci sera menée d'autre part pour deux types de diffuseurs : des inclusions d'eau ou d'air. Par rapport aux études citées plus haut, les ondes de surface externes, c'est-à-dire celles prédisposées à interagir d'une inclusion à une autre, sont les ondes de Rayleigh et de galerie à écho (voir également l'Annexe 1 pour la description des ondes d'interface se propageant autour d'une inclusion en milieu élastique). Lorsqu'elles renferment de l'air, seule l'onde de Rayleigh est susceptible de résonner autour des inclusions [6,7,8], les ondes de Franz ont des atténuations trop élevées pour se propager et résonner autour des inclusions. Lorsque les inclusions renferment de l'eau, leur comportement résonant est alors dominé par les ondes de galerie à écho [9,7,8]. Les spectres des résonances de ces deux diffuseurs sont connus et révèlent un comportement résonant incontestablement plus marqué pour

---

[5] Elm. Kheddioui, J.-M. Conoir, P. Pareige et J.-L. Izbicki, *Resonant scattering by two elastic cylindrical shells*, ACUSTICA-acta acustica 84, pp. 980-986, 1998.

[6] J.-L. Izbicki, J.-M. Conoir et N. Veksler, *New results for Franz and Rayleigh waves propagating around a cylindrical vacuum / solid interface*, Wave Motion 28, pp. 227-239, 1998.

[7] S. Robert, J.-M. Conoir, H. Franklin, F. Luppé, *Resonant elastic scattering by a finite number of cylindrical cavities in an elastic matrix*, Wave Motion 40, pp. 225-239, 2004.

[8] S. Robert, J.-M. Conoir, H. Franklin, F. Luppé, *Resonant multiple elastic scattering by a finite number of cylindrical cavities in an elastic matrix*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Congress on Ultrasonics, Paris, France, 7-10 septembre 2003.

[9] S. G. Solomon, H. Überall et K. B. Yoo, *Mode conversion and resonance scattering of elastic waves from a cylindrical fluid-filled cavity*, Acustica 55, pp. 147-159, 1984.

les inclusions d'eau. Considérer l'un ou l'autre des diffuseurs permettra donc de privilégier les ondes circonférentielles susceptibles d'interagir lors d'un couplage résonant (soit l'onde de Rayleigh, soit les ondes de galerie à écho) et de procéder à une étude comparative des phénomènes interactionnels par le choix de ces deux diffuseurs plus ou moins résonants (inclusions d'air ou d'eau).

Le formalisme de la diffusion multiple développé dans ce chapitre est basé sur celui de V. Twersky [10]. Ce formalisme est indépendant de la forme, de la taille et de la nature des diffuseurs. En milieu solide, le même formalisme peut décrire la diffusion par des inclusions de formes cylindriques ou sphériques, des inclusions gazeuses, liquides ou solides, voire même la diffusion par un ensemble de diffuseurs constitués eux-mêmes d'un sous-ensemble d'inclusions. C'est la modélisation de la diffusion par un diffuseur pris isolément qui contient les caractéristiques géométriques et acoustiques propres au diffuseur. Le modèle de la diffusion multiple ne fait que décrire les interactions multiples entre tous les diffuseurs de la cible en suivant ce principe : la cible constituée de plusieurs inclusions est excitée par une onde acoustique ; chacune des inclusions est excitée et devient diffuseur ; la diffusion par une inclusion représente alors la diffusion de l'onde incidente initiale et des ondes provenant de toutes les autres inclusions. Le modèle prend donc en compte tous les multiples aller-retours des ondes entre les inclusions et ce processus de diffusion multiple se répète tant que les ondes diffusées ont assez d'énergie pour se propager d'une inclusion à une autre. L'interaction acoustique entre tous les diffuseurs apparaît dans le formalisme sous la forme d'équations *self-consistantes*, écritures croisées exprimant le champ diffusé par une inclusion en fonction de ceux diffusés par toutes les autres inclusions.

Pour ce qui est de la diffusion par chaque diffuseur pris isolément, le modèle utilisé est issu de la théorie développée par V. K. Varadan [11] pour l'étude de la vitesse de phase et de l'atténuation d'ondes cohérentes dans un milieu élastique comportant un nombre fini de cavités ou d'inclusions élastiques aléatoirement ou périodiquement réparties. Il s'agit d'une théorie modale dérivée de celle de S. K. Bose *et al.* [12]. La diffusion par un diffuseur y est modélisée par une matrice infinie et diagonale, dite de transition, composée de matrices blocs

---

[10] V. Twersky, *Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders*, J. Acoust. Soc. Am. 24, pp. 42-46, 1952.

[11] V. K. Varadan, *Multiple scattering of acoustic, electromagnetic and elastic waves, Acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering. Focus on the T-matrix approach*, Pergamon, New-york, pp. 103-134, 1980.

[12] S. K. Bose et A. K. Mal, *Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite*, Int. J. Solids. Structures 9, pp. 1075-1085, 1973.

2×2 décrivant les conversions entre les ondes longitudinales et transversales pour chaque mode de vibration.

Le formalisme de la matrice de diffusion  $S$  est également introduit. Si l'on s'intéresse à la diffusion d'une onde plane incidente excitant un objet quelconque, le champ total peut se décomposer en deux contributions. La première correspond au champ incident et la seconde au champ diffusé par l'objet. La matrice  $S$  est alors définie comme la matrice qui transforme les coefficients de la décomposition de l'onde incidente sur les états de base entrants, en coefficients de la décomposition de l'onde sortante sur les états de base sortants. La matrice  $S$  a été introduite originellement en physique quantique par J. A. Wheeler [13], puis développée par W. Heisenberg [14] pour des problèmes de diffusion de particules élémentaires. Elle a ensuite été introduite en acoustique par L. Flax *et al.* [15] pour l'isolement des résonances élastiques, c'est-à-dire les fréquences propres des vibrations élastiques des diffuseurs. Ici, nous avons adapté le formalisme de ce dernier à la diffusion multiple en milieu élastique en prenant en compte les conversions entre les ondes longitudinales et transversales se produisant à chaque processus de diffusion. Nous verrons que dans un tel cas de figure la construction de la matrice  $S$  n'est pas unique.

Les formalismes de matrice  $S$  permettent de déterminer les résonances d'un diffuseur, une résonance étant définie comme un pôle de la matrice  $S$  dans le plan complexe de la fréquence. Pour isoler les résonances des différentes cibles, cette méthode n'a toutefois pas été suivie dans ce chapitre. Les pôles de la matrice  $S$  étant également les pôles de la fonction de forme en champ lointain, cette dernière (proportionnelle au module du champ diffusé lorsque les distances entre le point d'observation et la cible sont très grandes) sera utilisée pour la mise en évidence théorique et expérimentale des résonances. La matrice  $S$ , dont la propriété d'unitarité exprime un bilan énergétique entre les ondes entrantes et sortantes, sera utilisée dans ce chapitre pour valider les calculs des champs diffusés.

---

[13] J. A. Wheeler, *On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure*, Phys. Rev. 52, pp. 1107-1122, 1937.

[14] W. Heisenberg, *Die beobachtbaren Grössen in der Theorie der Elementarteilchen*, Z. Phys. 120, pp. 513-538, 1943, *Die beobachtbaren Grössen in der Theorie der Elementarteilchen (II)*, Z. Phys. 120, pp. 643-702, 1943.

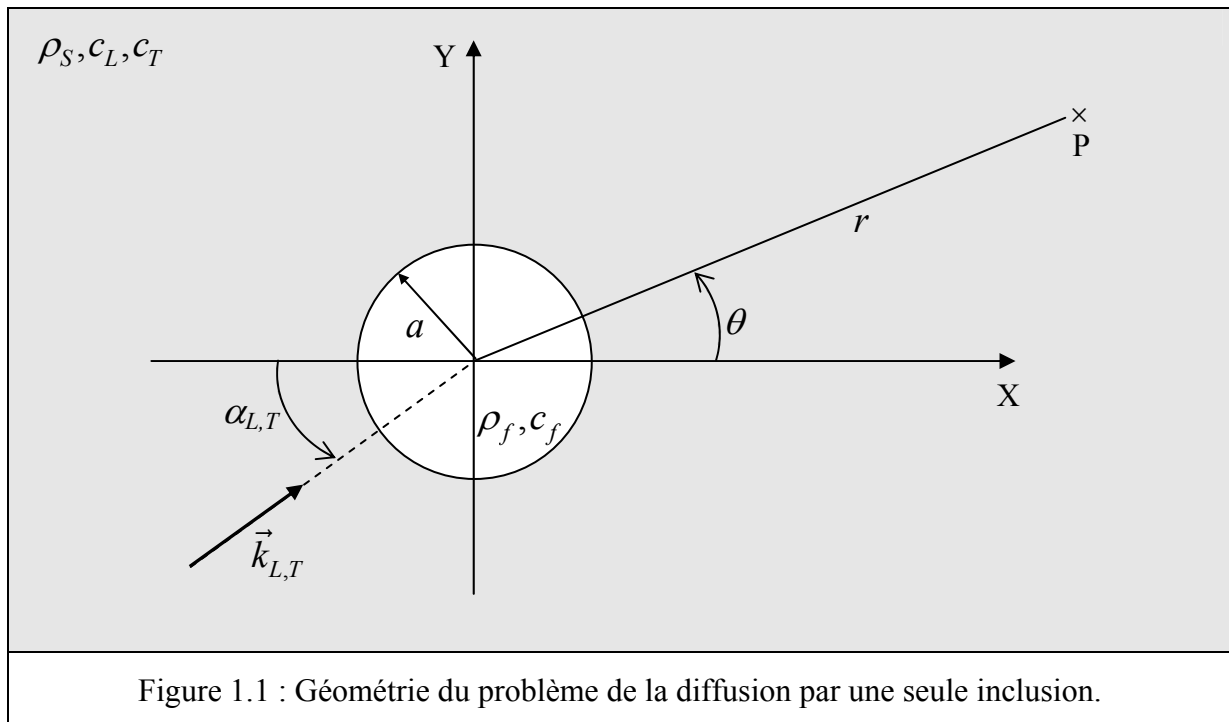
[15] L. Flax, L. R. Dragonette et H. Überall, *Theory of elastic resonance excitation by sound scattering*, J. Acoust. Soc. Am. 63, pp. 723-731, 1978.

## II. THÉORIE MODALE DE LA DIFFUSION MULTIPLE EN MILIEU ÉLASTIQUE

### II.1 Modèle de la diffusion par une inclusion seule

Dans ce paragraphe, nous rappelons la mise en équation des ondes intervenant dans le processus de diffusion d'une onde plane monochromatique par une inclusion cylindrique située dans un milieu élastique. Nous définissons ensuite les opérateurs de transition du diffuseur qui seront indispensables à la résolution du problème de la diffusion multiple. La mise en équation sera faite pour une inclusion fluide. Pour une inclusion vide, les opérateurs de transition s'obtiennent en négligeant toute propagation acoustique dans l'inclusion.

La géométrie du problème est décrite sur la Figure 1.1. Le rayon de l'inclusion est noté  $a$ . Le fluide contenu dans l'inclusion est caractérisé par sa masse volumique  $\rho_f$  et la célérité des ondes dans ce milieu qui est notée  $c_f$ . Le milieu externe élastique est supposé infini, homogène et isotrope. Sa masse volumique est notée  $\rho_s$ . Les ondes longitudinales ( $L$ ) et transversales ( $T$ ) s'y propagent respectivement avec les célérités  $c_L$  et  $c_T$ . En notant  $\omega$  leur fréquence angulaire, on définit leurs nombres d'onde respectifs par  $k_L = \omega / c_L$  et  $k_T = \omega / c_T$ . De la même façon, on définit dans le fluide un nombre d'onde  $k_f = \omega / c_f$ .



L'angle entre la direction du vecteur d'onde de l'onde incidente et l'axe Ox est noté  $\alpha_L$  ou  $\alpha_T$  selon que l'onde incidente est longitudinale ou transversale. Comme l'inclusion cylindrique d'axe Oz est supposée de longueur infinie et que seules des directions d'excitation perpendiculaires à cet axe sont considérées, aucune propagation dans la direction Oz ne sera prise en compte. Le problème est donc réduit au plan  $(xOy)$  et au système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .

### II.1.2 Mise en équation des différentes ondes en présence

Pour cette mise en équation, considérons par exemple le cas d'une onde incidente longitudinale. Cette onde dérive d'un potentiel scalaire  $\varphi_{inc}$  d'amplitude supposée égale à 1. En prenant l'origine des phases en O et en omettant la dépendance temporelle  $e^{-i\omega t}$ , le potentiel  $\varphi_{inc}$  au point d'observation P( $r, \theta$ ) à l'extérieur de l'inclusion s'écrit

$$\varphi_{inc} = e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{r}} = e^{ik_L r \cos(\theta - \alpha_L)}. \quad (1.1)$$

La décomposition de  $\varphi_{inc}$  en une somme de fonctions d'onde cylindriques donne

$$\varphi_{inc} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha_L} J_n(k_L r) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L J_n(k_L r) e^{in\theta}, \quad (1.2)$$

où  $J_n(k_L r)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  et d'argument  $k_L r$ . Lorsque l'inclusion est excitée, elle diffuse dans toutes les directions un champ de déplacement à deux composantes, l'une dérivant d'un potentiel scalaire  $\phi_s$ , et l'autre d'un potentiel vecteur  $\vec{\psi}_s$ . Le problème étant à deux dimensions,  $x$  et  $y$ , le potentiel vecteur est donc réduit à sa seule composante suivant  $z$ . Cette composante, notée  $\psi_s$ , est indépendante de la variable  $z$ . En termes de fonctions d'onde cylindriques,  $\phi_s$  et  $\psi_s$  sont donnés respectivement par

$$\phi_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L T_n^{LL} H_n^{(1)}(k_L r) e^{in\theta}, \quad (1.3)$$

$$\psi_s = -i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L T_n^{LT} H_n^{(1)}(k_L r) e^{in\theta}. \quad (1.4)$$

Les coefficients  $T_n^{LL}$  et  $T_n^{LT}$ , que nous déterminerons par la suite à partir des conditions de continuité à l'interface  $r=a$ , sont les *opérateurs de transition* caractérisant la diffusion de l'onde incidente dans le milieu solide élastique. Les doubles exposants  $LL$  et  $LT$  représentent



respectivement les conversions  $L \rightarrow L$  et  $L \rightarrow T$ . Les fonctions  $H_n^{(1)}(k_L r)$  et  $H_n^{(1)}(k_T r)$  sont les fonctions de Hankel de première espèce, d'ordre  $n$  et d'arguments respectifs  $k_L r$  et  $k_T r$ . Dans l'inclusion fluide, la pression acoustique est donnée par

$$p = -\rho_s \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L E_n^L J_n(k_L r) e^{in\theta}. \quad (1.5)$$

Ici, le coefficient  $E_n^L$  est l'opérateur de transmission caractérisant la diffusion de l'onde incidente dans le fluide à l'intérieur de l'inclusion. L'exposant  $L$  se rapporte à l'onde incidente longitudinale. Pour une inclusion vide, ce coefficient est nul.

Dans le cadre de la diffusion multiple, seul le champ acoustique diffusé à l'extérieur de l'inclusion nous intéresse, donc seuls les opérateurs de transition  $T_n^{LL}$  et  $T_n^{LT}$  sont à calculer. Ces opérateurs sont donnés par les conditions de continuité exposées ci-dessous.

### II.1.2 Introduction des opérateurs de transition

Les conditions de continuité à l'interface  $r = a$  entre l'inclusion fluide et le milieu solide élastique doivent vérifier les conditions suivantes :

- i) La composante radiale du vecteur déplacement dans le solide ( $u_{r,s}$ ) est égale à la composante radiale du vecteur déplacement dans le fluide ( $u_{r,f}$ ) :

$$u_{r,s} = u_{r,f} \text{ en } r = a.$$

- ii) La composante radiale du vecteur des contraintes normales dans le solide ( $\sigma_{rr}$ ) est égale à l'opposé de la pression dans le fluide ( $-p$ ) :

$$\sigma_{rr} = -p \text{ en } r = a.$$

- iii) La composante tangentielle du vecteur des contraintes normales ( $\sigma_{r\theta}$ ) est nulle :

$$\sigma_{r\theta} = 0 \text{ en } r = a.$$

En exprimant les vecteurs déplacements et le tenseur des contraintes à l'aide des potentiels définis dans le précédent paragraphe, ces trois conditions de continuité fournissent un système de trois équations linéaires à trois inconnues :  $T_n^{LL}$ ,  $T_n^{LT}$  et  $E_n^L$  [9]. Sous forme matricielle, ce système s'écrit (Equation (1.6))

---

[9] S. G. Solomon, H. Überall et K. B. Yoo, *Mode conversion and resonance scattering of elastic waves from a cylindrical fluid-filled cavity*, *Acustica* 55, pp. 147-159, 1984.

$$\begin{bmatrix} -\rho_f x_L H_n^{(1)'}(x_L) & n\rho_f H_n^{(1)}(x_T) & \rho_s x_f J_n'(x_f) \\ 2x_L H_n^{(1)'}(x_L) + (x_T^2 - 2n^2)H_n^{(1)}(x_L) & 2n(x_T H_n^{(1)'}(x_T) - H_n^{(1)}(x_T)) & -x_T^2 J_f(x_f) \\ 2n(x_L H_n^{(1)'}(x_L) - H_n^{(1)}(x_L)) & 2x_T H_n^{(1)'}(x_T) + (x_T^2 - 2n^2)H_n^{(1)}(x_T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n^{LL} \\ T_n^{LT} \\ E_n^L \end{bmatrix} = \vec{f}_n^L,$$

où les trois fréquences réduites,  $x_L = k_L a$ ,  $x_T = k_T a$  et  $x_f = k_f a$  sont ici introduites. Le second membre de cette équation,  $\vec{f}_n^L$ , est le « vecteur source » lié au potentiel scalaire de l'onde incidente longitudinale. Il est défini par

$$\vec{f}_n^L = \begin{bmatrix} \rho_f x_L J_n'(x_L) \\ -2x_L J_n'(x_L) - (x_T^2 - 2n^2)J_n(x_L) \\ -2n(x_L J_n'(x_L) - J_n(x_L)) \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Dans la matrice 3×3, la première colonne correspond au potentiel scalaire associé aux ondes longitudinales diffusées, la deuxième au potentiel vecteur associé aux ondes transversales diffusées, et la troisième à la pression acoustique à l'intérieur de l'inclusion fluide. L'application de la méthode de Cramer permet la résolution du système pour l'obtention des coefficients  $T_n^{LL}$  et  $T_n^{LT}$ . Dans le cas d'une onde incidente transversale, la mise en équation est formellement identique. Le système matriciel à résoudre devient (Equation (1.8))

$$\begin{bmatrix} -\rho_f x_L H_n^{(1)'}(x_L) & n\rho_f H_n^{(1)}(x_T) & \rho_s x_f J_n'(x_f) \\ 2x_L H_n^{(1)'}(x_L) + (x_T^2 - 2n^2)H_n^{(1)}(x_L) & 2n(x_T H_n^{(1)'}(x_T) - H_n^{(1)}(x_T)) & -x_T^2 J_f(x_f) \\ 2n(x_L H_n^{(1)'}(x_L) - H_n^{(1)}(x_L)) & 2x_T H_n^{(1)'}(x_T) + (x_T^2 - 2n^2)H_n^{(1)}(x_T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_n^{TL} \\ T_n^{TT} \\ E_n^T \end{bmatrix} = \vec{f}_n^T,$$

avec  $\vec{f}_n^T$  le vecteur source lié au potentiel vecteur de l'onde incidente transversale. Il s'écrit

$$\vec{f}_n^T = \begin{bmatrix} -n\rho_f x_T J_n(x_T) \\ -2n(x_T J_n'(x_T) - J_n(x_T)) \\ -2x_T J_n'(x_T) - (x_T^2 - 2n^2)J_n(x_T) \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Il est à noter que dans le cas d'une inclusion vide, la matrice 3×3 commune aux deux systèmes matriciels (1.6) et (1.8) est réduite à une matrice 2×2 composée des éléments des deux premières lignes et des deux premières colonnes de la matrice 3×3.

Les quatre opérateurs de transition maintenant définis,  $T_n^{LL}$ ,  $T_n^{LT}$ ,  $T_n^{TL}$  et  $T_n^{TT}$ , caractérisent le diffuseur au travers notamment des paramètres  $\rho_f$  et  $c_f$ . Dans le formalisme de la diffusion multiple exposé dans le prochain paragraphe (et même jusqu'au bout de ce manuscrit), les deux paramètres du fluide contenu dans l'inclusion n'apparaîtront plus explicitement dans les équations ; ils seront inscrits dans chaque opérateur de transition. A chaque mode  $n$  de vibration sont associés quatre conversions  $L \leftrightarrow T$ . V. K. Varadan [11] définit alors une unique matrice de transition, diagonale et de dimensions infinies, regroupant tous les modes  $n$  de vibration. Chacun des éléments de cette matrice sont des matrices blocs 2×2 composées des quatre opérateurs  $T_n^{LL}$ ,  $T_n^{LT}$ ,  $T_n^{TL}$  et  $T_n^{TT}$ . Ici, il sera plus judicieux de distinguer les conversions  $L \leftrightarrow T$  en définissant quatre matrices de transition  $T^{LL}$ ,  $T^{LT}$ ,  $T^{TL}$  et  $T^{TT}$ . Ces matrices sont également infinies et diagonales. Pour une conversion de type  $L \rightarrow L$ , par exemple, l'opérateur matriciel de transition  $T^{LL}$  est donné par

$$T^{LL} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & T_{n-1n-1}^{LL} & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & T_{nn}^{LL} & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & T_{n+1n+1}^{LL} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Les matrices  $T^{LT}$ ,  $T^{TL}$  et  $T^{TT}$  sont construites de la même façon. Dans le prochain paragraphe consacré à la diffusion multiple par  $N$  inclusions, les matrices de transition de chacune d'elles seront supposées connus.

## II.2 Calcul du champ acoustique diffusé par $N$ diffuseurs

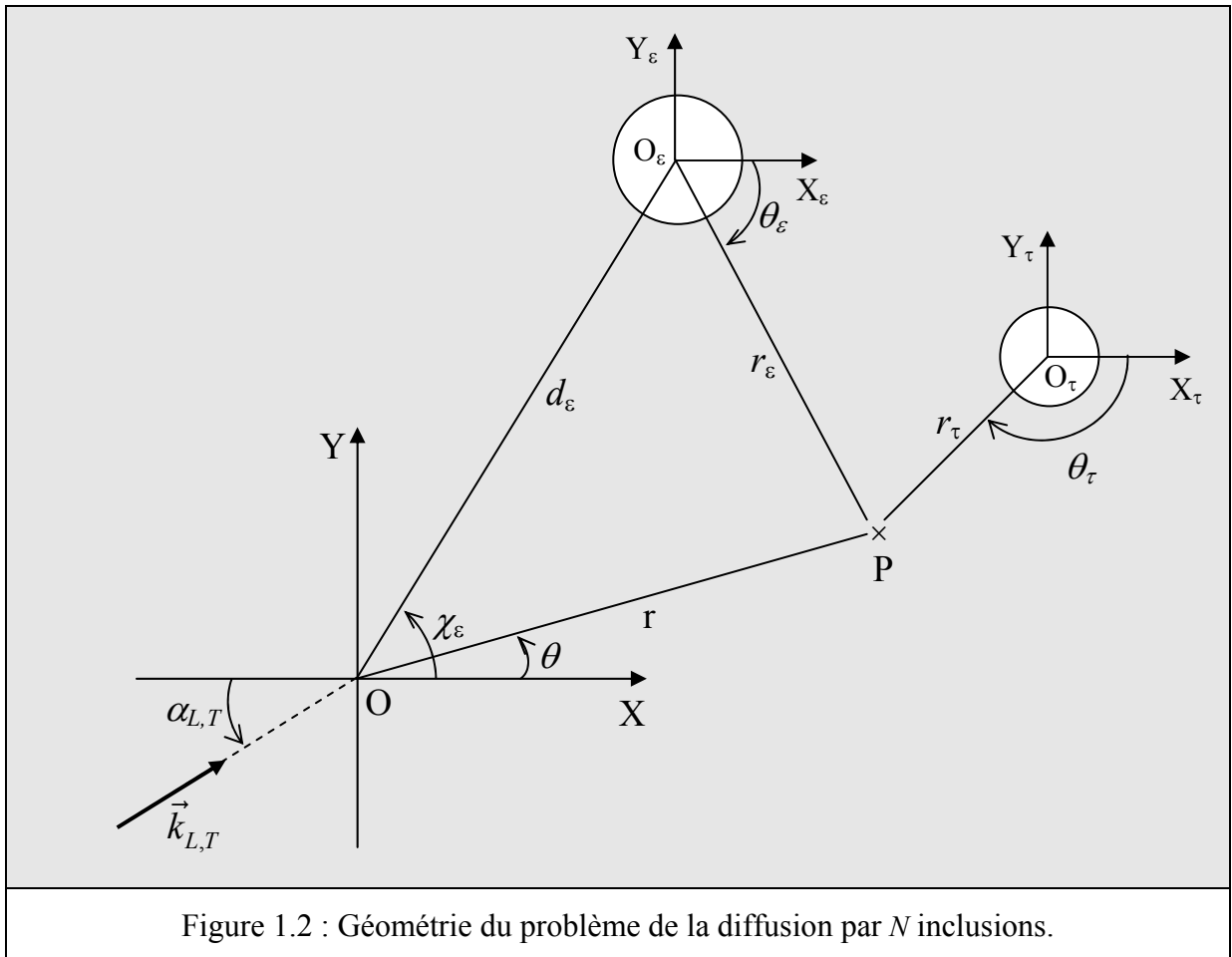
Considérons maintenant une cible constituée d'un ensemble de  $N$  inclusions arbitrairement distribuées dans l'espace, ces inclusions pouvant être de tailles ou/et de compositions

---

[11] V. K. Varadan, *Multiple scattering of acoustic, electromagnetic and elastic waves, Acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering. Focus on the T-matrix approach*, Pergamon, New-york, pp. 103-134, 1980.

différentes. Le but est d'exprimer le champ acoustique diffusé par la cible connaissant la diffusion par chaque diffuseur pris isolément, puis de définir la fonction de forme en champ lointain. La détection de ses pôles permettra, en fin de chapitre, la mise en évidence des résonances de différentes cibles.

Parmi les  $N$  diffuseurs, considérons deux d'entre eux numérotés respectivement  $\varepsilon$  et  $\tau$  (avec  $1 \leq \varepsilon \leq N$ ,  $1 \leq \tau \leq N$ ). La géométrie du problème et les notations utilisées sont exposées sur la Figure 1.2.  $O_\varepsilon$  et  $O_\tau$  sont les centres respectifs des diffuseurs  $\varepsilon$  et  $\tau$ ,  $(r_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  et  $(r_\tau, \theta_\tau)$  les systèmes de coordonnées polaires centrés respectivement sur  $O_\varepsilon$  et  $O_\tau$ . Dans le repère principal  $(xOy)$ , les coordonnées polaires de  $O_\varepsilon$  et  $O_\tau$  sont notées respectivement  $(d_\varepsilon, \chi_\varepsilon)$  et  $(d_\tau, \chi_\tau)$ . La solution cherchée est le champ acoustique diffusé au point d'observation P repéré par  $(r, \theta)$  dans le repère principal.



## II.2.1 Champ diffusé par chaque inclusion

A titre d'exemple, supposons que la cible soit excitée par une onde plane incidente longitudinale. Dans le repère principal ( $xOy$ ), son potentiel scalaire s'écrit

$$\varphi_{inc} = e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{r}} = e^{ik_L r \cos(\theta - \alpha_L)}, \quad (1.11)$$

et, dans le repère lié au diffuseur  $\varepsilon$ , il est donné par

$$\varphi_{inc}^{(\varepsilon)} = e^{i\vec{k}_L \cdot \overline{OO_\varepsilon}} e^{ik_L r_\varepsilon \cos(\theta_\varepsilon - \alpha_L)} = e^{ik_L d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \alpha_L)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha_L} J_n(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}, \quad (1.12)$$

où le terme  $k_L d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \alpha_L)$  représente son déphasage en  $O_\varepsilon$  par rapport à l'origine  $O$  du repère principal. En notant

$$A_n^{(\varepsilon)L} = i^n e^{-in\alpha_L} e^{ik_L d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \alpha_L)}, \quad (1.13)$$

on a de façon plus concise

$$\varphi_{inc}^{(\varepsilon)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(\varepsilon)L} J_n(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}. \quad (1.14)$$

Les potentiels des ondes longitudinales et transversales diffusées par ce même diffuseur  $\varepsilon$  sont donnés respectivement par

$$\phi_s^{(\varepsilon)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(\varepsilon)LL} H_n^{(1)}(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}, \quad (1.15)$$

$$\psi_s^{(\varepsilon)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(\varepsilon)LT} H_n^{(1)}(k_T r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}. \quad (1.16)$$

Les coefficients  $C_n^{(\varepsilon)LL}$  et  $C_n^{(\varepsilon)LT}$  sont les coefficients de diffusion du diffuseur  $\varepsilon$ . Leur détermination pour chaque diffuseur permet la connaissance du champ acoustique diffusé par l'ensemble des  $N$  diffuseurs. Evidemment, le champ acoustique défini par (1.15) et (1.16) ne représente pas seulement la diffusion de l'onde plane incidente. Le champ incident sur le diffuseur  $\varepsilon$  est en effet la somme de l'onde plane incidente et des ondes diffusées par tous les diffuseurs autres que le diffuseur  $\varepsilon$  lui-même, ce qui s'écrit

$$\varphi_{inc}^{(\varepsilon)} = \varphi_{inc}^{(\varepsilon)} + \sum_{\tau \neq \varepsilon} \varphi_s^{(\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ A_n^{(\varepsilon)L} J_n(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon} + \sum_{\tau \neq \varepsilon} C_n^{(\tau)LL} H_n^{(1)}(k_L r_\tau) e^{in\theta_\tau} \right], \quad (1.17)$$

$$\psi_{inc}^{(\varepsilon)} = \sum_{\tau \neq \varepsilon} \psi_s^{(\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tau \neq \varepsilon} C_n^{(\tau)LT} H_n^{(1)}(k_T r_\tau) e^{in\theta_\tau}. \quad (1.18)$$

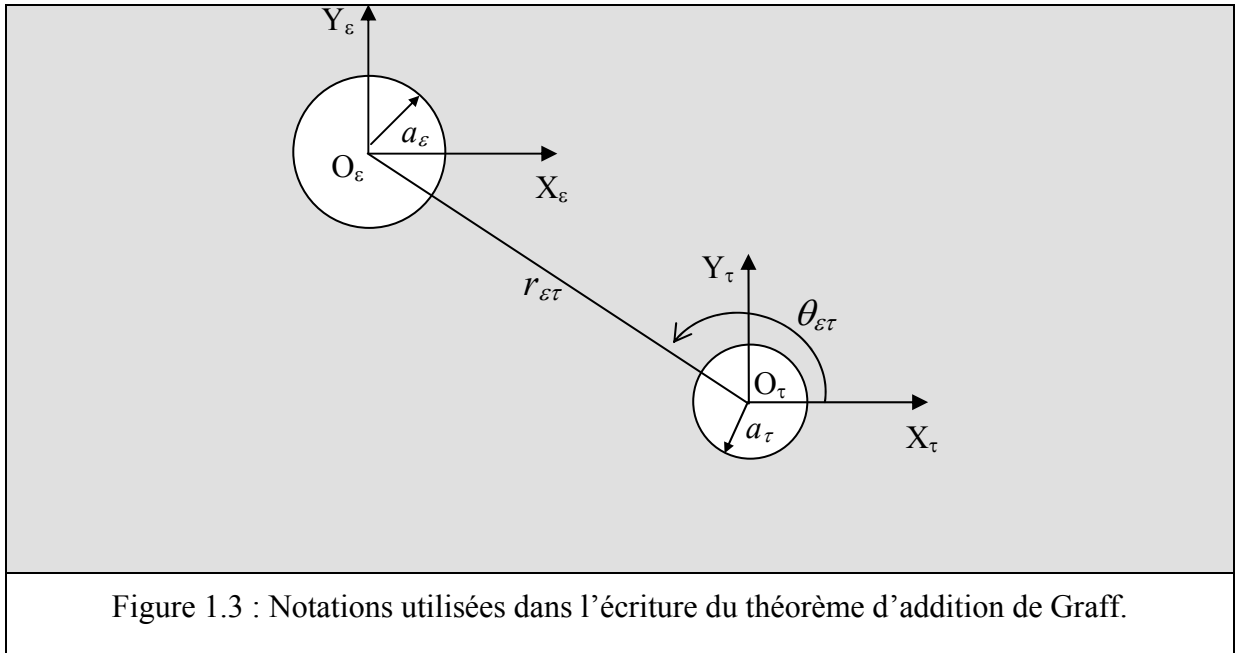
Pour calculer les coefficients de diffusion du diffuseur  $\varepsilon$ , il faut récrire dans le repère lié au diffuseur  $\varepsilon$  toutes les ondes diffusées par les  $N-1$  autres diffuseurs. C'est le théorème d'addition de Graff [16] qui permet ce changement de repère. Il s'écrit

$$H_n^{(1)}(k_{L,T}r_\tau)e^{in\theta_\tau} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} G_{L,Tnm}^{(\tau\varepsilon)} J_m(k_{L,T}r_\varepsilon)e^{im\theta_\varepsilon}, \quad (1.19)$$

où l'opérateur de Graff,  $G_{L,Tnm}^{(\tau\varepsilon)}$ , est défini par

$$G_{L,Tnm}^{(\tau\varepsilon)} = e^{i(n-m)\theta_{\varepsilon\tau}} H_{n-m}^{(1)}(k_{L,T}r_{\varepsilon\tau}). \quad (1.20)$$

Les notations  $r_{\varepsilon\tau}$  et  $\theta_{\varepsilon\tau}$  introduites dans l'opérateur de Graff sont précisées sur la Figure 1.3 ci-dessous. La lecture de la relation (1.19) montre que les ondes diffusées par un diffuseur  $\tau$  sont exprimées en tant qu'ondes incidentes sur le diffuseur  $\varepsilon$ . Cette transformation n'est valable que si  $r_\varepsilon < r_{\varepsilon\tau}$ . La condition sera respectée car, pour calculer les coefficients de diffusion du diffuseur  $\varepsilon$ , il suffira d'écrire le champ diffusé par ce dernier en  $r_\varepsilon = a_\varepsilon$ , avec  $a_\varepsilon < r_{\varepsilon\tau}$  quel que soit le diffuseur  $\tau$ . Imposer  $a_\varepsilon < r_{\varepsilon\tau}$  revient à dire qu'on n'autorise pas les diffuseurs  $\varepsilon$  et  $\tau$  à s'interpénétrer.



[16] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications Inc., New York, 1980.

En effectuant ce changement de repère, le champ incident sur le diffuseur  $\varepsilon$  devient

$$\phi_{inc}^{(\varepsilon)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ A_m^{(\varepsilon)L} + \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LL} \right] J_m(k_L r_\varepsilon) e^{im\theta_\varepsilon}, \quad (1.21)$$

$$\psi_{inc}^{(\varepsilon)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LT} J_m(k_T r_\varepsilon) e^{im\theta_\varepsilon}, \quad (1.22)$$

et, connaissant la diffusion par le diffuseur  $\varepsilon$  pris isolément *via* ses opérateurs de transition  $T_n^{(\varepsilon)LL}$ ,  $T_n^{(\varepsilon)LT}$ ,  $T_n^{(\varepsilon)TL}$ , et  $T_n^{(\varepsilon)TT}$  définis dans le paragraphe précédent, le champ diffusé défini par (1.15) et (1.16) peut donc également s'écrire

$$\phi_s^{(\varepsilon)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ T_m^{(\varepsilon)LL} \left[ A_m^{(\varepsilon)L} + \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LL} \right] + T_m^{(\varepsilon)TL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LT} \right\} H_m^{(1)}(k_L r_\varepsilon) e^{im\theta_\varepsilon}, \quad (1.23)$$

$$\psi_s^{(\varepsilon)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ T_m^{(\varepsilon)LT} \left[ A_m^{(\varepsilon)L} + \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LL} \right] + T_m^{(\varepsilon)TT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LT} \right\} H_m^{(1)}(k_T r_\varepsilon) e^{im\theta_\varepsilon}, \quad (1.24)$$

de sorte que, en identifiant respectivement les équations (1.23)-(1.24) et les équations (1.15)-(1.16), il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ C_m^{(\varepsilon)LL} - T_m^{(\varepsilon)LL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LL} - T_m^{(\varepsilon)TL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LT} \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_m^{(\varepsilon)LL} A_m^{(\varepsilon)L} \\ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[ C_m^{(\varepsilon)LT} - T_m^{(\varepsilon)LT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LL} - T_m^{(\varepsilon)TT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)LT} \right] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_m^{(\varepsilon)LT} A_m^{(\varepsilon)L} \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Remarquons qu'il suffit d'exprimer (1.15), (1.16), (1.23) et (1.24) en  $r_\varepsilon = a_\varepsilon$  pour obtenir ce système. La condition d'application du théorème d'addition de Graff ( $r_\varepsilon < r_{\varepsilon\tau}$ ) est donc bien respectée. Pour écrire le système ci-dessus sous la forme d'une écriture matricielle, définissons

— les vecteurs inconnus

$$\vec{C}^{(\varepsilon)LL} = \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{n-1}^{(\varepsilon)LL} \\ C_n^{(\varepsilon)LL} \\ C_{n+1}^{(\varepsilon)LL} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{C}^{(\varepsilon)LT} = \begin{bmatrix} \vdots \\ C_{n-1}^{(\varepsilon)LT} \\ C_n^{(\varepsilon)LT} \\ C_{n+1}^{(\varepsilon)LT} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

— le vecteur source associé au potentiel de l'onde plane incidente

$$\vec{A}^{(\varepsilon)L} = \begin{bmatrix} \vdots \\ A_{n-1}^{(\varepsilon)L} \\ A_n^{(\varepsilon)L} \\ A_{n+1}^{(\varepsilon)L} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$

— l'opérateur matriciel de Graff

$$G_{L,T}^{(\varepsilon)} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & G_{L,T}^{(\varepsilon)n-1n-1} & G_{L,T}^{(\varepsilon)n-1n} & G_{L,T}^{(\varepsilon)n-1n+1} & \cdots \\ \cdots & G_{L,T}^{(\varepsilon)nn-1} & G_{L,T}^{(\varepsilon)nn} & G_{L,T}^{(\varepsilon)nn+1} & \cdots \\ \cdots & G_{L,T}^{(\varepsilon)n+1n-1} & G_{L,T}^{(\varepsilon)n+1n} & G_{L,T}^{(\varepsilon)n+1n+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

Avec ces notations et en définissant  $M_{L,T}^{(\varepsilon)}$  l'opérateur transposé de  $G_{L,T}^{(\varepsilon)}$ , il vient finalement

$$\begin{cases} \vec{C}^{(\varepsilon)LL} - T^{(\varepsilon)LL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_L^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)LL} - T^{(\varepsilon)TL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_T^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)LT} = T^{(\varepsilon)LL} \vec{A}^{(\varepsilon)L} \\ \vec{C}^{(\varepsilon)LT} - T^{(\varepsilon)LT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_L^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)LL} - T^{(\varepsilon)TT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_T^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)LT} = T^{(\varepsilon)LT} \vec{A}^{(\varepsilon)L} \end{cases} \quad (1.29)$$

où les quatre matrices  $T^{(\varepsilon)LL}$ ,  $T^{(\varepsilon)LT}$ ,  $T^{(\varepsilon)TL}$  et  $T^{(\varepsilon)TT}$  sont définies par (1.10).

Notons que dans le cas d'une onde incidente transversale, il suffit de remplacer dans le vecteur source les coefficients  $A_n^{(\varepsilon)L}$  par

$$A_n^{(\varepsilon)T} = i^n e^{-in\alpha_T} e^{ik_T d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \alpha_T)}. \quad (1.30)$$

Les coefficients de diffusion du diffuseur  $\varepsilon$ , notés  $C_n^{(\varepsilon)TL}$  et  $C_n^{(\varepsilon)TT}$ , vérifient alors

$$\begin{cases} \vec{C}^{(\varepsilon)TL} - T^{(\varepsilon)LL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_L^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)TL} - T^{(\varepsilon)TL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_T^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)TT} = T^{(\varepsilon)TL} \vec{A}^{(\varepsilon)T} \\ \vec{C}^{(\varepsilon)TT} - T^{(\varepsilon)LT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_L^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)TL} - T^{(\varepsilon)TT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_T^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)TT} = T^{(\varepsilon)TT} \vec{A}^{(\varepsilon)T} \end{cases} \quad (1.31)$$

En notant *inc* l'exposant se rapportant à l'onde incidente,  $inc = \{L, T\}$ , quelle que soit la nature de l'onde incidente, longitudinale ou transversale, on peut donc écrire



$$\begin{cases} \vec{C}^{(\varepsilon)incL} - T^{(\varepsilon)LL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_L^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)incL} - T^{(\varepsilon)TL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_T^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)incT} = T^{(\varepsilon)incL} \vec{A}^{(\varepsilon)inc} \\ \vec{C}^{(\varepsilon)incT} - T^{(\varepsilon)LT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_L^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)incL} - T^{(\varepsilon)TT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} M_T^{(\tau\varepsilon)} \vec{C}^{(\tau)incT} = T^{(\varepsilon)incT} \vec{A}^{(\varepsilon)inc} \end{cases} \quad (1.32)$$

Pour déterminer les vecteurs inconnus  $\vec{C}^{(\varepsilon)incL}$  et  $\vec{C}^{(\varepsilon)incT}$  relatifs à chaque diffuseur  $\varepsilon$ , avec  $1 \leq \varepsilon \leq N$ , le système à résoudre est finalement un système de  $2N$  équations linéaires à  $2N$  inconnues. Pour  $N = 2$ , par exemple, il s'écrit

$$\begin{cases} \vec{C}^{(1)incL} - T^{(1)LL} M_L^{(21)} \vec{C}^{(2)incL} - T^{(1)TL} M_T^{(21)} \vec{C}^{(2)incT} = T^{(1)incL} \vec{A}^{(1)inc} \\ \vec{C}^{(2)incL} - T^{(2)LL} M_L^{(12)} \vec{C}^{(1)incL} - T^{(2)TL} M_T^{(12)} \vec{C}^{(1)incT} = T^{(2)incL} \vec{A}^{(2)inc} \\ \vec{C}^{(1)incT} - T^{(1)LT} M_L^{(21)} \vec{C}^{(2)incL} - T^{(1)TT} M_T^{(21)} \vec{C}^{(2)incT} = T^{(1)incT} \vec{A}^{(1)inc} \\ \vec{C}^{(2)incT} - T^{(2)LT} M_L^{(12)} \vec{C}^{(1)incL} - T^{(2)TT} M_T^{(12)} \vec{C}^{(1)incT} = T^{(2)incT} \vec{A}^{(2)inc} \end{cases} \quad (1.33)$$

soit, sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} I_d & -T^{(1)LL} M_L^{(21)} & 0 & -T^{(1)TL} M_T^{(21)} \\ -T^{(2)LL} M_L^{(12)} & I_d & -T^{(2)TL} M_T^{(12)} & 0 \\ 0 & -T^{(1)LT} M_L^{(21)} & I_d & -T^{(1)TT} M_T^{(21)} \\ -T^{(2)LT} M_L^{(12)} & 0 & -T^{(2)TT} M_T^{(12)} & I_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}^{(1)incL} \\ \vec{C}^{(2)incL} \\ \vec{C}^{(1)incT} \\ \vec{C}^{(2)incT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{(1)incL} \vec{A}^{(1)inc} \\ T^{(2)incL} \vec{A}^{(2)inc} \\ T^{(1)incT} \vec{A}^{(1)inc} \\ T^{(2)incT} \vec{A}^{(2)inc} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

avec  $I_d$  la matrice identité. Mettre le système d'équations linéaires (1.33) sous forme matricielle (1.34) montre clairement que les vecteurs calculés dépendront de la source (la matrice du premier membre ne caractérise que la cible et le second membre est directement lié à la source d'excitation au travers des vecteurs  $\vec{A}^{(1)inc}$  et  $\vec{A}^{(2)inc}$ ), donc de la nature de l'onde incidente et de l'angle sous lequel est excitée la cible, noté  $\alpha_{inc}$  avec  $inc = \{L, T\}$ .

## II.2.2 Champ diffusé par $N$ inclusions

Les coefficients de diffusion multiple de tous les diffuseurs sont désormais connus. Le champ acoustique diffusé par la cible constituée de  $N$  diffuseurs s'obtient alors en sommant tous les champs individuels exprimés par (1.15) et (1.16), soit

$$\phi_s = \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(\varepsilon)incL}(\alpha_{inc}) H_n^{(1)}(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}, \quad (1.35)$$

$$\psi_s = \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(\varepsilon)incT}(\alpha_{inc}) H_n^{(1)}(k_T r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}. \quad (1.36)$$

Si l'on considère maintenant un point d'observation P très loin de la cible ( $k_{L,T}r \gg 1$ ), il vient

$$\theta_\varepsilon \simeq \theta \quad \text{et} \quad r_\varepsilon \simeq r - d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \theta) \quad \forall \varepsilon, \quad (1.37)$$

de sorte que  $\phi_s$  et  $\psi_s$  ne dépendent que des coordonnées polaires du repère principal ( $xOy$ ). En utilisant le développement asymptotique des fonctions de Hankel pour les grands arguments,

$$H_n^{(1)}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (1.38)$$

le champ diffusé est donné par

$$\phi_s = \sqrt{\frac{2}{\pi k_L r}} e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{(\varepsilon)incL}(\alpha_{inc}) e^{-ik_L d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \theta)} e^{in\theta}, \quad (1.39)$$

$$\psi_s = \sqrt{\frac{2}{\pi k_T r}} e^{i\left(k_T r - \frac{\pi}{4}\right)} \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{(\varepsilon)incT}(\alpha_{inc}) e^{-ik_T d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \theta)} e^{in\theta}. \quad (1.40)$$

On remarque que, loin de la cible, le champ diffusé est composé de deux ondes cylindriques,

$$\phi_s = f^{incL}(\alpha_{inc}, \theta) \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}}, \quad (1.41)$$

$$\psi_s = f^{incT}(\alpha_{inc}, \theta) \frac{e^{i\left(k_T r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_T r}}, \quad (1.42)$$

d'amplitudes respectives  $f^{incL}$  et  $f^{incT}$ , qu'on appellera *amplitudes de diffusion en champ lointain*. Le calcul des ces amplitudes permet de connaître la diffusion dans une direction d'observation  $\theta$  pour un angle d'excitation  $\alpha_{inc}$ . Ces amplitudes de diffusion s'expriment (cf. Equations (1.39) et (1.40)) de la façon suivante

$$f^{incL}(\alpha_{inc}, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{(j)incL}(\alpha_{inc}) e^{-ik_L d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \theta)} e^{in\theta}, \quad (1.43)$$

$$f^{incT}(\alpha_{inc}, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{(j)incT}(\alpha_{inc}) e^{-ik_T d_\varepsilon \cos(\chi_\varepsilon - \theta)} e^{in\theta}. \quad (1.44)$$

Les fonctions de forme en champ lointain, notées  $F^{incL}$  et  $F^{incT}$ , sont définies respectivement en normalisant les modules de  $\phi_s$  et de  $\psi_s$  par celui du potentiel de l'onde plane incidente. Comme ce dernier est supposé être d'amplitude unitaire (cf. Equation (1.11)), son module vaut 1 et

$$F^{incL}(r, \alpha_{inc}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{k_L r}} |f^{incL}(\alpha_{inc}, \theta)|, \quad (1.45)$$

$$F^{incT}(r, \alpha_{inc}, \theta) = \frac{1}{\sqrt{k_T r}} |f^{incT}(\alpha_{inc}, \theta)|. \quad (1.46)$$

Le nom de fonction de forme provient du fait qu'elle dépend étroitement de la géométrie de la cible, cette notion étant issue de celle de section efficace différentielle habituellement utilisée pour le traitement des collisions en physique des particules. La section efficace différentielle est le module au carré de la fonction de forme multipliée par la surface réelle de la cible. La fonction de forme est donc sans unité et représente à elle seule les variations d'amplitude des ondes diffusées en fonction des angles d'incidence et d'observation, et de la taille de la cible par rapport à la longueur d'onde considérée. Il n'existe pas de formulation unique de la fonction de forme car elle dépend de la géométrie de la cible. Celles définies par (1.45) et (1.46) sont exprimées à une distance  $r$  infinie. Nous préférons cependant dans la suite les exprimer à une distance  $r$  de l'ordre de grandeur des dimensions de la cible. Pour des cibles constituées d'inclusions identiques de rayons  $a$ , nous les définirons par

$$F^{incL}(x_L, \alpha_{inc}, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_L}} |f^{incL}(\alpha_{inc}, \theta)| \quad (1.47)$$

et

$$F^{incT}(x_T, \alpha_{inc}, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi x_T}} |f^{incT}(\alpha_{inc}, \theta)|, \quad (1.48)$$

en rappelant que  $x_L = k_L a$  et  $x_T = k_T a$ .

Pour un nombre donné d'inclusions, les amplitudes de diffusion définies par (1.43) et (1.44) sont des séries qui convergent plus ou moins rapidement selon la fréquence et la distance séparant les inclusions. L'ordre de convergence de ces séries détermine le temps nécessaire au calcul numérique du champ acoustique diffusé par la cible. L'Annexe 2 présente

le critère de convergence numérique utilisé et l'évolution des temps de calcul en fonction de la distance entre les diffuseurs et de la fréquence. Pour valider ces calculs, la conservation de l'énergie a été vérifiée en utilisant la propriété d'unitarité de la *matrice de diffusion*  $S$  dont le formalisme est exposé dans le paragraphe suivant.

### II.3 Formalisme de la matrice $S$

La matrice  $S$  associée à la diffusion multiple en milieu élastique est établie ici en suivant trois étapes. En premier lieu, les opérateurs de diffusion sont introduits en suivant la même démarche que celle de L. D. Landau et E. M. Lifchitz [17] en mécanique quantique. Ces opérateurs sont ensuite définis dans le cadre des théories modales [15]. Suite aux conversions entre les ondes longitudinales et transversales pour chaque mode de vibration, quatre opérateurs matriciels sont définis. La dernière étape consiste alors à construire la matrice  $S$  à partir des éléments de ces quatre matrices, puis à justifier cette construction.

#### II.3.1 Introduction des opérateurs de diffusion $\hat{S}$

Comme dans le précédent paragraphe, nous allons entamer la mise en équation dans le cas où l'onde plane incidente est longitudinale et définie par (1.12). La démarche est formellement identique dans le cas d'une onde incidente transversale. Les opérateurs de diffusion apparaissent naturellement en partant de l'écriture du champ total diffusé qui peut se décomposer en deux contributions : la première correspond à l'onde incidente et la seconde au champ diffusé par la cible. En champ lointain, le champ total est donc défini par

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n e^{-in\alpha_L} J_n(k_L r) e^{in\theta} + f^{LL}(\alpha_L, \theta) \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}}, \quad (1.49)$$

$$\Psi = f^{LT}(\alpha_L, \theta) \frac{e^{i\left(k_T r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_T r}}, \quad (1.50)$$

---

[17] L. D. Landau et E. M. Lifchitz, *Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford, 1966.

[15] L. Flax, L. R. Dragonette et H. Überall, *Theory of elastic resonance excitation by sound scattering*, J. Acoust. Soc. Am. 63, pp. 723-731, 1978.

et en utilisant le développement asymptotique de la fonction de Bessel pour les grands arguments,

$$J_n(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{x}} (-i)^n + \frac{e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{x}} i^n \right], \quad (1.51)$$

le potentiel scalaire  $\Phi$  devient

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{in(\theta - \alpha_L)} \right] \frac{e^{-i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} + \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\theta - \alpha_L)} + f^{LL}(\alpha_L, \theta) \right] \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}}. \quad (1.52)$$

$\Psi$  est une onde cylindrique divergente et  $\Phi$  la somme de deux ondes cylindriques, l'une diverge tandis que l'autre converge vers l'origine  $O$  du repère  $(xOy)$ . Si l'onde incidente était de type transversal, les compositions de  $\Phi$  et de  $\Psi$  seraient bien sûr inversées.

Le champ total est défini ici pour un seul angle d'incidence  $\alpha_L$ . Cependant, suivant le raisonnement de Landau et Lifchitz [17], toute combinaison linéaire de fonctions de la forme (1.50) et (1.52) pour différents angles  $\alpha_L$  décrit également un certain processus de diffusion. Par suite, quelle que soit la fonction  $2\pi$ -périodique  $F(\alpha_L)$ , le champ défini par

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha_L) e^{-in\alpha_L} d\alpha_L \right] (-1)^n e^{in\theta} \right\} \frac{e^{-i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha_L) e^{-in\alpha_L} d\alpha_L \right] e^{in\theta} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f^{LL}(\alpha_L, \theta) F(\alpha_L) d\alpha_L \right\} \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \end{aligned} \quad (1.53)$$

et

$$\Psi = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^{LT}(\alpha_L, \theta) F(\alpha_L) d\alpha_L \right] \frac{e^{i\left(k_T r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_T r}} \quad (1.54)$$

représente encore un processus de diffusion (les notations  $\Phi$  et  $\Psi$  ont été conservées bien qu'elles ne représentent plus les mêmes potentiels que (1.52) et (1.50)).  $F(\alpha_L)$  étant  $2\pi$ -périodique, si l'on note  $F_n$  ses coefficients de Fourier définis par

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha_L) e^{-in\alpha_L} d\alpha_L, \quad (1.55)$$

[17] L. D. Landau et E. M. Lifchitz, *Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford, 1966.

alors

$$F(\alpha_L) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{in\alpha_L}. \quad (1.56)$$

Par suite, le potentiel scalaire  $\Phi$  défini par

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n (-1)^n e^{in\theta} \right\} \frac{e^{-i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{in\theta} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f^{LL}(\alpha_L, \theta) F(\alpha_L) d\alpha_L \right\} \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

s'écrit aussi, compte tenu de (1.56),

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\theta \pm \pi) \frac{e^{-i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ F(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f^{LL}(\alpha_L, \theta) F(\alpha_L) d\alpha_L \right] \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Introduisons alors les opérateurs de diffusion  $\hat{S}^{LL}$  et  $\hat{S}^{LT}$  tels que

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} F(\theta \pm \pi) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \hat{S}^{LL}[F(\alpha_L)](\theta), \quad (1.59)$$

et

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \hat{S}^{LT}[F(\alpha_L)](\theta). \quad (1.60)$$

Les actions respectives des opérateurs  $\hat{S}^{LL}$  et  $\hat{S}^{LT}$  sur la fonction  $2\pi$ -périodique  $F(\alpha_L)$  sont donc données par

$$\hat{S}^{LL}[F(\alpha_L)](\theta) = F(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f^{LL}(\alpha_L, \theta) F(\alpha_L) d\alpha_L, \quad (1.61)$$

$$\hat{S}^{LT}[F(\alpha_L)](\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f^{LT}(\alpha_L, \theta) F(\alpha_L) d\alpha_L. \quad (1.62)$$

Pour alléger les écritures, la notation

$$\langle \xi, F \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi(\alpha_L) F^*(\alpha_L) d\alpha_L \quad (1.63)$$

peut être introduite, de sorte que les relations (1.61) et (1.62) s'écrivent

$$\hat{S}^{LL} [F(\alpha_L)](\theta) = F(\theta) + \sqrt{2\pi} \langle f^{LL}(\theta), F \rangle, \quad (1.64)$$

et

$$\hat{S}^{LT} [F(\alpha_L)](\theta) = \sqrt{2\pi} \langle f^{LT}(\theta), F \rangle. \quad (1.65)$$

En suivant la même démarche dans le cas où l'onde incidente est de type transversal, deux autres opérateurs de diffusion, notés  $\hat{S}^{TL}$  et  $\hat{S}^{TT}$ , sont définis. Leurs actions respectives sur la fonction  $2\pi$ -périodique  $F(\alpha_T)$  s'écrivent

$$\hat{S}^{TL} [F(\alpha_T)](\theta) = \sqrt{2\pi} \langle f^{TL}(\theta), F \rangle, \quad (1.66)$$

$$\hat{S}^{TT} [F(\alpha_T)](\theta) = F(\theta) + \sqrt{2\pi} \langle f^{TT}(\theta), F \rangle. \quad (1.67)$$

### II.3.2 Éléments de la matrice $\mathcal{S}$

Pour caractériser les quatre opérateurs  $\hat{S}^{LL}$ ,  $\hat{S}^{LT}$ ,  $\hat{S}^{TL}$  et  $\hat{S}^{TT}$  dans le cadre des théories modales, il faut effectuer une projection des amplitudes de diffusion sur la base orthonormée des fonctions  $2\pi$ -périodiques  $\{e^{-ip\alpha_{inc}}\}$  (avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $inc = \{L, T\}$ ). Compte tenu des définitions (1.43) et (1.44) des amplitudes de diffusion, cette projection conduit pour  $\hat{S}^{LL}$  et  $\hat{S}^{TT}$  à

$$\hat{S}^{LL} [e^{-ip\alpha_L}](\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \delta_{pq} + 2 \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \langle C_n^{(\varepsilon)LL}, e^{-ip\alpha_L} \rangle e^{-i(q-n)\chi_\varepsilon} J_{q-n}(k_L d_\varepsilon) \right] e^{iq\theta}, \quad (1.68)$$

$$\hat{S}^{TT} [e^{-ip\alpha_T}](\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left[ \delta_{pq} + 2 \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \langle C_n^{(\varepsilon)TT}, e^{-ip\alpha_T} \rangle e^{-i(q-n)\chi_\varepsilon} J_{q-n}(k_T d_\varepsilon) \right] e^{iq\theta}, \quad (1.69)$$

où  $\delta_{pq}$  est le symbole de Kronecker, et pour  $\hat{S}^{LT}$  et  $\hat{S}^{TL}$  à

$$\hat{S}^{LT} [e^{-ip\alpha_L}](\theta) = 2 \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \langle C_n^{(\varepsilon)LT}, e^{-ip\alpha_L} \rangle e^{-i(q-n)\chi_\varepsilon} J_{q-n}(k_T d_\varepsilon) e^{iq\theta}, \quad (1.70)$$

$$\hat{S}^{TL} \left[ e^{-ip\alpha_T} \right] (\theta) = 2 \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \left\langle C_n^{(\varepsilon)TL}, e^{-ip\alpha_T} \right\rangle e^{-i(q-n)\chi_\varepsilon} J_{q-n}(k_L d_\varepsilon) e^{iq\theta}. \quad (1.71)$$

La projection sur la base  $\{e^{-ip\alpha_{mc}}\}$  conduit donc *in fine* à écrire

$$\hat{S}^{LL} \left[ e^{-ip\alpha_L} \right] (\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LL} e^{iq\theta}, \quad (1.72)$$

$$\hat{S}^{TT} \left[ e^{-ip\alpha_T} \right] (\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{TT} e^{iq\theta}, \quad (1.73)$$

$$\hat{S}^{LT} \left[ e^{-ip\alpha_L} \right] (\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LT} e^{iq\theta}, \quad (1.74)$$

$$\hat{S}^{TL} \left[ e^{-ip\alpha_T} \right] (\theta) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{TL} e^{iq\theta}, \quad (1.75)$$

où les termes  $S_{pq}^{LL}$ ,  $S_{pq}^{TT}$ ,  $S_{pq}^{LT}$  et  $S_{pq}^{TL}$  définis par

$$S_{pq}^{LL} = \delta_{pq} + 2 \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \left\langle C_n^{(\varepsilon)LL}, e^{-ip\alpha_L} \right\rangle e^{-i(q-n)\chi_\varepsilon} J_{q-n}(k_L d_\varepsilon), \quad (1.76)$$

$$S_{pq}^{TT} = \delta_{pq} + 2 \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \left\langle C_n^{(\varepsilon)TT}, e^{-ip\alpha_T} \right\rangle e^{-i(q-n)\chi_\varepsilon} J_{q-n}(k_T d_\varepsilon), \quad (1.77)$$

$$S_{pq}^{LT} = 2 \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \left\langle C_n^{(\varepsilon)LT}, e^{-ip\alpha_L} \right\rangle e^{-i(q-n)\chi_\varepsilon} J_{q-n}(k_T d_\varepsilon), \quad (1.78)$$

$$S_{pq}^{TL} = 2 \sum_{\varepsilon=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-q} \left\langle C_n^{(\varepsilon)TL}, e^{-ip\alpha_T} \right\rangle e^{-i(q-n)\chi_\varepsilon} J_{q-n}(k_L d_\varepsilon), \quad (1.79)$$

représentent respectivement les éléments de quatre matrices non diagonales et de dimensions infinies :  $S^{LL}$ ,  $S^{TT}$ ,  $S^{LT}$ ,  $S^{TL}$ . On vérifie numériquement que

$$S_{pq}^{LL} = (-1)^{p+q} S_{-q-p}^{LL}, \quad (1.80)$$

$$S_{pq}^{TT} = (-1)^{p+q} S_{-q-p}^{TT}, \quad (1.81)$$

$$S_{pq}^{TL} = (-1)^{p+q+1} S_{-q-p}^{LT}. \quad (1.82)$$



La lecture des équations de (1.72) à (1.75) est que chaque matrice transforme les coefficients issus de la décomposition de l'onde plane incidente sur les états de base entrants, soit  $e^{-ip\alpha_{inc}}$ , en coefficients de la décomposition de l'onde sortante sur les états de base sortants, soit  $e^{iq\theta}$ . Pour obtenir les éléments de  $S^{LL}$ ,  $S^{TT}$ ,  $S^{LT}$  et  $S^{TL}$ , il reste à calculer les produits scalaires

$$\langle C_n^{(\varepsilon)LL}, e^{-ip\alpha_L} \rangle, \quad \langle C_n^{(\varepsilon)TT}, e^{-ip\alpha_T} \rangle, \quad \langle C_n^{(\varepsilon)LT}, e^{-ip\alpha_L} \rangle, \quad \langle C_n^{(\varepsilon)TL}, e^{-ip\alpha_T} \rangle.$$

Le calcul de ces quatre termes pour tous les diffuseurs  $\varepsilon$  s'effectue en résolvant le système d'équations linéaires défini par (1.32) projeté sur la base  $\{e^{-ip\alpha_{inc}}\}$ . Par exemple, dans le cas où la cible est constituée de  $N = 2$  diffuseurs, il s'agit de résoudre le système (Equation (1.83))

$$\begin{bmatrix} I_d & -T^{(1)LL} M_L^{(21)} & 0 & -T^{(1)TL} M_T^{(21)} \\ -T^{(2)LL} M_L^{(12)} & I_d & -T^{(2)TL} M_T^{(12)} & 0 \\ 0 & -T^{(1)LT} M_L^{(21)} & I_d & -T^{(1)TT} M_T^{(21)} \\ -T^{(2)LT} M_L^{(12)} & 0 & -T^{(2)TT} M_T^{(12)} & I_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \bar{C}^{(1)incL}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle \\ \langle \bar{C}^{(2)incL}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle \\ \langle \bar{C}^{(1)incT}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle \\ \langle \bar{C}^{(2)incT}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{(1)incL} \langle \bar{A}^{(1)inc}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle \\ T^{(2)incL} \langle \bar{A}^{(2)inc}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle \\ T^{(1)incT} \langle \bar{A}^{(1)inc}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle \\ T^{(2)incT} \langle \bar{A}^{(2)inc}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle \end{bmatrix}$$

pour une onde incidente longitudinale et une onde incidente transversale ( $inc = L$  et  $inc = T$ ). Dans le second membre, les vecteurs  $\langle \bar{A}^{(\varepsilon)inc}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle$ , avec  $\varepsilon = \{1, 2\}$ , ont pour  $n$ -ième composante

$$\langle A_n^{(\varepsilon)inc}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_n^{(\varepsilon)inc} e^{ip\alpha_{inc}} d\alpha_L, \quad (1.84)$$

soit, compte tenu de (1.13) et (1.30),

$$\langle A_n^{(\varepsilon)inc}, e^{-ip\alpha_{inc}} \rangle = i^p J_{p-n}(k_{inc} d_\varepsilon) e^{i(p-n)\chi_\varepsilon}. \quad (1.85)$$

Par rapport à la diffusion en milieu fluide où le processus de diffusion par  $N$  diffuseurs est décrit par une unique matrice  $S$  [3], les conversions entre les modes longitudinaux et transversaux en milieu élastique introduisent naturellement dans le formalisme deux matrices de diffusion pour chaque type d'onde incidente :  $S^{LL}$  et  $S^{LT}$  dans le cas où l'onde incidente est de type longitudinal,  $S^{TT}$  et  $S^{TL}$  dans le cas où elle est de type transversal. Pour « symétriser » le problème, nous supposons désormais que la cible est à la fois excitée par une onde longi-

[3] P.-Y. Le Bas, F. Luppé, J.-M. Conoir et H. Franklin, *N-shell cluster in water : Multiple scattering and splitting of resonances*, J. Acoust. Soc. Am. 115, pp. 1460-1467, 2004.

itudinale et par une onde transversale. Le problème consiste alors à construire à partir des éléments des quatre matrices  $S^{LL}$ ,  $S^{TT}$ ,  $S^{LT}$  et  $S^{TL}$ , une unique matrice de diffusion  $S$  devant vérifier

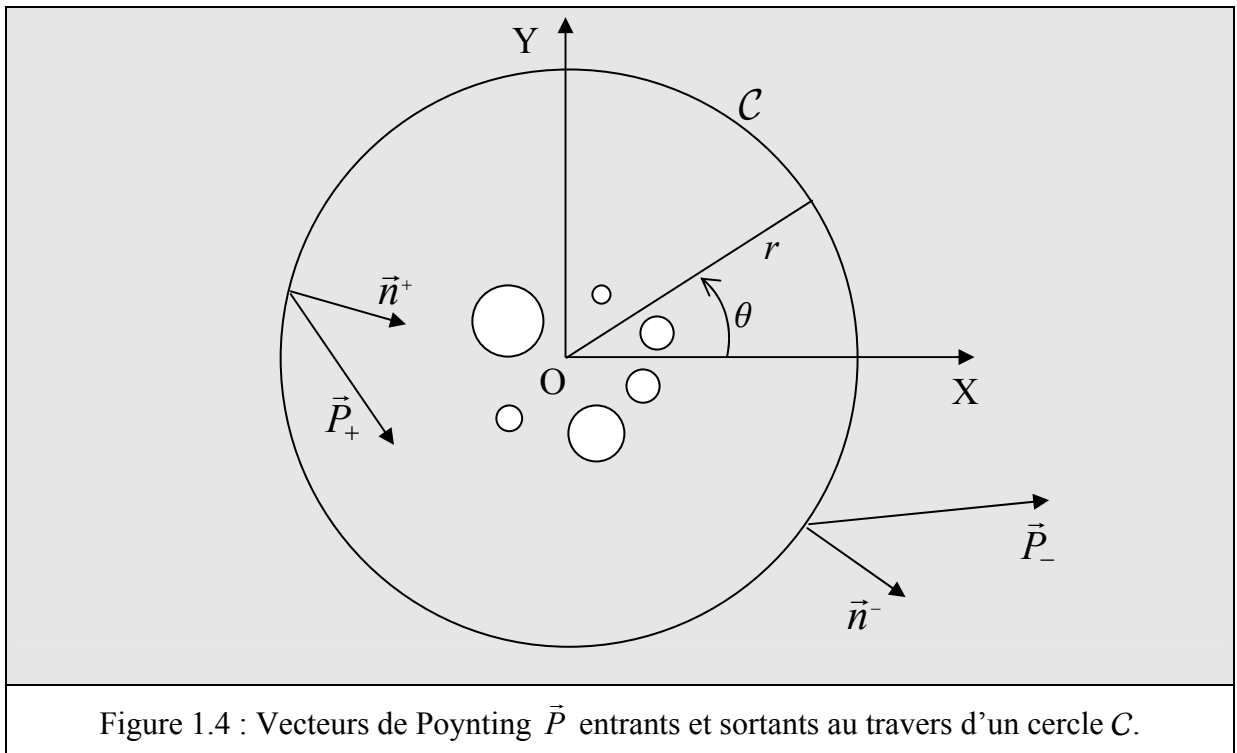
$$SS^+ = S^+S = I_d \quad (1.86)$$

( $S^+$  désigne la matrice adjointe de  $S$ ). L'unitarité de la matrice  $S$  est associée à la conservation de l'énergie et la réciprocity à l'invariance par l'inversion du temps. Les relations tirées des conditions d'unitarité et de réciprocity ne sont pas des relations suffisamment explicites pour nous guider dans la construction de  $S$ . Des relations plus explicites entre les éléments des quatre matrices définies ci-dessus doivent être établies. C'est l'écriture de la conservation des flux d'énergie qui nous fournira ces relations supplémentaires.

### II.3.3 Conservation des flux d'énergie et construction de la matrice $S$

#### a) Relations de conservation des flux d'énergie

Pour exprimer la conservation de l'énergie, nous allons considérer des flux d'énergie au travers d'un cercle  $C$  de rayon  $r$ , centré en  $O$  et contenant tous les diffuseurs. La géométrie est décrite sur la Figure 1.4.



De façon générale, l'expression de la valeur moyenne des vecteurs de Poynting, sur une période  $T = 2\pi/\omega$  est

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2} \Im m(\sigma \cdot \vec{u}_s^*) \quad (1.87)$$

où  $\vec{u}_s$  est le vecteur déplacement,  $\sigma$  le tenseur des contraintes en un point situé sur  $C$  et où  $\Im m$  désigne la partie imaginaire de la quantité entre parenthèses. La conservation de l'énergie impose alors que le flux du vecteur de Poynting  $\bar{P}^+$  moyen relatif aux ondes convergentes soit égal au flux du vecteur de Poynting  $\bar{P}^-$  moyen relatif aux ondes divergentes. En notant respectivement  $\vec{n}_+$  et  $\vec{n}_-$  les normales unitaires entrantes et sortantes au cercle  $C$ , cela s'écrit

$$\int_C \bar{P}^- \cdot \vec{n}_- dl = \int_C \bar{P}^+ \cdot \vec{n}_+ dl . \quad (1.88)$$

$\vec{n}_+$  et  $\vec{n}_-$  étant des vecteurs unitaires radiaux, cette relation s'écrit en coordonnées polaires

$$\int_0^{2\pi} P_r^+ r d\theta + \int_0^{2\pi} P_r^- r d\theta = 0 , \quad (1.89)$$

où les intégrales sont évaluées toutes deux en champ lointain. En définissant ( $\phi$  et  $\psi$  seront précisés dans la suite)

$$u_{sx} = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (1.90)$$

et

$$u_{sy} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} , \quad (1.91)$$

les composantes suivant  $x$  et  $y$  du vecteur déplacement  $\vec{u}_s$ , et d'autre part

$$\sigma_{rr} = \lambda \Delta \phi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (1.92)$$

et

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{-2}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \Delta \psi - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) \quad (1.93)$$

( $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé), les composantes radiales et tangentielles au cercle  $C$  du tenseur des contraintes  $\sigma$ , la composante radiale des vecteurs de Poynting s'écrit de façon générale

$$P_r = \frac{\omega}{2} \Im m \left( \sigma_{rr} u_{sx}^* + \sigma_{r\theta} u_{sy}^* \right). \quad (1.94)$$

Il reste maintenant à évaluer à l'aide de cette dernière expression les composantes radiales des vecteurs de Poynting moyens entrants et sortants, notés respectivement  $P_r^+$  et  $P_r^-$ . En champ lointain, lorsque l'onde incidente est longitudinale, nous avons vu que le produit de la diffusion se répartit en

$$\Phi = \frac{(-1)^q}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{iq\theta} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LL} e^{iq\theta} \quad (1.95)$$

et

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\left(k_T r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_T r}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LT} e^{iq\theta}. \quad (1.96)$$

Le champ divergent a donc une composante longitudinale  $\Phi^-$  et une composante transversale  $\Psi^-$  données respectivement par

$$\Phi^- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LL} e^{iq\theta} \quad (1.97)$$

et

$$\Psi^- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\left(k_T r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_T r}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LT} e^{iq\theta}. \quad (1.98)$$

Le champ convergent est, lui, réduit à une seule composante longitudinale  $\Phi^+$  définie par

$$\Phi^+ = \frac{(-1)^q}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\left(k_L r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_L r}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{iq\theta}. \quad (1.99)$$

Le calcul de  $P_r^+$  est alors immédiat. Son développement asymptotique en champ lointain a en effet pour expression

$$P_r^+ \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\omega}{2} (\lambda + 2\mu) \Im m \left( \frac{\partial^2 \Phi^+}{\partial r^2} \frac{\partial \Phi^{+*}}{\partial r} \right), \quad (1.100)$$

ce qui peut se réduire à

$$P_r^+ \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\rho_s \omega^3}{4\pi r}. \quad (1.101)$$

Remarquons au passage que, en rapport avec la condition de rayonnement à l'infini de Sommerfeld, le vecteur de Poynting vérifie bien  $P_r^+ \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . Le calcul de  $P_r^-$  relatif au

champ divergent est plus compliqué en raison de ses deux contributions  $\Phi^-$  et  $\Psi^-$ . Sans présenter tous les détails de calcul, on montre que le développement asymptotique en champ lointain de  $P_r^-$  s'écrit

$$P_r^- \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\omega}{2} \Re e \left( (\lambda + 2\mu) k_L^2 |\Phi^-|^2 + \mu k_T^2 |\Psi^-|^2 \right), \quad (1.102)$$

soit, en développant,

$$P_r^- \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\rho_s \omega^3}{4\pi r} \left( \left| \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LL} e^{iq\theta} \right|^2 + \left| \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LT} e^{iq\theta} \right|^2 \right). \quad (1.103)$$

En reportant maintenant (1.101) et (1.103) dans l'équation intégrale (1.89), il vient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \left| \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LL} e^{iq\theta} \right|^2 + \left| \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LT} e^{iq\theta} \right|^2 \right) d\theta = 1, \quad (1.104)$$

avec

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LL} e^{iq\theta} \right|^2 d\theta = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LL} S_{pl}^{LL*} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i(q-l)\theta}|^2 d\theta = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |S_{pq}^{LL}|^2 \quad (1.105)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LT} e^{iq\theta} \right|^2 d\theta = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} S_{pq}^{LT} S_{pl}^{LT*} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{i(q-l)\theta}|^2 d\theta = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} |S_{pq}^{LT}|^2. \quad (1.106)$$

Finalement, loin des diffuseurs, la conservation des flux d'énergie à travers le cercle  $C$  conduit à

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left( |\hat{S}_{pq}^{LL}|^2 + |\hat{S}_{pq}^{LT}|^2 \right) = 1. \quad (1.107)$$

Dans le cas où l'onde incidente est de type transversal, la relation correspondante s'écrit

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left( |\hat{S}_{pq}^{TL}|^2 + |\hat{S}_{pq}^{TT}|^2 \right) = 1. \quad (1.108)$$

### **b) Construction de la matrice $S$**

Pour construire la matrice  $S$  à partir des éléments des matrices  $S^{LL}$ ,  $S^{TT}$ ,  $S^{LT}$  et  $S^{TL}$ , il faut s'assurer que la relation  $SS^+ = I_d$  vérifie également les relations de conservation des flux d'énergie définies par (1.107) et (1.108). La construction la plus naturelle consiste à ranger les quatre matrices blocs  $S^{LL}$ ,  $S^{TT}$ ,  $S^{LT}$  et  $S^{TL}$  dans une matrice  $2 \times 2$ , notée  $S_1$ , de la façon suivante :

$$S_1 = \begin{bmatrix} S^{LL} & S^{LT} \\ S^{TL} & S^{TT} \end{bmatrix}, \quad (1.109)$$

soit

$$S_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & S_{p-1p-1}^{LL} & S_{p-1p}^{LL} & S_{p-1p+1}^{LL} & \cdots \\ \cdots & S_{pp-1}^{LL} & S_{pp}^{LL} & S_{pp+1}^{LL} & \cdots \\ \cdots & S_{p+1p-1}^{LL} & S_{p+1p}^{LL} & S_{p+1p+1}^{LL} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & S_{p-1p-1}^{LT} & S_{p-1p}^{LT} & S_{p-1p+1}^{LT} & \cdots \\ \cdots & S_{pp-1}^{LT} & S_{pp}^{LT} & S_{pp+1}^{LT} & \cdots \\ \cdots & S_{p+1p-1}^{LT} & S_{p+1p}^{LT} & S_{p+1p+1}^{LT} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & S_{p-1p-1}^{TL} & S_{p-1p}^{TL} & S_{p-1p+1}^{TL} & \cdots \\ \cdots & S_{pp-1}^{TL} & S_{pp}^{TL} & S_{pp+1}^{TL} & \cdots \\ \cdots & S_{p+1p-1}^{TL} & S_{p+1p}^{TL} & S_{p+1p+1}^{TL} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & S_{p-1p-1}^{TT} & S_{p-1p}^{TT} & S_{p-1p+1}^{TT} & \cdots \\ \cdots & S_{pp-1}^{TT} & S_{pp}^{TT} & S_{pp+1}^{TT} & \cdots \\ \cdots & S_{p+1p-1}^{TT} & S_{p+1p}^{TT} & S_{p+1p+1}^{TT} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (1.110)$$

Les propriétés des produits de matrices blocs montrent que  $S_1 S_1^+ = I_d$  équivaut à écrire

$$S^{LL} S^{LL*} + S^{LT} S^{LT*} = I_d, \quad (1.111)$$

$$S^{TL} S^{TL*} + S^{TT} S^{TT*} = I_d, \quad (1.112)$$

$$S^{LL} S^{TL*} + S^{LT} S^{TT*} = 0, \quad (1.113)$$

$$S^{TL} S^{LL*} + S^{TT} S^{LT*} = 0. \quad (1.114)$$

Les deux premières relations matricielles (1.111) et (1.112) conduisent respectivement à (1.107) et à (1.108) ainsi qu'aux deux relations

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left( S_{pq}^{LL} S_{lq}^{LL*} + S_{pq}^{LT} S_{lq}^{LT*} \right) = 0 \quad \text{avec } p \neq l, \quad (1.115)$$

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left( S_{pq}^{TT} S_{lq}^{TT*} + S_{pq}^{TL} S_{lq}^{TL*} \right) = 0 \quad \text{avec } p \neq l, \quad (1.116)$$

qui, elles, ne peuvent pas être obtenues par une relation de conservation de l'énergie. Les deux relations matricielles (1.113) et (1.114) fournissent, quant à elles, les relations suivantes :

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left( S_{pq}^{LL} S_{lq}^{TL*} + S_{pq}^{LT} S_{lq}^{TT*} \right) = 0 \quad \forall p \text{ et } l, \quad (1.117)$$

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left( S_{pq}^{TL} S_{lq}^{LL*} + S_{pq}^{TT} S_{lq}^{LT*} \right) = 0 \quad \forall p \text{ et } l. \quad (1.118)$$

Si les quatre dernières relations ne sont pas justifiées par une relation de conservation d'énergie, elles ont été néanmoins vérifiées numériquement pour différentes cibles. Dans le cas où la cible n'est composée que d'un seul diffuseur, l'absence de conversions  $p \rightarrow q$  (avec  $p \neq q$ ) entre les états entrants et sortants conduit aux relations

$$\left| \hat{S}_{pp}^{LL} \right|^2 + \left| \hat{S}_{pp}^{LT} \right|^2 = 1, \quad (1.119)$$

$$\left| \hat{S}_{pp}^{TL} \right|^2 + \left| \hat{S}_{pp}^{TT} \right|^2 = 1, \quad (1.120)$$

$$S_{pp}^{LL} S_{pp}^{TL*} + S_{pp}^{LT} S_{pq}^{TT*} = 0, \quad (1.121)$$

$$S_{pp}^{TL} S_{pp}^{LL*} + S_{pp}^{TT} S_{pp}^{LT*} = 0, \quad (1.122)$$

qui peuvent être regroupées dans la relation matricielle

$$\tilde{S}_{pp} \tilde{S}_{pp}^+ = I_d, \quad (1.123)$$

où  $\tilde{S}_{pp}$  est une matrice bloc  $2 \times 2$  définie par

$$\tilde{S}_{pp} = \begin{bmatrix} S_{pp}^{LL} & S_{pp}^{LT} \\ S_{pp}^{TL} & S_{pp}^{TT} \end{bmatrix}. \quad (1.124)$$

En prenant en compte tous les modes  $p$ , la matrice  $S_2$  pour un diffuseur seul s'écrit sous la forme d'une matrice diagonale dont les éléments sont les matrices blocs  $\tilde{S}_{pp}$ . Elle s'écrit donc

$$S_2 = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \cdots & \tilde{S}_{p-1p-1} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \tilde{S}_{pp} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \tilde{S}_{p+1p+1} & \cdots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (1.125)$$

soit

$$S_2 = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \vdots & & & & \\ & & \vdots & & & \\ \dots & \begin{bmatrix} S_{p-1p-1}^{LL} & S_{p-1p-1}^{LT} \\ S_{p-1p-1}^{TL} & S_{p-1p-1}^{TT} \end{bmatrix} & & 0 & & \dots \\ \dots & 0 & & \begin{bmatrix} S_{pp}^{LL} & S_{pp}^{LT} \\ S_{pp}^{TL} & S_{pp}^{TT} \end{bmatrix} & & \dots \\ \dots & 0 & & 0 & & \begin{bmatrix} S_{p+1p+1}^{LL} & S_{p+1p+1}^{LT} \\ S_{p+1p+1}^{TL} & S_{p+1p+1}^{TT} \end{bmatrix} & \dots \\ \ddots & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.126)$$

Le produit  $S_2 S_2^+$  donne alors

$$S_2 S_2^+ = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ \dots & \tilde{S}_{p-1p-1} \tilde{S}_{p-1p-1}^+ & & 0 & & \dots \\ \dots & 0 & & \tilde{S}_{pp} \tilde{S}_{pp}^+ & & \dots \\ \dots & 0 & & 0 & & \tilde{S}_{p+1p+1} \tilde{S}_{p+1p+1}^+ & \dots \\ \ddots & & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.127)$$

où chaque élément de la diagonale vérifie bien (1.119), (1.120), (1.121) et (1.122). Lorsque  $N > 1$ , les conversions  $p \rightarrow q$  (avec  $p \neq q$ ) apparaissent hors de la diagonale de  $S_2$  au travers de matrices  $2 \times 2$  définies par

$$\tilde{S}_{pq} = \begin{bmatrix} S_{pq}^{LL} & S_{pq}^{LT} \\ S_{pq}^{TL} & S_{pq}^{TT} \end{bmatrix}. \quad (1.128)$$

Dans ce cas, nous voyons que les relations (1.107), (1.108), (1.117) et (1.118) sont obtenues si l'on écrit

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \tilde{S}_{pq} \tilde{S}_{pq}^+ = I_d, \quad (1.129)$$

cette relation découlant de l'unitarité de  $S_2$  qui est alors définie par

$$S_2 = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ \dots & \tilde{S}_{p-1p-1} & \tilde{S}_{p-1p} & \tilde{S}_{p-1p+1} & & \dots \\ \dots & \tilde{S}_{pp-1} & \tilde{S}_{pp} & \tilde{S}_{pp+1} & & \dots \\ \dots & \tilde{S}_{p+1p-1} & \tilde{S}_{p+1p} & \tilde{S}_{p+1p+1} & & \dots \\ \ddots & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad (1.130)$$

c'est-à-dire



$$S_2 = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \ddots \\ \dots & \begin{bmatrix} S_{p-1p-1}^{LL} & S_{p-1p-1}^{LT} \\ S_{p-1p-1}^{TL} & S_{p-1p-1}^{TT} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{p-1p}^{LL} & S_{p-1p}^{LT} \\ S_{p-1p}^{TL} & S_{p-1p}^{TT} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{p-1p+1}^{LL} & S_{p-1p+1}^{LT} \\ S_{p-1p+1}^{TL} & S_{p-1p+1}^{TT} \end{bmatrix} & \dots & \\ \dots & \begin{bmatrix} S_{pp-1}^{LL} & S_{pp-1}^{LT} \\ S_{pp-1}^{TL} & S_{pp-1}^{TT} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{pp}^{LL} & S_{pp}^{LT} \\ S_{pp}^{TL} & S_{pp}^{TT} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{pp+1}^{LL} & S_{pp+1}^{LT} \\ S_{pp+1}^{TL} & S_{pp+1}^{TT} \end{bmatrix} & \dots & \\ \dots & \begin{bmatrix} S_{p+1p-1}^{LL} & S_{p+1p-1}^{LT} \\ S_{p+1p-1}^{TL} & S_{p+1p-1}^{TT} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{p+1p}^{LL} & S_{p+1p}^{LT} \\ S_{p+1p}^{TL} & S_{p+1p}^{TT} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} S_{p+1p+1}^{LL} & S_{p+1p+1}^{LT} \\ S_{p+1p+1}^{TL} & S_{p+1p+1}^{TT} \end{bmatrix} & \dots & \\ \ddots & & & & & \ddots \end{bmatrix}. \quad (1.131)$$

$S_2$  est donc une deuxième construction possible de la matrice de diffusion. Les propriétés d'unitarité et de réciprocity des matrices  $S_1$  et  $S_2$  ont été numériquement vérifiées pour différentes cibles. Les temps de calcul nécessaires à la vérification de leur unitarité sont fournis dans l'Annexe 2. Si  $S_1$  est la construction qui vient immédiatement à l'esprit, la matrice  $S_2$  a une structure mieux adaptée à une étude des résonances de la cible puisque chacun de ses éléments est une matrice bloc 2x2 prenant en compte à la fois les conversions des modes de vibration et les conversions entre les ondes longitudinales et transversales. D'autre part, la matrice  $S_2$  paraît *a posteriori* être la construction la plus naturelle puisqu'elle n'est que la matrice dégénérée de la matrice de diffusion diagonale d'une seule inclusion. A noter que la matrice  $S_2$  peut se déduire de  $S_1$  à l'aide de la transformation

$$S_2 = RS_1R^t \quad (1.132)$$

( $R^t$  est la matrice transposée de  $R$ ) dans laquelle  $R$  est une matrice réelle orthogonale vérifiant  $RR^t = I_d$ . Numériquement, lorsque leur unitarité est vérifiée, les deux matrices  $S_1$  et  $S_2$  sont des matrices carrées tronquées à  $p = p_{max}$  et  $q = q_{max}$  avec  $p_{max} = q_{max}$ . La matrice  $R$  est alors une matrice carrée  $M \times M$  (avec  $M = 2(2p_{max}+1)$ ) s'écrivant

$$R = X + PXP, \quad (1.133)$$

les éléments des matrices  $X$  et  $P$  étant définis par

$$P_{nm} = \delta_{nM+1-m}, \quad P_{nm} = \delta_{n2m-1} \quad (1.134)$$

avec  $\delta$  le symbole de Kronecker (et  $1 \leq n \leq M$ ,  $1 \leq m \leq M$ ).

### III. ÉTUDE NUMÉRIQUE DES INTERACTIONS ACOUSTIQUES

Bien que la théorie de la diffusion multiple développée dans la précédente section soit applicable à des cibles plus complexes (comportant un grand nombre d'inclusions différentes les unes des autres quant à leurs tailles ou/et à leurs compositions), nous allons restreindre cette étude numérique à des cibles ne comportant pas plus de trois inclusions. Celles-ci seront toutes identiques dans une cible donnée, renfermant soit de l'air soit de l'eau. Nous verrons que les conclusions tirées de l'étude limitée à trois inclusions identiques ne perdent rien en généralité. Le choix de ces cibles est en outre conditionné par les temps de calcul qui croissent de façon très importante quand le nombre  $N$  de diffuseurs augmente (voir Annexe 2). Au-delà de  $N=3$ , les temps de calcul nécessaires à la vérification de l'unitarité de la matrice  $S$  empêchent une vérification systématique des calculs des champs diffusés.

Cette étude numérique est menée pour des inclusions de rayon  $a=1$  mm dans un solide en aluminium dont les caractéristiques mécaniques sont les suivantes :

- masse volumique :  $\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,
- célérité des ondes longitudinales :  $c_L = 6380 \text{ m/s}$ ,
- célérité des ondes transversales :  $c_T = 3140 \text{ m/s}$ .

Le choix de ce matériau sera définitif pour toutes nos études ultérieures, qu'elles soient théoriques ou expérimentales. En présence d'inclusions d'eau, les caractéristiques mécaniques de l'eau sont celles correspondant à une température de  $25^\circ\text{C}$ , soit :

- masse volumique :  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,
- célérité des ondes de volume :  $c_f = 1494 \text{ m/s}$ .

Les inclusions d'air sont assimilées au vide (ce qui a été numériquement justifié dans les gammes fréquentielles explorées) dans le but de diminuer les temps de calcul.

L'objectif poursuivi est double : d'une part identifier la nature de l'interaction dominante (interférentielle ou résonante) entre les inclusions en fonction de leurs compositions (air ou eau) et de la distance qui les sépare, et d'autre part déterminer si l'interaction résonante en milieu élastique se traduit par les mêmes observations qu'en milieu fluide, à savoir l'émergence de nouvelles résonances dont le nombre est en relation avec le nombre de diffuseurs constitutifs de la cible. Pour détecter les résonances des différentes cibles, nous nous baserons en premier lieu sur l'analyse des spectres de diffusion, définis par les tracés des fonctions de forme en champ lointain (1.47) et (1.48) en fonction de la fréquence. L'existence de résonances y est mise en évidence par la présence de minima d'amplitude sur les spectres de

diffusion correspondant chacun à une dissipation d'une partie de l'énergie rayonnée quand la cible résonne.

Une autre méthode de détection plus performante [18,19], basée sur l'analyse des diagrammes d'Argand, sera utilisée de façon plus systématique. Les diagrammes d'Argand sont les représentations paramétriques des amplitudes de diffusion dans le plan complexe en fonction de la fréquence. Lorsque les fréquences de résonance sont suffisamment éloignées les unes des autres, le diagramme décrit autour de chacune d'elles une trajectoire circulaire. A pas fréquentiel constant, la disposition des points sur chacun de ces cercles obéit à une répartition non équidistante ; la fréquence pour laquelle la vitesse de l'abscisse curviligne autour du cercle atteint sa valeur maximale correspond précisément à la fréquence de résonance cherchée. Le tracé de la dérivée de l'abscisse curviligne en fonction de la fréquence, appelé usuellement spectre des résonances, présente alors une série de maxima coïncidant chacun avec une résonance. Cependant, au cours de notre étude, nous avons constaté que cette méthode échouait lorsque des résonances étaient très proches les unes des autres. Cette méthode de détection n'a donc pas été suivie.

En utilisant les propriétés du diagramme d'Argand, on peut montrer que les fréquences de résonance correspondent également aux maxima de la dérivée par rapport à la fréquence de la phase des amplitudes de diffusion [19]. Par rapport à la dérivée de l'abscisse curviligne, la dérivée de la phase est un outil d'analyse de la diffusion résonante plus performant. Entre autres choses, elle a la propriété de pouvoir séparer des résonances très voisines les unes des autres. Cette propriété a été observée en plusieurs occasions au cours de cette étude. C'est donc en raison de ce pouvoir séparateur que nous avons adopté cet outil plutôt que le tracé de la dérivée de l'abscisse curviligne. Nous appellerons donc désormais spectres des résonances les tracés en fonction de la fréquence des dérivées des phases des amplitudes de diffusion (1.43) et (1.44).

Pour un confort de lecture et pour faciliter la comparaison des différents résultats, tous les spectres sont tracés en fonction de la fréquence réduite  $x_L$ , que l'on s'intéresse aux champs diffusés de type longitudinal ou transversal. Les résultats sont d'autre part donnés pour un calcul en rétrodiffusion. En d'autres termes, nous nous intéressons aux champs diffusés dans la même direction (mais en sens inverse) que la direction d'excitation :  $\theta = \alpha_{inc} - \pi$ . La Figure

---

[18] S. Derible, *Caractérisation complète des résonances acoustiques par une nouvelle méthode fondée sur le diagramme d'Argand*, Thèse de Doctorat, Université du Havre, 1995.

[19] S. Derible, P. Rembert et J.-L. Izbicki, *Experimental determination of acoustic resonance width via the Argand Diagram*, *Acustica* 84, pp. 270-279, 1998.

1.5 présente les quatre cibles étudiées. Le point P y représente le point d'observation, et  $\beta$  le paramètre sans dimension caractérisant l'écartement entre les centres de deux inclusions.  $a$  étant le rayon de toutes les inclusions, celles-ci sont donc espacées d'une distance  $\beta a$ . Si deux inclusions sont en contact,  $\beta=2$ .

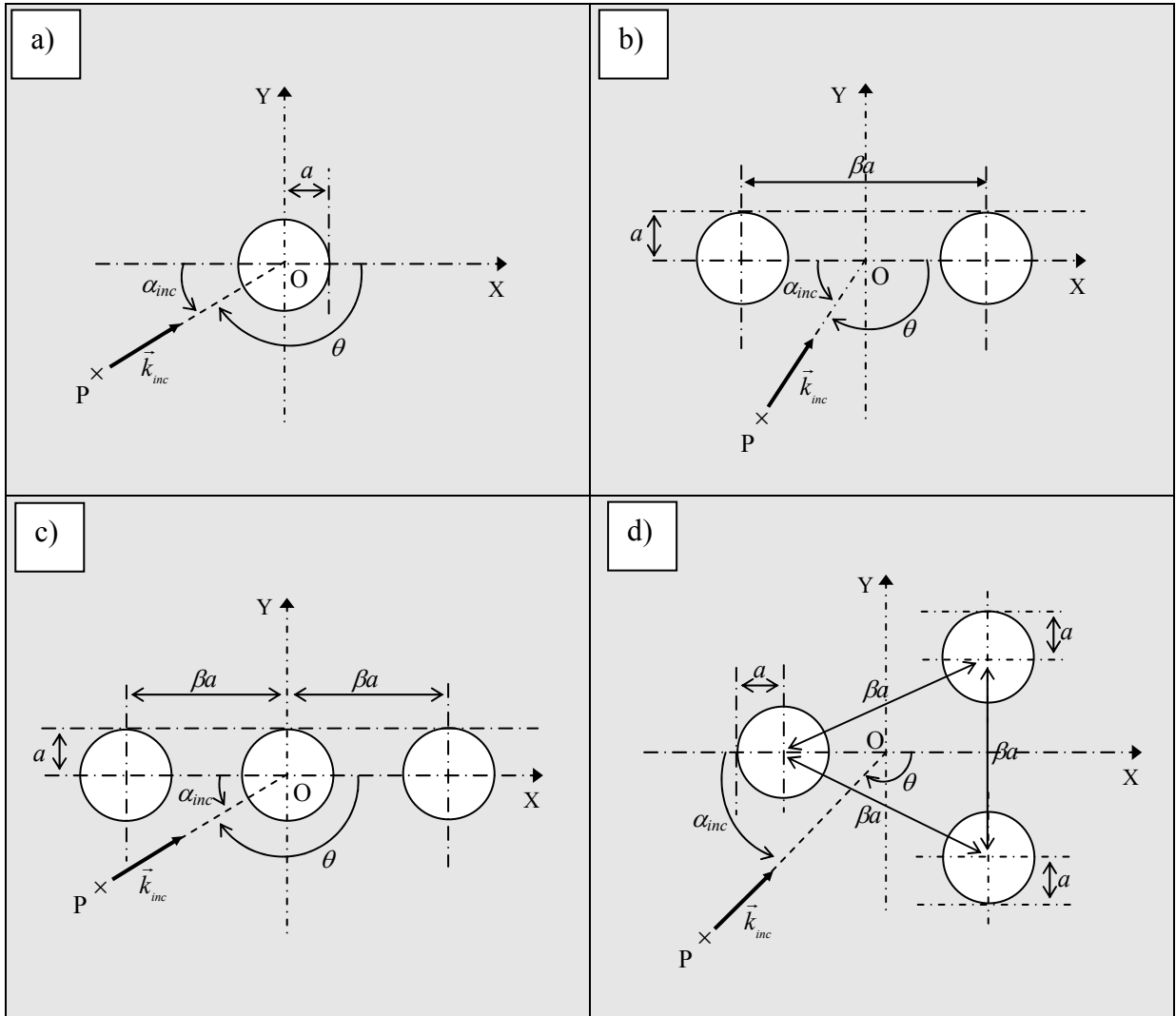


Figure 1.5 : Configurations géométriques des quatre cibles étudiées :

- a) Une inclusion,
- b) Deux inclusions identiques,
- c) Trois inclusions identiques alignées et équidistantes,
- d) Trois inclusions identiques et équidistantes disposées aux sommets d'un triangle équilatéral.

### III.1 Identification et analyse des interactions entre les inclusions d'air

#### III.1.1 Résultats acquis sur la diffusion par une inclusion d'air

Le problème de la diffusion par une inclusion d'air cylindrique a récemment été étudié dans le cas d'un milieu solide en polyéthylène caractérisé par  $c_L = 1950$  m/s et  $c_T = 540$  m/s [6]. Il a été montré que les ondes circonférentielles se propageant à l'interface externe de l'inclusion peuvent être classifiées en deux groupes : les ondes de Franz et les ondes de Rayleigh. Les ondes de Franz sont de deux types : les ondes de Franz longitudinales et transversales dont les vitesses de phase tendent respectivement en haute fréquence vers  $c_L$  et  $c_T$ . Ces ondes sont caractérisées toutes deux par une forte atténuation ne leur permettant pas de résonner significativement autour de l'inclusion, voire même d'interférer avec l'onde spéculaire réfléchie par l'inclusion. L'onde de Rayleigh, dont la vitesse de phase est proche de celle de l'onde de Rayleigh se propageant à une interface plane vide/solide, est moins atténuée que les ondes de Franz. Elle reste cependant encore trop atténuée pour résonner suffisamment puisque seule une forte interaction interférentielle avec l'onde spéculaire est observable sur les spectres de diffusion.

La Figure 1.6 de la page suivante présente les spectres de rétrodiffusion  $L \rightarrow L$  et  $T \rightarrow T$  dans notre cas où le milieu solide est de l'aluminium. Il a été vérifié que les champs rétrodiffusés issus des conversions  $L \rightarrow T$  et  $T \rightarrow L$  sont nuls. Par rapport à l'étude citée ci-dessus, le spectre de rétrodiffusion  $L \rightarrow L$  n'a plus tout à fait la même allure. Dans le cas du polyéthylène, l'amplitude atteint rapidement une valeur constante en haute fréquence. Ici, le spectre présente des oscillations périodiques sur tout le domaine fréquentiel  $0 \leq x_L \leq 5$ , ressemblant à celui d'un cylindre rigide immergé dans un fluide. Cette évolution résulte d'une interaction interférentielle entre les ondes de Franz longitudinales et l'onde spéculaire. Comme l'onde spéculaire est de polarisation longitudinale, seules ces ondes de Franz de même polarisation sont de nature à interférer avec l'onde réfléchie. La période de ces oscillations, valant  $\Delta x_L = 1,10$ , peut être calculée en considérant les parcours des rayonnements mis en jeu dans ce phénomène interférentiel. Ces parcours, notés A et B, sont présentés schématiquement sur la Figure 1.7.

[6] J.-L. Izbicki, J.-M. Conoir et N. Veksler, *New results for Franz and Rayleigh waves propagating around a cylindrical vacuum / solid interface*, Wave Motion 28, pp. 227-239, 1998.

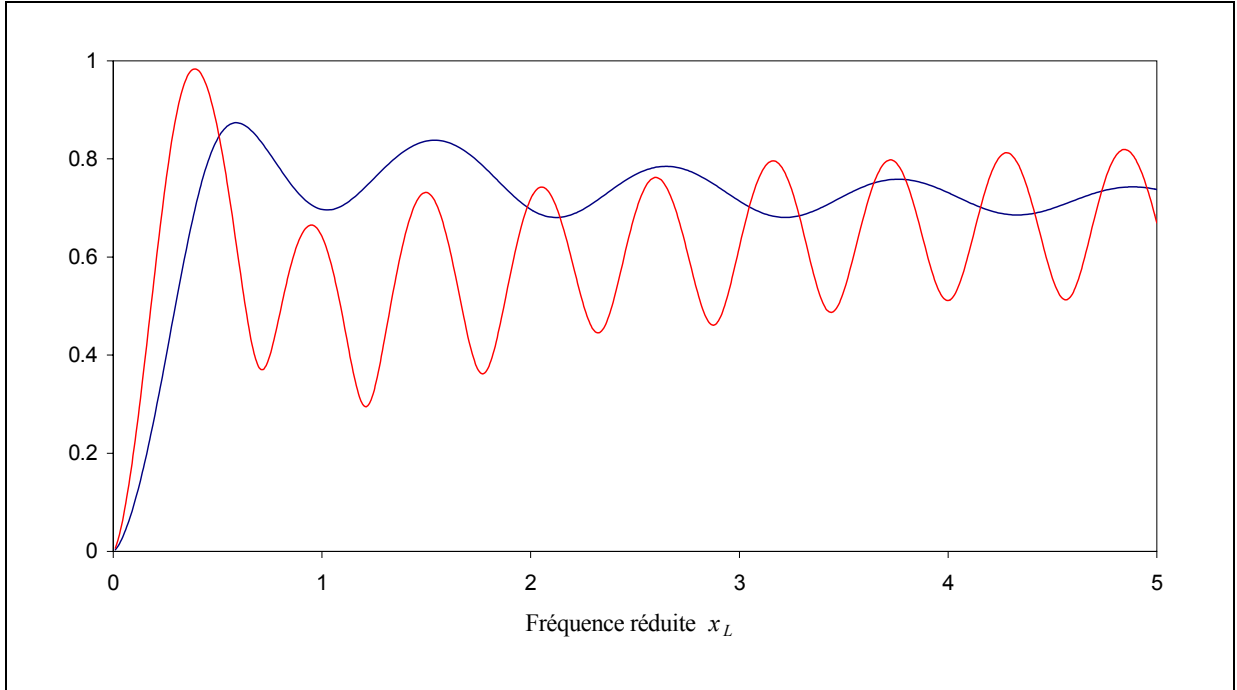


Figure 1.6 : Spectres de rétrodiffusion  $L \rightarrow L$  (bleu) et  $T \rightarrow T$  (rouge) d'une inclusion d'air.

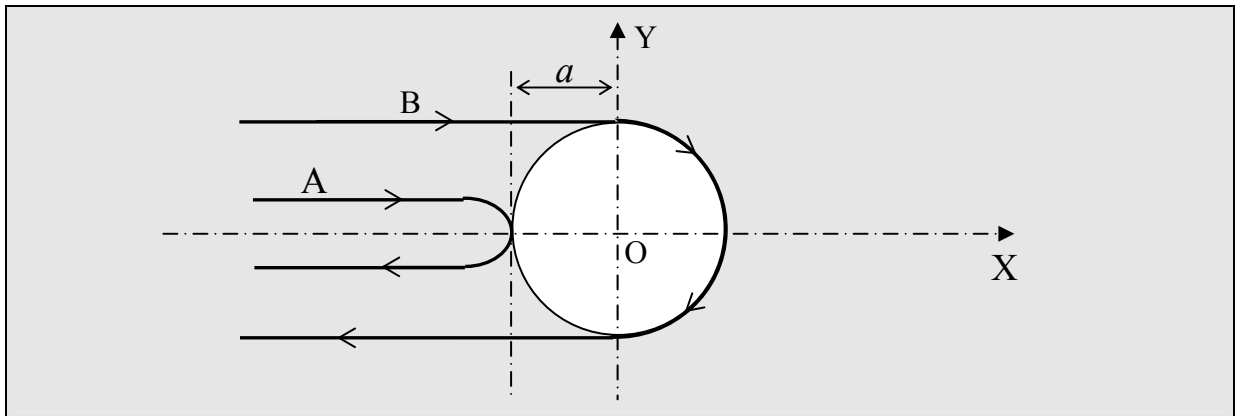


Figure 1.7 : Parcours A et B des rayonnements associés à l'interaction interférentielle lors de la rétrodiffusion par une inclusion d'air.

Le parcours A correspond à celui de l'onde spéculaire. Le parcours B est associé à la propagation des ondes de Franz longitudinales sur l'interface courbe de l'inclusion avec une vitesse de phase proche de  $c_L$ . Comme ces ondes circonférentielles sont excitées quasi tangentielle-ment à l'inclusion, elles parcourent une distance  $\pi a$  autour de celle-ci avant de venir interférer avec l'onde spéculaire. Par suite, il y a interférence constructive lorsque  $\pi a + 2a = n\lambda_L$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). La période des oscillations exprimée en fréquence réduite  $x_L$  est donc donnée par

$$\Delta x_L = \frac{2\pi}{\pi + 2}.$$

Numériquement, il vient  $\Delta x_L = 1,22$ . La légère différence entre cette période calculée et celle mesurée sur le spectre vient de ce que nous avons légèrement surestimé la vitesse de phase des ondes de Franz longitudinales qui est légèrement inférieure à  $c_L$ . La valeur de la période calculée devrait donc être en deçà de 1,22, se rapprochant ainsi de celle mesurée. Pour le polyéthylène, ces interférences ne sont pas observables sur les spectres de rétrodiffusion laissant supposer que les ondes de Franz sont d'autant plus atténuées que le solide est de faible densité.

Lorsque l'inclusion est excitée par une onde transversale, l'amplitude sur le spectre de rétrodiffusion  $T \rightarrow T$  oscille également de façon périodique. La période de ces oscillations est précisément deux fois plus petite que celle mesurée sur le spectre de rétrodiffusion  $L \rightarrow L$ , soit  $\Delta x_L = 0,55$ . Ces oscillations périodiques sont régies par le même phénomène interférentiel que le précédent. Il met cette fois-ci en jeu l'onde spéculaire de type transversal et l'onde de Rayleigh de polarisation principalement transversale se propageant autour de l'inclusion avec une vitesse de phase très proche de  $c_T$ . Comme les ondes de Franz, l'onde de Rayleigh est excitée quasi tangentiellement à l'inclusion. La distance parcourue par l'onde à l'interface de l'inclusion est également  $\pi a$  et la période des oscillations exprimées en fréquence réduite  $x_L$  est alors

$$\Delta x_L = \frac{c_T}{c_L} \frac{2\pi}{\pi + 2},$$

ce qui correspond à  $\Delta x_L = 0,60$ . Ici encore, la légère différence avec la période mesurée vient de ce que l'onde de Rayleigh se propage avec une vitesse de phase légèrement inférieure à  $c_T$ . Au vu de l'expression de  $\Delta x_L$ , si cette période correspond à la moitié de celle observée pour la rétrodiffusion  $L \rightarrow L$ , c'est en raison du rapport  $c_T/c_L$ , proche de 0,5. Si l'on traçait les spectres  $L \rightarrow L$  et  $T \rightarrow T$  respectivement en fonction de  $x_L$  et  $x_T$ , tous deux présenteraient la même périodicité.

En conclusion à ce paragraphe, il faut retenir que, quel que soit le milieu solide considéré, le champ diffusé par une inclusion d'air n'est jamais notablement affecté par les éventuelles résonances des ondes de Franz ou de Rayleigh. Le deuxième point à retenir est que l'onde de Rayleigh est caractérisée par une atténuation plus faible que celles des ondes de Franz puisque, dans le cas du polyéthylène, ces dernières n'interfèrent pas avec l'onde spéculaire. Dans le cas de l'aluminium, même si toutes les ondes circonférentielles sont suscepti-

bles d'interférer avec l'onde spéculaire, ce dernier point reste vrai. Par conséquent, dans le cas d'une cible constituée de deux inclusions très proches l'une de l'autre, un éventuel couplage entre les ondes circonférentielles se propageant autour de chacune des inclusions a plus de chance de se produire par l'intermédiaire de l'onde de Rayleigh. Comme cette onde a principalement une polarisation transversale, seule la composante transversale du champ diffusé sera affectée par l'onde de Rayleigh. C'est la raison pour laquelle nous allons considérer dans la suite la diffusion d'une onde incidente transversale et examinerons seulement la composante transversale du champ diffusé.

### III.1.2 Interaction entre deux inclusions d'air

La Figure 1.8 présente le spectre de rétrodiffusion  $T \rightarrow T$  et le spectre des résonances associé pour la cible constituée de deux inclusions décrite sur la Figure 1.5. Ces spectres sont obtenus pour des inclusions quasiment en contact,  $\beta = 2,05$ , et pour un angle d'incidence nul. Cette configuration, dite en « éclipse », correspond à des inclusions alignées dans l'axe de la direction de propagation de l'onde incidente. Comparativement à celui d'une seule inclusion, le spectre de rétrodiffusion ne présente plus d'oscillations périodiques. L'amplitude évolue plus vite, de façon irrégulière, et présente une série de minima bien marqués. A chacun de ses minima correspond des maxima sur le spectre des résonances. Comme attendu, la dérivée de phase est donc maximale lorsque la fonction de forme en champ lointain est minimale, ce qui donne à penser que chaque maximum correspond à une fréquence résonance de la cible. Pour s'assurer du comportement résonant de la cible, examinons le diagramme d'Argand autour d'une de ces fréquences particulières.

La Figure 1.9 présente le spectre des résonances et le diagramme d'Argand associé dans le domaine fréquentiel  $0,7 \leq x_L \leq 1,3$ . La dérivée de phase  $y$  est maximale à  $x_L = 1,01$ . Si ce maximum observé sur le spectre des résonances correspond à une résonance particulière de la cible, le diagramme d'Argand doit alors vérifier trois propriétés [18,19] : i) la trajectoire décrite par le diagramme autour de la fréquence de résonance est circulaire (dans le cas de ré-

---

[18] S. Derible, *Caractérisation complète des résonances acoustiques par une nouvelle méthode fondée sur le diagramme d'Argand*, Thèse de Doctorat, Université du Havre, 1995.

[19] S. Derible, P. Rembert, J.-L. Izbicki, *Experimental determination of acoustic resonance width via the Argand Diagram*, *Acustica* 84, pp. 270-279, 1998.



sonances bien isolées les unes des autres) ; ii) le parcours du cercle à fréquence croissante se fait dans le sens trigonométrique ; iii) la fréquence pour laquelle la vitesse de l'abscisse curviligne est maximale correspond à la fréquence de résonance.

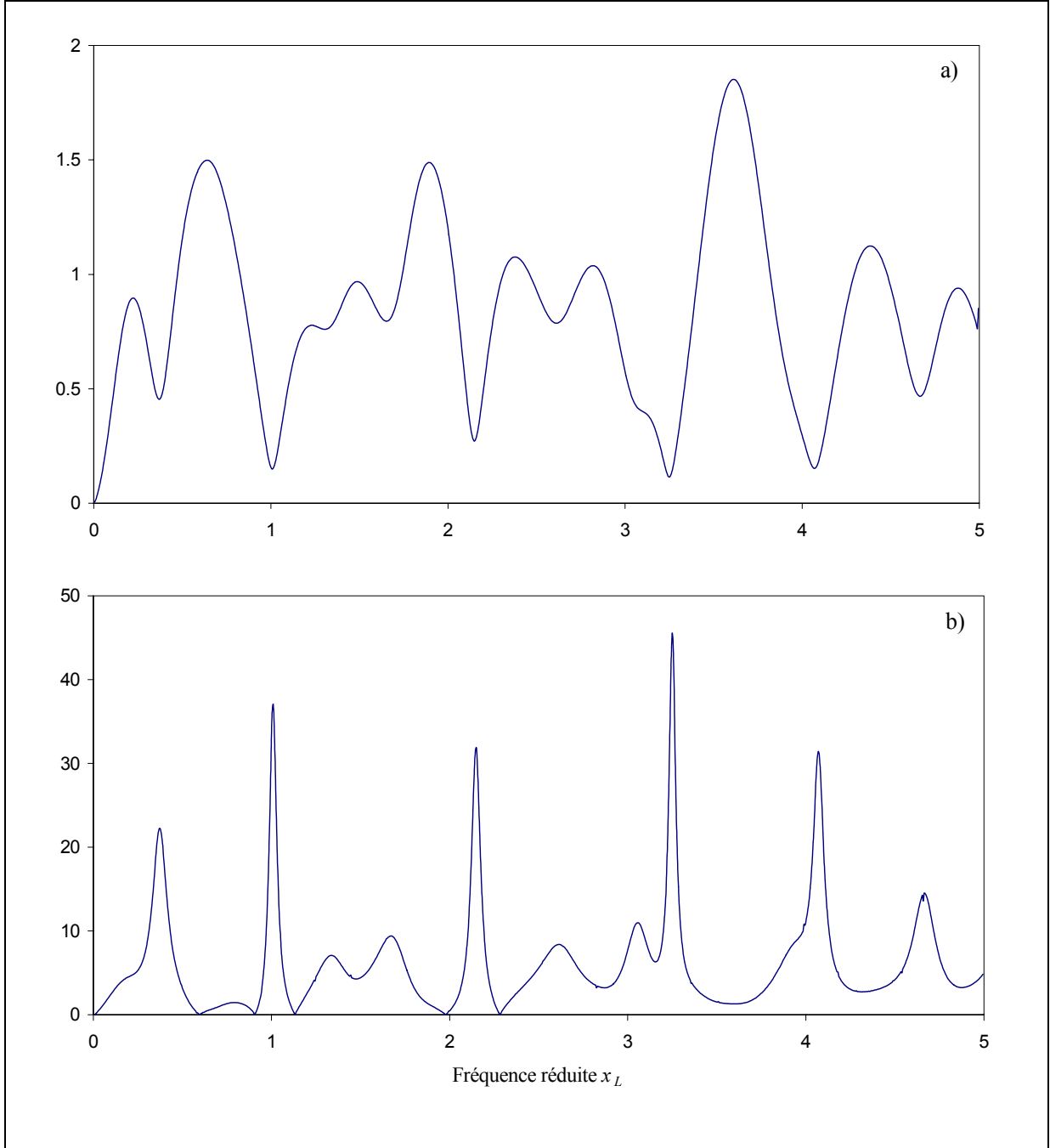


Figure 1.8 : Rétrodiffusion  $T \rightarrow T$  pour deux inclusions d'air ( $\beta = 2,05$ ) dans une configuration en éclipse.

a) Spectre de rétrodiffusion, b) spectre des résonances associé.

Le diagramme d'Argand présenté ci-dessous contredit ces trois propriétés : la trajectoire n'est pas circulaire alors que le maximum de la dérivée de phase à  $x_L = 1,01$  est bien isolé des autres maxima ; le parcours de la trajectoire à fréquence croissante se fait dans le sens opposé du sens trigonométrique ; la fréquence  $x_L = 1,01$  ne correspond pas à un taux de croissance maximal de la fréquence.

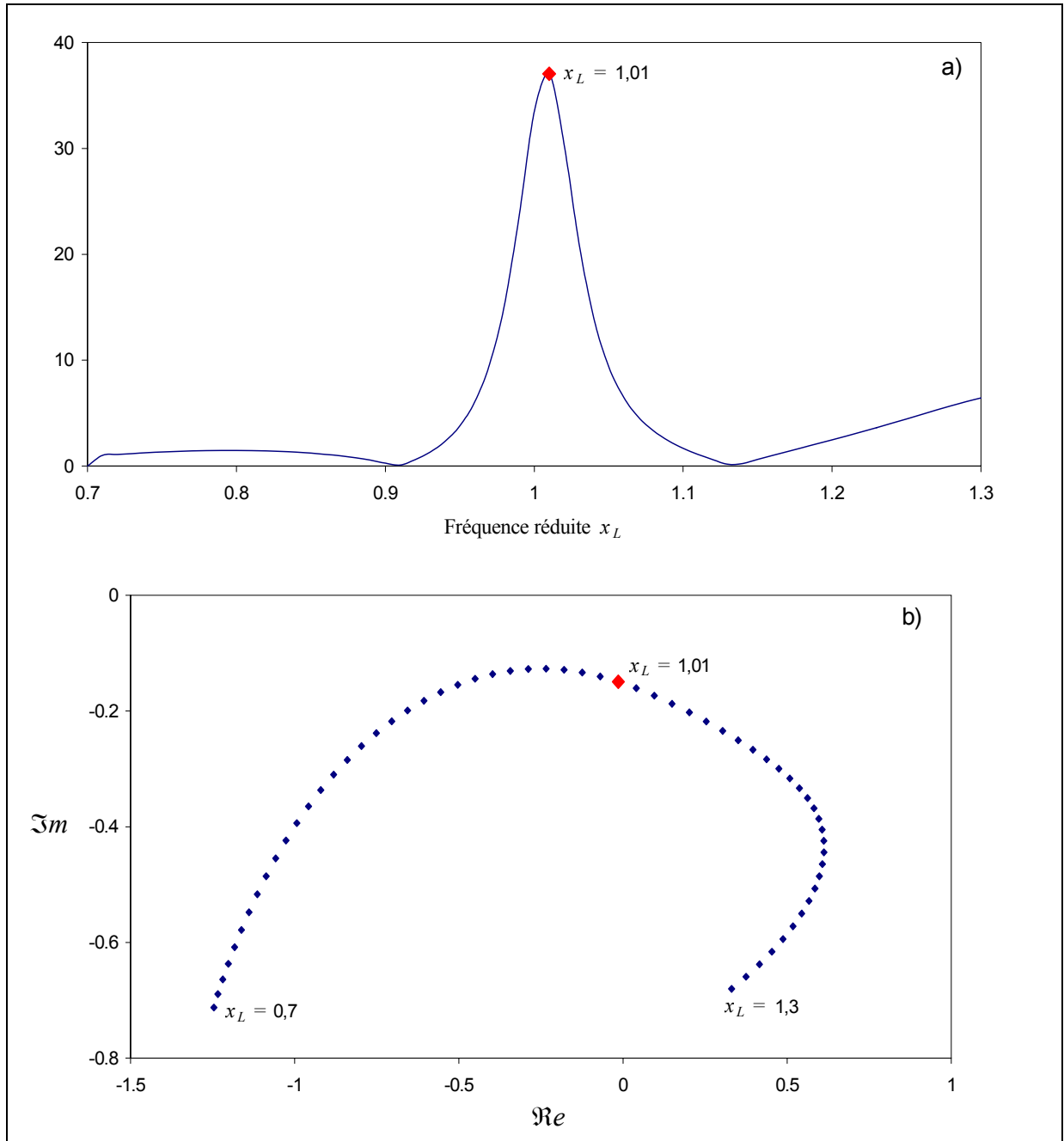


Figure 1.9 : Rétrodiffusion  $T \rightarrow T$  pour deux inclusions d'air ( $\beta = 2,05$ ) dans une configuration en éclipse.

a) Spectre des résonances pour  $0,7 \leq x_L \leq 1,3$ , b) diagramme d'Argand associé.

Si on analysait les diagrammes d'Argand autour de chaque maximum de la dérivée de phase, les mêmes observations seraient faites. Par conséquent, même si l'allure de la dérivée de phase invite à penser à un comportement résonant de la cible, ces dernières observations suggèrent plutôt qu'on a affaire à des phénomènes de type interférentiel.

Pour faire apparaître clairement ces phénomènes interférentiels sur les spectres de rétrodiffusion, il faut considérer de plus grandes distances entre les inclusions. Les deux spectres présentés sur la Figure 1.10 sont obtenus pour  $\beta = 10$  et  $\beta = 20$ .

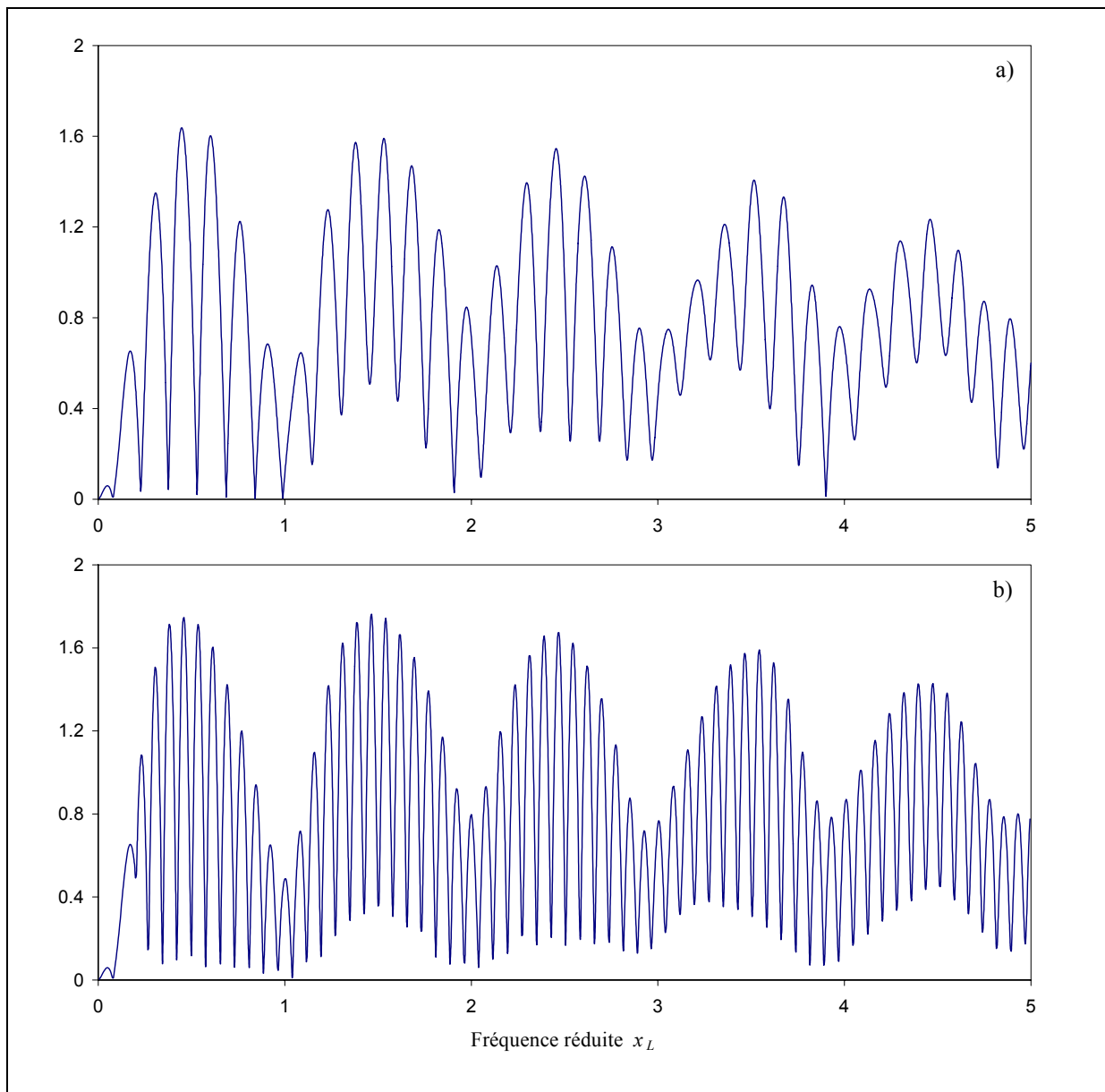


Figure 1.10 : Spectres de rétrodiffusion  $T \rightarrow T$  pour deux inclusions d'air dans une configuration en éclipse.

a) Cas  $\beta = 10$ , b) cas  $\beta = 20$ .

Chacun des deux spectres présente des oscillations périodiques dont les amplitudes sont modulées par une enveloppe de période beaucoup plus grande. Ces spectres, qui ont déjà été observés dans le cas de deux tubes élastiques immergés dans l'eau [5], sont caractéristiques d'une interaction interférentielle entre les deux inclusions. On constate que la période des oscillations rapides diminue de moitié lorsque l'on double la distance entre les deux inclusions : pour  $\beta = 10$ , elle vaut  $\Delta x_L = 0,15$  ; pour  $\beta = 20$ , on a  $\Delta x_L = 0,075$ . La période de l'enveloppe (qui est à peu près égale à l'unité) reste par contre inchangée quand  $\beta$  varie. Ceci suggère que l'enveloppe est liée à la réémission d'une inclusion seule et que les oscillations plus rapides sont liées aux réémissions mutuelles entre les deux inclusions.

La Figure 1.11 présente schématiquement les parcours géométriques A et B des rayonnements supposés être associés à l'interaction interférentielle. Les inclusions sont numérotées 1 et 2 pour faciliter la description du phénomène, l'inclusion 1 étant celle soumise à l'onde incidente transversale. Lorsque l'inclusion 1 est excitée, l'onde de Rayleigh et les ondes de Franz transversales sont excitées quasi tangentiellement à l'inclusion puis se propagent autour de celle-ci. Ces ondes circonférentielles réémettent dans toutes les directions et en particulier en direction de l'inclusion 2 qui réfléchit à son tour les ondes en direction de l'inclusion 1. Les ondes qui ont finalement parcouru un aller-retour entre les deux inclusions interfèrent alors avec l'onde spéculaire réfléchiée par l'inclusion 1 (parcours A). A noter qu'un seul parcours B a été représenté sur la Figure 1.10 par souci de clarté.

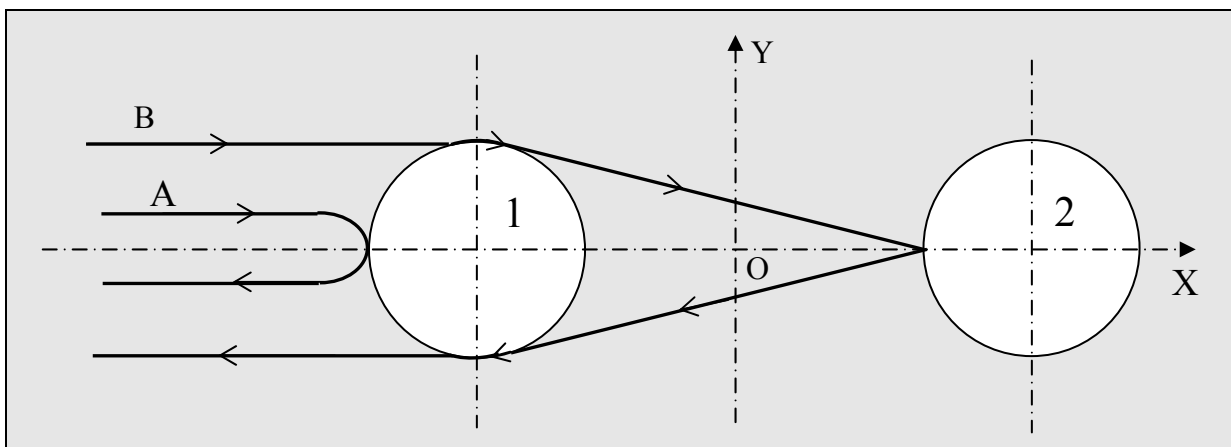


Figure 1.11 : Parcours A et B des rayonnements associés à l'interaction interférentielle entre deux inclusions d'air.

[5] Elm. Kheddioui, J.-M. Conoir, P. Pareige et J.-L. Izbicki, *Resonant scattering by two elastic cylindrical shells*, ACUSTICA-acta acustica 84, pp. 980-986, 1998.

Il y a en réalité deux parcours B distincts :  $B_R$  et  $B_F$ . Le parcours  $B_R$  est associé à l'onde de Rayleigh qui a parcouru une faible distance sur l'interface courbe de l'inclusion 1 avec une vitesse de phase proche de  $c_T$ . Le parcours  $B_F$  est, lui, associé à l'onde de Franz transversale, la moins atténuée, qui a parcouru une distance légèrement différente sur cette interface, avec une vitesse de phase légèrement inférieure à celle des ondes de Rayleigh. Les oscillations rapides observées sur les deux spectres de la Figure 1.11 sont donc associées au parcours A et B, et l'enveloppe de grande période aux parcours  $B_R$  et  $B_F$ . Pour s'en convaincre, le spectre de rétrodiffusion pour  $\beta=20$  a été de nouveau calculé en remplaçant le milieu solide par un fluide équivalent ayant les mêmes caractéristiques physiques que l'aluminium, à savoir la même masse volumique  $\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$  et une vitesse de phase des ondes de volume égale à celle des ondes transversales dans le solide, soit  $c_T = 3140 \text{ m/s}$ . Le spectre obtenu est présenté sur la Figure 1.12 ci-dessous.

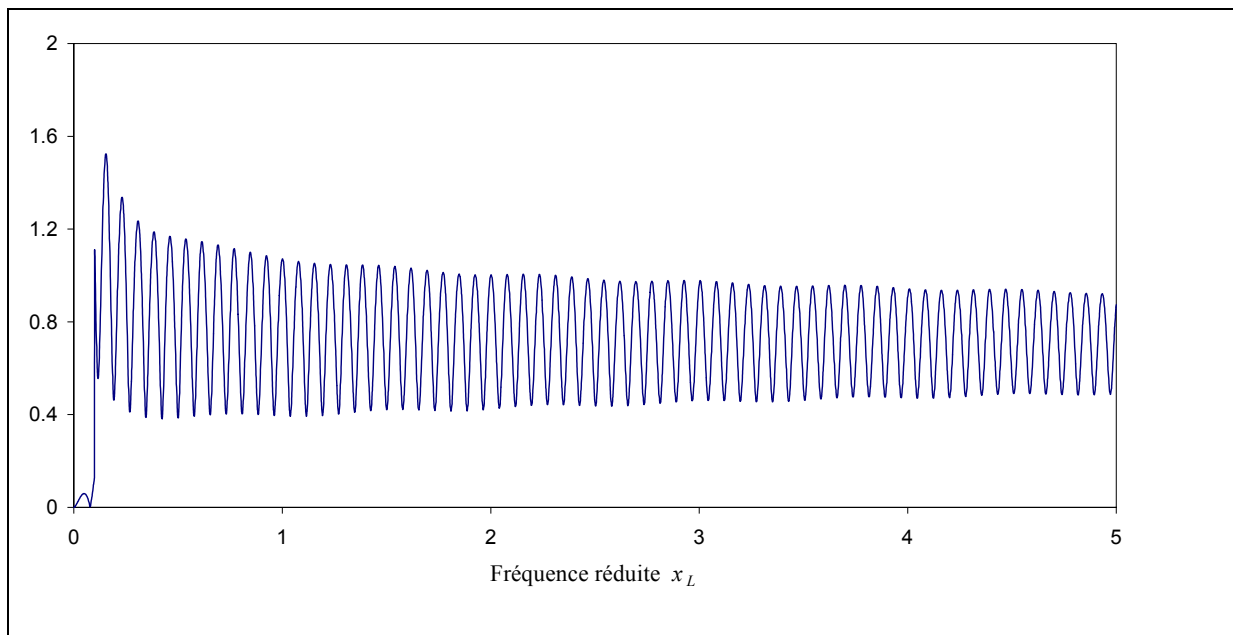


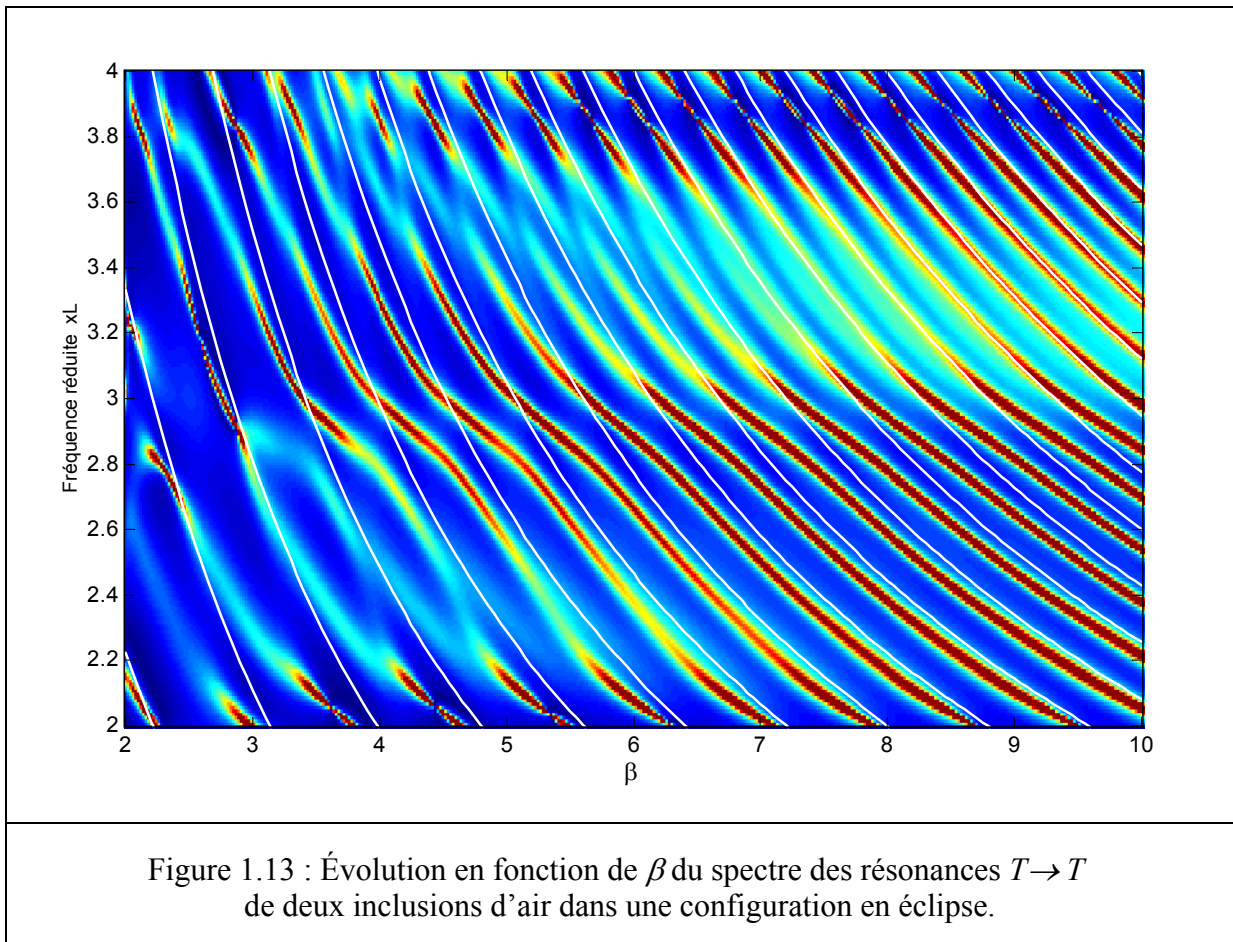
Figure 1.12 : Spectre de rétrodiffusion pour deux inclusions d'air ( $\beta=20$ ) dans une configuration en éclipse.

L'aluminium est remplacé par un fluide ayant les mêmes caractéristiques :  
 $c_T = 3140 \text{ m/s}$ ,  $\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$ .

En milieu fluide, l'onde de Rayleigh ne peut être excitée autour des inclusions. Le parcours B est alors lié à la seule propagation des ondes de Franz autour de l'inclusion 1. Par conséquent, l'enveloppe qui est due à l'excitation de l'onde de Rayleigh et des ondes de Franz autour de l'inclusion 1 ne doit donc plus être observée. Le spectre de la Figure 1.12 ci-dessus confirme

cette prédiction. L'amplitude oscille toujours de façon périodique mais n'est plus modulée par une enveloppe de période beaucoup plus grande. La période des oscillations reste égale à  $\Delta x_L = 0,075$ . Ces oscillations sont dues aux interférences entre l'onde spéculaire (parcours A) et l'onde empruntant le parcours B associé à l'onde de Franz qui a parcouru une faible distance sur l'interface courbe de l'inclusion 1 avec une vitesse de phase proche de  $c_T$ .

A ce stade de l'analyse, l'interaction entre les deux inclusions a été étudiée séparément pour une petite ( $\beta = 2,05$ ) et deux grandes valeurs de  $\beta$  ( $\beta = 10$  et  $\beta = 20$ ). Quelle que soit cette valeur, nous avons conclu dans tous les cas à une interaction de type interférentiel entre les deux inclusions. Existe-t-il alors une continuité du phénomène d'interaction interférentielle décrit ci-dessus lorsque les inclusions sont très proches les unes des autres ? Pour répondre à cette question, analysons la Figure 1.13 qui synthétise les résultats de cette étude en fonction du paramètre  $\beta$ .



Cette figure est obtenue en calculant les spectres des résonances  $T \rightarrow T$  pour différentes valeurs de  $\beta$  variant de 2 à 10. Le domaine fréquentiel a été réduit à  $2 \leq x_L \leq 4$  pour plus de lisibilité. La gamme de couleurs différencie l'amplitude relative des spectres : l'amplitude

croît lorsque les couleurs évoluent des couleurs froides aux couleurs chaudes. A la lecture du diagramme, nous constatons que les maxima d'amplitude des spectres obtenus pour les petites et les grandes valeurs de  $\beta$  appartiennent à une même famille de courbes de forme hyperbolique. Ceci confirme que les maxima d'amplitude observés pour  $\beta = 2,05$  ne sont pas dus à un éventuel comportement résonant de la cible mais au même phénomène interférentiel décrit ci-dessus pour des grandes valeurs de  $\beta$ . Pour conclure définitivement cette analyse, considérons de nouveau les parcours A et B des ondes mises en jeu dans ce phénomène interférentiel. Compte tenu de la Figure 1.11, la longueur du parcours B est donnée par la relation

$$X_B(\beta) = x_B(\beta) + y_B(\beta) \quad (1.135)$$

avec

$$x_B(\beta) = 2a\sqrt{(\beta-1)^2 - 1} \quad (1.136)$$

et

$$y_B(\beta) = 2a\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta-1}\right)\right). \quad (1.137)$$

$x_B$  est le parcours emprunté par les ondes entre les deux inclusions avec la vitesse de phase  $c_T$ . La quantité  $y_B$  correspond aux parcours — que l'on suppose identiques — à l'interface courbe de l'inclusion 1 empruntés par l'onde de Rayleigh et l'onde de Franz transversale à une vitesse proche de  $c_T$ . Finalement, la différence entre les parcours A et B est donnée par

$$X_{A-B}(\beta) = 2a\left[1 + \sqrt{(\beta-1)^2 - 1} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta-1}\right)\right]. \quad (1.138)$$

L'onde spéculaire et les ondes qui ont effectué un aller-retour entre les deux inclusions interfèrent alors en phase lorsque  $X_{A-B} = n\lambda_T$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Cette condition d'interférence constructive est respectée dès que la fréquence réduite  $x_L$  vérifie

$$x_L(\beta) = \frac{c_T}{c_L} \frac{n\pi}{1 + \sqrt{(\beta-1)^2 - 1} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{1}{\beta-1}\right)}. \quad (1.139)$$

Le tracé de  $x_L(\beta)$  pour chaque  $n$  fournit une famille de courbes de forme hyperbolique. Sur la Figure 1.13, nous avons superposé ces courbes, en blanc, pour les comparer à celles décrites

par les maxima d'amplitude de la dérivée de phase. Ces dernières suivent globalement les courbes issues de la condition d'interférence constructive et, au mieux, se confondent avec elles. Cette coïncidence est observable quelles que soient la fréquence et la valeur de  $\beta$ , et tout particulièrement pour les petites valeurs  $\beta$ . Ainsi, même lorsque les inclusions sont très proches l'une de l'autre, cette dernière analyse confirme que leur interaction mutuelle reste toujours de type interférentiel.

## III.2 Identification et analyse des interactions entre les inclusions d'eau

### III.2.1 Résultats acquis sur la diffusion par une inclusion d'eau

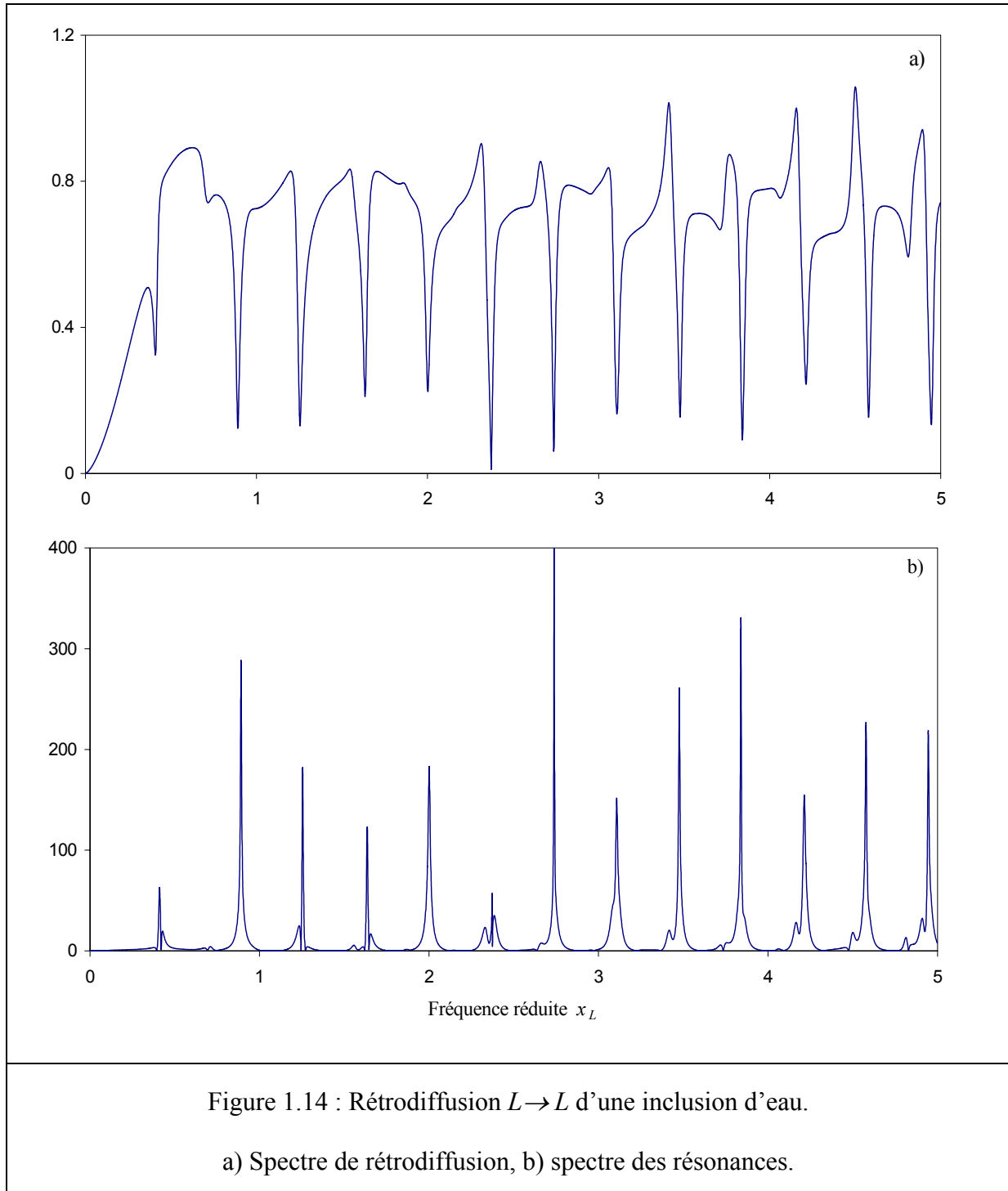
La diffusion par une inclusion d'eau cylindrique a été étudiée par S. G. Solomon *et al.* [9] dans le cas identique au nôtre où le milieu solide est de l'aluminium. Pour ce diffuseur, la différence essentielle avec l'inclusion d'air est la présence des ondes de galerie à écho se propageant à l'interface courbe de l'inclusion. Ces ondes circonférentielles ont pour support le milieu fluide contenu dans l'inclusion et rayonnent principalement leur énergie dans le milieu externe élastique à proximité de l'interface. Les ondes de galerie à écho sont nettement moins atténuées que les ondes de Rayleigh et de Franz, et résonnent par conséquent fortement autour de l'inclusion, ces résonances ayant pour origine l'adaptation de phase de ces ondes autour de l'inclusion. La Figure 1.14 présente le spectre de rétrodiffusion  $L \rightarrow L$  et le spectre des résonances associé d'une inclusion d'eau. De même que pour une inclusion d'air, le champ diffusé issu de la conversion  $L \rightarrow T$  est nul en rétrodiffusion.

Par rapport au spectre de rétrodiffusion  $L \rightarrow L$  d'une inclusion d'air (voir Figure 1.6), celui d'une inclusion d'eau ne présente plus d'oscillations périodiques caractéristiques d'un phénomène interférentiel. Le spectre de rétrodiffusion fait apparaître une série de pôles (en affinant encore le pas de calcul, tous les minima d'amplitude tendent en effet vers zéro) correspondant chacun à une dissipation de l'énergie rayonnée quand l'onde de galerie à écho résonne autour de l'inclusion.

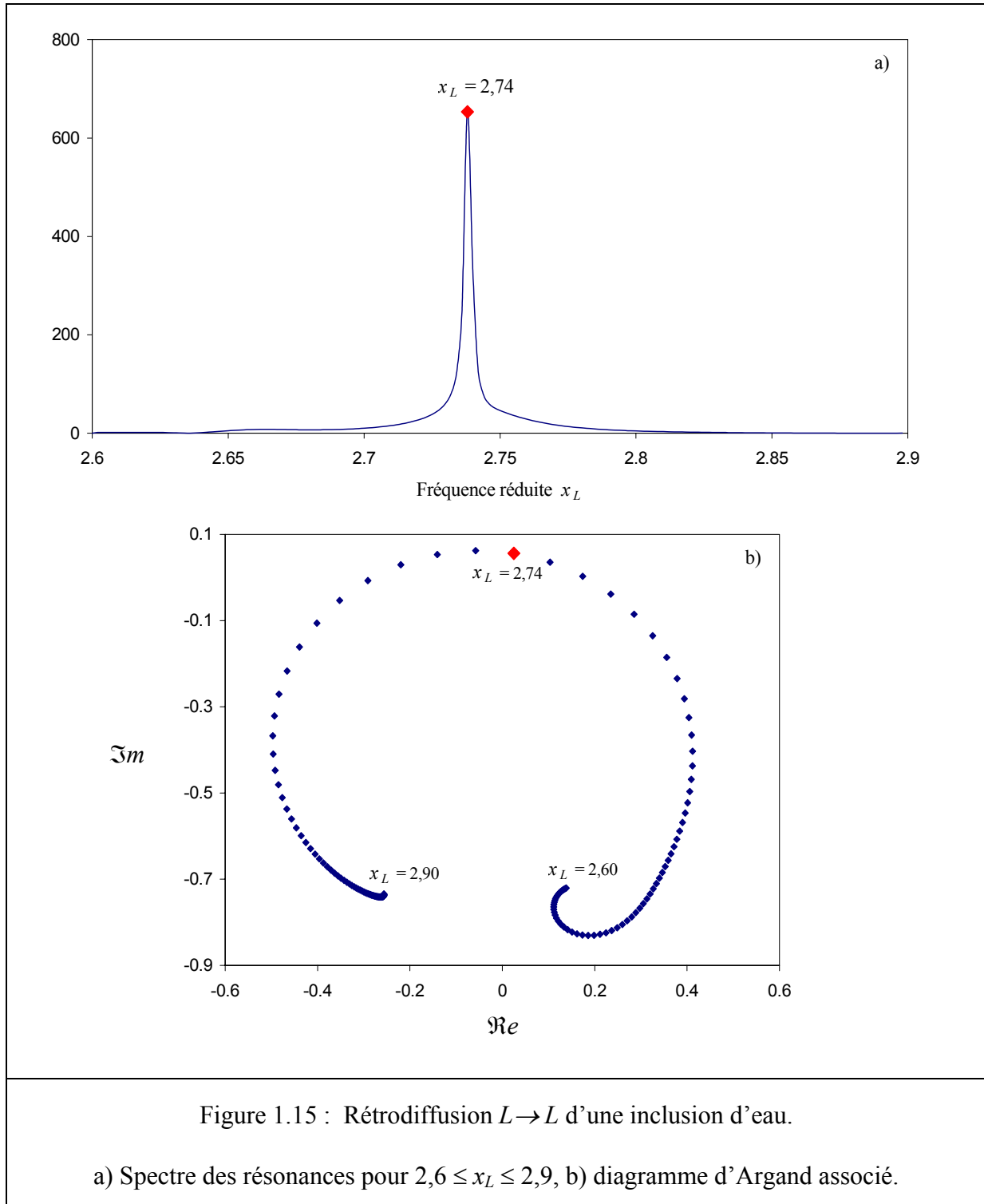
---

[9] S. G. Solomon, H. Überall et K. B. Yoo, *Mode conversion and resonance scattering of elastic waves from a cylindrical fluid-filled cavity*, *Acustica* 55, pp. 147-159, 1984.





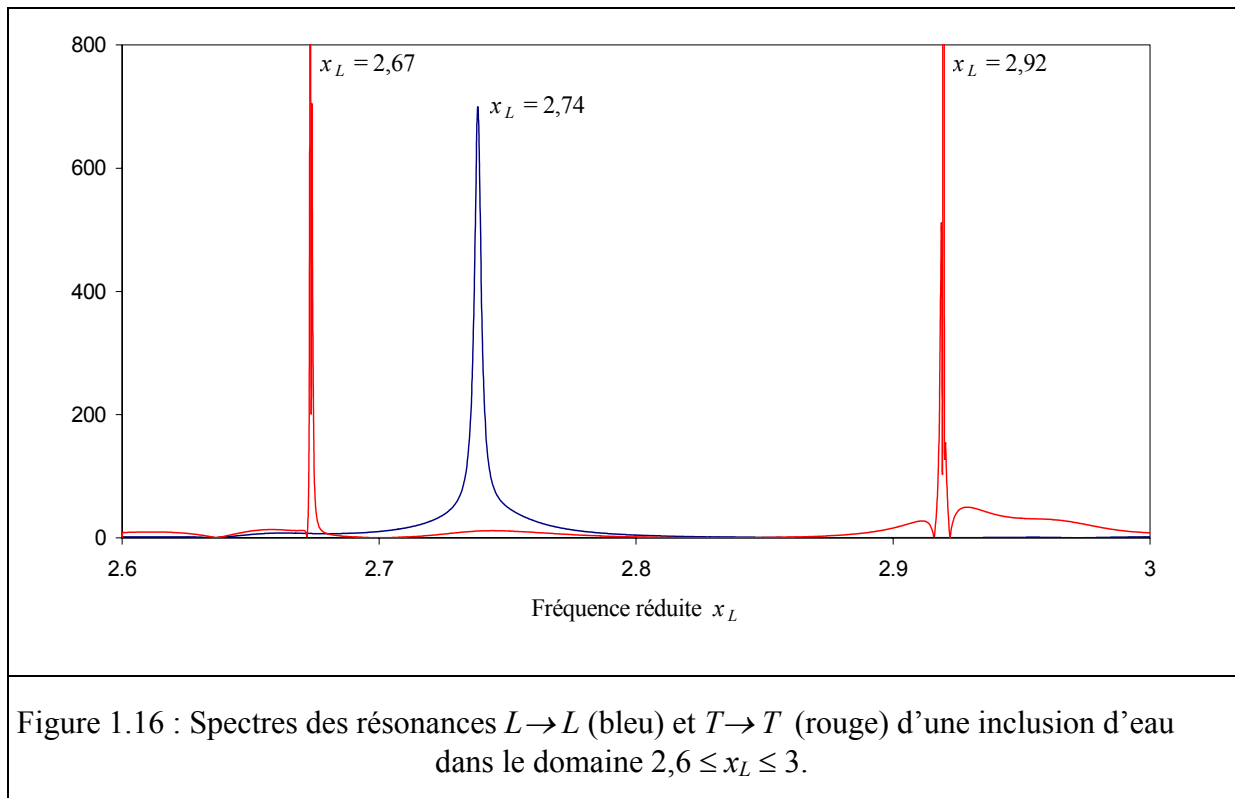
Les phénomènes interférentiels observés pour une inclusion d'air sont toujours présents mais sont « noyés » par les fortes résonances dues aux ondes de galerie à écho. Le spectre des résonances met clairement en évidence les pôles de la fonction de forme en champ lointain par une série de maxima de la dérivée de phase. Examinons alors l'allure du diagramme d'Argand autour d'un des ces maxima et comparons-le à celui tracé sur la Figure 1.9.



Le maximum qui a été isolé sur le spectre des résonances est celui situé à  $x_L = 2,74$ . La Figure 1.15 présente le spectre des résonances autour de cette fréquence et le diagramme d'Argand associé. Par rapport au diagramme obtenu pour des inclusions d'air, nous constatons que celui-ci satisfait toutes les propriétés caractéristiques d'un comportement résonant. Le diagramme décrit bien un cercle, celui-ci est parcouru à fréquence croissante dans le sens trigo-

nométrique et la fréquence pour laquelle le taux de croissance fréquentielle est maximal correspond à la fréquence du maximum de la dérivée de phase, soit  $x_L = 2,74$ . Les maxima de la dérivée de phase correspondent donc bien ici à des résonances de l'inclusion.

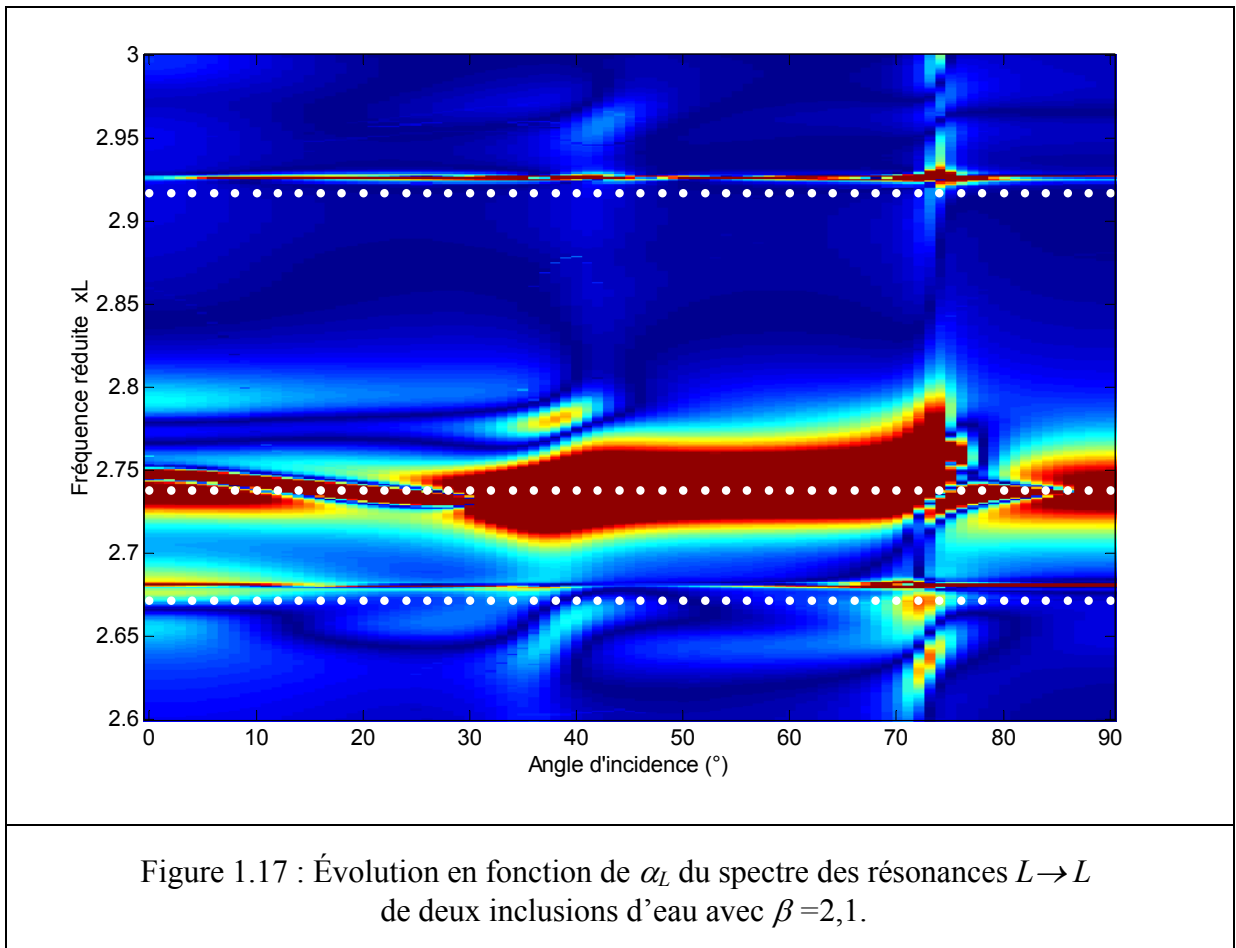
Il est clair que le nombre de résonances est trop important dans la gamme fréquentielle  $0 \leq x_L \leq 5$  pour y envisager une étude précise des phénomènes interactionnels entre plusieurs inclusions. Le domaine fréquentiel d'étude sera donc restreint à  $2,6 \leq x_L \leq 3$  pour isoler seulement quelques résonances. D'autre part, sans perdre en généralités, nous nous limiterons désormais à l'étude de la diffusion  $L \rightarrow L$ . L'étude de la diffusion  $T \rightarrow T$  mettrait en effet en évidence les mêmes résonances en raison des conversions  $L \leftrightarrow T$  se produisant lors d'un processus de diffusion multiple. La Figure 1.16 ci-dessous présente les spectres des résonances  $L \rightarrow L$  et  $T \rightarrow T$  d'une seule inclusion d'eau dans le domaine  $2,6 \leq x_L \leq 3$ .



Il y a trois résonances : celle associée à la diffusion  $L \rightarrow L$ , située à  $x_L = 2,74$ , et celles plus fines associées à la diffusion  $T \rightarrow T$ , situées à  $x_L = 2,67$  et  $x_L = 2,92$ . En raison des conversions mentionnées plus haut, ces trois résonances apparaîtront sur tous les spectres des résonances  $L \rightarrow L$ , et ce quelle que soit la cible considérée.

### III.2.2 Interaction entre deux et trois inclusions d'eau

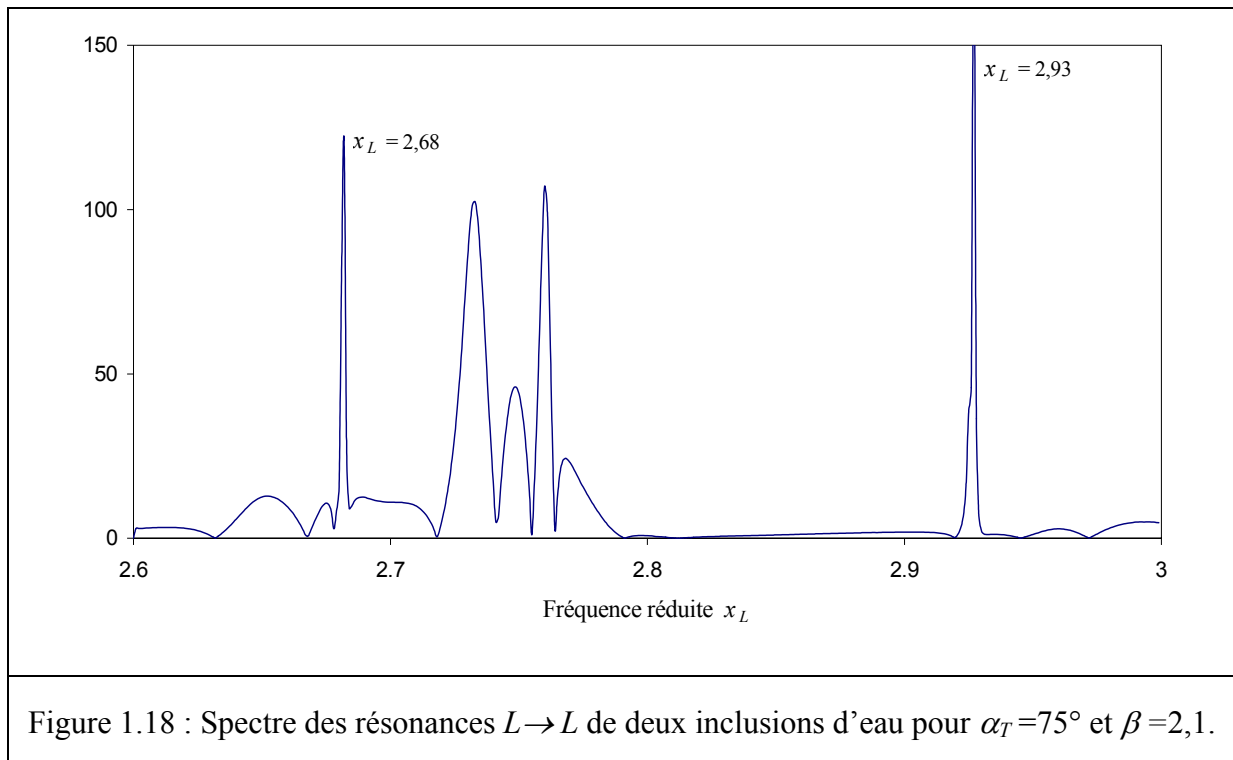
Pour deux inclusions très proches l'une de l'autre,  $\beta = 2,1$ , la Figure 1.17 présente l'évolution du spectre des résonances  $L \rightarrow L$  en fonction de l'angle d'incidence  $\alpha_L$ . Sur le diagramme, les trois résonances de la Figure 1.16 sont représentées par des lignes blanches en pointillé. Quel que soit l'angle d'incidence, le diagramme fait apparaître au moins trois résonances à des fréquences voisines de celles des trois résonances d'une inclusion seule. De part et d'autre de la large résonance « centrale », les deux résonances plus fines sont très proches de celles de l'inclusion seule excitée par une onde transversale. Toutes deux sont translatées vers les hautes fréquences d'une valeur de 0.01.



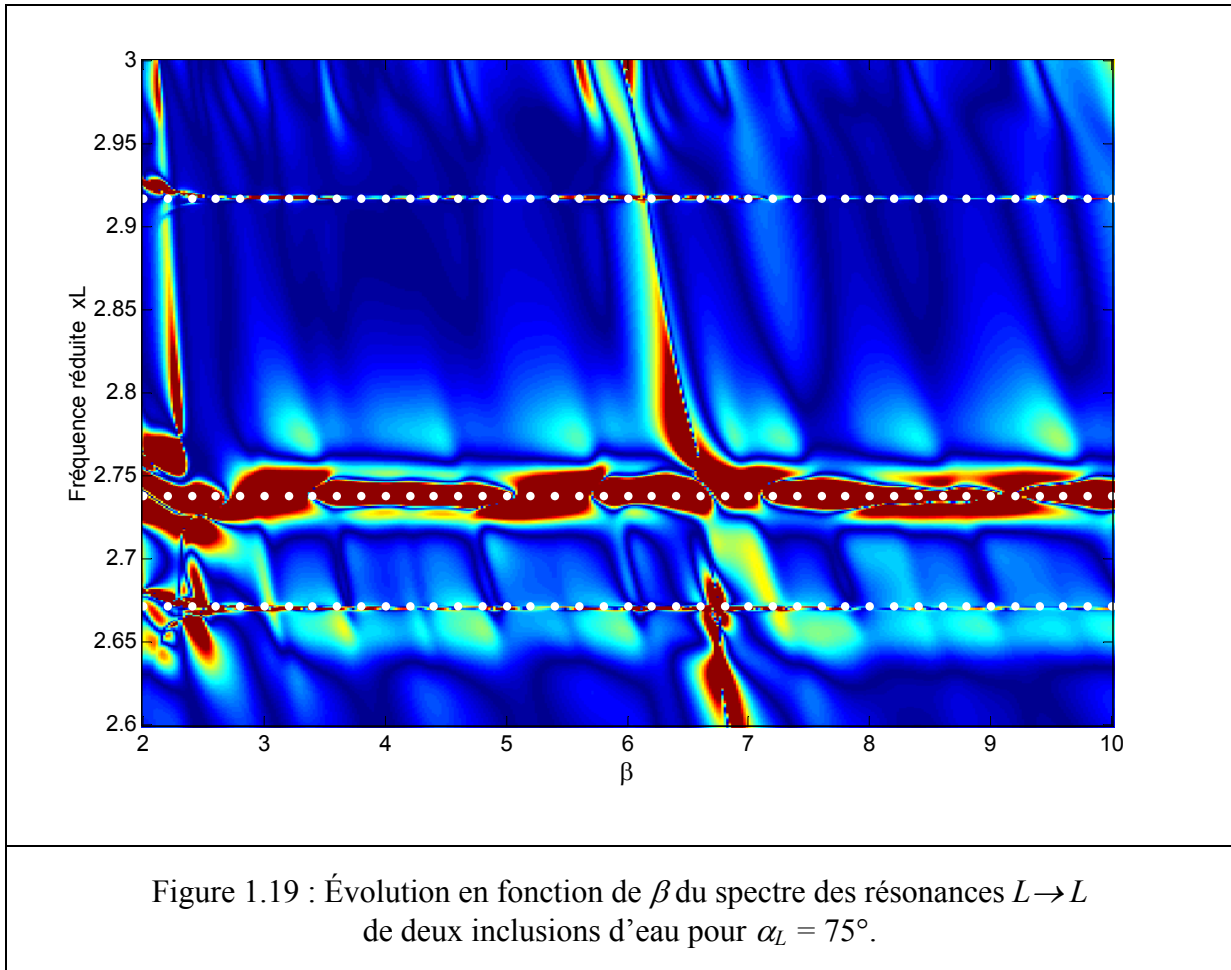
La présence de ces deux résonances sur les spectres des résonances  $L \rightarrow L$  dénote un effet important des conversions entre les ondes longitudinales et transversales lors du processus de diffusion multiple. Remarquons que les positions fréquentielles des maxima de la dérivée de phase n'évoluent pas en fonction de l'angle d'incidence, ce qui confirme qu'ils sont tous liés à

des résonances de la cible. Les résonances sont en effet liées à la structure du diffuseur (au travers de ses caractéristiques géométriques et physiques) et non à la source d'excitation.

Pour certains angles d'incidence, nous remarquons que la résonance centrale se fragmente en deux ou trois nouvelles résonances. La Figure 1.18 ci-dessous représente une coupe du diagramme à  $\alpha_L = 75^\circ$ . Le spectre obtenu montre clairement que, pour cet angle d'incidence, cette résonance s'est fragmentée en trois nouvelles résonances. Ceci est certainement le phénomène le plus intéressant et le plus singulier qui a été observé jusqu'ici. En effet, par rapport à la diffusion résonante par deux tubes élastiques en milieu fluide où la relation phénoménologique établie entre le nombre de diffuseurs et le nombre de nouvelles résonances est de  $N$  ou  $2N$  résonances pour  $N$  diffuseurs, ici, cette relation est d'emblée écartée.



Si elle résulte d'un couplage résonant entre les deux inclusions quasiment en contact, l'émergence de ces nouvelles résonances ne devrait plus être observée lorsque les inclusions sont éloignées l'une de l'autre. Examinons alors la Figure 1.19 décrivant l'évolution en fonction de  $\beta$  du spectre des résonances à  $\alpha_L = 75^\circ$ . Pour les grandes valeurs de  $\beta$ , nous constatons que les deux résonances de part et d'autre de la résonance centrale coïncident avec celles d'une inclusion seule. Aux faibles valeurs de  $\beta$ , et plus précisément en deçà de  $\beta = 2,4$ , nous observons que chacune de ces deux résonances se scinde en deux nouvelles résonances. Cependant, le phénomène n'est pas spectaculaire et n'apparaît pas clairement sur le diagramme.



La Figure 1.20 de la page suivante représente une coupe du diagramme à  $\beta = 2,35$ . Le dédoublement de la résonance associée à l'inclusion seule et positionnée à  $x_L = 2,67$  est bien visible sur ce spectre. Ce dédoublement produit une résonance de grande amplitude à  $x_L = 2,68$  et une de plus faible amplitude à  $x_L = 2,66$ . Par contre, le dédoublement de la résonance à  $x_L = 2,92$  produit une résonance de grande amplitude à  $x_L = 2,93$  et une résonance à  $x_L = 2,91$  à peine perceptible pour cette valeur de  $\beta$ . Pour ces deux résonances, nous constatons que, quelles que soient les valeurs de  $\beta$  comprises entre 2 et 2,4, la résultante basse fréquence des dédoublements est toujours une résonance d'amplitude beaucoup plus faible que la résultante haute fréquence. Ceci explique pourquoi nous avons constaté une translation vers les hautes fréquences de ces deux résonances sur le diagramme de la Figure 1.17 ; les résultantes basse fréquence n'étaient en fait pas visibles sur ce diagramme tracé pour  $\beta = 2,1$ .

Pour ce qui est de la résonance centrale, nous constatons qu'elle se fragmente en trois nouvelles résonances pour  $\beta < 2,4$ . Au-delà de cette valeur critique de  $\beta$ , le couplage résonant n'a plus lieu, même si le diagramme laisse à penser que ce couplage se produit parfois à des

grandes valeurs de  $\beta$ . La Figure 1.21 présente en effet une coupe de ce diagramme à  $\beta = 8,61$  où il semble que trois résonances soient présentes (en dehors des deux résonances localisées à  $x_L = 2,67$  à  $x_L = 2,92$ ).

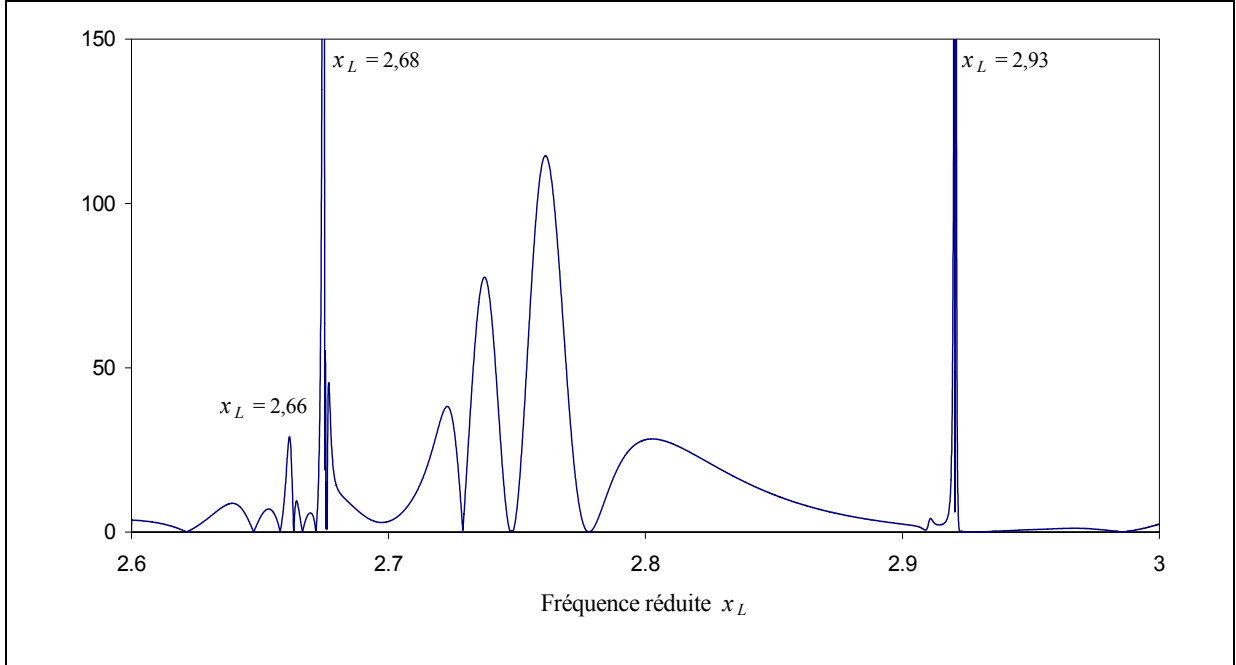


Figure 1.20 : Spectre des résonances  $L \rightarrow L$  de deux inclusions d'eau pour  $\alpha_T = 75^\circ$  et  $\beta = 2,35$ .

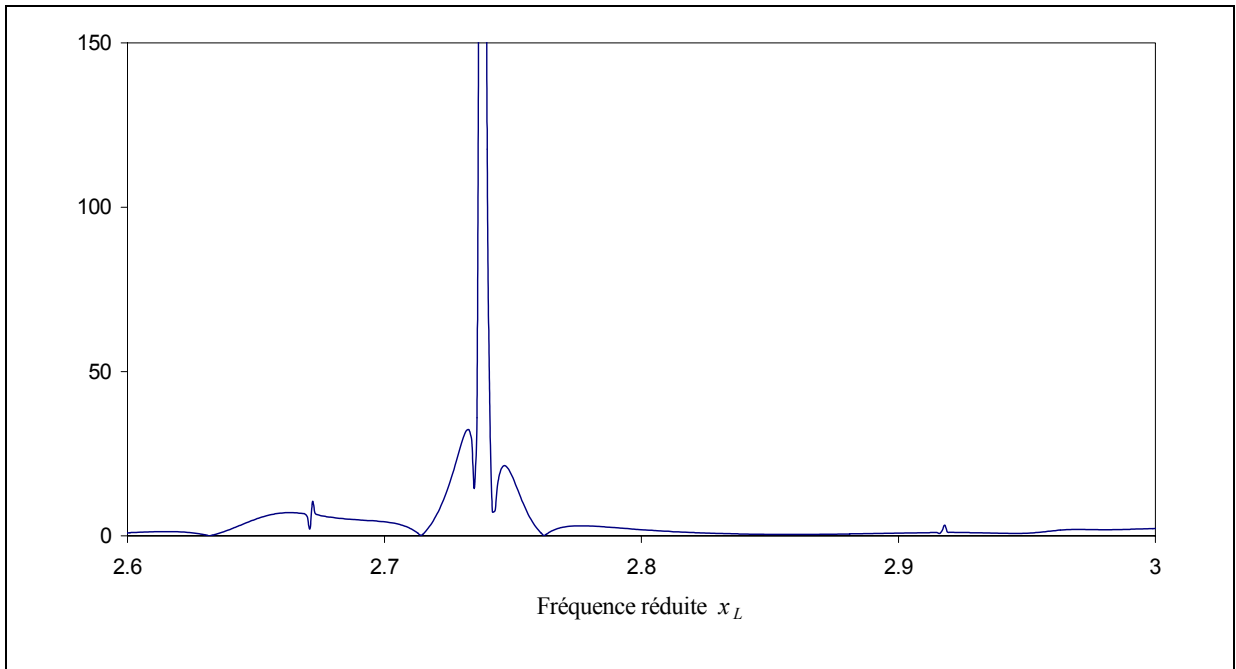


Figure 1.21 : Spectre des résonances  $L \rightarrow L$  de deux inclusions d'eau pour  $\alpha_T = 75^\circ$  et  $\beta = 8,61$ .

Si l'on compare ce spectre avec celui de la Figure 1.18 correspondant à une faible valeur de  $\beta$ , il semble clair que les « pics » de part et d'autre de la résonance centrale ne correspondent pas à des résonances. Le tracé du diagramme d'Argand autour de la résonance centrale corrobore cette affirmation. Il est à remarquer au passage que les résonances à  $x_L = 2,67$  et  $x_L = 2,92$  sont ici quasi inexistantes pour  $\beta = 8,61$ . En effet, lorsque les inclusions sont très éloignées l'une de l'autre, la contribution de la diffusion multiple est négligeable vis-à-vis de la diffusion par les inclusions prises isolément. Autrement dit, chaque inclusion ne diffuse que l'onde incidente longitudinale.

En définitive, que ce soit pour la résonance centrale large ou pour les deux autres résonances issues des conversions  $L \leftrightarrow T$ , le phénomène de fragmentation de toutes ces résonances n'apparaît que pour des valeurs de  $\beta$  inférieures à (environ) 2,4. Cette valeur critique,  $\beta_c$ , définit donc les distances entre les inclusions pour lesquelles le couplage résonant peut ou ne peut avoir lieu. A ce stade de l'analyse, seule une cible constituée de deux inclusions a été considérée. Comment évolue le nombre de résonances lorsque le réseau comporte plus d'inclusions ? La Figure 1.22 présente l'évolution des spectres des résonances  $L \rightarrow L$  en fonction de l'angle d'incidence pour deux cibles constituées de trois inclusions : l'une comportant trois inclusions alignées, l'autre trois inclusions aux sommets d'un triangle équilatéral (cf. Figure 1.5). La valeur de  $\beta$  est de 2,1. Cette valeur étant largement inférieure à  $\beta_c$ , le couplage résonant doit donc être particulièrement fort entre les inclusions. En effet, un grand nombre de résonances apparaissent sur les deux diagrammes, et tout particulièrement sur celui correspondant à la configuration en triangle (on dénombre par exemple dix résonances à  $\alpha_L = 43^\circ$ ). Un autre résultat fournit par ces diagrammes est que, par rapport à la cible constituée de deux inclusions, la plupart des nouvelles résonances apparaissent à des fréquences très éloignées de celles des résonances d'une inclusion seule. L'interaction résonante entre les inclusions ne semble donc pas se manifester uniquement par une fragmentation des résonances de l'inclusion seule. Outre la relation entre le nombre de diffuseurs et le nombre de nouvelles résonances, il s'agit là d'une deuxième différence fondamentale avec les résultats connus pour des tubes élastiques immergés dans un fluide. L'ensemble de ces résultats montre que la forte réémission des inclusions d'eau rend le phénomène de couplage résonant en milieu solide bien plus complexe qu'en milieu fluide. Il en ressort uniquement que le nombre de nouvelles résonances croît lorsque le nombre d'inclusions en présence augmente. Aucune relation précise entre le nombre de diffuseurs et le nombre de nouvelles résonances n'a pu être établie.



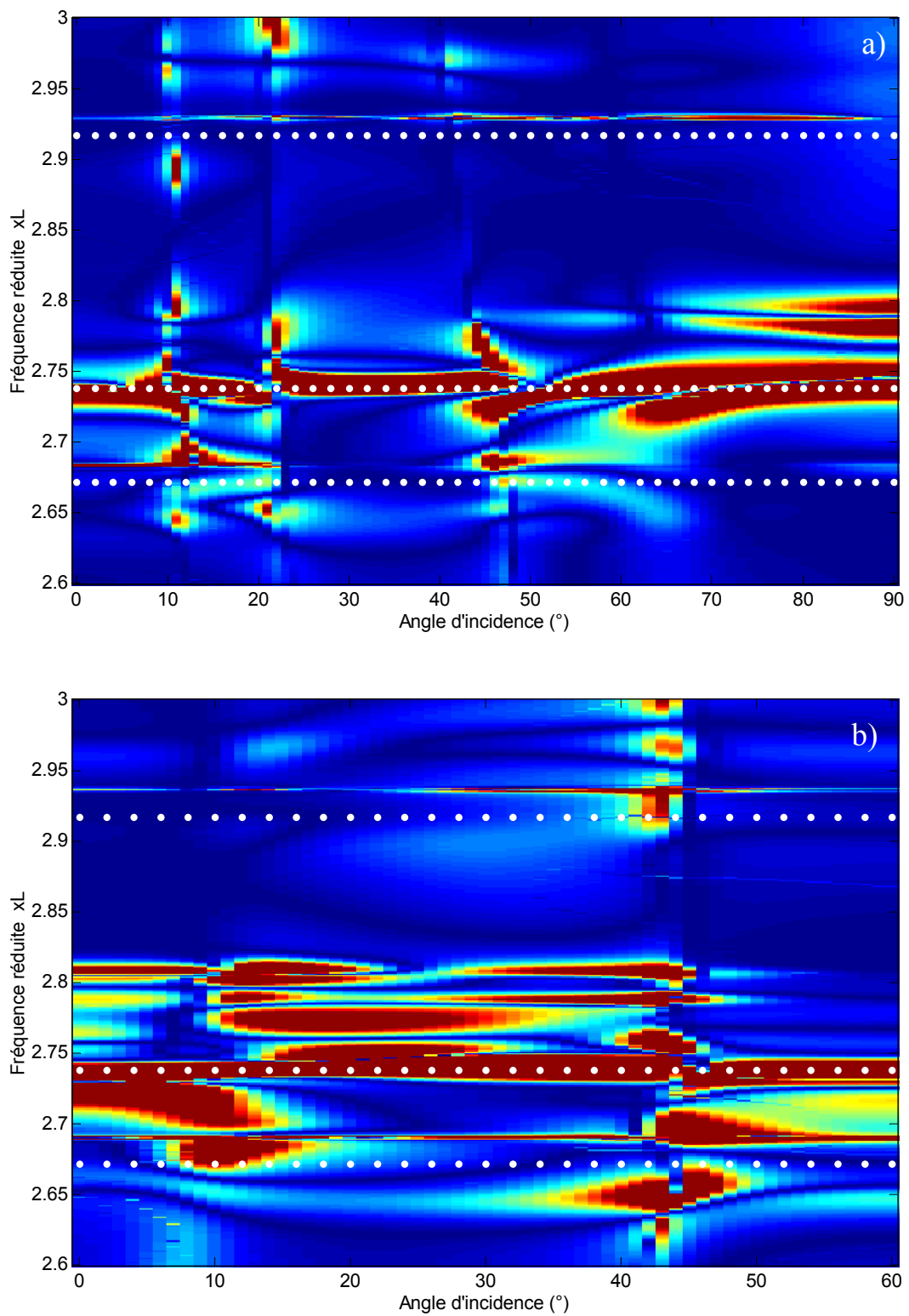


Figure 1.22 : Évolution du spectre des résonances  $L \rightarrow L$  en fonction de  $\alpha_L$  pour  $\beta = 2,1$ .

a) Trois inclusions alignées, b) trois inclusions aux sommets d'un triangle équilatéral.

## IV. VALIDATION EXPÉRIMENTALE

L'étude théorique de la précédente section a mis clairement en évidence un phénomène d'interaction résonante dans des cibles comportant deux ou trois inclusions d'eau très proches les unes des autres. Ce phénomène interactionnel se manifeste par l'émergence de nouvelles résonances à des fréquences plus ou moins éloignées de celles des résonances d'une inclusion seule. Ici, les contraintes imposées par l'expérience ne permettent pas nous placer dans des conditions où le phénomène peut se produire. La faible distance critique (théorique) entre les inclusions au-dessous de laquelle le phénomène doit se produire est en effet inaccessible en pratique. La distance sera ici légèrement supérieure. Cependant, théoriquement, de légères différences sont malgré tout constatées entre les spectres d'une seule et deux inclusions d'eau. Ces différences peuvent être pressenties comme les premières manifestations du couplage résonant. L'objectif de ce travail expérimental est donc de valider les spectres théoriques de cibles composées d'une et de deux inclusions d'eau, et éventuellement de confirmer ces légères différences, trahissant les prémisses d'un couplage résonant. L'accord avec la théorie validera ainsi le dispositif expérimental utilisé qui, par la suite, sera exploité lors de toutes nos études expérimentales ultérieures.

### IV.1 Dispositif expérimental et méthode d'isolement des résonances

#### IV.1.1 Dispositif expérimental

Les résultats théoriques ont été obtenus pour un milieu solide en aluminium. Pour leur validation expérimentale, le même matériau a donc été choisi. On rappelle que ses caractéristiques mécaniques sont  $\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_L = 6380 \text{ m/s}$  et  $c_T = 3140 \text{ m/s}$ . L'emploi de ce matériau, plutôt que d'autres de plus faible densité, comme des matériaux en polyéthylène, favorise la dynamique des résonances et les rend, de fait, moins sensibles aux conditions expérimentales.

L'étude expérimentale est menée en analysant la réflexion à l'interface plane d'un bloc d'aluminium percé de trous circulaires. La Figure 1.23 présente les dimensions du bloc d'aluminium et des trous qui y sont pratiqués. Le bloc est de forme parallélépipédique et a pour dimensions  $500 \times 150 \times 200 \text{ mm}$ . Cette pièce est percée de part en part de trous de  $4 \text{ mm}$  de diamètre suivant sa hauteur. La longueur des trous cylindriques est donc de  $150 \text{ mm}$ , soit  $37,5$  fois leur diamètre  $2a$ . Pour une fréquence temporelle  $f$  supérieure à  $0,4 \text{ MHz}$ , cette longueur

correspond au moins à une dizaine de longueurs d'onde  $\lambda_L$  (et à une vingtaine de longueurs d'onde pour  $f > 0,8$  MHz). Excepté aux basses fréquences, les inclusions peuvent donc être considérées de longueur infinie et être excitées en incidence normale sans génération d'ondes stationnaires suivant leur longueur.

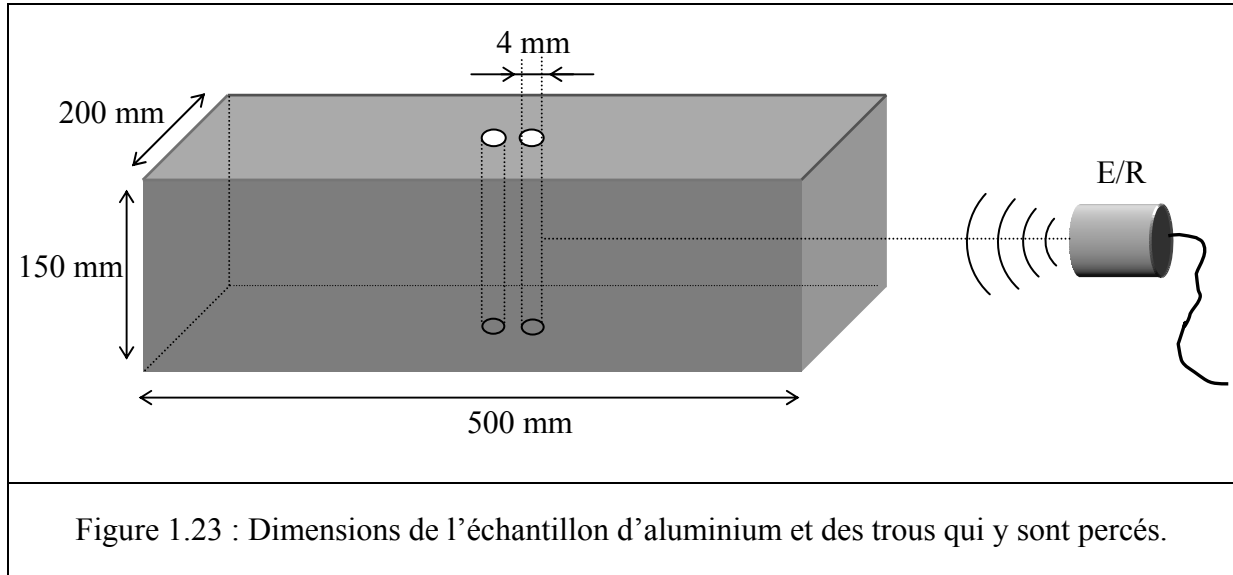


Figure 1.23 : Dimensions de l'échantillon d'aluminium et des trous qui y sont percés.

L'expérience est conduite dans une cuve remplie d'eau dans laquelle est immergé le bloc d'aluminium percé. A la différence de l'étude théorique où la température de l'eau était prise égale à 25°C, elle est plutôt de l'ordre de 15°C en pratique. La célérité des ondes de volume dans l'eau est donc  $c_f = 1470$  m/s (contre  $c_f = 1494$  m/s en théorie). Ce paramètre est fondamental puisque nous avons vu que les résonances étaient associées aux ondes de galerie à écho se propageant dans l'eau contenue dans les inclusions. Une faible variation de la température de l'eau modifie la vitesse de phase de ces ondes circumférentielles et par suite les fréquences de résonances : plus la température augmente et plus les résonances sont transférées vers les hautes fréquences sur les spectres de résonances.

L'insonation du bloc d'aluminium est réalisée avec un transducteur submersible pouvant fonctionner également en récepteur. La face du transducteur est orientée parallèlement à l'interface eau/aluminium dans le but d'exciter la cible sous incidence normale. Le transducteur est d'autre part translaté de sorte que l'axe du faisceau ultrasonore incident coupe la cible à mi-hauteur. Les mesures seront effectuées dans une configuration monostatique pour laquelle le transducteur travaille à la fois en émetteur et en récepteur. En d'autres termes, nous nous intéressons au champ rétrodiffusé par la cible.

### IV.1.2 Caractéristiques du transducteur

La pastille piézoélectrique du transducteur a un diamètre de 41 mm. Sa fréquence centrale de fonctionnement  $F_c$  est de 2,25 MHz. La bande passante du transducteur, définie par  $F_c/2 \leq f \leq 3F_c/2$ , s'étend donc approximativement de 1 à 3,5 MHz. En pratique, nous nous limiterons dans cette étude à une gamme fréquentielle allant de 1 à 3 MHz. La directivité du transducteur est exprimée par le rapport de l'intensité diffractée dans la direction  $\theta$  sur l'intensité diffractée suivant la direction normale à la pastille. Pour une pastille de diamètre  $D$ , sa directivité est donnée par la relation

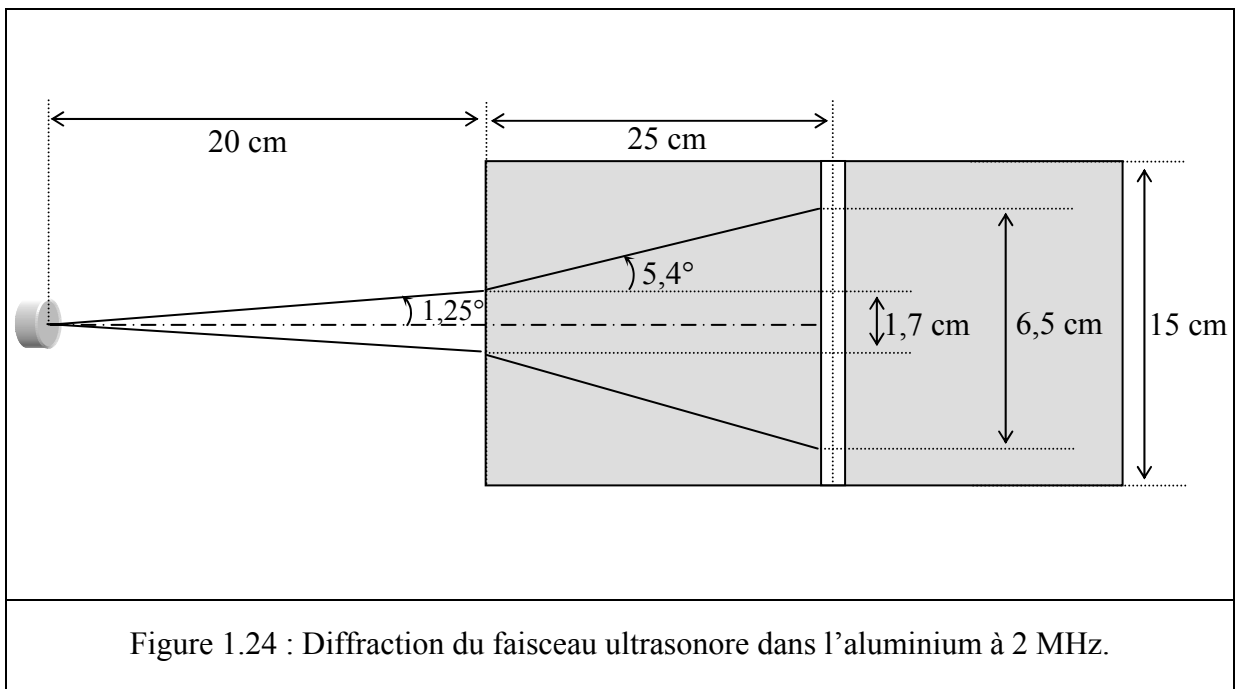
$$b(\theta) = \frac{I(\theta, r)}{I(0, r)} = \left( \frac{J_1 \left( \frac{\pi D}{\lambda_f} \sin \theta \right)}{\frac{\pi D}{\lambda_f} \sin \theta} \right)^2, \quad (1.140)$$

où  $b(\theta)$  est la fonction directivité,  $I(0, r)$  l'intensité acoustique sur la normale à la surface de la pastille et à la distance  $r$  de cette surface,  $I(\theta, r)$  l'intensité acoustique suivant l'angle  $\theta$  et à la distance  $r$  de la surface de la pastille,  $J_1$  la fonction de Bessel du premier ordre et  $\lambda_f$  la longueur d'onde des ondes de volume dans l'eau. Soit  $\theta_1$  l'angle pour lequel la fonction directivité est nulle. Cet angle, qui correspond à la demi-largeur angulaire du lobe principal du transducteur, est défini par

$$\theta_1 = \sin^{-1} \left( \frac{3,83c_f}{\pi D f} \right). \quad (1.141)$$

$\theta_1$  est une fonction rapidement décroissante en fonction de la fréquence. Plus la fréquence est élevée, plus le faisceau ultrasonore est directif. Pour un domaine d'étude s'étendant de 1 à 3 MHz, la demi-largeur angulaire du lobe principal est donc comprise entre 0,8 et 2,5°. Lorsqu'il rencontre l'interface eau/aluminium, le faisceau est diffracté et s'élargit. En utilisant les lois de Snell-Descartes, on montre que le lobe principal a alors une demi-largeur angulaire comprise entre 3,5 et 10,9° dans le bloc d'aluminium. La Figure 1.24 décrit cet élargissement du faisceau à la fréquence centrale  $f_c = 2$  MHz et pour une distance entre le transducteur et l'interface eau/aluminium valant 20 cm (il s'agit de la distance qui sera considérée en pratique). La diffraction du faisceau ultrasonore fait qu'une partie de son intensité n'arrive pas en incidence normale sur l'inclusion. Cependant, par rapport à la théorie, nos résultats expéri-

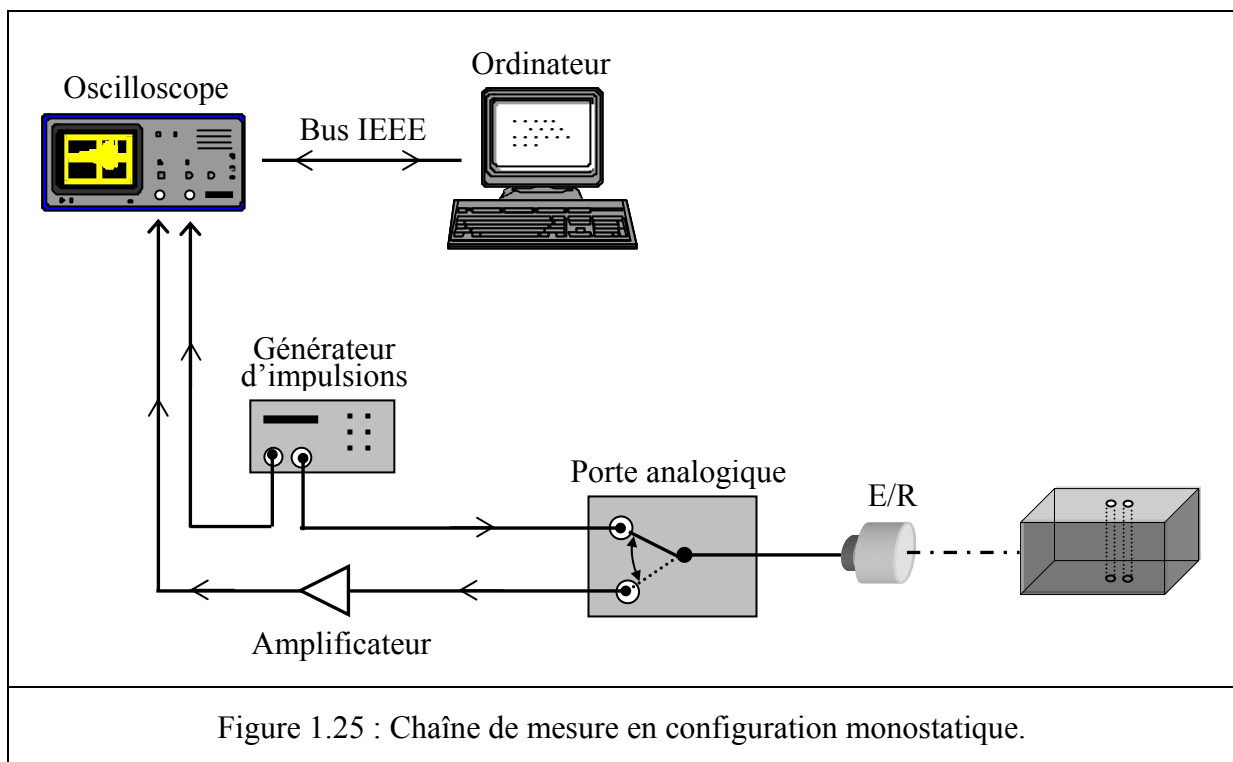
mentaux ne dénotent aucun effet majeur de la diffraction du faisceau. Pour que le maximum de l'intensité acoustique puisse arriver en incidence normale sur l'inclusion, il faudrait considérer une faible distance entre le transducteur et l'interface eau/aluminium. Cependant, cette distance doit être aussi suffisamment grande pour respecter la condition de champ lointain. Il y a donc un compromis à faire entre la directivité du faisceau ultrasonore et la condition de champ de lointain en sachant que, en raison des dimensions des cuves, la distance entre les transducteurs et l'interface eau/aluminium ne peut être en pratique supérieure à 20 cm.



A la fréquence centrale de 2 MHz, la distance de Fresnel, définie par  $Sf_c/(\pi c_f)$  avec  $S$  la surface de la pastille du transducteur, vaut 55 cm. Cette distance étant supérieure à 20 cm, la condition de champ lointain à l'interface eau/aluminium n'est donc pas satisfaite. Dans l'aluminium, cette distance de Fresnel est définie par  $S'f_c/(\pi c_L)$  où  $S'$  est la surface à l'interface eau/aluminium correspondant à la section droite du lobe principal du transducteur à une distance de 20 cm de ce dernier. Au vu de la Figure 1.24,  $S'$  est donc un disque de diamètre 1,7 cm. La distance de Fresnel dans l'aluminium est alors de l'ordre de 9 cm. Cette distance étant largement inférieure aux 25 cm séparant l'interface eau/aluminium de l'inclusion, nous pouvons donc considérer que la condition en champ lointain est satisfaite lorsque le faisceau ultrasonore arrive sur la cible.

### IV.1.3 Méthode expérimentale d'isolement des résonances

Pour la mise en œuvre de cette méthode, les inclusions sont excitées par un signal incident impulsionnel. Elles sont donc insonnées par toutes les fréquences dans la bande passante du transducteur. Le dispositif électronique monostatique est présenté sur la Figure 1.25 ci-dessous. Il est composé d'un générateur d'impulsions, d'une porte analogique, d'un oscilloscope numérique et d'un transducteur, ce dernier fonctionnant alternativement en émetteur et en récepteur. Cette alternance de fonctionnement du transducteur est assurée par la porte analogique.



Le générateur envoie périodiquement des impulsions au transducteur fonctionnant en émetteur. Il faut que la durée des impulsions soit minimale pour exploiter toute la bande passante du transducteur. Une fois insonnée, la cible réagit en diffusant dans toutes les directions. Le signal rétrodiffusé, présenté sur la Figure 1.26 pour une cible d'une seule inclusion d'eau, est capté par le transducteur fonctionnant en récepteur. Il est composé de deux parties notées  $E_1$  et  $E_2$ . La partie  $E_1$ , appelée écho spéculaire, est liée à la réflexion de l'onde incidente sur la première génératrice de l'inclusion. La partie  $E_2$ , dite suite de réémissions libres, est constituée d'une suite d'échos dont les amplitudes décroissent avec le temps. Ces échos sont associés à la réémission de l'onde de galerie à écho se propageant dans l'eau à proximité de l'in-

terface courbe de l'inclusion. La décroissance de l'amplitude des échos est due à l'atténuation de cette onde circonférentielle qui ne réémet quasiment plus au bout de quatre à cinq circonférences parcourues. Il est à noter que, pour visualiser un nombre d'échos significatif, l'inclusion doit être suffisamment éloignée des interfaces eau/aluminium pour que l'onde de galerie à écho ait le temps de réémettre un certain nombre de fois avant d'être à nouveau excitée par les échos spéculaires réfléchis par ces interfaces. C'est précisément cette condition qui nous a orientés pour le choix des dimensions de l'échantillon d'aluminium.

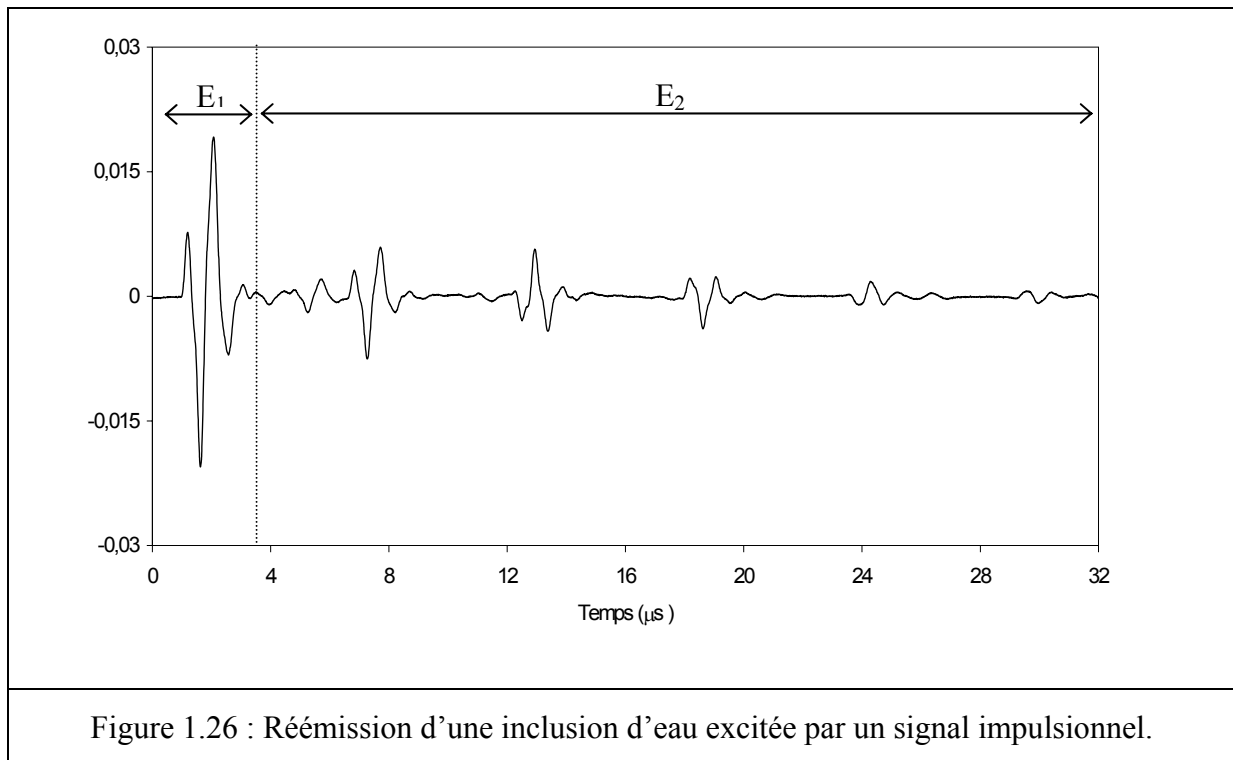


Figure 1.26 : Réémission d'une inclusion d'eau excitée par un signal impulsionnel.

Le signal diffusé par la cible est visualisé sur l'oscilloscope numérique. Les données sont ensuite transmises à un ordinateur pour le traitement des signaux et l'isolement des résonances. La transformée de Fourier discrète de la réponse temporelle fournit le spectre de rétrodiffusion [20]. Il s'interprète, pour une mesure réalisée à une distance suffisante de l'inclusion, de la même façon que la fonction de forme en champ lointain théorique. D'autre part, en filtrant l'écho spéculaire, cette transformée de Fourier permet l'obtention du spectre des résonances [21]. Ces deux spectres, fonction de la fréquence, permettent de réaliser l'isolement

[20] G. Maze, *Diffusion d'une onde acoustique plane par des cylindres et des tubes immergés dans l'eau ; isolement et identification des résonances*, Thèse de Doctorat, Université de Rouen, 1984.

[21] G. Maze et J. Ripoché, *Méthode d'Isolement et d'Identification des Résonances (M.I.I.R) de cylindres et de tubes soumis à une acoustique plane dans l'eau*, Rev. Phys. Appl. 18, pp. 319-326, 1984.

des résonances. En effet, le premier, par la présence de brusques variations d'amplitude, indique l'existence de résonances. Ceci se traduit sur le second par la présence de maxima d'amplitude.

Comme dans la section précédente, une autre méthode d'isolement plus performante sera employée, à savoir la dérivée de l'abscisse curviligne le long des trajectoires décrites par les diagrammes d'Argand. L'autre méthode d'isolement des résonances consistant à représenter la dérivée de la phase de l'amplitude de diffusion ne sera pas suivie puisqu'elle ne fournit ici aucune information supplémentaire par rapport à la dérivée de l'abscisse curviligne. En outre, la dérivée de la phase fait ressortir des pics secondaires dus à nos conditions expérimentales. Ces pics, qui ne sont pas caractéristiques des résonances de la cible, sont gênants pour l'interprétation des résultats. On appellera donc désormais spectres des résonances les tracés en fonction de  $f$  de la dérivée de l'abscisse curviligne, définie par

$$\frac{ds^{LL}}{df} = \sqrt{\left(\frac{d\Re(f^{LL})}{df}\right)^2 + \left(\frac{d\Im(f^{LL})}{df}\right)^2}, \quad (1.142)$$

où le double indice  $LL$  rappelle qu'il s'agit de la rétrodiffusion  $L \rightarrow L$  qui est étudiée ici (l'incidence normale du faisceau ultrasonore sur l'interface eau/aluminium assure que la cible n'est excitée que par une onde longitudinale et, d'après la précédente section, la composante transversale du champ diffusé issue de la conversion  $L \rightarrow T$  est nulle en rétrodiffusion).

## IV.2 Contraintes expérimentales

La précision sur le diamètre des trous percés dans le bloc d'aluminium est de +7% (d'après les données du constructeur des forets), ce qui correspond à un diamètre compris entre 4 et 4,28 mm. Cette incertitude a été prise en compte pour réajuster nos dimensions théoriques. En calculant les spectres théoriques d'une inclusion seule pour différents diamètres et en les comparant avec ceux expérimentaux, nous avons considéré que les diamètres des trous percés devaient être de 4,14 mm.

Pour se mettre dans les conditions d'un fort couplage résonant entre les inclusions, nous avons vu dans la section précédente que  $\beta$  doit être inférieure à la valeur critique de 2,4. Cette valeur correspond à une distance entraxe entre les inclusions de 4,97 mm (en considérant un diamètre de 4,14 mm), et à une distance entre les circonférences des inclusions de



0,83 mm. Or, descendre au-dessous de cette valeur dans nos conditions d'usinage n'a pas été possible, et ce pour deux raisons. En raison de la précision sur la position des trous qui est de  $\pm 0,05$  mm, et surtout en raison de la précision, non estimable, sur la verticalité des trous usinés. En effet, la mèche utilisée a un diamètre de 4 mm pour une longueur de 150 mm. Elle est donc très flexible et la verticalité des trous pratiqués ne peut être rigoureusement assurée. En outre, pour deux trous positionnés comme l'indique la Figure 1.23, l'étude théorique montre qu'une configuration en éclipse n'est pas la configuration la plus favorable à un couplage résonant. Le nombre de nouvelles résonances issues du couplage résonant entre les inclusions est en effet toujours maximal pour des directions d'excitation hors des axes de symétrie des cibles. Or, au vu du dispositif expérimental, il n'est pas possible de respecter cette condition. En définitive, toutes ces contraintes ne permettent pas d'observer les phénomènes spectaculaires mis en évidence en théorie pour  $\beta < 2,4$ . Le but, dans le paragraphe suivant, consiste alors à valider les spectres théoriques de cibles composées d'une, puis de deux inclusions d'eau, et éventuellement à confirmer l'existence de quelques différences liées à un début de couplage résonant. La distance entraxe entre les deux inclusions est de 6 mm, correspondant à  $\beta = 2,9$  (en considérant que  $a = 2,07$  mm).

### IV.3 Comparaison théorie/expérience

La Figure 1.27 de la page suivante présente, sur le même graphique, les spectres des résonances théoriques d'une seule et de deux inclusions d'eau. Comme attendu, la différence entre les deux spectres n'est pas spectaculaire car l'espacement entre les deux inclusions est assez important. En fait, la contribution la plus visible de la diffusion multiple est l'apparition des fines résonances numérotées 1, 2, 3, 4 et 5 (et d'autres de plus faibles amplitudes). L'apparition de ces résonances supplémentaires résulte des conversions  $L \leftrightarrow T$  lors du processus de diffusion multiple entre les deux inclusions. Outre ces fines résonances, on remarque que trois résonances sont présentes autour de 1,85 et 2 MHz, là où le spectre des résonances d'une seule inclusion ne présente que deux résonances autour de chacune de ces deux fréquences. Inversement, on remarque que deux résonances sont présentes aux environs de 1,65 MHz sur le spectre des résonances d'une seule inclusion alors que celui de deux inclusions n'en présente qu'une seule. Ainsi, en dehors des fines résonances issues des conversions  $L \leftrightarrow T$ , les deux cibles ont des comportements résonants légèrement distincts, trahissant les premières manifesta-

tions d'un couplage résonant entre elles, même pour  $\beta > 2,4$ . Examinons maintenant la Figure 1.28 sur laquelle sont superposés les deux spectres expérimentaux obtenus.

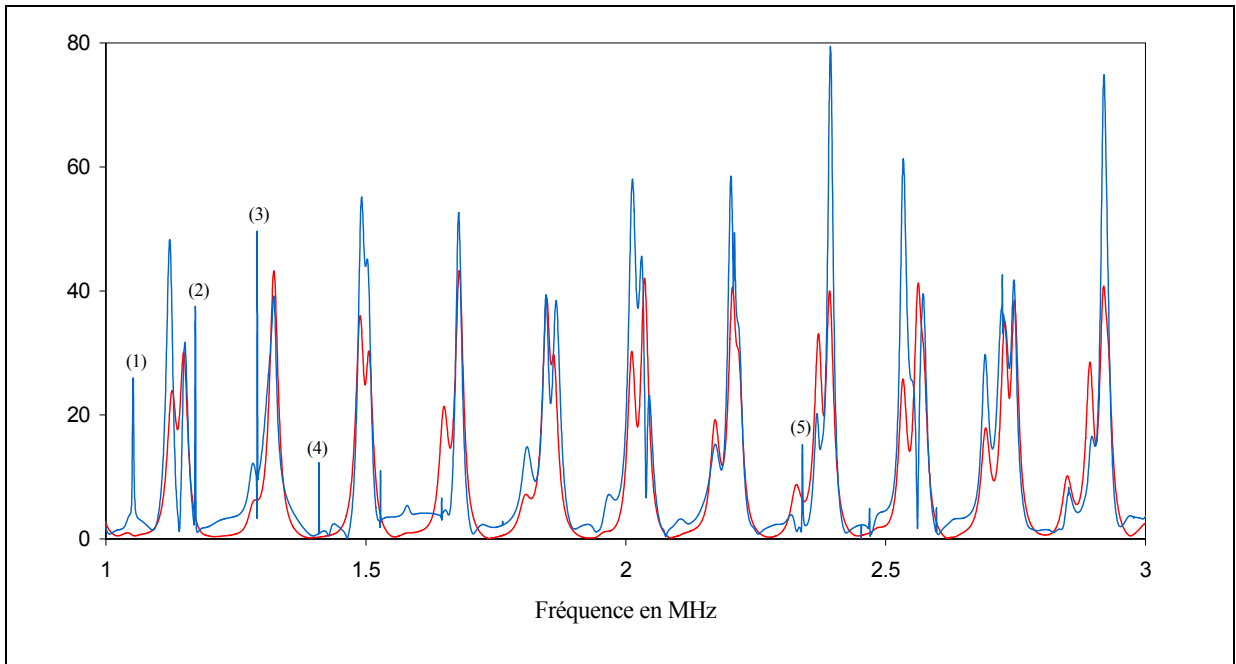


Figure 1.27 : Spectres des résonances théoriques.

a) Rouge : une seule inclusion d'eau. b) bleu : deux inclusions d'eau.

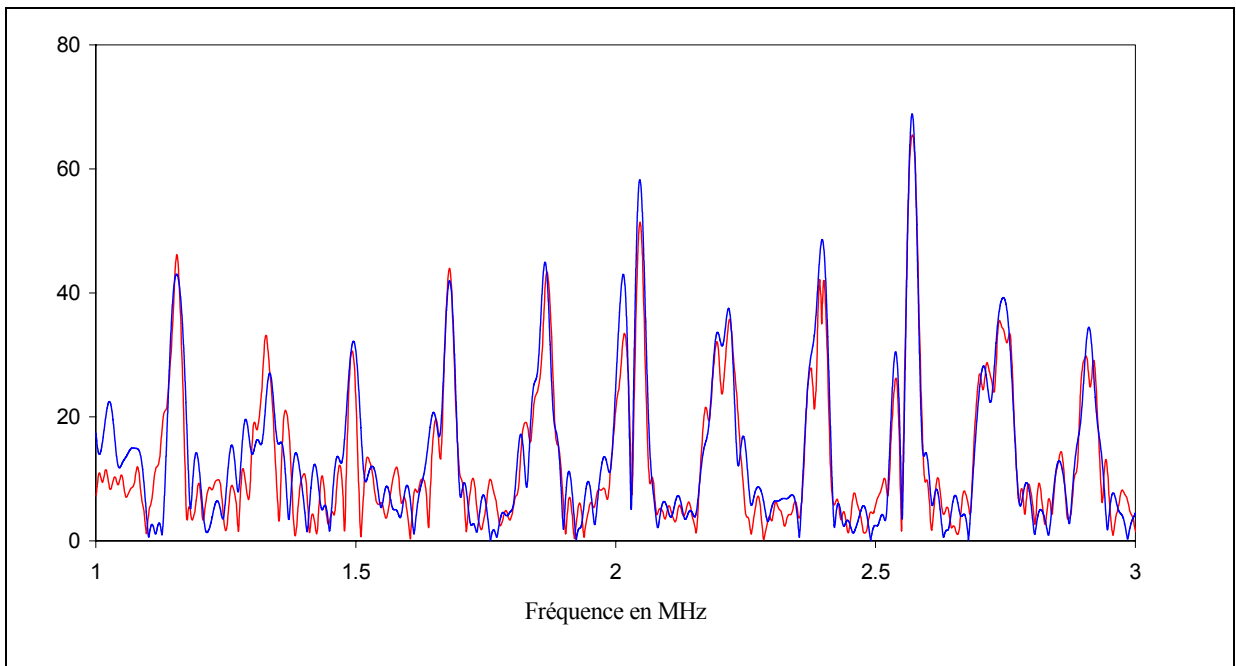


Figure 1.28 : Spectres des résonances expérimentaux.

a) Rouge : une seule inclusion d'eau. b) bleu : deux inclusions d'eau.

Comme ceux théoriques, les deux spectres expérimentaux se ressemblent. Pour des fréquences inférieures à environ 1,5 MHz, le nombre de pics est bien plus important que sur les spectres théoriques. Ces pics étant dans l'ensemble présents sur les deux spectres expérimentaux, ils ne résultent donc pas d'un éventuel effet du couplage résonant entre les deux inclusions.

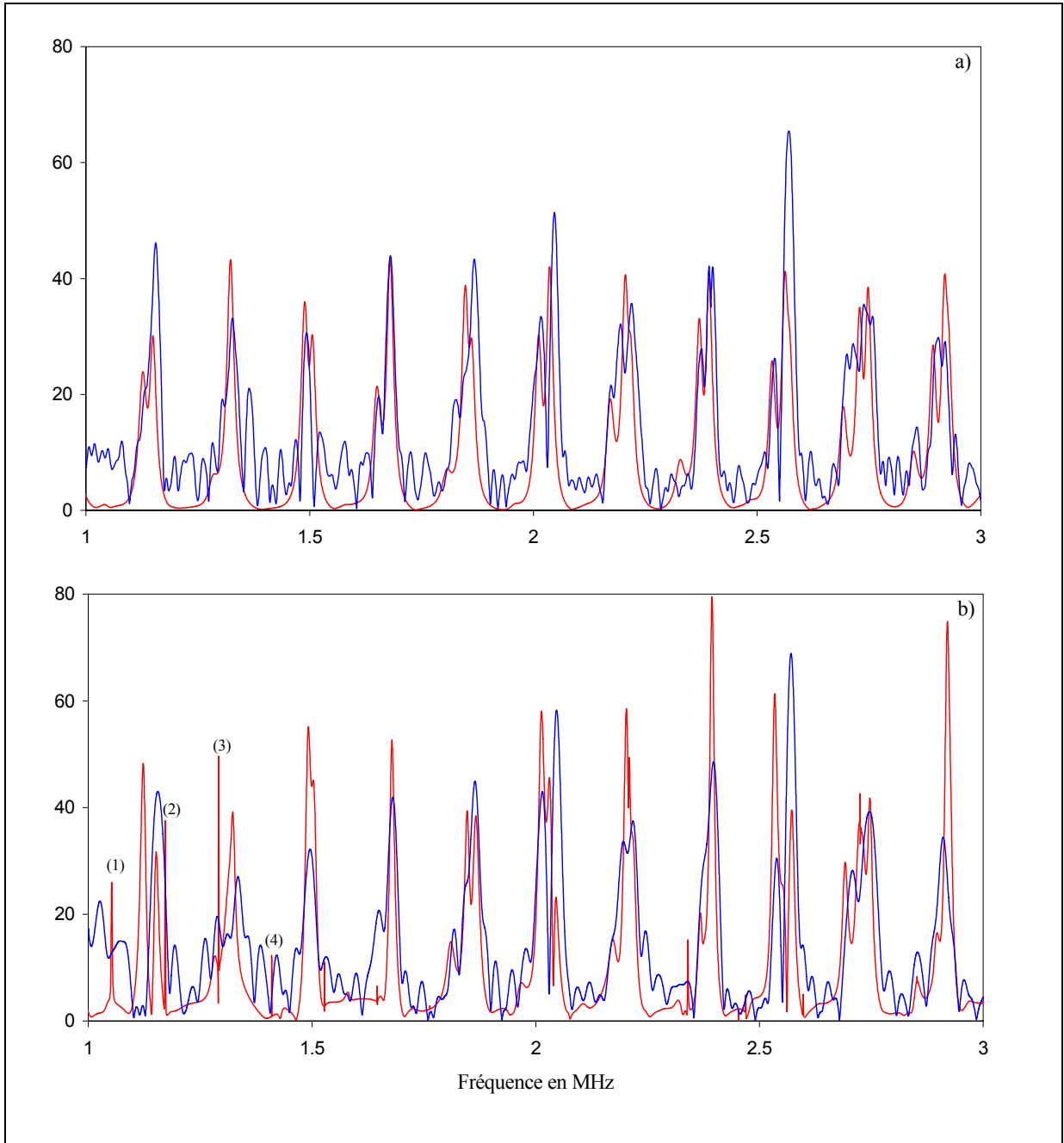


Figure 1.29 : Superpositions des spectres théoriques (rouge) et expérimentaux (bleu).

- a) Une seule inclusion d'eau
- b) Deux inclusions d'eau

La ressemblance des deux spectres obtenus confirme la faible contribution du couplage résonant. Pour comparer maintenant ces résultats avec la théorie, analysons la Figure 1.29 sur laquelle les spectres théoriques sont superposés à ceux expérimentaux.

La première observation est que tous les pics dominants sur les spectres expérimentaux sont très proches des pics de résonance théoriques. La théorie est donc en partie validée. Par contre, de façon générale, les spectres expérimentaux présentent moins de résonances (si l'on exclut les pics de faibles amplitudes) que les spectres théoriques. Par exemple, aux environs de 2 MHz sur le spectre b), trois résonances sont prévues par la théorie alors que l'expérience n'en révèle que deux. Il en est de même autour des fréquences de 1,85 et 2,65 MHz sur le même spectre. D'autre part, on note que les fines résonances numérotées 1, 2, 3 et 4 issues des conversions  $L \leftrightarrow T$  ne semblent pas correspondre à des pics particuliers sur le spectre expérimental b). L'absence de ces résonances ne peut être due à une mauvaise résolution fréquentielle. La résolution est en effet de 100 Hz alors que les largeurs à mi-hauteur des quatre résonances sont de l'ordre de 4 kHz. L'absence de ces résonances, ainsi que d'autres plus larges, résulterait donc des conditions expérimentales ne permettant pas de faire apparaître toutes les résonances prévues par la théorie. Le fait que les fines résonances ne soient pas observables n'est pas surprenant puisqu'on sait que des résonances très fines sont difficilement excitables.

En conclusion, comme le dispositif expérimental ne permet pas de nous placer dans les conditions d'un fort couplage résonant, le comportement résonant d'une seule inclusion n'est pas fondamentalement différent de celui d'une cible de deux inclusions. Le dispositif expérimental ne permet pas alors de distinguer les subtilités révélées par la théorie. Malgré tout, on peut conclure que, globalement, les spectres des résonances théoriques sont validés. Cet accord avec la théorie valide ainsi le dispositif expérimental mis au point qui pourra donc être utilisé dans les chapitres suivants. Les contraintes expérimentales décrites ici n'affecteront pas en effet l'observation des nouveaux phénomènes étudiés dans les chapitres ultérieurs.

## V. CONCLUSION

Ce chapitre visait à étudier les interactions acoustiques dans un réseau comportant un nombre limité d'inclusions cylindriques dans un milieu solide élastique. Il a été mis en évidence que la nature des interactions dominantes entre les inclusions est étroitement liée à la nature du fluide qu'elles renferment. Pour des inclusions d'air, leur faible comportement résonant ne donne lieu qu'à des interactions interférentielles, et ce, quelle que soit la distance qui les sépare. Par contre, pour des inclusions d'eau, un fort couplage résonant a lieu entre ces diffuseurs. Ce couplage intervient au-dessous d'une distance critique entre les inclusions qui a pu être déterminée. Par rapport à des tubes élastiques immergés dans l'eau, le phénomène se manifeste par des effets très différents : i) le nombre maximal de nouvelles résonances résultant du couplage résonant n'est pas en relation avec le nombre de diffuseurs qui interagissent ; ii) les nouvelles résonances ne sont pas forcément issues d'une fragmentation des résonances d'une inclusion isolée, certaines résonances apparaissant en effet à des fréquences très éloignées de celles d'une inclusion seule. L'unique point commun avec le phénomène en milieu fluide est que plus le réseau contient d'inclusions, plus le nombre de nouvelles résonances augmente. En milieu élastique, les spectres deviennent très vite compliqués à analyser en raison de l'augmentation plus rapide du nombre de nouvelles résonances. La forte réémission des inclusions d'eau en milieu élastique donne donc lieu à des mécanismes interactionnels inconnus et visiblement plus complexes que dans le cas de diffuseurs élastiques immergés dans l'eau.

Le chapitre suivant sera consacré à l'étude du comportement résonant d'un réseau constitué d'un nombre infini d'inclusions cylindriques. Pour diminuer les temps de calcul numérique, entre autres, le réseau considéré sera périodique, c'est-à-dire composé d'inclusions identiques et régulièrement espacées selon une seule direction de l'espace. Sous l'hypothèse de périodicité, les équations de la diffusion multiple seront reformulées sous une forme plus adaptée au calcul numérique. Pour un tel réseau, la question qui vient naturellement à l'esprit est la suivante. Est-ce que le comportement résonant du réseau se limite à celui d'une seule inclusion interagissant avec ses plus proches voisines, ou est-ce que le phénomène d'interaction est plus étendu ? Autrement formulée, est-ce que la diffusion résonante par le réseau peut-être décrite par un réseau limité de quelques inclusions, comme dans ce chapitre, ou est-ce qu'elle est propre au réseau linéaire infini ?

# DIFFUSION RÉSONANTE PAR UN RÉSEAU LINÉAIRE INFINI D'INCLUSIONS CYLINDRIQUES

---

*L'objectif, dans ce chapitre, est d'étudier le comportement résonant d'un réseau linéaire, périodique et infini d'inclusions d'eau cylindriques. En utilisant deux méthodes d'isolement et de détection des résonances — l'une basée sur la dérivée fréquentielle des phases des coefficients de transmission, et l'autre sur les valeurs propres de la matrice  $S$  — il s'agit, entre autres, de comparer le comportement résonant d'un tel réseau à celui d'un réseau limité de quelques inclusions afin d'identifier les effets du nombre infini d'inclusions et de la géométrie particulière du réseau. Suite à une introduction récapitulant les travaux auxquels nous nous référerons, le formalisme est présenté dans la deuxième section. La diffusion par le réseau linéaire infini y est exprimée sous la forme de superpositions d'une infinité d'ondes planes réfléchies et transmises dans une infinité de directions. Dans la troisième section, les résonances du réseau sont analysées numériquement dans le domaine des basses fréquences pour éviter tout effet de la diffraction (le réseau se comporte alors formellement comme une interface plane solide/solide). Dans l'avant-dernière section, les fréquences de coupure du réseau (au-delà de chaque fréquence de coupure, le réseau diffracte une onde plane supplémentaire) sont identifiées expérimentalement dans le but de valider la théorie. Enfin, la dernière et cinquième section est une conclusion récapitulant les résultats à retenir pour l'étude, dans le troisième chapitre, de réseaux périodiques dans deux dimensions de l'espace.*

---

## I. INTRODUCTION

L'objectif, dans ce chapitre, est l'étude du comportement résonant d'un réseau constitué d'un nombre infini d'inclusions cylindriques [22]. Les inclusions sont remplies d'eau ce qui, d'après le chapitre précédent, leur confère un fort comportement résonant. Le réseau est d'autre part périodique, c'est-à-dire composé d'inclusions identiques et périodiquement espacées dans une direction de l'espace. A notre connaissance, les résonances de ce type de cible n'ont pas été étudiées, que ce soit en milieu fluide ou solide. En se basant sur les résultats acquis du premier chapitre, le but de ce travail est, entre autres, de comparer le comportement résonant du réseau avec celui d'un réseau limité de quelques inclusions. En effet, du point de vue d'un réseau infini, les résultats sur les interactions résonantes dans un réseau limité représentent les phénomènes interactionnels à l'échelle locale, c'est-à-dire entre une inclusion du réseau infini et ses plus proches voisines. En comparant les résultats avec ceux d'un réseau limité, on peut alors déterminer si le comportement résonant du réseau linéaire infini est régi par des phénomènes interactionnels plutôt localisés ou bien par des phénomènes nouveaux, plus étendus et caractéristiques de la géométrie particulière du réseau.

Pour calculer les champs acoustiques transmis et réfléchis par un réseau linéaire infini, le point de départ est le formalisme de la diffusion multiple développé dans le premier chapitre. En état, il est cependant mal adapté à l'étude d'un nombre infini de diffuseurs en raison des dimensions infinies des systèmes linéaires à résoudre pour l'obtention des coefficients de diffusion. L'introduction de la condition de périodicité permet alors de réduire considérablement la taille du système. Lorsque les coefficients de diffusion de tous les diffuseurs du réseau sont connus, les champs transmis et réfléchis peuvent être exprimés sous la forme de superpositions d'ondes planes diffractées sous différents angles [23,24]. Autrement dit, le réseau linéaire infini d'inclusions cylindriques peut être considéré comme un réseau de Bragg. Par rapport au travail de C. Audoly *et al.* [25] traitant de réseaux de tubes immergés dans un fluide, par exemple, il s'agit dans notre cas d'étendre le formalisme à la diffusion en milieu

---

[22] S. Robert, H. Franklin, J.-M. Conoir, *Elastic resonances of a periodic infinite array of fluid-filled cylindrical cavities embedded in an elastic medium*, Journal of Sound and Vibration, article soumis en octobre 2004.

[23] V. Twersky, *On the scattering of waves by an infinite array*, IEEE Trans. AP-4, pp. 330-345, 1956.

[24] V. Twersky, *On the scattering of waves by an infinite array of circular cylinders*, IEEE Trans. AP-10, pp. 737-765, 1962.

[25] C. Audoly et G. Duméry, *Modelling of compliant tube underwater reflectors*, J. Acoust. Soc. Am. 87, pp. 1841-1846, 1990.

élastique, c'est-à-dire en prenant en compte la propagation d'ondes longitudinales et transversales, ainsi que leurs conversions. En milieu élastique, pour chaque direction de diffraction donnée, le réseau est caractérisé par huit coefficients de réflexion et de transmission, dont quatre associés aux conversions entre les ondes longitudinales et transversales.

Bien que le formalisme présenté soit indépendant de la fréquence, la transmission et la réflexion par le réseau ne seront étudiées qu'aux basses fréquences pour simplifier l'analyse des résonances. Aux basses fréquences, le réseau n'agit plus comme un plan diffractant. Il ne réfléchit ou ne transmet en effet qu'une onde plane longitudinale et une autre transversale qui soient propagatives. La réflexion et la transmission par le réseau s'écrivent alors de la même façon que pour une interface plane solide/solide. La seule différence réside dans le calcul des coefficients de réflexion et de transmission qui s'expriment ici en fonction de tous les coefficients de diffusion du réseau, autrement, les équations sont formellement identiques.

Pour analyser le comportement résonant du réseau, deux voies seront suivies dans ce chapitre. En premier lieu, nous analyserons, à l'instar du premier chapitre, les coefficients de transmission et la dérivée de leur phase par rapport à la fréquence. L'intérêt de la méthode est que les coefficients de transmission sont directement accessibles par l'expérience. En revanche, nous verrons que les informations fournies par cette méthode restent partielles. Plus rigoureusement, l'étude des résonances sera menée en utilisant le concept de matrice  $S$ . La construction de cette matrice s'effectue à l'aide des lois de conservation de l'énergie établies par des calculs de flux d'énergie au travers du réseau. L'étude des résonances peut alors se faire en traçant directement les valeurs propres de la matrice  $S$ . Cependant, les spectres obtenus sont difficiles à analyser en raison de la présence d'un fond potentiel identique à celui que fournit un réseau d'inclusions d'air non résonantes. L'idée consiste alors à retirer ce fond potentiel comme spécifié par la théorie de la diffusion à plusieurs canaux [15,26] (*Multichannel Resonant Scattering Theory*, MRST). Après retrait du fond potentiel, la matrice  $S$ , dite de résonance, n'est relative qu'aux vibrations propres de l'eau contenue dans les inclusions. Comme pour une seule inclusion d'eau [27,9], cette opération permet d'isoler clairement les réso-

[15] L. Flax, L. R. Dragonette et H. Überall, *Theory of elastic resonance excitation by sound scattering*, J. Acoust. Soc. Am. 63 (3), pp.723-731, 1978.

[26] E. B. Danila, J.-M. Conoir, P. Pareige et J.-L. Izicki, *Multichannel resonant scattering theory applied to the acoustic scattering by an eccentric elastic cylindrical shell immersed in a fluid*, Wave Motion 28, pp. 297-318, 1998.

[27] P. Rembert, H. Frankin et J.-M. Conoir, *Resonant Scattering Theory applied to a fluid-filled cylindrical cavity*, J. Acoust. Soc. Am. 63 (3), pp.723-731, 2004.



nances du réseau à partir des valeurs propres de la matrice  $S$  de résonance. Les résultats sont alors comparés avec ceux donnés par les coefficients de transmission et la dérivée de leur phase par rapport à la fréquence.

## II. RÉFLEXION ET TRANSMISSION PAR UN RÉSEAU LINÉAIRE INFINI

### II.1 Position du problème

L'objectif de cette section est d'écrire le champ diffusé par un réseau linéaire infini sous la forme d'ondes planes réfléchies et transmises. La géométrie du réseau et les notations utilisées sont présentées sur la Figure 2.1 ci-dessous.

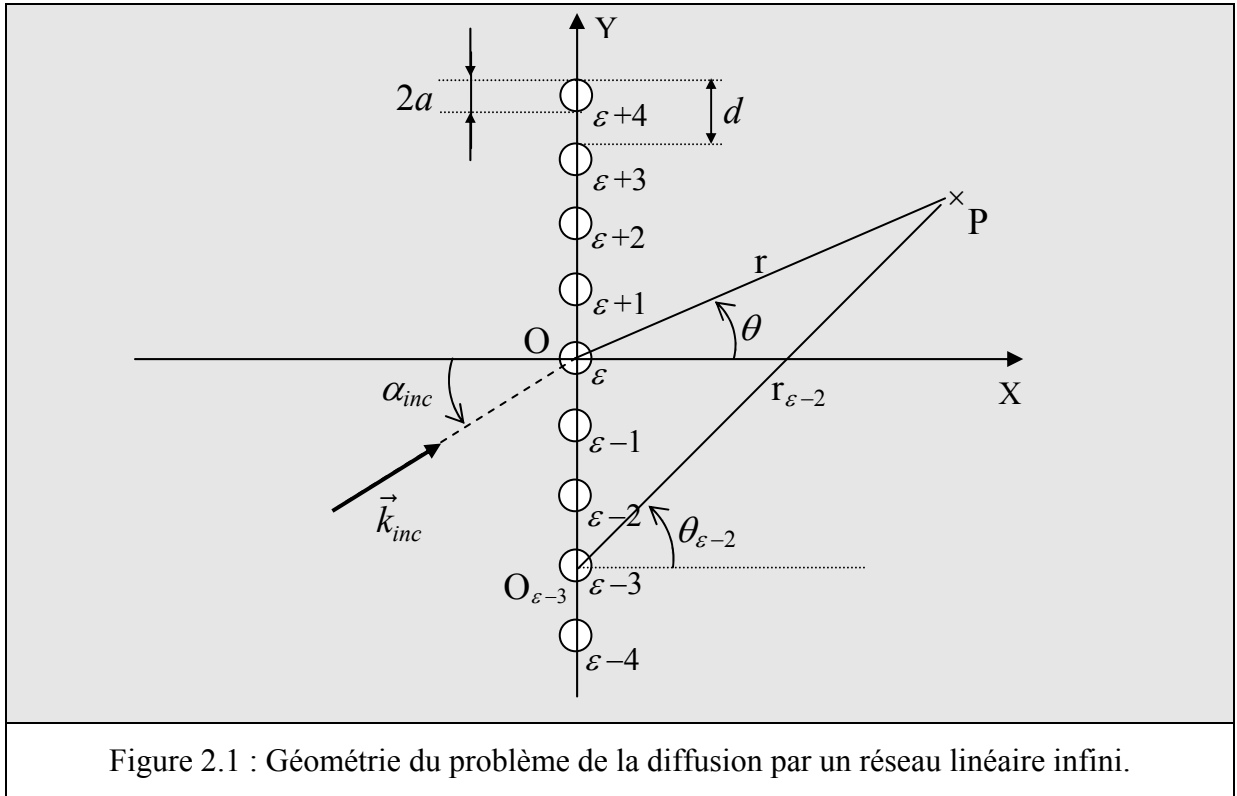


Figure 2.1 : Géométrie du problème de la diffusion par un réseau linéaire infini.

Le réseau est composé d'inclusions identiques, de rayon  $a$ , placées de façon périodique selon l'axe  $Oy$  avec un pas de réseau égal à  $d$ . Par rapport au chapitre précédent où  $\varepsilon$  était un entier naturel fini, l'indice  $\varepsilon$  de numérotation des inclusions est ici un entier relatif variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ . D'après (1.35) et (1.36), le champ diffusé au point d'observation  $P$  est donc donné par

[9] S. G. Solomon, H. Überall et K. B. Yoo, *Mode conversion and resonance scattering of elastic waves from a cylindrical fluid-filled cavity*, *Acustica* 55, pp. 147-159, 1984.

$$\phi_s = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(\varepsilon)incL} H_n^{(1)}(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}, \quad (2.1)$$

$$\psi_s = \sum_{\varepsilon=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{(\varepsilon)incT} H_n^{(1)}(k_T r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon}, \quad (2.2)$$

en rappelant que les coefficients  $C_n^{(\varepsilon)incL}$  et  $C_n^{(\varepsilon)incT}$  sont solutions des systèmes d'équations linéaires couplées

$$\begin{cases} C_m^{(\varepsilon)incL} - T_m^{(\varepsilon)LL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)incL} - T_m^{(\varepsilon)TL} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)incT} = T_m^{(\varepsilon)LL} A_m^{(\varepsilon)inc} \\ C_m^{(\varepsilon)incT} - T_m^{(\varepsilon)LT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Lnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)incL} - T_m^{(\varepsilon)TT} \sum_{\tau \neq \varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{Tnm}^{(\tau\varepsilon)} C_n^{(\tau)incT} = T_m^{(\varepsilon)LT} A_m^{(\varepsilon)inc} \end{cases} \quad (2.3)$$

où la sommation sur  $\tau$  est ici une sommation de  $-\infty$  à  $+\infty$ . En état, la résolution du problème pour un nombre « infini » d'inclusions requiert des temps de calcul « infiniment » longs (voir Annexe 2). Il s'agit alors de tenir compte de l'hypothèse de périodicité du réseau (inclusions identiques et distribution périodique) pour récrire ces systèmes sous une forme plus adaptée à une résolution rapide. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

## II.2 Reformulation des équations de la diffusion multiple sous l'hypothèse de périodicité

Désormais, la mise en équation sera effectuée dans le cas d'une onde incidente longitudinale ( $inc = L$ ), la généralisation à tout type d'onde incidente s'effectuant sans difficulté. D'après la Figure 2.1, le repère lié à l'inclusion  $\varepsilon$  a été choisi comme repère principal ( $xOy$ ). Par suite, le potentiel scalaire de l'onde incidente sur l'inclusion  $\varepsilon$  s'écrit

$$\varphi_{inc}^{(\varepsilon)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(\varepsilon)L} J_n(k_L r_\varepsilon) e^{in\theta_\varepsilon} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^L J_n(k_L r) e^{in\theta} \quad (2.4)$$

où  $A_n^L$  est réduit à

$$A_n^L = i^n e^{-in\alpha_L}. \quad (2.5)$$

D'une inclusion à une autre, le potentiel incident est le même mais déphasé de la quantité

$$\varphi_L = k_L d \sin \alpha_L \quad (2.6)$$

lorsque l'on passe de l'inclusion  $\varepsilon$  à celle  $\varepsilon+1$ . Par suite, pour respecter l'hypothèse de périodicité, les coefficients de diffusion doivent nécessairement vérifier la condition

$$C_n^{(\varepsilon+1)LL} = C_n^{(\varepsilon)LL} e^{i\varphi_L}, \quad C_n^{(\varepsilon+1)LT} = C_n^{(\varepsilon)LT} e^{i\varphi_L}. \quad (2.7)$$

De façon plus générale, d'une inclusion  $\varepsilon$  à une inclusion  $\varepsilon+p$ , avec  $p \in \mathbb{Z}$ , les coefficients de diffusion doivent vérifier

$$C_n^{(\varepsilon+p)LL} = C_n^{(\varepsilon)LL} e^{ip\varphi_L}, \quad C_n^{(\varepsilon+p)LT} = C_n^{(\varepsilon)LT} e^{ip\varphi_L}. \quad (2.8)$$

De cette façon, nous pouvons donc éliminer un grand nombre de coefficients inconnus dans les systèmes d'équations linéaires (2.3) en ne conservant que les coefficients de diffusion de l'inclusion  $\varepsilon$ . Ces coefficients seront notés par la suite  $C_n^{LL}$  et  $C_n^{LT}$ . D'autre part, le fait de choisir l'inclusion  $\varepsilon$  comme diffuseur de référence conduit à poser

$$p = \tau - \varepsilon, \quad r_{\varepsilon\tau} = pd, \quad \theta_{\varepsilon\tau} = \theta_p, \quad (2.9)$$

avec  $\theta_p = +\pi/2$  si  $p > 0$  et  $\theta_p = -\pi/2$  si  $p < 0$ . Les notations  $r_{\varepsilon\tau}$  et  $\theta_{\varepsilon\tau}$  ont été introduites dans le paragraphe I.2 lors de l'écriture du théorème d'addition de Graff. Compte tenu des nouvelles notations introduites, l'opérateur de Graff défini par (1.20) devient

$$G_{L,Tnm}^{(\tau\varepsilon)} = e^{i(n-m)\theta_p} H_{n-m}^{(1)}(k_{L,T}pd). \quad (2.10)$$

L'introduction de (2.8) et (2.10) dans le système (2.3) conduit à (Equation (2.11))

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m^{LL} - T_m^{LL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_Lpd) - T_m^{TL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_Tpd) = T_m^{LL} A_m^L \\ C_m^{LT} - T_m^{LT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_Lpd) - T_m^{TT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_Tpd) = T_m^{LT} A_m^L \end{array} \right.$$

D'autre part, en tenant compte de la loi de Snell-Descartes

$$k_L \sin \alpha_L = k_T \sin \alpha_T, \quad (2.12)$$

le système (2.11) peut également s'écrire (Equation (2.13))

$$\begin{cases} C_m^{LL} - T_m^{LL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) - T_m^{TL} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_T} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) = T_m^{LL} A_m^L \\ C_m^{LT} - T_m^{LT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_L} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) - T_m^{TT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \sum_{p \neq 0} e^{i(n-m)\theta_p} e^{ip\varphi_T} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) = T_m^{LT} A_m^L \end{cases}$$

Cette dernière forme d'écriture a pour but d'introduire les séries définies par

$$\sigma_{nm}^L = \sigma(\alpha_L, n-m) = \sum_{p \neq 0} H_{n-m}^{(1)}(k_L pd) e^{ik_L pd \sin \alpha_L} e^{i(n-m)\theta_p}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{nm}^T = \sigma(\alpha_T, n-m) = \sum_{p \neq 0} H_{n-m}^{(1)}(k_T pd) e^{ik_T pd \sin \alpha_T} e^{i(n-m)\theta_p}. \quad (2.15)$$

L'introduction de ces séries permet de récrire (2.13) de façon plus compacte, à savoir

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ [\delta_{nm} - T_m^{LL} \sigma_{nm}^L] C_n^{LL} - T_m^{TL} \sigma_{nm}^T C_n^{LT} \right\} = T_m^{LL} A_m^L \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ [\delta_{nm} - T_m^{TT} \sigma_{nm}^T] C_n^{LT} - T_m^{LT} \sigma_{nm}^L C_n^{LL} \right\} = T_m^{LT} A_m^L \end{cases} \quad (2.16)$$

Ce système étant valable quel que soit  $m$ , il peut être récrit en termes de matrices et de vecteurs. En introduisant la matrice de dimensions infinies

$$\sigma^{L,T} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \dots & \sigma_{n-1n-1}^{L,T} & \sigma_{n-1n}^{L,T} & \sigma_{n-1n+1}^{L,T} & \dots \\ \dots & \sigma_{nn-1}^{L,T} & \sigma_{nn}^{L,T} & \sigma_{nn+1}^{L,T} & \dots \\ \dots & \sigma_{n+1n-1}^{L,T} & \sigma_{n+1n}^{L,T} & \sigma_{n+1n+1}^{L,T} & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

et en reprenant les vecteurs et les matrices définis par (1.10), (1.26) et (1.27), le système matriciel à résoudre s'écrit finalement

$$\begin{bmatrix} I_d - T^{LL} \bar{\sigma}^L & -T^{TL} \bar{\sigma}^T \\ -T^{LT} \bar{\sigma}^L & I_d - T^{TT} \bar{\sigma}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}^{LL} \\ \vec{C}^{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{LL} \\ T^{LT} \end{bmatrix} \vec{A}^L \quad (2.18)$$

où  $\bar{\sigma}^{L,T}$  désigne la matrice transposée de  $\sigma^{L,T}$ . Par rapport au chapitre précédent où le système à résoudre était un système de  $2N$  équations à  $2N$  inconnues, avec  $N$  le nombre d'inclusions, l'hypothèse d'un réseau constitué d'inclusions identiques permet donc de réduire ce système à seulement deux équations pour deux inconnues. D'autre part, l'hypothèse d'une répartition périodique des inclusions permet d'introduire la série  $\sigma$ . Cette série prend deux formes suivant que son ordre est pair ( $n - m = 2q$ ) ou impair ( $n - m = 2q + 1$ ) :

$$\sigma(\alpha_{L,T}, q) = 2(-1)^q \sum_{p=1}^{+\infty} H_{2q}^{(1)}(k_{L,T}pd) \cos(k_{L,T}pd \sin \alpha_{L,T}), \quad (2.19)$$

$$\sigma(\alpha_{L,T}, 2q + 1) = 2(-1)^q \sum_{p=1}^{+\infty} H_{2q+1}^{(1)}(k_{L,T}pd) \sin(k_{L,T}pd \sin \alpha_{L,T}). \quad (2.20)$$

Ces deux séries sont des séries de Schlömilch. Elles sont toutes deux mal conditionnées pour le calcul numérique car elles convergent très lentement. Cependant, V. Twersky a obtenu des expressions analytiques équivalentes qui convergent beaucoup plus rapidement [28]. Ces expressions, utilisées pour nos calculs numériques, sont fournies dans l'Annexe 3. L'hypothèse de périodicité du réseau infini (inclusions identiques et distribution périodique) permet en fin de compte de réduire considérablement les temps de calcul puisque ces derniers sont alors comparables à ceux mis en jeu dans le calcul de la diffusion par un réseau limité de quelques inclusions. L'Annexe 4 présente une étude comparative de ces temps de calcul entre un réseau infini et un réseau limité de trois inclusions.

### II.3 Décomposition du champ diffusé en une somme d'ondes planes

Les coefficients de diffusion du réseau  $C_n^{LL}$  et  $C_n^{LT}$  sont désormais connus. Compte tenu des conditions (2.8), les composantes du champ diffusé définies par (2.1) et (2.2) peuvent s'écrire respectivement

$$\phi_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \Sigma_n^L, \quad (2.21)$$

$$\psi_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \Sigma_n^T, \quad (2.22)$$

---

[28] V. Twersky, *Elementary functional representations of Schlömilch series*, Archives of Rational Mechanics Analysis 8, pp. 270-279, 1998.

avec

$$\Sigma_n^L = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ik_L pd \sin \alpha_L} H_n^{(1)}(k_L r_p) e^{in\theta_p} \quad (2.23)$$

et

$$\Sigma_n^T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ik_T pd \sin \alpha_T} H_n^{(1)}(k_T r_p) e^{in\theta_p}, \quad (2.24)$$

où  $p$  est l'indice de numérotation des diffuseurs. Au vu de ces expressions, le champ diffusé par le réseau s'interprète alors comme la superposition d'une infinité d'ondes cylindriques de type

$$\left[ e^{ik_{L,T} pd \sin \alpha_{L,T}} C_n^{L,T} \right] H_n^{(1)}(k_{L,T} r_p) e^{in\theta_p}$$

où le terme entre crochets représente leur amplitude. L'objectif, dans ce paragraphe, est de montrer que, suffisamment loin du réseau, le champ diffusé de part et d'autre de ce dernier peut aussi s'écrire comme une superposition d'ondes planes. Pour ce faire, nous ferons appel à la théorie des distributions, et procéderons en deux étapes : tout d'abord décomposer en ondes planes les termes d'ordre 0 des séries (2.23) et (2.24), puis écrire cette décomposition pour n'importe quel ordre  $n$ . La démonstration figure en détail dans la référence [29], l'unique différence étant ici la prise en compte des conversions entre les ondes longitudinales et transversales.

### II.3.1 Décomposition en ondes planes de $\Sigma_0^{L,T}$

En effectuant les changements de variable  $\xi_{L,T} = \pi/2 - \alpha_{L,T}$ , les termes d'ordre 0 des séries (2.23) et (2.24) s'écrivent

$$\Sigma_0^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ik_{L,T} pd \cos \xi_{L,T}} H_0^{(1)}(k_{L,T} r_p). \quad (2.25)$$

Au sens des distributions,  $H_0^{(1)}(k_{L,T} r_p)$  est solution de l'équation de Helmholtz inhomogène

$$\left[ \Delta + k_{L,T}^2 \right] H_0^{(1)}(k_{L,T} r_p) = 4i \delta(x) \delta(y - pd) \quad (2.26)$$

---

[29] G. Dumery, *Contribution à la théorie des réseaux d'objets diffringents*, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille, 1967.

où  $\delta$  représente la distribution de Dirac.  $H_0^{(1)}(k_{L,T}r_p)$  est la fonction de Green de l'équation des ondes à deux dimensions et  $\delta(x)\delta(y-pd)$  représente un point source localisé en  $x=0$  et  $y=pd$ . Par suite,  $H_0^{(1)}(k_{L,T}r_p)$  représente le champ rayonné par le point source situé en  $(0, pd)$ . Compte tenu de la linéarité de l'opérateur de Helmholtz, les séries  $\Sigma_0^{L,T}$  vérifient nécessairement l'équation

$$\left[ \Delta + k_{L,T}^2 \right] \Sigma_0^{L,T} = 4i\delta(x) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \delta(y-pd) e^{ik_{L,T}pd \cos \xi_{L,T}}, \quad (2.27)$$

qui, après quelques transformations, peut encore s'écrire

$$\left[ \Delta + k_{L,T}^2 \right] \Sigma_0^{L,T} = \frac{4i}{d} \delta(x) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} e^{ik_{L,T}y \cos \zeta_p^{L,T}} \quad (2.28)$$

en posant

$$\cos \zeta_p^{L,T} = \cos \xi_{L,T} + \frac{2p\pi}{k_{L,T}d}. \quad (2.29)$$

L'idée consiste maintenant à chercher la solution  $u_p^{L,T}$  de l'équation de Helmholtz inhomogène

$$\left[ \Delta + k_{L,T}^2 \right] u_p^{L,T} = \frac{4i}{d} \delta(x) e^{ik_{L,T}y \cos \zeta_p^{L,T}}, \quad (2.30)$$

où  $u_p^{L,T}$  représentera *in fine* une onde plane réfléchie ou transmise par le réseau. La méthode consiste tout d'abord à chercher la solution générale de (2.30) après transformée de Fourier membre à membre de cette dernière par rapport à la variable  $x$ . Cette transformée de Fourier conduit à

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + [k_{L,T}^2 - \lambda^2] \right\} \tilde{u}_p^{L,T} = \frac{4i}{d} e^{ik_{L,T}y \cos \zeta_p^{L,T}} \quad (2.31)$$

en notant

$$\tilde{u}_p^{L,T} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_p^{L,T} e^{-i\lambda x} dx \quad (2.32)$$

(où  $\lambda$  est la variable conjuguée de  $x$  par transformation de Fourier). Supposons une solution  $\tilde{u}_p^{L,T}$  de la forme suivante

$$\tilde{u}_p^{L,T} = c e^{ik_{L,T}y \cos \zeta_p^{L,T}} \quad (2.33)$$

où  $c$  est une constante à déterminer. En injectant (2.33) dans (2.31), on montre alors que

$$\tilde{u}_p^{L,T} = \left[ \frac{4i}{d} e^{ik_{L,T}y \cos \zeta_p^{L,T}} \right] \frac{1}{k_{L,T}^2 \sin^2 \zeta_p^{L,T} - \lambda^2}. \quad (2.34)$$

A partir de maintenant, considérons  $\tilde{u}_p^{L,T}$  comme une fonction de  $\lambda$ . Dans ce cas, la quantité

$$c_0 = \frac{4i}{d} e^{ik_{L,T}y \cos \zeta_p^{L,T}} \quad (2.35)$$

est une constante, et  $\tilde{u}_p^{L,T}$  vérifie l'équation

$$\left[ \left( k_{L,T} \sin \zeta_p^{L,T} \right)^2 - \lambda^2 \right] \tilde{u}_p^{L,T} = c_0. \quad (2.36)$$

D'après la théorie des distributions, il résulte de (2.36) que

$$\tilde{u}_p^{L,T} = \frac{4i}{d} \frac{e^{ik_{L,T} \cos \zeta_p^{L,T} y}}{\left( k_{L,T} \sin \zeta_p^{L,T} \right)^2 - \lambda^2} + c_1 \delta(\lambda - k_{L,T} \sin \zeta_p^{L,T}) + c_2 \delta(\lambda + k_{L,T} \sin \zeta_p^{L,T}) \quad (2.37)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes arbitraires par rapport à la variable  $\lambda$ . Par suite, la transformée de Fourier inverse de (2.37) conduit à

$$u_p^{L,T} = 2i \frac{e^{ik_{L,T}y \cos \zeta_p^{L,T}}}{k_{L,T} d \sin \zeta_p^{L,T}} \text{sign}(x) \sin(k_{L,T} x \sin \zeta_p^{L,T}) + c_1 e^{-ik_{L,T}x \sin \zeta_p^{L,T}} + c_2 e^{ik_{L,T}x \sin \zeta_p^{L,T}} \quad (2.38)$$

où  $\text{sgn}(x) = 1$  si  $x > 0$  et  $\text{sgn}(x) = -1$  si  $x < 0$ . Pour la détermination des constantes  $c_1$  et  $c_2$ , la seule façon d'aboutir à une solution qui représente des ondes qui se propagent en s'éloignant du réseau consiste à poser

$$c_1 = c_2 = \frac{e^{ik_{L,T}y \cos \zeta_p^{L,T}}}{k_{L,T} d \sin \zeta_p^{L,T}}. \quad (2.39)$$

Autrement dit, les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont choisies ici pour respecter les conditions de rayonnement à l'infini de Sommerfeld. Finalement, en injectant (2.39) dans (2.38) pour  $x > 0$  et  $x < 0$ , on montre que quel que soit  $x$

$$u_p^{L,T} = \frac{2}{k_{L,T} d \sin \zeta_p^{L,T}} e^{ik_{L,T}[|x| \sin \zeta_p^{L,T} + y \cos \zeta_p^{L,T}]}. \quad (2.40)$$

Pour  $x < 0$ , on a  $|x| = -x$  et  $u_p^{L,T}$  représente une onde plane se propageant vers les  $x$  négatifs. L'onde incidente est supposée se propager vers les  $x$  positifs donc  $u_p^{L,T}$  représente une onde



plane réfléchi par le réseau. Pour  $x > 0$ , on a  $|x| = x$  et  $u_p^{L,T}$  représente une onde plane transmise. Comme les termes  $u_p^{L,T}$  sont solutions de (2.30), alors les séries

$$\Sigma_0^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_{L,T} d \sin \zeta_p^{L,T}} e^{ik_{L,T}[x|\sin \zeta_p^{L,T} + y \cos \zeta_p^{L,T}]} \quad (2.41)$$

avec

$$\cos \zeta_p^{L,T} = \cos \xi_{L,T} + \frac{2p\pi}{k_{L,T} d} = \sin \alpha_{L,T} + \frac{2p\pi}{k_{L,T} d}, \quad (2.42)$$

sont bien solutions de l'équation Helmholtz inhomogène (2.27) régissant la diffusion par le réseau linéaire. Le terme  $\cos \zeta_p^{L,T}$  de cette dernière équation tend vers l'infini quand  $p$  tend vers l'infini. Il est par conséquent préférable de changer de notation. Introduisons  $\alpha_p^{L,T}$  tel que

$$\alpha_p^L = k_L \sin \alpha_L + \frac{2p\pi}{d} = \alpha_p^T = k_T \sin \alpha_T + \frac{2p\pi}{d}, \quad (2.43)$$

où l'égalité  $\alpha_p^L = \alpha_p^T$  émane de la loi de Snell-Descartes. En notant alors  $k_p^{L,T} = k_{L,T} \sin \zeta_p^{L,T}$ ,  $k_p^{L,T}$  se déduit de  $\alpha_p^{L,T}$  par

$$k_p^{L,T} = \left[ k_{L,T}^2 - \alpha_p^{L,T^2} \right]^{1/2}. \quad (2.44)$$

Avec ces notations,  $\Sigma_0^{L,T}$  se met sous la forme suivante

$$\Sigma_0^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_p^{L,T} d} e^{i[k_p^{L,T}|x| + \alpha_p^{L,T}y]}. \quad (2.45)$$

Il apparaît donc clairement que  $\Sigma_0^{L,T}$  est une somme d'ondes planes qui ont pour vecteurs d'onde

$$\vec{K}_p^{L,T} = \begin{bmatrix} K_{px}^{L,T} \\ K_{py}^{L,T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_p^{L,T} \\ \alpha_p^{L,T} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Au vu de (2.43), quand  $p$  tend vers l'infini, il en est de même pour  $\alpha_p^{L,T}$ . Il faut par conséquent préciser la détermination de la racine de l'expression (2.44). Pour  $|\alpha_p^{L,T}| \leq k_{L,T}$ , la composante  $k_p^{L,T}$  du vecteur d'onde  $\vec{K}_p^{L,T}$  est réelle et définie par

$$k_p^{L,T} = \sqrt{k_{L,T}^2 - \alpha_p^{L,T^2}}, \quad (2.47)$$

et pour  $|\alpha_p^{L,T}| > k_{L,T}$ ,  $k_p^{L,T}$  devient imaginaire pur et s'écrit

$$k_p^{L,T} = \pm i \sqrt{\alpha_p^{L,T^2} - k_{L,T}^2} . \quad (2.48)$$

Pour effectuer un choix entre les déterminations positive et négative devant la racine, il faut se reporter à l'expression de  $\Sigma_0^{L,T}$  dans le cas où  $|\alpha_p^{L,T}| > k_{L,T}$ . Il apparaît alors que les ondes ne seront évanescentes que si l'on choisit la détermination positive. Lorsque  $|\alpha_p^{L,T}| \leq k_{L,T}$ ,  $\Sigma_0^{L,T}$  représente une somme d'ondes planes homogènes réfléchies et transmises suivant différents angles définis par (2.43) et (2.47) de la façon suivante

$$\sin \theta_p^{L,T} = \frac{\alpha_p^{L,T}}{\sqrt{\alpha_p^{L,T^2} + k_p^{L,T^2}}}. \quad (2.49)$$

La Figure 2.2 ci-dessous décrit les directions de propagation des modes  $p$  homogènes transmis, l'un de type longitudinal et l'autre de type transversal.

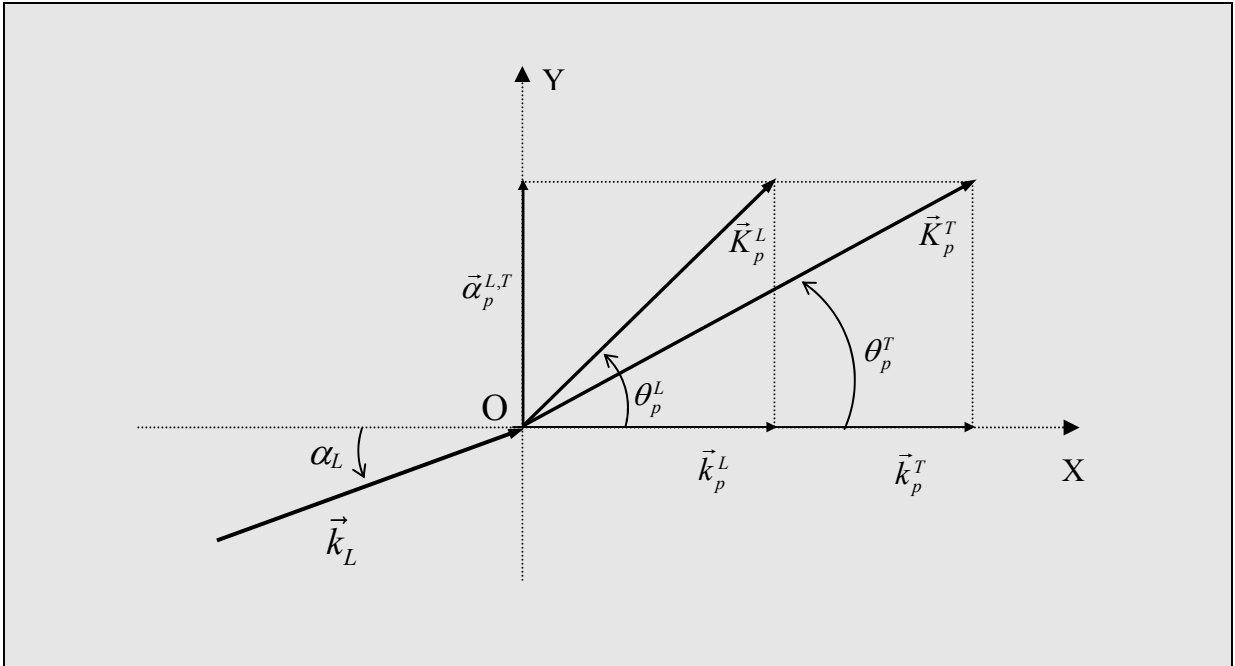


Figure 2.2 : Vecteurs d'onde des modes  $p$  homogènes transmis par le réseau.

Comme le suggère cette figure, les modes  $p$  transmis ou réfléchis par le réseau ne vérifient pas nécessairement la loi de Snell-Descartes puisque, d'après (2.43),  $\vec{\alpha}_p^L = \vec{\alpha}_p^T \neq k_L \sin \alpha_L$  quand  $p \neq 0$ . Seuls les modes fondamentaux,  $p = 0$ , vérifiant  $\vec{\alpha}_0^L = \vec{\alpha}_0^T = k_L \sin \alpha_L$ , satisfont la loi de Snell-Descartes.

### II.3.2 Décomposition en ondes planes de $\Sigma_n^{L,T}$

Pour terminer complètement la démonstration, il nous faut maintenant décomposer  $\Sigma_n^{L,T}$  en somme d'ondes planes quel que soit l'ordre  $n$ . Pour ce faire, il convient d'introduire l'opérateur différentiel  $A_n^{L,T}$  défini par

$$A_n^{L,T} = \frac{1}{(-k_{L,T})^n} \left[ \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right]^n \quad \text{si } n \geq 0 \quad (2.50)$$

et

$$A_n^{L,T} = \frac{1}{k_{L,T}^{|n|}} \left[ \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right]^{|n|} \quad \text{si } n < 0. \quad (2.51)$$

L'intérêt de cet opérateur est que, connaissant la décomposition en ondes planes de  $\Sigma_0^{L,T}$ , on peut « monter » ( $n > 0$ ) ou « descendre » ( $n < 0$ ) à n'importe quelle décomposition d'ordre  $n$  en appliquant directement  $A_n^{L,T}$  à  $\Sigma_0^{L,T}$ . Il s'agit alors de calculer

$$\Sigma_n^{L,T} = A_n^{L,T} \Sigma_0^{L,T}, \quad (2.52)$$

en différenciant les deux cas  $x > 0$  et  $x < 0$ . Après calcul, il vient

$$\Sigma_n^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_p^{L,T} d} \left[ \frac{\alpha_p^{L,T} - i k_p^{L,T}}{k_{L,T}} \right]^n e^{i[k_p^{L,T} x + \alpha_p^{L,T} y]} \quad \text{pour } x > 0, \quad (2.53)$$

$$\Sigma_n^{L,T} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k_p^{L,T} d} \left[ \frac{\alpha_p^{L,T} + i k_p^{L,T}}{k_{L,T}} \right]^n e^{i[-k_p^{L,T} x + \alpha_p^{L,T} y]} \quad \text{pour } x < 0. \quad (2.54)$$

L'interprétation physique en termes d'ondes planes transmises et réfléchies est la même pour  $\Sigma_n^{L,T}$  que pour  $\Sigma_0^{L,T}$ . La convergence de ces séries est assurée par la présence des termes

$$e^{-\sqrt{\alpha_p^{L,T^2} - k_{L,T}^2} |x|}$$

qui tendent très rapidement vers zéro quand  $p$  tend vers l'infini. Ce terme valant 1 pour  $x = 0$ , la convergence dans ce cas n'est plus assurée. Les développements ci-dessus de  $\Sigma_n^{L,T}$  ne sont donc pas valables pour  $x = 0$ .

## II.4 Coefficients de réflexion et de transmission

Les composantes longitudinale et transversale du champ total transmis par le réseau s'écrivent respectivement

$$\phi_T = e^{ik_L(x\sin\alpha_L + y\cos\alpha_L)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \Sigma_n^L \quad (2.55)$$

et

$$\psi_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \Sigma_n^T. \quad (2.56)$$

où  $\Sigma_n^L$  et  $\Sigma_n^T$  sont définis pour  $x > 0$ . Dans (2.55), le premier terme du second membre correspond au potentiel scalaire de l'onde incidente longitudinale. Plus explicitement, en utilisant (2.53) et (2.54), et en tenant compte du fait que

$$k_{L,T} \sin\alpha_{L,T} = k_0^{L,T}, \quad k_{L,T} \cos\alpha_{L,T} = \alpha_0^{L,T}, \quad (2.57)$$

$\phi_T$  et  $\psi_T$  peuvent respectivement s'écrire

$$\phi_T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ \delta_{p0} + \frac{2}{k_p^L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \left[ \frac{\alpha_p^L - ik_p^L}{k_L} \right]^n \right] e^{i(k_p^L x + \alpha_p^L y)}, \quad (2.58)$$

$$\psi_T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{2}{k_p^T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \left[ \frac{\alpha_p^T - ik_p^T}{k_T} \right]^n \right] e^{i(k_p^T x + \alpha_p^T y)}, \quad (2.59)$$

avec  $\delta_{p0} = 1$  si  $p=0$  et  $\delta_{p0} = 0$  si  $p \neq 0$ . D'après la théorie générale des réseaux [30], on sait que le champ transmis doit s'écrire

$$\phi_T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p^{LL} e^{i(k_p^L x + \alpha_p^L y)}. \quad (2.60)$$

$$\psi_T = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p^{LT} e^{i(k_p^T x + \alpha_p^T y)}. \quad (2.61)$$

où  $t_p^{LL}$  et  $t_p^{LT}$  sont respectivement les coefficients de transmission associées aux ondes planes

$$e^{i(k_p^L x + \alpha_p^L y)} \quad \text{et} \quad e^{i(k_p^T x + \alpha_p^T y)}$$

[30] W. Von Ignatowski, *Zur theorie der Gitter*, Annalen der Physik 44, pp. 369-427, 1914.

lorsque le réseau est soumis à une onde incidente longitudinale. Finalement, l'identification de (2.58) et (2.59) avec respectivement (2.60) et (2.61) conduit directement à

$$t_p^{LL} = \delta_{p0} + \frac{2}{k_p^L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \left[ \frac{\alpha_p^L - ik_p^L}{k_L} \right]^n \quad (2.62)$$

et

$$t_p^{LT} = \frac{2}{k_p^T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \left[ \frac{\alpha_p^T - ik_p^T}{k_T} \right]^n. \quad (2.63)$$

Les coefficients de réflexion  $r_p^{LL}$  et  $r_p^{LT}$  s'obtiennent similairement, la différence étant que les champs réfléchis  $\phi_R$  et  $\psi_R$  s'écrivent en fonction des séries  $\Sigma_n^L$  et  $\Sigma_n^T$  définies pour  $x < 0$ . Ces champs réfléchis ont alors pour expressions

$$\phi_R = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p^{LL} e^{i(-k_p^L x + \alpha_p^L y)} \quad (2.64)$$

avec

$$r_p^{LL} = \frac{2}{k_p^L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LL} \left[ \frac{\alpha_p^L + ik_p^L}{k_L} \right]^n, \quad (2.65)$$

et

$$\psi_R = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} r_p^{LT} e^{i(-k_p^T x + \alpha_p^T y)} \quad (2.66)$$

avec

$$r_p^{LT} = \frac{2}{k_p^T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{LT} \left[ \frac{\alpha_p^T + ik_p^T}{k_T} \right]^n. \quad (2.67)$$

Ainsi, lorsqu'il est soumis à une onde incidente longitudinale, le réseau réfléchit et transmet une infinité d'ondes planes longitudinales et transversales dans une infinité de directions. Pour un mode  $p$  donné, le réseau est alors caractérisé par les quatre coefficients de réflexion et de transmission  $r_p^{LL}$ ,  $r_p^{LT}$ ,  $t_p^{LL}$  et  $t_p^{LT}$  définis ci-dessus. Soumis à une onde incidente transversale, il est caractérisé par quatre autres coefficients notés  $r_p^{TT}$ ,  $r_p^{TL}$ ,  $t_p^{TT}$  et  $t_p^{TL}$ . L'écriture de ces huit coefficients peut alors être synthétisée de la façon suivante

$$t_p^{l_2} = \delta_{l_2} \delta_{p0} + \frac{2}{k_p^{l_2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{l_2} \left[ \frac{\alpha_p^{l_2} - ik_p^{l_2}}{k_{l_2}} \right]^n, \quad (2.68)$$

$$r_p^{l_1 l_2} = \frac{2}{k_p^{l_2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{l_1 l_2} \left[ \frac{\alpha_p^{l_2} + i k_p^{l_2}}{k_{l_2}} \right]^n, \quad (2.69)$$

avec  $\delta_{l_1 l_2} = 1$  si  $l_1 = l_2$  et  $\delta_{l_1 l_2} = 0$  si  $l_1 \neq l_2$ . Dans le double exposant  $l_1 l_2$ , le premier terme  $l_1$  se rapporte à la nature de l'onde incidente, et le deuxième terme  $l_2$  à celle du mode  $p$  réfléchi ou transmis. Nous avons vu que les ondes planes réfléchies et transmises par le réseau peuvent être soit homogènes si  $|\alpha_p^{L,T}| \leq k_{L,T}$ , soit évanescents si  $|\alpha_p^{L,T}| > k_{L,T}$ . Les domaines de fréquence pour lesquels un mode  $p$  est homogène ou évanescent sont alors délimités par des fréquences particulières, appelées fréquences de coupure. L'objectif du prochain paragraphe est d'introduire cette notion et de définir par la suite un domaine de fréquence pour lequel l'écriture des champs transmis et réfléchis est formellement identique à celle rencontrée pour une interface plane solide/solide.

## II.5 Fréquences de coupure

Les composantes suivant  $x$  et  $y$  des vecteurs d'onde  $\vec{K}_p^{L,T}$  des modes  $p$  longitudinaux et transversaux sont définies respectivement par

$$k_p^{L,T} = \left[ k_{L,T}^2 - \alpha_p^{L,T^2} \right]^{1/2}, \quad (2.70)$$

$$\alpha_p^{L,T} = k_{L,T} \sin \alpha_{L,T} + \frac{2p\pi}{d}. \quad (2.71)$$

Il est clair que  $\alpha_p^L$  et  $\alpha_p^T$  sont réels (négatifs ou positifs selon la valeur de  $p$ ) quelle que soit la fréquence. Par conséquent, la composante suivant  $y$  du vecteur d'onde d'un mode  $p$  quelconque, qu'il soit homogène ou évanescent, sera toujours une composante propagative. Lorsque les composantes suivant  $x$ ,  $k_p^L$  et  $k_p^T$ , deviennent des imaginaires purs, les modes  $p$  correspondants sont évanescents dans la direction perpendiculaire au réseau et se propagent le long de celui-ci. La conséquence est que, suffisamment loin du réseau, on peut considérer que ce dernier ne transmet et ne réfléchit que des modes purement propagatifs. Le problème consiste alors à déterminer, à fréquence fixée, le nombre de modes purement propagatifs transmis et réfléchis par le réseau. Un mode  $p$ , avec  $p$  négatif ou positif, est homogène lorsque

$$|\alpha_p^{L,T}| \leq k_{L,T} \quad (2.72)$$

ce qui se traduit en termes de fréquence  $f$  par

$$f \geq p \frac{c_{L,T}}{d(1 - \sin \alpha_{L,T})} \quad \text{si } p > 0, \quad (2.73)$$

et

$$f \geq -p \frac{c_{L,T}}{d(1 + \sin \alpha_{L,T})} \quad \text{si } p < 0, \quad (2.74)$$

en supposant que  $0 \leq \alpha_{L,T} < \pi/2$ . Les fréquences de coupure du réseau sont alors définies par

$$f_p^{L,T} = p \frac{c_{L,T}}{d(1 - \sin \alpha_{L,T})} \quad \text{si } p > 0 \quad (2.75)$$

et

$$f_p^{L,T} = -p \frac{c_{L,T}}{d(1 + \sin \alpha_{L,T})} \quad \text{si } p < 0, \quad (2.76)$$

ces fréquences étant les racines des équations  $k_p^{L,T} = 0$ . En notant  $p_+ = -p_-$  avec  $p_+ > 0$ , ces fréquences vérifient

$$f_{p_-}^{L,T} \leq f_{p_+}^{L,T} \quad (2.77)$$

de sorte que, pour  $f \leq f_{p_-}^{L,T}$ , seuls les modes

$$p_- + 1, p_- + 2, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, p_+ - 2, p_+ - 1$$

sont homogènes. A une fréquence donnée, il apparaît donc que le nombre de modes homogènes est fini ; tous les autres modes, en nombre infini, sont évanescents. Le cas particulier intéressant est celui où seuls les modes fondamentaux,  $p = 0$ , sont homogènes. La situation se rencontre lorsque  $f \leq f_{-1}^{L,T}$  avec

$$f_{-1}^{L,T} = \frac{c_{L,T}}{d(1 + \sin \alpha_{L,T})}. \quad (2.78)$$

Ces modes fondamentaux ont la particularité d'être homogènes quelle que soit la fréquence. En effet, pour  $p = 0$ , les composantes des vecteurs d'onde définies par (2.70) et (2.71) deviennent

$$\alpha_0^{L,T} = k_{L,T} \sin \alpha_{L,T}, \quad k_0^{L,T} = k_{L,T} \cos \alpha_{L,T}. \quad (2.79)$$

Le tableau ci-dessous présente les valeurs en MHz des fréquences de coupure du réseau pour

$$p = -5, -4, \dots, -1, 1, \dots, 4, 5$$

et pour un pas  $d$  du réseau égal à 3 mm. Les caractéristiques mécaniques du milieu élastique sont celles de l'aluminium définies dans le chapitre précédent. L'angle d'incidence  $\alpha_L$  est pris égal à  $30^\circ$ . Il résulte donc de la loi de Snell-Descartes (2.12) que  $\alpha_T = 14,25^\circ$ .

$ p $	1	2	3	4	5
$f_{ p }^L$	4,25	8,50	12,75	17,01	21,26
$f_{- p }^L$	1,42	2,84	4,25	5,67	7,09
$f_{ p }^T$	1,39	2,78	4,17	5,55	6,94
$f_{- p }^T$	0,84	1,68	2,52	3,36	4,20

Tableau 2.1: Valeurs des vingt premières fréquences coupure d'un réseau de pas  $d=3$  mm excité en incidence oblique sous un angle  $\alpha_L = 30^\circ$

A la lecture du tableau, nous constatons de façon systématique qu'un mode  $p \neq 0$  de type transversal devient homogène à une fréquence plus petite que celui de même ordre de type longitudinal. En effet, quel que soit  $p \neq 0$ , les fréquences de coupure associées aux modes transversaux et longitudinaux vérifient

$$f_p^T < f_p^L, \quad (2.80)$$

ceci étant dû au fait que  $c_L > c_T$ . Par conséquent, à une fréquence donnée, il y a toujours inégalité entre le nombre de modes homogènes longitudinaux et le nombre de modes homogènes transversaux. Il s'ensuit également que, pour une fréquence inférieure à

$$f_{-1}^T = \frac{c_T}{d(1 + \sin \alpha_T)}, \quad (2.81)$$

il n'existe que deux modes purement propagatifs : les modes fondamentaux, l'un étant de type longitudinal et l'autre de type transversal. Cette fréquence particulière est la première fréquence de coupure du réseau. En-dessous de cette fréquence, et en considérant le cas d'une onde incidente longitudinale, par exemple, les champs transmis et réfléchis par le réseau sont réduits à

$$\phi_T = t_0^{LL} e^{ik_L(x \cos \alpha_L + y \sin \alpha_L)}, \quad \psi_T = t_0^{LT} e^{ik_T(x \cos \alpha_T + y \sin \alpha_T)}, \quad (2.82a, b)$$

et

$$\phi_R = r_0^{LL} e^{ik_L(-x \cos \alpha_L + y \sin \alpha_L)}, \quad \psi_R = r_0^{LT} e^{ik_T(-x \cos \alpha_T + y \sin \alpha_T)}. \quad (2.83a, b)$$

Les coefficients de transmission et de réflexion ont alors simplement pour expressions



$$t_0^{LL} = 1 + \frac{2}{k_L d \cos \alpha_L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{LL} e^{in\alpha_L}, \quad t_0^{LT} = \frac{2}{k_T d \cos \alpha_T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n C_n^{LT} e^{in\alpha_T}, \quad (2.84a, b)$$

et

$$r_0^{LL} = \frac{2}{k_L d \cos \alpha_L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n C_n^{LL} e^{-in\alpha_L}, \quad r_0^{LT} = \frac{2}{k_T d \cos \alpha_T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n C_n^{LT} e^{-in\alpha_T}. \quad (2.85a, b)$$

La Figure 2.3 ci-dessous représente la seule situation où les vecteurs d'ondes de tous les modes homogènes en présence vérifient la loi de Snell-Descartes.

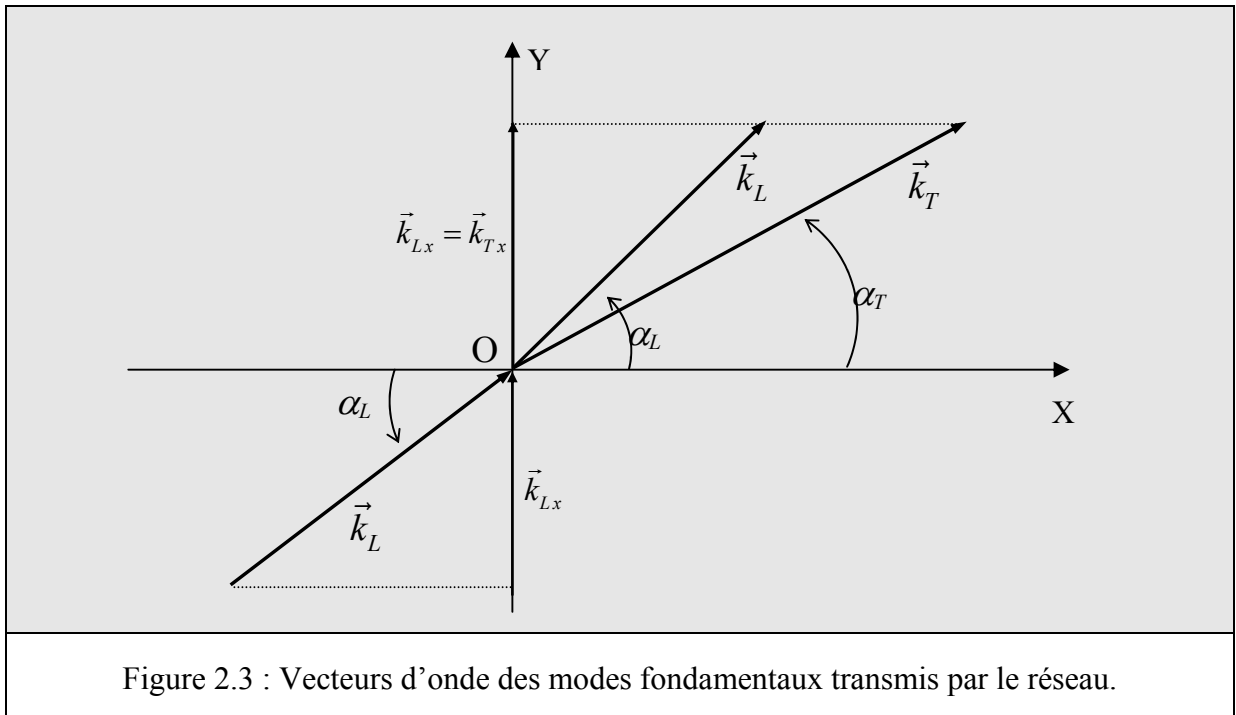


Figure 2.3 : Vecteurs d'onde des modes fondamentaux transmis par le réseau.

Pour  $f < f_{-1}^T$ , les expressions (2.82a, b) et (2.83a, b) sont donc exactement celles obtenues pour la transmission et la réflexion par une interface plane solide/solide. La seule différence entre ces deux situations est la valeur des coefficients de transmission  $t_0^{LL}$  et  $t_0^{LT}$ , et de réflexion  $r_0^{LL}$  et  $r_0^{LT}$ . Mais, formellement, les expressions sont les mêmes.

### Remarques

- 1) La première fréquence de coupure du réseau est inversement proportionnelle à  $d$ . Plus le réseau est dense et plus cette fréquence est haute.

2) En incidence normale,  $\alpha_L = \alpha_T = 0^\circ$ , la première fréquence de coupure à une valeur maximale. Pour  $0 \leq \alpha_{L,T} < \pi/2$ , les fréquences de coupure sont en effet des fonctions décroissantes de l'angle d'incidence.

3) En incidence normale, les coefficients de diffusion  $C_n^{LT}$  vérifient

$$C_0^{LT} = 0 \quad \text{et} \quad C_{-n}^{LT} = (-1)^{n+1} C_n^{LT}. \quad (2.86)$$

Il s'ensuit que  $t_0^{LT} = r_0^{LT} = 0$ . Autrement dit, une onde incidente longitudinale ne peut générer de modes fondamentaux transversaux en incidence normale. De la même façon, les relations (2.86) étant valables pour les coefficients de diffusion  $C_n^{TL}$ , une onde incidente transversale ne peut générer de modes fondamentaux longitudinaux en incidence normale. En d'autres termes, si l'on considère le domaine de fréquentiel  $f < f_{-1}^T$ , il n'y a jamais de conversions en incidence normale entre les ondes longitudinales et transversales lors de la réflexion et la transmission par le réseau. Il s'agit là encore d'une autre analogie avec le problème d'une interface plane solide/solide.

## II.6 Relations de conservation des flux d'énergie

Le but de ce paragraphe est d'écrire la conservation des flux d'énergie à travers le réseau. Les relations qui en découlent permettent de valider les calculs des coefficients de réflexion et de transmission et, d'autre part, de construire la matrice  $S$  associée au réseau qui sera à la base de la méthode de détection des résonances exposée dans la prochaine section. Pour écrire les flux d'énergie, il faut, comme l'indique la Figure 2.4, considérer deux surfaces de part et d'autre du réseau à une distance  $x_0$  de celui-ci. Ce choix permet d'éviter la singularité en  $x=0$  mentionnée au paragraphe II.3. Le vecteur de Poynting (moyenné temporellement sur une période  $T=2\pi/\omega$ )  $\vec{P}_{inc}$  est le vecteur de Poynting entrant associé à l'onde incidente. Les vecteurs de Poynting sortants,  $\vec{P}_r$  et  $\vec{P}_t$ , sont les vecteurs de Poynting associés respectivement aux ondes réfléchies et transmises par le réseau. Les vecteurs  $\vec{n}$  et  $-\vec{n}$  représentent les normales unitaires sortantes aux deux surfaces  $S_{-x_0}$  et  $S_{x_0}$ . La conservation des flux d'énergie impose alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_{inc} \cdot \vec{n} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_T \cdot \vec{n} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_R \cdot \vec{n} dy, \quad (2.87)$$

soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{incx} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{Tx} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} P_{Rx} dy. \quad (2.88)$$

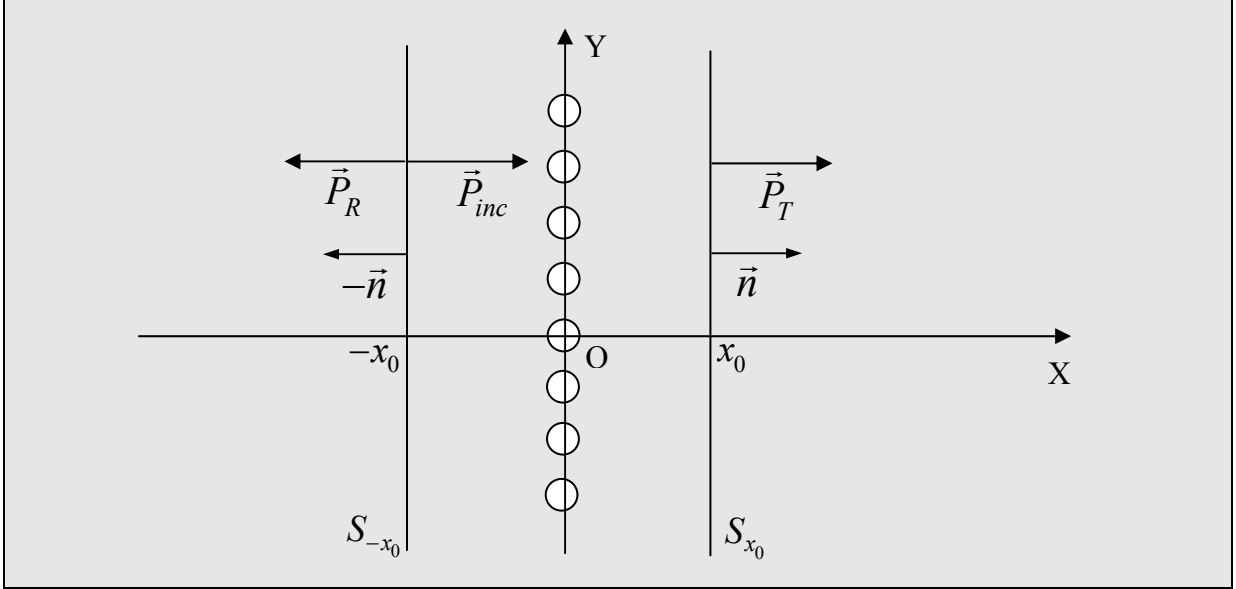


Figure 2.4 : Vecteurs de Poynting entrants et sortants au travers de  $S = S_{-x_0} \cup S_{x_0}$ .

En coordonnées cartésiennes, la composante suivant  $x$  d'un vecteur de Poynting s'écrit de façon générale

$$P_x = \frac{\omega}{2} \Im m(\sigma_{xx} u_{sx}^* + \sigma_{xy} u_{sy}^*) \quad (2.89)$$

avec

$$u_{sx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_{sy} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.90)$$

et

$$\sigma_{xx} = -\lambda k_L^2 \phi + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \quad \sigma_{xy} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \quad (2.91)$$

A titre d'exemple, considérons de nouveau le cas d'une onde incidente longitudinale. Pour calculer le flux du vecteur  $\vec{P}_{inc}$ , il suffit alors de remplacer  $\phi$  dans toutes les expressions ci-dessus par

$$\phi_{inc} = e^{ik_L(x \cos \alpha_L + y \sin \alpha_L)} \quad (2.92)$$

et de prendre  $\psi = 0$ . Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{inc x} dy = \frac{\omega}{2} k_L^3 (\lambda + 2\mu) \cos \alpha_L. \quad (2.93)$$

Pour le calcul du flux de  $\vec{P}_R$ , il s'agit de remplacer  $\phi$  et  $\psi$  par  $\phi_R$  et  $\psi_R$ ,  $\phi_R$  et  $\psi_R$  étant respectivement définis par (2.64) et (2.66). Il vient alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{R x} dy = -\frac{\omega}{2} k_L^2 (\lambda + 2\mu) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p^L |r_p^{LL}|^2 - \frac{\omega}{2} k_T^2 \mu \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p^T |r_p^{LT}|^2. \quad (2.94)$$

En remplaçant  $\phi$  et  $\psi$  par  $\phi_T$  et  $\psi_T$  donnés respectivement par (2.60) et (2.61), le flux de  $\vec{P}_R$  s'écrit de façon similaire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_{T x} dy = \frac{\omega}{2} k_L^2 (\lambda + 2\mu) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p^L |t_p^{LL}|^2 + \frac{\omega}{2} k_T^2 \mu \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k_p^T |t_p^{LT}|^2. \quad (2.95)$$

Finalement, en injectant (2.93), (2.94) et (2.95) dans (2.93), la relation de conservation des flux d'énergie se traduit par

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{k_p^L}{k_0^L} |r_p^{LL}|^2 + \frac{k_p^T}{k_0^L} |r_p^{LT}|^2 + \frac{k_p^L}{k_0^L} |t_p^{LL}|^2 + \frac{k_p^T}{k_0^L} |t_p^{LT}|^2 \right) = 1. \quad (2.96)$$

Lorsque l'onde incidente est transversale, il suffit de remplacer dans (2.96) chacun des exposants  $L$  par  $T$ , et réciproquement. La relation de conservation de l'énergie s'écrit alors

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{k_p^T}{k_0^T} |r_p^{TT}|^2 + \frac{k_p^L}{k_0^T} |r_p^{TL}|^2 + \frac{k_p^T}{k_0^T} |t_p^{TT}|^2 + \frac{k_p^L}{k_0^T} |t_p^{TL}|^2 \right) = 1. \quad (2.97)$$

Pour aboutir à ces deux dernières relations, on voit que le calcul effectué ne dépend pas de la valeur de  $x = \pm x_0$ . Par suite, les modes évanescents ne jouent qu'un rôle mineur dans la conservation de l'énergie puisque leur contribution devient très vite négligeable lorsque l'on se place suffisamment loin du réseau. La conservation de l'énergie se traduit donc bien par les formules (2.96) et (2.97) dans lesquelles les sommations se font uniquement sur les modes homogènes. Aux basses fréquences,  $f < f_{-1}^T$ , seuls les modes fondamentaux sont homogènes. Il s'ensuit donc que

$$\left| r_0^{LL} \right|^2 + \frac{k_0^T}{k_0^L} \left| r_0^{LT} \right|^2 + \left| t_0^{LL} \right|^2 + \frac{k_0^T}{k_0^L} \left| t_0^{LT} \right|^2 = 1, \quad (2.98)$$

$$\left| r_0^{TT} \right|^2 + \frac{k_0^L}{k_0^T} \left| r_0^{TL} \right|^2 + \left| t_0^{TT} \right|^2 + \frac{k_0^L}{k_0^T} \left| t_0^{TL} \right|^2 = 1. \quad (2.99)$$

D'autre part, dans le cas d'une incidence normale au réseau, les coefficients relatifs aux conversions  $L \leftrightarrow T$  sont nuls. Les relations de conservation de l'énergie sont donc réduites à

$$\left| r_0^{LL} \right|^2 + \left| t_0^{LL} \right|^2 = 1, \quad \left| r_0^{TT} \right|^2 + \left| t_0^{TT} \right|^2 = 1, \quad (2.100)$$

ces relations étant formellement identiques à celles établies pour une interface fluide/fluide.

Les relations de conservation de l'énergie (2.96) et (2.97) ont été systématiquement vérifiées pour valider nos calculs des coefficients de réflexion et de transmission. Les séries qui définissent ces coefficients convergent d'autant plus lentement que le pas  $d$  du réseau est petit. L'évolution des temps de calculs en fonction de  $d$  est étudiée dans l'Annexe 4, le critère de convergence numérique utilisé restant le même que celui énoncé dans l'Annexe 2.

La Figure 2.5 illustre la relation de conservation de l'énergie (2.96) pour  $f < 3$  MHz dans le cas d'un réseau d'inclusions d'air. Les valeurs des sept fréquences de coupure indiquées sur le graphique sont celles présentées, sur fond gris, dans le Tableau 2.1. Chacune des courbes du graphique, notée  $L_p$  ou  $T_p$ , est associée à un mode  $p$  longitudinal ou transversal. Elles correspondent respectivement aux tracés des termes

$$\frac{k_p^L}{k_0^L} \left( \left| r_p^{LL} \right|^2 + \left| t_p^{LL} \right|^2 \right) \quad \text{et} \quad \frac{k_p^T}{k_0^L} \left( \left| r_p^{LT} \right|^2 + \left| t_p^{LT} \right|^2 \right) \quad (2.101)$$

en fonction de la fréquence. La relation de conservation de l'énergie (2.96) est alors obtenue en sommant toutes les courbes présentes à une fréquence donnée. Les courbes présentent systématiquement de brusques variations à chaque fréquence de coupure du réseau. L'énergie transportée par le mode fondamental  $L_0$ , par exemple, décroît brutalement à chaque fréquence de coupure, une partie de l'énergie étant alors transportée par un autre mode homogène nouvellement diffracté. En raison de la différence importante entre les vitesses de phase des ondes longitudinales et transversales ( $c_L/c_T \cong 2$ ), l'ordre d'apparition des différents modes homogènes est plutôt « anarchique » : alors que les modes homogènes  $T_1$  et  $T_2$  apparaissent respec-

tivement à 1,39 MHz et à 2,78 MHz, aucun mode homogène  $L_p$ , avec  $p > 0$ , n'est présent en-dessous de 3 MHz. Ces derniers apparaissent au-delà de 4,25 MHz (cf. Tableau 2.1).

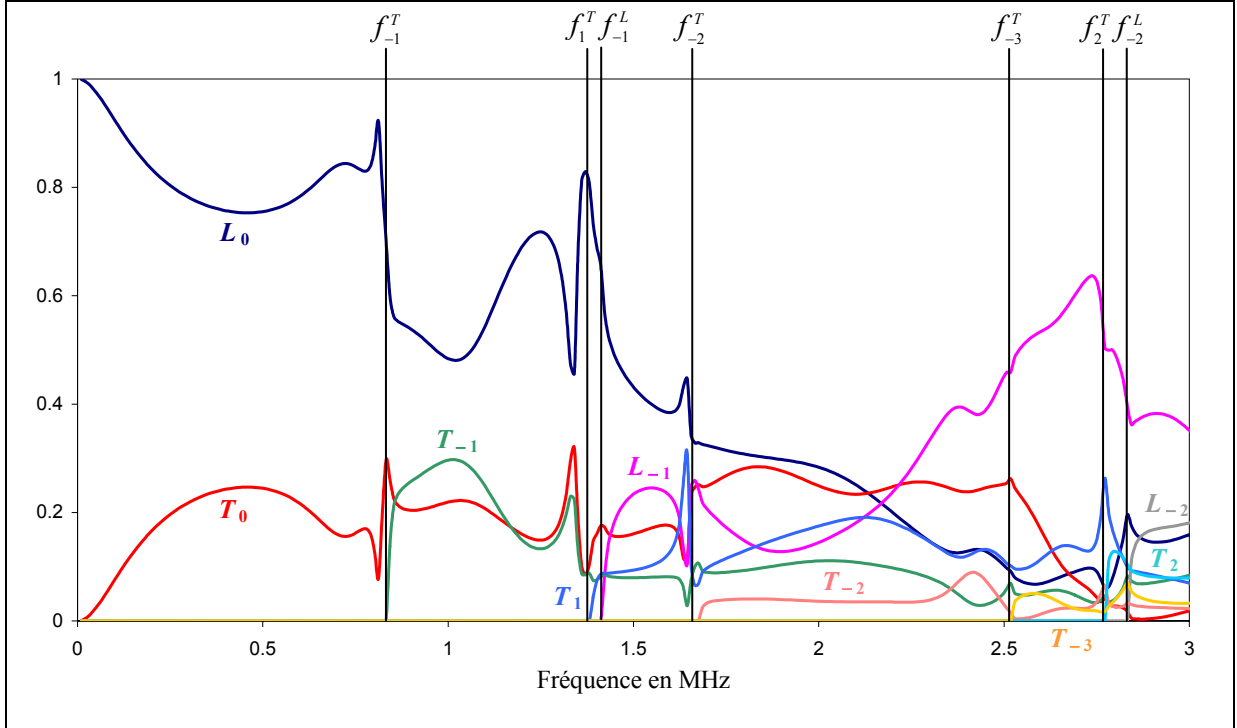


Figure 2.5 : Évolution des énergies transportées par les neuf premiers modes homogènes d'un réseau d'inclusions d'air caractérisé par  $d = 3$  mm et  $a = 1$  mm ( $\beta = 3$ ). Le réseau est soumis à une onde longitudinale sous un angle  $\alpha_L = 30^\circ$ .

En-dessous de la première fréquence de coupure, à 0,84 MHz, les énergies transportées par les modes fondamentaux  $L_0$  et  $T_0$  évoluent de façon complémentaire. Aux très basses fréquences, l'énergie transportée par le mode  $L_0$  tend vers 1, celle transportée par le mode  $T_0$  tend vers 0. Dans la limite des très grandes longueurs d'onde, les coefficients de réflexion et de transmission vérifient en effet

$$t_0^{LL} = 1 \quad \text{et} \quad r_0^{LL} = r_0^{LT} = t_0^{LT} = 0. \quad (2.102)$$

Autrement dit, la diffusion par le réseau est réduite à la seule transmission de l'onde incidente longitudinale qui transporte dès lors toute l'énergie.

Les courbes de la Figure 2.5 sont celles d'un réseau d'inclusions d'air. Les résultats du premier chapitre montrent que les éventuelles résonances de ces inclusions ne peuvent affecter profondément les champs réfléchis et transmis par le réseau ; les brusques variations observées sur l'ensemble des courbes ne sont donc dues qu'aux seuls effets de la diffraction.

Dans la section III, pour écarter tout effet lié à la diffraction, l'étude des résonances d'un réseau d'inclusions d'eau sera limitée au domaine fréquentiel  $0 \leq f \leq f_{-1}^T$  pour lequel la diffusion par les réseaux présente alors une forte analogie avec la réflexion/transmission par une interface solide/solide. En outre, soulignons que les formalismes développés dans les troisième et quatrième chapitres ne seront pas valables au-delà de  $f_{-1}^T$ .

### III. ÉTUDE DES RÉSONANCES D'UN RÉSEAU D'INCLUSIONS D'EAU

Les caractéristiques mécaniques de l'aluminium et de l'eau (à 25°C) considérées dans la présente étude sont fournies dans le premier chapitre. Le rayon  $a$  des inclusions vaut 1 mm. Comme dans le premier chapitre, tous les spectres seront tracés en fonction de la fréquence réduite  $x_L$ . L'étude des résonances est organisée ici selon deux paragraphes. Dans le premier, les résonances sont détectées *via* les coefficients de transmission du réseau et, plus rigoureusement, *via* la dérivée de leur phase par rapport à la fréquence. Dans le second, les résonances sont détectées moyennant le concept de matrice  $S$ . L'avantage de la première méthode par rapport à la seconde est que les coefficients de transmission du réseau sont directement accessibles par l'expérience. La méthode basée sur la matrice  $S$  est, quant à elle, plus performante puisqu'elle permet d'isoler complètement deux résonances très proches, voire confondues sur le spectre de la dérivée de phase. Ainsi, lorsque deux résonances sont à des fréquences très voisines l'une de l'autre, le recouvrement des pics sur le spectre de la dérivée de phase ne permet pas d'accéder à la largeur de chacune des deux résonances (la largeur d'une résonance étant définie par la largeur à mi-hauteur d'un pic de résonance). L'isolement de ces deux résonances grâce à la seconde méthode permet donc d'accéder à la fois à leur position et à leur largeur.

#### III.1. Étude des résonances *via* les coefficients de transmission

Pour analyser les éventuels effets d'une interaction résonante entre les inclusions, considérons dans un premier temps un très faible espacement entre les inclusions :  $\beta = 2,05$ . Cette valeur de  $\beta$  étant largement inférieure à la valeur critique  $\beta_c = 2,4$  introduite dans le premier chapitre, le phénomène d'interaction résonante a donc toutes les chances de se produire. La Figure 2.6 décrit l'évolution fréquentielle du coefficient de transmission  $t_0^{LL}$  du ré-

seau d'inclusions d'eau excité en incidence normale (pour laquelle  $t_0^{LT} = 0$ ). Le spectre des résonances associé correspond au tracé en fonction de la fréquence de la dérivée (en valeur absolue) de la phase du coefficient de transmission. En incidence normale et avec  $\beta = 2,05$ , la première fréquence de coupure du réseau correspond à une fréquence réduite  $x_L$  de 1,508. Ce domaine fréquentiel d'étude est le domaine le plus étendu qui sera exploré puisque les fréquences de coupure sont des fonctions décroissantes de  $\beta$  et de l'angle d'incidence  $\alpha_L$ .

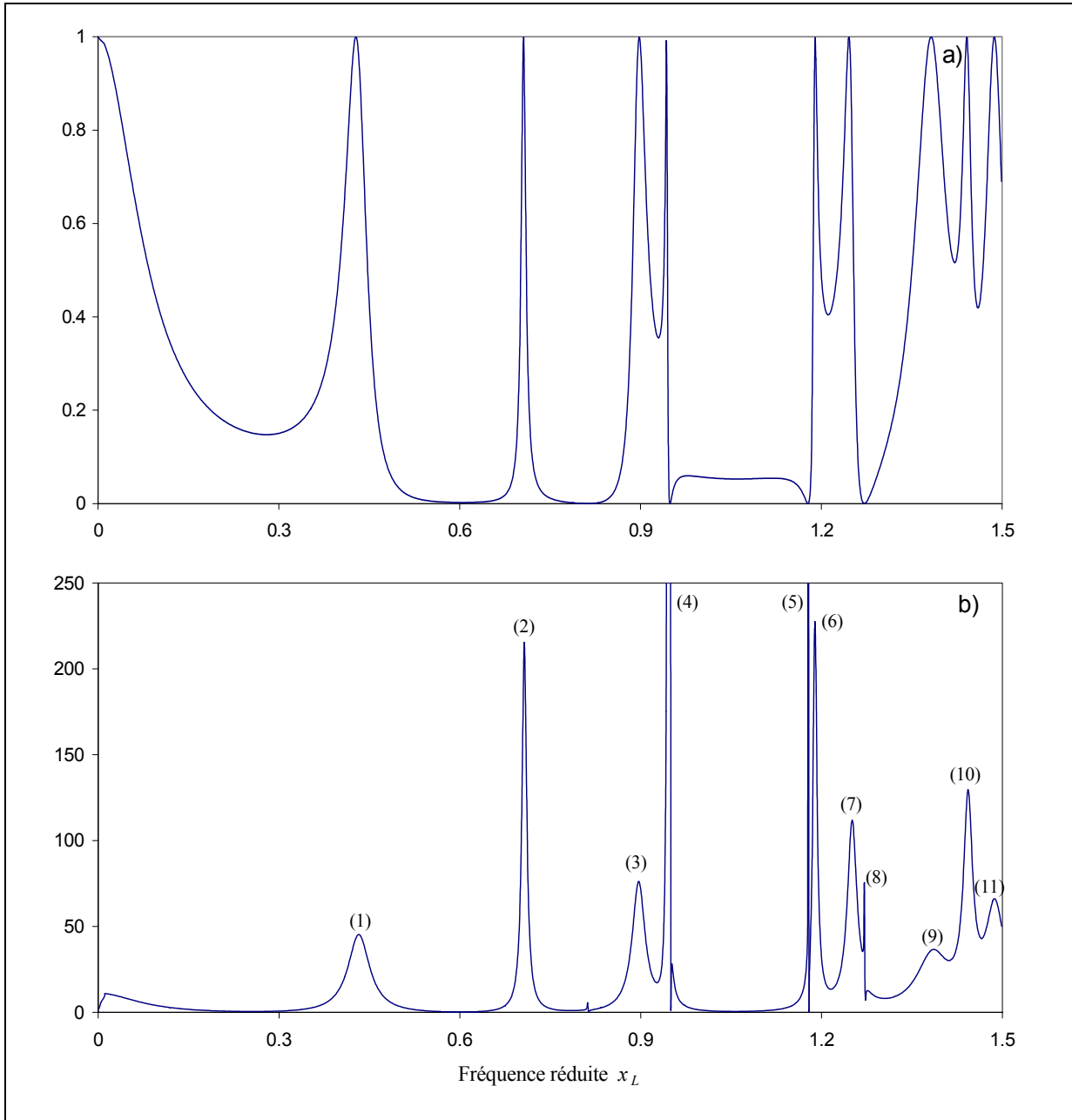


Figure 2.6 : Réseau caractérisé par  $\beta = 2,05$  et excité en incidence normale.  
 a) Module au carré du coefficient de transmission  $t_0^{LL}$  ; b) spectre des résonances associé.



Sur la Figure 2.6, chaque pic dessiné par le coefficient de transmission, est caractéristique d'une résonance. Il y a neuf résonances, ces résonances étant majoritairement localisées dans le domaine des « hautes » fréquences. Le spectre des résonances révèle, quant à lui, l'existence de onze résonances. Les deux résonances supplémentaires révélées par la dérivée de la phase (numérotées 5 et 8 sur le spectre des résonances) sont des résonances dont les largeurs à mi-hauteur sont très petites vis-à-vis de l'ensemble des autres résonances. L'efficacité de la dérivée de la phase comme outil de détection des résonances est donc ici bien illustrée. Les valeurs des fréquences des onze résonances figurent dans le Tableau 2.2 ci-dessous.

Résonances	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_L$	0,432	0,707	0,897	0,945	1,178	1,185	1,251	1,271	1,386	1,443	1,487

Tableau 2.2 : Valeurs des fréquences des résonances du spectre de la Figure 2.6b.

Pour mettre en évidence une possible interaction résonante entre les inclusions, le spectre doit être comparé avec ceux d'une seule inclusion d'eau. La Figure 2.7 ci-dessous présente les spectres des résonances associés aux diffusions  $L \rightarrow L$  et  $T \rightarrow T$  par une seule inclusion d'eau.

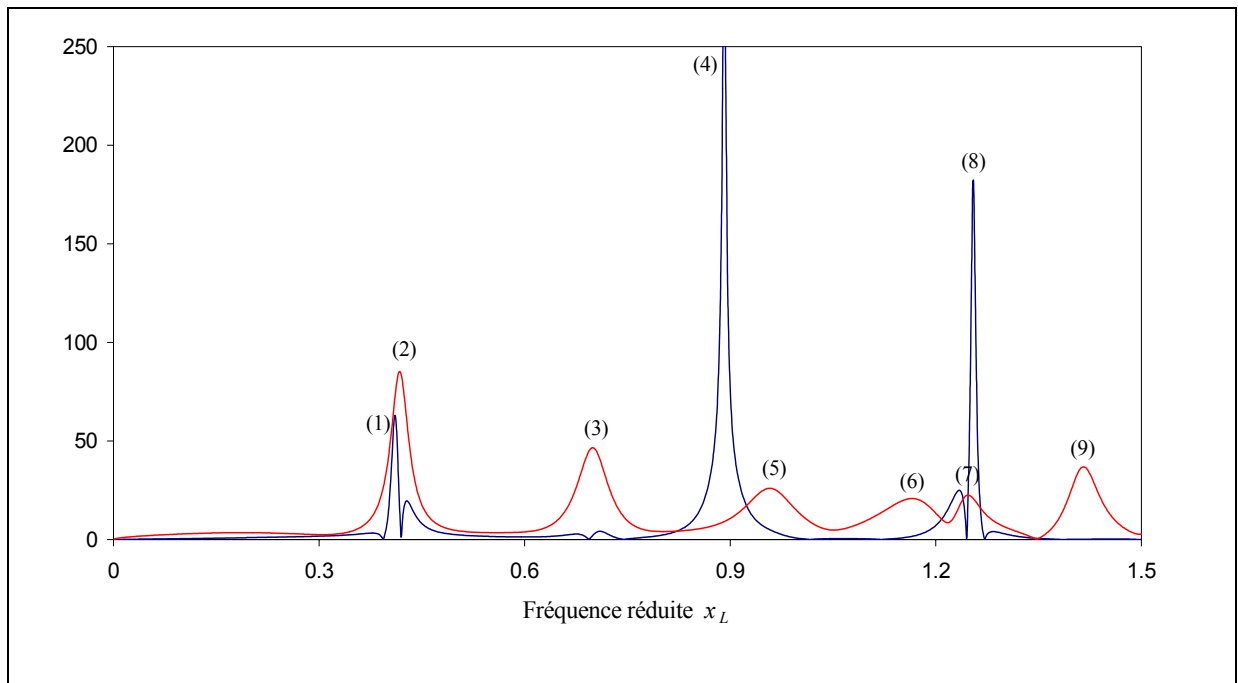


Figure 2.7 : Spectres des résonances associés aux diffusions  $L \rightarrow L$  (bleu) et  $T \rightarrow T$  (rouge) par une seule inclusion d'eau.

Les deux spectres correspondent à des diffusions « en transmission », c'est-à-dire à  $\alpha_{L,T} = 0^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$ . Les résonances associées à la diffusion  $T \rightarrow T$  doivent être prises en compte en raison des conversions  $L \leftrightarrow T$  intervenant lors du processus de diffusion multiple entre les inclusions du réseau. Les spectres de la Figure 2.7 présentent au total neuf résonances. Les valeurs des fréquences de ces résonances sont répertoriées dans le Tableau 2.3 ci-dessous.

Résonances	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_L$	0,411	0,417	0,699	0,891	0,959	1,165	1,247	1,255	1,416
Résonances	1		2	3	4	5	6		7
$x_L$	0,414		0,694	0,894	0,959	1,165	1,251		1,416

Tableau 2.3 : Valeurs des fréquences des résonances des spectres de la Figure 2.7.

A la lecture du tableau, nous constatons que les deux résonances numérotées 1 et 2 sont très proches les unes des autres. Pour faciliter l'analyse, nous allons considérer que ces deux résonances correspondent à une seule résonance à une fréquence moyenne  $x_L$  de 0,414. Cette résonance est alors numérotée 1. De la même façon, nous considérons que les résonances 7 et 8 correspondent à une seule résonance, numérotée 6, à une fréquence moyenne  $x_L$  de 1,251. Avec ces approximations, le nombre de résonances d'une inclusion seule est égal à sept. Les numéros de ces résonances et leurs fréquences figurent dans les deuxième et troisième lignes du Tableau 2.3.

En comparant les fréquences de résonances du réseau avec celles de l'inclusion seule, on peut classer les onze résonances du réseau selon deux familles : celles proches des résonances d'une inclusion seule et celles, plus éloignées, résultant d'une probable interaction résonante entre une inclusion et ses plus proches voisines. Les résonances du premier groupe sont mises en exergue dans le Tableau 2.2 par des fonds gris. Sans exception, on constate que toutes les résonances associées à la diffusion  $T \rightarrow T$  par une inclusion seule sont présentes sur le spectre des résonances du réseau, et ce pour une conversion  $L \rightarrow L$ . Leur présence révèle donc un effet important des conversions  $L \leftrightarrow T$  lors du processus de diffusion multiple entre les inclusions du réseau. Pour ce qui est du deuxième groupe de résonances, celles numérotées 9 et 11 situées de part et d'autre de la résonance 10, identifiée comme étant la résonance 7 de l'inclusion seule, elles résultent probablement de la fragmentation de cette dernière en trois

résonances : la résonance 10 et les deux résonances 9 et 11 de part et d'autre. Les mêmes phénomènes ont été observés dans le premier chapitre pour un réseau de deux ou trois inclusions. Quant aux deux fines résonances 5 et 8, leur présence ne semble pas liée à une interaction résonante mais plutôt aux conversions  $L \leftrightarrow T$ . En effet, si elles résultaient des dédoublements des résonances 5 et 6 de l'inclusion seule, les résonances 5 et 8 devraient avoir des largeurs à mi-hauteur de même ordre. D'autre part, nous avons vu dans le premier chapitre que les résonances très fines étaient des résonances caractéristiques d'une excitation par une onde transversale.

A ce stade de l'analyse, aucun phénomène nouveau n'a été observé par rapport à des réseaux limités de quelques inclusions. Pour identifier les phénomènes propres aux réseaux linéaires infinis, analysons les diagrammes de la Figure 2.8. Ces diagrammes sont obtenus en calculant les spectres des résonances  $L \rightarrow L$  et  $L \rightarrow T$  pour différentes valeurs de l'angle d'incidence  $\alpha_L$  allant de 0 à 85°. Le domaine des très basses fréquences ( $x_L < 0,2$ ) n'est pas représenté ici car aucun phénomène particulier n'y a été constaté. Sur chacun des diagrammes, la décroissance hyperbolique de la première fréquence de coupure lorsque l'angle d'incidence augmente se traduit par une réduction importante du domaine fréquentiel d'étude.

Au vu des diagrammes obtenus, le comportement résonant du réseau paraît très compliqué, et tout spécialement à proximité de la fréquence de coupure. Globalement, les spectres des résonances  $L \rightarrow L$  et  $L \rightarrow T$  se ressemblent, à l'exception de la présence d'une résonance supplémentaire sur le spectre des résonances  $L \rightarrow T$ , située aux basses fréquences, précisément autour de  $x_L = 0,24$ . Les sept lignes verticales en pointillé superposées sur les diagrammes indiquent les fréquences des résonances d'une inclusion seule. Pour des faibles valeurs de l'angle d'incidence ( $\alpha_L < 5^\circ$ ), la plupart des résonances du réseau sont très proches des résonances de l'inclusion seule. Ceci confirme que les résonances d'une inclusion seule jouent un rôle important dans le comportement résonant du réseau. La présence des résonances supplémentaires traduit une forte interaction résonante entre les inclusions très proches les unes des autres dans ce cas de figure. Pour s'en convaincre, les mêmes diagrammes ont été calculés dans le cas où  $\beta = 3$ . Ces diagrammes sont présentés sur la Figure 2.9. Pour  $\beta = 3$ , la première fréquence de coupure, calculée en incidence normale, correspond à une fréquence réduite  $x_L$  de 1,031.  $\beta$  a été choisi supérieur à la valeur critique de  $\beta_c = 2,4$  au-dessus de laquelle la contribution du couplage résonant entre les inclusions est négligeable vis-à-vis des résonances d'une inclusion seule. Pour cet espacement entre les inclusions, toutes les résonances en présence correspondent aux résonances d'une inclusion seule, excepté à proximité de la fréquen-

ce de coupure et à l'exception aussi d'une résonance supplémentaire toujours présente sur le spectre des résonances  $L \rightarrow T$ . L'émergence de nouvelles résonances pour  $\beta=2,05$  est donc bien liée à une forte interaction résonante entre les inclusions lorsque celles-ci sont très proches les unes des autres.

Pour des angles d'incidence supérieurs à environ  $5^\circ$ , le comportement du réseau change de nature puisque les positions fréquentielles de la plupart des « résonances » évoluent avec l'angle d'incidence. Cette observation est surprenante puisqu'on sait que les résonances ne sont liées qu'aux seules caractéristiques (géométriques et physiques) des diffuseurs. Pour clarifier le phénomène, les diagrammes ont été calculés en considérant un réseau « périodique » fini de seulement trois inclusions. Ces diagrammes, comme ceux du premier chapitre, ont été obtenus en traçant les spectres des dérivées des phases des fonctions de forme en champ lointain en fonction de l'angle d'incidence, et en considérant une diffusion en « transmission ». En incidence normale ou pour des angles d'incidence très proches de ce cas de figure, les mêmes résonances ont été observées. En revanche, pour des angles d'incidence plus importants, aucune variation en angle des maxima de la dérivée de phase n'a été observée. Les courbes dessinées par la dérivée de phase sur les deux diagrammes de la Figure 2.8 sont donc propres au réseau d'extension infinie.

## III.2. Étude des résonances *via* la matrice $S$

### III.2.1. Construction de la matrice $S$

Comme alternative à la technique consistant à tracer les modules des coefficients de transmission du réseau ou à représenter la dérivée de la phase de ces coefficients, l'étude des résonances du réseau peut être menée de façon plus rigoureuse en utilisant le concept de matrice  $S$ . La construction de cette matrice, en ne considérant que les modes fondamentaux du réseau, s'effectue à l'aide des lois de conservation de l'énergie (2.98) et (2.99) pouvant également s'écrire

$$\left| r_0^{LL} \right|^2 + x_0^{LT^2} \left| r_0^{LT} \right|^2 + \left| t_0^{LL} \right|^2 + x_0^{LT^2} \left| t_0^{LT} \right|^2 = 1, \quad (2.103)$$

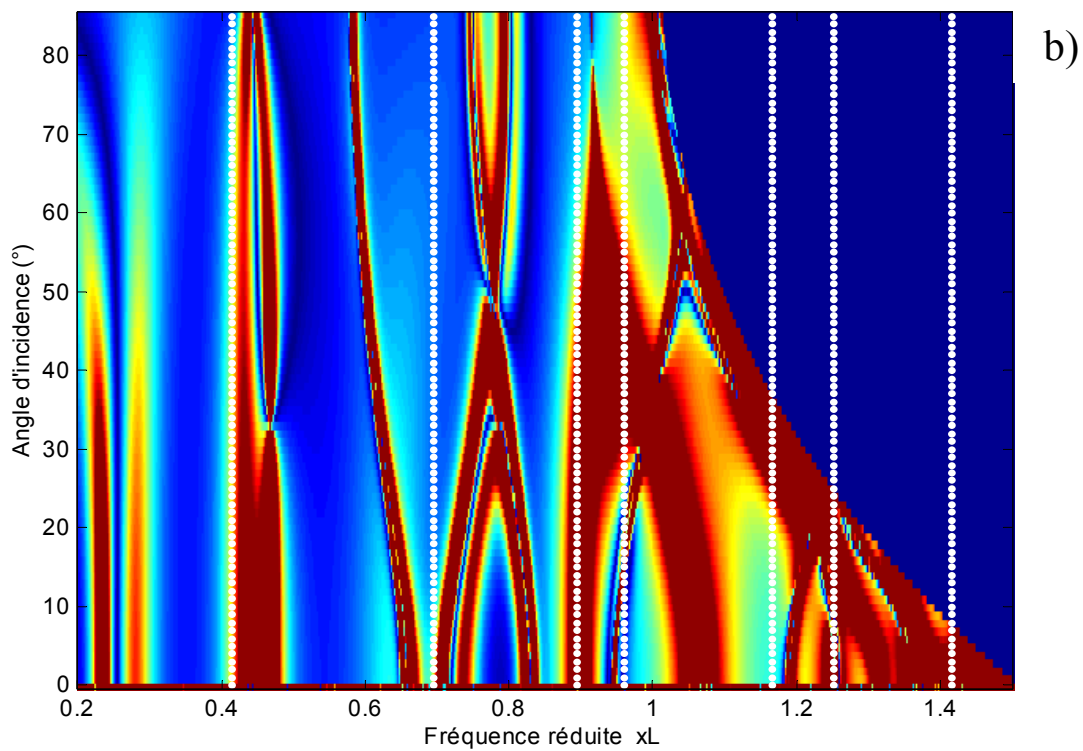
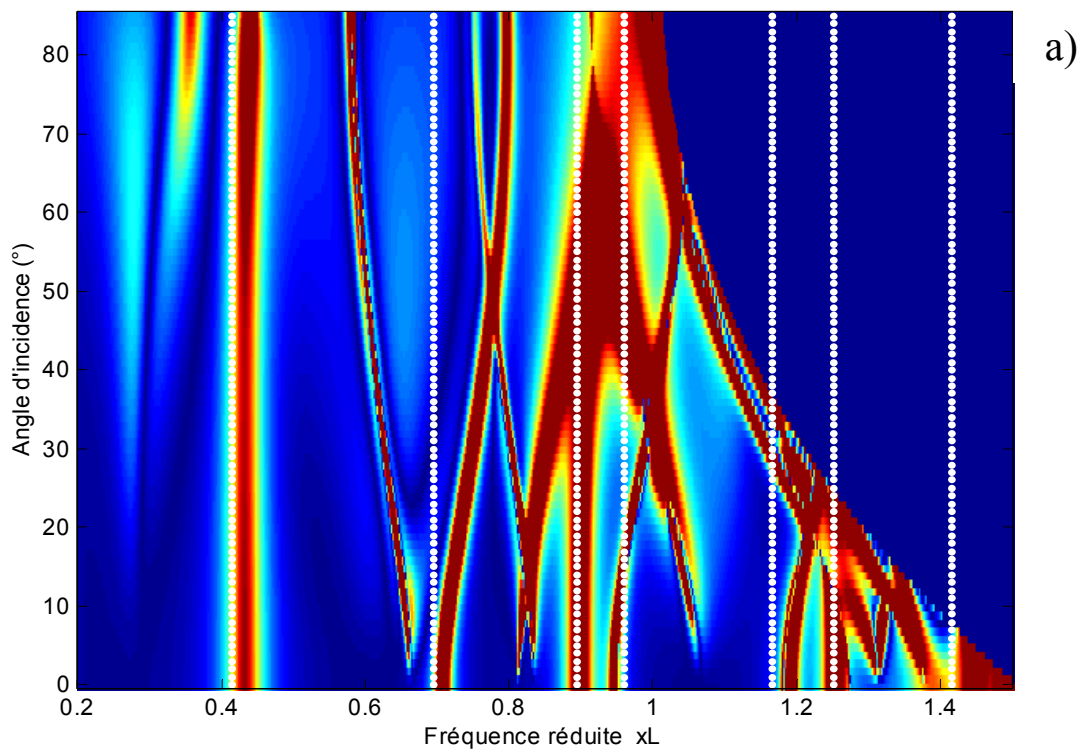
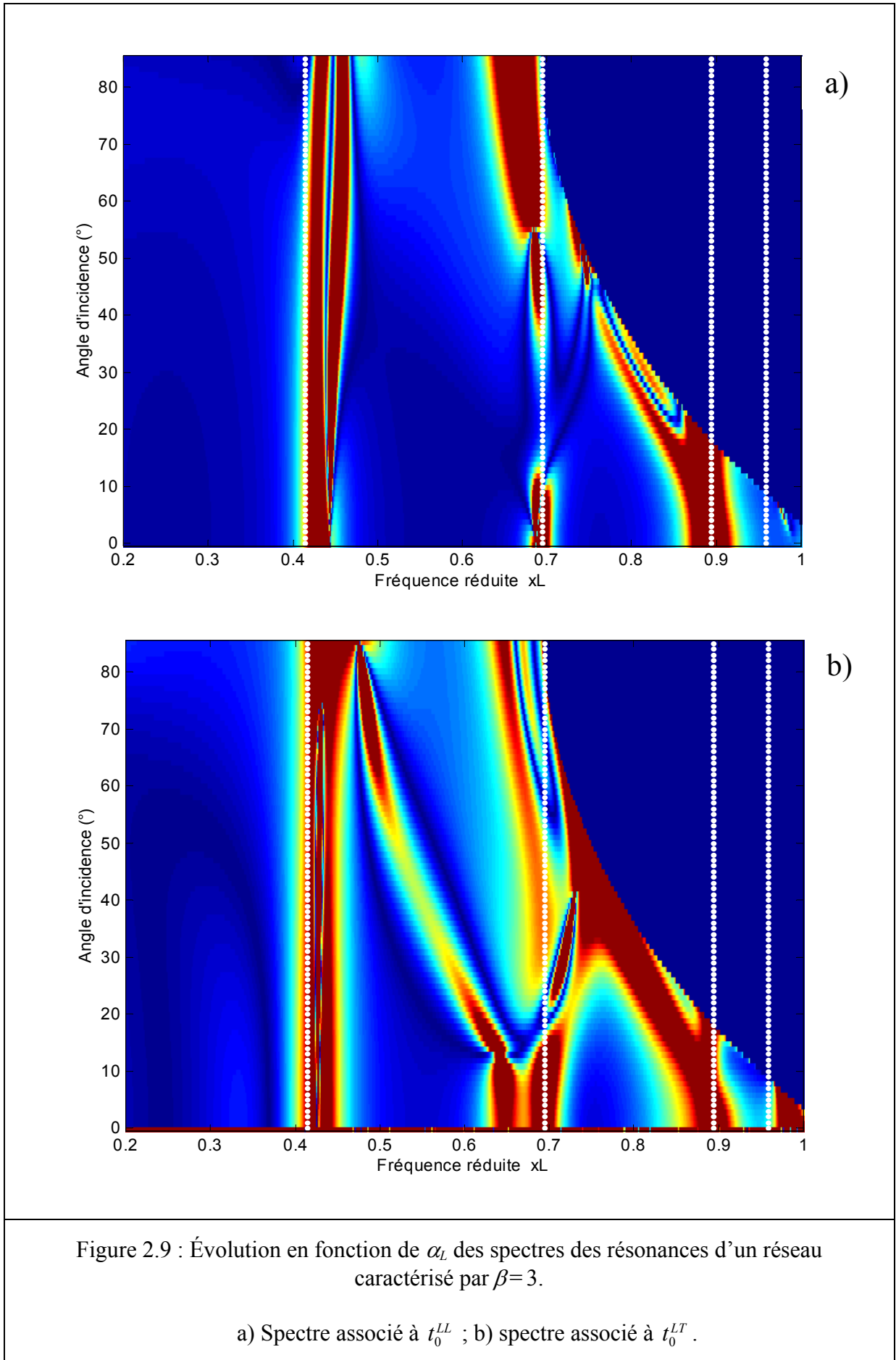


Figure 2.8 : Évolution en fonction de  $\alpha_L$  des spectres des résonances d'un réseau caractérisé par  $\beta=2,05$ .

a) Spectre associé à  $t_0^{LL}$  ; b) spectre associé à  $t_0^{LT}$  .



$$|r_0^{TT}|^2 + x_0^{TL^2} |r_0^{TL}|^2 + |t_0^{TT}|^2 + x_0^{TL^2} |t_0^{TL}|^2 = 1, \quad (2.104)$$

en notant

$$x_0^{LT} = \sqrt{\frac{k_0^T}{k_0^L}}, \quad x_0^{TL} = \sqrt{\frac{k_0^L}{k_0^T}} = \frac{1}{x_0^{LT}}. \quad (2.105)$$

L'existence de quatre coefficients de réflexion et de quatre coefficients de transmission, dont ceux relatifs aux conversions  $L \leftrightarrow T$  liés par les relations suivantes

$$x_0^{TL} r_0^{LT} = \frac{1}{x_0^{TL}} r_0^{TL}, \quad x_0^{TL} t_0^{LT} = -\frac{1}{x_0^{TL}} t_0^{TL}, \quad (2.106)$$

permet de construire la matrice  $S$  à l'aide de matrices blocs comme suit

$$S = \begin{bmatrix} S_0^{LL} & S_0^{LT} \\ S_0^{TL} & S_0^{TT} \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Les éléments  $S_0^{l_1 l_2}$  (avec  $l_1, l_2 = L$  ou  $T$ ) sont des matrices  $2 \times 2$  relatives à un état de diffusion (par exemple, la matrice  $S_0^{LT}$  représente l'état de diffusion relatif à la conversion des ondes longitudinales en ondes transversales). En explicitant chacun des quatre éléments, la matrice  $S$  est une matrice  $4 \times 4$  définie par

$$S = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0^{LL} & t_0^{LL} \\ t_0^{LL} & r_0^{LL} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_0^{LT} r_0^{LT} & x_0^{LT} t_0^{LT} \\ x_0^{LT} t_0^{LT} & x_0^{LT} r_0^{LT} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_0^{TL} r_0^{TL} & -x_0^{TL} t_0^{TL} \\ -x_0^{TL} t_0^{TL} & x_0^{TL} r_0^{TL} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} r_0^{TT} & t_0^{TT} \\ t_0^{TT} & r_0^{TT} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (2.108)$$

Pour être en conformité avec les relations de conservation de l'énergie ci-dessus, la matrice  $S$  doit posséder un certain nombre de propriétés.

La matrice  $S$  doit tout d'abord être unitaire :  $SS^+ = S^+S = I_d$  (en rappelant que le signe  $+$  en exposant indique la conjugaison hermitique et  $I_d$  la matrice identité). En développant le produit de matrices  $SS^+$ , les éléments diagonaux  $(SS^+)_{ii}$  (avec  $i = 1$  à  $4$ ) doivent redonner les relations de conservation de l'énergie. Plus précisément, on a

$$(SS^+)_{11} = (SS^+)_{22} = |r_0^{LL}|^2 + x_0^{LT^2} |r_0^{LT}|^2 + |t_0^{LL}|^2 + x_0^{LT^2} |t_0^{LT}|^2 \quad (2.109)$$

et

$$(SS^+)_{33} = (SS^+)_{44} = |r_0^{TT}|^2 + x_0^{TL^2} |r_0^{TL}|^2 + |t_0^{TT}|^2 + x_0^{TL^2} |t_0^{TL}|^2. \quad (2.110)$$

Pour ce qui est des éléments en dehors de la diagonale, ils vérifient

$$(SS^+)_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j. \quad (2.111)$$

Ces dernières relations montrent qu'il existe des combinaisons additives particulières des produits conjugués de coefficients de réflexion et de transmission telles que l'on obtienne toujours un résultat nul en dehors de la diagonale.

La deuxième propriété de la matrice  $S$  est qu'elle est diagonalisable. Notons  $S_{diag}$  sa forme diagonale. Les quatre valeurs propres de  $S$ , solutions d'une équation polynomiale de degré 4, ont chacune leur module égal à l'unité (c'est-à-dire que  $S_{diag} S_{diag}^+ = I_d$ ). Ceci représente une autre traduction de la loi de conservation de l'énergie. De plus, les vecteurs propres associés aux valeurs propres définissent une base orthonormée, c'est-à-dire que les sous-espaces propres sont indépendants. Ainsi, deux valeurs propres ne devraient donc pas décrire simultanément (en fonction de la fréquence, par exemple) un même état physique.

La troisième et dernière propriété de la matrice  $S$  réside dans le fait qu'une résonance du réseau ne doit se manifester que dans une seule des valeurs propres, ainsi que l'affirme la théorie de la diffusion à plusieurs canaux. Autrement dit, les quatre valeurs propres doivent d'une part suffire pour décrire les propriétés du système tout entier et, d'autre part, posséder des caractéristiques qui font qu'une résonance donnée s'y manifeste et pas une autre.

### III.2.2. Problème du fond potentiel

Lorsque l'on veut extraire les informations contenues dans une matrice  $S$ , on se trouve presque toujours confronté à un problème de fond potentiel à retirer. C'est le cas ici. Puisque le comportement résonant d'une inclusion unique est masqué par un fond potentiel, on s'attend à ce que le comportement résonant du réseau tout entier soit aussi influencé par les fonds potentiels dus aux inclusions le constituant. Si le cas d'une seule inclusion d'eau dans un milieu élastique a fait l'objet d'un certain nombre d'études [9,27,31], ce n'est pas le cas du réseau linéaire infini pour lequel nous proposons ici une approche originale.

---

[9] S. G. Solomon, H. Überall et K. B. Yoo, *Mode conversion and resonance scattering of elastic waves from a cylindrical fluid-filled cavity*, *Acustica* 55, 147-159, 1984.

[27] P. Rembert, H. Frankin, et J.-M. Conoir, *Resonant Scattering Theory applied to a fluid-filled cylindrical cavity*, *J. Acoust. Soc. Am.* 63, pp.723-731, 2004.

[31] M. S. Choi et Y. M. Cheong, *Matrix theory of elastic resonance scattering and its application to fluid-filled cavities*, *Acustica Acta Acustica* 85, pp. 170-180, 1999.



Suite aux travaux cités, il semble que le retrait du fond potentiel doive précéder la diagonalisation mentionnée un peu plus haut. En se plaçant d'emblée dans cette optique, on peut suivre la voie présentée dans la référence [9] à propos d'une seule inclusion d'eau. Elle consiste à retirer de la diffusion par le réseau d'inclusions d'eau la contribution due à la diffusion par un réseau d'inclusions vides et représenté par la matrice  $S_0$ , construite exactement comme la matrice  $S$  (la matrice  $S_0$  satisfait également les propriétés d'unitarité). Ce retrait s'opère grâce à la factorisation de la matrice  $S$ , ce qui conduit à écrire

$$S = S_0 S^{(*)}. \quad (2.112)$$

La matrice  $S^{(*)}$ , qui est également unitaire, représente la diffusion exempte de tout fond potentiel (l'exposant  $(*)$  étant là pour signifier que l'on travaille avec les parties purement résonantes). Le choix de  $S_0$  comme fond potentiel peut se justifier en remarquant que toutes les interactions, dues aux réflexions géométriques entre les inclusions voisines, doivent être presque identiques pour  $S$  et  $S_0$ . Ainsi,  $S^{(*)}$  contient essentiellement la contribution purement résonante du réseau, la partie interférentielle ayant été retirée.

### III.2.3. Valeurs propres de la matrice $S$

Soit  $S_{diag}^{(*)}$ , la matrice  $4 \times 4$  résultant de la diagonalisation de  $S^{(*)}$ . L'étude des valeurs propres peut se faire à l'aide de la matrice de transition (ou matrice des amplitudes)  $\tau_{diag}^{(*)}$  définie par la relation

$$S_{diag}^{(*)} = I_d + 2i \tau_{diag}^{(*)}, \quad (2.113)$$

où  $I_d$  est la matrice identité  $4 \times 4$ . Le choix du facteur  $i$  est purement conventionnel. Le facteur 2 assure, lui, que les courbes obtenues à l'aide du module au carré des fonctions

$$\left( \tau_{diag}^{(*)} \right)_{ii} = \frac{1}{2i} \left( S_{diag}^{(*)} - I_d \right)_{ii} \quad (2.114)$$

(avec  $i = 1$  à  $4$ ) encore appelées termes de transition, auront à la résonance une amplitude égale à l'unité. Une étude numérique des expressions analytiques des termes de transition s'est révélée compliquée en raison des nombreux radicaux propres à la méthode de Ferrari [32].

---

[32] L. N. Childs, *A concrete introduction to higher algebra*, Springer-Verlag, New-York Inc., Deuxième édition, pp. 267-268, 2000.

C'est pourquoi une recherche numérique des racines du polynôme caractéristique a été préférée. La continuité des valeurs propres en fonction de la fréquence a été assurée en vérifiant à chaque pas de calcul l'orthogonalité des vecteurs propres. En incidence normale, et avec  $\beta=2,05$ , les graphiques a) et b) de la Figure 2.10 représentent les tracés des quatre modules au carré des termes de transition (2.114) avant et après retrait du fond potentiel.

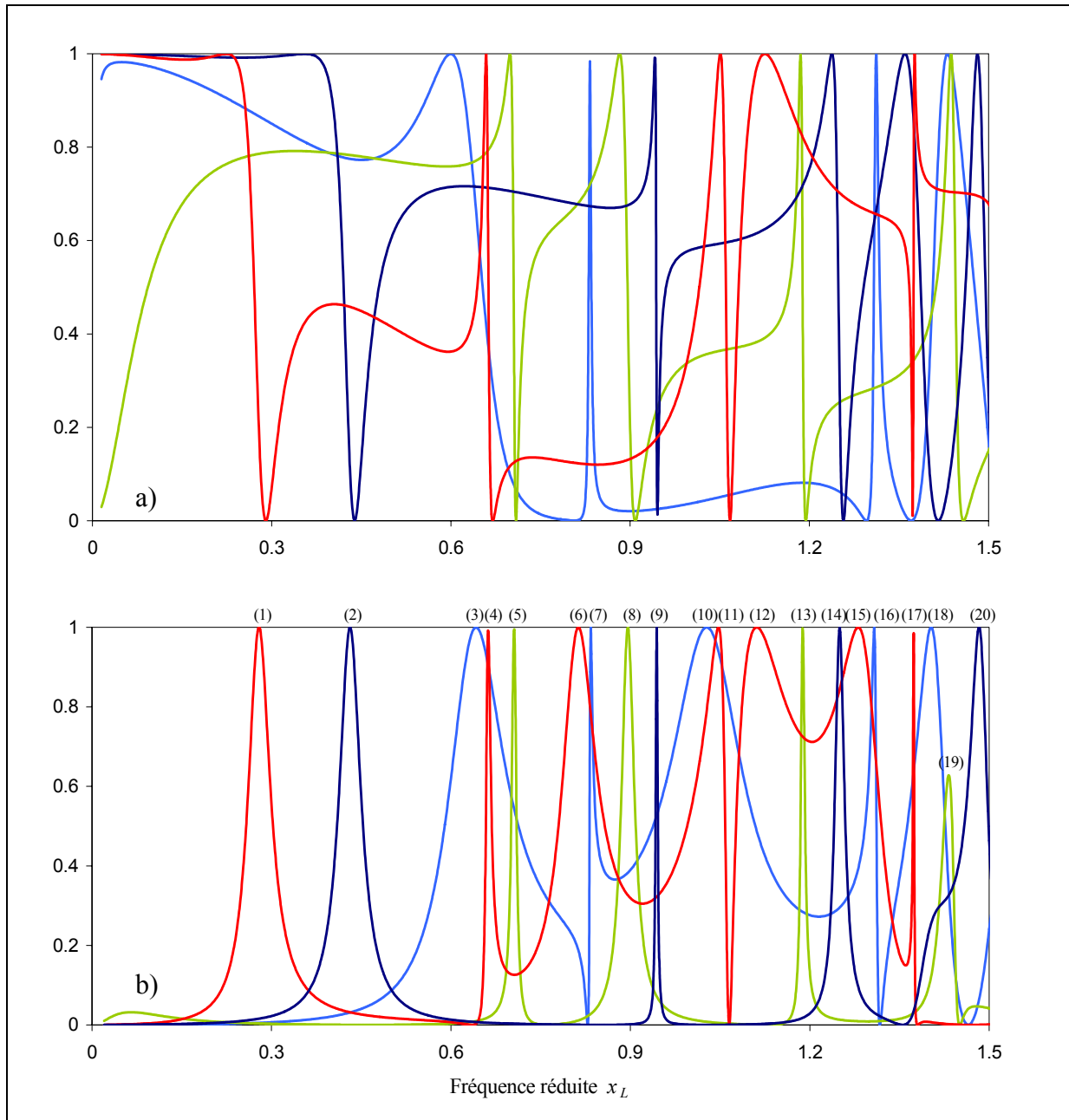


Figure 2.10 : Termes de transition pour un réseau caractérisé par  $\beta=2,05$  (avec  $\alpha_L = \alpha_T = 0^\circ$ ).  
 a) Avant retrait du fond potentiel ; b) après retrait du fond potentiel.

L'ensemble des courbes de la Figure 2.10 sont à comparer avec le spectre de la dérivée de phase de la Figure 2.6. Ainsi que le prévoit la théorie de la diffusion à plusieurs canaux, les modules des termes de transition décrivent autour d'une résonance, et après retrait du fond potentiel, des courbes de type Breit-Wigner [33]. Excepté pour la résonance 19, les termes de transition ont bien des amplitudes unitaires à chaque fréquence de résonance.

L'intérêt du retrait du fond potentiel est manifeste lorsque l'on compare les graphiques a) et b) entre eux. Avec fond potentiel, les résonances 6, 10 et 15 ne sont pas observables. En ôtant le fond potentiel, des courbes de type Breit-Wigner d'amplitudes unitaires marquent pourtant leur présence. Le retrait du fond potentiel permet de plus d'avoir accès à la largeur de la plupart des résonances (définies comme étant les largeurs à mi-hauteur des courbes de type Breit-Wigner). Cependant, pour certaines d'entre elles, la largeur de résonance n'est pas accessible lorsqu'il y a recouvrement des pics de résonance. C'est le cas pour les résonances 6, 7, 10, 11, 12, 15 et 16. Ces recouvrements des pics de résonance interviennent lorsque qu'un terme de transition comporte plusieurs résonances très proches les unes des autres. Il faut cependant souligner que, par rapport aux spectres des dérivées de phase, la répartition des résonances entre les quatre termes de transition implique que la majorité des résonances sont ici bien isolées des unes des autres, permettant de mesurer leur largeur à mi-hauteur.

Les fréquences des résonances figurent dans le Tableau 2.4 ci-dessous. On dénombre au total vingt résonances alors que le spectre de la dérivée de phase n'en révélait que onze. Comme outil de détection des résonances, la méthode utilisée apparaît donc plus performante.

Résonances	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_L$	0,279	0,431	0,642	0,662	0,706	0,813	0,834	0,897	0,944	1,028
Résonances	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_L$	1,047	1,111	1,188	1,250	1,281	1,308	1,374	1,403	1,432	1,483

Tableau 2.4 : Valeurs des fréquences des résonances des spectres de la Figure 2.10.

A titre d'exemple, suite à l'analyse du spectre de la Figure 2.6, il a été conclu que la résonance 7 d'une inclusion seule, située à  $x_L = 1,416$ , se séparait en trois nouvelles résonances. Au vu

[33] L. N. Childs, *A concrete introduction to higher algebra*, Springer-Verlag, New-York Inc., Deuxième édition, pp. 267-268, 2000.

des résultats présentés ici, il faut visiblement conclure qu'elle se sépare en quatre résonances : les résonances 17, 18, 19 et 20.

La performance de cet outil vient aussi de ce que la matrice  $S$  est construite à l'aide de tous les coefficients de transmission et de réflexion du réseau. La matrice  $S$  contient donc les résonances associées à toutes les conversions  $L \leftrightarrow T$ , alors qu'un spectre de dérivée de phase fournit les informations propres à une seule conversion. Les courbes de la Figure 2.10 synthétisent donc à elles seules les deux diagrammes (à  $\alpha_L = 0^\circ$ ) de la Figure 2.8. Les courbes de la Figure 2.11 ci-dessous ont été obtenues dans les mêmes conditions à l'exception du paramètre  $\beta$  valant ici 3.

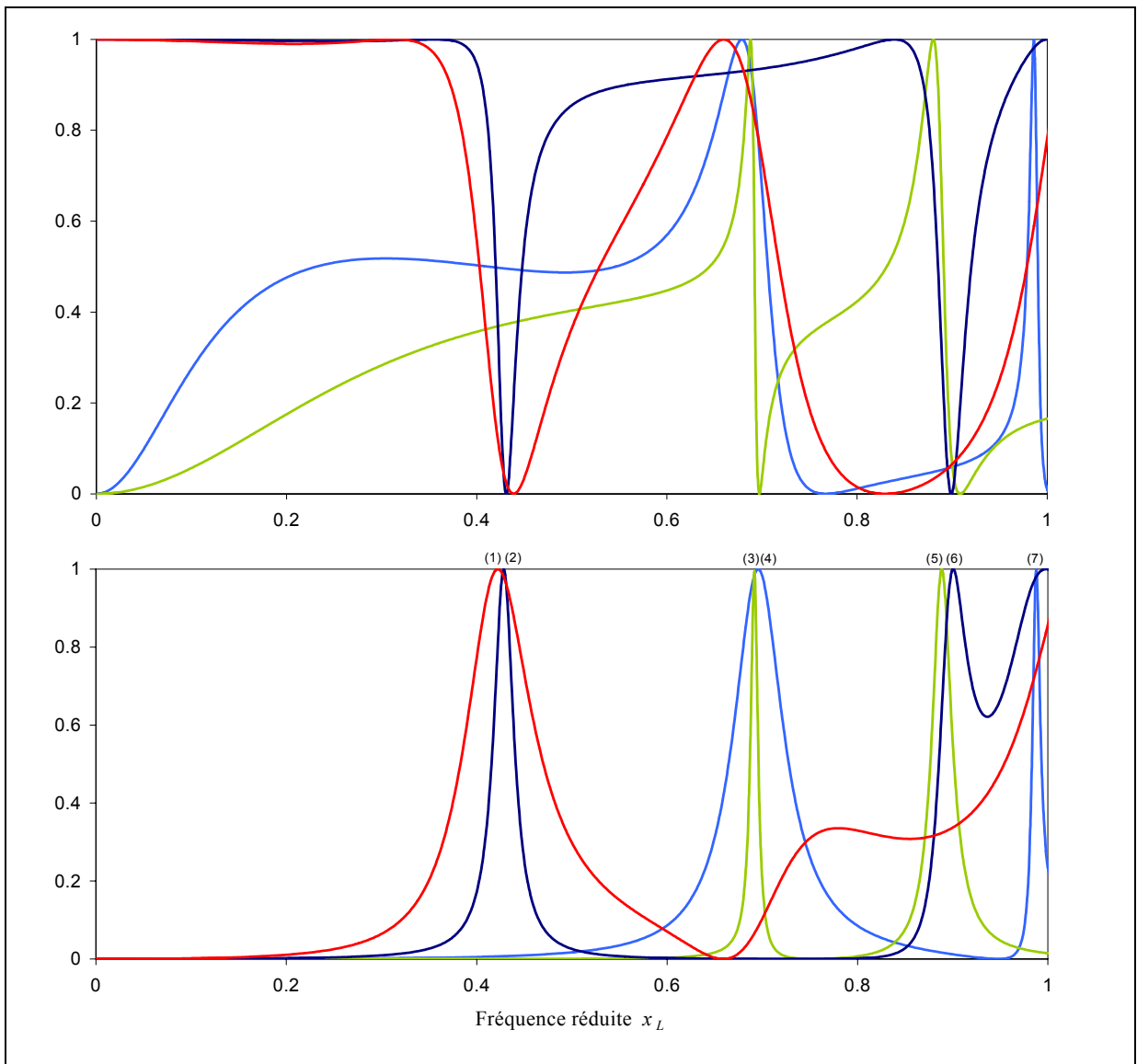


Figure 2.11 : Termes de transition pour un réseau caractérisé par  $\beta=3$  et avec  $\alpha_L = \alpha_T = 0^\circ$ .

a) Avant retrait du fond potentiel ; b) après retrait du fond potentiel.

Là où les deux diagrammes de la Figure 2.9 (à  $\alpha_L = 0^\circ$ ) ne révèlent la présence que de quatre résonances, la méthode utilisée ici permet d'en détecter sept. En effet, la dérivée de la phase du coefficient de transmission ne permettait pas de séparer les résonances 1 et 2, celles 3 et 4, et celles 5 et 6. Les fréquences des résonances figurant dans la Tableau 2.5 sont proches de celles d'une seule inclusion (*cf.* Tableau 2.3).

Résonances	1	2	3	4	5	6	7
$x_L$	0,442	0,428	0,692	0,696	0,889	0,901	0,998

Tableau 2.5 : Valeurs des fréquences des résonances des spectres de la Figure 2.11.

Elles sont, dans l'ensemble, légèrement décalées vers les hautes fréquences. La présence de deux résonances aux environs de  $x_L = 0,7$ , contre une seule pour une inclusion, suggère l'existence d'un effet résiduel de l'interaction résonante entre les inclusions du réseau pour cette valeur de  $\beta$ . Ceci expliquerait peut-être le léger décalage vers les hautes fréquences de certaines résonances par rapport à celles de l'inclusion considérée isolément.

#### IV. FRÉQUENCES DE COUPURE EXPÉRIMENTALES

Ce travail expérimental n'a pas pour but de valider les différents spectres théoriques de la précédente section. En effet, nous avons vu lors du premier chapitre que les contraintes expérimentales ne permettaient pas de nous placer dans des conditions favorables à de fortes interactions entre les inclusions. Il s'agit ici de vérifier expérimentalement les valeurs des premières fréquences de coupure. Comme dans le premier chapitre, l'accord avec la théorie permettra de valider le dispositif expérimental qui pourra donc être réutilisé dans le chapitre suivant pour l'étude de réseaux périodiques dans deux directions de l'espace.

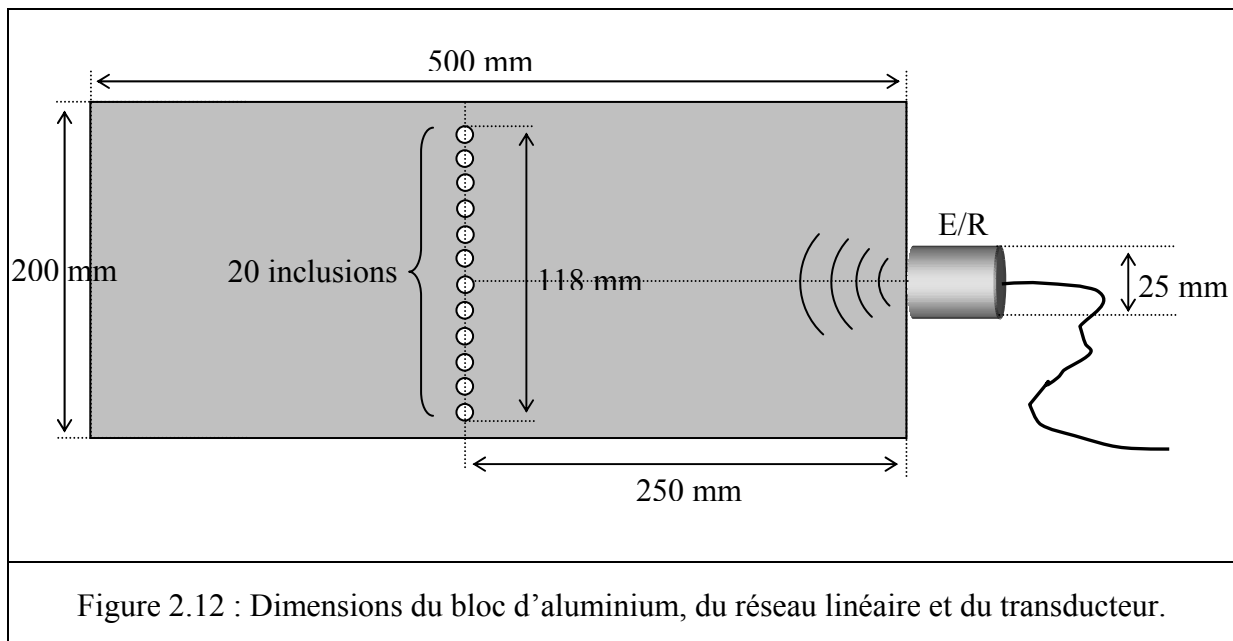
##### IV.1 Dispositif expérimental

A l'exception du transducteur utilisé, le dispositif expérimental reste le même que dans le chapitre précédent. L'échantillon d'aluminium, de dimensions 500×150×200 mm, est percé d'un réseau linéaire périodique de vingt trous sur toute sa largeur (voir la Figure 2.12

qui, par rapport à la Figure 1.23, représente une vue de dessus du bloc d'aluminium). Le rayon  $a$  des trous est estimé à 2,07 mm et leur espacement  $d$  à 6 mm. En incidence normale, les valeurs théoriques des cinq premières fréquences de coupure sont celles figurant dans le Tableau 2.6 (en rappelant que les fréquences de coupure associées à deux modes diffractés  $p$  et  $-p$  ont les mêmes valeurs en incidence normale). Le but est de vérifier la présence de ces fréquences particulières qui doivent se manifester par de brusques variations des champs réfléchis et transmis (cf. Figure 2.5). Pour ce faire, la réflexion du mode fondamental longitudinal sera analysée pour détecter les différentes fréquences de coupure du réseau. Le mode fondamental reste en effet purement propagatif, et donc détectable, quelle que soit la fréquence considérée.

Fréquences de coupure	$f_{\pm 1}^T$	$f_{\pm 2}^T$	$f_{\pm 1}^L$	$f_{\pm 3}^T$	$f_{\pm 4}^T$	$f_{\pm 2}^L$
Valeurs en MHz	0,523	1,047	1,063	1,570	2,093	2,126

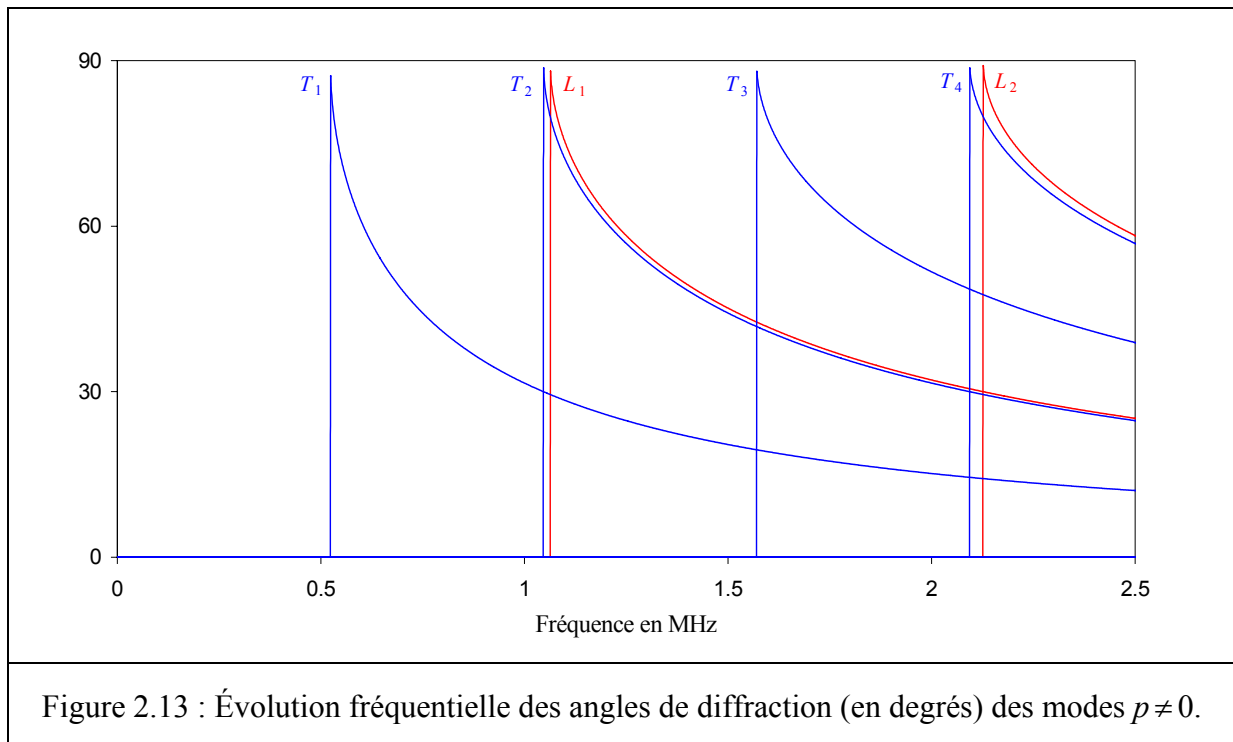
Tableau 2.6 : Valeurs des cinq premières fréquences de coupure d'un réseau de pas  $d = 6$  mm et excité en incidence normale.



La seule différence avec la partie expérimentale du premier chapitre est l'utilisation d'un transducteur de contact. L'expérience a également été conduite dans une cuve en utilisant un transducteur submersible mais n'a pas donné dans ce cas de résultats concluants. Ceci s'explique par le fait que le domaine fréquentiel d'étude est ici un domaine basse fréquence,

et que la directivité, définie par (1.141), devient dès lors incorrecte. Il faut donc que le transducteur soit aussi proche que possible de la cible pour limiter les effets de cette mauvaise directivité, d'où l'utilisation d'un transducteur de contact. La pastille du transducteur a un diamètre de 25 mm et la fréquence centrale de sa bande passante est de 1 MHz. En menant les mêmes calculs que dans le premier chapitre, on peut vérifier que la condition de champ lointain à cette fréquence est satisfaite lorsque le faisceau ultrasonore arrive sur le réseau. Le dispositif électronique est dans une configuration monostatique (*cf.* Figure 1.25) : le transducteur fonctionne en émetteur et en récepteur pour l'acquisition du champ réfléchi par le réseau.

En incidence normale et au-dessous de la première fréquence de coupure du réseau, le transducteur ne doit recevoir que le mode fondamental longitudinal. Tous les autres modes étant évanescents dans la direction perpendiculaire au réseau, leur amplitude ne doit pas être significative à l'interface aluminium/air où est situé le transducteur. Lorsque la fréquence augmente, le mode fondamental longitudinal n'est plus le seul mode purement propagatif réfléchi. Le réseau diffracte d'autres modes homogènes sous des angles non nuls par rapport à la direction normale au réseau. Pour que le transducteur reçoive uniquement le mode fondamental, il faut alors s'assurer que les directions de propagation des autres modes purement propagatifs soient telles que ces modes n'atteignent pas la pastille du transducteur. La Figure 2.13 présente l'évolution fréquentielle des angles de diffraction  $\theta_p^{L,T}$  des modes  $p \neq 0$



Précisons que ces angles sont calculés à partir de l'équation (2.46). Au vu des courbes obtenues, le mode  $p \neq 0$  diffracté ayant le plus de chance d'atteindre la pastille du transducteur est le mode noté  $T_1$  : quelle que soit la fréquence, il s'agit en effet du mode dont la direction de propagation est la plus proche de la direction normale au réseau. En raison de la bande passante du transducteur disponible, le domaine fréquentiel d'étude s'étendra de 0,2 à 1,8 MHz. A la fréquence maximale de 1,8 MHz, l'angle de diffraction du mode  $T_1$  est de  $17^\circ$ . Comme l'indique la Figure 2.14 ci-après, même à cette fréquence, le mode  $T_1$  n'atteint pas la pastille du transducteur. Ainsi, on peut estimer, avec une certaine marge de sécurité, que le transducteur ne reçoit que le mode fondamental longitudinal dans tout le domaine fréquentiel d'étude.

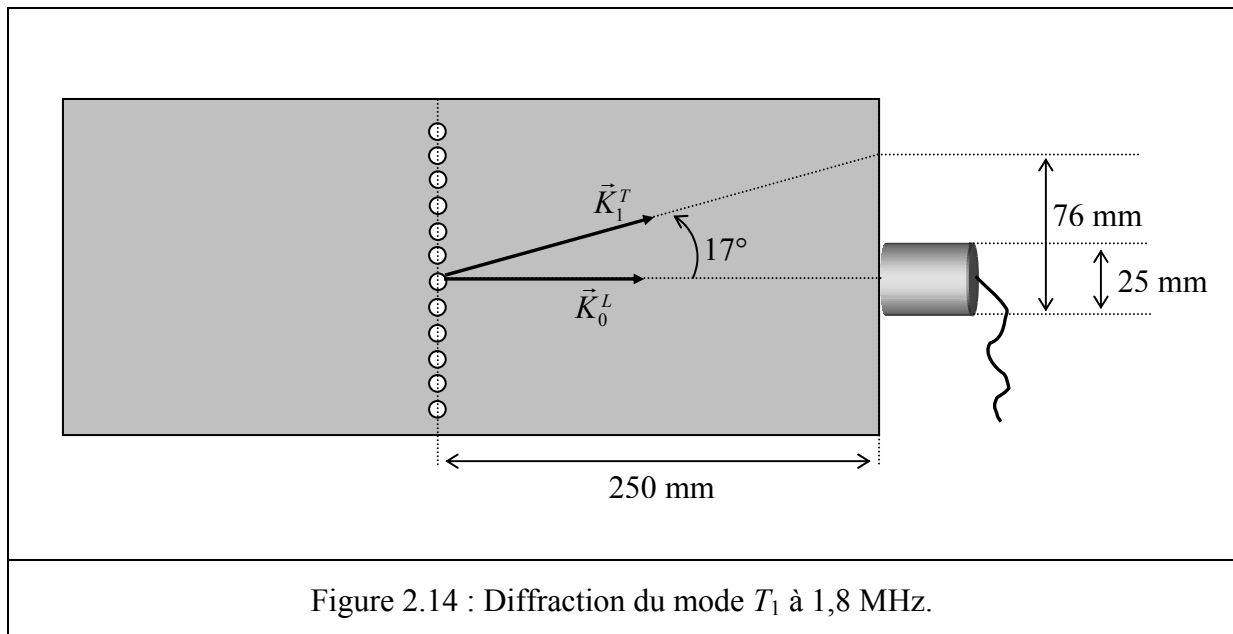


Figure 2.14 : Diffraction du mode  $T_1$  à 1,8 MHz.

Pour clore ce paragraphe, il faut souligner que le diamètre de la pastille du transducteur correspond à un réseau de seulement quatre à cinq inclusions ; le réseau de vingt inclusions n'est donc pas soumis en totalité à une onde plane. L'expérience sera menée dans ces conditions car les transducteurs de plus grande pastille disponibles n'ont pas les bandes passantes appropriées à cette étude. La solution qui pouvait être envisagée était de procéder à une addition de spectres en translatant le transducteur le long du réseau linéaire. Cependant, lorsque l'on éloigne le transducteur de sa position centrale, on est confronté à des effets de bord, le faisceau ultrasonore incident pouvant être réfléchi partiellement par les interfaces latérales air/aluminium du bloc.



## IV.2 Comparaison théorie/expérience

La Figure 2.15 de la page suivante présente les spectres de réflexion théorique (correspondant au tracé de  $|r_0^{LL}|$ ) et expérimental pour une fréquence allant de 0,2 à 1,8 MHz. Le réseau linéaire est ici composé d'inclusions d'air au comportement peu résonant. Les valeurs théoriques des quatre premières fréquences de coupure dans cette gamme fréquentielle figurent dans le Tableau 2.6 du paragraphe précédent. Les fréquences de coupure sont repérées sur les différentes courbes par des traits rouges verticaux. Il est à noter que les deuxième et troisième fréquences de coupure sont trop proches l'une de l'autre pour être distinguées clairement sur toutes les courbes présentées. Le spectre expérimental a été normalisé par celui de l'écho spéculaire, ce dernier définissant la bande passante du transducteur. Cette bande passante s'étale de 0,5 à 1,5 MHz. Cependant, le domaine d'étude a été étendu de 0,2 à 1,8 MHz en raison des informations présentes à la limite ou légèrement au-delà de la bande passante du transducteur. Ceci explique les fortes amplitudes du spectre autour de 0,5 MHz, mais aussi le fait que l'amplitude ne décroît pas globalement avec la fréquence comme prévu par la théorie (l'énergie d'un mode fondamental réfléchi ou transmis diminue à chaque fréquence de coupure du réseau, une partie de l'énergie étant alors transportée par un mode homogène nouvellement diffracté). Ici, comme seules les brusques variations du champ réfléchi sont l'objet de notre étude, ces différences par rapport au spectre théorique n'affecteront pas nos conclusions.

Au vu du spectre théorique, les brusques variations du champ réfléchi apparaissent de façon systématique à des fréquences légèrement inférieures aux fréquences de coupure. Les fréquences considérées ici sont alors celles des minima d'amplitude situés environ à 50 kHz au-dessous des fréquences de coupure. En l'absence de résonances, ces minima sont caractéristiques des fréquences de coupure du réseau. Ils sont numérotés 1, 2 et 3 sur le spectre théorique. Ceux situés à des fréquences voisines sur le spectre expérimental sont numérotés de façon identique. Les fréquences mesurées sur les deux spectres sont alors reportées dans le Tableau 2.7. A sa lecture, l'accord entre les fréquences théoriques et expérimentales paraît très bon ; ces dernières étant très légèrement décalées vers les hautes fréquences. Les trois minima numérotés sur le spectre expérimental peuvent donc être identifiés avec ceux du spectre théorique. Ceci est renforcé par le fait que les variations d'amplitude autour de ces fréquences suivent la même évolution sur les deux spectres : plus la fréquence augmente, et plus les variations d'amplitude au niveau des fréquences de coupure sont faibles. Les trois fréquences de coupure prédites par la théorie sont donc ici identifiées.

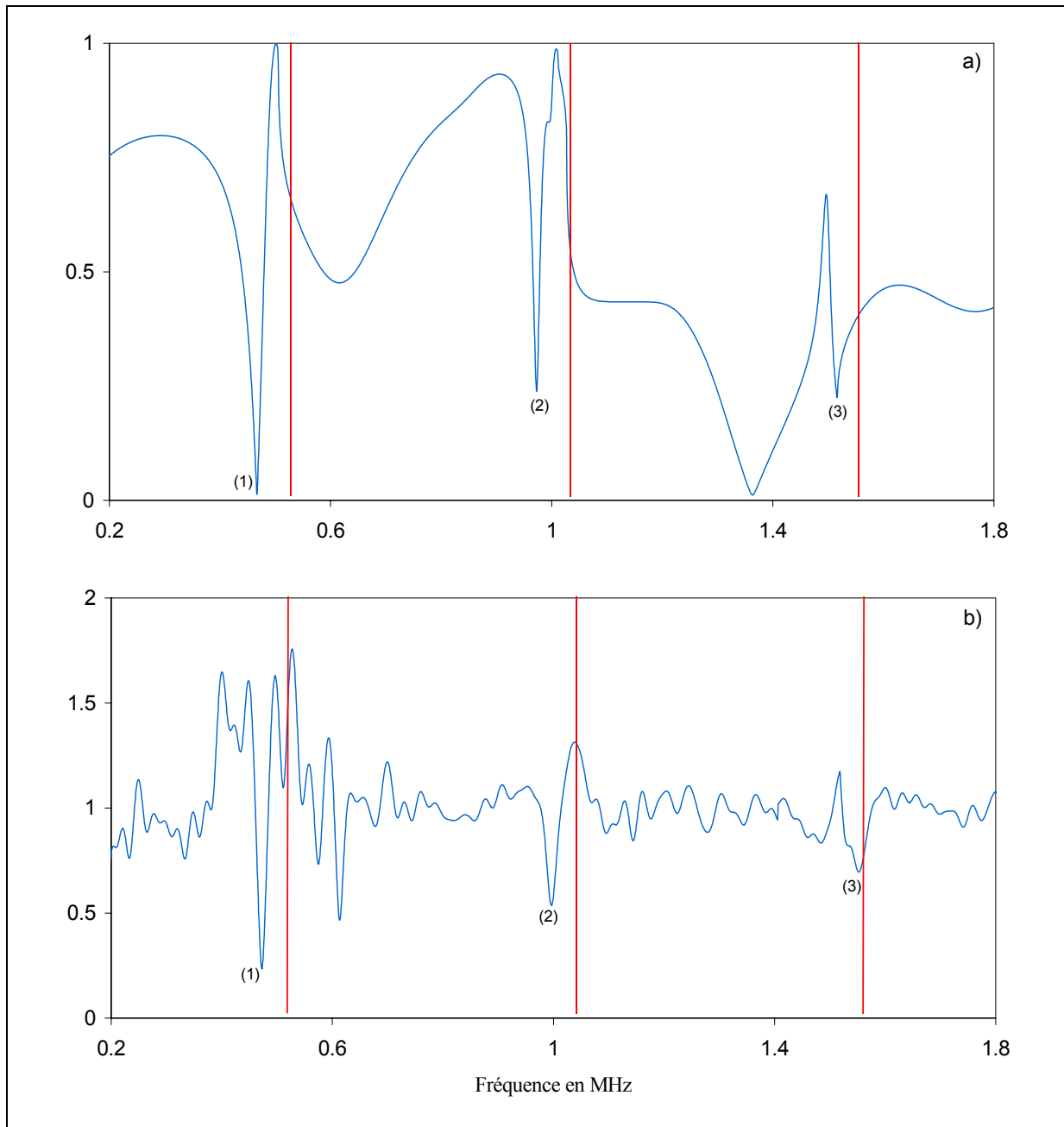


Figure 2.15 : Spectres de réflexion d'un réseau d'inclusions d'air.

a) Spectre théorique ; b) spectre expérimental.

Théorie	0,469	0,974	1,520
Expérience	0,473	0,998	1,560

Tableau 2.7 : Réseau d'inclusions d'air : comparaison des fréquences théoriques et expérimentales des trois minima d'amplitude.

La Figure 2.16 ci-dessous présente les spectres obtenus dans le cas d'un réseau d'inclusions d'eau, beaucoup plus résonantes que les inclusions d'air.

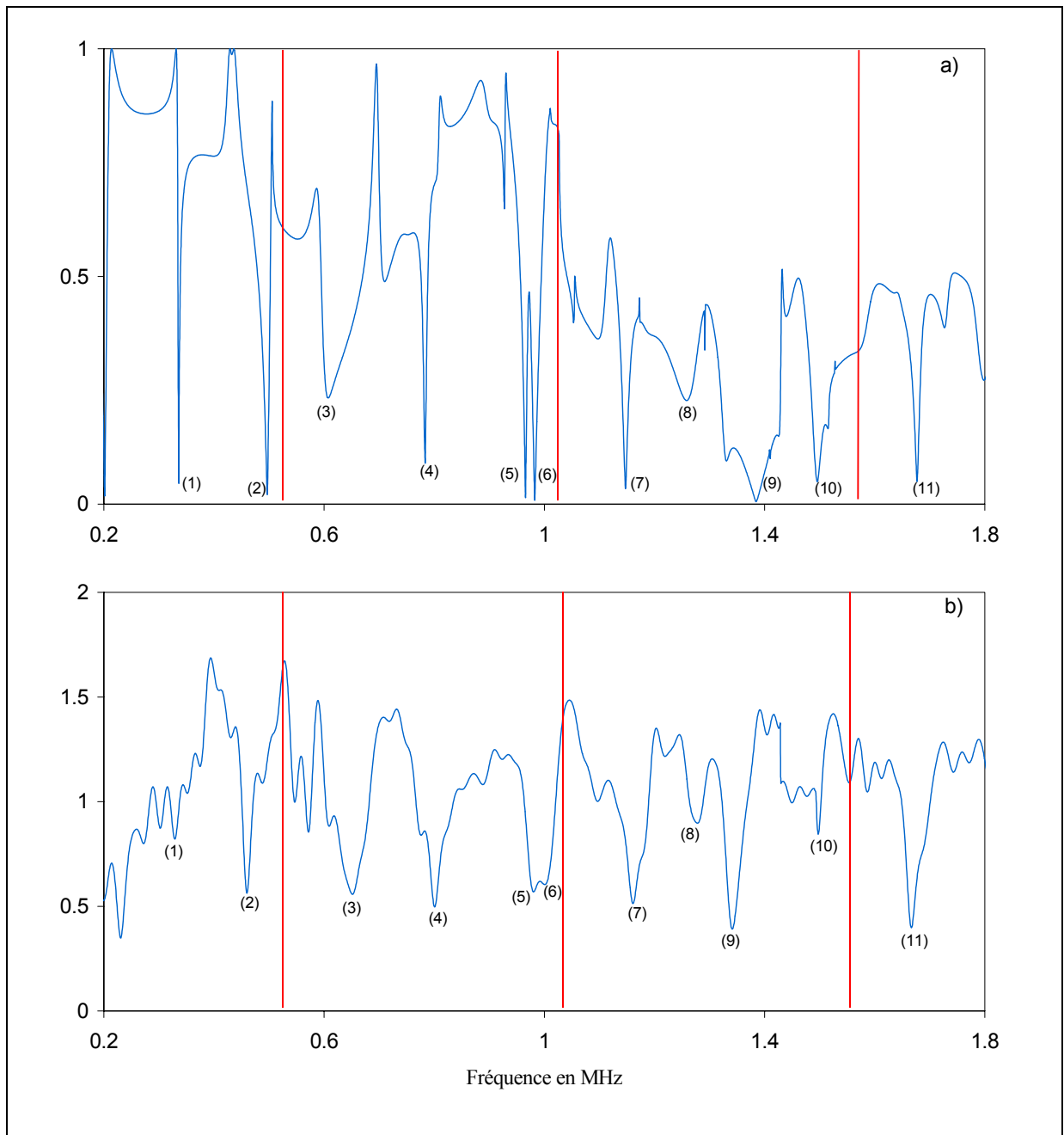


Figure 2.16 : Spectres de réflexion d'un réseau d'inclusions d'eau.

a) Spectre théorique ; b) spectre expérimental.

Le nombre très important de minima d'amplitude fait qu'il devient dès lors très difficile de distinguer les effets des résonances de ceux des fréquences de coupure du réseau. Par rapport au réseau d'inclusions d'air, il n'est plus possible d'identifier ici directement ces fréquences particulières.

Les minima d'amplitude présumés communs aux deux spectres sont numérotés de 1 à 11. Leurs fréquences sont exposées dans le Tableau 2.8 ci-dessous. Ici encore, l'accord est très bon entre les fréquences mesurées sur le spectre expérimental et celles mesurées sur le spectre théorique. Seuls les fréquences des minima 3 et 9, correspondant à deux résonances du réseau, présentent ici des différences significatives. En comparant ces valeurs avec celles du Tableau 2.7, on peut identifier les trois minima associés aux fréquences de coupure comme étant ceux numérotés 2, 3 et 4 (leurs fréquences sont présentées sur fond gris dans le tableau ci-dessus). Il s'agit des fréquences les plus proches de celles relevées pour un réseau d'inclusions d'air.

Théorie	0,336	0,498	0,606	0,783	0,966	0,985	1,150	1,260	1,390	1,500	1,680
Expérience	0,327	0,460	0,654	0,802	0,983	1,009	1,162	1,282	1,343	1,505	1,668

Tableau 2.8 : Réseau d'inclusions d'eau : comparaison des fréquences théoriques et expérimentales des onze minima d'amplitude.

En outre, la comparaison de ces fréquences avec les fréquences de résonance d'une inclusion d'eau (le rapport  $d/a$  étant supérieur à la valeur critique de 2,4, l'absence de couplage résonant entre les inclusions implique que les résonances du réseau peuvent être identifiées comme étant celles d'une seule inclusion d'eau) confirme que ces trois minima ne sont pas situés à des fréquences de résonance.

Finalement, que le réseau soit composé d'inclusions d'air ou d'eau, les premières fréquences de coupure ont pu être validées expérimentalement. Cependant, on ne peut déterminer de façon très précise ces fréquences par l'analyse de la réflexion (ou de la transmission) du mode fondamental puisque leurs effets se manifestent à des fréquences légèrement inférieures. Cette erreur, qui peut être estimée négligeable vis-à-vis des valeurs des fréquences de coupure, varie selon la fréquence considérée, et selon que les inclusions résonnent ou pas. Il reste que ces fréquences sont plus facilement identifiables dans le cas non résonant puisque les brusques variations du champ réfléchi ne sont dues qu'aux seuls effets de la diffraction.

## V. CONCLUSION

Suite aux résultats du premier chapitre concernant les interactions résonantes dans un réseau limité de deux ou trois inclusions d'eau, ce chapitre avait pour objectif d'identifier les effets de ces interactions dans le cas d'un nombre infini d'inclusions disposées périodiquement. La périodicité du réseau a été utilisée pour récrire le formalisme du premier chapitre sous une forme plus adaptée à des calculs rapides. L'étude théorique a été menée dans le domaine des basses fréquences pour lequel la réflexion et la transmission par le réseau s'écrivent formellement comme celles d'une interface plane solide/solide. En utilisant et en comparant deux méthodes d'isolement et de détection des résonances, l'une basée sur les dérivées des phases des coefficients de transmission et l'autre sur les valeurs propres de la matrice de diffusion, un comportement résonant singulier, très différent de celui d'un réseau limité, a été observé : en incidence normale, l'interaction résonante se manifeste bien par l'émergence de nouvelles résonances, mais pour la plupart d'entre elles, leur fréquence évolue avec l'angle d'incidence. Ce résultat, qui révèle un effet particulier des interactions résonantes étendues à tout le réseau linéaire lorsque les inclusions sont très proches les unes des autres, n'a pas pu être interprété avec succès. La complexité de ce comportement résonant reflète celle des phénomènes interactionnels mise en évidence dans le chapitre précédent.

Le chapitre suivant a pour objet la propagation d'ondes dans des réseaux à deux dimensions spatiales. La méthode de calcul des coefficients de réflexion et de transmission des réseaux 2-d, ainsi que des courbes de dispersion et d'atténuation des ondes s'y propageant, repose sur la décomposition des réseaux 2-d en un nombre fini de réseaux linéaires dont les coefficients de réflexion et de transmission sont désormais connus. Les effets des résonances des réseaux linéaires sur la propagation d'ondes ne seront pas uniquement étudiés. Il s'agit également d'analyser les effets d'une apériodicité sur la propagation d'ondes par rapport à la situation périodique. Ce chapitre constitue un pont vers le quatrième et dernier chapitre traitant de réseaux semi-périodiques et semi-aléatoires, c'est-à-dire de réseaux constitués d'une série de réseaux linéaires périodiques aléatoirement positionnés.

# PROPAGATION D'ONDES DANS DES RÉSEAUX BIDIMENSIONNELS D'INCLUSIONS CYLINDRIQUES

---

*La propagation d'ondes dans des réseaux 2-d d'inclusions cylindriques est étudiée ici. Ces réseaux sont formés d'un empilement de réseaux linéaires, infinis et périodiques. Les réseaux linéaires peuvent être distribués de façon périodique (réseaux 2-d dits périodiques) ou apériodique (réseaux 2-d dits apériodiques, possédant toutefois une direction de périodicité). Suite à une introduction précisant les travaux antérieurs auxquels nous nous référons, la deuxième section de ce chapitre présente la méthode de calcul des coefficients de réflexion et de transmission de réseaux 2-d finis (périodiques ou apériodiques). Pour des réseaux 2-d infinis et périodiques, la troisième section a pour but le calcul, basé sur le théorème de Bloch, des nombres d'onde effectifs des ondes se propageant dans les milieux homogènes équivalents (dits milieux effectifs). L'étude numérique est l'objet de la quatrième section. Les réseaux 2-d périodiques et apériodiques sont considérés dans deux parties distinctes. Pour les premiers, il s'agit d'identifier les effets dus aux résonances des inclusions d'eau sur les bandes spectrales interdites, puis les effets dus au couplage entre les ondes longitudinales et transversales se produisant en incidence oblique. Pour les réseaux apériodiques, le but est d'identifier les effets de perturbations de la périodicité pouvant être soit une variation des dimensions des inclusions dans la direction de propagation des ondes, soit une répartition aléatoire de réseaux linéaires identiques. La cinquième section est un travail expérimental visant à valider les positions et les largeurs des bandes interdites de deux réseaux périodiques finis. Les principaux résultats obtenus sont résumés dans la dernière section qui conclut ce chapitre.*

---

## I. INTRODUCTION

La réflexion et la transmission par un réseau linéaire, infini et périodique étant désormais connues, l'objectif de ce chapitre est d'étudier la propagation d'ondes dans des réseaux à deux dimensions spatiales formés d'un empilement de réseaux linéaires [34]. Le problème de la propagation acoustique dans des réseaux 2-d considérés en tant que séries de réseaux linéaires, infinis et périodiques, a été étudié, avec des optiques différentes, par C. Audoly, G. Dumery, L. S. Mulholland et M. A. Heckl [35,36,37] dans le cas de diffuseurs rigides ou élastiques immergés dans un fluide. Si les réseaux linéaires sont tous identiques, périodiquement espacés et en nombre infini, la propagation d'ondes peut être caractérisée par le théorème de Bloch [35]. L'équation caractéristique obtenue fournit les nombres d'onde effectifs des ondes se propageant dans le milieu homogène équivalent au réseau 2-d, dit milieu effectif. Pour un nombre fini de réseaux linéaires [36,37], les coefficients de réflexion et de transmission du réseau 2-d peuvent être obtenus à l'aide d'une méthode itérative et de développements en séries de Debye [38] décrivant les multiples aller-retours des ondes entre les réseaux linéaires. Les réseaux 2-d périodiques, qu'ils soient finis ou infinis, possèdent des propriétés physiques originales telles que la présence de bandes interdites, c'est-à-dire des bandes de fréquence pour lesquelles les ondes ne peuvent se propager à longue distance dans le réseau. En termes de milieu homogène équivalent, ou milieu effectif, les ondes y sont caractérisées par une forte atténuation qui dépend du contraste entre les paramètres acoustiques des diffuseurs et ceux du milieu ambiant, fluide ou solide. Pour un réseau 2-d périodique fini, ces bandes interdites se traduisent par des réflexions totales liées à des interférences constructives entre les ondes réfléchies par les différents réseaux linéaires.

---

[34] S. Robert, J.-M. Conoir, H. Franklin, *Scattering by two-dimensional gratings composed of cylindrical in an elastic matrix*, Proceeding of the 75<sup>th</sup> Anniversary meeting (147<sup>th</sup> Meeting) of the Acoustical Society of America, New-York, New-York, 24-28 mai 2004.

[35] C. Audoly et G. Dumery, *Acoustic wave propagation in media containing two-dimensional periodically spaced elastic inclusions*, *Phys. Acoust.*, Éds. O. Leroy et M. A. Breazeale, Plenum Press, New York, pp. 199-204, 1991.

[36] L. S. Mulholland et M. A. Heckl, *Multi-directional sound wave propagation through a tube bundle*, *Journal of Sound and Vibration* 176, pp. 377-398, 1994.

[37] M. A. Heckl et L. S. Mulholland, *Some recent developments in the theory of acoustic transmission in tube bundles*, *Journal of Sound and Vibration* 179, pp. 37-62, 1995.

[38] J.-M. Conoir, O. Lenoir et J.-L. Izbicki, *Acoustic interactions with submerged elastic structures. Part I. Acoustic Scattering and Resonances*, Éds. A. Guran et al., World Scientific, Singapore, 1996.

Par rapport à L. S. Mulholland et M. A. Heckl [32] qui étendent le problème au domaine des hautes fréquences où chaque réseau linéaire diffracte une infinité d'ondes planes dans une infinité de directions, cette étude sera restreinte au domaine des basses fréquences pour éviter ce phénomène de diffraction. Cette restriction a pour but de simplifier le problème dont la complexité est due à deux facteurs : d'une part, aux conversions entre les ondes longitudinales et celles transversales à chaque réflexion ou transmission par un réseau linéaire (ce qui, par rapport au cas de diffuseurs immergés dans un fluide, introduit un formalisme basé sur des notations vectorielles et matricielles) ; d'autre part, au fait que les réseaux 2-d étudiés ici ne seront pas nécessairement périodiques, pouvant être composés de réseaux linéaires différents les uns des autres avec, par conséquent, des comportements diffractants différents d'un réseau linéaire à un autre. Sous l'hypothèse basse fréquence, la mise en équation est formellement identique à celle d'un milieu solide stratifié d'interfaces planes solide/solide. L'unique différence réside dans les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission de chaque interface qui sont celles des coefficients des réseaux linéaires définis dans le chapitre précédent.

Les réseaux 2-d considérés dans cette étude comportent un nombre fini de réseaux linéaires. S'ils sont périodiques et si le nombre de réseaux linéaires est suffisamment grand, l'analyse des coefficients de réflexion et de transmission peut être renforcée par le calcul des dispersions et des atténuations des ondes se propageant dans le milieu effectif. Pour un réseau 2-d aperiodique, le théorème de Bloch n'étant plus applicable, seuls seront analysés les coefficients de réflexion et de transmission. La méthode employée pour le calcul de ces coefficients permet d'obtenir des résultats avec des temps de calcul très courts, même pour un très grand nombre de réseaux linéaires. En outre, la méthode est applicable à des réseaux 2-d avec tout type d'apériodicité, telle qu'une variation des rayons des inclusions (milieu solide à porosité décroissante en fonction de la distance parcourue par les ondes, par exemple) ou une distribution aléatoire des réseaux linéaires.

L'étude numérique proposée est organisée en deux parties : la première concerne les réseaux périodiques, et la seconde les réseaux aperiodiques (ces derniers ne possèdent plus qu'une seule direction de périodicité qui est celle des réseaux linéaires). Pour la première partie, il s'agit d'identifier, dans le cas d'une incidence normale, les effets des résonances d'inclusions d'eau sur les bandes interdites. Pour ce faire, les résultats obtenus pour des réseaux d'inclusions d'air (peu résonantes) seront utilisés comme références en vue d'une étude comparative. La deuxième analyse concernant les réseaux 2-d périodiques a pour objet le couplage entre les ondes longitudinales et celles transversales se produisant en incidence



oblique, les réseaux étant composés d'inclusions d'air pour simplifier l'analyse. En particulier, ce couplage peut donner naissance à de nouvelles bandes interdites liées à la présence d'ondes guidées entre les plans réticulaires perpendiculaires aux réseaux linéaires. Dans la deuxième partie, des résultats sont donnés pour deux réseaux présentant des défauts de périodicité distincts : un réseau 2-d dont les réseaux linéaires sont périodiquement espacés mais où les rayons des inclusions décroissent exponentiellement dans la direction de propagation perpendiculaire aux réseaux linéaires, et un réseau 2-d dont les réseaux linéaires identiques sont aléatoirement distribués. Le but de cette dernière partie est de comprendre comment les bandes interdites et passantes sont affectées par une perturbation de la périodicité.

## II. RÉFLEXION ET TRANSMISSION PAR UN RÉSEAU 2-D COMPOSÉ DE $N$ RÉSEAUX LINÉAIRES INFINIS MIS EN PARALLÈLE

Pour déterminer les coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau 2-d formé de  $N$  réseaux linéaires infinis, la principale difficulté de la mise en équation réside dans l'écriture des multiples réflexions (avec prise en compte des conversions entre les ondes longitudinales et celles transversales à chaque réflexion) et aller-retours entre deux réseaux linéaires consécutifs. Ce problème est traité dans le premier paragraphe de cette section. Passé cette difficulté, le calcul des coefficients de réflexion et de transmission du réseau 2-d s'effectue sans difficulté en utilisant l'algorithme itératif décrit dans le deuxième paragraphe.

### II.1 Réflexion et transmission par deux réseaux linéaires infinis

La Figure 3.1 décrit la géométrie du réseau 2-d. Il est constitué de deux réseaux linéaires parallèles et espacés d'une distance  $D$  le long de l'axe  $Ox$ . Ces derniers ne sont pas nécessairement identiques ; ils sont donc numérotés 1 et 2, le réseau linéaire 1 étant celui soumis à l'onde plane incidente. Les paramètres géométriques d'un réseau linéaire  $n$  ( $n = 1$  ou  $2$ ) sont notés  $a_n$  (rayon des inclusions) et  $d_n$  (pas du réseau). Les fréquences considérées sont inférieures à la plus petite des deux premières fréquences de coupure existantes, l'une associée au réseau 1 et l'autre au réseau 2. Ces fréquences étant inversement proportionnelles à  $d_n$ , le domaine fréquentiel d'étude est donc défini par le moins dense des deux réseaux linéaires. Sous cette hypothèse basse fréquence, la réflexion et la transmission par le réseau 2-d sont régies par les mêmes équations que dans le cas d'un système de deux interfaces planes solide/solide.

L'unique différence réside dans les valeurs des coefficients de réflexion et de transmission notés

$$r_n^{LL}, r_n^{LT}, r_n^{TL}, r_n^{TT}, t_n^{LL}, t_n^{LT}, t_n^{TL} \text{ et } t_n^{TT},$$

où l'indice 0 associé aux modes fondamentaux a été ici supprimé pour alléger les écritures.

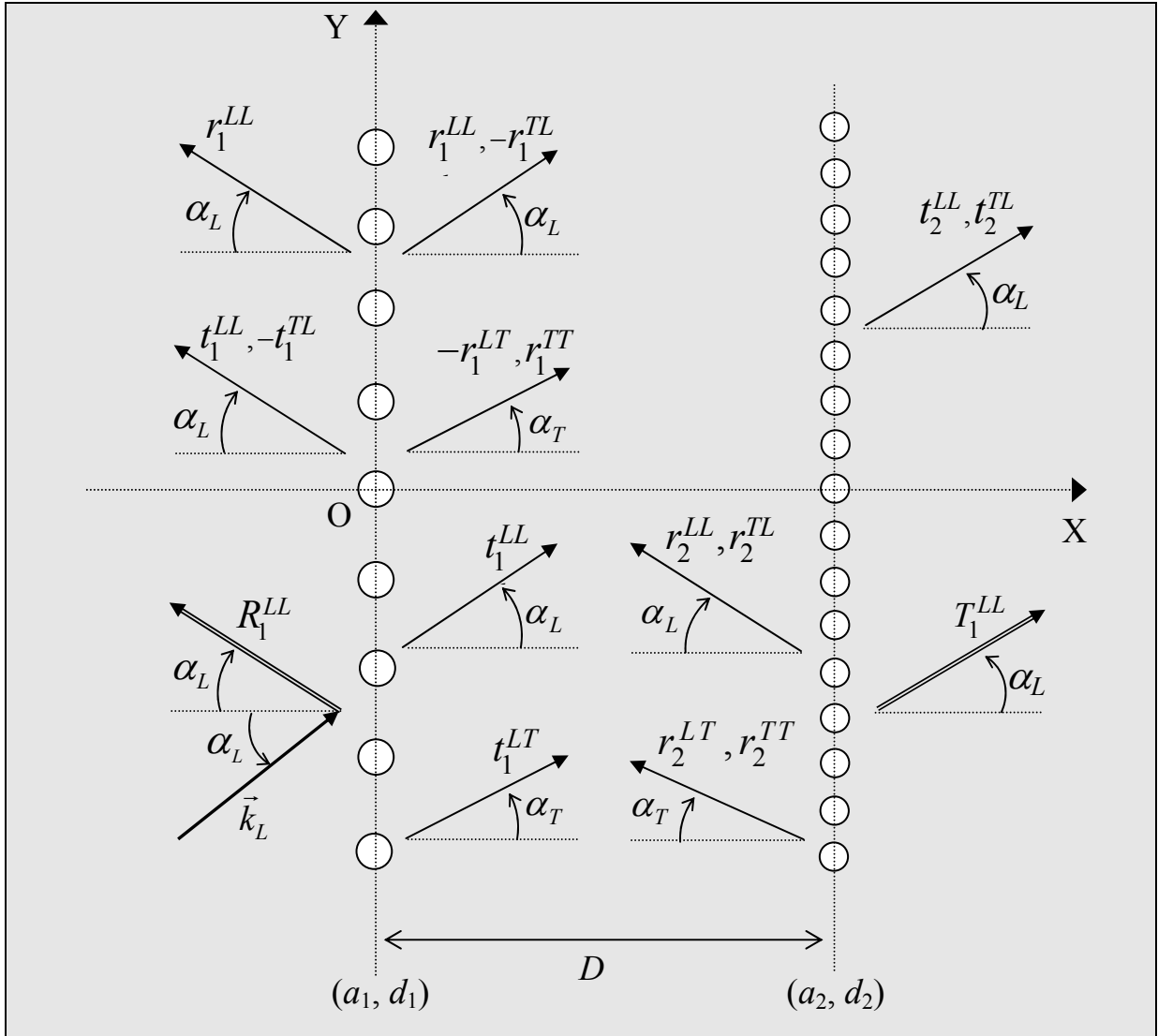


Figure 3.1 : Réseau 2-d composé de deux réseaux linéaires infinis distants de  $D$  et soumis à une onde plane longitudinale. Toutes les notations prises en compte pour le calcul des coefficients de réflexion et de transmission  $R_1^{LL}$  et  $T_1^{LL}$  sont ici représentées.

La deuxième hypothèse concerne l'espacement  $D$  entre les deux réseaux linéaires. Aux basses fréquences, les modes diffractés par un réseau linéaire  $n$ , autres que ceux fondamentaux, sont des modes évanescents dont les amplitudes décroissent exponentiellement lorsque l'on

s'éloigne du réseau. La contribution des modes évanescents peut donc être négligée à condition que la distance  $D$  soit suffisamment grande pour minimiser leurs effets sur le réseau linéaire voisin. Pour  $D \geq 4a_n$ , avec  $a_n$  le rayon maximal, cette condition sera supposée satisfaite.

En supposant connus tous les coefficients de réflexion et de transmission  $r_n^{l_1 l_2}$  et  $t_n^{l_1 l_2}$  (les exposants  $l_1$  et  $l_2$  remplaçant ici les notations  $L$  et  $T$  pour plus de concision dans l'écriture), il s'agit maintenant de calculer les coefficients de réflexion et de transmission du réseau 2-d, notés  $R_1^{l_1 l_2}$  et  $T_1^{l_1 l_2}$ . A titre d'exemple, détaillons le calcul de  $R_1^{LL}$  et de  $T_1^{LL}$ ; la généralisation à tout type de conversion  $L \leftrightarrow T$  s'effectuant par la suite sans difficulté. Tous les coefficients locaux nécessaires au calcul des coefficients globaux  $R_1^{LL}$  et de  $T_1^{LL}$  sont reportés sur la Figure 3.1. L'onde plane longitudinale est incidente sur le réseau linéaire 1 et l'on s'intéresse uniquement aux composantes longitudinales des champs réfléchis et transmis par le réseau 2-d. Le champ total réfléchi est alors composé de l'onde plane longitudinale immédiatement réfléchi par le réseau 1 et d'une série d'ondes planes longitudinales transmises initialement par ce réseau, puis réfléchies plusieurs fois entre les réseaux 1 et 2 avant d'être à nouveau transmises par le réseau 1. Les réflexions multiples entre les réseaux 1 et 2 sont décrites par des séries de Debye [38] et, suite aux multiples conversions  $L \leftrightarrow T$  lors de la transmission par le réseau 1, le coefficient de réflexion  $R_1^{LL}$  s'écrit en fin de compte en fonction de quatre séries distinctes, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 R_1^{LL} = & r_1^{LL} + t_1^{LL} \left( \tilde{r}_2^{LL} + \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LL} \tilde{r}_2^{LL} - \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TL} + \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TT} \tilde{r}_2^{TL} - \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TL} \tilde{r}_2^{LL} + \dots \right) t_1^{LL} \\
 & - t_1^{LL} \left( \tilde{r}_2^{LT} + \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LL} \tilde{r}_2^{LT} - \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TT} + \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TT} \tilde{r}_2^{TT} - \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TL} \tilde{r}_2^{LT} + \dots \right) t_1^{TL} \\
 & - t_1^{LT} \left( \tilde{r}_2^{TT} + \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TT} \tilde{r}_2^{TT} - \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TL} \tilde{r}_2^{LT} + \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LL} \tilde{r}_2^{LT} - \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TT} + \dots \right) t_1^{TL} \\
 & + t_1^{LT} \left( \tilde{r}_2^{TL} - \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TL} \tilde{r}_2^{LL} + \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TT} \tilde{r}_2^{TL} + \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LL} \tilde{r}_2^{LL} - \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LT} \tilde{r}_2^{TL} + \dots \right) t_1^{LL}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Tout au long de cette section, la notation  $\sim$  indiquera que les phases associées aux parcours des ondes entre deux réseaux consécutifs sont implicitement prises en compte. Ici, pour  $\tilde{r}_2^{l_1 l_2}$ , le changement de variable suivant a été effectué

$$\tilde{r}_2^{l_1 l_2} = r_2^{l_1 l_2} e^{i\Delta_{l_1}} e^{i\Delta_{l_2}}, \tag{3.2}$$

avec

---

[38] J.-M. Conoir, O. Lenoir et J.-L. Izbicki, *Acoustic interactions with submerged elastic structures. Part I. Acoustic Scattering and Resonances*, Éd. A. Guran et al., World Scientific, Singapore, 1996.

$$\Delta_{l_1} = \frac{k_{l_1} D}{\cos \alpha_{l_1}}. \quad (3.3)$$

Les signes – dans l'expression (3.1) sont introduits chaque fois qu'une onde incidente se propageant en direction des  $x$  décroissants subit une conversion après réflexion ou transmission. Pour ce qui est du champ total transmis, il se compose d'une transmission directe au travers des réseaux 1 et 2, et des ondes longitudinales transmises au travers le réseau 2 après plusieurs réflexions entre les réseaux 1 et 2. Le coefficient de transmission  $T_1^{LL}$  est donc défini par

$$\begin{aligned} T_1^{LL} = & t_1^{LL} \left( 1 + \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LL} - \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TL} + \dots \right) \tilde{t}_2^{LL} + t_1^{LL} \left( \tilde{r}_2^{LL} r_1^{LT} + \tilde{r}_2^{LT} r_1^{TT} + \dots \right) \tilde{t}_2^{TL} \\ & + t_1^{LT} \left( 1 + \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TT} - \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LT} + \dots \right) \tilde{t}_2^{TL} + t_1^{LT} \left( \tilde{r}_2^{TT} r_1^{TL} + \tilde{r}_2^{TL} r_1^{LL} + \dots \right) \tilde{t}_2^{LL}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

en notant

$$\tilde{t}_2^{l_1 l_2} = t_2^{l_1 l_2} e^{i \Delta_{l_1}}. \quad (3.5)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission peuvent être également exprimés en fonction de séries géométriques. Pour ce faire, et en vue d'introduire un formalisme plus compact basé sur des notations vectorielles et matricielles, définissons

$$r_{n+}^{l_1 l_2} = r_n^{l_1 l_2}, \quad r_{n-}^{l_1 l_2} = (2\delta_{l_1 l_2} - 1) r_n^{l_1 l_2}, \quad (3.6a, b)$$

$$t_{n+}^{l_1 l_2} = t_n^{l_1 l_2}, \quad t_{n-}^{l_1 l_2} = (2\delta_{l_1 l_2} - 1) t_n^{l_1 l_2}. \quad (3.7a, b)$$

Ici, les signes + et – se rapportent respectivement à des ondes se propageant vers les  $x$  positifs et vers les  $x$  négatifs. Le symbole de Kronecker  $\delta_{l_1 l_2}$  vaut 0 quand il y a conversion  $L \rightarrow T$  ou  $T \rightarrow L$ , et 1 sinon. Avec ces notations, introduisons alors les vecteurs de transmission

$$\left| \begin{matrix} t_{1\pm}^{l_1 l_2, l_3 l_4} \end{matrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} t_{1\pm}^{l_1 l_2} \\ t_{1\pm}^{l_3 l_4} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left| \begin{matrix} \tilde{t}_{2\pm}^{l_1 l_2, l_3 l_4} \end{matrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{2\pm}^{l_1 l_2} \\ \tilde{t}_{2\pm}^{l_3 l_4} \end{bmatrix}, \quad (3.8a, b)$$

où les exposants  $l_3$  et  $l_4$  se rapportent tous deux aux notations  $L$  et  $T$ . Les matrices de réflexion

$$\mathbb{R}_{1\pm} = \begin{bmatrix} r_{1\pm}^{LL} & r_{1\pm}^{LT} \\ r_{1\pm}^{TL} & r_{1\pm}^{TT} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{R}}_{2\pm} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{2\pm}^{LL} & \tilde{r}_{2\pm}^{LT} \\ \tilde{r}_{2\pm}^{TL} & \tilde{r}_{2\pm}^{TT} \end{bmatrix} \quad (3.9a, b)$$

sont également introduites dans le but d'exprimer les réflexions multiples entre les réseaux 1 et 2 au moyen d'une seule série géométrique matricielle  $2 \times 2$ . Elle est notée  $\mathcal{G}$  et est définie par

$$\mathcal{G} = I_d + \tilde{\mathcal{R}}_{2+} \mathcal{R}_{1-} + \tilde{\mathcal{R}}_{2+} \mathcal{R}_{1-} \tilde{\mathcal{R}}_{2+} \mathcal{R}_{1-} + \dots = \left[ I_d - \tilde{\mathcal{R}}_{2+} \mathcal{R}_{1-} \right]^{-1}. \quad (3.10)$$

La convergence de cette série est assurée dès lors que la norme euclidienne de la matrice  $\tilde{\mathcal{R}}_{2+} \mathcal{R}_{1-}$  est inférieure à l'unité. Les quatre éléments de la matrice  $\mathcal{G}$  correspondent aux quatre séries géométriques contenues (entre parenthèses) dans l'expression (3.4) du coefficient de transmission  $T_1^{LL}$ . Finalement, compte tenu des définitions (3.8a, b), il vient simplement

$$T_1^{LL} = \left\langle t_{1+}^{LL,LT} \middle| \mathcal{G} \middle| \tilde{t}_{2+}^{LL,TL} \right\rangle. \quad (3.11)$$

Au vu de l'expression (3.1), l'écriture en termes de matrices et de vecteurs du coefficient de réflexion  $R_1^{LL}$  nécessite l'introduction d'une autre matrice  $2 \times 2$  définie par

$$\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{G}} \tilde{\mathcal{R}}_{2+}. \quad (3.12)$$

Par suite, en utilisant les définitions (3.8a, b), il vient

$$R_1^{LL} = r_{1+}^{LL} + \left\langle t_{1+}^{LL,LT} \middle| \mathcal{G} \middle| t_{1-}^{LL,TL} \right\rangle. \quad (3.13)$$

Les expressions (3.11) et (3.13) sont facilement généralisables à tout type de conversion  $l_1 \rightarrow l_2$  car les matrices  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}$  sont indépendantes de la nature de l'onde incidente et de celle des ondes réfléchies ou transmises par le réseau 2-d. Elles s'écrivent en effet

$$T_1^{l_1 l_2} = \left\langle t_{1+}^{l_1 l_2, l_1 T} \middle| \mathcal{G} \middle| \tilde{t}_{2+}^{l_1 l_2, T l_2} \right\rangle \quad \text{et} \quad R_1^{l_1 l_2} = r_{1+}^{l_1 l_2} + \left\langle t_{1+}^{l_1 l_2, l_1 T} \middle| \mathcal{G} \middle| t_{1-}^{l_1 l_2, T l_2} \right\rangle. \quad (3.14a, b)$$

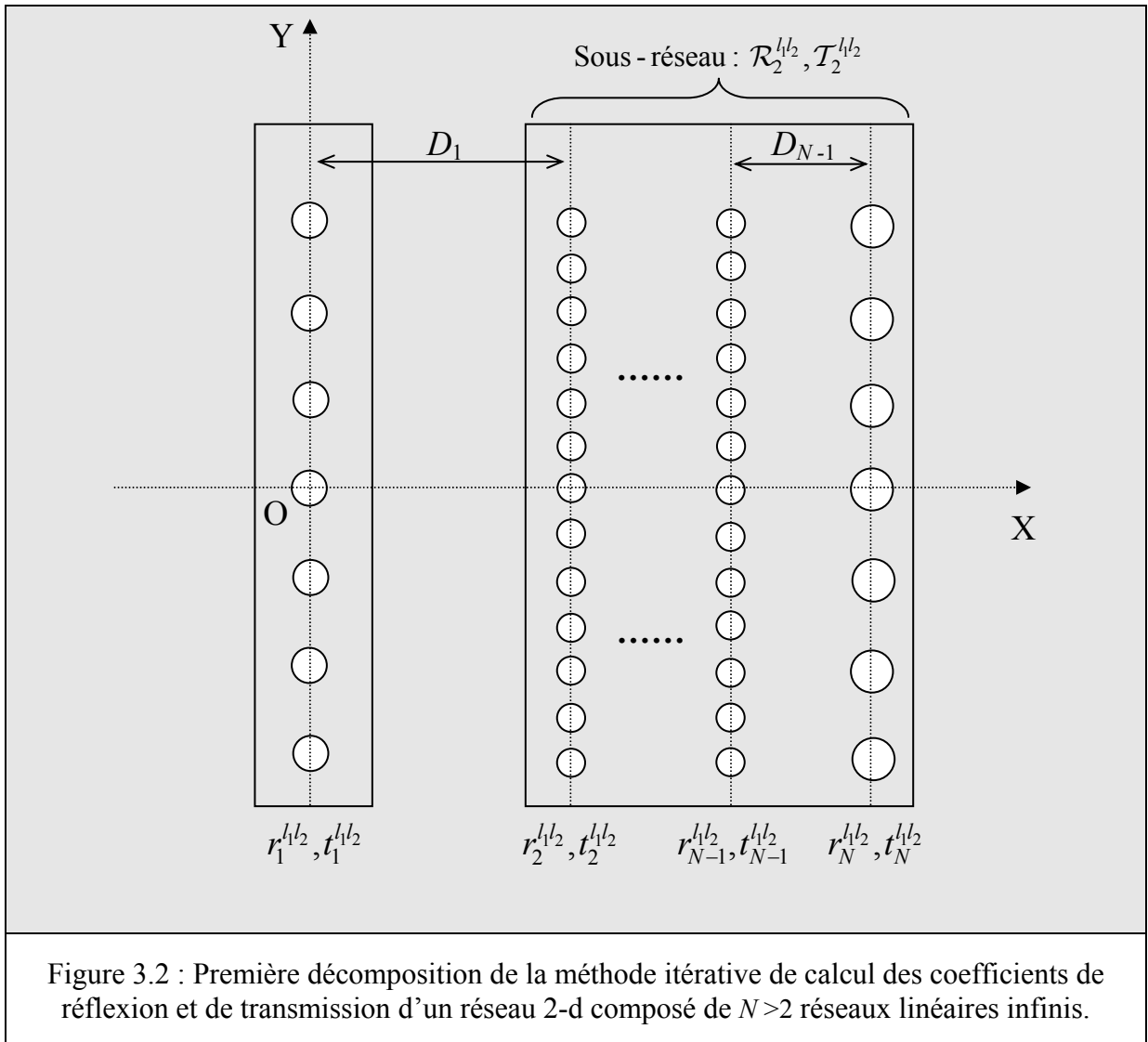
En l'absence de conversions entre les ondes longitudinales et celles transversales (ce qui est le cas en incidence normale), ces relations ressemblent fort à celles obtenues dans le cas d'un réseau 2-d en milieu fluide [36]. Pour généraliser le problème à un réseau 2-d périodique ou apériodique de  $N > 2$  réseaux linéaires, ces deux relations peuvent être utilisées telles quelles. Cette généralisation est l'objet du paragraphe suivant.

---

[36] L. S. Mulholland et M. A. Heckl, *Multi-directional sound wave propagation through a tube bundle*, Journal of Sound and Vibration 176, pp. 377-398, 1994.

## II.2 Généralisation à $N > 2$ réseaux linéaires infinis

Les réseaux 2-d considérés dans ce paragraphe sont décrits sur la Figure 3.2. Ils sont composés d'un nombre arbitraire  $N$  de réseaux linéaires infinis positionnés de façon périodique ou aperiodique le long de l'axe  $Ox$ . En outre, comme dans le paragraphe précédent, les réseaux linéaires ne sont pas nécessairement identiques. Le but de ce paragraphe est de montrer comment les relations (3.14a, b) peuvent être utilisées pour élaborer une méthode itérative de calcul des coefficients de réflexion et de transmission. Les réseaux linéaires sont numérotés de 1 à  $N$ , le réseau 1 étant celui soumis à l'onde plane incidente. Chaque réseau  $n$  (avec  $n = 1, 2, \dots, N$ ) est caractérisé par ses coefficients de réflexion et de transmission  $r_n^{h/2}$  et  $t_n^{h/2}$ .



L'espace entre deux réseaux consécutifs  $n$  et  $n+1$  est noté  $D_n$ . Le terme de phase défini par (3.3) s'écrit maintenant

$$\Delta_{l_1}^n = \frac{k_{l_1} D_n}{\cos \alpha_{l_1}}. \quad (3.15)$$

Ceci étant posé, explicitons maintenant la méthode de calcul des coefficients de réflexion et de transmission du réseau 2-d, ces coefficients étant toujours notés  $R_1^{hl_2}$  et  $T_1^{hl_2}$ . L'idée consiste à décomposer le réseau 2-d comme le décrit la Figure 3.2 : le réseau linéaire 1 est considéré isolément des  $N-1$  autres réseaux linéaires, ceux-ci forment alors un « sous-réseau 2-d » numéroté 2 et caractérisé par les coefficients inconnus  $\mathcal{R}_2^{hl_2}$  et  $\mathcal{T}_2^{hl_2}$ . Suite à cette décomposition, les coefficients du réseau 2-d global peuvent s'exprimer en fonction de ceux du sous-réseau 2 en remplaçant  $r_2^{hl_2}$  et  $t_2^{hl_2}$  dans les relations (3.14a, b) par  $\mathcal{R}_2^{hl_2}$  et  $\mathcal{T}_2^{hl_2}$ . Il vient alors

$$T_1^{hl_2} = \langle t_{1+}^{hl_2, hl_2T} | \mathcal{G}_1 | \tilde{\mathcal{T}}_{2+}^{Ll_2, Tl_2} \rangle \quad \text{et} \quad R_1^{hl_2} = r_{1+}^{hl_2} + \langle t_{1+}^{hl_2, hl_2T} | \mathcal{G}_1 | t_{1-}^{Ll_2, Tl_2} \rangle \quad (3.16a, b)$$

avec

$$\mathcal{G}_1 = [I_d - \tilde{\mathcal{R}}_{2+} r_{1-}]^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_1 \tilde{\mathcal{R}}_{2+}. \quad (3.17a, b)$$

Les relations (3.16a, b), dans lesquelles les coefficients du sous-réseau 2 sont inconnus, constituent le point de départ de l'algorithme itératif suivant : le sous-réseau 2 est décomposé à son tour comme précédemment, c'est-à-dire en isolant le réseau linéaire 2 du sous-réseau 3 composé des  $N-2$  autres réseaux linéaires. Les deux relations (3.16a, b) s'écrivent alors

$$\mathcal{T}_2^{hl_2} = \langle t_{2+}^{hl_2, hl_2T} | \mathcal{G}_2 | \tilde{\mathcal{T}}_{3+}^{Ll_2, Tl_2} \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2^{hl_2} = r_{2+}^{hl_2} + \langle t_{2+}^{hl_2, hl_2T} | \mathcal{G}_2 | t_{2-}^{Ll_2, Tl_2} \rangle \quad (3.18a, b)$$

avec

$$\mathcal{G}_2 = [I_d - \tilde{\mathcal{R}}_{3+} r_{2-}]^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2 \tilde{\mathcal{R}}_{3+}. \quad (3.19a, b)$$

Ici encore, les coefficients du sous-réseau 3 ne sont pas connus. Le processus itératif doit alors être répété jusqu'à ce que le dernier sous-réseau construit ne contienne plus qu'un seul réseau linéaire, le réseau numéroté  $N$ , dont les coefficients de réflexion et de transmission sont supposés être connus. La dernière décomposition conduit donc à

$$\mathcal{T}_{N-1}^{hl_2} = \langle t_{(N-1)+}^{hl_2, hl_2T} | \mathcal{G}_{N-1} | \tilde{\mathcal{T}}_{N+}^{Ll_2, Tl_2} \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_{N-1}^{hl_2} = r_{(N-1)+}^{hl_2} + \langle t_{(N-1)+}^{hl_2, hl_2T} | \mathcal{G}_{N-1} | t_{(N-1)-}^{Ll_2, Tl_2} \rangle \quad (3.20a, b)$$

avec

$$\mathcal{G}_{N-1} = \left[ I_d - \tilde{\mathcal{R}}_{N+} r_{(N-1)-} \right]^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_{N-1} = \mathcal{G}_{N-1} \tilde{\mathcal{R}}_{N+}, \quad (3.21a, b)$$

où les relations de fermeture de la récurrence sont

$$\tilde{\mathcal{R}}_{N+} = \tilde{r}_{N+} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{T}}_{N+} = \tilde{t}_{N+}. \quad (3.22a, b)$$

Pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission  $R_1^{hl_2}$  et  $T_1^{hl_2}$ , la première étape du calcul consiste donc à déterminer les coefficients  $\mathcal{R}_{N-1}^{hl_2}$  et  $\mathcal{T}_{N-1}^{hl_2}$  à partir des relations (3.20a, b), puis il s'agit de « descendre » la récurrence jusqu'à la toute première décomposition. Le principal intérêt de la méthode est qu'elle met en jeu des temps de calcul très courts, même pour un nombre  $N$  de réseaux linéaires très important ( $N > 1000$ ). L'évolution des temps de calcul en fonction de  $N$  est présentée dans l'Annexe 5. En outre, la méthode de calcul est applicable à des structures très variées sans modifier quoi que ce soit dans le formalisme. En ne jouant uniquement que sur les valeurs des espacements  $D_n$  et des caractéristiques de chaque réseau linéaire, la méthode permet d'envisager l'étude de réseaux 2-d avec tout type d'apériodicité (variation des rayons des inclusions ou des pas des réseaux linéaires, défaut localisé de la périodicité, distribution aléatoire des réseaux linéaires, etc.). Ajoutons enfin que les coefficients de réflexion et de transmission calculés peuvent être validés en utilisant directement les relations de conservation de l'énergie (2.95) et (2.96). Il suffit de remplacer dans ces deux relations les coefficients du réseau linéaire par ceux des réseaux 2-d, ceux-ci pouvant être périodiques ou apériodiques.

### III. ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE POUR UN RÉSEAU 2-D INFINI ET PÉRIODIQUE

Le réseau 2-d de la Figure 3.2 est maintenant supposé être constitué d'un nombre infini de réseaux linéaires infinis. Ces derniers sont tous identiques et répartis régulièrement avec une période  $D$  le long de l'axe  $Ox$ . La propagation d'ondes dans un tel réseau peut être caractérisée par le théorème de Bloch. Le théorème lie les champs des déplacements ou des contraintes définis en deux points du réseau 2-d distants d'une période  $D$ . Plus précisément, il conduit aux quatre relations suivantes

$$u_{sx}(x + D, y) = e^{i\gamma D} u_{sx}(x, y), \quad u_{sy}(x + D, y) = e^{i\gamma D} u_{sy}(x, y), \quad (3.23a, b)$$



$$\sigma_{xx}(x+D, y) = e^{i\gamma D} \sigma_{xx}(x, y), \quad \sigma_{xy}(x+D, y) = e^{i\gamma D} \sigma_{xy}(x, y). \quad (3.23a, b)$$

La grandeur complexe  $\gamma$  désigne le nombre d'onde effectif, ou nombre d'onde de Bloch, caractérisant la propagation des ondes, dans la direction  $Ox$ , dans un milieu élastique homogène équivalent au réseau 2-d périodique. Ce nombre d'onde effectif est complexe et peut s'écrire

$$\gamma = \gamma' + i\gamma'' \quad (3.24)$$

où la partie réelle  $\gamma' = \omega/c'$  est la composante suivant  $x$  du vecteur d'onde  $\vec{\gamma}'$  des ondes se propageant avec la vitesse  $c'$  dans le milieu effectif, et la partie imaginaire  $\gamma''$  est leur atténuation. Le but de cette section est de présenter la méthode de calcul de  $\gamma$ . Pour ce faire, considérons un réseau linéaire  $n$  pris au hasard. La Figure 3.3 décrit toutes les ondes en présence de part et d'autre de ce réseau, entre les réseaux  $n-1$  et  $n+1$ .

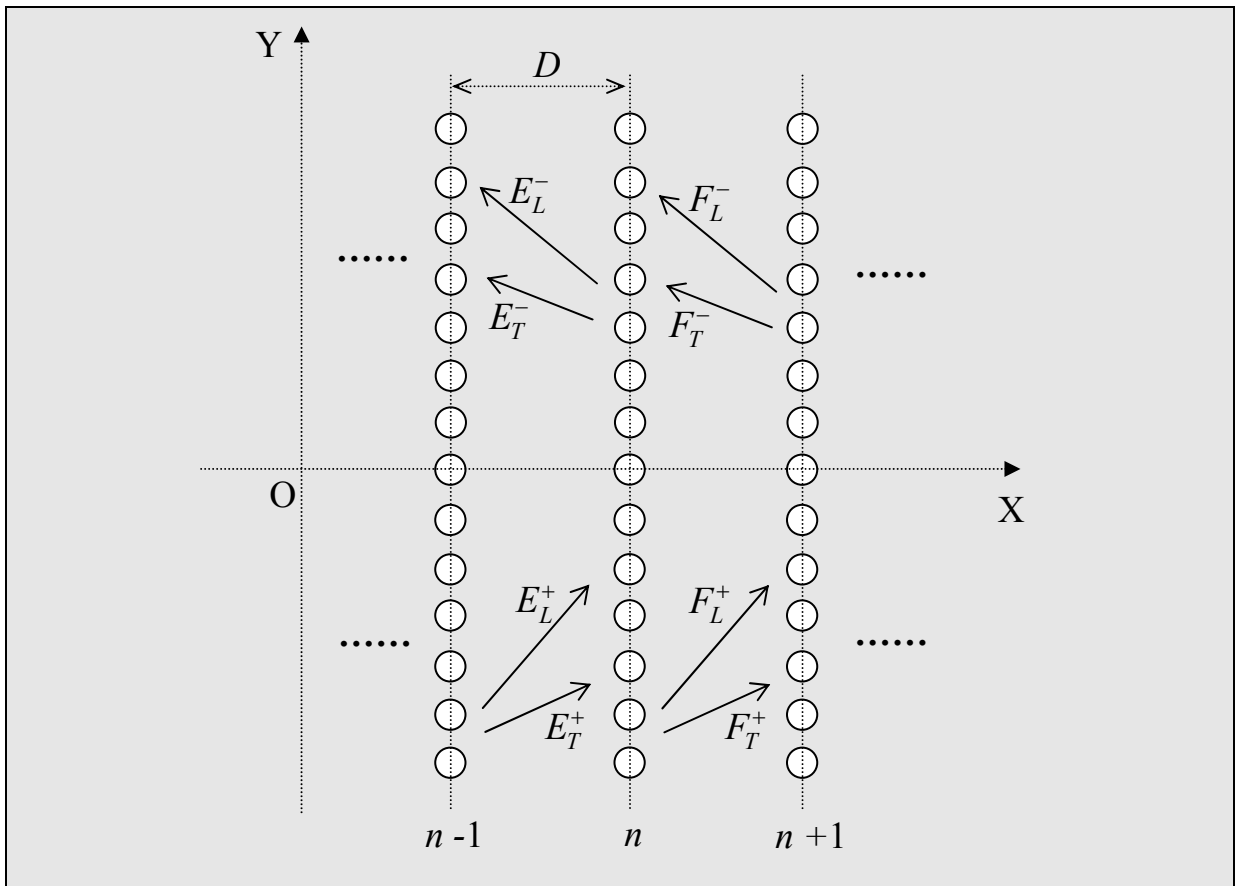


Figure 3.3 : Réseau 2-d infini et périodique : amplitudes des ondes de part et d'autre d'un réseau linéaire  $n$ , entre les réseaux  $n-1$  et  $n+1$ .

Entre les réseaux  $n-1$  et  $n$ , les potentiels  $\phi$  et  $\psi$  peuvent s'écrire

$$\phi(x, y) = E_L^+ e^{ik_L x \cos \alpha_L} e^{ik_L y \sin \alpha_L} + E_L^- e^{-ik_L x \cos \alpha_L} e^{ik_L y \sin \alpha_L}, \quad (3.25)$$

$$\psi(x, y) = E_T^+ e^{ik_T x \cos \alpha_T} e^{ik_T y \sin \alpha_T} + E_T^- e^{-ik_T x \cos \alpha_T} e^{ik_T y \sin \alpha_T}, \quad (3.26)$$

où les exposants + et – se rapportent respectivement à des ondes se propageant vers les  $x$  positifs et vers les  $x$  négatifs. Entre les réseaux  $n$  et  $n+1$ , à une distance  $D$ , les potentiels peuvent s'écrire similairement

$$\phi(x+D, y) = F_L^+ e^{ik_L(x+D) \cos \alpha_L} e^{ik_L y \sin \alpha_L} + F_L^- e^{-ik_L(x+D) \cos \alpha_L} e^{ik_L y \sin \alpha_L}, \quad (3.27)$$

$$\psi(x+D, y) = F_T^+ e^{ik_T(x+D) \cos \alpha_T} e^{ik_T y \sin \alpha_T} + F_T^- e^{-ik_T(x+D) \cos \alpha_T} e^{ik_T y \sin \alpha_T}. \quad (3.28)$$

Pour alléger les écritures, les notations suivantes peuvent être introduites

$$\left( \hat{E}_{L,T}^\pm, \hat{F}_{L,T}^\pm \right) = \left( E_{L,T}^\pm, F_{L,T}^\pm \right) e^{\pm ik_{L,T} x \cos \alpha_{L,T}} \quad (3.29)$$

où  $\hat{E}_{L,T}^\pm$  et  $\hat{F}_{L,T}^\pm$  sont des fonctions complexes inconnues de la variable  $x$ . Pour calculer  $\gamma$ , il faut établir un système inhomogène de huit équations linéaires dont les inconnues sont les fonctions  $\hat{E}_{L,T}^\pm$  et  $\hat{F}_{L,T}^\pm$ . Ce système fournira l'équation caractéristique à résoudre pour l'obtention de  $\gamma$ . Parmi ces huit équations, quatre sont issues du théorème de Bloch. Les relations (3.23a) et (3.23b) fournissent en effet les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} k_L \cos \alpha_L e^{i\gamma D} \hat{E}_L^+ - k_L \cos \alpha_L e^{i\gamma D} \hat{E}_L^- - k_L \cos \alpha_L e^{i\chi_L} \hat{F}_L^+ + k_L \cos \alpha_L e^{-i\chi_L} \hat{F}_L^- \\ - k_T \sin \alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_T^+ - k_T \sin \alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_T^- + k_T \sin \alpha_T e^{i\chi_T} \hat{F}_T^+ + k_T \sin \alpha_T e^{-i\chi_T} \hat{F}_T^- = 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

et

$$\begin{aligned} k_L \sin \alpha_L e^{i\gamma D} \hat{E}_L^+ + k_L \sin \alpha_L e^{i\gamma D} \hat{E}_L^- - k_L \sin \alpha_L e^{i\chi_L} \hat{F}_L^+ - k_L \sin \alpha_L e^{-i\chi_L} \hat{F}_L^- \\ + k_T \cos \alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_T^+ - k_T \cos \alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_T^- - k_T \cos \alpha_T e^{i\chi_T} \hat{F}_T^+ + k_T \cos \alpha_T e^{-i\chi_T} \hat{F}_T^- = 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec

$$\chi_{L,T} = k_{L,T} D \cos \alpha_{L,T}; \quad (3.32)$$

les relations (3.24a) et (3.24b) donnent quant à elles

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_L^+ + \cos 2\alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_L^- - \cos 2\alpha_T e^{i\chi_L} \hat{F}_L^+ - \cos 2\alpha_T e^{-i\chi_L} \hat{F}_L^- \\ - \sin 2\alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_T^+ + \sin 2\alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_T^- + \sin 2\alpha_T e^{i\chi_T} \hat{F}_T^+ - \sin 2\alpha_T e^{-i\chi_T} \hat{F}_T^- = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

et

$$\begin{aligned}
 & k_L^2 \sin 2\alpha_L e^{i\gamma D} \hat{E}_L^+ - k_L^2 \sin 2\alpha_L e^{i\gamma D} \hat{E}_L^- - k_L^2 \sin 2\alpha_L e^{i\chi_L} \hat{F}_L^+ + k_L^2 \sin 2\alpha_L e^{-i\chi_L} \hat{F}_L^- \\
 & + k_T^2 \cos 2\alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_T^+ + k_T^2 \cos 2\alpha_T e^{i\gamma D} \hat{E}_T^- - k_T^2 \cos 2\alpha_T e^{i\chi_T} \hat{F}_T^+ - k_T^2 \cos 2\alpha_T e^{-i\chi_T} \hat{F}_T^- = 0.
 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Il reste quatre équations manquantes. Ces relations, par rapport à celles établies jusqu'ici, sont des relations de couplage entre les ondes longitudinales et celles transversales provenant des propriétés de réflexion et de transmission des réseaux linéaires. Ces derniers étant tous identiques ici, leurs coefficients peuvent être notés  $r^{ll_2}$  et  $t^{ll_2}$ . Au vu de la Figure 3.3, les potentiels d'amplitudes  $\hat{E}_L^-$  et  $\hat{E}_T^-$  représentent tous deux les sommes des potentiels réfléchis d'amplitudes  $\hat{E}_L^+$  et  $\hat{E}_T^+$  et des potentiels transmis d'amplitudes  $\hat{F}_L^-$  et  $\hat{F}_T^-$ . Ceci se traduit par les relations

$$\hat{E}_L^- = r^{LL} \hat{E}_L^+ + r^{TL} \hat{E}_T^+ + t^{LL} \hat{F}_L^- - t^{TL} \hat{F}_T^-, \quad (3.35)$$

et

$$\hat{E}_T^- = r^{LT} \hat{E}_L^+ + r^{TT} \hat{E}_T^+ - t^{LT} \hat{F}_L^- + t^{TT} \hat{F}_T^-. \quad (3.36)$$

De façon similaire, les amplitudes  $\hat{F}_L^+$  et  $\hat{F}_T^+$  sont données par

$$\hat{F}_L^+ = r^{LL} \hat{F}_L^- - r^{TL} \hat{F}_T^- + t^{LL} \hat{E}_L^+ + t^{TL} \hat{E}_T^+ \quad (3.37)$$

et

$$\hat{F}_T^+ = -r^{LT} \hat{F}_L^- + r^{TT} \hat{F}_T^- + t^{LT} \hat{E}_L^+ + t^{TT} \hat{E}_T^+ \quad (3.38)$$

Les signes – devant certains coefficients ont été introduits pour la même raison que celle mentionnée dans la précédente section. Les valeurs de  $\gamma$  sont obtenues en cherchant les racines du déterminant  $8 \times 8$  associé au système inhomogène formé des huit équations établies ci-dessus. Après quelques simplifications, l'équation caractéristique peut être ramenée à

$$\begin{vmatrix}
 -e^{i\gamma D} e^{-i\chi_L} + t^{LL} & t^{TL} & r^{LL} & -r^{TL} \\
 r^{LL} & r^{TL} & -e^{-i\gamma D} e^{-i\chi_L} + t^{LL} & -t^{TL} \\
 t^{LT} & -e^{i\gamma D} e^{-i\chi_T} + t^{TT} & -r^{LT} & r^{TT} \\
 r^{LT} & r^{TT} & -t^{LT} & -e^{-i\gamma D} e^{-i\chi_T} + t^{TT}
 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.39)$$

Dans le cas de l'incidence normale, l'absence de conversions entre les ondes longitudinales et transversales entraîne que l'équation caractéristique (3.39) peut se factoriser en deux équations caractéristiques découplées. L'une n'est liée qu'aux seules ondes longitudinales et est définie par

$$\text{ch}(\gamma_L D) = \frac{1}{2t^{LL}} \left\{ \left( t^{LL^2} - r^{LL^2} + 1 \right) \cos \chi_L + i \left( t^{LL^2} - r^{LL^2} - 1 \right) \sin \chi_L \right\}. \quad (3.40)$$

L'autre équation liée aux ondes transversales est semblable ; il suffit de remplacer chaque exposant ou indice  $L$  par  $T$ . Ces équations sont formellement identiques à celles rencontrées dans le cas de tubes immergés dans un fluide [37] et peuvent être résolues analytiquement. Pour des angles d'incidence non nuls, ces équations ne sont valables qu'aux très basses fréquences (*cf.* Equation (2.99)). L'intérêt est que, lorsque la fréquence augmente, les solutions couplées données par l'équation (3.39) peuvent être rattachées aux solutions basse fréquence et donc à des nombres d'onde effectifs, notés  $\gamma_L$  et  $\gamma_T$ , associés à des ondes de type longitudinal et de type transversal. Il en est de même lorsque l'angle d'incidence augmente où les solutions trouvées peuvent être rattachées à celles découplées en incidence normale.

## IV. ÉTUDE NUMÉRIQUE

### IV.1 Étude de réseaux 2-d périodiques

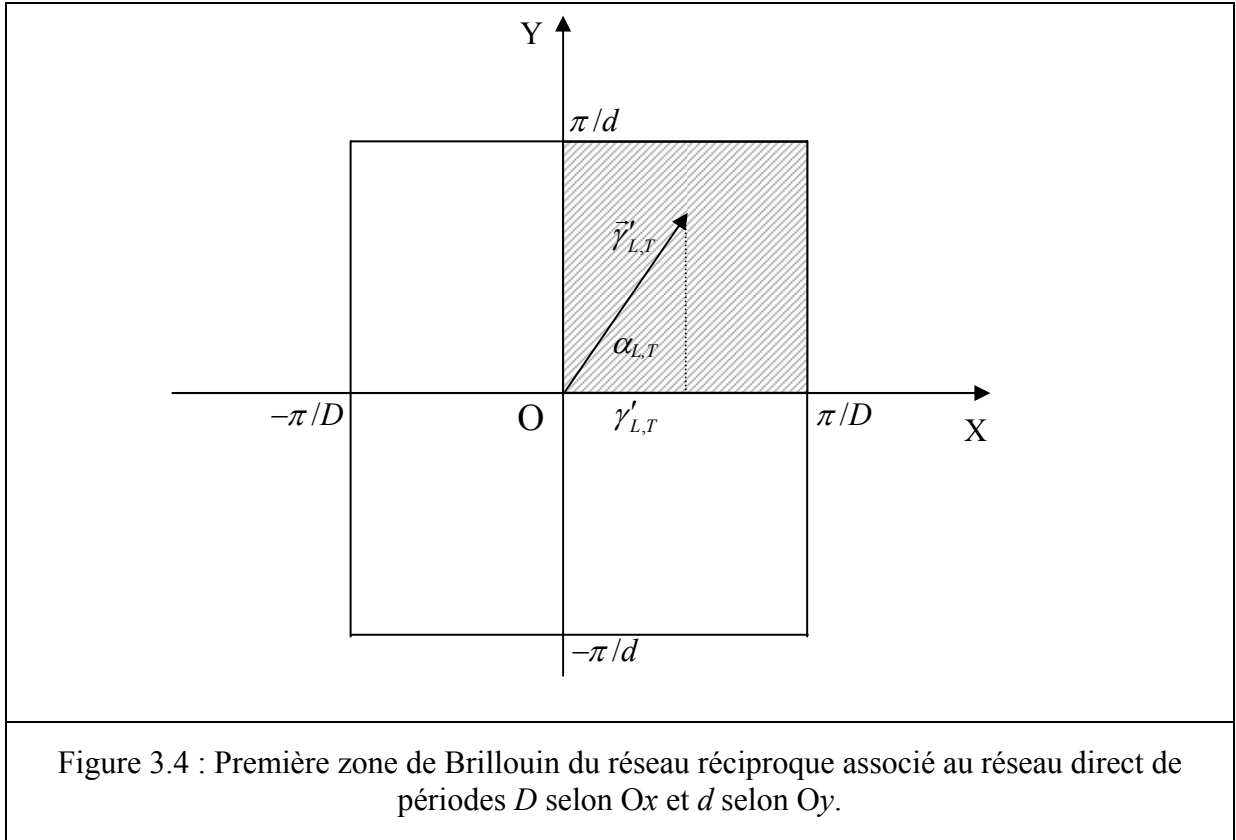
Les résultats numériques sont donnés dans ce paragraphe pour un réseau fini de  $N=15$  réseaux linéaires identiques et régulièrement espacés d'une période  $D$  le long de l'axe  $Ox$ . La période selon l'axe  $Oy$  est notée  $d$  (pas des réseaux linéaires) et le rayon  $a$  des inclusions est de 1 mm. Les paramètres physiques de l'aluminium et de l'eau sont ceux définis dans les deux précédents chapitres. Toutes les courbes présentées dans la suite sont tracées en fonction de la fréquence réduite  $\bar{k}_L = k_L D / \pi$ . Les courbes de dispersion et d'atténuation sont respectivement les tracés en fonction de  $\bar{k}_L$  des parties réelles  $\bar{\gamma}'_{L,T}$  et imaginaires  $\bar{\gamma}''_{L,T}$  des nombres d'onde effectifs normalisés  $\bar{\gamma}_{L,T} = \gamma_{L,T} D / \pi$  (en rappelant que  $\gamma_{L,T}$  sont les projections sur  $Ox$  des vecteurs d'onde  $\vec{\gamma}_{L,T}$ ). Cette normalisation par  $\pi/D$  est liée aux dimensions de la première zone de Brillouin [39,40] construite dans le réseau réciproque (espace des vecteurs d'onde associé au réseau direct de périodes  $D$  selon  $Ox$  et  $d$  selon  $Oy$ ). Cette zone élémentaire est représentée sur la Figure 3.4.

---

[37] M. A. Heckl et L. S. Mulholland, *Some recent developments in the theory of acoustic transmission in tube bundles*, Journal of Sound and Vibration 179, pp. 37-62, 1995.

[39] L. Brillouin, *Waves propagation in periodic structures*, McGraw-Hill, New-York, 1946.

[40] C. Kittel, *Physique de l'état solide*, Dunod Université, Cinquième édition, 1983.



D'après la théorie de L. Brillouin de la propagation d'ondes dans les structures périodiques, le nombre d'onde  $k_L$  doit être une fonction périodique des vecteurs d'onde  $\vec{\gamma}'_{L,T}$ . Il suffit alors de calculer les courbes de dispersion sur une seule période de  $k_L$ , appelée première zone de Brillouin, pour connaître les vecteurs d'onde  $\vec{\gamma}'_{L,T}$  quelle que soit la fréquence. Cette zone possède de plus toutes les symétries du réseau, ce qui permet de réduire encore le domaine d'étude. En effet, pour des angles d'incidence  $\alpha_L$  et  $\alpha_T$  variant de 0 à  $\pi/2$ , les vecteurs d'ondes  $\vec{\gamma}'_L$  et  $\vec{\gamma}'_T$  décrivent toute la zone hachurée sur la Figure 3.4. Par suite, les courbes de dispersion dans n'importe quelle direction se déduisent simplement par symétrie par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$ . La zone d'étude considérée ici est donc réduite à la zone hachurée. Les quantités  $\gamma'_{L,T}$  représentant les projections sur  $Ox$  des vecteurs d'onde  $\vec{\gamma}'_{L,T}$ , elles varient donc de 0 à  $\pi/D$ . Leur normalisation par  $\pi/D$  permet alors d'obtenir des courbes de dispersion comprises entre 0 et 1, où  $\bar{\gamma}'_{L,T} = 0$  correspond au centre de la première zone de Brillouin et  $\bar{\gamma}'_{L,T} = 1$  à des vecteurs d'onde à sa frontière. Pour ce qui est des vecteurs d'atténuation  $\vec{\gamma}''_{L,T}$ , les ondes incidentes étant supposées homogènes, la loi de Snell-Descartes appliquée à l'interface entre le milieu solide extérieur et le milieu effectif implique que ces vecteurs sont nécessairement orientés dans la direction  $Ox$ , quels que soient les angles d'incidence.

Les représentations des courbes de dispersion associées au réseau infini seront volontairement différentes de celles habituellement rencontrées en physique de l'état solide. Les représentations choisies ont l'avantage de permettre la comparaison des résultats obtenus pour un réseau fini avec ceux correspondant au réseau infini. Cette comparaison ne peut tenir que si le réseau fini contient suffisamment de réseaux linéaires. Avec  $N=15$ , cette condition est satisfaite. Ceci est justifié par le fait que les coefficients de réflexion (ou de transmission) et les courbes de dispersion (ou d'atténuation) révèlent les mêmes bandes interdites et que celles-ci restent inchangées pour un nombre  $N$  plus important de réseaux linéaires.

#### IV.1.1 Bandes interdites d'un réseau d'inclusions d'air

Le réseau d'inclusions d'air est soumis en incidence normale ( $\alpha_L = \alpha_T = 0^\circ$ ) à deux ondes planes longitudinale et transversale. Pour cet angle d'incidence particulier, l'absence de conversions  $L \leftrightarrow T$  lors de la réflexion ou de la transmission par chaque réseau linéaire fait que la propagation d'ondes dans le réseau présente une forte analogie avec celle dans un réseau de diffuseurs cylindriques immergés dans un fluide [35]. Les ondes longitudinales et celles transversales se propagent indépendamment dans le réseau. Pour  $d/a=3$  (la première fréquence de coupure correspond alors à  $\bar{k}_L=3,3$ ) et  $D/a=10$ , la Figure 3.5 présente les courbes de dispersion et d'atténuation du réseau d'inclusions d'air au comportement peu résonant.

Conformément aux théories de milieux périodiques, les courbes font apparaître une série de bandes interdites correspondant à des régions de forte atténuation. Elles correspondent soit à  $\gamma'_{L,T} = 0$  (centre de la première zone de Brillouin) soit à  $\gamma'_{L,T} = \pi/D$  (frontière de la première zone de Brillouin). Lorsque  $\gamma'_{L,T} = \pi/D$ , un régime d'ondes stationnaires s'établit dans l'épaisseur  $e=(N-1)D$  du milieu effectif. Les bandes interdites associées aux ondes longitudinales sont plus larges que celles associées aux ondes transversales. Il y a trois bandes interdites associées aux ondes longitudinales et six associées à celles transversales. Les bandes passantes correspondent, quant à elles, à la propagation d'ondes dispersives et non atténuées ( $\gamma''_{L,T} = 0$ ) dans le milieu effectif. Pour chaque type d'onde, la première bande interdite est localisée autour d'une fréquence telle que la distance  $D$  coïncide avec une demi-longueur d'onde de l'onde incidente :  $k_{L,T}D \cos \alpha_{L,T} = \pi$  avec  $\alpha_L = \alpha_T = 0^\circ$ . Les bandes interdites sui-

---

[35] C. Audoly et G. Dumery, *Acoustic wave propagation in media containing two-dimensional periodically spaced elastic inclusions*, *Phys. Acoust.*, Éd. O. Leroy et M. A. Breazeale, Plenum Press, New York, pp. 199-204, 1991.

vantes sont localisées à des multiples entiers de ces fréquences. En cristallographie, la relation ci-dessus correspond à la relation de Bragg. Il s'agit de la condition d'interférence constructive entre deux ondes réfléchies par deux réseaux linéaires (ou plans réticulaires) distants de  $D$ . Pour un grand nombre de plans réticulaires, une grande quantité d'ondes interfèrent ensemble et donne naissance aux bandes interdites observées.

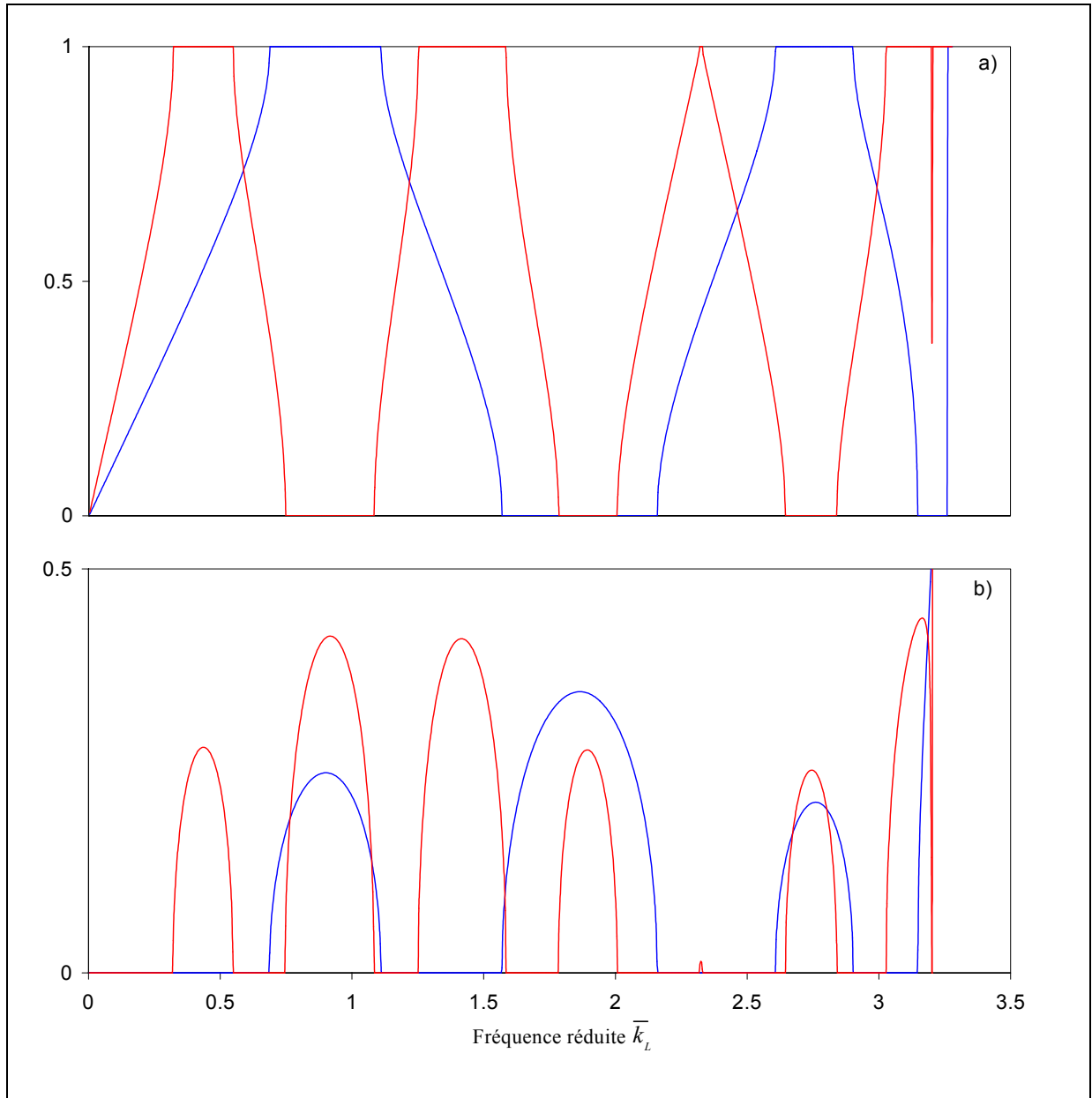


Figure 3.5 : Courbes de dispersion a) et d'atténuation b) d'un réseau d'inclusions d'air excité en incidence normale avec  $d/a = 3$  et  $D/a = 10$  :  $\bar{\gamma}_L'(\bar{k}_L)$  et  $\bar{\gamma}_L''(\bar{k}_L)$  en bleu,  $\bar{\gamma}_T'(\bar{k}_L)$  et  $\bar{\gamma}_T''(\bar{k}_L)$  en rouge.

La Figure 3.6 présente l'évolution des coefficients de réflexion en énergie notés  $|R^{LL}|^2$  et  $|R^{TT}|^2$  (par rapport à la section II, l'indice 1 a été supprimé). Ces coefficients sont calculés rigoureusement dans les mêmes conditions que les courbes de dispersion et d'atténuation. A chaque bande interdite observée précédemment coïncide ici une réflexion totale. Les bandes interdites sont bien reproduites par les coefficients de réflexion et des calculs menés pour un plus grand nombre de réseaux linéaires n'ont révélé aucune modification quant à leur forme.

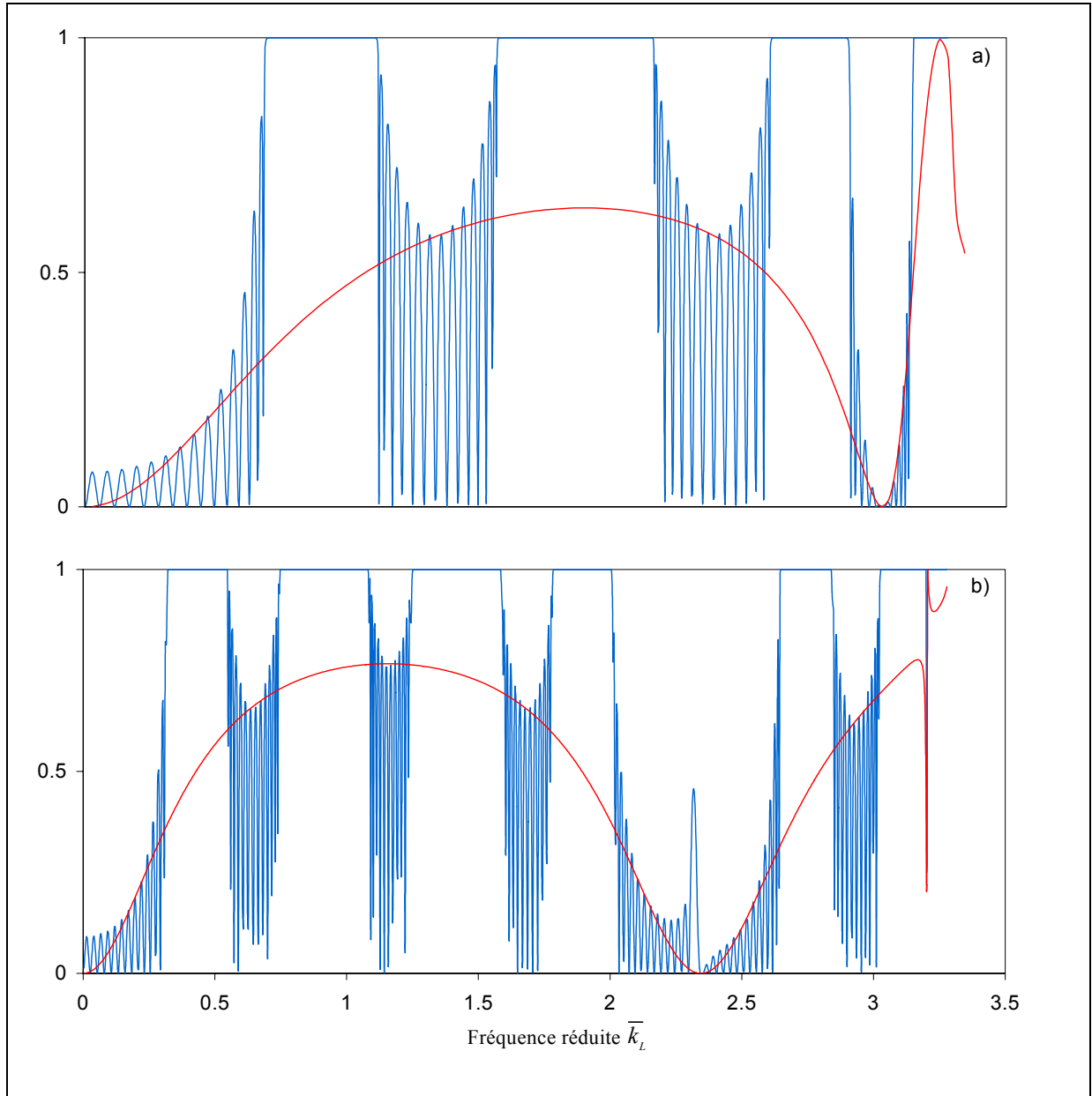
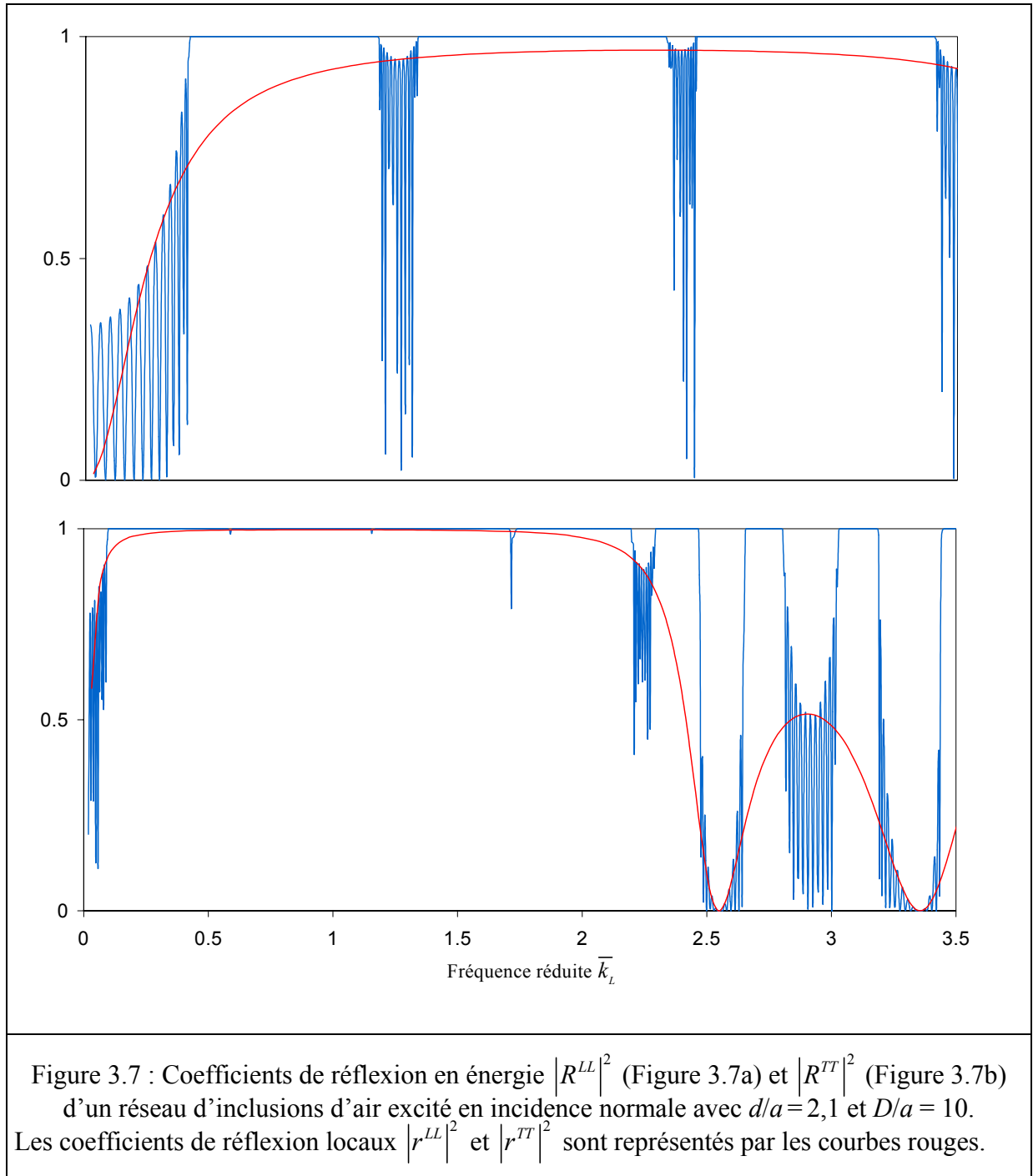


Figure 3.6 : Coefficients de réflexion en énergie  $|R^{LL}|^2$  (Figure 3.6a) et  $|R^{TT}|^2$  (Figure 3.6b) d'un réseau d'inclusions d'air excité en incidence normale avec  $d/a = 3$  et  $D/a = 10$ . Les coefficients de réflexion locaux  $|r^{LL}|^2$  et  $|r^{TT}|^2$  sont représentés par les courbes rouges.



Ceci confirme que, pour  $N=15$ , le réseau comporte suffisamment de réseaux linéaires pour que la propagation d'ondes puisse y être décrite par le théorème de Bloch. Par rapport aux courbes de dispersion et d'atténuation, les tracés des coefficients de réflexion fournissent un résultat nouveau lié de la dimension finie du réseau dans la direction  $Ox$  : les coefficients de réflexion présentent, au niveau des bandes passantes, des oscillations aperiodiques de nature interférentielle. Ces oscillations, de type Fabry-Perot, résultent des interférences entre les ondes réfléchies par les deux interfaces du milieu effectif fini. Ces interférences n'ont pas lieu dans les bandes interdites en raison des fortes atténuations qui les caractérisent. Au contraire, les ondes ne sont pas atténuées dans les bandes passantes et peuvent donc se propager à longue distance dans toute l'épaisseur du milieu effectif. Leur forte dispersion explique l'apériodicité des oscillations observées. Si l'on traçait les coefficients de réflexion en fonction de  $\gamma'_L$  et  $\gamma'_T$ , les oscillations se périodiseraient avec une période inversement proportionnelle à l'épaisseur  $e$  du milieu effectif. Les positions des pics d'interférence sont en effet donnés par  $\gamma_{L,T} e = n\pi$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ . En comparant sur la Figure 3.6 les coefficients de réflexion en énergie des réseaux linéaires avec ceux du réseau global, on constate que la présence de certaines bandes interdites est due au fait que les réseaux linéaires, dans ses bandes de fréquence, ne réfléchissent quasiment pas les énergies transportées par les ondes incidentes. Il est également à noter que les deux spectres relatifs aux ondes longitudinales et transversales ont des bandes de fréquence communes pour lesquelles ni les ondes longitudinales ni celles transversales ne sont transmises par le réseau 2-d. Autrement dit, il existe donc des bandes interdites pour lesquelles aucune vibration ne peut se propager à longue distance dans le réseau 2-d élastique.

Pour déterminer les effets d'une plus forte densité d'inclusions dans chaque réseau linéaire, les coefficients de réflexion sont tracés sur la Figure 3.7 pour  $d/a = 2,1$ . La première fréquence de coupure des réseaux linéaires est plus élevée ( $\bar{k}_L = 4,7$ ) mais, en vue d'une étude comparative, nous conservons ici le domaine d'étude précédent. Pour cette valeur du rapport  $d/a$ , le coefficient de réflexion  $|r^{LL}|^2$  des réseaux linéaires ne s'annule jamais. Les bandes passantes révélées par le coefficient de réflexion  $|R^{LL}|^2$  ne sont donc dues qu'à la seule géométrie du réseau 2-d. Par contre, le coefficient de réflexion  $|r^{TT}|^2$  s'annule à deux reprises, précisément à  $\bar{k}_L = 2,55$  et à  $\bar{k}_L = 3,34$ . Autour de ces deux fréquences, le coefficient de réflexion  $|R^{TT}|^2$  fait apparaître clairement deux bandes passantes. Ainsi, en l'absence de résonances, les bandes passantes du réseau 2-d peuvent être classées en deux catégories : celles caractéristiques de la propagation d'ondes dans les milieux périodiques (effet global), et celles dues à des transmissions totales au travers de chaque réseau linéaire (effet local).



A des fréquences éloignées des zones d'annulation des coefficients de réflexion des réseaux linéaires, nous constatons que les fréquences centrales des bandes interdites restent inchangées par rapport aux cas  $d/a=3$ . Ceci confirme que les positions des bandes interdites ne sont liées qu'à la seule période  $D$  dans la direction de propagation des ondes. L'effet d'une forte densité d'inclusions dans les réseaux linéaires est un élargissement des bandes interdites avec, consécutivement, une disparition progressive des bandes passantes. L'effet est particulièrement spectaculaire sur la Figure 3.7b : pour  $0,2 \leq \bar{k}_L \leq 2,1$ , le réseau 2-d filtre complètement

les vibrations de type transversal. Cet élargissement des bandes interdites vient de ce que les réseaux linéaires réfléchissent beaucoup plus qu'ils ne transmettent lorsque les inclusions sont très proches les unes des autres. En comparant les coefficients de réflexion des réseaux linéaires des Figures 3.6 et 3.7, il apparaît en effet nettement qu'ils sont beaucoup plus proches de l'unité pour  $d/a = 2,1$  (en dehors de leurs zones d'annulations dans le domaine des hautes fréquences) que pour  $d/a = 3$ . Aux basses fréquences, le réseau linéaire d'inclusions d'air quasiment en contact a alors le comportement similaire d'une couche d'air en milieu solide, cette couche constituant un réflecteur quasi parfait. Les ondes transmises sont fortement atténuées lors du franchissement de chaque réseau linéaire et sont quasi inexistantes après quelques périodes  $D$  parcourues.

#### IV.1.2 Effets dus aux résonances d'inclusions d'eau

A l'instar de C. Audoly et G. Dumery [35] dans le cas d'un réseau de diffuseurs cylindriques immergés dans l'eau, il s'agit maintenant d'identifier les effets d'une diffusion résonante sur les bandes interdites observées dans le paragraphe précédent en remplaçant les inclusions d'air par des inclusions d'eau. Le réseau 2-d considéré ici est caractérisé par  $d/a = 3$  et  $D/a = 10$ . D'après les résultats des premier et deuxième chapitres, le rapport  $d/a$  étant supérieur à la valeur critique de 2,4, la contribution du couplage résonant entre les inclusions d'un réseau linéaire est négligeable devant les résonances des inclusions prises individuellement (*cf.* Figure 2.11). Par suite, les résonances d'un réseau linéaire peuvent être considérées comme étant celles d'une seule inclusion d'eau. La Figure 3.8 présente les courbes d'atténuation et de réflexion du réseau d'inclusions d'eau excité en incidence normale. Pour plus de clarté, le réseau n'est soumis qu'à une onde longitudinale. Les fréquences des résonances d'un réseau linéaire (identiques à celles d'une seule inclusion d'eau) sont indiquées par des flèches sur la courbe d'atténuation. Ces fréquences sont :  $\bar{k}_L = 1,35$  ;  $\bar{k}_L = 2,21$  ;  $\bar{k}_L = 2,85$ . La comparaison avec les Figures 3.5a et 3.6a montre qu'à chaque résonance est associée une nouvelle bande interdite marquée par une plus forte atténuation que celles initialement présentes.

---

[35] C. Audoly et G. Dumery, *Acoustic wave propagation in media containing two-dimensional periodically spaced elastic inclusions*, *Phys. Acoust.*, Éd. O. Leroy et M. A. Breazeale, Plenum Press, New York, pp. 199-204, 1991.

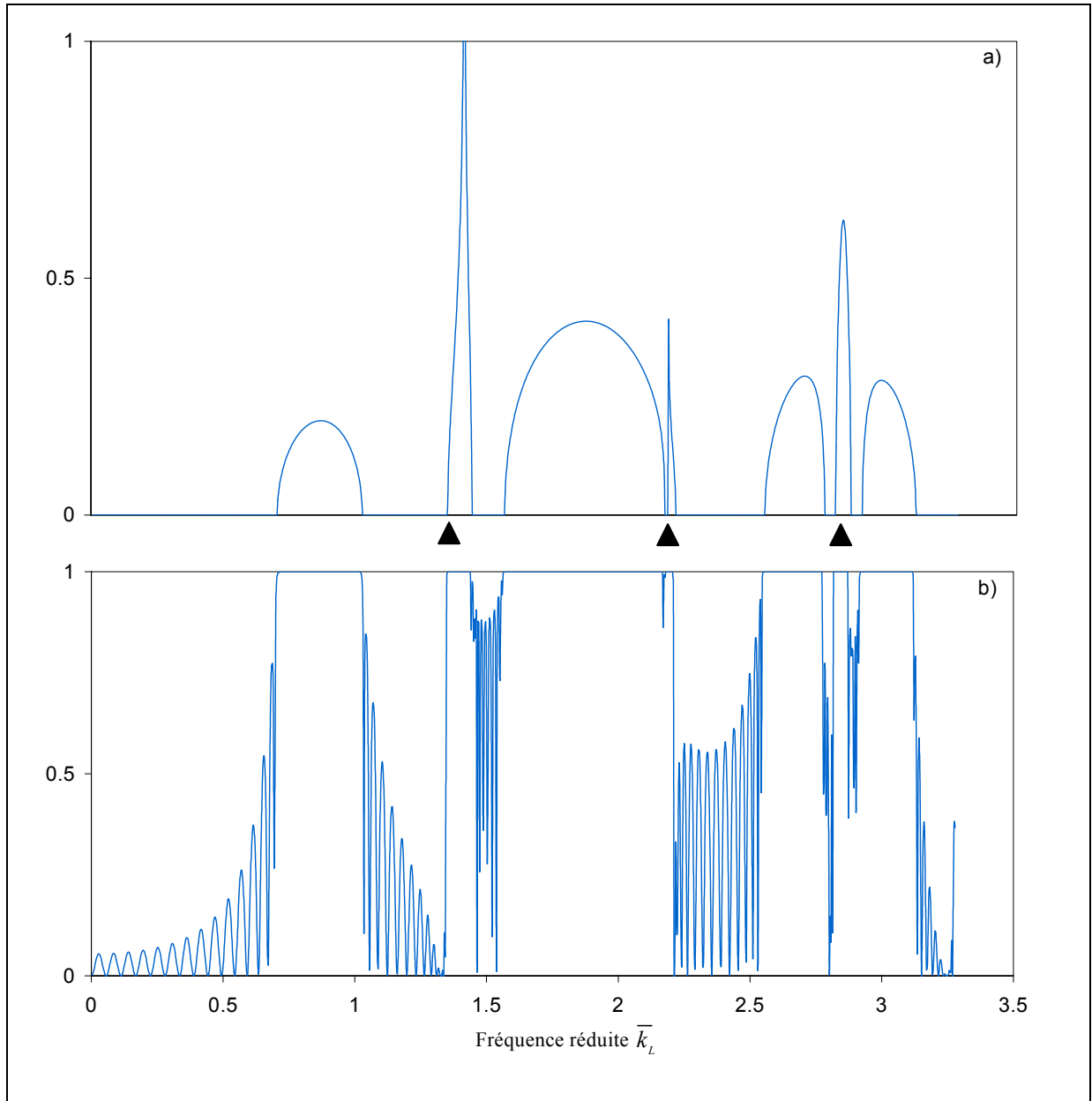


Figure 3.8 : Réseau d'inclusions d'air excité en incidence normale avec  $d/a=3$  et  $D/a=10$ .

a) Atténuation  $\bar{\gamma}_L''(\bar{k}_L)$ , b) réflexion  $|R^{LL}|^2(\bar{k}_L)$ .

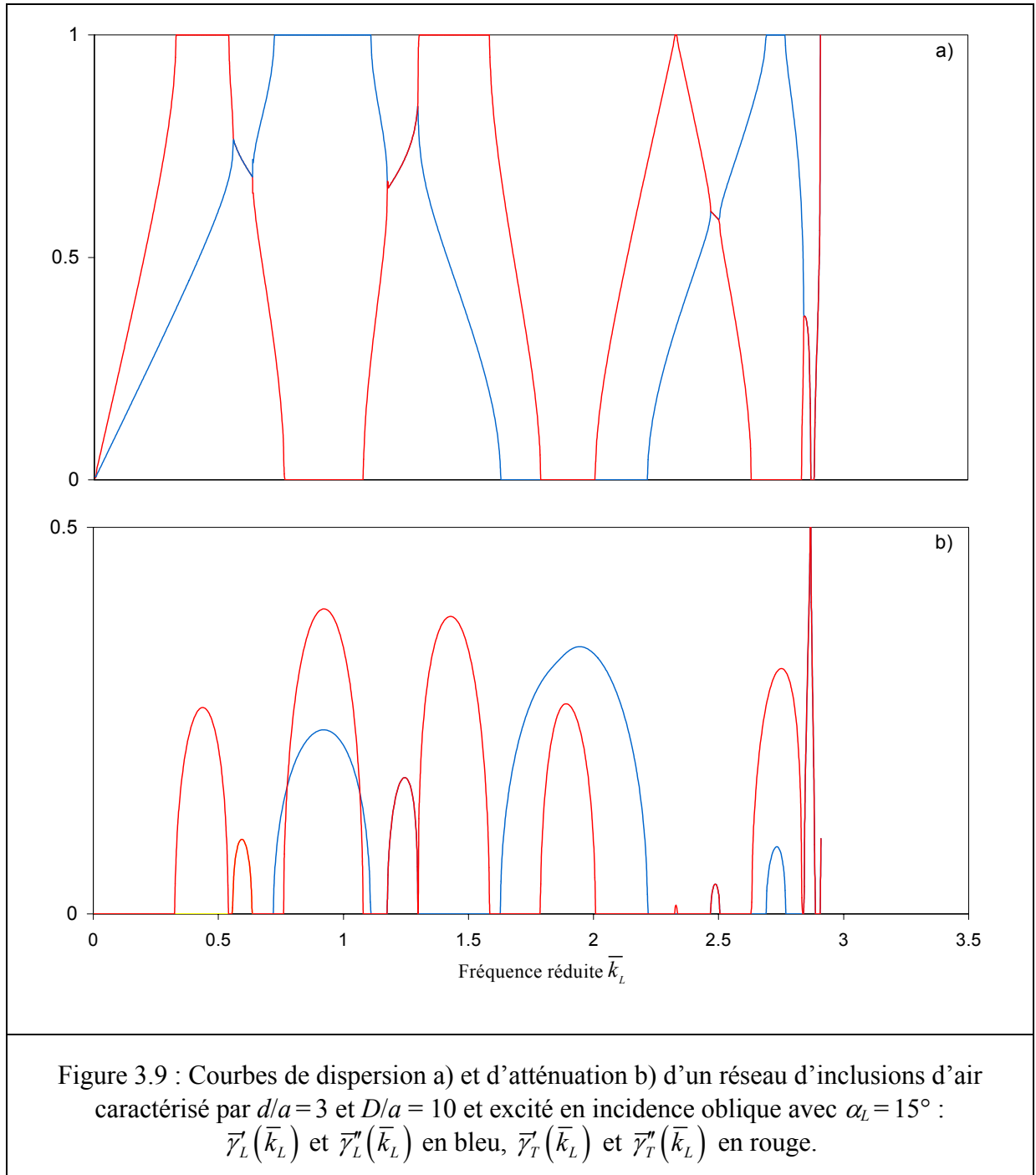
Ce résultat a été observé en milieu fluide lors de l'étude citée plus haut. La présence de ces bandes interdites est liée à une forte dissipation de l'énergie lorsque les ondes de galerie à écho résonnent autour des inclusions d'eau. Il y a un rapport direct entre les largeurs des résonances (mesurées sur les spectres des dérivées de phase ou des valeurs propres de la matrice  $S$  présentés dans le deuxième chapitre) et celles des bandes interdites associées ; plus les résonances sont fines et plus les bandes interdites sont étroites, et inversement. Le tracé du coef-

ficient de réflexion montre qu'à chacune des nouvelles bandes interdites est bien associée une réflexion totale en énergie. L'émergence de ces nouvelles résonances s'accompagne d'un fait singulier : lorsqu'une résonance est déjà localisée dans une bande interdite initiale, ce qui est le cas par exemple à  $\bar{k}_L = 2,85$ , deux bandes passantes se forment de part et d'autre de la bande interdite « de résonance ». Dans l'autre cas de figure où une résonance est localisée dans une bande passante initiale, comme à  $\bar{k}_L = 1,35$ , l'émergence de la bande interdite de résonance s'accompagne d'un élargissement de la bande passante initiale avec une détérioration des oscillations du coefficient de réflexion. Les mêmes phénomènes, mais plus spectaculaires, ont été observés en considérant des réseaux avec des densités d'inclusions très fortes (bandes interdites initiales très larges) ou très faibles (bandes passantes initiales très larges). Ainsi, de façon systématique, à chaque résonance est associée une nouvelle bande interdite ainsi que deux bandes passantes adjacentes, la présence de ces dernières étant inexplicée.

#### IV.1.3 Effets dus à une incidence oblique

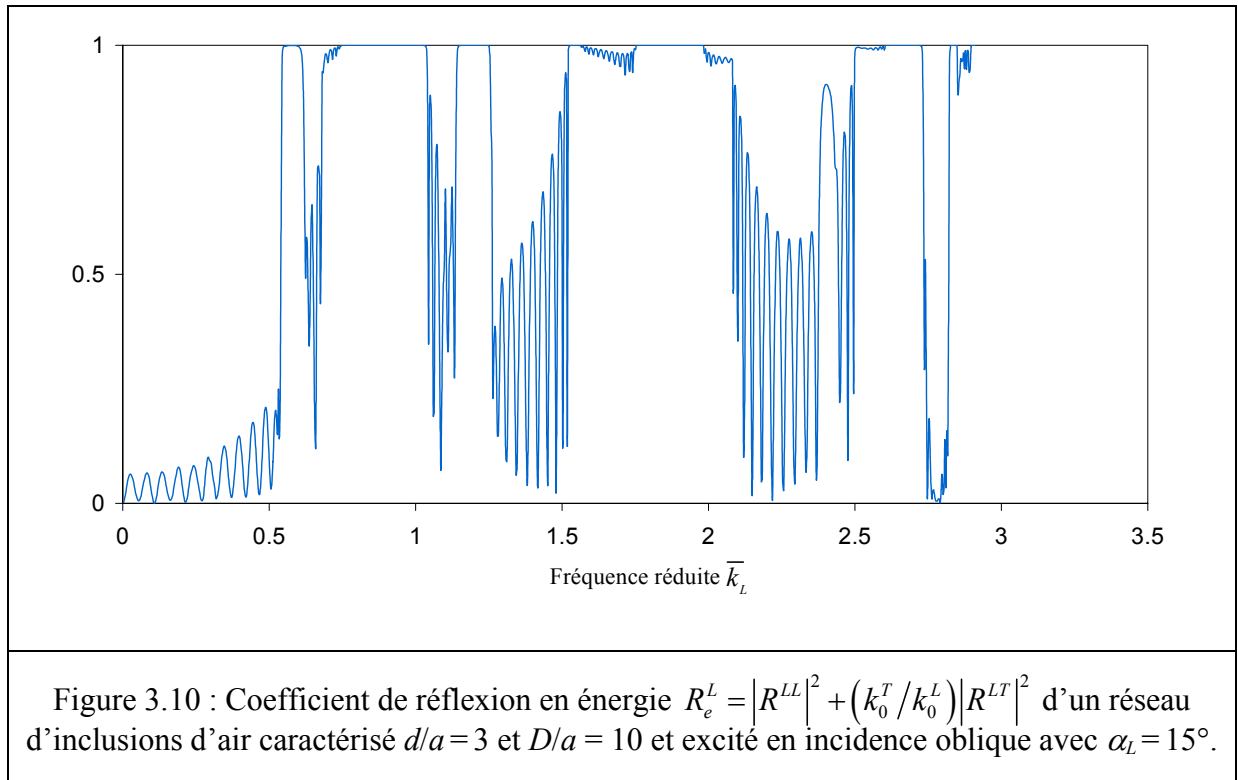
Ce paragraphe a pour objectif d'identifier les effets du couplage entre les ondes longitudinales et celles transversales caractérisant l'incidence oblique. Ce couplage est lié aux conversions  $L \leftrightarrow T$  à chaque réflexion ou transmission par un réseau linéaire. Pour simplifier l'analyse, considérons de nouveau un réseau d'inclusions d'air (permettant d'éviter les effets dus aux résonances décrits ci-dessus). Le réseau est caractérisé par  $d/a = 3$  et est soumis à une onde plane longitudinale sous l'angle d'incidence  $\alpha_L = 15^\circ$ . La transmission au travers du premier réseau linéaire génère la propagation d'une onde plane transversale qui est incidente sous un angle  $\alpha_T = 7,3^\circ$  sur le deuxième réseau linéaire. Ces deux angles de propagation dans le réseau 2-d sont liés par la loi de Snell-Descartes (*cf.* Equation (2.12)). En incidence oblique, la première fréquence de coupure décroît et correspond ici à  $\bar{k}_L = 2,9$ .

La Figure 3.9 présente les courbes de dispersion et d'atténuation obtenues. En les comparant avec celles présentées sur la Figure 3.5, la plupart des bandes interdites sont identifiables avec celles obtenues en incidence normale en raison du couplage relativement faible se manifestant pour  $\alpha_L = 15^\circ$ . La première observation est que les bandes interdites sont légèrement translatées vers les hautes fréquences. Nous avons vu en effet qu'elles se développent autour des fréquences multiples de  $\bar{k}_{L,T} = 1/\cos \alpha_{L,T}$ , fréquences qui sont des fonctions croissantes de l'angle d'incidence.



L'effet particulier du couplage survient lorsque les courbes de dispersion des ondes longitudinales et transversales en situation découplée se croisent (*cf.* Figure 3.5) à  $\bar{k}_L=0,57$ ,  $\bar{k}_L=1,22$  et  $\bar{k}_L=2,47$ . Les courbes de dispersion autour de chacune de ces fréquences se superposent. Il en est de même pour les courbes d'atténuation. En incidence oblique, les ondes longitudinales et transversales dans le milieu effectif d'épaisseur finie sont des ondes planes hétérogènes, c'est-à-dire que leurs vecteurs propagatif  $\bar{\gamma}'_{L,T}$  et d'hétérogénéité  $\bar{\gamma}''_{L,T}$  forment un angle  $\alpha_{L,T}$ , le vecteur  $\bar{\gamma}''_{L,T}$  étant orienté selon l'axe Ox (suite à la loi de Snell-Descartes à l'interface entre le

milieu d'excitation et le milieu effectif). Lorsque les courbes de dispersion et celles d'atténuation se confondent, les ondes longitudinales et transversales ont alors les mêmes vecteurs d'hétérogénéité suivant  $Ox$  et des vecteurs propagatifs ayant les mêmes projections sur  $Ox$ . L'interprétation physique est que ces régions de fort couplage correspondent à la propagation d'ondes guidées le long de la direction  $Ox$ , ces ondes étant guidées entre deux réseaux linéaires finis de pas  $D$  le long de l'axe  $Ox$ . Cette hypothèse est corroborée par un résultat non présenté ici. Si l'on augmente la densité d'inclusions d'air dans les réseaux linéaires horizontaux en diminuant le rapport  $D/a$ , les zones de fort couplage s'étendent. Ajoutons que plus l'angle d'incidence est grand, et plus les zones de fort couplage s'étendent. La Figure 3.10 présente le coefficient de réflexion en énergie. L'énergie réfléchiée par le réseau 2-d étant ici transportée à la fois par les ondes longitudinales et celles transversales, le coefficient de réflexion en énergie doit s'écrire  $R_e^L = |R^{LL}|^2 + (k_0^T/k_0^L)|R^{LT}|^2$ . Ce coefficient de réflexion est défini à partir de la loi de conservation de l'énergie (2.95).



Les trois zones de fort couplage liées à la propagation d'ondes guidées correspondent à des réflexions en énergie totales, excepté à  $\bar{k}_L=2,47$  où le coefficient  $R_e^L$  n'atteint pas rigoureusement l'unité en raison du nombre  $N$  de réseaux linéaires qui, pour cette fréquence, n'est pas suffisamment élevé (pour  $N > 20$ ,  $R_e^L$  atteint en effet l'unité à cette fréquence). En incidence

normale, nous avons vu qu'une réflexion totale correspond rigoureusement à une atténuation non nulle ; chaque bande interdite correspond à une bande d'atténuation non nulle. En incidence oblique, si l'on compare le coefficient de réflexion en énergie ci-dessus avec les courbes d'atténuation de la Figure 3.9, on constate qu'une bande interdite (une réflexion totale) ne correspond plus exactement à une bande d'atténuation non nulle. Il apparaît en effet clairement que les bandes interdites correspondent ici à l'intersection de toutes les bandes d'atténuation non nulle présentes, c'est-à-dire celles associées aux ondes longitudinales et celles associées aux ondes transversales. Ceci est encore un effet de couplage des ondes longitudinales et transversales.

## IV.2 Étude de réseaux 2-d apériodiques

Les réseaux 2-d considérés dans ce paragraphe ne possèdent qu'une seule direction de périodicité dans la direction  $Oy$ . Pour simplifier l'analyse des résultats, les coefficients de réflexion sont ici calculés en incidence normale et pour des réseaux d'inclusions d'air. Deux types d'apériodicité sont considérés : i) une répartition périodique de réseaux linéaires dont les rayons des inclusions décroissent dans la direction  $Ox$  ; ii) une répartition aléatoire de réseaux linéaires tous identiques. Le but est d'observer comment les bandes interdites et passantes sont affectées par une perturbation de la périodicité.

### IV.2.1 Effets d'une décroissance des rayons des inclusions

Les conséquences d'une variation des tailles des inclusions sur les bandes passantes et les bandes interdites sont ici analysées. Physiquement, cette situation correspond à un milieu solide à porosité non uniforme. Le réseau d'inclusions d'air est composé de  $N=15$  réseaux linéaires périodiquement espacés, avec  $D=10$  mm, chaque réseau linéaire étant caractérisé par  $d=3$  mm (leur première fréquence de coupure correspond à  $\bar{k}_L=3,3$ ). Les rayons des inclusions décroissent dans la direction  $Ox$  en suivant une loi exponentielle :  $a_n = a_1 e^{-\lambda(n-1)D}$  avec  $1 \leq n \leq 15$ . La variation des rayons des inclusions est de 1 à 0,5 mm lorsque  $\lambda=0,005 \text{ mm}^{-1}$ , et de 1 à 0,1 mm lorsque  $\lambda=0,0164 \text{ mm}^{-1}$ . Le tracé de  $|R^{LL}|^2$  est présenté sur la Figure 3.11a



pour  $a_{15} = 0,5$  mm, et sur la Figure 3.11b pour  $a_{15} = 0,1$  mm. Ces courbes sont à comparer avec celle de la Figure 3.6a obtenue pour un réseau d'inclusions identiques de rayon  $a = 1$  mm.

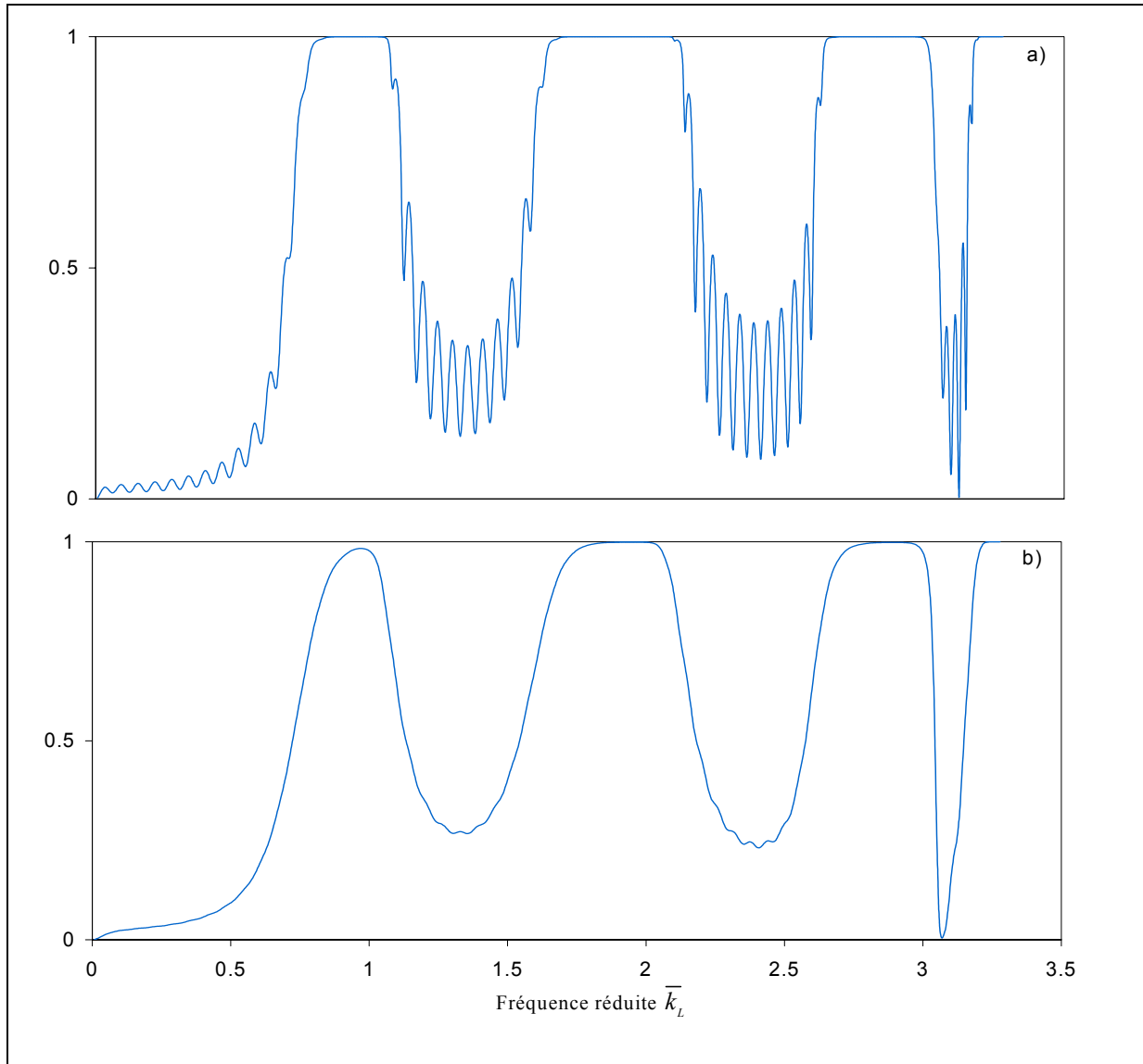


Figure 3.11 : Réseau d'inclusions d'air caractérisé par  $D = 10$  mm et  $d = 3$  mm et excité en incidence normale par une onde longitudinale. Les rayons des inclusions décroissent d'un réseau linéaire à l'autre en suivant une loi exponentielle :

- a)  $|R^{LL}|^2(\bar{k}_L)$  pour  $a_n$  variant de  $a_1 = 1$  mm à  $a_{15} = 0,5$  mm,
- b)  $|R^{LL}|^2(\bar{k}_L)$  pour  $a_n$  variant de  $a_1 = 1$  mm à  $a_{15} = 0,1$  mm.

La première observation est que, quelle que soit la rapidité de décroissance des tailles des inclusions, les bandes interdites observées pour un réseau d'inclusions identiques se déforment mais restent toujours présentes. Leur existence est en effet associée à la distribution périodi-

que des réseaux linéaires qui, ici, n'est pas perturbée. Les effets de la décroissance de la porosité sont une réduction des largeurs des bandes interdites et une disparition progressive des oscillations du coefficient de réflexion dans les bandes passantes. En toute logique, plus les bandes interdites initiales sont larges et moins elles sont affectées par cette perturbation de la périodicité. La réduction des largeurs des bandes interdites rejoint un résultat précédent concernant les réseaux 2-d périodiques, à savoir que plus les densités d'inclusions dans les réseaux linéaires sont faibles et plus les largeurs des bandes interdites se rétrécissent. L'étendue des bandes interdites est en effet directement liée au pouvoir réfléchissant des réseaux linéaires. Ici, la décroissance des rayons des inclusions, avec un pas  $d$  constant, se traduit aussi par une diminution progressive des densités d'inclusions dans les réseaux linéaires et donc par une diminution du pouvoir réfléchissant des réseaux linéaires (il a été vérifié, par exemple, que le coefficient de réflexion en énergie du dernier réseau linéaire caractérisé par  $a_{15}=0,1$  mm et  $d=3$  mm est inférieur à  $8.10^{-4}$ ). En outre, il a été constaté que, pour un réseau de mêmes périodes  $D$  et  $d$  avec des inclusions identiques de rayon  $a=1$  mm, les bandes interdites se déforment significativement (avec des arrondis à leurs frontières) lorsque le nombre de réseaux linéaires est inférieur à sept. La décroissance des rayons des inclusions entraîne que seuls quelques réseaux linéaires, c'est-à-dire ceux dont les densités d'inclusions sont les plus fortes, participent à la formation des bandes interdites. Ceci explique les déformations progressives des trois bandes interdites avec les formes arrondies à leurs frontières. Pour terminer, ajoutons que les mêmes courbes ont été obtenues lorsque l'onde incidente se propage en direction des  $x$  décroissants, ou, autrement dit, lorsqu'elle se propage dans le sens des réseaux les moins denses aux réseaux les plus denses. Ce résultat n'est pas surprenant puisque, les premiers réseaux rencontrés étant quasi « transparents », les réseaux les plus denses participant à la formation des bandes interdites sont donc soumis à la quasi-totalité de l'énergie de l'onde incidente.

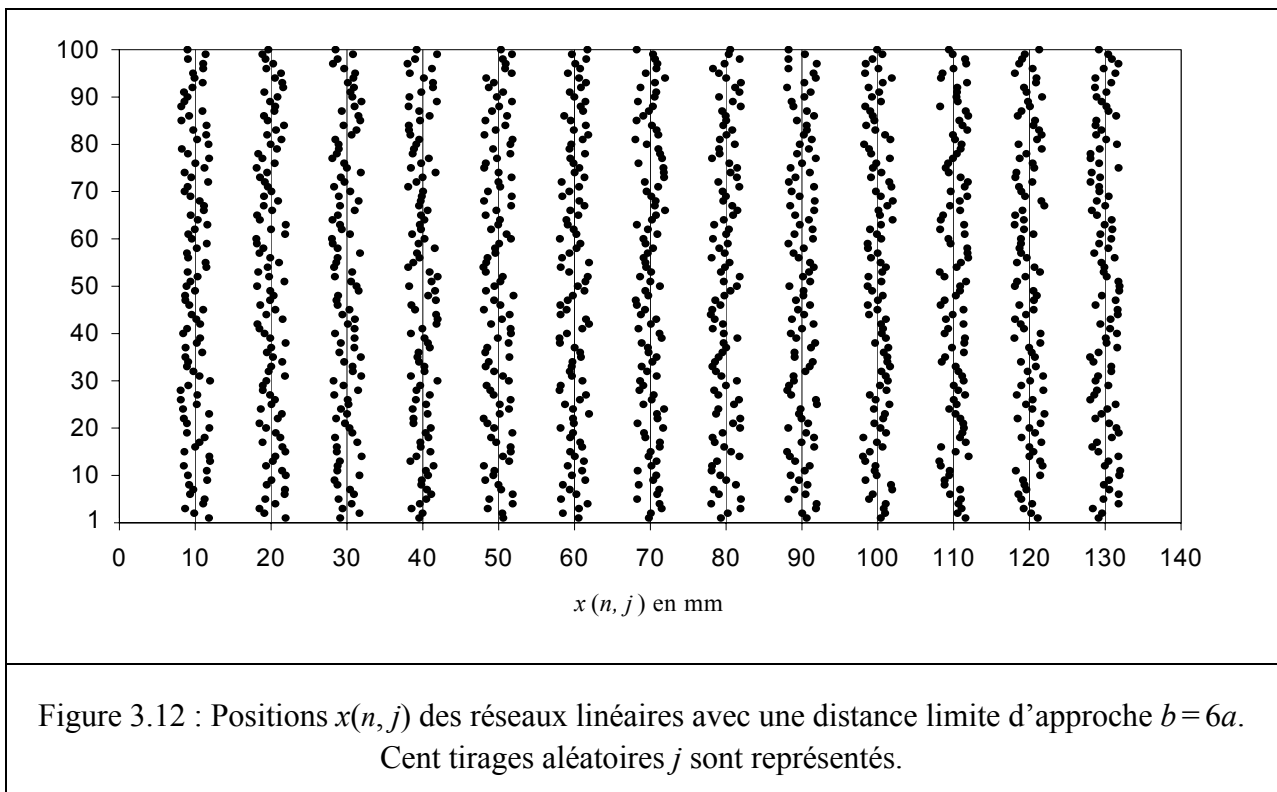
#### IV.2.2 Effets d'une répartition aléatoire de réseaux linéaires

Etant donné un réseau 2-d composé de  $N=30$  réseaux linéaires identiques et disposés périodiquement avec une période  $D=10$  mm. Le réseau est soumis à une onde plane longitudinale et chaque réseau linéaire est caractérisé par  $d/a=3$ , avec  $a=1$  mm. L'objectif de ce paragraphe est d'identifier l'effet d'un défaut de position aléatoire de chacun des réseaux liné-

aires par rapport à leur position initiale périodique. Plus précisément, la position d'un réseau linéaire  $n$  est supposée aléatoire autour de  $x=(n-1)D$  avec  $2 \leq n \leq 29$ , les premier et dernier réseaux linéaires étant fixés respectivement à  $x=0$  et  $x=e$  (l'épaisseur  $e$  du réseau 2-d, définie par  $(N-1)D$ , vaut 290 mm). Une distance limite d'approche entre les réseaux linéaires, notée  $b$ , doit être introduite dans le but de quantifier ce défaut de périodicité :  $b=10a$  correspond à un réseau périodique et, à l'extrême,  $b=2a$  à un réseau apériodique où les inclusions de deux réseaux linéaires consécutifs sont susceptibles d'être en contact. Ici, on s'assurera que  $b > 4a$  pour que la contribution des ondes évanescentes issues d'un réseau linéaire soit négligeable vue des réseaux linéaires voisins. En se fixant une valeur de  $b$ , l'algorithme utilisé pour la distribution des réseaux linéaires est

$$x(n, j) = x(N) - (N - n)D + (1/2 - \eta_{n,j})(D - b), \quad (3.41)$$

avec  $x(1, j) = 0$  et  $x(N, j) = (N-1)D$ . La variable  $\eta_{n,j}$  est une variable aléatoire, comprise entre 0 et 1, obéissant à une loi de probabilité uniforme. Cette variable aléatoire est propre à chaque réseau linéaire  $n$ . Ainsi, pour  $N=30$ , un tirage  $j$  de vingt-huit variables aléatoires comprises entre 0 et 1 est réalisé. A titre d'exemple, la Figure 3.12 illustre la répartition des réseaux linéaires pour  $b=6a$  et pour une série de tirages aléatoires  $j$  de 1 à 100. Le nombre de réseaux linéaires est ici  $N=15$  pour la bonne de lisibilité de la représentation.



La Figure 3.13 présente les coefficients de réflexion en énergie  $|R^{LL}|^2$  obtenus pour deux distances limites d'approche :  $b=9a$  et  $b=6a$ . Les courbes sont à comparer avec celle de la Figure 3.6.a obtenue pour  $b=10a$ , c'est-à-dire en situation périodique.

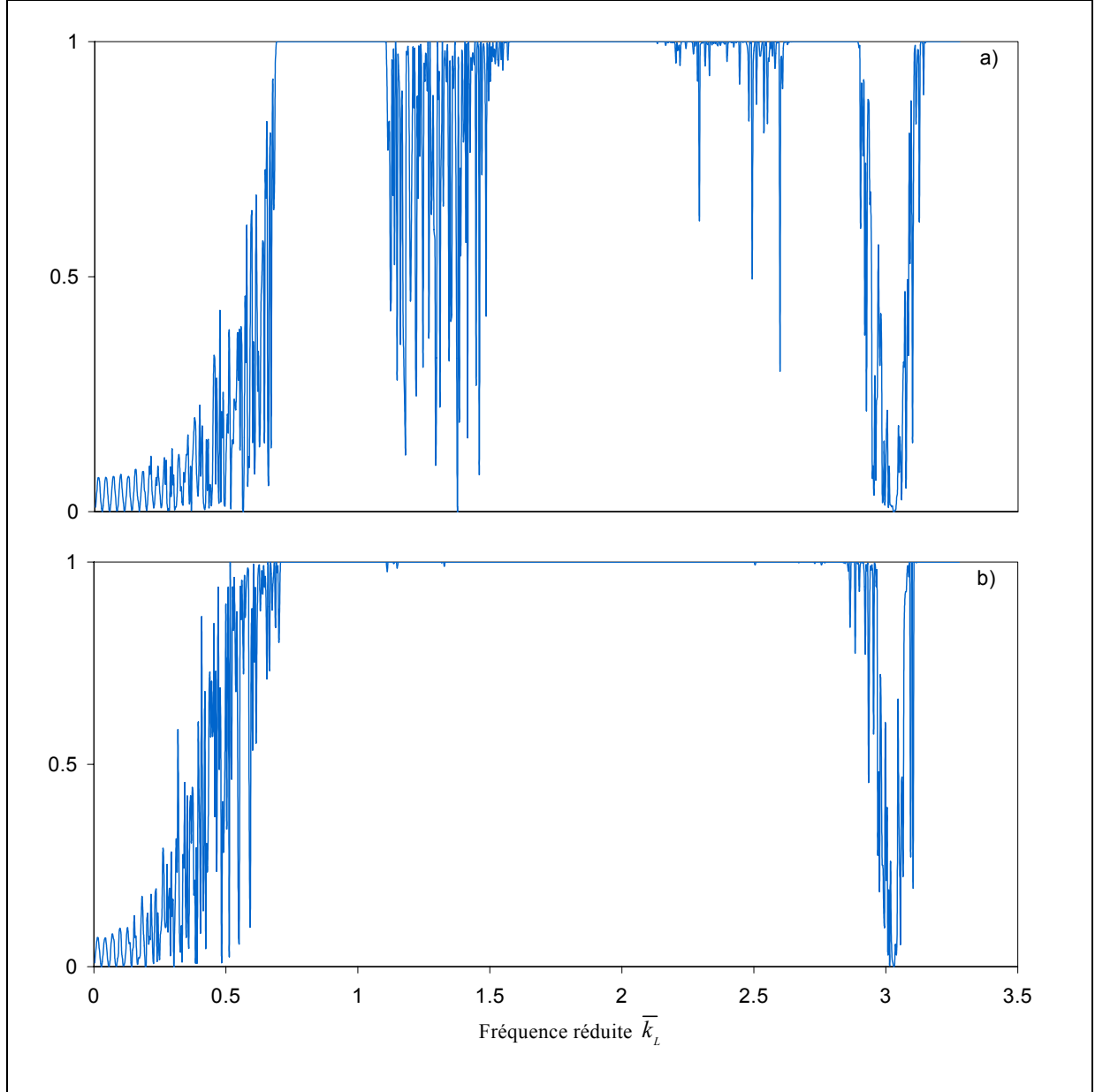


Figure 3.13 : Réseau 2-d d'inclusions d'air caractérisé par  $d/a=3$ , avec  $a=1$  mm, et excité en incidence normale par une onde longitudinale. Le réseau comporte  $N=30$  réseaux linéaires. Les premier et dernier sont fixés à  $x=0$  et  $x=e=(N-1)D$  avec  $D=10$  mm, les autres sont aléatoirement positionnés autour de leur position de périodicité  $x=(n-1)D$ .

a)  $|R^{LL}|^2(\bar{k}_L)$  pour  $b=9a$ ,

b)  $|R^{LL}|^2(\bar{k}_L)$  pour  $b=6a$ .

Le cas  $b=9a$  correspond à un faible désordre par rapport à la situation périodique : le déplacement d'un réseau linéaire autour de sa position initiale est inférieur à  $0,5a$ . Pour ce faible désordre, la présence des bandes interdites et passantes est toujours observable. Excepté aux très basses fréquences, cette aperiodicité se manifeste par une forte détérioration des oscillations périodiques du coefficient de réflexion dans les bandes passantes. Lorsque l'on diminue la distance limite d'approche,  $b=6a$ , la situation physique est très différente. Ce cas correspond à un déplacement des réseaux linéaires inférieur à  $2a$  autour de leur position initiale. Même si, au vu de la Figure 3.13, la périodicité est globalement préservée, on assiste à une disparition complète de toutes les bandes passantes (à l'exception des très basses fréquences où la transmission par un réseau linéaire est quasi totale). La bande passante autour de  $\bar{k}_L=3$  n'est pas une bande passante « standard » liée à la périodicité du réseau 2-d ; on a vu en effet qu'elle résulte de l'annulation des coefficients de réflexion des réseaux linéaires. Cette bande passante reste donc présente quel que soit le désordre considéré. La disparition des bandes passantes standards fait que, sur une large bande de fréquence délimitée par  $\bar{k}_L=0,72$  et  $\bar{k}_L=2,84$ , le réseau 2-d se comporte comme un réflecteur parfait vis-à-vis des vibrations longitudinales. En définitive, si l'on compare l'allure du coefficient de réflexion  $|R^{LL}|^2$  avec celui d'un réseau linéaire  $|r^{LL}|^2$  (cf. Figure 3.6a), la détérioration de la périodicité du réseau 2-d entraîne que sa réflexion est, en définitive, très proche de celle des réseaux linéaires le composant (à l'exception du rapport d'amplitude résultant du nombre  $N$  réseaux linéaires).

## V. BANDES INTERDITES EXPÉRIMENTALES

Ce travail expérimental vise à valider les spectres de réflexion ou de transmission de réseaux 2-d périodiques. Plus précisément, il s'agit de valider les fréquences centrales et les largeurs des bandes interdites de deux réseaux de périodes différentes. Ce travail a été réalisé en collaboration avec Moumena Hamed, stagiaire de DEA, de janvier à juillet 2004 au LAUE.

### V.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est proche de celui décrit dans le deuxième chapitre. Les transducteurs sont des transducteurs de contact de fréquence centrale  $f_c = 0,25$  MHz. Leurs bandes passantes s'étendent donc de 0,125 à 0,375 MHz. Mis à part la fréquence centrale des

transducteurs, la seule différence avec le deuxième chapitre est que des mesures en transmission ont été réalisées.

Les réseaux 2-d ont été percés dans des blocs d'aluminium de mêmes dimensions que ceux présentés dans les chapitres précédents. Ces réseaux, numérotés 1 et 2, sont décrits sur la Figure 3.14 ci-dessous. Pour le réseau 1, les résultats seront présentés en transmission (configuration bistatique), et en réflexion pour le réseau 2 (configuration monostatique).

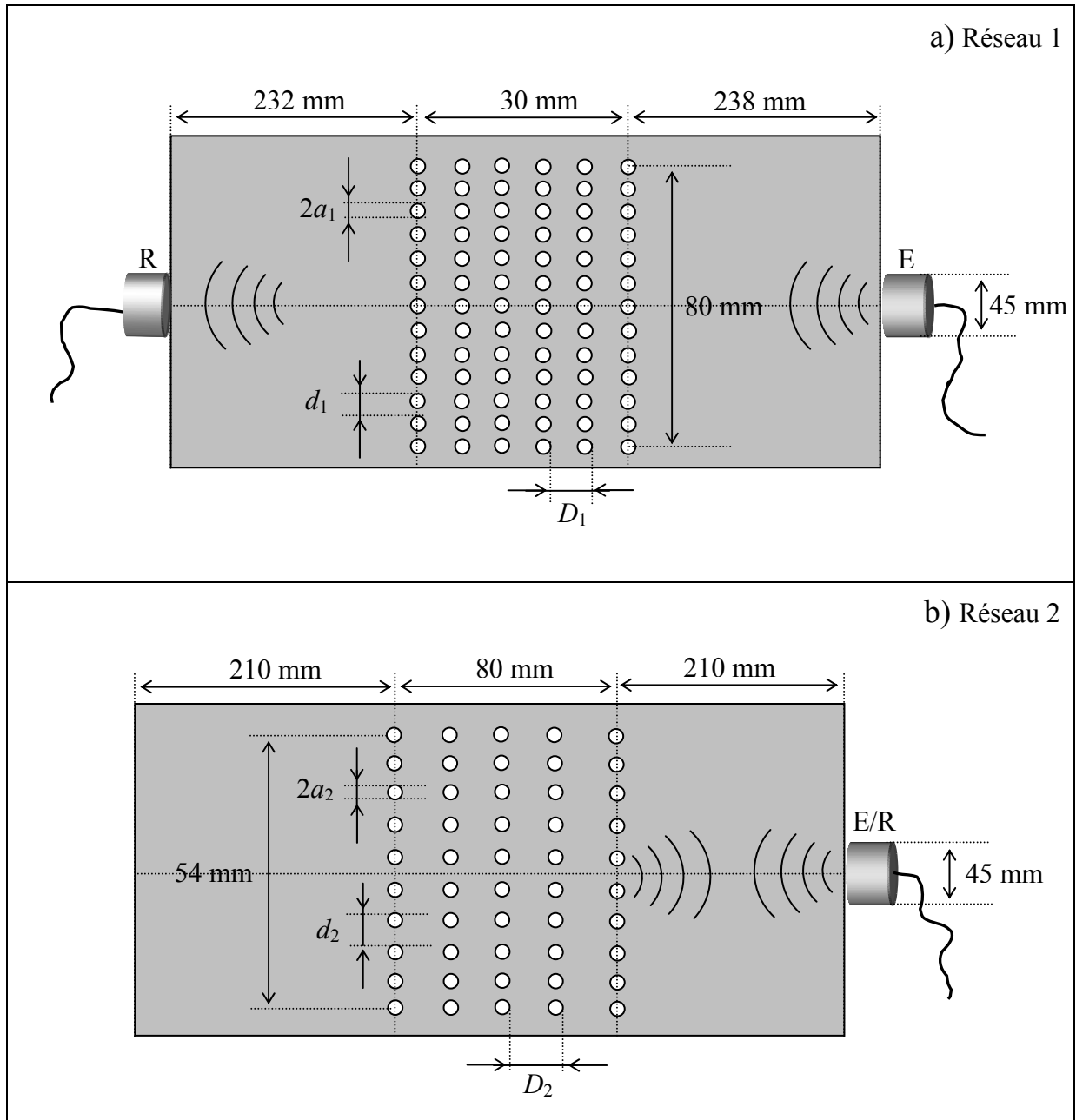


Figure 3.14 : Mesures en transmission a) et en réflexion b) pour deux réseaux constitués de :  
a) six réseaux linéaires caractérisés par  $d_1 = 5$  mm,  $a_1 = 2,07$  mm et espacés de  $D_1 = 6$  mm ;  
b) cinq réseaux linéaires caractérisés par  $d_2 = 6$  mm,  $a_2 = 2,07$  mm et espacés de  $D_2 = 20$  mm.

Le rayon des trous pratiqués pour la réalisation des deux réseaux est estimé à 2,07 mm. Le réseau 1 comporte six réseaux linéaires de dix-sept inclusions espacées d'une période  $d_1 = 5$  mm (la première fréquence de coupure vaut 0,628 MHz). L'espacement entre les réseaux linéaires est de  $D_1 = 6$  mm. Le réseau 2 ne comporte que cinq réseaux linéaires en raison de l'espacement  $D_2$  plus important :  $D_2 = 20$  mm. Il faut en effet s'assurer que la distance entre l'« interface » du réseau 2-d et l'interface air/aluminium soit aussi grande que possible pour que les multiples aller-retours de l'écho spéculaire entre les deux interfaces ne puissent pas corrompre le signal à traiter. Pour un espacement donné entre les réseaux linéaires, il y alors un compromis à faire entre le nombre de réseaux linéaires à percer (le réseau 2-d doit comporter suffisamment de réseaux linéaires pour que la formation de bandes interdites et de bandes passantes puissent se produire) et cette distance entre l'interface du réseau 2-d et l'interface air/aluminium. Les réseaux linéaires constituant le réseau 2 comportent chacun dix inclusions espacées de  $d_2 = 6$  mm (la première fréquence de coupure est égale à 0,523 MHz).

Pour effectuer des mesures en transmission, le dispositif électronique utilisé, dit bistatique, est celui de la Figure 3.15. Il reprend le montage monostatique de la Figure 1.25 mais avec deux transducteurs au lieu d'un seul. L'un est consacré uniquement à l'émission de l'onde incidente, l'autre à la réception du signal transmis au travers du réseau.

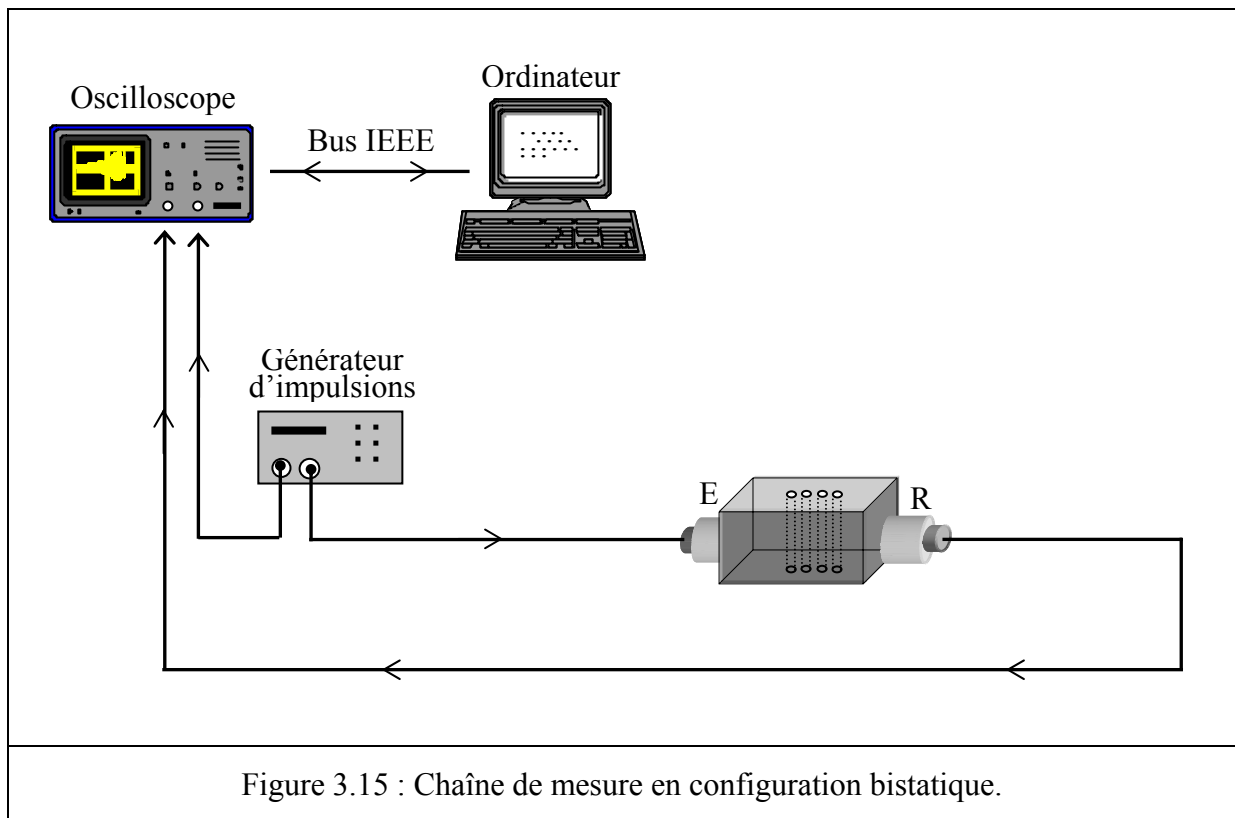


Figure 3.15 : Chaîne de mesure en configuration bistatique.

Pour cette configuration bistatique, la porte analogique n'a donc plus d'utilité. En outre, il est clair que les transducteurs doivent être choisis avec des bandes passantes communes.

La présente étude est menée dans le cas d'inclusions d'air. D'autre part, des blocs témoins (c'est-à-dire non percés) ont été utilisés pour normaliser les différents spectres. En observant les signaux de normalisation obtenus, la présence inattendue d'échos a été constatée. A titre d'illustration, la Figure 3.16 présente les deux signaux temporels utilisés pour l'obtention du spectre de réflexion du réseau 2. Le signal de normalisation a été obtenu en transmission avec un bloc vierge de toute inclusion.

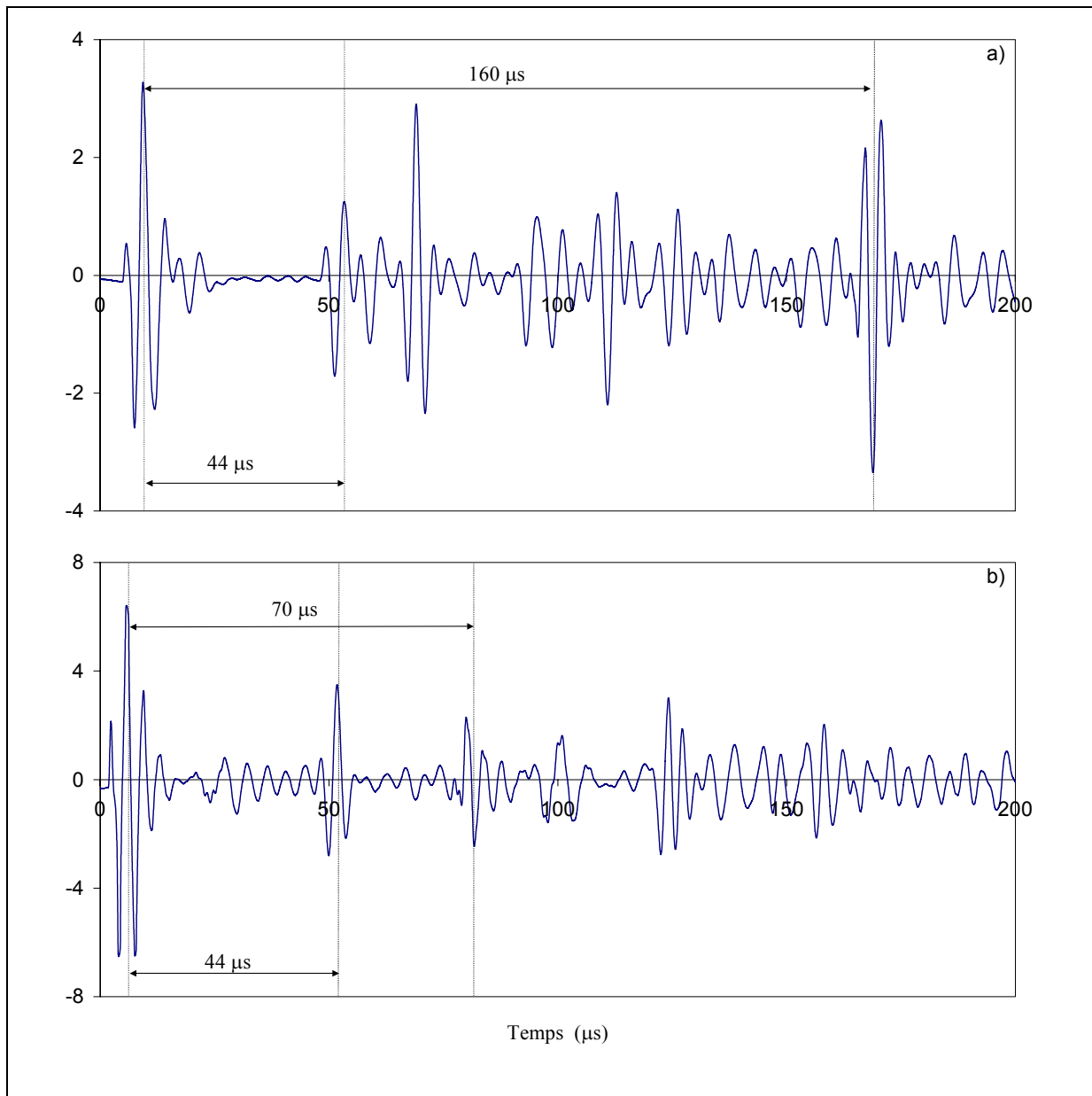


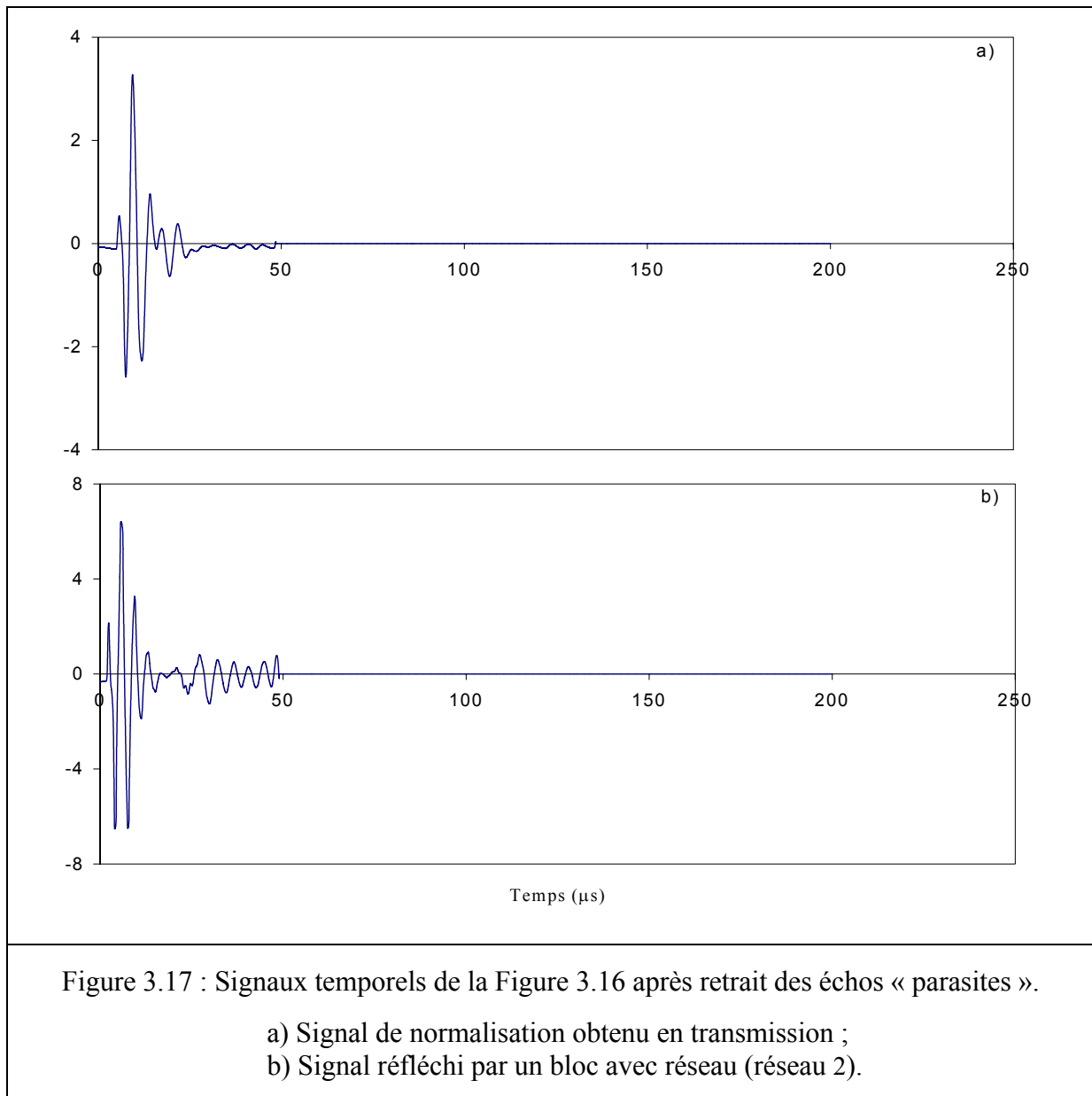
Figure 3.16 : a) Exemple de signal de normalisation obtenu en transmission ;  
b) Signal réfléchi par un bloc avec réseau (réseau 2).



Tous les signaux de normalisation ont été relevés dans les mêmes conditions que lors des expérimentations sur les blocs avec réseau (même énergie et même durée de l'impulsion, mêmes paramètres de numérisation des signaux, même nombre d'acquisitions des signaux pour la réalisation du moyennage, etc.). Ces signaux de normalisation ne devraient faire apparaître qu'une série d'impulsions provenant des réflexions multiples sur les deux interfaces du bloc vierge. Sur le signal de normalisation de la Figure 3.16a, la première impulsion (à 9  $\mu\text{s}$ ) correspond à la première reçue par le transducteur récepteur (transmission directe). Cette impulsion est réfléchiée et effectue un aller-retour avant d'être à nouveau détectée par le transducteur récepteur, au bout de 160  $\mu\text{s}$ . Sur la Figure 3.16b représentant le signal réfléchi par le réseau 2, la première impulsion (à 6  $\mu\text{s}$ ) correspond à celle ayant parcouru un aller-retour entre le réseau et le transducteur émetteur/récepteur (écho spéculaire du réseau 2). L'impulsion à 70  $\mu\text{s}$  de la première correspond à un aller-retour supplémentaire.

Pour le signal de normalisation, nous voyons qu'entre les deux échos à 9 et 169  $\mu\text{s}$ , d'autres échos apparaissent. Des questions se sont alors posées sur la présence éventuelle d'un défaut à l'intérieur du bloc vierge. Après plusieurs essais expérimentaux dans le sens transversal du bloc vierge, mais aussi avec tous les blocs déjà utilisés, nous avons conclu que ces échos sont la conséquence de la mauvaise directivité du transducteur utilisé (entraînant des réflexions du faisceau ultrasonore incident sur les faces latérales du bloc). Cette mauvaise directivité est la conséquence des basses fréquences considérées ici (la fréquence centrale de la bande passante du transducteur est de 0,25 MHz, contre 1 MHz dans le deuxième chapitre, et 2,25 MHz dans le premier). La présence de ces échos « parasites » est également constatée sur le signal réfléchi par le bloc avec réseau, arrivant précisément 44  $\mu\text{s}$  plus tard que l'écho spéculaire. Sur le signal de normalisation, ces échos arrivent au bout d'un temps identique par rapport à l'impulsion correspondant à la transmission directe. Il a donc été décidé de retirer tous les échos présents à partir du premier écho parasite à 44  $\mu\text{s}$ . Les signaux coupés sont présentés sur la Figure 3.17 de la page suivante. Sur le signal de normalisation, immédiatement après l'écho spéculaire, le signal est de très faible amplitude témoignant ainsi de l'absence de réseau dans le bloc. Le signal obtenu avec réseau présente, lui, des oscillations caractéristiques de la réflexion par le réseau 2. Ce dernier signal étant coupé assez tôt, toutes les réflexions multiples entre les réseaux linéaires, et notamment entre les réseaux linéaires les plus éloignés du transducteur émetteur/récepteur, ne seront donc pas contenues dans le signal tronqué. Cette perte d'informations est sans doute à l'origine de l'allure des spectres obtenus, éloi-

gnée de celle escomptée. Cependant, nous verrons que les bandes interdites et passantes seront malgré tout clairement identifiables.



## V.2 Comparaison théorie/expérience

Les Figures 3.18 et 3.19 présentent respectivement les résultats (théoriques et expérimentaux) obtenus pour les réseaux 1 (en transmission) et 2 (en réflexion). Les spectres théoriques ont été calculés dans les mêmes conditions que l'expérience, en particulier en considérant les mêmes nombres de réseaux linéaires. Pour six et cinq réseaux linéaires, avec respectivement les paramètres des réseaux 1 et 2, les spectres théoriques montrent que les deux ré-

seaux contiennent suffisamment de réseaux linéaires pour voir se former des bandes spectrales interdites et passantes. En premier lieu, si l'on considère le réseau 1, le spectre théorique montre que ce réseau est caractérisé par une seule bande interdite (correspondant à une transmission nulle) dans tout le domaine fréquentiel d'étude  $0,1 \leq f(\text{MHz}) \leq 0,6$ . La bande interdite est délimitée par les deux fréquences 0,256 MHz et 0,524 MHz. (sa fréquence centrale est de 0,390 MHz). Les deux fréquences théoriques délimitant la bande interdite sont repérées par des traits rouges verticaux présents sur les deux spectres.

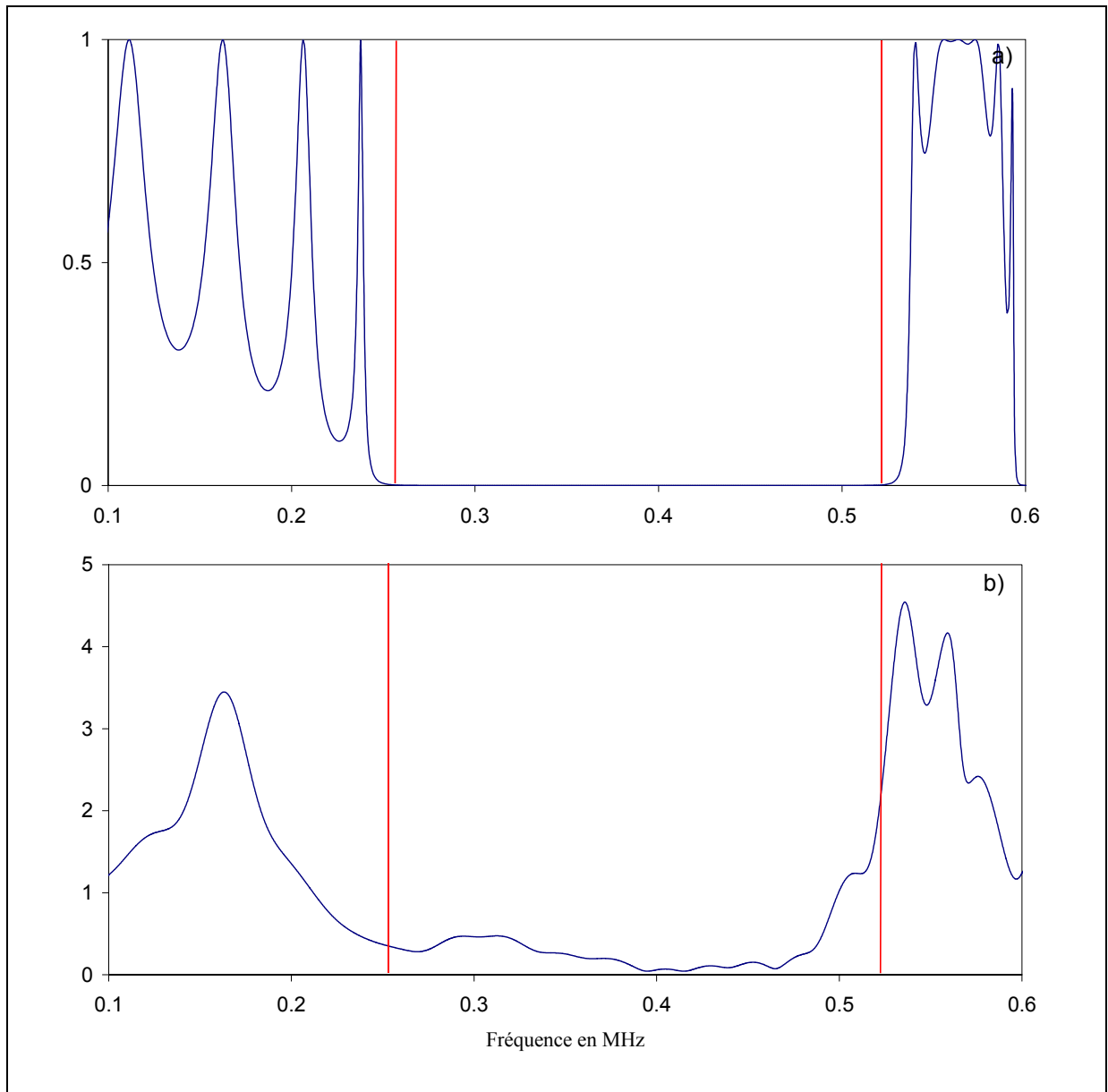


Figure 3.18 : Spectres de transmission du réseau 1.

a) Spectre théorique, b) spectre expérimental.

Pour le réseau 2, l'espacement plus grand entre les réseaux linéaires a pour conséquence l'observation d'un nombre de bandes interdites plus important (nous avons vu en effet que les bandes interdites se forment autour des fréquences telles que  $k_L D = n\pi$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ ). Le réseau est caractérisé par trois bandes interdites pour  $0 \leq f(\text{MHz}) \leq 0,6$  (et une autre aux hautes fréquences mais altérée par la première fréquence de coupure à 0,523 MHz). Les traits rouges verticaux sur les deux spectres repèrent les fréquences délimitant ces trois bandes interdites : 0,095 MHz, 0,187 MHz, 0,242 MHz, 0,352 MHz, 0,406 MHz et 0,470 MHz.

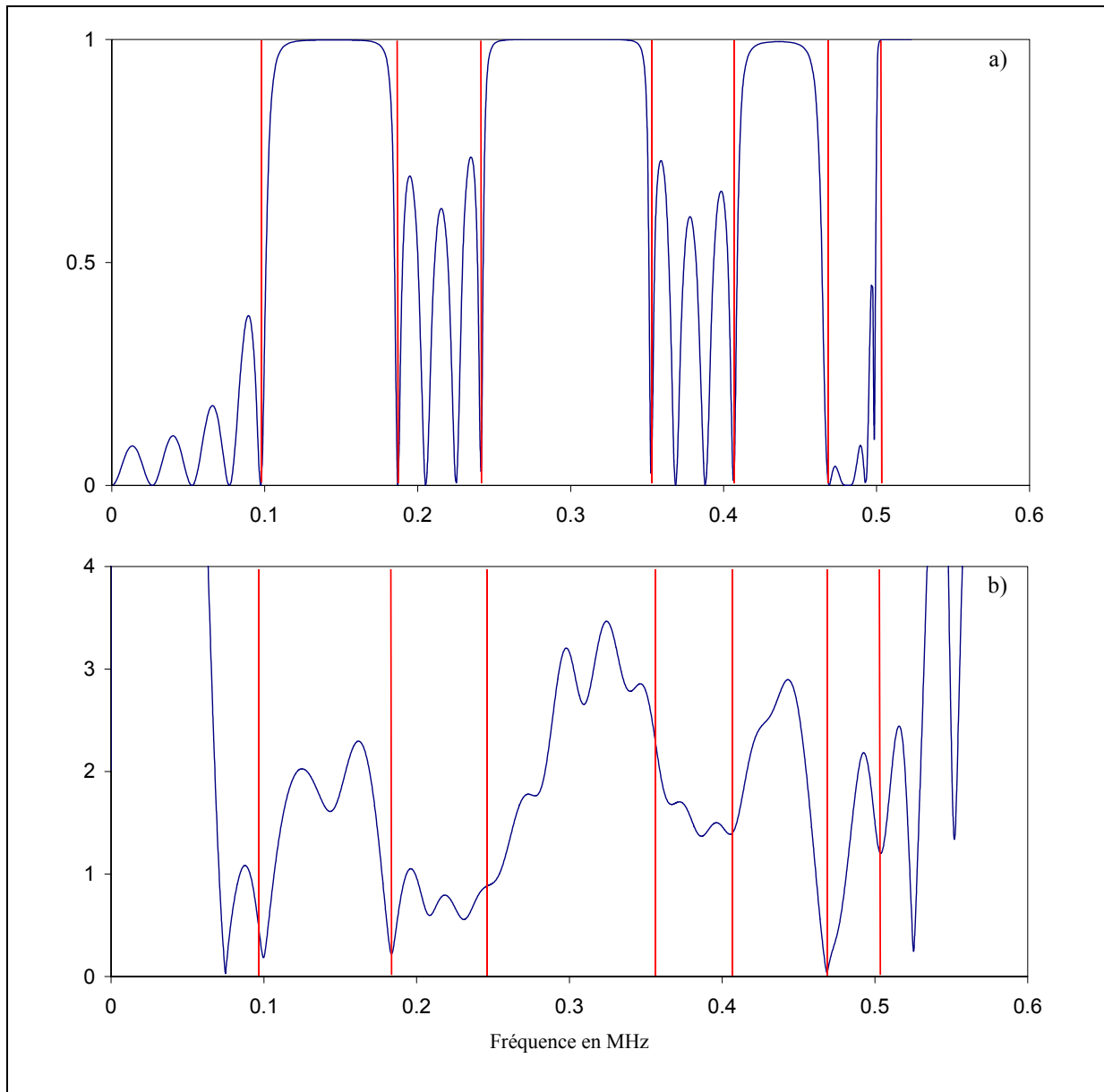


Figure 3.19 : Spectres de réflexion du réseau 2.

a) Spectre théorique, b) spectre expérimental.

Le dernier trait rouge à 0,502 MHz correspond à la frontière de la dernière bande interdite tronquée par la fréquence de coupure. Si l'on compare les domaines fréquentiels d'étude avec la bande passante des transducteurs ( $0,25 \leq f(\text{MHz}) \leq 0,375$ ), on constate que des fréquences à l'extérieur de la bande passante des transducteurs sont explorées. Ceci est à l'origine des fortes amplitudes constatées sur le spectre expérimental de la Figure 3.19. Pour le spectre de la Figure 3.18, cette augmentation d'amplitude n'est pas observable puisque se produisant en deçà de 0,1 MHz et au-delà de 0,6 MHz.

Pour le réseau 1, le spectre expérimental de la Figure 3.18 fait apparaître une bande interdite bien moins dessinée que celle théorique, sans doute en raison de la troncature brutale du signal temporel. La croissance moins rapide du coefficient de transmission à ses frontières fait qu'il devient impossible de définir précisément les deux fréquences la délimitant. Néanmoins, il est clair que, par rapport à celle théorique, cette bande interdite est légèrement décalée vers les hautes fréquences (de l'ordre 50 kHz). Pour le réseau 2 (Figure 3.19), trois bandes interdites peuvent être clairement identifiées même si, ici encore, elles ne sont pas très bien reproduites. Si les fréquences expérimentales délimitant la bande interdite centrale sont difficiles à estimer, celles des deux bandes interdites de part et d'autre concordent parfaitement avec celles théoriques : les minima d'amplitude de part et d'autre de chacune des bandes interdites correspondent en effet aux mêmes fréquences sur les deux spectres. Sur le spectre expérimental, on note que la fréquence de coupure théorique à 0,523 MHz correspond précisément à un minimum d'amplitude.

En définitive, même en coupant aussi brutalement les signaux temporels, ces résultats sont malgré tout en accord avec ceux théoriques. Pour ce qui est de la translation vers les hautes fréquences du spectre expérimental du réseau 1, elle pourrait être la conséquence des imprécisions sur la position des inclusions et sur leur verticalité dans l'échantillon d'aluminium. Ces imprécisions (qui ont déjà été mentionnées dans la partie expérimentale du premier chapitre), doivent modifier légèrement les valeurs des périodes  $D_1$  et  $D_2$ , et par conséquent les positions des bandes interdites de chaque réseau. Si ces imprécisions ont un effet uniquement sur le spectre du réseau 1, c'est parce que la distance entre les réseaux linéaires est relativement faible ( $D_1 = 6$  mm, ce qui correspond à une distance entre les circonférences des inclusions de 1,86 mm). Par contre, l'espacement des réseaux linéaires dans le réseau 2 étant plus important ( $D_2 = 20$  mm, ce qui donne une distance entre les circonférences des inclusions de 15,86 mm), ces imprécisions ne doivent pas influencer significativement sur les positions des bandes interdites.

Avant de clore définitivement ce chapitre, il nous a paru important de faire quelques remarques concernant les conditions d'usinage des différents échantillons. Outre les prix de revient des échantillons d'aluminium à usiner, l'obstacle à la répétitivité des expériences est en effet le temps nécessaire au perçage des réseaux. Les blocs ont été percés au laboratoire même, avec une machine-outil mal adaptée à la réalisation des trous (dans ce type de matériau) avec un rapport longueur/diamètre aussi important. Pour le perçage d'un seul trou, cinq mèches (un « pointeur » et quatre mèches de longueurs différentes) doivent être utilisées afin d'éviter qu'elles ne se rompent à l'intérieur du matériau (auquel cas l'échantillon devient définitivement inutilisable). En outre, pour la même raison, la vitesse de perçage doit être relativement modérée. En définitive, pour la réalisation d'un seul trou, vingt à vingt-cinq minutes sont nécessaires. Plus concrètement, pour le réseau 1 formé de cent deux inclusions, sa réalisation requiert trois à quatre journées de travail. Ce facteur temps a été un obstacle non négligeable pour envisager d'autres expérimentations sur des réseaux avec d'autres configurations géométriques.

## VI. CONCLUSION

La connaissance de la réflexion et de la transmission par un réseau linéaire, périodique et infini a permis l'élaboration d'une méthode de calcul efficace de la réflexion et de la transmission par des réseaux 2-d, périodiques ou non. Cette méthode, reposant sur la décomposition des réseaux 2-d en un nombre fini de réseaux linéaires infinis, permet d'envisager l'étude de réseaux 2-d très divers en mettant en jeu des temps de calcul relativement courts. La seule limitation dans le formalisme est que les réseaux 2-d sont nécessairement périodiques dans une direction de l'espace, précisément dans la direction des réseaux linéaires infinis. Par rapport à des réseaux de cylindres ou de tubes (rigides ou élastiques) immergés dans un fluide, l'étude numérique a mis en évidence de nouveaux résultats. Entre autres, on retiendra la formation systématique de bandes interdites et de bandes passantes lors d'une diffusion résonante, et la présence de domaines fréquentiels de fort couplage entre les ondes longitudinales et transversales liée à la propagation d'ondes guidées entre deux réseaux linéaires finis. Les effets de perturbations de la périodicité dans la direction de propagation des ondes ont également été étudiés. L'une des perturbations consistait à introduire un défaut aléatoire de la position de chaque réseau linéaire autour de leur position initiale de périodicité. En faisant varier la distance limite d'approche entre les réseaux linéaires, c'est-à-dire le degré de désordre dans la direction de propagation des ondes, il a été constaté que les bandes interdites disparaissaient finalement assez tôt lorsque l'on détruit la périodicité. L'étude expérimentale de réseaux 2-d périodiques, malgré les contraintes qu'elle impose intrinsèquement par rapport à la modélisation théorique, a permis de valider certains résultats issus du calcul théorique.

Le chapitre suivant concerne précisément la propagation d'ondes dans des réseaux 2-d avec répartition aléatoire des réseaux linéaires. Par rapport à ce qui a été fait dans ce chapitre, la distribution sera purement aléatoire : les réseaux seront répartis entre deux plans fixes suivant une loi de probabilité uniforme, chacun des réseaux étant libre de se trouver à n'importe quelle position entre ces deux plans puisque aucune distance limite d'approche n'est introduite. Si l'on moyenne sur un certain nombre de réalisations du désordre les champs réfléchis et transmis, des champs réfléchis et transmis non nuls subsistent. Ces champs sont associés à la propagation d'ondes planes, dites cohérentes, dans le milieu aléatoire. Du point de vue de ces ondes cohérentes, le milieu aléatoire hétérogène peut être considéré comme milieu un homogène, dit milieu effectif, pour lequel la détermination des caractéristiques de l'onde cohérente s'y propageant a été l'objet d'un certain nombre de théories. L'objectif principal du prochain

chapitre est alors de comparer les résultats prédits par l'une de ces théories avec ceux obtenus de façon exacte en utilisant la méthode de calcul qui a été exposée ici.



# DIFFUSION PAR UNE DISTRIBUTION ALÉATOIRE DE RÉSEAUX LINÉAIRES : THÉORIE DE TWERSKY

---

---

*L'étude des champs moyens dans un réseau 2-d composé d'une répartition aléatoire de réseaux linéaires fait l'objet de ce dernier chapitre. La distribution choisie est circonscrite entre deux frontières définitivement fixées et n'inclut aucune distance limite d'approche entre les réseaux linéaires. Ce chapitre est organisé en cinq sections. L'introduction de la première section précise le cadre dans lequel s'inscrit ce travail. Dans la deuxième section, les champs moyens réfléchis et transmis sont calculés en effectuant une moyenne statistique sur un grand nombre de réalisations du désordre. Cette section a pour but d'introduire les notions d'onde cohérente et de milieu effectif. La troisième section présente une reformulation de la théorie de Twersky développée originellement pour une distribution aléatoire de diffuseurs (en milieu fluide) dans toutes les directions (distribution aléatoire « isotrope »). Cette théorie a pour objet le calcul du nombre d'onde et de l'amplitude de l'onde cohérente (le champ moyen) se propageant dans le milieu effectif. L'objectif principal, dans la quatrième section, est alors de comparer les résultats prédits par cette théorie avec ceux exacts calculés dans la deuxième section. Les résultats sont ensuite interprétés. En particulier, les effets de l'anisotropie du milieu effectif (due à la périodicité des réseaux linéaires) sont analysés. Le comportement du milieu effectif anisotrope est alors comparé à celui d'un milieu effectif isotrope (résultant d'une distribution aléatoire dans toutes les directions). La conclusion de la dernière section résume les résultats essentiels.*

---

## I. INTRODUCTION

Ce chapitre fait suite à l'étude esquissée dans le dernier chapitre concernant l'effet d'une distribution aléatoire des réseaux linéaires par rapport à une distribution périodique. Ici, ce n'est plus rigoureusement une perturbation de la périodicité dont il s'agit, mais d'une distribution purement aléatoire pour laquelle les positions des réseaux linéaires sont des variables aléatoires indépendantes. La distribution choisie implique donc l'absence de toute distance limite d'approche entre les réseaux linéaires (les inclusions de deux réseaux linéaires consécutifs sont libres de s'interpénétrer). Cette violation du « principe d'exclusion » énoncé dans le précédent chapitre pour le calcul des coefficients de réflexion et de transmission ne doit pas affecter profondément les résultats si la densité de réseaux linéaires est supposée relativement faible (impliquant une faible probabilité pour que les inclusions de deux réseaux linéaires s'interpénètrent). En considérant ce type de distribution aléatoire, l'objectif, dans ce dernier chapitre, est l'étude des champs moyens réfléchis et transmis calculés, en réalisant la moyenne sur un grand nombre de réalisations du désordre.

L'étude de la propagation d'ondes dans un milieu contenant une infinité de diffuseurs répartis aléatoirement fait l'objet des théories des milieux effectifs, ces théories conduisant à la notion d'onde cohérente. La première théorie en date est celle de L. L. Foldy [41] dont la principale contribution est une approximation à l'origine de toute une lignée de théories, dont celle de V. Twersky [42] qui sera celle traitée ici. Cette théorie se distingue d'autres théories comme celle de P. C. Waterman et R. Truel [43] ou celle de J. G. Fikioris et P. C. Waterman [44] en ce qu'elle suppose une plus faible concentration de diffuseurs. Lorsque les concentrations sont trop fortes pour que l'onde cohérente puisse se propager, la propagation de l'intensité incohérente est alors usuellement étudiée [45,46].

---

[41] L. L. Foldy, *The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers*, Phys. Rev. 67, pp. 107-119, 1944.

[42] V. Twersky, *On scattering of waves by random distributions. I. Free-space Scatter formalism*, J. Math. Phys. 3, pp. 700-715, 1962.

[43] [P. C. Waterman et R. Truel, *Multiple scattering of waves*, J. Math. Phys. 2, pp. 512-537, 1961.

[44] J. G. Fikioris et P. C. Waterman, *Multiple scattering of waves. II 'hole corrections' in the scalar case*, J. Math. Phys. 5, pp. 1413-1420, 1964.

[45] D. Sornette, *Acoustic waves in random media*, Acustica 67, Part I : pp. 199-215, Part II : pp. 251-265, Part III : Acustica 68, pp. 15-25, 1989.

[46] A. Tourin, M. Fink et A. Derode, *Multiple scattering of sound*, Waves in random media 10 R31-R60, 2000.

Toutes les théories citées ci-dessus conduisent à la caractérisation de la propagation dans le milieu aléatoire par un nombre d'onde complexe, appelé « nombre d'onde effectif ». Ce nombre d'onde est celui de l'onde plane cohérente se propageant dans le milieu aléatoire qui, vu de cette onde cohérente, est équivalent à un milieu homogène, dit milieu effectif. Lorsque la distribution des diffuseurs est circonscrite dans un espace délimitée par deux plans parallèles (et fixes), le calcul des caractéristiques de l'onde cohérente (vecteur d'onde et amplitude) permet d'aboutir aux coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif, ces coefficients pouvant s'écrire (le plus souvent) formellement comme ceux d'une couche fluide ou d'une plaque élastique, suivant la nature du milieu aléatoire.

En adaptant la théorie de Twersky à une distribution aléatoire de réseaux linéaires en milieu élastique, notre premier objectif est la comparaison des résultats prédits par la théorie avec les résultats « exacts » obtenus par tirages aléatoires sur les positions des réseaux linéaires. La théorie de Twersky, basée sur l'hypothèse d'une faible concentration de diffuseurs, n'inclut aucun principe d'exclusion entre les diffuseurs. Le calcul exact permet, par définition, la prise en compte de ce principe d'exclusion. Par conséquent, en confrontant les résultats issus des deux méthodes de calcul, on pourra juger si la théorie de Twersky reste valide pour décrire la propagation dans les milieux aléatoires sans possibilité d'interpénétration des diffuseurs. Les caractéristiques de la réflexion et de la transmission par le milieu effectif seront ensuite analysées. L'interprétation sera basée, en autres, sur l'analyse de la dispersion et de l'atténuation des ondes cohérentes fournies par la théorie de Twersky.

Pour conclure ce chapitre, l'effet de l'anisotropie du milieu effectif sera étudié, cette anisotropie résultant de la périodicité des réseaux linéaires dans la direction  $Oy$ . Le cas isotrope correspond, lui, à une distribution aléatoire et uniforme dans les directions  $Ox$  et  $Oy$ . Pour identifier clairement l'effet de cette anisotropie, la réflexion et la transmission par le milieu effectif anisotrope seront comparées avec celles caractérisant le cas isotrope. En choisissant pour les deux milieux aléatoires les mêmes densités de diffuseurs dans les directions  $Ox$  et  $Oy$ , la comparaison sera faite pour différents angles d'excitation. Pour une incidence normale, c'est-à-dire dans le cas où l'onde cohérente se propage perpendiculairement aux réseaux linéaires périodiques (ou dans la « direction du désordre »), on peut s'attendre en effet à des comportements proches pour les deux milieux effectifs. Pour des angles d'excitation non nuls, l'onde cohérente possède alors une composante propagative non nulle dans la direction de périodicité. On peut alors s'attendre dans ce cas à ce que la différence de comportement s'accroisse au fur et à mesure que l'angle d'excitation augmente.

## II. ÉTUDE NUMÉRIQUE PRÉLIMINAIRE

Le but de cette section est d'introduire les concepts d'onde cohérente et de milieu effectif. Pour ce faire, considérons un réseau 2-d composé de  $N = 100$  réseaux linéaires tous identiques, chacun étant caractérisé par  $d/a = 3$  avec  $a = 1$  mm. La première fréquence de coupure définissant le domaine d'étude correspond à  $k_L = 1030 \text{ m}^{-1}$ . Les caractéristiques de l'aluminium sont les mêmes que dans les chapitres précédents. Les diffuseurs sont des inclusions d'air. Comme indiqué sur la Figure 4.1, les réseaux linéaires sont aléatoirement répartis le long de l'axe  $Ox$  entre deux frontières fictives en  $x = 0$  et  $x = e$ . Par rapport à la distribution aléatoire du paragraphe IV.2.2 du chapitre précédent, ici, les premier et dernier réseaux ne sont pas fixés (l'origine des phases est alors fixée en  $O$ ) et la variable aléatoire  $x(n, j)$  donnant la position d'un réseau linéaire  $n$  est comprise entre 0 et  $e$  (il ne s'agit donc plus d'une perturbation des positions des réseaux linéaires autour de leur position initiale de périodicité). La couche fictive d'épaisseur  $e$  est excitée par une onde longitudinale et l'on s'intéresse aux champs réfléchis et transmis moyennés sur un grand nombre de réalisations  $j$  du désordre.

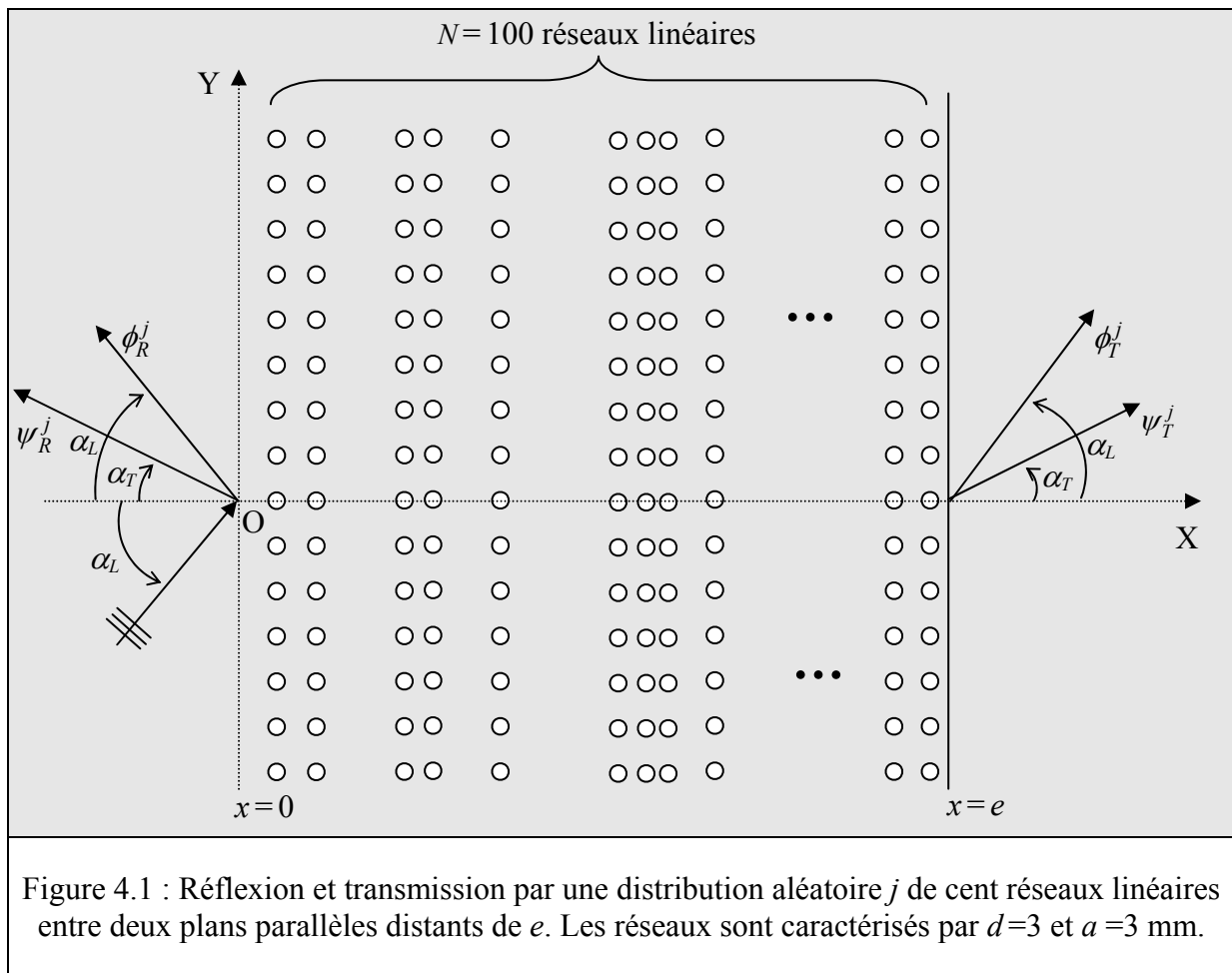


Figure 4.1 : Réflexion et transmission par une distribution aléatoire  $j$  de cent réseaux linéaires entre deux plans parallèles distants de  $e$ . Les réseaux sont caractérisés par  $d=3$  et  $a=3$  mm.

A chaque réalisation, la répartition des réseaux linéaires suit une loi de probabilité uniforme ; la position  $x(n, j)$  d'un réseau linéaire  $n$  est caractérisée par la densité de probabilité  $1/e$ . Par suite, le nombre moyen de réseaux linéaires par unité de longueur s'écrit  $\bar{n} = N/e$ . Aucune distance limite d'approche  $b$  n'étant ici introduite, il y a donc une contradiction avec une hypothèse énoncée dans le dernier chapitre, à savoir que la distance entre deux réseaux linéaires consécutifs ne doit pas être inférieure à  $b=4a$  pour que la contribution des ondes évanescentes issues d'un réseau linéaire soit négligeable vue des réseaux linéaires voisins. Ici, la distribution choisie autorise des distances inférieures à  $b=4a$ , voire même inférieures à  $b=2a$ . En d'autres termes, on autorise les diffuseurs des réseaux à s'interpénétrer. Ainsi, si la densité de réseaux linéaires est particulièrement forte, la probabilité pour que la distance entre deux réseaux linéaires soit inférieure à  $b=4a$  devient importante et le calcul des coefficients de réflexion et de transmission du milieu aléatoire est incorrecte. Pour contourner le problème, la solution consiste à choisir une densité de réseaux relativement faible. Les calculs seront donc menés pour  $e = 1$  m, c'est-à-dire pour une densité  $\bar{n} = 100$  réseaux /m. Cette densité assure une distance moyenne entre les réseaux égale à  $10a$ , soit 10 mm. Dans ce cas, la probabilité pour que la distance entre deux réseaux linéaires consécutifs soit inférieure à  $4a$ , et *a fortiori* à  $b=2a$ , est proche de zéro. La raison pour laquelle une distance limite d'approche n'est pas introduite ici est que la théorie de Twersky exposée dans la prochaine section n'est valable que pour des variables aléatoires  $x(n, j)$  (avec  $1 \leq n \leq N$ ) indépendantes. Les effets de l'introduction d'une distance limite d'approche seront étudiés en fin de chapitre.

La Figure 4.2 présente les résultats obtenus en incidence normale et pour un nombre de réalisations  $j$  égal à 10000. L'onde incidente étant longitudinale, il vient  $\psi_R^j = \psi_T^j = 0$  suite à l'absence de conversion  $L \rightarrow T$  en incidence normale. Les champs cohérents sont alors définis par les moyennes statistiques

$$\langle \phi_R \rangle = \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} \phi_R^j \quad \text{et} \quad \langle \phi_T \rangle = \frac{1}{10000} \sum_{j=1}^{10000} \phi_T^j. \quad (4.1a, b)$$

Les courbes de la Figure 4.2 représentent des intensités. Plus précisément, il s'agit respectivement des intensités totales

$$\langle |\phi_R|^2 \rangle = \langle |R^{LL}|^2 \rangle \quad \text{et} \quad \langle |\phi_T|^2 \rangle = \langle |T^{LL}|^2 \rangle, \quad (4.2a, b)$$

des intensités associées aux champs cohérents

$$\langle |\phi_R\rangle^2 \rangle = \langle |R^{LL}\rangle^2 \rangle \quad \text{et} \quad \langle |\phi_T\rangle^2 \rangle = \langle |T^{LL}\rangle^2 \rangle, \quad (4.3a, b)$$

et des intensités, dites incohérentes, définies par

$$\langle |\phi_{Rf}|^2 \rangle = \langle |R^{LL}|^2 \rangle - \langle |R^{LL}\rangle^2 \rangle \quad \text{et} \quad \langle |\phi_{Tf}|^2 \rangle = \langle |T^{LL}|^2 \rangle - \langle |T^{LL}\rangle^2 \rangle. \quad (4.4a, b)$$

A propos des intensités incohérentes, si on pose

$$\phi_{Rf} = \phi_R - \langle \phi_R \rangle \quad \text{et} \quad \phi_{Tf} = \phi_T - \langle \phi_T \rangle, \quad (4.5a, b)$$

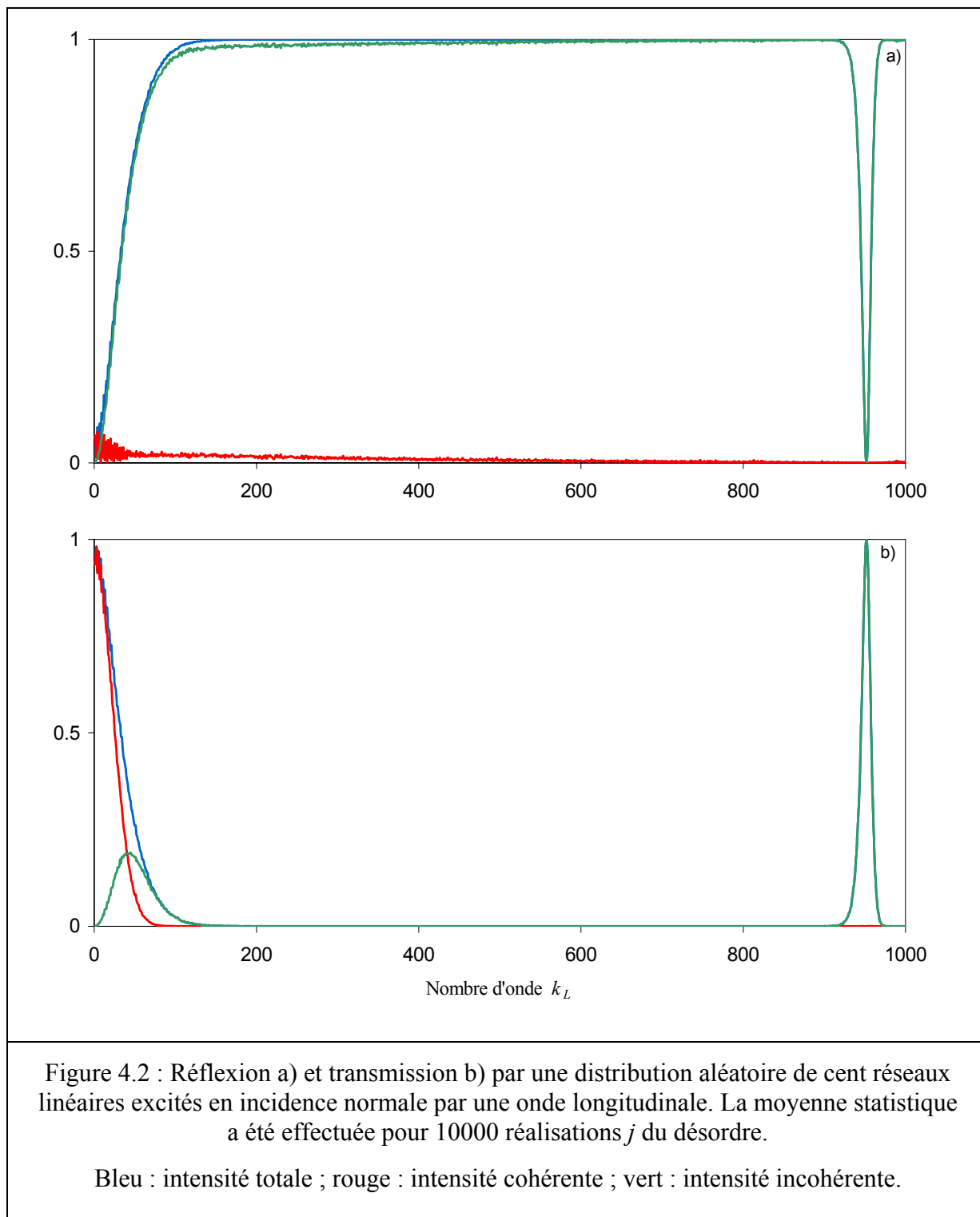
alors il vient

$$\begin{aligned} \langle |\phi_{Rf}|^2 \rangle &= \langle (\phi_R - \langle \phi_R \rangle)(\phi_R - \langle \phi_R \rangle)^* \rangle \\ &= \langle |\phi_R|^2 - \phi_R \langle \phi_R \rangle^* - \langle \phi_R \rangle \phi_R^* + |\langle \phi_R \rangle|^2 \rangle \\ &= \langle |\phi_R|^2 \rangle + \langle |\phi_R\rangle^2 \rangle - 2\langle |\phi_R\rangle^2 \rangle \\ &= \langle |\phi_R|^2 \rangle - \langle |\phi_R\rangle^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Mathématiquement, il est clair ici que les intensités incohérentes représentent les variances des variables aléatoires  $\phi_R$  et  $\phi_T$ ; elles caractérisent donc la dispersion des valeurs des champs  $\phi_R$  et  $\phi_T$  autour des valeurs moyennes  $\langle \phi_R \rangle$  et  $\langle \phi_T \rangle$ . L'intensité incohérente traduit ainsi implicitement le degré de désordre du milieu aléatoire ; plus elle est importante vis-à-vis de l'intensité cohérente, et plus le milieu est désordonné.

Analysons brièvement les résultats de la Figure 4.2 de la page suivante présentant l'évolution en fonction de  $k_L$  des intensités totales, cohérentes et incohérentes (l'analyse sera plus détaillée lors de la comparaison des résultats avec ceux issus par la théorie de Twersky). La complémentarité observée des intensités totales réfléchie et transmise traduit la loi de conservation de l'énergie (leur addition est égale à l'unité). En outre, l'évolution de ces intensités rejoint le résultat du paragraphe IV.2.2 du chapitre précédent, à savoir que les énergies réfléchies et transmises par le milieu aléatoire sont fortement conditionnées par la réflexion et la transmission par un réseau linéaire individuel. Pour des nombres d'onde  $k_L$  compris environ entre  $150 \text{ m}^{-1}$  et  $900 \text{ m}^{-1}$ , le milieu aléatoire ne transmet quasiment plus les vibrations de type longitudinal. Pour ce qui est de la transmission totale localisée à  $k_L = 952 \text{ m}^{-1}$ , nous avons vu dans le chapitre précédent qu'elle était liée à l'annulation des coefficients de réflexion des réseaux linéaires précisément à cette fréquence. Si l'on s'intéresse maintenant aux intensités cohérentes, on constate que, en dehors du domaine des basses fréquences, leurs contributions

sont négligeables vis-à-vis des intensités incohérentes (l'intensité cohérente est rigoureusement nulle en transmission). Les intensités totales sont quasiment identifiables avec celles incohérentes. Conformément à la définition de l'intensité incohérente exposée plus haut, l'importance de cette dernière par rapport à l'intensité cohérente est en accord avec le caractère très désordonné du milieu aléatoire dans la direction  $Ox$ .



Au vu des faibles valeurs de l'intensité cohérente réfléchie, on peut se demander si elle n'est pas la conséquence d'un nombre insuffisant de réalisations du désordre. Sur la Figure 4.3, l'évolution de l'intensité cohérente réfléchie en fonction du nombre de tirages aléatoires effectués contredit cette hypothèse.

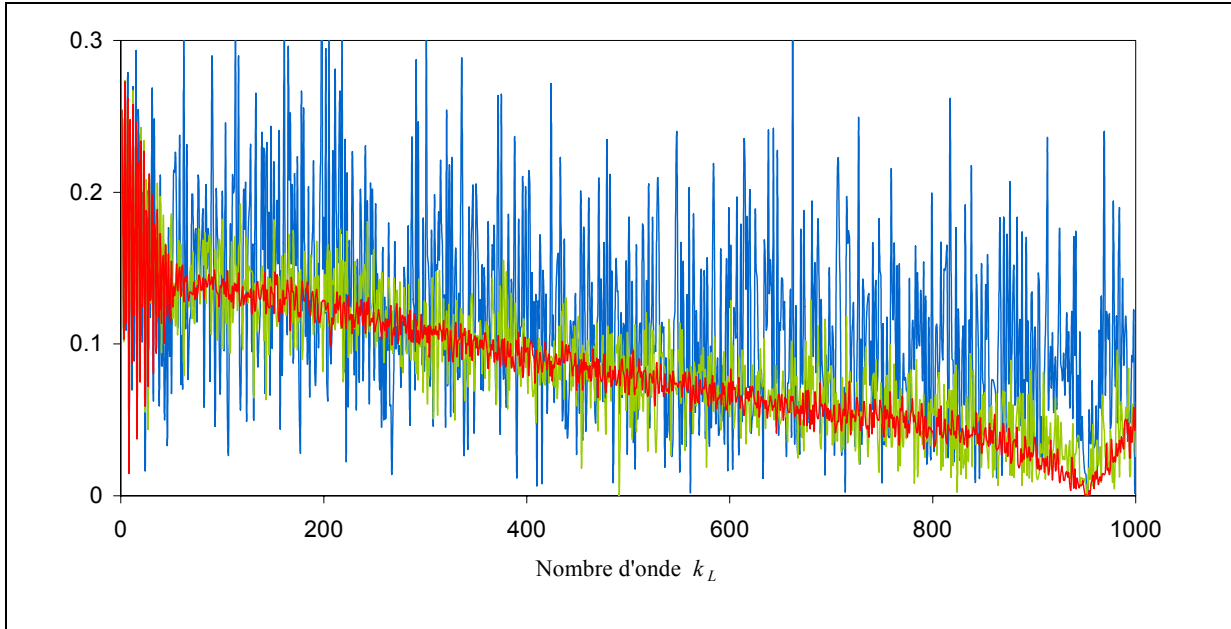


Figure 4.3 : Évolution de  $\langle R^{LL} \rangle$  en augmentant le nombre de tirages aléatoires.  
 Bleu : 100 tirages ; vert : 1000 tirages ; rouge : 10000 tirages.

Par rapport à la Figure 4.2, notons qu'il s'agit de  $|\langle R^{LL} \rangle|$  qui est ici représenté. Il en sera de même jusqu'à la fin de ce chapitre en raison des trop faibles amplitudes de  $|\langle R^{LL} \rangle|^2$ . Les résultats de la Figure 4.3 montrent qu'un nombre de tirages aléatoires égale à 10000 est nettement suffisant pour voir une courbe de tendance se dessiner. Pour un plus grand nombre de tirages (par exemple 50000 tirages), les temps de calcul mis en jeu sont trop importants (*cf.* Annexe 5) sans pour autant donner un lissage très spectaculaire de la courbe. Il est à remarquer que l'annulation des coefficients de réflexion des réseaux linéaires à  $k_L = 952 \text{ m}^{-1}$  se manifeste également sur l'intensité cohérente réfléchie. La deuxième remarque concerne le domaine des basses fréquences représenté sur la Figure 4.4 de la page suivante. Aux basses fréquences,  $|\langle R^{LL} \rangle|$  oscille périodiquement. Les positions des maxima d'amplitude sont approximativement données par  $k_L e = n\pi$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, de même que pour les réseaux 2-d périodiques, ces oscillations semblent résulter d'interférences entre deux ondes planes réfléchies par les deux interfaces de la couche fictive d'épaisseur  $e$ .



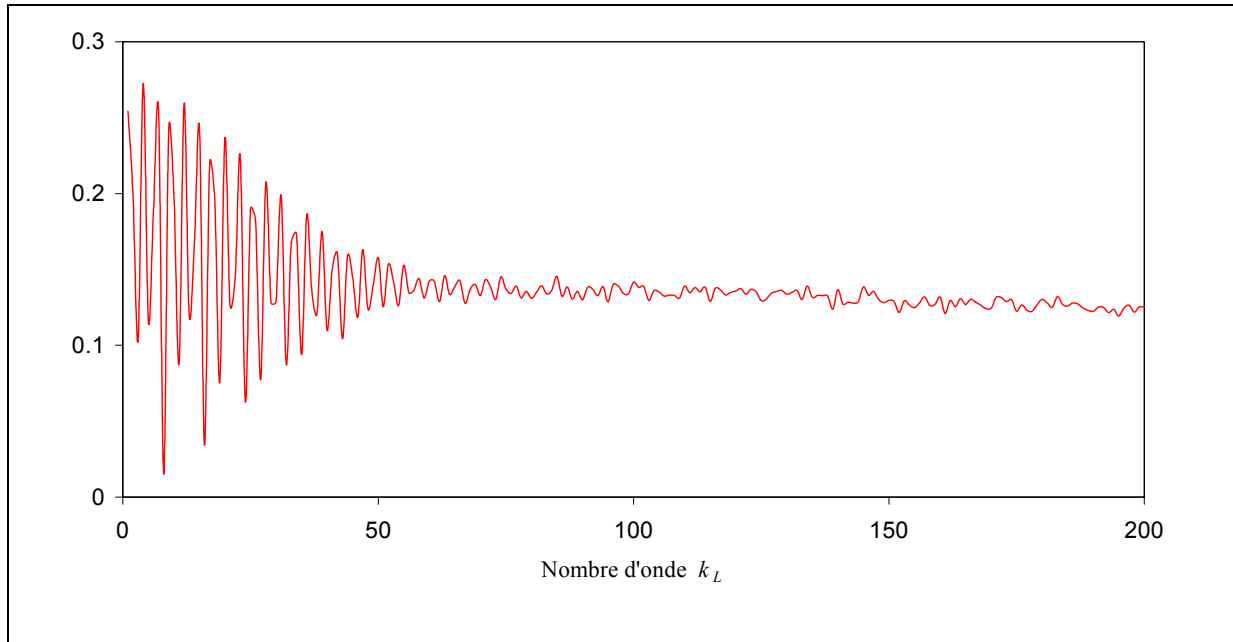


Figure 4.4 : Évolution de  $|\langle R^{LL} \rangle|$  dans le domaine des basses fréquences.

L'observation de ces oscillations de type Fabry-Perot peut s'interpréter en termes de milieu effectif. Ces oscillations suggèrent en effet l'existence d'une onde plane, dite cohérente, se propageant dans le milieu aléatoire. Vu de l'onde cohérente, le milieu hétérogène peut être modélisé par un milieu homogène d'épaisseur  $e$ , dit milieu effectif, présentant un fort caractère dispersif et atténuant. Les interférences entre l'onde cohérente ayant parcouru un aller-retour dans l'épaisseur  $e$  et l'onde incidente réfléchiée par la première interface du milieu effectif sont à l'origine des oscillations observées. La décroissance progressive des amplitudes des oscillations est liée à l'atténuation croissante de l'onde cohérente. Ajoutons que si les positions des maxima d'oscillation sont pratiquement données par  $k_L e = n\pi$ , où  $k_L$  est le nombre d'onde de l'onde incidente, c'est en raison de la faible dispersion de l'onde cohérente aux basses fréquences ( $k_L$  est proche de nombre d'onde de l'onde cohérente).

Pour justifier et compléter ces interprétations, la recherche du nombre d'onde effectif caractérisant la propagation des champs cohérents  $\langle \phi \rangle$  et  $\langle \psi \rangle$  dans le milieu aléatoire est l'objectif de la prochaine section. La connaissance de ces champs moyens permettra également d'accéder aux coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif, et ainsi de les comparer avec ceux calculés ici de façon exacte.

### III. THÉORIE DE TWERSKY APPLIQUÉE A UNE DISTRIBUTION ALÉATOIRE DE RÉSEAUX LINÉAIRES

L'article fondamental sur lequel repose la théorie est celui de V. Twersky [42]. L'établissement du formalisme suit la même progression. Notons cependant que certaines simplifications et clarifications ont été apportées au travail de V. Twersky. Par rapport à ce travail, il s'agit ici de prendre en compte à la fois la géométrie particulière des diffuseurs (pour V. Twersky, les diffuseurs sont de dimensions finies et donc aléatoirement répartis dans toutes les directions de l'espace) et la propagation d'ondes longitudinales et transversales, ainsi que leurs conversions à chaque réflexion et transmission par un réseau linéaire. Pour résoudre pas à pas les difficultés rencontrées, la section sera organisée selon deux paragraphes suivant que l'incidence est normale aux réseaux linéaires (l'absence de conversions entre les ondes longitudinales et les ondes transversales conduit alors à un formalisme « rigoureusement » identique à celui de V. Twersky) ou oblique (ce dernier cas conduisant à quelques remaniements du formalisme en raison du couplage des champs moyens à déterminer).

#### III.1 Introduction du formalisme en incidence normale

##### III.1.1 Équations de Foldy-Twersky des champs moyens

###### *a) Réécriture des équations fondamentales de la diffusion multiple*

La théorie, établie originellement pour des problèmes de diffusion multiple par des diffuseurs aléatoirement répartis dans toutes les directions de l'espace, a pour point de départ les équations fondamentales de la diffusion multiple utilisées dans le premier chapitre pour le calcul de la diffusion par  $N$  inclusions. Appliquées au problème de la diffusion par une distribution de  $N$  réseaux linéaires périodiques, elles restent formellement identiques. La différence essentielle est que, dans notre cas, les diffuseurs diffusent des ondes planes au lieu d'harmoniques cylindriques. La distribution de réseaux linéaires décrite sur la Figure 4.1 est excitée en incidence normale par une onde incidente longitudinale. Chaque réseau  $n$  ( $1 \leq n \leq N$ ) est repéré par  $\vec{r}_n = x_n \hat{x}$ , où  $x_n$  désigne sa position sur l'axe  $Ox$  et  $\hat{x}$  le vecteur unitaire selon cet axe. Le

---

[42] V. Twersky, *On scattering of waves by random distributions. I. Free-space Scatter formalism*, J. Math. Phys. 3, pp. 700-715, 1962.

champ  $\phi(\vec{r})$  au point  $\vec{r} = x\hat{x}$  est la somme de l'onde plane incidente  $\varphi_{inc}(\vec{r})$  et des ondes planes diffusées  $\phi_s(\vec{r}; \vec{r}_n)$  par chaque réseau  $n$ . Ceci s'écrit

$$\phi(\vec{r}) = \varphi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{n=1}^N \phi_s(\vec{r}; \vec{r}_n). \quad (4.7)$$

Conformément à la diffusion multiple par un réseau limité de  $N$  inclusions, le champ  $\phi_s(\vec{r}; \vec{r}_n)$  tient compte, d'une part, de la diffusion simple de l'onde incidente  $\varphi_{inc}(\vec{r})$  par le réseau  $n$ , mais aussi de toutes les interactions entre les réseaux. Ainsi, le champ  $\phi_s(\vec{r}; \vec{r}_n)$  est la somme de tous les trajets acoustiques qui passent par le réseau  $n$  juste avant d'arriver au point d'observation  $\vec{r}$ . Considérons maintenant le champ incident sur le réseau  $n$ , noté  $\phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n)$ , souvent appelé « champ effectif ». Il est composé de la somme de l'onde incidente  $\varphi_{inc}(\vec{r})$  et des ondes planes diffusées par les réseaux autres que le réseau  $n$  lui-même. Ceci se traduit par

$$\phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) = \varphi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{m \neq n} \phi_s(\vec{r}; \vec{r}_m) \quad (4.8)$$

Nous avons vu dans le premier chapitre que les relations (4.7) et (4.8) sont insuffisantes pour déterminer  $\phi(\vec{r})$ . Il faut utiliser une « relation de fermeture ». Cette relation traduit le respect d'une condition indispensable à la résolution du problème de diffusion multiple, à savoir qu'on doit connaître la diffusion par chaque diffuseur pris isolément. La relation de fermeture s'écrit donc

$$\phi_s(\vec{r}; \vec{r}_n) = \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) \quad (4.9)$$

où  $\hat{T}^{LL}(\vec{r}_n)$  est l'opérateur de transition de chaque réseau linéaire. En reportant (4.9) dans (4.7) et (4.8), on obtient les équations fondamentales de la diffusion multiple :

$$\phi(\vec{r}) = \varphi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{n=1}^N \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n), \quad (4.10a)$$

$$\phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) = \varphi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{m \neq n} \hat{T}^{LL}(\vec{r}_m) \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_m). \quad (4.10b)$$

Ici, il faut préciser comment opèrent les opérateurs de transition  $\hat{T}^{LL}(\vec{r}_n)$  dans le cadre de la diffusion par des réseaux linéaires. Avec  $N=1$ , par exemple, l'équation (4.10a) s'écrit

$$\phi(\vec{r}) = \varphi_{inc}(\vec{r}) + \hat{T}^{LL}(\vec{r}_1) \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_1). \quad (4.11)$$

Si  $x < x_1$ , l'opérateur de transition n'est autre que le coefficient de réflexion  $r^{LL}$  défini par (2.82a). Par contre, dans le cas où  $x > x_1$ , il s'écrit nécessairement  $\hat{T}^{LL}(\vec{r}_1) = t^{LL} - 1$ . En effet, pour  $x > x_1$ , le coefficient de transmission  $t^{LL}$  (cf. Equation (2.79a)) vérifie

$$\phi(\vec{r}) = t^{LL} \varphi_{inc}(\vec{r}), \quad (4.12)$$

et comme le champ effectif  $\phi_e(\vec{r}; \vec{r}_1)$  est réduit à l'onde plane incidente (il suffit d'injecter (4.10b) dans (4.10a) pour  $N = 1$ ), le champ  $\phi(\vec{r})$  est donné par

$$\phi(\vec{r}) = \varphi_{inc}(\vec{r}) (1 + \hat{T}^{LL}(\vec{r}_1)). \quad (4.13)$$

En identifiant (4.13) avec (4.12), il vient alors  $\hat{T}^{LL}(\vec{r}_1) = t^{LL} - 1$  où  $t^{LL}$  est défini par (2.83a).

### ***b) Introduction des densités de probabilité***

Considérons maintenant une répartition aléatoire des réseaux, cette répartition étant caractérisée par une densité de probabilité spatiale notée  $p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ . Par suite, le champ moyen  $\langle \phi(\vec{r}) \rangle$  est défini simplement par

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = \int_0^e \phi(\vec{r}; \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) dr_1 \dots dr_N \quad (4.14)$$

où  $\langle \phi(\vec{r}) \rangle$  ne dépend que de  $\vec{r}$ . On aura également besoin de la densité de probabilité conditionnelle

$$p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_n) = p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) / p(\vec{r}_n) \quad (4.15)$$

où la notation « ' » indique l'absence de  $\vec{r}_n$ . La densité de probabilité conditionnelle ainsi définie conduira à introduire d'autres champs moyens, par exemple

$$\langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_m | \vec{r}_n) \rangle = \int_0^e \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_m, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_n) dr_1 \dots dr_N \quad (4.16)$$

où  $\langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_m | \vec{r}_n) \rangle$  ne dépend que de  $\vec{r}$  et  $\vec{r}_n$ . Pour simplifier les écritures, on utilisera la notation suivante

$$\langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_m | \vec{r}_n) \rangle = \langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_m) \rangle_n. \quad (4.17)$$

L'introduction des densités de probabilité conditionnelle, comme nous allons le voir par la suite (cf. Equation (4.18)), permet de faire agir les opérateurs de transition, non pas sur les champs acoustiques, mais sur les champs moyens, ce qui est essentiel pour obtenir l'équation gouvernant le champ moyen. Pour obtenir cette équation, moyennons (4.10a) en utilisant les notations introduites plus haut. Il vient alors, sans approximation,

$$\begin{aligned}
 \langle \phi(\vec{r}) \rangle &= \varphi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{n=1}^N \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \\
 &= \varphi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{n=1}^N \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N | \vec{r}_n) p(\vec{r}_n) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \\
 &= \varphi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{n=1}^N \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \left\{ \int_0^e \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \right\} p(\vec{r}_n) d\vec{r}_n \\
 &= \varphi_{inc}(\vec{r}) + \sum_{n=1}^N \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) \rangle_n p(\vec{r}_n) d\vec{r}_n.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

L'action de l'opérateur de transition  $\hat{T}^{LL}(\vec{r}_n)$  sur le champ effectif  $\phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n)$  a donc été transférée sur le champ effectif moyen  $\langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) \rangle_n$ . En tenant compte maintenant de l'hypothèse que tous les réseaux linéaires sont identiques et indiscernables entre eux, il vient

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = \varphi_{inc}(\vec{r}) + N \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) \rangle_n p(\vec{r}_n) d\vec{r}_n, \tag{4.19}$$

et en posant

$$Np(\vec{r}_n) = \bar{n}(\vec{r}_n) \tag{4.20}$$

on obtient finalement la relation

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = \varphi_{inc}(\vec{r}) + \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) \rangle_n \bar{n}(\vec{r}_n) d\vec{r}_n. \tag{4.21}$$

La relation (4.21) ne permet pas d'obtenir  $\langle \phi(\vec{r}) \rangle$ . C'est précisément ici que L. L. Foldy [41] a introduit une approximation, reprise ensuite par V. Twersky, en autres auteurs. Elle consiste à considérer que

$$\langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) \rangle_n \cong \langle \phi(\vec{r}) \rangle \tag{4.22}$$

de sorte que (4.21) devienne

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = \varphi_{inc}(\vec{r}) + \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \langle \phi(\vec{r}) \rangle \bar{n}(\vec{r}_n) d\vec{r}_n. \tag{4.23}$$

---

[41] L. L. Foldy, *The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers*, Phys. Rev. 67, pp. 107-119, 1944.

Il s'agit de l'équation intégrale de Foldy-Twersky gouvernant le champ moyen  $\langle \phi(\vec{r}) \rangle$ . Evidemment, dans le cas d'une onde incidente transversale, l'équation reste formellement identique. En notant  $\hat{T}^{TT}(\vec{r}_n)$  l'opérateur de transition, elle s'écrit

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle = \psi_{inc}(\vec{r}) + \int_0^e \hat{T}^{TT}(\vec{r}_n) \langle \psi(\vec{r}_n) \rangle \bar{n}(\vec{r}_n) dr_n . \quad (4.24)$$

Pour résoudre ces équations, il suffit de connaître l'action des opérateurs de transition sur les champs moyens. Ici, pour des réseaux linéaires transmettant et réfléchissant des ondes planes, les opérateurs de transition agissent de la même façon que sur les champs acoustiques. Par contre, nous verrons à la fin de cette section que, dans le cas d'une répartition d'inclusions aléatoire dans toutes les directions de l'espace, l'action de l'opérateur de transition d'une inclusion peut être modélisée de plusieurs façons possibles.

Pour ce qui est de l'approximation de L. L. Foldy (4.22), c'est V. Twersky [47] qui en a donné l'interprétation physique la plus claire. Il a montré que l'obtention de (4.23) et (4.24) peut se faire, dans le cas d'une répartition aléatoire dans toutes les directions de l'espace, en négligeant tous les multiples aller-retours des ondes entre les diffuseurs pour ne garder que les trajets directs. En faisant le parallèle avec cette situation, ces équations s'obtiennent ici en négligeant les multiples réflexions et aller-retours entre les réseaux linéaires. L. L. Foldy, pour ce qui le concerne, fait remarquer que  $\langle \phi_e(\vec{r}; \vec{r}_n) \rangle_n$  représente le champ incident sur le diffuseur  $n$ , supposé fixe, quand on effectue une moyenne sur tous les autres diffuseurs. Il suggère alors qu'on ne doit pas faire une erreur significative si on remplace ce champ par le champ moyen existant à l'emplacement du diffuseur  $n$  quand on enlève celui-ci. Cette approximation n'est valable que pour un nombre  $N$  de diffuseurs très important. C'est la raison pour laquelle, dans la section précédente, les calculs ont été menés pour un nombre beaucoup plus important de réseaux linéaires que dans le troisième chapitre, à savoir  $N = 100$ .

### III.1.2 Équations intégrales conduisant au calcul des nombres d'onde effectifs

L'objectif de ce paragraphe est d'établir, à partir de (4.23) et (4.24), les systèmes d'équations intégrales qui conduisent au calcul des nombres d'onde effectifs. En accord avec la

---

[47] V. Twersky, *On propagation in random media of discrete scatterers*, Proceeding of the American Mathematical Society Symposium on Stochastic Process in Mathematical Physics and Engineering 16, pp. 84-116, 1964.

distribution choisie dans la section précédente, la répartition aléatoire des réseaux linéaires est supposée uniforme. Par suite, les équations de Foldy-Twersky deviennent

$$\langle \phi(x) \rangle = e^{ik_L x} + \bar{n} \int_0^e \hat{T}^{LL}(x_n) \langle \phi(x_n) \rangle dx_n, \quad (4.25)$$

$$\langle \psi(x) \rangle = e^{ik_T x} + \bar{n} \int_0^e \hat{T}^{TT}(x_n) \langle \psi(x_n) \rangle dx_n, \quad (4.26)$$

en rappelant que  $\bar{n} = N/e$ . Ici, les incidences étant supposées normales aux réseaux linéaires, il n'y a donc aucune dépendance en  $y$ . Désormais, seule le cas d'une onde incidente longitudinale sera considéré. En notant  $\hat{i}_L$  et  $\hat{i}'_L$  les directions de propagation des ondes longitudinales respectivement dans les directions des  $x$  croissants et des  $x$  décroissants, l'action de l'opérateur  $\hat{T}^{LL}(x_n)$  sur  $\langle \phi(x_n) \rangle$  « mesurée » en un point d'observation situé à l'intérieur du milieu aléatoire ( $0 \leq x \leq e$ ) peut s'écrire

$$\hat{T}^{LL}(x_n) \langle \phi(x_n) \rangle = \begin{cases} \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{ik_L(x-x_n)} & \text{si transmission} \\ \text{ou} & \\ \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{-ik_L(x-x_n)} & \text{si réflexion} \end{cases} \quad (4.27)$$

En reportant (4.27) dans (4.25), cette dernière se décompose naturellement de la façon suivante

$$\langle \phi(x) \rangle = e^{ik_L x} + \bar{n} \int_0^x \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{ik_L(x-x_n)} dx_n + \bar{n} \int_x^e \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{-ik_L(x-x_n)} dx_n, \quad (4.28)$$

ce qui peut encore s'écrire (Equation (4.29))

$$\langle \phi(x) \rangle = e^{ik_L x} \left[ 1 + \bar{n} \int_0^x \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{-ik_L x_n} dx_n \right] + \bar{n} e^{-ik_L x} \int_x^e \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{ik_L x_n} dx_n,$$

soit encore

$$\langle \phi(x) \rangle = \phi_+(0, x) + \phi_-(x, e). \quad (4.30)$$

Le champ moyen est donc la somme de deux champs moyens,  $\phi_+$  et  $\phi_-$ , se propageant dans des directions opposées dans le milieu aléatoire, c'est-à-dire dans les directions  $\hat{i}_L$  et  $\hat{i}'_L$ . Le but est maintenant de définir clairement l'action des opérateurs de transition sur le champ moyen total  $\langle \phi(x_n) \rangle$ , et donc, d'après (4.30), sur les champs  $\phi_+$  et  $\phi_-$  qui le composent. Compte tenu de la linéarité des opérateurs de transition, on a

$$\tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)[\langle \phi(x_n) \rangle] = \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)[\phi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)[\phi_-(x_n, e)] \quad (4.31a)$$

et

$$\tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L)[\langle \phi(x_n) \rangle] = \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L)[\phi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L)[\phi_-(x_n, e)], \quad (4.31b)$$

ces équations pouvant être représentées par les deux schémas de la Figure 4.5.

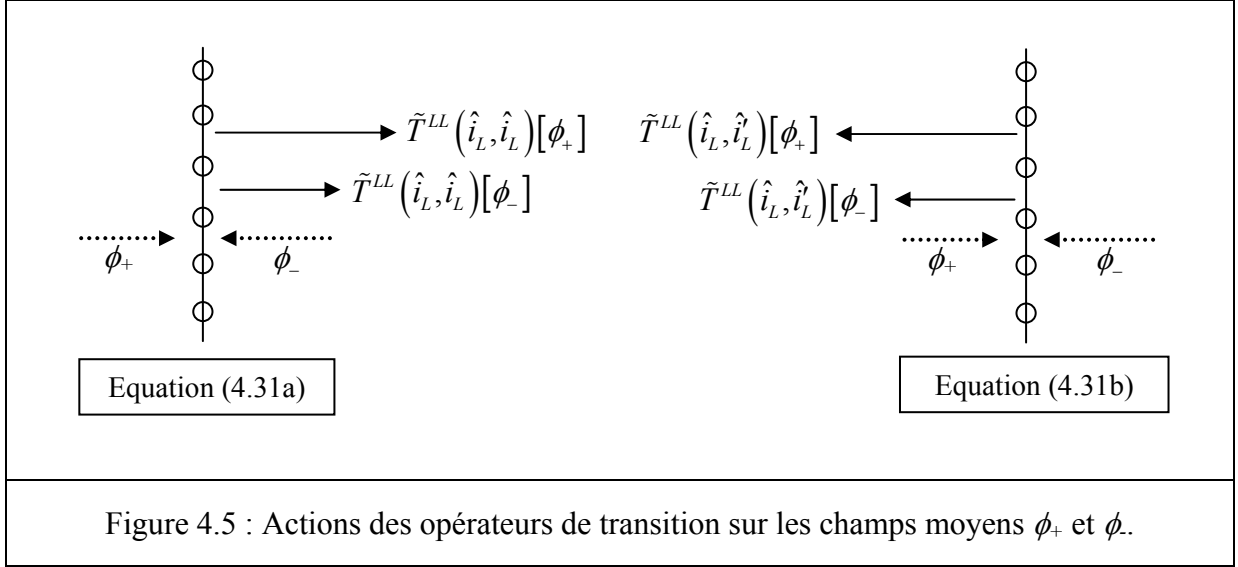


Figure 4.5 : Actions des opérateurs de transition sur les champs moyens  $\phi_+$  et  $\phi_-$ .

Au vu de cette représentation, il convient de poser

$$\tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)[\phi_+] = \tilde{T}_+^{LL} \phi_+, \quad (4.32a)$$

$$\tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)[\phi_-] = \tilde{R}_-^{LL} \phi_-, \quad (4.32b)$$

$$\tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L)[\phi_+] = \tilde{R}_+^{LL} \phi_+, \quad (4.32c)$$

$$\tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L)[\phi_-] = \tilde{T}_-^{LL} \phi_-, \quad (4.32d)$$

avec  $\tilde{R}_\pm^{LL} = r^{LL}$  et  $\tilde{T}_\pm^{LL} = t^{LL} - 1$  où  $r^{LL}$  et  $t^{LL}$  sont les coefficients de réflexion et de transmission du réseau linéaire  $n$ . L'introduction des indices + et - au niveau des opérateurs de transition aura son importance en incidence oblique. Ici, en incidence normale, ces notations ne sont pas utiles. Les actions des opérateurs de transition sur  $\phi_+$  et  $\phi_-$  étant maintenant précisées, il vient

$$\phi_+(0, x) = e^{ik_L x} \left\{ 1 + \bar{n} \int_0^x [\tilde{T}_+^{LL} \phi_+(0, x_n) + \tilde{R}_-^{LL} \phi_-(x_n, e)] e^{-ik_L x_n} dx_n \right\} \quad (4.33a)$$

et

$$\phi_-(x, e) = e^{-ik_L x} \bar{n} \int_x^e [\tilde{R}_+^{LL} \phi_+(0, x_n) + \tilde{T}_-^{LL} \phi_-(x_n, e)] e^{ik_L x_n} dx_n. \quad (4.33b)$$



Pour simplifier les notations, posons  $\bar{T}^{LL} = \bar{n} \tilde{T}^{LL}$  et  $\bar{R}^{LL} = \bar{n} \tilde{R}^{LL}$ . Finalement, le système d'équations intégrales cherché s'écrit

$$\begin{cases} \phi_+(0, x) = e^{ik_L x} \left\{ 1 + \int_0^x [\bar{T}^{LL} \phi_+(0, x_n) + \bar{R}^{LL} \phi_-(x_n, e)] e^{-ik_L x_n} dx_n \right\} \\ \phi_-(x, e) = e^{-ik_L x} \int_x^e [\bar{R}^{LL} \phi_+(0, x_n) + \bar{T}^{LL} \phi_-(x_n, e)] e^{ik_L x_n} dx_n \end{cases} \quad (4.34)$$

Pour trouver la forme générale des solutions  $\phi_+$  et  $\phi_-$ , l'idée consiste à dériver par rapport à  $x$  les équations de (4.34) dans le but d'obtenir un système de deux équations différentielles. La dérivée première conduit à

$$\begin{cases} \phi'_+(0, x) = ik_L \phi_+(0, x) + \bar{T}^{LL} \phi_+(0, x) + \bar{R}^{LL} \phi_-(x, e) \\ \phi'_-(x, e) = -ik_L \phi_-(x, e) - \bar{R}^{LL} \phi_+(0, x) - \bar{T}^{LL} \phi_-(x, e). \end{cases} \quad (4.35)$$

En accord avec V. Twersky, posons alors

$$S^{LL} = ik_L + \bar{T}^{LL}, \quad (4.36)$$

ce qui permet de récrire le système (4.34) sous la forme

$$\begin{cases} \phi'_+ = S^{LL} \phi_+ + \bar{R}^{LL} \phi_- \\ \phi'_- = -S^{LL} \phi_- - \bar{R}^{LL} \phi_+. \end{cases} \quad (4.37)$$

En dérivant une seconde fois (4.34), on obtient

$$\begin{cases} \phi''_+ = S^{LL} \phi'_+ + \bar{R}^{LL} \phi'_- \\ \phi''_- = -S^{LL} \phi'_- - \bar{R}^{LL} \phi'_+ \end{cases} \quad (4.38)$$

qui est un système qu'on peut facilement découpler en utilisant (4.37). Tous calculs faits, on obtient en définitive

$$\phi''_{\pm} + (\bar{R}^{LL^2} - S^{LL^2}) \phi_{\pm} = 0. \quad (4.39)$$

Cette équation est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants dont on cherche classiquement une solution sous la forme

$$\phi_{\pm} = A_{L\pm} e^{i\Gamma_L x} + B_{L\pm} e^{-i\Gamma_L x}, \quad (4.40)$$

où le nombre d'onde complexe  $\Gamma_L$  s'interprète physiquement comme le nombre d'onde effectif par rapport à une propagation suivant Ox. La forme (4.40) des solutions cherchées est assez paradoxale : les champs  $\phi_+$  et  $\phi_-$  s'interprètent comme des champs acoustiques qui se propagent respectivement suivant  $\hat{i}_L$  et  $\hat{i}'_L$  par rapport au nombre d'onde  $k_L$ , alors qu'ils se propagent tous les deux suivant  $\hat{i}_L$  et  $\hat{i}'_L$  par rapport au nombre d'onde effectif  $\Gamma_L$ . Il n'y a pas d'explication réellement convaincante de ce paradoxe dans la littérature. Indiquons seulement que le fait de chercher la solution de (4.34) sous la forme (4.40) est mathématiquement parfaitement fondé. Enfin, remarquons que, en injectant (4.40) dans (4.39), on obtient sans difficulté

$$\left[ -\Gamma_L^2 + R^{LL^2} - S^{LL^2} \right] A_{L\pm} e^{i\Gamma_L x} + \left[ -\Gamma_L^2 + R^{LL^2} - S^{LL^2} \right] B_{L\pm} e^{-i\Gamma_L x} = 0, \quad (4.41)$$

ce qui est vrai quel que soit  $x$ , donc

$$-\Gamma_L^2 + \bar{R}^{LL^2} - S^{LL^2} = 0. \quad (4.42)$$

Finalement, le nombre d'onde effectif cherché est donné simplement par

$$\Gamma_L = \left[ \bar{R}^{LL^2} - S^{LL^2} \right]^{1/2}. \quad (4.43)$$

Pour une onde incidente transversale, il suffit évidemment de remplacer chaque indice ou exposant  $L$  par  $T$ .

### III.1.3 Calcul des coefficients de réflexion et de transmission

Pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission, il reste à déterminer complètement les champs moyens  $\phi_+$  et  $\phi_-$ , c'est-à-dire les quatre amplitudes  $A_{L+}$ ,  $A_{L-}$ ,  $B_{L+}$  et  $B_{L-}$ . Il s'agit alors de trouver quatre équations. L'idée est d'injecter les solutions (4.40) dans les équations différentielles du premier ordre (4.37). Ceci conduit à

$$\begin{cases} i\Gamma_L A_{L+} e^{i\Gamma_L x} - i\Gamma_L B_{L+} e^{i\Gamma_L x} = S^{LL} A_{L+} e^{i\Gamma_L x} + S^{LL} B_{L+} e^{i\Gamma_L x} + \bar{R}^{LL} A_{L-} e^{i\Gamma_L x} + \bar{R}^{LL} B_{L-} e^{i\Gamma_L x} \\ i\Gamma_L A_{L-} e^{i\Gamma_L x} - i\Gamma_L B_{L-} e^{i\Gamma_L x} = -S^{LL} A_{L-} e^{i\Gamma_L x} - S^{LL} B_{L-} e^{i\Gamma_L x} - \bar{R}^{LL} A_{L+} e^{i\Gamma_L x} - \bar{R}^{LL} B_{L+} e^{i\Gamma_L x} \end{cases} \quad (4.44)$$

soit

$$\begin{cases} \left[ (i\Gamma_L - S^{LL})A_{L+} - \bar{R}^{LL}A_{L-} \right] e^{i\Gamma_L x} + \left[ (-i\Gamma_L - S^{LL})B_{L+} - \bar{R}^{LL}B_{L-} \right] e^{-i\Gamma_L x} = 0 \\ \left[ (i\Gamma_L + S^{LL})A_{L-} + \bar{R}^{LL}A_{L+} \right] e^{i\Gamma_L x} + \left[ (-i\Gamma_L + S^{LL})B_{L-} + \bar{R}^{LL}B_{L+} \right] e^{-i\Gamma_L x} = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

L'annulation des facteurs des termes propagatifs fournit alors les systèmes homogènes

$$\begin{bmatrix} i\Gamma_L - S^{LL} & -\bar{R}^{LL} \\ \bar{R}^{LL} & i\Gamma_L + S^{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{L+} \\ A_{L-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

et

$$\begin{bmatrix} -i\Gamma_L - S^{LL} & -\bar{R}^{LL} \\ \bar{R}^{LL} & -i\Gamma_L + S^{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{L+} \\ B_{L-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Ces deux systèmes ont des solutions non nulles si les déterminants associés sont nuls. Il est alors facile de vérifier que l'annulation des déterminants conduit à écrire (4.42). Ceci montre qu'il n'est donc pas indispensable de dériver deux fois les équations du système (4.34) pour le calcul du nombre d'onde effectif  $\Gamma_L$ . L'intérêt de cette dérivée seconde est de fournir la forme des solutions cherchées. Les deux systèmes ci-dessus donnent deux des quatre équations cherchées, à savoir

$$\left[ i\Gamma_L - S^{LL} \right] A_{L+} = \bar{R}^{LL} A_{L-} \quad (4.48a)$$

et

$$\left[ -i\Gamma_L - S^{LL} \right] B_{L+} = \bar{R}^{LL} B_{L-}. \quad (4.48b)$$

Il reste donc deux équations manquantes. Elles proviennent directement du système (4.34), car

$$\phi_+(0, x=0) = 1 \quad (4.49a)$$

et

$$\phi_-(x=e, e) = 0. \quad (4.49b)$$

D'après (4.40), elles s'écrivent plus précisément

$$A_{L+} + B_{L+} = 1 \quad (4.50a)$$

et

$$A_{L-} e^{i\Gamma_L e} + B_{L-} e^{-i\Gamma_L e} = 0. \quad (4.50b)$$

Pour ce qui concerne les équations (4.49a) et (4.49b), V. Twersky en donne les interprétations suivantes : la première traduit l'annulation de l'onde incidente à l'entrée du milieu aléatoire, et la seconde l'annulation de la réflexion de l'onde incidente sur l'interface  $x = e$ . Autrement dit, il n'y a plus de propagation d'ondes dans le milieu aléatoire avec le nombre d'onde  $k_L$ . Il faut souligner qu'il existe une deuxième méthode pour le calcul des solutions (4.40). Elle consiste à injecter directement les solutions de la forme (4.40) dans les équations intégrales (4.34). Par suite, l'annulation de la propagation en  $\Gamma_L$  et  $-\Gamma_L$ , correspondant à la *loi de Lorentz-Lorenz*, fournit les systèmes d'équations (4.46) et (4.47). L'annulation de la propagation en  $k_L$  et  $-k_L$  correspond au *théorème d'extinction* et fournit, à l'aide de la loi de Lorentz-Lorenz, les équations (4.50a) et (4.50b). Cette méthode sera celle utilisée en incidence oblique puisque la méthode basée sur les équations différentielles échoue dans ce cas. Disposant maintenant de quatre équations, déterminons les amplitudes  $A_{L+}$ ,  $A_{L-}$ ,  $B_{L+}$  et  $B_{L-}$ . En partant des équations (4.48a) et (4.48b), on montre que

$$A_{L-} = -Q^{LL} A_{L+} \quad \text{et} \quad B_{L-} = -\frac{1}{Q^{LL}} B_{L+} \quad (4.51a, b)$$

en ayant posé

$$Q^{LL} = \frac{S^{LL} - i\Gamma_L}{\bar{R}^{LL}}. \quad (4.52)$$

Pour calculer en premier les amplitudes  $A_{L+}$  et  $B_{L+}$ , par exemple, il suffit de reporter (4.48a) et (4.48b) dans (4.50b). Celle-ci forme avec (4.50a) un système de deux équations linéaires à deux inconnues qu'on peut résoudre facilement. Il reste ensuite à utiliser (4.51a, b) pour en déduire les amplitudes  $A_{L-}$  et  $B_{L-}$ . Finalement, tous calculs faits, il vient

$$\phi_+(0, x) = \frac{1}{1 - Q^{LL^2} e^{2i\Gamma_L e}} \left[ e^{i\Gamma_L x} - Q^{LL^2} e^{2i\Gamma_L e} e^{-i\Gamma_L x} \right] \quad (4.53)$$

et

$$\phi_-(x, e) = \frac{-Q^{LL}}{1 - Q^{LL^2} e^{2i\Gamma_L e}} \left[ e^{i\Gamma_L x} - e^{2i\Gamma_L e} e^{-i\Gamma_L x} \right]. \quad (4.54)$$

Le champ moyen  $\phi_+$  étant un champ propagatif dans la direction  $\hat{i}_L$  de l'onde incidente, le champ moyen transmis en  $x \geq e$  par le milieu effectif est donc directement lié à  $\phi_+$  de la façon suivante

$$\phi_T(x) = \phi_+(0, e) e^{-ik_L e} e^{ik_L x} = \frac{(1 - Q^{LL^2}) e^{i(\Gamma_L - k_L)e}}{1 - Q^{LL^2} e^{2i\Gamma_L e}} e^{ik_L x}, \quad (4.55)$$

où le terme  $e^{-ik_L e}$  exprime le fait que l'origine des phases a été choisie arbitrairement en O. Le champ réfléchi par le milieu effectif en  $x \leq 0$  est pour sa part lié à  $\phi$  comme suit

$$\phi_R(x) = \phi_-(0, e) e^{-ik_L x} = \frac{-Q^{LL} (1 - e^{2i\Gamma_L e})}{1 - Q^{LL^2} e^{2i\Gamma_L e}} e^{-ik_L x}. \quad (4.56)$$

Par suite, les coefficients de transmission et de réflexion du milieu effectif s'écrivent

$$T_{eff}^{LL} = \frac{(1 - Q^{LL^2}) e^{i(\Gamma_L - k_L)e}}{1 - Q^{LL^2} e^{2i\Gamma_L e}} \quad (4.57)$$

et

$$R_{eff}^{LL} = \frac{-Q^{LL} (1 - e^{2i\Gamma_L e})}{1 - Q^{LL^2} e^{2i\Gamma_L e}}. \quad (4.58)$$

Ces coefficients peuvent être réécrits différemment en posant

$$\tau^{LL} = \frac{1 - Q^{LL}}{1 + Q^{LL}} = \frac{\bar{R}^{LL} - S^{LL} + i\Gamma_L}{\bar{R}^{LL} + S^{LL} - i\Gamma_L}. \quad (4.59)$$

Il vient alors

$$Q^{LL} = \frac{1 - \tau^{LL}}{1 + \tau^{LL}} \quad \text{et} \quad 1 - Q^{LL^2} = \frac{4\tau^{LL}}{(1 + \tau^{LL})^2}, \quad (4.60a, b)$$

de sorte que  $T_{eff}^{LL}$  et  $R_{eff}^{LL}$  deviennent

$$T_{eff}^{LL} = \frac{4\tau^{LL} e^{i(\Gamma_L - k_L)e}}{(\tau^{LL} + 1)^2 + (1 - \tau^{LL})^2 e^{2i\Gamma_L e}}, \quad (4.61)$$

$$R_{eff}^{LL} = \frac{(\tau^{LL^2} - 1) + (1 - \tau^{LL^2}) e^{2i\Gamma_L e}}{(\tau^{LL} + 1)^2 + (1 - \tau^{LL})^2 e^{2i\Gamma_L e}}. \quad (4.62)$$

Ces coefficients de réflexion et de transmission sont formellement identiques à ceux exprimant la réflexion/transmission par une couche fluide dans milieu fluide où  $\tau^{LL}$ , dans ce cas, a l'interprétation d'un rapport d'impédance entre le milieu effectif et le milieu extérieur. La deuxième remarque est que le passage à l'interface plane solide/solide peut se faire simplement par passage à la limite quand  $e$  tend vers l'infini. En effet

$$\lim_{e \rightarrow +\infty} R_{eff}^{LL} = \frac{\tau^{LL} - 1}{\tau^{LL} + 1} \quad \text{et} \quad \lim_{e \rightarrow +\infty} T_{eff}^{LL} = 0, \quad (4.63a, b)$$

car  $\lim_{e \rightarrow +\infty} e^{i\Gamma_L e} = 0$  du fait que  $\Im m(\Gamma_L) > 0$ . Par ce passage à la limite, on retrouve l'expression du coefficient de réflexion d'une interface plane de type fluide/fluide. Ce résultat suggère qu'on peut définir les coefficients de réflexion et de transmission d'une interface plane entre le milieu effectif (milieu 1) et le milieu élastique homogène (milieu 2). Si le milieu d'excitation de l'interface est le milieu 2, alors

$$R_{2/1}^{LL} = \frac{\tau^{LL} - 1}{\tau^{LL} + 1} \quad \text{et} \quad T_{2/1}^{LL} = \frac{2\tau^{LL}}{\tau^{LL} + 1}. \quad (4.64a, b)$$

Lorsque le milieu d'excitation est le milieu 1, alors

$$R_{1/2}^{LL} = \frac{1 - \tau^{LL}}{1 + \tau^{LL}} \quad \text{et} \quad T_{1/2}^{LL} = \frac{2}{1 + \tau^{LL}}. \quad (4.65a, b)$$

Ces résultats seront utilisés pour l'interprétation de la réflexion/transmission par le milieu effectif en termes de séries de Debye décrivant les multiples aller-retours des ondes cohérentes dans l'épaisseur  $e$ .

## III.2 Généralisation du formalisme à une incidence oblique

### III.2.1 Réécriture des équations de Foldy-Twersky des champs moyens

Pour un angle d'incidence  $\alpha_L$  non nul, le premier réseau linéaire transmet (et réfléchit) une onde plane longitudinale sous l'angle  $\alpha_L$  et une onde plane transversale sous un angle  $\alpha_T$ , en rappelant que ces deux angles sont liés par la loi de Snell-Descartes (2.12). En raison de ces conversions, les deux champs moyens  $\langle \phi \rangle$  et  $\langle \psi \rangle$  coexistent et sont nécessairement couplés. Ce couplage se traduit dans les équations de Foldy-Twersky (4.23) et (4.24) par

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{r}} + \bar{n} \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \langle \phi(\vec{r}_n) \rangle dx_n + \bar{n} \int_0^e \hat{T}^{TL}(\vec{r}_n) \langle \psi(\vec{r}_n) \rangle dx_n, \quad (4.66)$$

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle = \bar{n} \int_0^e \hat{T}^{TT}(\vec{r}_n) \langle \psi(\vec{r}_n) \rangle dx_n + \bar{n} \int_0^e \hat{T}^{LT}(\vec{r}_n) \langle \phi(\vec{r}_n) \rangle dx_n, \quad (4.67)$$

avec  $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$  et  $\vec{r}_n = x_n \hat{x} + y_n \hat{y}$  ( $x_n$  désigne la position du réseau linéaire  $n$ ) Compte tenu de l'invariance du problème considéré par rapport à la variable  $y$ , il s'ensuit que

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = e^{ik_L y \sin \alpha_L} \langle \phi(x) \rangle \quad \text{et} \quad \langle \phi(\vec{r}_n) \rangle = e^{ik_L y_n \sin \alpha_L} \langle \phi(x_n) \rangle \quad (4.68a, b)$$

ainsi que

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle = e^{ik_L y \sin \alpha_L} \langle \psi(x) \rangle \quad \text{et} \quad \langle \psi(\vec{r}_n) \rangle = e^{ik_L y_n \sin \alpha_L} \langle \psi(x_n) \rangle \quad (4.69a, b)$$

(la relation de Snell-Descartes ayant été prise en compte pour écrire (4.69a, b)). Compte tenu de cette invariance, les équations intégrales (4.66) et (4.67) s'écrivent

$$\langle \phi(x) \rangle = e^{ik_L x \cos \alpha_L} + \bar{n} e^{ik_L (y_n - y) \sin \alpha_L} \left[ \int_0^e \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \langle \phi(x_n) \rangle dx_n + \int_0^e \hat{T}^{TL}(\vec{r}_n) \langle \psi(x_n) \rangle dx_n \right], \quad (4.70)$$

$$\langle \psi(x) \rangle = \bar{n} e^{ik_L (y_n - y) \sin \alpha_L} \left[ \int_0^e \hat{T}^{TT}(\vec{r}_n) \langle \psi(x_n) \rangle dx_n + \int_0^e \hat{T}^{LT}(\vec{r}_n) \langle \phi(x_n) \rangle dx_n \right]. \quad (4.71)$$

Par rapport à une incidence normale, ici, il y a quatre directions de propagation :  $\hat{i}_L$ ,  $\hat{i}'_L$ ,  $\hat{i}_T$  et  $\hat{i}'_T$ . Ces quatre directions correspondent respectivement aux angles  $\alpha_L$ ,  $\pi - \alpha_L$ ,  $\alpha_T$  et  $\pi - \alpha_T$ . Ceci étant précisé, explicitons à titre d'exemple l'action de l'opérateur  $\hat{T}^{TL}(\vec{r}_n)$  sur le champ moyen  $\langle \psi(x_n) \rangle$ . En comparant avec (4.27), elle doit s'écrire (Equation (4.72))

$$\hat{T}^{TL}(\vec{r}_n) \langle \psi(x_n) \rangle = \begin{cases} \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\langle \psi(x_n) \rangle] e^{ik_L (y - y_n) \sin \alpha_L} e^{ik_L (x - x_n) \cos \alpha_L} & \text{si transmission } T \rightarrow L \\ \text{ou} \\ \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_T, \hat{i}'_L) [\langle \psi(x_n) \rangle] e^{ik_L (y - y_n) \sin \alpha_L} e^{-ik_L (x - x_n) \cos \alpha_L} & \text{si réflexion } T \rightarrow L \end{cases}$$

En explicitant de la même façon l'action de chacun des opérateurs dans (4.70) et (4.71), il est facile de vérifier d'une part que

$$\langle \phi(x) \rangle = \phi_+(0, x) + \phi_-(x, e) \quad (4.73)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_+(0, x) &= e^{i\gamma_L x} \left( 1 + \bar{n} \int_0^x \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \right) \\ &+ e^{i\gamma_L x} \bar{n} \int_0^x \tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\langle \psi(x_n) \rangle] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \end{aligned} \quad (4.74)$$

et

$$\begin{aligned} \phi_-(x, e) &= e^{-i\gamma_L x} \bar{n} \int_x^e \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{i\gamma_L x_n} dx_n \\ &+ e^{-i\gamma_L x} \bar{n} \int_x^e \tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}'_L) [\langle \psi(x_n) \rangle] e^{i\gamma_L x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.75)$$

et d'autre part que

$$\langle \psi(x) \rangle = \psi_+(0, x) + \psi_-(x, e) \quad (4.76)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_+(0, x) &= e^{i\gamma_T x} \bar{n} \int_0^x \tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T) [\langle \psi(x_n) \rangle] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n \\ &+ e^{i\gamma_T x} \bar{n} \int_0^x \tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n \end{aligned} \quad (4.77)$$

et

$$\begin{aligned} \psi_-(x, e) &= e^{-i\gamma_T x} \bar{n} \int_x^e \tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T) [\langle \psi(x_n) \rangle] e^{i\gamma_T x_n} dx_n \\ &+ e^{-i\gamma_T x} \bar{n} \int_x^e \tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{i\gamma_T x_n} dx_n. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Pour alléger les écritures, les notations

$$\gamma_{L,T} = k_{L,T} \cos \alpha_{L,T} \quad (4.79)$$

ont été ici introduites. En décomposant  $\langle \phi(x_n) \rangle$  et  $\langle \psi(x_n) \rangle$  dans les deux équations intégrales (4.74) et (4.75), celles-ci deviennent

$$\begin{aligned} \phi_+(0, x) &= e^{i\gamma_L x} \left( 1 + \bar{n} \int_0^x \left\{ \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\phi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\phi_-(x_n, e)] \right\} e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \right) \\ &+ e^{i\gamma_L x} \bar{n} \int_0^x \left\{ \tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\psi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\psi_-(x_n, e)] \right\} e^{-i\gamma_L x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned} \phi_-(x, e) &= e^{-i\gamma_L x} \bar{n} \int_x^e \left\{ \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\phi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\phi_-(x_n, e)] \right\} e^{i\gamma_L x_n} dx_n \\ &+ e^{-i\gamma_L x} \bar{n} \int_x^e \left\{ \tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\psi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\psi_-(x_n, e)] \right\} e^{i\gamma_L x_n} dx_n. \end{aligned} \quad (4.81)$$

En procédant de la même façon pour (4.77) et (4.78), on obtient

$$\begin{aligned} \psi_+(0, x) &= e^{i\gamma_T x} \bar{n} \int_0^x \left\{ \tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T) [\psi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T) [\psi_-(x_n, e)] \right\} e^{-i\gamma_T x_n} dx_n \\ &+ e^{i\gamma_T x} \bar{n} \int_0^x \left\{ \tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) [\phi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) [\phi_-(x_n, e)] \right\} e^{-i\gamma_T x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \psi_-(x, e) &= e^{-i\gamma_T x} \bar{n} \int_x^e \left\{ \tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T) [\psi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T) [\psi_-(x_n, e)] \right\} e^{i\gamma_T x_n} dx_n \\ &+ e^{-i\gamma_T x} \bar{n} \int_x^e \left\{ \tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) [\phi_+(0, x_n)] + \tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) [\phi_-(x_n, e)] \right\} e^{i\gamma_T x_n} dx_n. \end{aligned} \quad (4.83)$$



Maintenant, il faut préciser l'action de chacun des opérateurs sur les champs moyens  $\phi_+$ ,  $\phi_-$ ,  $\psi_+$  et  $\psi_-$ . En représentant leurs actions comme sur la Figure 4.5, on aboutit à (4.32a), (4.32b), (4.32c) et (4.32d), ainsi qu'à

$$\tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T)[\psi_+] = \tilde{T}_+^{TT} \psi_+, \quad (4.84a)$$

$$\tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T)[\psi_-] = \tilde{R}_-^{TT} \psi_-, \quad (4.84b)$$

$$\tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T')[\psi_+] = \tilde{R}_+^{TT} \psi_+, \quad (4.84c)$$

$$\tilde{T}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T')[\psi_-] = \tilde{T}_-^{TT} \psi_-, \quad (4.84d)$$

avec  $\tilde{R}_\pm^{TT} = r^{TT}$  et  $\tilde{T}_\pm^{TT} = t^{TT} - 1$ . L'introduction des indices + et - au niveau des opérateurs de transition est liée aux conversions entre les ondes longitudinales et celles transversales. Lorsque l'onde incidente sur un réseau linéaire est longitudinale, les conversions  $L \rightarrow T$  conduisent à écrire

$$\tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T)[\phi_+] = \tilde{T}_+^{LT} \phi_+, \quad (4.85a)$$

$$\tilde{T}^{LT}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)[\phi_-] = \tilde{R}_-^{LT} \phi_-, \quad (4.85b)$$

$$\tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T')[\phi_+] = \tilde{R}_+^{LT} \phi_+, \quad (4.85c)$$

$$\tilde{T}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T')[\phi_-] = \tilde{T}_-^{LT} \phi_-, \quad (4.85d)$$

où  $\tilde{R}_+^{LT} = r^{LT}$  et  $\tilde{T}_+^{LT} = t^{LT}$  quand le champ incident est le champ moyen  $\phi_+$ , et  $\tilde{R}_-^{LT} = -r^{LT}$  et  $\tilde{T}_-^{LT} = -t^{LT}$  lorsque le champ incident est  $\phi_-$  (pour la même raison mentionnée dans la section II du chapitre précédent). De façon identique, pour les conversions  $T \rightarrow L$ , on a

$$\tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)[\psi_+] = \tilde{T}_+^{TL} \psi_+, \quad (4.86a)$$

$$\tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)[\psi_-] = \tilde{R}_-^{TL} \psi_-, \quad (4.86b)$$

$$\tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L')[\psi_+] = \tilde{R}_+^{TL} \psi_+ \quad (4.86c)$$

$$\tilde{T}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L')[\psi_-] = \tilde{T}_-^{TL} \psi_- \quad (4.86d)$$

avec  $\tilde{R}_+^{TL} = r^{TL}$  et  $\tilde{T}_+^{TL} = t^{TL}$  si le champ incident est  $\psi_+$ , et  $\tilde{R}_-^{TL} = -r^{TL}$  et  $\tilde{T}_-^{TL} = -t^{TL}$  s'il s'agit du champ  $\psi_-$ . Il est à remarquer ici que, suite à la définition (2.65), les opérateurs  $\tilde{T}_\pm^{LT}$  et  $\tilde{T}_\pm^{TL}$

ne sont pas définis de la même façon que pour  $\tilde{T}_{\pm}^{LL}$  ou  $\tilde{T}_{\pm}^{TT}$  dans le cas d'une transmission. Finalement, avec ces précisions, et en utilisant les mêmes changements de variable qu'en incidence normale (visant à ne plus faire apparaître  $\bar{n}$ ), on aboutit au système suivant de quatre équations intégrales couplées

$$\phi_+ = e^{i\gamma_L x} \left( 1 + \int_0^x \left[ \bar{T}_+^{LL} \phi_+ + \bar{R}_-^{LL} \phi_- + \bar{T}_+^{TL} \psi_+ + \bar{R}_-^{TL} \psi_- \right] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \right), \quad (4.87)$$

$$\phi_- = e^{-i\gamma_L x} \int_x^e \left[ \bar{R}_+^{LL} \phi_+ + \bar{T}_-^{LL} \phi_- + \bar{R}_+^{TL} \psi_+ + \bar{T}_-^{TL} \psi_- \right] e^{i\gamma_L x_n} dx_n, \quad (4.88)$$

$$\psi_+ = e^{i\gamma_T x} \int_0^x \left[ \bar{T}_+^{TT} \psi_+ + \bar{R}_-^{TT} \psi_- + \bar{T}_+^{LT} \phi_+ + \bar{R}_-^{LT} \phi_- \right] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n, \quad (4.89)$$

$$\psi_- = e^{-i\gamma_T x} \int_x^e \left[ \bar{R}_+^{TT} \psi_+ + \bar{T}_-^{TT} \psi_- + \bar{R}_+^{LT} \phi_+ + \bar{T}_-^{LT} \phi_- \right] e^{i\gamma_T x_n} dx_n. \quad (4.90)$$

### III.2.2 Calcul des nombres d'onde effectifs

Par rapport au cas de l'incidence normale, ici, la dérivée par rapport à  $x$  des équations intégrales ci-dessus débouche sur un système d'équations différentielles insoluble. En outre, cette méthode ne permet pas de donner les formes générales des solutions cherchées. La méthode utilisée ici consiste à injecter les solutions directement dans les équations intégrales (4.87), (4.88), (4.89) et (4.90), puis à faire appel à la loi de Lorentz-Lorenz. Pour trouver préalablement les formes des solutions  $\phi_+$ ,  $\phi_-$ ,  $\psi_+$  et  $\psi_-$ , l'idée consiste à supposer une solution de type  $Ae^{i\gamma x}$ . L'équation caractéristique obtenue par la loi de Lorentz-Lorenz fournit alors quatre solutions :  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ ,  $-\Gamma$  et  $-\Gamma'$ . Ceci conduit donc à poser des solutions de la forme

$$\phi_{\pm} = A_{\pm}^L e^{i\Gamma x} + B_{\pm}^L e^{-i\Gamma x} + C_{\pm}^L e^{i\Gamma' x} + D_{\pm}^L e^{-i\Gamma' x} \quad (4.91)$$

et

$$\psi_{\pm} = A_{\pm}^T e^{i\Gamma x} + B_{\pm}^T e^{-i\Gamma x} + C_{\pm}^T e^{i\Gamma' x} + D_{\pm}^T e^{-i\Gamma' x}. \quad (4.92)$$

Les formes de ces solutions conduiront à quatre équations caractéristiques identiques. Chacune fournira les quatre solutions  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ ,  $-\Gamma$  et  $-\Gamma'$ . Les solutions distinctes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont des solutions couplées qui, comme on le verra par la suite, peuvent être rattachées aux solutions  $\Gamma_L$  et  $\Gamma_T$  en faisant tendre  $\alpha_L$  vers zéro. En injectant (4.91) et (4.92) dans les équations intégrales (4.87), (4.88), (4.89) et (4.90), on obtient successivement

$$\begin{aligned}
 & A_+^L e^{i\Gamma x} + B_+^L e^{-i\Gamma x} + C_+^L e^{i\Gamma'x} + D_+^L e^{-i\Gamma'x} = e^{i\gamma_L x} \\
 & + e^{i\gamma_L x} \int_0^x \left[ \bar{T}_+^{LL} A_+^L e^{i\Gamma x_n} + \bar{T}_+^{LL} B_+^L e^{-i\Gamma x_n} + \bar{T}_+^{LL} C_+^L e^{i\Gamma'x} + \bar{T}_+^{LL} D_+^L e^{-i\Gamma'x} \right] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \\
 & + e^{i\gamma_L x} \int_0^x \left[ \bar{R}_-^{LL} A_-^L e^{i\Gamma x_n} + \bar{R}_-^{LL} B_-^L e^{-i\Gamma x_n} + \bar{R}_-^{LL} C_-^L e^{i\Gamma'x} + \bar{R}_-^{LL} D_-^L e^{-i\Gamma'x} \right] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \\
 & + e^{i\gamma_L x} \int_0^x \left[ \bar{T}_+^{TL} A_+^T e^{i\Gamma x_n} + \bar{T}_+^{TL} B_+^T e^{-i\Gamma x_n} + \bar{T}_+^{TL} C_+^T e^{i\Gamma'x} + \bar{T}_+^{TL} D_+^T e^{-i\Gamma'x} \right] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \\
 & + e^{i\gamma_L x} \int_0^x \left[ \bar{R}_-^{TL} A_-^T e^{i\Gamma x_n} + \bar{R}_-^{TL} B_-^T e^{-i\Gamma x_n} + \bar{R}_-^{TL} C_-^T e^{i\Gamma'x} + \bar{R}_-^{TL} D_-^T e^{-i\Gamma'x} \right] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n,
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

$$\begin{aligned}
 & A_-^L e^{i\Gamma x} + B_-^L e^{-i\Gamma x} + C_-^L e^{i\Gamma'x} + D_-^L e^{-i\Gamma'x} \\
 & = e^{-i\gamma_L x} \int_x^e \left[ \bar{R}_+^{LL} A_+^L e^{i\Gamma x_n} + \bar{R}_+^{LL} B_+^L e^{-i\Gamma x_n} + \bar{R}_+^{LL} C_+^L e^{i\Gamma'x} + \bar{R}_+^{LL} D_+^L e^{-i\Gamma'x} \right] e^{i\gamma_L x_n} dx_n \\
 & + e^{-i\gamma_L x} \int_x^e \left[ \bar{T}_-^{LL} A_-^L e^{i\Gamma x_n} + \bar{T}_-^{LL} B_-^L e^{-i\Gamma x_n} + \bar{T}_-^{LL} C_-^L e^{i\Gamma'x} + \bar{T}_-^{LL} D_-^L e^{-i\Gamma'x} \right] e^{i\gamma_L x_n} dx_n \\
 & + e^{-i\gamma_L x} \int_x^e \left[ \bar{R}_+^{TL} A_+^T e^{i\Gamma x_n} + \bar{R}_+^{TL} B_+^T e^{-i\Gamma x_n} + \bar{R}_+^{TL} C_+^T e^{i\Gamma'x} + \bar{R}_+^{TL} D_+^T e^{-i\Gamma'x} \right] e^{i\gamma_L x_n} dx_n \\
 & + e^{-i\gamma_L x} \int_x^e \left[ \bar{T}_-^{TL} A_-^T e^{i\Gamma x_n} + \bar{T}_-^{TL} B_-^T e^{-i\Gamma x_n} + \bar{T}_-^{TL} C_-^T e^{i\Gamma'x} + \bar{T}_-^{TL} D_-^T e^{-i\Gamma'x} \right] e^{i\gamma_L x_n} dx_n,
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}
 & A_+^T e^{i\Gamma x} + B_+^T e^{-i\Gamma x} + C_+^T e^{i\Gamma'x} + D_+^T e^{-i\Gamma'x} \\
 & = e^{i\gamma_T x} \int_0^x \left[ \bar{T}_+^{TT} A_+^T e^{i\Gamma x_n} + \bar{T}_+^{TT} B_+^T e^{-i\Gamma x_n} + \bar{T}_+^{TT} C_+^T e^{i\Gamma'x} + \bar{T}_+^{TT} D_+^T e^{-i\Gamma'x} \right] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n \\
 & + e^{i\gamma_T x} \int_0^x \left[ \bar{R}_-^{TT} A_-^T e^{i\Gamma x_n} + \bar{R}_-^{TT} B_-^T e^{-i\Gamma x_n} + \bar{R}_-^{TT} C_-^T e^{i\Gamma'x} + \bar{R}_-^{TT} D_-^T e^{-i\Gamma'x} \right] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n \\
 & + e^{i\gamma_T x} \int_0^x \left[ \bar{T}_+^{LT} A_+^L e^{i\Gamma x_n} + \bar{T}_+^{LT} B_+^L e^{-i\Gamma x_n} + \bar{T}_+^{LT} C_+^L e^{i\Gamma'x} + \bar{T}_+^{LT} D_+^L e^{-i\Gamma'x} \right] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n \\
 & + e^{i\gamma_T x} \int_0^x \left[ \bar{R}_-^{LT} A_-^L e^{i\Gamma x_n} + \bar{R}_-^{LT} B_-^L e^{-i\Gamma x_n} + \bar{R}_-^{LT} C_-^L e^{i\Gamma'x} + \bar{R}_-^{LT} D_-^L e^{-i\Gamma'x} \right] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n,
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned}
 & A_-^T e^{i\Gamma x} + B_-^T e^{-i\Gamma x} + C_-^T e^{i\Gamma'x} + D_-^T e^{-i\Gamma'x} \\
 & = e^{-i\gamma_T x} \int_x^e \left[ \bar{R}_+^{TT} A_+^T e^{i\Gamma x_n} + \bar{R}_+^{TT} B_+^T e^{-i\Gamma x_n} + \bar{R}_+^{TT} C_+^T e^{i\Gamma'x} + \bar{R}_+^{TT} D_+^T e^{-i\Gamma'x} \right] e^{i\gamma_T x_n} dx_n \\
 & + e^{-i\gamma_T x} \int_x^e \left[ \bar{T}_-^{TT} A_-^T e^{i\Gamma x_n} + \bar{T}_-^{TT} B_-^T e^{-i\Gamma x_n} + \bar{T}_-^{TT} C_-^T e^{i\Gamma'x} + \bar{T}_-^{TT} D_-^T e^{-i\Gamma'x} \right] e^{i\gamma_T x_n} dx_n \\
 & + e^{-i\gamma_T x} \int_x^e \left[ \bar{R}_+^{LT} A_+^L e^{i\Gamma x_n} + \bar{R}_+^{LT} B_+^L e^{-i\Gamma x_n} + \bar{R}_+^{LT} C_+^L e^{i\Gamma'x} + \bar{R}_+^{LT} D_+^L e^{-i\Gamma'x} \right] e^{i\gamma_T x_n} dx_n \\
 & + e^{-i\gamma_T x} \int_x^e \left[ \bar{T}_-^{LT} A_-^L e^{i\Gamma x_n} + \bar{T}_-^{LT} B_-^L e^{-i\Gamma x_n} + \bar{T}_-^{LT} C_-^L e^{i\Gamma'x} + \bar{T}_-^{LT} D_-^L e^{-i\Gamma'x} \right] e^{i\gamma_T x_n} dx_n.
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

En utilisant les résultats suivants

$$\int_0^x e^{i(a-\gamma_{LT})x_n} dx_n = \frac{1}{i(a-\gamma_{LT})} \left[ e^{i(a-\gamma_{LT})x} - 1 \right] = \frac{i}{(a-\gamma_{LT})} \left[ 1 - e^{i(a-\gamma_{LT})x} \right] \tag{4.97}$$

et

$$\int_x^e e^{i(a+\gamma_{L,T})x_n} dx_n = \frac{1}{i(a-\gamma_{L,T})} \left[ e^{i(a+\gamma_{L,T})e} - e^{i(a+\gamma_{L,T})x} \right] = \frac{i}{(a-\gamma_{L,T})} \left[ e^{i(a+\gamma_{L,T})x} - e^{i(a+\gamma_{L,T})e} \right], \quad (4.98)$$

les quatre équations intégrales (4.93), (4.94), (4.95) et (4.96) deviennent après intégration

$$\begin{aligned} & A_+^L e^{i\Gamma x} + B_+^L e^{-i\Gamma x} + C_+^L e^{i\Gamma' x} + D_+^L e^{-i\Gamma' x} = e^{i\gamma_L x} \\ & + \frac{i}{\Gamma - \gamma_L} \left[ e^{i\gamma_L x} - e^{i\Gamma x} \right] \left[ \bar{T}_+^{LL} A_+^L + \bar{R}_-^{LL} A_-^L + \bar{T}_+^{TL} A_+^T + \bar{R}_-^{TL} A_-^T \right] \\ & + \frac{i}{-\Gamma - \gamma_L} \left[ e^{i\gamma_L x} - e^{-i\Gamma x} \right] \left[ \bar{T}_+^{LL} B_+^L + \bar{R}_-^{LL} B_-^L + \bar{T}_+^{TL} B_+^T + \bar{R}_-^{TL} B_-^T \right] \\ & + \frac{i}{\Gamma' - \gamma_L} \left[ e^{i\gamma_L x} - e^{i\Gamma' x} \right] \left[ \bar{T}_+^{LL} C_+^L + \bar{R}_-^{LL} C_-^L + \bar{T}_+^{TL} C_+^T + \bar{R}_-^{TL} C_-^T \right] \\ & + \frac{i}{-\Gamma' - \gamma_L} \left[ e^{i\gamma_L x} - e^{-i\Gamma' x} \right] \left[ \bar{T}_+^{LL} D_+^L + \bar{R}_-^{LL} D_-^L + \bar{T}_+^{TL} D_+^T + \bar{R}_-^{TL} D_-^T \right], \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} & A_-^L e^{i\Gamma x} + B_-^L e^{-i\Gamma x} + C_-^L e^{i\Gamma' x} + D_-^L e^{-i\Gamma' x} \\ & = \frac{i}{\Gamma + \gamma_L} \left[ e^{i\Gamma x} - e^{-i\gamma_L x} e^{i(\Gamma + \gamma_L)e} \right] \left[ \bar{R}_+^{LL} A_+^L + \bar{T}_-^{LL} A_-^L + \bar{R}_+^{TL} A_+^T + \bar{T}_-^{TL} A_-^T \right] \\ & + \frac{i}{-\Gamma + \gamma_L} \left[ e^{-i\Gamma x} - e^{-i\gamma_L x} e^{i(-\Gamma + \gamma_L)e} \right] \left[ \bar{R}_+^{LL} B_+^L + \bar{T}_-^{LL} B_-^L + \bar{R}_+^{TL} B_+^T + \bar{T}_-^{TL} B_-^T \right] \\ & + \frac{i}{\Gamma' + \gamma_L} \left[ e^{i\Gamma' x} - e^{-i\gamma_L x} e^{i(\Gamma' + \gamma_L)e} \right] \left[ \bar{R}_+^{LL} C_+^L + \bar{T}_-^{LL} C_-^L + \bar{R}_+^{TL} C_+^T + \bar{T}_-^{TL} C_-^T \right] \\ & + \frac{i}{-\Gamma' + \gamma_L} \left[ e^{-i\Gamma' x} - e^{-i\gamma_L x} e^{i(-\Gamma' + \gamma_L)e} \right] \left[ \bar{R}_+^{LL} D_+^L + \bar{T}_-^{LL} D_-^L + \bar{R}_+^{TL} D_+^T + \bar{T}_-^{TL} D_-^T \right], \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} & A_+^T e^{i\Gamma x} + B_+^T e^{-i\Gamma x} + C_+^T e^{i\Gamma' x} + D_+^T e^{-i\Gamma' x} \\ & = \frac{i}{\Gamma - \gamma_T} \left[ e^{i\gamma_T x} - e^{i\Gamma x} \right] \left[ \bar{T}_+^{TT} A_+^T + \bar{R}_-^{TT} A_-^T + \bar{T}_+^{LT} A_+^L + \bar{R}_-^{LT} A_-^L \right] \\ & + \frac{i}{-\Gamma - \gamma_T} \left[ e^{i\gamma_T x} - e^{-i\Gamma x} \right] \left[ \bar{T}_+^{TT} B_+^T + \bar{R}_-^{TT} B_-^T + \bar{T}_+^{LT} B_+^L + \bar{R}_-^{LT} B_-^L \right] \\ & + \frac{i}{\Gamma' - \gamma_T} \left[ e^{i\gamma_T x} - e^{i\Gamma' x} \right] \left[ \bar{T}_+^{TT} C_+^T + \bar{R}_-^{TT} C_-^T + \bar{T}_+^{LT} C_+^L + \bar{R}_-^{LT} C_-^L \right] \\ & + \frac{i}{-\Gamma' - \gamma_T} \left[ e^{i\gamma_T x} - e^{-i\Gamma' x} \right] \left[ \bar{T}_+^{TT} D_+^T + \bar{R}_-^{TT} D_-^T + \bar{T}_+^{LT} D_+^L + \bar{R}_-^{LT} D_-^L \right], \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned}
 & A_-^T e^{i\Gamma x} + B_-^T e^{-i\Gamma x} + C_-^T e^{i\Gamma' x} + D_-^T e^{-i\Gamma' x} \\
 &= \frac{i}{\Gamma + \gamma_T} \left[ e^{i\Gamma x} - e^{-i\gamma_T x} e^{i(\Gamma + \gamma_T)x} \right] \left[ \bar{R}_+^{TT} A_+^T + \bar{T}_-^{TT} A_-^T + \bar{R}_+^{LT} A_+^L + \bar{T}_-^{LT} A_-^L \right] \\
 &+ \frac{i}{-\Gamma + \gamma_T} \left[ e^{-i\Gamma x} - e^{-i\gamma_T x} e^{i(-\Gamma + \gamma_T)x} \right] \left[ \bar{R}_+^{TT} B_+^T + \bar{T}_-^{TT} B_-^T + \bar{R}_+^{LT} B_+^L + \bar{T}_-^{LT} B_-^L \right] \quad (4.102) \\
 &+ \frac{i}{\Gamma' + \gamma_T} \left[ e^{i\Gamma' x} - e^{-i\gamma_T x} e^{i(\Gamma' + \gamma_T)x} \right] \left[ \bar{R}_+^{TT} C_+^T + \bar{T}_-^{TT} C_-^T + \bar{R}_+^{LT} C_+^L + \bar{T}_-^{LT} C_-^L \right] \\
 &+ \frac{i}{-\Gamma' + \gamma_T} \left[ e^{-i\Gamma' x} - e^{-i\gamma_T x} e^{i(-\Gamma' + \gamma_T)x} \right] \left[ \bar{R}_+^{TT} D_+^T + \bar{T}_-^{TT} D_-^T + \bar{R}_+^{LT} D_+^L + \bar{T}_-^{LT} D_-^L \right].
 \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations caractéristiques cherchées, il faut ici faire appel à la loi de Lorentz-Lorenz. Elle consiste à annuler toutes les propagations en  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ ,  $-\Gamma$  et  $-\Gamma'$ . L'annulation des facteurs de  $e^{i\Gamma x}$  fournit le premier quadruplet d'équations suivant

$$A_+^L + \frac{i}{\Gamma - \gamma_L} \left[ \bar{T}_+^{LL} A_+^L + \bar{R}_-^{LL} A_-^L + \bar{T}_+^{TL} A_+^T + \bar{R}_-^{TL} A_-^T \right] = 0, \quad (4.103a)$$

$$A_-^L - \frac{i}{\Gamma + \gamma_L} \left[ \bar{R}_+^{LL} A_+^L + \bar{T}_-^{LL} A_-^L + \bar{R}_+^{TL} A_+^T + \bar{T}_-^{TL} A_-^T \right] = 0, \quad (4.103b)$$

$$A_+^T + \frac{i}{\Gamma - \gamma_T} \left[ \bar{T}_+^{TT} A_+^T + \bar{R}_-^{TT} A_-^T + \bar{T}_+^{LT} A_+^L + \bar{R}_-^{LT} A_-^L \right] = 0, \quad (4.103c)$$

$$A_-^T - \frac{i}{\Gamma + \gamma_T} \left[ \bar{R}_+^{TT} A_+^T + \bar{T}_-^{TT} A_-^T + \bar{R}_+^{LT} A_+^L + \bar{T}_-^{LT} A_-^L \right] = 0. \quad (4.103d)$$

L'annulation des facteurs de  $e^{-i\Gamma x}$  fournit le deuxième quadruplet

$$B_+^L + \frac{i}{-\Gamma - \gamma_L} \left[ \bar{T}_+^{LL} B_+^L + \bar{R}_-^{LL} B_-^L + \bar{T}_+^{TL} B_+^T + \bar{R}_-^{TL} B_-^T \right] = 0, \quad (4.104a)$$

$$B_-^L - \frac{i}{-\Gamma + \gamma_L} \left[ \bar{R}_+^{LL} B_+^L + \bar{T}_-^{LL} B_-^L + \bar{R}_+^{TL} B_+^T + \bar{T}_-^{TL} B_-^T \right] = 0, \quad (4.104b)$$

$$B_+^T + \frac{i}{-\Gamma - \gamma_T} \left[ \bar{T}_+^{TT} B_+^T + \bar{R}_-^{TT} B_-^T + \bar{T}_+^{LT} B_+^L + \bar{R}_-^{LT} B_-^L \right] = 0, \quad (4.104c)$$

$$B_-^T - \frac{i}{-\Gamma + \gamma_T} \left[ \bar{R}_+^{TT} B_+^T + \bar{T}_-^{TT} B_-^T + \bar{R}_+^{LT} B_+^L + \bar{T}_-^{LT} B_-^L \right] = 0. \quad (4.104d)$$

L'annulation des facteurs de  $e^{i\Gamma' x}$  donne

$$C_+^L + \frac{i}{\Gamma' - \gamma_L} \left[ \bar{T}_+^{LL} C_+^L + \bar{R}_-^{LL} C_-^L + \bar{T}_+^{TL} C_+^T + \bar{R}_-^{TL} C_-^T \right] = 0, \quad (4.105a)$$

$$C_-^L - \frac{i}{\Gamma' + \gamma_L} \left[ \bar{R}_+^{LL} C_+^L + \bar{T}_-^{LL} C_-^L + \bar{R}_+^{TL} C_+^T + \bar{T}_-^{TL} C_-^T \right] = 0, \quad (4.105b)$$

$$C_+^T + \frac{i}{\Gamma' - \gamma_T} [\bar{T}_+^{TT} C_+^T + \bar{R}_-^{TT} C_-^T + \bar{T}_+^{LT} C_+^L + \bar{R}_-^{LT} C_-^L] = 0, \quad (4.105c)$$

$$C_-^T - \frac{i}{\Gamma' + \gamma_T} [\bar{R}_+^{TT} C_+^T + \bar{T}_-^{TT} C_-^T + \bar{R}_+^{LT} C_+^L + \bar{T}_-^{LT} C_-^L] = 0. \quad (4.105d)$$

Enfin, l'annulation des facteurs de  $e^{-i\Gamma'x}$  fournit le dernier quadruplet

$$D_+^L + \frac{i}{-\Gamma' - \gamma_L} [\bar{T}_+^{LL} D_+^L + \bar{R}_-^{LL} D_-^L + \bar{T}_+^{TL} D_+^T + \bar{R}_-^{TL} D_-^T] = 0, \quad (4.106a)$$

$$D_-^L - \frac{i}{-\Gamma' + \gamma_L} [\bar{R}_+^{LL} D_+^L + \bar{T}_-^{LL} D_-^L + \bar{R}_+^{TL} D_+^T + \bar{T}_-^{TL} D_-^T] = 0, \quad (4.106b)$$

$$D_+^T + \frac{i}{-\Gamma' - \gamma_T} [\bar{T}_+^{TT} D_+^T + \bar{R}_-^{TT} D_-^T + \bar{T}_+^{LT} D_+^L + \bar{R}_-^{LT} D_-^L] = 0, \quad (4.106c)$$

$$D_-^T - \frac{i}{-\Gamma' + \gamma_T} [\bar{R}_+^{TT} D_+^T + \bar{T}_-^{TT} D_-^T + \bar{R}_+^{LT} D_+^L + \bar{T}_-^{LT} D_-^L] = 0. \quad (4.106d)$$

L'écriture de ces quatre quadruplets d'équations sous la forme de systèmes matriciels donne

$$\begin{bmatrix} \Gamma - \gamma_L + i\bar{T}_+^{LL} & i\bar{R}_-^{LL} & i\bar{T}_+^{TL} & i\bar{R}_-^{TL} \\ i\bar{R}_+^{LL} & -\Gamma - \gamma_L + i\bar{T}_-^{LL} & i\bar{R}_+^{TL} & i\bar{T}_-^{TL} \\ i\bar{T}_+^{LT} & i\bar{R}_-^{LT} & \Gamma - \gamma_T + i\bar{T}_+^{TT} & i\bar{R}_-^{TT} \\ i\bar{R}_+^{LT} & i\bar{T}_-^{LT} & i\bar{R}_+^{TT} & -\Gamma - \gamma_T + i\bar{T}_-^{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_+^L \\ A_-^L \\ A_+^T \\ A_-^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.107)$$

$$\begin{bmatrix} -\Gamma - \gamma_L + i\bar{T}_+^{LL} & i\bar{R}_-^{LL} & i\bar{T}_+^{TL} & i\bar{R}_-^{TL} \\ i\bar{R}_+^{LL} & \Gamma - \gamma_L + i\bar{T}_-^{LL} & i\bar{R}_+^{TL} & i\bar{T}_-^{TL} \\ i\bar{T}_+^{LT} & i\bar{R}_-^{LT} & -\Gamma - \gamma_T + i\bar{T}_+^{TT} & i\bar{R}_-^{TT} \\ i\bar{R}_+^{LT} & i\bar{T}_-^{LT} & i\bar{R}_+^{TT} & \Gamma - \gamma_T + i\bar{T}_-^{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_+^L \\ B_-^L \\ B_+^T \\ B_-^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.108)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma' - \gamma_L + i\bar{T}_+^{LL} & i\bar{R}_-^{LL} & i\bar{T}_+^{TL} & i\bar{R}_-^{TL} \\ i\bar{R}_+^{LL} & -\Gamma' - \gamma_L + i\bar{T}_-^{LL} & i\bar{R}_+^{TL} & i\bar{T}_-^{TL} \\ i\bar{T}_+^{LT} & i\bar{R}_-^{LT} & \Gamma' - \gamma_T + i\bar{T}_+^{TT} & i\bar{R}_-^{TT} \\ i\bar{R}_+^{LT} & i\bar{T}_-^{LT} & i\bar{R}_+^{TT} & -\Gamma' - \gamma_T + i\bar{T}_-^{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_+^L \\ C_-^L \\ C_+^T \\ C_-^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.109)$$

$$\begin{bmatrix} -\Gamma' - \gamma_L + i\bar{T}_+^{LL} & i\bar{R}_-^{LL} & i\bar{T}_+^{TL} & i\bar{R}_-^{TL} \\ i\bar{R}_+^{LL} & \Gamma' - \gamma_L + i\bar{T}_-^{LL} & i\bar{R}_+^{TL} & i\bar{T}_-^{TL} \\ i\bar{T}_+^{LT} & i\bar{R}_-^{LT} & -\Gamma' - \gamma_T + i\bar{T}_+^{TT} & i\bar{R}_-^{TT} \\ i\bar{R}_+^{LT} & i\bar{T}_-^{LT} & i\bar{R}_+^{TT} & \Gamma' - \gamma_T + i\bar{T}_-^{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_+^L \\ D_-^L \\ D_+^T \\ D_-^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.110)$$

Ces quatre systèmes homogènes ont des solutions non nulles si et seulement si les déterminants associés sont nuls. On constate que (4.107) et (4.108) sont respectivement les mêmes équations que (4.109) et (4.110) lorsque l'on remplace  $\Gamma$  par  $\Gamma'$ , et  $A_{\pm}^{L,T}$  et  $B_{\pm}^{L,T}$  respectivement par  $C_{\pm}^{L,T}$  et  $D_{\pm}^{L,T}$ . En outre, (4.107) et (4.108) sont les mêmes équations quand on remplace  $\Gamma$  par  $-\Gamma$ , et  $A_{\pm}^{L,T}$  par  $B_{\pm}^{L,T}$ . Par suite, on peut se contenter de traiter qu'une seule équation, par exemple l'équation (4.107). Suivant les notations introduites dans le cas de l'incidence normale, posons

$$S_{\pm}^{LL} = i\gamma_L + T_{\pm}^{LL} \quad \text{et} \quad S_{\pm}^{TT} = i\gamma_T + T_{\pm}^{TT}. \quad (4.111a, b)$$

L'équation caractéristique issue du système d'équations homogènes (4.107) s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} S_+^{LL} - i\Gamma & \bar{R}_-^{LL} & \bar{T}_+^{TL} & \bar{R}_-^{TL} \\ \bar{R}_+^{LL} & S_-^{LL} + i\Gamma & \bar{R}_+^{TL} & \bar{T}_-^{TL} \\ \bar{T}_+^{LT} & \bar{R}_-^{LT} & S_+^{TT} - i\Gamma & \bar{R}_-^{TT} \\ \bar{R}_+^{LT} & \bar{T}_-^{LT} & \bar{R}_+^{TT} & S_-^{TT} + i\Gamma \end{vmatrix} = 0. \quad (4.112)$$

Cette équation possède quatre racines :  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$ ,  $-\Gamma$  et  $-\Gamma'$ . Le but est maintenant de développer le déterminant et d'aboutir à des écritures des solutions aussi concises que possible. Pour ce faire, explicitons tout d'abord les indices + et -. On a

$$\bar{R}_{\pm}^{l_1 l_2} = \begin{cases} \bar{R}_{\pm}^{l_1 l_2} & \text{si } l_1 = l_2 \\ \pm \bar{R}_{\pm}^{l_1 l_2} & \text{si } l_1 \neq l_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{T}_{\pm}^{l_1 l_2} = \begin{cases} \bar{T}_{\pm}^{l_1 l_2} & \text{si } l_1 = l_2 \\ \pm \bar{T}_{\pm}^{l_1 l_2} & \text{si } l_1 \neq l_2 \end{cases}. \quad (4.113a, b)$$

D'après (4.111a, b), il s'ensuit que  $S_{\pm}^{LL} = S^{LL}$  et  $S_{\pm}^{TT} = S^{TT}$ . L'équation caractéristique s'écrit alors

$$\begin{vmatrix} S^{LL} - i\Gamma & \bar{R}^{LL} & \bar{T}^{TL} & -\bar{R}^{TL} \\ \bar{R}^{LL} & S^{LL} + i\Gamma & \bar{R}^{TL} & -\bar{T}^{TL} \\ \bar{T}^{LT} & -\bar{R}^{LT} & S^{TT} - i\Gamma & \bar{R}^{TT} \\ \bar{R}^{LT} & -\bar{T}^{LT} & \bar{R}^{TT} & S^{TT} + i\Gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (4.114)$$

qui est une équation caractéristique ressemblant fortement à celle (3.39) régissant la propagation d'ondes dans un réseau 2-d périodique. Après quelques calculs intermédiaires, le développement du déterminant conduit à l'équation polynomiale bicarrée suivante

$$\begin{aligned}
 & \Gamma^4 + \left[ S^{LL^2} - \bar{R}^{LL^2} + S^{TT^2} - \bar{R}^{TT^2} + 2(\bar{R}^{LT} \bar{R}^{TL} + \bar{T}^{LT} \bar{T}^{TL}) \right] \Gamma^2 + S^{LL^2} S^{TT^2} \\
 & - \bar{R}^{LL^2} S^{TT^2} - \bar{R}^{TT^2} S^{LL^2} + \bar{R}^{LL^2} \bar{R}^{TT^2} + 2(\bar{R}^{LT} \bar{R}^{TL} - \bar{T}^{LT} \bar{T}^{TL})(S^{LL} S^{TT} - \bar{R}^{LL} \bar{R}^{TT}) \quad (4.115) \\
 & + 2(\bar{R}^{LT} \bar{T}^{TL} - \bar{T}^{LT} \bar{R}^{TL})(\bar{R}^{TT} S^{LL} - \bar{R}^{LL} S^{TT}) + (\bar{T}^{LT^2} - \bar{R}^{LT^2})(\bar{T}^{TL^2} - \bar{R}^{TL^2}) = 0.
 \end{aligned}$$

Dans cette équation, on reconnaît les expressions des nombres d'onde effectifs en incidence normale, à savoir

$$\Gamma_{L0} = (\bar{R}^{LL^2} - S^{LL^2})^{1/2} \quad \text{et} \quad \Gamma_{T0} = (\bar{R}^{TT^2} - S^{TT^2})^{1/2}. \quad (4.116a, b)$$

D'autre part, on peut utiliser les relations

$$\bar{R}^{TL} = \frac{\gamma_L}{\gamma_T} \bar{R}^{LT} \quad \text{et} \quad \bar{T}^{TL} = -\frac{\gamma_L}{\gamma_T} \bar{T}^{LT}, \quad (4.117a, b)$$

qui, à l'exception des notations utilisées ici, sont les mêmes relations que (2.104). Finalement, l'expression de l'équation caractéristique la plus concise qu'on puisse obtenir est la suivante (Equation (4.118))

$$\begin{aligned}
 & \Gamma^4 - \left[ \Gamma_{L0}^2 + \Gamma_{T0}^2 - 2\frac{\gamma_L}{\gamma_T} (\bar{R}^{LT^2} - \bar{T}^{LT^2}) \right] \Gamma^2 + \Gamma_{L0}^2 \Gamma_{T0}^2 + 2\frac{\gamma_L}{\gamma_T} (\bar{R}^{LT^2} + \bar{T}^{LT^2})(S^{LL} S^{TT} - \bar{R}^{LL} \bar{R}^{TT}) \\
 & - 4\frac{\gamma_L}{\gamma_T} \bar{R}^{LT} \bar{T}^{LT} (\bar{R}^{TT} S^{LL} - \bar{R}^{LL} S^{TT}) + \frac{\gamma_L^2}{\gamma_T^2} (\bar{R}^{LT^2} - \bar{T}^{LT^2})^2 = 0.
 \end{aligned}$$

L'équation à résoudre est donc de la forme

$$X^2 - [\Gamma_{L0}^2 + \Gamma_{T0}^2 + H_{LT}] X + \Gamma_{L0}^2 \Gamma_{T0}^2 + M_{LT} = 0 \quad (4.119)$$

avec  $X = \Gamma^2$  et  $H_{LT} = M_{LT} = 0$  en incidence normale (ou aux très basses fréquences). Les deux solutions sont classiquement données par

$$X_1 = \frac{\Gamma_{L0}^2 + \Gamma_{T0}^2 + H_{LT} + \sqrt{(\Gamma_{T0}^2 + \Gamma_{T0}^2 + H_{LT})^2 - 4(\Gamma_{T0}^2 \Gamma_{T0}^2 + M_{LT})^2}}{2}, \quad (4.120)$$

et

$$X_2 = \frac{\Gamma_{L0}^2 + \Gamma_{T0}^2 + H_{LT} - \sqrt{(\Gamma_{T0}^2 + \Gamma_{T0}^2 + H_{LT})^2 - 4(\Gamma_{T0}^2 \Gamma_{T0}^2 + M_{LT})^2}}{2}. \quad (4.121)$$



Il est clair qu'en incidence normale (ou dans le domaine des très basses fréquences) on a  $X_1 = \Gamma_{L0}^2$  et  $X_2 = \Gamma_{T0}^2$ . On peut donc rattacher ces deux solutions à la propagation d'une onde cohérente de type longitudinal et d'une onde cohérente de type transversal dont les valeurs des nombres d'onde  $\Gamma_L$  et  $\Gamma_T$  sont couplées. Les nombres d'onde calculés ici ne caractérisent la propagation des ondes cohérentes que suivant la direction  $Ox$ . En incidence oblique, d'après (4.68a, b) et (4.69a, b), les vecteurs d'onde  $\vec{\xi}_L$  et  $\vec{\xi}_T$  des ondes cohérentes sont tels que

$$e^{i\vec{\xi}_L \cdot \vec{r}} = e^{i(\Gamma_L x + k_L y \sin \alpha_L)} \quad \text{et} \quad e^{i\vec{\xi}_T \cdot \vec{r}} = e^{i(\Gamma_T x + k_T y \sin \alpha_T)}, \quad (4.122a, b)$$

ce qui montre que les nombres d'onde effectifs  $\xi_L$  et  $\xi_T$  ont pour expressions respectives

$$\xi_L^2 = \Gamma_L^2 + k_L^2 \sin^2 \alpha_L \quad \text{et} \quad \xi_T^2 = \Gamma_T^2 + k_T^2 \sin^2 \alpha_T. \quad (4.123a, b)$$

### III.2.3 Coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif

Pour calculer les coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif, il faut déterminer les champs moyens  $\phi_+$ ,  $\phi_-$ ,  $\psi_+$  et  $\psi_-$  en  $x=0$  et  $x=e$ . Leurs nombres d'ondes étant désormais connus, il reste à calculer les seize amplitudes

$$A_+^L, A_-^L, A_+^T, A_-^T, B_+^L, B_-^L, B_+^T, B_-^T, C_+^L, C_-^L, C_+^T, C_-^T, D_+^L, D_-^L, D_+^T, D_-^T.$$

Il faut donc trouver seize équations. Si l'on considère les quatre quadruplets d'équations (4.103), (4.104), (4.105) et (4.106) issus de la loi de Lorentz-Lorenz, ils fournissent douze des seize équations cherchées. Chaque quadruplet fournit en effet une équation homogène qui permet de déterminer les nombres d'onde effectifs. Il faut donc, dans chacun des quatre quadruplets, retirer une équation pour le calcul des amplitudes. De façon arbitraire, ici, dans chaque quadruplet, la dernière équation sera retirée. En utilisant les notations (4.111a, b), les douze équations issues de la loi de Lorentz-Lorenz sont donc

$$(S_+^{LL} - i\Gamma) A_+^L + \bar{R}_-^{LL} A_-^L + \bar{T}_+^{TL} A_+^T + \bar{R}_-^{TL} A_-^T = 0 \quad (4.124a)$$

$$\underline{1^{er} \text{ quadruplet}} \quad \bar{R}_+^{LL} A_+^L + (S_+^{LL} + i\Gamma) A_-^L + \bar{R}_+^{TL} A_+^T + \bar{T}_-^{TL} A_-^T = 0, \quad (4.124b)$$

$$\bar{T}_+^{LT} A_+^L + \bar{R}_-^{LT} A_-^L + (S_+^{TT} - i\Gamma) A_+^T + \bar{R}_-^{TT} A_-^T = 0, \quad (4.124c)$$

$$(S_+^{LL} + i\Gamma)B_+^L + \bar{R}_-^{LL}B_-^L + \bar{T}_+^{TL}B_+^T + \bar{R}_-^{TL}B_-^T = 0, \quad (4.125a)$$

$$\underline{2^{\text{ème}} \text{ quadruplet}} \quad \bar{R}_+^{LL}B_+^L + (S_+^{LL} - i\Gamma)B_-^L + \bar{R}_+^{TL}B_+^T + \bar{T}_-^{TL}B_-^T = 0, \quad (4.125b)$$

$$\bar{T}_+^{LT}B_+^L + \bar{R}_-^{LT}B_-^L + (S_+^{TT} + i\Gamma)B_+^T + \bar{R}_-^{TT}B_-^T = 0, \quad (4.125c)$$

$$(S_+^{LL} - i\Gamma')C_+^L + \bar{R}_-^{LL}C_-^L + \bar{T}_+^{TL}C_+^T + \bar{R}_-^{TL}C_-^T = 0, \quad (4.126a)$$

$$\underline{3^{\text{ème}} \text{ quadruplet}} \quad \bar{R}_+^{LL}C_+^L + (S_+^{LL} + i\Gamma')C_-^L + \bar{R}_+^{TL}C_+^T + \bar{T}_-^{TL}C_-^T = 0, \quad (4.126b)$$

$$\bar{T}_+^{LT}C_+^L + \bar{R}_-^{LT}C_-^L + (S_+^{TT} - i\Gamma')C_+^T + \bar{R}_-^{TT}C_-^T = 0, \quad (4.126c)$$

$$(S_+^{LL} + i\Gamma')D_+^L + \bar{R}_-^{LL}D_-^L + \bar{T}_+^{TL}D_+^T + \bar{R}_-^{TL}D_-^T = 0, \quad (4.127a)$$

$$\underline{4^{\text{ème}} \text{ quadruplet}} \quad \bar{R}_+^{LL}D_+^L + (S_+^{LL} - i\Gamma')D_-^L + \bar{R}_+^{TL}D_+^T + \bar{T}_-^{TL}D_-^T = 0, \quad (4.127b)$$

$$\bar{T}_+^{LT}D_+^L + \bar{R}_-^{LT}D_-^L + (S_+^{TT} + i\Gamma')D_+^T + \bar{R}_-^{TT}D_-^T = 0. \quad (4.127c)$$

Les quatre équations manquantes sont les relations qui assurent l'inhomogénéité du système à résoudre. Ces équations sont tirées du théorème d'extinction qui consiste à annuler toutes les propagations en  $\gamma_L$ ,  $\gamma_T$ ,  $-\gamma_L$  et  $-\gamma_T$  (c'est-à-dire, compte tenu de (4.79), toutes les propagations en  $k_L$ ,  $k_T$ ,  $-k_L$  et  $-k_T$ ). L'annulation des facteurs de  $e^{i\gamma_L x}$  et de  $e^{i\gamma_T x}$  fournit respectivement les équations (4.128) et (4.129) suivantes

$$1 + \frac{i}{\Gamma - \gamma_L} [\bar{T}_+^{LL}A_+^L + \bar{R}_-^{LL}A_-^L + \bar{T}_+^{TL}A_+^T + \bar{R}_-^{TL}A_-^T] + \frac{i}{-\Gamma - \gamma_L} [\bar{T}_+^{LL}B_+^L + \bar{R}_-^{LL}B_-^L + \bar{T}_+^{TL}B_+^T + \bar{R}_-^{TL}B_-^T] \\ + \frac{i}{\Gamma' - \gamma_L} [\bar{T}_+^{LL}C_+^L + \bar{R}_-^{LL}C_-^L + \bar{T}_+^{TL}C_+^T + \bar{R}_-^{TL}C_-^T] + \frac{i}{-\Gamma' - \gamma_L} [\bar{T}_+^{LL}D_+^L + \bar{R}_-^{LL}D_-^L + \bar{T}_+^{TL}D_+^T + \bar{R}_-^{TL}D_-^T] = 0,$$

$$\frac{i}{\Gamma - \gamma_T} [\bar{T}_+^{TT}A_+^T + \bar{R}_-^{TT}A_-^T + \bar{T}_+^{LT}A_+^L + \bar{R}_-^{LT}A_-^L] + \frac{i}{-\Gamma - \gamma_T} [\bar{T}_+^{TT}B_+^T + \bar{R}_-^{TT}B_-^T + \bar{T}_+^{LT}B_+^L + \bar{R}_-^{LT}B_-^L] \\ + \frac{i}{\Gamma' - \gamma_T} [\bar{T}_+^{TT}C_+^T + \bar{R}_-^{TT}C_-^T + \bar{T}_+^{LT}C_+^L + \bar{R}_-^{LT}C_-^L] + \frac{i}{-\Gamma' - \gamma_T} [\bar{T}_+^{TT}D_+^T + \bar{R}_-^{TT}D_-^T + \bar{T}_+^{LT}D_+^L + \bar{R}_-^{LT}D_-^L] = 0.$$

L'annulation des facteurs de  $e^{-i\gamma_L x}$  et de  $e^{-i\gamma_T x}$  conduit respectivement aux deux dernières équations suivantes

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{\Gamma + \gamma_L} \left[ \bar{R}_+^{LL} A_+^L + \bar{T}_-^{LL} A_-^L + \bar{R}_+^{TL} A_+^T + \bar{T}_-^{TL} A_-^T \right] e^{i\Gamma e} \\
 & + \frac{i}{-\Gamma + \gamma_L} \left[ \bar{R}_+^{LL} B_+^L + \bar{T}_-^{LL} B_-^L + \bar{R}_+^{TL} B_+^T + \bar{T}_-^{TL} B_-^T \right] e^{-i\Gamma e} \\
 & + \frac{i}{\Gamma' + \gamma_L} \left[ \bar{R}_+^{LL} C_+^L + \bar{T}_-^{LL} C_-^L + \bar{R}_+^{TL} C_+^T + \bar{T}_-^{TL} C_-^T \right] e^{i\Gamma' e} \\
 & + \frac{i}{-\Gamma' + \gamma_L} \left[ \bar{R}_+^{LL} D_+^L + \bar{T}_-^{LL} D_-^L + \bar{R}_+^{TL} D_+^T + \bar{T}_-^{TL} D_-^T \right] e^{-i\Gamma' e} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.130}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{\Gamma + \gamma_T} \left[ \bar{R}_+^{TT} A_+^T + \bar{T}_-^{TT} A_-^T + \bar{R}_+^{LT} A_+^L + \bar{T}_-^{LT} A_-^L \right] e^{i\Gamma e} \\
 & + \frac{i}{-\Gamma + \gamma_T} \left[ \bar{R}_+^{TT} B_+^T + \bar{T}_-^{TT} B_-^T + \bar{R}_+^{LT} B_+^L + \bar{T}_-^{LT} B_-^L \right] e^{-i\Gamma e} \\
 & + \frac{i}{\Gamma' + \gamma_T} \left[ \bar{R}_+^{TT} C_+^T + \bar{T}_-^{TT} C_-^T + \bar{R}_+^{LT} C_+^L + \bar{T}_-^{LT} C_-^L \right] e^{i\Gamma' e} \\
 & + \frac{i}{-\Gamma' + \gamma_T} \left[ \bar{R}_+^{TT} D_+^T + \bar{T}_-^{TT} D_-^T + \bar{R}_+^{LT} D_+^L + \bar{T}_-^{LT} D_-^L \right] e^{-i\Gamma' e} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.131}$$

L'écriture des quatre dernières équations peut être considérablement réduite en utilisant celles issues de la loi de Lorentz-Lorenz. En effet, en injectant (4.103a), (4.104a), (4.105a) et (4.106a) dans (4.128), cette dernière devient

$$A_+^L + B_+^L + C_+^L + D_+^L = 1. \tag{4.132}$$

Similairement, en injectant les équations (4.103c), (4.104c), (4.105c) et (4.106c) dans (4.129), on obtient

$$A_+^T + B_+^T + C_+^T + D_+^T = 0. \tag{4.133}$$

Il est à remarquer au passage que, dans le cas d'une onde incidente transversale, le second membre de (4.132) serait nul et celui (4.133) égal à l'unité. Il s'agit là de l'unique différence dans la mise en équation lorsque l'on passe d'une onde incidente longitudinale à une onde incidente transversale. Si l'on injecte les équations (4.103b), (4.104b), (4.105b) et (4.106b) dans (4.130), celle-ci devient

$$A_-^L e^{i\Gamma e} + B_-^L e^{-i\Gamma e} + C_-^L e^{i\Gamma' e} + D_-^L e^{-i\Gamma' e} = 0. \tag{4.134}$$

De même, en injectant (4.103d), (4.104d), (4.105d), (4.106d) dans (4.131), on obtient

$$A_-^T e^{i\Gamma e} + B_-^T e^{-i\Gamma e} + C_-^T e^{i\Gamma' e} + D_-^T e^{-i\Gamma' e} = 0. \quad (4.135)$$

En fin de compte, les quatre dernières relations auraient pu être déduites immédiatement puisque les relations (4.132), (4.133), (4.134) et (4.135) correspondent respectivement à

$$\phi_+(0, x=0) = 1, \quad (4.136)$$

$$\psi_+(0, x=0) = 0, \quad (4.137)$$

$$\phi_-(x=e, e) = 0, \quad (4.138)$$

et

$$\psi_-(x=e, e) = 0 \quad (4.139)$$

Les équations de (4.132) à (4.135), et celles de (4.124a) à (4.127c) permettent la construction du système matriciel inhomogène (4.140) de la page suivante. Pour sa résolution, on peut évidemment choisir  $\Gamma = \Gamma_L$  et  $\Gamma' = \Gamma_T$ , ou  $\Gamma = \Gamma_T$  et  $\Gamma' = \Gamma_L$ . En raison du couplage des seize amplitudes, il n'y a aucune simplification possible (à notre connaissance) permettant d'aboutir à des coefficients de réflexion et de transmission formellement identiques à ceux d'une plaque élastique. En choisissant par exemple  $\Gamma = \Gamma_L$  et  $\Gamma' = \Gamma_T$ , les champs moyens  $\phi_+$ ,  $\phi_-$ ,  $\psi_+$  et  $\psi_-$  s'écrivent

$$\phi_{\pm} = A_{\pm}^L e^{i\Gamma_L x} + B_{\pm}^L e^{-i\Gamma_L x} + C_{\pm}^L e^{i\Gamma_T x} + D_{\pm}^L e^{-i\Gamma_T x}, \quad (4.141)$$

$$\psi_{\pm} = A_{\pm}^T e^{i\Gamma_L x} + B_{\pm}^T e^{-i\Gamma_L x} + C_{\pm}^T e^{i\Gamma_T x} + D_{\pm}^T e^{-i\Gamma_T x}. \quad (4.142)$$

Par suite, les champs transmis et réfléchis sont définis par

$$\phi_T(x \geq e, y) = \left( A_+^L e^{i\Gamma_L e} + B_+^L e^{-i\Gamma_L e} + C_+^L e^{i\Gamma_T e} + D_+^L e^{-i\Gamma_T e} \right) e^{-ik_L e \cos \alpha_L} e^{ik_L(x \cos \alpha_L + y \sin \alpha_L)}, \quad (4.143)$$

$$\psi_T(x \geq e, y) = \left( A_+^T e^{i\Gamma_L e} + B_+^T e^{-i\Gamma_L e} + C_+^T e^{i\Gamma_T e} + D_+^T e^{-i\Gamma_T e} \right) e^{-ik_T e \cos \alpha_T} e^{ik_T(x \cos \alpha_T + y \sin \alpha_T)}, \quad (4.144)$$

$$\phi_R(x \leq 0, y) = \left( A_-^L + B_-^L + C_-^L + D_-^L \right) e^{ik_L(-x \cos \alpha_L + y \sin \alpha_L)}, \quad (4.145)$$

$$\psi_R(x \leq 0, y) = \left( A_-^T + B_-^T + C_-^T + D_-^T \right) e^{ik_T(-x \cos \alpha_T + y \sin \alpha_T)}. \quad (4.146)$$

$$\begin{bmatrix}
S_+^{LL} - i\Gamma & \bar{R}_-^{LL} & \bar{T}_+^{TL} & \bar{R}_-^{TL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{R}_+^{LL} & S_+^{LL} + i\Gamma & \bar{R}_+^{TL} & \bar{T}_-^{TL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\bar{T}_+^{LT} & \bar{R}_-^{LT} & S_+^{TT} - i\Gamma & \bar{R}_-^{TT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & S_+^{LL} + i\Gamma & \bar{R}_-^{LL} & \bar{T}_+^{TL} & \bar{R}_-^{TL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bar{R}_+^{LL} & S_+^{LL} - i\Gamma & \bar{R}_+^{TL} & \bar{T}_-^{TL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_+^{LT} & \bar{R}_-^{LT} & S_+^{TT} + i\Gamma & \bar{R}_-^{TT} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_+^{LL} - i\Gamma & \bar{R}_-^{LL} & \bar{T}_+^{TL} & \bar{R}_-^{TL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{R}_+^{LL} & S_+^{LL} + i\Gamma & \bar{R}_+^{TL} & \bar{T}_-^{TL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_+^{LT} & \bar{R}_-^{LT} & S_+^{TT} - i\Gamma & \bar{R}_-^{TT} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_+^{LL} + i\Gamma & \bar{R}_-^{LL} & \bar{T}_+^{TL} & \bar{R}_-^{TL} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{R}_+^{LL} & S_+^{LL} - i\Gamma & \bar{R}_+^{TL} & \bar{T}_-^{TL} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{T}_+^{LT} & \bar{R}_-^{LT} & S_+^{TT} + i\Gamma & \bar{R}_-^{TT} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & e^{i\Gamma e} & 0 & 0 & 0 & e^{-i\Gamma e} & 0 & 0 & 0 & e^{i\Gamma e} & 0 & 0 & 0 & e^{-i\Gamma e} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e^{i\Gamma e} & 0 & 0 & 0 & e^{-i\Gamma e} & 0 & 0 & 0 & e^{i\Gamma e} & 0 & 0 & 0 & e^{-i\Gamma e}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_+^L \\
A_-^L \\
A_+^T \\
A_-^T \\
B_+^L \\
B_-^L \\
B_+^T \\
B_-^T \\
C_+^L \\
C_-^L \\
C_+^T \\
C_-^T \\
D_+^L \\
D_-^L \\
D_+^T \\
D_-^T
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
0 \\
1 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}$$

(4.140)

Nombres d'onde effectifs :  $\Gamma$  ,  $\Gamma'$

Loi de Lorentz-Lorenz

Théorème d'extinction

Les coefficients de transmission et de réflexion du milieu effectif ont alors pour expressions

$$T_{eff}^{LL} = \left( A_+^L e^{i\Gamma_L e} + B_+^L e^{-i\Gamma_L e} + C_+^L e^{i\Gamma_T e} + D_+^L e^{-i\Gamma_T e} \right) e^{-ik_T e \cos \alpha_L}, \quad (4.147)$$

$$T_{eff}^{LT} = \left( A_+^T e^{i\Gamma_L e} + B_+^T e^{-i\Gamma_L e} + C_+^T e^{i\Gamma_T e} + D_+^T e^{-i\Gamma_T e} \right) e^{-ik_T e \cos \alpha_T}, \quad (4.148)$$

$$R_{eff}^{LL} = \left( A_-^L + B_-^L + C_-^L + D_-^L \right), \quad (4.149)$$

$$R_{eff}^{LT} = \left( A_-^T + B_-^T + C_-^T + D_-^T \right). \quad (4.150)$$

Lorsque l'onde incidente est transversale, il suffit de changer les indices ou exposants  $L$  par  $T$ , et inversement.

### III.2.4 Réécriture du formalisme pour une distribution aléatoire d'inclusions dans les directions $Ox$ et $Oy$

L'objectif, dans ce dernier paragraphe, est d'analyser brièvement les modifications apportées dans la théorie en remplaçant les réseaux linéaires par des inclusions aléatoirement réparties dans les deux directions spatiales  $Ox$  et  $Oy$ . La théorie est alors très proche de celle développée par V. Twersky, la principale différence étant ici la prise en compte des conversions entre les ondes longitudinales et celles transversales chaque fois qu'une onde est incidente sur une inclusion. Par rapport aux équations de Foldy-Twersky (4.66) et (4.67), la répartition aléatoire « isotrope » impose que

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = e^{i\vec{k}_L \cdot \vec{r}} + \bar{n} \int_0^e \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}^{LL}(\vec{r}_n) \langle \phi(\vec{r}_n) \rangle dx_n dy_n + \bar{n} \int_0^e \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}^{TL}(\vec{r}_n) \langle \psi(\vec{r}_n) \rangle dx_n dy_n \quad (4.151)$$

et

$$\langle \psi(\vec{r}) \rangle = \bar{n} \int_0^e \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}^{TT}(\vec{r}_n) \langle \psi(\vec{r}_n) \rangle dx_n dy_n + \bar{n} \int_0^e \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}^{LT}(\vec{r}_n) \langle \phi(\vec{r}_n) \rangle dx_n dy_n \quad (4.152)$$

avec  $\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$  et  $\vec{r}_n = x_n \hat{x} + y_n \hat{y}$ . Les coordonnées  $x_n$  et  $y_n$  sont celles du centre  $O_n$  d'une inclusion  $n$ . Evidemment, le terme  $\bar{n}$  représente ici une densité de diffuseurs par unité de surface. La différence fondamentale avec ce qui précède est la façon dont on modélise les actions des opérateurs de transition sur les champs moyens. La modélisation choisie ici est for-

mellement très proche de celle de A. Ishimaru [48]. Par exemple, pour une transition  $L \rightarrow T$ , elle consiste à poser

$$\hat{T}^{LT}(\vec{r}_n) \langle \phi(\vec{r}_n) \rangle = \hat{f}^{LT}(\hat{i}_L, \vec{\rho}_n) [\langle \phi(\vec{r}_n) \rangle] \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ik_T \rho_n - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_T \rho_n}} \quad (4.153)$$

avec

$$\vec{\rho}_n = \vec{r} - \vec{r}_n, \quad \rho_n = |r - r_n| \quad \text{et} \quad \hat{\rho}_n = \vec{\rho}_n / \rho_n. \quad (4.154)$$

Dans l'immédiat, il n'est pas utile de préciser comment  $\hat{f}^{LT}(\hat{i}_L, \vec{\rho}_n)$  agit sur  $\langle \phi(\vec{r}_n) \rangle$ . Il faut simplement noter que  $\hat{i}_L$  représente la direction de l'onde incidente longitudinale, et que le terme suivant

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ik_T \rho_n - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_T \rho_n}} \quad (4.155)$$

représente la fonction de Green 2-d exprimée en champ lointain. Cette modélisation suppose donc implicitement une faible densité de diffuseurs. Si ce n'est pas le cas, il n'est alors pas raisonnable d'introduire la fonction de Green en champ lointain. Ceci constitue une différence fondamentale par rapport au cas d'une distribution aléatoire de réseaux linéaires où cette hypothèse n'est pas inscrite dans le formalisme. En injectant (4.153) dans (4.151) et (4.152), et en prenant en compte l'invariance des champs moyens par rapport à la variable  $y$ , il vient

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \rangle = & e^{ik_L x \cos \alpha_L} + \bar{n} \int_0^e dx_n \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{\rho}_n) [\langle \phi(\vec{r}_n) \rangle] e^{ik_L(y_n - y) \sin \alpha_L} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ik_L \rho_n - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_L \rho_n}} dy_n \\ & + \bar{n} \int_0^e dx_n \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{\rho}_n) [\langle \psi(\vec{r}_n) \rangle] e^{ik_L(y_n - y) \sin \alpha_L} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ik_L \rho_n - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_L \rho_n}} dy_n, \end{aligned} \quad (4.156)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) \rangle = & \bar{n} \int_0^e dx_n \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{\rho}_n) [\langle \psi(\vec{r}_n) \rangle] e^{ik_T(y_n - y) \sin \alpha_T} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ik_T \rho_n - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_T \rho_n}} dy_n \\ & + \bar{n} \int_0^e dx_n \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{\rho}_n) [\langle \phi(\vec{r}_n) \rangle] e^{ik_T(y_n - y) \sin \alpha_T} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{ik_T \rho_n - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{k_T \rho_n}} dy_n, \end{aligned} \quad (4.157)$$

[48] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*, Academic Press, New-York, pp. 253-286, 1978.

où  $\hat{i}_T$  représente la direction de champ cohérent de type transversal, cette direction étant liée à celle de  $\hat{i}_L$  par la loi de Snell-Descartes. En accord avec A. Ishimaru, l'idée est maintenant d'appliquer la méthode de la phase stationnaire à l'intégrale suivant  $y_n$ . Cette méthode conduit à utiliser la formule suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(y_n) e^{ikS(y_n)} dy_n \underset{k \rightarrow +\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2\pi}{k|S''(y_p)|}} A(y_p) e^{ikS(y_p)} e^{i\frac{\pi}{4}\text{sign}(S'(y_p))} \quad (4.159)$$

où  $\text{sign}(x) = +1$  si  $x > 0$  et  $\text{sign}(x) = -1$  si  $x < 0$ . Le point  $y_p$  est le point de phase stationnaire qui est la solution de l'équation  $S'(y_n) = 0$ . L'emploi de la méthode de la phase stationnaire suppose que les termes de type  $\hat{f}^{TT}(\hat{i}, \hat{\rho}_n)[\langle \psi(\vec{r}_n) \rangle]$  sont des termes d'amplitudes lentement variables par rapport aux fonctions de Green en champ lointain. Tous calculs faits, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \rangle &= e^{ik_L x \cos \alpha_L} + \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_0^e \hat{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{\rho}_p)[\langle \phi(x_n) \rangle] e^{ik_L|x_n-x|\cos \alpha_L} dx_n \\ &+ \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_0^e \hat{f}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{\rho}_p)[\langle \psi(x_n) \rangle] e^{ik_L|x_n-x|\cos \alpha_L} dx_n, \end{aligned} \quad (4.160)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \psi(x) \rangle &= \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_0^e \hat{f}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{\rho}_p)[\langle \psi(x_n) \rangle] e^{ik_T|x_n-x|\cos \alpha_T} dx_n \\ &+ \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_0^e \hat{f}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{\rho}_p)[\langle \phi(x_n) \rangle] e^{ik_T|x_n-x|\cos \alpha_T} dx_n, \end{aligned} \quad (4.160)$$

avec  $\hat{\rho}_p = \hat{i}_{L,T}$  si  $x > x_n$  et  $\hat{\rho}_p = \hat{i}'_{L,T}$  si  $x < x_n$ . En décomposant les intégrales suivant que  $x > x_n$  ou  $x < x_n$ , les deux champs moyens à l'intérieur du milieu aléatoire peuvent en fin de compte se décomposer comme (4.73) et (4.76), avec

$$\begin{aligned} \phi_+(0, x) &= e^{i\gamma_L x} \left( 1 + \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_0^x \tilde{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)[\langle \phi(x_n) \rangle] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \right) \\ &+ e^{i\gamma_L x} \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_0^x \tilde{f}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)[\langle \psi(x_n) \rangle] e^{-i\gamma_L x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.161)$$

$$\begin{aligned} \phi_-(x, e) &= e^{-i\gamma_L x} \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_x^e \tilde{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}'_L)[\langle \phi(x_n) \rangle] e^{i\gamma_L x_n} dx_n \\ &+ e^{-i\gamma_L x} \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_x^e \tilde{f}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}'_L)[\langle \psi(x_n) \rangle] e^{i\gamma_L x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.162)$$



$$\begin{aligned} \psi_+(0, x) &= e^{i\gamma_T x} \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_0^x \tilde{f}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T) [\langle \psi(x_n) \rangle] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n \\ &+ e^{i\gamma_T x} \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_0^x \tilde{f}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{-i\gamma_T x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.163)$$

et

$$\begin{aligned} \psi_-(x, e) &= e^{-i\gamma_T x} \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_x^e \tilde{f}^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T) [\langle \psi(x_n) \rangle] e^{i\gamma_T x_n} dx_n \\ &+ e^{-i\gamma_T x} \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_x^e \tilde{f}^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) [\langle \phi(x_n) \rangle] e^{i\gamma_T x_n} dx_n. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Pour pouvoir exploiter les équations intégrales ci-dessus, il reste à définir l'action des opérateurs sur les champs moyens. Pour ce faire, explicitons, par exemple, leurs actions dans l'équation (4.161). Compte tenu de la linéarité des opérateurs, on a

$$\tilde{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\langle \phi(x_n) \rangle] = \tilde{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\phi_+(0, x_n)] + \tilde{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\phi_-(x_n, e)] \quad (4.165)$$

et

$$\tilde{f}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\langle \psi(x_n) \rangle] = \tilde{f}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\psi_+(0, x_n)] + \tilde{f}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) [\psi_-(x_n, e)], \quad (4.166)$$

ceci pouvant être représenté schématiquement comme sur la Figure 4.6.

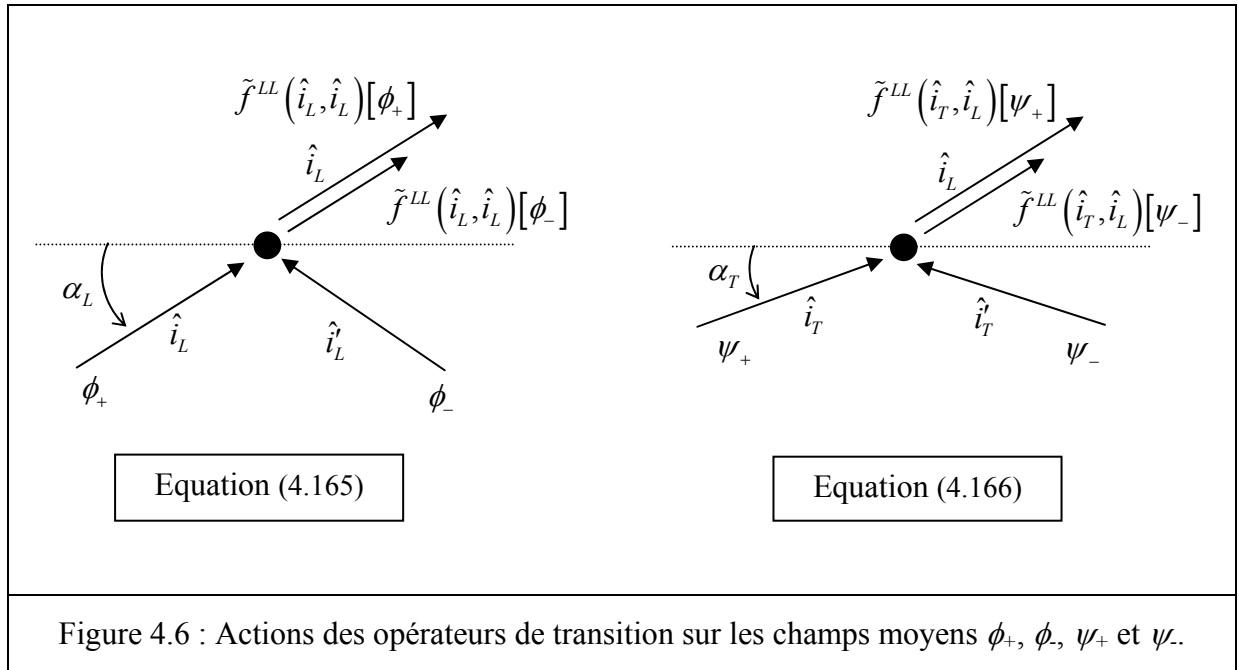


Figure 4.6 : Actions des opérateurs de transition sur les champs moyens  $\phi_+$ ,  $\phi_-$ ,  $\psi_+$  et  $\psi_-$ .

Si l'on considère, à titre par exemple, le champ  $\tilde{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L) [\phi_+(0, x_n)]$ , il représente une diffusion dans la direction  $\hat{i}_L$  d'un champ incident d'amplitude  $\phi_+(0, x_n)$  se propageant dans la di-

rection  $\hat{i}_L$ . Ce champ représente donc une diffusion « en transmission » de type  $L \rightarrow L$ . L'action de l'opérateur  $\tilde{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)$  sur  $\phi_+(0, x_n)$  s'écrit par conséquent

$$\tilde{f}^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)[\phi_+(0, x_n)] = f^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)\phi_+(0, x_n). \quad (4.167)$$

Pour ce qui concerne le champ  $\tilde{f}^{LL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)[\psi_-(0, x_n)]$ , par exemple, il correspond à la diffusion dans la direction  $\hat{i}_L$  d'un champ d'amplitude  $\psi_+(0, x_n)$  se propageant dans la direction  $\hat{i}_T$ . Il représente donc une diffusion « en réflexion » de type  $T \rightarrow L$ . Ceci conduit donc à écrire

$$\tilde{f}^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)[\psi_-(x_n, e)] = f^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)\psi_-(x_n, e). \quad (4.168)$$

Finalement, en décomposant de la même façon les champs moyens  $\langle \phi(x_n) \rangle$  et  $\langle \psi(x_n) \rangle$  dans chacune des équations intégrales (4.161), (4.162), (4.163) et (4.164), puis en identifiant l'action des opérateurs de transition sur chacun des champs moyens  $\phi_+$ ,  $\phi$ ,  $\psi_+$  et  $\psi$ , il vient

$$\begin{aligned} \phi_+(0, x) = e^{i\gamma_L x} & \left( 1 + \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_0^x \left\{ f^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)\phi_+(0, x_n) + f^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)\phi_-(x_n, e) \right\} e^{-i\gamma_L x_n} dx_n \right) \\ & + e^{i\gamma_L x} \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_0^x \left\{ f^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)\psi_+(0, x_n) + f^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)\psi_-(x_n, e) \right\} e^{-i\gamma_L x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.169)$$

$$\begin{aligned} \phi_-(x, e) = e^{-i\gamma_L x} & \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_x^e \left\{ f^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)\phi_+(0, x_n) + f^{LL}(\hat{i}_L, \hat{i}_L)\phi_-(x_n, e) \right\} e^{i\gamma_L x_n} dx_n \\ & + e^{-i\gamma_L x} \frac{2\bar{n}}{k_L \cos \alpha_L} \int_x^e \left\{ f^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)\psi_+(0, x_n) + f^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L)\psi_-(x_n, e) \right\} e^{i\gamma_L x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.170)$$

$$\begin{aligned} \psi_+(0, x) = e^{i\gamma_T x} & \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_0^x \left\{ f^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T)\psi_+(0, x_n) + f^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T)\psi_-(x_n, e) \right\} e^{-i\gamma_T x_n} dx_n \\ & + e^{i\gamma_T x} \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_0^x \left\{ f^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T)\phi_+(0, x_n) + f^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T)\phi_-(x_n, e) \right\} e^{-i\gamma_T x_n} dx_n, \end{aligned} \quad (4.171)$$

$$\begin{aligned} \psi_-(x, e) = e^{-i\gamma_T x} & \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_x^e \left\{ f^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T)\psi_+(0, x_n) + f^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_T)\psi_-(x_n, e) \right\} e^{i\gamma_T x_n} dx_n \\ & + e^{-i\gamma_T x} \frac{2\bar{n}}{k_T \cos \alpha_T} \int_x^e \left\{ f^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T)\phi_+(0, x_n) + f^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T)\phi_-(x_n, e) \right\} e^{i\gamma_T x_n} dx_n. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Pour se ramener à des équations formellement identiques à celles établies dans le cas de réseaux linéaires, il suffit de remarquer que tous les termes de type  $f^{l_1 l_2}(\hat{i}_1, \hat{i}_2)$  ou  $f^{l_1 l_2}(\hat{i}'_1, \hat{i}'_2)$  (avec  $l_1$  et  $l_2 = L$  ou  $T$ ) correspondent à des diffusions en transmission, et que tous les termes  $f^{l_1 l_2}(\hat{i}'_1, \hat{i}'_2)$  ou  $f^{l_1 l_2}(\hat{i}_1, \hat{i}_2)$  correspondent à des diffusions en réflexion. Les notations + et – dans les paragraphes précédents étant associées à la direction du champ moyen incident, c'est-à-dire à  $\hat{i}'_1$ , il convient alors de poser

$$\bar{T}_+^{l_1 l_2} = \frac{2\bar{n}}{k_{l_2} \cos \alpha_{l_2}} f^{l_1 l_2}(\hat{i}_1, \hat{i}_2), \quad (4.173)$$

$$\bar{T}_-^{l_1 l_2} = \frac{2\bar{n}}{k_{l_2} \cos \alpha_{l_2}} f^{l_1 l_2}(\hat{i}'_1, \hat{i}'_2), \quad (4.174)$$

$$\bar{R}_+^{l_1 l_2} = \frac{2\bar{n}}{k_{l_2} \cos \alpha_{l_2}} f^{l_1 l_2}(\hat{i}'_1, \hat{i}'_2), \quad (4.175)$$

$$\bar{R}_-^{l_1 l_2} = \frac{2\bar{n}}{k_{l_2} \cos \alpha_{l_2}} f^{l_1 l_2}(\hat{i}_1, \hat{i}_2). \quad (4.176)$$

Ceci étant posé, on retrouve formellement les mêmes équations intégrales que (4.87), (4.88), (4.89) et (4.90). Pour terminer, il reste à définir  $f^{l_1 l_2}$ . Compte tenu de la définition (4.153) et de l'interprétation physique donnée ci-dessus, les termes

$$f^{l_1 l_2}(\hat{i}_1, \hat{i}_2), \quad f^{l_1 l_2}(\hat{i}'_1, \hat{i}'_2), \quad f^{l_1 l_2}(\hat{i}_1, \hat{i}'_2) \quad \text{et} \quad f^{l_1 l_2}(\hat{i}'_1, \hat{i}_2)$$

sont les amplitudes de diffusion en champ lointain définies par (1.43) et (1.44) dans le premier chapitre pour  $N$  inclusions (à un facteur  $\sqrt{2/\pi}$  près). Ici, ces termes représentant les amplitudes de diffusion d'une seule inclusion, ils sont donc définis par

$$f^{l_1 l_2}(\hat{i}_1, \hat{i}_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^{l_1 l_2} e^{-in(\alpha_{l_1} + \alpha_{l_2})}, \quad (4.177)$$

$$f^{l_1 l_2}(\hat{i}'_1, \hat{i}'_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n T_n^{l_1 l_2} e^{-in(\alpha_{l_1} + \alpha_{l_2})}, \quad (4.178)$$

$$f^{l_1 l_2}(\hat{i}'_1, \hat{i}_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n T_n^{l_1 l_2} e^{in(\alpha_{l_1} + \alpha_{l_2})}, \quad (4.179)$$

$$f^{l_1 l_2}(\hat{i}_1, \hat{i}_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n^{l_1 l_2} e^{in(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad (4.180)$$

où  $T_n^{l_1 l_2}$  sont les opérateurs de transition définis au paragraphe II.1.2 du premier chapitre. Pour aboutir aux coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif et aux nombres d'onde des ondes cohérentes s'y propageant, la démarche à suivre est maintenant rigoureusement la même que celle exposée pour des réseaux linéaires répartis aléatoirement. La seule différence est qu'ici les relations (4.113a, b) et (4.117a, b) ne sont plus vraies. Pour la recherche des nombres d'onde effectifs, il faut alors considérer l'équation caractéristique (4.112), puis la simplifier pour déterminer une nouvelle équation polynomiale bicarrée. Pour ce qui est du calcul des amplitudes des ondes cohérentes, le système inhomogène (4.140) reste inchangé. Il est également à noter que, en incidence normale (impliquant  $\hat{i}_L = \hat{i}_T$ ), il y a découplage des ondes cohérentes longitudinales et transversales puisque, dans le premier chapitre, on a vu que

$$f^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) = f^{TL}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) = f^{LT}(\hat{i}_L, \hat{i}_T) = f^{TT}(\hat{i}_T, \hat{i}_L) = 0. \quad (4.181)$$

Le formalisme est alors rigoureusement identique à celui présenté au paragraphe III.1 du présent chapitre.

## IV. ÉTUDE COMPARATIVE DES RÉSULTATS EXACTS ET DE CEUX PRÉDITS PAR LA THÉORIE DE TWERSKY

### IV.1 Comparaison des résultats pour $b = 0$

L'objectif dans ce paragraphe est de comparer les coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif calculés en réalisant un moyennage sur 10000 tirages aléatoires avec ceux prédits par la théorie de Twersky. La distance limite d'approche entre les réseaux linéaires est  $b = 0$ . Autrement dit, on autorise les diffuseurs à s'interpénétrer. Ceci optimise la comparaison des résultats puisque la théorie exposée dans la précédente section n'inclut pas de principe d'exclusion  $b \geq 2a$ . La Figure 4.7 présente les coefficients de réflexion a) et de transmission b) obtenus avec les deux méthodes dans le cas d'une onde incidente longitudinale. Les réseaux linéaires sont excités en incidence normale et les diffuseurs sont des inclusions d'air. Les courbes de la Figure 4.8, à la page suivante, sont obtenues dans les mêmes conditions mais avec des inclusions d'eau au fort comportement résonant.

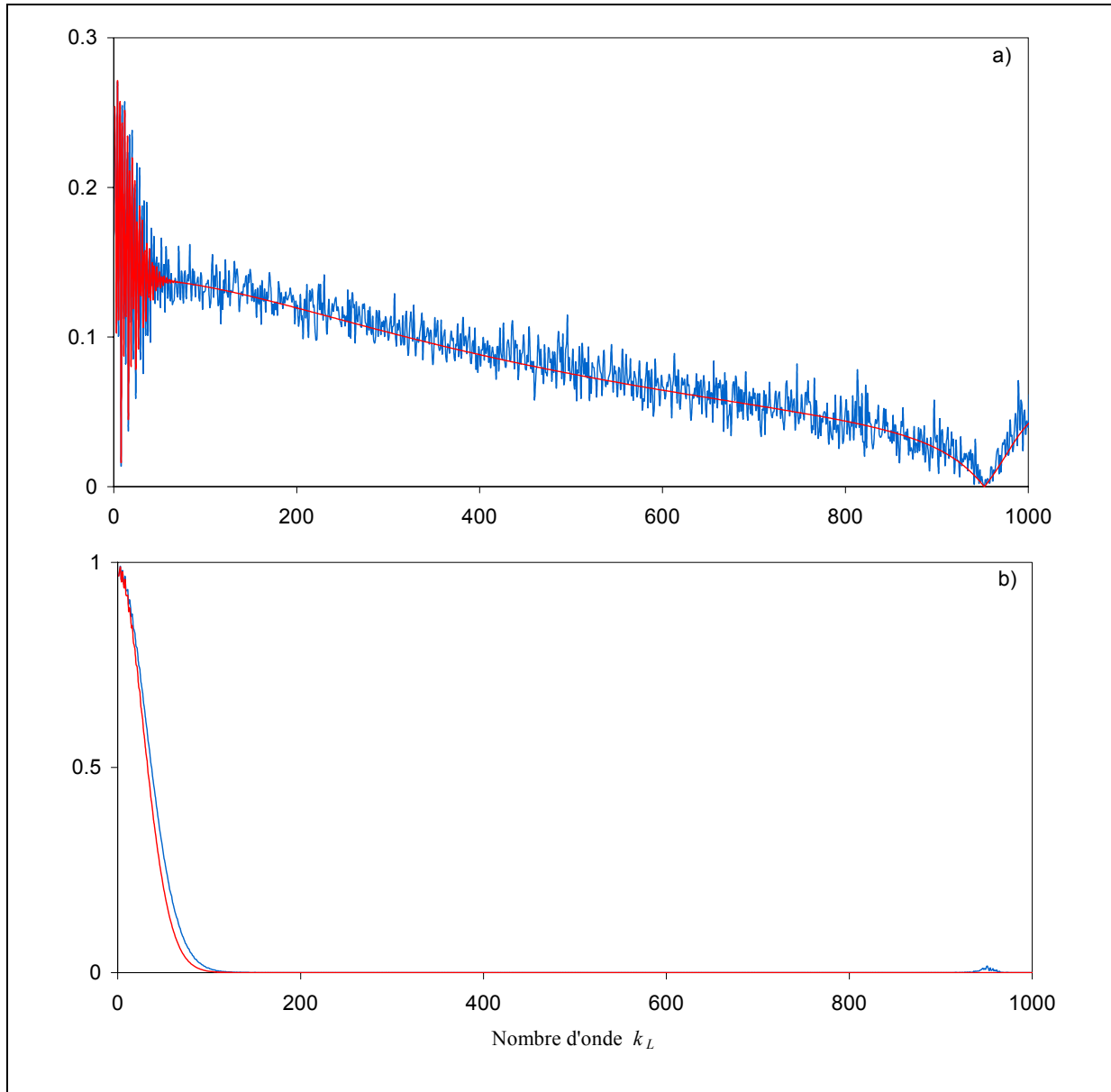


Figure 4.7 : Coefficients de réflexion a) et de transmission b) du milieu effectif excité en incidence normale par une onde longitudinale. Les diffuseurs sont des inclusions d'air.

En rouge : théorie de Twersky ; en bleu : moyenne statistique.

La comparaison des courbes, que ce soit dans le cas non résonant ou résonant, montre un accord quasi parfait entre les coefficients de réflexion et de transmission issus de la théorie de Twersky et ceux calculés de façon exacte par une moyenne statistique. La théorie de Twersky, qui a été adaptée à une distribution de réseaux linéaires et à une diffusion en milieu élastique, est donc d'emblée validée. L'adaptation de la théorie à une distribution de réseaux linéaires est un point fondamental. En effet, le calcul exact de la diffusion par une « infinité » de diffuseurs n'est pas envisageable sans faire d'approximation(s) en raison des temps de

calcul mis en jeu (*cf.* Annexe 2). Ceci est d'autant plus vrai que le nombre de réalisations du désordre doit être important pour réaliser un moyennage satisfaisant (voir Figure 4.3). Valider de façon exacte une théorie des milieux effectifs est donc voué à l'échec lorsque les diffuseurs sont aléatoirement répartis dans les directions  $Ox$  et  $Oy$ . L'« astuce » visant à introduire une périodicité dans la direction  $Oy$  permet de passer d'un nombre infini à un nombre fini de « diffuseurs », et ainsi de réduire considérablement les temps de calcul (*cf.* Annexe 5). A notre connaissance, il s'agit de la seule façon de valider les résultats prédits par cette théorie.

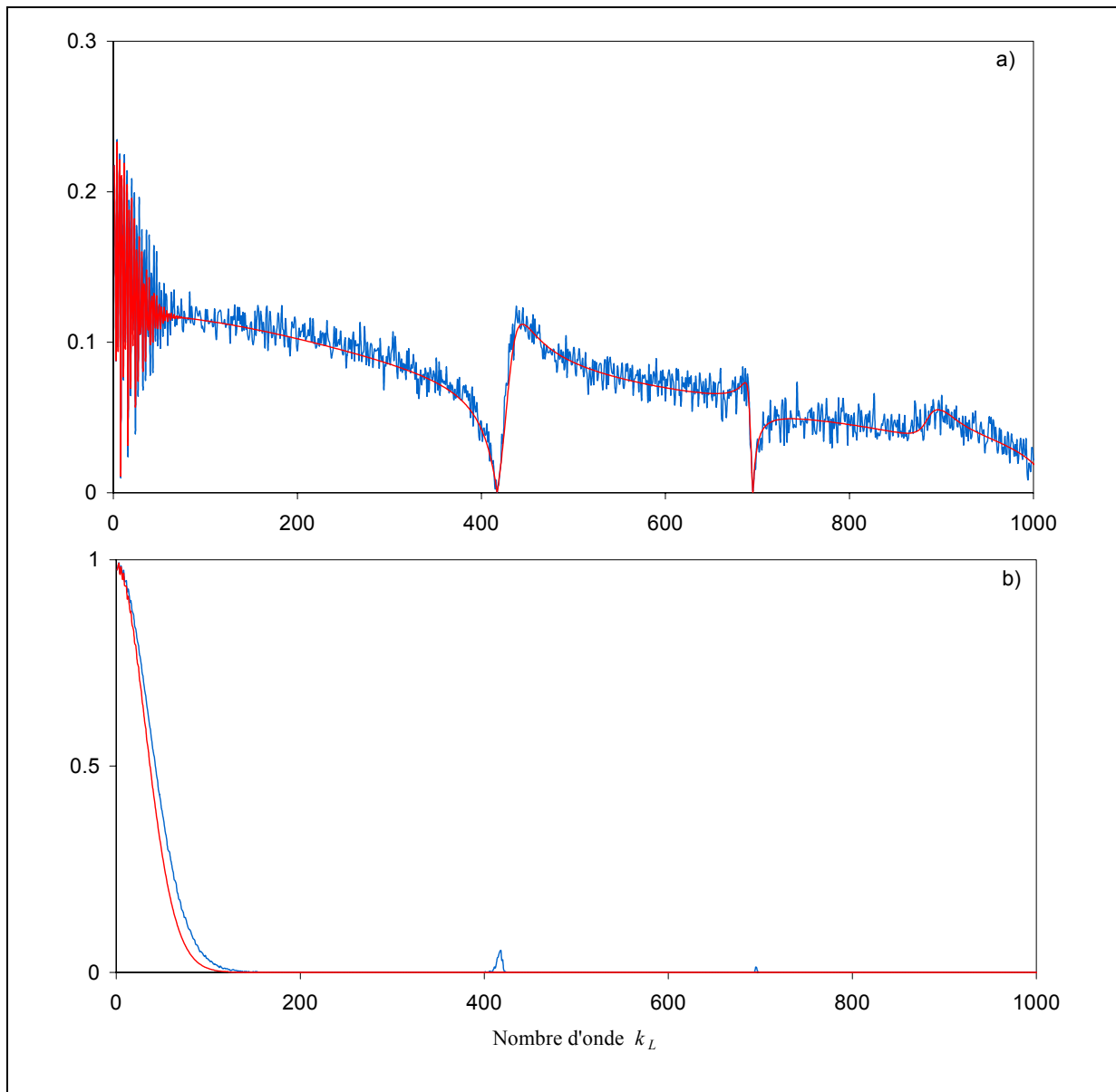
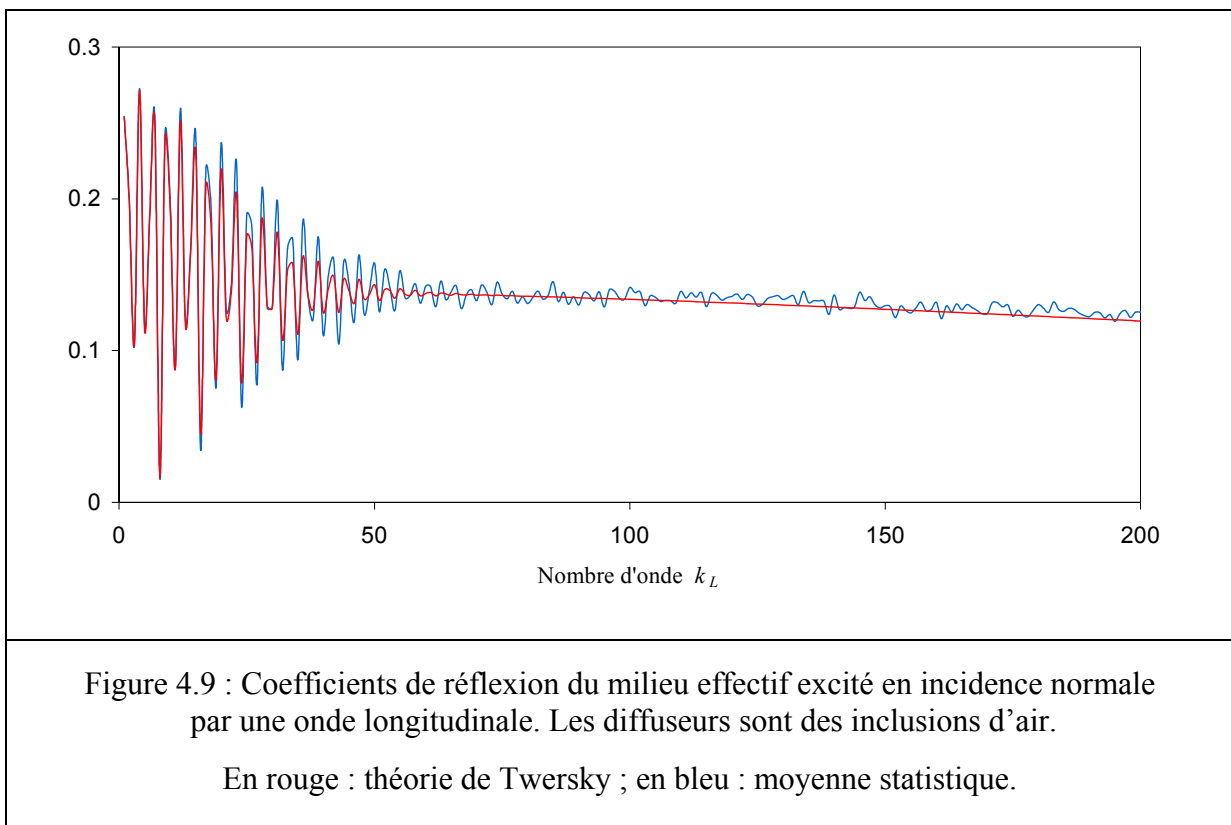


Figure 4.8 : Coefficients de réflexion a) et de transmission b) du milieu effectif excité en incidence normale par une onde longitudinale. Les diffuseurs sont des inclusions d'eau.

En rouge : théorie de Twersky ; en bleu : moyenne statistique.

L'unique différence observée entre les différents résultats est une décroissance légèrement plus rapide du coefficient de transmission issu de la théorie de Twersky. Cette différence a été observée quel que soit le nombre de tirages aléatoires réalisés. Dans le domaine des plus hautes fréquences, on observe sur la Figure 4.7b une transmission qui n'est pas rigoureusement nulle autour de  $k_L = 952 \text{ m}^{-1}$ . On a vu dans la deuxième section que cette fréquence est celle pour laquelle la transmission au travers d'un réseau linéaire est totale. Il a été vérifié cependant que la transmission s'annule rigoureusement pour un plus grand nombre de tirages aléatoires. Sur la Figure 4.8b, on observe également des transmissions non nulles autour des fréquences  $k_L = 417 \text{ m}^{-1}$  et  $k_L = 695 \text{ m}^{-1}$ . Ces deux fréquences correspondent aux fréquences des deux principales résonances d'une seule inclusion d'eau. Ces résonances se manifestent par des annulations de la réflexion en raison d'une forte dissipation de l'énergie lorsque l'onde de galerie à écho résonne autour de chaque inclusion. A ces deux fréquences, il a été vérifié que la transmission s'annule pour un nombre de tirages aléatoires plus important. Ainsi, que ce soit pour des inclusions d'air ou d'eau, les deux méthodes montrent que la transmission au travers du milieu effectif s'annule très vite à fréquence croissante. Ceci suggère une atténuation particulièrement forte des ondes cohérentes. La Figure 4.9 ci-dessous présente les coefficients de réflexion dans le domaine des basses fréquences.



Les coefficients de réflexion présentés oscillent avec la même période (il en est de même pour les coefficients de transmission). En outre, les amplitudes de ces oscillations suivent la même évolution en fonction de la fréquence ; l'amplitude décroît lorsque la fréquence augmente jusqu'à complète disparition des oscillations autour de  $k_L = 50 \text{ m}^{-1}$ . Toutes les observations faites dans ce paragraphe seront interprétées prochainement. Ces observations montrent simplement que la théorie de Twersky, malgré les approximations sur lesquelles elle est fondée, fournit des résultats très conformes à ceux escomptés. Mais est-ce toujours vrai en incidence oblique ? La Figure 4.10 donne l'évolution de la réflexion et de la transmission  $L \rightarrow L$  pour  $\alpha_L \neq 0^\circ$ .

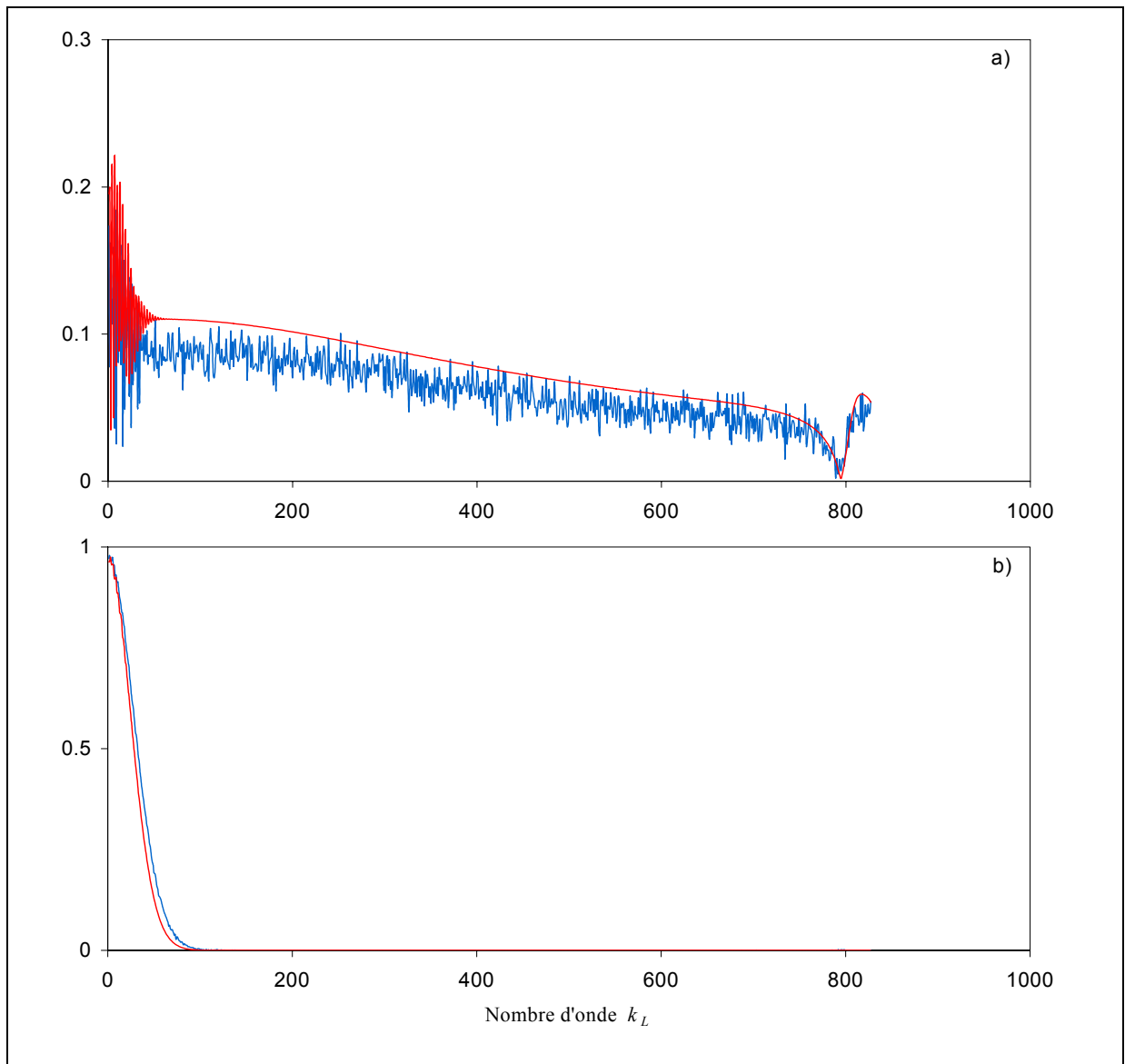


Figure 4.10 : Coefficients de réflexion  $L \rightarrow L$  a) et de transmission  $L \rightarrow L$  b) du milieu effectif excité par une onde longitudinale avec  $\alpha_L = 30^\circ$ . Les diffuseurs sont des inclusions d'air.

En rouge : théorie de Twersky ; en bleu : moyenne statistique



Les résultats ont été calculés pour des inclusions d'air et pour un angle d'incidence  $\alpha_L$  de  $30^\circ$ . Pour cette valeur de l'angle d'incidence, la première fréquence de coupure des réseaux linéaires diminue et correspond à  $k_L = 827 \text{ m}^{-1}$ . La première observation est que l'effet d'une incidence oblique sur la transmission n'est pas spectaculaire. Les coefficients de transmission décroissent tous deux légèrement plus vite qu'en incidence normale. Ici, comme en incidence normale, le coefficient de transmission obtenu par la théorie de Twersky décroît légèrement plus vite que celui calculé par une moyenne statistique. En revanche, pour ce qui est de la réflexion, les deux courbes ne coïncident plus aussi nettement qu'en incidence normale. Les coefficients de réflexion suivent la même évolution, mais celui issu de la théorie de Twersky a globalement une valeur plus élevée que celui obtenu par une moyenne statistique. Cette différence a toujours été observée quel que soit l'angle d'incidence et quel que soit le type d'onde incidente, longitudinal ou transversal. L'origine de ce léger désaccord entre les résultats n'a pas pu être identifiée. A l'exception de cette différence d'amplitude, l'accord entre les résultats reste très satisfaisant puisque les coefficients de réflexion présentent la même période d'oscillation dans le domaine des basses fréquences et, à des plus hautes fréquences, présentent les mêmes accidents liés soit à une annulation de la réflexion par les réseaux linéaires (c'est le cas ici, à  $k_L = 796 \text{ m}^{-1}$ ), soit aux résonances des inclusions d'eau.

## IV.2 Comparaison des résultats pour $b \neq 0$

En l'absence de distance limite d'approche ( $b = 0$ ), la théorie de Twersky fournit donc des résultats dans l'ensemble très proches de ceux calculés de façon exacte. Cependant, même si la faible densité des diffuseurs dans la direction  $Ox$  implique une probabilité d'interpénétration des diffuseurs proche de zéro, on peut se demander si les résultats sont éloignés de ceux obtenus sans possibilité d'interpénétration des diffuseurs. Les résultats donnés par la théorie de Twersky doivent donc être comparés avec ceux obtenus par une moyenne statistique avec prise en compte d'une distance limite d'approche  $b \geq 2a$ . La Figure 4.11 présente les coefficients de transmission et de réflexion issus de la théorie de Twersky ( $b = 0$ ) et les coefficients exacts calculés pour  $b = 2a$ ,  $b = 4a$  et  $b = 6a$ . Les résultats sont donnés en incidence normale pour laquelle les résultats obtenus par les deux méthodes de calcul coïncident parfaitement avec  $b = 0$ . L'onde incidente est longitudinale et les diffuseurs sont des inclusions d'air (pour  $b = 0$ , les résultats sont donc ceux de la Figure 4.7).

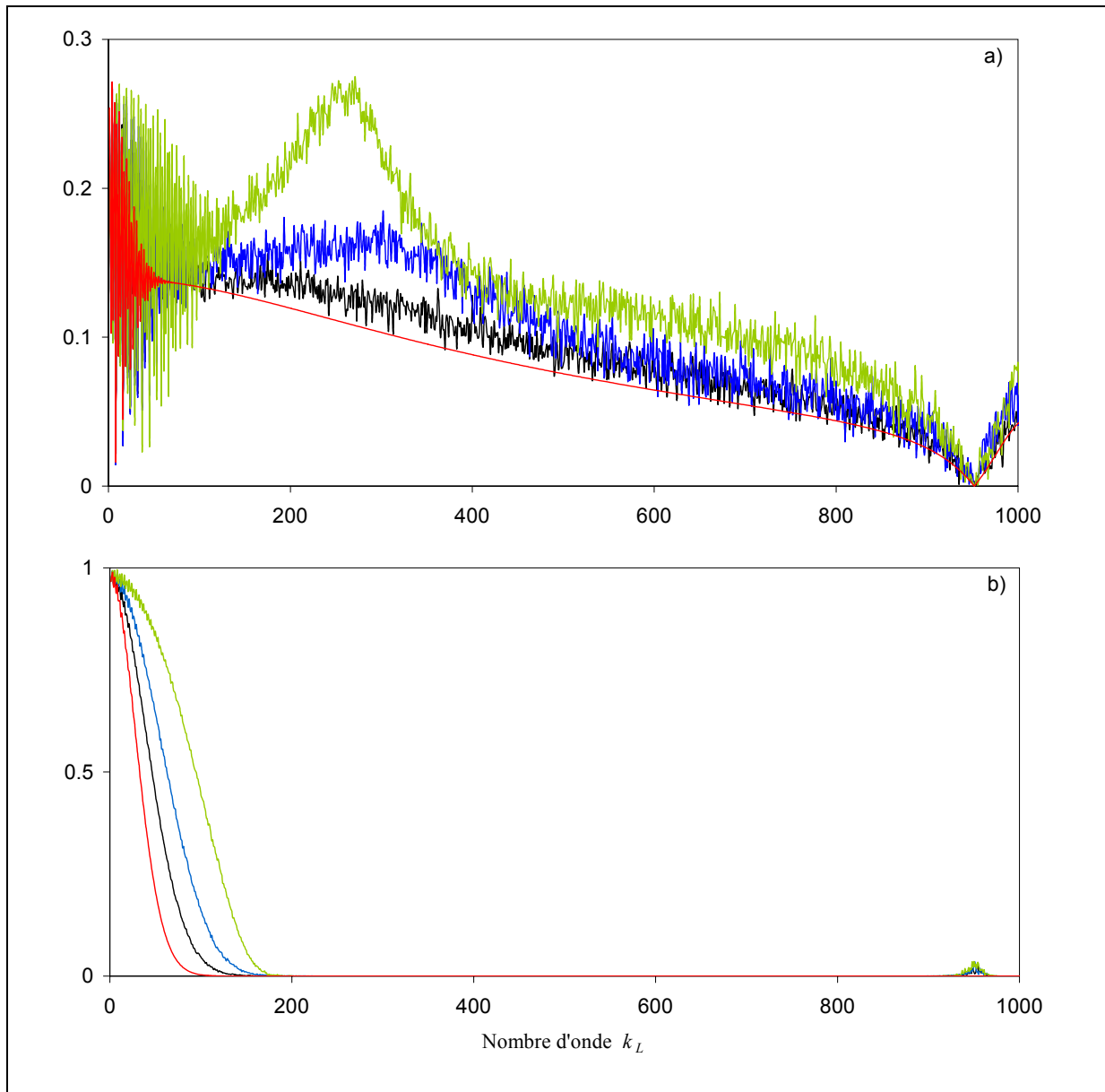


Figure 4.11 : Coefficients de réflexion a) et de transmission b) du milieu effectif excité en incidence normale par une onde longitudinale. Les diffuseurs sont des inclusions d'air.

En rouge : théorie de Twersky.

Moyenne statistique en noir :  $b = 2a$  ; en bleu :  $b = 4a$  ; en vert  $b = 6a$ .

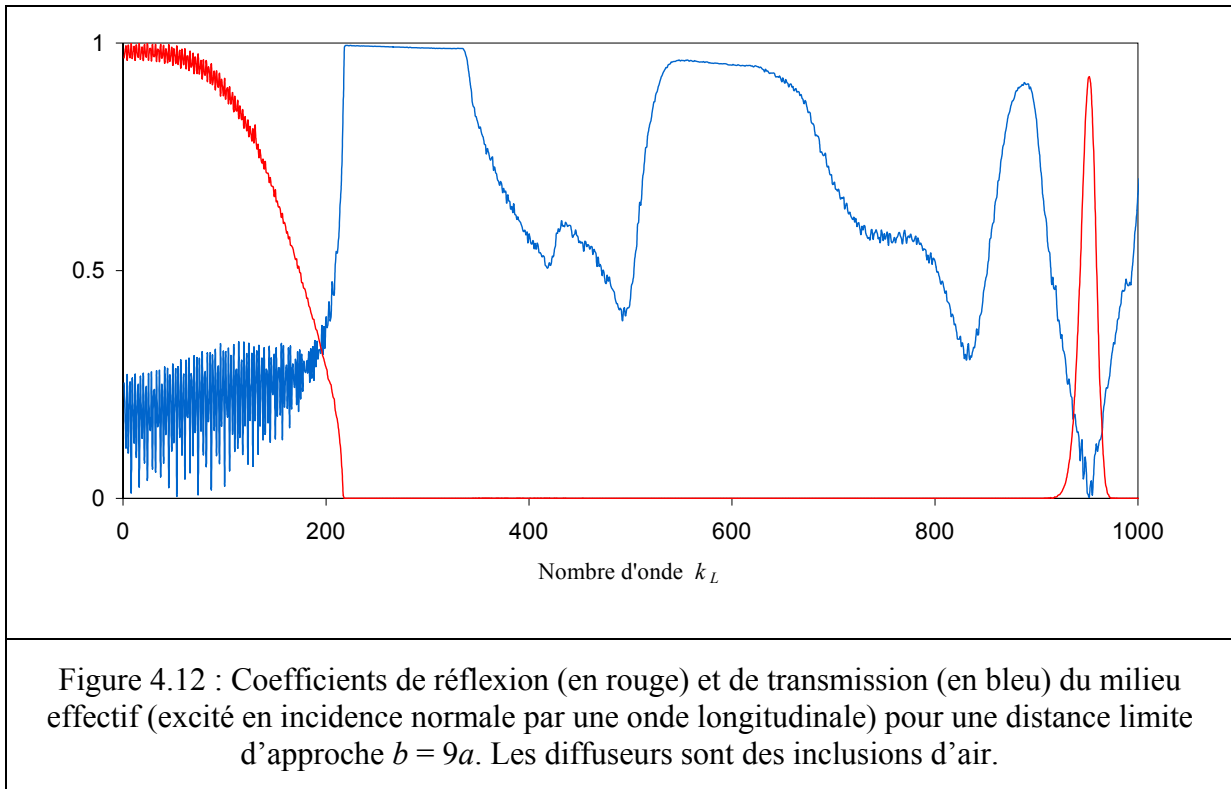
Le cas  $b = 2a$  correspond à une faible perturbation du désordre. La conséquence est que les résultats obtenus pour cette valeur de  $b$ , comme attendus, ne sont pas très éloignés de ceux obtenus sans perturbation. Les coefficients de réflexion et de transmission suivent approximativement la même évolution que pour  $b = 0$  avec des amplitudes légèrement plus élevées. Ainsi, même sans inclure de principe d'exclusion, la théorie de Twersky donne des résultats corrects tout en étant beaucoup plus facile à manier que la méthode consistant à moyennner sur un

grand nombre de réalisations du désordre (l'Annexe 5 présente les temps de calcul mis en jeu dans les deux méthodes). Bien que ce ne soit pas visible sur l'ensemble des courbes, il faut ajouter que les oscillations aux basses fréquences ne sont pas modifiées pour  $b \neq 0$ . Pour des plus grandes valeurs de  $b$ , comme attendu, la théorie de Twersky n'est plus appropriée au problème. Pour  $b=4a$  et surtout  $b=6a$ , les coefficients de réflexion et de transmission s'éloignent en effet significativement de ceux initiaux. En outre, ces coefficients ne suivent plus la même évolution. La croissance des coefficients de réflexion et de transmission avec  $b$  peut s'expliquer. Réaliser la moyenne consiste à sommer les ondes transmises ou réfléchies par le « phaseur aléatoire ». En « diminuant » le désordre, la quantité d'ondes dont les phases sont corrélées augmente ; les coefficients de réflexion et de transmission croissent donc à mesure que la quantité d'ondes interférant en phase augmente.

La croissance des coefficients n'est pas uniforme en fonction de la fréquence. En effet, pour  $b=6a$ , on observe une « élévation » spectaculaire du coefficient de réflexion autour de  $k_L=280 \text{ m}^{-1}$ . A quoi donc correspond cette fréquence ? Pour  $b=6a$ , on ne peut plus parler rigoureusement de désordre. La distribution des réseaux linéaires est alors plus proche d'une distribution périodique que d'une distribution aléatoire. Par conséquent, l'élévation du coefficient de réflexion autour de cette fréquence correspondrait à la genèse d'une bande interdite. Si l'on se réfère à la Figure 3.6 du troisième chapitre, la fréquence  $k_L=260 \text{ m}^{-1}$  (correspondant à la fréquence réduite  $\bar{k}_L=0,890$ ) correspond approximativement à la fréquence centrale de la première bande interdite associée aux ondes longitudinales. Pour justifier cette interprétation, les coefficients de réflexion et de transmission ont été calculés pour  $b=8a$ , c'est-à-dire dans le cas d'une distribution quasi périodique. Les courbes obtenues sont présentées sur la Figure 4.12. Lorsque l'on passe de  $b=6a$  à  $b=8a$ , l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission est spectaculaire. Pour le coefficient de réflexion, on peut clairement identifier les trois bandes interdites de la Figure 3.6, localisées autour de  $k_L=280 \text{ m}^{-1}$ ,  $k_L=600 \text{ m}^{-1}$  et  $k_L=900 \text{ m}^{-1}$  (soit  $\bar{k}_L=0,89$ ,  $\bar{k}_L=1,90$  et  $\bar{k}_L=2,86$ ). Ceci confirme que, pour  $b=6a$ , la variation du coefficient de réflexion autour de  $k_L=280 \text{ m}^{-1}$  est bien la manifestation d'une quasi-périodicité de la distribution des réseaux linéaires.

Pour le coefficient de transmission, l'effet le plus spectaculaire de la quasi-périodicité est la transmission quasi totale à  $k_L=952 \text{ m}^{-1}$ , correspondant à la transmission totale de chaque réseau linéaire précisément à cette fréquence. L'importance de ce pic vient de ce que son amplitude nous informe sur le degré de désordre. Plus  $b$  est élevé et plus son amplitude est proche de l'unité. Les ondes transmises ayant une amplitude maximale à cette fréquence, les

phases de ces ondes doivent en effet être purement décorrélées pour que leur interférence conduisent à une transmission nulle. Ceci rejoint un résultat mentionné dans le paragraphe précédent pour  $b=0$ , à savoir que le nombre de réalisations du désordre doit être très important pour ne plus observer les effets de la transmission totale des réseaux linéaires à cette fréquence.



En conclusion, la prise en compte d'une distance limite d'approche entre les réseaux linéaires ne permet d'utiliser le modèle de Twersky que lorsque  $b \leq 2a$ . Au-delà, le modèle n'est plus réellement valable. En raison de la périodicité existante dans la direction  $Oy$ , la distance limite d'approche introduit une périodicité du système dans la direction  $Ox$  de sorte que les phénomènes de bandes interdites et passantes se manifestent assez tôt lorsque  $b$  augmente. L'objectif, dans la suite, est d'interpréter les résultats obtenus pour  $b \leq 2a$ . La théorie de Twersky permet alors de connaître les nombres d'onde des ondes cohérentes nécessaires à l'interprétation des résultats. En outre, nous avons vu qu'elle permet le calcul des coefficients de réflexion et de transmission d'une interface plane entre le milieu effectif et le milieu d'excitation. Ces coefficients seront également utiles à cette interprétation des résultats.

### IV.3 Interprétation des résultats

Tous les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus dans le cas d'une onde incidente longitudinale avec  $\alpha_L = 0^\circ$ . En incidence normale, l'absence de conversion  $L \rightarrow T$  lors de la réflexion et de la transmission par un réseau linéaire implique la propagation, dans le milieu effectif, d'une seule onde plane cohérente de type longitudinal. Cette onde, se propageant dans la direction de l'onde incidente, c'est-à-dire le long de l'axe  $Ox$ , est caractérisée par le nombre d'onde  $\xi_L = \xi'_L + i\xi''_L$ , où  $\xi'_L$  caractérise sa propagation avec la vitesse de phase  $c'_L = \omega/\xi'_L$  et  $\xi''_L$  définit son atténuation. A partir de l'atténuation, on définit le libre parcours moyen élastique [46] classiquement par  $L_s = 1/\xi''_L$ . On rappelle que les caractéristiques communes à tous les résultats présentés dans les paragraphes précédents sont une décroissance très rapide du coefficient de transmission et un faible coefficient de réflexion oscillant périodiquement aux basses fréquences. Pour expliquer ces principaux résultats, analysons dans un premier temps les propriétés de l'onde cohérente, à savoir sa dispersion et son atténuation. La Figure 4.13 présente les courbes de dispersion a) et d'atténuation b) dans le cas non résonant et résonant. Les courbes de dispersion sont respectivement les tracés, en fonction de  $k_L$ , de la vitesse de phase réduite  $c'_L/c_L$  et du rapport  $\xi''_L/\xi'_L$ . Sans surprise, les courbes de dispersion montrent que, en l'absence de résonances, la vitesse de phase de l'onde cohérente est inférieure à celle des ondes se propageant en « espace libre ». En présence de résonances, la situation est inversée : aux trois fréquences de résonance d'une inclusion d'eau (l'effet de la résonance à  $k_L = 890 \text{ m}^{-1}$  n'était pas visible sur le coefficient de réflexion), l'onde cohérente se propage plus vite que l'onde incidente. Sur la courbe d'atténuation, les résonances correspondent à des pics de forte amplitude. L'atténuation plus importante de l'onde cohérente aux fréquences de résonance est due à une forte dissipation de l'énergie à chaque transmission ou réflexion par un réseau linéaire lorsque ses inclusions d'eau résonnent. En dernière remarque, observons que l'évolution des courbes d'atténuation est *grosso modo* « modulée » par le coefficient de réflexion d'un réseau linéaire (cf. Figure 3.6a). Ceci n'est pas surprenant puisque plus les réseaux linéaires transmettent, et plus le milieu multidiffusant s'apparente à un espace libre pour lequel les ondes existantes sont purement propagatives. Cette forte dépendance de l'atténuation à l'égard du coefficient de réflexion peut être confirmée en explicitant les ordres de grandeur de tous les termes définissant l'expression (4.43) du nombre d'onde effectif.

[46] A. Tourin, M. Fink et A. Derode, *Multiple scattering of sound*, Waves in random media 10 R31-R60, 2000.

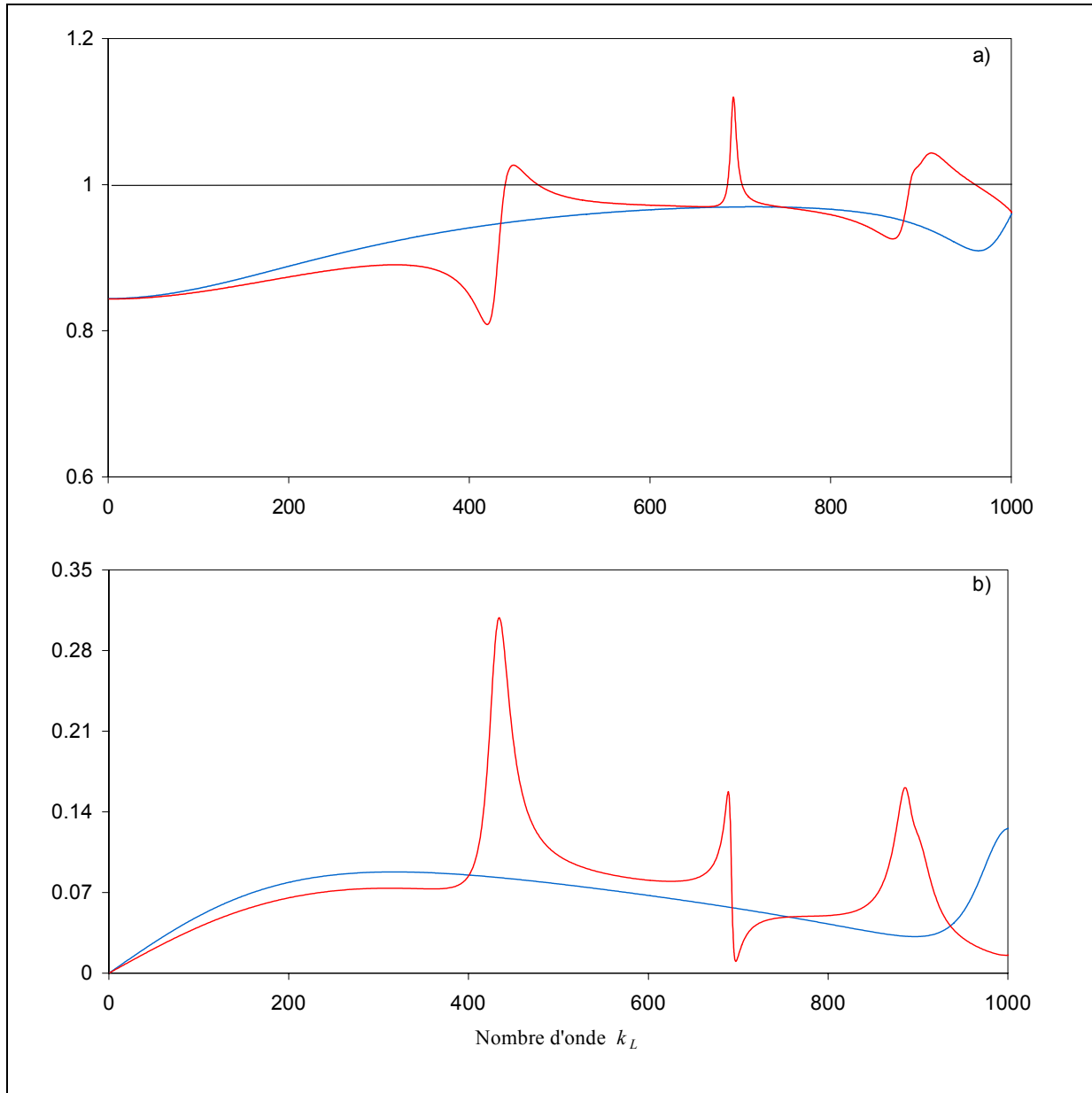


Figure 4.13 : a) courbes de dispersion  $c'_L / c_L(k_L)$  ; b) courbes d'atténuation  $\xi''_L / \xi'_L(k_L)$ .  
En bleu : cas non résonant ; en rouge : cas résonant.

Mettons maintenant en rapport ces derniers résultats avec les coefficients de réflexion et de transmission présentés sur la Figure 4.7. L'atténuation est nulle à fréquence nulle et suit une progression linéaire jusqu'à approximativement  $k_L = 80 \text{ m}^{-1}$ . Cette faible atténuation de l'onde cohérente aux basses fréquences est à l'origine du fort coefficient de transmission observé, ainsi que des oscillations périodiques du coefficient de réflexion pour  $k_L < 50 \text{ m}^{-1}$ . L'onde cohérente étant faiblement atténuée, même après un aller-retour parcouru dans l'épaisseur  $e$  du milieu effectif, elle peut donc interférer avec l'onde réfléchiée par la première interfa-

ce du milieu effectif. La disparition progressive de ces oscillations et l'annulation du coefficient de transmission résultent de l'augmentation de l'atténuation de l'onde cohérente à fréquence croissante. En vue d'une analyse plus quantitative, examinons le rapport  $L_s/e$  tracé sur la Figure 4.13. On peut estimer que l'onde cohérente est complètement atténuée au bout d'une distance parcourue supérieure à trois libres parcours moyens (son amplitude est alors au moins divisée par 20). Autrement dit, le rapport  $L_s/e$  doit être supérieure à  $1/3$  pour que l'onde cohérente puisse être transmise par le milieu effectif, et supérieure à  $2/3$  pour qu'elle puisse parcourir un aller-retour dans son épaisseur  $e$ .

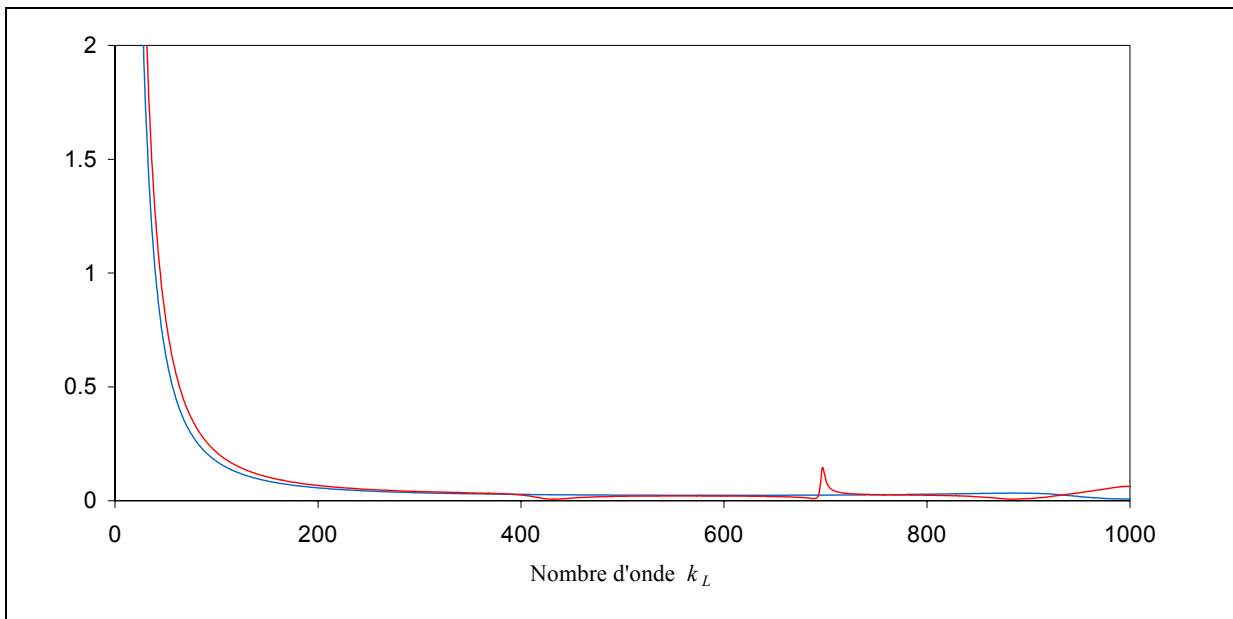


Figure 4.13 : Libre parcours moyen élastique  $L_s$  normalisé par l'épaisseur  $e$  du milieu effectif.  
En bleu : cas non résonant ; en rouge : cas résonant.

La lecture des courbes montre que le rapport  $L_s/e$  est supérieur à  $1/3$  pour  $k_L \leq 80 \text{ m}^{-1}$ , et supérieur à  $2/3$  pour  $k_L < 50 \text{ m}^{-1}$ . Aux hautes fréquences, ce rapport reste à peu près constant et égal à 0,02. La résonance située à  $k_L = 695 \text{ m}^{-1}$  fait croître ce rapport, mais celui-ci reste bien inférieur à  $1/3$  (précisément inférieur à environ 0,15). Ces résultats montrent que l'onde cohérente peut être transmise, sans être trop atténuée, pour  $k_L < 80 \text{ m}^{-1}$ , et qu'elle peut parcourir un aller-retour dans l'épaisseur  $e$  du milieu effectif à condition que  $k_L < 50 \text{ m}^{-1}$ . Ces deux fréquences limites,  $k_L = 80 \text{ m}^{-1}$  et  $k_L = 50 \text{ m}^{-1}$ , correspondent bien approximativement à l'annulation du coefficient de transmission et à la disparition des oscillations du coefficient de réflexion (cf. Figure 4.7). Au-delà de  $k_L = 80 \text{ m}^{-1}$ , la réflexion par le milieu effectif n'a pour seule contribution que la réflexion à la première interface puisque, pour  $L_s/e = 0,02$ , l'épais-

seur  $e$  correspond à une cinquantaine de libres parcours moyens. Plus précisément, pour  $L_s/e = 0,02$ ,  $L_s$  est de l'ordre de  $2D$ ,  $D$  étant la distance moyenne entre deux réseaux linéaires consécutifs ( $D \approx e/N$ , avec  $N=100$  et  $e=1$  m). L'onde cohérente est donc quasi inexistante au bout deux à trois réseaux linéaires rencontrés.

Au paragraphe III.1.3, nous avons vu que les expressions des coefficients de réflexion et de transmission, formellement identiques à ceux d'une plaque fluide dans un milieu fluide (en incidence normale), permettaient, par un passage à la limite quand  $e \rightarrow \infty$ , d'en déduire les coefficients d'une interface plane entre le milieu élastique homogène (milieu 1) et le milieu effectif (milieu 2). En utilisant donc les résultats (4.64a, b) et (4.65a, b), les coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif peuvent être réécrits à l'aide de séries de Debye [38] permettant d'interpréter le milieu effectif d'épaisseur  $e$  comme un interféromètre de Fabry-Perot. Sur la Figure 4.14, les parcours des ondes supposés être à l'origine de l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission sont décrits. Ils sont nommés A, B et C.

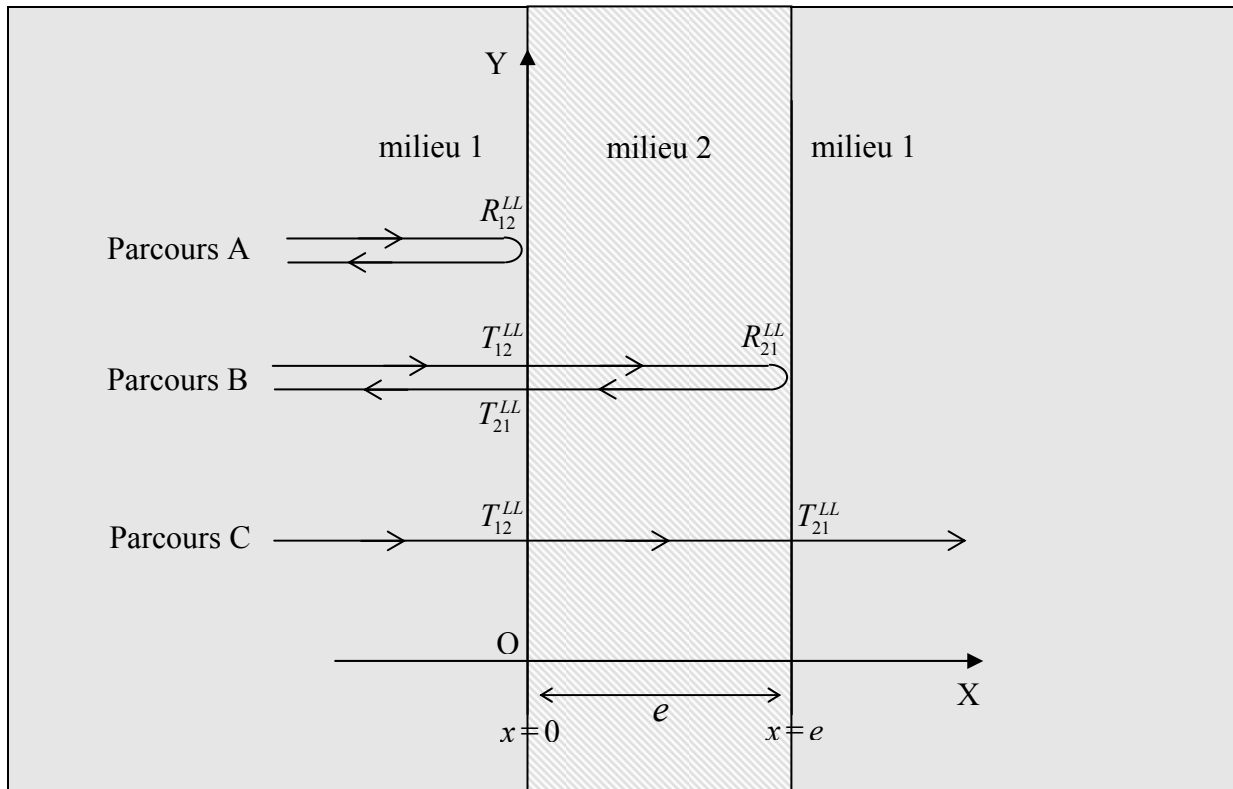


Figure 4.14 : Parcours A, B et C présumés être à l'origine de l'évolution des coefficients de réflexion et de transmission du milieu effectif.

[38] J.-M. Conoir, O. Lenoir et J.-L. Izbicki, *Acoustic interactions with submerged elastic structures. Part I. Acoustic Scattering and Resonances*, Éd. A. Guran et al., World Scientific, Singapore, 1996.



Les séries de Debye s'expriment en fonction des coefficients de réflexion et de transmission locaux présentés sur la Figure 4.14 ci-dessus. Par rapport à celles plus compliquées développées dans le troisième chapitre, les séries de Debye sont réduites en incidence normale à

$$R_{eff}^{LL} = R_{12}^{LL} + R_{12}^{LL} T_{21}^{LL} R_{21}^{LL} e^{2i\xi_L e} \sum_{m=0}^{+\infty} R_{12}^{LLm} e^{-2mi\xi_L e} \quad (4.182)$$

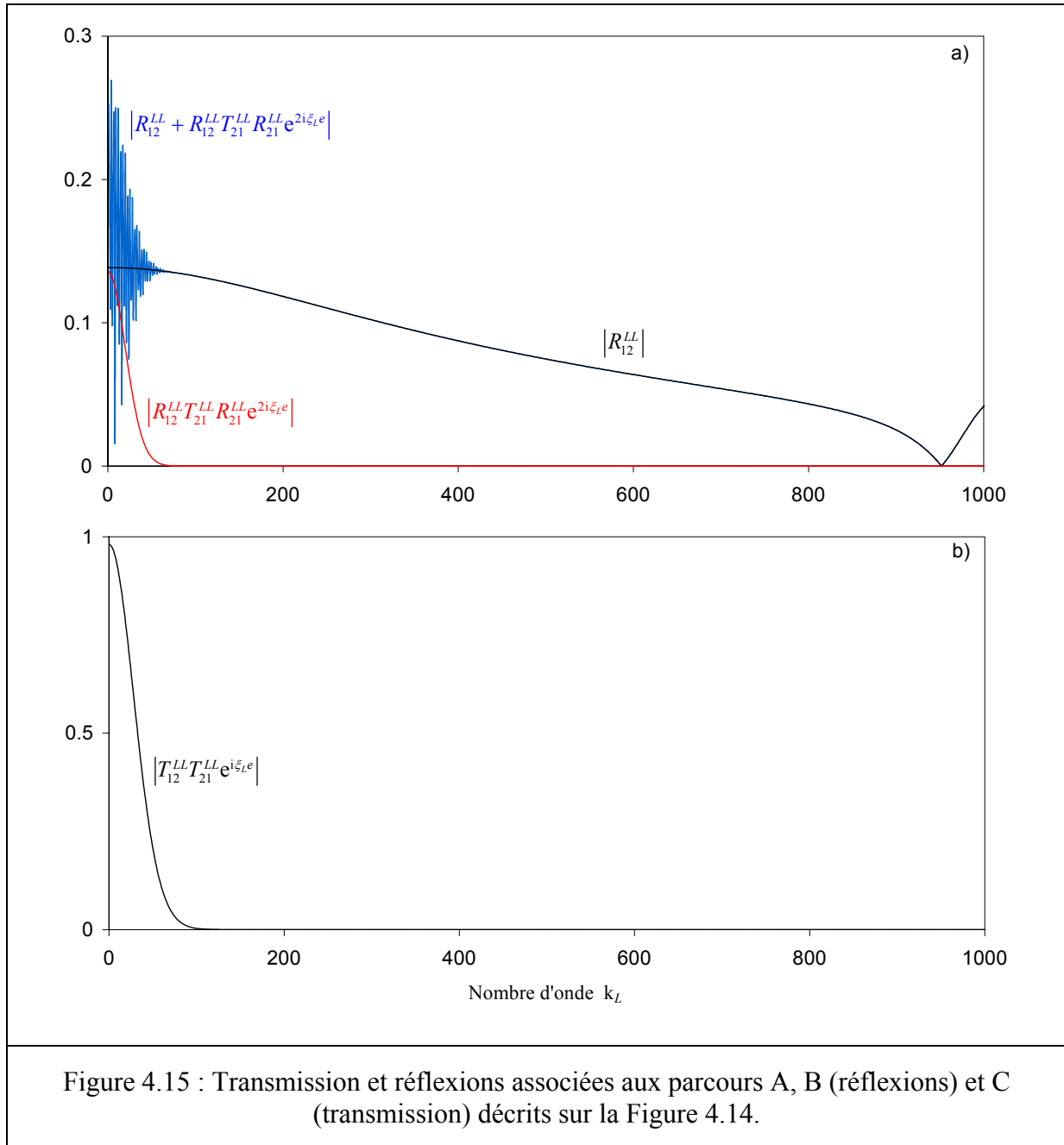
et

$$T_{eff}^{LL} = T_{12}^{LL} T_{21}^{LL} e^{i\xi_L e} \sum_{m=0}^{+\infty} R_{21}^{LL2m} e^{-2mi\xi_L e} . \quad (4.183)$$

En négligeant les termes d'ordre  $m \geq 1$  dans (4.182) et (4.183),  $R_{eff}^{LL}$  représente alors la somme des ondes empruntant les parcours A et B, et  $T_{eff}^{LL}$  l'onde empruntant le parcours C. Sur la Figure 4.15b de la page suivante, le tracé de la série (4.183), en ne conservant que le terme d'ordre 0, montre clairement que la transmission par le milieu effectif n'a pour seule contribution que la transmission directe (parcours C). Autrement dit, la contribution de l'onde cohérente qui a parcouru un aller-retour supplémentaire entre les deux interfaces du milieu effectif est complètement négligeable, même dans le domaine des basses fréquences. Pour ce qui est de la réflexion, elle est réduite, pour  $k_L > 50 \text{ m}^{-1}$ , à la seule réflexion sur la première interface  $x=0$  (parcours A). La réflexion dans le domaine des hautes fréquences est donc assimilable à la réflexion par un milieu effectif semi-infini. Comme attendu, la contribution de l'onde qui a parcouru un aller-retour supplémentaire entre les deux interfaces (parcours B) n'est plus négligeable pour  $k_L < 50 \text{ m}^{-1}$ ; l'augmentation à fréquence décroissante du terme correspondant au parcours B coïncide rigoureusement avec l'apparition des oscillations aux basses fréquences, l'amplitude des oscillations étant en outre modulée par ce terme.

Confirmant ainsi l'analyse des libres parcours moyens élastiques, les développements en séries de Debye des coefficients de réflexion et de transmission montrent clairement que :

- i) dans le domaine des hautes fréquences, l'onde cohérente ne peut parcourir une distance de l'ordre de l'épaisseur  $e$ , de sorte que le milieu effectif est assimilable à un milieu semi-infini (transmission nulle et réflexion identique à la réflexion par la première l'interface) ;
- ii) dans le domaine des basses fréquences, l'onde cohérente ne peut parcourir une distance de l'ordre de  $3e$  de sorte que la transmission est limitée à une transmission directe, et la réflexion à deux ondes réfléchies par les deux interfaces, ces ondes interférant dès lors entre elles. Il faut préciser, d'une part, que la même analyse menée pour des inclusions d'eau conduirait aux mêmes résultats. On n'a donc pas jugé utile de les présenter. D'autre part, on aboutirait aux mêmes conclusions dans le cas d'inclusions réparties aléatoirement dans les directions  $Ox$  et  $Oy$ .

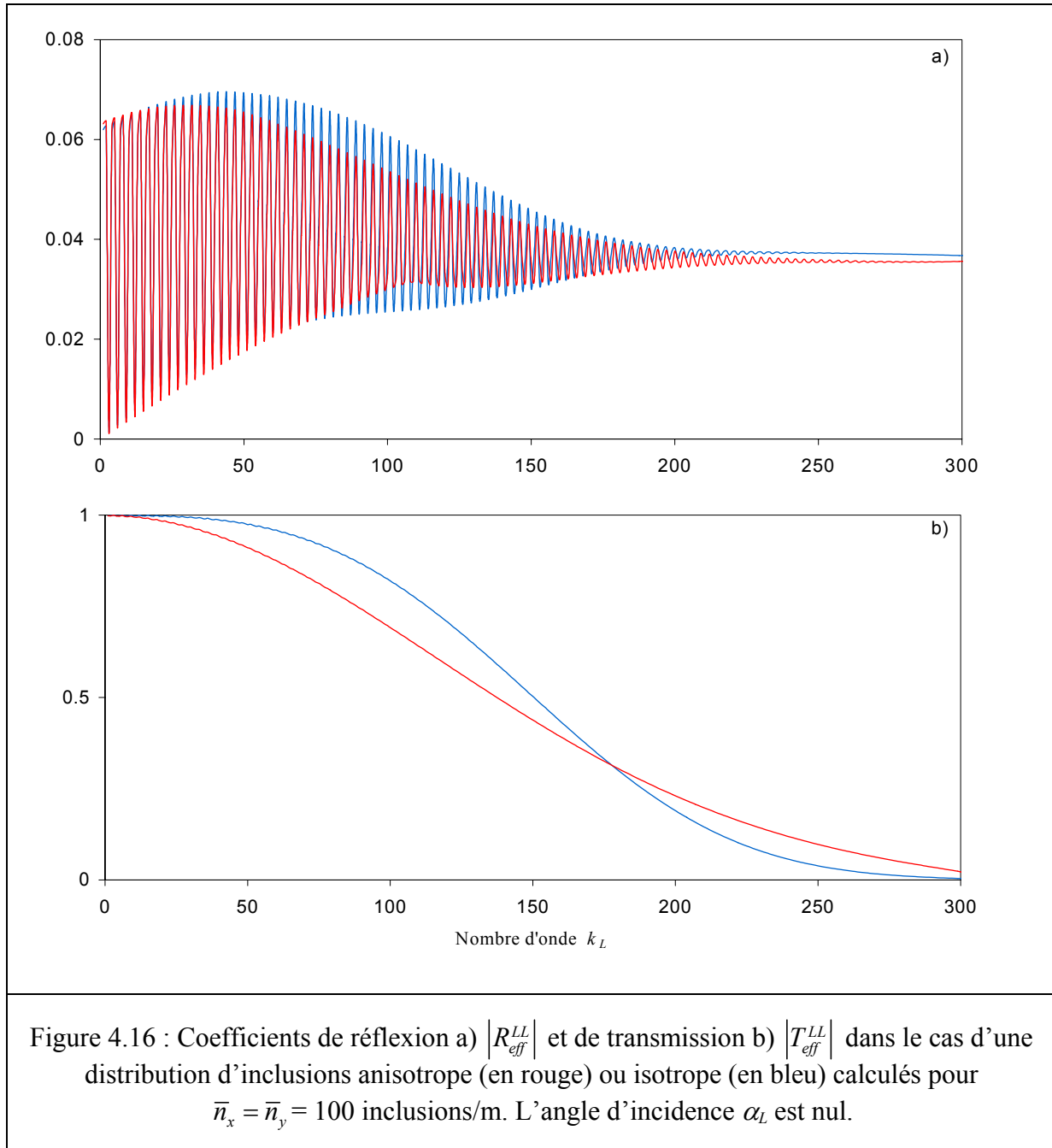


#### IV.4 Comparaison avec une distribution aléatoire dans les directions Ox et Oy

L'objectif, dans ce dernier paragraphe, est de comparer les résultats acquis jusqu'ici avec ceux obtenus dans le cas d'une répartition aléatoire d'inclusions dans les directions Ox et Oy. Autrement dit, il s'agit d'identifier les effets de l'anisotropie du milieu effectif due à la périodicité de la répartition des inclusions dans la direction Ox. Si l'on compare les formalismes dans les cas aléatoire et semi-aléatoire, la différence majeure entre les deux cas réside dans la modélisation des opérateurs de transition. Pour le cas anisotrope, les opérateurs carac-

térisent l'action d'un réseau linéaire infini sur les champs moyens (la définition des opérateurs est proche de celle des coefficients de réflexion et de transmission d'un réseau linéaire) alors que, pour le cas isotrope, les opérateurs caractérisent l'action de chaque inclusion sur les champs moyens (les opérateurs sont identifiés aux amplitudes de diffusion en champ lointain). On peut alors supposer que la réflexion et la transmission par le milieu effectif resteraient quasiment inchangées lorsque l'on passe du cas isotrope au cas anisotrope si les actions des opérateurs de transitions étaient quasiment identiques dans les deux cas. A quelle condition peut-on se rapprocher de cette situation, ou, en d'autres termes, à quelle condition la diffusion par un réseau linéaire est-elle proche de la diffusion par une seule inclusion ? Cette condition correspond en fait à une contribution négligeable des interactions multiples entre les inclusions d'un réseau linéaire, c'est-à-dire à une distance suffisamment grande entre les inclusions. Ceci rejoint une hypothèse fondamentale énoncée dans le paragraphe III.2.4 concernant la distribution aléatoire de diffuseurs dans les deux directions  $Ox$  et  $Oy$ , à savoir l'hypothèse d'une faible concentration de diffuseurs. Cette hypothèse est une conséquence directe de l'approximation de Foldy (voir paragraphe III.1.1) dont Twersky dit qu'elle est une traduction de l'approximation consistant à négliger les multiples aller-retours des ondes entre les diffuseurs. Ainsi, choisir une faible densité d'inclusions dans les réseaux linéaires (c'est-à-dire une valeur de  $\beta = d/a$  suffisamment grande) conduit à la même approximation dans la direction  $Oy$ . Pour ce qui est de la direction  $Ox$ , le choix dès le départ d'une faible densité de réseaux linéaires ( $\bar{n} = 100$  réseaux/m) a été conditionné par cette hypothèse. Finalement pour  $\beta$  suffisamment grand, s'il y a désaccord entre les résultats, ceci ne peut être dû qu'à la répartition périodique des inclusions dans la direction  $Oy$ .

Pour se placer dans des conditions optimales, considérons donc une très faible densité de  $\bar{n} = \bar{n}_x \bar{n}_y = 10^4$  inclusions/m<sup>2</sup>. Cette densité surfacique correspond à une densité linéique dans la direction  $Ox$  de  $\bar{n}_x = 100$  inclusions/m<sup>2</sup>, et de  $\bar{n}_y = 100$  inclusions/m<sup>2</sup> dans la direction  $Oy$ . Pour une distribution aléatoire de réseaux linéaires, cette valeur de  $\bar{n}_y$  revient à choisir  $\beta = 10$ . L'inconvénient de cette faible densité est qu'elle réduit considérablement le domaine fréquentiel d'étude. En effet, pour  $\beta = 10$  et  $\alpha_L = 0^\circ$ , elle correspond à  $k_L = 309 \text{ m}^{-1}$ . En incidence oblique, par exemple pour  $\alpha_L = 30^\circ$ , cette fréquence chute à  $k_L = 248 \text{ m}^{-1}$ . Cette densité est donc la plus faible qu'on puisse considérer pour conserver un domaine fréquentiel d'étude suffisamment étendu. Pour  $\alpha_L = 0^\circ$ , la Figure 4.16 de la page suivante présente les coefficients de réflexion et de transmission  $|R_{eff}^{LL}|$  et  $|T_{eff}^{LL}|$  des deux milieux effectifs, isotrope et anisotrope.



La Figure 4.16a montre que, du point de vue de la réflexion, le milieu effectif anisotrope est purement équivalent à celui isotrope. Les deux coefficients de réflexion sont en effet quasi identiques, à l'exception d'une légère différence d'amplitude aux hautes fréquences. Il est à remarquer d'autre part que les valeurs des coefficients de réflexion sont très faibles vis-à-vis de ceux obtenus pour  $\beta=3$  (cf. Figure 4.15a, par exemple). Cette caractéristique est la conséquence d'une faible atténuation (non présentée ici) liée à la faible densité d'inclusions dans chaque réseau linéaire. L'atténuation dépend en effet directement des valeurs prises par le coefficient de réflexion des réseaux linéaires qui, ici, ne dépassent pas 0,3 (contre 0,7 pour

$\beta=3$ ). Pour ce qui est de la légère différence d'amplitude constatée, elle s'explique sans nul doute par la proximité de la première fréquence de coupure dont on sait qu'elle se manifeste systématiquement par une plus ou moins brusque variation des coefficients de réflexion (et de transmission) à une fréquence légèrement inférieure. La faible densité d'inclusions explique la faible décroissance des deux coefficients de transmission dont on constate que l'accord est moins bon qu'entre les deux coefficients de réflexion. Du point de vue de la transmission, les deux milieux ne sont plus exactement équivalents. Analysons maintenant les résultats de la Figure 4.17 obtenus en incidence oblique, plus précisément pour  $\alpha_L = 30^\circ$ .

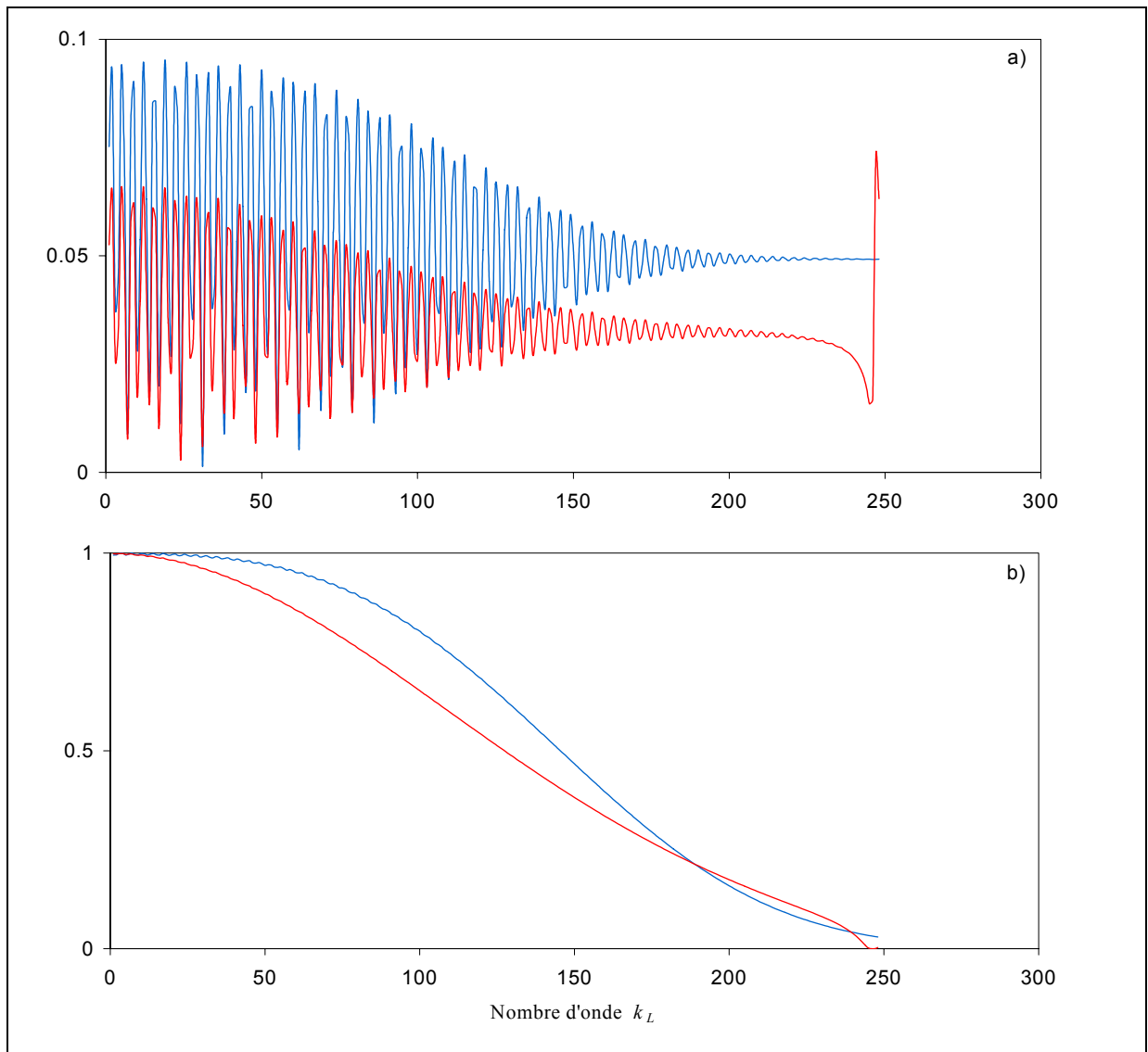
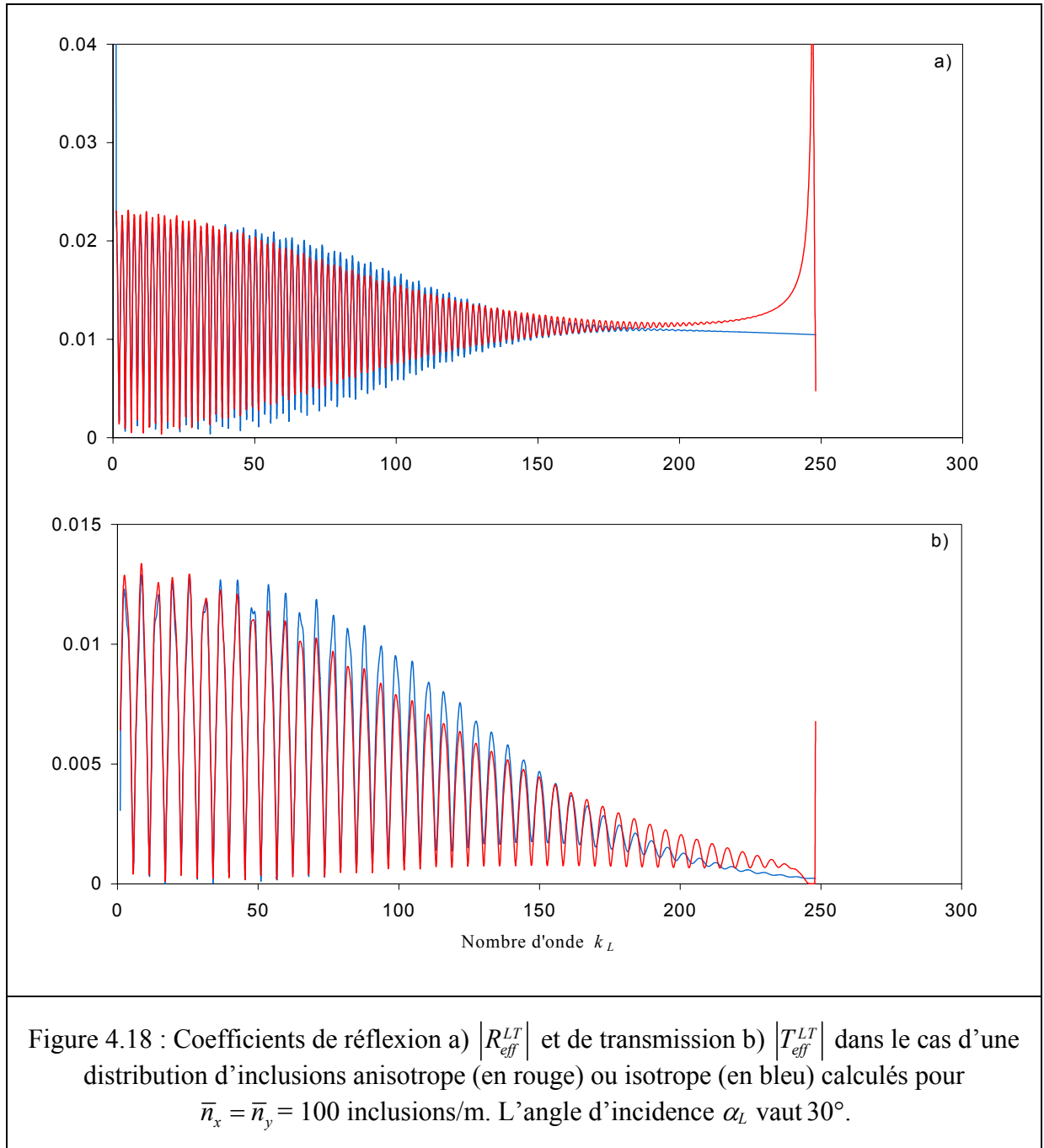


Figure 4.17 : Coefficients de réflexion a)  $|R_{eff}^{LL}|$  et de transmission b)  $|T_{eff}^{LL}|$  dans le cas d'une distribution d'inclusions anisotrope (en rouge) ou isotrope (en bleu) calculés pour  $\bar{n}_x = \bar{n}_y = 100$  inclusions/m. L'angle d'incidence  $\alpha_L$  vaut  $30^\circ$ .

Pour un angle d'incidence non nul, tant du point de vue de la réflexion que de la transmission, les deux milieux effectifs ne sont pas équivalents. La Figure 4.17a montre en effet que les amplitudes des coefficients de réflexion présentent une différence significative entre elles. Ici, cette différence ne peut plus être imputée à la première fréquence de coupure puisqu'elle est observable dans le domaine des basses fréquences. Pour ce qui est des coefficients de transmission, la différence d'amplitude significative déjà constatée en incidence normale reste inchangée, excepté à proximité de la première fréquence de coupure. Comme attendu, l'effet de l'anisotropie du milieu effectif apparaît donc plus clairement en incidence oblique, car l'onde cohérente possède une composante propagative dans la direction de périodicité de la distribution d'inclusions.

Pour conclure ce paragraphe, examinons maintenant les coefficients  $|R_{eff}^{LT}|$  et  $|T_{eff}^{LT}|$  présentés sur la Figure 4.18 de la page suivante. Excepté à proximité de la première fréquence de coupure, on constate que les coefficients du milieu isotrope et ceux de celui anisotrope coïncident parfaitement. Tant du point de vue de la transmission que de la réflexion  $L \rightarrow T$ , les deux milieux effectifs sont donc équivalents. Cette équivalence est surprenante. L'onde cohérente de type transversal se propage en effet dans le milieu effectif sous un angle non nul, précisément  $\alpha_T = 14,2^\circ$ . Cette onde cohérente a donc une composante propagative non nulle dans la direction de périodicité de la distribution d'inclusions. Ce comportement identique des deux milieux effectifs vis-à-vis de la transition  $L \rightarrow T$  est inexplicable. Pour ce qui est des oscillations observées, celles du coefficient de réflexion  $|R_{eff}^{LT}|$  sont dues aux interférences entre l'onde transversale réfléchie par la première interface avec celle ayant parcouru un aller-retour dans l'épaisseur  $e$  avec la vitesse  $c'_T = \omega / \xi'_T$  avant d'être transmise par la première interface. Les fréquences des maxima d'amplitude sont en effet données par  $\xi'_T e \cos \alpha_T = n\pi$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Contrairement au coefficient de transmission  $|T_{eff}^{LL}|$ , le coefficient  $|T_{eff}^{LT}|$  présente des oscillations de nature interférentielle. En réalité, ces oscillations étaient bien présentes pour la transmission  $L \rightarrow L$  mais étaient masquées, dans ce cas, par les fortes amplitudes. Ces oscillations ont pour origine les interférences entre les ondes transversales transmises directement au travers du milieu effectif avec celles ayant parcouru un aller-retour supplémentaire parcouru dans l'épaisseur  $e$ . Les fréquences des maxima d'amplitude sont en effet données par la relation  $\xi'_T e \cos \alpha_T = n\pi / 2$ .



## V. CONCLUSION

Les champs moyens réfléchis et transmis par une distribution aléatoire de réseaux linéaires ont été calculés en suivant deux voies : l'une consistant à moyenner les champs sur un certain nombre de réalisations de la distribution aléatoire, et l'autre consistant à adapter la théorie de Twersky à ce type de milieu aléatoire. La première fournit des résultats exacts et permet l'introduction de distances limites d'approche entre les réseaux linéaires ; la seconde est basée sur une approximation (l'approximation de Foldy) et n'inclut pas de distance limite d'approche. En incidence normale ou oblique, mais sans prise en compte de distance limite d'approche, les résultats concordent. La théorie de Twersky, pour ce type de milieu aléatoire, a donc été validée. Ceci constitue sans aucun doute le résultat majeur de ce chapitre, voire de l'ensemble de ce manuscrit, car, à notre connaissance, aucune théorie de milieux effectifs n'avait jusqu'ici été validée par un calcul exact. Cette validation a été permise par la relative rapidité du calcul de la diffusion par une distribution de réseaux linéaires.

L'introduction d'une distance limite d'approche entre les réseaux linéaires a montré que la théorie de Twersky reste valide lorsque cette distance n'excède pas le diamètre des inclusions. Cette théorie reste donc un modèle correct de la propagation d'ondes dans les milieux aléatoires même sans possibilité d'interpénétration des diffuseurs. Des distances limites d'approche plus importantes conduisent peu à peu à une distribution proche d'une distribution périodique, avec l'émergence progressive des bandes interdites.

En l'absence de distance limite d'approche, l'analyse des résultats donnés par la théorie de Twersky a montré que, même pour une faible densité de réseaux linéaires, les ondes cohérentes sont caractérisées par des fortes atténuations : la transmission au travers du milieu effectif s'annule très vite lorsque la fréquence augmente et la réflexion est réduite à la réflexion sur la première interface (l'onde cohérente est complètement atténuée au bout de quelques réseaux linéaires rencontrés). La dernière analyse axée sur l'anisotropie du milieu effectif (due à la périodicité des réseaux linéaires) a confirmé un résultat attendu, à savoir des comportements très proches des milieux effectifs anisotropes et isotropes (l'isotropie résulte d'une répartition aléatoire et uniforme des inclusions dans les deux directions de l'espace) en incidence normale. Sans surprise, les comportements des deux milieux se différencient à mesure que l'on s'éloigne de l'incidence normale.



---

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

Le cadre général dans lequel s'inscrivait ce travail était la diffusion multiple dans les milieux solides élastiques. L'objectif visé était l'étude de la diffusion multiple par une infinité d'inclusions cylindriques, périodiquement ou aléatoirement distribuées. La diffusion par un nombre fini d'inclusions nécessitait d'être préalablement étudiée pour identifier la nature des interactions dominantes (interférentielle ou résonante) entre ces diffuseurs, et notamment déterminer comment elles se manifestent en milieu élastique par rapport à celles existantes entre des tubes élastiques immergés dans un fluide, par exemple. Les interactions, et tout particulièrement celles de type résonant, peuvent en effet jouer un rôle important lorsque les milieux multidiffusants, périodiques ou aléatoires, sont caractérisés par de très fortes concentrations de diffuseurs.

Au cours du premier chapitre, l'étude de la diffusion par un réseau de deux ou trois inclusions a permis d'identifier clairement deux types d'interaction entre les inclusions selon la nature du fluide qu'elles renferment. Pour des inclusions d'air, l'interaction ne se manifeste qu'au travers de phénomènes interférentiels ; pour des inclusions d'eau, un fort couplage résonant apparaît. Par rapport à des tubes élastiques immergés dans l'eau, le couplage de type résonant se manifeste ici par des effets très différents. Il se traduit notamment par l'émergence de nouvelles résonances (en nombre plus important que dans le cas de tubes immergés dans un fluide) dont le nombre est sans rapport évident avec le nombre de diffuseurs qui interagissent. En outre, ces nouvelles résonances ne sont pas nécessairement issues d'une fragmentation des résonances initialement présentes en situation découplée (c'est-à-dire lorsque les inclusions du réseau sont très éloignées les unes des autres). Certaines résonances apparaissent en effet à des fréquences très éloignées des résonances initiales.

L'étude au deuxième chapitre de la diffusion par un réseau linéaire infini et périodique a mis en évidence un comportement résonant inattendu, très différent de celui d'un réseau fini. En effet, si l'interaction résonante se manifeste bien par l'émergence de nouvelles résonances, les fréquences d'excitation de la plupart des résonances sont dépendantes de l'angle sous lequel on excite le réseau infini. Ce résultat, qui révèle un effet particulier de la géométrie du réseau (lorsque ses inclusions sont très proches les unes des autres), n'a pas pu être interprété avec succès. Au cours de ce chapitre, un nouvel outil de détection et d'analyse des

résonances a été développé. Cet outil est basé sur le concept de matrice de diffusion. Comme cette matrice a également été définie (et utilisée pour vérifier nos calculs de champs diffusés) dans le premier chapitre, on pourrait donc envisager à l'avenir d'exploiter le même outil pour mener une analyse plus rigoureuse des résonances des réseaux finis.

Pour l'interprétation des résultats de ce deuxième chapitre, et notamment la dépendance des fréquences de résonance vis-à-vis de l'angle d'excitation, d'autres analyses permettraient de lever certaines interrogations. En premier lieu, il serait intéressant de comparer les résultats avec ceux obtenus dans le cas d'un réseau infini de tubes immergés dans l'eau. Ceci permettrait de savoir si le comportement résonant du réseau est caractéristique des interactions en milieu élastique. Le deuxième point serait d'analyser le comportement d'un réseau linéaire fini en augmentant progressivement le nombre de ses inclusions. Ainsi, de proche en proche, il serait possible d'estimer le nombre d'inclusions au-delà duquel le comportement résonant du réseau fini change de nature. Enfin, une perspective d'analyse plus immédiate serait de comparer les résultats avec ceux relatifs à un réseau infini d'inclusions d'air pour s'assurer que les spectres singuliers obtenus avec des inclusions d'eau résultent d'une interaction résonante, et non d'une éventuelle interaction de type interférentiel.

Le troisième chapitre avait trait aux réseaux bidimensionnels, constitués d'un empilement d'un nombre fini de réseaux linéaires infinis. Conformément aux théories des milieux périodiques, la présence de bandes interdites et permises dans le spectre des fréquences a été observée. L'évolution des bandes interdites a ensuite été analysée en fonction de la densité de diffuseurs (plus la densité est forte et plus les bandes interdites s'étalent), de la nature des inclusions (à chaque résonance des inclusions d'eau, une nouvelle bande interdite et deux bandes passantes de part et d'autre apparaissent) et de l'angle sous lequel sont excités les réseaux (apparition de nouvelles bandes interdites en incidence oblique, celles-ci étant associées à la propagation d'ondes guidées entre deux plans réticulaires horizontaux). Les effets dus à une perturbation de la périodicité ont également été analysés. L'une des perturbations consistait à introduire un défaut aléatoire sur la position de chaque réseau linéaire. L'information principale qui en ressort est que les bandes interdites sont en fin de compte très sensibles à ce type de perturbation, disparaissant assez tôt pour un faible désordre introduit. Cette dernière étude se voulait un trait d'union avec le quatrième chapitre.

En effet, en calculant la moyenne statistique (sur un grand nombre de réalisations du désordre) des champs réfléchis et transmis par une distribution aléatoire de réseaux linéaires infinis, les champs moyens ont pu être comparés avec ceux prédits par la théorie probabiliste de Twersky. Cette théorie est basée sur une approximation, l'approximation de Foldy, dont il

fallait vérifier le bien-fondé. Finalement, la comparaison des résultats issus des deux méthodes de calcul (moyenne statistique et théorie de Twersky) a été un succès puisque les résultats concordent parfaitement. La validation de cette théorie constitue sans doute l'un des résultats majeurs présentés dans ce manuscrit.

Pour ce qui concerne les perspectives d'étude, les théories des deux derniers chapitres pourraient être généralisées (sans doute) aisément aux hautes fréquences en prenant en compte les effets de la diffraction de chaque réseau linéaire. Ceci permettrait de ne plus subir les limitations imposées par la première fréquence de coupure (qui à l'inconvénient de décroître avec l'angle d'incidence, et en fonction de la densité d'inclusions dans les réseaux linéaires). La deuxième perspective intéressante, et envisageable à très court terme, serait de remplacer chaque diffuseur d'un réseau linéaire par un ensemble fini de diffuseurs, constituant ainsi une « super cellule ». Le but serait d'étudier des réseaux périodiques tel que ceux mentionnés en introduction (par exemple, les réseaux de pores répartis en quinconce servant d'isolants phoniques). Concernant les expériences, pour contourner les difficultés rencontrées lors de l'usinage des trous dans le bloc d'aluminium de grande épaisseur, l'idée (inspirée de certaines études concluantes dans des plaques de PVC perforées) serait d'exciter des modes de Lamb dans une plaque d'aluminium, beaucoup plus facile à percer. Ceci permettrait d'envisager le perçage d'un nombre beaucoup plus important de trous (avec les configurations souhaitées), nous permettant ainsi de nous placer des conditions plus proches de la théorie.

---

## *Références bibliographiques*

---

**[1] S. Lethuillier, P. Pareige, J.-L. Izbicki et J.-M. Conoir**

*Scattering by two adjacent immersed shells : theory and experiment*, Proceedings of the fourth European Conference on Underwater Acoustics, Éd. A. Alippi et G. B. Cannelli, Rome, pp. 837-842, septembre 1998.

**[2] S. Lethuillier, P. Pareige, J.-M. Conoir et J.-L. Izbicki**

*Scattering by two very close immersed shells : numerical results*, Proceedings of the IEEE International Ultrasonics Symposium, Lake Tahoe, Nevada, USA, 731-734, pp. 17-21, octobre 1999.

**[3] P.-Y. Le Bas, F. Luppé, J.-M. Conoir et H. Franklin**

*N-shell cluster in water : Multiple scattering and splitting of resonances*, J. Acoust. Soc. Am. 115, pp. 1460-1467, 2004.

**[4] P.-Y. Le Bas et P. Pareige**

*Numerical and experimental study of the résonant behavior of N elastic shells embedded in water*, Proceedings of the IEEE International Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 50th Anniversary and Joint Conference, Montréal, 24-27 août 2004.

**[5] Elm. Kheddioui, J.-M. Conoir, P. Pareige et J.-L. Izbicki**

*Resonant scattering by two elastic cylindrical shells*, ACUSTICA-acta acustica 84, 980-986, 1998.

**[6] J.-L. Izbicki, J.-M. Conoir et N. Veksler**

*New results for Franz and Rayleigh waves propagating around a cylindrical vacuum / solid interface*, Wave Motion 28, 227-239, 1998.

**[7] S. Robert, J.-M. Conoir, H. Franklin, F. Luppé**

*Resonant elastic scattering by a finite number of cylindrical cavities in an elastic matrix*, Wave Motion 40, pp. 225-239, 2004.

**[8] S. Robert, J.-M. Conoir, H. Franklin, F. Luppé**

*Resonant multiple elastic scattering by a finite number of cylindrical cavities in an elastic matrix*, Proceedings of the 5<sup>th</sup> World Congress on Ultrasonics, Paris, France, 7-10 septembre 2003.

**[9] S. G. Solomon, H. Überall et K. B. Yoo**

*Mode conversion and resonance scattering of elastic waves from a cylindrical fluid-filled cavity*, Acustica 55, pp. 147-159, 1984.

**[10] V. Twersky**

*Multiple Scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders*, J. Acoust. Soc. Am. 24, pp. 42-46, 1952.

**[11] V. K. Varadan**

*Multiple scattering of acoustic, electromagnetic and elastic waves, Acoustic, electromagnetic and elastic wave scattering. Focus on the T-matrix approach*, Pergamon, New-york, pp. 103-134, 1980.

**[12] S. K. Bose et A. K. Mal**

*Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite*, Int. J. Solids. Structures 9, pp. 1075-1085, 1973.

**[13] J. A. Wheeler**

*On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure*, Phys. Rev. 52, pp. 1107-1122, 1937.

**[14] W. Heisenberg**

*Die beobachtbaren Grössen in der Theorie der Elementarteilchen*, Z. Phys. 120, pp. 513-538, 1943, *Die beobachtbaren Grössen in der Theorie der Elementarteilchen (II)*, Z. Phys. 120, pp. 643-702, 1943.

**[15] L. Flax, L. R. Dragonette et H. Überall**

*Theory of elastic resonance excitation by sound scattering*, J. Acoust. Soc. Am. 63 , pp.723-731, 1978.

**[16] M. Abramowitz et I. A. Stegun**

*Handbook of mathematical functions*, Dover Publications Inc., New York, 1980.

**[17] L. D. Landau et E. M. Lifchitz**

*Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory*, Pergamon Press, Oxford, 1966.

**[18] S. Derible**

*Caractérisation complète des résonances acoustiques par une nouvelle méthode fondée sur le diagramme d'Argand*, Thèse de Doctorat, Université du Havre, 1995.

**[19] S. Derible, P. Rembert et J.-L. Izbicki**

*Experimental determination of acoustic resonance width via the Argand Diagram*, Acustica 84, pp. 270-279, 1998.

**[20] G. Maze**

*Diffusion d'une onde acoustique plane par des cylindres et des tubes immergés dans l'eau ; isolement et identification des résonances*, Thèse de Doctorat, Université de Rouen, 1984.

**[21] G. Maze et J. Ripoche**

*Méthode d'Isolement et d'Identification des Résonances (M.I.I.R) de cylindres et de tubes soumis à une acoustique plane dans l'eau*, Rev. Phys. Appl. 18, pp. 319-326, 1984.

**[22] S. Robert, H. Franklin, J.-M. Conoir**

*Elastic resonances of a periodic infinite array of fluid-filled cylindrical cavities embedded in an elastic medium*, Journal of Sound and Vibration, article soumis en octobre 2004.

**[23] V. Twersky**

*On the scattering of waves by an infinite array*, IEEE Trans. AP-4, pp. 330-345, 1956.

**[24] V. Twersky**

*On the scattering of waves by an infinite array of circular cylinders*, IEEE Trans. AP-10, pp. 737-765, 1962.

**[25] C. Audoly et G. Duméry**

*Modelling of compliant tube underwater reflectors*, J. Acoust. Soc. Am. 87, pp. 1841-1846, 1990.

**[26] E. B. Danila, J.-M. Conoir, P. Pareige et J.-L. Izbicki**

*Multichannel resonant scattering theory applied to the acoustic scattering by an eccentric elastic cylindrical shell immersed in a fluid*, Wave Motion 28, pp. 297-318, 1998.

**[27] P. Rembert, H. Frankin et J.-M. Conoir**

*Resonant Scattering Theory applied to a fluid-filled cylindrical cavity*, J. Acoust. Soc. Am. 63, pp.723-731, 2004.

**[28] V. Twersky**

*Elementary functional representations of Schlömilch series*, Archives of Rational Mechanics Analysis 8, pp. 270-279, 1998.

**[29] G. Dumery**

*Contribution à la théorie des réseaux d'objets diffringents*, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille, 1967.

**[30] W. Von Ignatowski**

*Zur theorie der Gitter*, Annalen der Physik 44, pp. 369-427, 1914.

**[31] M. S. Choi et Y. M. Cheong**

*Matrix theory of elastic resonance scattering and its application to fluid-filled cavities*, Acustica Acta Acustica 85, pp. 170-180, 1999.

**[32] L. N. Childs**

*A concrete introduction to higher algebra*, Springer-Verlag, New-York Inc., Deuxième édition, pp. 267-268, 2000.

**[33] G. Breit et E. P. Wigner**

*Capture of slow neutrons*, Phys. Rev. 49, pp. 519-531, 1936.

**[34] S. Robert, J.-M. Conoir, H. Franklin**

*Scattering by two-dimensional gratings composed of cylindrical in an elastic matrix*, Proceeding of the 75<sup>th</sup> Anniversary meeting (147<sup>th</sup> Meeting) of the Acoustical Society of America, New-York, New-York, 24-28 mai 2004.

**[35] C. Audoly et G. Dumery**

*Acoustic wave propagation in media containing two-dimensional periodically spaced elastic inclusions*, Phys. Acoust., Éd. O. Leroy et M.A. Breazeale, Plenum Press, New York, pp. 199-204, 1991.

**[36] L. S. Mulholland et M. A. Heckl**

*Multi-directional sound wave propagation through a tube bundle*, Journal of Sound and Vibration 176, pp. 377-398, 1994.

**[37] M. A. Heckl et L. S. Mulholland**

*Some recent developments in the theory of acoustic transmission in tube bundles*, Journal of Sound and Vibration 179, pp. 37-62, 1995.

**[38] J.-M. Conoir, O. Lenoir et J.-L. Izbicki**

*Acoustic interactions with submerged elastic structures. Part I. Acoustic Scattering and Resonances*, Éd. A. Guran *et al.*, World Scientific, Singapore, 1996.

**[39] L. Brillouin**

*Waves propagation in periodic structures*, McGraw-Hill, New-York, 1946.

**[40] C. Kittel**

*Physique de l'état solide*, Dunod Université, Cinquième édition, 1983.

**[41] L. L. Foldy**

*The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers*, Phys. Rev. 67, pp. 107-119, 1944.

**[42] V. Twersky**

*On scattering of waves by random distributions. I. Free-space Scatter formalism*, J. Math. Phys. 3, pp. 700-715, 1962.

**[43] P. C. Waterman et R. Truel**

*Multiple scattering of waves*, J. Math. Phys. 2, pp. 512-537, 1961.

**[44] J. G. Fikioris et P. C. Waterman**

*Multiple scattering of waves. II 'hole corrections' in the scalar case*, J. Math. Phys. 5, pp. 1413-1420, 1964.

**[45] D. Sornette**

*Acoustic waves in random media*, Acustica 67, Part I : pp. 199-215, Part II : pp. 251-265, Part III : Acustica 68, pp. 15-25, 1989.

**[46] A. Tourin, M. Fink et A. Derode**

*Multiple scattering of sound*, Waves in random media 10 R31-R60, 2000.

**[47] V. Twersky**

*On propagation in random media of discrete scatterers*, Proceeding of the American Mathematical Society Symposium on Stochastic Process in Mathematical Physics and Engineering 16, pp. 84-116, 1964.

**[48] A. Ishimaru**

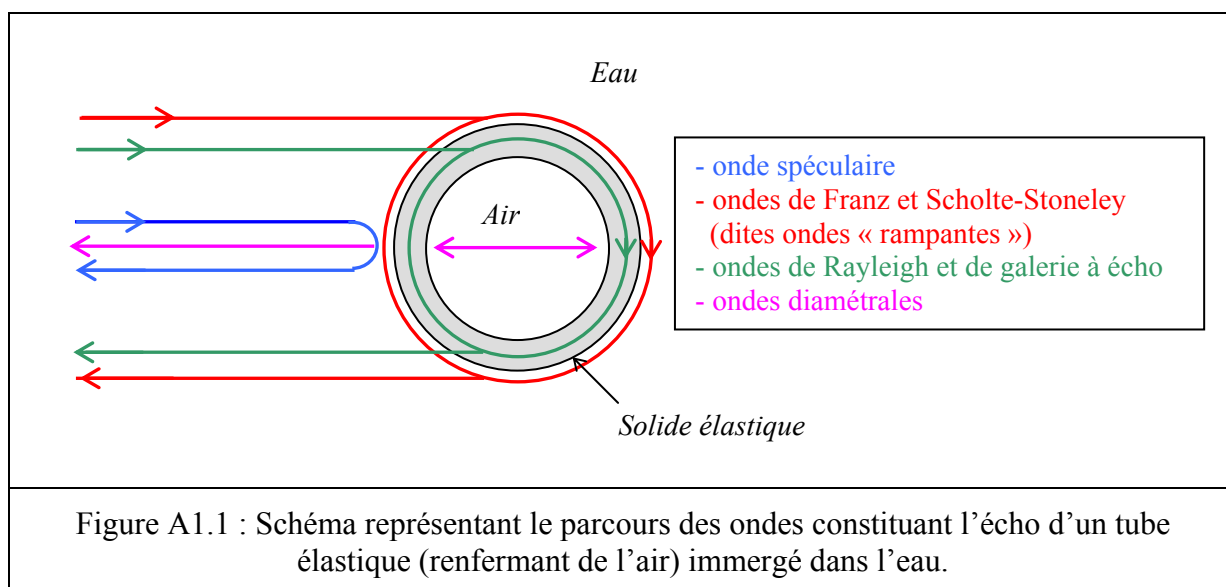
*Wave propagation and scattering in random media*, Academic Press, New-York, pp. 253-286, 1978.

**TUBE ÉLASTIQUE IMMERGÉ DANS L'EAU OU INCLUSION D'EAU  
DANS UN SOLIDE ÉLASTIQUE :  
DESCRIPTION DES ONDES D'INTERFACE EN PRÉSENCE**

Cette annexe a pour but de préciser les principales caractéristiques des ondes d'interface susceptibles d'être excitées autour d'un tube élastique (rempli d'air) immergé dans l'eau, et autour d'une inclusion d'eau dans un milieu solide élastique. Les caractéristiques qui nous intéressent sont celles précisément qui déterminent si une onde d'interface peut résonner ou non autour du tube ou de l'inclusion, et si cette onde peut donner lieu à une interaction de type résonnant entre des tubes ou des inclusions très proches les uns des autres.

**TUBE ÉLASTIQUE IMMERGÉ DANS L'EAU**

Quand un tube est insonné par une onde plane harmonique, deux phénomènes peuvent être distingués : la réflexion dite spéculaire et le rayonnement dû aux ondes d'interface qui se propagent dans le tube ou autour de celui-ci. L'onde spéculaire présente peu d'intérêt (dans la mesure où elle n'apporte pas d'information sur la cible) parce qu'elle est en principe, comme son nom l'indique, une image fidèle de l'onde incidente. Seules les ondes d'interface, quand elles résonnent, permettent de caractériser la cible (dimensions et caractéristiques mécaniques). La Figure A1.1 ci-dessous présente les principales ondes constituant l'écho d'un tube.





Les ondes diamétrales sont des ondes stationnaires à l'intérieur du tube ; leurs résonances sont liées aux multiples aller-retours entre les interfaces du tube. Pour ce qui concerne les ondes d'interface, elles peuvent être classées en deux groupes : les ondes dites « rampantes », et les ondes de Rayleigh et de galerie à écho. Les caractéristiques de ces ondes sont les suivantes.

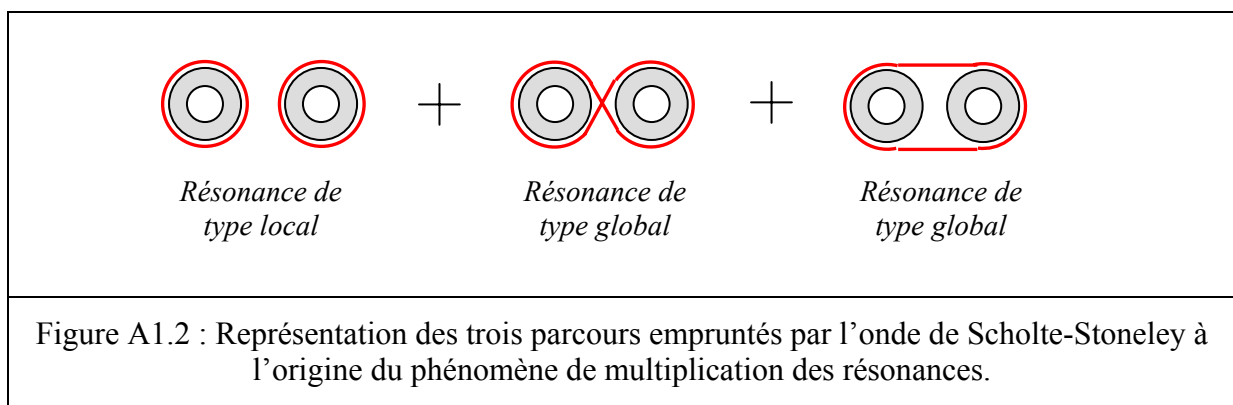
#### ↪ *Les ondes rampantes*

Les ondes de Franz et de Scholte-Stoneley sont appelées communément ondes « rampantes » parce qu'elles se propagent sur la surface externe de la cible, côté fluide (lorsqu'elles se propagent le long de l'interface, leur énergie est en effet essentiellement localisée dans l'eau à proximité du support élastique). Il s'ensuit donc ces ondes ont comme caractéristique commune de dépendre surtout de la géométrie de la cible et des propriétés du milieu fluide (l'eau) englobant celle-ci. Leur vitesse de phase est toujours inférieure à celle des ondes de volume dans l'eau, et la génération de ces ondes nécessite une excitation tangentielle à l'interface courbe du tube. La différence principale entre l'onde de Franz et l'onde de Scholte-Stoneley réside dans le fait que la première est caractérisée par une forte atténuation ne lui permettant pas de parcourir plusieurs (voire une seule) circonférences autour du tube.

#### ↪ *Les ondes de Rayleigh et de galerie à écho*

Le second groupe d'ondes d'interface est composé des ondes de Rayleigh et de galerie à écho. Ces ondes se propagent essentiellement dans le milieu solide élastique (elles se propagent le long de l'interface externe du tube en rayonnant la majorité de leur énergie dans l'épaisseur du tube). Il s'ensuit que ces ondes ont des caractéristiques intimement liées à la fois aux caractéristiques géométriques et mécaniques de la cible (et secondairement aux caractéristiques du fluide). Elles n'existent pas dans le cas idéal d'une cible infiniment rigide. Leur vitesse de phase est supérieure à celle des ondes de volume dans l'eau. Elles nécessitent une génération sous un angle critique non nul (l'excitation n'est pas tangentielle à l'interface courbe du tube).

Toutes les ondes d'interface décrites ci-dessus sont susceptibles de résonner. En effet, à certaines fréquences d'excitation, les distances parcourues par ces ondes peuvent correspondre à un nombre entier de leur longueur d'onde ; ces ondes bouclent donc en phase avec elles-mêmes. Si l'on considère une cible de deux tubes très proches l'un de l'autre, seules les ondes rampantes peuvent interagir d'un tube à l'autre car leur support est le milieu fluide environnant les tubes. Parmi les deux ondes rampantes, seule l'onde de Scholte-Stoneley peut interagir entre les deux tubes car l'onde de Franz est trop atténuée pour « voyager » d'un tube à l'autre. Les parcours susceptibles d'être empruntés par l'onde de Scholte-Stoneley sont reproduits ci-dessous.



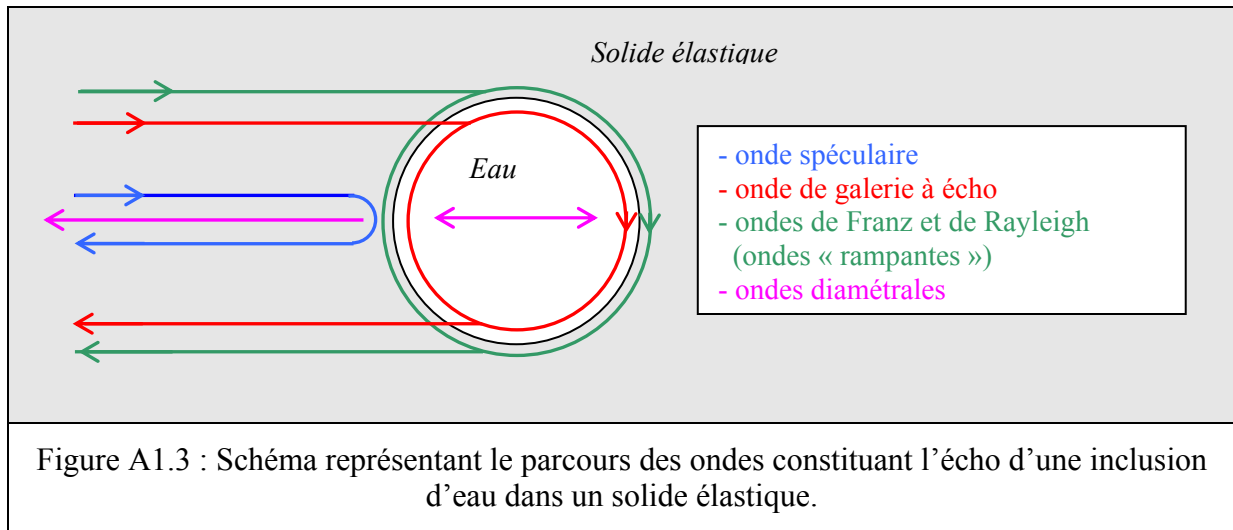
Comme l'indique ces schémas, l'onde de Scholte-Stoneley peut interagir entre les deux tubes en suivant deux parcours distincts. A des fréquences d'excitations (assez voisines), elle peut boucler en phase le long de ces deux parcours (résonances de type global), et autour de chacun des deux tubes (résonances de type local). Ceci explique le phénomène de multiplication des résonances (par rapport à la situation où les tubes sont éloignés l'un de l'autre) qui caractérise l'interaction résonante entre deux tubes très proches l'un de l'autre.

#### INCLUSION D'EAU DANS UN SOLIDE ÉLASTIQUE

Par rapport à des tubes immergés dans un fluide, l'étude de la diffusion par une inclusion d'eau (ou d'air) dans un solide élastique a fait l'objet de peu de publications. Ici, pour la description des caractéristiques des ondes d'interface en présence, nous nous basons sur deux principaux articles [6,9]. L'insuffisance des travaux portant sur le sujet invite à penser que les

[6] J.-L. Izbicki, J.-M. Conoir et N. Veksler, *New results for Franz and Rayleigh waves propagating around a cylindrical vacuum / solid interface*, Wave Motion 28, pp. 227-239, 1998.

ondes d'interface en présence sont sans doute plus nombreuses que celles décrites ci-dessous. L'étude des spectres de diffusion d'une inclusion d'eau ou d'air montre cependant que leur contribution est négligeable vis-à-vis de toutes les ondes d'interface constituant l'écho de ces diffuseurs. Cet écho a pour contributions l'onde spéculaire et les ondes diamétrales, ainsi que les réémissions des ondes rampantes et de l'onde de galerie à écho.



#### Les ondes rampantes

Les ondes rampantes sont constituées de deux ondes de Franz (l'une de polarisation longitudinale et l'autre de polarisation transversale) et de l'onde de Rayleigh (de polarisation principalement transversale). Ces ondes se propagent dans le milieu solide élastique à proximité de l'interface courbe de l'inclusion. Il s'ensuit que ces ondes dépendent essentiellement des caractéristiques mécaniques du milieu solide et du rayon de l'inclusion. Les ondes de Franz longitudinale et transversale se propagent respectivement avec des vitesses de phase inférieures à celles des ondes longitudinales et transversales dans le solide élastique. La vitesse de phase de l'onde de Rayleigh est toujours inférieure à celle des ondes transversales. L'onde de Rayleigh se distingue des ondes de Franz par une atténuation beaucoup moins importante. Ces ondes rampantes existent quel

[9] S. G. Solomon, H. Überall et K. B. Yoo, *Mode conversion and resonance scattering of elastic waves from a cylindrical fluid-filled cavity*, *Acustica* 55, pp. 147-159, 1984.

que soit le fluide contenu dans l'inclusion (air ou eau), et leur génération nécessite une excitation tangentielle.

#### ↪ *L'onde de galerie à écho*

L'onde de galerie à écho a pour support l'eau contenue dans l'inclusion et rayonne principalement son énergie dans le milieu externe élastique à proximité de l'interface. Cette onde ne peut être excitée dans le cas d'une inclusion d'air. Ayant pour support l'eau à l'intérieur de l'inclusion, cette onde dépend moins des caractéristiques mécaniques du solide élastique que des caractéristiques de l'eau.

Si l'on considère deux inclusions d'air très proches l'une de l'autre, parmi les deux types d'ondes rampantes existantes, l'interaction entre les deux inclusions a plus de chance de se produire par l'intermédiaire de l'onde de Rayleigh en raison de son atténuation relativement faible. Pour deux inclusions d'eau, l'onde de Rayleigh est toujours susceptible de voyager d'une inclusion à l'autre, et éventuellement de boucler en phase le long des parcours présentés sur la Figure A1.2. Cependant, le spectre d'une inclusion d'eau [7] montre que le comportement résonant de ce diffuseur est largement dominé par les résonances de l'onde de galerie à écho, nettement moins atténuée que l'onde de Rayleigh. Par conséquent, s'il y a couplage résonant entre deux inclusions d'eau par l'intermédiaire de l'onde de Rayleigh, le phénomène de multiplication des résonances ne sera pas observé car les résonances de l'onde de Rayleigh seront « noyées » par les fortes résonances de l'onde de galerie à écho. En conclusion, si un phénomène de multiplication des résonances est observé, on peut penser que ce couplage ne doit mettre en jeu que les ondes de galerie à écho.

**DIFFUSION PAR UN RÉSEAU LIMITÉ :  
ANALYSE DES TEMPS DE CALCUL NUMÉRIQUE**

L'objectif, dans cette annexe, est d'étudier l'évolution des temps de calcul mis en jeu pour la détermination des champs acoustiques diffusés, et pour la vérification de l'unitarité de la matrice  $S$ , dans le cas de réseaux de deux ou trois inclusions. Les paramètres de cette étude sont la distance entre les inclusions et la fréquence, car ils déterminent les dimensions des systèmes linéaires à résoudre, et par conséquent les temps de calcul nécessaires à leur résolution. Les résultats sont donnés pour une rétrodiffusion  $L \rightarrow L$  et dans une configuration en éclipse. La fréquence d'horloge du processeur de l'ordinateur utilisé est de 2,3 GHz.

**CRITÈRE DE CONVERGENCE NUMÉRIQUE**

Les champs diffusés par un réseau limité sont définis par des séries convergentes (cf. (1.39) et (1.40)), qu'il s'agit de tronquer convenablement. En notant  $F_N$  une série quelconque  $F$  tronquée à l'ordre  $N$ , soit

$$F_N = \sum_{n=-N}^{+N} f_n, \quad (\text{A2.1})$$

alors, de façon systématique, nous avons considéré que  $F$  avait convergé à l'ordre  $N$  si et seulement si

$$\left| \frac{F_N - F_{N-1}}{F_N} \right| < 0,001 \quad \text{et} \quad \left| \frac{F_{N-1} - F_{N-2}}{F_{N-1}} \right| < 0,001. \quad (\text{A2.2})$$

Lorsque (A2.2) est vérifié,  $F$  a donc été approximée par  $F_N$ . Tout au long de ce manuscrit, du premier au dernier chapitre, ce critère de convergence numérique a été utilisé chaque fois qu'une série devait être calculée.

**TEMPS DE CALCUL DES CHAMPS DIFFUSÉS**

L'ordre  $N$  de convergence des séries (1.39) et (1.40) obéit à une fonction croissante de la fréquence et à une fonction décroissante de  $\beta$  (en rappelant que ce paramètre exprime la distance  $d$  entre les inclusions :  $d = \beta a$  où  $a$  est le rayon des inclusions). Pour un réseau de

deux inclusions d'eau, la Figure A2.1 présente l'évolution de  $N$  en fonction de la fréquence réduite  $x_L$ , et pour cinq valeurs de  $\beta$ .

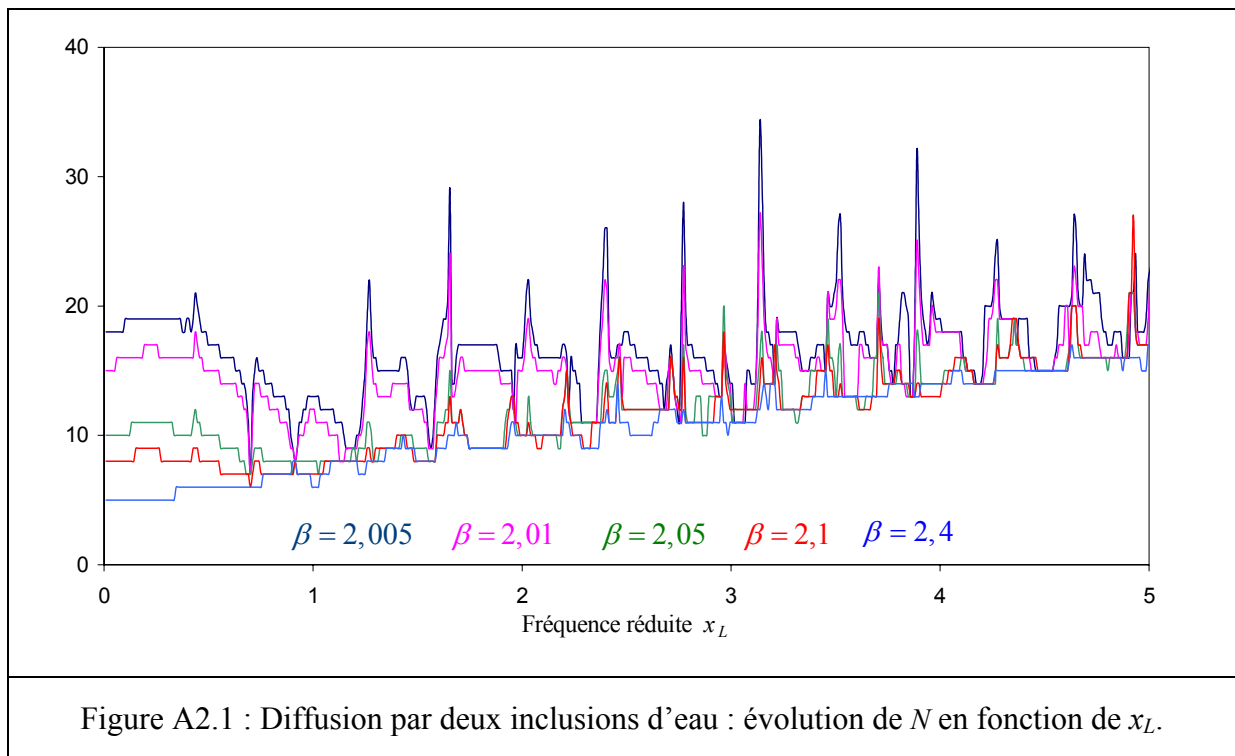
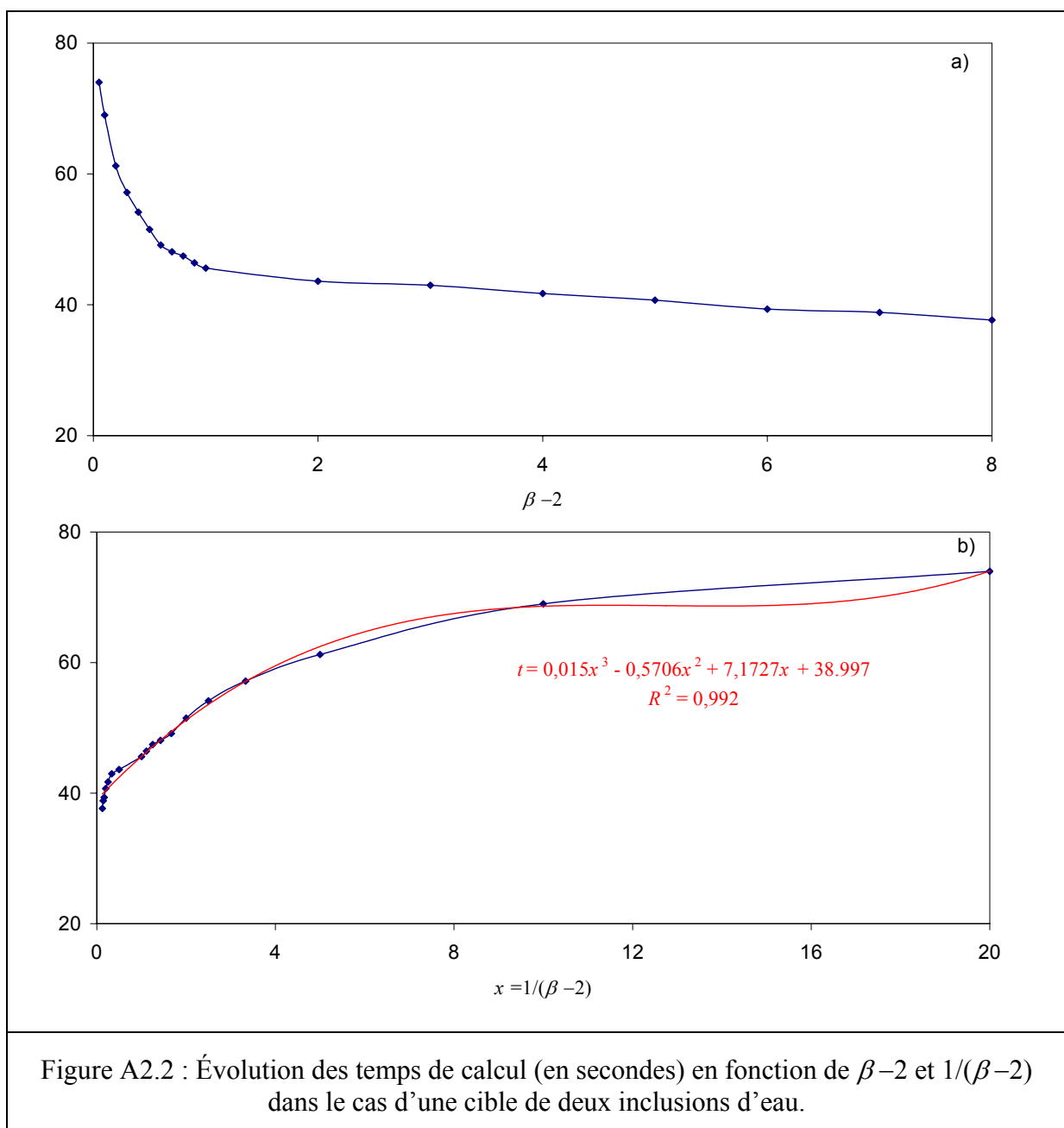


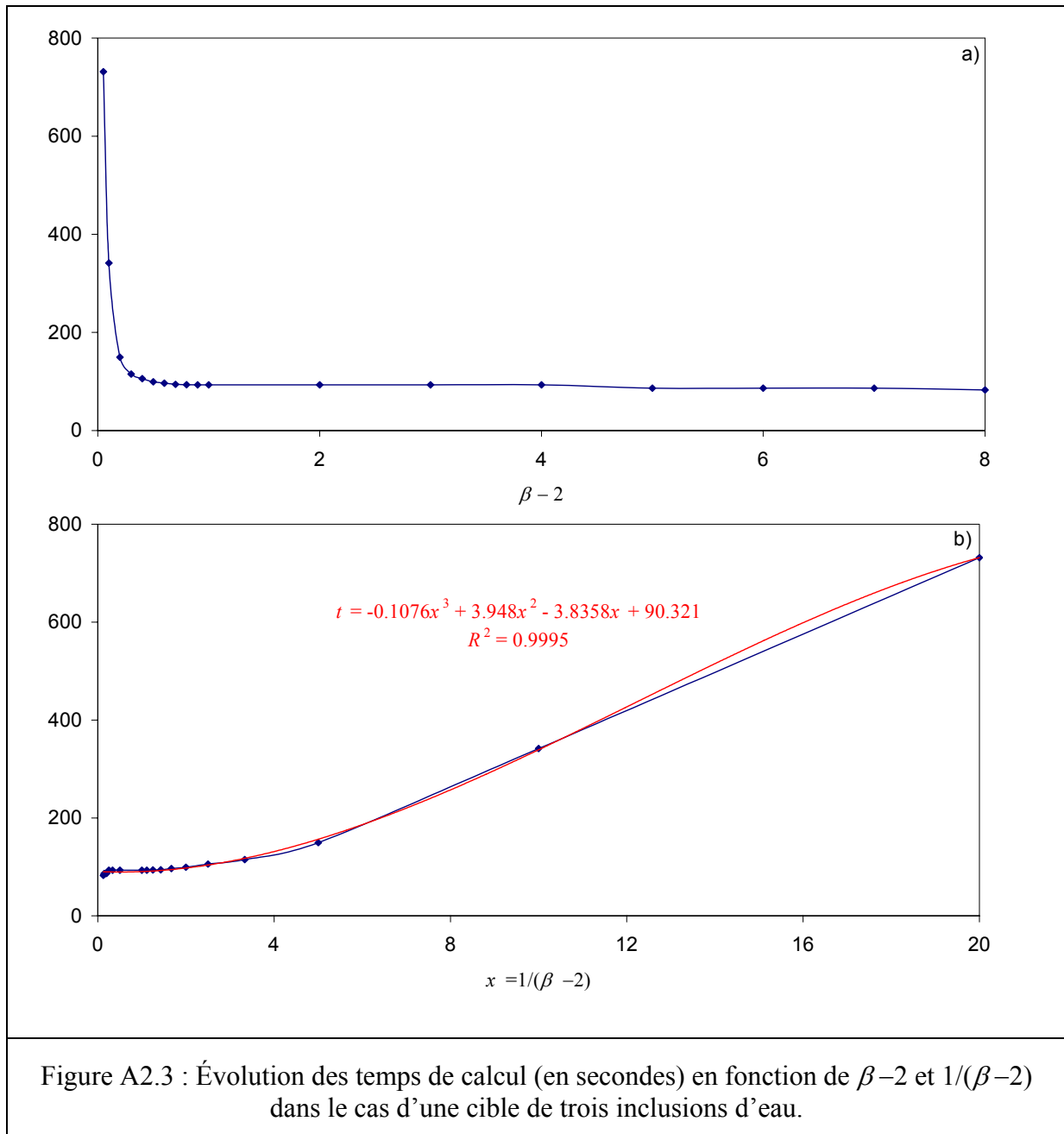
Figure A2.1 : Diffusion par deux inclusions d'eau : évolution de  $N$  en fonction de  $x_L$ .

La Figure A2.1 confirme clairement que  $N$  croît lorsque  $\beta$  diminue ou lorsque la fréquence augmente. Les pics présents sur l'ensemble des courbes sont situés aux fréquences de résonance de la cible. La croissance de  $N$  en fonction de  $\beta$  est plus prononcée autour de ces fréquences de résonance. Pour une valeur de  $\beta$  égale à 2,4, on constate que la croissance de  $N$  avec  $x_L$  est globalement linéaire :  $N = 3E(x_L) + 5$  ( $E(x_L)$  étant la partie entière de  $x_L$ ). Pour des valeurs plus importantes de  $\beta$ , cette évolution reste quasiment inchangée. Cette valeur particulière de  $\beta$  correspond précisément à la valeur critique  $\beta_c$  introduite dans le premier chapitre. Cette valeur critique détermine les distances pour lesquelles les inclusions interagissent peu ou fortement. Il est donc clair que l'ordre de convergence des séries définissant les champs diffusés est directement lié au degré d'interaction entre les diffuseurs. Mathématiquement, les champs diffusés par chacune des deux inclusions sont couplés dans le formalisme par les opérateurs de Graff et, plus précisément, par les fonctions de Hankel de première espèce  $H_{n-m}^{(1)}(k_{L,T}r_{\varepsilon\tau})$ , avec  $r_{\varepsilon\tau} = d$  (cf. Equation (1.20)). Cette fonction est en effet la seule qui soit fonction de la distance  $d$  entre les diffuseurs. Le module de cette fonction varie inversement avec son argument  $k_{L,T}d$ . Quand  $d$  (ou  $\beta$ ) décroît, son module croît. Par suite, on peut montrer que les coefficients de diffusion issus du système matriciel (1.34) ont des valeurs (en module)

d'autant plus élevées (pour un mode de vibration  $n$ ) que le module de la fonction de Hankel de première espèce est grand. Ainsi, l'ordre  $N$ , au-delà duquel les valeurs des coefficients de diffusion sont peu significatives, augmente quand  $d$  diminue. Cet ordre  $N$  détermine le rang  $M$  de la matrice du système (1.34) à résoudre :  $M = 4(2N+1)$ . A titre d'exemple, si  $N=35$  (il s'agit de l'ordre maximal observé sur les courbes de la Figure A2.1 pour  $\beta=2,005$ ), la matrice est de rang 284 (elle comporte donc 80656 éléments). Les temps de calcul sont alors quasiment consacrés à la seule résolution du système. La Figure A2.2 présente l'évolution des temps de calcul en fonction de  $\beta$  pour le tracé d'un spectre dans le domaine  $0 < x_L \leq 5$  (avec un pas de calcul de 0,01).



Sur la Figure A2.2b, des courbes de tendance, en rouge, sont présentées. Leur équation et leur coefficient de détermination  $R^2$  (correct puisque proche de l'unité) sont également donnés. Rigoureusement dans les mêmes conditions, la Figure A2.3 donne l'évolution des temps de calcul dans le cas d'une cible de trois inclusions.



En comparant les courbes de la Figure A2.3 avec celles de la Figure A2.2, on constate que, pour des valeurs de  $\beta$  assez grandes (supérieures à environ 2,4), les temps de calcul sont à peu près deux fois plus importants lorsque l'on passe d'une cible de deux à trois inclusions. Ces temps restent cependant faibles et de même ordre. Par contre, pour des valeurs plus faibles,



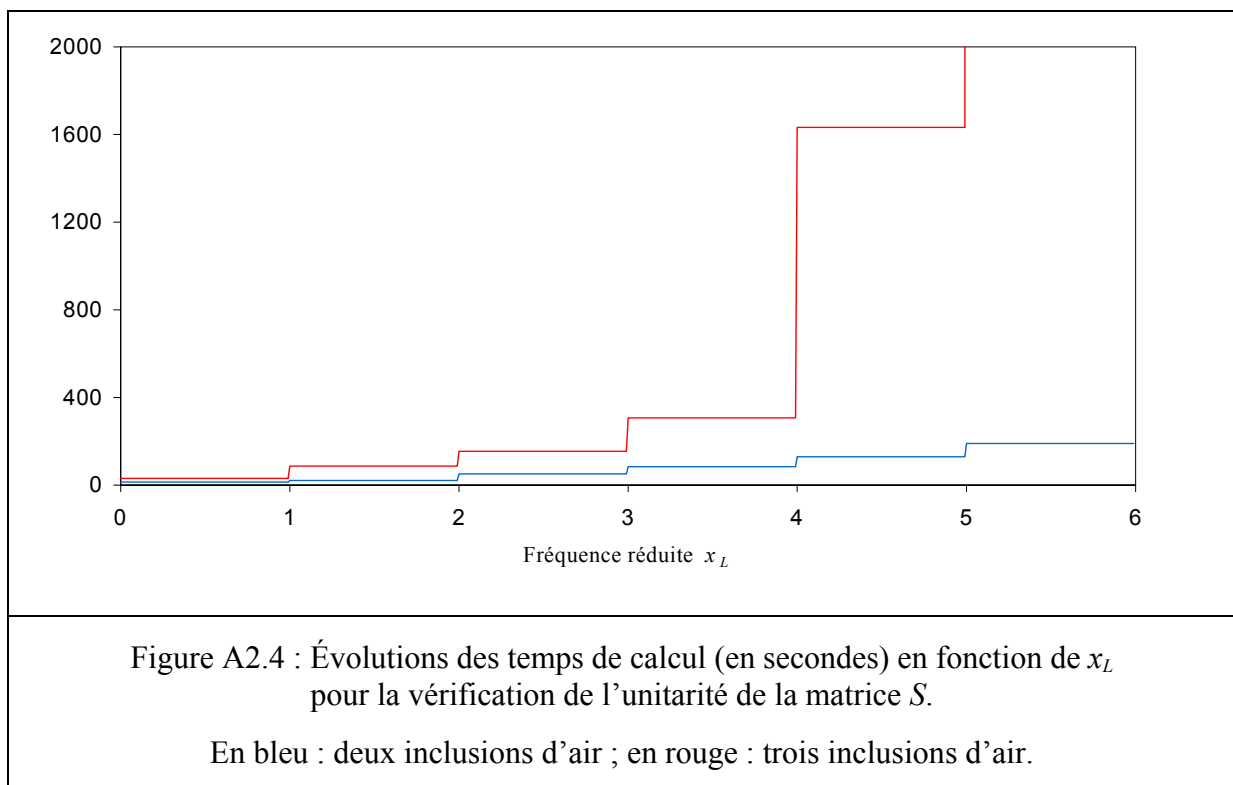
par exemple  $\beta=2,1$  (il s'agit de l'une des valeurs choisies dans l'étude numérique du premier chapitre), les temps de calcul sont à peu près décuplés. En effet, pour trois diffuseurs, le rang  $M$  de la matrice du système à résoudre devient  $M = 6(2N+1)$ . En reprenant  $N=35$ , le rang de la matrice passe donc à 426 (elle comporte 181476 éléments). Cette augmentation des dimensions du système avec le nombre d'inclusions est à l'origine de la croissance très rapide des temps de calcul. Ces observations mettent clairement en évidence les limitations du calcul présenté dans le premier chapitre lorsque les cibles comportent un nombre assez important de diffuseurs (et très proches les uns des autres). Il faut de plus souligner que le pas de fréquence  $x_L$  a été choisi ici assez grand (0,01) alors que la présence de fines résonances mises en évidence au cours de notre étude nécessiterait, pour leur détection, un pas dix fois plus fin (ce qui décuplerait de nouveau les temps de calcul). Le calcul permet d'envisager en fin de compte l'étude de cibles comportant un assez grand nombre de diffuseurs (de l'ordre de quelques dizaines) à condition que l'espacement entre ces diffuseurs soit suffisamment grand (et en étant peut-être moins exigeant sur le respect du critère de convergence numérique et/ou la résolution fréquentielle).

#### TEMPS DE CALCUL POUR LA VÉRIFICATION DE L'UNITARITÉ DE LA MATRICE $S$

Pour vérifier l'unitarité de la matrice  $S$ , la part la plus importante des temps de calcul réside dans le calcul de tous les éléments de cette matrice. Si l'on considère la matrice  $S_1$  (cf. Equation (1.110)), par exemple, elle est construite à partir de quatre matrices blocs infinies. Notons alors  $P$  l'ordre de troncature de ces matrices. Pour vérifier numériquement l'unitarité de  $S_1$ , son produit hermitique a été calculé pour un ordre  $P$  croissant jusqu'à ce que ce produit fournisse des éléments unitaires (sur la diagonale) ou nuls (hors de la diagonale) avec une précision de 0,01%. Quand  $S_1$  est estimée unitaire à un ordre  $P$ , son rang  $M$  est alors donné par  $M=2(2P+1)$ . Le calcul des éléments de cette matrice a alors nécessité la résolution de  $2(2P+1)$  systèmes matriciels (cf. Equation (1.83)), ces systèmes étant eux-mêmes de dimensions infinies. En notant  $Q$  l'ordre de troncature de ces systèmes,  $Q$  est alors précisément l'ordre de convergence des quatre séries de (1.76) à (1.79).

Pour  $2 < \beta \leq 3$ , le suivi en fonction de la fréquence des ordres  $P$  et  $Q$  (pour lesquels  $S_1$  a été estimée unitaire) a permis d'établir la relation empirique suivante :  $P=Q+20$  où  $Q$  est donné par  $Q=15+5E(x_L)$ . Les relations pour  $\beta > 3$  n'ont pas été cherchées. Précisons seulement que les ordres  $P$  et  $Q$  sont respectivement des fonctions croissantes et décroissantes de

$\beta$ . Concrètement, avec une fréquence réduite  $x_L$  de 5 (il s'agit du cas extrême), on a  $Q=40$  et  $P=60$ . La matrice  $S_1$  est donc une matrice de rang 242 dont les éléments sont obtenus en résolvant 242 systèmes de 324 équations linéaires chacun. Par suite, même à fréquence fixée, les temps de calcul sont très longs. Ces temps de calcul ne permettent pas d'envisager une vérification de l'unitarité de  $S_1$  (ou de  $S_2$ ) de façon systématique, c'est-à-dire en tout point d'un spectre. Au cours de l'étude numérique du premier chapitre, l'unitarité de cette matrice a été utilisée pour valider des évolutions inattendues des spectres (comme par exemple, sur les diagrammes de la Figure 1.22, la présence inattendue de résonances éloignées de celles d'une seule inclusion d'eau). La Figure A2.4 ci-dessous présente les évolutions des temps de calcul en fonction de  $x_L$  pour deux cibles de deux et trois inclusions d'air. Ces temps de calcul ont été chronométrés pour  $\beta=2,4$ .



La croissance par paliers des temps de calcul est directement liée aux relations empiriques entre  $P$ ,  $Q$  et  $x_L$  données plus haut. L'information principale fournie par la Figure A2.4 est la croissance brutale des temps de calcul lorsque l'on passe de deux à trois diffuseurs. En effet, plus le nombre de diffuseurs augmente, et plus les dimensions des systèmes matriciels à résoudre sont importantes. Ces évolutions des temps de calcul mettent en évidence les limitations de l'utilisation du formalisme de la matrice  $S$  lorsque les cibles comportent un nombre assez important de diffuseurs, et tout particulièrement aux hautes fréquences.

### CALCUL DES SÉRIES DE SCHLÖMILCH

Les séries de Schlömilch sont rencontrées dans le deuxième chapitre lors du calcul de la diffusion par un réseau linéaire et infini d'inclusions distribuées périodiquement. Les séries qui nous intéressent ont pour expressions :

$$\sigma_{2q}(z, \alpha) = 2(-1)^q \sum_{p=1}^{+\infty} H_{2q}^{(1)}(pz) \cos(pz \sin \alpha), \quad (\text{A3.1})$$

$$\sigma_{2q+1}(z, \alpha) = 2(-1)^q \sum_{p=1}^{+\infty} H_{2q+1}^{(1)}(pz) \sin(pz \sin \alpha). \quad (\text{A3.2})$$

L'utilisation directe des formules (A3.1) et (A3.2) est mal adaptée au calcul numérique en raison des temps de calcul assez longs qu'elles nécessitent. Ces temps de calcul sont dus, d'une part, aux calculs répétés des séries de Hankel et, d'autre part, à la convergence assez lente de ces deux séries. Il est alors nécessaire de transformer ces séries pour obtenir des expressions analytiques mettant en jeu des temps de calculs moins importants. Ce travail a été effectué par Twersky [28] et Dumery [29]. Pour l'ordre 0, ils obtiennent l'expression

$$\begin{aligned} \sigma_0(z, \alpha) = & -1 + \frac{2i}{\pi} \log\left(\frac{4\pi}{z}\right) + \frac{i}{\pi} (\psi(K) + \psi(-K)) + \frac{2}{z \cos \alpha} \\ & + \frac{2i}{z} \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sin u_p} + \frac{1}{\cos u_p} + \frac{1}{\sin u_{-p}} + \frac{1}{\cos u_{-p}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

avec

$$K = \frac{z \sin \alpha}{2\pi}, \quad (\text{A3.4})$$

$$\cos u_p = \sin \alpha + \frac{2p\pi}{z}, \quad \sin u_p = \left(1 - \cos^2 u_p\right)^{1/2}, \quad (\text{A3.5})$$

et la fonction « digamma »

---

[28] J.V. Twersky, *Elementary functional representations of Schlömilch series*, Archives of Rational Mechanics Analysis 8, pp. 270-279, 1998.

[29] G. Dumery, *Contribution à la théorie des réseaux d'objets diffringents*, Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille, 1967.

$$\psi(K) = \frac{d \log(\Gamma(1+K))}{dK}. \quad (\text{A3.6})$$

Pour les ordres pairs, la série de Schlömilch (A3.1) peut être approximée par

$$\begin{aligned} \sigma_{2q}(z, \alpha) = & \frac{2}{z} \left[ \frac{e^{2iqu_0}}{\sin u_0} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \frac{e^{2iqu_p}}{\sin u_p} + \frac{e^{-2iqu_p}}{\sin u_{-p}} \right) \right] + \frac{i(-1)^q}{q\pi} \\ & + \frac{i(-1)^q}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (p+q)!}{(2p)!(q-p)!} \left( \frac{4\pi}{z} \right)^{2p} B_{2p}(K), \end{aligned} \quad (\text{A3.7})$$

où  $B_{2q}$  est le polynôme de Bernoulli [16] d'ordre  $2q$ . Pour les ordres impairs, la série de Schlömilch (A3.2) est, quant à elle, approximée par

$$\begin{aligned} \sigma_{2q+1}(z, \alpha) = & \frac{2}{z} \left[ \frac{e^{2i(q+1)u_0}}{\sin u_0} + \sum_{p=1}^{+\infty} \left( \frac{e^{i(2q+1)u_p}}{\sin u_p} + \frac{e^{-i(2q+1)u_p}}{\sin u_{-p}} \right) \right] \\ & + \frac{i(-1)^q}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (p+q)!}{(2p+1)!(q-p)!} \left( \frac{4\pi}{z} \right)^{2p+1} B_{2p+1}(K). \end{aligned} \quad (\text{A3.8})$$

La rapidité de convergence de (A3.7) et (A3.8) vient, entre autres choses, de ce qu'elles contiennent des termes de la forme

$$\frac{e^{iqu_p}}{\sin u_p}$$

qui tendent exponentiellement vers zéro lorsque  $p$  tend vers l'infini. Quand  $p$  est suffisamment grand,  $u_p$  devient en effet imaginaire pur. En utilisant ces expressions approchées, la part la plus importante des temps de calcul est en fait consacrée au calcul des polynômes de Bernoulli. Concrètement, nous avons eu besoin de calculer des séries de Schlömilch dont l'ordre était au maximum de 41. Au vu de (A3.8), il y avait donc 41 polynômes de Bernoulli à calculer, de l'ordre 1 à l'ordre 41, celui d'ordre 41 étant composé de 21 monômes non nuls.

---

[16] M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications Inc., New York, 1980.

**DIFFUSION PAR UN RÉSEAU LINÉAIRE INFINI :  
ANALYSE DES TEMPS DE CALCUL NUMÉRIQUE**

Le but, dans cette annexe, est de préciser les temps de calcul des champs transmis ou réfléchis (les temps sont les mêmes) par un réseau linéaire infini, et de les comparer avec ceux mis en jeu dans le calcul des champs diffusés par un réseau limité de trois diffuseurs. Les temps présentés sont ceux chronométrés pour le calcul des spectres  $L \rightarrow L$  dans le domaine fréquentiel  $0,2 \leq x_L \leq 1$  (le pas de calcul est 0,001). Le paramètre pris en compte est  $\beta$ . Ce dernier varie entre 2,05 et 3 (avec  $a=1$  mm) ; la première fréquence de coupure correspond, quelle que soit la valeur de  $\beta$  comprise entre ces deux valeurs, à une fréquence réduite  $x_L$  supérieure à 1. Le réseau infini est excité en incidence normale, de même que le réseau limité (celui-ci est constitué d'inclusions distribuées périodiquement dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde incidente).

La Figure A4.1 présente les évolutions des temps de calcul des champs diffusés par le réseau infini et par celui limité. La Figure A4.2 donne les courbes de tendance avec leur équation et leur coefficient de détermination  $R^2$ . L'information principale qui en ressort est que, quelle que soit la valeur de  $\beta$ , le calcul du spectre d'un réseau infini est un calcul (très) rapide, ne dépassant jamais 5 minutes (et 1,5 minute pour  $\beta > 2,2$ ).

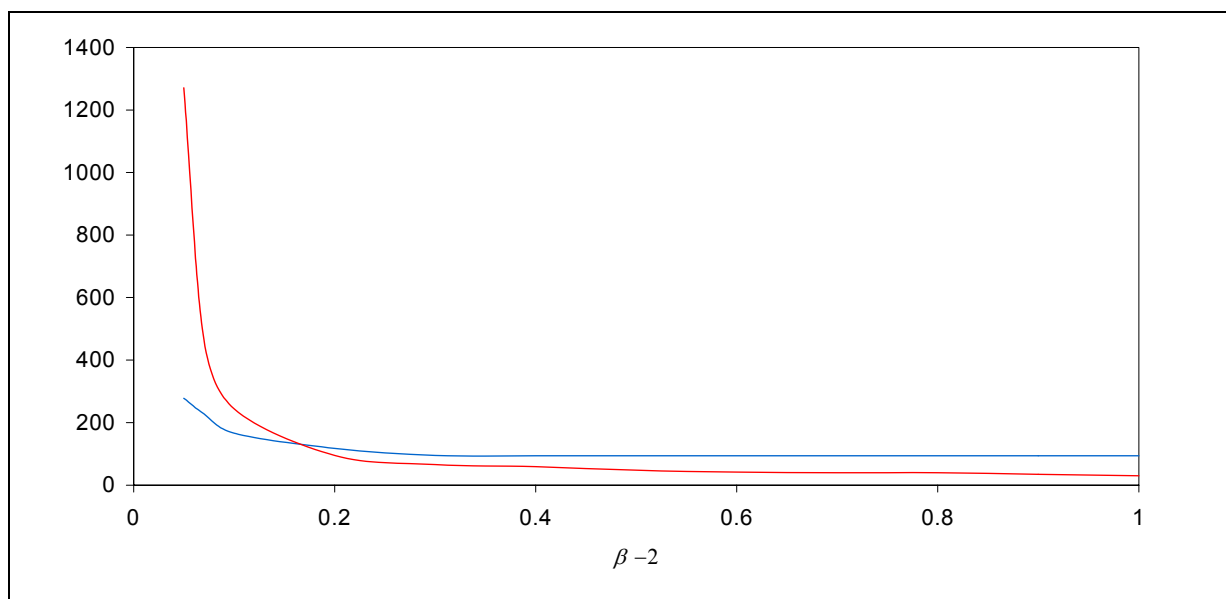
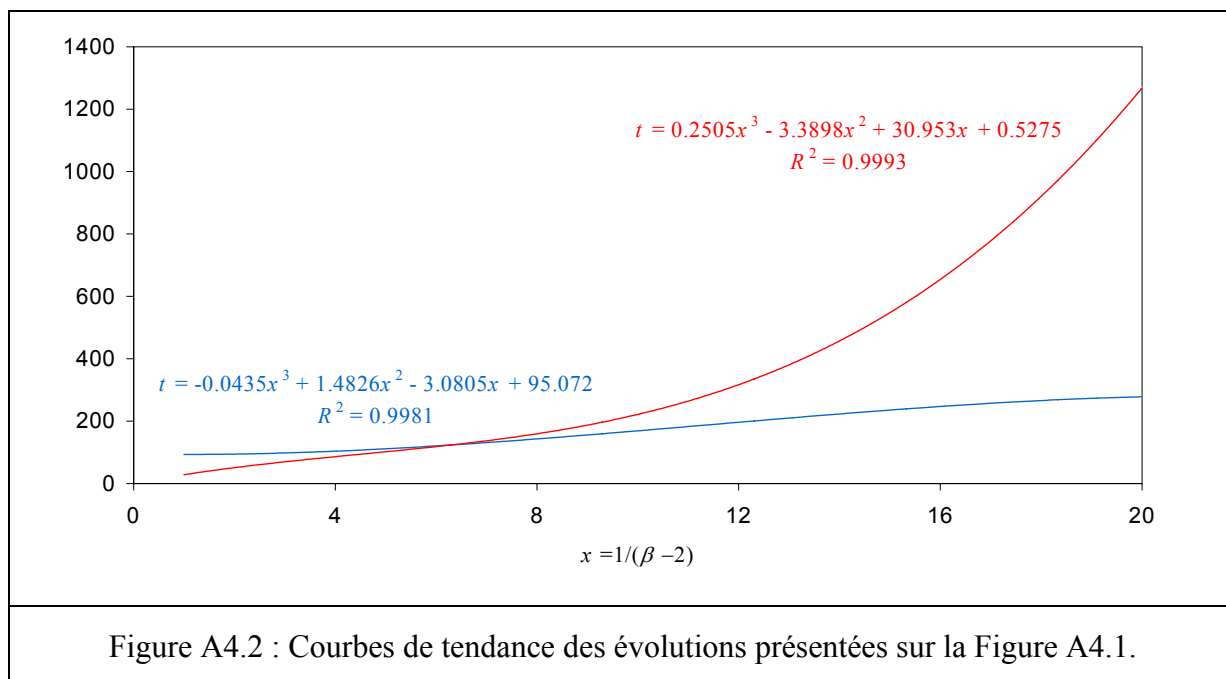


Figure A4.1 : Évolutions des temps de calcul (en secondes) en fonction de  $\beta - 2$  pour un réseau infini (en bleu) et un réseau limité (en rouge).



Pour  $\beta < 2,15$ , la comparaison des deux courbes indique que le calcul du spectre d'un réseau limité requiert plus de temps que dans le cas d'un réseau infini. La situation est inversée pour  $\beta > 2,15$  mais les calculs sont alors, dans les deux cas, des calculs (très) rapides. Ainsi, lorsque le nombre de diffuseurs est illimité, ces résultats illustrent la nécessité des remaniements, dans le deuxième chapitre, du formalisme de la diffusion multiple. L'exploitation de la périodicité du réseau permet en effet de rendre les calculs envisageables et, de surcroît, avec des temps de calcul très courts quelle que soit la distance considérée entre les diffuseurs. Pour une distance relativement faible, le calcul des spectres d'un réseau infini est même plus rapide que dans le cas d'un réseau composé uniquement de trois inclusions. Ces temps de calcul très courts s'expliquent, d'une part, par la réduction des dimensions des systèmes d'équations linéaires à résoudre (on passe d'un système tel que (1.34) au système (2.18)) et, d'autre part, par l'utilisation des expressions rapidement convergentes (données dans l'Annexe 3) des séries de Schlömilch.

Dans les troisième et quatrième chapitres, les réseaux 2-d sont composés, le plus souvent, de réseaux linéaires caractérisés par  $\beta = 3$ . Pour cette valeur de  $\beta$ , le temps de calcul d'un spectre d'un seul réseau linéaire est de l'ordre de la minute. C'est en définitive ce temps très court qui nous a permis d'envisager l'étude de réseaux 2-d, et notamment de réseaux 2-d aléatoires pour lesquels un nombre très important de tirages aléatoires a pu être effectué.

### **DIFFUSION PAR DES RÉSEAUX 2-D PÉRIODIQUES OU ALÉATOIRES : ANALYSE DES TEMPS DE CALCUL NUMÉRIQUE**

Cette annexe concerne les troisième et quatrième chapitres. Il s'agit de décrire brièvement les temps de calcul des coefficients de réflexion ou de transmission de réseaux 2-d périodiques (troisième chapitre) et des coefficients moyens de réseaux 2-d aléatoires (quatrième chapitre). Pour les réseaux 2-d périodiques, les temps de calcul sont donnés en fonction du nombre de réseaux linéaires pris en compte. Pour les réseaux 2-d aléatoires, le nombre de réseaux linéaires est fixé. Les temps de calcul sont alors donnés en fonction du nombre de tirages aléatoires effectués. Les réseaux linéaires sont caractérisés, dans les deux cas, par  $\beta=3$  (où  $a=1$  mm). Les temps présentés sont ceux chronométrés pour le calcul des spectres de réflexion  $L \rightarrow L$  dans le domaine fréquentiel  $0 < k_L \leq 1000$  (avec un pas de 1). Les réseaux sont excités en incidence normale.

#### **TEMPS DE CALCUL DES SPECTRES DE RÉSEAUX 2-D PÉRIODIQUES**

La Figure A5.1 ci-dessous donne l'évolution des temps de calcul des spectres d'un réseau 2-d périodique en fonction du nombre de réseaux linéaires considéré (de 1 à 100000).

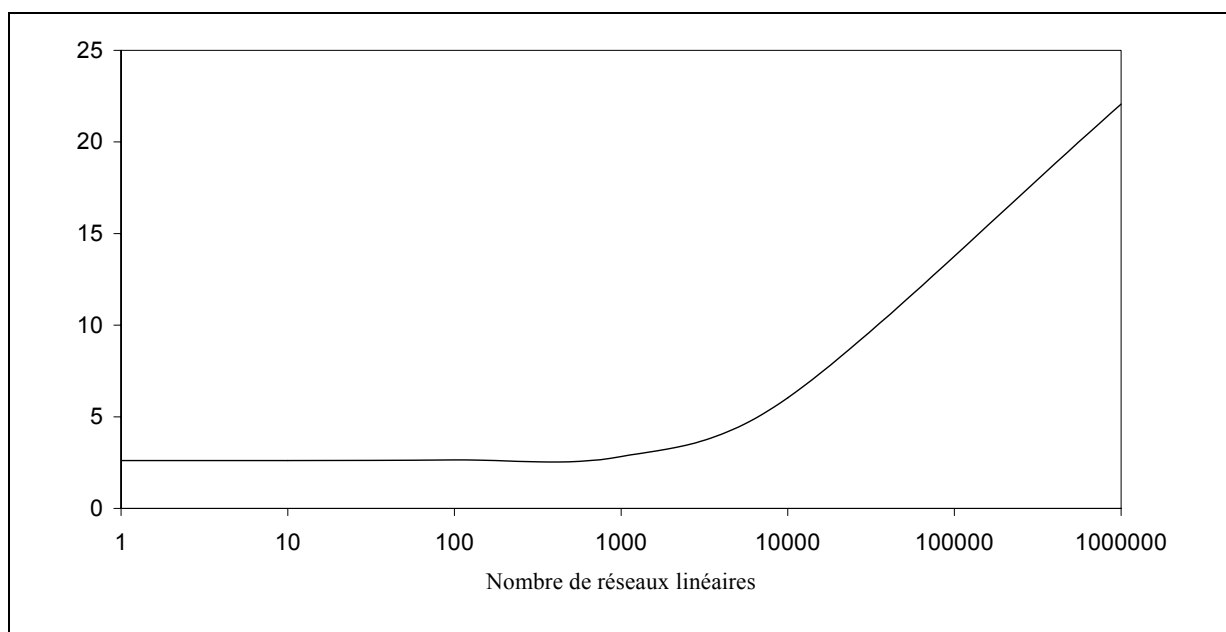


Figure A5.1 : Évolution des temps de calcul (en minutes) des spectres de réflexion d'un réseau 2-d périodique en fonction du nombre de réseaux linéaires.

La courbe de la Figure A5.1 indique que les temps de calcul restent relativement constants et faibles (inférieurs à 3 min) lorsque les réseaux 2-d ne contiennent pas plus de 1000 réseaux linéaires. L'algorithme itératif exposé dans le troisième chapitre est en effet une méthode de calcul très rapide, de sorte que les temps de calculs sont presque identifiables à ceux chronométrés pour le calcul du spectre d'un seul réseau linéaire. Il faut préciser que si les temps de calcul sont relativement courts, c'est parce que les réseaux 2-d sont constitués de réseaux linéaires tous identiques. Dans le cas contraire, il faut calculer autant de coefficients de réflexion et de transmission qu'il y a de réseaux linéaires, ce qui augmente très significativement les temps de calcul. Ici, on constate que les temps de calcul croissent de façon importante quand le nombre de réseaux linéaires dépasse 1000. Cette évolution a conditionné notre choix, dans le quatrième chapitre, quant au nombre de réseaux linéaires à prendre en compte pour le calcul des coefficients de réflexion et de transmission moyens. En effet, étant donné le nombre de tirages aléatoires à réaliser pour obtenir des moyennes satisfaisantes (10000 tirages), il fallait que les temps de calcul des coefficients pour un seul tirage soit aussi faible que possible, tout en conservant l'hypothèse fondamentale d'une « infinité » de réseaux linéaires (voir le paragraphe III.1.1 du quatrième chapitre et la discussion sur l'approximation de Foldy). En définitive, le nombre de réseaux linéaires a été choisi égal à 100 (pour 1000, les temps de calcul sont un peu plus longs que pour 100, de l'ordre de la minute, cette différence devenant très significative lorsqu'il s'agit de réaliser 10000 tirages aléatoires).

#### **TEMPS DE CALCUL DES SPECTRES MOYENS DE RÉSEAUX 2-D ALÉATOIRES**

La Figure A5.2 de la page suivante présente l'évolution des temps de calcul des spectres de réflexion moyens en fonction du nombre de tirages aléatoires. Le réseau 2-d aléatoire est composé de 100 réseaux linéaires. Pour 100, 1000 et 10000 tirages aléatoires, les trois spectres obtenus sont ceux présentés sur la Figure 4.3 (quatrième chapitre). Au vu de la Figure A5.2, on constate que les temps de calcul sont relativement courts pour un nombre de tirages aléatoires n'excédant pas 10000. Le calcul des spectres requiert au maximum deux heures et demie. Pour 10000 tirages, les résultats de la Figure 4.3 montrent que le moyennage est satisfaisant. Au-delà de 10000, les moyennages sont certes optimaux, mais les temps de calculs augmentent très significativement. Par exemple, pour 100000 tirages, l'obtention des spectres requiert près de 14 heures de calcul. Ces temps de calcul deviennent alors contraignants pour envisager des calculs systématiques. Pour conclure, il faut préciser que les temps de calcul



pour l'obtention des mêmes spectres en utilisant la théorie de Twersky sont de l'ordre de 3 minutes, c'est-à-dire à peu près le temps de calcul du spectre d'un seul réseau linéaire. Pour ce qui concerne le calcul numérique, c'est donc l'un des grands atouts de cette théorie.

